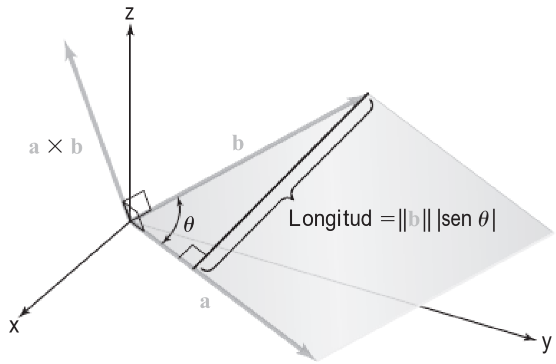

Figura 1.3.3 La longitud de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es el área del paralelogramo formado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

Ejemplo 5 Hallar el área del paralelogramo generado por los dos vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

Solución Calculamos el producto vectorial de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ aplicando la fórmula de las componentes o fórmula del determinante, con $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $b_1 = -1$, $b_2 = 0$, $b_3 = -1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= [(2)(-1) - (3)(0)]\mathbf{i} + [(3)(-1) - (1)(-1)]\mathbf{j} + [(1)(0) - (2)(-1)]\mathbf{k} \\ &= -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Por tanto, el área es

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{3}.$$ ▲

Ejemplo 6 Hallar un vector unitario ortogonal a los vectores $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución Un vector perpendicular a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ es su producto vectorial, esto es, el vector

$$(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Como $\|\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}\| = \sqrt{3}$, el vector

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

es un vector unitario perpendicular a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} + \mathbf{k}$. ▲

Ejemplo 7 Deducir una identidad que relacione los productos escalar y vectorial a partir de las fórmulas

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta \qquad \text{y} \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta$$

eliminando θ.

Solución Vemos que $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ están multiplicados por la misma expresión, lo que sugiere que podemos elevar al cuadrado ambas fórmulas y después sumar los resultados. Obtenemos

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2,$$