Si V es una región elemental simétrica, el Teorema 10 establece que la integral interna es 4π si $\mathbf{q} \in V$ y 0 si $\mathbf{q} \notin V$. Entonces,

$$\iint_{\partial V} \nabla\phi \cdot \mathbf{n}\, dS = -\iiint_{W\cap V} \rho(\mathbf{q})\, dV(\mathbf{q}).$$

Puesto que $\rho = 0$ fuera de W,

$$\iint_{\partial V} \nabla\phi \cdot \mathbf{n}\, dS = -\iiint_{V} \rho(\mathbf{q})\, dV(\mathbf{q}).$$

Si V no es una región elemental simétrica, la subdividimos en una suma de regiones que sí lo sean. La ecuación se cumple para cada trozo y, sumándolos todos, las integrales de frontera apropiadamente orientadas se cancelan, obteniendo el resultado deseado.

(b) Por el Teorema 9, $\iint_{\partial V} \nabla\phi \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla^2\phi\, dV$, y por tanto $\iiint_V \nabla^2\phi\, dV = -\iiint_V \rho\, dV$. Dado que tanto ρ como $\nabla^2\phi$ son continuos y esto se cumple para regiones arbitrariamente pequeñas, debemos tener $\nabla^2\phi = -\rho$.

25. Si la carga Q se distribuye uniformemente sobre la esfera S de radio R centrada en el origen, la densidad de carga por unidad de área debe ser $Q/4\pi R^2$. Si $\mathbf{p}$ es un punto que no está en S y $\mathbf{q} \in S$, entonces la contribución al campo eléctrico en $\mathbf{p}$ debido a la carga próxima a $\mathbf{q}$ se dirige a lo largo del vector $\mathbf{p} - \mathbf{q}$. Dado que la carga se distribuye uniformemente, la componente tangencial de esta contribución se cancelará con la contribución de un punto simétrico situado en el otro lado de la esfera a la misma distancia de $\mathbf{p}$ (realizar un dibujo). El campo total resultante será radial. Puesto que S parece lo mismo desde cualquier punto a una distancia $\|\mathbf{p}\|$ del origen, el campo solo dependerá del radio y será de la forma $\mathbf{E} = f(r)\mathbf{r}$.

Si miramos a la esfera Σ de radio $\|\mathbf{p}\|$, tenemos que

$$\begin{aligned}(\text{Carga dentro de } \Sigma) &= \iint_\Sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}\\ &= \iint_\Sigma f(\|\mathbf{p}\|)\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS\\ &= f(\|\mathbf{p}\|)\|\mathbf{p}\| \text{ área } \Sigma\\ &= 4\pi\|\mathbf{p}\|^3 f(\|\mathbf{p}\|).\end{aligned}$$

Si $\|\mathbf{p}\| < R$, no hay carga dentro de Σ; si $\|\mathbf{p}\| > R$, la carga dentro de Σ es Q, y por tanto

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{Q}{\|\mathbf{p}\|^3}\mathbf{p} & \text{si} \quad \|\mathbf{p}\| > R \\ 0 & \text{si} \quad \|\mathbf{p}\| < R. \end{cases}$$

27. Por el Teorema 10, $\iint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi$ para cualquier superficie que contiene el origen. Pero si $\mathbf{F}$ fuera el rotacional de algún campo, entonces la integral sobre dicha superficie cerrada tendría que ser 0.

29. Si $S = \partial W$, entonces $\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_W \nabla \cdot \mathbf{r}\, dV = \iiint_W 3\, dV = 3$ volumen (W). Para la explicación geométrica, supongamos que $(0,0,0) \in W$ y consideremos el cono inclinado con su vértice en $(0,0,0)$ con base ΔS y altura $\|\mathbf{r}\|$. Su volumen es $\frac{1}{3}(\Delta S)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})$.

Sección 8.5

1. (a) $(2xy^2 - yx^3)\ dx\ dy$.
(b) $(x^2 + y^2)\ dx\ dy$.
(c) $(x^2 + y^2 + z^2)\ dx\ dy\ dz$.
(d) $(xy + x^2)\ dx\ dy\ dz$.
(e) $dx\ dy\ dz$.

3. (a) $2xy\ dx + (x^2 + 3y^2)\ dy$.
(b) $-(x + y^2 \operatorname{sen} x)\ dx\ dy$.
(c) $-(2x + y)\ dx\ dy$.
(d) $dx\ dy\ dz$.
(e) $2x\ dx\ dy\ dz$.
(f) $2y\ dy\ dz - 2x\ dz\ dx$.
(g) $-\dfrac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}\ dx\ dy$.
(h) $2xy\ dx\ dy\, dz$.

5. (a) $8\pi^2 + \dfrac{44\pi^3}{3} + \dfrac{11\pi^4}{2} + \dfrac{3\pi^5}{5}$.
(b) $8\pi^2 + \dfrac{44\pi^3}{3} + \dfrac{53\pi^4}{2} + \dfrac{64\pi^5}{5} + \dfrac{7\pi^6}{3} + \dfrac{\pi^7}{7}$.
(c) $8\pi + 10\pi^2 + 9\pi^3 + \dfrac{5\pi^4}{2} + \dfrac{\pi^5}{5}$.