Teorema 5.7.10 Teorema de resumen (punto de vista 7)

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes diez afirmaciones son equivalentes; es decir, cada una implica a las otras nueve (si una se cumple, todas se cumplen).

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector de dimensión n $\mathbf{b}$.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad, I_n, de $n \times n$.

v) A se puede expresar como el producto de matrices elementales.

vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii) Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.

viii) $\det A \neq 0$.

ix) $\nu(A) = 0$.

x) $\rho(A) = n$.

Más aún, si una de ellas no se cumple, entonces para cada vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones. Tiene un número infinito de soluciones si y sólo si $\rho(A) = \rho(A, \mathbf{b})$.

RESUMEN 5.7

- El **espacio nulo** de una matriz A de $n \times n$ es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$N_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

- La nulidad de una matriz A de $n \times n$ es la dimensión de N_A y se denota por $\nu(A)$.
- Sea A una matriz de $m \times n$. La **imagen de A**, denotado por im$A$, es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ dado por

$$\text{im}A = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m: A\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ para alguna } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

- El **rango de A**, denotado por $\rho(A)$, es la dimensión de la imagen de A.
- El **espacio de los renglones de A**, denotado por R_A, es el espacio generado por los renglones de A y es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
- El **espacio de las columnas de A**, denotado por C_A, es el espacio generado por las columnas de A y es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.
- Si A es una matriz de $m \times n$, entonces

$$C_A = \text{im}A \text{ y } \dim R_A = \dim C_A = \dim \text{im}A = \rho(A)$$

  Más aún,

$$\rho(A) + \nu(A) = n$$

- El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución si y sólo si $\rho(A) = \rho(A, \mathbf{b})$, donde $(A, \mathbf{b})$ es la matriz aumentada que se obtiene al agregar la columna del vector $\mathbf{b}$ a A.