En otros términos, suponga que A, B y C son idénticas excepto por la columna j y que la columna j de C es la suma de las j-ésimas columnas de A y B. Entonces, $\det C = \det A + \det B$. La misma afirmación es cierta para renglones.

Demostración

Se expande $\det C$ respecto a la columna j para obtener

$$\begin{aligned}\det C &= (a_{1j} + \alpha_{1j})\,\mathrm{A}_{1j} + (a_{2j} + \alpha_{2j})\,\mathrm{A}_{2j} + \cdots + (a_{nj} + \alpha_{nj})\,\mathrm{A}_{nj}\\ &= (a_{1j}\mathrm{A}_{1j} + a_{2j}\mathrm{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\mathrm{A}_{nj})\\ &\quad + (\alpha_{1j}\mathrm{A}_{1j} + \alpha_{2j}\mathrm{A}_{2j} + \cdots + \alpha_{nj}\mathrm{A}_{nj}) = \det A + \det B\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.2.8 Ilustración de la propiedad 3.2.3

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1-6 & 2 \\ 3 & 1+2 & 4 \\ 0 & -2+4 & 5 \end{pmatrix}$.

Entonces $\det A = 16$, $\det B = 108$ y $\det C = 124 = \det A + \det B$.

Propiedad 3.2.4

El intercambio de cualesquiera dos renglones (o columnas) distintos de A tiene el efecto de multiplicar $\det A$ por -1.

Demostración

Se prueba la afirmación para los renglones y se supone primero que se intercambian dos renglones adyacentes. Es decir, se supone que se intercambian los renglones i y el $(i + 1)$. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Después, expandiendo $\det A$ respecto al renglón i y B respecto al renglón $(i + 1)$ se obtiene

$$\begin{aligned}\det A &= a_{i1}\mathrm{A}_{i1} + a_{i2}\mathrm{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\mathrm{A}_{in} \qquad (3.2.6)\\ \det B &= a_{i1}\mathrm{B}_{i+1,1} + a_{i2}\mathrm{B}_{i+1,2} + \cdots + a_{in}\mathrm{B}_{i+1,n}\end{aligned}$$

Aquí, $\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$, donde M_{ij} es menor ij de A. Observe que el menor $(i + 1)\,j$ de B coincide con M_{ij}. Entonces

$$\mathrm{B}_{i+1,j} = (-1)^{i+1+j} \det M_{ij} = -(-1)^{i+j} \det M_{ij} = -\mathrm{A}_{ij}$$

De manera que, de la ecuación (3.2.6), $\det B = -\det A$.