observaciones proporcionan un método para hallar los valores máximo y mínimo absolutos de f en una región D.

Estrategia para hallar los valores máximo y mínimo absolutos en una región con frontera Sea f una función continua de dos variables definida en una región cerrada y acotada D de $\mathbb{R}^2$, que está limitada por una curva cerrada suave. Para hallar el máximo y el mínimo absolutos de f en D:

(I) Localizar todos los puntos críticos de f en U.

(II) Hallar todos los puntos críticos de f considerada como una función definida solo en ∂U.

(III) Calcular el valor de f en todos estos puntos críticos.

(IV) Comparar todos estos valores y seleccionar el más grande y el más pequeño.

Si D es una región limitada por una familia de curvas suaves (como un cuadrado), entonces se sigue un procedimiento similar, pero incluyendo en el paso (III) los puntos en los que se unen las curvas (en el caso del cuadrado, en las esquinas).

El lector ya debería estar familiarizado con todos estos pasos excepto el (II). Una forma de llevar a cabo este paso en el plano es determinando una parametrización suave de ∂U; es decir, hallar una trayectoria $\mathbf{c}\colon I \to \partial U$, donde I es algún intervalo cuyo rango es ∂U. En segundo lugar, consideramos la función de una variable $t \mapsto f(\mathbf{c}(t))$, donde $t \in I$ y localizamos los puntos de máximo y de mínimo $t_0, t_1 \in I$ (¡no olvide comprobar los puntos extremos!). Entonces $\mathbf{c}(t_0), \mathbf{c}(t_1)$ serán *puntos* de máximo y de mínimo para f como función definida en ∂U. Otro método que permite abordar el paso (II) es el método de los multiplicadores de Lagrange, que presentamos en la siguiente sección.

Ejemplo 11 Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en el disco D definido por $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solución

(I) Para hallar los puntos críticos hacemos $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$. Así, $2x-1 = 0$, $2y-1 = 0$ y, por tanto, $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es el único punto crítico en el disco abierto $U = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

(II) La frontera ∂U se puede parametrizar mediante $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Así,

$$f(\mathbf{c}(t)) = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t - \operatorname{sen} t - \cos t + 1 = 2 - \operatorname{sen} t - \cos t = g(t).$$

Para hallar el máximo y el mínimo de f en ∂U, basta con localizar el máximo y el mínimo de g. Ahora bien, $g'(t) = 0$ solo cuando $\operatorname{sen} t = \cos t$; es decir, cuando $t = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$. Por tanto, los candidatos para el máximo y el mínimo de f en ∂U son los puntos $\mathbf{c}(\pi/4), \mathbf{c}(5\pi/4)$ y los extremos $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(2\pi)$.