$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -240e^{t} - 30e^{4t} \\ -480e^{t} + 30e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80e^{t} + 10e^{4t} \\ 160e^{t} - 10e^{4t} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, después de 6 meses $\left(t = \frac{1}{2} \text{ año}\right)$, $x_1(t) = 80e^{\frac{1}{2}} + 10e^{2} \simeq 206$ individuos, mientras que $x_2(t) = 160e^{\frac{1}{2}} - 10e^{2} \simeq 190$ individuos. De manera más significativa, $160e^{t} - 10e^{4t} = 0$ cuando $16e^{t} = e^{4t}$ o $16 = e^{3t}$ o $3t = \ln 16$ y $t = \frac{\ln 16}{3} \approx \frac{2.77}{3} \approx 0.92$ años ≈ 11 meses. Así, la segunda especie estará eliminada después de sólo 11 meses aunque comenzó con una población mayor. En los problemas 8.7.13 y 8.7.14 se pide al lector que demuestre que ninguna población sería eliminada si $x_2(0) = 2x_1(0)$ y la primera población quedaría eliminada si $x_2(0) > 2x_1(0)$. De esta manera, como ya lo sabía Darwin, la supervivencia en este modelo simplificado depende de los tamaños relativos de las especies en competencia cuando la competencia comienza.

EJEMPLO 8.7.4 Un modelo depredador-presa

Se considera el siguiente sistema en el que la especie 1 es la presa y la especie 2 el depredador:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) - 4x_2(t) \end{aligned}$$

Encuentre las poblaciones de las dos especies para $t > 0$ si las poblaciones iniciales son $x_1(0) = 500$ y $x_2(0) = 100$.

SOLUCIÓN ► En este caso $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, y el único valor característico es $\lambda = 3$ con un solo vector característico $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Una solución para la ecuación $(A - 3I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ (vea el teorema 8.6.2), es $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Entonces

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (del ejemplo 8.7.2)}$$

y

$$e^{At} = Ce^{Jt}C^{-1} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-t & 1-t \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}$$

Así, la solución al sistema es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{At}\mathbf{x}_0 = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 500 \\ 100 \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 500 - 600t \\ 100 + 600t \end{pmatrix}$$

Es evidente que la especie presa será eliminada después de $\frac{5}{6}$ años $= 10$ meses, aun cuando comenzó con una población cinco veces mayor que la especie depredadora. De hecho, es sencillo demostrar (vea el problema 8.7.15) que no importa qué tan grande sea la ventaja inicial de la especie presa, siempre será eliminada en menos de un año.