EJEMPLO 8.7.5 Otro modelo depredador-presa

Considere el modelo depredador-presa gobernado por el sistema

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

Si las poblaciones iniciales son $x_1(0) = x_2(0) = 1\ 000$, determine las poblaciones de las dos especies para $t > 0$.

SOLUCIÓN ► Aquí $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ con ecuación característica $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, raíces complejas $\lambda_1 = 1 + i$ y $\lambda_2 = 1 - i$ y vectores característicos $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.* Entonces

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = -\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad J = D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

y

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{(1+i)} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)} \end{pmatrix}$$

Ahora, por la identidad de Euler (vea el apéndice B), $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$. Así

$$e^{(1+i)t} = e^t e^{it} = e^t(\cos t + i \operatorname{sen} t)$$

De manera similar,

$$e^{(1-i)t} = e^t e^{-it} = e^t(\cos t - i \operatorname{sen} t)$$

Entonces

$$e^{Jt} = e^t\begin{pmatrix} \cos t + \operatorname{sen} t & 0 \\ 0 & \cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} e^{At} = Ce^{Jt}C^{-1} &= \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t + i \operatorname{sen} t & 0 \\ 0 & \cos t + i \operatorname{sen} t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t + i \operatorname{sen} t & -i\cos t + \operatorname{sen} t \\ \cos t - i \operatorname{sen} t & i\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix} 2\cos t & 2 \operatorname{sen} t \\ -2\operatorname{sen} t & 2\cos t \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por último,

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) = e^t\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\ 000 \\ 1\ 000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 000\, e^t(\cos t + \operatorname{sen} t) \\ 1\ 000\, e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) \end{pmatrix}$$

* Observe que $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ y $\mathbf{v}_2 = \bar{\mathbf{v}}_1$. Esto no debe sorprender porque según el resultado del problema 8.1.39, los valores característicos de las matrices reales ocurren en pares conjugados complejos y sus vectores característicos correspondientes son conjugados complejos.