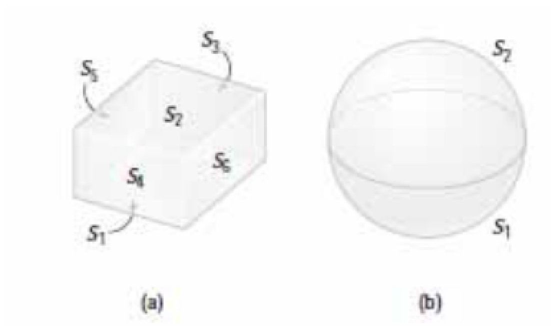

Figura 8.4.1 (a) Regiones elementales simétricas y (b) las superficies S_i que componen sus fronteras.

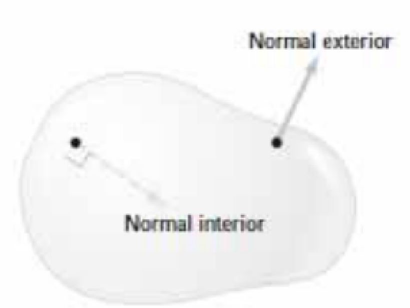

Figura 8.4.2 Dos posibles orientaciones para una superficie cerrada.

Las superficies cerradas se pueden orientar de dos formas. La orientación exterior corresponde a la normal que apunta hacia el espacio exterior y la orientación interior corresponde a la normal que apunta hacia la región acotada (Figura 8.4.2).

Supongamos que S es una superficie cerrada orientada en una de esas dos formas y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en S. Entonces, como hemos definido en la Sección 7.6,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}.$$

Si damos a S la orientación exterior, la integral $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ mide el flujo total de $\mathbf{F}$ que sale a través de S. Es decir, si pensamos en $\mathbf{F}$ como en el campo de velocidades de un fluido, $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ indica la cantidad de fluido que sale de la región acotada por S por unidad de tiempo. Si damos a S la orientación interior, la integral $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ mide el flujo total de $\mathbf{F}$ que atraviesa S hacia el interior.

Recordemos otra forma común de escribir estas integrales de superficie, una forma que especifica explícitamente la orientación de S. Suponemos que la orientación de S está dada por un vector unitario normal $\mathbf{n}(x, y, z)$ en cada punto de S. Entonces tenemos la integral orientada

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS,$$

es decir, la integral de la componente normal de $\mathbf{F}$ sobre S. En el resto de esta sección, si S es una superficie cerrada que encierra una región W, adoptaremos el convenio por defecto de que $S = \partial W$ tiene asignada la orientación exterior, con normal unitaria exterior $\mathbf{n}(x, y, z)$ en cada punto $(x, y, z) \in S$. Además, denotaremos la superficie con la orientación opuesta (interior) mediante ∂W_{op}. Entonces la dirección normal unitaria asociada a esta orientación será $-\mathbf{n}$. Por tanto,

$$\iint_{\partial W} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS = -\iint_S [\mathbf{F}\cdot(-\mathbf{n})]\, dS = -\iint_{\partial W_{\text{op}}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}.$$