cero para cualquier (u, v) en D^*, y si T aplica la frontera de D^* de forma inyectiva y sobreyectiva en la frontera de D, entonces T es inyectiva y sobreyectiva entre D^* y D. (Esta demostración queda fuera del ámbito de este texto.)

En resumen, tenemos:

> **Aplicaciones inyectivas y sobreyectivas** Una aplicación T: $D^* \to D$ es ***inyectiva*** si aplica puntos distintos a puntos distintos. Es ***sobreyectiva*** si la imagen de D^* bajo T es todo de D.
>
> Una transformación *lineal* de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ dada por la multiplicación por una matriz A es inyectiva y sobreyectiva si y solo si det $A \neq 0$.

Ejercicios

1. Determinar si las siguientes funciones T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son inyectivas y/o sobreyectivas.

(a) $T(x, y) = (2x, y)$.

(b) $T(x, y) = (x^2, y)$.

(c) $T(x, y) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$.

(d) $T(x, y) = (\operatorname{sen} x, \cos y)$.

2. Determinar si las siguientes funciones T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ son inyectivas y/o sobreyectivas.

(a) $T(x, y, z) = (2x + y + 3z, 3y - 4z, 5x)$.

(b) $T(x, y, z) = (y \operatorname{sen} x, z \cos y, xy)$.

(c) $T(x, y, z) = (xy, yz, xz)$.

(d) $T(x, y, z) = (e^x, e^y, e^z)$.

3. Sea D un cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(1,-1)$ y sea D^* un paralelogramo con vértices $(0,0), (1,2), (2,1), (1,-1)$. Hallar una aplicación lineal T que aplique D^* sobre D.

4. Sea D un paralelogramo cuyos vértices son $(0,0)$, $(-1,3)$, $(-2,0), (-1,-3)$. Sea $D^* = [0,1] \times [0,1]$. Hallar una aplicación lineal T tal que $T(D^*) = D$.

5. Sea $S^* = (0,1] \times [0, 2\pi)$ y sea $T(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$. Determinar la imagen S. Demostrar que T es inyectiva en S^*.

6. Sea

$$T(x^*, y^*) = \left(\frac{x^* - y^*}{\sqrt{2}}, \frac{x^* + y^*}{\sqrt{2}}\right).$$

Demostrar que T rota el cuadrado unidad, $D^* = [0,1] \times [0,1]$.

7. Sea $D^* = [0,1] \times [0,1]$ y sea T definida en D^* mediante $T(u, v) = (-u^2 + 4u, v)$. Hallar la imagen D. ¿Es T inyectiva?

8. Sea D^* el paralelogramo limitado por las rectas $y = 3x - 4, y = 3x, y = \frac{1}{2}x$ e $y = \frac{1}{2}(x+4)$. Sea $D = [0,1] \times [0,1]$. Hallar una aplicación T tal que D es la imagen de D^* bajo T.

9. Sea $D^* = [0,1] \times [0,1]$ y defínase T en D^* como $T(x^*, y^*) = (x^* y^*, x^*)$. Determinar la imagen D. ¿Es T inyectiva? Si no lo es, ¿podemos eliminar algún subconjunto de D^* de modo que el resto de T sea inyectiva?

10. Sea D^* el paralelogramo con vértices en $(-1,3)$, $(0,0), (2,-1)$ y $(1,2)$, y D el rectángulo $D = [0,1] \times [0,1]$. Hallar una aplicación T tal que D sea la imagen de D^*.

11. Sea T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el cambio a coordenadas esféricas definido por $(\rho, \phi, \theta) \mapsto (x, y, z)$, donde

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \quad z = \rho\cos\phi.$$

Sea D^* el conjunto de puntos (ρ, ϕ, θ) tales que $\phi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi], \rho \in [0,1]$. Hallar $D = T(D^*)$. ¿Es T inyectiva? Si no lo es, ¿podemos eliminar algún subconjunto de D^*, de modo que en lo que quede T sea inyectiva?