La distinción entre mostrar que hay *solo una solución posible* al problema y que, de hecho, *existe una solución* es una sutileza que muchos (incluso grandes) matemáticos han pasado por alto.

La reina Dido (aproximadamente, 900 a.C.) se dio cuenta de que entre todas las regiones planas con un perímetro fijo, el disco es la región de área máxima. No es difícil demostrar este hecho bajo el supuesto de que existe una región de área máxima; sin embargo, probar que existe esa región de área máxima es otra cuestión (bastante difícil). No fue hasta la segunda mitad del siglo diecinueve que el matemático alemán Weierstrass proporcionó una demostración completa.

Consideremos una situación no matemática paralela. Pongámonos en el lugar de Lord Peter Wimsey, un famoso detective creado por Dorothy Sayers:

> "Sin duda", dijo Wimsey, "pero si piensas que esta identificación hará de tu vida una dulce y maravillosa canción estás equivocado. . . . Ya que hemos dedicado una gran cantidad de tiempo y pensamientos al caso, bajo la hipótesis de que era un asesinato, conviene saber que la hipótesis es correcta."[10]

Wimsey ha encontrado el cuerpo de un hombre muerto y después de algún tiempo ha localizado diez sospechosos. Está seguro de que nadie aparte de los sospechosos puede ser el asesino. Al recopilar todas las pruebas y comprobar las coartadas, reduce el número de sospechosos hasta que finalmente solo queda el mayordomo; por tanto, ¡él es el asesino! Pero, un momento, Peter es un hombre cauteloso. Al comprobar todo una vez más, descubre que el hombre muerto se había suicidado; así que no se ha cometido ningún asesinato. Así, podemos concluir que: no basta con encontrar un claro y único sospechoso en un caso criminal en el que se supone que hubo un asesinato; hay que probar que realmente se cometió un asesinato.

Lo mismo vale para nuestro cubo; el hecho de que sea el único posible candidato para un máximo no prueba que sea un máximo. (Para obtener más información, véase *The Parsimonious Universe*: *Shape and Form in the Natural World*, por S. Hildebrandt y A. Tromba, Springer-Verlag, Nueva York/Berlin, 1995.)

El principal obstáculo para demostrar que $f(x, y, z) = xyz$ tiene realmente un máximo está en el hecho de que f es una función continua que está definida en la superficie no acotada $S\colon xy + xz + yz = 5$, y no en un conjunto acotado, que incluye su frontera, en cuyo caso podríamos aplicar el Teorema 7 de la Sección 3.3. Ya hemos visto problemas de este tipo para funciones de una y dos variables.

La forma de demostrar que $f(x, y, z) = xyz \geq 0$ tiene un máximo en $xy + yz + xz = 5$ es demostrando que si x, y o z tienden a ∞, entonces $f(x, y, z) \to 0$. Podemos entonces concluir que el máximo de f en S debe existir apelando al Teorema 7 (el lector debe completar los detalles). Así, supongamos que (x, y, z) está en S y $x \to \infty$; entonces $y \to 0$

[10] Dorothy L. Sayers, *Have His Carcase*, Capítulo 31: The Evidence of the Haberdasher's Assistant, Nueva York, Avon Books, 1968, p. 312.