15. Hallar los extremos de $f(x, y) = 4x + 2y$, sujeta a la restricción $2x^2 + 3y^2 = 21$.

16. Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar la distancia desde el punto (2, 0, -1) al plano $3x - 2y + 8z + 1 = 0$. Comparar la respuesta con el Ejemplo 12 de la Sección 1.3.

17. Hallar los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z) = xyz$ en la bola unidad $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

18. Sea S la esfera de radio 1 con centro en (1, 2, 3). Hallar la distancia desde S al plano $x+y+z = 0$. (SUGERENCIA: utilizar los multiplicadores de Lagrange para hallar la distancia desde el plano al centro de la esfera.)

19. (a) Hallar los tres números cuyo producto es 27 y cuya suma es mínima.

(b) Hallar los tres números cuya suma es igual a 27 y cuyo producto es máximo.

20. Una caja rectangular sin tapa tiene una superficie de 16 m^2. Hallar las dimensiones que maximizan su volumen.

21. Diseñar una lata cilíndrica (con tapa) que pueda contener 1 litro ($=1000$ cm^3) de agua, utilizando la mínima cantidad posible de metal.

22. Demostrar que las soluciones de las Ecuaciones (4) y (5) se corresponden de forma biunívoca con los puntos críticos de

$$\begin{aligned} &h(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \\ &\quad = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda_1[g_1(x_1, \ldots, x_n) - c_1] \\ &\quad - \cdots - \lambda_k[g_k(x_1, \ldots, x_n) - c_k]. \end{aligned}$$

23. Hallar el máximo y el mínimo absolutos para la función $f(x, y, z) = x + y - z$ en la bola $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

24. Repetir el Ejercicio 23 para $f(x, y, z) = x + yz$.

25. Se quiere decorar el perímetro de un espejo rectangular cuya área es A centímetros cuadrados. Si los adornos que se van a colocar en los bordes horizontales cuestan p céntimos por centímetro y los adornos para los bordes verticales cuestan q céntimos por centímetro, hallar las dimensiones que minimizarán el coste total.

26. Un canal de riego en Arizona tiene los laterales y su parte inferior de cemento, con una sección transversal trapezoidal de área $A = y(x + y \tan\theta)$ y perímetro húmedo $P = x + 2y/\cos\theta$, donde $x =$ anchura del fondo, $y =$ profundidad del agua y $\theta =$ inclinación de los laterales, medida desde la vertical. El mejor diseño para una inclinación fija θ se determina resolviendo $P =$ mínimo sujeto a la condición $A =$ constante. Demostrar que $y^2 = (A\cos\theta)/(2 - \operatorname{sen}\theta)$.

27. Aplicar el criterio de la derivada segunda para estudiar la naturaleza de los puntos críticos de los Ejercicios 3 y 7.

28. Un rayo de luz viaja desde el punto A al punto B atravesando la frontera entre dos medios (véase la Figura 3.4.7). En el primer medio, su velocidad es v_1 y en el segundo es v_2. Demostrar que el viaje se realiza en el mínimo tiempo posible cuando se cumple la *ley de Snell*:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

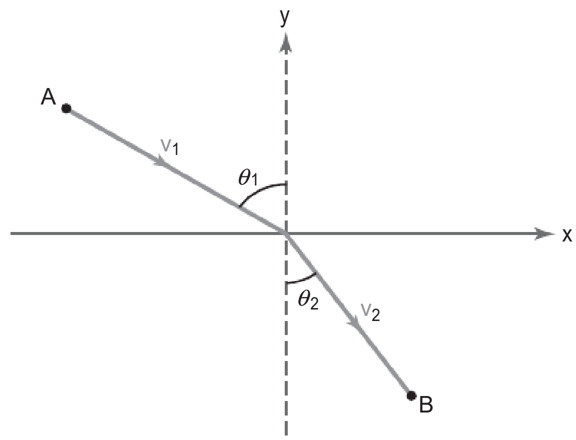

Figura 3.4.7 Ley de la refracción de Snell.

29. Un servicio de mensajería requiere que las dimensiones de una caja rectangular sean tales que la longitud más dos veces la anchura más dos veces la altura no sea mayor que 275 centímetros: ($l + 2w + 2h \leq 275$). ¿Cuál es el volumen de la caja con el mayor volumen que podrá transportar la empresa?

30. Sea P un punto de una superficie S en $\mathbb{R}^3$ definida por la ecuación $f(x, y, z) = 1$, donde f es una función de clase C^1. Supóngase que P es un punto en el que se maximiza la distancia desde el origen a S. Demostrar que el vector que sale del origen y termina en P es perpendicular a S.