número $[1/A(D)] \iint_D f(x,y)\ dA$ se encuentra entre estos valores, debe existir un punto $(x_0, y_0) \in D$ tal que

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x,y)\, dA,$$

que es precisamente la conclusión del Teorema 5. ■

Ejercicios

1. Cambiar el orden de integración de las siguientes integrales, pero no calcularlas:

(a) $\displaystyle\int_0^8 \int_{1/2y}^4 dx\, dy$

(b) $\displaystyle\int_0^9 \int_0^{\sqrt{y}} dx\, dy$

(c) $\displaystyle\int_0^4 \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} dx\, dy$

(d) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen} x} dy\, dx$

2. Cambiar el orden de integración y calcular:

$$\int_0^1 \int_y^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx\, dy.$$

3. En las siguientes integrales, cambiar el orden de integración, dibujar las regiones correspondientes y calcular la integral de las dos formas.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 xy\, dy\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} \cos\theta\, dr\, d\theta$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{2-y} (x+y)^2 dx\, dy$

(d) $\displaystyle\int_a^b \int_a^y f(x,y)\, dx\, dy$ (Expresar las respuestas en términos de primitivas).

4. Hallar

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2\, dx\, dy$

(b) $\displaystyle\int_{-3}^1 \int_{-\sqrt{(9-y^2)}}^{\sqrt{(9-y^2)}} x^2 dx\, dy$

(c) $\displaystyle\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2}\, dx\, dy$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\tan^{-1} y}^{\pi/4} (\sec^5 x)\, dx\, dy$

5. Cambiar el orden de integración y calcular:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}\, dx\, dy.$$

6. Considerando el hecho intuitivo de que si una región D en $\mathbb{R}^2$ se puede dividir en una unión disjunta de subconjuntos $D = D_1 \cup D_2$, entonces una integral doble sobre D también se puede dividir en una suma de dos integrales:

$$\iint_D f(x,y)\, dA =$$
$$= \iint_{D_1} f(x,y)\, dA + \iint_{D_2} f(x,y)\, dA.$$

(Véase la Sección 5.2 para un enunciado análogo sobre una caja rectangular.) ¿Son verdaderos o falsos los intentos siguientes de cambiar el orden de integración?

(a) $$\int_0^{\pi/4} \int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} dy\, dx =$$
$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \int_0^{\operatorname{arc\,sen} y} dx\, dy + \int_{\sqrt{2}/2}^{2} \int_0^{\operatorname{arc\,cos} y} dx\, dy$$

(b) $$\int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} dy\, dx = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} dx\, dy$$

(c) $$\int_0^2 \int_0^{(1/2)x} dy\, dx + \int_2^5 \int_{(1/3)x-(2/3)}^1 dy\, dx =$$
$$\int_0^1 \int_{2y}^{3y+2} dx\, dy$$