Ejemplo 1 **Los planos tienen curvatura cero** Sea $\mathbf{\Phi}(u,v) = \boldsymbol{\alpha} u + \boldsymbol{\beta} v + \boldsymbol{\gamma}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, donde $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$. Según el Ejemplo 1 de la Sección 7.3, esto determina un plano parametrizado en $\mathbb{R}^3$. Demostrar que, en todos los puntos, tanto la curvatura de Gauss como la curvatura media son iguales a cero y que por tanto K y H son idénticamente nulas.

Solución Puesto que $\mathbf{\Phi}_{uu} = \mathbf{\Phi}_{uv} = \mathbf{\Phi}_{vv} \equiv 0$, las funciones ℓ, m, n se anulan en todos los puntos, por lo que ocurre lo mismo con H y K. Por tanto, un plano tiene curvatura "cero". Luego, al menos en este ejemplo, deberíamos estar convencidos de que H y K realmente miden lo *llano* que es el plano. Inversamente, podemos demostrar que si H y K son idénticamente nulas, entonces S es parte de un plano (véase el Ejercicio 12). ▲

Ejemplo 2 **Curvatura de una semiesfera** Sea $\mathbf{\Phi}(u,v) = (u, v, g(u,v))$, donde $g(u,v) = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$ es una parametrización de la "semiesfera superior" de radio R. Demostrar que la curvatura de Gauss en cualquier punto es $1/R^2$ y que la curvatura media es $1/R$.

Solución En primer lugar, calculamos las siguientes cantidades:

$$\mathbf{T}_u, \mathbf{T}_v, \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v, \mathbf{\Phi}_{uu}, \mathbf{\Phi}_{vv}, \mathbf{\Phi}_{uv}, E, G, F, \ell, m, n.$$

Antes de nada, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_u = \mathbf{T}_u &= \mathbf{i} - \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \mathbf{k} \\ \mathbf{\Phi}_v = \mathbf{T}_v &= \mathbf{j} - \frac{v}{\sqrt{R^2 - v^2 - v^2}} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

De la fórmula (2) de la Sección 7.3, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v &= -\frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial v}\mathbf{j} + \mathbf{k} \\ &= \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\mathbf{i} + \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\mathbf{j} + \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} E &= \|\mathbf{\Phi}_u\|^2 = 1 + \frac{u^2}{R^2 - u^2 - v^2} = \frac{R^2 - v^2}{R^2 - u^2 - v^2} \\ G &= \|\mathbf{\Phi}_v\|^2 = \frac{R^2 - u^2}{R^2 - u^2 - v^2} \\ F &= \mathbf{\Phi}_u \cdot \mathbf{\Phi}_v = \frac{uv}{R^2 - u^2 - v^2}. \end{aligned}$$

Por el Ejercicio 23 de la Sección 7.5, sabemos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|^2 &= EG - F^2 = \frac{(R^2 - v^2)(R^2 - u^2) - u^2 v^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^2} \\ &= \frac{R^4 - R^2 u^2 - R^2 v^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^2} = \frac{R^2}{(R^2 - u^2 - v^2)} = W. \end{aligned}$$

Ahora un cálculo directo demuestra que