*e*) $[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3] = B_4$, donde $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es la base obtenida al aplicar el proceso de Gram-Schmidt a $\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}\right\}$.

**11.** *a*) Verifique que cada una de las siguientes matrices es ortogonal. $B_1B_2$, $B_1B_3$, $B_2B_4$ y $B_3B_4$, donde $B_1$, $B_2$, $B_3$ y $B_4$ son las matrices del problema 10 anterior.

*b*) (*Lápiz y papel*) Trabaje el problema 16 de esta sección de MATLAB.

**12.** *a*) Encuentre la inversa de cada matriz en el problema 10 anterior y verifique que las inversas son ortogonales.

*b*) (*Lápiz y papel*) Pruebe que la inversa de una matriz ortogonal es una matriz ortogonal.

**13.** *a*) Encuentre el determinante de cada matriz en el problema 10. Formule una conclusión sobre el determinante de una matriz ortogonal.

*b*) (*Lápiz y papel*) Pruebe su conclusión.

*c*) Revise (o resuelva) el problema 2 de MATLAB 4.4. Suponga que **u**, **v** y **w** son vectores en $\mathbb{R}^3$ que forman un paralelepípedo. Si $Q$ es una matriz ortogonal de $3 \times 3$, explique por qué $Q\mathbf{u}$, $Q\mathbf{v}$ y $Q\mathbf{w}$ forman un paralelepípedo con el mismo volumen que el formado por **u**, **v** y **w**.

**14. Matrices ortogonales: longitud y ángulo** Recuerde que si $\theta$ es el ángulo entre **u** y **w**, entonces $\cos(\theta) = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{u}||\mathbf{w}|}$.

*a*) Sea $Q$ la matriz ortogonal $B_1$ en el problema 10 anterior. Elija dos vectores aleatorios **u** y **w**. Calcule y compare la longitud de **v** y la longitud de $Q\mathbf{v}$. Calcule y compare el coseno del ángulo entre **v** y **w** y el coseno del ángulo entre $Q\mathbf{v}$ y $Q\mathbf{w}$. Repita para un total de tres pares de vectores elegidos **v** y **w**.

*b*) Repita el inciso *a*) para otra matriz ortogonal del problema 10. Repita el inciso *a*) para `Q = orth(2*rand(5)-1)` (verifique primero que esta $Q$ es ortogonal). Escriba una interpretación de sus observaciones de los incisos *a*) y *b*).

*c*) Sea `Q = orth(2*rand(6)-1)`. Verifique que $Q$ es una matriz ortogonal y por ende que las columnas de $Q$ forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^6$.

Sean **x** y **z** dos vectores aleatorios de $6 \times 1$. Encuentre **xx**, las coordenadas de **x** respecto a la base dada por las columnas de $Q$. Encuentre **zz**, las coordenadas de **z** respecto a esta misma base.

Compare $|\mathbf{x} - \mathbf{z}|$ con $|\mathbf{xx} - \mathbf{zz}|$. Repita para otro par de vectores **x** y **z** y describa sus observaciones.

*d*) El inciso *c*) tiene algunas ramificaciones importantes. En cualquier cálculo o medición se introducen errores. Un aspecto importante al diseñar algortimos numéricos hace referencia a los errores compuestos o acumulados. Se puede interpretar $|\mathbf{x} - \mathbf{z}|$ como un error; por ejemplo, **x** puede representar los valores teóricos y **z** una aproximación. Explique cómo puede verse en las observaciones del inciso *c*) que el cambio del proceso a las coordenadas de una base ortonormal no acumula (incrementa) un error que ya está presente. ¿Por qué el cambio de regreso a coordenadas estándar tampoco aumenta el error?

*e*) (*Lápiz y papel*) Si $Q$ es una matriz ortogonal y **v** y **w** son vectores, pruebe que $Q\mathbf{v}\cdot Q\mathbf{w} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$. Utilice esta demostración para probar que $|Q\mathbf{v}| = |\mathbf{v}|$ y que el coseno del ángulo entre $Q\mathbf{v}$ y $Q\mathbf{w}$ es igual al coseno del ángulo entre **v** y **w**.

*f*) (*Lápiz y papel*) Pruebe sus observaciones en el inciso *c*) (explique primero por qué al encontrar las coordenadas de un vector **x** respecto a las columnas de $Q$ se obtiene lo mismo que al multiplicar **x** por una matriz ortogonal).