En el Ejercicio 17 pedimos al lector que deduzca a partir del Teorema 1, que para una función C^3 de x, y y z,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial z\,\partial x}, \qquad \text{etc.}$$

En otras palabras, podemos calcular las derivadas parciales iteradas en el orden que deseemos.

Ejemplo 4 Verificar la igualdad de las derivadas parciales cruzadas de segundo orden para la función

$$f(x, y) = xe^y + yx^2.$$

Solución Aquí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + x^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = e^y + 2x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = e^y + 2x,$$

y por tanto tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}.$$

▲

En ocasiones se utiliza la notación f_x, f_y, f_z para las derivadas parciales: $f_x = \partial f/\partial x$, y así sucesivamente. Con esta notación, escribimos $f_{xy} = (f_x)_y$, de manera que la igualdad de las derivadas parciales cruzadas se denota por $f_{xy} = f_{yx}$ Obsérvese que $f_{xy} = \partial^2 f/\partial y\,\partial x$, de forma que el orden de x e y se invierte en las dos notaciones; afortunadamente, la igualdad de las derivadas parciales cruzadas hace que esta ambigüedad sea irrelevante. El siguiente ejemplo ilustra esta notación con subíndices.

Ejemplo 5 Sea

$$z = f(x, y) = e^x \operatorname{sen} xy$$

y escribimos $x = g(s, t), y = h(s, t)$ para ciertas funciones g y h. Sea

$$k(s, t) = f(g(s, t), h(s, t)).$$

Calcular k_{st}.

Solución Por la regla de la cadena,

$$k_s = f_x g_s + f_y h_s = (e^x \operatorname{sen} xy + ye^x \cos xy)g_s + (xe^x \cos xy)h_s.$$

Derivando con respecto a t usando las reglas del producto, obtenemos

$$k_{st} = (f_x)_t g_s + f_x (g_s)_t + (f_y)_t h_s + f_y (h_s)_t.$$