Ejemplo 1 Sea D el rectángulo en el plano $\theta\phi$ definido por

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi,$$

y sea S la superficie definida por la parametrización $\mathbf{\Phi}\colon D \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad z = \cos\phi.$$

(θ y ϕ son los ángulos de las coordenadas esféricas y S es la esfera unidad parametrizada por $\mathbf{\Phi}$.) Sea $\mathbf{r}$ el vector posición $\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular $\iint_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$.

Solución En primer lugar calculamos

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_\theta &= (-\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\phi\cos\theta)\mathbf{j}\\ \mathbf{T}_\phi &= (\cos\theta\cos\phi)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta\cos\phi)\mathbf{j} - (\operatorname{sen}\phi)\mathbf{k},\end{aligned}$$

y por tanto

$$\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi = (-\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta)\mathbf{i} - (\operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} - (\operatorname{sen}\phi\cos\phi)\mathbf{k}.$$

A continuación evaluamos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\cdot(\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi) &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\cdot(\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi)\\ &= [(\cos\theta \operatorname{sen}\phi)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi)\mathbf{j} + (\cos\phi)\mathbf{k}]\\ &\quad\cdot(-\operatorname{sen}\phi)[(\operatorname{sen}\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\phi \operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} + (\cos\phi)\mathbf{k}]\\ &= (-\operatorname{sen}\phi)(\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\phi) = -\operatorname{sen}\phi.\end{aligned}$$

Luego,

$$\iint_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D -\operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi} (-2)\, d\theta = -4\pi.$$

▲

Orientación

Podemos establecer una analogía entre la integral de superficie $\iint_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ y la integral de línea $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$. Recordemos que la integral de línea es una integral orientada. La noción de orientación de una curva era necesaria para ampliar la definición de $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ a integrales de línea $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ sobre curvas orientadas. Ampliamos la definición de $\iint_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ a *superficies orientadas* de forma similar; es decir, dada una superficie S parametrizada por una aplicación $\mathbf{\Phi}$, queremos definir $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ y demostrar que es independiente de la parametrización, excepto posiblemente por el signo. Para conseguir esto, necesitamos la noción de orientación de una superficie.

Definición Superficies orientadas Una ***superficie orientada*** es una superficie con dos caras en la que se especifica una de ellas como la ***cara exterior*** o ***positiva*** y la otra como ***cara interior***

Continúa