29. Demuestre que para cualesquiera números reales a y b, la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ tiene valores característicos $a \pm ib$.

De los problemas 30 al 36 suponga que la matriz A tiene valores característicos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

30. Demuestre que los valores característicos de $A^\top$ son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

31. Demuestre que los valores característicos de αA son $\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \ldots, \alpha\lambda_k$.

32. Demuestre que A^{-1} existe si y sólo si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \neq 0$.

***33.** Si A^{-1} existe, demuestre que los valores característicos de A^{-1} son $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_k}$.

34. Demuestre que la matriz $A - \alpha I$ tiene valores característicos $\lambda_1 - \alpha, \lambda_2 - \alpha, \ldots \lambda_k - \alpha$.

***35.** Demuestre que los valores característicos de A^2 son $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_k^2$.

***36.** Demuestre que los valores característicos de A^m son $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots, \lambda_k^m$ para $m = 1, 2, 3, \ldots$

37. Sea λ un valor característico de A con $\mathbf{v}$ como el vector característico correspondiente. Sea $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n$. Defina la matriz $p(A)$ por $p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n$. Demuestre que $p(A)\mathbf{v} = p(\lambda)\mathbf{v}$.

38. Utilizando el resultado del problema 37, demuestre que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son valores característicos de A, entonces $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_k)$ son vectores característicos de $p(A)$.

39. Demuestre que si A es una matriz diagonal, entonces los valores característicos de A son las componentes de la diagonal de A.

40. Sea $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Demuestre que para cada matriz $\lambda = 2$ es un valor característico con multiplicidad algebraica 4. En cada caso calcule la multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$.

***41.** Sea A una matriz real de $n \times n$. Demuestre que si λ_1 es un valor característico complejo de A con vector característico $\mathbf{v}_1$, entonces $\overline{\lambda}_1$ es un valor característico de A con vector característico $\overline{\mathbf{v}}_1$.

42. Una **matriz de probabilidad** es una matriz de $n \times n$ que tiene dos propiedades: **Matriz de probabilidad**

a) $a_{ij} \geq 0$ para toda i y j.

b) La suma de las componentes en cada columna es 1.

Demuestre que 1 es un valor característico de toda matriz de probabilidad.

43. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz de 2×2. Suponga que $b \neq 0$. Sea m una raíz (real o compleja) de la ecuación

$$bm^2 + (a - d)m - c = 0$$

Demuestre que $a + bm$ es un valor característico de A con vector característico correspondiente $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$. Esto proporciona un método sencillo para calcular los valores y vectores característicos de las matrices de 2×2. [Este procedimiento apareció en el artículo “A Simple Algorithm for Finding Eigenvalues and Eigenvectors for 2×2 Matrices” de Tyre A. Newton en el *American Mathematical Monthly*, 97(1), enero de 1990, pp. 57-60.]