Ejemplo 1 Hallar los puntos de máximo y de mínimo de la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = x^2 + y^2$. (Ignorar el hecho de que este ejemplo puede resolverse por inspección.)

Solución En primer lugar identificamos los puntos críticos de f resolviendo las dos ecuaciones $\partial f/\partial x = 0$ y $\partial f/\partial y = 0$, para x e y. Pero

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,$$

por lo que el único punto crítico se encuentra en el origen (0, 0), donde el valor de la función es cero. Puesto que $f(x,y) \geq 0$, este punto es un mínimo relativo—de hecho, un punto mínimo absoluto o global—de f. Dado que (0, 0) es el único punto crítico, no existen puntos de máximo. ▲

Ejemplo 2 Considérese la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 - y^2$. Ignorando por el momento que esta función tiene un punto de silla y ningún extremo, aplicamos el método del Teorema 4 para la localización de puntos de extremo.

Solución Como en el Ejemplo 1, determinamos que f solo tiene un punto crítico en el origen y que el valor de f ahí es cero. Examinando los valores de f directamente para puntos próximos al origen, vemos que $f(x,0) \geq f(0,0)$ y $f(0,y) \leq f(0,0)$, con desigualdades estrictas cuando $x \neq 0$ y $y \neq 0$. Dado que x o y pueden tomarse arbitrariamente pequeños, el origen no puede ser ni un punto de mínimo relativo ni un punto de máximo relativo (por tanto, es un punto de silla). Así, esta función no puede tener extremos relativos (véase la Figura 3.3.3).

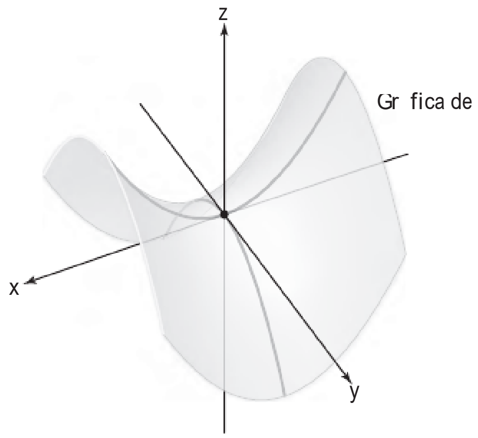

Figura 3.3.3 Una función de dos variables con un punto de silla.

▲

Ejemplo 3 Determinar todos los puntos críticos de $z = x^2y + y^2x$.

Solución Derivando obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + x^2.$$