4.4 Divergencia y rotacional

Para las operaciones de divergencia y rotacional, vamos a utilizar el ***operador nabla***, definido como

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

En el espacio de n dimensiones

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Para funciones de una variable, el cálculo de una derivada se puede interpretar como una operación o proceso; es decir, dada una función $y = f(x)$, su derivada es el resultado de *operar* sobre y mediante el *operador* derivada d/dx. Del mismo modo, para funciones de dos variables, podemos escribir el gradiente como

$$\nabla f = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}$$

y para funciones de tres variables como

$$\nabla f = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

En términos operacionales, el gradiente de f se obtiene tomando el operador ∇ y aplicándolo a f.

Definición de divergencia

Definimos la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}$ tomando el *producto escalar* de ∇ con $\mathbf{F}$.

Divergencia Si $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, la ***divergencia*** de $\mathbf{F}$ es el campo escalar

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

De forma similar, si $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$, su divergencia es

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$