Al despejar las variables como en el ejemplo 2.7.5 se obtiene

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{13}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

Nota

Como en el caso de una matriz cuadrada singular, si una matriz no cuadrada tiene una factorización *LU*, puede ser o no única.

Una observación sobre las computadoras y la factorización *LU*

Los sistemas de software como MATLAB y otros, pueden llevar a cabo la factorización $PA = LU$ de una matriz cuadrada. Sin embargo, la matriz L que se obtiene a veces no es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal pero puede ser una permutación de dicha matriz. De otro modo, el sistema puede dar una matriz triangular inferior L y una U con unos en la diagonal. La razón de esto es que estos sistemas usan una factorización LU para calcular las inversas y los determinantes y para resolver sistemas de ecuaciones. Ciertos reordenamientos o permutaciones minimizarán los errores de redondeo acumulados. Se profundiza sobre estos errores y procedimientos en los apéndices C y D.

Mientras tanto, debe tenerse en cuenta que los resultados que se obtienen en la computadora con frecuencia serán diferentes de los obtenidos a mano. En particular, si A se puede reducir a una matriz triangular sin permutaciones, entonces cuando $PA = LU$, $P = I$. No obstante, muchas veces se obtendrá una P diferente en la computadora. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

igual que en los ejemplos 2.7.1 y 2.7.5, entonces MATLAB da la factorización $A = LU$, donde

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{9} & -\frac{40}{83} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{11}{18} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{83}{9} & \frac{41}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota

Una permutación de renglones de L lleva a una matriz triangular inferior con unos en la diagonal.

RESUMEN 2.7

- ***Factorización LU***

  Suponga que la matriz invertible A se puede reducir por renglones a una matriz triangular superior sin realizar permutaciones. Entonces existen matrices únicas L y U tales que L es triangular inferior con unos en la diagonal, U es una matriz superior invertible y $A = LU$.

- ***Matriz de permutación***

  $E = P_{ij}$ es una matriz de permutación elemental. Un producto de matrices permutación elementales se denomina matriz de permutación.

- ***Factorización $PA = LU$***

  Sea cualquier matriz $m \times n$. Entonces existe una matriz permutación P tal que $PA = LU$, donde L y U son como en la factorización LU. En términos generales, P, A y U no son únicas.