Justificación de la fórmula de la longitud de arco

En la siguiente exposición se supone el conocimiento de la integral definida en función de las sumas de Riemann. Si los conocimientos del lector en este tema necesitan un refuerzo, puede ver este tema después de estudiar el Capítulo 5.

En $\mathbb{R}^3$ hay otra forma de justificar la fórmula de la longitud de arco basada en aproximaciones poligonales. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en N subintervalos de la misma longitud:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b;$$
$$t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{N} \quad \text{para} \quad 0 \leq i \leq N-1.$$

Consideramos entonces la línea poligonal obtenida uniendo los pares de puntos sucesivos $\mathbf{c}(t_i), \mathbf{c}(t_{i+1})$ para $0 \leq i \leq N-1$. Esto nos da una aproximación poligonal a $\mathbf{c}$, como se muestra en la Figura 4.2.4. Por la fórmula de la distancia en $\mathbb{R}^3$, se obtiene que el segmento de recta de $\mathbf{c}(t_i)$ a $\mathbf{c}(t_{i+1})$ tiene una longitud igual a

$$\|\mathbf{c}(t_{i+1}) - \mathbf{c}(t_i)\| = \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2 + [z(t_{i+1}) - z(t_i)]^2},$$

donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Aplicando el teorema del valor medio a $x(t), y(t)$ y $z(t)$ en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, obtenemos tres puntos t_i^*, t_i^{**} y t_i^{***} tales que

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(t_i^*)(t_{i+1} - t_i),$$
$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(t_i^{**})(t_{i+1} - t_i),$$

y

$$z(t_{i+1}) - z(t_i) = z'(t_i^{***})(t_{i+1} - t_i).$$

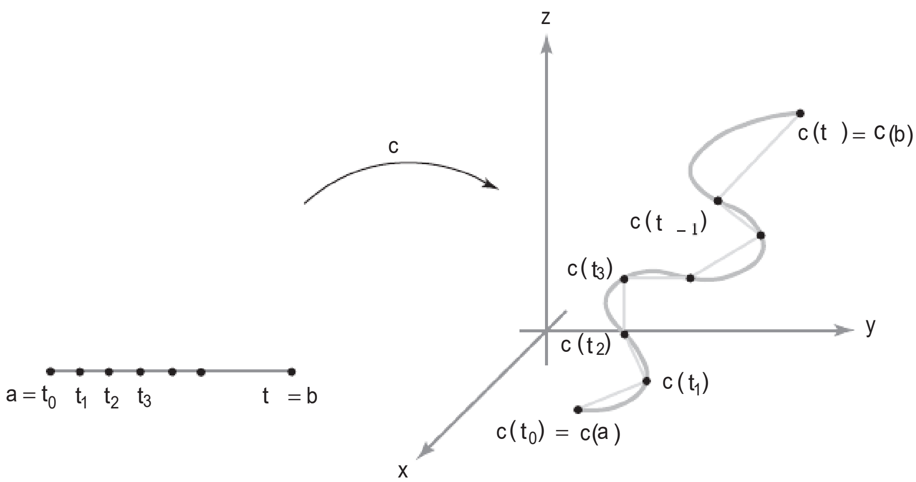

Figura 4.2.4 Una trayectoria $\mathbf{c}$ se puede aproximar mediante una trayectoria poligonal obtenida uniendo cada $\mathbf{c}(t_i)$ con $\mathbf{c}(t_{i+1})$ mediante un segmento recto.