(I) Algebraicamente, como un conjunto de ternas (x, y, z), donde x, y y z son números reales.

(II) Geométricamente, como un conjunto de segmentos rectos dirigidos.

Estas dos formas de ver $\mathbb{R}^3$ son equivalentes. Para hacer una generalización es más fácil utilizar la definición (I). Específicamente, podemos definir $\mathbb{R}^n$, donde n es un entero positivo (posiblemente mayor que 3), como el conjunto de todas las n-tuplas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde los x_i son números reales. Por ejemplo, $(1, \sqrt{5}, 2, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^4$.

El conjunto $\mathbb{R}^n$ así definido se conoce como ***espacio euclídeo n-dimensional***, y sus elementos, que se denotan mediante $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y se llaman ***vectores*** o ***vectores n-dimensionales***. Haciendo $n = 1, 2$ o 3, obtenemos la recta, el plano y el espacio tridimensional, respectivamente.

Vamos a comenzar nuestro estudio del espacio euclídeo n-dimensional presentando varias operaciones algebraicas. Estas son análogas a las presentadas en la Sección 1.1 para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Las dos primeras, suma y multiplicación por un escalar, se definen como sigue:

(I) $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$;

y

(II) para cualquier número real $\boldsymbol{\alpha}$,

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

La importancia geométrica de estas operaciones para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ ya la hemos visto en la Sección 1.1.

Los n vectores

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

se denominan ***vectores de la base canónica*** de $\mathbb{R}^n$ y generalizan los tres vectores unitarios ortogonales $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ de $\mathbb{R}^3$. El vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se puede escribir entonces como $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$.

Para dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$, definimos el *producto escalar* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ como el número real $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Esta definición se generaliza fácilmente a $\mathbb{R}^n$; específicamente, para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, definimos el ***producto escalar*** de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ como $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. En $\mathbb{R}^n$, se suele emplear la notación $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ en lugar de $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ para el producto escalar.

Continuando la analogía con $\mathbb{R}^3$, definimos el concepto de ***longitud*** o ***norma*** de un vector $\mathbf{x}$ mediante la fórmula

$$\text{Longitud de } \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son dos vectores en el plano ($\mathbb{R}^2$) o en el espacio ($\mathbb{R}^3$), entonces sabemos que el ángulo θ que forman está dado por la fórmula

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}.$$