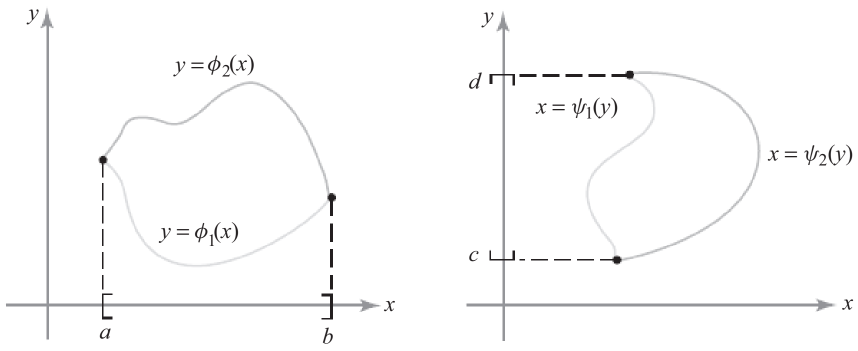

Figura 5.2.5 Curvas en el plano representadas como gr áficas.

Teorema 2 Integrabilidad de funciones acotadas Sea $f\colon R \to \mathbb{R}$ una función real acotada en el rectángulo R y supongamos que el conjunto de puntos donde f es discontinua está contenido en una unión finita de gráficas de funciones continuas. Entonces f es integrable en R.

Utilizando el Teorema 2 y las observaciones anteriores, vemos que las funciones dibujadas en la Figura 5.2.4 son integrables sobre R, ya que estas funciones están acotadas y son continuas excepto en gráficas de funciones continuas.

A partir de la definición de integral como límite de sumas y de los teoremas sobre límites, podemos deducir algunas propiedades fundamentales de la integral $\iint_R f(x,y)\,dA$; estas propiedades son básicamente las mismas que las de la integral de una función real de una única variable.

Sean f y g funciones integrables sobre el rectángulo R y sea c una constante. Entonces $f+g$ y cf son integrables y

(I) Linealidad

$$\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA.$$

(II) Homogeneidad

$$\iint_R cf(x,y)\,dA = c\iint_R f(x,y)\,dA.$$

(III) Monotonía Si $f(x,y) \geq g(x,y)$, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA \geq \iint_R g(x,y)\,dA.$$

(IV) Aditividad Si $R_i, i = 1, \ldots, m$ son rectángulos con interiores disjuntos tales que f está acotada y es integrable sobre cada R_i y si $Q = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_m$ es un rectángulo, entonces $f\colon Q \to \mathbb{R}$ es integrable sobre Q y