Por tanto, tenemos que encontrar x, y, z, λ_1 y λ_2 tales que

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z),$$
$$g_1(x,y,z) = 0, \quad \text{y} \quad g_2(x,y,z) = 0.$$

Calculando los gradientes e igualando las componentes, obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 \cdot 1, \\ 1 &= \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 \cdot 0, \\ 1 &= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1, \\ x^2 + y^2 &= 2, \quad \text{y} \quad x + z = 1. \end{aligned}$$

Estas son cinco ecuaciones para x, y, z, λ_1 y λ_2. De la tercera ecuación, $\lambda_2 = 1$, y por tanto $2x\lambda_1 = 0, 2y\lambda_1 = 1$. Dado que la segunda implica $\lambda_1 \neq 0$, tenemos que $x = 0$. Por tanto, $y = \pm\sqrt{2}$ y $z = 1$. Así, los posibles puntos de extremo son $(0, \pm\sqrt{2}, 1)$. Por inspección, vemos que $(0, \sqrt{2}, 1)$ da un máximo relativo y $(0, -\sqrt{2}, 1)$ un mínimo relativo.

La condición $x^2 + y^2 = 2$ implica que x e y tienen que estar acotadas. La condición $x + z = 1$ implica que z también está acotada. Se deduce que el conjunto restringido S es cerrado y está acotado. Por el Teorema 7 se sigue que f tiene un máximo y un mínimo en S que se deben alcanzar por tanto en $(0, \sqrt{2}, 1)$ y $(0, -\sqrt{2}, 1)$, respectivamente. ▲

El método de los multiplicadores de Lagrange nos proporciona otra herramienta para localizar los máximos y mínimos absolutos de funciones diferenciables en regiones acotadas de $\mathbb{R}^2$ (véase la estrategia para determinar máximos y mínimos absolutos en la Sección 3.3).

Ejemplo 6 Determinar el máximo absoluto de $f(x,y) = xy$ en el disco unidad D, donde D es el conjunto de puntos (x,y) con $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solución Por el Teorema 7 de la Sección 3.3, sabemos que existe el máximo absoluto. En primer lugar, hallamos todos los puntos críticos de f en U, el conjunto de puntos (x,y) con $x^2 + y^2 < 1$. Dado que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x,$$

(0, 0) es el único punto crítico de f en U. Consideremos ahora f en la circunferencia unidad, la curva de nivel $g(x,y) = 1$, donde $g(x,y) = x^2 + y^2$. Para localizar el máximo y el mínimo de f en C, escribimos las ecuaciones de los multiplicadores de Lagrange: $\nabla f(x,y) = (y,x) = \lambda \nabla g(x,y) = \lambda(2x, 2y)$ y $x^2 + y^2 = 1$. Reescribiendo estas ecuaciones componente a componente, tenemos

$$\begin{aligned} y &= 2\lambda x, \\ x &= 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$