Ilustremos esto. En el Ejemplo 1 de la Sección 6.1, T: $D^* \to D$, donde $D = T(D^*)$ es el conjunto de (x, y) tal que $x^2 + y^2 \leq 1$ y $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$, y $T(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$. De acuerdo con la Ecuación (3),

$$A(D) = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr\, d\theta = \iint_{D^*} r\, dr\, d\theta \tag{4}$$

(Aquí r y θ desempeñan el papel de u y v). Del cálculo anterior se deduce que

$$\iint_{D^*} r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \pi$$

es el área del disco unidad D, lo que en este caso confirma la fórmula (3). De hecho, podemos recordar del cálculo de una variable que la Ecuación (4) es la fórmula correcta para el área de una región en coordenadas polares.

No es tan fácil demostrar rigurosamente la afirmación de (3). Sin embargo, si se mira de la forma apropiada, resulta bastante plausible. Recuerde que $A(D) = \iint_D dx\, dy$ se ha obtenido dividiendo D en rectángulos pequeños, sumando sus áreas y tomando luego el límite de esta suma cuando el tamaño de los subrectángulos tiende a cero. El problema es que T puede transformar rectángulos en regiones cuya área no es tan fácil de calcular. La solución consiste en aproximar estas imágenes mediante regiones más simples cuya área podamos calcular. Una herramienta útil para hacer esto es la derivada de T, que como sabemos (del Capítulo 2) nos da la mejor aproximación lineal a T.

Consideremos un rectángulo pequeño D^* en el plano uv, como el mostrado en la Figura 6.2.2. Sea T' la derivada de T calculada en (u_0, v_0), por lo que T' es una matriz 2×2. Del Capítulo 2 sabemos que una buena aproximación a $T(u, v)$ está dada por

$$T(u_0, v_0) + T'\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix},$$

donde $\Delta u = u - u_0$ y $\Delta v = v - v_0$. Esta aplicación T' transforma D^* en un paralelogramo con vértice en $T(u_0, v_0)$ y con lados adyacentes dados por los vectores

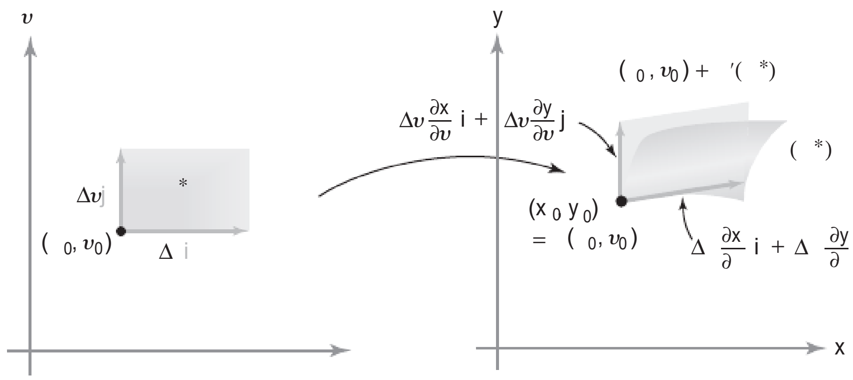

Figura 6.2.2 Efecto de la transformación T sobre un rectángulo pequeño D^*.