extender a una base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ para $\mathbb{R}^n$, y mediante el proceso de Gram-Schmidt esto se puede convertir en una base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. Sea Q la matriz ortogonal cuyas columnas son $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$. Por conveniencia de notación se escribe $Q = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$. Ahora bien, Q es invertible y $Q^\top = Q^{-1}$, de manera que A es semejante a $Q^\top AQ$, y por el teorema 8.3.1, $Q^\top AQ$ y A tienen el mismo polinomio característico: $|Q^\top AQ - \lambda I| = |A - \lambda I|$. Entonces

$$Q^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^\top \\ \mathbf{u}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^\top \end{pmatrix}$$

de manera que

$$Q^\top AQ = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^\top \\ \mathbf{u}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^\top \end{pmatrix} A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^\top \\ \mathbf{u}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^\top \end{pmatrix} (A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \ldots, A\mathbf{u}_n)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^\top \\ \mathbf{u}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^\top \end{pmatrix} (\lambda_1\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \ldots, A\mathbf{u}_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{u}_1^\top A\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_1^\top A\mathbf{u}_n \\ 0 & \mathbf{u}_2^\top A\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_2^\top A\mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \mathbf{u}_n^\top A\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n^\top A\mathbf{u}_n \end{pmatrix}$$

Los ceros aparecen porque $\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_j = 0$ si $j \neq 1$. Por otro lado, $[Q^\top AQ]^\top = Q^\top A^\top (Q^\top)^\top = Q^\top AQ$. Así, $Q^\top AQ$ es simétrica, lo que significa que debe haber ceros en el primer renglón de $Q^\top AQ$ que concuerden con los ceros de la primera columna. Entonces

$$Q^\top AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ 0 & q_{32} & q_{33} & \cdots & q_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & q_{n2} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

y

$$|Q^\top AQ - \lambda I| = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{22} - \lambda & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ 0 & q_{32} & q_{33} - \lambda & \cdots & q_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & q_{n2} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_1 - \lambda) \begin{vmatrix} q_{22} - \lambda & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ q_{32} & q_{33} - \lambda & \cdots & q_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n2} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)|(M_{11}\lambda)|$$

donde $M_{11}(\lambda)$ es el menor 1,1 de $Q^\top AQ - \lambda I$. Si $k = 1$, no hay nada que demostrar. Si $k > 1$, entonces $|A - \lambda I|$ contiene el factor $(\lambda - \lambda_1)^2$, y por lo tanto $|Q^\top AQ - \lambda I|$ también contiene el factor $(\lambda - \lambda_1)^2$. Entonces $|M_{11}(\lambda)|$ contiene el factor $\lambda - \lambda_1$, lo que significa que $|M_{11}(\lambda)| = 0$. Esto significa que las últimas $n - 1$ columnas de $Q^\top AQ - \lambda_1 I$ son linealmente dependientes. Como la primera columna de