48. Si $B = CAD$, donde C y D son invertibles, demuestre que $\rho(A) = \rho(B)$.

49. Sea A una matriz de $m \times n$. Suponga que para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ existe una $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ al que $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Demuestre que $\rho(A) = m$.

50. Si A es una matriz de $n \times n$, demuestre que $\rho(A) < n$ si y sólo si existe un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

51. Pruebe que el rango de una matriz es igual al número de pivotes en su forma escalonada por renglones. [***Sugerencia:*** Demuestre que si la forma escalonada por renglones tiene k pivotes, entonces dicha forma tiene exactamente k renglones linealmente independientes.]

EJERCICIOS CON MATLAB 5.7

1. Para cada matriz dada:

a) Encuentre una base para el espacio nulo siguiendo el ejemplo 5.7.7. Esto incluye resolver el sistema homogéneo de ecuaciones adecuado.

b) Verifique que el conjunto de vectores obtenido para cada problema es un conjunto independiente.

c) (*Lápiz y papel*) Si el conjunto de vectores ha de ser una base para el espacio nulo, también debe demostrarse que cada vector en el espacio nulo se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de la base. Demuestre que cada vector en el espacio nulo, es decir, cada solución al sistema homogéneo resuelto en el inciso *a*), se puede escribir como una combinación lineal de los vectores encontrados en *a*).

d) Para cada problema, encuentre las dimensiones del espacio nulo. Dé una explicación. ¿Cómo se relaciona la dimensión con el número arbitrario de variables que surgen en la solución del sistema homogéneo resuelto en *a*)?

i)-vi) Problemas 9, 10 y 13 a 17 de la sección 5.7.

vii) $\begin{pmatrix} -6 & -2 & -18 & -2 & -10 \\ -9 & 0 & -18 & 4 & -5 \\ 4 & 7 & 29 & 2 & 13 \end{pmatrix}$

2. *a*) **i)** Para el problema 17 de esta sección, encuentre la base para el espacio nulo siguiendo el ejemplo 5.7.7.

ii) Sea `R = rref(A)`. Verifique que la base consiste en el único vector `B = [-R(1, 4);-R (2, 4);-R(3, 4);1]`.

iii) Verifique que `A*B = 0`. ¿Por qué esperaría esto?

b) **i)** Para la matriz $A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -18 & -2 & -10 \\ -9 & 0 & -18 & 4 & -5 \\ 4 & 7 & 29 & 2 & 13 \end{pmatrix}$ encuentre la base para el espacio nulo.

ii) Sea `R = rref(A)` y sea

`B = [[-R(1,3);-R(2,3);1;0;0] [-R(1,5);-R(2,5);0;-R(3,5);1]]`

Verifique que las columnas de B sean los vectores de la base que encontró en el inciso *b*) i).

iii) Verifique que `A*B = 0` y explique por qué debe ser así.