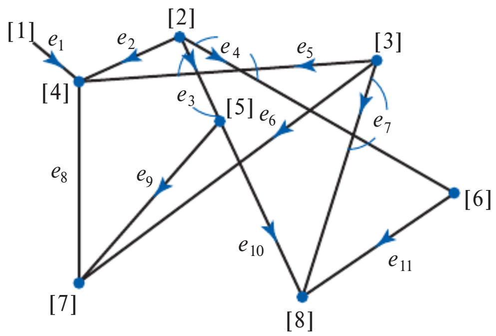
h) Para el siguiente diagrama, introduzca la matriz de incidencia nodo-arista y repita los incisos *d*) a *g*) para esta digráfica. La etiqueta e_i se refiere a la arista *i*.



Nota. Este problema fue inspirado en una conferencia dada por Gilbert Strang en la *University of New Hampshire* en junio de 1991.

PROBLEMA PROYECTO

19. Subespacio suma y subespacio intersección Sean V y W subespacios de $\mathbb{R}^n$. El subespacio intersección se define como

$$U = V \cap W = \{\mathbf{z} \text{ en } \mathbb{R}^n \mid \mathbf{z} \text{ está en } V \text{ y } \mathbf{z} \text{ está en } W\}.$$

El subespacio suma se define como

$$S = V + W = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \text{ para alguna } \mathbf{v} \text{ en } V \text{ y alguna } \mathbf{w} \text{ en } W\}.$$

Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es una base para V y $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ es una base para W.

a) (*Lápiz y papel*) Verifique que U y S son subespacios.

b) (*Lápiz y papel*) Verifique que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ genera a S, el subespacio suma.

c) Para cada par de bases de V y W dadas, encuentre una base para $S = V + W$ y encuentre la dimensión de S. Verifique algunas respuestas generando un vector aleatorio en S (genere vectores aleatorios en V y W y súmelos) y demostrando que el vector es una combinación lineal de los vectores de la base que encontró.

i) Base para $V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Para $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ii) Base para $V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ Para $W = \left\{ \begin{pmatrix} -0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 18 \\ 20 \\ -1 \\ -19 \end{pmatrix} \right\}$

iii) Base para $V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$