El teorema que se presenta a continuación se deduce directamente de la definición del producto escalar. Se demuestra la parte ii) y se deja el resto como ejercicio.

Teorema 2.2.1

Sean **a**, **b** y **c** tres vectores de dimensión n y sea α un escalar. Entonces

i) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{0}=0$

ii) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ **(ley conmutativa del producto escalar)**

iii) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ **(ley distributiva del producto escalar)**

iv) $(\alpha\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$

Prueba de ii)

Sean $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ y $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$.

Entonces

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$$

$ab=ba$ para cualesquiera dos números a y b

Observe que *no* existe una ley asociativa para el producto escalar. La expresión $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ no tiene sentido porque ninguno de los dos lados de la ecuación está definido. Para el lado izquierdo, esto se concluye a partir de que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ es un escalar y el producto escalar del escalar $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ y el vector **c** no está definido.

Ahora se define el producto de dos matrices.

Definición 2.2.2

Producto de dos matrices

Sea $A=(a_{ij})$ una matriz de $m\times n$, y sea $B=(b_{ij})$ una matriz de $n\times p$. Entonces el **producto** de A y B es una matriz $m\times p$, $C=(c_{ij})$, en donde

$$\boxed{c_{ij}=(\text{renglón } i \text{ de } A)\cdot(\text{columna } j \text{ de } B)} \qquad \textbf{(2.2.3)}$$

Es decir, el elemento ij de AB es el producto punto del renglón i de A y la columna j de B. Si esto se extiende, se obtiene

$$\boxed{c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}} \qquad \textbf{(2.2.4)}$$

Si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, entonces se dice que A y B son **compatibles bajo la multiplicación**.

Matrices compatibles