

40. Encuentre  $B$  tal que  $AB = C$ . Si  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ .

41. Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ , pruebe que  $A^2 + B^2 = (A + B)^2$ .

42. Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , encuentre las condiciones para  $a, b, c$  y  $d$  tal que  $AB = BA$ .

43. Una matriz  $A$  de  $n \times n$  tal que  $A^2 = I_n$  se llama involutiva. Pruebe que la siguiente matriz es involutiva:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

44. Demuestre que  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$  con  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

45. Sean  $a_{11}, a_{12}, a_{21}$  y  $a_{22}$  números reales dados tales que  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ .

Encuentre los números  $b_{11}, b_{12}, b_{21}$  y  $b_{22}$  tales que  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

46. Dada la siguiente matriz pruebe que  $A^2 = A$ :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

47. Verifique la ley asociativa para la multiplicación de las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

48. De la misma forma que en el ejemplo 2.2.6, suponga que un grupo de personas ha contraído una enfermedad contagiosa. Estas personas tienen contacto con un segundo grupo que, a su vez,

tiene contacto con un tercer grupo. Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  representa los contactos entre el

grupo contagioso y los miembros del grupo 2, y si  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  representa los contac-

tos entre los grupos 2 y 3. a) ¿Cuántas personas hay en cada grupo? b) Encuentre la matriz de contactos indirectos entre los grupos 1 y 3.