Identidades básicas del análisis vectorial (*Cont.*)

9. div rot $\mathbf{F} = 0$
10. rot $(f\,\mathbf{F}) = f$rot $\mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$
11. rot $\nabla f = \mathbf{0}$
12. $\nabla^2(fg) = f\,\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2(\nabla f \cdot \nabla g)$
13. div $(\nabla f \times \nabla g) = 0$
14. div $(f\,\nabla g - g\nabla f\,) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$

Ejemplo 15 Probar la identidad 7 del recuadro anterior.

Solución El campo vectorial $f\,\mathbf{F}$ tiene componentes fF_i, para $i = 1, 2, 3$, y por tanto

$$\text{div}\,(f\,\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(fF_1) + \frac{\partial}{\partial y}(fF_2) + \frac{\partial}{\partial z}(fF_3).$$

Sin embargo, $(\partial/\partial x)(fF_1) = f\partial F_1/\partial x + F_1 \partial f/\partial x$ por la regla del producto, con expresiones similares para los restantes términos. Por tanto,

$$\begin{aligned}\text{div}\,(f\,\mathbf{F}) &= f\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) + F_1\frac{\partial f}{\partial x} + F_2\frac{\partial f}{\partial y} + F_3\frac{\partial f}{\partial z}\\ &= f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla f.\end{aligned}$$

▲

Vamos a utilizar estas identidades para volver a hacer el Ejemplo 14.

Ejemplo 16 Demostrar que para $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}, \nabla^2(1/r) = 0$.

Solución Como en el caso del potencial gravitatorio, $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$. En general, $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ (véase el Ejercicio 38). Por la identidad $\nabla \cdot (f\,\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla f \cdot \mathbf{F}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) &= \frac{1}{r^3}\nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\\ &= \frac{3}{r^3} + \mathbf{r} \cdot \left(\frac{-3\mathbf{r}}{r^5}\right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0.\end{aligned}$$

▲

Divergencia y rotacional

Nota histórica

William Rowan Hamilton, en su investigación de los cuaterniones (explicada en la Sección 1.3), presentó el *operador nabla*, definido formalmente como

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$