En la siguiente sección utilizaremos las sumas de Riemann para definir de forma rigurosa la integral doble para una clase más amplia de funciones de dos variables sin recurrir a la noción de volumen. Aunque eliminaremos el requisito de que $f(x, y) \geq 0$, las Ecuaciones (1) y (2) seguirán siendo válidas. Por tanto, la integral iterada proporcionará de nuevo la clave para calcular la integral doble. En la Sección 5.3, nos ocuparemos de las integrales dobles sobre regiones más generales que los rectángulos.

Por último, debemos comentar que se suelen eliminar los corchetes en la integrales iteradas como las descritas en las Ecuaciones (1) y (2), y se escriben

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx \qquad \text{en lugar de} \qquad \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

y

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy \qquad \text{en lugar de} \qquad \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy.$$

Ejercicios

1. Calcular las siguientes integrales iteradas:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (1 - x^3 + xy)\, dx\, dy$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen} y\, dx\, dy$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \int_2^4 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dx\, dy$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 y\, dx\, dy$

2. Calcular las integrales del Ejercicio 1 integrando primero respecto de y y luego respecto de x.

3. Calcular las siguientes integrales iteradas:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^1 (x^4 y + y^2)\, dy\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (y \cos x + 2)\, dy\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (xye^{x+y})\, dy\, dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_1^2 (-x \log y)\, dy\, dx$

4. Calcular las integrales del Ejercicio 3 integrando con respecto a x y luego con respecto a y.

5. Utilizar el principio de Cavalieri para demostrar que los volúmenes de dos cilindros con la misma base y la misma altura son iguales (véase la Figura 5.1.10).

6. Utilizando el principio de Cavalieri, calcular el volumen de la estructura mostrada en la Figura 5.1.11; cada una de las secciones transversales es un rectángulo de longitud 5 y anchura 3.

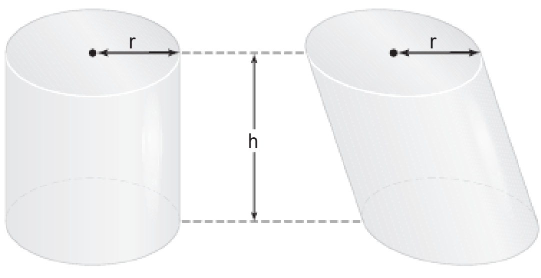

Figura 5.1.10 Dos cilindros con la misma base y la misma altura tienen el mismo volumen.