con el movimiento de los fluidos (incompresibles). Euler comentó que no tenía ni idea de cómo resolver la Ecuación (2). Más tarde, Poisson demostró que si $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ está en el interior del cuerpo que ejerce la atracción, entonces $\boldsymbol{V}$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho, \tag{3}$$

donde $\boldsymbol{\rho}$ es la densidad de masa del cuerpo atractor. La Ecuación (3) ahora se conoce como ***ecuación de Poisson***. Poisson fue también el primero en apuntar la importancia de esta ecuación para problemas que implican campos eléctricos. Obsérvese que si la temperatura $\boldsymbol{T}$ es constante en el tiempo, entonces la ecuación del calor (1) se reduce a la ecuación de Laplace (2).

Las ecuaciones de Laplace y de Poisson son fundamentales en muchas áreas además de en la mecánica de fluidos, los campos gravitatorios y los campos electrostáticos. Por ejemplo, son útiles para estudiar películas de jabón y cristales líquidos (véase *The Parsimonious Universe*: *Shape and Form in the Natural World* de S. Hildebrandt y A. Tromba, Springer-Verlag, Nueva York/Berlín, 1995).

Ecuación de ondas. La ecuación de ondas lineal en el espacio tiene la forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \tag{4}$$

Aproximadamente en 1727, Johann Bernoulli II dedujo la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{4'}$$

y algunos años después Jean Le Rond d'Alembert también la dedujo cuando estudiaba cómo determinar el movimiento de una cuerda vibrante (como la cuerda de un violín). La Ecuación (4) resultó ser útil tanto en el estudio de cuerpos en vibración como en la elasticidad. Como veremos al considerar las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo en la Sección 8.5, esta ecuación también surge en el estudio de la propagación de la radiación electromagnética y las ondas sonoras.

Ejemplo 6

Como ya hemos apuntado, la ecuación del calor, que apareció alrededor de 1800, es una de las ecuaciones en derivadas parciales más importante y clásica. Describe la conducción del calor en un cuerpo sólido. Por ejemplo, comprender cómo se disipa el calor es importante para la industria, así como para los científicos que tratan de entender las tensiones térmicas que sufre una cápsula durante su re-entrada en la atmósfera de la Tierra.

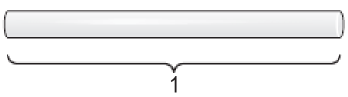

Figura 3.1.3 Una varilla delgada.

Consideremos una varilla delgada de longitud l (Figura 3.1.3). Vamos a demostrar que

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{1/2}} e^{-x^2/4t}$$

es una solución de la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$