El flujo de calor está dirigido hacia el centro de la esfera (¿por qué hacia dentro?). Claramente, nuestra observación de que $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S f\, dS$ nos ha ahorrado un considerable tiempo de cálculo.

En este ejemplo, $\mathbf{F}(x, y, z) = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ también podría representar un campo eléctrico, en el que $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -8\pi$ sería el flujo eléctrico a través de S. ▲

Ejemplo 5 **Ley de Gauss** Existe una ley física importante, que se debe a la gran matemático y físico K. F. Gauss, que relaciona el flujo de un campo eléctrico $\mathbf{E}$ sobre una superficie "cerrada" S (como por ejemplo, una esfera o un elipsoide) con la carga neta Q encerrada por la superficie, concretamente (en las unidades adecuadas),

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q \tag{1}$$

(véase la Figura 7.6.9). La ley de Gauss se verá en detalle en el Capítulo 8. Esta ley es análoga a la ley de Ampère (véase el Ejemplo 12 de la Sección 7.2).

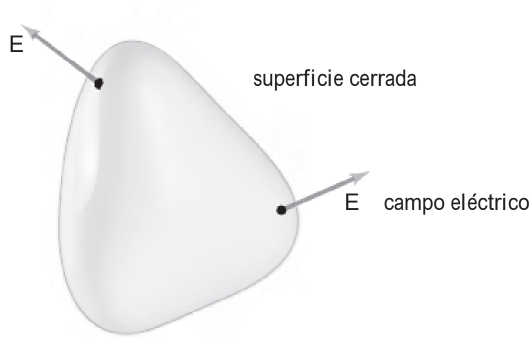

Figura 7.6.9 Ley de Gauss: $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\,\mathbf{S} = Q$, donde Q es la carga neta en el interior de S.

Supongamos que $\mathbf{E} = E\mathbf{n}$; es decir, $\mathbf{E}$ es un múltiplo escalar constante de la normal unitaria a S. Entonces la ley de Gauss, Ecuación 1 del Ejemplo 5, se puede expresar como

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S E\, dS = E \iint_S dS = Q$$

ya que $E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$. Por tanto,

$$E = \frac{Q}{A(S)}. \tag{2}$$

En el caso en el que S es la esfera de radio R, la Ecuación (2) se convierte en (véase la Figura 7.6.10).

$$E = \frac{Q}{4\pi R^2} \tag{3}$$

Supongamos ahora que $\mathbf{E}$ se genera a partir de una carga puntual aislada, Q. Por simetría, es razonable que $\mathbf{E} = E\mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ es la normal unitaria a cualquier esfera centrada en Q. Por tanto, se satisface la Ecuación (3). Consideremos una segunda carga puntual, Q_0, localizada