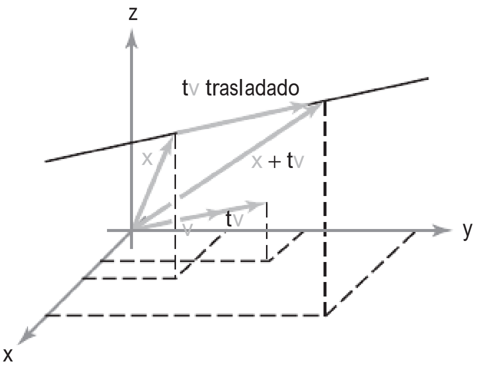

Figura 2.6.1 La ecuación de L es $\mathbf{l}(t) = \mathbf{x} + t\,\mathbf{v}$.

cambian los valores de f a lo largo de la recta L en el punto $\mathbf{x}$? Dado que la variación de una función está dada por una derivada, podríamos decir que la respuesta a esta pregunta es el valor de la derivada de esta función de t en $t = 0$ (cuando $t = 0, \mathbf{x} + t\mathbf{v}$ se reduce a $\mathbf{x}$). Esta sería la derivada de f en el punto $\mathbf{x}$ en la dirección de L; es decir, de $\mathbf{v}$. Podemos formalizar este concepto como sigue.

Definición Derivadas direccionales Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, la ***derivada direccional*** de f en $\mathbf{x}$ según el vector $\mathbf{v}$ está dada por

$$\left.\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})\right|_{t=0}$$

si este valor existe.

En la definición de una derivada direccional, normalmente elegimos $\mathbf{v}$ para que sea un vector *unitario*. En este caso, nos movemos en la dirección $\mathbf{v}$ con velocidad uno y nos referimos a $\left.\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}+t\mathbf{v})\right|_{t=0}$ como la ***derivada direccional de f en la dirección*** $\mathbf{v}$.

Vamos a ver ahora por qué en la definición de derivada direccional se elige un *vector unitario*. Supóngase que f mide la temperatura en grados y que nos interesa saber cómo de rápido varía cuando nos movemos en una determinada dirección. Si medimos la distancia en metros, entonces la variación de la temperatura se medirá en grados por metro. Para simplificar, supongamos que la temperatura varía a velocidad constante —por ejemplo, dos grados por metro— a medida que nos movemos en una dirección dada $\mathbf{v}$ comenzando en $\mathbf{x}$. Así, al desplazarnos hacia adelante un metro, la temperatura varía en dos grados. Es decir,

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}) = 2.$$

Una relación de este tipo se verificará únicamente cuando $\mathbf{v}$ sea un vector unitario, reflejando el hecho de que nos desplazamos *un* metro hacia adelante. De forma más general, la definición de derivada direccional solo medirá realmente la variación de f con respecto de la distancia a lo largo de una recta en una dirección dada si $\mathbf{v}$ es un vector unitario.

A partir de la definición, podemos ver que la derivada direccional también se puede definir mediante la fórmula