Podemos orientar todas las superficies de este tipo tomando como cara positiva de S la cara de la que se aleja $\mathbf{n}$ (Figura 7.6.6). De este modo, la cara positiva de una superficie así queda determinada por la normal unitaria $\mathbf{n}$ con componente $\mathbf{k}$ positiva—es decir, *apuntando hacia arriba*. Si parametrizamos esta superficie mediante $\mathbf{\Phi}(u, v) = (u, v, g(u, v))$, entonces $\mathbf{\Phi}$ conservará la orientación.

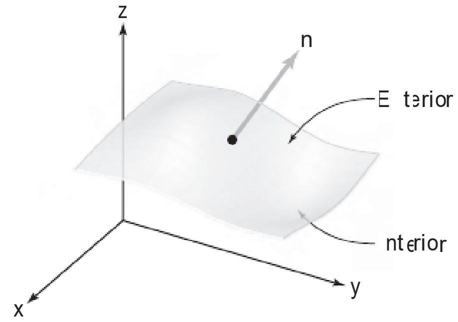

Figura 7.6.6 $\mathbf{n}$ se aleja de la cara exterior de la superficie.

▲

Independencia de la parametrización

Ahora vamos a enunciar sin demostrar un teorema que establece que la integral sobre una superficie orientada es independiente de la parametrización. La demostración de este teorema es análoga a la del Teorema 1 (Sección 7.2); de nuevo, el núcleo de esta demostración es la fórmula del cambio de variables—esta vez aplicada a las integrales dobles.

Teorema 4 Independencia de la parametrización de las integrales de superficie Sea S una superficie orientada y sean $\mathbf{\Phi}_1$ y $\mathbf{\Phi}_2$ dos parametrizaciones regulares que conservan la orientación, y sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo definido en S. Entonces

$$\iint_{\mathbf{\Phi}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathbf{\Phi}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Si $\mathbf{\Phi}_1$ conserva la orientación y $\mathbf{\Phi}_2$ invierte la orientación, entonces

$$\iint_{\mathbf{\Phi}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_{\mathbf{\Phi}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Si f es una función continua con valores reales definida en S, y si $\mathbf{\Phi}_1$ y $\mathbf{\Phi}_2$ son parametrizaciones de S, entonces

$$\iint_{\mathbf{\Phi}_1} f\, dS = \iint_{\mathbf{\Phi}_2} f\, dS.$$

Obsérvese que si $f = 1$, obtenemos

$$A(S) = \iint_{\mathbf{\Phi}_1} dS = \iint_{\mathbf{\Phi}_2} dS,$$