mente 1 (si en la expresión anterior hacemos $y = 0$, obtenemos $x^2/x^2 = 1$). Si (x, y) se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de la recta $x = 0$, el valor límite es

$$\lim_{y \to 0} \frac{0^2}{0^2 + y^2} = 0 \neq 1.$$

Por tanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2/(x^2 + y^2)$ no existe.

(b) Observe que

$$\left| \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{2x^2 y}{x^2} \right| = 2|y|.$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, se elige $\delta = \varepsilon/2$; entonces $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ implica que $|y| < \delta$, y por tanto

$$\left| \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < 2\delta = \varepsilon.$$

▲

El uso de la notación ε-δ, nos lleva a la siguiente reformulación de la definición de continuidad .

Teorema 7 Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada. Entonces f es continua en $\mathbf{x}_0 \in A$ si y solo si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in A \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \quad \text{implica} \quad \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$

La demostración es casi inmediata. Obsérvese que en el Teorema 6 insistimos en que $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$; es decir, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Esta condición *no* se impone aquí; de hecho, la conclusión del Teorema 7 es ciertamente válida cuando $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, y por tanto no hay necesidad de excluir este caso. Aquí nos importa el valor de f en $\mathbf{x}_0$; queremos que en los puntos cercanos f se aproxime a *este* valor.

Ejercicios

En los siguientes ejercicios, el lector puede suponer que las funciones exponencial, seno y coseno son continuas y puede emplear libremente técnicas del cálculo de una variable, tales como la regla de L'Hôpital.

1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} f(x, y) = 5$$

¿Qué podemos decir acerca del valor $f(1, 3)$?

2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua y supóngase que

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} f(x, y) = 5$$

¿Qué podemos decir acerca del valor $f(1, 3)$?