Teorema 7.3.5

Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Suponga que C es la matriz de transformación de T respecto a las bases estándar S_n y S_m en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Sea A_1 la matriz de transición de B_1 a la base S_n en $\mathbb{R}^n$ y sea A_2 la matriz de transición de B_2 a la base S_m en $\mathbb{R}^m$. Si A_T denota la matriz de transformación de T respecto a las bases B_1 y B_2, entonces

$$\boxed{A_T = A_2^{-1} C A_1} \tag{7.3.3}$$

En el ejemplo 7.3.9 se observa que la transformación lineal T respecto a la nueva base, la matriz de transformación A_T, resulta ser una matriz diagonal. Se regresará a este procedimiento de "diagonalización" en la sección 8.3. Se observará que dada una transformación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, con frecuencia es posible encontrar una base B tal que la matriz de transformación de T respecto a B es diagonal.

Geometría de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$

Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal con representación matricial A_T. Ahora se demostrará que si A_T es invertible, entonces T se puede escribir como una sucesión de una o más transformaciones especiales, denominadas **expansiones**, **compresiones**, **reflexiones** y **cortes**.

Expansiones a lo largo de los ejes *x* o *y*

Expansión a lo largo del eje *x*

Una **expansión a lo largo del eje *x*** es una transformación lineal que multiplica a la coordenada x de un vector en $\mathbb{R}^2$ por una constante $c > 1$. Esto es $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ y \end{pmatrix}$.

Entonces $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, de manera que si $A_T = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ y \end{pmatrix}.$$

En la figura 7.6 se ilustran dos expansiones.

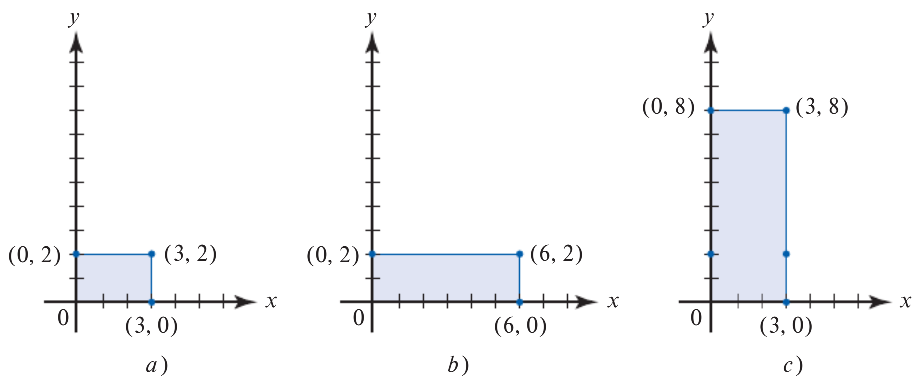

Figura 7.6

Dos expansiones: *a*) Se comienza con este rectángulo. *b*) Expansión en la dirección de *x* con $c = 2$. *c*) Expansión en la dirección de *y* con $c = 4$.