También se crea la matriz L cuyas columnas son los vectores izquierdos propios para la matriz A. Un vector izquierdo ($\varepsilon$) se define como el vector para el cual $\varepsilon A = \lambda\varepsilon_1$, entonces es un vector derecho propio para $A^T$. Sin embargo, se escalan los valores en L de modo que $\langle e_i, \varepsilon_1\rangle = 1$. Dado que los vectores propios derechos e izquierdos para diferentes vectores propios son ortogonales, $\langle e_1, \varepsilon_j\rangle$. Por lo tanto, $RL = I$ y $L = R^{-1}$.

Entonces

$$AR = [Ae_1|Ae_2| \cdots |Ae_\omega] = [\lambda_1 e_1|\lambda_2 e_2| \cdots |\lambda_\omega e_\omega]$$

También puede construirse una matriz diagonal D con los valores propios de A como sus entradas diagonales, con ceros en todas las demás posiciones. Entonces, puede anotarse

$$RD = \left[ R\begin{pmatrix}\lambda_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \middle| R\begin{pmatrix}0\\\lambda_2\\\vdots\\0\end{pmatrix} \middle| \cdots \middle| R\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\\lambda_\omega\end{pmatrix}\right] = [\lambda_1 e_1|\lambda_2 e_2| \cdots |\lambda_\omega e_\omega]$$

Ahora se observa que

$$\begin{aligned} AR &= RD \\ ARR^{-1} &= RDR^{-1} \\ AI &= RDL \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= RDL \\ &= \sum_{k=1}^{\omega} e_k \lambda_k \varepsilon_k \\ &= \sum_{k=1}^{\omega} \lambda_k e_k \otimes \varepsilon_k \end{aligned}$$

Ahora se observa que en efecto, hay una descomposición espectral

$$A = \sum_{k=1}^{\omega} \lambda_k T_k$$

## Crecimiento asintótico y población de equilibrio

Ahora que estamos convencidos de que existe la descomposición asintótica, puede considerarse la importancia biológica de la ecuación. Una característica importante de la matriz $Tk$ es que $T_k T_k = T_k$ y $T_j T_k = 0$ cuando $j \neq k$. Puede observarse una demostración de esto considerando $T_j T_k$.

$$\begin{aligned} T_j T_k &= (e_j \otimes \varepsilon_j)(e_k \otimes \varepsilon_k) \\ &= e_j \otimes \varepsilon_k \langle e_j, \varepsilon_k\rangle \end{aligned}$$

Cuando $j \neq k$, $e$ y $\varepsilon$ son vectores propios para diferentes valores propios, de modo que su producto interno es igual a 0. Cuando $j = k$, entonces $e$ y $\varepsilon$ son vectores propios para el mismo valor propio, y se han escalado tal que su producto interno es igual a 1. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T_k T_k &= e_k \otimes \varepsilon_k (1) \\ &= T_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_j T_k &= e_k \otimes \varepsilon_k (1) \\ &= 0 \end{aligned}$$