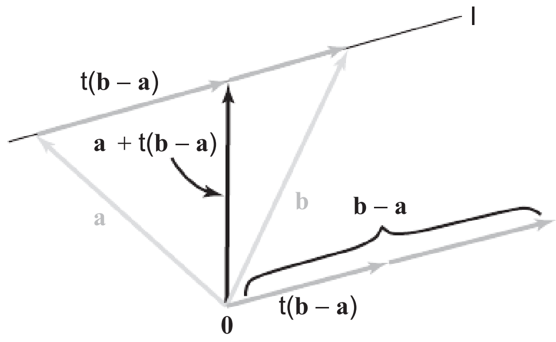

Figura 1.1.22 La recta l, dada en forma param étrica por $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - t)\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$, pasa por los extremos de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

por dicho punto en la dirección de $\mathbf{v}$. Por ejemplo, el extremo de $\mathbf{a} + \mathbf{v}$ está en la recta $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ y, por tanto, $\mathbf{l}_1(t) = (\mathbf{a} + \mathbf{v}) + t\mathbf{v}$ representa la misma recta. Es posible obtener otras ecuaciones observando que si $\alpha \neq 0$, el vector $\alpha\mathbf{v}$ tiene el mismo sentido (o el opuesto) que $\mathbf{v}$. Así, $\mathbf{l}_2(t) = \mathbf{a} + t\alpha\mathbf{v}$ es otra ecuación de la recta $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$.

Por ejemplo, $\mathbf{l}(t) = (1, 0, 0) + (t, t, 0)$ y $\mathbf{l}_1(s) = (0, -1, 0) + (s, s, 0)$ representan la misma recta ya que ambas tienen la misma dirección $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y pasan por el punto (1, 0, 0); $\mathbf{l}$ pasa por el punto (1, 0, 0) en $t = 0$ y $\mathbf{l}_1$ pasa por el punto (1, 0, 0) en $s = 1$.

Por tanto, la ecuación de una recta no está determinada de manera única. A pesar de ello, se suele utilizar el término “la ecuación de una recta”. Teniendo esto en cuenta, vamos a deducir *la ecuación de una recta que pasa por los extremos de dos vectores dados,* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$. Dado que el vector $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ es paralelo al segmento dirigido de $\mathbf{a}$ hacia $\mathbf{b}$, calculamos la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $\mathbf{a}$ en el sentido de $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ (Figura 1.1.22). Luego,

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}); \qquad \text{es decir,} \qquad \mathbf{l}(t) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}.$$

A medida que t aumenta de 0 a 1, $t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ comienza siendo el vector cero y su longitud va aumentando (manteniendo la dirección de $\mathbf{b} - \mathbf{a}$) hasta que en $t = 1$ es el vector $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. Por tanto, para $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, según t crece de 0 a 1, el vector $\mathbf{l}(t)$ se mueve desde la punta de $\mathbf{a}$ hasta la punta de $\mathbf{b}$ a lo largo del segmento dirigido que va de $\mathbf{a}$ hacia $\mathbf{b}$.

Si P $= (x_1, y_1, z_1)$ es la punta del vector $\mathbf{a}$ y Q $= (x_2, y_2, z_2)$ es la punta de $\mathbf{b}$, entonces $\mathbf{v} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$, y por tanto las ecuaciones de la recta son

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)t. \end{aligned}$$

Eliminando t, podemos escribir estas ecuaciones como sigue

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$