Solución En la fórmula (3),

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -r\cos\theta,$$

y

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = r\operatorname{sen}\theta,$$

por lo que el integrando del área es

$$\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| = \sqrt{r^2 + r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta} = r\sqrt{2}.$$

Evidentemente, $\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\|$ se anula para $r = 0$, pero $\mathbf{\Phi}(0,\theta) = (0,0,0)$ para cualqueir θ. Por tanto, $(0,0,0)$ es el único punto en el que la superficie no es regular. Tenemos

$$\iint_D \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\|\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sqrt{2}\, d\theta = \sqrt{2}\pi.$$

Para confirmar que esta es el área de $\mathbf{\Phi}(D)$, tenemos que comprobar que $\mathbf{\Phi}$ es inyectiva (para puntos que no están en la frontera de D). Sea D^0 el conjunto de (r,θ) con $0 < r < 1$ y $0 < \theta < 2\pi$. Por tanto, D^0 es D sin su frontera. Para ver que $\mathbf{\Phi}\colon D^0 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva, supongamos que $\mathbf{\Phi}(r,\theta) = \mathbf{\Phi}(r',\theta')$ para (r,θ) y $(r',\theta') \in D^0$. Entonces

$$r\cos\theta = r'\cos\theta', \qquad r\operatorname{sen}\theta = r'\operatorname{sen}\theta', \qquad r = r'.$$

A partir de estas ecuaciones se deduce que $\cos\theta = \cos\theta'$ y $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta'$. Luego, o bien $\theta = \theta'$ o $\theta = \theta' + 2\pi n$. Pero el segundo caso es imposible para n entero distinto de cero, ya que tanto θ como θ' pertenecen al intervalo abierto $(0, 2\pi)$ y por tanto no pueden distar más de 2π radianes. Esto prueba que fuera de la frontera, $\mathbf{\Phi}$ es inyectiva (¿es inyectiva $\mathbf{\Phi}\colon D \to \mathbb{R}^3$?). En los próximos ejemplos, normalmente no comprobaremos que la parametrización es inyectiva cuando intuitivamente esté claro que es así. ▲

Ejemplo 2 Un ***helicoide*** se define por $\mathbf{\Phi}\colon D \to \mathbb{R}^3$, donde

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta, \qquad z = \theta$$

y D es la región en la que $0 \le \theta \le 2\pi$ y $0 \le r \le 1$ (Figura 7.4.2). Hallar su área.

Solución Calculamos $\partial(x,y)/\partial(r,\theta) = r$ como en el Ejemplo 1, y

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin\theta,$$

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta.$$