Teorema 14 Teorema general de Stokes Sea M una k-variedad orientada en $\mathbb{R}^3$ ($k = 2$ o 3) contenida en algún conjunto abierto K. Supongamos que ω es una $(k-1)$-forma sobre K. Entonces

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

Aquí la integral se interpreta como una integral simple, doble o triple, según sea apropiado. De hecho, esta es la forma del teorema de Stokes que generaliza a espacios de dimensión arbitraria.

Ejercicios

1. Calcular $\omega \wedge \eta$ si

(a) $\omega = 2x\,dx + y\,dy$
$\eta = x^3\,dx + y^2\,dy$.

(b) $\omega = x\,dx - y\,dy$
$\eta = y\,dx + x\,dy$.

(c) $\omega = x\,dx + y\,dy + z\,dz$
$\eta = z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + y\,dz\,dx$.

(d) $\omega = xy\,dy\,dz + x^2\,dx\,dy$
$\eta = dx + dz$.

(e) $\omega = e^{xyz}\,dx\,dy$
$\eta = e^{-xyz}dz$.

2. Probar que

$$(a_1\,dx + a_2\,dy + a_3\,dz) \wedge (b_1\,dy\,dz + b_2\,dz\,dx + b_3\,dx\,dy) = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right) dx\,dy\,dz.$$

3. Hallar $d\omega$ en los siguientes ejemplos:

(a) $\omega = x^2 y + y^3$.

(b) $\omega = y^2 \cos x\,dy + xy\,dx + dz$.

(c) $\omega = xy\,dy + (x+y)^2\,dx$.

(d) $\omega = x\,dx\,dy + z\,dy\,dz + y\,dz\,dx$.

(e) $\omega = (x^2 + y^2)\,dy\,dz$.

(f) $\omega = (x^2 + y^2 + z^2)\,dz$.

(g) $\omega = \dfrac{-x}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{y}{x^2+y^2}\,dy$.

(h) $\omega = x^2 y\,dy\,dz$.

4. Sea C el segmento de recta desde el punto $(-2, 0, 1)$ a $(3, 6, 9)$. Sean $\omega_1 = y\,dx + x\,dy + xy\,dz$, $\omega_2 = z\,dx + y\,dy + 2x\,dz$ y $f(x, y, z) = xy$. Calcular lo siguiente:

(a) $\displaystyle\int_C f\omega_1$. (b) $\displaystyle\int_C f\omega_2$. (c) $\displaystyle\int_C \omega_1 + \omega_2$.

5. Sea C parametrizada por $c(t) = (t^2 + 4t, t + 1), t \in [0, \pi]$. Sean $\omega_1 = y\,dx + x\,dy$, $\omega_2 = y^2\,dx + x^2\,dy$ y $f(x, y) = x$. Calcular lo siguiente:

(a) $\displaystyle\int_C f\omega_1$. (b) $\displaystyle\int_C f\omega_2$. (c) $\displaystyle\int_C \omega_1 + \omega_2$.

6. Sea $\mathbf{V}\colon K \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial definido por $\mathbf{V}(x, y, z) = G(x, y, z)\mathbf{i} + H(x, y, z)\mathbf{j} + F(x, y, z)\mathbf{k}$ y sea η la 2-forma sobre K dada por

$$\eta = F\,dx\,dy + G\,dy\,dz + H\,dz\,dx.$$

Demostrar que $d\eta = (\operatorname{div} \mathbf{V})\,dx\,dy\,dz$.

7. Si $\mathbf{V} = A(x, y, z)\mathbf{i} + B(x, y, z)\mathbf{j} + C(x, y, z)\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre $K \subset \mathbb{R}^3$, definimos la operación Forma_2: campos vectoriales $\to$ 2-formas mediante

$$\text{Forma}_2(\mathbf{V}) = A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy.$$

(a) Demostrar que $\text{Forma}_2(\alpha\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \alpha\,\text{Forma}_2(\mathbf{V}_1) + \text{Forma}_2(\mathbf{V}_2)$, donde α es un número real.

(b) Demostrar que $\text{Forma}_2(\operatorname{rot} \mathbf{V}) = d\omega$, donde $\omega = A\,dx + B\,dy + C\,dz$.