25. Sea $\mathbf{F} = (x\cos y)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} y)\mathbf{j} + (\operatorname{sen} x)\mathbf{k}$. Hallar un campo $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$.

26. Utilizando diferentes trayectorias de $(0,0,0)$ a (x,y,z), demostrar que la función f definida en la demostración del Teorema 7 para la "condición (II) implica la condición (III)" satisface $\partial f/\partial x = F_1$ y $\partial f/\partial y = F_2$.

27. Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

(a) Demostrar que $\mathbf{F}$ es rotacional, es decir, que $\mathbf{F}$ no es irrotacional.

(b) Supongamos que $\mathbf{F}$ representa el campo de velocidades de un fluido. Demostrar que si colocamos un corcho en este fluido, girará en un plano paralelo al plano xy, siguiendo una trayectoria circular alrededor del eje z.

(c) ¿En qué sentido girará el corcho?

28. Sea $\mathbf{G}$ el campo vectorial en $\mathbb{R}^3\backslash\{$ eje$z\}$ definido por

$$\mathbf{G} = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}.$$

(a) Demostrar que $\mathbf{G}$ es irrotacional.

(b) Demostrar que el resultado del Ejercicio 27(b) se cumple también para $\mathbf{G}$.

(c) ¿Cómo podemos explicar el hecho de que las trayectorias de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ sean iguales (circular alrededor del eje z) aunque $\mathbf{F}$ sea rotacional y $\mathbf{G}$ no lo sea? [SUGERENCIA: la propiedad de ser rotacional es una condición local, es decir, una propiedad del fluido en las proximidades de un punto].

29. Sea $\mathbf{F} = -(GmM\mathbf{r}/r^3)$ el campo de fuerza gravitatoria definido en $\mathbb{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}$.

(a) Demostrar que div $\mathbf{F} = 0$.

(b) Demostrar que $\mathbf{F} \neq$ rot $\mathbf{G}$ para cualquier campo vectorial $\mathbf{G}$ de clase C^1 en $\mathbb{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}$.

8.4 Teorema de Gauss

El teorema de Gauss establece que el flujo de un campo vectorial hacia el exterior de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de dicho campo vectorial sobre el volumen encerrado por la superficie. Es un resultado paralelo a los teoremas de Stokes y de Green en el sentido de que relaciona una integral sobre un objeto geométrico cerrado (curva o superficie) con una integral sobre la región contenida (superficie o volumen).

Regiones elementales y sus fronteras

Comenzamos pidiendo al lector que repase las distintas regiones elementales en el espacio que hemos presentado al hablar de la integral de volumen; estas regiones se ilustran en las Figuras 5.5.2 y 5.5.4. Como indican estas figuras, la frontera de una región elemental en $\mathbb{R}^3$ es una superficie formada por un número finito (como máximo seis y como mínimo dos) de superficies que se pueden describir como gráficas de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Esta clase de superficie se denomina *superficie cerrada.* Las superficies $S_1, S_2, \ldots, S_N$ que componen tal superficie cerrada son sus *caras.*

Ejemplo 1 El cubo de la Figura 8,4,1(a) es una región elemental y, de hecho, es una región elemental simétrica, con seis rectángulos que definen sus frontera. La esfera de la Figura 8.4.1(b) es la frontera de una bola sólida, que también es una región elemental simétrica.