Teorema 5.7.1

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si $\nu(A) = 0$.

Demostración

De acuerdo con el teorema de resumen [teorema 5.4.6, partes i) y ii)], A es invertible si y sólo si la única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Pero según la ecuación (5.7.1), esto significa que A es invertible si y sólo si $N_A = \{\mathbf{0}\}$. Así, A es invertible si y sólo si $\nu(A) = \dim N_A = 0$.

Definición 5.7.2

Imagen de una matriz

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces la **imagen** de A, denotada por im$A$, está dada por

$$\boxed{\text{im}A = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\colon A\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ para alguna } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}} \qquad (5.7.2)$$

Teorema 5.7.2

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces la imagen de A im$A$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Demostración

Suponga que $\mathbf{y}_1$ y $\mathbf{y}_2$, están en im$A$. Entonces existen vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ en $\mathbb{R}^n$ tales que $\mathbf{y}_1 = A\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}_2$. Por lo tanto,

$$A(\alpha\mathbf{x}_1) = \alpha A\mathbf{x}_1 = \alpha\mathbf{y}_1 \text{ y } A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$$

por lo que $\alpha\mathbf{y}_1$ y $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ están en im$A$. Así, del teorema 5.2.1, im$A$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Definición 5.7.3

Rango de una matriz

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces el **rango** de A, denotado por $\rho(A)$, está dado por

$$\boxed{\rho(A) = \dim \text{im}A}$$

Se darán dos definiciones y un teorema que facilitarán en cierta medida el cálculo del rango.

Definición 5.7.4

Espacio de los renglones y espacio de las columnas de una matriz

Si A es una matriz de $m \times n$, sean $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\}$ los renglones de A y $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ las columnas de A. Entonces se define