Divergencia en coordenadas esféricas

A continuación vamos a utilizar el teorema de Gauss para deducir la fórmula

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\operatorname{sen}\phi\, F_\phi) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \tag{8}$$

para la divergencia de un campo vectorial **F** en coordenadas esféricas, que fue enunciada en la Sección 8.2. (De nuevo, en este caso, los subíndices denotan las *componentes*, *no* derivadas parciales.) El método consiste en usar la fórmula

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathrm{P}) = \lim_{W\to P} \frac{1}{V(W)} \iint_{\partial W} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS, \tag{9}$$

donde W es una región con volumen $V(W)$, que se contrae a un punto **P** (anteriormente hemos utilizado una bola, pero podemos emplear regiones con cualquier forma). Sea W la región sombreada de la Figura 8.4.8.

Para las dos caras ortogonales a la dirección radial, la integral de superficie de la Ecuación (9) es, aproximadamente,

$$\begin{aligned} &F_\rho(\rho + d\rho, \phi, \theta) \times \ (\text{área de la cara externa}) \\ &\qquad -F_\rho(\rho, \phi, \theta) \times \ (\text{área de la cara interna}) \\ &\approx F_\rho(\rho + d\rho, \phi, \theta)(\rho + d\rho)^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta - F_\rho(\rho, \phi, \theta)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta \\ &\approx \frac{\partial}{\partial \rho}(F_\rho \rho^2 \operatorname{sen}\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta \end{aligned} \tag{10}$$

por el teorema de valor medio para funciones de una variable. Dividiendo entre el volumen de la región W, es decir, $\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$, vemos que la contribución al lado derecho de la Ecuación (9) es

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 F_\rho) \tag{11}$$

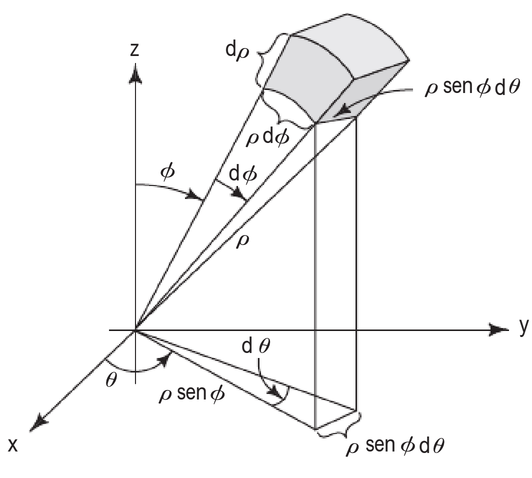

Figura 8.4.8 Volumen infinitesimal determinado por $d\rho$, $d\theta$, $d\phi$ en (ρ, θ, ϕ).