Ejemplo 3 Considérese $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. Sea S la esfera unidad definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

Solución Por el teorema de Gauss,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_W (\operatorname{div} \mathbf{F})\, dV,$$

donde W es la bola acotada por la esfera. La integral de la derecha es

$$2\iiint_W (1 + y + z)\, dV = 2\iiint_W dV + 2\iiint_W y\, dV + 2\iiint_W z\, dV.$$

Por simetría, podemos razonar que $\iiint_W y\, dV = \iiint_W z\, dV = 0$ (véase el Ejercicio 21 de la Sección 6.3). Por tanto, puesto que una esfera de radio R tiene un volumen de $4\pi R^3/3$,

$$2\iiint_W (1 + y + z)\, dV = 2\iiint_W dV = \frac{8\pi}{3}.$$

El lector puede comprobar por sí mismo que el cálculo directo de $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ es inmanejable. ▲

Ejemplo 4 Utilizar el teorema de la divergencia para calcular

$$\iint_{\partial W} (x^2 + y + z)\, dS,$$

donde W es la bola sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Solución Para aplicar el teorema de la divergencia de Gauss, hallamos un campo vectorial $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ sobre W tal que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = x^2 + y + z$. En cualquier punto $(x, y, z) \in \partial W$, la normal unitaria exterior $\mathbf{n}$ a ∂W es

$$\mathbf{n} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

ya que sobre $\partial W, x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el radio vector $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es normal a la esfera ∂W (Figura 8.4.6).

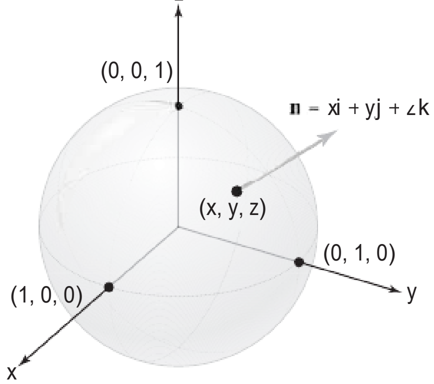

Figura 8.4.6 $\mathbf{n}$ es la normal unitaria a ∂W, la frontera de la bola W.

Por tanto, si $\mathbf{F}$ es el campo vectorial deseado, entonces