Los métodos para calcular inversas se estudian en álgebra lineal; en este libro no se requieren estos métodos. Si A es invertible, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ se puede resolver y despejar el vector $\mathbf{x}$ multiplicando ambos lados por A^{-1} para obtener[6] $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$.

En la Sección 1.3 hemos definido el determinante de una matriz 3×3. Este se puede generalizar por inducción a determinantes $n \times n$. Mostramos aquí cómo escribir el determinante de una matriz 4×4 en función de los determinantes de matrices 3×3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

[Véase la fórmula (2) de la Sección 1.3; los signos se alternan $+, -, +, -$].

Las propiedades básicas de los determinantes 3×3 que se repasaron en la Sección 1.3 siguen siendo válidos para los determinantes de matrices $n \times n$. En particular, observemos que si A es una matriz $n \times n$ y B es la matriz formada al sumar un múltiplo escalar de una fila (o columna) de A a otra fila (o columna, respectivamente) de A, entonces el determinante de A es igual al determinante de B (véase el Ejemplo 10).

Un teorema básico del álgebra lineal establece que una matriz $n \times n$ A es invertible si y solo si el determinante de A es distinto de cero. Otra propiedad básica es que el determinante es multiplicativo: det $(AB) =$ (det A)(det B). En este texto, no vamos a emplear demasiada álgebra lineal, por lo que no vamos a demostrar estas afirmaciones.

Ejemplo 10 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hallar det A. ¿Tiene A inversa?

Solución Sumando $(-1) \times$ primera columna a la tercera columna, tenemos

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

[6] De hecho, la regla de Cramer de la Sección 1.3 proporciona un método para invertir matrices. Otros métodos más eficientes desde el punto de vista numérico, basados en métodos de eliminación, se estudian en álgebra lineal o ciencias de la computación.