Nota histórica

La teoría de los campos de fuerza y los potenciales gravitatorios fue desarrollada por Sir Isaac Newton (1642–1727). Newton demoró la publicación de sus teorías gravitatorias durante mucho tiempo. El resultado de que un planeta esférico tiene el mismo campo gravitatorio que tendría si toda su masa estuviera concentrada en su centro apareció por primera vez en su famosa obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, cuya primera edición se publicó en 1687. Resolveremos aquí el problema de Newton usando integrales múltiples y coordenadas esféricas; merece la pena resaltar que la solución que Newton publicó solo utilizaba geometría euclídea.

Ejemplo 7 Sea W una región con densidad constante y con masa total M. Demostrar que el potencial gravitatorio está dado por

$$V(x_1, y_1, z_1) = -\left[\frac{1}{r}\right]_{\rm m} GMm,$$

donde $[1/r]_{\rm m}$ es la media sobre W de

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}.$$

Solución De acuerdo con la Fórmula (9),

$$\begin{aligned}
-V(x_1, y_1, z_1) &= Gm \iiint_W \frac{\delta\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}\\
&= Gm\delta \iiint_W \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}\\
&= Gm[\delta \text{ volumen } (W)] \frac{\displaystyle\iiint_W \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}}{\text{volumen}(W)}\\
&= GmM\left[\frac{1}{r}\right]_{\rm m}
\end{aligned}$$

como se pedía. ▲

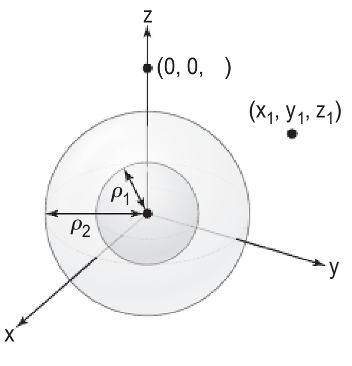

Figura 6.3.5 El potencial gravitatorio en (x_1, y_1, z_1) es el mismo que en $(0, 0, R)$, donde $R = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Usemos ahora la Fórmula (9) y coordenadas esféricas para hallar el potencial gravitatorio $V(x_1, y_1, z_1)$ de una región W con densidad constante entre las esferas concéntricas $\rho = \rho_1$ y $\rho = \rho_2$. Antes de evaluar la integral de la Fórmula (9), vamos a hacer varias observaciones que simplificarán los cálculos. Dado que G, m y la densidad son constantes, podemos en principio ignorarlas. Dado que el cuerpo atractor, W, es simétrico respecto de las rotaciones con centro en el origen, el potencial $V(x_1, y_1, z_1)$ también debe ser simétrico, por lo que $V(x_1, y_1, z_1)$ solo dependerá de la distancia al origen, $R = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. Nuestro cálculo será lo más simple posible si lo efectuamos para el punto $(0, 0, R)$, situado sobre el eje z (véase la Figura 6.3.5). Por tanto, tenemos que calcular la integral

$$V(0, 0, R) = -\iiint_W \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-R)^2}}.$$