14. Sea

$$f(m,n) := \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} my \, dx\, dy.$$

Demostrar que $\lim\limits_{m,n\to\infty} f(m,n) = 0$.

15. Sea $f\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \text{ racional} \\ 2y & x \text{ irracional.} \end{cases}$$

Demostrar que $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dy\right] dx$ existe pero que f no es integrable.

16. Expresar $\iint_R \cosh xy\, dx\, dy$ como una sucesión convergente, donde $R = [0,1]\times[0,1]$.

17. Aunque el teorema de Fubini se cumple para la mayoría de las funciones que podemos encontrar en la práctica, debe aplicarse con cautela. Este ejercicio proporciona una función para la que el teorema falla. Utilizando un cambio de variable que implique a la función tangente, demostrar que

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy\, dx = \frac{\pi}{4},$$

mientras que

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy = -\frac{\pi}{4}.$$

¿Por qué esto no contradice los teoremas 3 y 3′?

18. Sea f una función continua, $f \geq 0$, en el rectángulo R. Si $\iint_R f\; dA = 0$, demostrar que $f = 0$ en R.

5.3 La integral doble sobre regiones más generales

Nuestro objetivo en esta sección es doble: en primer lugar, deseamos definir la integral doble de una función $f(x,y)$ sobre regiones D más generales que los rectángulos; en segundo lugar, queremos desarrollar una técnica para calcular este tipo de integral. Para ello, definiremos tres tipos especiales de subconjuntos del plano xy y luego extenderemos el concepto de integral doble a los mismos.

Regiones elementales

Supongamos que tenemos dos funciones reales continuas $\phi_1\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ y $\phi_2\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ que satisfacen $\phi_1(x)\leq\phi_2(x)$ para todo $x\in[a,b]$. Sea D el conjunto de todos los puntos (x,y) tales que $x\in[a,b]$ y $\phi_1(x)\leq y\leq \phi_2(x)$. Esta región D se denomina ***y-simple***. La Figura 5.3.1 muestra varios ejemplos de regiones y-simples. Las curvas y los segmentos de recta que acotan la región constituyen la ***frontera*** de D, que se denota mediante ∂D. Empleamos la denominación "y-simple" porque la región se describe de forma relativamente sencilla, expresando y como una función de x.

Decimos que una región D es ***x-simple*** si existen funciones continuas ψ_1 y ψ_2 definidas en $[c,d]$ tales que D es el conjunto de puntos (x,y) que satisfacen

$$y\in[c,d] \qquad \text{y} \qquad \psi_1(y)\leq x\leq\psi_2(y),$$

donde $\psi_1(y)\leq\psi_2(y)$ para todo $y\in[c,d]$. De nuevo, las curvas que delimitan la región D constituyen su frontera ∂D. Algunos ejemplos de regiones x-simples se muestran en la Figura 5.3.2. En este caso, x