b) Repita el inciso *a*) para las transformaciones siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) (*Lápiz y papel*) Describa la geometría de $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

para $r > 0$ y $s > 0$.

7.2 Propiedades de las transformaciones lineales: imagen y núcleo

En esta sección se desarrollan algunas propiedades básicas de las transformaciones lineales.

Teorema 7.2.1

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces para todos los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en V y todos los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

i) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

ii) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T\mathbf{u} - T\mathbf{v}$

iii) $T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1 T\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n T\mathbf{v}_n$

Nota. En el inciso i), el $\mathbf{0}$ de la izquierda es el vector cero en V, mientras que el $\mathbf{0}$ de la derecha es el vector cero en W.

Observación

Los incisos i) y ii) del teorema 7.2.1 son casos especiales del inciso iii).

Demostración

i) $T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0})$. Así,

$$\mathbf{0} = T(\mathbf{0}) - T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0}) - T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0})$$

ii) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T[\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}] = T\mathbf{u} + T[(-1)\mathbf{v}] = T\mathbf{u} + (-1)T\mathbf{v} = T\mathbf{u} - T\mathbf{v}$.

iii) Esta parte se prueba por inducción (vea el apéndice A). Para $n = 2$ se tiene $T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) = T(\alpha_1\mathbf{v}_1) + T(\alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1 T\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T\mathbf{v}_2$. Así, la ecuación (7.2.1) se cumple para $n = 2$. Se supone que se cumple para $n = k$ y se prueba para $n = k + 1$: $T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}) = T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k) + T(\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1})$, y usando la ecuación en la parte iii) para $n = k$, esto es igual a $(\alpha_1 T\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k T\mathbf{v}_k) + \alpha_{k+1} T\mathbf{v}_{k+1}$, que es lo que se quería demostrar. Esto completa la prueba.

Un dato importante sobre las transformaciones lineales es que están completamente determinadas por el efecto sobre los vectores de la base.