$$\int_0^1 \left(\frac{2}{3} + 2y^2\right) dy = \left[\frac{2}{3}y + \frac{2}{3}y^3\right]_{y=0}^{1} = \frac{4}{3}.$$

Luego el volumen del sólido mostrado en la Figura 5.1.3 es 4/3.

Ahora calculamos $\iint_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy$ utilizando la Ecuación (1)—esto es, integrando primero con respecto a y y después con respecto a x, tenemos

$$\iint_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left[\int_0^1 (x^2 + y^2)\, dy\right] dx.$$

Tratando x como una constante en la integración con respecto a y, obtenemos

$$\int_0^1 (x^2 + y^2)\, dy = \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{1} = x^2 + \frac{1}{3}.$$

A continuación, calculamos $\int_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) dx$ para obtener

$$\int_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3}\right]_{x=-1}^{1} = \frac{4}{3},$$

que concuerda con la respuesta anterior. ▲

Ejemplo 4 Calcular la integral doble $\iint_S \cos x \operatorname{sen} y\, dx\, dy$, donde S es el cuadrado $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ (véase la Figura 5.1.9).

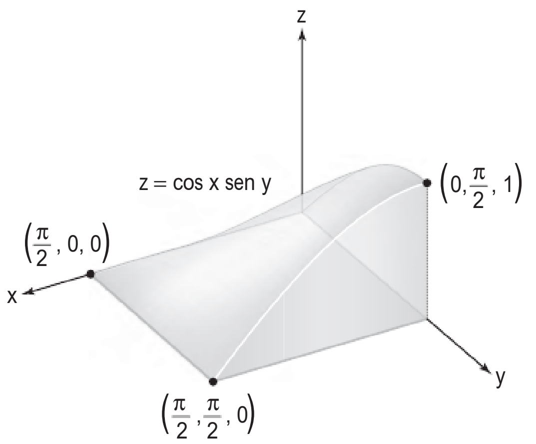

Figura 5.1.9 Volumen bajo $z = \cos x \operatorname{sen} y$ y sobre el rectángulo $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

Solución De acuerdo con la Ecuación (2),

$$\begin{aligned}\iint_S \cos x \operatorname{sen} y\, dx\, dy &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen} y\, dx\right] dy\\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} y \left[\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx\right] dy\\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} y\, dy = 1.\end{aligned}$$

▲