El 8 de septiembre de 1679, Leibniz esbozaba estas ideas en una carta dirigida a Christian Huygens:

> Sigo sin estar satisfecho con el álgebra, porque no proporciona ni los métodos más cortos ni las construcciones más bellas en geometría. Es por esto por lo que creo que, en lo que concierne a la geometría, necesitamos otro análisis que sea claramente geométrico o lineal y que exprese la localización (situs) directamente al igual que el álgebra expresa directamente la magnitud. Y creo que he encontrado la forma y que podemos representar figuras e incluso máquinas y movimientos mediante caracteres, al igual que el álgebra representa números o magnitudes. Te envío un ensayo que me parece que es importante.

En el ensayo, Leibniz describía sus ideas con gran detalle.

Ejercicios

1. Calcular el producto escalar de $\mathbf{x} = (1, -10, 2) \in \mathbb{R}^4$ e $\mathbf{y} = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$.

2. En $\mathbb{R}^n$ demostrar que

(a) $2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$ (Esto se conoce como la ***ley del paralelogramo***.)

(b) $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$

(c) $4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$ (Esto se llama ***identidad de polarización***.)

Interpretar estos resultados geométricamente en términos del paralelogramo formado por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Verificar la desigualdad de Cauchy–Schwarz y la desigualdad triangular para los vectores de los Ejercicios 3 a 6.

3. $\mathbf{x} = (2, 0, -1)$, $\mathbf{y} = (4, 0, -2)$

4. $\mathbf{x} = (1, 0, 2, 6)$, $\mathbf{y} = (3, 8, 4, 1)$

5. $\mathbf{x} = (1, -1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{y} = (3, 0, 0, 0, 2)$

6. $\mathbf{x} = (1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{y} = (-1, 0, 0, 1)$

7. Sean $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Si $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\|$, demostrar que $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ son ortogonales.

8. Sea T un triángulo que se define colocando tres puntos en un círculo, dos de los cuales descansan sobre el diámetro del mismo. Utilizar el problema anterior para demostrar que T es un triángulo rectángulo.

9. Calcular $AB, \det A, \det B, \det\,(AB)$ y $\det\,(A+B)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

10. Calcular $AB, \det A, \det B, \det\,(AB)$ y $\det\,(A+B)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. Determinar cuáles de las siguientes matrices son invertibles:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 19 \\ 2 & 3 & \pi \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Para la matriz A del problema anterior, hallar un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ distinto de cero tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

13. Usar inducción en k para probar que si $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\|\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k\| \leq \|\mathbf{x}_1\| + \cdots + \|\mathbf{x}_k\|.$$

14. Usando álgebra, demostrar que la ***identidad de Lagrange***: para números reales $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$.