por lo que

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2.$$

Esta identidad es interesante porque establece una relación entre los productos escalar y vectorial ▲

Geometría de los determinantes

Usando el producto vectorial, podemos obtener una interpretación geométrica de los determinantes 2×2 y 3×3. Sean $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ dos vectores en el plano. Si θ es el ángulo que forman $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, hemos visto que $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| |\operatorname{sen}\theta|$ es el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. El producto vectorial expresado como determinante es

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Por tanto, el área $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ es el valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Geometría de los determinantes 2×2 El valor absoluto del determinante $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ es el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. El signo del determinante es $+$ cuando el ángulo que forman $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, al girar en sentido antihorario, es menor que π.

Ejemplo 8 Hallar el área del triángulo con vértices en los puntos (1,1), (0, 2) y (3, 2) (véase la Figura 1.3.4).

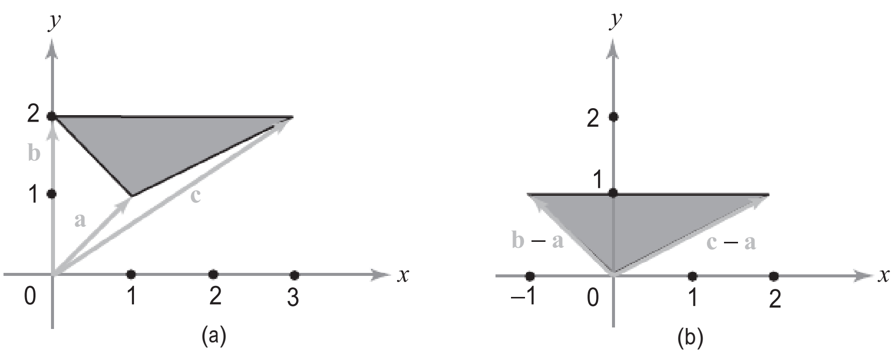

Figura 1.3.4 (a) Hallar el área A del triángulo sombreado expresando los lados como diferencias de vectores (b) para obtener $A = \|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})\|/2$.