Teorema 7.2.4

Si $T: V \rightarrow W$ es una transformación lineal, entonces

i) nu T es un subespacio de V.

ii) im T es un subespacio de W.

Demostración

i) Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en nu T; entonces $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T\mathbf{x} = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ de forma que $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ y $\alpha\mathbf{u}$ están en nu T.

ii) Sean $\mathbf{w}$ y $\mathbf{x}$ en im T. Entonces $\mathbf{w} = T\mathbf{u}$ y $\mathbf{x} = T\mathbf{v}$ para dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V. Esto significa que $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{x}$ y $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T\mathbf{u} = \alpha\mathbf{w}$. Por tanto, $\mathbf{w}+\mathbf{x}$ y $\alpha\mathbf{w}$ están en im T.

EJEMPLO 7.2.3 Núcleo e imagen de la transformación cero

Sea $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in V$ (T es la transformación cero). Entonces nu $T = V$ e im $T = \{\mathbf{0}\}$.

EJEMPLO 7.2.4 Núcleo e imagen de la transformación identidad

Sea $T\mathbf{v} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in V$ (T es la transformación identidad). Entonces nu $T = \{\mathbf{0}\}$ e im $T = V$.

Las transformaciones cero e identidad proporcionan dos extremos. En la primera todo se encuentra en el núcleo. En la segunda sólo el vector cero se encuentra en el núcleo. Los casos intermedios son más interesantes.

EJEMPLO 7.2.5 Núcleo e imagen de un operador de proyección

Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esto es (vea el ejemplo 7.1.10, T es el operador de proyección de $\mathbb{R}^3$ en el plano xy. Si $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $x = y = 0$. Así, nu $T = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}: x = y = 0, z \in \mathbb{R}\right\}$, es decir, el eje z, e

im $T = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}: z = 0\right\}$, es decir, el plano xy. Observe que dim nu $T = 1$ y dim im $T = 2$.

Definición 7.2.2

Nulidad y rango de una transformación lineal

Si T es una transformación lineal de V en W, entonces se define

$$\textbf{Nulidad de } T = n(T) \text{ dim nu } T \tag{7.2.4}$$

$$\textbf{Rango de } T = \rho(T) = \text{dim im } T \tag{7.2.5}$$