EJEMPLO 7.4.3 Cómo determinar si una transformación es sobre

En el ejemplo 7.4.1, $\rho(A_T) = 2$; entonces im $T = \mathbb{R}^2$ y T es sobre. En el ejemplo 7.4.2, $\rho(A_T) = 1$ e im $T = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \neq \mathbb{R}^2$; por tanto, T no es sobre.

Teorema 7.4.2

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal y suponga que dim $V =$ dim $W = n$.

i) Si T es 1-1 entonces T es sobre.

ii) Si T es sobre, entonces T es 1-1.

Demostración

Sea A_T una representación matricial de T. Entonces si T es 1-1, nu $T = \{\mathbf{0}\}$ y $\nu(A_T) = 0$, lo que significa que $\rho(T) = \rho(A_T) = n - 0 = n$, de manera que im $T = W$. Si T es sobre, entonces $\rho(A_T) = n$; por tanto, $\nu(T) = \nu(A_T) = 0$ y T es 1-1.

Teorema 7.4.3

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Suponga que dim $V = n$ y dim $W = m$. Entonces

i) Si $n > m$, T no es 1-1.

ii) Si $m > n$, T no es sobre.

Demostración

i) Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para V. Sea $\mathbf{w}_i = T\mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y observe el conjunto $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$. Como $m =$ dim $W < n$, el conjunto S es linealmente independiente. Así, existen escalares, no todos cero, tales que $c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0}$. Sea $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$. Como los elementos $\mathbf{v}_i$ son linealmente independientes y como no todos los coeficientes c_i son cero, se ve que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Pero $T\mathbf{v} = T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1T\mathbf{v}_1 + c_2T\mathbf{v}_2 + \cdots + c_nT\mathbf{v}_n = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0}$. Por tanto, $\mathbf{v} \in$ nu T y nu $T \neq \{\mathbf{0}\}$.

ii) Si $\mathbf{v} \in V$, entonces $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ para algunos escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $T\mathbf{v} = a_1T\mathbf{v}_1 + a_2T\mathbf{v}_2 + \cdots + a_nT\mathbf{v}_n = a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + \cdots + a_n\mathbf{w}_n$. Así, $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\} = \{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, T\mathbf{v}_n\}$ genera a la imagen de T. Entonces, del problema 5.5.34, $\rho(T) =$ dim im $T \leq n$. Como $m > n$, esto muestra que im $T \neq W$. Entonces T no es sobre.

EJEMPLO 7.4.4 Una transformación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ no es 1-1

Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Aquí $n = 3$ y $m = 2$, de manera que T no es 1-1. Para ver esto, observe que