Teoremas de geometría con métodos vectoriales

Muchos de los teoremas de la geometría plana se pueden demostrar empleando vectores. He aquí un ejemplo.

Ejemplo 10 Utilizar vectores para demostrar que cada diagonal de un paralelogramo corta a la otra en su punto medio.

Solución Sea OPRQ el paralelogramo con dos lados adyacentes representados por los vectores $\mathbf{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ y $\mathbf{b} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$. Sea M el punto medio de la diagonal OR y sea N el punto medio de la otra diagonal, PQ. (Figura 1.1.19.)

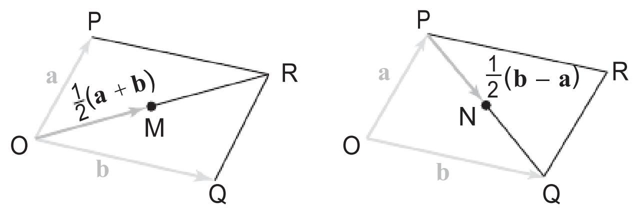

Figura 1.1.19 Si los puntos medios M y N coinciden, entonces las diagonales OR y PQ se cortan entre sí en su punto medio.

Obsérvese que $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$ por la regla del paralelogramo para la suma de vectores, de modo que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. Por otro lado,

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mathbf{b}-\mathbf{a}, \qquad \text{luego} \qquad \overrightarrow{\mathrm{PN}} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a}),$$

y, por tanto,

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PN}} = \mathbf{a} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}).$$

Puesto que $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ son vectores iguales, los puntos M y N coinciden, por lo que las diagonales se cortan en sus puntos medios. ▲

Ecuaciones de rectas

Los planos y rectas son objetos geométricos que se pueden representar mediante ecuaciones. En la Sección 1.3 estudiaremos las ecuaciones que representan planos. Sin embargo, utilizando la interpretación geométrica de la suma de vectores y la multiplicación por un escalar, ahora vamos a definir la *ecuación de una línea l que pasa por el extremo del vector* $\mathbf{a}$ y *tiene la dirección del vector* $\mathbf{v}$ (véase la Figura 1.1.20); es decir, la recta l es paralela al vector $\mathbf{v}$.

Según t recorre el conjunto de los números reales, los puntos de la forma $t\mathbf{v}$ son todos los múltiplos escalares del vector $\mathbf{v}$ y por tanto recorre los puntos de la recta *que pasa por el origen* en la dirección de $\mathbf{v}$. Como cada punto de l es el extremo de la diagonal de un paralelogramo con lados $\mathbf{a}$ y $t\mathbf{v}$ para algún valor real de t, comprobamos que todos los puntos de l son de la forma $\mathbf{a}+t\mathbf{v}$. Por tanto, la recta l se puede expresar mediante la ecuación $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a}+t\mathbf{v}$. En este caso, decimos que l está