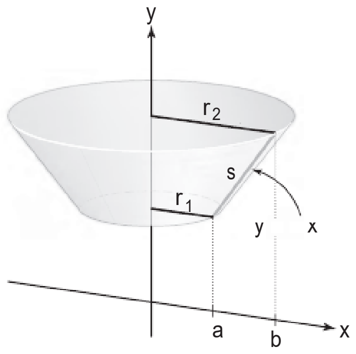

Figura 7.4.7 La revolución de un segmento de recta alrededor del eje *y* genera un tronco de cono.

24. Se realiza un agujero cilíndrico de radio 1 en una bola sólida de radio 2 para formar una junta anular como la mostrada en la Figura 7.4.8. Hallar el volumen y el área de la superficie exterior de esta junta.

25. Hallar el área de la gráfica de la función $f(x,y) = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$ que se encuentra sobre el dominio $[0,1] \times [0,1]$.

26. Expresar el área de la superficie de las gráficas siguientes sobre la región indicada D como una integral doble. No calcularlas.

(a) $(x+2y)^2; D = [-1,2] \times [0,2]$

(b) $xy + x/(y+1); D = [1,4] \times [1,2]$

(c) $xy^3 e^{x^2y^2}; D =$ círculo unidad centrado en el origen.

(d) $y^3 \cos^2 x; D =$ triágulo con vértices en $(-1,1), (0,2)$ y $(1,1)$.

27. Demostrar que el área de la superficie de la semiesfera superior de radio R, $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, se puede calcular mediante la fórmula (4), evaluada como una integral impropia.

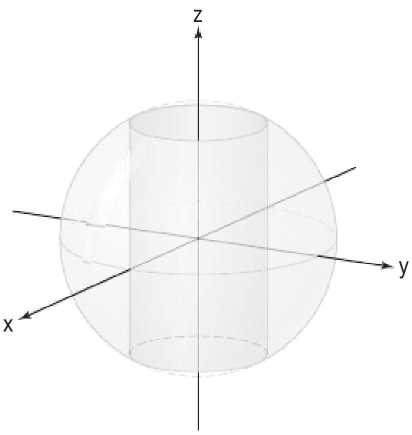

Figura 7.4.8 Hallar el área de la superficie exterior y el volumen de la región sombreada.

7.5 Integrales de funciones escalares sobre superficies

Ahora ya estamos preparados para definir la integral de una función *escalar* f *sobre una superficie* S. Este concepto es una generalización natural del área de una superficie, que corresponde a la integral sobre S de la función escalar $f(x,y,z) = 1$. Esto es parecido a considerar la integral a lo largo de una trayectoria como una generalización de la longitud de arco. En la siguiente sección nos ocuparemos de la integral de una función *vectorial* $\mathbf{F}$ sobre una superficie. Estos conceptos desempeñarán un papel crucial en el análisis vectorial que se trata en el capítulo final.

Comenzamos con una superficie S parametrizada por una aplicación $\mathbf{\Phi}: D \to S \subset \mathbb{R}^3$, donde D es una región elemental, que expresamos como $\mathbf{\Phi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

Definición Integral de una función escalar sobre una superficie Si $f(x,y,z)$ es una función continua con valores reales definida sobre una superficie parametrizada S, definimos la ***integral de f sobre S*** como

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_S f\, dS = \iint_D f(\mathbf{\Phi}(u,v)) \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\, du\, dv. \qquad (1)$$