b) (*Lápiz y papel*) Suponga que Y es una matriz como la obtenida en el inciso *a*) i) para un ángulo θ, R es una matriz como la obtenida en el inciso *a*) ii) para un ángulo α, y P es una matriz como la obtenida en el inciso *a*) iii) para un ángulo φ.

Las matrices Y, R y P para cualesquiera tres ángulos tienen interpretaciones geométricas similares a la de una matriz de rotación en $\mathbb{R}^2$. Sea M cualquiera de estas matrices de rotación. Sea $\mathbf{u} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$. Entonces $\mathbf{r} = M\mathbf{u}$ dará las coordenadas estándar del vector obtenido al rotar el vector **u**.

Haciendo uso de esta interpretación geométrica, explique por qué la matriz YR representa una rotación positiva un ángulo α alrededor del eje x seguida de la rotación positiva un ángulo θ alrededor del eje z.

¿Qué matriz representará una rotación positiva un ángulo θ alrededor del eje z seguida de una rotación positiva un ángulo α alrededor del eje x? ¿Puede esperarse que esta matriz dé el mismo resultado que la matriz del párrafo anterior? ¿Por qué?

c) Las rotaciones de las que se ha hablado son de utilidad para describir la **posición** de una nave espacial (o un avión). La posición es la orientación rotacional de la nave alrededor de su centro. Aquí se supone que la nave tiene un conjunto de ejes a través de su centro de masa tales que los ejes x y y forman un ángulo recto (como un eje que va de atrás hacia adelante de la nave y el otro de lado a lado) y el eje z es perpendicular a los ejes x y y para formar un sistema de la mano derecha.

Se pueden hacer correcciones a la posición realizando rotaciones, como las descritas en el inciso *a*). Sin una forma de control de posición un satélite comienza a girar. Una rotación alrededor del eje z se denomina maniobra de **desviación**, una rotación alrededor del eje x se denomina maniobra de **giro**, y una rotación del eje y se denomina maniobra de **inclinación**.

Suponga que el conjunto de ejes de la nave está alineado inicialmente con un sistema de referencia fijo (ejes que representan una base canónica). La posición de la nave puede darse mediante una matriz cuyas columnas son vectores unitarios en las direcciones de los ejes asociados con la nave.

i) Encuentre la matriz que representa la posición de la nave después de realizar una maniobra de inclinación con un ángulo $\frac{\pi}{4}$, seguida de una maniobra de giro con un ángulo de $\frac{-\pi}{3}$, y después una maniobra de desviación con un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.

ii) Realice las mismas maniobras en diferente orden y compare las posiciones (describa el orden de las maniobras).

iii) Repita para otro conjunto de ángulos para cada tipo de maniobra, es decir, encuentre las posiciones derivadas de realizar las maniobras en dos órdenes distintos (describiendo los órdenes) y compare dichas posiciones.

d) Suponga que dos satélites con diferentes posiciones deben transferir información entre sí. Cada satélite registra la información en términos de su sistema de coordenadas; es decir, registra la información como coordenadas referidas a la base de los vectores unitarios que definen su sistema de ejes. Además del ajuste por localización (que es simplemente una traslación), la transferencia de información requiere del uso de una matriz de transición de las coordenadas de un satélite a las coordenadas del otro.

i) Considere que la orientación de una nave es la dada en el inciso *c*) i) y la orientación de la otra es la dada en el inciso *c*) ii). Suponga que la primera nave registra la localización de un objeto como `p=[0.2;0.3;-1]`. Traduzca esta información al sistema de coordenadas de la segunda nave. Verifique el resultado encontrando las coordenadas estándar del objeto con la lectura de la primera nave y después encontrando las coordenadas estándar del objeto con la lectura ajustada de la segunda nave.