del paralelepípedo cuyos lados adyacentes son $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ es el producto del área de la base $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ por la altura $\|\mathbf{c}\|| \cos\psi|$, se deduce que el volumen es $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c})|$. Anteriormente, vimos que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = D$, por lo que el volumen es igual al valor absoluto de D.

Ejemplo 9 Determinar el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $5\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.

Solución El volumen es el valor absoluto de

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Si desarrollamos este determinante por menores con respecto a la segunda columna, el único término distinto de cero es

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}(1) = -11,$$

de modo que el volumen es igual a 11. ▲

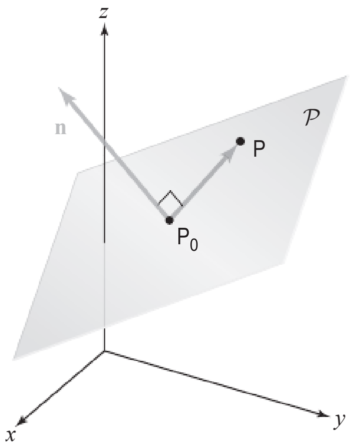

Figura 1.3.6 Los puntos P del plano que pasa por P_0 y es perpendicular a $\mathbf{n}$ satisfacen la ecuación $\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Ecuación de un plano

Sea $\mathcal{P}$ un plano en el espacio, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto en dicho plano y supongamos que $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es un vector normal a dicho plano (véase la Figura 1.3.6). Sea $P = (x, y, z)$ un punto en $\mathbb{R}^3$. Entonces P está en el plano $\mathcal{P}$ si y solo si el vector $\overrightarrow{P_0P} = (x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}$ es perpendicular a $\mathbf{n}$, es decir, $\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0$, o, lo que es equivalente a,

$$(A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0.$$

Por tanto,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Ecuación de un plano en el espacio La ecuación del plano $\mathcal{P}$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y tiene por vector normal $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

es decir, $(x, y, z) \in \mathcal{P}$ si y solo si

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

donde $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Los cuatro números A, B, C y D no están determinados de forma unívoca por el plano $\mathcal{P}$. Para ver esto, observe que (x, y, z) satisface la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ si y solo si también satisface la relación

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y + (\lambda C)z + (\lambda D) = 0$$