Por ejemplo, si el campo vectorial es el campo de velocidades de un fluido (quizá el campo de velocidades de un río) y colocamos una superficie matemática imaginaria en el fluido, podemos plantearnos esta pregunta: "¿Cuál es la tasa con la que el fluido atraviesa la superficie dada (medida, por ejemplo, en metros cúbicos por segundo)?". La respuesta viene dada por la integral de superficie del campo vectorial de velocidades del fluido sobre la superficie.

Volveremos sobre la interpretación física enseguida y la explicaremos en función de la definición formal que proporcionamos en primer lugar.

Definición de integral de superficie

Definimos ahora la integral de un campo vectorial, denotado por $\mathbf{F}$, sobre una superficie S. En primer lugar, proporcionaremos la definición y después su interpretación física. Podemos usar esta como una *motivación* para la definición si así lo deseamos. Comenzaremos con una superficie parametrizada $\mathbf{\Phi}$ y más tarde estudiaremos la independencia de la parametrización.

Definición Integral de superficie de un campo vectorial Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial definido sobre S, la imagen de una superficie parametrizada $\mathbf{\Phi}$. La ***integral de superficie*** de $\mathbf{F}$ sobre $\mathbf{\Phi}$, denotada por

$$\iint_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

se define mediante (véase la Figura 7.6.1)

$$\iint_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{D} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\, du\, dv.$$

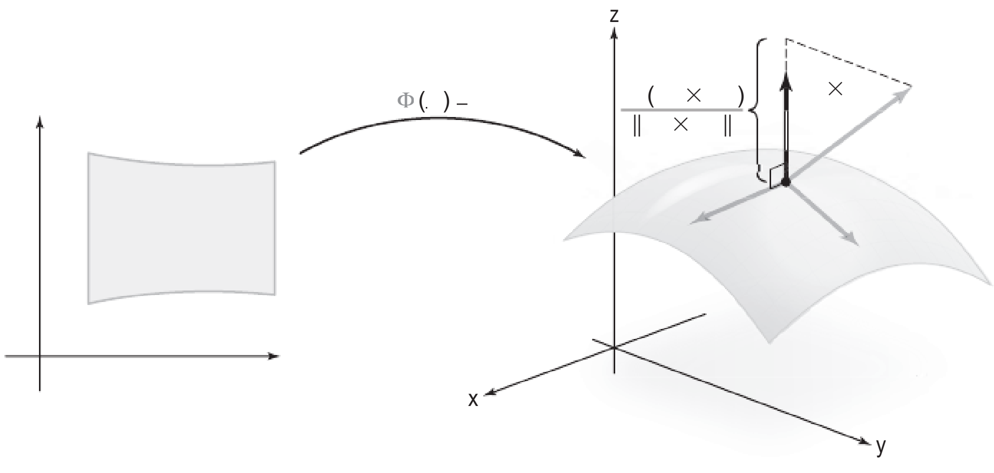

Figura 7.6.1 Significado geométrico de $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)$.