Centros de masa

Si se sitúan masas $m_1, \dots, m_n$ en los puntos $x_1, \dots, x_n$ del eje x, su ***centro de masa*** se define como

$$\overline{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}. \tag{2}$$

Esta definición surge de la siguiente observación: si se equilibran varias masas sobre una palanca (Figure 6.3.1), el punto de equilibrio $\overline{x}$ es el punto en el que el momento total (masa por distancia al punto de equilibrio) es cero; es decir, el punto en el que $\sum m_i(x_i - \overline{x}) = 0$. Un principio físico que se remonta a Arquímedes y, en su forma general, a Newton, establece que esta condición implica que la palanca no tiene tendencia a rotar.

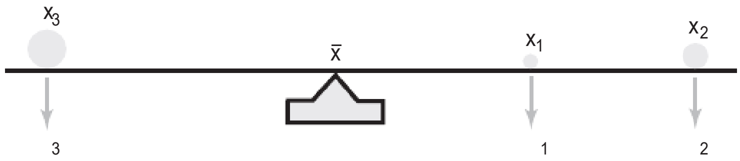

Figura 6.3.1 La palanca está equilibrada si $\Sigma\,(x_i - \overline{x})\, m_i = 0$.

Para una densidad de masa continua $\delta(x)$ a lo largo de la palanca (medida, por ejemplo, en gramos/cm), la análoga de la Fórmula (2) sería

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int x\delta(x)\,dx}{\displaystyle\int \delta(x)\,dx}. \tag{3}$$

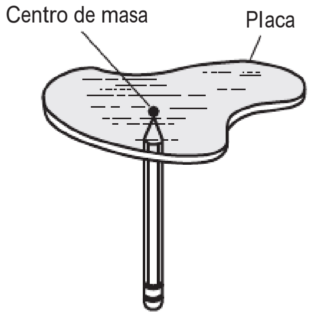

Figura 6.3.2 La placa está en equilibrio cuando está apoyada en su centro de masa.

Para superficies bidimensionales, esto se generaliza a:

Centro de masa de una superficie plana

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint_D x\delta(x,y)\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D \delta(x,y)\,dx\,dy} \quad \text{e} \quad \overline{y} = \frac{\displaystyle\iint_D y\delta(x,y)\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D \delta(x,y)\,dx\,dy}, \tag{4}$$

donde, de nuevo, $\delta(x, y)$ es la densidad de masa (véase la Figura 6.3.2).

Ejemplo 3 Hallar el centro de masa del rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ si la densidad de masa es e^{x+y}.

Solución Primero calculamos la masa total: