Recordemos del cálculo de una variable que si $y = f(x)$ es una función de clase $C^1$ y $f'(x_0) \neq 0$, entonces, en un entorno de $x_0$ podemos despejar localmente $x$ para obtener la función inversa: $x = f^{-1}(y)$. Sabemos que $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$; es decir, $dx/dy = 1/(dy/dx)$. Es razonable entonces pensar que $y = f(x)$ se puede invertir porque $f'(x_0) \neq 0$ indica que la pendiente de $y = f(x)$ es distinta de cero, por lo que la gráfica está subiendo o bajando en las proximidades de $x_0$. Así, si reflejamos la gráfica con respecto a la recta $y = x$, sigue siendo una gráfica *cerca de* $(x_0, y_0)$, donde $y_0 = f(x_0)$. Por ejemplo, en la Figura 3.5.1, podemos invertir $y = f(x)$ en el recuadro sombreado, de modo que $x = f^{-1}(y)$ está definida en este rango.

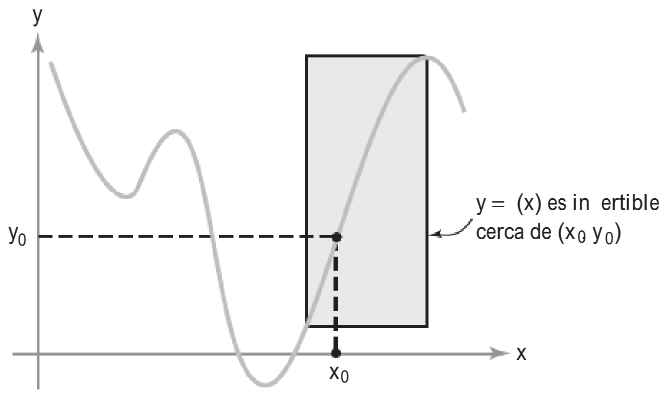


**Figura 3.5.1** Si $f'(x_0) \neq 0$, entonces $y = f(x)$ es localmente invertible.

## Un resultado particular

A continuación vamos a ver el caso de funciones con valores reales de las variables $x_1, \ldots, x_n$ y $z$.

**Teorema 11 Caso particular del teorema de la función implícita** Supóngase que $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales continuas. Denotamos los puntos en $\mathbb{R}^{n+1}$ por $(\mathbf{x}, z)$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{R}$ y suponemos que $(\mathbf{x}_0, z_0)$ satisface

$$F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, z_0) \neq 0.$$

Entonces existen una bola $U$ que contiene $\mathbf{x}_0$ en $\mathbb{R}^n$ y un entorno $V$ de $z_0$ en $\mathbb{R}$ tales que existe una única función $z = g(\mathbf{x})$ definida para $\mathbf{x}$ en $U$ y $z$ en $V$ que satisface

$$F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0.$$

Además, si $\mathbf{x}$ en $U$ y $z$ en $V$ satisfacen $F(\mathbf{x}, z) = 0$, entonces $z = g(\mathbf{x})$. Por último, $z = g(\mathbf{x})$ es continuamente diferenciable, con la derivada dada por

$$\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, z)} \mathbf{D}_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, z)\bigg|_{z=g(\mathbf{x})},$$