$$h_1(y,z) = \int y \cos yz\, dz + g(y) = \operatorname{sen} yz + g(y).$$

Así, sustituyendo esta expresión en la ecuación (a), obtenemos

$$f(x,y,z) = xy + \sin yz + g(y);$$

pero por la ecuación (b),

$$g(y) = h_2(x,z).$$

Puesto que el lado derecho de esta ecuación es una función de x y z y el lado izquierdo es una función de solo y, podemos concluir que deben ser iguales a alguna constante C. Por tanto,

$$f(x,y,z) = xy + \operatorname{sen} yz + C$$

con lo que hemos determinado f salvo una constante. ▲

Ejemplo 2 Una masa M situada en el origen de $\mathbb{R}^3$ ejerce una fuerza de magnitud GmM/r^2 y dirigida hacia el origen sobre una masa m localizada en $\mathbf{r} = (x,y,z)$. Aquí, G es la constante gravitatoria, la cual depende de las unidades de medida, y $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Si recordamos que $-\mathbf{r}/r$ es un vector unitario dirigido hacia el origen, entonces podemos expresar el campo de fuerzas como sigue

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -\frac{GmM\mathbf{r}}{r^3}.$$

Demostrar que $\mathbf{F}$ es irrotacional y hallar un potencial escalar para $\mathbf{F}$. (Obsérvese que $\mathbf{F}$ no está definido en el origen, pero el Teorema 7 sigue siendo aplicable, ya que permite un punto excepcional.)

Solución En primer lugar comprobamos que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Usando la Fórmula 10 de la tabla de identidades vectoriales de la Sección 4.4, obtenemos

$$\nabla \times \mathbf{F} = -GmM\left[\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) \times \mathbf{r} + \frac{1}{r^3}\nabla \times \mathbf{r}\right].$$

Pero $\nabla(1/r^3) = -3\mathbf{r}/r^5$ (véase el Ejercicio 38 de la Sección 4.4), y por tanto el primer término se anula, ya que $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$. El segundo término se anula porque

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$
$$= \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Por tanto, $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ (para $\mathbf{r} \neq 0$). Si recordamos la fórmula $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ (véase de nuevo el Ejercicio 38 de la Sección 4.4), entonces podemos deducir un potencial escalar para $\mathbf{F}$ por inspección. Tenemos $\mathbf{F} = -\nabla V$, donde $V(x,y,z) = -GmM/r$ es la ***energía potencial gravitatoria***.