Definición 3.1.4

Determinante $n \times n$

Sea A una matriz de $n \times n$ como en (3.1.7). Entonces el determinante de A, denotado por $\det A$ o $|A|$, está dado por

$$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} \tag{3.1.8}$$

La expresión en el lado derecho de (3.1.8) se llama **expansión por cofactores**.

Observación

En la ecuación (3.1.8) se define el determinante mediante la expansión por cofactores en el primer renglón de A. En la siguiente sección se verá (teorema 3.2.5) que se obtiene la misma respuesta si se expande por cofactores en cualquier renglón o columna.

Expansión por cofactores

EJEMPLO 3.1.7 **Cálculo del determinante de una matriz de 4 × 4**

Calcule $\det A$, de donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN ►

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-92) - 3(-70) + 5(2) - 2(-16) = 160$$

Es obvio que el cálculo del determinante de una matriz de $n \times n$ puede ser laborioso. Para calcular un determinante de 4×4 deben calcularse cuatro determinantes de 3×3. Para calcular un determinante de 5×5 deben calcularse cinco determinantes de 4×4, lo que equivale a calcular veinte determinantes de 3×3. Por fortuna existen técnicas que simplifican estos cálculos. Algunos de estos métodos se presentan en la siguiente sección. Sin embargo, existen algunas matrices para las cuales es muy sencillo calcular los determinantes. Se comienza por repetir la definición dada en la página 134.

Definición 3.1.5

Matriz triangular

Matriz triangular superior

Matriz triangular inferior

Matriz diagonal

Una matriz cuadrada se denomina **triangular superior** si todas sus componentes abajo de la diagonal son cero. Es una matriz **triangular inferior** si todas sus componentes arriba de la diagonal son cero. Una matriz se denomina **diagonal** si todos los elementos que no se encuentran sobre la diagonal son cero; es decir, $A = (a_{ij})$ es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$, triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$ y diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Observe que una matriz diagonal es tanto triangular superior como triangular inferior.