Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Entonces se define

$$\boxed{\text{Determinante de } A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad (2.4.11)$$

Determinante de una matriz 2 × 2

El determinante de A se denota por det A.

Teorema 2.4.5

Sea A = una matriz de 2×2. Entonces

i) A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$.

ii) Si $\det A \neq 0$, entonces

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \qquad (2.4.12)$$

Nota

La fórmula (2.4.12) se puede obtener directamente aplicando el procedimiento para calcular una inversa (ver el problema 2.4.57).

Demostración

Primero, suponga que $\det A \neq 0$ y sea $B = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$. Entonces $BA = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

De manera similar, $AB = I$, lo que muestra que A es invertible y que $B = A^{-1}$. Todavía debe demostrarse que si A es invertible, entonces $\det A \neq 0$. Para esto, se considera el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \qquad (2.4.13)$$

Se lleva a cabo de esta forma porque del teorema de resumen (teorema 1.1.15) se sabe que si este sistema tiene una solución única, entonces $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. El sistema se puede escribir en la forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (2.4.14)$$

con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Entonces, como A es invertible, se ve de (2.4.2) que el sistema (2.4.14) tiene una solución única dada por

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Pero por el teorema 1.1.1, el hecho de que el sistema (2.4.13) tenga una solución única implica que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A \neq 0$. Esto completa la prueba.