Aplicando el teorema de Green a la Ecuación (4) resulta (estamos suponiendo que el teorema de Green es válido en D)

$$\iint_D \left[\frac{\partial(F_2 + F_3\,\partial z/\partial y)}{\partial x} - \frac{\partial(F_1 + F_3\,\partial z/\partial x)}{\partial y} \right] dA.$$

Ahora, usamos la regla de la cadena, recordando que F_1, F_2 y F_3 son funciones de x, y, z y que z es una función de x e y, de modo que

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + F_3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + F_3\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} \right) \right] dA.$$

Puesto que las derivadas cruzadas coinciden, los dos últimos términos de cada paréntesis se cancelan entre sí, y podemos reordenar los términos restantes para obtener la integral de la Ecuación (2), lo que concluye la prueba. ■

Ejemplo 1 Sea $\mathbf{F} = ye^z\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + xye^z\mathbf{k}$. Demostrar que la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva orientada cerrada y simple C que es la frontera de una superficie S vale 0. (Supóngase que S es la gráfica de una función, como en el Teorema 5).

Solución En efecto, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, por el teorema de Stokes. Pero, calculando el rotacional,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ ye^z & xe^z & xye^z \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

y por tanto $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$. Alternativamente, también podemos observar que $\mathbf{F} = \nabla(xye^z)$, de manera que su integral a lo largo de una curva cerrada es cero. ▲

Ejemplo 2 Usar el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea

$$\int_C -y^3\, dx + x^3\, dy - z^3\, dz,$$

donde C es la intersección del cilindro $x^2+y^2 = 1$ y el plano $x+y+z = 1$, y la orientación de C corresponde a un movimiento antihorario en el plano xy.

Solución La curva C limita la superficie S definida por la ecuación $z = 1-x-y = f(x,y)$ para (x,y) en el conjunto $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ (Figura