$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{x} \tag{8.6.7}$$

Sea $B = A - (\lambda + c_2)I$. Entonces de (8.6.7)

$$B\mathbf{x} = [A - (\lambda + c_2)I]\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 \tag{8.6.8}$$

Si se supone que $c_2 \neq 0$, entonces $\lambda + c_2 \neq \lambda$ y $\lambda + c_2$ no es un valor característico de A (ya que λ es el único valor característico de A). Así, $\det B = \det [A - (\lambda + c_2)I] \neq 0$, lo que significa que B es invertible. Por lo tanto, (8.6.8) se puede escribir como

$$\mathbf{x} = B^{-1} c_1\mathbf{v}_1 = c_1B^{-1}\mathbf{v}_1 \tag{8.6.9}$$

Entonces, multiplicando ambos lados de (8.6.9) por λ se tiene

$$\lambda\mathbf{x} = \lambda c_1B^{-1}\mathbf{v}_1 = c_1B^{-1}\lambda\mathbf{v}_1 = c_1B^{-1}A\mathbf{v}_1 \tag{8.6.10}$$

Pero $B = A - (\lambda + c_2)I$, de manera que

$$A = B + (\lambda + c_2)I \tag{8.6.11}$$

Al insertar (8.6.11) en (8.6.10) se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda\mathbf{x} &= c_1B^{-1}[B + (\lambda + c_2)I]\mathbf{v}_1 \\ &= c_1[I + (\lambda + c_2)B^{-1}]\mathbf{v}_1 \\ &= c_1\mathbf{v}_1 + (\lambda + c_2)c_1B^{-1}\mathbf{v}_1 \end{aligned} \tag{8.6.12}$$

Pero utilizando (8.6.9), $c_1B^{-1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}$, de manera que (8.6.12) se convierte en

$$\lambda\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + (\lambda + c_2)\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}$$

o bien

$$\mathbf{0} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{x} \tag{8.6.13}$$

Pero $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{x}$ son linealmente independientes, lo que hace que $c_1 = c_2 = 0$. Esto contradice la suposición de que $c_2 \neq 0$. Entonces $c_2 = 0$, y por (8.6.6), $\mathbf{w}$ es un múltiplo de $\mathbf{v}_1$, por lo que $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1$ es un vector característico de A. Más aún, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ ya que si $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, entonces (8.6.5) dice que $\mathbf{x}$ es un vector característico de A. Por lo tanto, $c_1 \neq 0$. Sea

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{c_1}\mathbf{x} \tag{8.6.14}$$

Entonces $(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{c_1}\right)(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = \left(\frac{1}{c_1}\right)\mathbf{w} = \mathbf{v}_1$. Esto prueba el teorema.

Definición 8.6.2

Vector característico generalizado

Sea A una matriz de 2×2 con un solo valor característico λ que tiene multiplicidad geométrica 1. Sea $\mathbf{v}_1$ un vector característico de A. Entonces el vector $\mathbf{v}_2$ definido por $(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ se denomina **vector característico generalizado** de A correspondiente al valor característico λ.