13. Calcular

$$\iint_S z\,dS$$

donde S es la superficie $z = x^2+y^2, x^2+y^2 \leq 1$.

14. Calcular la integral de superficie $\iint_S z^2\,dS$, donde S es la frontera del cubo $C = [-1,1]\times[-1,1] \times [-1,1]$. (SUGERENCIA: hacer cada cara por separado y sumar los resultados).

15. Hallar la masa de una superficie esférica S de radio R tal que en cada punto $(x, y, z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia de (x, y, z) a algún punto fijo $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

16. Una superficie metálica S tiene la forma de una semiesfera $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, donde (x, y) satisface $0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$. La densidad de masa en $(x, y, z) \in S$ esta dada por $m(x, y, z) = x^2 + y^2$. Hallar la masa total de S.

17. Sea S la esfera de radio R.

(a) Razonar por simetría que

$$\iint_S x^2\,dS = \iint_S y^2\,dS = \iint_S z^2\,dS.$$

(b) Utilizar este hecho y algún razonamiento inteligente para calcular, realizando muy pocos cálculos, la integral

$$\iint_S x^2\,dS.$$

(c) ¿Resulta esto de ayuda en el Ejercicio 16?

18. (a) Utilizar las sumas de Riemann para justificar la fórmula

$$\frac{1}{A(S)}\iint_S f(x, y, z)\,dS$$

para el *valor medio* de f sobre la superficie S.

(b) En el Ejemplo 3 de esta sección, demostrar que el promedio de $f(x, y, z) = z^2$ sobre la esfera es $1/3$.

(c) Definimos el ***centro de gravedad*** $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de una superficie S tal que $\bar{x}, \bar{y}$ y $\bar{z}$ sean los valores promedios de las coordenadas x, y y z sobre S. Demostrar que el centro de gravedad del triángulo del Ejemplo 4 de esta sección es $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

19. Hallar el valor medio de $f(x, y, z) = x + z^2$ sobre el cono truncado $z^2 = x^2 + y^2$, con $1 \leq z \leq 4$.

20. Calcular la integral

$$\iint_S (1 - z)\,dS,$$

donde S es la gráfica de $z = 1 - x^2 - y^2$, con $x^2 + y^2 \leq 1$.

21. Hallar las coordenadas x, y y z del centro de gravedad del octante de la esfera sólida de radio R y con centro en el origen determinada por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. (SUGERENCIA: expresar este octante como una superficie parametrizada—véase el Ejemplo 3 de esta sección y el Ejercicio 18).

22. Hallar la coordenada z del centro de gravedad (el promedio de la coordenada z) de la superficie de una semiesfera ($z \leq 0$) con radio r (véase el Ejercicio 18). Razonar por simetría que los promedios de las coordenadas x e y son ambos cero.

23. Sea $\mathbf{\Phi}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie S definida por

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v).$$

(a) Sean

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

es decir, $\partial\mathbf{\Phi}/\partial u = \mathbf{T}_u$ y $\partial\mathbf{\Phi}/\partial v = \mathbf{T}_v$, y sean

$$E = \left\|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u}\right\|^2, \quad F = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}, \quad G = \left\|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}\right\|^2.$$

Demostrar que

$$\sqrt{EG - F^2} = \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|,$$

y que el área de la superficie de S es

$$A(S) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Con esta notación, ¿cómo podemos expresar $\iint_S f\,dS$ para una función f general?