Notación. Para indicar que D es la matriz diagonal con componentes diagonales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, se escribirá $D = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

El teorema 8.3.2 tiene un corolario útil que se deduce directamente del teorema 8.1.3.

Corolario 8.3.1

Si la matriz A de $n \times n$ tiene n valores característicos diferentes, entonces A es diagonalizable.

Observación. Si se seleccionan al azar los coeficientes reales de un polinomio de grado n, entonces, con probabilidad 1, el polinomio tendrá n raíces diferentes. No es difícil ver, intuitivamente, por qué esto se cumple. Por ejemplo, si $n = 2$, entonces la ecuación $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ tiene raíces reales si y sólo si $a^2 = 4b$, un evento muy improbable si a y b se eligen al azar. Por supuesto, se pueden escribir polinomios que tienen raíces de multiplicidad algebraica mayor que 1, pero son excepcionales. Por lo tanto, sin pretender precisión matemática, es posible decir que la *mayoría* de los polinomios tienen raíces distintas. De esta forma, la *mayoría* de las matrices tienen valores característicos distintos y, como se estableció al principio de esta sección, la *mayor parte* de las matrices son diagonalizables.

EJEMPLO 8.3.4 Diagonalización de una matriz de 2 × 2

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. En el ejemplo 8.1.3 se encontraron dos vectores característicos linealmente independientes $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Después, haciendo $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene que

$$C^{-1} = AC = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

que es la matriz cuyas componentes en la diagonal son los valores característicos de A.

EJEMPLO 8.3.5 Diagonalización de una matriz de 3 × 3 con tres valores característicos distintos

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. En el ejemplo 8.1.4, se calcularon tres vectores característicos linealmente independientes: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$C^{-1} = AC = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$