neal revelan ciertas características biológicas relevantes. Las características únicas de la matriz de Leslie, con su forma específica, permiten encontrar un solo valor propio real positivo, y una descomposición espectral útil de la matriz. Entonces, el valor propio dominante proporcionan la tasa intrínseca de crecimiento, mientras que los vectores propios derechos e izquierdos proporcional la distribución por edad y los valores reproductivos relativos de una población en equilibrio. Por lo tanto, se observa que el álgebra lineal permite modelar mejor poblaciones reales y mostrar ciertas propiedades de la población misma.

8.3 Matrices semejantes y diagonalización

En esta sección se describe una relación interesante y útil que se puede cumplir entre dos matrices.

Definición 8.3.1

Matrices semejantes

Se dice que dos matrices A y B de $n \times n$ son **semejantes** si existe una matriz invertible C de $n \times n$ tal que

$$\boxed{B = C^{-1}AC} \qquad \textbf{(8.3.1)}$$

Transformación de semejanza

La función definida por (8.3.1) que lleva la matriz A en la matriz B se denomina **transformación de semejanza**. Se puede escribir esta transformación lineal como

$$T(A) = C^{-1}AC$$

Nota. $C^{-1}(A_1 + A_2)C = C^{-1}A_1C + C^{-1}A_2C$ y $C^{-1}(\alpha A)C = \alpha C^{-1}AC$ de manera que la función definida por (8.3.1) es, de hecho, una transformación lineal. Esto explica el uso de la palabra "transformación".

El propósito de esta sección es demostrar que: 1) las matrices semejantes tienen varias propiedades importantes comunes, y 2) la mayoría de las matrices son semejantes a las matrices diagonales.

Nota. Suponga que $B = C^{-1}AC$. Entonces, al multiplicar por la izquierda por C, se obtiene $CB = CC^{-1}AC$, o sea

$$CB = AC \qquad \textbf{(8.3.2)}$$

La ecuación (8.3.2) con frecuencia se toma como una definición alternativa de semejanza:

Definición alternativa de semejanza

A y B son semejantes si y sólo si existe una matriz no singular C tal que

$$CB = AC$$

EJEMPLO 8.3.1 Dos matrices semejantes

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $CB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Así, $CB = AC$. Como det $C = 1 \neq 0$, C es no singular o invertible. Esto muestra, por la ecuación (8.3.2), que A y B son semejantes.