demasiado el análisis espacial necesario para comprender la física del mundo tridimensional. Por ello, Hamilton emprendió la búsqueda de un sistema de ternas; es decir, una fórmula aceptable[1] de multiplicación para puntos $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ en $\mathbb{R}^3$, o, como de hecho eran, para vectores $\boldsymbol{a}\,\mathbf{i} + \boldsymbol{b}\,\mathbf{j} + \boldsymbol{c}\,\mathbf{k}$.

Hacia 1843, Hamilton se dió cuenta de que esta era una búsqueda sin esperanza. Pero entonces, el 16 de octubre de 1843, Hamilton descubrió que lo que no pudo lograr para $\mathbb{R}^3$ podía conseguirlo para $\mathbb{R}^4$; descubrió los *cuaterniones,* un sistema de números completamente nuevo.

Hamilton[2] se dio cuenta de que la multiplicación que había estado buscando podía definirse para las cuaternas $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$, que había denotado mediante

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\,\mathbf{i} + \boldsymbol{c}\,\mathbf{j} + \boldsymbol{d}\,\mathbf{k}.$$

La $\boldsymbol{a}$ se denominó *parte escalar* y $\boldsymbol{b}\,\mathbf{i} + \boldsymbol{c}\,\mathbf{j} + \boldsymbol{d}\,\mathbf{k}$ se denominó *parte vectorial*, lo que en realidad, al igual que con los números complejos, definía el punto $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ en $\mathbb{R}^4$. La tabla de multiplicación que introdujo fue

$$\begin{gathered}
\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}\\
\mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}\\
\mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}\\
\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}.
\end{gathered}$$

Hamilton continuó creyendo *apasionadamente* en estos cuaterniones hasta el final de su vida. Lamentablemente, el desarrollo histórico fue en otra dirección.

El primer paso que se alejaba de los cuaterniones lo dio un firme creyente en la importancia de los mismos, concretamente, Peter Guthrie Tait, que nació en 1831 cerca de Edimburgo, Escocia. En 1860, Tait obtuvo la Cátedra de Filosofía Natural de la Universidad de Edimburgo, donde permaneció hasta su muerte en 1901. En 1867, escribió su *Elementary Treatises on Quaternions*, un texto orientado a las aplicaciones de la física. Su tercer capítulo fue el más significativo. Es aquí donde Tait consideró el producto cuaterniónico de dos vectores:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{a}\,\mathbf{i} + \boldsymbol{b}\,\mathbf{j} + \boldsymbol{c}\,\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{w} = \boldsymbol{a}'\mathbf{i} + \boldsymbol{b}'\mathbf{j} + \boldsymbol{c}'\mathbf{k}.$$

Entonces el producto $\mathbf{vw}$, según la definición de Hamilton, es:

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{a}\,\mathbf{i} + \boldsymbol{b}\,\mathbf{j} + \boldsymbol{c}\,\mathbf{k})(\boldsymbol{a}'\mathbf{i} + \boldsymbol{b}'\mathbf{j} + \boldsymbol{c}'\mathbf{k})\\
&\qquad = -(\boldsymbol{aa}' + \boldsymbol{bb}' + \boldsymbol{cc}') + (\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{c}\boldsymbol{b}')\mathbf{i} + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{c}\boldsymbol{a}')\mathbf{j} + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}')\mathbf{k}
\end{aligned}$$

o, en forma moderna:

$$\mathbf{vw} = -(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) + \mathbf{v}\times\mathbf{w},$$

donde $\cdot$ es el producto escalar de vectores y $\times$ es el producto vectorial. Tait descubrió las fórmulas

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\cos\boldsymbol{\theta} \qquad \text{y} \qquad \|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\,\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\theta},$$

donde $\boldsymbol{\theta}$ es el ángulo que forman $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Además, demostró que $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ era ortogonal a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, proporcionando así una interpretación *geométrica* del producto cuaterniónico de dos vectores.

[1] Para él, “aceptable” significaba que la multiplicación satisfacía la ley asociativa.
[2] *North British Review*, **14** (1858), p. 57.