Teorema $3'$ Teorema de Fubini Sea f una función acotada con dominio en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, y supongamos que las discontinuidades de f se encuentran en una unión finita de gráficas de funciones continuas. Si la integral $\int_c^d f(x, y)\, dy$ existe para cada $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx$$

existe y

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

Del mismo modo, si $\int_a^b f(x, y)\, dx$ existe para cada $y \in [c, d]$, entonces

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy$$

existe y

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

Por tanto, si todas estas condiciones se cumplen simultáneamente,

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

Las hipótesis para esta versión del teorema de Fubini son más complicadas que las hechas para el Teorema 3. Son necesarias porque si, por ejemplo, f no es continua en todo el dominio, no hay garantía de que exista $\int_c^d f(x, y)\, dy$ para cada x.

Ejemplo 1 Calcular $\iint_R (x^2 + y)\, dA$, donde R es el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

Solución Por el teorema de Fubini,

$$\iint_R (x^2 + y)\, dA = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2 + y)\, dx\right] dy.$$

Por el teorema fundamental del cálculo, podemos integrar con respecto a x:

$$\int_0^1 (x^2 + y)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + yx\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{3} + y.$$

Por tanto,