$\|\mathbf{x}\| > 2\sqrt{2}/3$; $g_2(\mathbf{x}) = 1$ para $\|\mathbf{x} - (1,1,0)\| < \sqrt{2}/3$; y $g_2(\mathbf{x}) = 0$ para $\|\mathbf{x} - (1,1,0)\| > 2\sqrt{2}/3$. (Véase el Ejercicio 24). Sean

$$h_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{y} \qquad h_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

tómese $f(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x})h_1(\mathbf{x}) + g_2(\mathbf{x})h_2(\mathbf{x})$.

27. La demostración de la regla (III) es la siguiente:

$$\begin{aligned} &\frac{|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - [f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &\le |f(\mathbf{x}_0)| \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &+ |g(\mathbf{x}_0)| \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &+ \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|. \end{aligned}$$

Cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, los dos primeros términos tienden a 0 debido a la diferenciabilidad de f y g. El tercero también tiende a cero porque $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ y $|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)|/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ están acotados por una constante, por ejemplo, M, en alguna bola $D_r(\mathbf{x}_0)$. Para ver esto, elegimos r lo suficientemente pequeño como para que $[f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)]/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ esté a una distancia inferior a 1 de $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$. Entonces, por la desigualdad de Cauchy–Schwarz, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} &\le 1 + \frac{|\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &= 1 + \frac{|\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &\le 1 + \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \end{aligned}$$

La demostración de la regla (IV) se deduce de la regla (III) y el caso especial de la regla del cociente, con f idénticamente igual a 1; es decir, $\mathbf{D}(1/g)(\mathbf{x}_0) = [-1/g(\mathbf{x}_0)^2]\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$. Para obtener esta respuesta, obsérvese que en alguna bola pequeña $D_r(\mathbf{x}_0), g(\mathbf{x}) > m > 0$. Utilizar la desigualdad triangular y la desigualdad de Schwarz para demostrar que

$$\begin{aligned} &\frac{\left| \dfrac{1}{g(\mathbf{x})} - \dfrac{1}{g(\mathbf{x})} + \dfrac{1}{g(\mathbf{x}_0)^2}\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &\le \frac{1}{|g(\mathbf{x})|} \frac{1}{|g(\mathbf{x}_0)|} \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &+ \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)|}{|g(\mathbf{x})|g(\mathbf{x}_0)^2} \frac{|\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &\le \frac{1}{m^2} \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &+ \frac{\|\nabla g(\mathbf{x}_0)\|}{m^3} |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)|. \end{aligned}$$

Los dos últimos términos tienden a 0, porque g es diferenciable y continua.

29. En primer lugar se calcula la fórmula para $(d/dx)(F(x,x))$ usando la regla de la cadena. Se toma $F(x,z) = \int_0^x f(z,y)\,dy$ y se emplea el teorema fundamental del cálculo.

31. Por el Ejercicio 28 y el Teorema 10(III) (Ejercicio 27), cada componente de k es diferenciable y $\mathbf{D}k_i(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) + g_i(\mathbf{x}_0)$ $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$. Dado que $[\mathbf{D}g_i(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}$ es la componente i-ésima de $[\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]y$ y $[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}$ es el número $\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{y}$, tenemos $[\mathbf{D}k(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y} = f(\mathbf{x}_0)[\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y} + [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}[g(\mathbf{x}_0)] = f(x_0)$ $[\mathbf{D}g\ (x_0)]\mathbf{y} + [\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{y}]g(\mathbf{x}_0)$.

33. 4.

35. Sea $g(x,y) = x - y$, de modo que $z = f \circ g$. Entonces la regla de la cadena implica

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial g}.$$

Sección 2.6

1. $\nabla f(1,1,2) \cdot \mathbf{v} = (4,3,4) \cdot (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0) = 2\sqrt{5}$.

3. (a) $17e^e/13$. (b) $e/\sqrt{3}$. (c) 0.

5. (a) Puesto que $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ apunta en la dirección de crecimiento más rápida (Teorema 13), el valor máximo de la derivada direccional es

$$\begin{aligned} \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)\frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} &= \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} \\ &= \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|. \end{aligned}$$