3. Haga lo mismo para la transformación T, donde

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

4. Sean A y B matrices ortogonales de $n \times n$. Demuestre que $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $T\mathbf{x} = AB\mathbf{x}$, es una isometría.

5. Encuentre A_T si T es la transformación de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Demuestre que A_T es ortogonal.

6. Demuestre el teorema 7.5.6.

7. Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una isometría. Demuestre que T preserva los ángulos. Es decir, (ángulo entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$) = (ángulo entre $T\mathbf{x}$ y $T\mathbf{y}$).

8. Dé un ejemplo de una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$ que preserve los ángulos y *no* sea una isometría.

9. Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x} \neq 0$ y $\mathbf{y} \neq 0$, defina el ángulo entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ como $\mathbb{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \dfrac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}$. Demuestre que si $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría, entonces T preserva los ángulos.

10. Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una isometría y sea $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$. Demuestre que $S\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}$ es una isometría.

De los problemas 11 al 15 encuentre una isometría entre los pares de espacios dados.

11. $\mathbb{P}_2\,[-1, 1]$, $\mathbb{R}^3$

12. $\mathbb{P}_3\,[-1, 1]$, $\mathbb{R}^4$

Cálculo

13. $\mathbb{M}_{22}$, $\mathbb{R}^4$

14. $\mathbb{M}_{22}$, $P_3\,[-1, 1]$

Cálculo

15. D_n y $\mathbb{R}^n$ (D_n = conjunto de matrices diagonales de $n \times n$).

16. Sea A una matriz de $n \times n$ con elementos complejos. Entonces la transpuesta conjugada de A, denotada por A^*, está definida por $(A^*)_{ij} = \overline{a}_{ji}$. Calcule A^* si $A = \begin{pmatrix} 1+i & -4+2i \\ 3 & 6-3i \end{pmatrix}$.

17. La matriz compleja A de $n \times n$ se llama **hermitiana*** si $A^* = A$. Demuestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 3-2i \\ 3+2i & 6 \end{pmatrix}$ es hermitiana.

Matriz hermitiana

18. Demuestre que si A es hermitiana, entonces las componentes de la diagonal de A son reales.

* Llamada así en honor del matemático francés Charles Hermite (1822-1901).