32. La velocidad del viento $\mathbf{v}_1$ es de 40 millas por hora (mi/h) de este a oeste mientras que un avión viaja con una velocidad respecto del aire $\mathbf{v}_2$ de 100 mi/h en dirección norte. La velocidad del avión con respecto al suelo es el vector suma $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

(a) Hallar $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

(b) Hacer un dibujo a escala.

33. Una fuerza de 50 kp forma un ángulo de 50° con el eje horizontal y apunta hacia la derecha. Determinar sus componentes horizontal y vertical. Mostrar todos los resultados en una figura.

34. Dos personas tiran en horizontal de dos cuerdas atadas a un poste, el ángulo entre las cuerdas es de 60°. La persona A tira con una fuerza de 150 kp y la persona B tira con una fuerza de 110 kp.

(a) La fuerza resultante es el vector suma de las dos fuerzas. Hacer un dibujo a escala que represente gráficamente las tres fuerzas.

(b) Usando trigonometría, determinar las fórmulas de los vectores de las dos fuerzas en un sistema de coordenadas elegido convenientemente. Hacer la suma algebraica y determinar el ángulo que forma la fuerza resultante con la fuerza ejercida por A.

35. Una masa de 1-kilogramo (1-kg) situada en el origen cuelga de dos cuerdas fijadas en los puntos $(1, 1, 1)$ y $(-1, -1, 1)$. Si la fuerza de la gravedad apunta en la dirección del vector $-\mathbf{k}$, ¿cuál es el vector que describe la fuerza a lo largo de cada cuerda? [SUGERENCIA: utilizar la simetría del problema. Una masa de 1-kg pesa 9.8 newtons (N).]

36. Supóngase que sobre un objeto que se mueve en la dirección $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ se ejerce una fuerza dada por el vector $2\mathbf{i}+\mathbf{j}$. Expresar esta fuerza como la suma de una fuerza en la dirección del movimiento y una fuerza perpendicular a la dirección del movimiento.

37. Una fuerza de 6 N forma un ángulo de $\pi/4$ radianes con el eje y, y apunta hacia la derecha. La fuerza actúa en contra del movimiento de un objeto que se mueve a lo largo de la recta que une (1, 2) con (5, 4).

(a) Hallar una fórmula para el vector $\mathbf{F}$.

(b) Hallar el ángulo θ que forman la dirección de desplazamiento $\mathbf{D} = (5-1)\mathbf{i} + (4-2)\mathbf{j}$ y la dirección de $\mathbf{F}$.

(c) El ***trabajo realizado*** es $\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$, o, equivalentemente, $\|\mathbf{F}\|\|\mathbf{D}\|\cos\theta$. Calcular el trabajo usando ambas fórmulas y compararlo.

38. Demostrar que en cualquier paralelogramo la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de las dos diagonales.

39. Utilizando vectores, demostrar que las diagonales de un rectángulo son perpendiculares si y solo si el rectángulo es un cuadrado.

1.3 Matrices, determinantes y el producto vectorial

En la Sección 1.2 hemos definido un producto de vectores que era un escalar. En esta sección, definiremos un producto de vectores que es un vector; es decir, veremos cómo, dados dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, podemos obtener un tercer vector $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, llamado *producto vectorial* de $\mathbf{a}$ por $\mathbf{b}$. Este nuevo vector tendrá la importante propiedad geométrica de que es perpendicular al plano generado (determinado) por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. La definición del producto vectorial se basa en los conceptos de matriz y determinante, los cuales vamos a desarrollar en primer lugar. Después estudiaremos las implicaciones geométricas de la estructura matemática construida.

Matrices 2×2

Definimos una ***matriz*** 2×2 como una tabla u ordenación (*array*)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$