Enunciado de forma simple y muy breve, una expresión del tipo $P\ dx + Q\ dy$ es una 1-forma, o una *1-forma diferencial* en una región del plano xy y $F\ dx\ dy$ es una 2-forma. Análogamente, podemos definir la noción de n-forma. Existe una operación d, que lleva n-formas a $n+1$-formas. Es similar a un rotacional generalizado y tiene la propiedad de que para $\omega = P\ dx + Q\ \ dy$, tenemos

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\ dy$$

y por tanto, con esta notación, el teorema de Green se convierte en

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega,$$

que, curiosamente, solo cambia el operador de frontera ∂ por el operador d. Sin embargo, las formas diferenciales son algo más que una notación. Dan lugar a una bella teoría que puede generalizarse a n-dimensiones.

En general, si M es una superficie orientada de n dimensiones con una frontera $(n-1)$-dimensional ∂M y si if ω es una $(n-1)$-forma sobre M, entonces el teorema fundamental del cálculo (denominado también *teorema de Stokes generalizado*) dice que

$$\boxed{\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.}$$

Algo que resulta de utilidad en este punto es considerar el sentido en el que el teorema fundamental del cálculo se convierte en un caso especial de este resultado.

En esta sección vamos a hacer una exposición muy elemental de la teoría de formas. Puesto que nuestro principal objetivo es demostrar que los teoremas de Green, Stokes y Gauss se pueden unificar bajo un único teorema, nos daremos por satisfechos con una versión de estos teoremas que no es la más general posible. Además, vamos a presentar las formas diferenciales de una manera puramente axiomática y no constructiva, evitando así el tremendo número de preliminares algebraicos formales que normalmente se necesitan para su construcción. Para los puristas, este enfoque quedará lejos de ser completo, pero será comprensible para los estudiantes. Esperamos que esto sea una motivación para algunos estudiantes y les lleve a profundizar en la teoría de las formas diferenciales. Empezamos presentando la noción de 0-forma.

0-formas

Sea K un conjunto abierto en $\mathbb{R}^3$. Una 0-***forma*** sobre K es una función con valores reales $f\colon K \to \mathbb{R}$. Cuando derivemos f una vez, supondremos que es de clase C^1 y cuando la derivemos dos veces, supondremos que es de clase C^2.

Dadas dos 0-formas f_1 y f_2 sobre K, podemos sumarlas de la manera usual para obtener una nueva 0-forma $f_1 + f_2$ o multiplicarlas para obtener una 0-forma $f_1 f_2$.