(b) Máximo de 14 en (3, 1), mínimo de -14 en $(-3, -1)$.

17. Máximo de $1/3\sqrt{3}$, mínimo de $-1/3\sqrt{3}$.

19. (a) 3, 3, 3.

(b) 9, 9, 9.

21. El diámetro debería ser igual a la altura, $20/\sqrt[3]{2\pi}$ cm.

23. Valor máximo $\sqrt{3}$ en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y valor mínimo $-\sqrt{3}$ en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

25. La longitud horizontal es $\sqrt{qA/p}$, la longitud vertical es $\sqrt{pA/q}$.

27. Para el Ejercicio 3, los hessianos orlados que se necesitan son

$$|\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda(x^2+y^2),$$

$$|\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y & 2z \\ 2x & -2\lambda & 0 & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda & 0 \\ 2z & 0 & 0 & -2\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -16\lambda(x^2+y^2+z^2).$$

En $\sqrt{\frac{2}{3}}(1, -1, 1)$ el multiplicador de Lagrange es $\lambda = \sqrt{6}/4 > 0$, lo que indica un máximo en $\sqrt{\frac{2}{3}}(1, -1, 1)$, y $\lambda = -\sqrt{6}/4 < 0$ indica un mínimo en $\sqrt{\frac{2}{3}}(-1, 1, -1)$. En el Ejercicio 7, $|\bar{H}| = 24\lambda(4x^2 + 6y^2)$, y por tanto $\lambda = \sqrt{70}/12 > 0$ indica un máximo en $(9/\sqrt{70}, 4/\sqrt{70})$ y $\lambda = -\sqrt{70}/12 < 0$ indica un mínimo en $(-9/\sqrt{70}, -4/\sqrt{70})$.

29. 0,19 m^3

31. (a) $\nabla f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

(b) S está definida por la función de restricción $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$. Dado que $\nabla g(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$ no es $\mathbf{0}$, se aplica el Teorema 9. En un $\mathbf{x}$ donde f tiene un extremo, existe una $\lambda/2$ tal que $\nabla f(\mathbf{x}) = (\lambda/2)/\nabla g(\mathbf{x})$. Es decir, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

33. El mínimo se alcanza en $(-1/\sqrt{2}, 0)$, el máximo se alcanza en $(\frac{1}{4}, \pm\sqrt{7/8})$, hay un mínimo local en $(1/\sqrt{2}, 0)$.

35. No hay puntos críticos; no hay máximo ni mínimo.

37. $(-1, 0, 1)$.

39. El punto $(K, L) = (\alpha B/q, (1-\alpha)B/p)$ optimiza el beneficio.

Sección 3.5

1. Sea $F(x, y, z) = x + y - z + \cos(xyz)$. Entonces $(\partial F/\partial z)(0, 0, 0) = -1 \neq 0$. Entonces según el teorema de la función implícita podemos resolver para $z = g(x, y)$. $(\partial g/\partial x)(0, 0) = (\partial g/\partial y)(0, 0) = 1$.

3. (a) Si $x < -\frac{1}{4}$, podemos resolver para y en términos de x utilizando la fórmula cuadrática.

(b) $\partial F/\partial y = 2y + 1$ no es cero para $\{y \mid y < -\frac{1}{2}\}$ y $\{y \mid > -\frac{1}{2}\}$. Estas regiones corresponden a las mitades superior e inferior de una parábola horizontal con vértice en $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ y a la elección del signo en la fórmula cuadrática. La derivada $dy/dx = -3/(2y + 1)$ es negativa en la mitad superior de la parábola y positiva en la mitad inferior.

5. Utilizar el teorema de la función implícita con $n = 1$. (Véase el Ejemplo 1). La recta (I) está dada por $0 = (x - x_0, y - y_0) \cdot \nabla F(x_0, y_0) = (x - x_0)(\partial F/\partial x)(x_0, y_0) + (y - y_0)(\partial F/\partial y)(x_0, y_0)$. Para la recta (II), el Teorema 11 da $dy/dx = -(\partial F/\partial x)/(\partial F/\partial y)$ y por tanto las rectas coinciden y están dadas por

$$y = y_0 - \frac{(\partial F/\partial x)(x_0, y_0)}{(\partial F/\partial y)(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

7. Sea $F(x, y, z) = x^3z^2 - z^3yx; \partial F/\partial z = 2x^3z - 3z^2yx \neq 0$ at $(1, 1, 1)$. Cerca del origen, con $x = y \neq 0$, obtenemos las soluciones $z = 0$ y $z = x$, y por tanto no existe una solución única. En (1, 1), $\partial z/\partial x = 2$ y $\partial z/\partial y = -1$.

9. Con $F_1 = y + x + uv$ y $F_2 = uxy + v$, el determinante en el teorema general de la función implícita es

$$\begin{vmatrix} \partial F_1/\partial u & \partial F_1/\partial v \\ \partial F_2/\partial u & \partial F_2/\partial v \end{vmatrix} = v - uxy,$$

que es 0 en $(0, 0, 0, 0)$. Por tanto, el teorema de la función implícita no se aplica. Si lo intentamos directamente, hallamos que $v = -uxy$, de modo que $x + y = u^2xy$. Para una elección particular de (x, y) cerca de $(0, 0)$, o no existe ninguna solución para (u, v) o existen dos.