Integrales de 2-formas sobre superficies

De manera similar, una 2-forma η sobre un conjunto abierto $K \subset \mathbb{R}^3$ puede ser interpretada como una función que asocia un número real a cada superficie orientada $S \subset K$. Esto se consigue mediante la noción de integración de 2-formas sobre superficies. Sea

$$\eta = F(x, y, z)\ dx\ dy + G(x, y, z)\ dy\, dz + H(x, y, z)\, dz\, dx$$

una 2-forma sobre K y sea $S \subset K$ una superficie orientada parametrizada por una función $\mathbf{\Phi}\colon D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{\Phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ (véase la Sección 7.3).

Definición Si S es tal superficie y η es una 2-forma sobre K, definimos $\iint_S \eta$ mediante la fórmula

$$\begin{aligned}\iint_S \eta &= \iint_S F\ dx\ dy + G\ dy\, dz + H\ dz\ \ dx \\ &= \iint_D \bigg[F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \\ &\quad + G(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \\ &\quad + H(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \bigg] du\, dv,\end{aligned} \tag{2}$$

donde

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Si S está formada por varios trozos $S_i, i = 1, \ldots, k$, como en la Figura 8.4.4, cada uno de ellos con su propia parametrización $\mathbf{\Phi}_i$, definimos

$$\iint_S \eta = \sum_{i=1}^{k} \iint_{S_i} \eta.$$

Debemos verificar que $\iint_S \eta$ no depende de la elección de la parametrización $\mathbf{\Phi}$. Este resultado está básicamente (aunque no obviamente) contenido en el Teorema 4 de la Sección 7.6.