31. Sea A una matriz simétrica 3×3 distinta de cero. Por tanto, sus elementos satisfacen $a_{ij} = a_{ji}$. Considérese la función $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$.

(a) Determinar ∇f.

(b) Considérese la restricción de f a la superficie de la esfera unidad $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en $\mathbb{R}^3$. Por el Teorema 7 sabemos que f tiene que tener un máximo y un mínimo en S. Demostrar que debe existir un $\mathbf{x} \in S$ y una $\lambda \neq 0$ tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. (El vector $\mathbf{x}$ se denomina ***autovector***, mientras que el escalar λ se denomina ***autovalor***.)

(c) ¿Cuáles son el máximo y el mínimo de f en $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$?

32. Supóngase que A en la función f definida en el Ejercicio 31 no es necesariamente simétrica.

(a) Determinar ∇f.

(b) ¿Podemos concluir la existencia de un autovector y autovalores como en el Ejercicio 31?

33. (a) Hallar los puntos críticos de $x + y^2$, sujeta a la restricción $2x^2 + y^2 = 1$.

(b) Utilizar la matriz hessiana orlada para clasificar los puntos críticos.

34. Responder a la pregunta planteada en la última línea del Ejemplo 9.

35. Intentar determinar los extremos de $xy + yz$ entre los puntos que satisfacen $xz = 1$.

36. La función de producción de una empresa es $Q(x, y) = xy$. El coste de producción es $C(x, y) = 2x + 3y$. Si la empresa puede gastar $C(x, y) = 10$, ¿cuál es la cantidad máxima que puede producir?

37. Hallar el punto sobre la curva $(\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(t/2))$ que está más alejado del origen.

38. Una empresa utiliza fibra de algodón y lana para fabricar telas. La cantidad de tela fabricada está dada por $Q(x, y) = xy - x - y + 1$, donde x es el número de kilos de lana, y es la cantidad de kilos de algodón, $x > 1$ e $y > 1$. Si el coste de la lana es p euros por kilo, el coste de algodón es q euros por kilo y la empresa tiene un presupuesto de B euros para materiales, ¿cuál será la proporción de algodón y lana para fabricar la máxima cantidad de tela?

39. Llevar a cabo el análisis del Ejemplo 10 para la función de producción $Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, donde A y α son constantes positivas y $0 < \alpha < 1$. Esta es la denominada ***función de producción de Cobb–Douglas*** y, en ocasiones, se utiliza como un modelo simple macroeconómico. Q es entonces la producción agregada de la economía para una cantidad dada de capital y mano de obra.

3.5 Teorema de la función implícita [opcional]

En esta sección vamos a enunciar dos versiones del *teorema de la función implícita*, quizá el teorema más importante de todo el análisis matemático. Toda la base teórica del concepto de superficie, así como el método de los multiplicadores de Lagrange dependen de él. Además, es la piedra angular de varios campos de las matemáticas, como la topología diferencial y la geometría.

Teorema de la función implícita de una variable

En el cálculo de una variable se estudia la importancia del proceso de inversión. Por ejemplo, $x = \ln y$ es la función inversa de $y = e^x$ y $x = \operatorname{sen}^{-1} y$ es la inversa de $y = \operatorname{sen} x$. El proceso de inversión también es importante para funciones de varias variables; por ejemplo, el cambio entre coordenadas cartesianas y polares en el plano implica invertir dos funciones de dos variables.