Vectores unitarios

Los vectores con norma 1 se denominan ***vectores unitarios***. Por ejemplo, los vectores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son vectores unitarios. Obsérvese que para cualquier vector $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ es un vector unitario; cuando dividimos $\mathbf{a}$ entre $\|\mathbf{a}\|$, decimos que hemos ***normalizado*** $\mathbf{a}$.

Ejemplo 2

(a) Normalizar $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}$.

(b) Determinar vectores unitarios $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ en el plano, tales que $\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{a}$.

Solución

(a) Sabemos que $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (1/2)^2} = (1/2)\sqrt{53}$, entonces la normalización de $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \frac{4}{\sqrt{53}}\mathbf{i} + \frac{6}{\sqrt{53}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{53}}\mathbf{k}.$$

(b) Puesto que los tres vectores tienen que tener longitud 1, el triángulo con lados $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ tiene que ser equilátero, como se muestra en la Figura 1.2.3. Si orientamos el triángulo como en la figura, podemos tomar $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, y entonces necesariamente

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}, \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}.$$

Se puede comprobar que efectivamente $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{c}\| = 1$ y que $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$. ▲

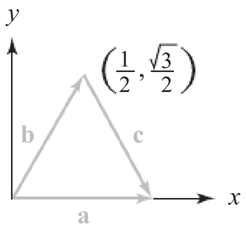

Figura 1.2.3 Los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ están representados por los lados de un tri ángulo equilátero.

En el plano, definimos el vector $\mathbf{i}_\theta = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$, que es el vector unitario que forma un ángulo θ con el eje x (véase la Figura 1.2.4).

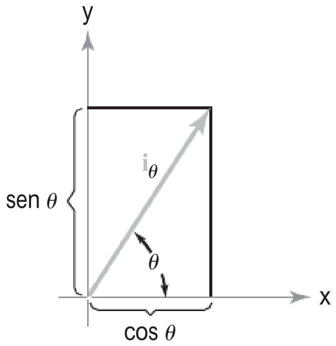

Figura 1.2.4 Las coordenadas de $\mathbf{i}_\theta$ son cos θ y sen θ; es un vector unitario porque $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$.

Distancia

Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores, hemos visto que el vector $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ es paralelo y tiene el mismo tamaño que el segmento dirigido que va del extremo de $\mathbf{a}$ al extremo de $\mathbf{b}$. De aquí se deduce que la distancia entre los extremos de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es $\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|$ (véase la Figura 1.2.5).

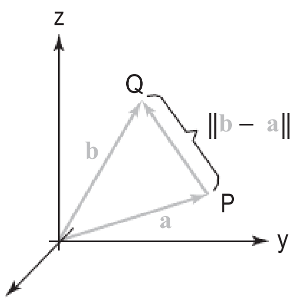

Figura 1.2.5 La distancia entre los extremos de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es $\| \mathbf{b} - \mathbf{a} \|$.

Producto escalar y longitud Dados $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, su ***producto escalar*** es

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

y la ***longitud*** de $\mathbf{a}$ es

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Para ***normalizar*** un vector $\mathbf{a}$, basta con hacer

$$\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}.$$