Demostración Sea $P(x,y) = -y, Q(x,y) = x$; entonces por el teorema de Green tenemos

$$\frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\iint_D \left[\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right] dx\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\iint_D [1 + 1]\,dx\,dy = \iint_D dx\,dy = A. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2 Sea $a > 0$. Calcular el área (véase la Figura 8.1.6) de la región encerrada por la hipocicloide definida por $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, usando la parametrización $x = a\cos^3\theta, y = a\,\mathrm{sen}^3\,\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

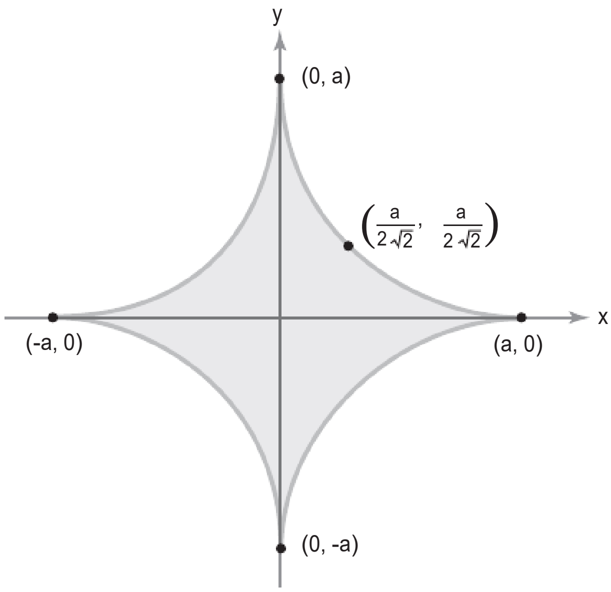

Figura 8.1.6 La hipocicloide $x = a\cos^3\theta, y = a\,\mathrm{sen}^3\,\theta, 0 \le \theta \le 2\pi$.

Solución Según el teorema anterior, y usando las identidades trigonométricas $\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta = 1, \mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$ y $\mathrm{sen}^2\,\phi = (1-\cos 2\phi)/2$, obtenemos

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(a\cos^3\theta)(3a\,\mathrm{sen}^2\,\theta\cos\theta) - (a\,\mathrm{sen}^3\,\theta)(-3a\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta)]\,d\theta$$
$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} (\mathrm{sen}^2\,\theta\cos^4\theta + \cos^2\theta\,\mathrm{sen}^4\,\theta)\,d\theta = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\,\theta\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\,2\theta\,d\theta = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)d\theta$$
$$= \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi} d\theta - \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}\cos 4\theta\,d\theta = \frac{3}{8}\pi a^2. \quad \blacktriangle$$