En coordenadas esféricas, W está definida por las desigualdades $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$, de modo que

$$-V(0,0,R) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) + (\rho \cos \phi - R)^2}}.$$

Sustituyendo $\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta$ por 1, de forma que el integrando ya no dependa de θ, podemos integrar en θ y obtener

$$\begin{aligned} -V(0,0,R) &= 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_0^{\pi} \frac{\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi + (\rho \cos \phi - R)^2}} \\ &= 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 \left(\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \phi \, d\phi}{\sqrt{\rho^2 - 2R\rho \cos \phi + R^2}} \right) d\rho. \end{aligned}$$

La integral interior en ϕ puede evaluarse por medio del cambio $u = -2R\rho \cos \phi$. Obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2R\rho} \int_{-2R\rho}^{2R\rho} (\rho^2 + u + R^2)^{-1/2} \, du &= \frac{2}{2R\rho} (\rho^2 + u + R^2)^{1/2} \Big|_{-2R\rho}^{2R\rho} \\ &= \frac{1}{R\rho} \left[(\rho^2 + 2R\rho + R^2)^{1/2} - (\rho^2 - 2R\rho + R^2)^{1/2} \right] \\ &= \frac{1}{R\rho} \left\{ [(\rho + R)^2]^{1/2} - [(\rho - R)^2]^{1/2} \right\} \\ &= \frac{1}{R\rho} (\rho + R - |\rho - R|). \end{aligned}$$

La expresión $\rho + R$ siempre es positiva, pero $\rho - R$ puede no serlo, por lo que debemos mantener el signo de valor absoluto. Sustituyendo en la fórmula de V, obtenemos

$$-V(0,0,R) = 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho^2}{R\rho} (\rho + R - |\rho - R|) \, d\rho = \frac{2\pi}{R} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho (\rho + R - |\rho - R|) \, d\rho.$$

Consideramos para R dos posibilidades, que corresponden al potencial gravitatorio de objetos *en el exterior* o *en el interior* de la bola hueca W.

Caso 1. Si $R \geq \rho_2$ [es decir, si (x_1, y_1, z_1) está fuera de W], entonces $|\rho - R| = R - \rho$ para todo ρ en el intervalo $[\rho_1, \rho_2]$, de forma que

$$-V(0,0,R) = \frac{2\pi}{R} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho[\rho + R - (R - \rho)] \, d\rho = \frac{4\pi}{R} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 \, d\rho = \frac{1}{R} \frac{4\pi}{3} (\rho_2^3 - \rho_1^3).$$

El factor $(4\pi/3)(\rho_2^3 - \rho_1^3)$ es igual al volumen de W. Teniendo ahora en cuenta las constantes G, m y la densidad de masa, llegamos a que *el potencial gravitatorio* es $-GmM/R$, *donde M es la masa de W. Por tanto, V es exactamente igual a lo que sería si toda la masa de W estuviera concentrada en el punto central.*