Demostrar las afirmaciones dadas en los Ejercicios 32 a 34.

32. El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de la longitud de este último.

33. Si PQR es un triángulo en el espacio y $b > 0$ es un número, entonces existe un triángulo con lados paralelos a los de PQR y con longitudes que son b veces las longitudes de los lados de PQR.

34. Las medianas de un triángulo se intersecan en un punto, y ese punto divide a cada mediana en razón de $2:1$.

Los Problemas 35 y 36 requieren cierto conocimiento de notación química.

35. Expresar la ecuación química $CO + H_2O = H_2 + CO_2$ como una ecuación con ternas ordenadas (x_1, x_2, x_3), donde x_1, x_2, x_3 son el número de átomos de carbono, hidrógeno y oxígeno, respectivamente, en cada molécula.

36. (a) Expresar la ecuación química $pC_3H_4O_3 + qO_2 = rCO_2 + sH_2O$ como una ecuación con ternas ordenadas con coeficientes desconocidos p, q, r y s.

(b) Determinar el entero positivo más pequeño para p, q, r y s.

(c) Ilustrar la solución mediante un diagrama vectorial en el espacio.

37. Determinar una recta que esté completamente contenida en el conjunto definido por la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1.2 Producto escalar, longitud y distancia

En esta sección y en la siguiente estudiaremos dos productos de vectores: el producto escalar y el producto vectorial. Ambos son muy útiles en aplicaciones de la física y tienen interesantes interpretaciones geométricas. El primer producto que vamos a considerar es el *producto escalar*. A veces también se le denomina *producto interno*.

Producto escalar

Supongamos que tenemos dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^3$ (Figura 1.2.1) y que deseamos hallar el ángulo entre ellos, es decir, el menor ángulo que forman $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en el plano que ambos generan. El producto escalar nos permite hacer esto. En primer lugar, vamos a desarrollar el concepto formalmente y luego demostraremos que este producto hace lo que queremos. Sean $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Definimos el ***producto escalar*** de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, y lo expresamos como $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, como el número real

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Obsérvese que el producto escalar de dos vectores es una magnitud escalar. En ocasiones, el producto escalar se escribe como $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$; *luego*, $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$ *y* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ *significan exactamente lo mismo.*

Ejemplo 1

(a) Si $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, calcular $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

(b) Calcular $(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})\cdot(3\mathbf{k} - 2\mathbf{j})$.

Solución

(a) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3\cdot 1 + 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 1 = 3 - 1 - 2 = 0$.

(b) $(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})\cdot(3\mathbf{k} - 2\mathbf{j}) = (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})\cdot(0\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$
$= 2\cdot 0 - 1\cdot 2 - 1\cdot 3 = -5.$ ▲