Se ha visto que muchas matrices son semejantes a las matrices diagonales. Sin embargo, quedan dos preguntas pendientes:

i) ¿Es posible determinar si una matriz dada es diagonalizable sin calcular los valores y vectores característicos?

ii) ¿Qué se hace si A no es diagonalizable?

En la siguiente sección se dará una respuesta parcial a la primera pregunta y una respuesta completa a la segunda en la sección 8.6. En la sección 8.7 se verá una aplicación importante del procedimiento de diagonalización.

Al principio de este capítulo se definieron los valores y vectores característicos para una transformación lineal T: $V \to V$, donde dim $V = n$. Se estableció después que T se puede representar por una matriz de $n \times n$, se limitará el análisis a los valores y vectores característicos de matrices de $n \times n$.

No obstante, la transformación lineal se puede representar mediante diversas matrices de $n \times n$ distintas: una para cada base elegida. Ahora bien, ¿tienen estas matrices los mismos valores característicos? La respuesta es afirmativa y se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 8.3.3

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con bases $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $B_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$. Sea T: $V \to V$ una transformación lineal. Si A_T es la representación matricial de T respecto a la base B_1 y si C_T es la representación matricial de T respecto a la base B_2, entonces A_T y C_T son semejantes.

Demostración

T es una transformación lineal de V en sí mismo. Del teorema 7.3.3 se tiene

$$(T\mathbf{x})_{B_1} = A_T(\mathbf{x})_{B_1} \qquad \textbf{(8.3.6)}$$

y

$$(T\mathbf{x})_{B_2} = C_T(\mathbf{x})_{B_2} \qquad \textbf{(8.3.7)}$$

Sea M la matriz de transición de B_1 a B_2. Entonces por el teorema 5.6.1

$$(\mathbf{x})_{B_2} = M(\mathbf{x})_{B_1} \qquad \textbf{(8.3.8)}$$

para todo $\mathbf{x}$ en V. Además,

$$(T\mathbf{x})_{B_2} = M(\mathbf{x})_{B_1} \qquad \textbf{(8.3.9)}$$

Sustituyendo (8.3.8) y (8.3.9) en (8.3.7) se llega a

$$M(T\mathbf{x})_{B_1} = C_T M(\mathbf{x})_{B_1} \qquad \textbf{(8.3.10)}$$

La matriz M es invertible por el resultado del teorema 5.6.2. Si se multiplican ambos lados de (8.3.10) por M^{-1} (que es la matriz de transición de B_2 a B_1), se obtiene

$$(T\mathbf{x})_{B_1} = M^{-1}C_T(\mathbf{x})_{B_1} \qquad \textbf{(8.3.11)}$$

Comparando (8.3.6) y (8.3.11), se tiene

$$A_T(\mathbf{x})_{B_1} = M^{-1}C_T(\mathbf{x})_{B_1} \qquad \textbf{(8.3.12)}$$