3. $f(x,y) = (x+y)^2$, donde $x_0 = 0, y_0 = 0$

4. $f(x,y) = 1/(x^2+y^2+1)$, donde $x_0 = 0, y_0 = 0$

5. $f(x,y) = e^{x+y}$, donde $x_0 = 0, y_0 = 0$

6. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\cos(xy)$, donde $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

7. $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + \cos(xy)$, donde $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

8. $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos y$, donde $x_0 = 1, y_0 = 0$

9. Calcular la aproximación de Taylor de segundo orden de $f(x,y) = \cos x \operatorname{sen} y$ en el punto $(\pi, \pi/2)$.

10. Sea $f(x,y) = x\cos(\pi y) - y\operatorname{sen}(\pi x)$. Hallar la aproximación de Taylor de segundo orden para f en el punto (1, 2).

11. Sea $g(x,y) = \operatorname{sen}(xy) - 3x^2\log y + 1$. Hallar el polinomio de segundo grado que mejor aproxima g cerca del punto $(\pi/2, 1)$.

12. Para cada una de las funciones de los Ejercicios 3 a 7, utilizar la fórmula de Taylor de segundo orden para aproximar $f(0{,}1; 0{,}1)$. Compare su aproximación de $f(x,y) = (x+y)^2$ con el valor exacto utilizando una calculadora.

13. (Difícil) Se dice que una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función ***analítica*** si

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k + \cdots$$

es decir, la serie del lado derecho converge y es igual a $f(x+h)$.

(a) Supóngase que f satisface la siguiente condición: en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$, existe una constante M tal que para todo $k = 1,2,3,\ldots, |f^{(k)}(x)| \leq M^k$ para todo $x \in [a,b]$. Demostrar que f es una función analítica.

(b) Sea $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$

Demostrar que f es una función C^∞, pero f no es analítica.

(c) Dar una definición de función analítica de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Generalizar la demostración del apartado (a) a esta clase de funciones.

(d) Desarrollar $f(x,y) = e^{x+y}$ en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

3.3 Extremos de funciones con valores reales

Nota histórica

Como hemos visto en la Introducción histórica del libro, los antiguos griegos intentaron matematizar la naturaleza y encontrar, como en el modelo geométrico ptolemaico del movimiento planetario, las leyes matemáticas que gobiernan el universo. Con la vuelta al estudio del saber griego durante el Renacimiento, se retomó este punto de vista y se volvió a la investigación de estas leyes. En particular, surgió la cuestión de si existía *una* ley, un principio matemático que gobernara y sustituyera a todos los demás, un principio que el Creador había empleado en Su Gran Diseño del Universo.

PRINCIPIO DE MAUPERTUIS En 1744, el científico francés Pierre-Louis de Maupertuis (véase la Figura 3.3.1) propuso su gran esquema del mundo. El "principio metafísico" de Maupertuis consiste en la suposición de que la naturaleza siempre funciona con la máxima economía posible. Es decir, las leyes físicas son una consecuencia de un principio de "economía de medios"; la naturaleza siempre actúa de tal forma que se minimiza una magnitud que Maupertuis denominó *acción*. La acción no es nada más que el gasto de energía a lo largo del tiempo, o la energía × tiempo. En las aplicaciones, el tipo de energía cambia para cada caso. Por ejemplo, los sistemas físicos suelen intentar "reacomodarse" para tener una energía mínima—tal como una pelota que rueda desde la cima de una montaña hasta un valle, o la irregular Tierra primordial adoptando una forma casi esférica. Otro ejemplo sería la forma esférica de