A continuación, sustituimos x, y y z en términos de t y obtenemos

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2 = 1 + t^2$$

a lo largo de $\mathbf{c}$. Insertando esta información en la definición de la integral a lo largo de la trayectoria se obtiene

$$\int_{\mathbf{c}} f(x,y,z)\, ds = \int_0^{2\pi} (1+t^2)\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3 + 4\pi^2).$$

▲

Para motivar la definición de la integral a lo largo de una trayectoria, consideremos sumas de "tipo Riemann" S_N de la misma forma que cuando definimos la longitud de arco en la Sección 4.2. Con el fin de simplificar, sea $\mathbf{c}$ de clase C^1 en I. Subdividimos el intervalo $I = [a, b]$ mediante una partición

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b.$$

Esto nos lleva a una descomposición de $\mathbf{c}$ en trayectorias $\mathbf{c}_i$ (Figura 7.1.1) definidas en $[t_i, t_{i+1}]$ para $0 \le i \le N-1$. Denotamos la longitud de arco de $\mathbf{c}_i$ por Δs_i; entonces,

$$\Delta s_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt.$$

Cuando N es grande, la longitud de arco Δs_i es pequeña y $f(x,y,z)$ es aproximadamente constante para puntos en $\mathbf{c}_i$. Consideremos las sumas

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta s_i,$$

donde $(x_i, y_i, z_i) = \mathbf{c}(t)$ para algún $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Por el teorema del valor medio sabemos que $\Delta s_i = \|\mathbf{c}'(t_i^*)\|\Delta t_i$, donde $t_i \le t_i^* \le t_{i+1}$ y

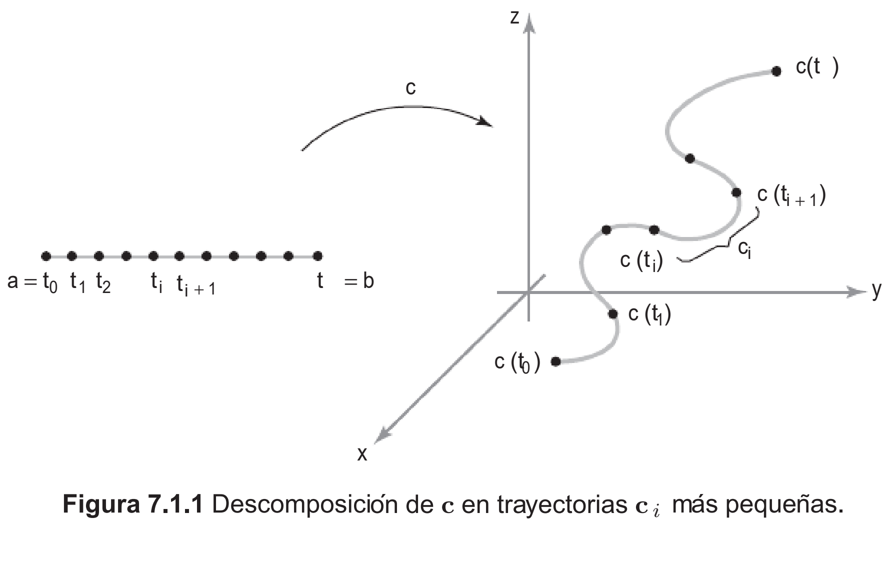

Figura 7.1.1 Descomposición de $\mathbf{c}$ en trayectorias $\mathbf{c}_i$ más pequeñas.