

3. Haga lo mismo para la transformación T , donde

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

4. Sean A y B matrices ortogonales de $n \times n$. Demuestre que $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $T\mathbf{x} = AB\mathbf{x}$, es una isometría.
5. Encuentre A_T si T es la transformación de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Demuestre que A_T es ortogonal.

6. Demuestre el teorema 7.5.6.
7. Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una isometría. Demuestre que T preserva los ángulos. Es decir, (ángulo entre \mathbf{x} y \mathbf{y}) = (ángulo entre $T\mathbf{x}$ y $T\mathbf{y}$).
8. Dé un ejemplo de una transformación lineal de \mathbb{R}^2 sobre \mathbb{R}^2 que preserve los ángulos y *no* sea una isometría.
9. Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x} \neq 0$ y $\mathbf{y} \neq 0$, defina el ángulo entre \mathbf{x} y \mathbf{y} como $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$. Demuestre que si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una isometría, entonces T preserva los ángulos.
10. Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una isometría y sea $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$. Demuestre que $S\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}$ es una isometría.

De los problemas 11 al 15 encuentre una isometría entre los pares de espacios dados.

11. $\mathbb{P}_2[-1, 1], \mathbb{R}^3$

12. $\mathbb{P}_3[-1, 1], \mathbb{R}^4$

13. M_{22}, \mathbb{R}^4

14. $M_{22}, P_3[-1, 1]$

15. D_n y \mathbb{R}^n (D_n = conjunto de matrices diagonales de $n \times n$).

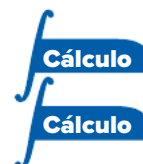
16. Sea A una matriz de $n \times n$ con elementos complejos. Entonces la transpuesta conjugada de

A , denotada por A^* , está definida por $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Calcule A^* si $A = \begin{pmatrix} 1+i & -4+2i \\ 3 & 6-3i \end{pmatrix}$.

17. La matriz compleja A de $n \times n$ se llama **hermitiana*** si $A^* = A$. Demuestre que la matriz

$A = \begin{pmatrix} 4 & 3-2i \\ 3+2i & 6 \end{pmatrix}$ es hermitiana.

18. Demuestre que si A es hermitiana, entonces las componentes de la diagonal de A son reales.



**Matriz
hermitiana**

* Llamada así en honor del matemático francés Charles Hermite (1822-1901).