$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2(x + 2y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 4(x + 2y).$$

Ahora derivamos cada una de estas expresiones con respecto a x e y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 5, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = 5.$$

▲

Ejemplo 2 Hallar las derivadas parciales segundas de $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 y$.

Solución Procedemos como en el Ejemplo 1:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \operatorname{sen}^2 y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos y = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2y;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \operatorname{sen} x \cos 2y;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \cos x \operatorname{sen} 2y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = 2 \cos x \operatorname{sen} y \cos y = \cos x \operatorname{sen} 2y.$$

▲

Ejemplo 3 Sea $f(x, y, z) = e^{xy} + z \cos x$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} - z \operatorname{sen} x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \cos x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x} = -\operatorname{sen} x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} = -\operatorname{sen} x, \qquad \text{etc.}$$

▲

Las derivadas parciales cruzadas son iguales

En todos estos ejemplos observamos que los pares de derivadas parciales cruzadas, como $\partial^2 f/\partial x\, \partial y$ y $\partial^2 f/\partial y\, \partial x$, o $\partial^2 f/\partial z\, \partial x$ y $\partial^2 f/\partial x\, \partial z$, son iguales. Este hecho es fundamental y quizá resulte sorprendente que *esto siempre es así para funciones C^2*. Lo demostramos en el siguiente teorema para funciones $f(x, y)$ de dos variables, aunque la demostración se puede ampliar fácilmente a funciones de n variables.

Teorema 1 Igualdad de las derivadas parciales cruzadas Si $f(x, y)$ es una función de clase C^2 (es dos veces diferenciable con continuidad), entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales; es decir,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}.$$

Demostración Considérese la siguiente expresión (véase la Figura 3.1.1):

$$S(\Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$