2.1 Geometría de funciones con valores reales

Iniciamos nuestro estudio de las funciones con valores reales desarrollando métodos para visualizarlas. En particular, presentamos las nociones de gráfica, curva de nivel y superficie de nivel de tales funciones.

Funciones y aplicaciones

Sea f una función cuyo dominio es un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ y que tiene un rango o recorrido contenido en $\mathbb{R}^m$. Con esto queremos decir que a cada $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, f asigna un valor $f(\mathbf{x})$, una m-tupla de $\mathbb{R}^m$. Estas funciones f se denominan ***funciones con valores vectoriales***[1] si $m > 1$ y ***funciones con valores escalares*** si $m = 1$. Por ejemplo, la función con valores escalares $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$ aplica el conjunto A de $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ ($n = 3$, en este caso) en $\mathbb{R}$ ($m = 1$). En ocasiones, denotamos f como sigue

$$f\colon (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}.$$

Obsérvese que en $\mathbb{R}^3$ solemos emplear la notación (x, y, z) en lugar de (x_1, x_2, x_3). En general, la notación $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$ resulta útil para indicar el valor al que se envía un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Escribimos $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ para indicar que A es el dominio de f (un subconjunto de $\mathbb{R}^n$) y que el recorrido está contenido en $\mathbb{R}^m$. También utilizamos la expresión f aplica A *en* $\mathbb{R}^m$. Estas funciones f se denominan ***funciones de varias variables*** si $A \subset \mathbb{R}^n, n > 1$.

Veamos otro ejemplo. Tomamos la función con valores vectoriales $g\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$ definida por la regla

$$g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6, \sqrt{x_1^2 + x_6^2}\right).$$

La primera coordenada del valor de g en $\mathbf{x}$ es el producto de las coordenadas de $\mathbf{x}$.

Las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ no son únicamente abstracciones matemáticas, aparecen de forma natural en problemas que se estudian en todas las ciencias. Por ejemplo, especificar la temperatura T en una región A del espacio requiere una función $T\colon A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ($n = 3, m = 1$); es decir, $T(x, y, z)$ es la temperatura en el punto (x, y, z). Especificar la velocidad de un fluido que se mueve en el espacio requiere una aplicación $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ es el vector velocidad del fluido en el

[1] Algunos matemáticos escriben esta f en negrita, utilizando la notación $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, ya que la función tiene valores vectoriales. Nosotros no lo hacemos así, ya que esto es una cuestión de gusto personal. Sin embargo, empleamos la negrita habitualmente para las aplicaciones que son campos vectoriales, definidos más adelante. El concepto de función se ha desarrollado a lo largo de varios siglos, abarcando su definición nuevos casos según aparecían. Por ejemplo, en 1667, James Gregory definió una función como "una cantidad obtenida a partir de otras cantidades por medio de una sucesión de operaciones algebraicas o por medio de cualquier otra operación imaginable." En 1755, Euler proporcionó la siguiente definición: "Si unas cantidades dependen de otras de forma tal que varíen siempre que las últimas se hagan variar, entonces se dice que las primeras son funciones de las últimas."