y tenemos que

$$\begin{aligned} x + y &= x' + y', \\ x - y &= x' - y'. \end{aligned}$$

Sumando, tenemos

$$2x = 2x'.$$

Por tanto, $x = x'$, y, de forma similar, restando tenemos que $y = y'$, lo que demuestra que T es inyectiva (en todo el dominio de $\mathbb{R}^2$). Realmente, puesto que T es lineal y $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz 2×2, habría sido suficiente ver que det $A \neq 0$ (véase el Ejercicio 12). ▲

Aplicaciones sobreyectivas

En los Ejemplos 1 y 2, hemos determinado la imagen $D = T(D^*)$ de una región D^* según una aplicación T. Lo que nos interesa en la siguiente sección es, en parte, el problema inverso: a saber, dada D y una aplicación inyectiva T de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, hallar D^* tal que $T(D^*) = D$.

Antes de examinar esta cuestión más detalladamente, vamos a presentar el concepto de aplicación "sobreyectiva".

Definición La aplicación T es ***sobreyectiva*** sobre D si para todo punto $(x, y) \in D$ existe al menos un punto (u, v) en el dominio de T tal que $T(u, v) = (x, y)$.

Por tanto, si T es sobreyectiva, *podemos resolver* la ecuación $T(u, v) = (x, y)$ para (u, v), dado $(x, y) \in D$. Además, si T es inyectiva, esta *solución es única.*

Para aplicaciones *lineales* T de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ (o de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$) resulta que inyectivo y sobreyectivo son conceptos equivalentes (véanse los Ejercicios 12 y 13).

Si disponemos de una región D y una aplicación T, la determinación de una región D^* tal que $T(D^*) = D$ solo será posible cuando para cada $(x, y) \in D$ existe un (u, v) en el dominio de T tal que $T(u, v) = (x, y)$ (es decir, T debe ser sobreyectiva sobre D). El siguiente ejemplo muestra que esto no siempre puede hacerse.

Ejemplo 5 Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación dada por $T(u, v) = (u, 0)$. Sea D el cuadrado, $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Dado que T aplica todo $\mathbb{R}^2$ en un eje, es imposible hallar un D^* tal que $T(D^*) = D$. ▲

Veamos de nuevo el Ejemplo 2 utilizando estos métodos.

Ejemplo 6 Sea T la aplicación definida como en el Ejemplo 2 y sea D el cuadrado cuyos vértices son $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$. Hallar D^* tal que $T(D^*) = D$.