$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)\mathbf{k}.$$

Cada una de las componentes es cero por la igualdad de las derivadas parciales cruzadas. ■

En el Capítulo 8 veremos el recíproco de este teorema (bajo unas hipótesis adecuadas, un campo vectorial con rotacional cero es un gradiente).

Ejemplo 11 Sea $\mathbf{V}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$. Demostrar que $\mathbf{V}$ no es un campo gradiente.

Solución Si $\mathbf{V}$ fuera un campo gradiente, entonces según el Teorema 1 debería satisfacer que rot $\mathbf{V} = \mathbf{0}$. Pero

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{k} \neq \mathbf{0},$$

por lo que $\mathbf{V}$ no puede ser un gradiente. ▲

Rotacional escalar

Existe una operación sobre campos vectoriales en el plano que está estrechamente relacionada con el rotacional. Si $\mathbf{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial en el plano, también se puede interpretar como un campo vectorial en el espacio para el que la componente $\mathbf{k}$ es cero y las otras dos componentes son independientes de z. El rotacional de $\mathbf{F}$ se reduce entonces a

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

y siempre apunta en la dirección $\mathbf{k}$. La función

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

de x e y es el ***rotacional escalar*** de $\mathbf{F}$.

Ejemplo 12 Hallar el rotacional escalar de $\mathbf{V}(x, y) = -y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

Solución El rotacional es

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & 0 \end{vmatrix} = (1 + 2y)\,\mathbf{k},$$

por lo que el rotacional escalar, que es el coeficiente de $\mathbf{k}$ es $1 + 2y$. ▲