Definición Superficies parametrizadas Una ***parametrización de una superficie*** es una función $\mathbf{\Phi}$: $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donde D es algún dominio en $\mathbb{R}^2$. La ***superficie*** S correspondiente a la función $\mathbf{\Phi}$ es su imagen: $S = \mathbf{\Phi}(D)$. Podemos escribir

$$\mathbf{\Phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Si $\mathbf{\Phi}$ es diferenciable o es de clase C^1 [que es lo mismo que decir que $x(u, v), y(u, v)$ y $z(u, v)$ son diferenciables o funciones C^1 de (u, v)], llamamos a S ***superficie diferenciable o*** C^1.

Podemos pensar que $\mathbf{\Phi}$ tuerce o dobla la región D del plano para producir la superficie S (véase la Figura 7.3.5). Por tanto, cada punto (u, v) de D se convierte en una etiqueta para un punto $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ de S.

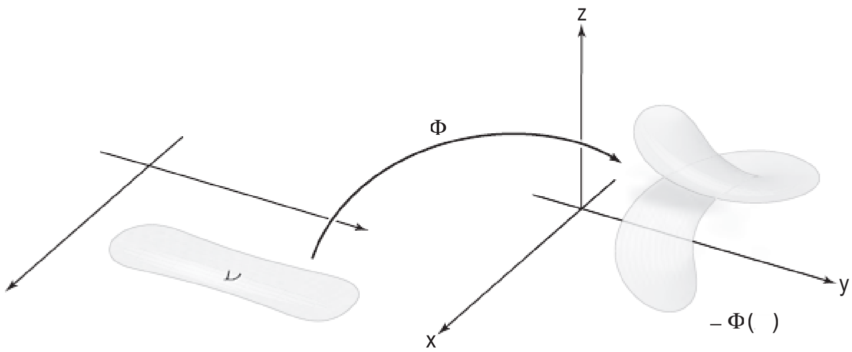

Figura 7.3.5 $\mathbf{\Phi}$ "tuerce" y "dobla" D produciendo una superficie $S = \mathbf{\Phi}(D)$.

Por supuesto, las superficies no tienen por qué doblarse o retorcerse en absoluto. De hecho, los planos son superficies, como se muestra en nuestro primer, y más simple, ejemplo.

Ejemplo 1 En la Sección 1.3 hemos estudiado la ecuación de un plano P. Lo hicimos en términos de gráficas y de conjuntos de nivel. Ahora vamos a examinar el mismo concepto utilizando una parametrización.

Sea P un plano que es paralelo a dos vectores $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ y que pasa por el extremo de otro vector $\boldsymbol{\gamma}$, como se muestra en la Figura 7.3.6.

Nuestro objetivo en este ejemplo es determinar una parametrización de este plano. Téngase en cuenta que el vector $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \mathbf{N}$, que también se puede escribir como $A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, es normal a P. Si el extremo de $\boldsymbol{\gamma}$ es el punto (x_0, y_0, z_0), entonces la ecuación de P como un conjunto de nivel (como se ha explicado en la Sección 1.3) está dada por:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Sin embargo, el conjunto de todos los puntos del plano P también se puede describir mediante el conjunto de todos vectores que son $\boldsymbol{\gamma}$ más una combinación lineal de $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$. Utilizando nuestra elección preferida de parámetros reales u y v, llegamos a la ***ecuación paramétrica del plano*** P:

$$\mathbf{\Phi}(u, v) = \boldsymbol{\alpha} u + \boldsymbol{\beta} v + \boldsymbol{\gamma}.$$