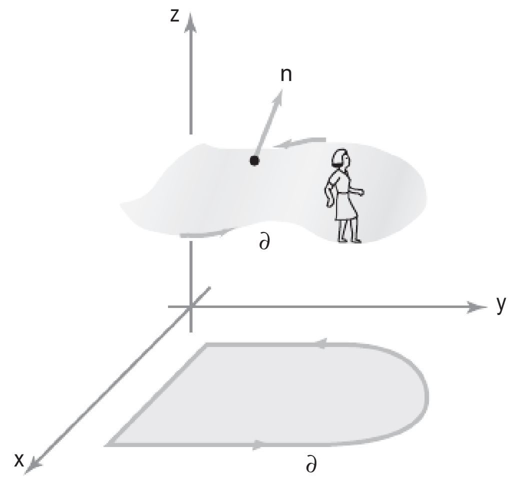

Figura 8.2.1 La orientación inducida en ∂S: cuando se camina a lo largo de la frontera, la superficie debe estar a la izquierda.

Demostración Si $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, entonces

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Por tanto, usamos la fórmula (1) para escribir

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right] dA. \quad (2)$$

Por otro lado,

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{p}} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz,$$

donde $\mathbf{p}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3, \mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ es una parametrización que preserva la orientación de la curva orientada cerrada y simple ∂S discutida anteriormente. Por tanto,

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt}\right) dt. \quad (3)$$

Por la regla de la cadena,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Sustituyendo esta expresión en la Ecuación (3), obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \left[\left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}\right] dt \\
&= \int_{\mathbf{c}} \left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y}\right) dy \qquad (4) \\
&= \int_{\partial D} \left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y}\right) dy.
\end{aligned}$$