

Máximos y mínimos de funciones de n -variables

Como muestran los comentarios anteriores, para Leibniz, Euler y Maupertuis, y también para gran parte de la ciencia moderna, todo en la naturaleza es una consecuencia de algún principio del máximo o del mínimo. Para elaborar tan magnos sistemas —así como algunos más terrenales— de forma efectiva, en primer lugar debemos aprender las técnicas de cómo hallar los máximos y mínimos de funciones de n variables.

Puntos de extremo

Entre las características geométricas básicas de la gráfica de una función están sus puntos de extremo, en los que la función alcanza sus valores máximo y mínimo. En esta sección, vamos a deducir un método para determinar estos puntos. De hecho, el método localiza también los puntos de extremo locales. Estos son puntos en los que la función alcanza un valor máximo o mínimo respecto a los puntos cercanos. Comenzamos definiendo algunos términos.

Definición Si $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar dada, se dice que un punto $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto de **mínimo local** de f si existe un entorno V de \mathbf{x}_0 tal que para todos los puntos \mathbf{x} de V , $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$. (Véase la Figura 3.3.2.) De forma similar, $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto de **máximo local** si existe un entorno V de \mathbf{x}_0 tal que $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in V$. Se dice que el punto $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto de **extremo local**, o **relativo**, si es un mínimo local o un máximo local. Un punto \mathbf{x}_0 es un **punto crítico** de f si bien f no es diferenciable en \mathbf{x}_0 , o bien $Df(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Un punto crítico que no es un extremo local se denomina **punto de silla**.⁴

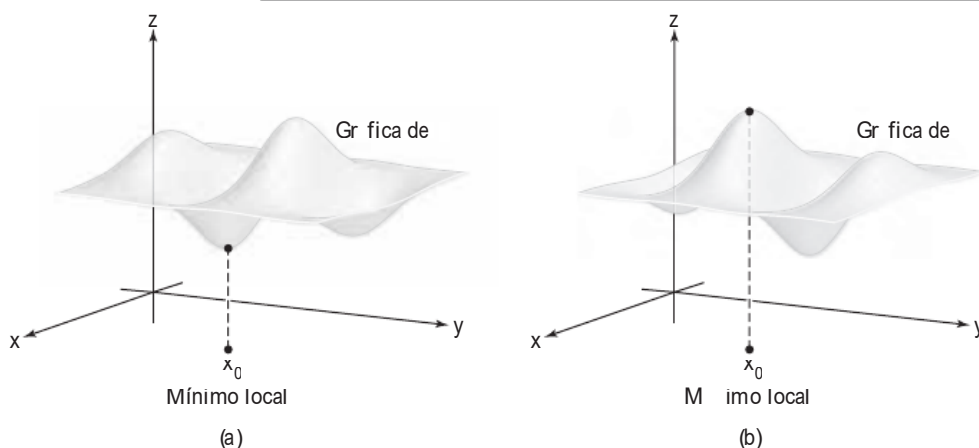


Figura 3.3.2 Puntos (a) mínimo local y (b) máximo local de una función de dos variables.

⁴El término “punto de silla” no siempre se usa de esta forma generalizada. Estudiamos los puntos de silla más en detalle en el desarrollo posterior.