Ahora, suponga que $i < j$ y que deben intercambiarse los renglones i y j. Esto se puede llevar a cabo intercambiando renglones varias veces. Se harán $j - i$ intercambiados para mover el renglón j al renglón i. Entonces el renglón i estará en el renglón $(i + 1)$ y pasará por otros $j - i - 1$ intercambios para mover el renglón i al renglón j. Para ilustrar esto, se intercambian los renglones 2 y 6:*

$$\underbrace{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\6\\5\\7\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\2\\3\\6\\4\\5\\7\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\2\\6\\3\\4\\5\\7\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\6\\2\\3\\4\\5\\7\end{matrix}}_{\substack{6-2=4 \text{ intercambia para}\\ \text{mover el 6 a la posición 2}}} \to \underbrace{\begin{matrix}1\\6\\3\\2\\4\\5\\7\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\6\\3\\4\\2\\5\\7\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\6\\3\\4\\5\\2\\7\end{matrix}}_{\substack{6-2-1=3 \text{ intercambia para}\\ \text{mover el 2 a la posición 6}}}$$

Por último, el número total de intercambios de renglones adyacentes es $(j - i) + (j - i - 1) = 2j - 2i - 1$, que es impar. Entonces, det A se multiplica por -1 un número impar de veces, que es lo que se quería demostrar.

EJEMPLO 3.2.9 Ilustración de la propiedad 3.2.4

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Al intercambiar los renglones 1 y 3 se obtiene $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Al intercambiar las columnas 1 y 2 de A se obtiene $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Por lo que, haciendo los cálculos directos, se encuentra que det $A = 16$ y det $B =$ det $C = -16$.

Propiedad 3.2.5

Si A tiene dos renglones o columnas iguales, entonces det $A = 0$.

Demostración

Suponga que los renglones i y j de A son iguales. Al intercambiar dichos renglones se obtiene una matriz B que tiene la propiedad de que det $B = -$det A (de la propiedad 3.2.4). Pero como renglón $i =$ renglón j, al intercambiarlos se obtiene la misma matriz. Así, $A = B$ y det $A =$ det $B = -$det A. Por tanto, 2 det $A = 0$, lo que puede ocurrir sólo si det $A = 0$.

* Observe que todos los números se refieren a renglones.