para $H^\perp$. Como los vectores $\mathbf{u}_i$ son independientes, debe demostrarse que generan a $H^\perp$. Sea $\mathbf{x} \in H^\perp$; entonces por el teorema 6.1.4

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_k)\,\mathbf{u}_k \\ &\quad + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_{k+1})\,\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_n)\,\mathbf{u}_n\end{aligned}$$

Sin embargo, $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_i) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, ya que $\mathbf{x} \in H^\perp$ y $\mathbf{u}_i \in H$. Por tanto, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_{k+1})\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n$. Esto muestra que $\{\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base para $H^\perp$, lo que significa que $\dim H^\perp = n - k$.

Los espacios H y $H^\perp$ permiten "descomponer" cualquier vector en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 6.1.7 Teorema de proyección

Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Entonces existe un par único de vectores $\mathbf{h}$ y $\mathbf{p}$ tales que $\mathbf{h} \in H$, $\mathbf{p} \in H^\perp$ y $\mathbf{v} = \mathbf{h} + \mathbf{p}$. En particular, $\mathbf{h} = \text{proy}_H\,\mathbf{v}$ y $\mathbf{p} = \text{proy}_{H^\perp}\,\mathbf{v}$, de manera que

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{h} + \mathbf{p} = \text{proy}_H\,\mathbf{v} + \text{proy}_{H^\perp}\,\mathbf{v}} \tag{6.1.23}$$

Demostración

Sea $\mathbf{h} = \text{proy}_H\,\mathbf{v}$ y sea $\mathbf{p} = \mathbf{v} - \mathbf{h}$. Por la definición 6.1.4 se tiene $\mathbf{h} \in H$. Ahora se mostrará que $\mathbf{p} \in H^\perp$. Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ una base ortonormal para H. Entonces

$$\mathbf{h} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$$

Sea $\mathbf{x}$ un vector en H. Existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, tales que

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = (\mathbf{v}-\mathbf{h})\cdot\mathbf{x} = [\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k] \\ [\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k]\end{aligned} \tag{6.1.24}$$

Como $\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j\end{cases}$, es sencillo verificar que el producto escalar (6.1.24) está dado por

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_i) - \sum_{i=1}^{k}\alpha_i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_i) = 0$$

Así, $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = 0$ para todo $\mathbf{x} \in H$, lo que significa que $\mathbf{p} \in H^\perp$. Para demostrar que $\mathbf{p} = \text{proy}_{H^\perp}\,\mathbf{v}$, se amplía $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ a una base ortonormal en $\mathbb{R}^n$: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. Entonces $\{\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base para $H^\perp$, y por el teorema 6.1.4,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_k)\,\mathbf{u}_k + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_{k+1})\,\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_n)\,\mathbf{u}_n \\ &= \text{proy}_H\,\mathbf{v} + \text{proy}_{H^\perp}\,\mathbf{v}\end{aligned}$$