8.1 Valores característicos y vectores característicos

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. En diversas aplicaciones (una de las cuales se da en la siguiente sección) resulta útil encontrar un vector **v** en V tal que $T\mathbf{v}$ y **v** son paralelos. Es decir, se busca un vector **v** y un escalar λ tal que

$$T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{8.1.1}$$

Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y λ satisface (8.1.1), entonces λ se denomina un *valor característico* de T y **v** un *vector característico* de T correspondiente al valor característico λ. El propósito de este capítulo es investigar las propiedades de los valores característicos y vectores característicos. Si V tiene dimensión finita, entonces T se puede representar por una matriz A_T. Por esta razón se estudiarán los valores y los vectores característicos de las matrices de $n \times n$.

Definición 8.1.1

Valor característico y vector característico

Sea A una matriz de $n \times n$ con componentes reales.* El número λ (real o complejo) se denomina **valor característico** de A si existe un vector *diferente de cero* **v** en $\mathbb{C}^n$ tal que

$$\boxed{A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}} \tag{8.1.2}$$

El vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ se denomina **vector característico** de A correspondiente al **valor característico** λ.

Nota

Los valores y vectores característicos también se denominan **valores** y **vectores propios** o **eigenvalores** y **eigenvectores**; el término alemán *eigen* significa "propio".

Observación. Como se verá (ejemplo 8.1.6), una matriz con componentes reales puede tener valores y vectores característicos complejos. Por esta razón, en la definición se asegura que $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$. No se usarán en este libro muchos hechos sobre los números complejos. En el apéndice B se hace una presentación de unos cuantos de ellos que sí son necesarios.

EJEMPLO 8.1.1 **Valores característicos y vectores característicos de una matriz de 2 × 2**

Sea $A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$. Entonces $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así, $\lambda_1 = 1$ es un valor característico de A con el correspondiente vector característico $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. De manera similar, $A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, de modo que $\lambda_2 = -2$ es un valor característico de A con el correspondiente vector característico $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Como se verá en seguida, éstos son los únicos valores característicos de A.

* Esta definición es válida si A tiene componentes complejas, pero como las matrices que se manejaban tienen, en su mayoría, componentes reales, la definición es suficiente para nuestros propósitos.