

Para el caso  $3 \times 3$ , esto significa

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 + b_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 + c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

y así sucesivamente. De nuevo, esta propiedad se puede probar utilizando la definición de determinante.

### Ejemplo 3

Supongamos que  $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}$ ; es decir,

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = \alpha(b_1, b_2, b_3) + \beta(c_1, c_2, c_3).$$

Demostrar que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

### Solución

Vamos a demostrar el caso para  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ . El caso en que  $\alpha = 0 = \beta$  es trivial, y el caso en que exactamente uno de  $\alpha, \beta$  sea cero es una simple modificación del caso que probamos. Utilizando las propiedades fundamentales de los determinantes, el determinante en cuestión es

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{\alpha} \begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ & \quad \text{(sacando el factor } -1/\alpha \text{ de la segunda fila)} \\ &= \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \left(-\frac{1}{\beta}\right) \begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix} \\ & \quad \text{(sacando el factor } -1/\beta \text{ de la tercera fila)} \\ &= \frac{1}{\alpha\beta} \begin{vmatrix} \beta c_1 & \beta c_2 & \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix} \\ & \quad \text{(sumando la segunda fila a la primera)} \\ &= \frac{1}{\alpha\beta} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix} \\ & \quad \text{(sumando la tercera fila a la primera)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

