**31.** La planta International Widget Co., Inc. en Baraboo, Wisconsin, utiliza aluminio, hierro y magnesio para producir dispositivos de alta calidad. La cantidad de dispositivos que puede producir empleando $x$ toneladas de aluminio, $y$ toneladas de hierro y $z$ toneladas de magnesio es $Q(x, y, z) = xyz$. El coste de las materias primas es: el aluminio 6 euros por tonelada; el hierro 4 euros por tonelada y el magnesio 8 euros por tonelada. ¿Cuántas toneladas de aluminio, hierro y magnesio deben utilizarse para producir 1000 dispositivos al menor coste posible? (SUGERENCIA: hallar un extremo, ¿de qué función sujeta a qué restricción?)

**32.** Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^1$ y sea

$$\begin{aligned} u &= f(x) \\ v &= -y + xf(x). \end{aligned}$$

Si $f'(x_0) \neq 0$, demostrar que esta transformación de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ es invertible cerca de $(x_0, y_0)$ y su inversa está dada por

$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(u) \\ y &= -v + uf^{-1}(u). \end{aligned}$$

**33.** Demostrar que el par de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 &= 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 &= 0 \end{aligned}$$

determinan funciones $u(x, y)$ e $v(x, y)$ definidas para $(x, y)$ cerca de $x = 2$ e $y = -1$, tales que $u(2, -1) = 2$ and $v(2, -1) = 1$. Calcular $\partial u/\partial x$ en $(2, -1)$.

**34.** Demostrar que existen números positivos $p$ y $q$, y funciones únicas $u$ y $v$ del intervalo $(-1-p, -1+p)$ en el intervalo $(1-q, 1+q)$ que satisfacen

$$xe^{u(x)} + u(x)e^{v(x)} = 0 = xe^{v(x)} + v(x)e^{u(x)}$$

para todo $x$ en el intervalo $(-1-p, -1+p)$ con $u(-1) = 1 = v(-1)$.

**35.** Para realizar este ejercicio es necesario estar familiarizado con la técnica de diagonalización de matrices $2 \times 2$. Sean $a(x), b(x)$ y $c(x)$ tres funciones continuas definidas en $U \cup \partial U$, donde $U$ es un conjunto abierto y $\partial U$ denota su conjunto de puntos frontera (véase la Sección 2.2). Utilizamos la notación del Lema 2 de la Sección 3.3 y suponemos que para cada $x \in U \cup \partial U$ la forma cuadrática definida por la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

es definida positiva. Para una función $v$ de clase $C^2$ en $U \cup \partial U$, definimos un operador diferencial $\boldsymbol{L}$ mediante

$$\boldsymbol{L}v = a(\partial^2 v/\partial x^2) + 2b(\partial^2 v/\partial x \partial y) + c(\partial^2 v/\partial y^2).$$

Con la condición de función definida positiva, tal operador se dice que es ***elíptico***. Una función $v$ se dice que es ***estrictamente subarmónica*** respecto a $\boldsymbol{L}$ si $\boldsymbol{L}v > 0$. Demostrar que una función estrictamente subarmónica no puede tener un máximo en $U$.

**36.** Se dice que una función $v$ está en el ***núcleo*** del operador $\boldsymbol{L}$ descrito en el Ejercicio 35 si $\boldsymbol{L}v = 0$ en $U \cup \partial U$. Argumentando como en el Ejercicio 47 de la Sección 3.3, demostrar que si $v$ alcanza su máximo en $U$, también lo alcanza en $\partial U$. Este es el principio del máximo débil para operadores elípticos.

**37.** Sea $\boldsymbol{L}$ un operador diferencial elíptico como el de los Ejercicios 35 y 36.

(a) Definir el concepto de función estrictamente superarmónica.

(b) Demostrar que tales funciones no pueden alcanzar un mínimo en $U$.

(c) Si $v$ es como en el Ejercicio 36, demostrar que si $v$ alcanza su mínimo en $U$, también lo alcanza en $\partial U$.

**38.** Considérese la superficie $S$ dada por $x^2z + x \operatorname{sen} y + ye^{z-1} = 1$.

(a) Hallar la ecuación del plano tangente de $S$ en el punto (1, 0, 1).

(b) ¿Es posible resolver la ecuación que define $S$ para la variable $y$ como función de las variables $x$ y $z$ cerca de (1, 0, 1)? ¿Por qué?

(c) Hallar $\frac{\partial y}{\partial x}$ en (1, 0, 1).

**39.** Considérese el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2xu^3v - yv &= 1 \\ y^3v + x^5u^2 &= 2 \end{aligned}$$

Demostrar que cerca del punto $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$, este sistema define $u$ y $v$ implícitamente como funciones de $x$ e $y$. Para dichas funciones locales $u$ y $v$, definir la función local $f$ como $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Hallar $Df(1, 1)$.