Longitud de arco en $\mathbb{R}^n$ Sea $\mathbf{c}\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria C^1 a trozos. Su ***longitud*** se define como

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt.$$

El integrando es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes del vector $\mathbf{c}'(t)$. Si

$$\mathbf{c}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)),$$

entonces

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 + \cdots + (x_n'(t))^2}\, dt.$$

Ejemplo 5 Calcular la longitud de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$ en $\mathbb{R}^4$, definida en el intervalo de 0 a π.

Solución Tenemos $\mathbf{c}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, -2\operatorname{sen} 2t, 2\cos 2t)$, y por tanto

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 4\operatorname{sen}^2 2t + 4\cos^2 2t} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5},$$

es constante, de manera que la longitud de la trayectoria es

$$\int_0^{\pi} \sqrt{5}\, dt = \sqrt{5}\pi.$$

▲

Es una práctica habitual introducir la ***función longitud de arco*** $s(t)$ asociada a una trayectoria $\mathbf{c}(t)$, mediante la fórmula siguiente:

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{c}'(u)\|\, du,$$

de modo que (por el teorema fundamental del cálculo)

$$s'(t) = \|\mathbf{c}'(t)\|$$

y

$$\int_a^b s'(t)\, dt = s(b) - s(a) = s(b).$$

Ejemplo 6 Consideremos la gráfica de una función de una variable $y = f(x)$ para x en el intervalo $[a, b]$. Podemos considerarla como una curva parametrizada por $t = x$, es decir, $\mathbf{c}(x) = (x, f(x))$ para x entre a y b. La fórmula de la longitud de arco nos da

$$L(\mathbf{c}) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$$

lo que está de acuerdo con la fórmula de la longitud de una gráfica obtenida mediante el cálculo de una variable.

▲