$(0,0)$, pero $f \circ g$ *no es diferenciable* en $x = 0$, en el sentido del cálculo de una variable. En otras palabras, *la composición de f con g no es diferenciable* en contraste con el cálculo de funciones de una variable, donde la composición de funciones diferenciables *es* diferenciable. Más adelante, proporcionaremos una definición de diferenciabilidad que tiene la agradable consecuencia de que la composición de funciones diferenciables *es* diferenciable.

Existe otra razón para no estar satisfecho con la mera existencia de derivadas parciales de $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$: no existe ningún plano tangente a la gráfica en $(0,0)$. El plano xy es tangente a la gráfica a lo largo de los ejes x e y, ya que f tiene pendiente cero en $(0,0)$ a lo largo de estos ejes; es decir, $\partial f/\partial x = 0$ y $\partial f/\partial y = 0$ en $(0,0)$. Por tanto, si existe un plano tangente, tiene que ser el plano xy. Sin embargo, como es evidente en la Figura 2.3.2, el plano xy no es tangente a la gráfica en otras direcciones, ya que la gráfica tiene un pliegue muy acusado y, por tanto, no se puede decir que el plano xy sea tangente a la gráfica de f.

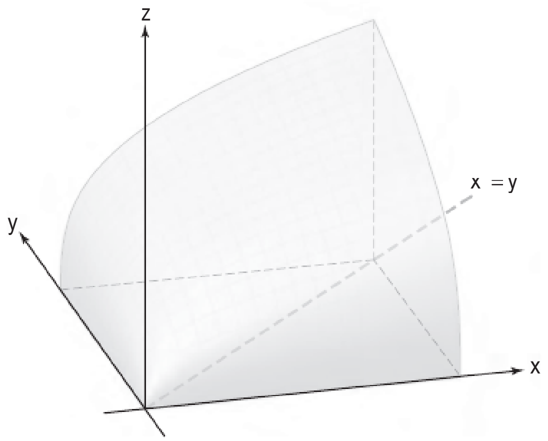

Figura 2.3.2 La parte de la gráfica de $x^{1/3}y^{1/3}$ en el primer cuadrante.

▲

Aproximación lineal o afín

Para "motivar" nuestra definición de diferenciabilidad, vamos a calcular cuál tendría que ser la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y)$ en (x_0, y_0) si f fuera suficientemente suave. En $\mathbb{R}^3$, un plano no vertical tiene una ecuación de la forma

$$z = ax + by + c.$$

Si este fuera el plano tangente a la gráfica de f, las pendientes a lo largo de los ejes x e y tienen que ser iguales a $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$, que son las variaciones de f con respecto a x e y. Por tanto, $a = \partial f/\partial x, b = \partial f/\partial y$ (evaluadas en (x_0, y_0)). Por último, podemos determinar la constante c a partir del hecho de que $z = f(x_0, y_0)$ cuando $x = x_0, y = y_0$. Así obtenemos la ***aproximación lineal*** (o, con mayor precisión, ***aproximación afín***):

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0), \qquad (1)$$