para cualquier constante $\lambda \neq 0$. Además, si A, B, C, D y A', B', C', D' determinan el mismo plano $\mathcal{P}$, entonces $A = \lambda A'$, $B = \lambda B'$, $C = \lambda C'$, $D = \lambda D'$ para un escalar λ. En consecuencia, A, B, C, D están ***determinados por $\mathcal{P}$ salvo un múltiplo escalar***.

Ejemplo 10 Determinar una ecuación para el plano que es perpendicular al vector $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y contiene el punto (1, 0, 0).

Solución Usando la forma general $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, el plano es $1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0$; esto es, $x + y + z = 1$. ▲

Ejemplo 11 Hallar una ecuación para el plano que contiene estos tres puntos: (1, 1, 1), (2, 0, 0) y (1, 1, 0).

Solución *Método 1.* Este es un método de "fuerza bruta" que se puede utilizar cuando se han olvidado los métodos vectoriales. La ecuación de cualquier plano es de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$. Como los puntos (1, 1, 1), (2, 0, 0) y (1, 1, 0) están en el plano, tenemos que

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 0, \\ 2A \qquad\qquad + D &= 0, \\ A + B \qquad + D &= 0. \end{aligned}$$

Por eliminación, reducimos este sistema de ecuaciones a

$$\begin{aligned} 2A + D &= 0 \quad \text{(segunda ecuación)} \\ 2B + D &= 0 \quad (2 \times \text{tercera} - \text{segunda}), \\ C &= 0 \quad (\text{primera} - \text{tercera}). \end{aligned}$$

Puesto que los números A, B, C y D están determinados salvo por un múltiplo escalar, podemos fijar el valor de uno de ellos, por ejemplo, $A = 1$, y entonces los otros quedarán determinados de manera única. Obtenemos $A = 1$, $D = -2$, $B = 1, C = 0$. Así, una ecuación del plano que contiene a los puntos dados es $x + y - 2 = 0$.

Método 2. Sean $\mathrm{P} = (1, 1, 1), \mathrm{Q} = (2, 0, 0), \mathrm{R} = (1, 1, 0)$. Cualquier vector normal al plano ha de ser ortogonal a los vectores $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{RP}}$, que son paralelos al plano, ya que sus extremos se encuentran en el plano. Por tanto, $\mathbf{n} = \overrightarrow{\mathrm{QP}} \times \overrightarrow{\mathrm{RP}}$ es normal al plano. Calculando el producto vectorial, tenemos

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Como el punto (2, 0, 0) está en el plano, concluimos que la ecuación viene dada por $(x - 2) + (y - 0) + 0 \cdot (z - 0) = 0$; es decir, $x + y - 2 = 0$. ▲

Dos planos se llaman ***paralelos*** cuando sus vectores normales son paralelos. Así, los planos $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z +$