Luego, $\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = -(\partial g/\partial x)\mathbf{i} - (\partial g/\partial y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Si $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ es un campo vectorial continuo, entonces obtenemos

Integral de superficie de un campo vectorial sobre una gráfica S

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y)\, dx\, dy \\ &= \iint_D \left[F_1\left(-\frac{\partial g}{\partial x}\right) + F_2\left(-\frac{\partial g}{\partial y}\right) + F_3\right] dx\, dy.\end{aligned} \tag{4}$$

Ejemplo 6 Las ecuaciones

$$z = 12, \qquad x^2 + y^2 \le 25$$

describen un disco de radio 5 que está en el plano $z = 12$. Supongamos que $\mathbf{r}$ es el campo vectorial

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Calcular $\iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$.

Solución Vamos a resolver esto de tres maneras. En primer lugar, tenemos $\partial z/\partial x = \partial z/\partial y = 0$, ya que $z = 12$ es constante en el disco, de modo que

$$\mathbf{r}(x, y, z) \cdot (\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y) = \mathbf{r}(x, y, z) \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{r}(x, y, z) \cdot \mathbf{k} = z.$$

Utilizando la definición original del principio de esta sección, la integral se convierte en

$$\iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D z\, dx\, dy = \iint_D 12\, dx\, dy = 12(\text{área de } D) = 300\pi.$$

Veamos una segunda solución. Puesto que el disco es paralelo al plano xy, la normal unitaria exterior es $\mathbf{k}$. Por tanto, $\mathbf{n}(x, y, z) = \mathbf{k}$ y $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = z$. Sin embargo, $\|\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y\| = \|\mathbf{k}\| = 1$, y por tanto sabemos por la exposición anterior al Teorema 5 que

$$\iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S z\, dS = \iint_D 12\, dx\, dy = 300\pi.$$

La tercera forma de resolver este problema es usando directamente la Ecuación (4), con $g(x, y) = 12$ y D el disco $x^2 + y^2 \le 25$:

$$\iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (x \cdot 0 + y \cdot 0 + 12)\, dx\, dy = 12(\text{área de } D) = 300\pi.$$

▲