Ejemplo 5 Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acotada por los planos $z = 1$ y $z = -1$, e incluyendo los trozos $x^2 + y^2 \le 1$ cuando $z = \pm 1$.

Solución Podemos calcular esta integral directamente, aunque es más fácil utilizar el teorema de la divergencia.

Ahora S es la frontera de la región W dada por $x^2 + y^2 \le 1, -1 \le z \le 1$. Por tanto, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W (\operatorname{div} \mathbf{F})\, dV$. Además,

$$\iiint_W (\operatorname{div} \mathbf{F})\, dV = \iiint_W (x^2 + y^2)\; dx\, dy\, dz$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\iint_{x^2+y^2 \le 1} (x^2 + y^2)\; dx\; dy \right) dz$$

$$= 2 \iint_{x^2+y^2 \le 1} (x^2 + y^2)\; dx\; dy.$$

Antes de calcular la integral doble, observamos que la integral de superficie satisface

$$\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 2 \iint_{x^2+y^2 \le 1} (x^2 + y^2)\; dx\; dy > 0.$$

Esto significa que $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, el flujo neto de $\mathbf{F}$ hacia el exterior del cilindro, es positivo.

Para calcular la integral doble, pasamos a coordenadas polares:

$$x = r \cos\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta, \qquad 0 \le r \le 1, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Entonces, tenemos $\partial(x, y)/\partial(r, \theta) = r$ y $x^2 + y^2 = r^2$. Así,

$$\iint_{x^2+y^2 \le 1} (x^2 + y^2)\; dx\; dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^3\; dr \right) d\theta = \frac{1}{2}\pi.$$

Por tanto,

$$\iiint_W \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \pi$$

. ▲

Ley de Gauss

Como hemos comentado anteriormente, el teorema de la divergencia de Gauss se puede aplicar a regiones en el espacio más generales que las regiones elementales simétricas. Para concluir esta sección, vamos a emplear esta observación *en la demostración* de los siguientes importantes resultados.