11. Hallar la masa de la esfera sólida de radio 5 cuya densidad está dada por

$$\delta(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1$$

y suponiendo que el centro de la esfera se encuentra en el origen.

12. Un disco sólido de radio 9 y altura 2 se coloca en el origen, de modo que puede expresarse mediante $x^2 + y^2 = 81$ y $0 \leq z \leq 2$. Si la densidad del disco está dada por

$$\delta(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1,$$

calcular su masa.

13. Hallar el centro de masa de la región acotada por $x + y + z = 2, x = 0, y = 0$ y $z = 0$, suponiendo que la densidad es uniforme.

14. Hallar el centro de masa del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 2$ si la densidad es $\delta = (x^2 + y^2)z^2$.

15. Hallar el valor medio de $\operatorname{sen}^2 \pi z \cos^2 \pi x$ sobre el cubo $[0, 2] \times [0, 4] \times [0, 6]$.

16. Hallar el valor medio de e^{-z} sobre la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

17. Un sólido con densidad constante está acotado superiormente por el plano $z = a$ e inferiormente por el cono descrito en coordenadas esféricas por la ecuación $\phi = k$, donde k es una constante $0 < k < \pi/2$. Expresar por medio de una integral su momento de inercia respecto del eje z.

18. Hallar el momento de inercia respecto del eje y de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ si la densidad de masa es un constante δ.

19. Hallar el potencial gravitatorio producido por un planeta esférico de masa $M = 3 \times 10^{26}$ kg sobre una masa m situada a una distancia 2×10^8 m de su centro.

20. En Ejercicio 19, hallar la fuerza gravitatoria ejercida sobre un objeto de 70 kg en la misma posición.

21. Se dice que un cuerpo W en coordenadas xyz es *simétrico respecto a un plano determinado* si por cada partícula a un lado de dicho plano existe otra partícula de igual masa situada en la imagen especular de la primera respecto del plano.

(a) Discutir los planos de simetría de la carrocería de un automóvil.

(b) Sea xy el plano de simetría y sean W^+ y W^- las partes de W por encima y por debajo del plano, respectivamente. Por hipótesis, la densidad de masa $\delta(x, y, z)$ satisface $\delta(x, y, -z) = \delta(x, y, z)$. Justificar los pasos indicados al final del enunciado.

(c) Explicar por qué la parte (b) demuestra que si un cuerpo es simétrico respecto de un plano, entonces su centro de masa cae sobre ese plano.

(d) Deducir la siguiente ley de la mecánica: *Si un cuerpo es simétrico respecto de dos planos, entonces su centro de masa cae en la recta de intersección.*

$$\begin{aligned}
\overline{z} \cdot \iiint_W \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz &= \iiint_W z\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{W^+} z\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_{W^-} z\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{W^+} z\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_{W^+} -w\delta(u, v, -w)\, du\, dv\, dw \\
&= 0.
\end{aligned}$$

22. Una placa rectangular uniforme de acero de lados a y b rota alrededor de su centro de masa con velocidad angular constante ω.

(a) La energía cinética es igual a $\frac{1}{2}$(masa) (velocidad)^2. Justificar que la energía cinética de un elemento de masa $\delta\, dx\, dy$ ($\delta =$ constante) es igual a $\delta(\omega^2/2)(x^2+y^2)\, dx\, dy$, siempre que el origen $(0, 0)$ esté situado en el centro de masa de la placa.

(b) Justificar la fórmula de la energía cinética:

$$\text{K.E.} = \iint_{\text{placa}} \delta \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

(c) Calcular la integral, suponiendo que la placa está definida por las desigualdades $-a/2 \leq x \leq a/2$, $-b/2 \leq y \leq b/2$.