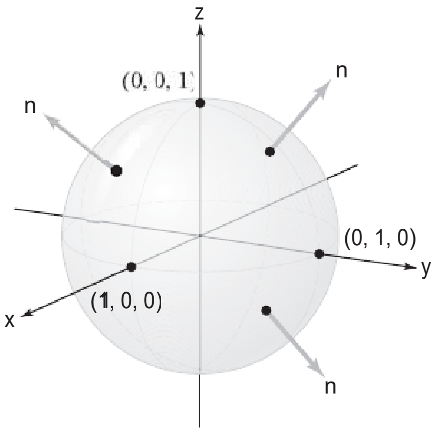

Figura 7.6.5 La esfera unidad orientada por su normal exterior $\mathbf{n}$.

Puesto que $-\operatorname{sen}\phi \leq 0$ para $0 \leq \phi \leq \pi$, este vector normal apunta hacia el interior de la esfera. Por tanto, la parametrización dada $\mathbf{\Phi}$ *invierte la orientación.* Intercambiando el orden de θ y ϕ, obtendríamos una parametrización que conserva la orientación. ▲

Orientación y elemento vectorial de superficie de una esfera

Consideramos la esfera de radio R, concretamente, $x^2+y^2+z^2 = R^2$. Es habitual orientar la esfera con la *normal unitaria exterior.* En términos del vector de posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, la normal unitaria exterior está dada por

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R}.$$

El orden de las coordenadas esféricas que concuerda con esta orientación, como es evidente por el Ejemplo 2, está dado por el orden $(\phi,\ \theta)$. El cálculo del Ejemplo 2 muestra que el elemento de superficie está dado entonces por

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_\theta)\, d\phi\, d\theta = \mathbf{r} R \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta = \mathbf{n} R^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta.$$

Orientación de gráficas

En el siguiente ejemplo se exponen los convenios de orientación para las gráficas. Más adelante en esta sección calcularemos el elemento de área para gráficas.

Ejemplo 3 Sea S una superficie descrita por $z = g(x,y)$. Como en la Ecuación (6) de la Sección 7.5, existen dos vectores unitarios normales a S en $(x_0, y_0, g(x_0,y_0))$, concretamente , $\pm\mathbf{n}$, donde

$$\mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\mathbf{i} - \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\right]^2 + \left[\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\right]^2 + 1}}.$$