EJEMPLO 7.3.8 **Representación matricial relativa a dos bases no estándar en $\mathbb{R}^2$**

Sea la transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$. Calcule A_T con respecto de las bases $B_1 = B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$. Además, encuentre la imagen de $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ con respecto a la base estándar y las bases B_1 y B_2.

SOLUCIÓN ► Primero encontramos las imágenes de los vectores que forman la base B_1 y los expresamos en términos de la base B_2, esto es,

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$T\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} = 17\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}_{B_2}$$

por tanto, la representación matricial de la transformación T con respecto a las bases B_1 y B_2 es $A_T = \begin{pmatrix} -6 & 17 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Para encontrar la imagen con respecto a las diferentes bases obtenemos la representación de $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ con respecto a B_1, que en este caso es

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} = -13\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -3 \end{pmatrix}_{B_1}$$

La imagen en las diferentes bases podemos calcularla como

$$T\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+7 \\ -4-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} -13 \\ -3 \end{pmatrix}_{B_1} = A_T\begin{pmatrix} -13 \\ -3 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 27 \\ 8 \end{pmatrix}_{B_2}$$

Observe que $27\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix}$, por lo que podemos concluir que ambos resultados son equivalentes, independientemente de la base utilizada.

Para evitar confusión, a menos que se establezca de forma explícita algo distinto, siempre se calculará la matriz A_T respecto a la base canónica.* Si $T: V \to V$ es una transformación lineal y se utiliza alguna otra base B, entonces se hará referencia a A_T como *la matriz de transformación de T respecto a la base B*. Así, en el último ejemplo, $A_T = \begin{pmatrix} -6 & 17 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, es la matriz de transformación de T respecto a la base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

Antes de terminar esta sección, debe responderse una pregunta obvia: ¿para qué molestarse en utilizar otra base que no sea la estándar cuando los cálculos son, como en el ejemplo 7.3.8, bastante más complicados? La respuesta es que con frecuencia es posible encontrar una base B^* en $\mathbb{R}^n$ para la

* Esto es, en cualquier espacio en el que se haya definido la base estándar.