valores reales. Pero las distinguiremos con un propósito que se verá claramente cuando multipliquemos y derivemos formas diferenciales.

Ejemplo 4 Sea $\nu_1 = y\,dx\,dy\,dz$, $\nu_2 = e^{x^2}\,dx\,dy\,dz$ y $f(x,y,z) = xyz$. Entonces $\nu_1 + \nu_2 = (y + e^{x^2})\ dx\,dy\,dz$ y $f\nu_1 = y^2xz\,dx\,dy\,dz$. ▲

Aunque podemos sumar dos 0-formas, dos 1-formas, dos 2-formas o dos 3-formas, no necesitaremos sumar una k-forma y una j-forma si $k \neq j$. Por ejemplo, no necesitaremos escribir

$$f(x,y,z)\ dx\,dy + g\,(x,y,z)\,dz.$$

Ahora que hemos definido estos objetos formales (formas), podemos preguntarnos legítimamente para qué valen, cómo se usan y quizá más importante, qué significan. La respuesta a la primera pregunta estará clara a medida que avancemos, aunque podemos describir de forma inmediata cómo se usan y cómo se interpretan.

Una función con valores reales sobre un dominio K en $\mathbb{R}^3$ es una regla que asigna un número real a cada punto de K. En cierto sentido, las formas diferenciales son generalizaciones de las funciones con valores reales que hemos estudiado en el cálculo diferencial. En efecto, las 0-formas sobre un conjunto abierto K son solo funciones sobre K. Así, una 0-forma f lleva puntos de K a números reales.

Nos gustaría interpretar las k-formas diferenciales (para $k \geq 1$) no como funciones sobre puntos de K, sino como funciones sobre objetos geométricos tales como curvas y superficies. Muchos de los antiguos geómetras griegos interpretaban las rectas y curvas como si estuvieran formadas por una cantidad infinita de puntos, y los planos y superficies estaban formados por infinitas curvas. En consecuencia, hay al menos una justificación histórica para aplicar esta jerarquía geométrica a la interpretación de las formas diferenciales.

Dado un subconjunto abierto $K \subset \mathbb{R}^3$, distinguiremos cuatro tipos de subconjuntos de K (véase la Figura 8.5.2):

(i) Puntos en K.

(ii) Curvas orientadas simples y curvas orientadas cerradas simples. C en K.

(iii) Superficies orientadas, $S \subset K$.

(iv) Subregiones elementales, $R \subset K$.

Integrales de 1-formas sobre curvas

Vamos a comenzar con las 1-formas. Sea

$$\omega = P(x,y,z)\ dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

una 1-forma sobre K y sea C una curva orientada simple como la de la Figura 8.5.2. El número real que ω asigna a C está dado por la fórmula

$$\int_C \omega = \int_C P(x,y,z)\ dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz. \qquad (1)$$