es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -r \operatorname{sen}\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}.$$

▲

Ejemplo 5 Sean $f(x,y) = (\cos y + x^2, e^{x+y})$ y $g(u,v) = (e^{u^2}, u - \operatorname{sen} v)$. (a) Escribir una fórmula para $f\circ g$. (b) Calcular $\mathbf{D}(f\circ g)(0,0)$ utilizando la regla de la cadena.

Solución (a) Tenemos

$$\begin{aligned}(f\circ g)(u,v) &= f(e^{u^2}, u - \operatorname{sen} v)\\ &= \left(\cos(u-\operatorname{sen} v) + e^{2u^2}, e^{e^{u^2}+u-\operatorname{sen} v}\right).\end{aligned}$$

(b) Por la regla de la cadena,

$$\mathbf{D}(f\circ g)(0,0) = [\mathbf{D}f(g(0,0))][\mathbf{D}g(0,0)] = [\mathbf{D}f(1,0)][\mathbf{D}g(0,0)].$$

Ahora

$$\mathbf{D}g(0,0) = \begin{bmatrix} 2ue^{u^2} & 0\\ 1 & -\cos v\end{bmatrix}_{(u,v)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{D}f(1,0) = \begin{bmatrix} 2x & -\operatorname{sen} y\\ e^{x+y} & e^{x+y}\end{bmatrix}_{(x,y)=(1,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0\\ e & e\end{bmatrix}.$$

Recordemos que $\mathbf{D}f$ se evalúa en $g(0,0)$, no en $(0,0)$. Por tanto,

$$\mathbf{D}(f\circ g)(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0\\ e & e\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ e & -e\end{bmatrix}.$$

▲

Ejemplo 6 Sea $f\colon U\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, con $f = (f_1,\dots,f_m)$ y sea $g(\mathbf{x}) = \operatorname{sen}[f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{x})]$. Calcular $\mathbf{D}g(\mathbf{x})$.

Solución Por la regla de la cadena, $\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = \cos[f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{x})]\mathbf{D}h(\mathbf{x})$, donde $h(\mathbf{x}) = [f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{x})] = f_1^2(\mathbf{x}) + \cdots + f_m^2(\mathbf{x})$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{D}h(x) &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h}{\partial x_n}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 2f_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + 2f_m\dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & 2f_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} + \cdots + 2f_m\dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

lo que se puede escribir como $2f(\mathbf{x})\mathbf{D}f(\mathbf{x})$, donde consideramos que f es una matriz fila,