(a) Hallar un campo escalar $\phi(x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\nabla\phi = \mathbf{F}$ en $\mathbb{R}^3$ y $\phi(0, 0, 0) = 0$.

(b) En la esfera Σ de radio 2 alrededor del origen, hallar todos los puntos en los que

(i) ϕ es máximo.

(ii) ϕ es mínimo.

(c) Calcular los valores máximo y mínimo de ϕ sobre Σ.

23. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial de clase C^1 y supóngase que $\nabla \cdot \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) > 0$. Demostrar que para una esfera lo suficientemente pequeña S centrada en (x_0, y_0, z_0), el flujo de $\mathbf{F}$ hacia el exterior de S es positivo.

24. Sea $B \subset \mathbb{R}^3$ una región plana y sea $\mathrm{O} \in \mathbb{R}^3$ un punto. Si conectamos todos los puntos de B a O, obtenemos un cono, por ejemplo, C, con vértices en O y base B. Demostrar que

$$\text{Volumen } (C) = \frac{1}{3} \text{ área } (B)\ h,$$

donde h es la distancia de O desde el plano de B, utilizando los pasos siguientes.

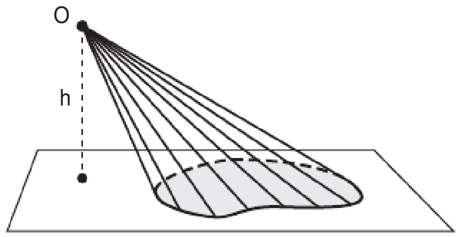

Figura 8.R.1

1. Sea O el origen del sistema de coordenadas. Definimos $\mathbf{r}(x, y, z) := (x, y, z)$. Calcular el flujo de $\mathbf{r}$ a través de la frontera de C, es decir, $\iint_{\partial C} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dA$, donde $\mathbf{n}$ es la normal unitaria exterior a ∂C.
2. Calcular la divergencia total $\iiint_C \nabla \cdot \mathbf{r}\, dV$.
3. Utilizar el teorema de Gauss, que establece que la divergencia total de un campo vectorial dentro de una región encerrada por una superficie es igual al flujo de dicho campo vectorial a través de la superficie:

$$\iiint_C \nabla \cdot \mathbf{r}\, dV = \iint_{\partial C} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dA.$$