23. La orientación de $\partial S_1 = \partial S_2$ debe coincidir.

25. Suponemos que C es una curva cerrada sobre la superficie dibujada, de modo que divide la superficie en dos partes, S_1 y S_2. Para la superficie de un dónut (toro) debemos usar dos curvas cerradas, ¿por qué? Entonces C acota a S_1 y S_2, pero con orientación positiva con respecto a una y negativa con respecto a la otra. Por tanto,

$$\begin{aligned}&\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}\\ &= \iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}\\ &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.\end{aligned}$$

27. (a) Si $C = \partial S$, $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{s} = 0$.

(b) $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{v} \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt = \mathbf{v} \cdot \int_a^b \mathbf{c}'(t)\, dt = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{c}(b) - \mathbf{c}(a))$, donde $\mathbf{c}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización de C. (La integral vectorial es el vector cuyas componentes son integrales de las funciones componentes). Si C es cerrada, la última expresión es 0.

29. Ambas integrales dan $\pi/4$.

31. (a) 0. (b) π. (c) π.

33. -20π (o 20π si se utiliza la orientación contraria).

35. Una posible respuesta es: la curva de Möbius C también es la frontera de una superficie *orientada* $\tilde{S}$; la ecuación de la ley de Faraday *es* válida para esta nueva superficie.

Sección 8.3

1. (a) $f = x^2/2 + y^2/2 + C$.

(b) $\mathbf{F}$ no es un campo vectorial gradiente.

(c) $f = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + C$.

3. (a) Existe tal $\mathbf{G}$, pero no g.

(b) Existe tal g, pero no $\mathbf{G}$.

(c) Existe tal g, pero no $\mathbf{G}$.

(d) No existe ninguna función.

5. Si $\mathbf{F} = \nabla f = \nabla g$ y C es una curva de $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$, entonces $(f - g)(\mathbf{w}) - (f - g)(\mathbf{v}) = \int_C \nabla(f - g) \cdot d\mathbf{s} = 0$ y por tanto $f - g$ es constante.

7. $x^2yz - \cos x + C$.

9. Sí, es el gradiente de $g(x, y) = F(x) + F(y)$, donde $F'(x) = f(x)$.

11. No; $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, -x) \neq \mathbf{0}$.

13. $e \operatorname{sen} 1 + \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}$.

15. $3{,}5 \times 10^{29}$ ergios.

17. (a) $f(x, y, z) = x^2yz$.

(b) No es un campo gradiente.

(c) No es un campo gradiente.

(d) $f(x, y, z) = x^2 \cos y$.

19. Utilizar el Teorema 7 en cada uno de los casos.

(a) $-3/2$. (b) -1.

(c) $\cos(e^2) - \cos(1/e)/e$.

21. (a) No.

(b) $\left(\frac{1}{2}z^2, xy - z, x^2y\right)$ o $\left(\frac{1}{2}z^2 - 2xyz - \frac{1}{2}y^2, -x^2z - z, 0\right)$.

23. $\frac{1}{3}(z^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + y^3\mathbf{k})$.

25. $(-z \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x, xz \cos y, 0)$ (Son posibles otras respuestas).

27. (a) $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 2) \neq \mathbf{0}$.

(b) Sea $\mathbf{c}(t)$ la trayectoria de un objeto en el fluido. Entonces $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{c}'(t)$. Sea $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Entonces $x' = -y$, $y' = x$ y $z' = 0$, y por tanto z es constante y el movimiento es paralelo al plano xy. Además, $x'' + x = 0, y'' + y = 0$. Por tanto, $x = A\cos t + B \operatorname{sen} t$ y $y = C\cos t + D \operatorname{sen} t$. Sustituyendo estos valores en $x' = -y, y' = x$, obtenemos $C = -B, D = A$, de modo que $x^2 + y^2 = A^2 + B^2$ y tenemos un círculo.

(c) Sentido antihorario.

29. (a) $\mathbf{F} = -\dfrac{GmM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$;

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -GmM \left[\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}\right] = 0.$$