$$= 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 \\ -22 \end{pmatrix}$$

Surge otra pregunta: si $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ son n vectores en W, ¿existe una transformación lineal T tal que $T\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$? La respuesta es sí, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 7.2.3

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Sea W un espacio vectorial que contiene los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$. Entonces existe una transformación lineal única $T: V \to W$ tal que $T\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Se define la función T como sigue:

Demostración

i) $T\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$

ii) Si $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$, entonces

$$T\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{w}_n \tag{7.2.1}$$

Como B es una base para V, T está definida para todo $\mathbf{v} \in V$; y como W es un espacio vectorial, $T\mathbf{v} \in W$. Entonces sólo falta demostrar que T es lineal, lo que se deduce directamente de la ecuación (7.2.1). Si $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$, y $\mathbf{q} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{v}_n$, entonces:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{q}) &= T[(\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{v}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{v}_n] \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{w}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{w}_n \\ &= (\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{w}_n) + (\beta_1\mathbf{w}_1 + \beta_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{w}_n) \\ &= T\mathbf{u} + T\mathbf{q} \end{aligned}$$

De manera similar, $T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v}$, así que T es lineal. La unicidad de T se obtiene del teorema 7.2.2 y la prueba queda completa.

Observación. En los teoremas 7.2.2 y 7.2.3 los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ no tienen que ser independientes y, de hecho, ni siquiera tienen que ser distintos. Más aún, se hace hincapié en que los teoremas se cumplen si V es cualquier espacio vectorial de dimensión finita, no sólo $\mathbb{R}^n$. Observe también que la dimensión de W no tiene que ser finita.

EJEMPLO 7.2.2 Definición de una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en un subespacio de $\mathbb{R}^3$

Encuentre una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en el plano

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + 3z = 0 \right\}$$