$$D_{\eta,\delta} = \{(x,y)|a+\eta \leq x \leq b-\eta \quad \text{and} \quad \phi_1(x)+\delta \leq y \leq \phi_2(x)-\delta\}$$

es un subconjunto de D, y cuando $(\eta,\delta) \to 0, D_{\eta,\delta}$ tiende a D.

Las integrales impropias como límites

Como f es continua y acotada en $D_{\eta,\delta}$, la integral $\iint D_{\eta,\delta} f\, dA$ existe. Ahora podemos preguntarnos qué sucede cuando la región $D_{\eta,\delta}$ se expande hasta llenar la región D—es decir, cuando $(\eta,\ \delta) \to (0,\ 0)$. Si

$$\lim_{(\eta,\delta)\to(0,0)} \iint_{D_{\eta,\delta}} f\ dA$$

existe, decimos que la integral de f sobre D es ***convergente*** o que f es ***integrable*** sobre D, y definimos $\iint_D f\, dx\, dy$ como este límite.

Ejemplo 1 Calcular

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt[3]{xy}}\ dA,$$

donde D es el cuadrado unidad $[0,\ 1] \times [0,\ 1]$.

Solución D es, claramente, una región y-simple. Elegimos $\eta > 0$ y $\delta > 0$ de forma que $D_{\eta,\delta} \subset D$, como en la Figura 6.4.3. Entonces, por el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}\iint_{D_{\eta,\delta}} \frac{1}{\sqrt[3]{xy}}\ dA &= \int_{\eta}^{1-\eta} \int_{\delta}^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt[3]{xy}} dy\ dx \\ &= \int_{\eta}^{1-\eta} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \int_{\delta}^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt[3]{y}} dy \\ &= \frac{3}{2}\left((1-\eta)^{2/3} - \eta^{2/3}\right) \cdot \frac{3}{2}\left((1-\delta)^{2/3} - \delta^{2/3}\right).\end{aligned}$$

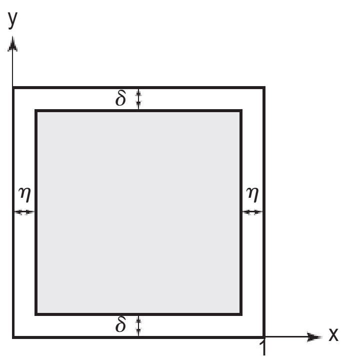

Figura 6.4.3 El cuadrado unidad ligeramente reducido.

Si hacemos $(\eta,\ \delta) \to (0,\ 0)$, vemos que

$$\lim_{(\eta,\delta)\to(0,0)} \iint_{D_{\eta,\delta}} \frac{1}{\sqrt[3]{xy}} dy\ dx = \frac{3}{2}\frac{3}{2} = \frac{9}{4}.$$

▲

Desafortunadamente, no siempre es posible evaluar estos límites de forma tan directa y sencilla. Eso es lo que suele suceder en los ejemplos más interesantes, como ocurría con la superficie de la semiesfera, mencionada anteriormente. ¡Parece que el "mundo real" siempre presentara los mayores retos al matemático! Por ello, vamos a ampliar un poco nuestro análisis teórico.