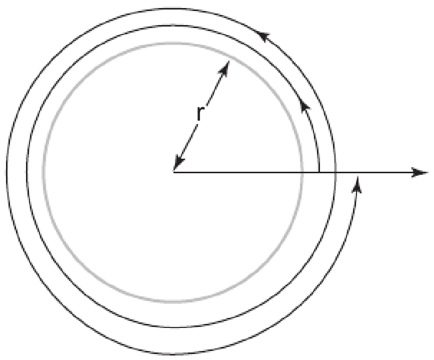

Figura 4.2.1 La longitud de arco de una circunferencia recorrida dos veces es $4\pi r$.

▲

Para curvas planas, se omite el término $z'(t)$, como en el Ejemplo 1.

Ejemplo 2 Consideremos el punto con función de posición

$$\mathbf{c}(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t),$$

que describe la cicloide analizada en la Sección 2.4 (véase la Figura 2.4.6). Calcular la velocidad, la rapidez y la longitud de un arco.

Solución El vector velocidad es $\mathbf{c}'(t) = (1 - \cos t, \operatorname{sen} t)$, por lo que la rapidez del punto $\mathbf{c}(t)$ será

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Por tanto, $\mathbf{c}(t)$ se desplaza con rapidez variable, a pesar de que el círculo gira con rapidez constante. Además, la rapidez de $\mathbf{c}(t)$ es cero cuando t es un múltiplo entero de 2π. Para dichos valores de t, la coordenada y del punto $\mathbf{c}(t)$ es cero, por lo que el punto descansa sobre el eje x. La longitud de arco de un ciclo es

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\, dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \frac{t}{2}\, dt \left(\text{porque } 1 - \cos t = 2\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} \text{ y } \operatorname{sen} \frac{t}{2} \geq 0 \text{ en } [0, 2\pi]\right)$$

$$= 4\left(-\cos \frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 8.$$

▲

Si una curva está formada por un número finito de trozos, cada uno de los cuales es C^1 (con derivada acotada), calculamos su longitud de arco sumando las longitudes de todos los trozos. Tales curvas se denominan C^1 ***a trozos*** . A veces diremos simplemente “suaves a trozos”.

Ejemplo 3 Una bola rodando en una mesa de billar sigue la trayectoria $\mathbf{c}\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, definida por $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t)) = (|t|, |t - \frac{1}{2}|)$. Hallar la distancia recorrida por la bola.