Igualando las derivadas parciales a cero tenemos

$$2xy + y^2 = 0, \qquad 2xy + x^2 = 0.$$

Restando obtenemos $x^2 = y^2$. Por tanto, $x = \pm y$. Sustituyendo $x = +y$ en la primera de las dos ecuaciones anteriores, encontramos que

$$2y^2 + y^2 = 3y^2 = 0,$$

luego $y = 0$ y, por tanto, $x = 0$. Si $x = -y$, entonces

$$-2y^2 + y^2 = -y^2 = 0,$$

por lo que $y = 0$ y por tanto $x = 0$. Luego el único punto crítico es $(0, 0)$. Para $x = y$, $z = 2x^3$, que es tanto positivo como negativo para x próximo a cero. Por tanto, $(0, 0)$ no es un punto de extremo relativo. ▲

Ejemplo 4 Dada la Figura 3.3.4, una gráfica dibujada por computadora de la función $z = 2(x^2 + y^2)\, e^{-x^2-y^2}$. ¿Dónde se encuentran los puntos críticos?

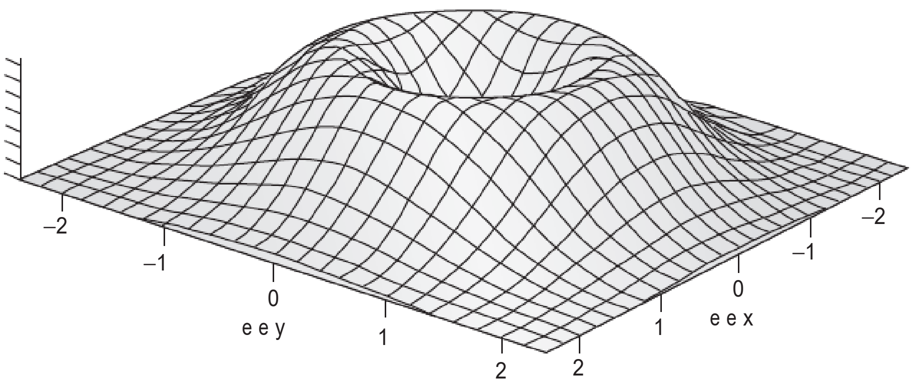

Figura 3.3.4 El volcán $z = 2(x^2 + y^2)\exp\,(-x^2 - y^2)$.

Solución Dado que $z = 2(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 4x(e^{-x^2-y^2}) + 2(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}(-2x)\\ &= e^{-x^2-y^2}[4x - 4x(x^2 + y^2)]\\ &= 4x(e^{-x^2-y^2})(1 - x^2 - y^2)\end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y(e^{-x^2-y^2})(1 - x^2 - y^2).$$

Ambas se anulan cuando $x = y = 0$ o cuando $x^2 + y^2 = 1$. Esto es coherente con la figura: los puntos del borde del cráter son máximos y el origen es un mínimo. ▲