(b) Dar una fórmula de cambio de variables apropiada para la transformación y la región halladas en el apartado (a).

3. Sea B la región del primer cuadrante acotada por las curvas $xy = 1, xy = 3, x^2 - y^2 = 1$ y $x^2 - y^2 = 4$. Calcular $\iint_B (x^2 + y^2)\, dx\, dy$ usando el cambio de variables $u = x^2 - y^2$, $v = xy$.

4. En los apartados (a) a (d), realizar el cambio de variables indicado. (No calcular la integral.)

(a) $$\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{(1-y^2)}}^{\sqrt{(1-y^2)}} (x^2 + y^2)^{1/2}\, dx\, dy\, dz,$$

coordenadas cilíndricas.

(b) $$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{(1-y^2)}}^{\sqrt{(1-y^2)}} \int_{-\sqrt{(4-x^2-y^2)}}^{\sqrt{(4-x^2-y^2)}} xyz\, dz\, dx\, dy,$$

coordenadas cilíndricas.

(c) $$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{(2-y^2)}}^{\sqrt{(2-y^2)}} \int_{\sqrt{(x^2+y^2)}}^{\sqrt{(4-x^2-y^2)}} z^2 dz\, dx\, dy,$$

coordenadas esféricas.

(d) $$\int_0^1 \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \rho^3 \operatorname{sen} 2\phi\, d\theta\, d\phi\, d\rho,$$

coordenadas cartesianas.

5. Hallar el volumen encerrado por las superficies $x^2 + y^2 = z$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

6. Hallar el volumen encerrado por el cono $x^2 + y^2 = z^2$ y el plano $2z - y - 2 = 0$.

7. Se perfora un orificio cilíndrico de diámetro 1 en una esfera de radio 2. Suponiendo que el eje del cilindro pasa por el centro de la esfera, hallar el volumen del sólido resultante.

8. Sean C_1 y C_2 dos cilindros de longitud infinita y diámetro 2, y cuyos ejes son los ejes coordenados x e y, respectivamente. Hallar el volumen de su intersección, $C_1 \cap C_2$.

9. Hallar el volumen acotado por $x/a + y/b + z/c = 1$ y por los planos coordenados.

10. Hallar el volumen determinado por $z \leq 6 - x^2 - y^2$ y $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

11. El *tetraedro* definido por $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1$ se corta en n secciones del mismo volumen mediante planos paralelos al plano $x + y + z = 1$. ¿Dónde deben darse los cortes?

12. Sea E el elipsoide sólido $E = \{(x, y, z) \mid (x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1\}$, donde $a > 0, b > 0$ y $c > 0$. Calcular

$$\iiint xyz\, dx\, dy\, dz$$

(a) sobre todo el elipsoide y
(b) sobre la parte del mismo que cae en el primer cuadrante:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \text{y} \quad z \geq 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

13. Hallar el volumen del "cucurucho de helado" definido por las desigualdades $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{5}z^2$ y $0 \leq z \leq 5 + \sqrt{5 - x^2 - y^2}$.

14. Sean ρ, θ, ϕ coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$ y supongamos que una superficie que encierra el origen está descrita por una función continua y positiva $\rho = f(\theta, \phi)$. Demostrar que el volumen encerrado por la superficie es

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [f(\theta, \phi)]^3 \operatorname{sen} \phi\, d\phi\, d\theta.$$

15. Usando un cambio de variables apropiado, calcular

$$\iint_B \exp\left[(y - x)/(y + x)\right] dx\, dy,$$

siendo B el interior del triángulo cuyos vértices son $(0, 0), (0, 1)$ y $(1, 0)$.

16. Supóngase que la densidad de una bola de radio R está dada por $(1 + d^3)^{-1}$, donde d es la distancia al centro de la bola. Hallar la masa total de la bola.

17. La densidad del material de un casco esférico cuyo radio interior es de 1 m y cuyo radio exterior es de 2 m es $0{,}4d^2$ g/cm^3, donde d es la distancia en metros al centro de la esfera. Hallar la masa total del casco esférico.

18. Si se echase el casco del Ejercicio 17 en una gran balsa de agua pura, ¿flotaría? ¿Y si el casco hiciese agua? (Se supone que la densidad del agua es exactamente de 1 g/cm^3.)

19. La temperatura en cada punto del cubo $C = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$ es $32d^2$, donde d es la distancia al origen.