EJEMPLO 5.4.10 Tres polinomios linealmente independientes en $\mathbb{P}_2$

En $\mathbb{P}_2$, determine si los polinomios $x - 2x^2$, $x^2 - 4x$ y $-7x + 8x^2$ son linealmente dependientes o independientes.

SOLUCIÓN ► Sea $c_1(x - 2x^2) + c_2(x^2 - 4x) + c_3(-7x + 8x^2) = 0$. Reacomodando los términos se obtiene

$$(c_1 - 4c_2 - 7c_3)x + (-2c_1 + c_2 + 8c_3)x^2 = 0$$

Esta ecuación se cumple para todo x si y sólo si

$$c_1 - 4c_2 - 7c_3 = 0$$

y

$$-2c_1 + c_2 + 8c_3 = 0$$

Pero para el teorema 1.4.1, este sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas tiene un número infinito de soluciones, lo que muestra que los polinomios son linealmente dependientes.

Si se resuelve este sistema homogéneo se obtiene, sucesivamente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -7 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{25}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & 0 \end{array}\right)$$

Así, se puede dar un valor arbitrario a c_3, $c_1 = \frac{25}{7}c_3$ y $c_2 = -\frac{6}{7}c_3$. Si, por ejemplo, $c_3 = 7$, entonces $c_1 = 25$, $c_2 = -6$ y se tiene

$$25(x - 2x^2) - 6(x^2 - 4x) + 7(-7x + 8x^2) = 0$$

RESUMEN 5.4

- ***Dependencia e independencia lineal***

  Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en un espacio vectorial V son **linealmente dependientes** si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos cero tales que

  $$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = 0$$

  Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son **linealmente independientes**.

- Dos vectores en un espacio vectorial V son linealmente dependientes si y sólo si uno es múltiplo escalar del otro.

- Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$.

- Un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^m$ es linealmente independiente si $n > m$.