o $x_2 = -3x_3$, y x_1 es arbitrario. Haciendo $x_1 = 0, x_3 = 1$, se obtiene $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Haciendo $x_1 = 1$, $x_3 = 1$, se llega a $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. De esta manera, $E_{-1} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

En cada uno de los últimos cinco ejemplos se encontró un valor característico con una multiplicidad algebraica de 2 o más. Pero como se vio en los ejemplos 8.1.9, 8.1.11 y 8.1.12, el número de vectores característicos linealmente independientes no es necesariamente igual a la multiplicidad algebraica del valor característico (como fue el caso en los ejemplos 8.1.8 y 8.1.10). Esta observación lleva a la siguiente definición.

Definición 8.1.4

Multiplicidad geométrica

Sea λ un valor característico de la matriz A; entonces la **multiplicidad geométrica** de λ es la dimensión del espacio característico correspondiente a λ (que es la nulidad de la matriz $A - \lambda I$). Esto es,

$$\boxed{\text{Multiplicidad geométrica de } \lambda = \dim E_\lambda = \upsilon(A - \lambda I)}$$

En los ejemplos 8.1.8 y 8.1.10 se observó que para los valores característicos de multiplicidad algebraica 2 las multiplicidades geométricas eran también 2. En el ejemplo 8.1.9 la multiplicidad geométrica de $\lambda = 4$ era 1 mientras que la multiplicidad algebraica era 2. En el ejemplo 8.1.11 la multiplicidad algebraica era 3 y la multiplicidad geométrica 1. En el ejemplo 8.1.12 la multiplicidad algebraica era 3 y la geométrica 2. Estos ejemplos ilustran el hecho de que si la multiplicidad algebraica de λ es mayor que 1, entonces no se puede predecir la multiplicidad geométrica de λ sin información adicional.

Si A es una matriz de 2×2 y λ es un valor característico con multiplicidad algebraica 2, entonces la multiplicidad geométrica de λ es ≤ 2 ya que puede haber, a lo más, dos vectores linealmente independientes en un espacio de dos dimensiones. Sea A una matriz de 3×3 que tiene dos valores característicos λ_1 y λ_2 con multiplicidades algebraicas 1 y 2, respectivamente. Entonces la multiplicidad geométrica de λ_2 es ≤ 2 porque de otra manera se tendrían cuatro vectores linealmente independientes en un espacio de tres dimensiones. De hecho, la multiplicidad geométrica de un valor característico es siempre menor o igual que su multiplicidad algebraica. La demostración del siguiente teorema no es difícil si se prueban algunos otros hechos sobre los determinantes. Como esto nos llevaría más allá del alcance de este libro, se omite la prueba.*

* Una demostración se puede encontrar en el teorema 11.2.6 del libro *Advanced Engineering Mathematics* (Nueva York: McGraw-Hill, Inc., 1975) de C.R. Wylie.