De los problemas 24 al 26 aplique el procedimiento descrito en el problema 23 para reducir la matriz dada mediante una transformación de semejanza a su forma canónica de Jordan.

24. $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 11 & 9 & 3 \\ -29 & -25 & -8 \end{pmatrix}$

25. $A = \begin{pmatrix} -35 & -8 & 36 \\ 0 & -4 & 0 \\ 28 & 8 & -28 \end{pmatrix}$

26. $A = \begin{pmatrix} 22 & 12 & -14 \\ -24 & -16 & 24 \\ -2 & -4 & 10 \end{pmatrix}$

Matriz nilpotente e índice de nilpotencia

27. Una matriz A de $n \times n$ es **nilpotente** si existe un entero k tal que $A^k = 0$. Si k es el entero más pequeño de este tipo, entonces k se denomina **índice de nilpotencia** de A. Demuestre que si k es el índice de nilpotencia de A y si $m \geq k$, entonces $A^m = 0$.

***28.** Sea N_k la matriz definida por la ecuación (8.6.1). Demuestre que N_k es nilpotente con índice de nilpotencia k.

29. Escriba todas las matrices de Jordan de 4×4 posibles.

De los problemas 30 al 37 está dado el polinomio característico de una matriz A. Escriba todas las posibles formas canónicas de Jordan de A.

30. $(\lambda + 3)^2 (\lambda + 1)$

31. $(\lambda - 2)^2 (\lambda + 2)^2$

32. $(\lambda - 3)^3 (\lambda + 4)$

33. $(\lambda - 4)^3$

34. $(\lambda - 4)^3 (\lambda + 3)^2$

35. $(\lambda - e)^5$

36. $(\lambda - 2)(\lambda + 2)^5$

37. $(\lambda + 7)^5$

38. Usando la forma canónica de Jordan, demuestre que para cualquier matriz A de $n \times n$, $\det A = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores característicos de A.

EJERCICIOS CON MATLAB 8.6

1. *a*) Sea $A = CJC^{-1}$, donde C y J están dados en seguida.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

i) Verifique que las columnas 1 y 2 de C son los vectores característicos de A con valor característico $\lambda = 2$ (utilice la matriz $A - 2I$).

ii) Verifique que la columna 3 de C es un vector característico de A con valor característico $\mu = 3$ (use la matriz $A - 3I$). Verifique que la columna 4 de C *no* es un vector característico de A con valor característico $\mu = 3$ pero que $(A - 3I)$ veces la columna 4 es un vector característico; es decir, verifique que $(A - 3I)^2$ (columna 4) $= 0$. La columna 4 de C se denomina **vector característico generalizado** para A con valor característico $\mu = 3$.

iii) Repita para otra matriz invertible C de 4×4 (use la misma J).

iv) (*Lápiz y papel*) Explique por qué se puede decir que $\lambda = 2$ es un valor característico de A con multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 2 y que $\mu = 3$ es un valor característico de A con multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1.