Regiones elementales

Como antes, restringimos nuestra atención a regiones particularmente sencillas. Una ***región elemental*** en el espacio tridimensional es aquella que se define restringiendo una de las variables a estar entre dos funciones de las restantes variables, siendo el dominio de estas funciones una región elemental (es decir, x-simple o y-simple) en el plano. Por ejemplo, si D es una región elemental en el plano xy y si $\gamma_1(x, y)$ y $\gamma_2(x, y)$ son dos funciones tales que $\gamma_2(x, y) \geq \gamma_1(x, y)$, una región elemental formada por todos los puntos (x, y, z) tales que (x, y) están en D y $\gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)$. En la Figura 5.5.2 se muestran dos regiones elementales.

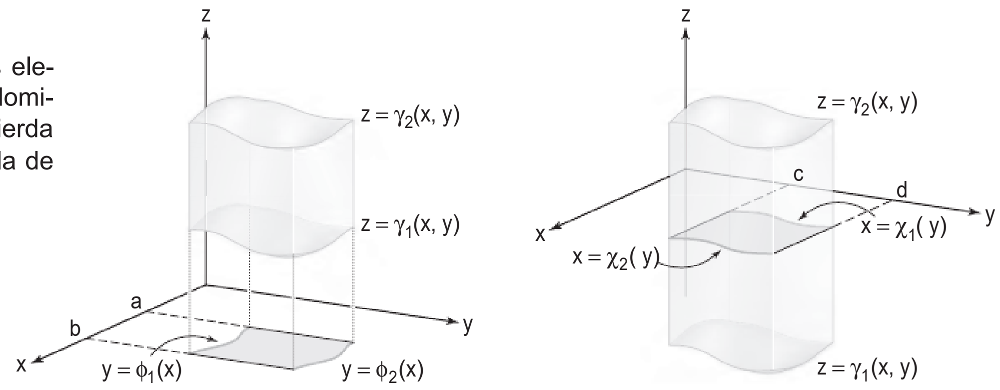

Figura 5.5.2 Dos regiones elementales en el espacio. El dominio *D* en la figura de la izquierda es *y*-simple, mientras que la de la derecha es *x*-simple.

Ejemplo 3 Describir la bola unidad $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ como una región elemental.

Solución Esto se puede hacer de varias formas. Una de ellas, en la que D es una región y-simple, es:

$$\begin{gathered} -1 \leq x \leq 1, \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}. \end{gathered}$$

Al hacer esto, en primer lugar escribimos los hemisferios superior e inferior como $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ y $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$, respectivamente, donde x e y se mueven dentro del disco unidad (es decir, $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ y x varía entre -1 y 1). (Véase la Figura 5.5.3.) Podemos describir la región de otras formas intercambiando los papeles de x, y y z en las desigualdades. ▲

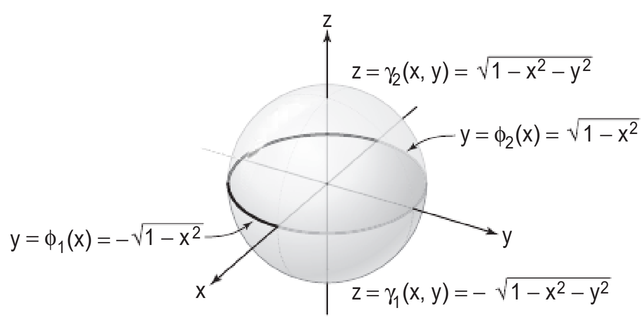

Figura 5.5.3 La bola unidad como una región elemental en el espacio.