ta el estado de interés por una matriz que representa la transición entre los estados, esto es $\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k$, donde $\mathbf{x}_k$ representa el estado en el tiempo actual, $\mathbf{x}_{k+1}$ es el estado en el tiempo siguiente y P es la **matriz de transición** que tiene la propiedad de que la suma de sus columnas es igual a 1.

Matriz de transición

Como ejemplo tenemos una empresa que realiza estudios de mercado y está estudiando los patrones de compra para tres productos que son competidores entre sí. La empresa ha determinado el porcentaje de residentes de casas que cambiarían de un producto a otro después de un mes (suponga que cada residente compra uno de los tres productos y que los porcentajes no cambian de un mes a otro). Esta información se presenta en forma de matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.05 \\ 0.05 & 0.75 & 0.05 \\ 0.15 & 0.05 & 0.9 \end{pmatrix}$$

donde el elemento p_{ij} es el porcentaje que cambia del producto j al producto i. Por ejemplo, $p_{12} = 0.2$ significa que 20% de los residentes que compran el producto 2 cambia al producto 1 después de un mes.

Observe que $P^n\mathbf{x}$ representa cuántos residentes están utilizando cada producto después de n meses. Si consideramos dos condiciones iniciales tales que la suma de los residentes sean 60 000, por ejemplo

$$\mathbf{x}_a = \begin{pmatrix} 60\,000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_b = \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 40\,000 \\ 18\,000 \end{pmatrix}$$

y calculamos $P^{25}\mathbf{x}_a$, obtenemos

$$P^{25}\mathbf{x}_a = \begin{pmatrix} 18\,013.05 \\ 9\,998.6 \\ 31\,988.29 \end{pmatrix}, \quad P^{25}\mathbf{x}_b = \begin{pmatrix} 18\,043.62 \\ 10\,004.02 \\ 31\,952.36 \end{pmatrix}$$

Si ahora repetimos el cálculo para $P^{50}\mathbf{x}_a$, $P^{50}\mathbf{x}_b$ obtenemos

$$P^{50}\mathbf{x}_a = \begin{pmatrix} 18\,000.01 \\ 10\,000.00 \\ 31\,999.99 \end{pmatrix}, \quad P^{50}\mathbf{x}_b = \begin{pmatrix} 18\,000.04 \\ 10\,000.00 \\ 31\,999.96 \end{pmatrix}$$

lo cual nos sugiere que para cualquier $\mathbf{x}$ tal que la suma de sus elementos sean 60 000

$$\lim_{n\to\infty} P^n\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 18\,000 \\ 10\,000 \\ 32\,000 \end{pmatrix}$$

Nota

Código de MATLAB:

```
P=[.8,.2,.05;
.05,.75,.05;
.15.05.9];
xa=[60e3;0;0];
xb=[2e3;40e3;18e3];
P25=P^25;
P50=P^50;
P25xa=P25*xa
P25xb=P25*xb
P50xa=P50*xa
P50xb=P50*xb
```

La notación con $\sum$

Una suma[4] se puede escribir de la siguiente manera, si $N \geq M$.

$$\boxed{a_M + a_{M+1} + a_{M+2} + \cdots + a_n = \sum_{k=M}^{N} a_k} \qquad \textbf{(2.2.11)}$$