Para hallar el área de D, sustituimos $f = 1$ en la fórmula (2); esto da

$$\iint_D dA = \int_c^d (\psi_2(y) - \psi_1(y))\, dy.$$

De nuevo, este resultado para el área coincide con los resultados del cálculo de una variable para el área de una región entre dos curvas.

Tanto el método para regiones y-simples como el método para regiones x-simples se pueden utilizar para integrales sobre regiones simples.

De las fórmulas (1) y (2) se deduce que $\iint_D f\ dA$ es independiente de la elección del rectángulo R que contiene a D utilizado en la definición de $\iint_D f\ dA$, porque, si hubiéramos elegido otro rectángulo que contuviera a D, habríamos llegado a la misma fórmula (1).

Ejercicios

1. En los apartados (a) hasta (d), cada integral iterada es una integral sobre una región D. Establecer la correspondencia de cada integral con la región de integración correcta (véase la figura de la página siguiente).

(a) $\displaystyle\int_1^2 \int_{\ln x}^{e^x} dy\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \int_{(1/8)x}^{x^{1/3}} dy\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{0} dx\, dy$

(d) $\displaystyle\int_0^3 \int_{\arccos y/3}^{0} dx\, dy$

2. Dibujar la región D en $\mathbb{R}^2$ que representa la región de integración:

(a) $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} (4 - x)\, dx\, dy$

(b) $\displaystyle\int_0^3 \int_{-x}^{x} (6 + y - 2x)\, dy\, dx$

3. Evaluar las siguientes integrales iteradas y dibujar las regiones D determinadas por los límites. Establecer si las regiones son x-simples, y-simples o simples.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} dy\, dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{e^x} (x + y)\, dy\, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y\, dy\, dx$

4. Calcular las siguientes integrales y dibujar las regiones correspondientes.

(a) $\displaystyle\int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2 + y)\, dx\, dy$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\, dy\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dy\, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \operatorname{sen} x\, dy\, dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^{y} (x^n + y^m)\, dx\, dy, \qquad m, n > 0$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x\, dy\, dx$

5. Utilizar integrales dobles para calcular el área de un círculo de radio r.

6. Utilizando integrales dobles, determinar el área de una elipse con semiejes de longitudes a y b.

7. ¿Cuál es el volumen de un granero que tiene una base rectangular de 6 metros por 12 metros y paredes de 9 metros de altura en el frente (que suponemos que está en el lado de 6 metros) y de 12 metros en la parte posterior? El granero tiene un techo plano. Utilice integrales dobles para calcular el volumen.