EJERCICIOS CON MATLAB 4.4

1. Utilice MATLAB para calcular el producto cruz de los vectores dados en los problemas 1, 2, 3, 4 y 10 de esta sección. Verifique sus respuestas calculando los productos escalares de los resultados con los vectores individuales (¿qué valor deben tener estos productos escalares?). El producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está definido como un vector de 3×1 dado por

```
[u(2)*v(3)-u(3)*v(2); -u(1)*v(3)+u(3)*v(1);
      u(1)*v(2)-v(1)*u(2)].
```

   También puede utilizar el comando `cross`. Para más información utilice `doc cross` desde la pantalla de comandos de MATLAB.

2. *a)* Dé tres vectores aleatorios de 3×1, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ (use `2*rand(3,1)-1`). Calcule $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, el producto escalar de $\mathbf{u}$ con $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (esto es `u'*cross(v,w)`). Sea $B = [\mathrm{u\ v\ w}]$. Encuentre $\det(B)$. Compare $\det(B)$ con el producto escalar. Haga lo mismo para varios juegos de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Formule una conclusión y después pruébela (lápiz y papel).

   b) Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tres vectores aleatorios de 3×1 y sea A una matriz aleatoria de 3×3. Sea `A = round(10*(2*rand(3)-1))`. Calcule $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$, $|A\mathbf{u} \cdot (A\mathbf{v} \times A\mathbf{w})|$ y $|\det(A)|$. (En MATLAB, `abs(a)` dé $|\mathbf{a}|$.) Haga esto para varias matrices A hasta que pueda formular una conclusión respecto a las tres cantidades calculadas. Pruebe sus conclusiones para otras matrices aleatorias A.

   Según sus conclusiones, ¿qué significado geométrico tiene $|\det(A)|$?

   c) (*Lápiz y papel*) Usando *a*) demuestre que $A\mathbf{u} \cdot (A\mathbf{v} \times A\mathbf{w}) = \det([A\mathbf{u}\, A\mathbf{v}\, A\mathbf{w}])$, donde A es una matriz de 3×3. Argumente por qué $[A\mathbf{u}\, A\mathbf{v}\, A\mathbf{w}] = AB$, donde $B = [\mathbf{u}\ \mathbf{v}\ \mathbf{w}]$.

   Ahora pruebe la conclusión obtenida en el inciso *b*).

4.5 Rectas y planos en el espacio

En el plano $\mathbb{R}^2$ se puede encontrar la ecuación de una recta si se conocen dos puntos sobre la recta, o bien un punto y la pendiente de la misma. En $\mathbb{R}^3$ la intuición dice que las ideas básicas son las mismas. Como dos puntos determinan una recta, debe poderse calcular la ecuación de una recta en el espacio si se conocen dos puntos sobre ella. De manera alternativa, si se conoce un punto y la dirección de una recta, también debe ser posible encontrar su ecuación.

Comenzamos con dos puntos $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ sobre una recta L. Un vector paralelo a L es aquel con representación $\overrightarrow{PQ}$. Entonces,

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} \tag{4.5.1}$$

es un vector paralelo a L. Ahora sea $R = (x, y, z)$ otro punto sobre la recta. Entonces $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$, que a su vez es paralelo a $\mathbf{v}$, de manera que por el teorema 4.3.3,

$$\overrightarrow{PR} = t\mathbf{v} \tag{4.5.2}$$

para algún número real t. Ahora vea la figura 4.35. Se tiene (en cada uno de los tres casos posibles)

$$\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{PR} \tag{4.5.3}$$

y al combinar (4.5.2) y (4.5.3) se obtiene

$$\boxed{\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + t\mathbf{v}} \tag{4.5.4}$$