En el transcurso de la demostración del Teorema 3, obtendremos una útil fórmula explícita para el resto, como en el teorema de una única variable.

Demostración del Teorema 3 Sea $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ con $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{h}$ fijos y h lo suficientemente pequeño como para que $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}$ esté en U para todo t perteneciente a [0,1], g es una función C^3 de t. Ahora aplicamos el teorema de Taylor para una sola variable (1) a g, con $k = 2$, para obtener

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{g''(0)}{2!} + R_2,$$

donde

$$R_2 = \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2!}\, g'''(t)\, dt.$$

Por la regla de la cadena,

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i; \qquad g''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j,$$

y

$$g'''(t) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j h_k.$$

Escribiendo $R_2 = R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$, hemos probado por tanto:

$$\left.\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}), \\ \text{donde} \qquad R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j h_k\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

El integrando es una función continua de t y, por tanto, está acotado por una constante positiva C en un pequeño entorno de $\mathbf{x}_0$ (ya que tiene que estar próximo a su valor en $\mathbf{x}_0$). Obsérvese también que $|h_i| \leq \|\mathbf{h}\|$, para $\|\mathbf{h}\|$ pequeño y, por tanto

$$|R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})| \leq \|\mathbf{h}\|^3 C. \tag{4}$$

En particular,

$$\frac{|R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|^2} \leq \|\mathbf{h}\| C \to 0 \quad \text{cuando} \quad \mathbf{h} \to \mathbf{0},$$

como se requería en el teorema.

La demostración del Teorema 2 se sigue de forma análoga de la fórmula de Taylor (1) con $k = 1$. Un argumento similar para R_1 demuestra que $|R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})|/\|\mathbf{h}\| \to 0$ cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, aunque esto también se obtiene directamente de la definición de diferenciabilidad. ■