25. Los antiguos griegos sabían que una línea recta era el camino más corto entre dos puntos. Euclides, en su libro *Óptica*, enunció el "principio de reflexión de la luz"—es decir, la luz que viaja en un plano lo hace en línea recta y cuando se refleja en un espejo, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

Los griegos no tenían una demostración de que la línea recta es el camino más corto entre dos puntos porque, en primer lugar, no tenían una definición para la longitud de una trayectoria. Pensaban que esta propiedad de las líneas rectas era más o menos "obvia".

Utilizando la justificación de la longitud de arco de esta sección y la desigualdad triangular de la Sección 1.5, justificar que si $\mathbf{c}_0$ es la recta $\mathbf{c}_0(t) = t\mathrm{P}+(1-t)\mathrm{Q}$ entre P y Q en $\mathbb{R}^3$, entonces

$$L(\mathbf{c}_0) \leq L(\mathbf{c})$$

para cualquier otra trayectoria $\mathbf{c}$ que una P y Q.

4.3 Campos vectoriales

Concepto de campo vectorial

En el Capítulo 2 hemos presentado un tipo particular de campo vectorial, el gradiente. En esta sección vamos a estudiar los campos vectoriales *generales*, abordando su importancia geométrica y física.

Campos vectoriales Un ***campo vectorial*** en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{F}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que asigna a cada punto $\mathbf{x}$ de su dominio A un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Si $n=2$, $\mathbf{F}$ es un ***campo vectorial en el plano*** y si $n=3$, $\mathbf{F}$ es un ***campo vectorial en el espacio***.

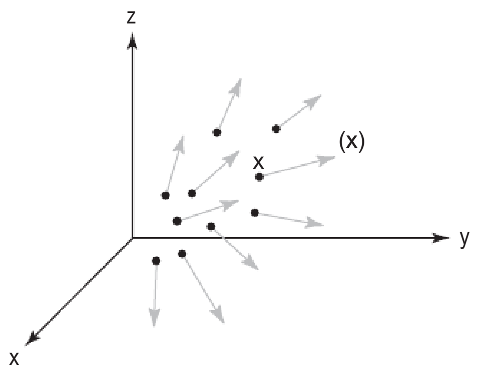

Figura 4.3.1 Un campo vectorial $\mathbf{F}$ asigna un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ a cada punto $\mathbf{x}$ de su dominio.

Representamos $\mathbf{F}$ mediante una *flecha* conectada a cada punto (Figura 4.3.1). Por otro lado, una aplicación $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que asigna un *número* a cada punto es un ***campo escalar***. Un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ en $\mathbb{R}^3$ tiene tres ***componentes*** F_1, F_2 y F_3, que son ***campos escalares***, de modo que

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)).$$

De forma similar, un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ tiene n componentes $F_1, \ldots, F_n$. Si cada componente es una función C^k, decimos que el campo vectorial $\mathbf{F}$ es de ***clase*** C^k. Vamos a suponer que los campos vectoriales sean al menos de clase C^1, salvo que se indique lo contrario. En mu-