PROBLEMAS 7.2

De los problemas 1 al 14 encuentre núcleo, imagen, rango y nulidad de la transformación lineal dada.

1. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x$

2. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\ T(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$

4. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ y \end{pmatrix}$

5. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x + y + 3z$

6. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ y + w \end{pmatrix}$

7. $T: \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{M}_{22};\ T(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A.$

8. $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2;\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1 + a_2x + a_1x^2$

9. $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{M}_{22};\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_2 + a_1 & a_2 - a_0 \\ a_0 - a_1 & 0 \end{pmatrix}$

Cálculo

***10.** $T: \mathbb{M}_{nn} \to \mathbb{M}_{nn};\ T(A) = A + A^{\mathrm{T}}$

11. $T: C^1(0, 1) \to C(0, 1);\ T(f) = (x^2 f(x))'$

12. $T: C^2(0, 1) \to C(0, 1);\ T(f) = f'' + f'$

13. $T: C[0, 1] \to \mathbb{R};\ Tf = f(0)$

14. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; T es una rotación de $\frac{\pi}{3}$.

15. Sea $T: V \to W$ una transformación lineal, sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para V y suponga que $T\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Demuestre que T es la transformación cero.

16. En el problema 15 suponga que $W = V$ y $T\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Demuestre que T es el operador identidad.

17. Sea $T: V \to \mathbb{R}^3$. Demuestre que im T es cualquiera de las siguientes: ***a***) $\{\mathbf{0}\}$; ***b***) una recta que pasa por el origen; ***c***) un plano que pasa por el origen; ***d***) $\mathbb{R}^3$.

18. Sea $T: \mathbb{R}^3 \to V$. Demuestre que nu T es uno de los cuatro espacios enumerados en el problema 17.

19. Encuentre todas las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tales que la recta $y = 0$ se transforma en la recta $x = 0$.

20. Encuentre todas las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que llevan a la recta $y = ax$ a la recta $y = bx$.

21. Encuentre una transformación lineal T de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\text{nu } T = \{(x, y, z): 2x - y + z = 0\}.$$

22. Encuentre una transformación lineal T de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\text{im } T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 3x + 2y + z = 0\}.$$