Definición 7.5.1

Isometría

Una transformación lineal T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se denomina **isometría** si para cada $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{|T\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|} \tag{7.5.2}$$

Debido a la ecuación (7.5.2) se puede decir que una isometría en $\mathbb{R}^n$ es una transformación lineal que preserva la longitud en $\mathbb{R}^n$. Note que (7.5.2) implica que

$$\boxed{|T\mathbf{x} - T\mathbf{y}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \tag{7.5.3}$$

ya que $T\mathbf{x} - T\mathbf{y} = T(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

Teorema 7.5.2

Sea T una isometría de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y suponga que $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\boxed{T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} \tag{7.5.4}$$

Esto es, una isometría en $\mathbb{R}^n$ preserva el producto escalar.

Demostración

$$|T\mathbf{x} - T\mathbf{y}|^2 = (T\mathbf{x} - T\mathbf{y}) \cdot (T\mathbf{x} - T\mathbf{y}) = |T\mathbf{x}|^2 - 2T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{y} + |T\mathbf{y}|^2 \tag{7.5.5}$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2 \tag{7.5.6}$$

Como $|T\mathbf{x} - T\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$, $|T\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}|^2$ y $|T\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{y}|^2$, las ecuaciones (7.5.5) y (7.5.6) muestran que

$$-2T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{y} = -2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad \text{o} \quad T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

Cuando se desarrolló la ecuación (7.5.2) se demostró que si la representación matricial de T es una matriz ortogonal, entonces T es una isometría. Inversamente, suponga que T es una isometría. Si A es la representación matricial de T, entonces para cualesquiera $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \overset{\text{de (7.5.4)}}{=} T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{y} = A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} \overset{\text{de (7.5.1)}}{=} \mathbf{x} \cdot A^{\top}A\mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x} \cdot A^{\top}A\mathbf{y} = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} - A^{\top}A\mathbf{y}) = 0$$

Entonces

$$\mathbf{y} - A^{\top}A\mathbf{y} \in (\mathbb{R}^n)^{\top} = \{\mathbf{0}\}$$

Se ve que para toda $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{y} = A^{\top}A\mathbf{y} \tag{7.5.6}$$

Esto implica que $A^{\top}A = I$, de manera que A es ortogonal.

Se ha demostrado el siguiente teorema: