Integrales sobre regiones elementales

Como en el caso de las integrales en el plano, cualquier función de tres variables que sea continua en una región elemental es integrable en dicha región. Un argumento como el utilizado para las integrales dobles demuestra que una integral triple sobre una región elemental se puede expresar como una integral iterada en la que los límites de integración son funciones. En el siguiente recuadro se proporcionan las fórmulas para dichas integrales iteradas.

Integrales triples mediante integración iterada Supongamos que W es una región elemental en la que z se mueve entre dos funciones de x e y. Entonces, o bien

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

[véase la Figura 5.5.2 (izquierda)] o bien

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_c^d \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

[véase la Figura 5.5.2 (derecha)].

Si $f = 1$, obtenemos la integral $\iiint_W dx\,dy\,dz$, que es el ***volumen*** de la región W.

Ejemplo 4 Comprobar la fórmula del volumen para la bola de radio 1:

$$\iiint_W dx\,dy\,dz = \frac{4}{3}\pi,$$

donde W es el conjunto de los (x,y,z) tales que $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

Solución Utilizamos la descripción de la bola unidad del Ejemplo 3. De acuerdo con la primera fórmula del recuadro anterior, la integral es

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx.$$

Manteniendo y y x fijas e integrando con respecto a z, obtenemos

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[z \Big|_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right] dy\,dx = 2\int_{-1}^{1} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)^{1/2}\,dy \right] dx.$$

Como x es fijo en la integral con respecto a y, esta se puede expresar como $\int_{-a}^{a}(a^2-y^2)^{1/2}\,dy$, donde $a = (1-x^2)^{1/2}$. Esta integral es el área de una región semicircular de radio a, de modo que