$$-2\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-6\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ y los vectores son linealmente dependientes.

Interpretación geométrica de la dependencia lineal en $\mathbb{R}^3$

En el ejemplo 5.4.3 se encontraron tres vectores en $\mathbb{R}^3$ que eran linealmente independientes. En el ejemplo 5.4.4 se encontraron tres vectores que eran linealmente dependientes. ¿Qué significado geométrico tiene esto?

Suponga que **u**, **v** y **w** son tres vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$. Se pueden tratar los vectores como si tuvieran un punto terminal en el origen. Entonces existen constantes c_1, c_2 y c_3, no todas cero, tales que

$$c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}+c_3\mathbf{w}=\mathbf{0} \qquad \textbf{(5.4.6)}$$

Suponga que $c_3 \neq 0$ (un resultado similar se cumple si $c_1 \neq 0$ o $c_2 \neq 0$). Entonces se pueden dividir ambos lados de (5.4.6) entre c_3 y reacomodar los términos para obtener

$$\mathbf{w}=-\frac{c_1}{c_3}\mathbf{u}=-\frac{c_2}{c_3}\mathbf{v}=A\mathbf{u}+B\mathbf{u}$$

donde $A=-c_1/c_3$ y $B=-c_2/c_3$. Ahora se demostrará que **u**, **v** y **w** son coplanares. Se calcula

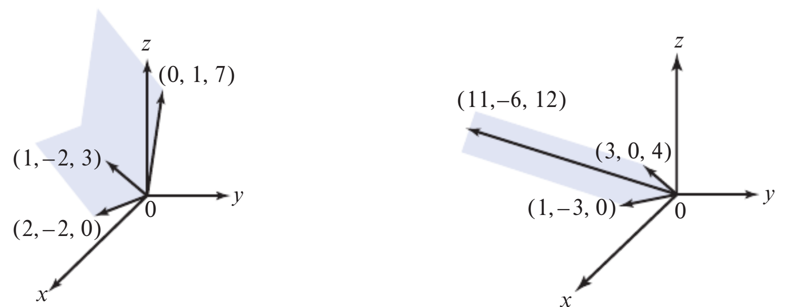
$$\begin{aligned}\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})&=(A\mathbf{u}\times B\mathbf{v})=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=A[\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})]+B[\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})]\\&=A\cdot 0+B\cdot 0=0\end{aligned}$$

porque **u** y **v** son ambos ortogonales a $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ (vea la página 260). Sea $\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. Si $\mathbf{n}=\mathbf{0}$, entonces por el teorema 4.4.2 parte vii) **u** y **v** son paralelos (y colineales). Así **u**, **v** y **w** están en cualquier plano que contiene tanto a **u** como a **v** y, por consiguiente son coplanares. Si $\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$, entonces **u** y **v** están en el plano que consiste en aquellos vectores que pasan por el origen que son ortogonales a **n**. Pero **w** está en el mismo plano porque $\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$. Esto muestra que **u**, **v** y **w** son coplanares.

En el problema 5.4.66 se pide al lector que demuestre que si **u**, **v** y **w** son coplanares, son linealmente dependientes. Se concluye que

> Tres vectores en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes si y sólo si son coplanares.

La figura 5.3 ilustra este hecho utilizando los vectores en los ejemplos 5.4.3 y 5.4.4.



a) Estos tres vectores son independientes y no coplanares

b) Estos tres vectores son independientes y coplanares

Figura 5.3

Dos conjuntos de tres vectores.

La teoría de sistemas homogéneos nos habla acerca de la dependencia o independencia lineal de los vectores.