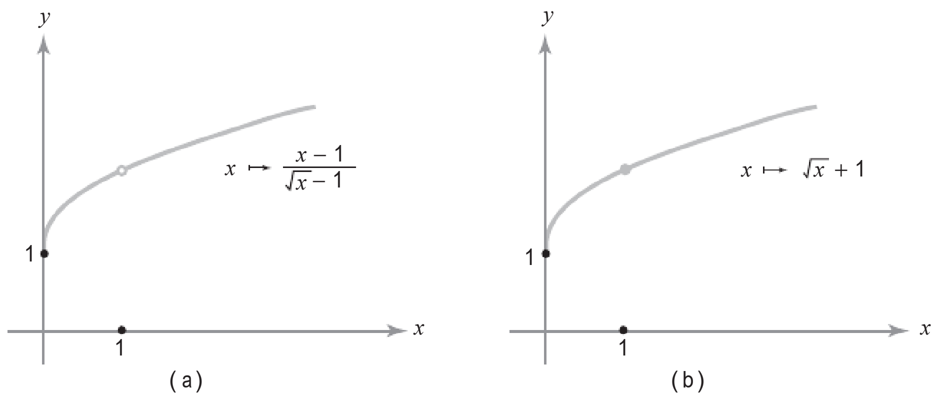

Figura 2.2.11 Estas dos gráficas son iguales excepto en que en la parte (a) g no está definida en $x = 1$, mientras que en la parte (b), g^* está definida para todo $x \geq 0$. ▲

Más adelante estudiaremos otros ejemplos de dos variables.

Propiedades de los límites

Para hablar con propiedad de *el* límite, deberíamos establecer que f puede tener *como máximo un* límite cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Intuitivamente esta propiedad es clara y ahora vamos a enunciarla formalmente.

Teorema 2 Unicidad del límite

$$\text{Si} \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 \ \text{ y } \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2, \quad \text{entonces } \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2.$$

Para llevar a cabo cálculos prácticos con límites, necesitamos algunas reglas para los límites, como, por ejemplo, que el límite de una suma es la suma de los límites. Estas reglas se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3 Propiedades de los límites Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0$ un punto de A o un punto frontera de A, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$; entonces

(I) Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} cf(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}$, donde $cf\colon A \to \mathbb{R}^m$ se define mediante $\mathbf{x} \mapsto c(f(\mathbf{x}))$.

(II) Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1$ y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f+g)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, donde $(f+g)\colon A \to \mathbb{R}^m$ se define mediante $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$.