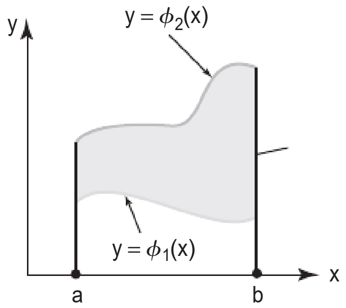

Figura 6.4.1 Un dominio y-simple.

el texto que sigue, mientras que el tercer tipo (integrales sobre regiones no acotadas) se deja para los ejercicios. Evaluaremos todas las integrales por medio de un proceso de paso al límite, como en el caso de una variable.

Para simplificar la exposición, nos limitaremos primero a funciones no negativas f [es decir, $f(x, y) \geq 0$ para todos los puntos $(x, y) \in D$] y a regiones y-simples descritas como el conjunto de puntos (x, y) tales que

$$a \leq x \leq b, \qquad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x),$$

como en la Figura 6.4.1.

En el primer caso que queremos tratar, vamos a suponer que $f: D \to \mathbb{R}$ es continua excepto en puntos de la frontera de D. Consideremos, por ejemplo,

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

donde D es el disco unidad $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Claramente, f no está definida en la frontera de D, donde $x^2 + y^2 = 1$; a pesar de ello, será de interés práctico calcular $\iint_D f(x, y)\, dA$, ya que esta integral representa el área de la semiesfera superior de la esfera de radio unidad en el espacio de tres dimensiones.

Regiones exhaustivas

La idea básica es la de integrar dicha función f sobre una región más pequeña D', donde sepamos que la integral existe, y después hacer "tender" D' hacia D; es decir, "agotamos" D y vemos si $\iint_D f\, dA$ tiende hacia algún límite. Con esta idea en mente, elegimos una clase especial de D', de la forma siguiente.

Sea $\eta > 0$ lo suficientemente pequeño como para que $a + \eta < b - \eta$. Sea $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño como para que $\phi_1(x) + \delta < \phi_2(x) - \delta$ para todo $x, a \leq x \leq b$ (véase la Figura 6.4.2). Si $\phi_2(x) = \phi_1(x)$ para algún x, no existirá tal δ, pero de este detalle mínimo nos ocuparemos cuando surja en nuestros ejemplos posteriores. Entonces la región

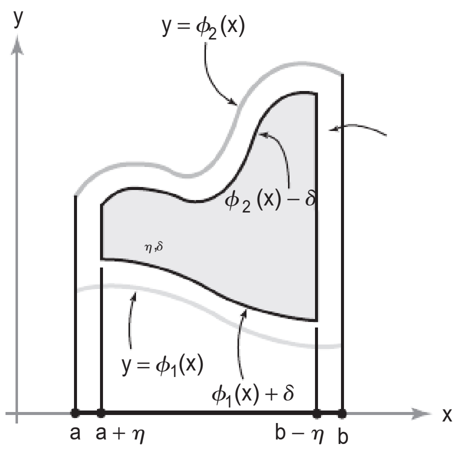

Figura 6.4.2 Un dominio reducido $D_{\eta,\delta}$ para integrales impropias.