De manera similar,

$$r_2 = 10 \cdot 4 + 30 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 50 \cdot 1 = 190 \text{ unidades}$$

y

$$r_3 = 10 \cdot 3 + 30 \cdot 3 + 20 \cdot 1 + 50 \cdot 2 = 240 \text{ unidades}$$

En general se ve que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

o

$$A\mathbf{p} = \mathbf{r}$$

Vector de producción

Vector de materia prima

Esto se puede ver de otra manera. Si a **p** se le conoce como el **vector de producción** y a **r** como el **vector de materia prima**, se define la función T por $\mathbf{r} = T(\mathbf{p}) = A\mathbf{p}$. Esto es, T es la función que "transforma" el vector de producción en el vector de materia prima y se hace mediante la multiplicación de matrices ordinaria. Como se verá, esta función es también una transformación lineal.

Antes de definir una transformación lineal, hablaremos un poco sobre las funciones. En la sección 2.3 se escribió un sistema de ecuaciones como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

donde A es una matriz de $m \times n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Se pidió encontrar **x** cuando A y b se conocían. No obstante, esta ecuación se puede ver de otra forma: suponga que A se conoce. Entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ "dice": proporcione una **x** en $\mathbb{R}^n$ y yo le daré una **b** en $\mathbb{R}^m$; es decir, A representa una *función* con dominio $\mathbb{R}^n$ e imagen en $\mathbb{R}^m$.

La función que se acaba de definir tiene las propiedades de que $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$ si α es un escalar y $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$. Esta propiedad caracteriza las transformaciones lineales.

D Definición 7.1.1

Transformación lineal

Sean V y W espacios vectoriales reales. Una **transformación lineal** T de V en W es una función que asigna a cada vector $\mathbf{v} \in V$ un vector único $T\mathbf{v} \in W$ y que satisface, para cada **u** y **v** en V y cada escalar α,

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v} \tag{7.1.1}$$

y

$$T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v} \tag{7.1.2}$$

Tres observaciones sobre notación

1. Se escribe $T: V \to W$ para indicar que T toma el espacio vectorial real V y lo lleva al espacio vectorial real W; esto es, T es una función con V como su dominio y un subconjunto de W como su imagen.