

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si \mathbf{r}_i denota el i -ésimo renglón de A , se ve de la ecuación anterior que $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{x} = 0$ para $i = 1, 2, \dots, m$. Así, si $\mathbf{x} \in N_A$, entonces $\mathbf{r}_i \perp \mathbf{x}$ para $i = 1, 2, \dots, m$. Pero si $\mathbf{y} \in R_A$, entonces $\mathbf{y} = c_1 \mathbf{r}_1 + \cdots + c_m \mathbf{r}_m$, para algunas constantes c_1, c_2, \dots, c_m . Entonces $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = (c_1 \mathbf{r}_1 + c_2 \mathbf{r}_2 + \cdots + c_m \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{x} = c_1 \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{x} + c_2 \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{x} + \cdots + c_m \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{x} = 0$, lo que prueba la afirmación.

En el ejemplo 5.7.7, $R_A = \text{gen} \{(1, 0, -32, 31), (0, 1, 14, -14)\}$ y $N_A = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 32 \\ -14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -31 \\ 14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

El lector debe verificar que los vectores de la base para R_A , en efecto, son ortogonales a los vectores de la base para N_A .

El siguiente teorema da la relación entre el rango y la nulidad.

Teorema 5.7.7

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces

$$\rho(A) + \nu(A) = n$$

Es decir, el rango de A más la nulidad de A es igual al número de columnas de A .



Demostración

Se supone que $k = \rho(A)$ y que las primeras k columnas de A son linealmente independientes. Sea \mathbf{c}_i ($i > k$) cualquier otra columna de A . Como $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_k$ forman una base para C_A , se tiene, para algunos escalares a_1, a_2, \dots, a_k ,

$$\mathbf{c}_i = a_1 \mathbf{c}_1 + a_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + a_k \mathbf{c}_k$$

Así, sumando $-a_1 \mathbf{c}_1, -a_2 \mathbf{c}_2, \dots, -a_k \mathbf{c}_k$ sucesivamente a la i -ésima columna de A , se obtiene una nueva matriz B de $m \times n$ con $\rho(B) = \rho(A)$ y $\nu(B) = \nu(A)$ con la columna i de B igual a $\mathbf{0}$.* Esto se hace a todas las demás columnas de A (excepto las primeras k) para obtener la matriz

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\rho(D) = \rho(A)$ y $\nu(D) = \nu(A)$. Mediante un posible reacomodo de los renglones de D , se puede suponer que los primeros k renglones son independientes. Después se hace lo mismo con los renglones de D (esto es, sumar múltiplos de los primeros k renglones a los últimos $m - k$) para obtener una nueva matriz:

* Esto se deduce considerando A^T (las columnas de A son los renglones de A^T).