Teorema 3 Teorema de Fubini Sea D una región elemental del plano y sea $f \geq 0$ una función continua, excepto quizá para puntos situados en la frontera de D. Si cualquiera de las integrales

$$\iint_D f(x, y)\ dA,$$

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\ dy\, dx, \qquad \text{para regiones } y\text{-simples}$$

$$\int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\ dx\, dy \qquad \text{para regiones } x\text{-simples}$$

existe como integral impropia, f es integrable y todas esas integrales son iguales.

La demostración requiere conceptos avanzados de análisis y por tanto la omitiremos. Este resultado puede ser muy útil en los cálculos, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Sea $f(x, y) = 1/\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Demostrar que f es integrable y que $\iint_D f(x, y)\ dA = 2\pi$, la mitad del área de la superficie de una esfera de radio unidad.

Solución Para $-1 < x < 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} &= \lim_{\delta \to 0} \int_{-\sqrt{1-x^2}+\delta}^{\sqrt{1+x^2}-\delta} \frac{dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\
&= \lim_{\delta \to 0} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{1 - x^2}}\right)\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}+\delta}^{\sqrt{1-x^2}-\delta} \\
&= \lim_{\delta \to 0} \left\{\operatorname{sen}^{-1}\left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{1 - x^2}}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(-1 + \frac{\delta}{\sqrt{1 - x^2}}\right)\right\} \\
&= \operatorname{sen}^{-1}(1) - \operatorname{sen}^{-1}(-1) = \frac{\pi}{2} - \frac{(-\pi)}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

Claramente,

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta \to 0} \int_{-1+\eta}^{1-\eta} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy\, dx}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} &= \lim_{\eta \to 0} \int_{-1+\eta}^{1-\eta} \pi\, dx \\
&= \lim_{\eta \to 0} \pi(2 - 2\eta) = 2\pi.
\end{aligned}$$

Por tanto, f es integrable. Para ver por qué es tan útil este teorema, trátese de demostrar directamente a partir de la definición que f es integrable. ¡No resulta sencillo! ▲