Aplicaciones inyectivas

Aunque no podemos visualizar la gráfica de una función $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, resulta de ayuda considerar cómo la función deforma subconjuntos. Sin embargo, simplemente observar estas deformaciones no nos proporciona una imagen completa del comportamiento de T. Podemos caracterizar T con más detalle utilizando el concepto de aplicación inyectiva.

> **Definición** Una aplicación T es ***inyectiva*** en D^* si para (u, v) y $(u', v') \in D^*$, $T(u, v) = T(u', v')$ implica que $u = u'$ y $v = v'$.

Este enunciado significa que T no aplica *dos puntos diferentes de D^* sobre el mismo punto de D*. Por ejemplo, la función $T(x, y) = (x^2 + y^2, y^4)$ no es inyectiva porque $T(1, -1) = (2, 1) = T(1, 1)$, y sin embargo, $(1, -1) \neq (1, 1)$.

Ejemplo 3 Consideremos la función de cambio a coordenadas polares $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ descrita en el Ejemplo 1, definida por $T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Demostrar que T no es inyectiva si su dominio es todo $\mathbb{R}^2$.

Solución Si $\theta_1 \neq \theta_2$, entonces $T(0, \theta_1) = T(0, \theta_2)$, y por tanto T no puede ser inyectiva. Esta observación implica que si L es el lado del rectángulo $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $r = 0$ (Figura 6.1.5), entonces T transforma todo L en un único punto, el centrol del disco unidad D. Sin embargo, si consideramos el conjunto $S^* = (0, 1] \times [0, 2\pi)$, entonces $T\colon S^* \to S$ es inyectiva (véase el Ejercicio 5). Evidentemente, para determinar si una función es inyectiva debe considerarse cuidadosamente el dominio elegido.

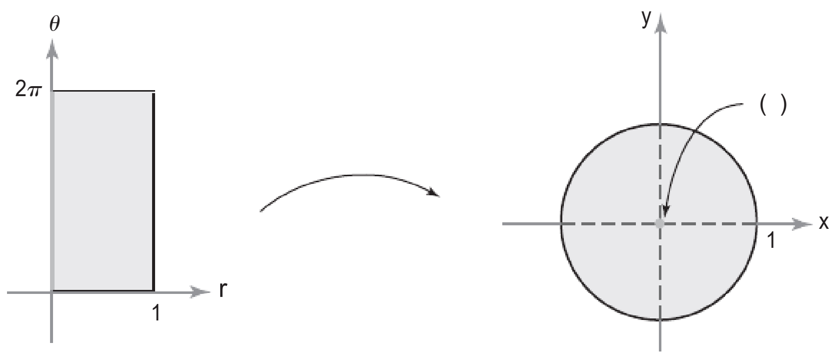

Figura 6.1.5 La transformaci ón a coordenadas polares T transforma la recta L en el punto (0, 0). ▲

Ejemplo 4 Demostrar que la función $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ del Ejemplo 2 es inyectiva.

Solución Supongamos que $T(x, y) = T(x', y')$; entonces

$$\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) = \left(\frac{x'+y'}{2}, \frac{x'-y'}{2}\right)$$