el caso $m = 2$. Ahora suponga que el teorema se cumple para $m = k$. Esto es, se supone que k vectores característicos correspondientes a valores característicos distintos son linealmente independientes. Ahora se prueba el teorema para $m = k + 1$. Así que se supone que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0} \tag{8.1.7}$$

Multiplicando ambos lados de (8.1.7) por A y usando el hecho de que $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ se obtiene

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\lambda_k\mathbf{v}_k + c_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0} \tag{8.1.8}$$

Se multiplican ambos lados de (8.1.7) por λ_{k+1} y se resta de (8.1.8):

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Pero de acuerdo con la suposición de inducción, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son linealmente independientes. Así, $c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = \cdots = c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$; y como $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, se concluye que $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$. Pero de (8.1.7) esto significa que $c_{k+1} = 0$. Por lo tanto, el teorema se cumple para $m = k + 1$ y la prueba queda completa.

Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

y $p(\lambda) = 0$ se puede escribir en la forma

$$\boxed{p(\lambda) = (-1)^n[\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0] = 0} \tag{8.1.9}$$

La ecuación (8.1.9) tiene n raíces, algunas de ellas repetidas. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ son las diferentes raíces de (8.1.9) con multiplicidades $r_1, r_2, \ldots, r_m$, respectivamente, entonces (8.1.9) se puede factorizar para obtener

$$\boxed{(-1)^n p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{r_m} = 0} \tag{8.1.10}$$

Multiplicidades algebraicas

Los números $r_1, r_2, \ldots, r_m$ se denominan **multiplicidades algebraicas** de los valores característicos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, respectivamente.

Ahora es posible calcular los valores característicos y sus espacios característicos correspondientes. Para esto se realiza un procedimiento de tres pasos: