función inversa, en primer lugar tenemos que calcular el determinante jacobiano $\partial(f_1, f_2)/\partial(x, y)$. Como dominio de $f = (f_1, f_2)$ tomamos $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$. Ahora

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{3x^4 - y^4}{x^2} & \dfrac{4y^3}{x} \\ \cos x & -\operatorname{sen} y \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} y}{x^2}(y^4 - 3x^4) - \frac{4y^3}{x} \cos x.$$

Por tanto, en los puntos donde esto no se anula podemos despejar x, y en función de u y v. En otras palabras, podemos despejar x, y cerca de aquellos x, y para los que $x \neq 0$ y $(\operatorname{sen} y)(y^4 - 3x^4) \neq 4xy^3 \cos x$. Generalmente, tales condiciones no se pueden resolver explícitamente. Por ejemplo, si $x_0 = \pi/2$, $y_0 = \pi/2$, podemos despejar x, y cerca de (x_0, y_0) porque ahí $\partial(f_1, f_2)/\partial(x, y) \neq 0$. ▲

Ejercicios

1. Demostrar que la ecuación $x + y - z + \cos(xyz) = 0$ se puede resolver para $z = g(x, y)$ cerca del origen. Hallar $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ en (0, 0).

2. Demostrar que $xy + z + 3xz^5 = 4$ es resoluble para z como una función de (x, y) cerca de (1, 0, 1). Calcular $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en (1, 0).

3. (a) Hallar directamente (es decir, sin utilizar el Teorema 11) dónde se puede resolver la ecuación $F(x, y) = y^2 + y + 3x + 1 = 0$ para y en términos de x.

(b) Comprobar que la respuesta al apartado (a) concuerda con la respuesta esperada proporcionada por el teorema de la función implícita. Calcular dy/dx.

4. Repetir el Ejercicio 3 con $F(x, y) = xy^2 - 2y + x^2 + 2 = 0$.

5. Sea $F(x, y) = 0$ una función de clase C^1 que define una curva en el plano xy que pasa por el punto (x_0, y_0). Supóngase que $(\partial F/\partial y)\,(x_0, y_0) \neq 0$. Demostrar que esta curva se puede representar localmente mediante la gráfica de una función $y = g(x)$. Demostrar que (I) la recta ortogonal a $\nabla F(x_0, y_0)$ coincide con (II) la recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$.

6. Considérese la superficie S dada por $3y^2z^2 - 3x = 0$.

(a) Utilizando el teorema de la función implícita, verificar que podemos despejar x como una función de y y z cerca de cualquier punto de S. Escribir explícitamente x como una función de y y z.

(b) Demostrar que cerca de $(1, 1, -1)$ podemos despejar bien y o bien z, y proporcionar expresiones explícitas para estas variables en función de las otras dos.

7. Demostrar que en $x^3z^2 - z^3yx = 0$ se puede despejar z como una función de (x, y) cerca de (1, 1, 1), pero no cerca del origen. Calcular $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en (1, 1).

8. Analizar la posibilidad de despejar u, v, w en función de x, y, z cerca de $x = y = z = 0$, $u = v = 0$ y $w = -2$ en el sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z^2 + u + v^2 &= 0 \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 &= 0 \\ x + z + w + u^2 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

9. Analizar la posibilidad de despejar u, v en términos de x, y cerca de $x = y = u = v = 0$

$$\begin{aligned} y + x + uv &= 0 \\ uxy + v &= 0 \end{aligned}$$

y comprobarlo directamente.