donde A es simétrica. Por el teorema 8.4.4, existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^{\top}AQ = D$, donde $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ y λ_1 y λ_2 son valores característicos de A. Entonces $A = QDQ^{\top}$ (recuerde que $Q^{\top} = Q^{-1}$) y (8.5.5) se puede escribir como

$$(QDQ^{\top}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = d \tag{8.5.6}$$

Pero del teorema 7.5.1, $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{v} \cdot A^{\top}\mathbf{y}$. Así,

$$Q(DQ^{\top}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = DQ^{\top}\mathbf{v} \cdot Q^{\top}\mathbf{v} \tag{8.5.7}$$

de manera que (8.5.6) se convierte en

$$[DQ^{\top}\mathbf{v}] \cdot Q^{\top}\mathbf{v} = d \tag{8.5.8}$$

Sea $\mathbf{v}' = Q^{\top}\mathbf{v}$. Entonces $\mathbf{v}'$ es un vector de dos componentes y (8.5.8) se convierte en

$$\boxed{D\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = d} \tag{8.5.9}$$

Considere (8.5.9) con más detenimiento. Se puede escribir $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Como una matriz diagonal es simétrica, (8.5.9) define una forma cuadrática $\bar{F}(x', y')$ de las variables x' y y'. Si $D = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}$, entonces $D\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'x' \\ c'y' \end{pmatrix}$ y $\bar{F}(x', y') = D\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = \begin{pmatrix} a'x' \\ c'y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = a'x'^2 + c'y'^2$

Es decir, $\bar{F}(x', y')$ *es una forma cuadrática en la que falta el término en* $x'y'$. Por lo tanto, la ecuación (8.5.9) es una ecuación cuadrática de las nuevas variables x', y' sin el término $x'y'$.

EJEMPLO 8.5.1 Expresión de una forma cuadrática en las nuevas variables x' y y' sin el término $x'y'$

Considere la ecuación cuadrática $x^2 - 4xy + 3y^2 = 6$. Como se vio, la ecuación se puede escribir en la forma $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 6$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. En el ejemplo 8.4.1 se vio que A se puede diagonalizar a $D = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{5} \end{pmatrix}$ usando la matriz ortogonal

$$Q = \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$x' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q^{\top}\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2x + (-1+\sqrt{5})y \\ (1-\sqrt{5})x + 2y \end{pmatrix}$$

y para las nuevas variables la ecuación se puede escribir como

$$(2-\sqrt{5})x'^2 + (2+\sqrt{5})y'^2 + 6$$