y

$$\overline{0Q} = \text{distancia de } (0, 0) \text{ a } Q = \sqrt{\frac{-c^2(\det A)^2}{(a^2+c^2)^2} + \frac{a^2(\det A)^2}{(a^2+c^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(c^2+a^2)(\det A)^2}{(a^2+c^2)^2}} = \sqrt{\frac{(\det A)^2}{a^2+c^2}} = \frac{|\det A|}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

Finalmente,

$$\text{área del paralelogramo} = \overline{0A} \times \overline{0Q} = \sqrt{a^2+c^2} \times \frac{|\det A|}{\sqrt{a^2+c^2}} = |\det A|$$

Se podrá dar una demostración mucho más sencilla de este teorema cuando se analice el producto cruz de dos vectores en la sección 4.4.

RESUMEN 3.1

- El **determinante** de una matriz de 2×2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ está dado por

$$\text{Determinante de } A = \det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- **Determinante de 3 × 3**

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- El **menor *ij*** de la matriz A de $n \times n$, denotado por M_{ij}, es la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ obtenida al eliminar el renglón i y la columna j de A.
- El **cofactor *ij*** de A, denotado por A_{ij}, está dado por

$$\mathrm{A}_{ij} = (-i)^{i+j} \det M_{ij}$$

- ***Determinante de n × n***

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\det A = a_{11}\mathrm{A}_{11} = a_{12}\mathrm{A}_{12} + \cdots + a_{1n}\mathrm{A}_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\mathrm{A}_{1k}$$

La suma anterior se denomina la **expansión de det *A* por cofactores en el primer renglón**.

- Si A es una matriz de $n \times n$, **triangular superior**, **triangular inferior** o **diagonal**, cuyas componentes en la diagonal son $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, entonces

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$