6.1 Bases ortonormales y proyecciones en $\mathbb{R}^n$

En $\mathbb{R}^n$ se vio que n vectores linealmente independientes constituyen una base. La base canónica $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n\}$ es la de mayor uso. Estos vectores tienen dos propiedades:

i) $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \qquad$ si $i \neq j$

ii) $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$

Definición 6.1.1

Conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$

Se dice que un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ en $\mathbb{R}^n$ es un **conjunto ortonormal** si

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0 \qquad \text{si } i \neq j \tag{6.1.1}$$

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1 \tag{6.1.2}$$

Si sólo se satisface la ecuación (6.1.1) se dice que el conjunto es **ortogonal**.

Como se trabajará ampliamente con el producto escalar en esta sección, recordaremos algunos hechos básicos (vea el teorema 2.2.1). Sin mencionarlos de nuevo en forma explícita, se utilizarán en el resto de esta sección.

Si **u, v** y **w** están en $\mathbb{R}^n$ y α es un número real, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \tag{6.1.3}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \tag{6.1.4}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \tag{6.1.5}$$

$$(\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \tag{6.1.6}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \tag{6.1.7}$$

Ahora se presenta otra definición útil.

Definición 6.1.2

Longitud o norma de un vector

Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces la **longitud** o **norma** de **v**, denotada por $|\mathbf{v}|$, está dada por

$$\boxed{|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}} \tag{6.1.8}$$

Nota. Si $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + z_n^2$. Esto significa que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0 \text{ y } \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad \text{si y sólo si } \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{6.1.9}$$

De esta forma se puede obtener la raíz cuadrada en (6.1.8), y se tiene