49. Demuestre que la circunferencia de radio 1 centrado en el origen (la *circunferencia unitaria*) es el conjunto de puntos en el plano complejo que satisfacen $|z| = 1$.

50. Para cualquier número complejo z_0 y cualquier número real positivo a describa $\{z: |z - z_0| = a\}$.

51. Describa $\{z: |z - z_0| \leq a\}$, donde z_0 ya está definido igual que en el problema 50.

52. Describa $\{z: a \leq |z - z_0| \leq A\}$, donde z_0 es cualquier número complejo y $a < A$.

53.** Sea $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0$, donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ son números reales. Demuestre que si $p(z) = 0$, entonces $p(\bar{z}) = 0$. Esto es: *las raíces de polinomios con coeficientes reales ocurren en pares complejos conjugados*. [Sugerencia:*** $0 = \bar{0}$; calcule $\overline{p(z)}$.]

54. Derive expresiones para cos 4θ y sen 4θ comparando la fórmula de De Moivre y la expansión de $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^4$.

55. Demuestre la fórmula de De Moivre por inducción matemática. [***Sugerencia:*** Recuerde las identidades trigonométricas $\cos (x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ y $\operatorname{sen} (x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$.]