Una matriz cuadrada que no es invertible se le denomina **singular** y una matriz invertible se llama **no singular**.

Matriz singular

Matriz no singular

En la definición 2.4.2 se sugiere que la inversa de una matriz es única. Y esta declaración es cierta, como lo dice el siguiente teorema.

Teorema 2.4.2

Si una matriz A es invertible, entonces su inversa es única.

Demostración

Suponga que B y C son dos inversas de A. Se puede demostrar que $B = C$. Por definición se tiene $AB = BA = I$ y $AC = CA = I$. Por la ley asociativa de la multiplicación de matrices se tiene que $B(AC) = (BA)C$. Entonces

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

Por lo tanto, $B = C$, y el teorema queda demostrado.

A continuación se presenta otra propiedad importante sobre las inversas.

Teorema 2.4.3

Sean A y B dos matrices invertibles de $n \times n$. Entonces AB es invertible y

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

Demostración

Para probar este resultado es necesaria la definición 2.4.2. Es decir, $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ si y sólo si $B^{-1}A^{-1}(AB) = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. Se trata, únicamente, de una consecuencia ya que

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ecuación (2.2.6)}}}{=} B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

y

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

Considere el sistema de n ecuaciones con n incógnitas

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

y suponga que A es invertible. Entonces

$$\begin{aligned} A^{-1}A\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} && \text{se multiplicó el término de la izquierda por } A^{-1} \\ I\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} && A^{-1}A = I \\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} && I\mathbf{x} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

Ésta es una solución al sistema porque

$$A\mathbf{x} = A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = I\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

Nota

Del teorema 2.4.3 se concluye que $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. Vea el problema 2.4.23.