Observación 1. Este ejemplo ilustra que una matriz real puede tener valores y vectores característicos complejos. Algunos libros definen los valores característicos de matrices reales como las raíces ***reales*** de la ecuación característica. Con esta definición la matriz del último ejemplo *no* tiene valores característicos. Esto puede hacer que los cálculos sean más sencillos, pero también reduce en gran medida la utilidad de la teoría de valores característicos y de vectores característicos. En la sección 8.7 se verá una ilustración importante del uso de los valores característicos complejos.

Observación 2. Note que $\lambda_2 = 1 - i$ es el complejo conjugado de $\lambda_1 = 1 + i$. Adicionalmente, las componentes de $\mathbf{v}_2$ son complejas conjugadas de las componentes de $\mathbf{v}_1$, lo cual no es una coincidencia. En el problema 41 de esta sección se pide que se pruebe que

Los valores característicos de una matriz *real* ocurren en pares complejos conjugados
y
los vectores característicos correspondientes son complejos conjugados entre sí.

Antes de presentar más ejemplos se demostrará un teorema que en algunos casos especiales simplifica los cálculos de los valores característicos.

Teorema 8.1.4

Los valores característicos de una matriz triangular son las componentes diagonales de la matriz.

Demostración

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, entonces $A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$

y como el determinante de una matriz triangular es igual al producto de las componentes de la diagonal, se ve que det $(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda)$ con ceros $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. La demostración para una matriz triangular inferior es prácticamente idéntica.

EJEMPLO 8.1.7 Valores característicos de una matriz triangular

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & 6 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)(-3-\lambda)(5-\lambda)$

con ceros (y valores característicos) 2, –3 y 5.

A continuación se darán más ejemplos del cálculo de los valores y vectores característicos para matrices que no son triangulares.