Solución Esta superficie se puede parametrizar utilizando coordenadas esféricas basadas en el centro de la esfera. Sin embargo, no necesitamos hallar $\mathbf{\Phi}$ explícitamente para resolver este problema. Por el Teorema 6, $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, y por tanto, si parametrizamos ∂S mediante $x(t) = \cos t, y(t) = \operatorname{sen} t, 0 \le t \le 2\pi$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} \right) dt = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t)\ dt \\ &= -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi \end{aligned}$$

de modo que $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = -2\pi$. ▲

El rotacional como circulación por unidad de área

A continuación vamos a usar el teorema de Stokes para justificar la interpretación física de $\nabla \times \mathbf{F}$ en términos de una rueda con palas que se propuso en el Capítulo 4. Parafraseando el Teorema 6, tenemos

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\ dS = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial S} F_T\, ds,$$

donde F_T es la componente tangencial de $\mathbf{F}$. Esto dice que la integral de la componente normal del rotacional de un campo vectorial sobre una superficie orientada S es igual a la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de ∂S, que a su vez es igual a la integral de trayectoria de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ sobre ∂S.

Supongamos que $\mathbf{V}$ representa el campo vectorial de velocidades de un fluido. Consideremos un punto P y un vector unitario $\mathbf{n}$. Sea S_ρ el círculo de radio ρ y centro P que es perpendicular a $\mathbf{n}$. Por el teorema de Stokes,

$$\iint_{S_\rho} \text{rot } \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_\rho} \text{rot } \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\ dS = \int_{\partial S_\rho} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s},$$

donde ∂S_ρ tiene la orientación inducida por $\mathbf{n}$ (véase la Figura 8.2.5).

Por el teorema del valor medio para integrales (Ejercicio 16, Sección 7.6), existe un punto Q en S_ρ tal que

$$\iint_{S_\rho} \text{rot } \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS = [\text{rot } \mathbf{V}(\text{Q}) \cdot \mathbf{n}] A(S_\rho),$$

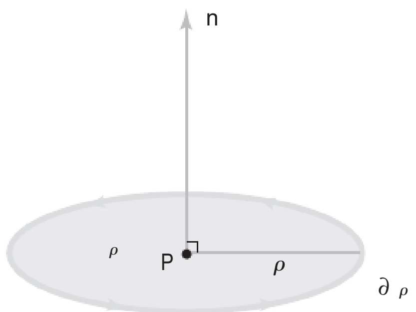

Figura 8.2.5 Un vector normal $\mathbf{n}$ induce una orientaci ón en la frontera ∂S_ρ del círculo S_ρ.