(la fórmula general cambiada de signo de $d\mathbf{S}$ para gráficas de la Sección 7.6, dado que la normal apunta hacia abajo). Por tanto,

$$\iint_{S_1} R\mathbf{k}\cdot d\mathbf{S}_1 = -\iint_D R(x,y,g_1(x,y))\ dx\ dy. \tag{6}$$

De formar similar, para la cara superior S_2,

$$d\mathbf{S}_2 = \left(-\frac{\partial g_2}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g_2}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dx\ dy.$$

Por tanto,

$$\iint_{S_2} R\mathbf{k}\cdot d\mathbf{S}_2 = \iint_D R(x,y,g_2(x,y))\ dx\ dy. \tag{7}$$

Sustituyendo las Ecuaciones (6) y (7) en la Ecuación (5) y comparando con la Ecuación (4), obtenemos

$$\iiint_W \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint_{\partial W} R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\, dS.$$

Las restantes igualdades, (1) y (2), se pueden establecer del mismo modo con el fin de completar la demostración. ■

Generalización del teorema de Gauss

El lector debería observar que la demostración del teorema de Gauss es similar a la del teorema de Green. Por el procedimiento utilizado en el Ejercicio 16 de la Sección 8.1, podemos extender el teorema de Gauss a cualquier región que se pueda dividir en regiones elementales simétricas. Esto incluye todas las regiones que son de nuestro interés. Un ejemplo de una región a la que se aplica el teorema de Gauss es la región comprendida entres dos superficies cerradas, una dentro de la otra. La superficie de esta región consta de dos trozos orientados como se muestra en la Figura 8.4.5. Aplicaremos el teorema de la divergencia a una región así cuando probemos la ley de Gauss en el Teorema 10.

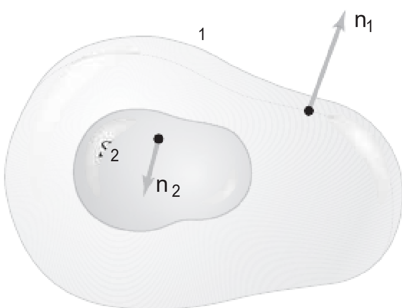

Figura 8.4.5 Una regi ón más general en la que se puede aplicar el teorema de Gauss.