La especie presa es eliminada cuando $1\,000e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) = 0$ o cuando $\operatorname{sen} t = \cos t$. La primera solución positiva de la última ecuación es $t = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$ años ≈ 9.4 meses.

EJEMPLO 8.7.6 Modelo de cooperación de especies (simbiosis)

Considere el modelo simbiótico gobernado por

$$x_1'(t) = -\frac{1}{2}x_1(t) + \ \ x_2(t)$$

$$x_2'(t) = \frac{1}{4}x_1(t) - \frac{1}{2}x_2(t)$$

Observe que en este modelo la población de cada especie aumenta proporcionalmente a la población de la otra y disminuye proporcionalmente a su propia población. Suponga que $x_1(0) = 200$ y $x_2(0) = 500$. Determine la población de cada especie para $t > 0$.

SOLUCIÓN ► En este caso $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ con valores característicos $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$ y vectores característicos correspondientes $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Entonces

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad J = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Así,

$$e^{At} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -e^{-t} & 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 - 2e^{-t} & -4 + 4e^{-t} \\ -1 + e^{-t} & -2 - 2\,e^{-t} \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 - 2e^{-t} & -4 + 4e^{-t} \\ -1 + e^{-t} & -2 - 2e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2\,400 + 1\,600e^{-t} \\ -1\,200 + \ \ 800e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 600 - 400e^{-t} \\ 300 + 200e^{-t} \end{pmatrix}$$

Observe que $e^{-t} \to 0$ si $t \to \infty$. Esto significa que con el tiempo, las dos especies en cooperación se acercan a las poblaciones en equilibrio de 600 y 300, respectivamente. Ninguna de las dos queda eliminada.