12. Sea $\mathbf{v} = (2, 3)$. Supóngase que $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ es perpendicular a $\mathbf{v}$ y que $\|\mathbf{w}\| = 5$. Esto determina $\mathbf{w}$ salvo el signo. Hallar un tal $\mathbf{w}$.

13. Hallar b y c de modo que $(5, b, c)$ sea ortogonal a (1, 2, 3) y a (1, −2, 1).

14. Sean $\mathbf{v}_1 = (0, 3, 0), \mathbf{v}_2 = (2, 2, 0), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 3)$. Estos tres vectores que parten del origen determinan el paralelepípedo P.

(a) Dibujar P.

(b) Determinar la longitud de la diagonal principal (desde el origen a su vértice opuesto).

15. ¿Cuál es la relación geométrica entre los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -\|\mathbf{v}\|\ \|\mathbf{w}\|$?

16. Normalizar los vectores de los Ejercicios 6 a 8.

17. Hallar el ángulo que forman los vectores de los Ejercicios 9 a 11. Si es necesario, se puede expresar la respuesta en función de $\cos^{-1}$.

18. Determinar todos los valores de x tales que $(x, 1, x)$ y $(x, -6, 1)$ son ortogonales.

19. Determinar todos los valores de x tales que $(7, x, -10)$ y $(3, x, x)$ son ortogonales.

20. Hallar la proyección de $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ sobre $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

21. Hallar la proyección de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ sobre $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

22. ¿Qué restricciones deben establecerse para el escalar b para que el vector $2\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ sea ortogonal a (a) $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y (b) $\mathbf{k}$?

23. Los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son los lados de un triángulo equilátero cuya longitud es 1. Calcular $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

24. Sea $\mathbf{b} = (3, 1, 1)$ y P el plano que pasa por el origen dado por $x + y + 2z = 0$.

(a) Hallar una base ortogonal para P. Es decir, determinar dos vectores ortogonales no nulos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in P$.

(b) Hallar la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre P.

25. Hallar dos vectores no paralelos que sean ortogonales a (1, 1, 1).

26. Hallar la recta que pasa por $(3, 1, -2)$ y que interseca y es perpendicular a la recta $x = -1 + t$, $y = -2 + t$, $z = -1 + t$. [SUGERENCIA: Si (x_0, y_0, z_0) es el punto de intersección, hallar sus coordenadas.]

27. Usando el producto escalar, demostrar el teorema inverso del teorema de Pitágoras. Es decir, demostrar que si las longitudes de los lados de un triángulo satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

28. Para el vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, sean α, β, γ los ángulos entre $\mathbf{v}$ y los ejes x, y y z, respectivamente. Demostrar que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

29. Un barco se encuentra en la posición (1, 0) en una carta naútica (que tiene el norte en la dirección positiva del eje y) y avista una roca en la posición (2, 4). ¿Cuál es el vector que une el barco a la roca? ¿Qué ángulo θ forma este vector con la dirección norte? (A este ángulo se le denomina ***orientación*** de la roca desde el barco.)

30. Supóngase que el barco del Ejercicio 29 navega con rumbo norte a una velocidad de 4 nudos respecto del agua. Hay una corriente que fluye en dirección este con una velocidad de 1 nudo. Las unidades de la carta son millas naúticas; 1 nudo = 1 milla naútica por hora.

(a) Si no hubiera corriente, ¿qué vector $\mathbf{u}$ representaría la velocidad del barco con respecto al fondo del mar?

(b) Si el barco se dejara llevar por la corriente, ¿qué vector $\mathbf{v}$ representaría su velocidad con respecto al fondo del mar?

(c) ¿Qué vector $\mathbf{w}$ representa la velocidad total del barco?

(d) ¿Dónde se encontrará el barco una 1 hora después?

(e) ¿Debería el capitán cambiar el rumbo del barco?

(f) ¿Y si la roca fuera un iceberg?

31. Un avión se encuentra en la posición $(3, 4, 5)$ al mediodía y viaja con una velocidad de $400\mathbf{i} + 500\mathbf{j} - \mathbf{k}$ kilómetros por hora. El piloto avista un aeropuerto en la posición (23, 29, 0).

(a) ¿A qué hora pasará el avión sobre el aeropuerto? (Suponga que la tierra es plana y que el vector $\mathbf{k}$ apunta hacia arriba.)

(b) ¿A qué altura se encontrará el avión cuando pase sobre el aeropuerto?