a) Escriba este sistema en la forma $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ y encuentre la solución en términos de $x_1(0)$, $x_2(0)$ y $x_3(0)$. Observe que $x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) = n$.

b) Demuestre que si $\alpha x(0) < \beta$, entonces la enfermedad no producirá una epidemia.

c) ¿Qué pasará si $\alpha x(0) > \beta$?

Ecuación diferencial de segundo orden

19. Considere la **ecuación diferencial de segundo orden** $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$.

a) Haciendo $x_1(t) = y(t)$ y $x_2(t) = y'(t)$, escriba las ecuaciones anteriores como un sistema de primer orden en la forma de la ecuación (8.7.7), donde A es una matriz de 2×2.

b) Demuestre que la ecuación característica de A es $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

En los problemas 20 al 25 use el resultado del problema 19 para resolver la ecuación dada.

20. $x'' + 5x' + 6x = 0;\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0$

21. $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0;\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0$

22. $x'' + 3x' = 0;\ x(0) = 3,\ x'(0) = 2$

23. $4x''(t) - 3x'(t) + x(t) = 0;\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1$

24. $x'' + 4x = 0;\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1$

25. $9x''(t) - x(t) = 0;\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1$

26. Sea $N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Demuestre que $N_3^3 = 0$, la matriz cero.

27. Demuestre que $e^{N_3 t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. [***Sugerencia:*** Escriba la serie para $e^{N_3 t}$ y utilice el resultado del problema 26.]

28. Sea $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Demuestre que $e^{Jt} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. [***Sugerencia:*** $Jt = \lambda It + N_3 t$. Utilice el hecho de que $e^{A+B} = e^A e^B$ si $AB = BA$.]

29. Usando el resultado del problema 28, calcule e^{At}, donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. [***Sugerencia:*** Vea el problema 26.]

30. Calcule e^{At}, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

31. Calcule e^{Jt}, donde $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

32. Calcule e^{At}, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.