EJEMPLO 4.3.7 Cálculo de una proyección en $\mathbb{R}^3$

Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$. Encuentre $\text{proy}_\mathbf{v}\,\mathbf{u}$.

SOLUCIÓN ► En este caso, $\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{2}{41}$ y $\text{proy}_\mathbf{v}\,\mathbf{u} = \frac{2}{41}\mathbf{i} + \frac{4}{41}\mathbf{j} - \frac{12}{41}\mathbf{k}$. La componente de $\mathbf{u}$ en la dirección $\mathbf{v}$ es $\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{41}}$.

Observe que, igual que en el plano, $\text{proy}_\mathbf{v}\,\mathbf{u}$ es un vector que tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$ si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$ y la dirección opuesta a la de $\mathbf{v}$ si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$.

RESUMEN 4.3

- El **segmento de recta dirigido** que se extiende de P a Q en $\mathbb{R}^3$ denotado por $\overrightarrow{PQ}$ es el segmento de recta que va de P a Q.

- Dos segmentos de recta dirigidos en $\mathbb{R}^3$ son **equivalentes** si tienen la misma magnitud (longitud) y dirección.

- ***Definición geométrica de un vector***

  Un vector en $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos en $\mathbb{R}^3$ equivalentes a un segmento de recta dirigido dado. Una representación de un vector tiene su punto inicial en el origen y se denota por $\overrightarrow{0R}$.

- ***Definición algebraica de un vector***

  El **vector cero** es el vector (0, 0). En $\mathbb{R}^3$, un vector $\mathbf{v}$ es una **terna ordenada** de números reales (a, b, c); los números a, b y c son las componentes del vector $\mathbf{v}$. El **vector cero** en $\mathbb{R}^3$ es el vector (0, 0, 0).

- Las definiciones geométrica y algebraica de un vector en $\mathbb{R}^3$ se relacionan de la siguiente manera: si $\mathbf{v} = (a, b, c)$, entonces una representación de $\mathbf{v}$ es $\overrightarrow{0R}$, donde $R = (a, b, c)$.

- Si $\mathbf{v} = (a, b, c)$, entonces la magnitud de $\mathbf{v}$ está dada por $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

- ***Desigualdad del triángulo***

  En $\mathbb{R}^3$

  $$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \le |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$$

- En $\mathbb{R}^3$, sean $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$; entonces $\mathbf{v} = (a, b, c)$ se puede escribir como

  $$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

- Un **vector unitario** $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^3$ es un vector que satisface $|\mathbf{u}| = 1$.

  Si $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$, entonces

  $$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

- El **ángulo** φ entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^3$ es el único número en $[0, \pi]$ que satisface

  $$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$