$$\iint_Q f(x,y)\,dA = \sum_{i=1}^{m} \iint_{R_i} f(x,y)\,dA.$$

Las propiedades (I) y (II) son una consecuencia de la definición de integral como límite de una suma y de los siguientes hechos acerca de dos sucesiones convergentes $\{S_n\}$ y $\{T_n\}$, que se demuestran de la misma forma que los teoremas de los límites del Capítulo 2:

$$\lim_{n\to\infty}(T_n + S_n) = \lim_{n\to\infty} T_n + \lim_{n\to\infty} S_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(cS_n) = c\lim_{n\to\infty} S_n.$$

Para demostrar la monotonía, en primer lugar observamos que si $h(x,y) \geq 0$ y $\{S_n\}$ es una sucesión de sumas de Riemann que converge a $\iint_R h(x,y)\,dA$, entonces $S_n \geq 0$ para todo n, de modo que $\iint_R h(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty} S_n \geq 0$. Si $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in R$, entonces $(f-g)(x,y) \geq 0$ para todo (x,y) y usando las propiedades (I) y (II), tenemos

$$\iint_R f(x,y)\,dA - \iint_R g(x,y)\,dA = \iint_R [f(x,y) - g(x,y)]\,dA \geq 0.$$

Esto prueba la propiedad (III). La demostración de la propiedad (IV) es más técnica. Esta propiedad debería ser obvia de forma intuitiva.

Otro resultado importante es la desigualdad

$$\left|\iint_R f\,dA\right| \leq \iint_R |f|\,dA. \tag{2}$$

Para ver por qué la Ecuación (2) es cierta, obsérvese que por la definición de valor absoluto,

$$-|f| \leq f \leq |f|;$$

y por las propiedades de la monotonía y la homogeneidad de la integración (con $c = -1$),

$$-\iint_R |f|\,dA \leq \iint_R f\,dA \leq \iint_R |f|\,dA,$$

que es equivalente a la Ecuación (2).

Teorema de Fubini

Aunque hemos visto la integrabilidad de una serie de funciones, aún no hemos establecido de forma rigurosa un método general para el cálculo de integrales. En el caso de una variable, evitamos calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ a partir de su definición como límite de una suma utilizando el *teorema fundamental del cálculo integral.* Este importante teorema nos dice que *si f es continua, entonces*