y

$$\|\mathbf{v}_3'\| = \left[\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{36}\right) dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{9} - \frac{x^2}{6} + \frac{x}{36}\right)\Bigg|_0^1\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{180}} = \frac{1}{6\sqrt{5}}$$

Entonces $\mathbf{u}_3 = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{5}\,(6x^2 - 6x + 1)$. Por último, una base ortonormal es $\{1, \sqrt{3}(2x - 1), \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)\}$.

**Cálculo**

### EJEMPLO 6.3.9 Un conjunto ortonormal infinito C[0, 2$\pi$]

En $C[0, 2\pi]$, el conjunto infinito

$$S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\text{sen } x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\text{sen } 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\text{sen } 2x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\text{sen } nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots\right\}$$

es un conjunto ortonormal. Esto es cierto, ya que si $m \neq n$, entonces

$$\int_0^{2\pi} \text{sen } mx \cos nx\, dx = \int_0^{2\pi} \text{sen } mx \text{ sen } nx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0$$

Para probar una de estas igualdades se observa que

$$\int_0^{2\pi} \text{sen } mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\text{sen } (m+n)x \text{ sen } (m-n)x]\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos (m+n)x}{m+n} + \frac{\cos (m-n)x}{m-n}\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= 0$$

ya que $\cos x$ es periódica con periodo $2\pi$. Se vio que $\|\text{sen } x\| = \sqrt{\pi}$. Así, $\left\|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\text{sen } x\right\| = 1$. Las otras igualdades se deducen de forma similar. Este ejemplo proporciona una situación en la que tenemos un conjunto ortonormal *infinito*. De hecho, aunque esto está más allá del alcance elemental de este libro, es cierto que algunas funciones en $C[0, 2\pi]$ se pueden expresar como combinaciones lineales de las funciones en $S$. Suponga que $f \in C[0, 2\pi]$. Después, si se escribe $f$ como una combinación lineal infinita de los vectores en $S$, se obtiene lo que se denomina la **representación por series de Fourier** de $f$.

**Representación por series de Fourier**

### D Definición 6.3.4

**Proyección ortogonal**

Sea $H$ un subespacio del espacio con producto interno $V$ con una base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$. Si $\mathbf{v} \in V$, entonces la **proyección ortogonal** de $\mathbf{v}$ sobre $H$ denotada por $\text{proy}_H\,\mathbf{v}$ está dada por