$$T'(\Delta u\,\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ 0 \end{bmatrix} = \Delta u \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \Delta u\,\mathbf{T}_u$$

y

$$T'(\Delta v\,\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta v \end{bmatrix} = \Delta v \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \Delta v\,\mathbf{T}_v,$$

donde

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j}$$

se calculan en (u_0, v_0).

Recuérdese de la Sección 1.3 que el área del paralelogramo con lados iguales a los vectores $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ y $c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$ es igual al valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Por tanto, el área de $T(D^*)$ es aproximadamente igual al *valor absoluto* de

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u\,\Delta v = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Delta u\;\Delta v$$

evaluado en (u_0, v_0).

Este hecho y un razonamiento empleando una partición deben hacer plausible la fórmula (3). De hecho, si particionamos D^* en rectángulos pequeños con lados de longitud Δu y Δv, las imágenes de estos rectángulos se aproximan a paralelogramos con lados de longitud $\mathbf{T}_u\,\Delta u$ y $\mathbf{T}_v\,\Delta v$ y, por tanto, con área $|\partial(x,y)/\partial(u,v)|\,\Delta u\,\Delta v$. Así, el área de D^* es aproximadamente $\sum \Delta u\,\Delta v$, donde la suma se extiende a todos los rectángulos R que están dentro de D^* (véase la Figura 6.2.3). Por tanto, el área de $T(D^*)$ es aproximadamente la suma $\sum |\partial(x,y)/\partial(u,v)|\Delta u\,\Delta v$. En el límite, esta suma será

$$\iint_{D^*} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,du\,dv.$$

Vamos a hacer otro razonamiento informal para el caso especial (4) de la fórmula (3); es decir, el caso de las coordenadas polares. Consideremos una región D en el plano xy y una malla correspondiente a una partición de las variables r y θ (Figura 6.2.4). El área de la región sombreada es aproximadamente $(\Delta r)(r_{jk}\,\Delta\theta)$, porque la longitud del arco de una circunferencia de radio r y ángulo ϕ e s $r\phi$. El área total es entonces el límite de $\sum r_{jk}\,\Delta r\Delta\theta$; es decir, $\iint_{D^*} r\,dr\,d\theta$. La idea clave es por tanto que el