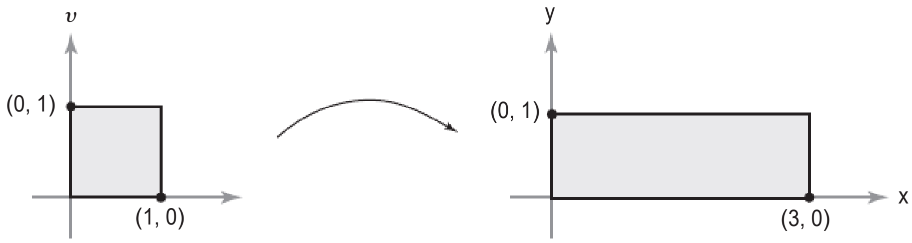

Figura 6.2.1 La aplicación $T: (u, v) \mapsto (-u^2 + 4u, v)$ transforma el cuadrado D^* en el rectángulo D.

a la región $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ en el plano uv (véase la Figura 6.2.1). Entonces, como en el Ejercicio 3 de la Sección 6.1, T transforma D^* en $D = [0, 3] \times [0, 1]$. Claramente, $A(D) \neq A(D^*)$ y, por tanto, la Ecuación (2) *no es válida.*

Determinantes jacobianos

Para corregir la fórmula incorrecta (1), tenemos que medir cómo una transformación $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ distorsiona el área de una región. Esto se obtiene mediante el *determinante jacobiano*, que se define como sigue.

Definición Determinante jacobiano Sea $T: D^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación de clase C^1 dada por $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$. El ***determinante jacobiano*** de T, que se escribe $\partial(x, y)/\partial(u, v)$, es el determinante de la matriz derivada $\mathbf{D}T(u, v)$ de T:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Ejemplo 1 La función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que transforma coordenadas polares en coordenadas cartesianas está dada por

$$x = r \cos\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta$$

y su determinante jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r.$$

▲

Bajo restricciones adecuadas de la función T, deduciremos más adelante que el área de $D = T(D^*)$ se obtiene integrando el valor absoluto del jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ en D^*; es decir, tenemos la ecuación

$$A(D) = \iint_D dx\, dy = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv. \qquad (3)$$