Ejemplo 12

(a) Determinar las ecuaciones de la recta en el espacio que pasa por el punto $(3, -1, 2)$ en la dirección $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

(b) Determinar la ecuación de la recta en el plano que pasa por el punto $(1, -6)$ en la dirección $5\mathbf{i} - \pi\mathbf{j}$.

(c) ¿Qué dirección tiene la recta $x = -3t + 2, y = -2(t - 1), z = 8t + 2$?

Solución

(a) Aquí $\mathbf{a} = (3, -1, 2) = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, por lo que $a = 2, b = -3$ y $c = 4$. De acuerdo con el recuadro anterior, las ecuaciones son

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2t, \\ y &= -1 - 3t, \\ z &= 2 + 4t. \end{aligned}$$

(b) Aquí $\mathbf{a} = (1, -6)$ y $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - \pi\mathbf{j}$, por lo que la recta buscada es

$$\mathbf{l}(t) = (1, -6) + (5t, -\pi t) = (1 + 5t, -6 - \pi t);$$

es decir,

$$x = 1 + 5t, \qquad y = -6 - \pi t.$$

(c) Teniendo en cuenta el recuadro anterior, construimos el vector $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ a partir de los coeficientes de t: $a = -3$, $b = -2$, $c = 8$. Por tanto, la recta apunta en la dirección de $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$. ▲

Ejemplo 13

¿Se intersecan las dos rectas $(x, y, z) = (t, -6t + 1, 2t - 8)$ y $(x, y, z) = (3t + 1, 2t, 0)$?

Solución

Si las rectas se intersecan, deben existir dos números t_1 y t_2 tales que los puntos correspondientes sean iguales:

$$(t_1, -6t_1 + 1, 2t_1 - 8) = (3t_2 + 1, 2t_2, 0);$$

es decir, deben satisfacer las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} t_1 &= 3t_2 + 1, \\ -6t_1 + 1 &= 2t_2, \\ 2t_1 - 8 &= 0. \end{aligned}$$

De la tercera ecuación, tenemos $t_1 = 4$. Entonces la primera ecuación puede expresarse como $4 = 3t_2 + 1$; es decir, $t_2 = 1$. Tenemos que comprobar si estos valores satisfacen la segunda ecuación:

$$-6t_1 + 1 \stackrel{?}{=} 2t_2\,.$$

Como $t_1 = 4$ y $t_2 = 1$, entonces

$$-24 + 1 \stackrel{?}{=} 2,$$

lo que es falso, por lo que las rectas no se intersecan. ▲

Obsérvese que puede haber muchas ecuaciones para una misma recta. Algunas se pueden obtener eligiendo, en lugar de $\mathbf{a}$, un punto diferente de la recta dada, y escribiendo la ecuación paramétrica de la recta que pasa