lo que demuestra que el área es independiente de la parametrización.

Por tanto, podemos utilizar sin ninguna ambigüedad la siguiente notación

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

(o una suma de tales integrales, si $S$ es una unión de superficies parametrizadas que solo se intersecan a lo largo de sus curvas de frontera), donde $\mathbf{\Phi}$ es una parametrización que conserva la orientación. El Teorema 4 garantiza que el valor de la integral no depende de la elección de $\mathbf{\Phi}$.

## Relación con las integrales escalares

Recordemos de la fórmula (1) de la Sección 7.2 que una integral de línea $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ se puede interpretar como la integral a lo largo de una trayectoria de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{c}$ (aunque para el caso en que $\mathbf{c}$ se corta a sí misma, la integral obtenida no es técnicamente una integral a lo largo de una trayectoria). Una situación similar se da para las integrales de superficie, puesto que estamos suponiendo que las aplicaciones $\mathbf{\Phi}$ que definen la superficie $S$ son inyectivas, excepto quizá sobre la frontera de $D$, lo que se puede ignorar para los propósitos de integración. Luego, al definir integrales sobre superficies, suponemos en este texto que las superficies no se cortan a sí mismas.

Para una superficie orientada suave $S$ y una parametrización que conserva la orientación $\mathbf{\Phi}$ de $S$, podemos expresar $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ como una integral de una función con valores reales $f$ sobre la superficie. Sea $\mathbf{n} = (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)/\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|$ la normal unitaria que apunta hacia el exterior de $S$. Entonces

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\, du\, dv \\
&= \iint_D \mathbf{F} \cdot \left( \frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} \right) \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\, du\, dv \\
&= \iint_D (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\, du\, dv = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_S f\, dS,
\end{aligned}$$

donde $f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. Por tanto, hemos probado el siguiente teorema.

**Teorema 5** $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, la integral de superficie de $\mathbf{F}$ sobre $S$, es igual a la integral de la componente normal de $\mathbf{F}$ sobre la superficie. En resumen,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

La observación del Teorema 5 suele ahorrar esfuerzos de cálculo, como así se demuestra en el Ejemplo 4.