

Entonces las columnas de A consideradas como vectores son linealmente dependientes si y sólo si el sistema (5.4.8), que se puede escribir como $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$, tiene soluciones no triviales.

$$\text{Aquí } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 5.4.6 Soluciones a un sistema homogéneo escritas como combinaciones lineales de vectores solución linealmente independientes

Considere el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

SOLUCIÓN ► Haciendo una reducción de renglones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

El último sistema es

$$\begin{aligned} x_1 - 9x_3 + 6x_4 &= 0 \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Se ve que este sistema tiene un número infinito de soluciones, que se escriben como una combinación lineal de los vectores columna:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9x_3 - 6x_4 \\ -4x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.4.10)$$

Observe que $\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones linealmente independientes para (5.4.9) porque ningun-

no de los dos es múltiplo del otro (el lector debe verificar que sean soluciones). Como x_3 y x_4 son números reales arbitrarios, se ve de (5.4.10) que el conjunto de soluciones al sistema (5.4.9) es un subespacio de \mathbb{R}^4 generado por estos dos vectores solución linealmente independientes.

Los siguientes dos teoremas se deducen directamente del teorema 5.4.3.