pero la transformación $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

es una reflexión de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ respecto al eje x (vea el ejemplo 7.1.1). Entonces se tiene el siguiente teorema.

Teorema 7.5.4

Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una isometría. Entonces T es

i) una transformación de rotación, o bien

ii) una reflexión respecto al eje x seguida de una transformación de rotación.

Las isometrías tienen algunas propiedades interesantes.

Teorema 7.5.5

Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una isometría. Entonces

i) Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ es un conjunto ortogonal, entonces $T\mathbf{u}_1, T\mathbf{u}_2, \ldots, T\mathbf{u}_n$ es un conjunto ortogonal.

ii) T es un isomorfismo.

Demostración

i) Si $i \neq j$ y $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$, entonces $(T\mathbf{u}_i) \cdot (T\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$, lo que prueba i).

ii) Sea $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$. Entonces por el inciso i) y el hecho de que $|T\mathbf{u}_i| = |\mathbf{u}_i| = 1$, se deduce que $T\mathbf{u}_1, T\mathbf{u}_2, \ldots, T\mathbf{u}_n$ es un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$. Por el teorema 6.1.1, estos vectores son linealmente independientes y por tanto forman una base para $\mathbb{R}^n$. Entonces im $T = \mathbb{R}^n$, lo que prueba que nu $T = \{\mathbf{0}\}$ [ya que $\nu(T) + \rho(T) = n$].

Se concluye esta sección con una descripción de cómo extender el concepto de isometría a un espacio arbitrario con producto interno. Recuerde que un espacio V con producto interno

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

(Recuerde que, con el fin de evitar confusiones, se usan dobles barras para denotar una norma.)

Definición 7.5.2

Isometría

Sean V y W dos espacios vectoriales reales (o complejos) con producto interno y sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces T es una isometría si para todo $\mathbf{v} \in V$

$$\boxed{||\mathbf{v}||_V = ||T\mathbf{v}||_W} \qquad (7.5.7)$$