SOLUCIÓN ► Haciendo uso de las propiedades de los determinantes, se calcula det $A = -1 \neq 0$ y por tanto A^{-1} existe. Por el ejemplo 3.3.2 se tiene

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Así

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Nota 1. Como ya se habrá observado, si $n > 3$, por lo general es más fácil calcular A^{-1} con la reducción por renglones que utilizando adj A; aun para el caso de 4×4 es necesario calcular 17 determinantes de 3×3 (16 para la adjunta de A más det A). Sin embargo, el teorema 3.3.3 es de suma importancia ya que, antes de hacer la reducción por renglones, el cálculo de det A (si se puede hacer fácilmente) dice si A^{-1} existe o no existe.

Nota 2. En muchas aplicaciones de la teoría de matrices, las matrices están dadas en forma simbólica (es decir, en términos de variables) en lugar de numérica. Por ejemplo, se puede tener $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ en lugar de $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Así, la mejor forma de proceder será considerando muchas veces el cálculo de los determinantes. Esto es particularmente cierto en algunas aplicaciones de ingeniería, como la teoría de control.

En la sección 2.6 se presentó el teorema de resumen (teoremas 1.1.1, 2.4.7, 2.6.4 y 2.7.4). Éste es el teorema que une muchos conceptos desarrollados en los primeros capítulos de este libro.

Teorema 3.3.4 Teorema de resumen (punto de vista 5)

Sea A una matriz de $n \times n$. Las siguientes siete afirmaciones son equivalentes. Es decir, cada una implica a las otras seis (de manera que si una es cierta, todas lo son).

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector de dimensión n $\mathbf{b}$.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.

v) A es el producto de matrices elementales.

vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii) det $A \neq 0$.

En el teorema 2.4.7 se demostró la equivalencia de los incisos i), ii), iii), iv) y vi). En el teorema 2.6.3 se demostró la equivalencia de los incisos i) y v). El teorema 3.3.1 (o teorema 3.5.2) demuestra la equivalencia de i) y vii).