EJEMPLO 2.4.4 Cálculo de la inversa de una matriz de 2 × 2

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

SOLUCIÓN ► Se encuentra que det $A = (2)(3) - (-4)(1) = 10$; por lo tanto, A^{-1} existe. De la ecuación (2.4.12) se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

Verificación

$$A^{-1}A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 2.4.5 Una matriz de 2 × 2 que no es invertible

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

SOLUCIÓN ► Se encuentra que det $A = (1)(-4) - (2)(-2) = -4 + 4 = 0$, de manera que A^{-1} no existe, como se observó en el ejemplo 2.4.3.

El procedimiento descrito para encontrar la inversa (si existe) de una matriz de 2 × 2 funciona para matrices de $n \times n$ donde $n > 2$. Se ilustra con varios ejemplos.

EJEMPLO 2.4.6 Cálculo de la inversa de una matriz de 3 × 3

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (vea el ejemplo 1.2.1). Calcule A^{-1} si existe.

SOLUCIÓN ► Primero se pone A seguido de I en la forma de matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y después se lleva a cabo la reducción por renglones.

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$