forma $z = k(x, y)$. No obstante, si $\mathbf{v} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ es tangente a la gráfica [es decir, si satisface la Ecuación (2)], entonces $\mathbf{v}$ es tangente a la trayectoria en S dada por

$$\mathbf{c}(t) = (x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), k(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)))$$

en $t = 0$. Esto se puede comprobar utilizando la regla de la cadena. (Véase la Figura 3.5.3.)

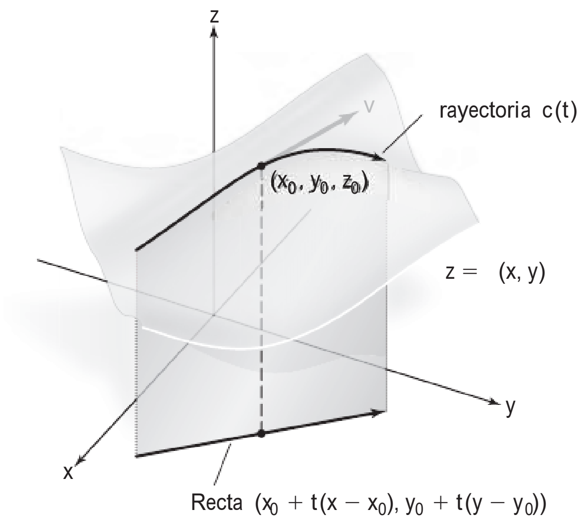

Figura 3.5.3 Construcción de una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ en la superficie S cuyo vector tangente es $\mathbf{v}$.

Ejemplo 2 ¿Cerca de qué puntos se puede representar la superficie

$$x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3y = 1$$

como la gráfica de una función diferenciable $z = k(x, y)$?

Solución Tomamos $F(x, y, z) = x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3y - 1$ e intentamos resolver $F(x, y, z) = 0$ para z como una función de (x, y). Por el Teorema 11, esto se puede hacer cerca de un punto (x_0, y_0, z_0) si $(\partial F/\partial z)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, es decir, si

$$z_0(16x_0 - 9z_0y_0) \neq 0,$$

lo que significa, a su vez,

$$z_0 \neq 0 \qquad \text{y} \qquad 16x_0 \neq 9z_0y_0. \qquad \blacktriangle$$

Teorema general de la función implícita

A continuación vamos a enunciar, sin demostración, el *teorema general de la función implícita*.[14](véase la nota al pie en la página siguiente) En lugar de intentar despejar una variable de una ecuación, vamos a ver cómo despejar m variables $z_1, \ldots, z_m$ de m ecuaciones: