$Q^{\mathsf{T}}AQ - \lambda_1 I$ es el vector cero, se tiene que $Q^{\mathsf{T}}AQ - 2_1 I$ contiene a lo más $n - 2$ columnas linealmente independientes. En otras palabras, $\rho(Q^{\mathsf{T}}AQ - \lambda_1 I) \leq n - 2$. Pero $Q^{\mathsf{T}}AQ - \lambda_1 I$ y $A - \lambda_1 I$ son semejantes; así, del problema 8.3.23, $\rho(A - \lambda_1 I) \leq n - 2$. Por lo tanto, $\nu(A - \lambda_1 I) \geq 2$, lo que significa que $E_\lambda =$ núcleo de $(A - \lambda_1 I)$ contiene al menos dos vectores característicos linealmente independientes. Si $k = 2$, la demostración termina. Si $k > 2$, entonces se toman dos vectores ortonormales $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ en E_λ y se expanden a una nueva base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ para $\mathbb{R}^n$ y se define $P = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. Entonces, justo como se hizo, se demuestra que

$$P^{\mathsf{T}}AP - \lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} - \lambda & \beta_{34} & \cdots & \beta_{3n} \\ 0 & 0 & \beta_{43} & \beta_{44} - \lambda & \cdots & \beta_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \beta_{n3} & \beta_{n4} & \cdots & \beta_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Como $k > 2$, queda demostrado, como antes, que el determinante de la matriz entre corchetes es cero cuando $\lambda = \lambda_1$, lo cual demuestra que $\rho(P^{\mathsf{T}}AP - \lambda_1 I) \leq n - 3$ de manera que $\nu(P^{\mathsf{T}}AP - \lambda_1 I) = \nu(A - \lambda_1 I) \geq 3$. Entonces dim $E_{\lambda_1} \geq 3$, y así sucesivamente. Es evidente que se puede continuar este proceso para demostrar que dim $E_{\lambda_1} = k$. Por último, en cada E_{λ_1} se puede encontrar una base ortonormal. Esto completa la prueba.

RESUMEN 8.4

- Los valores característicos de una matriz simétrica real son reales.
- Los vectores característicos de una matriz simétrica real correspondientes a valores característicos diferentes son ortogonales.
- Una matriz simétrica real de $n \times n$ tiene vectores característicos reales ortonormales.
- ***Matriz ortogonalmente diagonalizable***

  Se dice que una matriz A de $n \times n$ es **diagonalizable ortogonalmente** si existe una matriz ortogonal Q tal que

  $$Q^{\mathsf{T}}AQ = D$$

  donde $D = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores característicos de A.
- ***Procedimiento para encontrar una matriz diagonalizante Q:***

  i) Encuentre una base para cada espacio característico de A.

  ii) Encuentre una base ortonormal para cada espacio característico de A usando el proceso de Gram-Schmidt.

  iii) Escriba Q como la matriz cuyas columnas son los vectores característicos ortonormales obtenidos en el paso ii).
- La **transpuesta conjugada** de una matriz de $m \times n$, $A = (a_{ij})$, denotada por A^*, es la matriz de $n \times m$ cuya componente ij es $\overline{a}_{ij}$.
- Una matriz compleja A de $n \times n$ es **hermitiana** si $A^* = A$.
- Una matriz compleja U de $n \times n$ es **unitaria** si $U^* = U^{-1}$.