(I) $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$
si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$

(II) $f(x,y) = x^2y^2/(x^2+y^4)$
si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$

(a) En cada caso, demostrar que las derivadas parciales $\partial f(x,y)/\partial x$ y $\partial f(x,y)/\partial y$ existen para todo (x,y) de $\mathbb{R}^2$, y evaluar esas derivadas explícitamente en función de x e y.

(b) Explicar por qué las funciones descritas en (I) y (II) son o no son diferenciables en $(0,0)$.

36. Calcular el vector gradiente $\nabla f(x,y)$ en todos los puntos (x,y) de $\mathbb{R}^2$ para cada una de las funciones siguientes:

(a) $f(x,y) = x^2y^2 \log(x^2+y^2)$
si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$

(b) $f(x,y) = xy \operatorname{sen}[1/(x^2+y^2)]$
si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$

37. Hallar las derivadas direccionales de las siguientes funciones en el punto $(1,1)$ en la dirección $(\mathbf{i}+\mathbf{j})/\sqrt{2}$:

(a) $f(x,y) = x \tan^{-1}(x/y)$

(b) $f(x,y) = \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

(c) $f(x,y) = \exp(-x^2-y^2)$

38. (a) Sean $\mathbf{u} = \mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$. Hallar: $\|\mathbf{u}\|$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, y un vector con la misma dirección que $\mathbf{u}$, pero de longitud unidad.

(b) Hallar la tasa de variación de $e^{xy}\operatorname{sen}(xyz)$ en la dirección $\mathbf{u}$ en el punto $(0,1,1)$.

39. Denotamos mediante $h(x,y) = 2e^{-x^2}+e^{-3y^2}$ la altura de una montaña sobre el punto (x,y). ¿En qué dirección a partir de $(1,0)$ deberíamos caminar para ascender lo más rápidamente posible?

40. Calcular una ecuación para el plano tangente a la gráfica de

$$f(x,y) = \frac{e^x}{x^2+y^2}$$

en $x = 1, y = 2$.

41. (a) Dar una definición cuidadosa de la forma general de la regla de la cadena.

(b) Sean $f(x,y) = x^2+y$ y $\mathbf{h}(u) = (\operatorname{sen} 3u, \cos 8u)$. Sea $g(u) = f(\mathbf{h}(u))$. Calcular dg/du en $u = 0$ tanto de forma directa como empleando la regla de la cadena.

42. (a) Dibujar las curvas de nivel de $f(x,y) = -x^2-9y^2$ para $c = 0, -1, -10$.

(b) En el boceto, dibujar ∇f en $(1,1)$. Comentarlo.

43. En el instante $t = 0$, una partícula sale despedida de la superficie $x^2+2y^2+3z^2 = 6$ en el punto $(1,1,1)$ en dirección normal a la superficie, a una velocidad de 10 unidades por segundo. ¿En qué instante de tiempo atravesará la esfera $x^2+y^2+z^2 = 103$?

44. ¿En qué punto o puntos de la superficie del Ejercicio 43 es el vector normal paralelo a la recta $x = y = z$?

45. Calcular $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ si

$$z = \frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}, \qquad u = e^{-x-y}, \qquad v = e^{xy}$$

(a) Por sustitución y cálculo directo, y (b) por la regla de la cadena.

46. Calcular las derivadas parciales como en el Ejercicio 45 si $z = uv, u = x+y$ y $v = x-y$.

47. ¿Qué falla en el razonamiento siguiente? Suponer que $w = f(x,y)$ e $y = x^2$. Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + 2x\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Por tanto, $0 = 2x(\partial w/\partial y)$, y entonces $\partial w/\partial y = 0$. Buscar un ejemplo explícito que muestre que esto es realmente incorrecto.

48. Un barco navega con rumbo nordeste a 20 km/h. Suponiendo que la temperatura desciende a razón de 0,2° C/km en dirección norte y 0,3°C/km en dirección este, ¿cuál es la tasa de variación de la temperatura que se observa en el barco?

49. Utilizar la regla de la cadena para hallar una fórmula para $(d/dt)\exp[f(t)g(t)]$.

50. Utilizar la regla de la cadena para hallar una fórmula para $(d/dt)(f(t)^{g(t)})$.

51. Verificar la regla de la cadena para la función $f(x,y,z) = [\ln(1+x^2+2z^2)]/(1+y^2)$ y la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t, 1-t^2, \cos t)$.