Por analogía con $\mathbb{R}^3$, podemos definir la noción de distancia en $\mathbb{R}^n$; a saber, si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son puntos de $\mathbb{R}^n$, la ***distancia entre*** $\mathbf{x}$ ***e*** $\mathbf{y}$ se define como $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, o la longitud del vector $\mathbf{x}-\mathbf{y}$. No vamos a intentar definir el producto vectorial en $\mathbb{R}^n$ excepto para $n=3$.

Matrices generales

Para generalizar matrices 2×2 y 3×3 (véase la Sección 1.3), podemos considerar matrices $m\times n$, que son ordenaciones de mn números:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

También escribiremos A como $[a_{ij}]$. Definimos la suma y la multiplicación por un escalar componente a componente, como hicimos con los vectores. Dadas dos matrices $m\times n$, A y B, podemos sumarlas para obtener una nueva matriz $m\times n$, $C=A+B$, cuyo ij-ésimo elemento c_{ij} es la suma de a_{ij} y b_{ij}. Está claro que $A+B=B+A$.

Ejemplo 2

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$

(b) $[1 \quad 2] + [0 \quad -1] = [1 \quad 1].$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$ ▲

Dado un escalar λ y una matriz $m\times n$, A, podemos multiplicar A por λ para obtener una nueva matriz $m\times n$, $\lambda A = C$, cuyo elemento ij-ésimo, c_{ij}, es el producto λa_{ij}.

Ejemplo 3

$$3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 15 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$ ▲

Vamos a ver ahora la multiplicación de matrices. Si $A=[a_{ij}]$ y $B=[b_{ij}]$ son matrices $n\times n$, entonces el producto $AB=C$ tiene elementos dados por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

que es el producto escalar de la fila i-ésima de A por la columna j-ésima de B: