

**Sistema de
coordenadas
cartesianas en \mathbb{R}^3**

En este sistema, los tres planos coordenados dividen al espacio \mathbb{R}^3 en ocho **octantes**, de la misma forma que en \mathbb{R}^2 los ejes coordenados dividen al plano en cuatro cuadrantes. El octante en el que los tres ejes coordenados son positivos siempre se selecciona como el primero.

El sistema coordenado que acaba de establecerse con frecuencia se conoce como **sistema de coordenadas rectangulares** o **sistema de coordenadas cartesianas**. Una vez que la noción de describir un punto en este sistema le resulte familiar, pueden extenderse muchas de las ideas a partir del plano.

Teorema 4.3.1

Sean $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ dos puntos en el espacio. Entonces la distancia \overline{PQ} entre P y Q está dada por

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (4.3.3)$$

Se pide al lector que pruebe este resultado en el problema 49.

EJEMPLO 4.3.1 Cálculo de la distancia entre dos puntos en \mathbb{R}^3

Calcule la distancia entre los puntos $(3, -1, 6)$ y $(-2, 3, 5)$.

SOLUCIÓN ► $\overline{PQ} = \sqrt{[3 - (-2)]^2 + (-1 - 3)^2 + (6 - 5)^2} = \sqrt{42}$.

En las secciones 4.1 y 4.2 se desarrollaron las propiedades geométricas de los vectores en el plano. Dada la similitud entre los sistemas de coordenadas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , no es una sorpresa que los vectores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 tengan estructuras muy similares. Ahora se desarrollará el concepto de un vector en el espacio. El desarrollo seguirá de cerca los avances de las últimas dos secciones y, por lo tanto, se omitirán algunos detalles.

Sean P y Q dos puntos distintos en \mathbb{R}^3 . Entonces el **segmento de recta dirigido** \overrightarrow{PQ} es el segmento de recta que se extiende de P a Q . Dos segmentos de recta dirigidos son **equivalentes** si tienen la misma magnitud y dirección. Un **vector en \mathbb{R}^3** es el conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado, y cualquier segmento dirigido \overrightarrow{PQ} en ese conjunto se llama una **representación** de un vector.

Hasta aquí las definiciones son idénticas. Por conveniencia, se elige P en el origen para poder describir el vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{OQ}$ mediante las coordenadas (x, y, z) del punto Q .

Entonces la **magnitud** de $\mathbf{v} = |\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (del teorema 4.3.1).

EJEMPLO 4.3.2 Cálculo de la magnitud de un vector en \mathbb{R}^3

Sea $\mathbf{v} = (1, 3, -2)$. Encuentre $|\mathbf{v}|$.

SOLUCIÓN ► $|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$.

Definición 4.3.1

Sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ dos vectores, y sea α un número real (escalar). Entonces se define

**Segmento de
recta dirigido**

Vector en \mathbb{R}^3

**Representación
de un vector**

**Magnitud de
un vector**