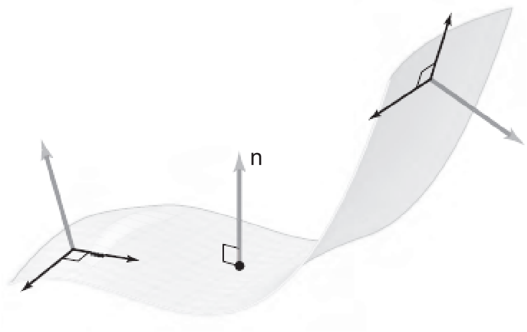

Figura 7.6.8 Cuando $\mathbf{F}\cdot(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) > 0$ (izquierda), $\mathbf{F}$ apunta hacia el exterior; cuando $\mathbf{F}\cdot(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) < 0$ (derecha), $\mathbf{F}$ apunta hacia el interior.

de tiempo; es decir, la tasa del flujo. Esta integral también se denomina ***flujo*** de $\mathbf{F}$ a través de la superficie.

En el caso en que $\mathbf{F}$ representa un campo eléctrico o magnético, $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ también se denomina comúnmente flujo. Es posible que el lector esté familiarizado con las leyes de la física (como la *ley de Faraday*) que relaciona el flujo de un campo vectorial con la circulación (o corriente) a lo largo de la curva que la limita. Esta es la base histórica y física del teorema de Stokes, que veremos en la Sección 8.2. El principio correspondiente en mecánica de fluidos se conoce como *teorema de la circulación de Kelvin.*

Las integrales de superficie también se aplican al estudio del flujo de calor. Sea $T(x, y, z)$ la temperatura en un punto $(x, y, z) \in W \subset \mathbb{R}^3$, donde W es alguna región y T es una función C^1. Luego

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}$$

representa el gradiente de temperatura y el calor "fluye" con el campo vectorial $-k\,\nabla T = \mathbf{F}$, donde k es una constante positiva. Por tanto, $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ es la tasa total de flujo de calor a través de la superficie S.

Ejemplo 4 Supongamos que una función de temperatura en $\mathbb{R}^3$ está dada por la fórmula $T(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$, y sea S la esfera unidad $x^2+y^2+z^2 = 1$ orientada según la normal exterior (véase el Ejemplo 2). Hallar el flujo de calor a través de la superficie S si $k = 1$.

Solución Tenemos que

$$\mathbf{F} = -\nabla T(x, y, z) = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}.$$

En S, el vector $\mathbf{n}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es la normal unitaria "exterior" a S en (x, y, z), y $f(x, y, z) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -2x^2 - 2y^2 - 2z^2 = -2$ es la componente normal de $\mathbf{F}$. A partir del Teorema 5 podemos ver que la integral de superficie de $\mathbf{F}$ es igual a la integral de su componente normal $f = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ sobre S. Luego,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{S} = \iint_S f\, dS = -2\iint_S dS = -2A(S) = -2(4\pi) = -8\pi.$$