Ejemplo 8 Hallar el rotacional de $xy\mathbf{i} - \operatorname{sen} z\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución Sea $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - \operatorname{sen} z\mathbf{j} + \mathbf{k}$,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & -\operatorname{sen} z & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\operatorname{sen} z & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ xy & -\operatorname{sen} z \end{vmatrix} \mathbf{k} \\
&= \cos z\mathbf{i} - x\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

▲

A diferencia de la divergencia, que se puede definir en $\mathbb{R}^n$ para cualquier n, definimos el rotacional solo en el espacio tridimensional (o para campos vectoriales en el plano, suponiendo que su tercera componente es cero).

Rotacional y rotaciones

El significado físico del rotacional se verá en el Capítulo 8, al estudiar el teorema de Stokes. No obstante, ahora vamos a abordar una situación concreta en la que el rotacional está asociado con rotaciones.

Ejemplo 9 Consideremos un sólido rígido B que gira alrededor de un eje L. El movimiento de rotación del cuerpo se puede describir mediante un vector $\boldsymbol{\omega}$ a lo largo del eje de rotación, eligiéndose la dirección de manera que el cuerpo gire alrededor de $\boldsymbol{\omega}$, como se muestra en la Figura 4.4.7. Denominamos $\boldsymbol{\omega}$ al ***vector velocidad angular***. La longitud $\omega = \|\boldsymbol{\omega}\|$ se toma para que sea la velocidad angular del cuerpo B; es decir, la velocidad de cualquier punto de B dividida entre su distancia al eje L de rotación. El movimiento de los puntos del cuerpo giratorio lo describe el campo vectorial $\mathbf{v}$ cuyo valor en cada punto es la velocidad en dicho punto. Para hallar $\mathbf{v}$, sea Q un punto cualquiera en B y sea α la distancia entre Q y L.

La Figura 4.4.7 muestra que $\alpha = \|\mathbf{r}\| \operatorname{sen} \theta$, donde $\mathbf{r}$ es el vector cuyo extremo inicial está en el origen y cuyo extremo final está en el punto Q y θ es el ángulo formado entre $\mathbf{r}$ y el eje de rotación L. La velocidad tangencial $\mathbf{v}$ de Q se dirige en sentido antihorario a lo largo de la tangente a una circunferencia paralela al plano xy de radio α y magnitud

$$\|\mathbf{v}\| = \omega\,\alpha = \omega\|\mathbf{r}\| \operatorname{sen} \theta = \|\boldsymbol{\omega}\|\|\mathbf{r}\| \operatorname{sen} \theta.$$

La dirección y la magnitud de $\mathbf{v}$ implican que $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Seleccionando un sistema de coordenadas en el que L sea el eje z, podemos escribir $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Entonces,

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -\,\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j},$$

y por tanto