Demostración

Ley asociativa del teorema 2.2.2

Como A es de $n \times m$ y B es de $m \times p$, AB es de $n \times p$. Entonces $(AB)C = (n \times p) \times (p \times q)$ es una matriz de $n \times q$. De manera similar, BC es de $m \times q$ y $A(BC)$ es de $n \times q$ de manera que $(AB)C$ y $A(BC)$ son ambas del mismo tamaño. Debe demostrarse que la componente ij de (AB) C es igual a la componente ij de $A(BC)$. Si se define $D = (d_{ij}) = AB$, entonces

$$d_{ij} \overset{\text{de (2.2.12)}}{=} \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, a_{kj}$$

La componente ij de $(AB)C = DC$ es

$$\sum_{l=1}^{p} d_{il}\, c_{lj} = \sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kl}\right) c_{lj} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{p} a_{ik}\, b_{kl}\, c_{lj}$$

Ahora se define $E = (e_{ij}) = BC$. Entonces

$$e_{kj} = \sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj}$$

y la componente ij de $A(BC) = AE$ es

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, e_{kj} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{p} a_{ik}\, b_{kl}\, c_{lj}$$

Así, la componente ij de $(AB)C$ es igual a la componente ij de $A(BC)$. Esto demuestra la ley asociativa.

Demostración

Leyes distributivas del teorema 2.2.3

Se demuestra la primera ley distributiva [ecuación (2.2.7)]. La demostración de la segunda [ecuación (2.2.8)] es idéntica y, por lo mismo, se omite. Sea A una matriz de $n \times m$ y sean B y C matrices de $m \times p$. La componente kj de $B + C$ es $b_{kj} + c_{kj}$ y la componente ij de $A(B + C)$ es

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \overset{\text{de (2.2.12)}}{=} \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kj} + \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, c_{kj} =$$ componente ij de AB más la componente ij de AC, y esto demuestra la ecuación (2.2.7).