(es decir, "razón del cambio del momento angular = momento de la fuerza"). ¿Qué podemos concluir si $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$ es paralelo a $\mathbf{c}(t)$? ¿Es este el caso del movimiento planetario?

27. Continuar las investigaciones del Ejercicio 26 para demostrar la ley de Kepler que afirma que la trayectoria de un planeta que se mueve alrededor del Sol bajo la influencia de la gravedad está contenida en un plano fijo.

4.2 Longitud de arco

Definición de longitud de arco

¿Cuál es la longitud de una trayectoria $\mathbf{c}(t)$? Puesto que la rapidez $\|\mathbf{c}'(t)\|$ es la tasa de cambio de la distancia recorrida con respecto al tiempo, la distancia recorrida por un punto que se mueve a lo largo de la curva debe ser igual a la integral de la rapidez con respecto al tiempo sobre el intervalo $[t_0, t_1]$ que dura el trayecto; es decir, la longitud de la trayectoria, también llamada su ***longitud de arco***, es

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{c}'(t)\|\ dt.$$

Se plantea la pregunta de si esta fórmula efectivamente corresponde a la verdadera longitud de arco. Por ejemplo, supóngase que tomamos una curva en el espacio y pegamos ajustadamente sobre ella una cinta, cortando el sobrante de manera que la cinta se superponga exactamente sobre la curva. Si después despegamos la cinta, la enderezamos y la medimos con una regla, es claro que obtendremos exactamente la longitud de la curva. En el suplemento incluido al final de esta sección se justifica que nuestra fórmula para la longitud de arco coincide con el resultado obtenido por este procedimiento.

Longitud de arco La longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ para $t_0 \leq t \leq t_1$ es

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt.$$

Ejemplo 1 La longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\, t)$, para t contenido en el intervalo $[0, 2\pi]$, es decir, para $0 \leq t \leq 2\pi$, es

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\ \mathrm{sen}\, t)^2 + (r\ \cos t)^2}\ dt = 2\pi r,$$

que es la longitud de una circunferencia de radio r. Si hubiéramos tomado $0 \leq t \leq 4\pi$, habríamos obtenido $4\pi r$, puesto que en ese caso la trayectoria recorre *dos veces* la misma circunferencia (Figura 4.2.1).