Entonces $|\mathbf{v}_2| = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ y $\mathbf{u}_2 = \frac{2}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Esto se verifica observando que $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$. Por último, se tiene $\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{|\mathbf{v}_3|} = \frac{1}{3}\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. También se puede verificar observando que $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = 0$ y $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 0$. Por lo tanto, $Q = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

y

$$Q^{\mathrm{T}}AQ = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{20}{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{20}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Transpuesta conjugada

Matriz hermitiana

Matriz unitaria

En esta sección se han probado resultados para matrices simétricas reales. Estos resultados se pueden extender a matrices complejas. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz compleja, entonces la **transpuesta conjugada** de A, denotada por A^*, está definida por el elemento ij de $A^* = (\overline{a_{ij}})$. La matriz A se denomina **hermitiana*** si $A^* = A$. Resulta que los teoremas 8.4.1, 8.4.2 y 8.4.3 también son ciertos para las matrices hermitianas. Todavía más, si se define una **matriz unitaria** como una matriz compleja U con $U^* = U^{-1}$, entonces, usando la demostración del teorema 8.4.4, se puede demostrar que una matriz hermitiana es diagonalizable unitariamente. Estos hechos se dejan como ejercicios (vea los problemas 18 a 20 de esta sección).

Se concluye esta sección con una demostración del teorema 8.4.3.

Demostración del teorema 8.4.3‡

Se demostrará que a todo valor característico λ de multiplicidad algebraica k corresponden k vectores característicos ortonormales. Este paso, combinado con el teorema 8.4.2, demostrará el teorema. Sea $\mathbf{u}_1$ un vector característico de A que corresponde a λ_1. Es posible suponer que $|\mathbf{u}_1| = 1$. También se puede suponer que $\mathbf{u}_1$ es real porque λ_1 es real y $\mathbf{u}_1 \in N_{A-\lambda_1 I}$, el espacio nulo de la matriz real $A - \lambda_1 I$. Este espacio nulo es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ por el ejemplo 5.5.10. Después se observa que $\{\mathbf{u}_1\}$ se puede

* Si el tiempo lo permite.