c) Para las siguientes matrices A, encuentre `R = rref(A)` y la base para el espacio nulo formando una matriz B, como se ilustra en los ejemplos de los incisos *a*) y *b*). Verifique que `A*B = 0`. (Para ayudar a reconocer el procedimiento para encontrar B, por ejemplo, en *b*), las columnas 3 y 5 de R no tienen pivotes, lo que indica que x_3 y x_5 eran variables arbitrarias. Las columnas 3 y 5 de R *no* son vectores en el espacio nulo, pero se puede encontrar una base para el espacio nulo utilizando adecuadamente los números en las columnas 3 y 5. Observe que la tercera y quinta posiciones en los vectores de la base son 1 o 0.)

i) $A = \begin{pmatrix} -9 & 3 & -8 & -5 & -1 \\ 5 & 0 & -5 & -5 & -3 \\ -7 & 0 & 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

ii) `A = rand(4,6);A(:,4) = 1/3*A(:,2)-2/7*A(:,3)`

3. *a*) MATLAB tiene un comando `null(A)` `(doc null)` que producirá una base para el espacio nulo de A (produce una base ortonormal). Vea en la sección 6.1 una definición de ortonormal.

i) Para cada matriz A en el problema 2 de esta sección de MATLAB, encuentre `N = null(A)`. Encuentre B, la matriz cuyas columnas forman una base para el espacio nulo utilizando el procedimiento del ejemplo 5.7.7.

ii) ¿Cuántos vectores hay en cada base? ¿Qué propiedad confirma este hecho?

iii) Considerando `rref([B N])` y `rref([N B])`, verifique que cada vector en la base para el espacio nulo determinado por el comando `null` es una combinación lineal de los vectores de la base encontrados en las columnas de B, y que cada vector columna en B es una combinación lineal de los vectores de la base encontrado con el comando `null`. Explique su razonamiento y el proceso. Explique por qué esta afirmación debe ser cierta.

b) El algoritmo utilizado por el comando `null` de MATLAB es numéricamente más estable que el proceso que incluye `rref`; es decir, `null` es mejor en cuanto a minimizar los errores de redondeo. Para la matriz A siguiente, encuentre `N = null(A)` y encuentre `B` como en el inciso *a*). Encuentre `A*B` y `A*N` y analice la forma en la cual esto proporciona alguna evidencia para la afirmación hecha al principio del inciso *a*).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 & 9 \\ -3 & 6 & 6 & 3.56 & 3 \\ 4.2 & -8.4 & -10 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Aplicación geométrica del espacio nulo

a) (*Lápiz y papel*) Argumente por qué una base para el espacio nulo de una matriz A de $m \times n$ será una base para el subespacio de todos los vectores en $\mathbb{R}^n$ perpendiculares (ortogonales) a los *renglones* de A.

b) Encuentre una base para el plano formado por todos los vectores perpendiculares a $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) Encuentre una base para la recta perpendicular al plano generado por $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$.

Compare su respuesta con el producto cruz de dos vectores.