Ejercicios

1. El helicoide se puede describir mediante

$$\mathbf{\Phi}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, bv), \text{donde } b \neq 0.$$

Demostrar que $H = 0$ y que $K = -b^2/(b^2+u^2)^2$. En las Figuras 7.7.1 y 7.7.5, vemos que el helicoide es realmente una superficie formada por una película de jabón. Las superficies en las que $H = 0$ se denominan ***superficies mínimas.***

2. Considérese la superficie con forma de silla de montar $z = xy$. Demostrar que

$$K = \frac{-1}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

y que

$$H = \frac{-xy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

3. Demostrar que $\mathbf{\Phi}(u, v) = (u, v, \log \cos v - \log \cos u)$ tiene curvatura media igual a cero (y es por tanto una superficie mínima; véase el Ejercicio 1).

4. Hallar la curvatura de Gauss del paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

5. Hallar la curvatura de Gauss del paraboloide hiperbólico

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

6. Hallar la curvatura de Gauss del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

7. Después de determinar K en el Ejercicio 6, integrar K para demostrar que:

$$\frac{1}{2\pi} \iint_S K \, dA = 2.$$

8. Hallar la curvatura K de:

(a) El cilindro $\Phi(u, v) = (2 \cos v, 2 \operatorname{sen} v, u)$.

(b) La superficie $\Phi(u, v) = (u, v, u^2)$.

9. Demostrar que la superficie de Enneper

$$\mathbf{\Phi}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2 v, u^2 - v^2\right)$$

es una superficie mínima ($H = 0$).

10. Considérese el toro T dado en el Ejercicio 4 de la Sección 7.4. Calcular su curvatura de Gauss y verificar el teorema de Gauss–Bonnet. [SUGERENCIA: Demostrar que $\|T_\theta \times T_\phi\|^2 = (R + \cos \phi)^2$ y $K = \cos \phi/(R + \cos \phi)$].

11. Sea $\mathbf{\Phi}(u, v) = (u, h(u) \cos v, h(u) \operatorname{sen} v), h > 0$, una superficie de revolución. Demostrar que $K = -h''/h\{1 + (h')^2\}^2$.

12. Decimos que una parametrización $\mathbf{\Phi}$ de una superficie S es ***conforme*** (véase la Sección 7.4), si $E = G$, $F = 0$. Supongamos que $\mathbf{\Phi}$ parametriza de manera conforme a S.[19] Demostrar que si H y K son idénticamente nulas, entonces S debe ser una parte de un plano en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicios de repaso del Capítulo 7

1. Integrar $f(x, y, z) = xyz$ a lo largo de las siguientes trayectorias:

(a) $\mathbf{c}(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, 3), 0 \leq t \leq 2\pi$

(b) $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t), 0 \leq t \leq 2\pi$

(c) $\mathbf{c}(t) = \frac{3}{2}t^2 \mathbf{i} + 2t^2 \mathbf{j} + t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$

(d) $\mathbf{c}(t) = t\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})t^2 \mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3 \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$

[19] Gauss probó que siempre existe una parametrización conforme de una superficie. El resultado de este ejercicio sigue siendo válido incluso si $\mathbf{\Phi}$ no es conforme, pero la demostración es más difícil.