Si $f|S$ tiene un máximo en $\mathbf{x}_0$, entonces $f(\mathbf{c}(t))$ tiene un máximo en $t = 0$. Como sabemos por el cálculo de una variable, $df(\mathbf{c}(t))/dt|_{t=0} = 0$. Así, por la regla de la cadena,

$$0 = \frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t))\Big|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{c}'(0).$$

Por tanto, $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular a la tangente a cualquier curva en S y por tanto es perpendicular a todo el espacio tangente a S en $\mathbf{x}_0$. Dado que el espacio perpendicular a este espacio tangente es una recta, $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ y $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ son paralelos. Puesto que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$, se deduce que $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es un múltiplo de $\nabla g(\mathbf{x}_0)$, que es la conclusión del teorema. ■

Extraigamos algo de geometría de esta demostración.

Teorema 9 Si f, cuando se restringe a una superficie S, tiene un máximo o un mínimo en $\mathbf{x}_0$, entonces $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular a S en $\mathbf{x}_0$ (véase la Figura 3.4.2).

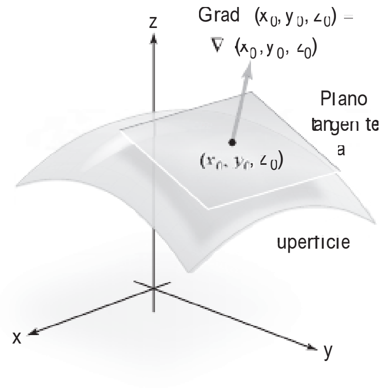

Figura 3.4.2 Geometría de los extremos condicionados.

Estos resultados nos dicen que, para determinar los extremos condicionados de f, tenemos que buscar entre aquellos puntos $\mathbf{x}_0$ que satisfacen las conclusiones de estos dos teoremas. Proporcionaremos varios ejemplos de cómo utilizar cada uno de ellos.

Cuando se usa el método del Teorema 8, debemos buscar un punto $\mathbf{x}_0$ y una constante λ, llamada ***multiplicador de Lagrange***, tal que $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$. Este método es de naturaleza más analítica que el método geométrico del Teorema 9. Sorprendentemente, Euler introdujo estos multiplicadores en 1744, ¡unos 40 años antes que Lagrange!

La Ecuación (1) dice que las derivadas parciales de f son proporcionales a las de g. Determinar los puntos $\mathbf{x}_0$ en los que esto sucede significa resolver, para $x_1, \dots, x_n$ y λ, las ecuaciones simultáneas

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \\ g(x_1, \dots, x_n) &= c \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Otra forma de considerar estas ecuaciones es la siguiente: pensamos en λ como en una variable adicional y formamos la función auxiliar

$$h(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda[g(x_1, \dots, x_n) - c].$$

El teorema de los multiplicadores de Lagrange dice que para hallar los extremos de $f|S$, debemos examinar los puntos críticos de h.