$$0 \le \left|\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right|^2 = \left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} - \frac{2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}$$

$$= \frac{|\mathbf{u}|^2}{|\mathbf{u}|^2} - \frac{2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} + \frac{|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2} = 2 - \frac{2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

Así, $\frac{2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \le 2$, de manera que $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \le 1$ y $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$. En forma similar, comenzando con $0 \le \left|\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} + \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right|^2$, se llega a $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \ge -1$, o sea, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \ge -|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$. Con estas dos desigualdades se obtiene

$$-|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \le \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \quad \text{o} \quad |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$

ii) Si $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$, entonces $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = |\lambda\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}| = |\lambda||\mathbf{v}|^2$ y $|\mathbf{u}||\mathbf{v}| = |\lambda\mathbf{v}||\mathbf{v}| = |\lambda||\mathbf{v}||\mathbf{v}| = |\lambda||\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|$. Inversamente, suponga que $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$ con $\mathbf{u} \ne 0$ y $\mathbf{v} \ne \mathbf{0}$. Entonces

$$\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = 1, \text{ de manera que } \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \pm 1.$$

Caso 1: $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = 1$. Entonces

$$\left|\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right|^2 = \left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) \overset{\text{como en i)}}{=} 2 - \frac{2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = 2 - 2 = 0$$

Así,

$$\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad \text{o} \quad \mathbf{u} = \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Caso 2: $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = -1$. Entonces

$$\left|\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right|^2 - 2 + \frac{2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = 2 - 2 = 0$$

de manera que

$$\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = -\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = -\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

RESUMEN 6.1

- Los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ en $\mathbb{R}^n$ forman un **conjunto ortogonal** si $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ para $i \ne j$. Si además $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, se dice que el conjunto es **ortonormal**.
- $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}|^{\frac{1}{2}}$ se llama **longitud** o **norma** de $\mathbf{v}$.
- Todo subespacio de $\mathbb{R}^n$ tiene una base ortonormal. El **proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt** se puede utilizar para construir tal base.
- Una **matriz ortogonal** es una matriz Q invertible de $n \times n$ tal que $Q^{-1} = Q^\top$.