$$A^{-1} = E_m^{-1}E_{m-1}^{-1} \cdots E_2^{-1}E_1^{-1}$$

En forma inversa, suponga que A es invertible. De acuerdo con el teorema 2.4.6 (teorema de resumen), A es equivalente por renglones a la matriz identidad, lo que significa que A se puede reducir a I mediante un número finito de operaciones elementales. Para el teorema 2.6.1 cada operación de este tipo se logra multiplicando A por la izquierda por una matriz elemental y, por consiguiente, existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_m$ tales que

$$E_m, E_{m-1}, \ldots, E_2E_1A = I$$

Así, del teorema 2.4.7,

$$E_m, E_{m-1}, \ldots, E_2E_1 = A^{-1}$$

y como cada E_i, es invertible por el teorema 2.6.2,

$$A = (A^{-1})^{-1} = (E_mE_{m-1} \cdots E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_{m-1}^{-1}E_m^{-1} \qquad \textbf{(2.6.7)}$$

Como la inversa de una matriz elemental es una matriz elemental, se ha escrito A como el producto de matrices elementales y esto completa la prueba.

EJEMPLO 2.6.3 Cómo escribir una matriz invertible como el producto de matrices elementales

Demuestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es invertible y escríbala como un producto de matrices elementales.

SOLUCIÓN ► Ya se ha trabajado con esta matriz, en el ejemplo 1.2.1. Para resolver el problema se reduce A a I y se registran las operaciones elementales con renglones. En el ejemplo 2.4.6 se redujo A a I haciendo uso de las siguientes operaciones:

$$\tfrac{1}{2}R_1 \qquad R_2 - 4R_1 \qquad R_3 - 3R_1 \qquad -\tfrac{1}{3}R_2$$
$$R_1 - 2R_2 \qquad R_3 + 5R_2 \qquad -R_3 \qquad R_1 + R_3$$
$$R_2 - 2R_3$$

A^{-1} se obtuvo comenzando con I y aplicando estas nueve operaciones elementales. De este modo, A^{-1} es el producto de nueve matrices elementales:

$$A^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_2 - 2R_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_1 + R_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{-R_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_{R_3 + 5R_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_2 - 2R_2}$$

$$\times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{-\frac{1}{3}R_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_3 - 3R_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_2 - 4R_1} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{-\frac{1}{2}R_1}$$