EJEMPLO 8.8.4 Uso del teorema de Gershgorin

Encuentre las fronteras sobre los valores característicos de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 6 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & -3 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 4 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN ► Aquí $a_{11} = 3$, $a_{22} = 5$, $a_{33} = 6a_{44} = -3$, $a_{55} = 4$, $r_1 = \frac{3}{2}$, $r_2 = \frac{3}{2}$, $r_3 = 1$, $r_4 = \frac{7}{4}$ y $r_5 = 1$. Las circunferencias de Gershgorin están dibujadas en la figura 8.6. Es evidente, del teorema 8.8.3 y la figura 8.7, que si λ es un valor característico de A, entonces $|\lambda| \le 7$ y Re $\lambda \ge -\frac{19}{4}$.

Observe el poder del teorema de Gershgorin para encontrar la localización aproximada de los valores característicos con muy poco trabajo.

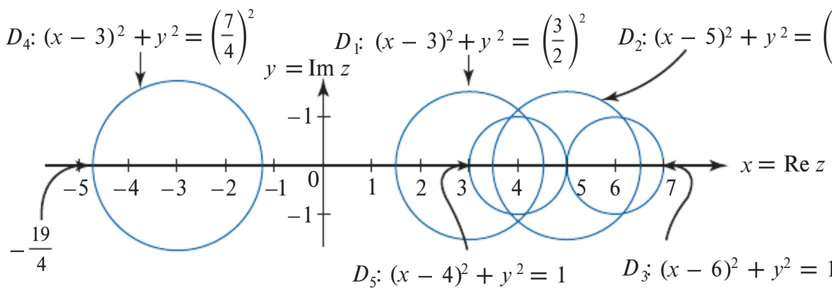

Figura 8.7

Todos los valores característicos de A se encuentran dentro de estas cinco circunferencias.

RESUMEN 8.8

- ***Teorema de Cayley-Hamilton***

  Cada matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica. Es decir, si $P(\lambda) = 0$ es la ecuación característica de A, entonces $P(A) = 0$.

- ***Circunferencias de Gershgorin***

  Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  y defina los números

$$r_1 = |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}| = \sum_{j=2}^{n} |a_{1f}|$$

$$r_i = |a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{ij-1}| + |a_{i,j-1}| \cdots + |a_{i,n}|$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}|$$