Ejemplo 3 Maximizar la función $f(x, y, z) = x + z$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solución Por el Teorema 7 sabemos que la función f restringida a la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tiene un máximo (y también un mínimo). Para hallar el máximo utilizamos de nuevo el teorema de los multiplicadores de Lagrange. Buscamos λ y (x, y, z) tales que

$$1 = 2x\lambda, \qquad 0 = 2y\lambda \quad \text{y} \quad 1 = 2z\lambda,$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

De la primera o de la tercera ecuación, vemos que $\lambda \neq 0$. Así, de la segunda ecuación, obtenemos que $y = 0$. De la primera y la tercera ecuaciones, $x = z$ y por tanto de la cuarta, $x = \pm 1/\sqrt{2} = z$. Por tanto, nuestros puntos son $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ y $(-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$. Comparando los valores de f en estos puntos, podemos ver que en el primer punto se alcanza el máximo de f (sometida a la restricción) y en el segundo el mínimo. ▲

Ejemplo 4 Supóngase que entre todas las cajas rectangulares con una superficie de 10 metros cuadrados hay una con el mayor volumen posible. Determinar sus dimensiones.

Solución Si x, y y z son las longitudes de los lados, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, respectivamente, y el volumen es $f(x, y, z) = xyz$. La restricción es $2(xy + xz + yz) = 10$; es decir, $xy + xz + yz = 5$. Por tanto, las condiciones del multiplicador de Lagrange son

$$\begin{aligned} yz &= \lambda(y + z) \\ xz &= \lambda(x + z) \\ xy &= \lambda(y + x) \\ xy + xz + yz &= 5. \end{aligned}$$

En primer lugar, $x \neq 0$, ya que $x = 0$ implica $yz = 5$ y $0 = \lambda z$, de modo que $\lambda = 0$ y obtenemos la ecuación $yz = 0$ que contradice lo anterior. De forma similar, $y \neq 0, z \neq 0, x + y \neq 0$. Eliminando λ de las dos primeras ecuaciones se tiene $yz/(y + z) = xz/(x + z)$, lo que da $x = y$; de forma análoga, $y = z$. Sustituyendo estos valores en la última ecuación, obtenemos $3x^2 = 5$, o $x = \sqrt{5/3}$. Así, obtenemos la solución $x = y = z = \sqrt{5/3}$ y $xyz = (5/3)^{3/2}$. Esta forma (cúbica) debe por tanto maximizar el volumen, suponiendo que exista una caja de volumen máximo. ▲

Existencia de soluciones

Debemos resaltar que la solución del Ejemplo 4 *no* demuestra que el cubo sea la caja rectangular de mayor volumen con una superficie dada; prueba que el cubo es el único candidato posible para un máximo. Más adelante esbozaremos una demostración de que en realidad es el máximo.