donde $A(S_\rho) = \pi\rho^2$ es el área de S_ρ y rot $\mathbf{V}$(Q) es el valor de rot $\mathbf{V}$ en Q. Entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \int_{\partial S_\rho} \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s} &= \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \iint_{S_\rho} (\text{rot } \mathbf{V})\cdot d\mathbf{S} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \text{rot } \mathbf{V}(\mathrm{Q})\cdot\mathbf{n} = \text{rot } \mathbf{V}(\mathrm{P})\cdot\mathbf{n}.\end{aligned}$$

Por tanto,[1]

$$\text{rot } \mathbf{V}(\mathrm{P})\cdot\mathbf{n} = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \int_{\partial S_\rho} \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s}. \tag{5}$$

Detengámonos a considerar el significado físico de $\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s}$ cuando $\mathbf{V}$ es el campo de velocidades de un fluido. Supongamos, por ejemplo, que $\mathbf{V}$ apunta en la dirección tangente a la curva orientada C (Figura 8.2.6). Entonces, claramente, $\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s} > 0$, y las partículas de C tenderán a girar en sentido contrario a las agujas del reloj. Si $\mathbf{V}$ apunta en la dirección opuesta, entonces $\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s} < 0$ y las partículas tenderán a rotar en el sentido de las agujas del reloj. Si $\mathbf{V}$ es perpendicular a C, entonces las partículas no rotan sobre C en modo alguno y $\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s} = 0$. En general, $\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s}$, que es la integral de la componente tangencial de $\mathbf{V}$, representa la cantidad neta de giro del fluido en sentido antihorario a lo largo de C. Por esta razón, $\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s}$ se denomina ***circulación*** del campo $\mathbf{V}$ alrededor de C (véase la Figura 8.2.7).

Estos resultados nos permiten ver el significado preciso de rot $\mathbf{V}$ respecto del movimiento de un fluido. La circulación $\int_{\partial S_\rho} \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s}$ es la velocidad neta del fluido alrededor de ∂S_ρ, de modo que (rot $\mathbf{V}$) $\cdot\,\mathbf{n}$ representa el efecto de giro o rotación del fluido alrededor del eje $\mathbf{n}$.

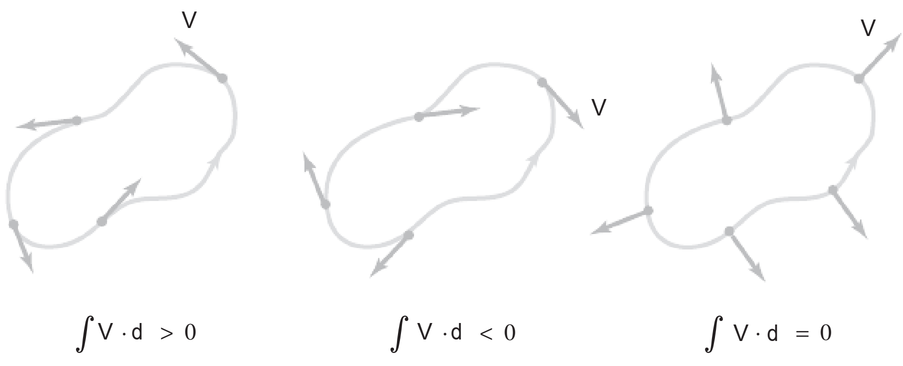

Figura 8.2.6 El significado intuitivo de los posibles signos de $\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s}$.

[1]Algunos textos informales adoptan la Ecuación (5) como *definición* del rotacional, y la usan para “demostrar” el teorema de Stokes. Sin embargo, este método aumenta el riesgo de caer en un razonamiento circular, puesto que para demostrar que la Ecuación (5) define realmente un vector “rot $\mathbf{V}$(P)” hace falta usar el teorema de Stokes, o algún argumento similar.