8. Utilizando la versión para formas diferenciales del teorema de Stokes, probar la versión para campos vectoriales de la Sección 8.2. Repetir esto mismo para el teorema de Gauss.

9. Interpretar el Teorema 16 para el caso de $k = 1$.

10. Sea $\omega = (x + y)\,dz + (y + z)\ dx + (x + z)\,dy$ y sea S la parte superior de la esfera unidad; es decir, S es el conjunto de puntos (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $z \geq 0$. ∂S es la circunferencia unidad en el plano xy. Calcular $\int_{\partial S} \omega$ directamente y por el teorema de Stokes.

11. Sea T el sólido triangular acotado por el plano xy, el plano xz, el plano yz y el plano $2x+3y+6z = 12$. Calcular

$$\iint_{\partial T} F_1\ dx\,dy + F_2\ dy\,dz + F_3\,dz\ dx$$

directamente y por el teorema de Gauss, si

(a) $F_1 = 3y,\ F_2 = 18z,\ F_3 = -12;$

(b) $F_1 = z,\ F_2 = x^2,\ F_3 = y.$

12. Calcular $\iint_S \omega$, donde $\omega = z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + y\,dz\ dx$ y S es la esfera unidad, directamente y mediante el teorema de Gauss.

13. Sea R una región elemental en $\mathbb{R}^3$. Demostrar que el volumen de of R está dado por la fórmula

$$v(R) = \frac{1}{3}\iint_{\partial R} x\,dy\,dz + y\,dz\ dx + z\ dx\ dy.$$

14. En la Sección 4.2, hemos visto que la longitud $l(\mathbf{c})$ de una curva $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t)), a \leq t \leq b$, está dada por la fórmula

$$l(\mathbf{c}) = \int d\mathbf{s} = \int_a^b \left(\frac{ds}{dt}\right)\ dt$$

donde, informalmente, $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$, es decir,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Supongamos ahora que una superficie S está dada en forma parametrizada por $\mathbf{\Phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, donde $(u, v) \in D$. Demostrar que el área de S se puede expresar como

$$A(S) = \iint_D dS,$$

donde formalmente $(dS)^2 = (dx \wedge dy)^2 + (dy \wedge dz)^2 + (dz \wedge\ dx)^2$, una fórmula que precisa una interpretación. [SUGERENCIA:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv,$$

y análogamente para dy y dz. Utilizar las leyes de las formas diferenciales para las 1-formas básicas du y dv. Entonces dS resulta ser una función multiplicada por la 2-forma básica $du\,dv$, la cual podemos integrar sobre D].

Ejercicios de repaso del Capítulo 8

1. Sea $\mathbf{F} = 2yz\mathbf{i} + (-x + 3y + 2)\mathbf{j} + (x^2 + z)\mathbf{k}$. Calcular $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq 1$ (sin la tapa superior ni la inferior). ¿Qué ocurre si incluimos ambas tapas?

2. Sea W una región en $\mathbb{R}^3$ con frontera ∂W. Probar la identidad

$$\begin{aligned}&\iint_{\partial W} [\mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G})] \cdot dS \\ &= \iiint_W (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \mathbf{G})\,dV \\ &- \iiint_W \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{G})\,dV.\end{aligned}$$

3. Sea $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + z^8\mathbf{j} - 2xyz\mathbf{k}$. Calcular la integral de $\mathbf{F}$ sobre la superficie del cubo unidad.

4. Verificar el teorema de Green para la integral de línea

$$\int_C x^2y\ dx + y\ dy,$$

cuando C es la frontera de la región entre las curvas $y = x$ e $y = x^3,\ 0 \leq x \leq 1$.

5. (a) Demostrar que $\mathbf{F} = (x^3 - 2xy^3)\mathbf{i} - 3x^2y^2\mathbf{j}$ es un campo vectorial gradiente.

(b) Calcular la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de la trayectoria $x = \cos^3\theta, y = \operatorname{sen}^3\theta, 0 \leq \theta \leq \pi/2$.