PROBLEMAS 6.3

1. Sea D_n el conjunto de las matrices diagonales de $n \times n$ con componentes reales bajo las operaciones usuales de matrices. Si A y B están en D_n, defina

$$(A, B) = a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{nn}b_{nn}$$

Pruebe que D_n es un espacio con producto interno.

2. Si $A \in D_n$, demuestre que $||A|| = 1$ si y sólo si $a_{11}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{nn}^2 = 1$.

3. Encuentre una base ortonormal para D_n.

4. Encuentre una base ortonormal para D_2 comenzando con $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. En $\mathbb{C}^2$ encuentre una base ortonormal comenzando con la base $\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$.

Cálculo

6. Encuentre una base ortonormal para $\mathbb{P}_3[0, 1]$.

Polinomios normalizados de Legendre

7. Encuentre una base ortonormal para $\mathbb{P}_2[-1, 1]$. Los polinomios que se obtienen se denominan **polinomios normalizados de Legendre**.

8. Encuentre una base ortogonal para $\mathbb{P}_2[-1, 1]$ si el producto interno está definido como

$$\langle U_n, U_m \rangle \int_{-1}^{1} U_n(x) U_m(x) \sqrt{1-x^2}\, dx$$

Cálculo

Polinomios de Tchebyshev de segunda clase

con $U_n(x)$ y $U_m(x)$ elementos de $\mathbb{P}_2[-1, 1]$. Los polinomios que se obtienen se denominan **polinomios de Tchebyshev de segunda clase**.

9. Encuentre una base ortonormal de polinomios para $\mathbb{P}_2[a, b]$, $a < b$, con el producto interno definido en la ecuación (6.3.2).

Traza de una matriz

10. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz real de $n \times n$, la **traza** de A, que se escribe tr A, es la suma de las componentes de la diagonal de A: tr $A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_n n$. En $\mathbb{M}_{nn}$ defina $\langle A, B \rangle =$ tr $(AB^\top)$. Demuestre que con este producto interno $\mathbb{M}_{nn}$ es un espacio con producto interno.

11. Si $A \in \mathbb{M}_{nn}$, demuestre que $||A||^2 = \text{tr}(AA^\top)$ es la suma de los cuadrados de los elementos de la diagonal principal de A. [**Nota.** Aquí $||A|| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$, utilice la notación del problema 10.]

12. Encuentre una base ortonormal para $\mathbb{M}_{22}$.

13. Se puede pensar en el plano complejo como en un espacio vectorial sobre los reales con vectores básicos 1, i. Si $z = a + ib$ y $w = c + id$, defina $\langle z, w \rangle = ac + bd$. Demuestre que éste es un producto interno y que $||z||$ es la longitud usual de un número complejo.

14. Sean a, b y c tres números reales distintos. Sean p y q elementos de $\mathbb{P}_2$ y defina $\langle p, q \rangle = p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)q(c)$. Demuestre que es un producto interno en $\mathbb{P}_2$.

15. En $\mathbb{R}^2$, si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, sea $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_* = x_1y_1 + 3x_2y_2$. Demuestre que $(x, y)_*$ es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

16. Con el producto interno del problema 14, calcule $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|_*$.