Reducción a integrales iteradas

Si $R = [a, b] \times [c, d]$ es un rectángulo que contiene a D, podemos usar los resultados en las integrales iteradas de la Sección 5.2 para obtener

$$\iint_D f(x, y)\ dA = \iint_R f^*(x, y)\ dA = \int_a^b \int_c^d f^*(x, y)\ dy\ dx$$
$$= \int_c^d \int_a^b f^*(x, y)\ dx\ dy,$$

donde f^* es igual a f en D y cero fuera de D, como antes. Suponemos que D es una región y-simple determinada por las funciones $\phi_1\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\phi_2\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Consideremos las integrales iteradas

$$\int_a^b \int_c^d f^*(x, y)\ dy\ dx$$

y, en particular, la integral interior $\int_c^d f^*(x, y)\, dy$ para x fijo (Figura 5.3.5). Por definición, $f^*(x, y) = 0$ si $y < \phi_1(x)$ o $y > \phi_2(x)$, así obtenemos

$$\int_c^d f^*(x, y)\, dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f^*(x, y)\, dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

A continuación resumimos lo que hemos obtenido.

Teorema 4 Reducción a integrales iteradas Si D es una región y-simple, como se muestra en la Figura 5.3.5, entonces

$$\iint_D f(x, y)\ dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx. \tag{1}$$

En el caso de $f(x, y) = 1$ para todo $(x, y) \in D$, $\iint_D f(x, y)\, dA$ es el área de D. Por otro lado, en este caso, el lado derecho de la fórmula (1) se convierte en:

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b [\phi_2(x) - \phi_1(x)]\, dx = A(D),$$

que es la fórmula para el área de D estudiada en el cálculo de una variable. Por tanto, la fórmula (1) se confirma en este caso.

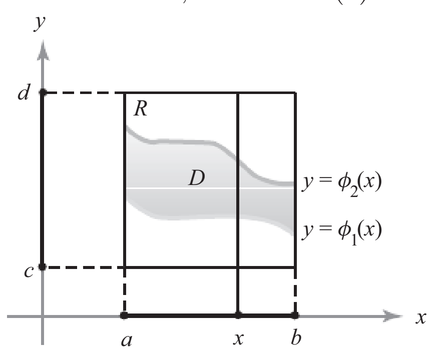

Figura 5.3.5 Esta región entre dos gráficas es una región y-simple.