Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local

El resto de esta sección está dedicado a obtener un criterio, basado en la derivada segunda, para decidir si un punto crítico es un punto de extremo relativo. En el caso especial de $n = 1$, nuestro criterio se reducirá a la familiar condición del cálculo de una variable: $f''(x_0) > 0$ para un punto de mínimo y $f''(x_0) < 0$ para un punto de máximo. Pero, en el caso general, la derivada segunda es un objeto matemático bastante complicado. Para establecer nuestro criterio, vamos a presentar una versión de la derivada segunda llamada hessiana, la cual, a su vez, está relacionada con las formas cuadráticas. Las ***formas cuadráticas*** son funciones $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ del tipo

$$g(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$$

donde $[a_{ij}]$ es una matriz $n \times n$. En términos de multiplicación de matrices, podemos escribir

$$g(h_1, \ldots, h_n) = [h_1 \cdots h_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo, si $n = 3$,

$$g(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 - 2h_1h_2 + h_3^2 = [h_1\ h_2\ h_3] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

es una forma cuadrática.

Si lo deseamos, podemos suponer que $[a_{ij}]$ es simétrica; de hecho, g no cambia si sustituimos $[a_{ij}]$ por la matriz simétrica $[b_{ij}]$, donde $b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$, ya que $h_ih_j = h_jh_i$ y la suma se hace sobre todo i y j. La naturaleza *cuadrática* de g se refleja en la identidad

$$g(\lambda h_1, \ldots, \lambda h_n) = \lambda^2 g(h_1, \ldots, h_n),$$

lo que se deduce de la definición.

Ahora estamos preparados para definir las funciones hessianas (llamadas así en honor de Ludwig Otto Hesse, que las introdujo en 1844).

Definición Supongamos que $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden $(\partial^2 f/\, \partial x_i\, \partial x_j)(\mathbf{x}_0)$, para $i, j = 1, \ldots, n$, en un punto $\mathbf{x}_0 \in U$. La ***hessiana de f en $\mathbf{x}_0$*** es la forma cuadrática definida por

Continúa