Suponga que se han construido los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$ $(k < m)$ y que forman un conjunto ortonormal. Se mostrará cómo construir $\mathbf{u}_{k+1}$.

Paso 4. Continuación del proceso

Sea

$$\mathbf{v}'_{k+1} = \mathbf{v}_{k+1} - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_1) - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 - \cdots - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_k)\,\mathbf{u}_k \qquad \textbf{(6.1.15)}$$

entonces para $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_1)\,(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_i) - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_2)\,(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_i) - \cdots \\ - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i)\,(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_i) - \cdots - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_k)\,(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_i)\end{aligned}$$

Pero $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_i = 0$ si $j \neq i$ y $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1$. Por tanto,

$$\mathbf{v}'_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i - \mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i = 0$$

Así, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k, \mathbf{v}'_{k+1}\}$ es un conjunto linealmente independiente, ortogonal y $\mathbf{v}'_{k+1} \neq \mathbf{0}$.

Paso 5

Sea $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{v}'_{k+1}/|\mathbf{v}'_{k+1}|$. Entonces es claro que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}\}$ es un conjunto ortonormal, y se puede continuar de esta manera hasta que $k + 1 = m$, con lo que se completa la prueba.

Nota. Como cada $\mathbf{u}_i$ es una combinación lineal de vectores $\mathbf{v}_i$, gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ es un subespacio de gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, y como cada espacio tiene dimensión k, los espacios son iguales.

EJEMPLO 6.1.4 Construcción de una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$

Construya una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ comenzando con la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

SOLUCIÓN ► Se tiene $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{2}$, entonces $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$. Entonces

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

Como $|\mathbf{v}'_2| = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\mathbf{u}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.