$2x_3 = 0$ o $x_2 = -2x_1 - 2x_3$. Si $x_1 = 1$ y $x_3 = 0$, se obtiene $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si $x_1 = 0$ y $x_3 = 1$, se obtiene $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $E_{-1} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Existen otras elecciones convenientes para los vectores característicos; por ejemplo, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ está en E_{-1}, ya que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$.

EJEMPLO 8.1.11 **Una matriz de 3 × 3 con un valor característico y sólo un vector característico linealmente independiente**

Sea $A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$; entonces $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & -5 & -9 \\ 8 & 9-\lambda & 18 \\ -2 & -3 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda + 1)^3 = 0$. Así, $\lambda = -1$ es un valor característico de multiplicidad algebraica 3. Para calcular E_{-1} se establece $(A + I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -9 \\ 8 & 10 & 18 \\ -2 & -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y se reduce por renglones para obtener, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -5 & -9 & 0 \\ 8 & 10 & 18 & 0 \\ -2 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ -2 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Esto conduce a $x_2 = -3x_3$ y $2x_1 = 3x_3$. Estableciendo $x_3 = 2$ se obtiene sólo un vector característico linealmente independiente: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $E_{-1} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

EJEMPLO 8.1.12 **Una matriz de 3 × 3 con un valor característico y dos vectores característicos linealmente independientes**

Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$; entonces $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & -9 \\ 0 & 5-\lambda & 18 \\ 0 & -2 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)^3 = 0$.

Así, igual que en el ejemplo 8.1.10, $\lambda = -1$ es un valor característico de multiplicidad algebraica 3. Para encontrar E_{-1} se calcula $(A + I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $-2x_2 - 6x_3 = 0$