10. Investigar si se puede o no despejar x, y, z en términos de u, v, w cerca de $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ en el sistema

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= x + xyz \\ v(x, y, z) &= y + xy \\ w(x, y, z) &= z + 2x + 3z^2 \end{aligned}$$

11. Considérese $f(x, y) = ((x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), xy/(x^2 + y^2))$. ¿Tiene esta aplicación de $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ en $\mathbb{R}^2$ una inversa local cerca de $(x, y) = (0, 1)$?

12. (a) Definimos $x: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante $x(r, \theta) = r \cos \theta$ y definimos $y: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante $y(r, \theta) = r \operatorname{sen} \theta$. Demostrar que

$$\left. \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right|_{(r_0, \theta_0)} = r_0.$$

(b) ¿Cuándo se puede formar una función inversa suave $(r(x, y), \theta(x, y))$? Comprobarlo directamente y con el teorema de la función inversa.

(c) Considérense las siguientes transformaciones para coordenadas esféricas (véase la Sección 1.4):

$$\begin{aligned} x(\rho, \phi, \theta) &= \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ x(\rho, \phi, \theta) &= \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z(\rho, \phi, \theta) &= \rho \cos \phi. \end{aligned}$$

Demostrar que el determinante jacobiano está dado por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \operatorname{sen} \phi.$$

(d) ¿Cuándo se puede despejar (ρ, ϕ, θ) en términos de (x, y, z)?

13. Sea (x_0, y_0, z_0) un punto del lugar geométrico definido por $z^2 + xy - a = 0, z^2 + x^2 - y^2 - b = 0$, donde a y b son constantes.

(a) ¿Bajo qué condiciones se puede representar la parte de este lugar geométrico que está cerca de (x_0, y_0, z_0) en la forma $x = f(z), y = g(z)$?

(b) Calcular $f'(z)$ y $g'(z)$.

14. Considérese la esfera unidad S dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. S interseca el eje x en dos puntos. ¿Qué variables se pueden despejar para estos puntos? ¿Qué ocurre con los puntos de intersección de S con los ejes y y z?

15. Sea $F(x, y) = x^3 - y^2$ y sea C la curva de nivel dada por $F(x, y) = 0$.

(a) Sin utilizar el teorema de la función implícita, demostrar que C se puede describir como la gráfica de x como función de y cerca de cualquier punto.

(b) Demostrar que $F_x(0, 0) = 0$. ¿Contradice esto al teorema de la función implícita?

16. Considérese el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^5 v^2 + 2y^3 u &= 3 \\ 3yu - xuv^3 &= 2. \end{aligned}$$

Demostrar que cerca del punto $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$, este sistema define u y v implícitamente como funciones de x e y. Para tales funciones locales u y v, definimos la función local f como $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Determinar $Df(1, 1)$.

17. Considérense las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 &= 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 &= 0. \end{aligned}$$

(a) Demostrar que estas ecuaciones determinan funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ cerca del punto $(x, y, u, v) = (2, -1, 2, 1)$.

(b) Calcular $\frac{\partial u}{\partial x}$ en $(x, y) = (2, -1)$.

18. ¿Es posible despejar $u(x, y, z), v(x, y, z)$ en el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} xy^2 + xzu + yv^2 &= 3 \\ u^3 yz + 2xv - u^2 v^2 &= 2 \end{aligned}$$

cerca de $(x, y, z) = (1, 1, 1), (u, v) = (1, 1)$? Calcular $\partial v / \partial y$ en $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

19. El problema de factorizar un polinomio $x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ en factores lineales es, en cierto sentido, un problema de "función inversa". Los coeficientes a_i se pueden interpretar como funciones de las n raíces r_j. Deseamos expresar las raíces como funciones de los coeficientes en alguna región. Con $n = 3$, aplicar el teorema de la función inversa a este problema y establecer lo que dice sobre la posibilidad de hacer lo que estamos planteando.