pato sentiría: (a) usando la regla de la cadena, (b) expresando T en función de t y derivando.

14. Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal de modo que (por el Ejercicio 28 de la Sección 2.3) $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ es la matriz de f. Comprobar directamente la validez de la regla de la cadena para aplicaciones lineales.

15. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x,y) \mapsto (e^{x+y}, e^{x-y})$. Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria con $\mathbf{c}(0) = (0,0)$ y $\mathbf{c}'(0) = (1,1)$. ¿Cuál es el vector tangente a la imagen de $\mathbf{c}(t)$ bajo f en $t = 0$?

16. Sea $f(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$. Calcular $\nabla f(x,y)$.

17. Escribir la regla de la cadena para cada una de las funciones siguientes y justificar la respuesta en cada caso utilizando el Teorema 11.

(a) $\partial h/\partial x$, donde $h(x,y) = f(x, u(x,y))$

(b) dh/dx, donde $h(x) = f(x, u(x), v(x))$

(c) $\partial h/\partial x$, donde $h(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y), w(x))$

18. Verificar la regla de la cadena para $\partial h/\partial x$, donde $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ y

$$f(u,v) = \frac{u^2+v^2}{u^2-v^2},$$

$$u(x,y) = e^{-x-y}, \quad v(x,y) = e^{xy}.$$

19. (a) Sea $y(x)$ la función definida implícitamente ($y(x)$ no está definida explícitamente como función de x) por $G(x, y(x)) = 0$, donde G es una función dada de dos variables. Demostrar que si $y(x)$ y G son diferenciables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial G/\partial x}{\partial G/\partial y} \qquad \text{si} \qquad \frac{\partial G}{\partial y} \neq 0.$$

(b) Obtener una fórmula análoga a la del apartado (a) si y_1, y_2 se definen implícitamente mediante

$$G_1(x, y_1(x), y_2(x)) = 0,$$
$$G_2(x, y_1(x), y_2(x)) = 0.$$

(c) Sea y la función definida implícitamente por $x^2 + y^3 + e^y = 0$. Calcular dy/dx en función de x e y.

20. Los textos sobre termodinámica[4] utilizan la relación

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = -1.$$

Explicar el significado de esta ecuación y demostrar que es cierta. (SUGERENCIA: partir de una relación $F(x,y,z) = 0$ que define $x = f(y,z), y = g(x,z)$ y $z = h(x,y)$ y derivar implícitamente.)

21. La ecuación de estado de Dieterici para un gas es $P(V-b)e^{a/RVT} = RT$, donde a, b y R son constantes. Considerar el volumen V como una función de la temperatura T y de la presión P y demostrar que

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \left(R + \frac{a}{TV}\right) \Big/ \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right).$$

22. Este ejercicio proporciona otro ejemplo del hecho de que la regla de la cadena no es aplicable si f no es diferenciable. Considérese la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Demostrar que

(a) $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ existen en (0, 0).

(b) Si $\mathbf{g}(t) = (at, bt)$ para constantes a y b, entonces $f \circ \mathbf{g}$ es diferenciable y $(f \circ \mathbf{g})'(0) = ab^2/(a^2+b^2)$, pero $\nabla f(0,0) \cdot \mathbf{g}'(0) = 0$.

23. Demostrar que si $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$, existe un entorno V de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ y una función $R_1\colon V \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\mathbf{h} \in V$, tenemos $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in U$,

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h} + R_1(\mathbf{h})$$

y

$$\frac{R_1(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \to 0 \quad \text{cuando} \quad \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

[4] Véase S. M. Binder, "Mathematical Methods in Elementary Thermodynamics", *J. Chem. Educ.*, 43 (1966): 85–92. Un conocimiento adecuado de la derivación parcial puede resultar muy útil en algunas aplicaciones; por ejemplo, véase M. Feinberg, "Constitutive Equation for Ideal Gas Mixtures and Ideal Solutions as Consequences of Simple Postulates", *Chem. Eng. Sci.*, 32 (1977): 75–78.