característico mayor. ¿Cuál es su comparación con el vector límite **y**? ¿Cuál es la interpretación de **y**?

c) Haciendo uso de los valores y vectores característicos encontrados en el inciso *b*), encuentre la distribución de automóviles a la larga para el problema 14*g*) de MATLAB 2.2. Justifique su procedimiento. Verifique su respuesta calculando $P^n\mathbf{x}$ cuando n crece, donde P es la matriz estocástica que modela el problema y **x** es algún vector de distribución inicial de automóviles cuyas componentes suman 1 000.

d) (*Lápiz y papel*) Suponga que P es una matriz estocástica de 3×3; es decir, los elementos en cada *columna* de P suman 1. Argumente por qué

$$P^{\top}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

¿Qué dice esto sobre los valores característicos de $P^{\top}$? A su vez, ¿qué dice esto sobre los valores característicos de P? ¿Qué relevancia tiene esto en los incisos anteriores de este problema?

6. Teoría de gráficas La definición de **matriz de adyacencia** y otras definiciones relacionadas se encuentran en el problema 11 de MATLAB 8.1. Para gráficas conexas, la matriz de adyacencia tiene las propiedades de que todos los valores característicos son reales, de que existe un valor característico positivo de mayor magnitud, λ_1 con multiplicidad algebraica 1, de que existe un vector característico asociado cuyas componentes son todas positivas y de que los otros valores característicos son estrictamente menores en magnitud. Así, se tendría que, para un vector dado $\mathbf{x}$, $A^n\mathbf{x} \approx \lambda'_1\alpha_1\mathbf{u}_1$ para n grande, donde $\mathbf{u}_1$ es el vector característico asociado con λ_1 (aquí α_1 es la coordenada de **x** respecto a la base de vectores característicos que contiene a $\mathbf{u}_1$ como el primer vector de la base).

a) (*Lápiz y papel*) Explique por qué se puede concluir que la razón de una componente de $A^n\mathbf{x}$ entre la suma de las componentes es aproximadamente igual a la razón de la componente correspondiente de $\mathbf{u}_1$ entre la suma de sus componentes.

b) (*Lápiz y papel*) $(A^n)_{ij}$ se puede interpretar como el número de trayectorias de longitud n que conectan el vértice i con el vértice j (vea la sección 2.8. Por ejemplo, una trayectoria de longitud 2 que conecta a i con j consistiría en una arista que conecta a i con algún vértice k y después una arista que conecta al vértice k con j). Si **x** es un vector con componentes iguales a 1, explique por qué la i-ésima componente de $A^n\mathbf{x}$ representa el número total de trayectorias de longitud n que conectan al vértice i con todos los demás vértices. Explique cómo se puede concluir que las razones de las componentes de $A^n\mathbf{x}$ entre la suma de las componentes da alguna indicación de la "*importancia*" relativa de los vértices de la gráfica. Explique por qué y cómo se pueden usar las razones de las componentes de α_1 entre la suma de las componentes como un índice de la "*importancia*" de cada vértice de la gráfica. (Un argumento más sofisticado para el uso del vector característico correspondiente al valor característico de mayor magnitud se conoce como el **índice de Gold**.)

c) Para cada una de las gráficas siguientes, verifique que la matriz de adyacencia tenga las propiedades establecidas en la presentación anterior al inciso *a*) y analice la "*importancia*" relativa de los vértices de la gráfica. Para las gráficas i) a iii) use su intuición para argumentar, viendo la gráfica, por qué tienen sentido sus resultados. [**Nota.** Para que sea sencilla la introducción de la matriz de adyacencia, consulte la presentación del problema 2 de MATLAB 2.1.]

i) La gráfica en el problema 11*a*) de MATLAB 8.1.

ii) La gráfica en el problema 11*b*) de MATLAB 8.1.

iii) La gráfica en el problema 11*c*) de MATLAB 8.1.