36. Hallar una ecuación para el plano que pasa por $(3, 2, -1)$ y $(1, -1, 2)$ y es paralelo a la recta $\mathbf{v} = (1, -1, 0) + t(3, 2, -2)$.

37. Repetir los Ejercicios 25 y 26 de la Sección 1.1 utilizando el producto escalar y los conocimientos sobre vectores normales a planos.

38. Dados los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, ¿las ecuaciones $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|$ determinan un vector único $\mathbf{x}$? Razone la respuesta geométrica y analíticamente.

39. Determinar la distancia del plano $12x + 13y + 5z + 2 = 0$ al punto $(1, 1, -5)$.

40. Hallar la distancia al punto (6, 1, 0) del plano que pasa por el origen y es perpendicular a $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.)

41. (a) En mecánica, el ***momento M** de una fuerza* **F** *con respecto a un punto* O se define como la magnitud de **F** multiplicada por la distancia perpendicular d desde O a la línea de acción de **F**. El ***vector Momento*** **M** es el vector de magnitud M cuya dirección es perpendicular al plano de O y **F**, y cuyo sentido se determina aplicando la regla de la mano derecha. Demostrar que $\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$, donde **R** es cualquier vector de O a la línea de acción de **F**. (Véase la Figura 1.3.10.)

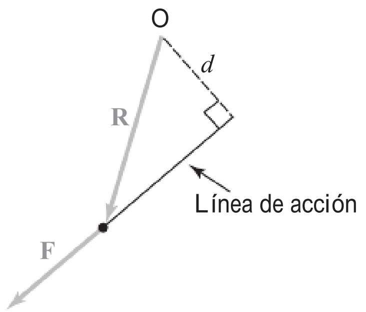

Figura 1.3.10 Momento de una fuerza.

(b) Hallar el momento del vector fuerza $\mathbf{F} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ newtons con respecto al origen si la línea de acción es $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$.

42. Demostrar que el plano que pasa por los tres puntos $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$ está formado por los puntos $\mathrm{P} = (x, y, z)$ dados por

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 - y & a_3 - z \\ b_1 - x & b_2 - y & b_3 - z \\ c_1 - x & c_2 - y & c_3 - z \end{vmatrix} = 0.$$

(SUGERENCIA: escribir el determinante como un producto mixto.)

43. Dos medios con índices de refracción n_1 y n_2 están separados por una superficie plana perpendicular al vector unitario **N**. Sean **a** y **b** vectores unitarios a lo largo de los rayos incidente y refractado, respectivamente, con el mismo sentido que dichos rayos de luz. Demostrar que $n_1(\mathbf{N} \times \mathbf{a}) = n_2(\mathbf{N} \times \mathbf{b})$ utilizando la *ley de Snell*, $\operatorname{sen}\theta_1 / \operatorname{sen}\theta_2 = n_2/n_1$, donde θ_1 y θ_2 son los ángulos de incidencia y refracción, respectivamente. (Véase la Figura 1.3.11.)

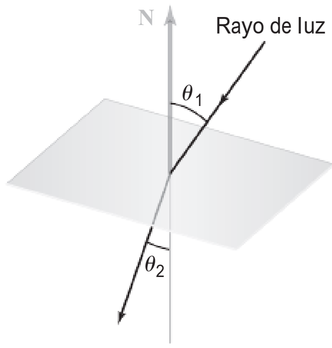

Figura 1.3.11 Ley de Snell.

44. Justificar los pasos en los cálculos siguientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} = 33 - 36 = -3.$$

45. Demostrar que sumar un múltiplo de la primera fila de una matriz a la segunda fila no cambia el determinante; es decir,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda b_1 & c_2 + \lambda c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

[De hecho, sumar un múltiplo de cualquier fila (columna) de una matriz a otra fila (columna) no cambia el determinante.]

46. Suponer que $\mathbf{v}, \ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ son vectores unitarios ortogonales. Sea $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Demostrar que $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$.