2.3 Diferenciación

En la Sección 2.1 hemos estudiado algunos métodos para dibujar la gráfica de una función. Con solo esos métodos puede ser imposible obtener la suficiente información como para captar incluso las características generales de una función complicada. Del cálculo elemental, sabemos que la idea de derivada nos puede ayudar mucho en esta tarea; por ejemplo, nos permite localizar máximos y mínimos y calcular tasas de cambio. La derivada tiene también muchas otras aplicaciones, como ya se habrá visto en cálculo de una variable.

Intuitivamente, en la Sección 2.2 hemos visto que una función continua es aquella que no tiene "fracturas" en su gráfica. Una función diferenciable de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ debería ser tal que no solamente no tuviera fracturas en su gráfica, sino que también tuviera un plano tangente bien definido a la gráfica en cada punto. Por tanto, tendrá que carecer de pliegues, esquinas o picos pronunciados en su gráfica (véase la Figura 2.3.1). En otras palabras, la gráfica tiene que ser *suave*.

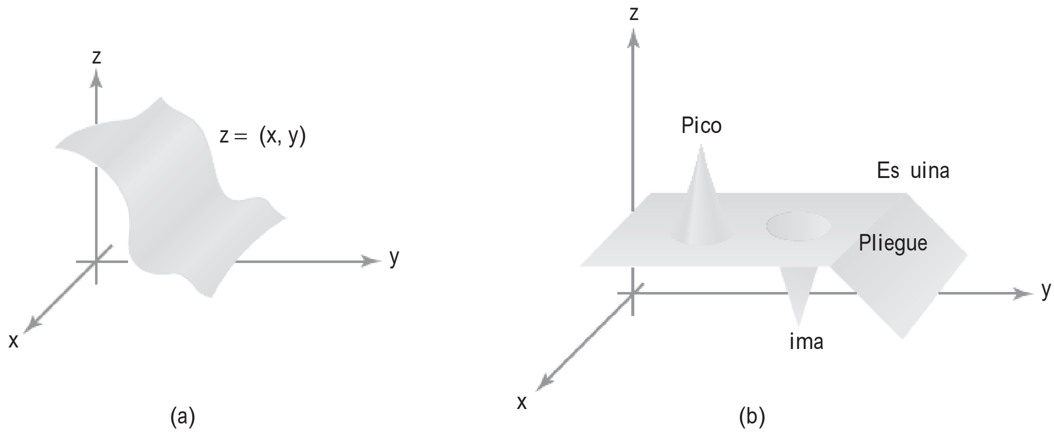

Figura 2.3.1 (a) Una gr áfica suave y (b) una gráfica no suave.

Derivadas parciales

Para precisar estas ideas, necesitamos una definición de lo que queremos decir con la frase "$f(x_1, \dots, x_n)$ es diferenciable en $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$". De hecho, esta definición no es tan simple como puede parecer. Para llegar a esto, vamos a definir en primer lugar el concepto de *derivada parcial*. Este concepto se basa en nuestros conocimientos de cálculo de una variable (en este punto es recomendable hacer un rápido repaso de la definición de derivada en algún libro de texto sobre cálculo de una variable).

Definición Derivadas parciales Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y supongamos que $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función con valores reales. Entonces $\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n$, las ***derivadas parciales*** de f respecto de la primera, segunda, ... , n-ésima variable, son las