**SOLUCIÓN ►** Sumando primero el renglón 2 y después el renglón 4 al renglón 5, se obtiene

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(por la propiedad 3.2.1)}$$

Este ejemplo ilustra el hecho de que un poco de observación antes de comenzar los cálculos puede simplificar las cosas considerablemente.

Existe una propiedad adicional sobre determinantes que resultará de gran utilidad.

### Teorema 3.2.6

**Demostración**

Sea $A$ una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\boxed{a_{i1}\text{A}_{j1} + a_{i2}\text{A}_{j2}, + \cdots + a_{in}\,\text{A}_{jn} = 0 \qquad \text{si } i \neq j} \tag{3.2.7}$$

**Nota.** Del teorema 3.2.5, la suma en la ecuación (3.2.7) es igual a det $A$ si $i = j$.

**Demostración**

Sea

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \text{renglón } j \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces, como dos renglones de $B$ son iguales, det $B = 0$. Pero $B = A$ excepto por el renglón $j$. De esta forma se calcula det $B$ expandiendo en el renglón $j$ de $B$, se obtiene la suma en (3.2.7) y el teorema queda demostrado. Observe que al hacer la expansión respecto al renglón $j$, este renglón se elimina al calcular los cofactores de $B$. Así, $\text{B}_{jk} = \text{A}_{jk}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.

## RESUMEN 3.2

- Si $A = LU$ es una factorización $LU$ de $A$, entonces det $A$ = det $U$
- Si $PA = LU$ es una factorización $LU$ de $PA$, entonces det $A$ = det $U$/det $P$ = ±det $U$