PROBLEMAS 8.7

En los problemas 1 al 13 encuentre la matriz solución principal e^{At} del sistema $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.

1. $A = \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ -36 & -8 \end{pmatrix}$ **2.** $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ **3.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ **6.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **7.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ 24 & -14 \end{pmatrix}$ **9.** $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ **10.** $A = \begin{pmatrix} -35 & -8 & 36 \\ 0 & -4 & 0 \\ 28 & 8 & -28 \end{pmatrix}$

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **12.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ **13.** $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{18}{5} & -\frac{3}{5} \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

14. En el ejemplo 8.7.3 demuestre que si el vector inicial $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$ donde a es una constante, entonces ambas poblaciones crecen a una tasa proporcional a e^t.

15. En el ejemplo 8.7.3 demuestre que si $x_2(0) > 2x_1(0)$, entonces la primera población quedará eliminada.

16. En el ejemplo 8.7.4 demuestre que la primera población se extinguirá en α años, donde $\alpha = \dfrac{x_1(0)}{x_1(0) + x_2(0)}$.

17.** En una planta desalinizadora hay dos tanques de agua. Suponga que el tanque 1 contiene 1 000 litros de salmuera que tienen disueltos 1 000 kg de sal y el tanque 2 contiene 100 litros de agua pura. Suponga que fluye agua al tanque 1 a una tasa de 20 litros por minuto y la mezcla fluye del tanque 1 al tanque 2 a una tasa de 30 litros por minuto. Del tanque 2 se bombean 10 litros de regreso al 1 (estableciendo **retroalimentación**) mientras que 20 litros se desperdician. Encuentre la cantidad de sal en ambos tanques en el tiempo t. [Sugerencia:*** Escriba la información como un sistema de 2×2 y sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ la cantidad de sal en cada tanque.]

18. Una comunidad de n individuos está expuesta a una enfermedad infecciosa.* En el tiempo t, la comunidad se divide en grupos: el grupo 1 con población $x_1(t)$ es el grupo susceptible; el grupo 2 con una población de $x_2(t)$ es el grupo de individuos infectados en circulación, y el grupo 3, con población de $x_3(t)$, consiste en aquellos que están aislados, muertos o inmunes. Es razonable suponer que inicialmente $x_2(t)$ y $x_3(t)$ son pequeños en comparación con $x_1(t)$. Sean α y β constantes positivas; α denota la tasa a la que los individuos susceptibles se infectan y β la tasa a la que los individuos infectados pasan al grupo 3. Un buen modelo para la dispersión de la enfermedad está dado por el sistema

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -\alpha x_1(0)x_2 \\ x_1'(t) &= -\alpha x_1(0)\, x_2 - \beta x_2 \\ x_1'(t) &= -\beta x_2 \end{aligned}$$

* Un análisis de este modelo se puede encontrar en N. Bailey, "The Total Size of a General Stochastic Epidemic", *Biometrika* 40 (1953):177-185.