Ejemplo 1 Calcular la divergencia de

$$\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}.$$

Solución

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = 2xy + 0 + xy = 3xy \qquad \blacktriangle$$

Interpretación

La divergencia tiene una importante interpretación física. Si imaginamos que $\mathbf{F}$ es el campo de velocidades de un gas (o de un fluido), entonces div $\mathbf{F}$ *representa la tasa de expansión por unidad de volumen bajo el flujo del gas (o fluido)*. Si div $\mathbf{F} < 0$, el gas (o fluido) se está *comprimiendo*. Para un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ en el plano, la *divergencia*

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

mide la tasa de expansión del área.

Esta interpretación se explica gráficamente como sigue. Elegimos una pequeña región W alrededor de un punto $\mathbf{x}_0$. Para cada punto $\mathbf{x}$ de W, sea $\mathbf{x}(t)$ la línea de flujo que sale de $\mathbf{x}$. El conjunto de puntos $\mathbf{x}(t)$ describe cómo fluye el conjunto W después de un tiempo t (véase la Figura 4.4.1).

Denotamos $W(t)$ a la región resultante después de transcurrido un tiempo t y sea $\mathcal{V}(t)$ su volumen (o su área en dos dimensiones). Entonces la tasa relativa de variación del volumen es la divergencia; de forma más precisa,

$$\frac{1}{\mathcal{V}(0)} \frac{d}{dt}\mathcal{V}(t)\bigg|_{t=0} \approx \text{ div } \mathbf{F}(\mathbf{x}_0),$$

donde la aproximación se hace más exacta cuando W se contrae a $\mathbf{x}_0$. Una demostración de esta propiedad se proporciona en el Capítulo 8 dando un argumento más natural, en el contexto de los teoremas sobre integrales del cálculo vectorial.

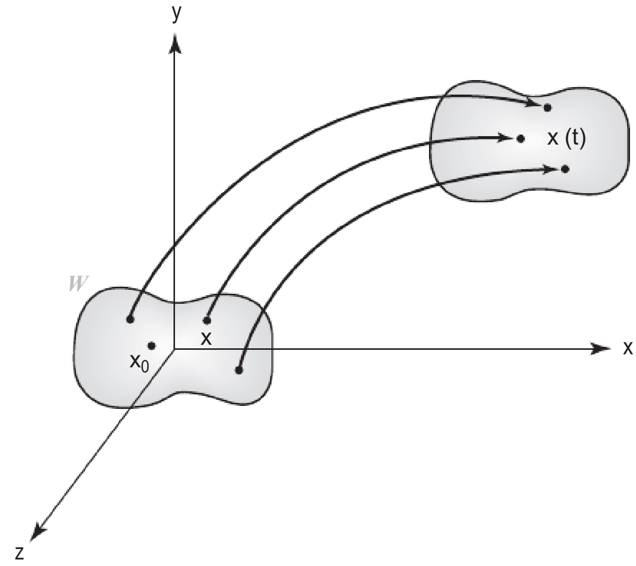

Figura 4.4.1 Cómo fluye una región W a lo largo de las líneas de flujo de un campo vectorial.