Demostración Supongamos que D está dada por

$$\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), \qquad c \le y \le d.$$

Utilizando la notación de la Figura 8.1.3 y observando que y es constante en B_1^+ y B_2^-, tenemos

$$\int_{C^+} Q\,dy = \int_{C_1^- + B_1^+ + C_2^+ + B_2^-} Q\,dy = \int_{C_2^+} Q\,dy + \int_{C_1^-} Q\,dy,$$

donde C_2^+ es la curva parametrizada por $y \mapsto (\psi_2(y), y), c \le y \le d$, y C_1^+ es la curva $y \mapsto (\psi_1(y), y), c \le y \le d$. Aplicando el teorema de Fubini y el teorema fundamental del cálculo, obtenemos

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d [Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)]\,dy$$

$$= \int_{C_2^+} Q\,dy - \int_{C_1^+} Q\,dy = \int_{C_2^+} Q\,dy + \int_{C_1^-} Q\,dy = \int_{C^+} Q\,dy. \qquad \blacksquare$$

Sumando los resultados de los Lemas 1 y 2, se prueba el siguiente importante teorema.

Teorema 1 Teorema de Green Sea D una región simple y sea C su frontera. Supongamos que $P\colon D \to \mathbb{R}$ y $Q\colon D \to \mathbb{R}$ son de clase C^1. Entonces

$$\int_{C^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

La orientación correcta (positiva) para la curva de frontera de la región D se puede recordar usando el siguiente truco: *si caminamos a lo largo de la curva C con la orientación correcta, la región D debe quedar a nuestra izquierda* (véase la Figura 8.1.4).

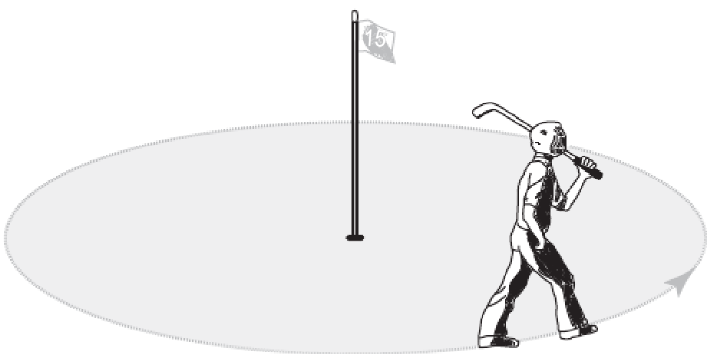

Figura 8.1.4 La orientación correcta para la frontera de una región D.