Por tanto,

$$\iiint_W x\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \left(\int_{x^2+y^2}^{2} x\,dz\right) dy\right] dx$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2-x^2-y^2)\,dy\,dx$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}} x\left[(2-x^2)^{3/2} - \frac{(2-x^2)^{3/2}}{3}\right] dx$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x}{3}(2-x^2)^{3/2}\,dx = \left.\frac{-2(2-x^2)^{5/2}}{15}\right|_0^{\sqrt{2}}$$
$$= 2\cdot\frac{2^{5/2}}{15} = \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

*Método 2.* También podemos establecer primero los límites para $x$ y describir $W$ mediante $0 \le x \le (z-y^2)^{1/2}$ y $(y,z)$ en $D$, donde $D$ es el subconjunto del plano $yz$ tal que $0 \le z \le 2$ y $0 \le y \le z^{1/2}$ (véase la Figura 5.5.7).

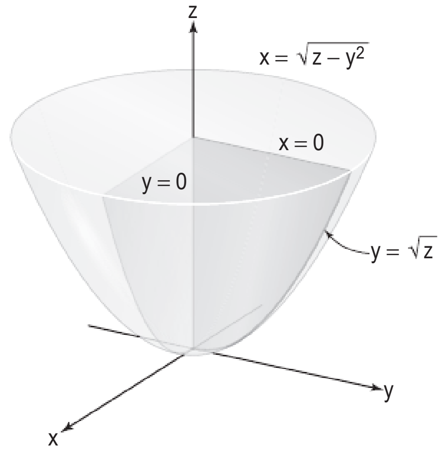


**Figura 5.5.7** Una descripción diferente de la región del Ejemplo 5.

Por tanto,

$$\iiint_W x\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_0^{(z-y^2)^{1/2}} x\,dx\right) dy\,dz$$
$$= \int_0^2 \left[\int_0^{z^{1/2}} \left(\int_0^{(z-y^2)^{1/2}} x\,dx\right) dy\right] dz$$
$$= \int_0^2 \int_0^{z^{1/2}} \left(\frac{z-y^2}{2}\right) dy\,dz$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(z^{3/2} - \frac{z^{3/2}}{3}\right) dz = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2}{3} z^{3/2}\,dz$$
$$= \left[\frac{2}{15} z^{5/2}\right]_0^2 = \frac{2}{15}2^{5/2} = \frac{8\sqrt{2}}{15},$$

que coincide con la respuesta anterior. ▲