Trayectorias y curvas Una ***trayectoria*** en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{c}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$; es una ***trayectoria en el plano*** si $n = 2$ y una ***trayectoria en el espacio*** si $n = 3$. La colección C de puntos $\mathbf{c}(t)$ cuando t varía en $[a,b]$ se llama ***curva***, y $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(b)$ son sus ***extremos***. Se dice que la trayectoria $\mathbf{c}$ ***parametriza*** la curva C. También decimos que $\mathbf{c}(t)$ ***traza*** C cuando t varía.

Si $\mathbf{c}$ es una trayectoria en $\mathbb{R}^3$, podemos escribir $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y llamamos a $x(t), y(t)$ y $z(t)$ ***funciones componentes*** de $\mathbf{c}$. Las funciones componentes en $\mathbb{R}^2$ o, en general, en $\mathbb{R}^n$ se forman de modo similar. También vamos a considerar las trayectorias cuyo dominio es la recta real completa, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 La trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$ traza un arco de parábola. Esta curva coincide con la gráfica de $f(x) = x^2$ (véase la Figura 2.4.4).

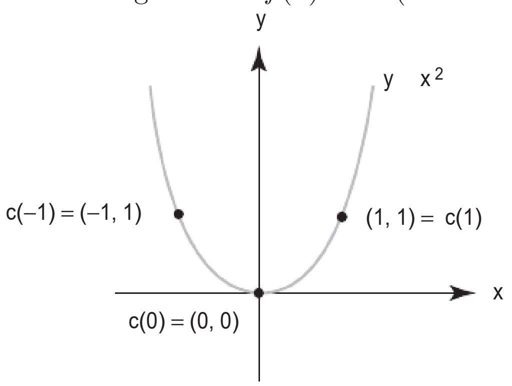

Figura 2.4.4 La imagen de $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$ es la parábola $y = x^2$.

▲

Ejemplo 4 Un disco de radio R rueda hacia la derecha sobre una recta a velocidad v. Utilizar métodos vectoriales para hallar la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ de un punto del disco que inicialmente se encuentra a una distancia r debajo del centro.

Solución Colocamos el disco en el plano xy con su centro inicialmente en $(0, R)$, de modo que la posición del centro en el instante t está dada por la trayectoria $\mathbf{C}(t) = (vt, R)$. (Véase la Figura 2.4.5.)

La posición del punto $\mathbf{c}(t)$ *respecto del centro* está dada por el vector $\mathbf{d}(t) = \mathbf{c}(t) - \mathbf{C}(t)$ que tiene el valor inicial $-r\mathbf{j}$ y gira en el sentido *horario*. La velocidad de rotación es tal que el disco da una vuelta completa cuando el centro se ha desplazado una distancia $2\pi R$ (igual a la longitud de la circunferencia del disco). Esto tarda un tiempo de $2\pi R/v$, de forma que la velocidad angular $d\theta/dt$ del disco es v/R. Puesto que la rotación es en el sentido horario, la función vectorial $\mathbf{d}(t)$ es de la forma

$$\mathbf{d}(t) = r\left(\cos\left[-\frac{v}{R}t + \theta\right]\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left[-\frac{v}{R}t + \theta\right]\mathbf{j}\right)$$