donde D es el conjunto de puntos (x, y) tales que $0 \leq x \leq a$ y $0 \leq y \leq (a^2 - x^2)^{1/2}$. Esta es la representación de un cuarto (el cuadrante positivo) del disco de radio a; por tanto, D también se puede describir como el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$0 \leq y \leq a, \qquad 0 \leq x \leq (a^2 - y^2)^{1/2}$$

(véase la Figura 5.4.1). Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^a \int_0^{(a^2-x^2)^{1/2}} (a^2 - y^2)^{1/2} dy\, dx &= \int_0^a \left[\int_0^{(a^2-y^2)^{1/2}} (a^2 - y^2)^{1/2} dx\right] dy \\ &= \int_0^a \left[x(a^2 - y^2)^{1/2}\right]_{x=0}^{(a^2-y^2)^{1/2}} dy \\ &= \int_0^a (a^2 - y^2)\, dy = \left[a^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^a = \frac{2a^3}{3}.\end{aligned}$$

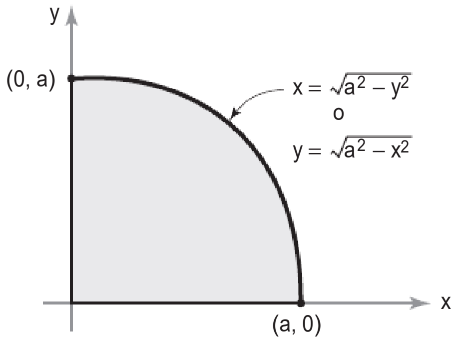

Figura 5.4.1 La parte del cuadrante positivo de un disco de radio *a*. ▲

Podríamos haber calculado directamente la integral iterada inicial, pero, como podemos verificar fácilmente, cambiar el orden de integración hace el problema mucho más simple. El siguiente ejemplo muestra que puede no ser obvio cómo calcular una integral iterada, y no obstante ser relativamente sencillo calcular la integral iterada obtenida cambiando el orden de integración.

Ejemplo 2 Calcular

$$\int_1^2 \int_0^{\log x} (x - 1)\sqrt{1 + e^{2y}}\, dy\, dx.$$

Solución Cambiar primero el orden de integración simplificará las cosas. Téngase en cuenta que la integral es igual a $\iint_D (x - 1)\sqrt{1 + e^{2y}}\, dA$, donde D es el conjunto de puntos (x, y) tales que

$$1 \leq x \leq 2 \qquad \text{y} \qquad 0 \leq y \leq \log x.$$

La región D es simple (véase la Figura 5.4.2) y también se puede describir mediante

$$0 \leq y \leq \log 2 \qquad \text{y} \qquad e^y \leq x \leq 2.$$