i) Genere tres vectores aleatorios $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ en $\mathbb{R}^5$ utilizando MATLAB (primero verifique que sean linealmente independientes).

ii) En $\mathbb{R}^4$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) (*Lápiz y papel*) Explique por qué este procedimiento siempre dará una base para $\mathbb{R}^n$ que contiene el conjunto original de vectores linealmente independientes.

11. El comando de MATLAB `orth(A)` `(doc orth)` producirá una base para la imagen (espacio de las columnas) de la matriz A. (Produce una base ortogonal.) Para cada matriz del problema 7 de esta sección de MATLAB, utilice `orth(A)` para encontrar una base para el espacio de las columnas de A. Verifique que esta base contiene el mismo número de vectores que la base encontrada en el problema 7 y demuestre que todos los vectores de la base encontrada utilizando `orth` son una combinación lineal de la base encontrada en el problema 7. Demuestre, además, que los vectores de la base del problema 7 son una combinación lineal de la base encontrada con `orth`.

12. Encuentre una base para el espacio generado por los siguientes conjuntos:

a) En $\mathbb{P}_3$: $\{-x^3 + 4x + 3, -x^3 - 1, x^2 - 2x, 3x^2 + x + 4\}$ [vea el problema 5.3.9 de MATLAB].

b) En $\mathbb{M}_{22}$: $\left\{ \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -18 & -18 \\ 29 & -19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \right\}$ [vea el problema 5.3.10 de MATLAB].

13. ***a)*** Elija un valor para $n \geq 4$ y genere una matriz aleatoria A de $n \times n$ usando MATLAB. Encuentre `rref(A)` y `rank(A)` (el comando `rank(A)` `(doc rank)` encuentra al rango de A). Verifique que A es invertible.

b) Haga `B = A` y cambie una columna de B para que sea una combinación lineal de las columnas anteriores de B. Encuentre `rref(B)` y `rank(B)`. Verifique que B no es invertible.

c) Sea B la matriz del inciso *b*) después del cambio y cambie otra columna de B para que sea una combinación lineal de las columnas anteriores de B. Encuentre `rref(B)` y `rank(B)`. Verifique que B no es invertible.

d) Repita para otras cuatro matrices A (use diferentes valores de n).

e) Con base en la evidencia reunida, obtenga una conclusión sobre la relación entre `rank(A)` y el número de pivotes en `rref(A)`.

f) Dé una conclusión sobre la relación entre `rank(A)`, el tamaño de A y la invertibilidad de A.

g) Forme una matriz de 5×5 con rango 2 y una matriz de 6×6 con rango 4.

14. ***a)*** Genere tres matrices aleatorias reales de $n \times m$ de tamaños distintos, con m diferente de n. Encuentre `rank(A)` y `rank(A')`.

b) Escoja un valor de n y genere tres matrices reales de $n \times n$, con diferente rango (vea el problema 13 de esta sección de MATLAB). Encuentre `rank(A)` y `rank(A')`. Repita para otro valor de n.

c) Describa la relación entre `rank(A)` y `rank(A')`.

d) Describa la relación entre este problema y el problema 8 de esta sección.

15. Considere el sistema de ecuaciones de los problemas 1 a 3 de MATLAB 1.3. Para dos de los sistemas de cada problema, encuentre el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz aumentada. Formule una conclusión relacionando estos rangos y el hecho de que el sistema tenga o