las integrales se pueden aproximar mediante las correspondientes sumas de Riemann. La demostración del teorema de Fubini emplea esta idea.

Teorema 3 Teorema de Fubini Sea f una función continua con un dominio rectangular $R = [a, b] \times [c, d]$. Entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R f(x, y)\, dA. \quad (4)$$

Demostración En primer lugar vamos a demostrar que

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

Sea $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ una partición de $[c, d]$ en n partes iguales. Definimos

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Entonces

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y)\, dy.$$

Utilizando la versión integral del teorema del valor medio,[3] para cada x fijo y para cada k, tenemos

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y)\, dy = f(x, Y_k(x))(y_{k+1} - y_k)$$

(véase la Figura 5.2.6), donde el punto $Y_k(x)$ pertenece a $[y_k, y_{k+1}]$ y puede depender de x, k y n.

Por tanto, hemos demostrado que

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x, Y_k(x))(y_{k+1} - y_k). \quad (5)$$

Por la definición de integral de una variable como límite de las sumas de Riemann,

$$\int_a^b F(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j)(x_{j+1} - x_j),$$

[3] Este establece que si $g(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces $\int_a^b g(x)\, dx = g(c)(b-a)$ para algún punto $c \in [a, b]$. El segundo teorema del valor medio, más general, se demostró en la Sección 3.2.