14. Repetir el Ejercicio 13 para $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

15. Determinar una ecuación para el plano que

(a) Es perpendicular a $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ y pasa por $(1, 0, 0)$.

(b) Es perpendicular a $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ y pasa por $(1, 1, 1)$.

(c) Es perpendicular a la recta $\mathbf{l}(t) = (5, 0, 2)t + (3, -1, 1)$ y pasa por $(5, -1, 0)$.

(d) Es perpendicular a la recta $\mathbf{l}(t) = (-1, -2, 3)t + (0, 7, 1)$ y pasa por $(2, 4, -1)$.

16. Hallar una ecuación para el plano que pasa por

(a) $(0, 0, 0), (2, 0, -1)$ y $(0, 4, -3)$.

(b) $(1, 2, 0), (0, 1, -2)$ y $(4, 0, 1)$.

(c) $(2, -1, 3), (0, 0, 5)$ y $(5, 7, -1)$.

17. Demostrar que los puntos $(0, -2, -1), (1, 4, 0), (2, 10, 1)$ no determinan un único plano.

18. Sea P el plano definido por la ecuación $x+y+z = 1$. ¿Cuáles de los siguientes puntos están contenidos en P?

(a) $(0,\ 0,\ 0)$ (c) $(-3,\ 8,\ -4)$

(b) $(1,\ 1,\ -1)$ (d) $(1,\ 2,\ -3)$

19. (a) Demostrar que dos planos paralelos o bien son idénticos o bien nunca se intersecan.

(b) ¿Cómo se intersecan dos planos no paralelos?

20. Hallar la intersección de los planos $x+2y+z = 0$ y $x - 3y - z = 0$.

21. Hallar la intersección de los planos $x + (y - 1) + z = 0$ y $-x + (y + 1) - z = 0$.

22. Hallar la intersección de los planos dados por las ecuaciones $3(x - 1) + 2y + (z + 1) = 0$ y $(x - 1) + 4y - (z + 1) = 0$.

23. (a) Probar las dos identidades del triple producto vectorial

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$$

y

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

(b) Probar que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ si y solo si $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(c) Probar que (***identidad de Jacobi***).
$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$

24. (a) Demostrar, sin recurrir a la geometría, que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\ &= -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \\ &= -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w}). \end{aligned}$$

(b) Utilizar el apartado (a) y el Ejercicio 23(a) para demostrar que

$$\begin{aligned} &(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}') - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}')(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' & \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' \\ \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

25. Verificar la regla de Cramer.

26. ¿Cuál es la relación geométrica entre los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ si $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{v}\|\ \|\mathbf{w}\|$?

27. Sean $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ y $\mathbf{w} = (0, 2, -1)$. Utilizar las reglas algebraicas y la tabla de multiplicación de la página 39 para calcular $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ sin emplear determinantes.

28. Hallar una ecuación para el plano que pasa por el punto $(2, -1, 3)$ y es perpendicular a la recta $\mathbf{v} = (1, -2, 2) + t(3, -2, 4)$.

29. Hallar una ecuación para el plano que pasa por el punto $(1, 2, -3)$ y es perpendicular a la recta $\mathbf{v} = (0, -2, 1) + t(1, -2, 3)$.

30. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -2, -3)$ y es perpendicular al plano $3x - y - 2z + 4 = 0$.

31. Hallar una ecuación para el plano que contiene las dos rectas paralelas

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, -2) + t(2, 3, -1)$$

y

$$\mathbf{v}_2 = (2, -1, 0) + t(2, 3, -1).$$

32. Determinar una parametrización para la recta perpendicular a $(2, -1, 1)$, paralela al plano $2x+y-4z = 1$ y que pasa por el punto $(1, 0, -3)$

33. Hallar una ecuación para el plano que contiene el punto $(1, 0, 1)$ y la línea $\mathbf{l}(t) = (1, 2, -1) + t(1, 0, 5)$.

34. Hallar la distancia desde el punto $(2, 1, -1)$ al plano $x - 2y + 2z + 5 = 0$.

35. Hallar una ecuación para el plano que contiene la recta $\mathbf{v} = (-1, 1, 2) + t(3, 2, 4)$ y es perpendicular al plano $2x + y - 3z + 4 = 0$.