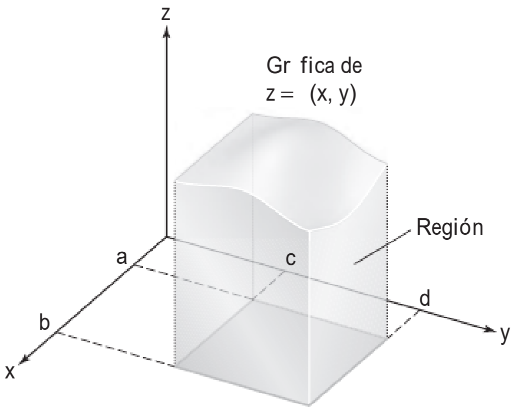

Figura 5.1.1 La región V en el espacio está acotada por la gráfica de f, el rectángulo R y las cuatro caras verticales indicadas.

superficie, el rectángulo R, y los cuatro planos $x = a, x = b, y = c$ e $y = d$ forman la frontera de una región V en el espacio (véase la Figura 5.1.1).

Hay que abordar el problema de cómo definir de manera rigurosa el volumen de V. Esto lo resolveremos en la Sección 5.2 mediante el método clásico de exhaución, o dicho en términos más modernos, el método de las sumas de Riemann. Para adquirir una compresión intuitiva de la integral doble, suponemos provisionalmente que el volumen de una región ya ha sido definido.

Integrales dobles El volumen de la región que está por encima de R y por debajo de la gráfica de una función no negativa f se denomina ***integral (doble)*** de f sobre R y se denota mediante

$$\iint_R f(x,y)\,dA \qquad \text{o} \qquad \iint_R f(x,y)\,dx\,dy.$$

Ejemplo 1 (a) Si f está definida por $f(x,y) = k$, donde k es una constante positiva, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = k(b-a)(d-c),$$

ya que la integral es igual al volumen de una caja rectangular con base R y altura k.

(b) Si $f(x,y) = 1 - x$ y $R = [0,1] \times [0,1]$, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \frac{1}{2},$$

dado que la integral es igual al volumen del sólido triangular mostrado en la Figura 5.1.2. ▲

Ejemplo 2 Supongamos que $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ y $R = [-1,1] \times [0,1]$. Entonces la integral $\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$ es igual al volumen del sólido mostrado en la Figura 5.1.3. Calcularemos esta integral en el Ejemplo 3. ▲