En los Ejercicios 17 y 18, determinar la ecuación de la recta tangente a la trayectoria dada para el valor especificado de t.

17. $(\operatorname{sen} 3t, \cos 3t, 2t^{5/2}); t = 1$

18. $(\cos^2 t, 3t - t^3, t); t = 0$

En los Ejercicios 19 a 22, suponer que una partícula que sigue la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ se sale por la tangente en $t = t_0$. Calcular la posición de la partícula en el instante t_1 dado.

19. $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$, donde $t_0 = 2, t_1 = 3$

20. $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$, donde $t_0 = 1, t_1 = 2$

21. $\mathbf{c}(t) = (4e^t, 6t^4, \cos t)$, donde $t_0 = 0, t_1 = 1$

22. $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen} e^t, t, 4 - t^3)$, donde $t_0 = 1, t_1 = 2$

23. El vector posición para una partícula que se mueve sobre una hélice es $\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t^2)$.

(a) Hallar la velocidad de la partícula en el instante $t_0 = 4\pi$.

(b) ¿Es $\mathbf{c}'(t)$ ortogonal a $\mathbf{c}(t)$?

(c) Hallar una parametrización para la recta tangente a $\mathbf{c}(t)$ en $t_0 = 4\pi$.

(d) ¿Dónde interseca esta recta al plano xy?

24. Considerar la espiral dada por $\mathbf{c}(t) = (e^t \cos(t), e^t \operatorname{sen}(t))$. Demostrar que el ángulo entre $\mathbf{c}$ y $\mathbf{c}'$ es constante.

25. Sean $\mathbf{c}(t) = (t^3, t^2, 2t)$ y $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, 2xy, z^2)$.

(a) Hallar $(f \circ \mathbf{c})(t)$.

(b) Hallar una parametrización para la recta tangente a la curva $f \circ \mathbf{c}$ en $t = 1$.

2.5 Propiedades de la derivada

En el cálculo elemental se aprende a derivar sumas, productos, cocientes y funciones compuestas. Aquí vamos a generalizar estas ideas a funciones de varias variables, prestando especial atención a la diferenciación de las funciones compuestas. La regla para derivar funciones compuestas, denominada *regla de la cadena*, adquiere para funciones de varias variables una forma más profunda que para las funciones de una variable.

Si f es una función con valores reales de una variable, escrita como $z = f(y)$ e y es una función de x, escrita como $y = g(x)$, entonces z será una función de x por sustitución, es decir, $z = f(g(x))$, y tendremos la familiar regla de la cadena:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x).$$

Si f es una función con valores reales de tres variables u, v y w, escrita de la forma $z = f(u, v, w)$, y las variables u, v, w son a su vez funciones de $x, u = g(x), v = h(x)$ y $w = k(x)$, entonces sustituyendo u, v y w por $g(x), h(x)$ y $k(x)$, obtenemos z como una función de x: $z = f(g(x), h(x), k(x))$. La regla de la cadena en este caso se traduce en:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

Uno de los objetivos de esta sección es explicar estas fórmulas en detalle.