Teorema 8.4.4

Sea A una matriz real de $n \times n$. Entonces A es diagonizable ortogonalmente si y sólo si A es simétrica.

Demostración

Sea A simétrica. Entonces, de acuerdo con los teoremas 8.4.2 y 8.4.3, A es diagonizable ortogonalmente con la matriz Q cuyas columnas son los vectores característicos dados en el teorema 8.4.3. Inversamente, suponga que A es diagonizable ortogonalmente. Entonces existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^{\top}AQ = D$. Al multiplicar esta ecuación por la izquierda de Q y por la derecha por $Q^{\top}$, y utilizando el hecho de que $Q^{\top}Q = QQ^{\top} = I$, se obtiene

$$A = QDQ^{\top} \tag{8.4.10}$$

Entonces $A^{\top} = (QDQ^{\top})^{\top} = (Q^{\top})^{\top}D^{\top}Q^{\top} = QDQ^{\top} = A$. Así, A es simétrica y el teorema queda demostrado. En la última serie de ecuaciones se utilizaron los hechos de que $(AB)^{\top} = B^{\top}A^{\top}$ [inciso ii) del teorema 2.5.1], $(A^{\top})^{\top} = A$ [inciso i) del teorema 2.5.1] y $D^{\top} = D$ para cualquier matriz diagonal D.

Antes de dar ejemplos se proporciona el siguiente procedimiento de tres pasos para encontrar la matriz ortogonal Q que diagonaliza la matriz simétrica A.

Procedimiento para encontrar una matriz diagonalizante Q

i) Encuentre una base para cada espacio característico de A.

ii) Encuentre una base ortonormal para cada espacio característico de A usando el proceso de Gram-Schmidt o algún otro.

iii) Escriba Q como la matriz cuyas columnas son los vectores característicos ortonormales obtenidos en el inciso ii).

EJEMPLO 8.4.1 Diagonalización de una matriz simétrica de 2 × 2 usando una matriz ortogonal

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces la ecuación característica de A es $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$ $\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$. que tiene dos raíces $\lambda = \frac{(4 \pm \sqrt{20})}{2} = \frac{(4 \pm 2\sqrt{5})}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$. Para $\lambda_1 = 2 - \sqrt{5}$ se obtiene $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} & -2 \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Un vector característico es $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$ y $|\mathbf{v}_1|$ $= \sqrt{2^2 + (-1+\sqrt{5})^2} = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{13 - 2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$