Considere la matriz

$$A_j = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ \text{columna } j \end{array} \qquad (3.4.6)$$

Nota histórica

La regla de Cramer recibe su nombre en honor del matemático suizo Gabriel Cramer (1704-1752). Cramer publicó la regla en 1750 en su libro *Introduction to the Analysis of Lines of Algebraic Curves*. De hecho, existe evidencia que sugiere que Colin Maclaurin (1698-1746) conocía la regla desde 1729; Maclaurin fue quizá el matemático británico más sobresaliente en los años que siguieron a la muerte de Newton. La regla de Cramer es uno de los resultados más conocidos en la historia de las matemáticas. Durante casi 200 años fue fundamental en la enseñanza del álgebra y de la teoría de las ecuaciones. Debido al gran número de cálculos requeridos, se utiliza muy poco en la actualidad. Sin embargo, el resultado fue muy determinante en su tiempo.

Si se expande el determinante de A_j respecto a su columna j, se obtiene

$$D_j = b_1\,(\text{cofactor de } b_1) + b_2\,(\text{cofactor de } b_2) + \cdots + b_n\,(\text{cofactor de } b_n) \qquad (3.4.7)$$

Pero para encontrar el cofactor de b_i, por ejemplo, se elimina el renglón i y la columna j de A_j (ya que b_i está en la columna j de A_j). Pero la columna j de A_j es $\mathbf{b}$, y si se elimina se tendrá simplemente el menor ij, M_{ij}, de A. Entonces

$$\text{cofactor de } b_i \text{ en } A_j = \mathrm{A}_{ij}$$

De manera que (3.4.7) se convierte en

$$D_j = \mathrm{A}_{1j}b_1 + \mathrm{A}_{2j}b_2 + \cdots + \mathrm{A}_{nj}b_n \qquad (3.4.8)$$

Por esta razón se trata de lo mismo que el lado derecho de (3.4.5). Por tanto, la componente i de $(\operatorname{adj} A)\mathbf{b}$ es D_i y se tiene

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{D}(\operatorname{adj} A)\,\mathbf{b} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_1}{D} \\ \frac{D_2}{D} \\ \vdots \\ \frac{D_n}{D} \end{pmatrix}$$

y la prueba queda completa.

EJEMPLO 3.4.1 Solución de un sistema de 3 × 3 utilizando la regla de Cramer

Resuelva el sistema usando la regla de Cramer:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad (3.4.9)$$

SOLUCIÓN ► El presente ejemplo ya se resolvió en el ejemplo 1.2.1 haciendo uso de la reducción por renglones. También se pudo resolver calculando A^{-1} (ejemplo 2.4.6) y después encontrando $A^{-1}\mathbf{b}$. Ahora se resolverá usando la regla de Cramer. Primero, se tiene

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$