Recordemos que una superficie regular (hablando de manera informal) es aquella que no presenta esquinas ni rupturas.

En el resto de este capítulo y en el siguiente, consideraremos solo superficies regulares a trozos que son uniones de imágenes de superficies parametrizadas $\mathbf{\Phi}_i\colon D_i \to \mathbb{R}^3$ para las que:

(I) D_i es una región elemental en el plano;

(II) $\mathbf{\Phi}_i$ es de clase C^1 e inyectiva, excepto posiblemente en la frontera de D_i y

(III) S_i, la imagen de $\mathbf{\Phi}_i$, es regular, excepto posiblemente en un número finito de puntos.

Definición Área de una superficie parametrizada Definimos el ***área***[10] $A(S)$ de una superficie parametrizada mediante

$$A(S) = \iint_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\, du\, dv, \tag{1}$$

donde $\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|$ es la norma de $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$. Si S es una unión de superficies S_i, su área es la suma de las áreas de las S_i.

Como podemos verificar fácilmente,

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right]^2}, \tag{2}$$

donde

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

y así sucesivamente. Por tanto, la Ecuación (1) se convierte en

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right]^2}\, du\, dv. \tag{3}$$

Justificación de la fórmula del área

Podemos justificar la definición del área de una superficie analizando la integral $\iint_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\, du\, dv$ en términos de sumas de Riemann. Con el fin de simplificar, supongamos que D es un rectángulo; considera-

[10]Como aún no hemos hablado de la independencia de la parametrización, puede parecer que $A(S)$ depende de la parametrización $\mathbf{\Phi}$. En la Sección 7.6 estudiaremos la independencia de la parametrización; el uso de esta notación aquí no debe producir confusión.