$$\begin{array}{ccccc} & \text{Teorema 9} & & \begin{array}{c}\text{Definición}\\ \text{de derivada}\end{array} & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \text{Parciales continuas} & \Rightarrow & \text{Diferenciable} & \Rightarrow & \text{Parciales existen} \end{array}$$

Cada uno de los enunciados recíprocos, obtenidos invirtiendo una implicación cualquiera, es falso (como contraejemplo al recíproco de la primera implicación, usamos $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, $f(0) = 0$; para la segunda, véase el Ejemplo 4 de esta sección.)

Se dice que una función cuyas derivadas parciales existen y son continuas es de ***clase*** C^1. Por tanto, el Teorema 9 establece que *toda función* C^1 *es diferenciable.*

Ejemplo 10 Sea

$$f(x,y) = \frac{\cos x + e^{xy}}{x^2 + y^2}.$$

Demostrar que f es diferenciable en todos los puntos $(x, y) \neq (0, 0)$.

Solución Obsérvese que las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)(ye^{xy} - \operatorname{sen} x) - 2x(\cos x + e^{xy})}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)xe^{xy} - 2y(\cos x + e^{xy})}{(x^2 + y^2)^2}$$

son continuas excepto cuando $x = 0$ e $y = 0$ (por los resultados de la Sección 2.2). Por tanto, f es diferenciable por el Teorema 9. ▲

Se puede demostrar que $f(x, y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$ [con $f(0, 0) = 0$] es continua, tiene derivadas parciales en (0, 0) y aún así *no* es diferenciable en ese punto (véase la Figura 2.3.4). Por el Teorema 9, sus derivadas parciales no pueden ser continuas en (0, 0).

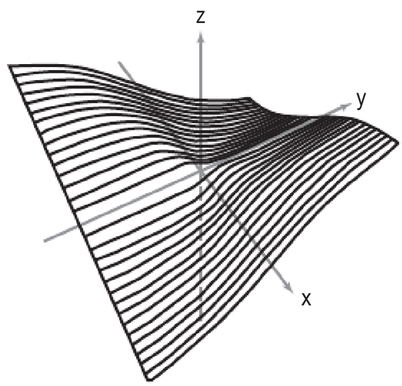

Figura 2.3.4 Esta función no es diferenciable en (0, 0), porque está “arrugada”.