$$= \begin{pmatrix} f_1(n_1(t)) + f_2(n_2(t)) + f_3(n_3(t)) + \cdots + f_{\omega-1}(n_{\omega-1}(t)) + f_\omega(n_\omega(t)) \\ p_1(n_1(t)) \\ p_2(n_2(t)) \\ p_3(n_3(t)) \\ \vdots \\ p_{\omega-1}(n_{\omega-1}(t)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \\ \vdots \\ n_\omega(t+1) \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{n}(t+1)$$

Entonces, por esto se observa que

$$\mathrm{n}(t+1) = L\mathrm{n}(t)$$

Entonces, puede encontrarse

$$\begin{aligned} \mathrm{n}(t+2) &= L\mathrm{n}(t+1) \\ &= L(L\mathrm{n}(t)) \\ &= L^2\mathrm{n}(t) \end{aligned}$$

Así, de manera general se deduce por inducción que para cada tiempo $t + x$,

$$\mathrm{n}(t+x) = L^x\mathrm{n}(t)$$

Ahora se observa que proyectar hacia el futuro se vuelve un proceso de calcular potencias de una matriz. Una forma sencilla de obtener una aproximación razonable a estas potencias altas es usando la descomposición espectral, que revela algunas conexiones interesantes entre la estructura de equilibrio de la población y los vectores/valores propios. La descomposición espectral es muy similar a la descomposición de rango uno (Beezer, 2007).

Descomposición espectral

Teorema 1

Existe una descomposición espectral de una matriz A tal que

$$A = \sum_{k=1}^{\omega} \lambda_k T_k$$

Donde $T_k = \mathrm{e}_k \otimes \varepsilon_k$, el producto externo de los vectores propios derechos e izquierdos.

Demostración

La demostración es constructiva. Para demostrar que la descomposición espectral existe, se inicia creando una matriz R cuyas columnas son los vectores derechos propios para la matriz A. El vector derecho propio (e) es un vector propio como se han usado anteriormente, donde $A\mathrm{e} = \lambda\mathrm{e}$.