Definición 2.4.1

Matriz identidad

La **matriz identidad** I_n de $n \times n$ es una matriz de $n \times n$ cuyos elementos de la **diagonal principal** son iguales a 1 y todos los demás son 0. Esto es,

$$\boxed{I_n = (b_{ij}) \quad \text{donde} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}} \tag{2.4.1}$$

Nota

La diagonal de $A = (a_{ij})$ consiste en las componentes a_{11}, a_{22}, a_{33}, etc. A menos que se establezca de otra manera, se hará referencia a la diagonal principal simplemente como la **diagonal**.

EJEMPLO 2.4.1 Dos matrices identidad

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota

I_n funciona para las matrices de $n \times n$ de la misma manera que el número 1 funciona para los números reales ($1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para todo número real a).

Teorema 2.4.1

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces

$$\boxed{AI_n = I_nA = A}$$

Es decir, I_n conmuta con toda matriz de $n \times n$ y la deja sin cambio después de la multiplicación por la derecha o por la izquierda.

Demostración

Sea c_{ij} el elemento ij de AI_n. Entonces

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ij}b_{jj} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Pero por (2.4.1), esta suma es igual a a_{ij}. Así $AI_n = A$. De una manera similar se puede demostrar que $I_nA = A$ y esto demuestra el teorema.

Notación. De aquí en adelante se escribirá la matriz identidad únicamente como I, ya que si A es de $n \times n$ los productos IA y AI están definidos sólo si I es también de $n \times n$.

Observación 1

A partir de esta definición se deduce inmediatamente que $(A^{-1})^{-1} = A$ si A es invertible.

Observación 2

Esta definición *no* establece que toda matriz cuadrada tiene inversa. De hecho, existen muchas matrices cuadradas que no tienen inversa (ejemplo 2.4.3).

Definición 2.4.2

La inversa de una matriz

Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Suponga que

$$AB = BA = I$$

Entonces B se llama la **inversa** de A y se denota por A^{-1}. Entonces se tiene

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

Si A tiene inversa, entonces se dice que A es **invertible**.