$$\begin{aligned} y_1 &= a + bx_1 + cx_1^2 \\ y_2 &= a + bx_2 + cx_2^2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y_n &= a + bx_n + cx_n^2 \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

El sistema (6.2.10) se puede volver a escribir como

$$\mathbf{y} = A\mathbf{u}$$

Con

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{6.2.11}$$

al igual que antes. Si todos los datos no se encuentran sobre la misma parábola, entonces $y - A\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ para cualquier vector $\mathbf{u}$, y de nuevo el problema es

Encontrar un vector $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $|\mathbf{y} - A\mathbf{u}|$ sea mínima.

Utilizando un razonamiento similar al anterior, se puede demostrar que si cuando menos tres de las x_i son diferentes, entonces $A^\top A$ es invertible y el vector que minimiza al vector $\bar{\mathbf{u}}$ está dado por

$$\boxed{\bar{\mathbf{u}} = (A^\top A)^{-1} A^\top \mathbf{y}} \tag{6.2.12}$$

EJEMPLO 6.2.2 El mejor ajuste cuadrático para cuatro puntos

Encuentre el mejor ajuste cuadrático para los datos del ejemplo 6.2.1.

SOLUCIÓN ► Aquí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \quad A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 30 \\ 6 & 30 & 84 \\ 30 & 84 & 354 \end{pmatrix}, \qquad (A^\top A)^{-1} = \frac{1}{4\,752} \begin{pmatrix} 3\,564 & 396 & -396 \\ 396 & 516 & -156 \\ -396 & -156 & 84 \end{pmatrix}$$

y

$$\bar{\mathbf{u}} = (A^\top A)^{-1} A^\top \mathbf{y} = \frac{1}{4\,752} \begin{pmatrix} 3\,564 & 396 & -396 \\ 396 & 516 & -156 \\ -396 & -156 & 84 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4\,752} \begin{pmatrix} 3\,564 & 396 & -396 \\ 396 & 516 & -156 \\ -396 & -156 & 84 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 31 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\,752} \begin{pmatrix} 17\,820 \\ -3\,852 \\ -180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.75 \\ -0.81 \\ -0.04 \end{pmatrix}$$