donde $R_3(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^3 \to 0$ cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, y así sucesivamente. La fórmula general se puede probar por inducción utilizando el método de demostración que acabamos de ver.

Ejemplo 1 Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden para la función $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2y)$, alrededor del punto $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

Solución Obsérvese que

$$f(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \cos(0 + 2 \cdot 0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2\cos(0 + 2 \cdot 0) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0) = 0.$$

Por tanto,

$$f(\mathbf{h}) = f(h_1, h_2) = h_1 + 2h_2 + R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h}),$$

donde

$$\frac{R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

▲

Ejemplo 2 Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden para la función $f(x, y) = e^x \cos y$ alrededor del punto $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Solución Aquí

$$f(0,0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0) = 0,$$

y por tanto

$$f(\mathbf{h}) = f(h_1, h_2) = 1 + h_1 + \tfrac{1}{2}h_1^2 - \tfrac{1}{2}h_2^2 + R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h}),$$

donde

$$\frac{R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} \to 0 \quad \text{cuando} \quad \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

▲

En el caso de funciones de una variable, podemos desarrollar $f(x)$ en una serie infinita de potencias, denominada ***serie de Taylor***:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)h^k}{k!} + \cdots,$$

siempre que podamos probar que $R_k(x_0, h) \to 0$ cuando $k \to \infty$. De forma similar, para funciones de varias variables, los términos anteriores se sustituyen por los correspondientes que implican derivadas parciales,