tado con respecto a x. Dado que $\iint_R f(x,y)\,dA$ es igual al volumen V, obtenemos el siguiente resultado.

Integrales dobles e iteradas

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx \tag{1}$$

Si utilizamos planos de corte perpendiculares al eje y, obtenemos

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy \tag{2}$$

La expresión de la derecha de la Ecuación (2) es la integral iterada obtenida integrando con respecto a x e integrando después el resultado con respecto a y.

Por tanto, si nuestra intuición acerca de los volúmenes es correcta, las Ecuaciones (1) y (2) tienen que ser válidas. Este resultado es cierto y, de hecho, cuando los conceptos que estamos exponiendo se definen de forma rigurosa, este resultado se conoce como *teorema de Fubini.* En la siguiente sección proporcionamos una demostración de este teorema.

Como ilustran los siguientes ejemplos, el concepto de integral iterada y las Ecuaciones (1) y (2) proporcionan un excelente método para *calcular* la integral doble de una función de dos variables.

Ejemplo 3 Evaluar la integral

$$\iint_R (x^2 + y^2)\,dx\,dy,$$

donde $R = [-1, 1] \times [0, 1]$.

Solución Según la Ecuación (2),

$$\iint_R (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_{-1}^1 (x^2 + y^2)\,dx\right] dy.$$

Para hallar $\int_{-1}^1 (x^2 + y^2)\,dx$, tratamos y como una constante e integramos respecto a x. Puesto que $x^3/3 + y^2x$ es una primitiva de $x^2 + y^2$ con respecto a x, podemos integrar usando el teorema fundamental del cálculo para obtener

$$\int_{-1}^1 (x^2 + y^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + y^2x\right]_{x=-1}^1 = \frac{2}{3} + 2y^2.$$

A continuación, integramos $\frac{2}{3} + 2y^2$ con respecto a y entre 0 y 1 obteniendo