Continúe de esta manera hasta que `B` se encuentre en la forma escalonada reducida por renglones. Si cualquier elemento pivote es cero, será necesario realizar un intercambio de renglones multiplicando por la matriz elemental adecuada.

b) Encuentre `F*A` y `A*F` donde F es el producto de las matrices elementales usadas y A es la matriz original. ¿Qué le dice esto sobre la relación entre F y A? (justifique su respuesta).

c) Encuentre $\texttt{D=F1}^{-1}\texttt{*F2}^{-1}\texttt{*}\cdots\texttt{*Fm}^{-1}$, donde `F1` es la primera matriz elemental usada y `Fm` es la última matriz elemental usada. ¿Cuál es la relación entre `D` y `A`?

d) Repita de los incisos *a*) a *c*) para $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. ***a***) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Realice las operaciones por renglones haciendo uso de la multiplicación por matrices elementales que se describió en el problema 1 de esta sección, guardando los productos de las matrices elementales pero realizando únicamente operaciones con renglones de la forma $R_j \to R_j + cR_i$ hasta que A se reduzca a la forma triangular superior (no cree unos en las posiciones pivote). Dé a cada matriz elemental un nombre de variable y despliegue todas las que use y sus inversas. Llame U a la forma triangular superior, que es el resultado final, y F al producto de todas las matrices elementales utilizadas.

b) Encuentre $L = F1^{-1} * F2^{-1} * \ldots Fm^{-1}$, donde $F1$ es la primera matriz elemental usada y Fm la última. ¿Qué puede deducir acerca de la forma de L, los de las matrices elementales y los de las inversas de éstas? (analice los elementos y sus posiciones).

c) Verifique que $LU = A$ (asegúrese de que A sea la matriz original. Recuerde que U es el resultado final de la reducción). Pruebe que esto sea cierto.

d) Repita de los incisos *a*) a *c*) para $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 & 3 \\ 8 & 10 & 1 & 4 \\ 10 & 7 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$.

2.7 Factorizaciones *LU* de una matriz

En esta sección se muestra la forma en la cual se escribe una matriz cuadrada como un producto de una matriz triangular inferior (con diagonal principal de unos) por una matriz triangular superior. Esta factorización resulta útil para resolver sistemas lineales con una computadora y se puede utilizar para probar resultados importantes sobre matrices.

En la sección 1.2 se estudió la **eliminación gaussiana**. En ese proceso se puede reducir una matriz a la forma escalonada por renglones. Recuerde que la forma escalonada por renglones de una matriz cuadrada es una matriz triangular superior con unos y ceros en la diagonal principal. A manera de ejemplo, la forma escalonada por renglones de una matriz de 3×3 se ve como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o}$$