son su magnitud (longitud) y su dirección. Si dos segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma magnitud y dirección, se dice que son **equivalentes** sin importar en dónde se localizan respecto al origen. Los segmentos de recta dirigidos de la figura 4.2 son todos equivalentes.

Observación

Los segmentos de recta dirigidos en la figura 4.2 son todos representaciones del mismo vector.

Segmentos de recta dirigidos equivalentes

Definición 4.1.1

Definición geométrica de un vector

El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama **vector**. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se denomina **representación** del vector.

Vector

Representación del vector

De la definición 4.1.1 se observa que un vector dado **v** se puede representar de múltiples formas. Observe la figura 4.3: sea $\overrightarrow{PQ}$ una representación de **v**; entonces, sin cambiar magnitud ni dirección, se puede mover $\overrightarrow{PQ}$ en forma paralela de manera que su punto inicial se traslada al origen. Después se obtiene el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{0R}$, que es otra representación del vector **v**. Ahora suponga que la R tiene las coordenadas cartesianas (a, b). Entonces se puede describir el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{0R}$ por las coordenadas (a, b). Es decir, $\overrightarrow{0R}$ es el segmento de recta dirigido con punto inicial (0, 0) y punto terminal (a, b). Puesto que una representación de un vector es tan buena como cualquier otra, se puede escribir el vector **v** como (a, b).

Nota

La forma de la definición geométrica de un vector presenta la noción de una clase de equivalencias, la cual es útil para dividir conjuntos en subconjuntos ajenos. Además, es suficiente elegir un elemento de cada subconjunto para representar a todos los otros elementos.

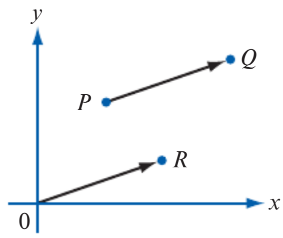

Figura 4.3

Se puede mover $\overrightarrow{PQ}$ para obtener un segmento de recta dirigido equivalente con su punto inicial en el origen. Observe que $\overrightarrow{0R}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son paralelos y tienen la misma longitud.

Observación

Con la definición 4.1.2 es posible pensar en un punto en el plano xy con coordenadas (a, b) como un vector que comienza en el origen y termina en (a, b).

Definición 4.1.2

Definición algebraica de un vector

Un **vector v** en el plano xy es un par ordenado de números reales (a, b). Los números a y b se denominan **elementos** o **componentes** del vector **v**. El **vector cero** es el vector (0, 0).

Observación

El vector cero tiene magnitud cero. Por lo tanto, puesto que los puntos inicial y terminal coinciden, se dice que el vector cero *no tiene dirección*.

Observación

Se hace hincapié en que las definiciones 4.1.1 y 4.1.2 describen, precisamente, los mismos objetos. Cada punto de vista (geométrico o algebraico) tiene sus ventajas. La definición 4.1.2 es la de un vector de dimensión 2 que se ha estado utilizando.

Puesto que en realidad un vector es un conjunto de segmentos de recta equivalentes, se define la **magnitud** o **longitud de un vector** como la longitud de cualquiera de sus representaciones y su **dirección** como la dirección de cualquiera de sus representaciones. Haciendo uso de la representación $\overrightarrow{0R}$ y escribiendo el vector $\mathbf{v} = (a, b)$ se define a

$$\boxed{|\mathbf{v}| = \text{magnitud de } \mathbf{v} = \sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (4.1.1)$$

Magnitud o longitud de un vector