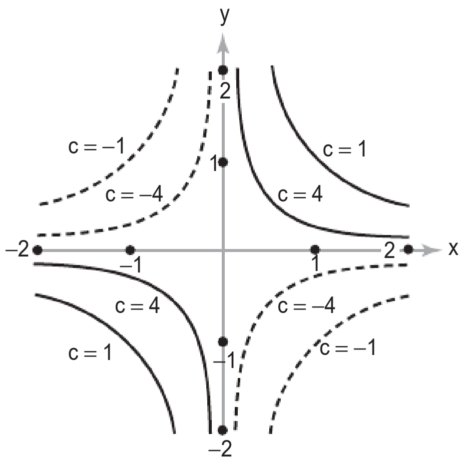
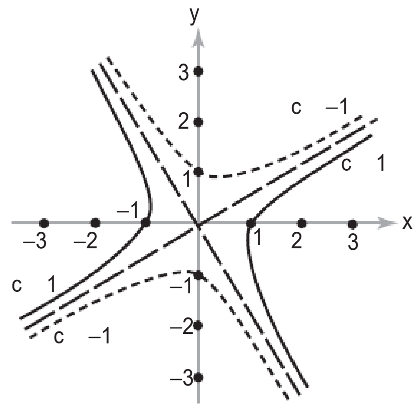
13. (a) $z = x - y + 2$.
(b) $z = 4x - 8y - 8$.
(c) $x + y + z = -1$.
(d) $10x + 6y - 4z = 6 - \pi$.
(e) $2z = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$.
(f) $x + 2y - z = 2$.

15. (a) Las curvas de nivel son hipérbolas $xy = 1/c$:



(b)
$$c = x^2 - xy - y^2$$
$$= \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}y\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}y\right)$$



17. (a) 0 (b) El límite no existe.

19. $(1 + 2x^2)\exp(1 + x^2 + y^2)$.

21. $\frac{40}{\sqrt{5}}e^{-15}$.

23. (a) La recta $\mathbf{L}(t) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t(a, b, c)$ está en el plano $z = f(x_0, y_0)$ si $c = 0$ y es perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0)$ si $a(\partial f/\partial x)(x_0, y_0) + b(\partial b/\partial y)(x_0, y_0) = 0$.

En $\mathbf{L}$ tenemos

$$f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0)$$
$$+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0)$$
$$= f(x_0, y_0) + at\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right] + bt\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]$$
$$= f(x_0, y_0) = z.$$

Por tanto, $\mathbf{L}$ está en el plano tangente. Una normal unitaria hacia arriba al plano tangente es

$$\mathbf{p} = (1 + \|\nabla f\|^{-1/2}(-(\partial f/\partial x)(x_0, y_0), -(\partial f/\partial y)(x_0, y_0), 1).$$

Por tanto, $\cos\theta = \mathbf{p}\cdot\mathbf{k} = (1 + \|\nabla f\|^2)^{-1/2}$ y $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta = \{\|\nabla f\|^2/(1 + \|\nabla f\|^2)\}^{1/2}/(1 + \|\nabla f\|^2)^{-1/2} = \|\nabla f\|$ que es lo queríamos.

(b) El plano tangente contiene la recta horizontal que pasa por $(1, 0, 2)$ perpendicular a $\nabla f(1, 0) = (5, 0)$, es decir, paralela al eje y. Forma un ángulo de arctan $(\|\nabla f(1, 0)\|) =$ arctan $5 \approx 78{,}7^\circ$ con respecto al plano xy.

25. $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ o $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

27. Una normal unitaria es $(\sqrt{2}/10)(3, 5, 4)$. El plano tangente es $3x + 5y + 4z = 18$.

29. $4\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$.

31. (a) Dado que g es la composición $\lambda \mapsto \lambda x \mapsto f(\lambda x)$, la regla de la cadena da

$$g'(\lambda) = \mathbf{D}f(\lambda\mathbf{x})\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$g'(1) = \mathbf{D}f(\mathbf{x})\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}.$$

Pero también $g(\lambda) = \lambda^p f(\mathbf{x})$, luego $g'(\lambda) = p\lambda^{p-1}f(\mathbf{x})$ y $g'(1) = pf(\mathbf{x})$.

(b) $p = 1$.

33. Diferenciar directamente usando la regla de la cadena o utilizar el Ejercicio 31(a) con $p = 0$.