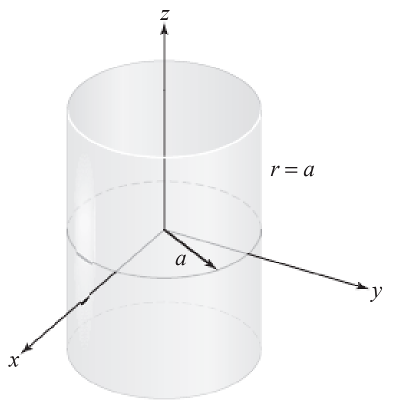

Figura 1.4.3 La gráfica de los puntos cuyas coordenadas cilíndricas satisfacen $r = a$ es un cilindro.

Para expresar r, θ y z en función de x, y y z, y para asegurar que θ está entre 0 y 2π, podemos escribir

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \theta = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & \text{si } x > 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1}(y/x) & \text{si } x < 0 \\ 2\pi + \tan^{-1}(y/x) & \text{si } x > 0 \text{ y } y < 0, \end{cases} \quad z = z$$

donde $\tan^{-1}(y/x)$ se toma entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. La condición $0 \leq \theta < 2\pi$ determina de manera única θ y $r \geq 0$ para cualquier x e y. Si $x = 0$, entonces $\theta = \pi/2$ para $y > 0$ y $3\pi/2$ para $y < 0$. Si $x = y = 0$, θ no está definido.

En otras palabras, para cualquier punto (x, y, z), representamos su primera y segunda coordenadas en función de las coordenadas polares y dejamos la tercera coordenada sin cambiar. La fórmula (1) demuestra que, dado (r, θ, z), la terna (x, y, z) está completamente determinada, y viceversa, si restringimos θ al intervalo $[0, 2\pi)$ (a veces es conveniente emplear el intervalo $(-\pi, \pi]$) y además $r > 0$.

Para ver por qué usamos el término *coordenadas cilíndricas*, obsérvese que si se cumplen las condiciones $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ y si $r = a$ es una constante positiva, entonces el lugar geométrico de estos puntos es un cilindro de radio a (véase la Figura 1.4.3).

Ejemplo 1 (a) Determinar y dibujar las coordenadas cilíndricas de (6, 6, 8). (b) Si un punto tiene las coordenadas cilíndricas $(8, 2\pi/3, -3)$, ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas? Dibujarlas.

Solución Para el apartado (a), tenemos $r = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ y $\theta = \tan^{-1}(6/6) = \tan^{-1}(1) = \pi/4$. Por tanto, las coordenadas cilíndricas son $(6\sqrt{2}, \pi/4, 8)$. Este es el punto P de la Figura 1.4.4.

Para el apartado (b), obsérvese que $2\pi/3 = \pi/2 + \pi/6$ y entonces

$$x = r\cos\theta = 8\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{8}{2} = -4$$

y

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = 8\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} = 8\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$