Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.3.2}$$

EJEMPLO 2.3.1 Cómo escribir un sistema mediante su representación matricial

Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

(Vea el ejemplo 1.2.1.) Esto se puede escribir como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es mucho más sencillo escribir el sistema (2.3.1) en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Además existen otras ventajas. En la sección 2.4 se observará la rapidez con que se puede resolver un sistema cuadrado si se conoce una matriz llamada la *inversa* de A. Aun sin ella, como ya se vio en la sección 1.2, es mucho más sencillo escribir los cálculos usando una matriz aumentada.

Sistema homogéneo

Si $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ es el vector cero de $m \times 1$, entonces el sistema (2.3.1) es **homogéneo** (vea la sección 1.4) y se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{(forma matricial de un sistema de ecuaciones homogéneo).}$$

Sistema no homogéneo

Si alguno de los elementos del vector $\mathbf{b}$ es diferente de cero, entonces decimos que el sistema es **no homogéneo**.

Existe una relación fundamental entre los sistemas homogéneos y los no homogéneos. Sea A una matriz $m \times n$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{0} = \overset{m \text{ ceros}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Nota

Todo vector **x** que sea solución de un sistema no homogéneo se conoce como solución particular.

El sistema lineal no homogéneo general se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.3.4}$$

Sistema homogéneo asociado

Con A y $\mathbf{x}$ dados en (2.3.4) y $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, un **sistema homogéneo asociado** se define como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2.3.5}$$