RESUMEN 8.1

- ***Valores característicos y vectores característicos***

  Sea A una matriz de $n \times n$ con componentes reales. El número λ (real o complejo) se denomina un **valor característico** o **valor propio** de A si existe un vector **v** *diferente de cero* en $\mathbb{C}^n$ tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

  El vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ se denomina **vector característico** o **vector propio** de A correspondiente al valor característico λ.

- Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces λ es un valor característico de A si y sólo si

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

  La ecuación $p(\lambda) = 0$ se denomina **ecuación característica** de A; $p(\lambda)$ se conoce como el **polinomio característico** de A.

- Contando las multiplicidades, toda matriz de $n \times n$ tiene exactamente n valores característicos.

- Los vectores característicos correspondientes a valores característicos distintos son linealmente independientes.

- ***Multiplicidad algebraica***

  Si $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_n)^{r_n}$, entonces r_i es la **multiplicidad algebraica** de λ_i.

- Los valores característicos de una matriz *real* ocurren en pares complejos conjugados.

- ***Espacio característico***

  Si λ es un valor característico de la matriz A de $n \times n$, entonces $E_\lambda = \{\mathbf{v}: A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$ es un subespacio de $\mathbb{C}^n$ denominado el **espacio característico** de A correspondiente a λ. Se denota por E_λ.

- ***Multiplicidad geométrica***

  La **multiplicidad geométrica** de un valor característico λ de la matriz A es igual a dim $E_\lambda = \mu(A - \lambda I)$.

- Para cualquier valor característico λ, multiplicidad geométrica $\leq$ multiplicidad algebraica.

- Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A tiene n vectores característicos linealmente independientes si y sólo si la multiplicidad geométrica de cada valor característico es igual a su multiplicidad algebraica. En particular, A tiene n vectores característicos linealmente independientes si todos los valores característicos son diferentes (ya que en ese caso la multiplicidad algebraica de todo valor característico es 1).

- ***Teorema de resumen***

  Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes 12 afirmaciones son equivalentes; es decir, cada una implica a las otras 11 (de manera que si una es cierta, todas lo son):

  i) A es invertible.

  ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).