iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad, I_n, de $n \times n$.

v) A se puede expresar como el producto de matrices elementales.

vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii) Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.

viii) $\det A \neq 0$.

ix) $\nu(A) = 0$.

x) $\rho(A) = n$.

xi) La transformación lineal T de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ definida por $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ es un isomorfismo.

- Sea $T: V \to W$ un isomorfismo:

i) Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ genera a V, entonces $T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, \ldots, T\mathbf{v}_n$ genera a W.

ii) Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes en V, entonces $T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, \ldots, T\mathbf{v}_n$ son linealmente independentes en W.

iii) Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base en V, entonces $\{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, \ldots, T\mathbf{v}_n\}$ es una base en W.

iv) Si V tiene dimensión finita, entonces W tiene dimensión finita y $\dim V = \dim W$.

AUTOEVALUACIÓN 7.4

Indique si los enunciados siguientes son verdaderos o falsos.

I) Una transformación lineal de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $n \neq m$ no puede ser 1-1 y sobre a la vez.

II) Si $\dim V = 5$ y $\dim W = 7$, es posible encontrar un isomorfismo T de V en W.

III) Si T es 1-1, entonces nu $T = \{0\}$.

IV) Si T es un isomorfismo de un espacio vectorial V en $\mathbb{R}^6$, entonces $\rho(T) = 6$.

V) Si A_T es una matriz de transformación de un isomorfismo de $\mathbb{R}^6$ en $\mathbb{R}^6$, entonces $\det A_T \neq 0$.

Respuestas a la autoevaluación

I) V **II)** F **III)** V **IV)** V **V)** V

PROBLEMAS 7.4

1. Demuestre que $T: \mathbb{M}_{nn} \to \mathbb{M}_{nn}$ definida por $TA = A^{\top}$ es un isomorfismo.

2. Demuestre que $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo si y sólo si A_T es invertible.

***3.** Sean V y W dos espacios vectoriales reales de dimensión n y sean B_1 y B_2 dos bases para V y W, respectivamente. Sea A_T la matriz de transformación relativa a las bases B_1 y B_2. Demuestre que $T: V \to W$ es un isomorfismo si y sólo si $\det A_T \neq 0$.

4. Encuentre un isomorfismo entre D_n, las matrices diagonales de $n \times n$ con elementos reales, y $\mathbb{R}^n$. [*Sugerencia*: Analice primero el caso $n = 2$.]