## Teorema de las circunferencias de Gershgorin

Se estudiará ahora el segundo resultado importante de esta sección. Sea $A$ una matriz real o compleja de $n \times n$. Como es usual, se escribe

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se define el número

$$r_i = |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}| = \sum_{j=2}^{n} |a_{ij}| \qquad \textbf{(8.8.7)}$$

De manera similar se define

$$\boxed{\begin{aligned} r_i &= |a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{ij-1}| + |a_{i,j-1}| \cdots + |a_{i,n}| \\ &= \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \end{aligned}} \qquad \textbf{(8.8.8)}$$

Es decir, $r_i$ es la suma de los valores absolutos de los números en el renglón $i$ de $A$ que no están en la diagonal principal. Sea

$$D_i = \{z \in \mathbb{C}: |z - a_{ii}| \leq r_i\} \qquad \textbf{(8.8.9)}$$

En este caso, $D_i$ es un disco en el plano complejo centrado en $a_{ii}$ con radio $r_i$ (vea la figura 8.5).

El disco $D_i$ consiste en todos los puntos en el plano complejo sobre y dentro de las circunferencias $C_i = \{z \in \mathbb{C}: |z - a_{ii}| = r_i\}$. Las circunferencias $C_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se denominan **circunferencias de Gershgorin**.

**Circunferencias de Gershgorin**

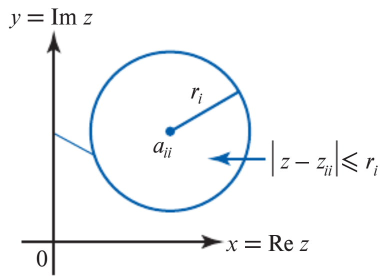


**Figura 8.5**

Un círculo de radio $r_i$ centrado en $a_{ii}$.

### Teorema 8.8.3

**Teorema de las circunferencias de Gershgorin**

Sea $A$ una matriz de $n \times n$ y sea $D_i$ como se definió en la ecuación (8.8.9). Entonces cada valor característico de $A$ está contenido en al menos uno de los $D_i$, es decir, si los valores característicos de $A$ son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, entonces

$$\boxed{\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i} \qquad \textbf{(8.8.10)}$$

**Nota**

El matemático ruso S. Gershgorin publicó este resultado en 1931.