*a*) Verifique que el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es una base para $\mathbb{R}^4$ y, por tanto, que $T$ está bien definida.

*b*) Verifique que el conjunto $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ es una base para $\mathbb{R}^4$. ¿Por qué se puede concluir que $T$ es un isomorfismo?

*c*) Encuentre la representación matricial, $A$, de $T$ respecto a la base canónica (vea el problema 6 de MATLAB 7.3). Utilice la representación matricial para encontrar una base para el núcleo y la imagen de $T$ y verifique así, que $T$ es un isomorfismo. Verifique que $A$ es invertible.

*d*) Suponga que $S$: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es la transformación definida por $S(\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_i$, para $i = 1, \ldots, 4$. Encuentre una representación matricial, $B$, de $S$ y verifique que $B = A^{-1}$.

## 7.5 Isometrías

En esta sección se describe un tipo especial de transformación lineal entre espacios vectoriales. Se comienza con un resultado sumamente útil.

### Teorema 7.5.1

Sea $A$ una matriz de $m \times n$ con elementos reales.* Entonces para cualesquiera dos vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$:

$$\boxed{(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A^{\top}\mathbf{y})} \qquad \textbf{(7.5.1)}$$

Ecuación (2.5.6) Teorema 2.5.1 ii) Ley asociativa para la multiplicación de matrices Ecuación (2.5.6)

$$A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (A\mathbf{x})^{\top}\mathbf{y} = (\mathbf{x}^{\top}A^{\top})\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\top}(A^{\top}\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (A^{\top}\mathbf{y})$$

Recuerde que en el teorema 6.1.3, se demostró que la matriz $Q$ con elementos reales es **ortogonal** si $Q$ es invertible y $Q^{-1} = Q^{\top}$. En el mismo teorema se demostró que $Q$ es ortogonal si y sólo si las columnas de $Q$ forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$. Ahora sea $Q$ una matriz ortogonal de $n \times n$ y sea $T$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal definida por $T\mathbf{x} = Q\mathbf{x}$. Entonces, usando la ecuación (7.5.1), se calcula

$$(T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{y}) = Q\mathbf{x} \cdot Q\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (Q^{\top}Q\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (I\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

En particular, si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, se ve que $T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$, o sea

$$|T\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$$

para todo $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$.

* Este resultado se puede extender fácilmente a matrices con componentes complejas. Vea el problema 21 de esta sección.