27. Un ingeniero desea construir un ferrocarril que suba la montaña del Ejercicio 26. Ascender directamente a la cima de la montaña supone una pendiente excesiva para la potencia de la máquina. En el punto $(1, 1)$, ¿en qué direcciones podría tenderse la vía de modo que ascendiera con una pendiente del 3 %—es decir, un ángulo cuya tangente sea igual a 0.03? (hay dos posibilidades). Realizar un esquema de la situación indicando las dos posibles direcciones con una pendiente del 3 % en (1, 1).

28. En electrostática, la fuerza $\mathbf{P}$ de atracción entre dos partículas de carga opuesta está dada por $\mathbf{P} = k(\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3)$ (*Ley de Coulomb*), donde k es una constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Demostrar que $\mathbf{P}$ es el gradiente de $f = -k/\|\mathbf{r}\|$.

29. El potencial electrostático V generado por dos filamentos paralelos e infinitos con densidades lineales de carga λ y $-\lambda$ es $V = (\lambda/2\pi\varepsilon_0)\ln(r_2/r_1)$, donde $r_1^2 = (x - x_0)^2 + y^2$ y $r_2^2 = (x + x_0)^2 + y^2$. Suponemos que los filamentos están en la dirección z y que atraviesan el plano xy en $(-x_0, 0)$ y $(x_0, 0)$. Hallar $\nabla V(x, y)$.

30. Para cada una de las siguientes funciones, hallar los valores máximo y mínimo que la función f alcanza a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$:

(a) $f(x, y) = xy; \mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t); 0 \leq t \leq 2\pi$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2; \mathbf{c}(t) = (\cos t, 2\operatorname{sen} t); 0 \leq t \leq 2\pi$

31. Suponer que una partícula sale despedida de la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ en el punto $(1, 1, \sqrt{3})$ según la normal a la superficie dirigida hacia el plano xy en el instante $t = 0$ y con una velocidad de 10 unidades por segundo. ¿Cuándo y dónde cruzará al plano xy?

32. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y considérese $\mathbf{D}f(x, y, z)$ como una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que el núcleo (es decir, el conjunto de vectores que se transforman en cero) de $\mathbf{D}f$ es el plano de $\mathbb{R}^3$ ortogonal a ∇f.

Ejercicios de repaso del Capítulo 2

1. Describir las gráficas de:

(a) $f(x, y) = 3x^2 + y^2$

(b) $f(x, y) = xy + 3x$

2. Describir algunas secciones y superficies de nivel apropiadas de las gráficas de:

(a) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$

(b) $f(x, y, z) = x^2$

(c) $f(x, y, z) = xyz$

3. Calcular la derivada $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ de cada una de las funciones siguientes:

(a) $f(x, y) = (x^2 y, e^{-xy})$

(b) $f(x) = (x, x)$

(c) $f(x, y, z) = e^x + e^y + e^z$

(d) $f(x, y, z) = (x, y, z)$

4. Suponer que $f(x, y) = f(y, x)$ para todo (x, y). Demostrar que

$$(\partial f/\partial x)(a, b) = (\partial f/\partial y)(b, a).$$

5. Sean $f(u, v) = (\cos u, v + \operatorname{sen} u)$ y $g(x, y, z) = (x^2 + \pi y^2, xz)$. Calcular $D(f \circ g)$ en (0, 1, 1) utilizando la regla de la cadena.

6. Utilizar la regla de la cadena para determinar $D(f \circ g)(-2, 1)$ con $f(u, v, w) = (v^2 + uw, u^2 + w^2, u^2 v - w^3)$ y $g(x, y) = (xy^3, x^2 - y^2, 3x + 5y)$.

7. Utilizar la regla de la cadena para determinar $D(f \circ g)(-1, 2)$ con $f(u, v, w) = (v^2 + w^2, u^3 - vw, u^2 v + w)$ y $g(x, y) = (3x + 2y, x^3 y, y^2 - x^2)$.

8. Sean $f(x, y) = (xy, \frac{x}{y}, x + y)$ y $g(w, s, t) = (we^s, se^{wt})$. Hallar $D(f \circ g)(3, 1, 0)$.

9. Sea $\mathbf{r}(t) = (t\cos(\pi t), t\operatorname{sen}(\pi t), t)$ una trayectoria. ¿Dónde interseca la recta tangente a $\mathbf{r}$ en $t = 5$ al plano xy?

10. Sea $f(x, y) = x^2 e^{-xy}$.

(a) Hallar un vector normal a la gráfica de f en (1, 2).

(b) Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en (1, 2).