2. Se escriben indistintamente $T\mathbf{v}$ y $T(\mathbf{v})$. Denotan lo mismo; las dos se leen "T de $\mathbf{v}$". Esto es análogo a la notación funcional $f(x)$, que se lee "f de x".

3. Gran parte de las definiciones y teoremas en este capítulo también se cumplen para los espacios vectoriales complejos (espacios vectoriales en donde los escalares son números complejos). Sin embargo, a excepción de la breve intervención de la sección 7.5, sólo se manejarán espacios vectoriales reales y, por tanto, se eliminará la palabra "real" en el análisis de los espacios vectoriales y las transformaciones lineales.

Operadores lineales

Las transformaciones lineales con frecuencia se denominan **operadores lineales**.

EJEMPLO 7.1.3 Una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$

Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix}$. Por ejemplo, $T\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$. Entonces

$$T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ x_1+x_2-y_1-y_2 \\ 3y_1+3y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_1-y_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ x_2-y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix}$$

Pero

$$\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_1-y_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ x_2-y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Así,

$$T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

De manera similar,

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x+\alpha y \\ \alpha x-\alpha y \\ 3\alpha y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix} = \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Así, T es una transformación lineal.

EJEMPLO 7.1.4 La transformación cero

Sean V y W espacios vectoriales y defina $T: V \to W$ por $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v}$ en V. Entonces $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = T\mathbf{v}_1 + T\mathbf{v}_2$ y $T(\alpha\mathbf{v}) = \mathbf{0} = \alpha\mathbf{0} = \alpha T\mathbf{v}$. En este caso, T se denomina la **transformación cero**.

EJEMPLO 7.1.5 La transformación identidad

Sea V un espacio vectorial y defina $I: V \to V$ por $I\mathbf{v} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v}$ en V. Aquí es obvio que I es una transformación lineal, la cual se denomina **transformación identidad** u **operador identidad**.