35. (a) Si $(x, y) \neq (0,0)$, entonces calculamos para (I) que $\partial f/\partial x = (y^3 - yx^2)/(x^2+y^2)^2$ y $\partial f/\partial y = (x^3 - xy^2)/(x^2+y^2)^2$. Si $x = y = 0$, utilizamos directamente la definición para determinar que ambas derivadas parciales son 0. Para (II), si $(x, y) \neq (0,0)$, entonces $\partial f/\partial x = 2xy^6/(x^2+y^4)^2$ y $\partial f/\partial y = (2x^4y - 2x^2y^5)/(x^2+y^4)^2$. Las parciales en el origen son cero.

(b) La función (I) no es continua en (0, 0); la función (II) es diferenciable, pero la derivada no es continua.

37. (a) $\sqrt{2}\pi/8$ (c) $-2\sqrt{2}e^{-2}$

(b) $-\operatorname{sen}\sqrt{2}$

39. $(-4e^{-1}, 0)$

41. (a) Véase el Teorema 11.

(b)
$$\begin{aligned} g(u) &= (\operatorname{sen} 3u)^2 + \cos 8u \\ g'(u) &= 6 \operatorname{sen} 3u \cos 3u - 8 \operatorname{sen} 8u \\ g'(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla f &= (2x, 1) \\ \nabla f(\mathbf{h}(0)) &= \nabla f(0,1) = (0,1) \\ \mathbf{h}'(u) &= (3\cos 3u, -8 \operatorname{sen} 8u) \\ g'(0) &= \nabla f(\mathbf{h}(0)) \cdot \mathbf{h}'(0) \end{aligned}$$

43. $t = \sqrt{14}(-3+\sqrt{359})/70 = (-3+\sqrt{359})/5\sqrt{14}$

45.

$$\partial z/\partial x = 4(e^{-2x-2y+2xy})(1+y)/(e^{-2x-2y} - e^{2xy})^2$$
$$\partial z/\partial y = 4(e^{-2y-2x+2xy})(1+x)/(e^{-2x-2y} - e^{2xy})^2$$

47. Observar que $y = x^2$, de modo que si y es constante, x no puede ser una variable.

49. $[f'(t)g(t) + f(t)g'(t)] \exp [f(t)g(t)]$

51.
$$\begin{aligned} d[f(\mathbf{c}(t))]/dt = {} & 2t/[(1+t^2+2\cos^2 t)(2-2t^2+t^4)] \\ & -4t(t^2-1)\ln(1+t^2+2\cos^2 t)/(2-2t^2+t^4)^2 \\ & -4\cos t \operatorname{sen} t/[(1+t^2+2\cos^2 t)(2-2t^2+t^4)] \end{aligned}$$

53. Sean $x = f(t), y = t$; utilizar la regla de la cadena para diferenciar $u(x, y)$ con respecto a t.

55. (a) $n = PV/RT; P = nRT/V;$
$T = PV/nR; V = nRT/P.$

(b) $\partial V/\partial T = nR/P; \partial T/\partial P = V/nR;$
$\partial P/\partial V = -nRT/V^2$.

Multiplicar, recordando que $PV = nRT$.

57. (a) Se puede resolver para cualquiera de las variables en función de las otras dos.

(b) $\partial T/\partial P = (V-\beta)/R;$
$\partial P/\partial V = -RT/(V-\beta)^2 + 2\alpha/V^3;$
$\partial V/\partial T = R/[(V-\beta)(RT/(V-\beta)^2 - 2\alpha/V^3)]$

(c) Multiplicar y cancelar factores.

59. (a) $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

(b) La derivada direccional es 0 en la dirección
$$(x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j})/\sqrt{x_0^2+y_0^2}.$$

(c) La curva de nivel que pasa por (x_0, y_0) tiene que ser tangente a la recta que pasa por $(0,0)$ y (x_0, y_0). Las curvas de nivel son rectas o semirrectas que parten del origen.

61. $G(x, y) = x - y$.

Capítulo 3

Sección 3.1

1. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24\frac{x^3y - xy^3}{(x^2+y^2)^4}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24\frac{-x^3y + xy^3}{(x^2+y^2)^4},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-6x^4 + 36x^2y^2 - 6y^4}{(x^2+y^2)^4}.$$

3. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^4\cos(xy^2),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x \operatorname{sen}(xy^2) - 4x^2y^2\cos(xy^2),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2y \operatorname{sen}(xy^2) - 2xy^3\cos(xy^2).$$

5. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(\cos^2 x + e^{-y})\cos 2x + 2\operatorname{sen}^2 2x}{(\cos^2 x + e^{-y})^3},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{e^{-y} - \cos^2 x}{e^y(\cos^2 x + e^{-y})^3},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{2\operatorname{sen} 2x}{e^y(\cos^2 x + e^{-y})^3}.$$

7. (a) $f_x = -1,\ f_y = -\pi,\ f_{xx} = 0,\ f_{yy} = 0,$
$f_{xy} = f_{yx} = -1.$

(b) $f_x = 5,\ f_y = -18,\ f_{xx} = 2,\ f_{yy} = 42,$
$f_{xy} = f_{yx} = -8.$

(c) Todas las derivadas parciales segundas son cero.