que es una parábola abriéndose hacia abajo. Ahora la gráfica se puede visualizar elevando las curvas de nivel a las alturas apropiadas e imaginando una superficie suave que las contenga. El cálculo de las secciones parabólicas permite colocar las curvas de nivel de la forma adecuada. Este procedimiento genera la silla de montar hiperbólica indicada en la Figura 2.1.10. Compárese esta con las gráficas generadas por computadora de la Figura 2.1.11 (obsérvese que se ha cambiado la orientación de los ejes). ▲

Ejemplo 5 Describir los conjuntos de nivel de la función

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

Solución Este es el análogo tridimensional del Ejemplo 3. En este contexto, los conjuntos de nivel son superficies en el dominio tridimensional $\mathbb{R}^3$. La gráfica en $\mathbb{R}^4$ no se puede visualizar directamente, pero sus secciones se pueden calcular.

El conjunto de nivel de valor c es el conjunto

$$L_c = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = c\},$$

que es la esfera centrada en el origen con radio $\sqrt{c}$ para $c > 0$, un único punto en el origen para $c = 0$ y es vacía para $c < 0$. Los conjuntos de nivel para $c = 0, 1, 4$ y 9 se indican en la Figura 2.1.12.

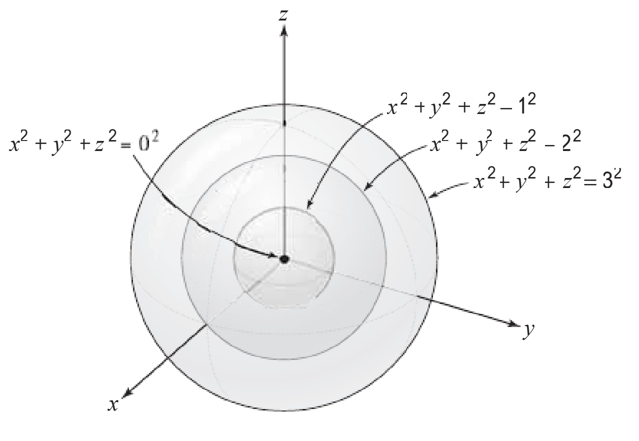

Figura 2.1.12 Algunas superficies de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. ▲

Ejemplo 6 Describir la gráfica de la función $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, que es el análogo tridimensional del Ejemplo 4 y que también se denomina ***silla de montar***.

Solución Formalmente, la gráfica de f es un subconjunto del espacio de cuatro dimensiones. Si denotamos los puntos de este espacio por (x, y, z, t), entonces la gráfica está dada por

$$\{(x, y, z, t) \mid t = x^2 + y^2 - z^2\}.$$

Las superficies de nivel de f se definen como