9. Hallar una expresión para un vector unitario normal a la superficie

$$x = \cos v \operatorname{sen} u, \qquad y = \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \qquad z = \cos u$$

en la imagen de un punto (u, v) para u en $[0, \pi]$ y v en $[0, 2\pi]$. Identificar esta superficie.

10. Repetir el Ejercicio 9 para la superficie $x = 3\cos\theta \operatorname{sen}\phi$, $y = 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$, $z = \cos\phi$ para $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\phi \in [0, \pi]$.

11. Repetir el Ejercicio 9 para la superficie $x = \operatorname{sen} v, y = u, z = \cos v$ para $0 \le v \le 2\pi$ y $-1 \le u \le 3$.

12. Repetir el Ejercicio 9 para la superficie $x = (2 - \cos v)\cos u, y = (2 - \cos v)\operatorname{sen} u, z = \operatorname{sen} v$ para $-\pi \le u \le \pi, -\pi \le v \le \pi$. ¿Es una superficie regular?

13. (a) Desarrollar una fórmula para el plano tangente a la superficie $x = h(y, z)$.

(b) Obtener una fórmula similar para $y = k(x, z)$.

14. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $x = u^2, y = v^2, z = u^2 + v^2$ en el punto $u = 1, v = 1$.

15. Hallar una parametrización de la superficie $z = 3x^2 + 8xy$ y utilizarla para determinar el plano tangente en $x = 1, y = 0, z = 3$. Comparar la respuesta con la que se obtiene usando gráficas.

16. Hallar una parametrización de la superficie $x^3 + 3xy + z^2 = 2,\ z > 0$, y utilizarla para determinar el plano tangente en el punto $x = 1$, $y = 1/3$, $z = 0$. Comparar la respuesta con la que se obtiene usando conjuntos de nivel.

17. Considérese la superficie en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\mathbf{\Phi}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta), \quad 0 \le r \le 1 \text{ y } \quad 0 \le \theta \le 4\pi.$$

(a) Dibujar y describir la superficie.

(b) Hallar una expresión para una normal unitaria a la superficie.

(c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0).

(d) Si (x_0, y_0, z_0) es un punto de la superficie, demostrar que el segmento de línea horizontal de longitud unidad desde el eje z que pasa por (x_0, y_0, z_0) está contenido en la superficie y en el plano tangente a la superficie en (x_0, y_0, z_0).

18. Dada una esfera de radio 2 centrada en el origen, hallar la ecuación del plano tangente a ella en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$ considerando la esfera como:

(a) Una superficie parametrizada por $\mathbf{\Phi}(\theta, \phi) = (2\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 2\cos\phi)$.

(b) Una superficie de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(c) La gráfica de $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

19. (a) Hallar una parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$.

(b) Hallar una expresión para una normal unitaria a esta superficie.

(c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en $(x_0, y_0, 0)$, donde $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

(d) Demostrar que las líneas $(x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0, 5)$ y $(x_0, y_0, 0) + t(y_0, -x_0, 5)$ están en la superficie y también en el plano tangente determinado en el apartado (c).

20. Una superficie parametrizada se describe mediante una función diferenciable $\mathbf{\Phi}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Como vimos en el Capítulo 2, la derivada proporciona una aproximación lineal que da una representación del plano tangente. Este ejercicio demuestra que, en efecto, esto es así.

(a) Suponiendo que $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$, demostrar que la imagen de la transformación lineal $\mathbf{D\Phi}(u_0, v_0)$ es el plano generado por $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$. [Aquí $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ están evaluados en (u_0, v_0).]

(b) Demostrar que $\mathbf{w} \perp (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)$ si y solo si $\mathbf{w}$ está en la imagen de $\mathbf{D\Phi}(u_0, v_0)$.

(c) Demostrar que el plano tangente tal y como se ha definido en esta sección es lo mismo que el "plano parametrizado"

$$(u, v) \mapsto \mathbf{\Phi}(u_0, v_0) + \mathbf{D\Phi}(u_0, v_0)\begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix}.$$

21. Considérense las superficies $\mathbf{\Phi}_1(u, v) = (u, v, 0)$ y $\mathbf{\Phi}_2(u, v) = (u^3, v^3, 0)$.

(a) Demostrar que la imagen de $\mathbf{\Phi}_1$ y de $\mathbf{\Phi}_2$ es el plano xy.

(b) Demostrar que $\mathbf{\Phi}_1$ describe una superficie regular, pero $\mathbf{\Phi}_2$ no. Concluir que la noción