43. Demuestre que cualesquiera n vectores que generan un espacio V de dimensión n forman una base para V. [***Sugerencia:*** Demuestre que si los n vectores no son linealmente independientes, entonces dim $V < n$.]

***44.** Demuestre que todo subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita tiene una base.

45. Encuentre dos bases para $\mathbb{R}^4$ que contengan a $(1, 0, 1, 0)$ y $(0, 1, 0, 1)$ y no tengan otros vectores en común.

46. ¿Para qué valores del número real a los vectores $(a, 1, 0)$, $(1, 0, a)$ y $(1 + a, 1 - a)$ constituyen una base para $\mathbb{R}^3$?

EJERCICIOS CON MATLAB 5.5

Los problemas en esta sección se concentran en el trabajo con bases para *todo* $\mathbb{R}^n$ (o todo P_n o todo M_{nm}). Los problemas en la sección 5.6 se concentran en bases de subespacios.

1. ***a)*** Verifique que los conjuntos dados en el inciso *b*) forman una base para el espacio vectorial indicado. Explique cómo se satisface cada una de las propiedades de la definición de una base.

b) Genere un vector aleatorio en el espacio vectorial dado. Demuestre que se trata de una combinación lineal de los vectores de la base con coeficientes únicos para la combinación lineal. Repita para otros dos vectores aleatorios.

i) $\mathbb{R}^3$ $\left\{\begin{pmatrix} 8.25 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.01 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -6.5 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

ii) $\mathbb{R}^5$ $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

iii) M_{22} $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1.2 & 2.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.5 & 4 \\ 4.3 & 5 \end{pmatrix}\right\}$

(Vea el problema 10 de MATLAB 5.3.)

iv) P_4 $\{x^4 - x^3 + 2x + 1,\ x^4 + 3x^2 - x + 4,\ 2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 5,\ x^4 + x^3 - 2x^2 + x,\ x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\}$

2. Para los conjuntos de vectores en el problema 9*b*) de MATLAB 5.4 demuestre que esos conjuntos generan su $\mathbb{R}^n$ respectivo pero no forman una base. Para cada conjunto, genere un vector aleatorio **w** en su $\mathbb{R}^n$ correspondiente y verifique que **w** es una combinación lineal del conjunto de vectores pero que los coeficientes de la combinación lineal no son únicos. Repita para otros dos vectores **w**.

3. Para cada base en el problema 1 de MATLAB de esta sección:

a) Elimine un vector del conjunto y muestre que el nuevo conjunto no es una base, describiendo qué propiedad de las bases no se satisface. Repita (elimine otro vector).

b) Genere un vector aleatorio **w** en el espacio vectorial. Agregue **w** al conjunto de vectores. Muestre que el nuevo conjunto no es una base, describa qué propiedad no se satisface. Repita con otro **w**.

c) (*Lápiz y papel*) Escriba una demostración, basada en la forma escalonada reducida por renglones, de que una base en $\mathbb{R}^n$ debe contener exactamente n vectores y una demostración de que una base en P_n debe contener exactamente $n + 1$ vectores.