EJEMPLO 3.1.5 Cálculo de dos menores de una matriz de 4 × 4

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Encuentre M_{32} y M_{24}.

SOLUCIÓN ► Al quitar el tercer renglón y la segunda columna de A se encuentra que $M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. De igual manera, $M_{24} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Definición 3.1.3

Cofactor

Sea A una matriz de $n \times n$. El **cofactor *ij*** de A, denotado por A_{ij}, está dado por

Cofactor *ij* de *A*

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}} \qquad (3.1.6)$$

Esto es, el cofactor ij de A se obtiene tomando el determinante del menor ij y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$. Observe que

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j \text{ es par} \\ -1 & \text{si } i + j \text{ es impar} \end{cases}$$

EJEMPLO 3.1.6 Cálculo de dos cofactores de una matriz de 4 × 4

En el ejemplo 3.1.5 se tiene

$$-A_{32} = (-1)^{3+2} |M_{32}| = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -8$$

$$-A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -192$$

Observación

La definición 3.1.3 tiene sentido a partir de la definición de un determinante de $n \times n$ con la suposición de que ya se sabe lo que es un determinante de $(n - 1) \times (n - 1)$.

Con las definiciones anteriores de cofactores estamos en posibilidad de considerar el caso genaral de matrices de $n \times n$. Considere

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3.1.7)$$