18. Sea $f(x,y) = xe^{y^2} - ye^{x^2}$.

(a) Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en (1, 2).

(b) ¿Qué punto de la superficie $z = x^2 - y^2$ tiene un plano tangente paralelo al plano determinado en el apartado (a)?

19. Calcular los gradientes de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y,z) = x\exp(-x^2-y^2-z^2)$ (Notación: $\exp u = e^u$.)

(b) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

(c) $f(x,y,z) = z^2e^x \cos y$

20. Calcular el plano tangente en (1, 0, 1) para cada una de las funciones del Ejercicio 19.

21. Hallar la ecuación del plano tangente de $z = x^2 + 2y^3$ en $(1, 1, 3)$.

22. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^4}{x^4+6y^8} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Demostrar que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existen.

(b) Demostrar que f no es diferenciable en (0,0) viendo que f no es continua en (0,0).

23. Sea P el plano tangente a $f(x,y) = x^2y^3$ en (1, 2, 8). Sea l la recta contenida en P que pasa por el punto (1, 3, 20) y directamente por encima de (2, 1). Es decir, l contiene el punto (1, 3, 20) y un punto de la forma $(2, 1, z)$. Hallar una parametrización para l.

24. Calcular $\nabla h(1,1,1)$ si $h(x,y,z) = (x+z)e^{x-y}$.

25. Sea $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$. Calcular $\nabla f(0,0,1)$.

26. Evaluar el gradiente de $f(x,y,z) = \log(x^2+y^2+z^2)$ en $(1,0,1)$.

27. Describir todas las funciones continuas Hölder con $\alpha > 1$ (véase el Ejercicio 33 de la Sección 2.2). (SUGERENCIA: ¿cuál es la derivada de una función de ese tipo?)

28. Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal. ¿Cuál es la derivada de f?

2.4 Introducción a trayectorias y curvas

En esta sección vamos a presentar algunos de los métodos básicos de la geometría y el cálculo de trayectorias en el plano y en el espacio. Este será un ingrediente importante de la regla de la cadena que estudiaremos en la siguiente sección. En el Capítulo 4 veremos temas adicionales acerca de las trayectorias.

Trayectorias y curvas

Solemos pensar en una curva como en una línea trazada sobre un papel, por ejemplo, una recta, una circunferencia o una sinusoide. Es útil pensar matemáticamente en una curva C como en el conjunto de valores de una función que lleva un intervalo de números reales al plano o al espacio. Denominaremos a una función de este tipo ***trayectoria***. Normalmente, denotaremos una trayectoria mediante $\mathbf{c}$. La imagen C de la trayectoria se corresponde entonces con la curva que vemos sobre el papel (véase la Figura 2.4.1). A menudo utilizamos t para designar la variable independiente y la interpretamos como si fuera el *tiempo*, de modo que $\mathbf{c}(t)$ es la posición en el instante t de una partícula en movimiento que ***traza*** una curva a medida que t varía. Decimos también que $\mathbf{c}$ ***parametriza a*** C. Estrictamente hablando, debemos distinguir entre $\mathbf{c}(t)$ como *punto* del espacio y como *vector* con base en el origen.