20. $\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} dz\, dy\, dx$

21. $\iiint_W (1-z^2)\, dx\, dy\, dz$;

W es la pirámide con el vértice superior en $(0,0,1)$ y con los vértices de la base en $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(1,1,0)$.

22. $\iiint_W (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$;

W es la misma pirámide que en el Ejercicio 21.

23. $\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x+y} dz\, dy\, dx.$

24. (a) Dibujar la región de integración de la integral $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx.$

(b) Escribir la integral con el orden de integración $dx\, dy\, dz$.

Para las regiones de los Ejercicios 25 a 28, hallar los límites de integración apropiados $\phi_1(x), \phi_2(x), \gamma_1(x,y)$ y $\gamma_2(x,y)$, y escribir la integral triple en la región W como una integral iterada de la forma

$$\iiint_W f\, dV = \int_a^b \left\{ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left[\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right] dy \right\} dx.$$

25. $W = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}$

26. $W = \{(x,y,z) \mid \frac{1}{2} \le z \le 1 \text{ y } x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

27. $W = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 1, z \ge 0 \text{ y } x^2+y^2+z^2 \le 4\}$

28. $W = \{(x,y,z) \mid |x| \le 1, |y| \le 1, z \ge 0 \text{ y } x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

29. Demostrar que la fórmula que utiliza integrales triples para el volumen bajo la gráfica de una función positiva $f(x,y)$, definida en una región elemental D en el plano se reduce a la integral doble de f sobre D.

30. Sea W la región limitada por los planos $x = 0, y = 0, z = 0, x+y = 1$ y $z = x+y$.

(a) Calcular el volumen de W.

(b) Calcular $\iiint_W x\, dx\, dy\, dz$.

(c) Calcular $\iiint_W y\, dx\, dy\, dz$.

31. Sea f continua y sea B_ε la bola de radio ε centrada en el punto (x_0, y_0, z_0). Sea vol (B_ε) el volumen de B_ε. Demostrar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(B_\varepsilon)} \iiint_{B_\varepsilon} f(x,y,z)\, dV = f(x_0, y_0, z_0).$$

Ejercicios de repaso del Capítulo 5

En los Ejercicios 1 a 4, calcular las integrales.

1. $\int_0^3 \int_{-x^2+1}^{x^2+1} xy\, dy\, dx.$

2. $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 (x+y)^2\, dy\, dx.$

3. $\int_0^1 \int_{e^x}^{e^{2x}} x \ln y\, dy\, dx.$

4. $\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 \cos[\pi(x+y+z)]\, dx\, dy\, dz.$

Invertir el orden de integración de las integrales de los Ejercicios 5 a 8 y calcularlas.