

EJEMPLO 4.3.6 Cálculo del coseno del ángulo entre dos vectores en \mathbb{R}^3

Calcule el coseno del ángulo entre $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

SOLUCIÓN ▶ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 7$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{14}$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{26}$, por lo que $\cos \varphi = \frac{7}{\sqrt{(14)(26)}} = \frac{7}{\sqrt{364}} \approx 0.3669$ y $\varphi \approx 68.5^\circ \approx 1.2$ rad.

D Definición 4.3.3**Vectores paralelos y ortogonales**

Dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} diferentes de cero son:

- i) **Paralelos** si el ángulo entre ellos es cero o π .
- ii) **Ortogonales** (o **perpendiculares**) si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

Teorema 4.3.3

- i) Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces \mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u}$ para algún escalar $\alpha \neq 0$.
- ii) Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son diferentes de cero, entonces \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

**Demostración**

De nuevo la prueba es sencilla y se deja como ejercicio (vea el problema 54).

Ahora se dará la definición de la proyección de un vector sobre otro. Primero se establece el teorema análogo al teorema 4.2.5 (y cuya demostración es idéntica).

Teorema 4.3.4

Sea \mathbf{v} un vector diferente de cero. Entonces, para cualquier otro vector \mathbf{u} ,

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v}$$

es ortogonal a \mathbf{v} , es decir, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

D Definición 4.3.4**Proyección**

Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} dos vectores diferentes de cero. Entonces la **proyección** de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} , denotada por $\text{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$, está definida por

$$\text{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \quad (4.3.9)$$

Proyección
de \mathbf{u} sobre \mathbf{v}

Componente

La **componente** de \mathbf{u} en la dirección de \mathbf{v} está dada por $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. (4.3.10)