Suponga que se escribe un número complejo en su forma polar $z = re^{i\theta}$. Entonces

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n(e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \qquad \textbf{(B.19)}$$

La fórmula (B.19) es útil para muchos cálculos. En particular, cuando $r = |z| = 1$ se obtiene la **fórmula de De Moivre**.*

Fórmula de De Moivre

Fórmula de De Moivre

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta \qquad \textbf{(B.18)}$$

EJEMPLO B.7 Calcule $(1 + i)^5$.

SOLUCIÓN ► En el ejemplo B.5*iv*) se mostró que $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$. Entonces

$$(1+i)^5 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}\right)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5 e^{\frac{5\pi i}{4}} = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -4 - 4\,i$$

Esto se puede verificar mediante el cálculo directo. Si este cálculo directo no parece más difícil, intente calcular $(1 + i)^{20}$ directamente. Procediendo como antes se obtiene

$$(1+i)^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20} e^{\frac{20\pi i}{4}} = 2^{10}(\cos 5\pi + i \operatorname{sen} 5\pi)$$

$$= 2^{10}(-1 + 0) = -1\,024$$

Demostración de la identidad de Euler

Se demostrará que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(B.21)}$$

usando las series de potencia. Si no está familiarizado con ellas, omita esta demostración. Se tiene

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \textbf{(B.22)}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad \textbf{(B.23)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad \textbf{(B.24)}$$

Aunque aquí no se demuestra, estas tres series convergen para todo número complejo x. Entonces

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots \qquad \textbf{(B.25)}$$

* Abraham de Moivre (1667-1754) fue un matemático francés conocido por su trabajo sobre teoría de probabilidad, series infinitas y trigonometría. Su reconocimiento era tal que Newton con frecuencia decía a quienes le hacían preguntas sobre matemáticas, “vayan con De Moivre; él sabe esas cosas mejor que yo”.