

**Demostración**

La primera parte de este teorema es el teorema 3.5.2. Si $\det A \neq 0$, entonces se demuestra que $\left(\frac{1}{\det A}\right)(\text{adj } A)$ es la inversa de A multiplicándola por A y obteniendo la matriz identidad:

$$(A)\left(\frac{1}{\det A} \text{adj } A\right) \stackrel{\text{teorema 3.3.2}}{=} \frac{1}{\det A} [A(\text{adj } A)] = \frac{1}{\det A} (\det A)I = I$$

Pero por el teorema 2.4.8, si $AB = I$, entonces $B = A^{-1}$. Así,

$$\left(\frac{1}{\det A}\right) \text{adj } A = A^{-1}$$

Nota

Observe que el teorema 2.4.5, para matrices de 2×2 es un caso especial de este teorema.

EJEMPLO 3.3.4 Uso del determinante y la adjunta para calcular la inversa

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Determine si A es invertible y, de ser así, calcule A^{-1} .

SOLUCIÓN ► Como $\det A = 3 \neq 0$ se ve que A es invertible. Del ejemplo 3.3.1,

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así} \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Verificación

$$A^{-1}A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I$$

EJEMPLO 3.3.5 Cálculo de la inversa de una matriz de 4×4 usando el determinante y la adjunta

$$\text{Sea} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determine si A es invertible y, si lo es, calcule A^{-1} .