$$\int_{-a}^{a} (a^2 - y^2)^{1/2}\, dy = \frac{a^2}{2}\pi.$$

(También podríamos haber empleado un cambio de variable trigonométrico o una tabla de integrales.) Por tanto,

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)^{1/2}\, dy = \frac{1-x^2}{2}\pi,$$

de modo que

$$\begin{aligned} 2\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)^{1/2} dy\, dx &= 2\int_{-1}^{1} \pi\frac{1-x^2}{2}\, dx \\ = \pi\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx &= \pi\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=-1}^{1} = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

▲

En la Figura 5.5.4 se muestran otros tipos de regiones elementales. Por ejemplo, en la segunda región, (y, z) está en la región elemental del plano yz y x se mueve entre dos gráficas:

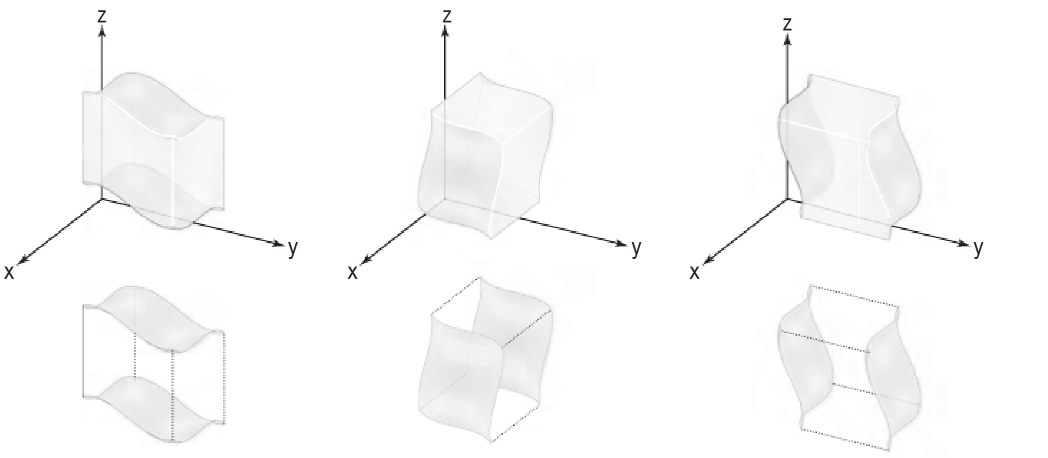
$$\rho_1(y, z) \le x \le \rho_2(y, z).$$

Como se muestra en la Figura 5.5.5, algunas regiones elementales se pueden describir de tres maneras. Estas regiones se denominan ***regiones elementales simétricas***.

A cada descripción de una región como una región elemental le corresponde una fórmula de integración. Por ejemplo, si W se expresa como el conjunto de todos los (x, y, z) tales que

$$c \le y \le d, \qquad \psi_1(y) \le z \le \psi_2(y), \qquad \rho_1(y, z) \le x \le \rho_2(y, z),$$

entonces



Las partes superior e inferior son superficies $z = \gamma(x, y)$

Las partes frontal y posterior son superficies $x = \rho(y, z)$

Los lados iz uierdo y derecho son superficies $y = \delta(x, z)$

Figura 5.5.4 Tipos de regiones elementales en el espacio.