(c) En este caso,

$$\mathbf{D}f(x,y,z)=\begin{bmatrix} ze^x & 0 & e^x \\ 0 & -e^z & -ye^z \end{bmatrix}. \qquad \blacktriangle$$

Gradientes

Para funciones con valores reales utilizamos una terminología especial para la derivada.

> **Definición Gradiente** Consideremos el caso especial $f\colon U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Entonces $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ es una matriz $1\times n$:
>
> $$\mathbf{D}f(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\end{bmatrix}.$$
>
> Podemos formar el vector correspondiente $(\partial f/\partial x_1,\ldots,\partial f/\partial x_n)$, que es el ***gradiente*** de f y se denota mediante ∇f, o grad f.

A partir de la definición, vemos que para $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

mientras que para $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}.$$

En la Sección 2.6 veremos el significado geométrico del gradiente. En términos de productos escalares, podemos escribir la derivada de f como

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x})(\mathbf{h})=\nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}.$$

Ejemplo 7 Sea $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=xe^y$. Entonces

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=(e^y,xe^y,0). \qquad \blacktriangle$$

Ejemplo 8 Si $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ está dada por $(x,y)\mapsto e^{xy}+\operatorname{sen} xy$, entonces

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y)&=(ye^{xy}+y\cos xy)\mathbf{i}+(xe^{xy}+x\cos xy)\mathbf{j}\\&=(e^{xy}+\cos xy)(y\mathbf{i}+x\mathbf{j}). \qquad \blacktriangle\end{aligned}$$

En el cálculo de una variable se demuestra que si f es diferenciable, entonces f es continua. En el Teorema 8 estableceremos que este resultado también es cierto para funciones diferenciables de varias variables.