$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

En este caso especial, para concretar hemos tomado $n = m = 3$ y $p = 1$, y con el fin de simplificar $U = \mathbb{R}^3$ y $V = \mathbb{R}^3$, y hemos escrito explícitamente el producto de matrices $[\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)][\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]$ (suprimiendo en las matrices los puntos $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}_0$).

Demostración—Segundo caso especial de la regla de la cadena Por definición, $\partial h/\partial x$ se obtiene derivando h respecto de x, dejando y y z fijas. Entonces $(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ se puede considerar como una función vectorial de una única variable x. El primer caso especial se ajusta a esta situación y, tras renombrar las variables, proporciona

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{3$'$}$$

De forma similar,

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{3$''$}$$

y

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{3$'''$}$$

En los cálculos prácticos, en el último paso, se suele expresar $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ y $\frac{\partial f}{\partial w}$ en términos de x, y, z. Estas ecuaciones son exactamente las que se obtendrían multiplicando las matrices de la Ecuación (3). ■

Demostración del Teorema 11 El caso general de la Ecuación (1) se puede demostrar en dos pasos. Primero, la Ecuación (2) se generaliza a m variables; es decir, para $f(x_1, \ldots, x_m)$ y $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$, tenemos

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt},$$

donde $h(t) = f(x_1(t), \ldots, x_m(t))$. En segundo lugar, el resultado obtenido en el primer paso se usa para obtener la fórmula

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i},$$