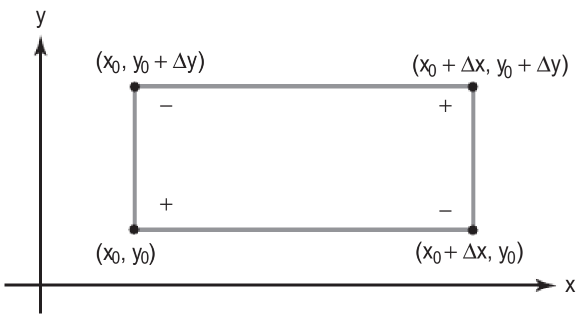

Figura 3.1.1 Álgebra que subyace a la igualdad de las derivadas parciales cruzadas: escribir la diferencia de diferencias de dos formas.

$$-f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0).$$

Manteniendo y_0 y Δy fijos, definimos

$$g(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0),$$

de modo que $S(\Delta x, \Delta y) = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$, *lo que expresa* S *como una diferencia de diferencias*. Por el teorema del valor medio para funciones de una variable, $g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$ es igual a $g'(\bar{x})\Delta x$ para algún $\bar{x}$ entre x_0 y $x_0 + \Delta x$. Por tanto,

$$S(\Delta x, \Delta y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0)\right]\Delta x.$$

Aplicando el teorema del valor medio de nuevo, tenemos que existe un $\bar{y}$ entre y_0 e $y_0 + \Delta y$ tal que

$$S(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(\bar{x}, \bar{y})\, \Delta x\, \Delta y.$$

Dado que $\partial^2 f / \partial y\, \partial x$ es continua, se sigue que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{1}{\Delta x \Delta y}[S(\Delta x, \Delta y)].$$

Si observamos que S es simétrica en Δx y Δy, podemos demostrar de forma similar que $\partial^2 f / \partial x\, \partial y$ está dada por la *misma fórmula límite*, lo que prueba el resultado. ■

La igualdad de las derivadas parciales cruzadas es uno de los resultados más importantes del cálculo de varias variables. Este resultado reaparecerá en diversas ocasiones más adelante en el libro cuando estudiemos las identidades vectoriales.

Nota histórica

En la siguiente nota histórica, veremos el papel de las derivadas parciales en la formulación de muchas de las ecuaciones básicas que gobiernan los fenómenos físicos. Uno de los gigantes de esta época fue Leonhard Euler (1707–1783), quien desarrolló las ecuaciones de la mecánica de fluidos que llevan su nombre—las ecuaciones de Euler. Fue en relación con las necesidades de este desarrollo cómo descubrió, aproximadamente en 1734, la igualdad de las derivadas parciales cruzadas. En esa época, Euler tenía unos 27 años.