Las integrales impropias como límites de integrales iteradas

Supongamos que f es integrable sobre $D_{\eta,\delta}$. Podemos entonces aplicar el teorema de Fubini y obtener

$$\iint_{D_{\eta,\delta}} f\ dA = \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x,y)\ dy\ dx.$$

Por tanto, si f es integrable sobre D,

$$\iint_D f\ dA = \lim_{(\eta,\delta)\to(0,0)} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x,y)\ dy\ dx. \qquad (1)$$

Ahora, la función $F(\eta,\delta) = \iint_{D_{\eta,\delta}} f\ dA$ es una función de dos variables, η y δ, ya que al cambiar η y δ obtenemos valores diferentes. Ahora bien, si f es integrable, entonces

$$\lim_{(\eta,\delta)\to 0} F(\eta,\delta) = L$$

existe. De aquí se sigue que los límites iterados

$$\lim_{\eta\to 0}\lim_{\delta\to 0} F(\eta,\delta) \qquad \text{y} \qquad \lim_{\delta\to 0}\lim_{\eta\to 0} F(\eta,\delta)$$

también existen y son ambos iguales a L, que en nuestro caso es $\iint_D f\,dA$. Por tanto, el límite iterado

$$\lim_{\eta\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_1(x)-\delta} f(x,y)\ dy\ dx$$

también existe. A la inversa, si el límite iterado existe, eso no implica generalmente que el límite $\lim_{(\eta,\delta)\to(0,0)} F(\eta,\delta)$ exista.

Por ejemplo, si resultara de alguna manera que $F(\eta,\delta) = \eta\delta/(\eta^2+\delta^2)$, entonces $\lim_{\eta\to 0}\lim_{\delta\to 0} F(\eta,\delta) = \lim_{\delta\to 0}\lim_{\eta\to 0} F(\eta,\delta) = 0$; y, sin embargo, $\lim_{(\eta,\delta)\to 0} F(\eta,\delta)$ no existe, porque $F(\eta,\eta) = 1/2$ (véase la Sección 2.2).

En vista de lo anterior, consideremos de nuevo la expresión (1). Si f es integrable, entonces

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\ dA &= \lim_{(\eta,\delta)\to(0,0)} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x,y)\ dy\ dx \\ &= \lim_{\eta\to(0)}\lim_{\delta\to 0} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x,y)\ dy\ dx.\end{aligned}$$