Teorema 7.2.2

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Sean $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ vectores en W. Suponga que T_1 y T_2 son dos transformaciones lineales de V en W tales que $T_1\mathbf{v}_i = T_2\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces para cualquier vector $\mathbf{v} \in V$, $T_1\mathbf{v} = T_2\mathbf{v}$; es decir, $T_1 = T_2$.

Demostración

Como B es una base para V, existe un conjunto único de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$. Entonces, del inciso iii) del teorema 7.2.1,

$$\begin{aligned} T_1\mathbf{v} = T_1(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) &= \alpha_1 T_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T_1\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n T_n\mathbf{v}_n \\ &= \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{w}_n \end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned} T_2\mathbf{v} = T_2(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) &= \alpha_1 T_2\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n T_n\mathbf{v}_n \\ &= \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{w}_n \end{aligned}$$

Por tanto, $T_1\mathbf{v} = T_2\mathbf{v}$.

El teorema 7.2.1 indica que si $T: V \to W$ y V tiene dimensión finita, entonces sólo es necesario conocer el efecto que tiene T sobre los vectores de la base en V. Esto es, si se conoce la imagen de cada vector básico, se puede determinar la imagen de cualquier vector en V. Esto determina T por completo. Para ver esto, sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ una base en V y sea $\mathbf{v}$ otro vector en V. Entonces, igual que en la prueba del teorema 7.2.2,

$$T\mathbf{v} = \alpha_1 T\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n T\mathbf{v}_n$$

Así, se puede calcular $T\mathbf{v}$ para cualquier vector $\mathbf{v} \in V$ si se conocen $T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, \ldots, T\mathbf{v}_n$.

EJEMPLO 7.2.1 **Si se conoce el efecto de una transformación lineal sobre los vectores de la base, se conoce el efecto sobre cualquier otro vector**

Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ y suponga que $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$. Calcule $T\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN ► Se tiene $\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Entonces

$$T\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix} = 3T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 4T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 5T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$