



Figura 7.4.4 Teorema de Arquímedes: las proporciones de los volúmenes de un cono, una semiesfera y un cilindro, todos ellos con la misma altura y el mismo radio, son 1:2:3.

Arquímedes estaba increíblemente orgulloso de su cálculo del volumen y el área de la superficie de la esfera, lo que de forma totalmente justificada se consideró un gran logro en la época. En su trabajo sobre los centros de gravedad, para los que no proporcionó una definición clara, Arquímedes fue capaz de calcular el área de la superficie de la esfera sin disponer de una definición clara de qué era de forma precisa. Sin embargo, como con muchos trabajos matemáticos, se conoce la respuesta mucho antes de que pueda tener una demostración o incluso la definición correcta.

El problema de definir de forma apropiada el área de una superficie es difícil. Diremos en descargo de Arquímedes que hasta el siglo XX no se consiguió establecer una teoría rigurosa sobre las áreas de superficies, después de un largo desarrollo que comenzó en el siglo XVII con el descubrimiento del cálculo.

Christiaan Huygens (1629–1695) fue la primera persona desde Arquímedes en dar resultados sobre las áreas de superficies especiales distintas de la esfera y obtuvo las áreas de porciones de superficies de revolución, tales como el paraboloide y el hiperboloide.

El brillante y prolífico matemático Leonhard Euler (1707–1783) presentó el primer trabajo fundamental sobre la teoría de superficies, en 1760, en su obra *Recherches sur la courbure des surfaces*. Sin embargo, fue en 1728, en un artículo sobre trayectorias más cortas sobre superficies, que Euler definió una superficie como una gráfica $z = f(x, y)$. Euler estaba interesado en estudiar la curvatura de las superficies y, en 1771, presentó el concepto de las superficies parametrizadas que se describen en esta sección.

Tras el rápido desarrollo del cálculo a principios del siglo XVIII, se desarrollaron las fórmulas para las longitudes de curvas y áreas de superficies. Aunque no sabemos cuándo aparecieron por primera vez todas las fórmulas para el cálculo de áreas presentadas en esta sección, estamos seguros de que se conocían a finales del siglo XVIII. Los conceptos subyacentes de longitud de una curva y del área de una superficie se comprendían intuitivamente antes de esta época y el uso de fórmulas de cálculo para hallar áreas fue considerado un gran avance.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) fue el primero en dar el paso de definir los conceptos de longitud y área de una superficie mediante integrales como hemos hecho en este libro. La cuestión de definir el área de una superficie sin usar integrales se abordó algo más tarde, pero esto planteó muchos problemas complicados que no fueron apropiadamente resueltos hasta el siglo XX.

Las esferas de Arquímedes se pueden encontrar en la naturaleza, desde las formas de las estrellas y los planetas hasta las pompas de jabón. La Figura 7.4.5 muestra a un muchacho haciendo una pompa de jabón.

Hacer pompas de jabón es un antiguo pasatiempo. Incluso en el Louvre hay un jarrón etrusco en el que aparecen retratados unos niños haciendo pompas. ¿Se ha preguntado el lector por qué las pompas de jabón son esféricas y no cúbicas?