## Condición de la primera derivada para puntos de extremo local

La localización de los puntos de extremo está basada en el siguiente hecho, con el que el lector debería estar familiarizado por el cálculo de una variable (caso $n = 1$): *todo punto de extremo es un punto crítico.*

> **Teorema 4 Condición de la primera derivada para puntos de extremo local** Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, la función $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto de extremo local, entonces $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$; es decir, $\mathbf{x}_0$ es un punto crítico de $f$.

**Demostración** Supongamos que $f$ alcanza un máximo local en $\mathbf{x_0}$. Entonces para cualquier $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, la función $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ tiene un máximo local en $t = 0$. Por tanto, del cálculo de una variable sabemos que $g'(0) = 0$.[5] Por otro lado, por la regla de la cadena,

$$g'(0) = [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h}.$$

Luego $[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h} = 0$ para todo $\mathbf{h}$ y, por tanto, $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. El caso en que $f$ alcanza un mínimo local en $\mathbf{x}_0$ es completamente análogo. ■

Si recordamos que $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ significa que todas las componentes de $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ son cero, podemos reformular el resultado del Teorema 4: si $\mathbf{x}_0$ es un punto de extremo local, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n;$$

es decir, cada derivada parcial es cero en $\mathbf{x}_0$. En otras palabras, $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, donde $\nabla f$ es el gradiente de $f$.

Si queremos hallar los puntos de extremo o los puntos de extremo local de una función, entonces el Teorema 4 establece que deberíamos buscar entre los puntos críticos. En ocasiones, estos se pueden determinar por inspección, pero normalmente se emplean criterios (que desarrollamos más adelante) análogos al criterio de la derivada segunda del cálculo de una variable.

---

[5] Recuérdese la demostración del cálculo de una variable: puesto que $g(0)$ es un máximo local, $g(t) \le g(0)$ para $t > 0$ pequeño, de modo que $g(t) - g(0) \le 0$ y, por tanto, $g'(0) = \lim_{t\to 0^+} (g(t) - g(0))/t \le 0$, donde $\lim_{t\to 0^+}$ denota el límite cuando $t \to 0$, $t > 0$. Para $t < 0$ pequeño, tenemos de forma similar $g'(0) = \lim_{t\to 0^-} (g(t) - g(0))/t \ge 0$. Por tanto, $g'(0) = 0$.