Del teorema 3.1.1,

$$\det T = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Así, $\det T \neq 0$ si y sólo si todos sus elementos en la diagonal son diferentes de cero.

Si $\det T \neq 0$, entonces T se puede reducir por renglones a I de la siguiente manera. Para $i = 1, 2, \ldots, n$, se divide el renglón i de T por $a_{ii} \neq 0$ para obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ésta es la forma escalonada por renglones de T, que tiene n pivotes, y por el teorema de resumen (2.6.4), T es invertible.

Suponga que $\det T = 0$. Entonces al menos una de las componentes de la diagonal es cero. Sea a_{ii} la primera de estas componentes. Entonces T se puede escribir como

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i} & a_{i-1,i-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{i,i+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Cuando T se reduce a su forma escalonada por renglones, no se tiene pivote en la columna i (explique por qué). Entonces la forma escalonada por renglones de T tiene menos de n pivotes, y por el teorema de resumen se puede concluir que T no es invertible.

Interpretación geométrica del determinante de 2 × 2

Sea $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. En la figura 3.1 se graficaron los puntos (a, c) y (b, d) en el plano xy y se dibujaron los segmentos de recta de $(0, 0)$ a cada uno de estos puntos. Se supone que estas dos rectas no son colineales. Esto equivale a suponer que (b, d) no es un múltiplo de (a, c).

Área generada por A

El **área generada por A** se define como el área del paralelogramo con cuatro vértices en $(0, 0)$, (a, c), (b, d) y $(a + b, c + d)$.

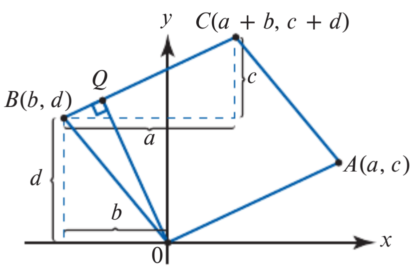

Figura 3.1

Q está en el segmento de línea BC y también en la recta perpendicular a BC que pasa por el origen. El área del paralelogramo es real $(\overline{0Q})(\overline{0A})$.