Nota. De acuerdo con el teorema de resumen, A_T es invertible si y sólo si $\rho(A_T) = 2$. Pero según el teorema 7.3.4, $\rho(A_T) = \rho(A)$. Esto significa que A_T es invertible respecto a todas las bases en $\mathbb{R}^2$ o es invertible respecto a ninguna.

EJEMPLO 7.3.10 Descomposición de una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ en una sucesión de expansiones, compresiones, cortes y reflexiones

Considere la transformación $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con representación matricial $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Usando la técnica de la sección 2.6 (vea el ejemplo 2.6.3), A_T se puede escribir como el producto de tres matrices elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.3.4}$$

Ahora

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ representa un corte a lo largo del eje y (con $c = 3$)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ representa un corte a lo largo del eje x (con $c = 2$)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ representa una expansión a lo largo del eje y (con $c = 2$) seguida de una reflexión respecto al eje x.

Así, para aplicar T a un vector en $\mathbb{R}^2$, se tiene que

i) Cortar a lo largo del eje x con $c = 2$.
ii) Expandir a lo largo del eje y con $c = 2$.
iii) Reflejar respecto al eje x.
iv) Cortar a lo largo del eje y con $c = 3$.

Observe que estas operaciones se realizan en el orden inverso en que se escriben las matrices en (7.3.4).

Para ilustrar esto, suponga que $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Entonces

$$T\mathbf{v} = A_T\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Usando las operaciones i) a iv) se tiene que

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Corte}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Expansión}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Reflexión}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Corte}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En la figura 7.11 se bosquejan estos pasos.