Los rotacionales tienen divergencia cero

Una relación básica entre las operaciones de divergencia y rotacional es la siguiente.

Teorema 2 Divergencia de un rotacional Para cualquier campo vectorial $\mathbf{F}$ de clase C^2

$$\text{div rot } \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

Es decir, la divergencia de cualquier rotacional es cero.

Como en el caso del rotacional de un gradiente, la demostración se basa en la igualdad de las derivadas parciales cruzadas. El lector debería escribir los detalles. En el Capítulo 8 veremos el resultado recíproco.

Ejemplo 13 Demostrar que el campo vectorial $\mathbf{V}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ no puede ser el rotacional de ningún campo vectorial $\mathbf{F}$; es decir, no existe ningún $\mathbf{F}$ tal que $\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{F}$.

Solución Si existiera tal $\mathbf{F}$, entonces div $\mathbf{V}$ sería igual a cero por el Teorema 2. Pero

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \neq 0,$$

por lo que $\mathbf{V}$ no puede ser rot $\mathbf{F}$ para ningún $\mathbf{F}$. ▲

El laplaciano

El ***operador de Laplace*** ∇^2, que actúa sobre funciones f, se define como la divergencia del gradiente:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f\,) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Este operador desempeña un papel importante en muchas leyes de la física, como ya hemos mencionado en la Sección 3.1.

El siguiente ejemplo es importante en la física matemática.

Ejemplo 14 Demostrar que $\nabla^2 f = 0$ para

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{r} \qquad \text{y} \qquad (x, y, z) \neq (0, 0, 0),$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $r = \|\mathbf{r}\|$.

Solución Las derivadas primeras son