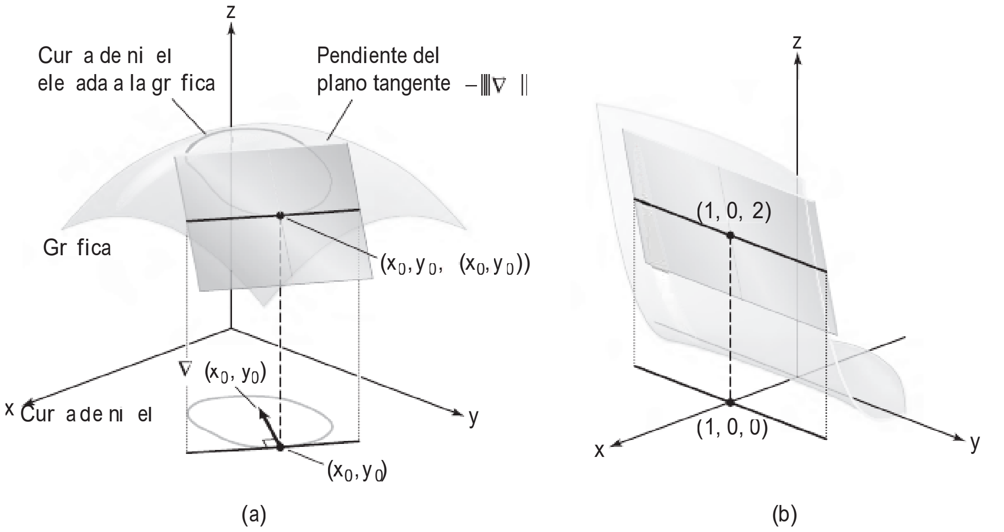

Figura 2.R.1 (a) La relación entre el gradiente de una función y el plano tangente a la gráfica [Ejercicio 23(a)]. (b) Ejemplo específico del plano tangente para el Ejercicio 23(b).

25. ¿En qué dirección es igual a cero la derivada direccional de $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ en (1, 1)?

26. Hallar la derivada direccional de la función dada en el punto dado y en la dirección del vector dado.

(a) $f(x, y, z) = e^x \cos(yz)$, $p_0 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$

(b) $f(x, y, z) = xy+yz+zx$, $p_0 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (10, -1, 2)$

27. Hallar el plano tangente y la recta normal al hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 18$ en $(3, 5, -4)$.

28. Sea $(x(t), y(t))$ una trayectoria en el plano, $0 \leq t \leq 1$ y sea $f(x, y)$ una función de clase C^1 de dos variables. Suponer que $(dx/dt)f_x + (dy/dt)f_y \leq 0$. Demostrar que $f(x(1), y(1)) \leq f(x(0), y(0))$.

29. Un insecto se encuentra en un entorno tóxico. El nivel de toxicidad está dado por $T(x, y) = 2x^2 - 4y^2$. El insecto se encuentra en $(-1, 2)$. ¿En qué dirección debería moverse para reducir la toxicidad lo más rápidamente posible?

30. Determinar la dirección en la que la función $w = x^2 + xy$ crece más rápidamente en el punto $(-1, 1)$. ¿Cuál es la magnitud de ∇w en este punto? Interpretar geométricamente esta magnitud.

31. Sea f una función escalar definida en un conjunto abierto S en $\mathbb{R}^n$. Decimos que f es ***homogénea de grado*** p sobre S si $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x})$ para todo real λ y para todo $\mathbf{x}$ en S para los que $\lambda\mathbf{x} \in S$.

(a) Si una función así es diferenciable en $\mathbf{x}$, demostrar que $\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x})$. Esto se conoce como ***teorema de Euler*** para funciones homogéneas. [SUGERENCIA: para $\mathbf{x}$ fijo, definir $g(\lambda) = f(\lambda\mathbf{x})$ y calcular $g'(1)$.]

(b) Hallar p y comprobar el teorema de Euler para la función $f(x, y, z) = x - 2y - \sqrt{xz}$, en la región en la que $xz > 0$.

32. Si $z = [f(x - y)]/y$ (donde f es diferenciable e $y \neq 0$), demostrar que se cumple la identidad $z + y(\partial z/\partial x) + y(\partial z/\partial y) = 0$.

33. Sea $z = f((x + y)/(x - y))$ donde f es una función de clase C^1, demostrar que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

34. Sea f una función con derivadas parciales $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_i$, donde $i = 1, 2, \ldots, n$, en cada punto $\mathbf{x}$ de un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Si f tiene un máximo local o un mínimo local en el punto $\mathbf{x}_0$ de U, demostrar que $\partial f(\mathbf{x}_0)/\partial x_i = 0$ para cada i.

35. Considérense las funciones definidas en $\mathbb{R}^2$ por las siguientes fórmulas: