Solución Calculamos $\nabla \times \mathbf{F}$:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x + z\cos yz & y\ \cos yz \end{vmatrix}$$

$$= (\cos yz - yz \operatorname{sen} yz - \cos yz + yz \operatorname{sen} yz)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (1-1)\mathbf{k}$$
$$= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

por lo que $\mathbf{F}$ es irrotacional. Entonces, según el Teorema 7, existe un potencial, que podemos hallar de varias formas.

Método 1. Mediante la técnica utilizada para demostrar que la condición (ii) implica la condición (iii) en el Teorema 7, podemos establecer que

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^x F_1(t,0,0)\ dt + \int_0^y F_2(x,t,0)\ dt + \int_0^z F_3(x,y,t)\ dt \\ &= \int_0^x 0\ dt + \int_0^y x\ dt + \int_0^z y\cos yt\ dt \\ &= 0 + xy + \operatorname{sen} yz = xy + \operatorname{sen} yz. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que $\nabla f = \mathbf{F}$, como queríamos:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = y\mathbf{i} + (x + z\cos yz)\mathbf{j} + (y\cos yz)\mathbf{k}.$$

Método 2. Puesto que sabemos que f existe, sabemos que podemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z\cos yz, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = y\cos yz,$$

para $f(x,y,z)$. Este sistema es equivalente a las ecuaciones

(a) $f(x,y,z) = xy + h_1(y,z)$

(b) $f(x,y,z) = \operatorname{sen} yz + xy + h_2(x,z)$

(c) $f(x,y,z) = \operatorname{sen} yz + h_3(x,y)$

para funciones h_1, h_2 y h_3 independientes de x, y y z (respectivamente). Cuando $h_1(y,z) = \operatorname{sen} yz$, $h_2(x,z) = 0$ y $h_3(x,y) = xy$, las tres ecuaciones coinciden y nos dan un potencial para $\mathbf{F}$. Sin embargo, solo hemos intuido los valores de h_1, h_2 y h_3. Para deducir la fórmula para f de forma más sistemática, observamos que como $f(x,y,z) = xy + h_1(y,z)$ y $\partial f/\partial z = y\cos yz$, tenemos que

$$\frac{\partial h_1(y,z)}{\partial z} = y\cos yz$$

o