EJEMPLO 7.3.6 Representación matricial de una transformación de P_2 en P_3

Defina $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_3$ por $(Tp)(x) = xp(x)$. Encuentre A_T y úsela para determinar el núcleo y la imagen de T.

SOLUCIÓN ► Utilizando las bases estándar $B_1 = \{1, x, x^2\}$ en $\mathbb{P}_2$ y $B_2 = \{1, x, x^2, x^3\}$ en $\mathbb{P}_3$, se tiene $(T(1))_{B_2} = (x))_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(T(x))_{B_2} = (x^2))_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $(T(x^2))_{B_2} = (x^3))_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así, $A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Es evidente que $\rho(A) = 3$ y que una base para R_A es $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Por tanto, im $T =$ gen $\{x, x^2, x^3\}$. Como $\nu(A) = 3 - \rho(A) = 0$, se ve que nu $T = \{\mathbf{0}\}$.

EJEMPLO 7.3.7 Representación matricial de una transformación de $\mathbb{P}_3$ en $\mathbb{P}_2$

Defina $T: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$ por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + a_2x^2$. Calcule A_T y utilícela para encontrar el núcleo y la imagen de T.

SOLUCIÓN ► Utilizando las bases estándar $B_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ en $\mathbb{P}_3$ y $B_2 = \{1, x, x^2\}$ en $\mathbb{P}_3$, de inmediato se ve que $(T(1))_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(T(x))_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(T(x^2))_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $(T(x^3))_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, por lo que $A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es obvio que $\rho(A) = 2$ y una base para R_A es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, de manera que im $T =$ gen $\{1, x^2\}$. Entonces, $\nu(A) = 4 - 2 = 2$, y si $A_T \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$.

Por tanto, a_0 y a_3 son arbitrarios y $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para N_A, de manera que $\{1, x^3\}$ es una base para nu T.

En todos los ejemplos de esta sección se ha obtenido la matriz A_T utilizando la base estándar en cada espacio vectorial. Sin embargo, el teorema 7.3.3 se cumple para cualesquiera bases en V y W. El siguiente ejemplo ilustra esto.