- Si H es un subespacio del espacio con producto interno V, entonces
  - **i)** $H^\perp$ es un subespacio de V.
  - **ii)** $H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}$.
  - **iii)** $\dim H^\perp = n - \dim H$ si $\dim V = n < \infty$.
- ***Teorema de proyección***

  Sea H un subespacio de dimensión finita del espacio con producto interno V y suponga que $\mathbf{v} \in V$. Entonces existe un par único de vectores $\mathbf{h}$ y $\mathbf{p}$ tales que $\mathbf{h} \in H$, $\mathbf{p} \in H^\perp$, y

  $$\mathbf{v} = \mathbf{h} + \mathbf{p}$$

  donde $\mathbf{h} = \text{proy}_H\,\mathbf{v}$.

  Si V tiene dimensión finita, entonces $\mathbf{p} = \text{proy}_{H^\perp}\,\mathbf{v}$.
- ***Teorema de aproximación en norma***

  Sea H un subespacio de dimensión finita de un espacio con producto interno V y sea $\mathbf{v}$ un vector en V. Entonces, en H, $\text{proy}_H\,\mathbf{v}$ es la mejor aproximación a $\mathbf{v}$ en el sentido siguiente: si $\mathbf{h}$ es cualquier otro vector en H, entonces

  $$|\mathbf{v} - \text{proy}_H\,\mathbf{v}| < |\mathbf{v} - \mathbf{h}|$$

AUTOEVALUACIÓN 6.3

Complete las siguientes afirmaciones con el inciso correcto.

I) En $C[0, 1]$, $(x, x^3) =$ ________.

a) $\frac{1}{2}$ *b)* $\frac{1}{3}$ *c)* $\frac{1}{4}$ *d)* $\frac{1}{5}$ *e)* $\frac{1}{6}$

II) En $C[0, 1]$, $\|x^2\|^2 =$ ________.

a) $\frac{1}{2}$ *b)* $\frac{1}{3}$ *c)* $\frac{1}{4}$ *d)* $\frac{1}{5}$ *e)* $\frac{1}{6}$

III) En $\mathbb{C}^2$, $\langle(1 + i, 2 - 3i), (2 - i, -1 + 2i)\rangle =$ ________.

a) $-7 + 2i$ *b)* $7 + 8i$ *c)* $4 - 3i$ *d)* $4 + 3i$ *e)* $-2 + 5i$

IV) En $\mathbb{C}^2$, $\|(1 + i, 2 - 3i)\| =$ ________.

a) $-5 - 10i$ *b)* 15 *c)* $\sqrt{15}$ *d)* 7 *e)* $\sqrt{7}$

Indique si los enunciados siguientes son falsos o verdaderos.

V) Si H es un subespacio de dimensión finita del espacio con producto interno V y si $\mathbf{v} \in V$, entonces existen vectores $\mathbf{h} \in H$ y $\mathbf{p} \in H^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{h} + \mathbf{p}$.

VI) En el problema V, $\mathbf{h} = \text{proy}_H\,\mathbf{v}$ y $\mathbf{p} = \text{proy}_{H^\perp}\,\mathbf{v}$.

Respuestas a la autoevaluación

I) *d*) **II)** *d*) **III)** *a*) **IV)** *c*) **V)** V

VI) F (verdadero sólo si $\dim V$ es finita)