Ejemplo 9 Supongamos que una partícula sigue la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ hasta que se sale por la tangente en el instante $t = 1$. ¿Dónde estará en el instante $t = 3$?

Solución El vector velocidad es $(e^t, -e^{-t}, -\operatorname{sen} t)$ que, en $t = 1$, es el vector $(e, -1/e, -\operatorname{sen} 1)$. La partícula está en $(e, 1/e, \cos 1)$ en el instante $t = 1$. La ecuación de la recta tangente es $\boldsymbol{l}(t) = (e, 1/e, \cos 1) + (t-1)(e, -1/e, -\operatorname{sen} 1)$. En $t = 3$, la posición sobre esta recta es

$$\boldsymbol{l}(3) = \left(e, \frac{1}{e}, \cos 1\right) + 2\left(e, -\frac{1}{e}, -\operatorname{sen} 1\right) = \left(3e, -\frac{1}{e}, \cos 1 - 2 \operatorname{sen} 1\right)$$
$$\cong (8{,}155; -0{,}368; -1{,}143).$$ ▲

Ejercicios

Dibujar las curvas que son las imágenes de las trayectorias de los Ejercicios 1 a 4.

1. $x = \operatorname{sen} t, y = 4 \cos t$, donde $0 \le t \le 2\pi$

2. $x = 2 \operatorname{sen} t, y = 4 \cos t$, donde $0 \le t \le 2\pi$

3. $\mathbf{c}(t) = (2t - 1, t + 2, t)$

4. $\mathbf{c}(t) = (-t, 2t, 1/t)$, donde $1 \le t \le 3$

5. Sea C la circunferencia de radio 2 y con centro en el origen.

(a) Hallar una parametrización de C que induzca una orientación en sentido antihorario y con origen en (2, 0).

(b) Hallar una parametrización de C que induzca una orientación en sentido horario y con origen en (0, 2).

(c) Hallar una parametrización de C si ahora tiene el centro en el punto (4, 7).

6. Dar una parametrización para cada una de las curvas siguientes:

(a) La recta que pasa por (1, 2, 3) y (−2, 0, 7).

(b) La gráfica de $f(x) = x^2$.

(c) El cuadrado cuyos vértices son (0, 0), (0, 1), (1, 1) y (1, 0) (dividirlo en segmentos de recta).

(d) La elipse dada por

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

En los Ejercicios 7 a 10, determinar el vector velocidad de la trayectoria dada.

7. $\mathbf{c}(t) = 6t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

8. $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen} 3t)\mathbf{i} + (\cos 3t)\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}$

9. $\mathbf{r}(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t)$

10. $\mathbf{r}(t) = (4e^t, 6t^4, \cos t)$

En los Ejercicios 11 a 14, calcular los vectores tangente a la trayectoria dada.

11. $\mathbf{c}(t) = (e^t, \cos t)$

12. $\mathbf{c}(t) = (3t^2, t^3)$

13. $\mathbf{c}(t) = (t \operatorname{sen} t, 4t)$

14. $\mathbf{c}(t) = (t^2, e^2)$

15. ¿Cuándo es *horizontal* el vector velocidad de un punto que está en el borde de una rueda de radio R que gira a una velocidad v? ¿Cuál es la velocidad en dicho punto?

16. Si la posición de una partícula en el espacio es $(6t, 3t^2, t^3)$ en el instante t, ¿cuál es su vector velocidad en $t = 0$?