$$\text{Para } W = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 0 \\ 8 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

d) (*Lápiz y papel*) Sea $\overline{V}$ la matriz $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k]$ y sea $\overline{W}$ la matriz $[\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m]$. Sea A la matriz $[\overline{V}\,\overline{W}]$. Suponga que $\mathbf{p}$ es un vector de $(k + m) \times 1$, *en el espacio nulo de A*. Sea $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$, donde $\mathbf{a}$ es de $k \times 1$ y $\mathbf{b}$ es de $m \times 1$.

Demuestre que $\overline{V}\mathbf{a} = -\overline{W}\mathbf{b}$. Haciendo $\mathbf{z} = \overline{V}\mathbf{a}$, explique por qué se puede concluir que $\mathbf{z}$ está en U, la intersección de V y W.

e) (*Lápiz y papel*) Inversamente, suponga que $\mathbf{z}$ está en U, la intersección de V y W.

Explique por qué $\mathbf{z} = \overline{V}\mathbf{x}$ para alguna $\mathbf{x}$ y $\mathbf{z} = \overline{W}\mathbf{y}$ para alguna $\mathbf{y}$. Argumente por qué el vector $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix}$ está en el espacio nulo de A.

f) (*Lápiz y papel*) Explique por qué se puede concluir que U, la intersección, es igual a

$$\left\{ \overline{V}\mathbf{a} \;\middle|\; \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \text{ está en el espacio nulo de } A \right\}$$

Concluya que si $\{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_q\}$ está en la base del espacio nulo de A y cada $\mathbf{s}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{b}_i \end{pmatrix}$ donde $\mathbf{a}_i$ es de $k \times 1$ y $\mathbf{b}_i$ es de $m \times 1$, entonces $\{\overline{V}\mathbf{a}_1, \ldots, \overline{V}\mathbf{a}_q\}$ genera a U.

g) Usando la información del inciso *f*), encuentre una base para $U = V \cap W$ para los pares de bases para V y W dados en el inciso *c*). Para cada par, encuentre la dimensión de U. Verifique algunas respuestas. Verifique que el conjunto de vectores que encontró es linealmente independiente y muestre que una combinación lineal de vectores en el conjunto está en V y en W.

h) Dé una conclusión de su trabajo anterior relacionando las dimensiones de V, W, U y S.

5.8 Fundamentos de la teoría de espacios vectoriales: existencia de una base (opcional)

En esta sección se demuestra uno de los resultados más importantes del álgebra lineal: **todo espacio vectorial tiene una base**. La demostración es más difícil que cualquier otra que hayamos hecho en este libro; incluye conceptos que son parte de los fundamentos de las matemáticas. Se requiere de un esfuerzo para comprender los detalles. Sin embargo, después de hacerlo, podrá tener una apreciación más profunda de lo que constituye una idea matemática esencial.

Comenzaremos por dar algunas definiciones.

Definición 5.8.1

Orden parcial

Sea S un conjunto. Un **orden parcial** de S es una relación, denotada por $\leq$, que está definida para algunos pares ordenados de elementos de S y satisface tres condiciones: