22. $x^2 + xy + y^2 + 3xz + z^2$

23. $-2xy + 2xz + 2yz + z^2 = 4$

24. $9x^2 + (-5\sqrt{2} - 2)xy + (-5\sqrt{2} - 2)xz + \left(\sqrt{2} - \frac{23}{2}\right)y^2 + 5yz + \left(\frac{23}{2} - \sqrt{2}\right)z^2 = 4$

De los problemas 25 al 27 encuentre una matriz simétrica A tal que la forma cuadrática se pueda escribir en la forma $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$.

25. $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + 3x_3^2 + 7x_1x_4 - 2x_2x_4 + x_4^2$

26. $-6x_1x_3 + 4x_2x_4 + 3x_2^2 + 4x_3^2 = 4$

27. $3x_1^2 - 7x_1x_2 - 2x_2^2 + x_1x_3 - x_2x_3 + 3x_3^2 - 2x_1x_4 + x_2x_4 - 4x_3x_4 - x_4^2$
$+ 3x_1x_5 - 5x_3x_5 + x_4x_5 - x_5^2$

28. Suponga que para algún valor de d diferente de cero, la gráfica de $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ es una hipérbola. Demuestre que la gráfica es una hipérbola para cualquier otro valor de d diferente de cero.

29. Demuestre que si $a \neq c$, el término xy en la ecuación cuadrática (8.5.1) se elimina rotando un ángulo θ, si θ está dado por $\cot 2\theta = \frac{a - c}{b}$.

30. Demuestre que si $a = c$ en el problema 29, entonces el término xy se elimina rotando un ángulo $\pm\frac{\pi}{4}$.

***31.** Suponga que una rotación convierte a $ax^2 + bxy + cy^2$ en $a'(x')^2 + b'(xy') + c'(y')^2$. Demuestre que:

a) $a + c = a' + c'$

b) $b^2 - 4ac = (b')^2 - 4a'c'$

Forma cuadrática positiva definida

32. Se dice que una forma cuadrática $F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es **positiva definida** si $F(\mathbf{x}) > 0$ para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $F(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$. Demuestre que F es positiva definida si y sólo si la matriz simétrica A asociada a F tiene valores característicos positivos.

33. Se dice que una forma cuadrática $F(\mathbf{x})$ es **positiva semidefinida** si $F(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que F es positiva semidefinida si y sólo si los valores característicos de la matriz simétrica asociada a F son todos no negativos.

Formas cuadráticas negativa definida, semidefinida e indefinida

Las definiciones de formas cuadráticas **negativa definida** y **negativa semidefinida** son las definiciones en los problemas 32 y 33 sustituyendo > 0 por < 0 y ≥ 0 por ≤ 0, respectivamente. Una forma cuadrática es **indefinida** si no es de los tipos anteriores. De los problemas 34 al 44 determine si la forma cuadrática dada es positiva definida, positiva semidefinida, negativa definida, negativa semidefinida o indefinida.

34. $3x^2 + 2y^2$

35. $x^2 - 6xy + y^2$

36. $-3x^2 - 3y^2$

37. $-3x^2 - xy - 2y^2$

38. $9x^2 + 1 - 10y^2$

39. $x^2 + 2xy + 2y^2$

40. $x^2 - 2xy + 2y^2$

41. $10xy - 5y^2$

42. $5x^2 + 3xy + 2y^2$

43. $-2x^2 + xy - 2y^2$

44. $-xy - 2y^2$

***45.** Sea $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz ortogonal real con $\det Q = 1$. Defina el número $\theta \in [0, 2\pi]$:

a) Si $a \geq 0$ y $c > 0$, entonces $\theta = -\cos^{-1} a$ $\left(0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Si $a \geq 0$ y $c < 0$, entonces $\theta = 2\pi - \cos^{-1} a$ $\left(\frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi\right)$.

c) Si $a \leq 0$ y $c > 0$, entonces $\theta = \cos^{-1} a$ $\left(\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi\right)$.