EJEMPLO 5.6.5 Determinación de si tres polinomios en $\mathbb{P}_2$ son linealmente dependientes o independientes

En $\mathbb{P}_2$, determine si los polinomios $3-x$, $2+x^2$ y $4+5x-2x^2$ son linealmente dependientes o independientes.

SOLUCIÓN ► Si se utiliza la base $B_1 = \{1, x, x^2\}$ se tiene $(3-x)_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(2+x^2)_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $(4+5x-2x^2)_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Entonces $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$, con lo que los polinomios son independientes.

EJEMPLO 5.6.6 Determinación de si cuatro matrices de 2 × 2 son linealmente dependientes o independientes

En $\mathbb{M}_{22}$ determine si las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

SOLUCIÓN ► Utilizando la base estándar $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ se obtiene $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$, de manera que las matrices son dependientes. Observe que $\det A = 0$ porque el cuarto renglón es la suma de los tres primeros. Además, observe que

$$-29\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 20\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo que ilustra que las cuatro matrices son linealmente dependientes.

RESUMEN 5.6

- Sean $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ dos bases para el espacio vectorial V. Si $\mathbf{x} \in V$ y

$$\mathbf{x} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \cdots + b_n\mathbf{u}_n = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

  entonces se escribe $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ y $(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

  Suponga que $(\mathbf{u}_j)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$. Entonces la **matriz de transición** de B_1 a B_2 es la matriz de $n \times n$