EJEMPLO 3.1.8 Seis matrices triangulares

Las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ son triangulares superiores;

$C=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son triangulares inferiores; I (la matriz identidad) y

$E=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ son diagonales. Observe que la matriz E es también triangular superior y triangular inferior.

EJEMPLO 3.1.9 El determinante de una matriz triangular inferior

La matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ es triangular inferior. Calcule $\det A$.

SOLUCIÓN ► $\det A = a_{11}\mathrm{A}_{11} + 0\mathrm{A}_{12} + 0\mathrm{A}_{13} + 0\mathrm{A}_{14} = a_{11}\mathrm{A}_{11}$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

El ejemplo 3.1.9 se puede generalizar para probar el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$ triangular superior o inferior. Entonces

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}} \qquad (3.1.9)$$

Esto es: *el determinante de una matriz triangular es igual al producto de sus componentes en la diagonal.*

Demostración

La parte triangular inferior del teorema se deduce del ejemplo 3.1.9. Se demostrará la parte triangular superior por inducción matemática comenzando con $n = 2$. Si A es una matriz trian-