Estrechamente relacionado con estas propiedades está el hecho de que *podemos desarrollar un determinante* 3×3 *recorriendo cualquier fila o columna* usando los signos indicados en el siguiente patrón:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Por ejemplo, el lector puede comprobar que podemos desarrollar "por menores" recorriendo la fila central:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ & \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ & \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ & \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Volvamos a calcular el segundo determinante del Ejemplo 2 usando esta fórmula:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ & \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ & \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ & \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (-4)(-6) + (5)(12) + (-6)(6) = 0.$$

Nota histórica

Los determinantes parecen haber sido inventados y utilizados por primera vez por Leibniz en 1693, en relación con las soluciones de ecuaciones lineales. Maclaurin y Cramer desarrollaron sus propiedades entre 1729 y 1750; en particular, probaron que la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

es

$$x_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

lo que se conoce como ***regla de Cramer***. Aunque este método es bastante ineficaz desde el punto de vista numérico, es muy importante en la teoría de matrices. Más tarde, Vandermonde (1772) y Cauchy (1812), trabajando con determinantes como un tema separado al que merecía la pena prestar una atención especial, desarrollaron este campo de forma más sistemática, con contribuciones de Laplace, Jacobi y otros. Las fórmulas para volúmenes de paralelepípedos utilizando determinantes se deben a Lagrange (1775). Las estudiaremos más adelante en esta sección. Aunque durante el