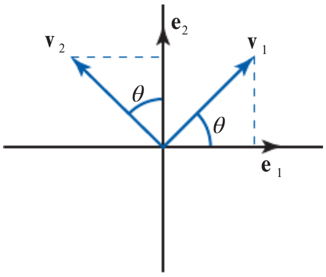
$$D = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Considerando este hecho y pensando en términos de matrices de transición, explique por qué $A = VDV^{-1}$, donde $V = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$.

9. Cambio de base por rotación en $\mathbb{R}^2$ Sean $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ la base canónica para $\mathbb{R}^2$, donde $\mathbf{e}_1$ es un vector unitario a lo largo del eje x y $\mathbf{e}_2$ es un vector unitario a la largo del eje y. Si se rotan los ejes un ángulo θ en sentido positivo alrededor del origen, entonces $\mathbf{e}_1$ rota a un vector $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{e}_2$ rota a un vector $\mathbf{v}_2$ tal que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$.

a) (*Lápiz y papel*) Demuestre que

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



b) Sea $V = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$. Entonces $\mathbf{v}_1 = V\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{v}_2 = V\mathbf{e}_2$. Exploraremos la geometría de $\mathbf{w} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$, es decir, la geometría de las combinaciones lineales en términos de la nueva base.Nos interesa la relación de las combinaciones lineales con la rotación.

Suponga que $\mathbf{x} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$. Entonces $\mathbf{w} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = V\mathbf{x}$ representa el vector $\mathbf{x}$ rotado en sentido positivo un ángulo θ alrededor del origen.

El programa de MATLAB que se muestra a continuación ayuda a visualizar esta geometría. Grafica los vectores como segmentos de recta que comienzan en el origen. El vector $\mathbf{x}$ se grafica en rojo y el vector $\mathbf{w}$ en azul. Observe cómo $\mathbf{w}$ (el vector azul) es la rotación positiva θ de $\mathbf{v}$ (el vector rojo). Dé el comando `plot` primero y después los dos comandos de `axis`. Vea la gráfica después de los comandos `axis`.

Precaución. La impresión de la gráfica producida directamente de la pantalla no mostrará longitudes iguales ni los ángulos rectos como tales.

```
a=1;b=2; % define vector a rotar
x=[a;b]; M=norm(x);
th=pi/2; % Ángulo de rotación
v1=[cos(th);sin(th)];
v2=[-sin(th);cos(th)];
V=[v1,v2]; % Matriz de cambio de base
w=V*x; % rotación del vector x
plot([0,x(1)],[0,x(2)],'r',[0,w(1)],[0,w(2)],'b')
axis square
axis([-M M -M M]);
grid
title('Vector origina: rojo, Vector rotado: azul')
xlabel('x')
ylabel('y')
```