Matriz unitaria

19. La matriz compleja A de $n \times n$ se llama **unitaria** si $A^* = A^{-1}$. Demuestre que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{3-2i}{\sqrt{26}} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{-3+2i}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} \text{ es unitaria.}$$

20. Demuestre que A es unitaria si y sólo si las columnas de A forman una base ortonormal en $\mathbb{C}^n$.

21. Demuestre que si A es unitaria, entonces $|\det A| = 1$.

22. A hermitiana significa que $A = A^*$, y U unitaria significa que $U^{-1} = U^*$. Entonces

$$(U^{-1}AU)^* = U^*A^*(U^{-1}) = U^{-1}A(U^*)^* = U^{-1}AU$$

por tanto, $U^{-1}AU$ es hermitiana. Demuestre que si A es hermitiana y U unitaria, entonces la matriz $U^{-1}AU$ es hermitiana.

23. Demuestre que el producto de dos matrices hermitianas A y B es una matriz hermitiana si y sólo si A y B conmutan.

24. Sea A una matriz de $n \times n$ con componentes complejas. En $\mathbb{C}^n$, si $\mathbf{x} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ y $\mathbf{y} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, defina el producto interno $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c_1\overline{d}_1 + c_2\overline{d}_2 + \cdots + c_n\overline{d}_n$. (Vea el ejemplo 6.3.2.) Pruebe que $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^*\mathbf{y} \rangle$.

***25.** Demuestre que cualesquiera dos espacios vectoriales complejos con producto interno de la misma dimensión (finita) son isométricamente isomorfos.

EJERCICIOS CON MATLAB 7.5

1. ***a)*** (*Lápiz y papel*) Considere la *definición* de isometría y explique, usando geometría, por qué la rotación respecto al origen y la reflexión a través de una recta determinada por un vector de longitud 1 en $\mathbb{R}^2$ son isometrías.

b) Elija tres valores para un ángulo θ y verifique para cada uno que la representación matricial (respecto a la base canónica) de la rotación positiva por un ángulo θ es una matriz ortogonal.

Genere tres vectores aleatorios $\mathbf{v}$ de longitud 1. Para cada uno, verifique que la representación matricial (respecto a la base canónica) de la reflexión a través de $\mathbf{v}$ es una matriz ortogonal. Refiérase al problema 4 de MATLAB 7.3 para el análisis de la reflexión.

c) (*Lápiz y papel*) Pruebe en general que la representación matricial de una rotación es una matriz ortogonal y que la representación matricial de una reflexión es una matriz ortogonal.

d) La teoría de isometrías de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ implica que una reflexión a través de un vector $\mathbf{v}$ de longitud 1 debe ser una reflexión a través del eje x seguida de una rotación. Un vector de longitud 1 se puede representar como $(\cos(\alpha)\ \text{sen}(\alpha))^{\top}$. Genere un vector aleatorio $\mathbf{w}$ y divídalo entre su longitud para producir un vector $\mathbf{v}$ de longitud 1. Encuentre a mediante `alpha = a tan(v(2)/v(1))` (si la primera componente de `v` es cero, entonces $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$). Encuentre la representación matricial F de una reflexión a través de `v` y verifique que $F = RX$, donde R es la representación matricial para una rotación positiva de $\theta = 2\alpha$, y X es la representación matricial de una reflexión respecto al eje x. Repita para otros dos vectores $\mathbf{w}$.