(c) ¿Qué punto de la superficie dada por $z = x^2 - y^2$ tiene un plano tangente paralelo al plano determinado en el apartado (b)?

11. Sea $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$. Demostrar que el plano tangente a la gráfica de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es ortogonal al vector $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Proporcionar una interpretación geométrica.

12. Sean $F(u, v)$ y $u = h(x, y, z)$, $v = k(x, y, z)$ funciones con valores reales dadas (diferenciables) y sea $f(x, y, z)$ definida por $f(x, y, z) = F(h(x, y, z), k(x, y, z))$. Escribir una fórmula para el gradiente de f en función de las derivadas parciales de F, h y k.

13. Hallar una ecuación para el plano tangente de la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ para:

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - y + 2, (x_0, y_0) = (1, 1)$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + 4y^2, (x_0, y_0) = (2, -1)$

(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy, (x_0, y_0) = (-1, -1)$

(d) $f(x, y) = \log(x + y) + x \cos y + \arctan(x + y), (x_0, y_0) = (1, 0)$

(e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, (x_0, y_0) = (1, 1)$

(f) $f(x, y) = xy, (x_0, y_0) = (2, 1)$

14. Calcular una ecuación para los planos tangente de las siguientes superficies en los puntos indicados.

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3,\quad (1, 1, 1)$

(b) $x^3 - 2y^3 + z^3 = 0,\quad (1, 1, 1)$

(c) $(\cos x)(\cos y)e^z = 0,\quad (\pi/2, 1, 0)$

(d) $e^{xyz} = 1,\quad (1, 1, 0)$

15. Dibujar algunas curvas de nivel para las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = 1/xy$

(b) $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$

16. Considérese la función de temperatura $T(x, y) = x \operatorname{sen} y$. Dibujar algunas curvas de nivel. Calcular ∇T y explicar su significado.

17. Hallar los siguientes límites si existen:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos xy - 1}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|(x + y)/(x - y)|},\ x \neq y$

18. Calcular la primera derivada parcial y el gradiente de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y, z) = xe^z + y \cos x$

(b) $f(x, y, z) = (x + y + z)^{10}$

(c) $f(x, y, z) = (x^2 + y)/z$

19. Calcular $\dfrac{\partial}{\partial x}[x \exp(1 + x^2 + y^2)]$.

20. Sean $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ y $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funciones dadas por $f(x, z) = (x^2 - y^2, 0, \operatorname{sen}(xy), 1)$ y $g(x, y) = (ye^{x^2}, xe^{y^2})$. Calcular $D(f \circ g)(1, 2)$.

21. Sea $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2+10)}$. Hallar la tasa de variación de f en $(2, 1)$ según la dirección que apunta hacia el origen.

22. Sea $y(x)$ una función diferenciable definida implícitamente por $F(x, y(x)) = 0$. Por el Ejercicio 19(a) de la Sección 2.5, sabemos que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$

Se considera la superficie $z = F(x, y)$ y se supone que F es creciente como función de x y como función de y; es decir, $\partial F/\partial x > 0$ y $\partial F/\partial y > 0$. Considerando la gráfica y el plano $z = 0$, demostrar que fijado $z = 0$, y debe *decrecer* cuando x aumenta y x debe *decrecer* cuando y aumenta. ¿Concuerda esto con el signo menos de la fórmula para dy/dx?

23. (a) Considérese la gráfica de una función $f(x, y)$ [Figura 2.R.1(a)]. Sea (x_0, y_0) un punto sobre la curva de nivel C, de modo que $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a esta curva. Demostrar que el plano tangente de la gráfica es el plano que (i) contiene la recta perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0)$ y que descansa sobre el plano horizontal $z = f(x_0, y_0)$, y (ii) tiene pendiente $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ respecto del plano xy. (Por *pendiente* de un plano P respecto del plano xy entendemos la tangente del ángulo $\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$, entre $\mathbf{p}$, la normal a P hacia arriba y el vector unitario $\mathbf{k}$.)

(b) Utilizar este método para demostrar que el plano tangente a la gráfica de $f(x, y) = (x + \cos y)x^2$ en $(1, 0, 2)$ es como el mostrado en la Figura 2.R.1(b).

24. Hallar el plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, -2, 5)$. Para esta superficie, explicar el significado geométrico del gradiente de $f(x, y) = x^2 + y^2$ (véase el Ejercicio 23).