$$\xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

De nuevo se puede "ver" de inmediato que la solución es $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

EJEMPLO 1.2.2 Solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: número infinito de soluciones

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 30 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN ► Para resolver este sistema se procede como en el ejemplo 1.2.1, esto es, primero se escribe el sistema como una matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right)$$

Después se obtiene, sucesivamente,

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esto es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - \quad x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Hasta aquí se puede llegar. Se tienen sólo dos ecuaciones para las tres incógnitas x_1, x_2 y x_3, y por lo tanto existe un número infinito de soluciones. Para comprobar esto se elige a x_3 como parámetro y se despejan a x_1 y x_2 en términos de x_3. Entonces $x_2 = 4 - 2x_3$ y $x_1 = 1 + x_3$. Ésta será una solución para cualquier número x_3. Se escribe esta solución en la forma $(1 + x_3, 4 - 2x_3, x_3)$. Por ejemplo, si $x_3 = 0$, se obtiene la solución $(1, 4, 0)$. Para $x_3 = 10$ se obtiene la solución $(11, -16, 10)$, y por ello para cada valor de x_3 habrá una solución distinta.

EJEMPLO 1.2.3 Sistema inconsistente

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 6x_2 + 7x_3 &= 15 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned} \tag{1.2.9}$$