17. Mínimo local en $(1, 1)$.

19. Máximo local en (0, 2), mínimo local en (1, 3), punto de silla en (0, 3).

21. Mínimo en $(0, 0)$ y máximo en $(0, \pm 1)$ [y puntos de silla en $(\pm 1, 0)$].

23. (a) $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ se anulan en (0, 0).

(b) Demostrar que $f(g(t)) = 0$ en $t = 0$ y que $f(g(t)) \geq 0$ si $|t| < |b|/3a^2$.

(c) f es negativa en la parábola $y = 2x^2$.

25. Los puntos críticos están en la recta $y = x$ y son puntos de mínimo local (véase el Ejercicio 1).

27. Punto de silla.

29. Minimizar $S = 2xy + 2yz + 2xz$ con $z = V/xy$, donde V el volumen constante.

31. $40, 40, 40$

33. (a) $\nabla f(0, 0) = (6x^5 + 2x, 6y^5)|_{(0,0)} = (0, 0)$, luego f tiene un punto crítico en (0,0). La matriz hessiana de f en (0,0) es

$$\begin{bmatrix} 30x^4 + 2 & 0 \\ 0 & 30y \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que tiene determinante igual a cero. Lo mismo para g y h.

(b) f tiene un punto de mínimo local en (0,0) puesto que $f(0, 0) = 0$ y $f(x, y) > 0$ para todos los demás (x, y). g tiene un máximo local en (0,0) ya que $g(0, 0) = 0$ y $g(x, y) < 0$ para todos los demás (x, y). h tiene un punto de silla en (0,0) dado que $h(0, y) \geq 0$, pero $h(x, 0) < 0$ para x cerca de cero. Esto demuestra que existen puntos arbitrariamente próximos al origen en los que h toma tanto valores positivos como negativos.

35. El único punto crítico es $(0, 0, 0)$. Es un punto de mínimo porque

$$f(x, y, z) \geq \frac{x^2 + y^2}{2} + z^2 + xy = \frac{1}{2}(x+y)^2 + z^2 \geq 0.$$

37. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ es un punto de silla; $\left(5, \frac{27}{2}\right)$ es un punto de mínimo local.

39. $\frac{3}{2}$ es el máximo absoluto y 0 es el mínimo absoluto.

41. -2 es el mínimo absoluto; 2 es el máximo absoluto.

43. Máximo absoluto de 4 en $(-1, 2)$, mínimo absoluto de 0 en $(-2, 5)$ y $(2, 1)$.

45. $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ es un mínimo local.

47. Si $u_n(x, y) = u(x, y) + (1/n)e^x$, entonces $\nabla^2 u_n = (1/n)e^x > 0$. Así, u_n es estrictamente subarmónica y puede tener su máximo solo en ∂D, por ejemplo, en $\mathbf{p}_n = (x_n, y_n)$. Si $(x_0, y_0) \in D$, comprobamos que esto implica que $u(x_n, y_n) > u(x_0, y_0) - e/n$. Por tanto, tiene que existir un punto $\mathbf{q} = (x_\infty, y_\infty)$ en ∂D tal que arbitrariamente tan cerca de $\mathbf{q}$ como deseemos podamos encontrar un (x_n, y_n) para n grande. Concluir a partir de la continuidad de u que $u(x_\infty, y_\infty) \geq u(x_0, y_0)$.

49. Seguir los métodos indicados en el Ejercicio 47.

51. (a) Si existiera un x_1 con $f(x_1) < f(x_0)$, entonces el máximo de f en el intervalo entre x_0 y x sería otro punto crítico.

(b) Verificar (I) usando el criterio de la segunda derivada; para (II), f tiende a $-\infty$ cuando $y \to \infty$ y $x = -y$.

Sección 3.4

1. (a) Máximo de 3, mínimo de 1.

(b) Máximo de 3, mínimo de 0.

3. Máximo en $\sqrt{\frac{2}{3}}(1, -1, 1)$, mínimo en $\sqrt{\frac{2}{3}}(-1, 1, -1)$.

5. Máximo en $(\sqrt{3}, 0)$, mínimo en $(-\sqrt{3}, 0)$.

7. Máximo en $\left(\frac{9}{\sqrt{70}}, \frac{4}{\sqrt{70}}\right)$, mínimo en $\left(-\frac{9}{\sqrt{70}}, -\frac{4}{\sqrt{70}}\right)$.

9. El valor mínimo de 4 se alcanza en $(0, 2)$. Utilizar una imagen geométrica en lugar de los multiplicadores de Lagrange.

11. $(0, 0, 2)$ es un mínimo de f.

13. $\frac{3}{2}$ es el máximo absoluto y 0 es el mínimo absoluto.

15. (a) Punto de silla en (0,0).