Corolario Desigualdad de Cauchy–Schwarz Para cualquier par de vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, se tiene

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$$

donde la igualdad se satisface si y solo si $\mathbf{a}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{b}$, o alguno de ellos es $\mathbf{0}$.

Demostración Si $\mathbf{a}$ no es un múltiplo escalar de $\mathbf{b}$, entonces θ, el ángulo que forman, no es cero ni π, y por tanto $|\cos\theta| < 1$, y se tiene la desigualdad; de hecho, si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son distintos de cero, se tiene la desigualdad *estricta*. Cuando $\mathbf{a}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{b}$, entonces $\theta = 0$ o π y $|\cos\theta| = 1$, y en este caso se tiene la igualdad. ■

Ejemplo 5 Verificar la desigualdad de Cauchy–Schwarz para $\mathbf{a} = -\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i}+\mathbf{k}$.

Solución El producto escalar es $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -3+0+1 = -2$, de modo que $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = 2$. Además, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ y $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$, y también se cumple que $2 \leq \sqrt{3}\cdot\sqrt{10}$ ya que $\sqrt{3}\cdot\sqrt{10} > \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3 \geq 2$. ▲

Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ y θ es el ángulo que forman, entonces $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ si y solo si $\cos\theta = 0$. Por tanto, *el producto escalar de dos vectores no nulos es cero si y solo si los vectores son perpendiculares*. Así, el producto escalar nos proporciona un método adecuado para determinar si dos vectores son perpendiculares. A menudo diremos que los vectores perpendiculares son ***ortogonales***. Los vectores de la base canónica $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son ortogonales entre sí y tienen longitud 1; estos sistemas de vectores se llaman ***ortonormales***. Vamos a adoptar el convenio de que el vector cero es ortogonal a todos los vectores.

Ejemplo 6 Los vectores $\mathbf{i}_\theta = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$ y $\mathbf{j}_\theta = -(\operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}$ son ortogonales, porque

$$\mathbf{i}_\theta\cdot\mathbf{j}_\theta = -\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0.$$

Aquí, $\mathbf{i}_\theta$ es la rotación de $\mathbf{i}$, θ° en sentido antihorario. Y $\mathbf{j}_\theta$ es la rotación de $\mathbf{j}$, θ° en sentido antihorario (véase la Figura 1.2.8).

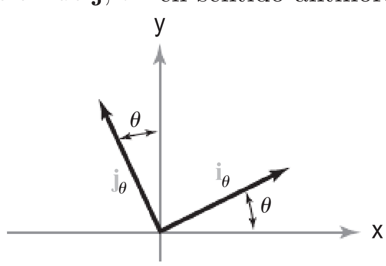

Figura 1.2.8 Los vectores $\mathbf{i}_\theta$ y $\mathbf{j}_\theta$ son ortogonales y tienen longitud igual a 1, es decir, son ortonormales.

▲