

Continuando, se tiene  $\mathbf{v}'_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Por último,  $|\mathbf{v}'_3| = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ , de manera que  $\mathbf{u}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ . Así, una base orto-

normal en  $\mathbb{R}^3$  es  $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ . Este resultado debe verificarse.

### EJEMPLO 6.1.5 Una base ortonormal para un subespacio de $\mathbb{R}^3$

Encuentre una base ortonormal para el conjunto de vectores en  $\mathbb{R}^3$  que está sobre el plano

$$\pi \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + 3z = 0 \right\}.$$

**SOLUCIÓN ►** Como se vio en el ejemplo 5.6.3, una base para este subespacio de dos dimen-

siones es  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Entonces  $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{5}$  y  $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Continuando, se define

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{12}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por último,  $|\mathbf{v}'_2| = \sqrt{\frac{70}{25}} = \sqrt{\frac{70}{5}}$ , de manera que  $\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}'_2}{|\mathbf{v}'_2|} = \frac{5}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$ .