$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} \geq 0 \qquad \text{para toda } \mathbf{v}\in\mathbb{R}^n \tag{6.1.10}$$

$$|\mathbf{v}| = 0 \qquad \text{si y sólo si } \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{6.1.11}$$

EJEMPLO 6.1.1 La norma de un vector en $\mathbb{R}^2$

Sea $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ cumple con la definición usual de longitud de un vector en el plano (vea la ecuación 4.1.1).

EJEMPLO 6.1.2 La norma de un vector en $\mathbb{R}^3$

Sea $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ como en la sección 4.3.

EJEMPLO 6.1.3 La norma de un vector en $\mathbb{R}^5$

Sea $\mathbf{v} = (2, -1, 3, 4, -6) \in \mathbb{R}^5$, entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{4 + 1 + 9 + 16 + 36} = \sqrt{66}$.

Ahora puede establecerse otra vez la definición 6.1.1:

Un conjunto de vectores es ortonormal si cualquier par de ellos es ortogonal y cada uno tiene longitud unitaria.

Los conjuntos de vectores ortonormales son bastante sencillos de manejar. Se verá un ejemplo de esta característica en el capítulo 7. Ahora se probará que cualquier conjunto finito de vectores ortogonales diferentes de cero es linealmente independiente.

Teorema 6.1.1

Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un conjunto ortogonal de vectores diferentes de cero, entonces S es linealmente independiente.

Demostración

Suponga que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Entonces, para cualquier $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{0}\cdot\mathbf{v}_1 &= (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k)\cdot\mathbf{v}_i \\ &= c_1\,(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_i) + c_2(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_i) + \cdots + c_i(\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i) + \cdots + c_k\,(\mathbf{v}_k\cdot\mathbf{v}_i) \\ &= c_1\,0 + c_2\,0 + \cdots + c_i\,|\mathbf{v}_i|^2 + \cdots + c_k\,0\; c_i\,|\mathbf{v}_i|^2 \end{aligned}$$

Como $\mathbf{v}_i \neq 0$ por hipótesis, $|\mathbf{v}_i|^2 > 0$ y se tiene $c_i = 0$. Esto es cierto para $i = 1, 2, \ldots, k$, lo que completa la prueba.

Ahora se verá cómo *cualquier* base en $\mathbb{R}^n$ se puede "convertir" en una base ortonormal. El método descrito a continuación se denomina **proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt**.

Nota

Jörgen Pederson Gram (1850-1916) fue un actuario danés que estuvo muy interesado en la ciencia de la medida. Erhardt Schmidt (1876-1959) fue un matemático alemán.

Teorema 6.1.2 Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea H un subespacio de dimensión m de $\mathbb{R}^n$. Entonces H tiene una base ortonormal.

Nota

Observe que H puede ser $\mathbb{R}^n$ en este teorema. Es decir, $\mathbb{R}^n$ mismo tiene una base ortonormal.