es decir, $x^4y^2 - 1 = 0$ y $x^2y^4 - 1 = 0$. A partir de la primera ecuación obtenemos $y^2 = 1/x^4$, y sustiuyendo esto en la segunda ecuación, obtenemos

$$\frac{x^2}{x^8} = 1 = \frac{1}{x^6}.$$

Luego, $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$, y por tanto se deduce que f tiene cuatro puntos críticos, a saber, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ y $(-1, -1)$. Obsérvese que f tiene el valor 3 para todos estos puntos, por lo que todos son mínimos. Por tanto, los puntos de la superficie más cercanos al punto $(0, 0, 0)$ son $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$ y $(-1, -1, 1)$, y la distancia mínima es $\sqrt{3}$. ¿Es esto coherente con la gráfica mostrada en la Figura 3.3.6? ▲

Ejemplo 9 Analizar el comportamiento de $z = x^5y + xy^5 + xy$ en sus puntos críticos.

Solución Las derivadas parciales primeras son

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4y + y^5 + y = y(5x^4 + y^4 + 1)$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x(5y^4 + x^4 + 1).$$

Los términos $5x^4 + y^4 + 1$ y $5y^4 + x^4 + 1$ siempre son mayores o iguales que 1, y por tanto se deduce que el único punto crítico es $(0, 0)$.

Las derivadas parciales segundas son

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20x^3y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 20xy^3$$

y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 5x^4 + 5y^4 + 1.$$

Por tanto, en $(0, 0)$, $D = -1$, y por tanto $(0, 0)$ es un punto de silla no degenerado y la gráfica de z cerca de $(0, 0)$ es similar a la gráfica mostrada en la Figura 3.3.3. ▲

Veamos ahora un ejemplo para una función de tres variables.

Ejemplo 10 Consideremos la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$. Demostrar que $(0, 0, 0)$ y $(-1, 1, 1)$ son puntos críticos. Determinar si son puntos de mínimo local, de máximo local o de silla, o de ninguno de estos tipos.

Solución $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2yz$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2xz$ y $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2xy$, todas las cuales se desvanecen en $(0, 0, 0)$ y $(-1, 1, 1)$. Por tanto, estos son puntos críticos. La forma cuadrática hessiana de f en $(0, 0, 0)$ es