Ejemplo 2 Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ y sea S la circunferencia de radio unidad con centro en el origen. Determinar los extremos de $f|S$.

Solución El conjunto S es la curva de nivel de g con valor 1, donde $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Como ya hemos estudiado ambas funciones en los ejemplos anteriores, conocemos sus curvas de nivel, las cuales se muestran en la Figura 3.4.4. En dos dimensiones, la condición de que $\nabla f = \lambda \nabla g$ en $\mathbf{x}_0$ —es decir, que ∇f y ∇g sean paralelos en $\mathbf{x}_0$ —es lo mismo que pedir que las curvas de nivel sean tangentes en $\mathbf{x}_0$ (¿por qué?). Por tanto, los puntos de extremo de $f|S$ son $(0, \pm 1)$ y $(\pm 1, 0)$. Evaluando f, encontramos que $(0, \pm 1)$ son puntos de mínimo y $(\pm 1, 0)$ son puntos de máximo.

Resolvemos este problema también analíticamente mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. Evidentemente,

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, -2y) \quad \text{y} \quad \nabla g(x, y) = (2x, 2y).$$

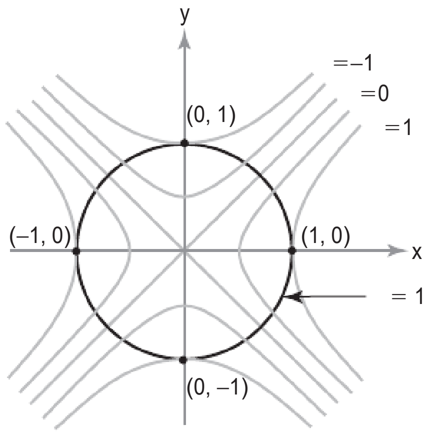

Figura 3.4.4 Geometría asociada con el problema de hallar los puntos de extremo de $x^2 - y^2$ on $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Obsérvese que $\nabla g(x, y) \neq \mathbf{0}$ if $x^2 + y^2 = 1$. Por tanto, de acuerdo con el teorema de los multiplicadores de Lagrange, tenemos que determinar un λ tal que

$$(2x, -2y) = \lambda(2x, 2y) \quad \text{y} \quad (x, y) \in S, \quad \text{es decir,} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Estas condiciones nos llevan a tres ecuaciones que podemos resolver para las tres incógnitas x, y y λ. A partir de $2x = \lambda 2x$, concluimos que bien $x = 0$ o $\lambda = 1$. Si $x = 0$, entonces $y = \pm 1$ y $-2y = \lambda 2y$ implica $\lambda = -1$. Si $\lambda = 1$, entonces $y = 0$ y $x = \pm 1$. Así, obtenemos los puntos $(0, \pm 1)$ y $(\pm 1, 0)$, como antes. Como ya hemos mencionado, este método solo localiza los puntos de extremo potenciales; si son puntos de máximo, de mínimo, o nada debe determinarse por otros medios, como, por ejemplo, argumentos geométricos o el criterio de la derivada segunda que se proporciona más adelante.[9] ▲

[9] En estos ejemplos, $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ en la superficie S, como exige el teorema de los multiplicadores de Lagrange. Si $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ fuera igual a cero para algún $\mathbf{x}_0$ en S, entonces habría que incluirlo entre los posibles puntos de extremo.