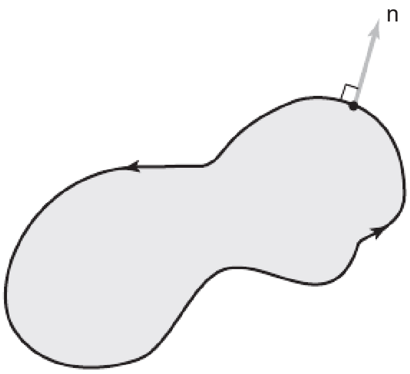

Figura 8.1.9 $\mathbf{n}$ es la normal unitaria exterior a ∂D.

Demostración Recordemos que $\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t))$ es tangente a ∂D, y observemos que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}' = 0$. Por tanto, $\mathbf{n}$ es normal a la frontera. El signo de $\mathbf{n}$ se elige de manera que corresponda a la dirección *hacia el exterior* de la región (en lugar de hacia el interior). Por la definición de integral de línea (véase la Sección 7.2),

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds &= \int_a^b \frac{P(x(t), y(t))y'(t) - Q(x(t), y(t))x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\; dt \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t))y'(t) - Q(x(t), y(t))x'(t)]\; dt \\ &= \int_{\partial D} P\, dy - Q\, dx.\end{aligned}$$

Por el teorema de Green, esto es igual a

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA.$$

■

Ejemplo 4 Sea $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^5\mathbf{j}$. Calcular la integral de la componente normal del campo $\mathbf{F}$ a lo largo del cuadrado unidad.

Solución Esto puede resolverse usando el teorema de la divergencia. En efecto,

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA.$$

Pero $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, y por tanto la integral es nula. ▲

Ejercicios

1. Sea D el triángulo en el plano xy con vértices en $(-1, 1)$, $(1, 0)$ y $(3, 2)$. Describir la frontera ∂D como una curva suave a trozos, orientada en sentido antihorario.

2. Sea D la región del plano xy comprendida entre las curvas $y = x^2 + 4$ and $y = 2x^2$. Describir la frontera ∂D como una curva suave a trozos, orientada en sentido antihorario.

En los Ejercicios 3 a 6, verificar el teorema de Green para la región D indicada, con frontera ∂D, y para las funciones P y Q.