ii) Una **forma cuadrática en dos variables** es una expresión de la forma

$$\boxed{F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2} \qquad \textbf{(8.5.2)}$$

donde $|a| + |b| + |c| \neq 0$.

Es evidente que las ecuaciones y las formas cuadráticas tienen una fuerte relación. Se comenzará el análisis de las formas cuadráticas con un ejemplo sencillo.

Considere la forma cuadrática $F(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2$. Sean $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces

$$A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ -2x + 3y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= (x^2 - 2xy) + (-2xy + 3y^2) = x^2 - 4xy + 3y^2 = F(x, y)$$

De esta manera se ha "representado" la forma cuadrática $F(x, y)$ mediante la matriz simétrica A en el sentido de que

$$\boxed{F(x, y) = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \qquad \textbf{(8.5.3)}$$

De forma inversa, si A es una matriz simétrica, entonces la ecuación (8.5.3) define una forma cuadrática $F(x, y) = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

Se puede representar $F(x, y)$ por muchas matrices pero sólo por una matriz simétrica. Para ver esto, sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}$, donde $a + b = -4$. Entonces, $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = F(x, y)$. Si, por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$, entonces $A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ -7x + 3y \end{pmatrix}$ y $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = x^2 - 4xy + 3y^2$. Sin embargo, si insistimos en que A sea simétrica, entonces debe tenerse $a + b = -4$ y $a = b$. Este par de ecuaciones tiene una solución única $a = b = -2$.

Si $F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ es una forma cuadrática, sea

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}} \qquad \textbf{(8.5.4)}$$

Entonces

$$A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \left[\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + \frac{b}{2}y \\ \frac{b}{2}x + cy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= ax^2 + bxy + cy^2 = F(x, y)$$

Se regresa ahora a la ecuación cuadrática (8.5.1). Usando (8.5.3) se puede escribir (8.5.1) como

$$\boxed{A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = d} \qquad \textbf{(8.5.5)}$$