Así, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es la matriz de transición de B_2 a B_1, de manera que

$$A = C^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición de B_1 a B_2. Como $(a_0 + a_1x + a_2x^2)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, se tiene

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2)_{B_1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{27}[-3a_0 + 6a_1 + 3a_2] \\ \frac{1}{27}[-12a_0 + 3a_1 + 12a_2] \\ \frac{1}{27}[8a_0 + 2a_1 + a_2] \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si $p(x) = 5x^2 - 3x + 4$, entonces

$$(5x^2 - 3x + 4)_{B_2} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{27} \\ \frac{21}{27} \\ \frac{31}{27} \end{pmatrix}$$

o

$$5x^2 - 3x + 4 \overset{\text{verifique esto}}{=} \frac{15}{27}(4x - 1) + \frac{21}{27}(4x^2 - x) + \frac{31}{27}(3x^2 + 3)$$

EJEMPLO 5.6.3 Conversión de una base a otra en $\mathbb{R}^2$

Sean $B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ y $B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ dos bases en $\mathbb{R}^2$. Si $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, exprese $\mathbf{x}$ en términos de los vectores de B_2.

SOLUCIÓN ► Este problema es un poco más difícil porque ninguna de las dos bases es canónica. Deben expresarse los vectores de B_1 como una combinación lineal de los vectores en B_2. Es decir, deben encontrarse constantes $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}$ tales que

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$