



Figura 4.35

En los tres casos  $\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{PR}$ .

La ecuación (4.5.4) se denomina **ecuación vectorial de una recta**  $L$ . Si  $R$  está sobre  $L$ , entonces (4.5.4) se satisface para algún número real  $t$ . Inversamente, si (4.5.4) se cumple, entonces invirtiendo los pasos, se ve que  $\vec{PR}$  es paralelo a  $\mathbf{v}$ , lo que significa que  $R$  está sobre  $L$ .

Si se extienden las componentes de la ecuación (4.5.4) se obtiene

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} + t(x_2 - x_1)\mathbf{i} + t(y_2 - y_1)\mathbf{j} + t(z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

o sea

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

(4.5.5)

Las ecuaciones (4.5.5) se denominan **ecuaciones paramétricas de una recta**.

Por último, al despejar  $t$  en (4.5.5) y definir  $x_2 - x_1 = a$ ,  $y_2 - y_1 = b$  y  $z_2 - z_1 = c$ , se encuentra que si  $a, b, c \neq 0$ ,

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

(4.5.6)

Las ecuaciones (4.5.6) se llaman **ecuaciones simétricas de una recta**. Aquí  $a, b$  y  $c$  son números directores del vector  $\mathbf{v}$ . Por supuesto, las ecuaciones (4.5.6) son válidas sólo si  $a, b$  y  $c$  son diferentes de cero.

#### EJEMPLO 4.5.1 Determinación de las ecuaciones de una recta

Encuentre las ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas de la recta  $L$  que pasa por los puntos  $P = (2, -1, 6)$  y  $Q = (3, 1, -2)$ .

**SOLUCIÓN** ▶ Primero se calcula  $\mathbf{v} = (3 - 2)\mathbf{i} + [1 - (-1)]\mathbf{j} + (-2 - 6)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ . Después, de (4.5.4), si  $R = (x, y, z)$  está sobre la recta, se obtiene  $\vec{OR} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \vec{OP} + t\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k} + t(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 8\mathbf{k})$ , o sea,

$$x = 2 + t \quad y = -1 + 2t \quad z = 6 - 8t \quad \text{ecuaciones paramétricas}$$

Por último, como  $a = 1$ ,  $b = 2$  y  $c = -8$ , las ecuaciones simétricas son

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 6}{-8} \quad \text{ecuaciones simétricas} \quad (4.5.7)$$

**Ecuación vectorial de una recta**

**Ecuaciones paramétricas de una recta**

**Ecuaciones simétricas de una recta**