Teorema 7 Campos conservativos Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial C^1 definido en $\mathbb{R}^3$, excepto posiblemente para un número finito de puntos. Las siguientes condiciones sobre $\mathbf{F}$ son equivalentes:

(i) Para cualquier curva cerrada simple orientada C, $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0$.

(ii) Para dos curvas simples orientadas C_1 y C_2 que tienen los mismos extremos,
$$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}.$$

(iii) $\mathbf{F}$ es el gradiente de alguna función f; es decir, $\mathbf{F} = \nabla f$ (y si $\mathbf{F}$ tiene uno o más puntos singulares donde no está definido, entonces f tampoco estará definida allí).

(iv) $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Un campo vectorial que satisface una (y, por tanto, todas) de las condiciones (i)–(iv) se denomina ***campo vectorial conservativo.***[6]

Demostración Vamos a establecer la siguiente cadena de implicaciones, la cual demostrará el teorema:
$$\text{(I)} \Rightarrow \text{(II)} \Rightarrow \text{(III)} \Rightarrow \text{(IV)} \Rightarrow \text{(I)}.$$

Primero demostraremos que la condición (i) implica la condición (ii). Supongamos que $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ son parametrizaciones que representan C_1 y C_2, con los mismos puntos extremos. Construimos la curva cerrada $\mathbf{c}$ obtenida recorriendo primero $\mathbf{c}_1$ y luego $-\mathbf{c}_2$ (Figura 8.3.1), o, simbólicamente, la curva $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$. Suponiendo que $\mathbf{c}$ es simple, la condición (i) da
$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} - \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0,$$
y por tanto se satisface la condición (ii). (Si $\mathbf{c}$ no es simple, se necesita un argumento adicional, que aquí se ha omitido).

A continuación, demostramos que la condición (ii) implica la condición (iii). Sea C cualquier curva simple orientada que une un punto cualquiera, como por ejemplo $(0,0,0)$, al punto (x,y,z), y supongamos que C está representada por la parametrización $\mathbf{c}$ [si $(0,0,0)$ es el punto singular de $\mathbf{F}$, podemos elegir un punto de inicio diferente para $\mathbf{c}$ sin que el argumento se vea afectado]. Definimos $f(x,y,z)$ como $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$. Por la

[6] En el plano $\mathbb{R}^2$, no se permiten puntos singulares (véase el Ejercicio 16). El Teorema 7 se puede demostrar del mismo modo si $\mathbf{F}$ está definido y es de clase C^1 solo en un conjunto abierto y convexo en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. (Un conjunto D es convexo si P, Q $\in D$ implica que el segmento que une P y Q también pertenece a D).