En los Ejercicios 28 y 29, dibujar la región de integración, cambiar el orden de integración y calcular la integral.

28. $\displaystyle\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx.$

29. $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-y}^1 (x + y^2)\, dx\, dy.$

30. Demostrar que

$$4e^5 \leq \iint_{[1,3]\times[2,4]} e^{x^2+y^2}\, dA \leq 4e^{25}.$$

31. Demostrar que

$$4\pi \leq \iint_D (x^2 + y^2 + 1)\, dx\, dy \leq 20\pi,$$

donde D es el disco de radio 2 centrado en el origen.

32. Supongamos que W es una ***región conexa por arcos***, es decir, dados dos puntos cualesquiera de W existe una trayectoria continua que los une. Si f es una función continua en W, utilizar el teorema del valor medio para demostrar que existe al menos un punto en W en el que el valor de f es igual al promedio de f sobre W; es decir, la integral de f sobre W dividido entre el volumen de W. Comparar esto con el teorema del valor medio para integrales dobles. ¿Qué sucede si W no es conexa?

33. Demostrar que

$$\int_0^x \left[\int_0^t F(u)\; du\right] dt = \int_0^x (x-u)F(u)\, du.$$

En los Ejercicios 34 a 36 calcular las integrales.

34. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^z \int_0^y xy^2z^3\, dx\, dy\, dz.$

35. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y \int_0^{x/\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+z^2}\, dz\, dx\, dy.$

36. $\displaystyle\int_1^2 \int_1^z \int_{1/y}^2 yz^2\, dx\, dy\, dz.$

37. Escribir la integral iterada $\int_0^1 \int_{1-x}^1 \int_x^1 f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$ como una integral sobre una región de $\mathbb{R}^3$ y volver a escribirla después en los otros cinco órdenes de integración.