Aplicando integración por partes, o utilizando la fórmula

$$\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}$$

de la tabla de integrales disponible al final del libro, obtenemos

$$\frac{\pi}{2} \int_a^b 2r \log r \, dr = \frac{\pi}{2} \left[b^2 \log b - a^2 \log a - \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \right].$$

▲

Ejemplo 5 **La integral gaussiana** Una de las aplicaciones de mayor belleza de la fórmula del cambio de variables a coordenadas polares y la reducción a integrales iteradas es su uso en la fórmula siguiente, conocida como ***integral gaussiana***:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

No sólo es esta fórmula muy elegante en sí misma, sino que además es útil en áreas como la estadística. Ilustra además la unidad que existe entre los números trascendentes e y π casi tan bien como lo hace la fórmula clásica $e^{i\pi} = -1$.

Para llevar a cabo la integración de la integral gaussiana,[2] calculamos primero la integral doble

$$\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy,$$

donde D_a es el disco $x^2 + y^2 \leq a^2$. Dado que $r^2 = x^2 + y^2$ y $dx\, dy = r\, dr\, d\theta$, la fórmula del cambio de variables nos da

$$\begin{aligned}\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-r^2} r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Bigg|_0^a d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e^{-a^2} - 1)\, d\theta = \pi(1 - e^{-a^2}).\end{aligned}$$

Si hacemos $a \to \infty$ en esta expresión, damos sentido a la integral impropia y obtenemos

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \pi.$$

[2]El método que sigue no es en forma alguna directo, sino que requiere un truco. El truco consiste en comenzar con la fórmula deseada y elevar al cuadrado ambos miembros. Se observará entonces que el primer miembro parece una integral iterada. Hay otras formas de calcular la integral gaussiana, pero todas ellas requieren métodos que no son obvios. Para ver cómo se calcula usando métodos de variable compleja, consúltese, por ejemplo, J. Marsden y M. Hoffman, *Basic Complex Analysis*, 3ª ed., W. H. Freeman, Nueva York, 1998.