- Una matriz de $n \times n$ es ortogonal si y sólo si sus columnas forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$.
- Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con una base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$. Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces la **proyección ortogonal** de $\mathbf{v}$ sobre H, denotada por $\text{proy}_H\mathbf{v}$, está dada por

$$\text{proy}_H\, \mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$$

- Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Entonces el **complemento ortogonal** de H, denotado por $H^\perp$, está dado por

$$H^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\colon \mathbf{x}\cdot\mathbf{h} = 0 \text{ para todo } \mathbf{h} \in H\}$$

- ***Teorema de proyección***

  Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Entonces existe un par único de vectores $\mathbf{h}$ y $\mathbf{p}$ tales que $\mathbf{h} \in H$, $\mathbf{p} \in H^\perp$ y

$$\mathbf{v} = \mathbf{h} + \mathbf{p} = \text{proy}_H\,\mathbf{v} + \text{proy}_{H_\perp}\mathbf{v}$$

- ***Teorema de aproximación de la norma***

  Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Entonces, en H, $\text{proy}_H\mathbf{v}$ es la mejor aproximación a $\mathbf{v}$ en el siguiente sentido: si $\mathbf{h}$ es cualquier otro vector en H, entonces

$$|\mathbf{v} - \text{proy}_H\,\mathbf{v}| < |\mathbf{v} - \mathbf{h}|$$

AUTOEVALUACIÓN 6.1

Indique si las siguientes aseveraciones son falsas o verdaderas

I) El conjunto $\{(1, 1), (1, -1)\}$ es un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^2$.

II) El conjunto $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ es un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^2$.

III) Toda base en $\mathbb{R}^n$ se puede convertir en una base ortonormal utilizando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.

IV) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es ortogonal.

V) La matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ es ortogonal.

Elija el inciso que responda la siguiente pregunta

VI) ¿Para cuáles de las siguientes matrices Q^{-1} es igual a Q^{T}?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{6}{\sqrt{40}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{40}} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{6}{\sqrt{40}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-2}{\sqrt{40}} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Respuestas a la autoevaluación

I) F **II)** V **III)** V **IV)** F **V)** V **VI)** *c*)