$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Calculando las derivadas segundas, tenemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 0.\end{aligned}$$ ▲

Identidades vectoriales

Ahora tenemos a nuestra disposición las siguientes operaciones básicas: gradiente, divergencia, rotacional y el operador de Laplace. En el siguiente recuadro proporcionamos fórmulas generales básicas que son útiles a la hora de realizar cálculos con campos vectoriales.

Identidades básicas del análisis vectorial

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
2. $\nabla(cf) = c\nabla f$, para c constante
3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
4. $\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$, en los puntos $\mathbf{x}$ en los que $g(\mathbf{x}) \neq 0$
5. $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{div}\mathbf{F} + \operatorname{div}\mathbf{G}$
6. $\operatorname{rot}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{rot}\mathbf{F} + \operatorname{rot}\mathbf{G}$
7. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{div}\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla f$
8. $\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{G}$