se tiene, como en la prueba del teorema 7.3.1,

$$A_T(\mathbf{v}_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-ésima posición} \\ \\ \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = (\mathbf{y}_i)_{B_2}$$

Si $\mathbf{x}$ está en V, entonces

$$(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

y

$$A_T(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n \end{pmatrix}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= c_1(\mathbf{y}_1)_{B_2} + c_2(\mathbf{y}_2)_{B_2} + \cdots + c_n(\mathbf{y}_n)_{B_2}$$

De manera similar, $T\mathbf{x} = T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1T\mathbf{v}_1 + c_2T\mathbf{v}_2 + \cdots + c_nT\mathbf{v}_n = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}\mathbf{y}_n$, de manera que $T(\mathbf{x})_{B_2} = (c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}\mathbf{y}_n)_{B_2} = c_1(\mathbf{y})_{B_2} + c_2(\mathbf{y}_2)_{B_2} + \cdots + c_n(\mathbf{y}_n)_{B_2} = A_T(\mathbf{x})_{B_1}$. Así, $T(\mathbf{x})_{B_2} = A_T(\mathbf{x})_{B_1}$. La prueba de la unicidad es exactamente igual que la prueba de unicidad en el teorema 7.3.1.

El siguiente resultado es consecuencia del teorema 5.7.7, y generaliza el teorema 7.3.2. Su demostración se deja como ejercicio (vea el problema 45 de esta sección).

Teorema 7.3.4

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con dim $V = n$. Sea $T: V \to W$ una transformación lineal y sea A_T una representación matricial de T respecto a las bases B_1 en V y B_2 en W. Entonces

i) $\rho(T) = \rho(A_T)$ **ii)** $\nu(A) = \nu(A_T)$ **iii)** $\nu(A) + \rho(T) = n$

Nota. i) y ii) implican que $\rho(A_T)$ y $\nu(A_T)$ son independientes de las bases B_1 y B_2.