3. $D = [-1,1] \times [-1,1]$, $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$.

4. $D = [-1,1] \times [-1,1]$, $P(x,y) = x$, $Q(x,y) = y$.

5. $D = [-1,1] \times [-1,1]$, $P(x,y) = x - y$, $Q(x,y) = x + y$ [SUGERENCIA: Utilizar 3 y 4].

6. $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $P(x,y) = \operatorname{sen} x$, $Q(x,y) = \cos y$.

7. Sea C la curva suave a trozos cerrada que se forma al viajar en línea recta entre los puntos $(-2,1)$, $(-2,-3)$, $(1,-1)$, $(1,5)$ y otra vez de vuelta a $(-2,1)$, en ese orden. Utilizar el teorema de Green para calcular la integral:

$$\int_C (2xy)\,dx + (xy^2)\,dy.$$

8. Una partícula viaja a través de una superficie plana, moviéndose hacia el este una distancia de 3 m, luego hacia el norte una distancia de 4 m y luego volviendo al punto de partida. Sobre la partícula actúa un campo de fuerza, dado por $\mathbf{F}(x,y) = (3x + 4y^2)\mathbf{i} + (10xy)\mathbf{j}$. (Aquí suponemos que $\mathbf{j}$ apunta hacia el norte). Utilizar el teorema de Green para calcular el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ sobre la partícula.

9. Usando el teorema de Green, evaluar $\int_C y\,dx - x\,dy$, donde C es la frontera del cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$, orientada en sentido antihorario.

10. Hallar el área del círculo D de radio R usando el teorema de Green.

11. Comprobar el teorema de Green para el círculo D de centro $(0,0)$ y radio R y las funciones:

(a) $P(x,y) = xy^2, Q(x,y) = -yx^2$.

(b) $P(x,y) = x + y, Q(x,y) = y$.

(c) $P(x,y) = xy = Q(x,y)$.

(d) $P(x,y) = 2y, Q(x,y) = x$.

12. Utilizando el teorema de la divergencia, demostrar que $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,ds = 0$, donde $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ y D es el círculo unidad. Comprobarlo además directamente.

13. Hallar el área limitada por el eje x y un arco de la cicloide $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), y = a(1 - \cos\theta)$, donde $a > 0$ y $0 \le \theta \le 2\pi$ (usar el teorema de Green).

14. Bajo las condiciones del teorema de Green, demostrar

(a) $$\int_{\partial D} PQ\,dx + PQ\,dy =$$
$$= \iint_D \left[Q\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) + P\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right] dx\,dy.$$

(b) $$\int_{\partial D} \left(Q\frac{\partial P}{\partial x} - P\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx + \left(P\frac{\partial Q}{\partial y} - Q\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy$$
$$= 2\iint_D \left(P\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y} - Q\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y}\right) dx\,dy.$$

15. Evaluar la integral de línea

$$\int_C (2x^3 - y^3)\,dx + (x^3 + y^3)\,dy,$$

donde C es la circunferencia unidad, y comprobar el teorema de Green para este caso.

16. Demostrar la siguiente generalización del teorema de Green: Sea D una región en el plano xy cuya frontera está formada por un número finito de curvas orientadas simples y cerradas. Supongamos que, utilizando un número finito de segmentos paralelos a los ejes coordenados, D puede descomponerse en un número finito de regiones simples D_i, con la frontera de cada D_i orientada en sentido antihorario (véase la Figura 8.1.5). Entonces, si P y Q son de clase C^1 en D,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy,$$

donde ∂D es la frontera orientada de D. (INDICACIÓN: Aplicar el teorema de Green a cada D_i.)

17. Comprobar el teorema de Green para el integrando del Ejercicio 15 (es decir, con $P = 2x^3 - y^3$ y $Q = x^3 + y^3$) y la región anular D descrita por $a \le x^2 + y^2 \le b$, con la frontera orientada como en la Figura 8.1.5.

18. Sea D una región en la cual es válido el teorema de Green. Supongamos que f es armónica; es decir,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

en D. Demostrar que

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f}{\partial x}\,dy = 0.$$