### EJEMPLO 8.8.2 Ilustración del teorema de Cayley-Hamilton

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. En el ejemplo 8.1.4, se calculó la ecuación característica $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$.

Ahora se calcula $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 11 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 22 \\ 29 & 4 & 17 \\ 16 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $A^3 - 2A^2 - 5A + 6I = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 22 \\ 29 & 4 & 17 \\ 16 & 3 & 5 \end{pmatrix} +$

$$\begin{pmatrix} -12 & -2 & -2 \\ -14 & 0 & -22 \\ -6 & 2 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 5 & -20 \\ -15 & -10 & 5 \\ -10 & -5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En algunas situaciones el teorema de Cayley-Hamilton es útil para calcular la inversa de una matriz. Si existe $A^{-1}$ y $p(A) = 0$, entonces $A^{-1}p(A) = 0$. Para ilustrar esto, si $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$, entonces

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I = 0$$

y

$$A^{-1}p(A) = A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2A + a_1I + a_0A^{-1} = 0$$

Así,

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{a_0}(-A^{n-1} - a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_2A + a_1I)} \qquad \textbf{(8.8.6)}$$

Observe que $a_0 \neq 0$ porque $a_0 = \det A$ (¿por qué?), y se supuso que $A$ era invertible.

### EJEMPLO 8.8.3 Aplicación del teorema de Cayley-Hamilton para calcular $A^{-1}$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$. Aquí $n = 3$, $a_2 = -2$, $a_1 = -5$, $a_0 = 6$ y

$$A^{-1} = \frac{1}{6}(-A^2 + 2A + 5I)$$

$$= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} -6 & -1 & -1 \\ -7 & 0 & -11 \\ -3 & 1 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 6 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 9 & -13 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Observe que se calculó $A^{-1}$ haciendo sólo una división y calculando sólo un determinante [al encontrar $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$]. Este método en ocasiones es muy eficiente al implementarlo en una computadora.