El segundo integrando es de la forma $u^3\,du$, donde $u = 1 - \operatorname{sen} t - \cos t$, y por tanto la integral es igual a

$$\frac{1}{4}[(1 - \operatorname{sen} t - \cos t)^4]_0^{2\pi} = 0.$$

De ese modo, solo nos queda calcular

$$\int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \operatorname{sen}^4 t)\ dt.$$

Esta integral puede evaluarse usando las Fórmulas (18) y (19) de la tabla de integrales. También podríamos usar el procedimiento siguiente: utilizando las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \qquad \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2},$$

sustituyendo y elevando al cuadrado estas expresiones, la integral anterior se reduce a

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 2t)\ dt = \pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 2t\ dt.$$

Usando nuevamente la identidad $\cos^2 2t = (1 + \cos 4t)/2$, resulta

$$\begin{aligned}\pi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 4t)\ dt &= \pi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos 4t\ dt\\ &= \pi + \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

▲

El teorema de Stokes para superficies parametrizadas

Para simplificar la prueba del teorema de Stokes que dimos anteriormente, supusimos que la superficie S podía describirse como la gráfica de una función $z = f(x, y), (x, y) \in D$, donde D es una región en la cual es aplicable el teorema de Green. Sin embargo, sin mucho más esfuerzo podemos conseguir un *teorema más general* para superficies parametrizadas orientadas S. La complicación principal es la definición de ∂S.

Supongamos que $\mathbf{\Phi}\colon D \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización de una superficie S y $\mathbf{c}(t) = (u(t), v(t))$ es una parametrización de ∂D. Podríamos tener la tentación de definir ∂S como la curva parametrizada por $t \mapsto \mathbf{p}(t) = \mathbf{\Phi}(u(t), v(t))$. Sin embargo, con esta definición, ∂S podría no ser la frontera de S en ningún sentido geométrico razonable.

Por ejemplo, podríamos concluir que la frontera de la esfera unidad S parametrizada usando coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$ es la mitad del círculo máximo de S contenido en el plano xz, pero claramente, en un sentido geométrico, S es una superficie suave (sin picos o cúspides) que no tiene ni frontera ni borde en modo alguno (véanse la Figura 8.2.3 y el Ejercicio 20). Por tanto, ese círculo máximo es, en cierto sentido, la frontera "incorrecta" de S.

Podemos resolver esta dificultad suponiendo que $\mathbf{\Phi}$ es inyectiva sobre todo D. Entonces, la imagen de ∂D bajo $\mathbf{\Phi}$, es decir, $\mathbf{\Phi}(\partial D)$, será la