



Figura 4.4.10 Un cubo con caras paralelas al plano yz .

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{V}(x + dx, y, z) dy dz &= \mathbf{i} \cdot \left[\mathbf{V}(x, y, z) + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} dx \right] dy dz \\ &= \mathbf{i} \cdot \mathbf{V}(x, y, z) dy dz + \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} dx dy dz. \end{aligned}$$

El flujo total saliente a través de estas dos caras es por tanto la suma algebraica de ambas cantidades. Esto es simplemente

$$\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial V_1}{\partial x} dx dy dz.$$

Del mismo modo, los flujos a través de los otros pares de caras del cubo son

$$\mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} dx dy dz \quad \text{y} \quad \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} dx dy dz.$$

El flujo total que sale del cubo es entonces

$$\left(\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Esta es la cantidad neta de fluido que sale del cubo por unidad de tiempo. El cociente de esta cantidad dividida entre el volumen $dx dy dz$ del cubo da la tasa de disminución de la densidad. Esto es

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}.$$

Puesto que $\nabla \cdot \mathbf{V}$ representa la disminución de la densidad o la tasa en la que la materia está abandonando un punto por unidad de volumen y por unidad de tiempo, se denomina *divergencia*. Maxwell empleó el término *convergencia* para designar la tasa a la que el fluido se aproxima a un punto por unidad de volumen y por unidad de tiempo. Esto es el negativo de la divergencia. En el caso en el que el fluido es *incompresible*, tiene que salir del cubo tanta materia como entra. La variación total del contenido tiene que ser por tanto cero. Por esta razón, la ecuación característica diferencial que cualquier fluido incompresible debe satisfacer es

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$

donde \mathbf{V} es la velocidad del fluido. Esta ecuación se conoce como la *ecuación hidrodinámica*. Cualquier flujo de agua la satisface, ya que el agua es