3. Sea D el disco unidad: $x^2 + y^2 \leq 1$. Calcular

$$\iint_D \exp(x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

por medio de un cambio de variables a coordenadas polares.

4. Sea D la región $0 \leq y \leq x$ y $0 \leq x \leq 1$. Calcular

$$\iint_D (x + y)\, dx\, dy$$

por medio del cambio de variables $x = u + v$, $y = u - v$. Comprobar el resultado calculando directamente la integral por medio de una integral iterada.

5. Sea $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ la aplicación definida por $T(u, v) = (4u, 2u + 3v)$. Sea D^* el rectángulo $[0, 1] \times [1, 2]$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular

(a) $\displaystyle\iint_D xy\, dx\, dy$

(b) $\displaystyle\iint_D (x - y)\, dx\, dy$

por medio de un cambio de variables que las calcule como integrales sobre D^*.

6. Repetir el Ejercicio 5 para $T(u, v) = (u, v(1 + u))$.

7. Calcular

$$\iint_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{1 + x + 2y}},$$

donde $D = [0, 1] \times [0, 1]$, haciendo $T(u, v) = (u, v/2)$ y calculando una integral sobre D^*, donde $T(D^*) = D$.

8. Definir $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Sea D^* el conjunto de (u, v) con $u^2 + v^2 \leq 1, u \geq 0, v \geq 0$. Hallar $T(D^*) = D$. Calcular $\iint_D dx\, dy$.

9. Sea $T(u, v)$ como en el Ejercicio 8. Por medio de un cambio de variables, calcular "formalmente" la integral "impropia"

$$\iint_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

[NOTA: Esta integral (y la del ejercicio siguiente) es *impropia*, ya que el integrando $1/\sqrt{x^2 + y^2}$ no es ni continuo ni acotado en el dominio de integración. (La teoría de integrales impropias se estudiará en la Sección 6.4.)]

10. Calcular $\displaystyle\iint_R \frac{1}{x + y}\, dy\, dx$, donde R es la región acotada por $x = 0, y = 0, x + y = 1, x + y = 4$, utilizando la aplicación $T(u, v) = (u - uv, uv)$.

11. Calcular $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2} dx\, dy$, donde D es el disco $x^2 + y^2 \leq 4$.

12. Sea D^* una región v-simple en el plano uv acotada por $v = g(u)$ y $v = h(u) \leq g(u)$ con $a \leq u \leq b$. Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación dada por $x = u$ e $y = \psi(u, v)$, donde ψ es de clase C^1 y $\partial\psi/\partial v$ nunca se anula. Suponer que $T(D^*) = D$ es una región y-simple; demostrar que si $f\colon D \to \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D^*} f(u, \psi(u, v)) \left|\frac{\partial\psi}{\partial v}\right| du\, dv.$$

13. Usar integrales dobles para hallar el área encerrada por la curva $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

14. (a) Expresar $\int_0^1 \int_0^{x^2} xy\, dy\, dx$ como una integral sobre el triángulo D^*, que es el conjunto de puntos (u, v) que cumplen $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq u$. (SUGERENCIA: hallar una aplicación biyectiva T de D^* en la región de integración dada.)

(b) Calcular directamente esta integral como una integral sobre D^*.

15. Integrar $ze^{x^2+y^2}$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$, $2 \leq z \leq 3$.

16. Sea D el disco unidad. Expresar $\displaystyle\iint_D (1 + x^2 + y^2)^{3/2} dx\, dy$ como una integral sobre $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ y calcularla.

17. Utilizando coordenadas polares, hallar el área acotada por la *lemniscata* $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

18. Resolver de nuevo el Ejercicio 15 de la Sección 5.3 por medio de un cambio de variables y comparar los esfuerzos requeridos por cada método.

19. Calcular $\displaystyle\iint_R (x + y)^2 e^{x-y} dx\, dy$, donde R es la región acotada por $x + y = 1, x + y = 4, x - y = -1$ y $x - y = 1$.

20. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación definida por

$$T(u, v, w) = (u \cos v \cos w, u \operatorname{sen} v \cos w, u \operatorname{sen} w).$$