SOLUCIÓN ► Al intercambiar los renglones y las columnas de cada matriz se obtiene

$$A^{\top}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\qquad B^{\top}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\\ 1 & 6\end{pmatrix}\qquad C^{\top}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 2\\ 2 & -3 & 1 & -1\\ -6 & 4 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

Observe, por ejemplo con respecto a la matriz C, que 4 es la componente en el renglón 2 y la columna 3 mientras que con respecto a la matriz de $C^{\top}$ 4 es la componente en el renglón 3 y la columnas 2. Esto significa que el elemento 2,3 de C es el elemento 3,2 de $C^{\top}$.

Teorema 2.5.1

Suponga que $A = (a_{ij})$ es una matriz de $n \times m$ y $B = (b_{ij})$ es una matriz de $m \times p$. Entonces

i) $(A^{\top})^{\top} = A$. **(2.5.2)**

ii) $(AB)^{\top} = B^{\top}A^{\top}$. **(2.5.3)**

iii) Si A y B son de $n \times m$, entonces $(A + B)^{\top} = A^{\top} + B^{\top}$. **(2.5.4)**

iv) Si A es invertible, entonces $A^{\top}$ es invertible y $(A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}$. **(2.5.5)**

Demostración

i) Esto sigue directamente de la definición de la transpuesta.

ii) Primero, se observa que AB es una matriz de $n \times p$, de manera que $(AB)^{\top}$ es de $p \times n$. También $B^{\top}$ es de $p \times m$ y $A^{\top}$ es de $m \times n$, de manera que $B^{\top}A^{\top}$ es de $p \times n$. De esta forma, ambas matrices en la ecuación (2.5.3) tienen el mismo tamaño. Ahora, el elemento ij de AB es $\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$, y éste es el elemento ji de $(AB)^{\top}$. Sean $C = B^{\top}$ y $D = A^{\top}$. Entonces el elemento ij, c_{ij}, de C es b_{ji} y el elemento ij, d_{ij}, de D es a_{ji}. Así, el elemento ji de $CD =$ elemento ji de $B^{\top}A^{\top} = \sum_{k=1}^{m} c_{jk}d_{ki} = \sum_{k=1}^{m} b_{kj}a_{ik} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} =$ elemento ji de $(AB)^{\top}$. Lo dicho completa la demostración de la parte ii).

iii) Esta parte se deja como ejercicio (vea el problema 2.5.17).

iv) Sea $A^{-1} = B$. Entonces $AB = BA = I$ de manera que, del inciso ii), $(AB)^{\top} = B^{\top}A^{\top} = I^{\top} = I$ y $(BA)^{\top} = A^{\top}B^{\top} = I$. Por tanto, $A^{\top}$ es invertible y $B^{\top}$ es el inverso de $A^{\top}$, es decir, $(A^{\top})^{-1} = B^{\top} = (A^{-1})^{\top}$.

La transpuesta juega un papel de suma importancia en la teoría de matrices. En capítulos posteriores se verá que A y $A^{\top}$ tienen muchas propiedades en común. Como las columnas de $A^{\top}$ son renglones de A se podrán establecer hechos sobre la transpuesta para concluir que casi todo lo que es cierto para los renglones de una matriz se cumple para sus columnas.

La siguiente definición es fundamental en la teoría de matrices.

Definición 2.5.2

Matriz simétrica

La matriz (cuadrada) A de $n \times n$ se denomina **simétrica** si $A^{\top} = A$. Es decir, las columnas de A son también los renglones de A.