(incluyendo el techo y la zona que está en contacto con la colina) produce un flujo de calor. ¿Cuál es el flujo de calor total? (La respuesta dependerá de $R$ y $k$.)

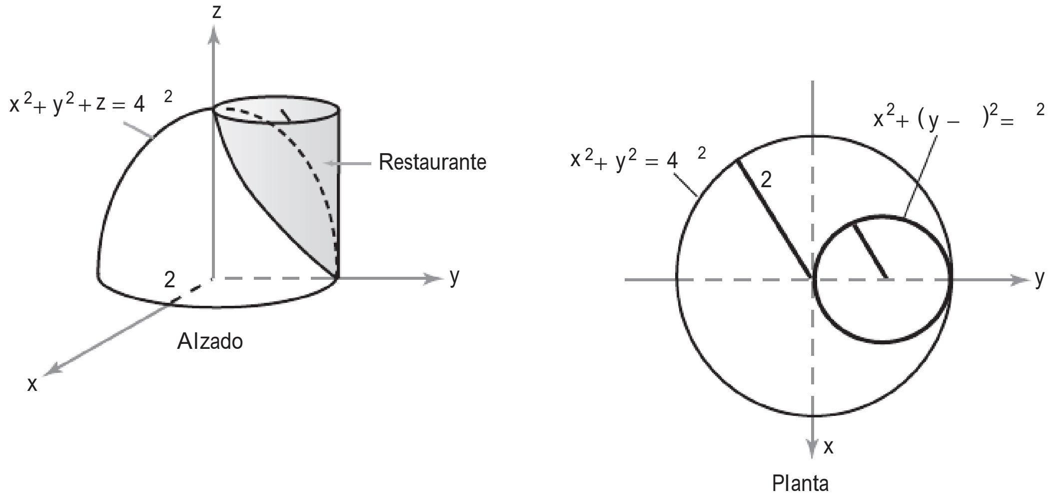


**Figura 7.6.11** Planos del restaurante.

**13.** Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{V}(x, y, z) = 3xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ que sale de la esfera unidad.

**14.** Calcular la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dA$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z(x^2 + y^2)^2\mathbf{k}$ y $S$ es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

**15.** Sea $S$ la superficie de la esfera unidad. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial y $F_r$ su componente radial. Probar que

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi} F_r \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta.$$

¿Cuál es la fórmula corerspondiente para funciones $f$ con valores reales?

**16.** Probar el siguiente teorema del valor medio para integrales de superficie: si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo, entonces

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = [\mathbf{F}(\mathrm{Q})\cdot\mathbf{n}(\mathrm{Q})]A(S)$$

para algún punto $\mathrm{Q} \in S$, donde $A(S)$ es el área de $S$. [SUGERENCIA: probarlo primero para funciones reales, reduciendo el problema a una integral doble. Demostrar que si $g \geq 0$, entonces

$$\iint_D fg\, dA = f(\mathrm{Q})\iint_D g\, dA$$

para algún $\mathrm{Q} \in D$ (hacer esto considerando $(\iint_D fg\, dA)/(\iint_D g\, dA)$ y utilizando el teorema del valor intermedio)].

**17.** Obtener una fórmula como la del Ejercicio 15 para la integración sobre la superficie de un cilindro.

**18.** Sea $S$ una superficie en $\mathbb{R}^3$ que realmente es un subconjunto $D$ del plano $xy$. Demostrar que la integral de una función escalar $f(x, y, z)$ sobre $S$ se reduce a la integral doble de $f(x, y, z)$ sobre $D$. ¿En qué se convierte la integral de superficie de un campo vectorial sobre $S$? (La respuesta debe ser compatible con el Ejemplo 6.)

**19.** El campo de velocidades de un fluido está descrito por $\mathbf{F} = \mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (medido en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo atraviesan la superficie descrita por $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.

**20.** (a) Un fluido uniforme que fluye verticalmente hacia abajo (lluvia fuerte) se describe mediante el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, -1)$. Hallar el flujo total a través del cono $z = (x^2 + y^2)^{1/2}, x^2 + y^2 \leq 1$.

(b) Un fuerte viento desvía lateralmente la lluvia, de modo que esta cae formando un ángulo de 45° y queda descrita por $\mathbf{F}(x, y, z) = -(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$. ¿Cuál es ahora el flujo a través del cono?

**21.** Para $a > 0, b > 0, c > 0$, sea $S$ la mitad superior del elipsoide