4. ***a*)** La dimensión de $\mathbb{M}_{32}$ es 6. Genere cinco matrices aleatorias en $\mathbb{M}_{32}$ y muestre que no forman una base para $\mathbb{M}_{32}$, describiendo la propiedad de las bases que no se satisface. Genere siete matrices aleatorias en $\mathbb{M}_{32}$ y muestre que no forman una base para $\mathbb{M}_{32}$; asimismo, describa la propiedad que no se satisface.

***b*)** (*Lápiz y papel*) Escriba una demostración, basada en la forma escalonada por renglones reducidos, de que la dimensión de $\mathbb{M}_{nm}$ es nm, el producto de n y m.

5. Considere las matrices en el problema 2 de MATLAB 2.4 y las matrices cuyas columnas son los vectores en los conjuntos de vectores dados en el problema 1*b*) i) y ii) de esta sección.

***a*)** Determine para cada matriz A (digamos que su tamaño es $n \times n$) si es invertible y si las columnas de A forman una base para $\mathbb{R}^n$.

***b*)** Escriba una conclusión relacionando la propiedad de invertibilidad con la propiedad de que las columnas formen una base.

***c*)** (*Lápiz y papel*) Pruebe su conclusión.

6. ***a*)** (*Lápiz y papel*) Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5\}$ es una base para $\mathbb{R}^5$. Suponga que $\mathbf{w}_1 = A\mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_2 = A\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{w}_5 = A\mathbf{v}_5$, para alguna matriz A de $n \times 5$. Conteste las preguntas siguientes para completar la descripción de cómo encontrar $A\mathbf{w}$ para cualquier $\mathbf{w}$ si nada más se sabe lo que A le hace a la base.

i) Dado cualquier $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^5$, argumente por qué $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_5\mathbf{v}_5$, donde $c_1, \ldots, c_5$ son únicos.

ii) Muestre que $A\mathbf{w} = c_1\mathbf{w}_1 + \ldots + c_5\mathbf{w}_5$.

iii) Argumente por qué $A\mathbf{w} = [\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \mathbf{w}_3\ \mathbf{w}_4\ \mathbf{w}_5]\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}$.

***b*)** Sea $\{\mathbf{v}_1 \ldots, \mathbf{v}_5\}$ la base en $\mathbb{R}^5$ dada en el problema 1*b*) ii) de esta sección de MATLAB. Suponga que

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 36 \\ 25 \\ 13 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Encuentre $A\mathbf{w}$, donde

i) $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 9 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$

ii) `w = 2*rand(5, 1)-1`

***c*)** Repita *b*) para

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$