Máximos y mínimos globales

El método de los multiplicadores de Lagrange mejora nuestras técnicas para hallar máximos y mínimos globales. En este sentido, resulta de utilidad lo siguiente.

Definición Sea U una región abierta en $\mathbb{R}^n$ con frontera ∂U. Decimos que ∂U es ***suave*** si ∂U es el conjunto de nivel de una función suave g cuyo gradiente ∇g nunca se anula en ∂U (es decir, $\nabla g \neq \mathbf{0}$). Entonces podemos aplicar la siguiente estrategia.

Estrategia de los multiplicadores de Lagrange para hallar máximos y mínimos en regiones con frontera Sea f una función diferenciable en una región cerrada y acotada $D = U \cup \partial U$, U abierto en $\mathbb{R}^n$ con frontera ∂U suave.

Para determinar el máximo y el mínimo absolutos de f en D, seguiremos estos pasos:

(I) Localizar todos los puntos críticos de f en U.

(II) Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para localizar todos los puntos críticos de $f|\partial U$.

(III) Calcular los valores de f en todos estos puntos críticos.

(IV) Seleccionar los valores mayor y menor.

Ejemplo 8 Hallar el máximo y el mínimo de la función $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-x+y$ en el conjunto $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Solución Como en el ejemplo anterior, sabemos que existen máximo y mínimo absolutos. Ahora $D = U \cup \partial U$, donde

$$U = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 < 1\}$$

y

$$\partial U = \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

$\nabla f(x,y,z) = (2x-1, 2y+1, 2z)$.

Por tanto, $\nabla f = 0$ en $(1/2, -1/2, 0)$ que está en U, el interior de D.

Sea $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Entonces ∂U es el conjunto de nivel $g(x,y,z) = 1$. Por el método de los multiplicadores de Lagrange, el máximo y el mínimo se deben alcanzar en un punto crítico de $f|\partial U$; es decir, en un punto $\mathbf{x}_0$ donde $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$ para algún escalar λ.

Luego,

$$(2x-1, 2y+1, 2z) = \lambda(2x, 2y, 2z)$$

es decir,