o, de forma resumida, el *elemento de área sobre la esfera* está dado por

$$dS = R^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta.$$

Integrales sobre gráficas

Vamos a desarrollar ahora otra fórmula para las integrales de superficie cuando la superficie se puede representar como una gráfica. Para ello, sea S la gráfica de $z = g(x, y)$ y consideremos la fórmula (4). Decimos que

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D \frac{f(x, y, g(x, y))}{\cos\theta}\, dx\, dy, \tag{5}$$

donde θ es el ángulo que forma la normal a la superficie con el vector unitario $\mathbf{k}$ en el punto $(x, y, g(x, y))$ (véase la Figura 7.5.2). Si se describe la superficie mediante la ecuación $\phi(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$, un vector normal $\mathbf{N}$ es $\nabla\phi$; es decir,

$$\mathbf{N} = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \tag{6}$$

[Véase el Ejemplo 4 de la Sección 7.3 o recuérdese que la normal a una superficie con ecuación $g(x, y, z) =$ constante está dada por ∇g]. Luego,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{N}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{(\partial g/\partial x)^2 + (\partial g/\partial y)^2 + 1}}.$$

Sustituyendo esta fórmula en la Ecuación (4), obtenemos la Ecuación (5). Obsérvese que $\cos\theta = \mathbf{n}\cdot\mathbf{k}$, donde $\mathbf{n} = \mathbf{N}/\|\mathbf{N}\|$ es la normal unitaria. Por tanto, podemos escribir

$$d\mathbf{S} = \frac{dx\ dy}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}}.$$

El resultado es, de hecho, geométricamente obvio, ya que si un pequeño rectángulo en el plano xy tiene área ΔA, entonces el área de la porción

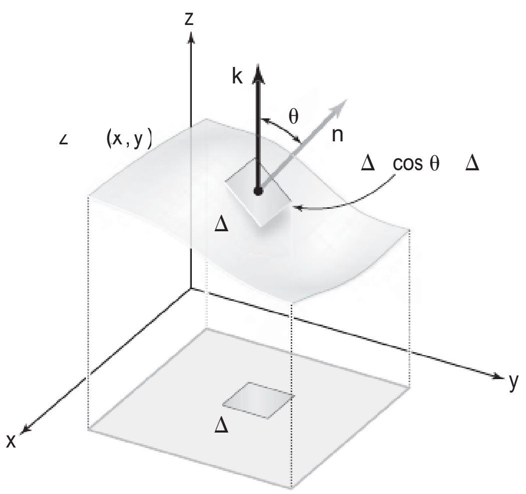

Figura 7.5.2 El área ΔS sobre la porción de área ΔA es $\Delta S = \Delta A/\cos\theta$, donde θ es el ángulo que la normal unitaria $\mathbf{n}$ forma con $\mathbf{k}$.