Ejemplo 11 Un pájaro vuela en línea recta con un vector velocidad $10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (en kilómetros por hora). Supongamos que (x, y) son sus coordenadas en el suelo y z es su altura.

(a) Si el pájaro se encuentra en la posición $(1, 2, 3)$ en un determinado instante, ¿cuál será su posición una hora más tarde? ¿Y un minuto más tarde?

(b) ¿Cuántos segundos tarda el pájaro en ascender 10 metros?

Solución (a) El vector desplazamiento desde (1, 2, 3) después de una hora está dado por $10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$, por lo que la nueva posición es $(1, 2, 3) + (10, 6, 1) = (11, 8, 4)$. Después de un minuto, el vector desplazamiento desde $(1, 2, 3)$ es $\frac{1}{60}(10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \frac{1}{6}\mathbf{i} + \frac{1}{10}\mathbf{j} + \frac{1}{60}\mathbf{k}$, y así la nueva posición es $(1, 2, 3) + (\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{60}) = (\frac{7}{6}, \frac{21}{10}, \frac{181}{60})$.

(b) Después de t segundos ($= t/3600$ horas), el vector desplazamiento desde (1, 2, 3) es $(t/3600)\ (10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}) = (t/360)\mathbf{i} + (t/600)\mathbf{j} + (t/3600)\mathbf{k}$. El incremento en altura es la componente z, es decir, $t/3600$. Esto será igual a 10 m ($= \frac{1}{100}$ km) cuando $t/3600 = \frac{1}{100}$, es decir, cuando $t = 36$ s. ▲

Ejemplo 12 En física, las fuerzas tienen tamaño (módulo), dirección y sentido, y se pueden por tanto representar mediante vectores. Si varias fuerzas actúan a la vez sobre un objeto, la fuerza resultante se representa mediante la suma de los vectores fuerza individuales. Supongamos que las fuerzas $\mathbf{i} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ están actuando sobre un cuerpo. ¿Qué tercera fuerza $\mathbf{F}$ tenemos que aplicar para contrarrestar a las otras dos, es decir, para conseguir que la fuerza total sea igual a cero?

Solución La fuerza $\mathbf{F}$ se debe elegir de modo que $(\mathbf{i} + \mathbf{k}) + (\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \mathbf{F} = \mathbf{0}$; es decir, $\mathbf{F} = -(\mathbf{i} + \mathbf{k}) - (\mathbf{j} + \mathbf{k}) = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. (Recordemos que $\mathbf{0}$ es el *vector cero*, el vector cuyas componentes son todas cero.) ▲

Ejercicios

1. Calcular $(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

2. Calcular $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, donde $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.

3. Determinar el ángulo entre $7\mathbf{j} + 19\mathbf{k}$ y $-2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ (aproximado al grado más cercano).

4. Calcular $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} = \sqrt{3}\mathbf{i} - 315\mathbf{j} + 22\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$.

5. ¿Es $\|8\mathbf{i} - 12\mathbf{k}\| \cdot \|6\mathbf{j} + \mathbf{k}\| - |(8\mathbf{i} - 12\mathbf{k}) \cdot (6\mathbf{j} + \mathbf{k})|$ igual a cero? Explicar la respuesta.

En los Ejercicios 6 a 11, calcular $\|\mathbf{u}\|, \|\mathbf{v}\|$ *y* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ *para los vectores de* $\mathbb{R}^3$ *dados.*

6. $\mathbf{u} = 15\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \mathbf{v} = \pi\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

7. $\mathbf{u} = 2\mathbf{j} - \mathbf{i}, \mathbf{v} = -\mathbf{j} + \mathbf{i}$

8. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

9. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

10. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{j}$

11. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$