Caso 2: $\det A = 0$ y $\det B \neq 0$. A no es invertible, por lo que existe un vector de dimensión n $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Como $\det B \neq 0$, B es invertible y existe un vector único $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Entonces $AB\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) = A\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Así, AB no es invertible, esto es

$$\det AB = 0 = 0 \det B = \det A \det B$$

Caso 3: $\det A \neq 0$. A es invertible y se puede escribir como un producto de matrices elementales:

$$A = E_1, E_2, \cdots, E_m$$

Entonces

$$AB = E_1, E_2, \cdots, E_m B$$

Usando el resultado del lema 3.5.2 repetidas veces, se ve que

$$\begin{aligned} \det AB &= \det (E_1 E_2 \cdots E_m B) \\ &= \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_m \det B \\ &= \det (E_1 E_2 \cdots E_m) \det B \\ &= \det A \det B \end{aligned}$$

PROBLEMAS 3.5

1. Sea E la representación $R_i \leftrightarrows R_j$ y sea B una matriz de $n \times n$. Demuestre que $\det EB = \det E \det B$. [***Sugerencia:*** Describa la matriz EB y después utilice la ecuación (3.5.15) y la propiedad 3.5.4.]

2. Sea E la representación $R_j \to R_j + cR_i$ y sea B una matriz de $n \times n$. Demuestre que $\det EB = \det E \det B$. [***Sugerencia:*** Describa la matriz EB y después utilice la ecuación (3.5.16) y la propiedad 3.5.7.]

3. Sea E la representación $R_j \to cR_i$ y sea B una matriz de $n \times n$. Demuestre que $\det EB = \det E \det B$. [***Sugerencia:*** Describa la matriz EB y después utilice la ecuación (3.5.7) y la propiedad 3.5.2.]

Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 al 12 calcule el determinante.

1. $\begin{vmatrix} 7 & -8 \\ 9 & 9 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & -4 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 10 & 100 & 6 \end{vmatrix}$