SOLUCIÓN ► Del ejemplo 5.5.3, se sabe que W es un subespacio de dimensión dos de $\mathbb{R}^3$ con vectores básicos $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Utilizando la base estándar en $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, se define la transformación lineal T por $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entonces, como lo muestra el análisis que sigue al teorema 7.2.2, T está completamente determinada. Por ejemplo,

$$T\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} = T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = 5T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 7T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

De manera más general,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\left[x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = xT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ 2x + 3y \\ y \end{pmatrix}.$$

Ahora se darán dos definiciones importantes en la teoría de transformaciones lineales.

D Definición 7.2.1

Núcleo e imagen de una transformación líneal

Sean V y W dos espacios vectoriales y sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces

i) El **núcleo** de T, denotado por nu T, está dado por

$$\boxed{\text{nu } T = \{\mathbf{v} \in V: T\mathbf{v} = \mathbf{0}\}} \qquad \textbf{(7.2.2)}$$

ii) La **imagen** de T, denotado por im T, está dado por

$$\boxed{\text{im T} = \{\mathbf{w} \in W: \mathbf{w} = T\mathbf{v} \text{ para alguna } \mathbf{v} \in V\}} \qquad \textbf{(7.2.3)}$$

Observación 1. Observe que nu T es no vacío porque, de acuerdo con el teorema 7.2.1, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, de manera que $\mathbf{0} \in$ nu T para cualquier transformación lineal T. Se tiene interés en encontrar otros vectores en V que "se transformen en 0". De nuevo, observe que cuando escribimos $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, el $\mathbf{0}$ de la izquierda está en V y el de la derecha en W.

Observación 2. La imagen de T es simplemente el conjunto de "imágenes" de los vectores en V bajo la transformación T. De hecho, si $\mathbf{w} = T\mathbf{v}$, se dice que $\mathbf{w}$ es la **imagen** de $\mathbf{v}$ bajo T.

Imagen

Antes de dar ejemplos de núcleos e imágenes, se demostrará un teorema de gran utilidad.