donde $f = (f_1, \ldots, f_p)$ es una función vectorial de variables $y_1, \ldots, y_m$; $g(x_1, \ldots, x_n) = (y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n))$ y $h_j(x_1, \ldots, x_n) = f_j(y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n))$ (el uso de la letra y tanto para las funciones como para las variables es un abuso de notación, pero resulta útil para recordar la fórmula). Esta fórmula es equivalente a la Ecuación (1) una vez que se han multiplicado las matrices. ■

El lector entenderá mejor el patrón de la regla de la cadena después de haber realizado algunos casos particulares. Por ejemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u(x,y), v(x,y), w(x,y), z(x,y)) =$$
$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$

con una fórmula similar para $\partial f/\partial y$.

La regla de la cadena nos puede ayudar a entender la relación entre la geometría de la aplicación $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y la geometría de las curvas en $\mathbb{R}^2$ (se pueden hacer afirmaciones similares para $\mathbb{R}^3$ o, en general, para $\mathbb{R}^n$.) Si $\mathbf{c}(t)$ es una trayectoria en el plano, entonces, como hemos visto en la Sección 2.4, $\mathbf{c}'(t)$ representa el vector tangente (o el vector velocidad) a la trayectoria $\mathbf{c}(t)$. Sea $\mathbf{p}(t) = f(\mathbf{c}(t))$, donde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. La trayectoria $\mathbf{p}$ representa la imagen de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ mediante la aplicación f. El vector tangente a $\mathbf{p}$ está dado por la regla de la cadena:

multiplicación de matrices

$$\mathbf{p}'(t) = \underbrace{\mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))}_{\text{matriz}}\ \underbrace{\mathbf{c}'(t)}_{\text{vector columna}}.$$

En otras palabras, *la matriz derivada de f aplica el vector tangente (o vector velocidad) de una trayectoria* $\mathbf{c}$ *al vector tangente (o vector velocidad) de la correspondiente trayectoria imagen* $\mathbf{p}$ (véase la Figura 2.5.1). Por tanto, la función f es una aplicación entre puntos, mientras que la derivada de f es una aplicación entre vectores tangentes a curvas, evaluada en cada punto del dominio de definición sobre el vector tangente en ese punto.

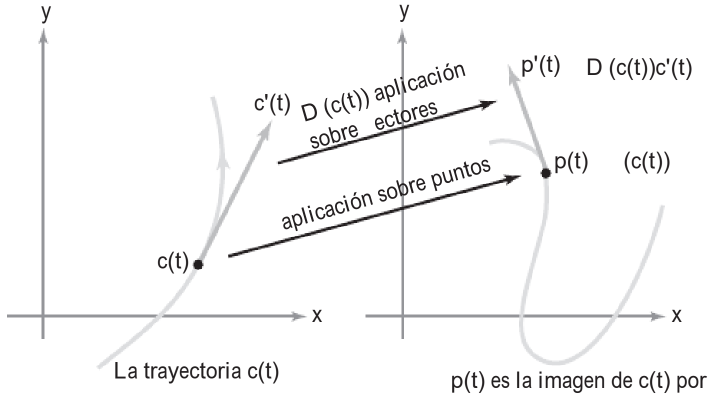

Figura 2.5.1 La matriz derivada es una aplicación sobre vectores tangente.