y $z \to 0$ (¿Por qué?). Multiplicando por z la ecuación que define S, obtenemos la ecuación $xyz + xz^2 + yz^2 = 5z \to 0$ cuando $x \to \infty$. Como $x, y, z \geq 0, xyz = f(x, y, z) \to 0$. De forma similar, $f(x, y, z) \to 0$ si y o z tienden a ∞. Por tanto, tiene que existir una caja de volumen máximo.

Algunas directrices de carácter general pueden resultar útiles para los problemas de máximos y mínimos con restricciones. En primer lugar, si la superficie S está acotada (como, por ejemplo, un elipsoide), entonces f debe tener un máximo y un mínimo en S. (Véase el Teorema 7 en la sección anterior.) En particular, si f solo tiene dos puntos que satisfacen las condiciones del teorema de los multiplicadores de Lagrange o el Teorema 9, entonces uno de ellos debe ser un punto de máximo y el otro un punto de mínimo. Evaluando f en cada punto veremos cuál es el máximo y cuál el mínimo. Sin embargo, si existen más de dos de estos puntos, algunos pueden ser puntos de silla. Asimismo, si S no está acotada (por ejemplo, si se trata de un hiperboloide), entonces f no tiene necesariamente máximos o mínimos.

Varias restricciones

Si una superficie S está definida por una serie de restricciones, en concreto,

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1 \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) = c_2 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \ldots, x_n) = c_k \end{array}\right\}, \tag{4}$$

entonces el teorema de los multiplicadores de Lagrange se puede generalizar como sigue: *si f tiene un máximo o un mínimo en $\mathbf{x}_0$ sobre S, deben existir constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tales que*[11]

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{x}_0). \tag{5}$$

Este caso se puede demostrar generalizando el método utilizado para probar el teorema de los multiplicadores de Lagrange. Vamos a ver un ejemplo de cómo se utiliza esta formulación más general.

Ejemplo 5 Hallar los extremos de $f(x, y, z) = x+y+z$ sujeta a estas dos condiciones: $x^2 + y^2 = 2$ y $x + z = 1$.

Solución Aquí tenemos dos restricciones:

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad \text{y} \quad g_2(x, y, z) = x + z - 1 = 0.$$

[11] Al igual que con la hipótesis $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ en el teorema de los multiplicadores de Lagrange, aquí tenemos que suponer que los vectores $\nabla g_1(\mathbf{x}_0), \ldots, \nabla g_k(\mathbf{x}_0)$ son linealmente independientes; es decir, ningún $\nabla g_i(\mathbf{x}_0)$ es una combinación lineal de los otros $\nabla g_j(\mathbf{x}_0), j \neq i$.