En 1907, el matemático italiano Guido Fubini utilizó la integral de Lebesgue para enunciar en su forma más general el teorema de la igualdad de las integrales iteradas, la forma que se estudia actualmente y que emplean matemáticos y científicos en sus investigaciones.

Ejercicios

1. Calcular cada una de las siguientes integrales si $R = [0,1] \times [0,1]$.

(a) $\displaystyle\iint_R (x^3 + y^2)\ dA$

(b) $\displaystyle\iint_R ye^{xy}\ dA$

(c) $\displaystyle\iint_R (xy)^2 \cos x^3\ dA$

(d) $\displaystyle\iint_R \ln\left[(x+1)(y+1)\right]\ dA$

2. Calcular cada una de las siguientes integrales si $R = [0,1] \times [0,1]$.

(a) $\displaystyle\iint_R (x^m y^n)\ dx\, dy$, donde $m, n > 0$

(b) $\displaystyle\iint_R (ax + by + c)\ dx\, dy$

(c) $\displaystyle\iint_R \operatorname{sen}\,(x+y)\ dx\, dy$

(d) $\displaystyle\iint_R (x^2 + 2xy + y\sqrt{x})\ dx\, dy$

3. Calcular sobre la región R:

$$\iint_R \frac{yx^3}{y^2+2}\, dy\, dx, \qquad R\colon [0,2] \times [-1,1].$$

4. Calcular sobre la región R:

$$\iint_R \frac{y}{1+x^2}\, dx\, dy, \qquad R\colon [0,1] \times [-2,2].$$

5. Dibujar el sólido cuyo volumen está dado por:

$$\int_0^1 \int_0^1 (5 - x - y)\, dy\, dx.$$

6. Dibujar el sólido cuyo volumen está dado por:

$$\int_0^3 \int_0^2 (9 + x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

7. Calcular el volumen de la región que se encuentra sobre el rectángulo $[0,1] \times [0,1]$ y bajo la gráfica de $z = xy$.

8. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano xz, el plano yz, el plano xy, los planos $x = 1$ e $y = 1$, y la superficie $z = x^2 + y^4$.

9. Sea f continua en $[a,b]$ y sea g continua en $[c,d]$. Demostrar que

$$\iint_R [f(x)g(y)]\, dx\, dy = \left[\int_a^b f(x)\, dx\right]\left[\int_c^d g(y)\, dy\right],$$

donde $R = [a,b] \times [c,d]$.

10. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z = \operatorname{sen} y$, los planos $x = 1, x = 0, y = 0$ e $y = \pi/2$, y el plano xy.

11. Calcular el volumen del sólido acotado por la gráfica $z = x^2 + y$, el rectángulo $R = [0,1] \times [1,2]$ y las “caras verticales” de R.

12. Sea f continua en $R = [a,b] \times [c,d]$; para $a < x < b, c < y < d$, definimos

$$F(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(u,v)\, dv\, du.$$

Demostrar que $\partial^2 F/\partial x\, \partial y = \partial^2 F/\partial y\, \partial x = f(x,y)$. Utilizar este ejemplo para explicar la relación entre el teorema de Fubini y la igualdad de las derivadas parciales mixtas.

13. Considérese la integral del Ejercicio 2(a) como una función de m y n; es decir,

$$f(m,n) := \iint_R x^m y^n\, dx\, dy.$$

Calcular $\displaystyle\lim_{m,n\to\infty} f(m,n)$.