ecuación (5.5.2) se satisface. Esto contradice la independencia lineal de los vectores $\mathbf{u}_i$. Así, $m \leq n$.

Teorema 5.5.4

Sea H un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V. Entonces H tiene dimensión finita y

$$\boxed{\dim H \leq \dim V} \tag{5.5.6}$$

Demostración

Sea $\dim V = n$. Cualquier conjunto de vectores linealmente independientes en H es también linealmente independiente en V. Por el teorema 5.5.3, cualquier conjunto linealmente independiente en H puede contener a lo más n vectores. Si $H = \{\mathbf{0}\}$, entonces $\dim H = 0$. Si $\dim H \neq \{\mathbf{0}\}$, sea $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ un vector en H y $H_1 = \text{gen}\,\{\mathbf{v}_1\}$. Si $H_1 = H$, $\dim H = 1$ y la prueba queda completa. De lo contrario, elija a $\mathbf{v}_2 \in H$ tal que $\mathbf{v}_2 \notin H_1$ y sea $H_2 = \text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, y así sucesivamente. Continuamos hasta encontrar vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ tales que $H = \text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. El proceso tiene que terminar porque se pueden encontrar a lo más n vectores linealmente independientes en H. Entonces $H = k \leq n$.

El teorema 5.5.4 tiene algunas consecuencias interesantes. Presentaremos dos de ellas.

EJEMPLO 5.5.8 $C[0, 1]$ y $C^1[0, 1]$ tienen dimensión infinita

Cálculo

Sea $P[0, 1]$ el conjunto de polinomios definido en el intervalo $[0, 1]$. Entonces $P[0, 1] \subset C[0, 1]$. Si la dimensión de $C[0, 1]$ fuera finita, entonces $P[0, 1]$ también tendría dimensión finita. Pero según el ejemplo 5.5.7, no es así. Por lo tanto, $C[0, 1]$ tiene dimensión infinita. De manera similar, como $P[0, 1] \subset C^1[0, 1]$ (ya que todo polinomio es diferenciable), también se tiene que la dimensión de $C^1[0, 1]$ es infinita.

En términos generales,

Cualquier espacio vectorial que contiene un subespacio de dimensión infinita es de dimensión infinita.

EJEMPLO 5.5.9 Los subespacios de $\mathbb{R}^3$

Se puede usar el teorema 5.5.4 para encontrar *todos* los subespacios de $\mathbb{R}^3$. Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Existen cuatro posibilidades: $H = \{\mathbf{0}\}$, $\dim H = 1$, $\dim H = 2$ y $\dim H = 3$. Si $\dim H = 3$, entonces H contiene una base de tres vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ en $\mathbb{R}^3$. Pero entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ también forman una base para $\mathbb{R}^3$, y así, $H = \text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \mathbb{R}^3$. Por lo tanto, la única manera de obtener un subespacio *propio* de $\mathbb{R}^3$ es teniendo $\dim H = 1$ o $\dim H = 2$. Si $\dim H = 1$, entonces H tiene una base que consiste en un vector $\mathbf{v} = (a, b, c)$. Sea $\mathbf{x}$ en H. Entonces $\mathbf{x} = t(a, b, c)$ para algún número real t [puesto que (a, b, c) genera a H]. Si $\mathbf{x} = (x, y, z)$, esto significa que $x = at$, $y = bt$, $z = ct$. Pero ésta es la ecuación de una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen con la dirección del vector (a, b, c).