15. Matrices de rotación Será necesario haber completado los problemas 9 y 10 de MATLAB 5.6. Si sólo ha terminado el problema 9 se pueden resolver los incisos *a*) y *b*) para $\mathbb{R}^2$.

***a*)** Considere la matriz de rotación V en el problema 9 *b*) y las matrices de rotación P, Y y R del problema 10 *a*) de MATLAB 5.6. Elija un valor para el ángulo de rotación, por ejemplo, $\frac{\pi}{4}$ y verifique (usando el ángulo que eligió) que cada matriz V, P, Y y R es ortogonal. Repita para otros dos ángulos.

***b*)** (*Lápiz y papel*) Como una matriz de rotación de $n \times n$ es ortogonal, las columnas de la matriz forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$. ¿Por qué? ¿Por qué puede esperarse este tipo de geometría?

***c*)** (*Lápiz y papel*) Recuerde que en el problema 10 de MATLAB 5.6, la posición de la nave se encuentra haciendo las maniobras de inclinación, desviación y giro en algún orden. Esto lleva a una matriz de posición que se forma con el producto de algunas de las matrices de rotación P, Y y R. Explique por qué la matriz de posición es una matriz ortogonal.

***d*)** Suponga que la orientación original de un satélite está dada por las maniobras de inclinación, desviación y giro de manera que su matriz de posición es ortogonal. El centro de control (orientado a lo largo de las coordenadas estándar) verifica periódicamente la posición del satélite pidiéndole las lecturas (en coordenadas del satélite) de objetos con localización conocida en el centro de control.

Cierto satélite envía las siguientes lecturas (que se ajustan para tomar en cuenta las distintas localizaciones del centro de control y del satélite):

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.7017 \\ -0.7017 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ para un objeto en } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (coordenadas estándar)}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.2130 \\ 0.2130 \\ 0.9093 \end{pmatrix} \text{ para un objeto en } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (coordenadas estándar)}$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0.1025 \\ -0.4125 \\ 0.0726 \end{pmatrix} \text{ para un objeto en } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (coordenadas estándar)}$$

Explique por qué el centro de control está al corriente de que algo no funciona con el satélite. [***Sugerencia:*** Explique primero por qué la matriz $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$ debe ser igual a $A^{-1}I$, donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y A es la matriz de posición del satélite. Recuerde que las lecturas son las coordenadas de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ respecto al sistema de coordenadas del satélite dadas por A, la matriz de posición. ¿Qué tipo de matrices deben ser A y A^{-1}?]

***e*)** Suponga que la nave se orienta con una maniobra de inclinación, un ángulo de $\frac{\pi}{4}$, seguida de una desviación con un ángulo de $\frac{-\pi}{3}$, y después un giro con un ángulo de $\frac{\pi}{6}$. Encuentre la matriz de posición.

Encuentre los ángulos entre cada uno de los ejes coordenados de la nave y el eje x estándar, es decir, los ángulos entre las columnas de la matriz de posición y el vector