Ejemplo 2 Verificar la regla de la cadena en la forma dada en la fórmula (3′) para

$$f(u,v,w) = u^2 + v^2 - w,$$

donde

$$u(x,y,z) = x^2y, \qquad v(x,y,z) = y^2, \qquad w(x,y,z) = e^{-xz}.$$

Solución Aquí

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &= f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)) \\ &= (x^2y)^2 + y^4 - e^{-xz} = x^4y^2 + y^4 - e^{-xz}. \end{aligned}$$

Por tanto, derivando directamente,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x^3y^2 + ze^{-xz}.$$

Por otro lado, utilizando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = 2u(2xy) + 2v \cdot 0 + (-1)(-ze^{-xz}) \\ &= (2x^2y)(2xy) + ze^{-xz}, \end{aligned}$$

lo que es lo mismo que la ecuación anterior. ▲

Ejemplo 3 Dadas $g(x,y) = (x^2+1, y^2)$ y $f(u,v) = (u+v, u, v^2)$, calcular la derivada de $f \circ g$ en el punto $(x,y) = (1,1)$ usando la regla de la cadena.

Solución Las matrices de derivadas parciales son

$$\mathbf{D}f(u,v) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u} & \dfrac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{D}g(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que cuando $(x,y) = (1,1)$, $g(x,y) = (u,v) = (2,1)$. Por tanto,

$$\mathbf{D}(f \circ g)(1,1) = \mathbf{D}f(2,1)\mathbf{D}g(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es la derivada pedida. ▲

Ejemplo 4 Dada $f(x,y)$ y el cambio de variables $x = r\cos\theta, y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ (coordenadas polares), escribir una fórmula para $\partial f/\partial\theta$.

Solución Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta},$$