poblaciones de las especies en el tiempo t por $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Un sistema que gobierna el crecimiento relativo de las dos especies es

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= ax_1(t) + bx_2(t) \\ x_2'(t) &= cx_1(t) + dx_2(t) \end{aligned} \tag{8.7.18}$$

las constantes a, b, c y d se pueden interpretar de la siguiente manera: si las especies compiten, entonces es razonable tener $b < 0$ y $c < 0$. Esto se cumple porque los incrementos en la población de una especie disminuirán el crecimiento de la otra. Un segundo modelo es una relación de *depredador-presa.* Si S_1 es la presa y S_2 el depredador (S_2 se come a S_1), entonces es razonable tener $b < 0$ y $c > 0$ ya que un incremento en la especie depredadora causa un decremento en la especie presa, mientras que un incremento en la especie presa causará un incremento en la especie depredadora (porque tendrá más comida). Por último, en una relación simbiótica (cada especie vive de la otra), es posible que se tenga $b > 0$ y $c > 0$. Por supuesto, las constantes a, b, c y d dependen de una gran variedad de factores que incluyen comida disponible, temporada del año, clima, límites debidos a sobrepoblación, otras especies en competencia, etc. Debemos analizar cuatro modelos diferentes usando el material de esta sección. Se supondrá que t se mide en años.

EJEMPLO 8.7.3 Un modelo competitivo

Considere el sistema

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 3x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) &= 2x_1(t) + 2x_2(t) \end{aligned}$$

Aquí un aumento en la población de una especie causa una disminución en la tasa de crecimiento de la otra. Suponga que las poblaciones iniciales son $x_1(0) = 90$ y $x_2(0) = 150$. Encuentre las poblaciones de ambas especies para $t > 0$.

SOLUCIÓN ► Se tiene $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Los valores característicos de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$ con vectores característicos correspondientes $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Entonces

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{At} = Ce^{Jt}C^{-1} &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^t & -e^t \\ -2e^{4t} & e^{4t} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^t - 2e^{4t} & -e^t - e^{4t} \\ -2e^t + 2e^{4t} & -2e^t - e^{4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por último, la solución al sistema está dada por

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{At}\mathbf{x}_0 = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^t - 2e^{4t} & -e^t - e^{4t} \\ -2e^t + 2e^{4t} & -2e^t - e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 90 \\ 150 \end{pmatrix}$$