¿Es cierto que

$$\iint_D f(x)g(y)\ dx\ dy = \left(\int_a^b f(x)\ dx\right)\left(\int_{\phi_1(a)}^{\phi_2(b)} g(y)\ dy\right)$$

para regiones y-simples?

19. Sea D una región formada por el conjunto de puntos (x, y) tales que $-\phi(x) \leq y \leq \phi(x)$ y $a \leq x \leq b$, donde ϕ es una función continua no negativa sobre el intervalo $[a, b]$. Sea $f(x, y)$ una función sobre D tal que $f(x, y) = -f(x, -y)$ para todo $(x, y) \in D$. Demostrar que $\iint_D f(x, y)\, dA = 0$.

20. Utilizando los métodos vistos en esta sección demostrar que el área del paralelogramo D determinado por los dos vectores planos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$, donde $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$.

21. Describir el área $A(D)$ de una región como límite de áreas de rectángulos inscritos, como en el Ejemplo 3.

5.4 Cambio del orden de integración

Supongamos que D es una región simple —es decir, es tanto una región x-simple como y-simple. Por tanto, podemos expresarla como el conjunto de puntos (x, y) tales que

$$a \leq x \leq b, \qquad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x),$$

y también como el conjunto de puntos (x, y) tales que

$$c \leq y \leq d, \qquad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y).$$

Así, tenemos las fórmulas

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Si se nos requiere calcular una de las integrales iteradas anteriores, podemos hacerlo calculando la otra integral iterada; esta técnica se denomina *cambio del orden de integración*. Puede resultar útil realizar tal cambio al evaluar integrales iteradas, porque una de ellas puede ser más difícil de calcular que la otra.

Ejemplo 1 Cambiando el orden de integración, calcular

$$\int_0^a \int_0^{(a^2-x^2)^{1/2}} (a^2 - y^2)^{1/2}\, dy\, dx.$$

Solución Obsérvese que x varía entre 0 y a, y para cada x fijo, tenemos $0 \leq y \leq (a^2 - x^2)^{1/2}$. Por tanto, la integral iterada es equivalente a la integral doble

$$\iint_D (a^2 - y^2)^{1/2}\, dy\, dx,$$