Funciones no acotadas en puntos aislados

Vamos a considerar ahora las funciones no negativas f que se hacen "infinito" o no están definidas en puntos aislados de una región D que sea x-simple o y-simple. Por ejemplo, consideremos la función $f(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$ en el disco unidad $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\}$. De nuevo, $f \geq 0$, pero f no está acotada ni definida en el origen.

Sea (x_0, y_0) un punto de una región general D en el que una función no negativa f no está definida. Sea, además, $D_\delta = D_\delta(x_0, y_0)$ el disco de radio δ con centro en (x_0, y_0) y sea $D \backslash D_\delta$ la región D a la que se le ha quitado D_δ. Supongamos que f es continua en todos los puntos de D excepto en (x_0, y_0). Entonces $\iint_{D\backslash D_\delta} f\ dA$ está definida. Decimos que $\iint_D f\ dA$ es ***convergente***, o que f es ***integrable*** en D, si existe

$$\lim_{\delta \to 0} \iint_{D\backslash D_\delta} f\ dA$$

Ejemplo 4 Demostrar que $f(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$ es integrable en el disco unidad D y calcular $\iint_D f\, dA$.

Solución Sea D_δ el disco de radio δ con centro en el origen. Entonces f es continua en todo D excepto en $(0, 0)$. Por tanto, $\iint_{D\backslash D_\delta} f\ dA$ existe. Para calcular esta integral, cambiamos las variables a coordenadas polares, $x = r\cos\theta, y = r \operatorname{sen}\theta$. Entonces $f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = 1/r$, y

$$\iint_{D\backslash D_\delta} f\ dA = \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r\ d\theta\ dr = \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} d\theta\ dr = 2\pi(1-\delta).$$

Por tanto,

$$\iint_D f\ dA = \lim_{\delta \to 0} \iint_{D\backslash D_\delta} f\ dA = 2\pi.$$

▲

En términos más generales, podemos de forma análoga definir la integral de funciones no negativas f que sean continuas salvo en un número finito de puntos de D. También pueden combinarse ambos tipo de integrales impropias; es decir, podemos considerar funciones que sean continuas excepto en un número finito de puntos de D o en puntos de la frontera de D, y definir $\iint_D f\ dA$ apropiadamente.

Si f toma valores tanto positivos como negativos, podemos utilizar una teoría de integración más avanzada, denominada *integral de Lebesgue*, para generalizar la noción de integral convergente $\iint_D f\, dA$. Usando esta teoría, se puede demostrar que si $\iint_D f\ dA$ existe, entonces se puede evaluar como una integral iterada. Este último hecho se conoce también con el nombre de teorema de Fubini.

Regiones no acotadas

Como hemos dicho anteriormente, dejaremos el estudio de las regiones no acotadas para la sección de ejercicios. Sin embargo, debemos señalar que ya hemos apuntado la idea central en el Ejemplo 5 de la Sección 6.2