(a) Demostrar que T es sobreyectiva sobre la esfera unidad; es decir, todo (x, y, z) con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ se puede escribir como $(x, y, z) = T(u, v, w)$ para algún (u, v, w).

(b) Demostrar que T no es inyectiva.

21. Integrar $x^2+y^2+z^2$ sobre el cilindro $x^2+y^2 \leq 2, -2 \leq z \leq 3$.

22. Calcular $\int_0^\infty e^{-4x^2}\, dx$.

23. Sea B la bola unidad. Calcular

$$\iiint_B \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}}$$

por medio de un cambio de variables apropiado.

24. Calcular $\iint_A [1/(x^2+y^2)^2]\, dx\, dy$, donde A está determinado por las condiciones $x^2+y^2 \leq 1$ y $x+y \geq 1$.

25. Calcular $\iiint_W \frac{dx\, dy\, dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, donde W es el sólido acotado por las dos esferas $x^2+y^2+z^2 = a^2$ y $x^2+y^2+z^2 = b^2$, donde $0 < b < a$.

26. Utilizar coordenadas esféricas para calcular:

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+[x^2+y^2+z^2]^2}\, dz\, dy\, dx$$

27. Sea D un triángulo en el plano (x, y) con vértices $(0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, 0)$. Calcular:

$$\iint_D \cos \pi \left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx\, dy$$

efectuando el apropiado cambio de variables.

28. Calcular $\iint_D x^2\, dx\, dy$, donde D está determinado por las dos condiciones $0 \leq x \leq y$ y $x^2+y^2 \leq 1$.

29. Integrar $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ sobre la región descrita en el Ejercicio 25.

30. Calcular las siguientes integrales usando coordenadas cilíndricas.

(a) $\iiint_B z\, dx\, dy\, dz$, donde B es la región dentro del cilindro $x^2+y^2 = 1$ por encima del plano xy y por debajo del cono $z = (x^2+y^2)^{1/2}$

(b) $\iiint_W (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} dx\, dy\, dz$, donde W es la región determinada por las condiciones $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$ y $x^2+y^2+z^2 \leq 1$

31. Calcular $\iint_B (x+y)\, dx\, dy$, donde B es el rectángulo del plano xy con vértices en (0, 1), (1, 0), (3, 4) y (4, 3).

32. Calcular $\iint_D (x+y)\, dx\, dy$, donde D es el cuadrado con vértices en $(0, 0), (1, 2), (3, 1)$ y $(2, -1)$.

33. Sea E el elipsoide $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)+(z^2/c^2) \leq 1$, donde a, b y c son positivos.

(a) Hallar el volumen de E.

(b) Calcular $\iiint_E [(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)]\, dx\, dy\, dz$. (SUGERENCIA: Efectuar un cambio de variables y después utilizar coordenadas esféricas.)

34. Utilizando coordenadas esféricas, calcular la integral de $f(\rho, \phi, \theta) = 1/\rho$ sobre la región del primer octante de $\mathbb{R}^3$, que está acotada por los conos $\phi = \pi/4$, $\phi = \arctan 2$ y la esfera $\rho = \sqrt{6}$.

35. La aplicación $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ transforma el rectángulo $1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 3$ del plano uv en una región R del plano xy.

(a) Demostrar que T es inyectiva.

(b) Hallar el área de R utilizando la fórmula de cambio de variables.

36. Sea R la región interior a $x^2+y^2 = 1$ y exterior a $x^2+y^2 = 2y$ con $x \geq 0, y \geq 0$.

(a) Dibujar dicha región.

(b) Sea $u = x^2+y^2, v = x^2+y^2-2y$. Dibujar la región D del plano uv que se corresponde con R bajo este cambio de coordenadas.

(c) Calcular $\iint_R xe^y\, dx\, dy$ usando este cambio de coordenadas.

37. Sea D la región acotada por $x^{3/2}+y^{3/2} = a^{3/2}$, para $x \geq 0, y \geq 0$, y los ejes coordenados $x = 0, y = 0$. Expresar $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ co-