Ejercicios de repaso del Capítulo 3

1. Sea f cualquier función diferenciable. Demostrar que $u = f(y-kx)$ es una solución de la ecuación en derivadas parciales $\dfrac{\partial u}{\partial x} + k\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

2. Demostrar que si u y v tienen derivadas parciales segundas cruzadas continuas, y satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

entonces u y v son armónicas.

3. Sea $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 5$. Hallar todos los puntos críticos de f y determinar si son puntos de mínimo local, de máximo local o de silla.

4. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + 5$ en el disco unidad $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

5. Hallar el polinomio de Taylor de segundo orden para $f(x, y) = y^2 e^{-x^2}$ en $(1, 1)$.

6. Sea $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

(a) Hallar $g(x, y)$, la aproximación de Taylor de segundo orden a f en $(0, 0)$.

(b) ¿Cuál es la relación entre g y f?

(c) Demostrar que $R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = 0$ para todo $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$. (SUGERENCIA: demostrar que f es igual a su aproximación de Taylor de segundo orden en todos los puntos.)

7. Analizar el comportamiento de las siguientes funciones en los puntos indicados. [La respuesta del apartado (b) puede depender de la constante C.]

(a) $z = x^2 - y^2 + 3xy, \qquad (x, y) = (0, 0)$

(b) $z = x^2 - y^2 + Cxy, \qquad (x, y) = (0, 0)$

8. Hallar y clasificar los valores extremos (si existen) de las funciones en $\mathbb{R}^2$ definidas por las siguientes expresiones:

(a) $y^2 - x^3$

(b) $(x-1)^2 + (x-y)^2$

(c) $x^2 + xy^2 + y^4$

9. (a) Hallar la distancia mínima desde el origen en $\mathbb{R}^3$ a la superficie $z = \sqrt{x^2 - 1}$.

(b) Repetir el apartado (a) para la superficie $z = 6xy + 7$.

10. Determinar los primeros términos del desarrollo de Taylor de $f(x, y) = e^{xy}\cos x$ alrededor de $x = 0$, $y = 0$.

11. Demostrar que

$$z = \frac{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18}{12(1 + 4y^2)}$$

tiene un máximo local, un mínimo local y un punto de silla. (La gráfica se muestra en la Figura 3.R.1.)

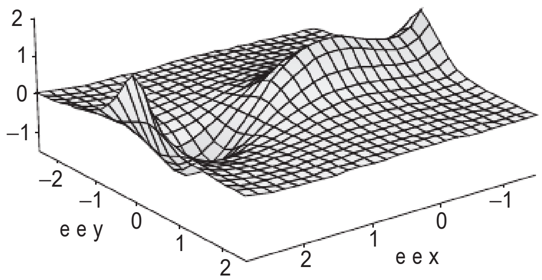

Figura 3.R.1 Gráfica de $z = (3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18)/12(1 + 4y^2)$.

12. Determinar los máximos, mínimos y puntos de silla de la función $z = (2 + \cos\pi x)(\operatorname{sen}\pi y)$, cuya gráfica se muestra en la Figura 3.R.2.

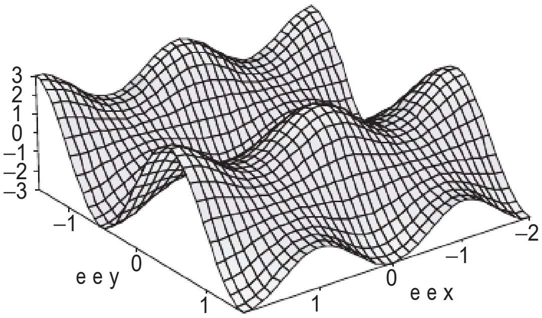

Figura 3.R.2 Gráfica de $z = (2+\cos\pi x)(\operatorname{sen}\pi y)$.

13. Determinar y describir los puntos críticos de $f(x, y) = y\operatorname{sen}(\pi x)$. (Véase la Figura 3.R.3.)