Entonces

$$A^{\top}A = \begin{pmatrix} 5 & 13 & 57 \\ 13 & 57 & 289 \\ 57 & 289 & 1\,569 \end{pmatrix}, \quad (A^{\top}A)^{-1} = \frac{1}{7\,504}\begin{pmatrix} 5\,912 & -3\,924 & 508 \\ -3\,924 & 4\,596 & -704 \\ 508 & -704 & 116 \end{pmatrix}$$

y

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{7\,504}\begin{pmatrix} 5\,912 & -3\,924 & 508 \\ -3\,924 & 4\,596 & -704 \\ 508 & -704 & 116 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 16 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 195 \\ 180 \\ 120 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7\,504}\begin{pmatrix} 5\,912 & -3\,924 & 508 \\ -3\,924 & 4\,596 & -704 \\ 508 & -704 & 116 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 720 \\ 1\,185 \\ 3\,735 \end{pmatrix} = \frac{1}{7\,504}\begin{pmatrix} 1\,504\,080 \\ -8\,460 \\ -35\,220 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 200.44 \\ -1.13 \\ -4.96 \end{pmatrix}$$

Los datos se ajustaron con la ecuación cuadrática

$$s(t) = 200.44 - 1.13t - 4.69t^2$$

y se tiene que $\frac{1}{2}g \approx 4.69$, o sea,

$$g \approx 2(4.69) = 9.38 \text{ m/seg}^2$$

Esto es razonablemente cercano al valor correcto de 9.81 m/seg^2. Para obtener una aproximación más exacta de g sería necesario obtener observaciones más precisas. Observe que el término $-1.13t$ representa una velocidad inicial (hacia abajo) de 1.13 m/seg.

Se observa aquí que las aproximaciones de polinomios de grado más alto se obtienen de manera idéntica. Vea algunos detalles en los problemas 6.2.7 y 6.2.9.

Concluiremos esta sección demostrando el resultado que garantiza que la ecuación (6.2.8) será siempre válida, excepto cuando los puntos estén en una misma recta vertical.

Teorema 6.2.1

Sea $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, n puntos en $\mathbb{R}^2$, y suponga que no todas las x_i son iguales. Entonces si A está dada como en (6.2.3), la matriz $A^{\top}A$ es una matriz invertible de 2×2.

Nota. Si $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$, entonces todos los datos están sobre la recta vertical $x = x_1$, y la mejor aproximación lineal es, por supuesto, dicha recta.

Demostración

Se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$