13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$

En los Ejercicios 17 a 20, calcular el rotacional escalar de cada uno de los campos vectoriales.

17. $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen} x\mathbf{i} + \cos x\mathbf{j}$

18. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

19. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j}$

20. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

21. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, x^2y, z + zx)$.

(a) Verificar que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.

(b) ¿Puede existir una función $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$? Explicar la respuesta.

22. (a) ¿Cuáles de los campos vectoriales de los Ejercicios 13–16 podrían ser campos gradiente?

(b) ¿Cuáles de los campos vectoriales de los Ejercicios 9–12 podrían ser el rotacional de algún campo vectorial $\mathbf{V}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$?

23. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{xz}, \operatorname{sen}(xy), x^5y^3z^2)$.

(a) Hallar la divergencia de $\mathbf{F}$.

(b) Hallar el rotacional de $\mathbf{F}$.

24. Supongamos que $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función escalar de clase C^2. ¿Cuáles de las siguientes expresiones tienen sentido y cuáles no lo tienen? Para aquellas que tengan sentido, indicar si la expresión define una función escalar o un campo vectorial.

(a) rot(grad$f$) (d) grad(div f)

(b) grad(rot f)) (e) rot(div f)

(c) div(grad f) (f) div(rot f)

25. Supongamos que $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase C^2. ¿Cuáles de las siguientes expresiones tienen sentido y cuáles no lo tienen? Para aquellas que tengan sentido, indicar si la expresión define una función escalar o un campo vectorial.

(a) rot(grad $\mathbf{F}$) (d) grad(div $\mathbf{F}$)

(b) grad(rot $\mathbf{F}$) (e) rot (div $\mathbf{F}$)

(c) div(grad $\mathbf{F}$) (f) div(rot $\mathbf{F}$)

26. Supongamos que $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son diferenciables. Demostrar que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = \big(f(x), g(y), h(z)\big)$ es irrotacional.

27. Supongamos que $f, g, h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son diferenciables. Demostrar que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = \big(f(y, z), g(x, z), h(x, y)\big)$ tiene divergencia cero.

28. Demostrar la identidad 13 de la lista de identidades vectoriales.

En los Ejercicios 29 a 32 verificar que $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$ *para las funciones dadas.*

29. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

30. $f(x, y, z) = xy + yz + xz$

31. $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2)$

32. $f(x, y, z) = x^2y^2 + y^2z^2$

33. Demostrar que $\mathbf{F} = y(\cos x)\mathbf{i} + x(\operatorname{sen} y)\mathbf{j}$ *no* es un campo vectorial gradiente.

34. Demostrar que $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}$ *no* es un campo gradiente.

35. Demostrar la identidad 10 de la lista de identidades del análisis vectorial.

36. Supongamos que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$. ¿Cuál de las siguientes tiene necesariamente divergencia igual a cero?

(a) $\mathbf{F} + \mathbf{G}$ (b) $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$

37. Sean $\mathbf{F} = 2xz^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + y^3zx\mathbf{k}$ y $f = x^2y$. Calcular las siguientes cantidades.

(a) ∇f (c) $\mathbf{F} \times \nabla f$

(b) $\nabla \times \mathbf{F}$ (d) $\mathbf{F} \cdot (\nabla f)$

38. Sean $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|\mathbf{r}\|$. Demostrar las siguientes identidades.