Momentos de inercia respecto de los ejes coordenados

$$I_x = \iiint_W (y^2+z^2)\,\delta\, dx\,dy\,dz, \qquad I_y = \iiint_W (x^2+z^2)\,\delta\, dx\,dy\,dz,$$

$$I_z = \iiint_W (x^2+y^2)\,\delta\, dx\,dy\,dz. \tag{8}$$

a traslaciones. Sin embargo, a diferencia del movimiento de traslación, los momentos de inercia *dependen de la forma y no solo de la masa total*. Es más difícil hacer girar una placa grande que una bola compacta de la misma masa.

Por ejemplo, I_x mide la respuesta del cuerpo a las fuerzas que intentan hacerlo rotar alrededor del eje x. El factor y^2+z^2, que es el cuadrado de la distancia al eje x, pondera más las masas más alejadas del eje de rotación, lo que coincide con la idea intuitiva que acabamos de exponer.

Ejemplo 6 Calcular el momento de inercia I_z del sólido situado por encima del plano xy y acotado por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y por el cilindro $x^2+y^2=a^2$, suponiendo que a y la densidad de masa son constantes.

Solución El paraboloide y el cilindro se intersecan en el plano $z=a^2$. Utilizando coordenadas cilíndricas hallamos, a partir de la Ecuación (8), que

$$I_z = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} \delta r^2 \cdot r\,dz\,d\theta\,dr = \delta \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} r^3\,dz\,d\theta\,dr = \frac{\pi\delta a^6}{3}.$$

▲

Campos gravitatorios de cuerpos sólidos

Otra aplicación física interesante de la integración triple es la determinación de los campos gravitatorios de cuerpos sólidos. El Ejemplo 7 de la Sección 2.6 mostraba que el campo de fuerzas gravitatorias $\mathbf{F}(x,y,z)$ de una partícula es el gradiente cambiado de signo de una función $V(x,y,z)$ denominada ***potencial gravitatorio***. Si hay una masa puntual M en el punto (x,y,z), entonces el potencial gravitatorio debido a esa masa que actúa sobre otra masa m situada en el punto (x_1,y_1,z_1) es $-GmM\,[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]^{-1/2}$, donde G es la constante de gravitación universal.

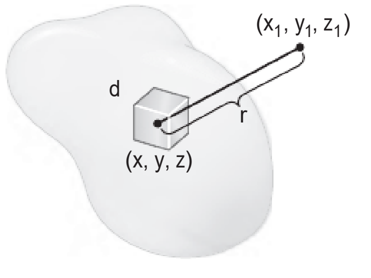

Figura 6.3.4 El potencial gravitatorio que produce una fuerza que actúa sobre una masa m situada en $(x_1,\ y_1,\ z_1)$, generado por la masa $dM = \delta(x,y,z)\ dx\ dy\,dz$ situada en el punto (x,y,z), es $-[Gm\delta\,(x,y,z)\ dx\ dy\,dz]/r$.

Si el objeto atractor ocupa un dominio W con densidad de masa $\delta(x,y,z)$, podemos imaginarlo como constituido por regiones cúbicas infinitesimales con masas $dM=\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ y situadas en cada punto (x,y,z). El potencial gravitatorio total V de W se obtiene entonces “sumando” los potenciales debidos a las masas infinitesimales. De esta forma se llega a la integral triple (véase la Figura 6.3.4):

$$V(x_1,y_1,z_1) = -Gm \iiint_W \frac{\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}. \tag{9}$$