(d) $$\int_0^1 \int_1^{e^x} dy\, dx = \int_1^e \int_{\ln y}^1 dx\, dy$$

7. Si $f(x,y) = e^{\operatorname{sen}(x+y)}$ y $D = [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$, demostrar que

$$\frac{1}{e} \le \frac{1}{4\pi^2} \iint_D f(x,y)\; dA \le e.$$

8. Demostrar que

$$\frac{1}{2}(1-\cos 1) \le \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4} dx\; dy \le 1.$$

9. Si $D = [-1,1] \times [-1,2]$, demostrar que

$$1 \le \iint_D \frac{dx\; dy}{x^2+y^2+1} \le 6.$$

10. Utilizando la desigualdad del valor medio, demostrar que

$$\frac{1}{6} \le \iint_D \frac{dA}{y-x+3} \le \frac{1}{4},$$

donde D es el triángulo con vértices en (0, 0), (1, 1) y (1, 0).

11. Calcular el volumen de un elipsoide con semiejes a, b y c. (SUGERENCIA: utilizar simetría y calcular en primer lugar el volumen de medio elipsoide.)

12. Calcular $\iint_D f(x,y)\, dA$, donde $f(x,y) = y^2\sqrt{x}$ y D es el conjunto de puntos (x,y), donde $x > 0$, $y > x^2$ e $y < 10 - x^2$.

13. Hallar el volumen de la región determinada por $x^2 + y^2 + z^2 \le 10, z \ge 2$. Utilizar el método del disco del cálculo de una variable y explicar cómo el método está relacionado con el principio de Cavalieri.

14. Calcular $\iint_D e^{x-y} dx\; dy$, donde D es el interior del triángulo con vértices en $(0,0)$, $(1,3)$ y $(2,2)$.

15. Calcular $\iint_D y^3(x^2+y^2)^{-3/2} dx\; dy$, donde D es la región determinada por las condiciones $\frac{1}{2} \le y \le 1$ y $x^2 + y^2 \le 1$.

16. Sabiendo que la integral doble $\iint_D f(x,y)\; dx\; dy$ de una función continua positiva f es igual a la integral iterada $\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} f(x,y)\; dy\right] dx$, dibujar la región D y cambiar el orden de integración.

17. Sabiendo que la integral doble $\iint_D f(x,y)\; dx\; dy$ de una función continua positiva f es igual a la integral iterada $\int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\; dx\right] dy$, dibujar la región D y cambiar el orden de integración.

18. Demostrar que

$$2\int_a^b \int_x^b f(x)f(y)\; dy\; dx = \left(\int_a^b f(x)\; dx\right)^2$$

SUGERENCIA: téngase en cuenta que

$$\left(\int_a^b f(x)\; dx\right)^2 = \iint_{[a,b]\times[a,b]} f(x)f(y)\; dx\; dy$$

19. Demostrar que (véase la Sección 2.5, Ejercicio 29)

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \int_c^d f(x,y,z)\; dz\; dy =$$
$$\int_c^d f(x,y,z)\; dz + \int_a^x \int_c^d f_x(x,y,z)\; dz\; dy.$$

5.5 La integral triple

Las integrales triples son necesarias en muchos problemas de física. Por ejemplo, si la temperatura interior de un horno no es uniforme, determinar la temperatura media implica "sumar" los valores de la función de temperatura en todos los puntos de la región sólida delimitada por las paredes del horno y después dividir el resultado entre el volumen del mismo. Tal suma se expresa matemáticamente como una integral triple.