(a) ¿Cuál es la temperatura media?

(b) ¿En qué puntos del cubo es la temperatura igual a la temperatura media?

20. Utilizar coordenadas cilíndricas para hallar el centro de masa de la región definida por

$$y^2+z^2 \le \frac{1}{4}, \qquad (x-1)^2+y^2+z^2 \le 1, \qquad x \ge 1.$$

21. Hallar el centro de masa del hemisferio sólido

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le a^2 \text{ y } z \ge 0\},$$

si la densidad es constante.

22. Calcular $\iint_B e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, donde B está formado por los puntos (x, y) que satisfacen $x^2 + y^2 \le 1$ e $y \le 0$.

23. Calcular

$$\iiint_S \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

donde S es el sólido acotado por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, siendo $a > b > 0$.

24. Calcular $\displaystyle\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)xyz\,dx\,dy\,dz$ sobre cada una de las siguientes regiones:

(a) La esfera $D = \{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$

(b) La semiesfera $D = \{(x, y, z) \mid x^2+ y^2+z^2 \le R^2 \text{ y } z \ge 0\}$

(c) El octante $D = \{(x, y, z) \mid x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0 \text{ y } z^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$

25. Sea C la región cónica $\{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1\}$ en $\mathbb{R}^3$. Calcular la integral $\displaystyle\iiint_C (1 + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx\,dy\,dz$.

26. Hallar $\displaystyle\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$, siendo $f(x, y, z) = \exp\,[-(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}]$.

27. La *rigidez flexural EI* de una viga uniforme es el producto de su módulo de elasticidad de Young E y del momento de inercia I de la sección transversal de la viga con respecto a una línea horizontal l que pase por el centro de gravedad de esa sección. En este caso

$$I = \iint_R [d(x, y)]^2\,dx\,dy,$$

donde $d(x, y) =$ distancia de (x, y) a l y $R =$ sección transversal de la viga que estamos considerando.

(a) Supóngase que la sección transversal R es el rectángulo $-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 2$ y que l es la recta $y = 1/2$. Hallar I.

(b) Supóngase que la sección transversal R es un círculo de radio 4 y que l es el eje x. Hallar I usando coordenadas polares.

28. Hallar $\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$, donde

$$f(x, y, z) = \frac{1}{[1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}]^{3/2}}.$$

29. Supóngase que D es la región no acotada de $\mathbb{R}^2$ dada por el conjunto de puntos (x, y) tales que $0 \le x < \infty, 0 \le y \le x$. Sea $f(x, y) = x^{-3/2}e^{y-x}$. ¿Existe la integral impropia $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$?

30. Si el mundo fuese bidimensional, las leyes de la física predecirían que el potencial gravitatorio de una masa puntual sería proporcional al logaritmo de la distancia al punto. Utilizando coordenadas polares, escribir una integral que exprese el potencial gravitatorio de un disco con densidad constante.

31. (a) Calcular la integral impropia

$$\int_0^\infty \int_0^y xe^{-y^3}\,dx\,dy.$$

(b) Calcular

$$\iint_B (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\,dx\,dy,$$

siendo B la porción que hay en el primer cuadrante del disco de radio 2 centrado en $(0, 0)$.

32. Sea f una función no negativa definida sobre una región x-simple o y-simple $D \subset \mathbb{R}^2$ y supóngase que la función es continua, salvo en puntos de la frontera de D y, a lo sumo, en un conjunto finito de puntos interiores de D. Dar una definición adecuada de $\iint_D f\,dA$.

33. Calcular $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,dx\,dy$, siendo $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2)^{3/2}$. (SUGERENCIA: se puede suponer que un cambio de variables y el teorema de Fubini son ambos válidos para integrales impropias.)