6. ¿Es posible deducir el teorema de Green en el plano partiendo del teorema de Gauss?

7. (a) Demostrar que $\mathbf{F} = 6xy(\cos z)\mathbf{i} + 3x^2(\cos z)\mathbf{j} - 3x^2y(\operatorname{sen} z)\mathbf{k}$ es conservativo (véase la Sección 8.3).

(b) Hallar f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

(c) Calcular la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva $x = \cos^3\theta$, $y = \operatorname{sen}^3\theta$, $z = 0$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

8. Sea $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z), r = \|\mathbf{r}\|$. Demostrar que

$$\nabla^2(\log r) = 1/r^2 \text{ y } \nabla^2(r^n) = n(n+1)r^{n-2}.$$

9. La velocidad de un fluido queda descrita por $\mathbf{F} = 6xz\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$. Calcular la tasa con la que el fluido sale del cubo unidad.

10. Sea $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + (x^2y - 2xy)\mathbf{j} - x^2z\mathbf{k}$. ¿Existe un $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$?

11. Sea $\mathbf{a}$ un vector constante y $\mathbf{F} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ [como es habitual, $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$]. ¿Es $\mathbf{F}$ conservativo? En caso afirmativo, hallar un potencial.

12. Demostrar que los campos $\mathbf{F}$ de los apartados (a) y (b) son conservativos y determinar una función f tal que $\mathbf{F} = f$.

(a) $\mathbf{F} = \left(y^2 e^{xy^2}\right)\mathbf{i} + \left(2y\, e^{xy^2}\right)\mathbf{j}$.

(b) $\mathbf{F} = (\operatorname{sen} y)\mathbf{i} + (x \cos y)\mathbf{i} + (e^z)\mathbf{k}$.

13. (a) Sea $f(x, y, z) = 3xye^{z^2}$. Calcular ∇f.

(b) Sea $\mathbf{c}(t) = (3\cos^3 t, \operatorname{sen}^2 t, e^t)$, $0 \leq t \leq \pi$. Calcular

$$\int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s}.$$

(c) Verificar directamente el teorema de Stokes para campos vectoriales gradiente $\mathbf{F} = \nabla f$.

14. Utilizando el teorema de Green, o cualquier otro, calcular $\int_C x^3 dy - y^3 dx$, donde C es la circunferencia unidad $(x^2 + y^2 = 1)$.

15. Calcular la integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y donde S es la superficie de la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

16. (a) Enunciar el teorema de Stokes para superficies en $\mathbb{R}^3$.

(b) Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ que satisface $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Utilizar el teorema de Stokes para demostrar que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ donde C es una curva cerrada.

17. Utilizar el teorema de Green para hallar el área de un lazo de la curva $x = a \operatorname{sen}\theta \cos\theta, y = a \operatorname{sen}^2\theta$, para $a > 0$ y $0 \leq \theta \leq \pi$.

18. Calcular $\int_C yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz$, donde C es la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y la superficie $z = y^2$.

19. Calcular $\int_C (x + y)\, dx + (2x - z)\, dy + (y + z)\, dz$, donde C es el perímetro del triángulo que conecta los puntos $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 6)$, en este orden.

20. ¿Cuáles de los siguientes son campos conservativos en $\mathbb{R}^3$? Para aquellos que lo sean, hallar una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2y\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + z)\mathbf{i} - (y + z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$.

(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k}$.

21. Considérense los dos campos vectoriales siguientes en $\mathbb{R}^3$:

(I) $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$.

(II) $\mathbf{G}(x, y, z) = (x^3 - 3xy^2)\mathbf{i} + (y^3 - 3x^2y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

(a) ¿Cuál de estos campos es conservativo en $\mathbb{R}^3$ (si es que alguno lo es)? (Es decir, ¿cuál es un campo gradiente?) Razonar la respuesta.

(b) Hallar un potencial para los campos que sean conservativos.

(c) Sea α la trayectoria que va desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ siguiendo las aristas del cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ yendo desde $(0, 0, 0)$ a $(0, 0, 1)$, luego a $(0, 1, 1)$ y después a $(1, 1, 1)$. Sea β la trayectoria directa desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ siguiendo la diagonal del cubo. Hallar los valores de las integrales de línea

$$\int_\alpha \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \qquad \int_\alpha \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s},$$

$$\int_\beta \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \qquad \int_\beta \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}.$$

22. Considérese el campo vectorial *constante* $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ en $\mathbb{R}^3$.