21. Probar las ***identidades de Green***

$$\iint_{\partial W} f\nabla g \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_W (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV$$

y

$$\iint_{\partial W} (f\nabla g - g\nabla f)\cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_W (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dV.$$

22. Supongamos que $\mathbf{F}$ satisface div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en todo $\mathbb{R}^3$. Demostrar que podemos escribir $\mathbf{F} = \nabla f$, donde $\nabla^2 f = 0$.

23. Sea ρ una función continua en $\mathbb{R}^3$ tal que $\rho(\mathbf{q}) = 0$ excepto para $\mathbf{q}$ en alguna región W. Sea $\mathbf{q} \in W$ denotada por $\mathbf{q} = (x, y, z)$. El ***potencial*** de ρ se define como la función

$$\phi(\mathbf{p}) = \iiint_W \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|}\, dV(\mathbf{q}),$$

donde $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$ es la distancia entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$.

(a) Utilizando el método del Teorema 10, demostrar que

$$\iint_{\partial W} \nabla\phi \cdot \mathbf{n}\, dS = -\iiint_W \rho\, dV$$

para aquellas regiones W que puedan ser divididas en una unión finita de regiones elementales simétricas.

(b) Demostrar que ϕ satisface la ***ecuación de Poisson***

$$\nabla^2 \phi = -\rho.$$

[SUGERENCIA: utilizar el apartado (a)]. (Obsérvese que si ρ es una densidad de carga, entonces la integral que define ϕ puede interpretarse como la suma de los potenciales en $\mathbf{p}$ debidos a las cargas puntuales distribuidas sobre W según la densidad ρ).

24. Supóngase que $\mathbf{F}$ es tangente a la superficie cerrada $S = \partial W$ de una región W. Demostrar que

$$\iiint_W (\text{div } \mathbf{F})\, dV = 0.$$

25. Usar la ley de Gauss y la simetría para probar que el campo eléctrico debido a una carga Q distribuida uniformemente sobre la superficie de una esfera es el mismo en el exterior de la superficie que el campo producido por una carga puntual Q situada en el centro de la esfera. ¿Cuál es el campo en el interior de la esfera?

26. Reformular el Ejercicio 25 en términos de campos gravitatorios.

27. Mostrar cómo se puede usar la ley de Gauss para resolver el apartado (b) del Ejercicio 29 de la Sección 8.3.

28. Sea S una superficie cerrada. Utilizar el teorema de Gauss para demostrar que si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^2, entonces tenemos $\iint_s (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$.

29. Sea S la superficie de la región W. Demostrar que

$$\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS = 3 \text{ volumen } (W).$$

Explicar esto geométricamente.

30. Para una distribución de carga estacionaria y una distribución de corriente de divergencia cero, los campos eléctrico y magnético $\mathbf{E}(x, y, z)$ y $\mathbf{H}(x, y, z)$ satisfacen

$$\begin{array}{lll} \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, & \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, & \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho & \text{y} & \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \end{array}$$

Aquí, suponemos que $\rho = \rho(x, y, z)$ y $\mathbf{J}(x, y, z)$ son conocidos. La radiación que los campos producen a través de la superficie S está determinada por un campo vectorial de densidad del flujo de radiación, denominado campo vectorial de ***Poynting***,

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

(a) Si S es una superficie *cerrada*, demostrar que el flujo de radiación —es decir, el flujo de $\mathbf{P}$ a través de S— está dado por

$$\iint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -\iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, dV,$$

donde V es la región encerrada por S.

(b) Ejemplos de tales campos son $\mathbf{E}(x, y, z) = z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ y $\mathbf{H}(x, y, z) = -xy\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$. En este caso, hallar el flujo del vector de Poynting a través de la superficie semiesférica mostrada en la Figura 8.4.9. (Obsérvese que se trata de una superficie *abierta*).

(c) Los campos del apartado (b) producen un vector de Poynting que pasa a través de la superficie toroidal mostrada en la Figura 8.4.10. ¿Cuál es el flujo a través de este toro?