El último paso importante en el desarrollo de esta teoría es mostrar cómo se derivan las formas. La derivada de una k-forma es una forma $(k+1)$-forma si $k<3$, y la derivada de una 3-forma siempre es igual a cero. Si ω es una k-forma, denotaremos la derivada de ω por $d\omega$. La operación d tiene las siguientes propiedades:

(1) Si $f\colon K \to \mathbb{R}$ es una 0-forma, entonces

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz.$$

(2) *(Linealidad)* Si ω_1 y ω_2 son k-formas, entonces

$$d(\omega_1+\omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2.$$

(3) Si ω es una k-forma y η es una l-forma,

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega \wedge \eta) + (-1)^k(\omega \wedge d\eta).$$

(4) $d(d\omega)=0$ y $d(dx)=d(dy)=d(dz)=0$ o, simplemente, $d^2=0$.

Las propiedades (1) a (4) proporcionan información suficiente como para permitirnos derivar cualquier forma de manera única.

Ejemplo 12 Sea $\omega = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy$ una 1-forma sobre algún conjunto abierto $K \subset \mathbb{R}^3$. Hallar $d\omega$.

Solución

$$\begin{aligned}
&d[P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy]\\
&\quad = d[P(x,y,z)\wedge dx] + d[Q(x,y,z)\wedge dy] && \text{(usando 2)}\\
&\quad = (dP\wedge dx) + [P\wedge d(dx)] + (dQ\wedge dy) + [Q\wedge d(dy)] && \text{(usando 3)}\\
&\quad = (dP\wedge dx) + (dQ\wedge dy) && \text{(usando 4)}\\
&\quad = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy + \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\right)\wedge dx\\
&\qquad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}\,dz\right)\wedge dy && \text{(usando 1)}\\
&\quad = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,dx\wedge dx\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y}dy\wedge dx\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\,dz\wedge dx\right)\\
&\qquad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\wedge dy\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}dy\wedge dy\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\,dz\wedge dy\right)\\
&\quad = -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx + \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy - \frac{\partial Q}{\partial z}\,dy\,dz\\
&\quad = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy + \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial Q}{\partial z}\,dy\,dz.
\end{aligned}$$

▲