Forma vectorial utilizando el rotacional

El enunciado del teorema de Green admite una expresión particularmente simple utilizando el lenguaje de los campos vectoriales. Como veremos, esta expresión indica el camino para una posible generalización del teorema a $\mathbb{R}^3$.

Teorema 3 Forma vectorial del teorema de Green Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región en la cual es aplicable el teorema de Green, sea ∂D su frontera (con orientación positiva) y sea $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ un campo vectorial C^1 definido sobre D. Entonces

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D (\mathrm{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\ dA = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\ dA$$

(véase la Figura 8.1.7).

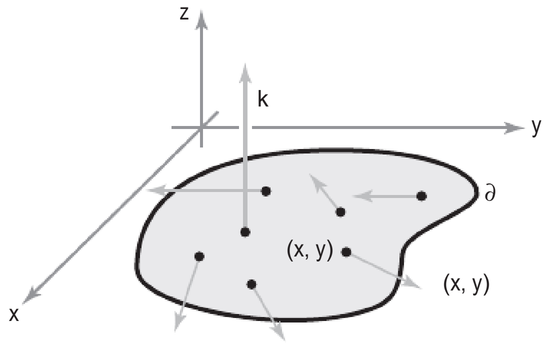

Figura 8.1.7 La forma vectorial del teorema de Green.

Este resultado se sigue del Teorema 1 y del hecho de que $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$. En el Ejercicio 22 pediremos al lector que complete los detalles.

Ejemplo 3 Sea $\mathbf{F} = (xy^2, y + x)$. Integrar $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}$ en la región del primer cuadrante acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = x$.

Solución *Método 1.* Calculamos primero el rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = (1 - 2xy)\mathbf{k}.$$

Por tanto, $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = 1 - 2xy$. Esta función puede integrarse sobre la región dada D (véase la Figura 8.1.8) utilizando una integral iterada del modo siguiente:

$$\iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (1 - 2xy)\, dy\ dx = \int_0^1 [y - xy^2]\Big|_{x^2}^{x}\, dx$$

$$= \int_0^1 [x - x^3 - x^2 + x^5]\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$