Ejemplo 12 Estudiar los extremos locales de $f(x,y,z) = xyz$ en la superficie de la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ utilizando el criterio de la derivada segunda.

Solución Igualando a cero las derivadas parciales de la función auxiliar $h(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ se obtiene

$$\begin{aligned} yz &= 2\lambda x \\ xz &= 2\lambda y \\ xy &= 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Por tanto, $3xyz = 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 2\lambda$. Si $\lambda = 0$, las soluciones son $(x,y,z,\lambda) = (\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$ y $(0, 0, \pm 1, 0)$. Si $\lambda \neq 0$, entonces tenemos $2\lambda = 3xyz = 6\lambda z^2$ y, por tanto, $z^2 = \frac{1}{3}$. De manera análoga, $x^2 = y^2 = \frac{1}{3}$. Por tanto, las soluciones están dadas por $\lambda = \frac{3}{2}xyz = \pm\sqrt{3}/6$. Los puntos críticos de h y los valores correspondientes de f se proporcionan en la Tabla 3.1. En ella vemos que los puntos E, F, G y K son puntos de mínimo. Los puntos D, H, I y J son puntos de máximo. Para ver si esto concuerda con el criterio de la segunda derivada, tenemos que considerar dos determinantes. Veamos en primer lugar este determinante:

$$\begin{aligned} |\overline{H}_2| &= \begin{vmatrix} 0 & -\partial g/\partial x & -\partial g/\partial y \\ -\partial g/\partial x & \partial^2 h/\partial x^2 & \partial^2/\partial x\,\partial y \\ -\partial g/\partial y & \partial^2 h/\partial x\,\partial y & \partial^2 h/\partial y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y \\ -2x & -2\lambda & z \\ -2y & z & -2\lambda \end{vmatrix} \\ &= 8\lambda x^2 + 8\lambda y^2 + 8xyz = 8\lambda(x^2 + y^2 + 2z^2). \end{aligned}$$

Obsérvese que signo $(|\overline{H}_2|) =$ signo $\lambda =$ signo (xyz), donde el signo de un número es 1 si dicho número es positivo, o es -1 si dicho número es negativo. En segundo lugar, consideramos

$$\begin{aligned} |\overline{H}_3| &= \begin{vmatrix} 0 & -\partial g/\partial x & -\partial g/\partial y & -\partial g/\partial z \\ -\partial g/\partial x & \partial^2 h/\partial x^2 & \partial^2 h/\partial x\,\partial y & \partial^2 h/\partial x\,\partial z \\ -\partial g/\partial y & \partial^2 h/\partial x\,\partial y & \partial^2 h/\partial y^2 & \partial^2 h/\partial y\,\partial z \\ -\partial g/\partial z & \partial^2 h/\partial x\,\partial z & \partial^2 h/\partial y\,\partial z & \partial^2 h/\partial z^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y & -2z \\ -2x & -2\lambda & z & y \\ -2y & z & -2\lambda & x \\ -2z & y & x & -2\lambda \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

que resulta ser $+4$ en los puntos $\pm$A, $\pm$B, y $\pm$C y $-\frac{16}{3}$ en los otros ocho puntos. En E, F, G y K, tenemos $|\overline{H}_2| < 0$ y $|\overline{H}_3| < 0$, de modo que el criterio indica que son puntos de mínimo local. En D, H, I y J tenemos $|\overline{H}_2| > 0$ y $|\overline{H}_3| < 0$, y por tanto el criterio dice que se trata de puntos de máximo local. Por último, el criterio de la segunda derivada muestra que $\pm$A, $\pm$B y $\pm$C son puntos de silla. ▲