Sistema inconsistente

Un sistema que no tiene solución se dice que es **inconsistente**.

Geométricamente es fácil explicar lo que sucede en los ejemplos anteriores. Primero, se repite que ambas ecuaciones del sistema (1.1.1) son de líneas rectas. Una solución a (1.1.1) es un punto (x, y) que se encuentra sobre las dos rectas. Si las dos rectas no son paralelas, entonces se intersecan en un solo punto. Si son paralelas, entonces nunca se intersecan (es decir, no tienen puntos en común) o son la misma recta (esto es, tienen un número infinito de puntos en común). En el ejemplo 1.1.1 las rectas tienen pendientes de $\frac{3}{2}$ y $-\frac{5}{2}$, respectivamente, por lo que no son paralelas y tienen un solo punto en común (2, 1). En el ejemplo 1.1.2, las rectas son paralelas (tienen pendiente 1) y coincidentes. En el ejemplo 1.1.3, las rectas son paralelas y distintas. Estas relaciones se ilustran en la figura 1.2.

Ahora se procederá a resolver el sistema (1.1.1) formalmente. Se tiene

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

Se deben analizar los siguientes casos:

Caso I Si $a_{12} = a_{22} = 0$, el sistema sólo tiene una incógnita, que es x.

Caso II Si $a_{11} = a_{21} = 0$, el sistema sólo tiene una incógnita, que es y.

Caso III Si $a_{12} = 0$ y $a_{11} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$, entonces $x = \frac{b_1}{a_{11}}$, y se puede usar la segunda ecuación para despejar y.

Caso IV Si $a_{22} = 0$ y $a_{11} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$ y $a_{21} \neq 0$, entonces $x = \frac{b_2}{a_{21}}$, y se puede usar la primera ecuación para despejar y.

Caso V Si $a_{11} = 0$ y $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$, entonces $y = \frac{b_2}{a_{12}}$, y se puede usar la segunda ecuación para despejar x.

Caso VI Si $a_{21} = 0$ y $a_{11} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$, entonces $y = \frac{b_2}{a_{22}}$, y se puede usar la primera ecuación para despejar x.

El último caso necesita un desarrollo más detallado, de modo que consideremos que todos los coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son diferentes a cero.

Si se multiplica la primera ecuación por a_{22} y la segunda por a_{12} se tiene

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}\,y &= a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}\,y &= a_{12}b_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(1.1.5)}$$

Sistemas equivalentes

Antes de continuar observe que los sistemas (1.1.1) y (1.1.5) son **equivalentes**. Esto quiere decir que cualquier solución del sistema (1.1.1) es una solución del sistema (1.1.5) y viceversa. Ello se concluye directamente de la propiedad B, suponiendo que la constante c sea diferente de cero. Después, si en (1.1.5) se resta la segunda ecuación de la primera, se obtiene

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \qquad \textbf{(1.1.6)}$$

Observe que si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, entonces se puede dividir entre este término para obtener

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Después se puede sustituir este valor de x en el sistema (1.1.1) para despejar y, y así se habrá encontrado la solución única del sistema.