$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

El sistema (8.7.6) se puede escribir como

$$\boxed{\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)} \tag{8.7.7}$$

Observe que la ecuación (8.7.7) es casi idéntica a la ecuación (8.7.3). La única diferencia es que ahora se tiene una función vectorial y una matriz mientras que antes se tenía una función "escalar" y un número (matriz de 1×1).

Para resolver la ecuación (8.7.7) se puede esperar que la solución tenga la forma e^{At}. Pero ¿qué significa e^{At}? Se responderá a esta pregunta en seguida. Primero, recuerde la expansión en serie de Taylor en torno al punto $t = 0$ de la función e^t:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots \tag{8.7.8}$$

Esta serie converge para todo número real t. Entonces para cualquier número real a

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^4}{4!} + \cdots \tag{8.7.9}$$

Definición 8.7.1

La matriz e^A

Sea A una matriz de $n \times n$ con elementos reales (o complejos). Entonces e^A es una matriz de $n \times n$ definida por

$$\boxed{e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{k!}} \tag{8.7.10}$$

Observación. No es difícil demostrar que la serie de matrices en la ecuación (8.7.10) converge para toda matriz A, pero hacerlo nos llevaría demasiado lejos. Sin embargo, se pueden dar indicaciones de por qué es así. Primero se define $|A|_i$ como la suma de los valores absolutos de las componentes en el renglón i de A. Después se define la **norma*** de A, denotada por $|A|$, como

Norma de una matriz

$$|A| = \max_{1 \le i \le n} |A|_i \tag{8.7.11}$$

se puede demostrar que

$$|AB| \le |A||B| \tag{8.7.12}$$

* Ésta se denomina **norma de la máxima suma por renglones** de A.