eje z. Véase la Figura 7.4.2. Da dos vueltas, ya que θ va hasta 4π.

(b) $\mathbf{n} = \pm(1/\sqrt{1+r^2})(\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r)$.

(c) $y_0 x - x_0 y + (x_0^2 + y_0^2)z = (x_0^2 + y_0^2)z_0$.

(d) Si $(x_0, y_0, z_0) = (r_0, \cos\theta_0, r_0 \operatorname{sen}\theta_0, \theta_0)$, representando el segmento de recta de la forma $\{(r\cos\theta_0, r\operatorname{sen}\theta_0, \theta_0) | 0 \le r \le 1\}$ se demuestra que la recta está en la superficie. Representando la recta como $\{(x_0, ty_0, z_0) | 0 \le t \le 1/(x_0^2 + y_0^2)\}$ y sustituyendo en los resultados del apartado (c) se demuestra que está en el plano tangente a (x_0, y_0, z_0).

19. (a) El uso de coordenadas cilíndricas nos lleva a la parametrización

$$\Phi(z, \theta) = (\sqrt{25+z^2}\cos\theta, \sqrt{25+z^2}\operatorname{sen}\theta, z),$$
$$-\infty < z < \infty, 0 \le \theta \le 2\pi$$

como una posible solución.

(b) $\mathbf{n} = (\sqrt{25+z^2}\cos\theta, \sqrt{25+z^2}\operatorname{sen}\theta, -z)/\sqrt{25+2z^2}$.

(c) $x_0 x + y_0 y = 25$.

(d) Sustituir las coordenadas de las rectas en la ecuación que define la superficie y en el resultado del apartado (c).

21. (a) $u \mapsto u, v \mapsto v, u \mapsto u^3$ y $v \mapsto v^3$ aplican $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

(b) $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = (0, 0, 1)$ para Φ_1, que nunca es $\mathbf{0}$. Para la superficie Φ_2, $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = 9u^2v^2(0, 0, 1)$, y esto es $\mathbf{0}$ a lo largo de los ejes u y v.

(c) Queremos demostrar que cualesquiera dos parametrizaciones suaves de una superficie cerca de un punto darán el mismo plano tangente. Por tanto, supongamos que $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\Psi: B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ son superficies parametrizadas tales que

$$\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0) = \Psi(s_0, t_0) \qquad \text{(I)}$$

y

$$\left(\mathbf{T}_u^\Phi \times \mathbf{T}_v^\Phi\right)\Big|_{(u_0, v_0)} \ne \mathbf{0}$$

$$\text{y} \qquad \left(\mathbf{T}_s^\Psi \times \mathbf{T}_t^\Psi\right)\Big|_{(s_0, t_0)} \ne \mathbf{0}, \qquad \text{(II)}$$

de modo que Φ y Ψ son suaves e inyectivas en las proximidades de (u_0, v_0) y (s_0, t_0), que podemos suponer que están en D y B. Suponemos además que "describen la misma superficie", es decir, $\Phi(D) = \Phi(B)$. Para comprobar que dan el mismo plano tangente en (x_0, y_0, z_0), demostramos que tienen vectores normales paralelos. Para ello, demostramos que existe un conjunto abierto C con $(u_0, v_0) \in C \subset D$ y una aplicación diferenciable $f: C \to B$ tal que $\Phi(u, v) = \Psi(f(u, v))$ para $(u, v) \in C$. Una vez hecho esto, un cálculo demuestra que los vectores normales están relacionados por $\mathbf{T}_u^\Phi \times \mathbf{T}_v^\Phi = [\partial(s,t)/\partial(u,v)]\mathbf{T}_s^\Psi \times \mathbf{T}_t^\Psi$.

Para demostrar que existe tal f, obsérvese que puesto que $\mathbf{T}_s^\Psi \times \mathbf{T}_t^\Psi \ne \mathbf{0}$, al menos uno de los determinantes 2×2 del producto vectorial no es cero. Suponemos, por ejemplo, que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \ne 0.$$

Ahora utilizamos el teorema de la función inversa para expresar (s, t) como una función diferenciable de (x, y) en algún entorno de (x_0, y_0).

(d) No.

23. (a) Introducimos la parametrización en el lado izquierdo de la ecuación y simplificamos:

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \\
&= \Big(\sqrt{((R + r\cos u)\cos v)^2 + ((R + r\cos u)\operatorname{sen} v)^2} \\
&\qquad - R\Big)^2 + (r\operatorname{sen} u)^2 \\
&= (\sqrt{(R + r\cos u)^2} - R)^2 + r^2\operatorname{sen}^2 u \\
&= (R + r\cos u - R)^2 + r^2\operatorname{sen}^2 u \\
&= (r\cos u)^2 + r^2\operatorname{sen}^2 u = r^2.
\end{aligned}$$

(b) Calculamos el elemento normal asociado

$$\begin{aligned} T_u \times T_v = (&-r\cos u\cos v(R + r\cos u), \\ &-r\cos u\operatorname{sen} v(R + r\cos u), \\ &-r\operatorname{sen} u(R + r\cos u)) \end{aligned}$$

y determinamos que es distinto del vector cero para cualquier elección de (u, v).

Sección 7.4

1. 4π .

3. $\dfrac{3}{2}\pi[\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})]$.

5. (a) $(e^u \operatorname{sen} v, -e^u\cos v, e^{2u})$.

(b) $x + z = \dfrac{\pi}{2}$.