extremos $x(a)$ y $x(b)$. Por tanto, $I = [x(a), x(b)]$ si $u \mapsto x(u)$ es creciente e $I = [x(b), x(a)]$ si $u \mapsto x(u)$ es decreciente. Teniendo en cuenta estas convenciones, podemos reescribir la Ecuación (5) como sigue

$$\int_{I^*} f(x(u)) \left| \frac{dx}{du} \right| du = \int_I f(x)\, dx.$$

Esta fórmula se generaliza a integrales dobles, como ya se ha visto informalmente en la fórmula (3): I^* se convierte en D^*, I se convierte en D y $|dx/du|$ se reemplaza por $|\partial(x,y)/\partial(u,v)|$. Enunciamos ahora el resultado formalmente (la demostración técnica se omite).

Teorema 2 Cambio de variables: integrales dobles Sean D y D^* regiones elementales en el plano y sea $T\colon D^* \to D$ de clase C^1; supongamos que T es inyectiva en D^*. Supongamos también que $D = T(D^*)$. Entonces para cualquier función integrable $f\colon D \to \mathbb{R}$, tenemos

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv. \qquad (6)$$

Uno de los propósitos del teorema del cambio de variables es proporcionar un método que permita simplificar algunas integrales dobles. Podemos encontrarnos con una integral $\iint_D f\, dA$ para la que el integrando f o la región D es complicado y para los que el cálculo directo es difícil. Por tanto, se elige una aplicación T de modo que la integral sea más fácil de calcular con el nuevo integrando $f \circ T$ y con la nueva región D^* [definida por $T(D^*) = D$]. Lamentablemente, el problema puede complicarse más si T no se elige cuidadosamente.

Ejemplo 3 Sea P el paralelogramo limitado por $y = 2x, y = 2x - 2, y = x$ e $y = x+1$ (véase la Figura 6.2.6). Calcular $\iint_P xy\, dx\, dy$ haciendo el cambio de variables

$$x = u - v, \qquad y = 2u - v,$$

es decir, $T(u,v) = (u - v, 2u - v)$.

Solución La transformación T tiene determinante distinto de cero y por tanto es inyectiva (véase el Ejercicio 12, Sección 6.1). Está diseñada de modo que transforme el *rectángulo* P^* limitado por $v = 0, v = -2, u = 0, u = 1$ en P. El uso de T simplifica la región de integración de P a P^*. Además,

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right| = 1.$$

Por tanto, por la fórmula del cambio de variables,