Por tanto, el segmento rectilíneo que va de $\mathbf{c}(t_i)$ a $\mathbf{c}(t_{i+1})$ tiene longitud

$$\sqrt{[x'(t_i^*)]^2 + [y'(t_i^{**})]^2 + [z'(t_i^{***})]^2}(t_{i+1} - t_i).$$

Así, la longitud de la aproximación poligonal es

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{[x'(t_i^*)]^2 + [y'(t_i^{**})]^2 + [z'(t_i^{***})]^2}(t_{i+1} - t_i).$$

Cuando $N \to \infty$, esta línea poligonal se aproxima cada vez más a la imagen de $\mathbf{c}$. Por tanto, definimos la longitud de arco de $\mathbf{c}$ como el límite, si existe, de la sucesión S_N cuando $N \to \infty$. Puesto que suponemos que las derivadas x', y' y z' son continuas en $[a, b]$, podemos concluir que, de hecho, el límite existe y está dado por

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt.$$

(La teoría de integración relaciona la integral como límites de sumas mediante la fórmula

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i^*)(t_{i+1} - t_i),$$

donde $t_0, \ldots, t_N$ es una partición de $[a, b], t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$ es arbitrario y f es una función continua. Aquí, tenemos *puntos posiblemente diferentes* t_i^*, t_i^{**} y t_i^{***}, por lo que se necesita una extensión adecuada de esta fórmula.)

Ejercicios

En los Ejercicios 1 a 6, calcular la longitud de arco de la curva dada en el intervalo especificado.[4]

1. $(2\cos t, 2\operatorname{sen} t, t)$, para $0 \le t \le 2\pi$.

2. $(1, 3t^2, t^3)$, para $0 \le t \le 1$.

3. $(\operatorname{sen} 3t, \cos 3t, 2t^{3/2})$, para $0 \le t \le 1$.

4. $\left(t+1, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2} + 7, \dfrac{1}{2}t^2\right)$, para $1 \le t \le 2$.

5. (t, t, t^2), para $1 \le t \le 2$.

6. $(t, t\operatorname{sen} t, t\cos t)$, para $0 \le t \le \pi$.

7. Hallar la longitud de arco de $\mathbf{c}(t) = (t, |t|)$ para $-1 \le t \le 1$.

[4]En algunos de estos problemas habrá que emplear la siguiente fórmula

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})\right] + C$$

disponible en la tabla de integrales al final del libro.