$x^2 + y^2 = 1$ interseca la gráfica de $z = f(x, y)$ en una curva que está contenida en esta gráfica. El problema de maximizar o minimizar $f(x, y)$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$ equivale a encontrar el punto en esta curva donde z es máximo o mínimo.

Método de los multiplicadores de Lagrange

En general, sean $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones C^1 dadas y sea S el conjunto de nivel de g con valor c [recuérdese que este es el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con $g(\mathbf{x}) = c$].

Cuando f se restringe a S, de nuevo tenemos el concepto de máximo local o mínimo local de f (extremos locales), y un máximo absoluto (el mayor valor) o un mínimo absoluto (el menor valor) tiene que ser un extremo local. El siguiente método proporciona una condición necesaria para un extremo condicionado:

Teorema 8 Método de los multiplicadores de Lagrange Sean $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones C^1 con valores reales. Sean $\mathbf{x}_0 \in U$ y $g(\mathbf{x}_0) = c$ y sea S el conjunto de nivel de g con valor c [recuérdese que este es el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que satisface $g(\mathbf{x}) = c$]. Suponemos que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$.

Si $f|S$, que denota "f restringida a S", alcanza un máximo o mínimo local de S en $\mathbf{x}_0$, entonces existe un número real λ (que puede ser cero) tal que

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0). \tag{1}$$

En general, un punto $\mathbf{x}_0$ en el que se cumple la Ecuación (1) se dice que es un ***punto crítico*** de $f|S$.

Demostración No hemos desarrollado suficientes técnicas como para poder proporcionar una demostración completa, pero podemos indicar los puntos esenciales. (Las técnicas adicionales necesarias se exponen en la Sección 3.5.)

En la Sección 2.6, hemos visto que para $n = 3$ el espacio tangente o plano tangente a S en $\mathbf{x}_0$ es el espacio ortogonal a $\nabla g(\mathbf{x}_0)$. Para n arbitrario, podemos dar la misma definición para el espacio tangente de S en $\mathbf{x}_0$. Se puede motivar esta definición considerando tangentes a las trayectorias $\mathbf{c}(t)$ contenidas en S como sigue: si $\mathbf{c}(t)$ es una trayectoria en S y $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}_0$, entonces $\mathbf{c}'(0)$ es un vector tangente a S en $\mathbf{x}_0$, pero

$$\frac{d}{dt} g(\mathbf{c}(t)) = \frac{d}{dt} c = 0,$$

y, por otro lado, por la regla de la cadena,

$$\left. \frac{d}{dt} g(\mathbf{c}(t)) \right|_{t=0} = \nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{c}'(0),$$

de modo que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{c}'(0) = 0$; es decir, $\mathbf{c}'(0)$ es ortogonal a $\nabla g(\mathbf{x}_0)$.