$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 \qquad &= 0 \\ -2c_1 - 2c_2 + \ c_3 &= 0 \\ 3c_1 \qquad + 7c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

De este modo, los vectores serán linealmente dependientes si y sólo si el sistema (5.4.4) tiene soluciones no triviales. Se escribe el sistema (5.4.4) usando una matriz aumentada y después se reduce por renglones. La forma escalonada reducida por renglones de

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right) \text{ es } \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Este último sistema de ecuaciones se lee $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Por lo tanto, (5.4.4) no tiene soluciones no triviales y los vectores dados son linealmente independientes.

EJEMPLO 5.4.4 Determinación de la dependencia lineal de tres vectores en $\mathbb{R}^3$

Determine si los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

SOLUCIÓN ► La ecuación $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ conduce al sistema homogéneo

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 + 11c_3 &= 0 \\ -3c_1 \qquad - \ 6c_3 &= 0 \\ 4c_2 + 12c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{5.5.5}$$

Escribiendo el sistema (5.5.5) en la forma de matriz aumentada y reduciendo por renglones, se obtiene

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 11 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 9 & 27 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nos podemos detener aquí, ya que la teoría de la sección 1.4 muestra que el sistema (5.5.5) tiene un número infinito de soluciones. Por ejemplo, la última matriz aumentada se lee

$$\begin{aligned} c_1 \qquad + 2c_3 &= 0 \\ c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Si se hace $c_3 = 1$, se tiene $c_2 = -3$ y $c_1 = -2$, de manera que, como puede verificarse,