*35. Si $p_1, p_2, \ldots, p_m$ genera $\mathbb{P}_m$, demuestre que $m \geq n + 1$.

36. Demuestre que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\alpha\mathbf{u}$ están en gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. [***Sugerencia:*** Utilizando la definición de espacio generado, escriba $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\alpha\mathbf{u}$ como combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.]

37. Demuestre que el conjunto infinito $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ genera P, el espacio vectorial de polinomios.

38. Sea H un subespacio de V que contiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Demuestre que gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq H$. Es decir, gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es el subespacio *más pequeño* de V que contiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

39. Sean $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que si $\mathbf{v}_2 = c\mathbf{v}_1$, entonces gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una recta que pasa por el origen.

40. En el problema 39 suponga que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ no son paralelos. Demuestre que $H =$ gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es un plano que pasa por el origen. ¿Cuál es la ecuación del plano? [*Sugerencia:*** Si $(x, y, z) \in H$, escriba $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$ y encuentre una condición respecto a x, y y z tal que el sistema de 3×2 resultante tenga una solución.]

41. Pruebe el teorema 5.3.2. [***Sugerencia:*** Si $\mathbf{v} \in V$, escriba $\mathbf{v}$ como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ con el coeficiente de $\mathbf{v}_{n+1}$ igual a cero.]

42. Demuestre que $\mathbb{M}_{22}$ se puede generar con matrices invertibles.

43. Sean $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ dos n-vectores en un espacio vectorial V. Suponga que

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{12}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{u}_n \\
\mathbf{v}_2 &= a_{21}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{u}_n \\
\vdots\ & \quad\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
\mathbf{v}_n &= a_{n1}\mathbf{u}_1 + a_{n2}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{u}_n
\end{aligned}$$

Demuestre que si

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} =$ gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

EJERCICIOS CON MATLAB 5.3

M

1. Visualización de las combinaciones lineales

   a) Vuelva a trabajar con los problemas 2 y 3 de MATLAB 4.1.

   b) (*Use el archivo combo.m*) El archivo *combo.m* ilustra la combinación lineal `a * u1 + b * u2 + c * u3`. A continuación se presenta el código de la función `combo.m`:

```
function combo(x,y,z,a,b,c)
% COMBO funcion que grafica la combinacion lineal
%       w= ax + by + cz
%
%       x: vector de 2x1
%       y: vector de 2x1
```