De (3.5.9) y (3.5.10) se aprecia que

$$\text{Cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k} = (-1)^{(i-1)+(l-1)}\,|M_{1i,kl}| \qquad \textbf{(3.5.11)}$$

$$\text{Cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il} = (-1)^{1+k}\,|M_{1i,kl}| \qquad \textbf{(3.5.12)}$$

Entonces (3.5.5) se convierte en

$$(-1)^{1+k} a_{1k} a_{il} (-1)^{(i-1)+(l-1)} |M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l-1} a_{1k} a_{il} |M_{1i,kl}| \qquad \textbf{(3.5.13)}$$

y (3.5.8) se convierte en

$$(-1)^{i+l} a_{1k} a_{il} (-1)^{1+k} |M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l+1} a_{1k} a_{il} |M_{1i,kl}| \qquad \textbf{(3.5.14)}$$

Pero $(-1)^{i+k+l-1} = (-1)^{i+k+l+1}$, de modo que los lados derechos de las ecuaciones (3.5.13) y (3.5.14) son iguales. Así, las expresiones (3.5.5) y (3.5.8) son iguales y (3.5.1) queda demostrado en el caso $k < l$; después por un razonamiento similar se encuentra que si $k > l$,

$$\text{Cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k} = (-1)^{(i-1)+l}\,|M_{1i,kl}|$$

$$\text{Cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il} = (-1)^{1+(k-1)}\,|M_{1i,kl}|$$

de manera que (3.5.5) se convierte en

$$(-1)^{1+k} a_{1k} a_{il} (-1)^{(i-1)+l} |M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l} a_{1k} a_{il} |M_{1i,kl}|$$

y (3.5.8) se convierte en

$$(-1)^{i+l} a_{1k} a_{il} (-1)^{1+k-1} |M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l} a_{1k} a_{il} |M_{1i,kl}|$$

y esto completa la prueba de la ecuación (3.5.1).

Ahora se quiere probar que para cualesquiera dos matrices de $n \times n$, A y B, $\det AB = \det A \det B$. La prueba es más compleja e incluye varios pasos. Se usarán diversos hechos sobre las matrices elementales probados en la sección 2.6.

Primero se calculan los determinantes de las matrices elementales.

Lema 3.5.1

Sea E una matriz elemental:

i) Si E es una matriz que representa la operación elemental $R_i \rightleftarrows R_j$, entonces $\det E = -1$. **(3.5.15)**

ii) Si E es una matriz que representa la operación elemental $R_j \to R_j + cR_i$ entonces $\det E = 1$. **(3.5.16)**

iii) Si E es la matriz que representa la operación elemental $R_i \to cR_i$, entonces $\det E = c$. **(3.5.17)**

Demostración

i) $\det I = 1$. E se obtiene de I intercambiando los renglones i y j de I. Por la propiedad 3.2.4, $\det E = (-1) \det I = -1$.

ii) E se obtiene de I multiplicando el renglón i de I por c y sumándolo al renglón j. Entonces por la propiedad 3.2.7, $\det E = \det I = 1$.