Ahora

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{v}-\mathbf{h}|^2 &= (\mathbf{v}-\mathbf{h})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{h})\\
&= [(\mathbf{v}-\text{proy}_H\,\mathbf{v}) + (\text{proy}_H\,\mathbf{v}-\mathbf{h})]\cdot[(\mathbf{v}-\text{proy}_H\,\mathbf{v}) + (\text{proy}_H\,\mathbf{v}-\mathbf{h})]\\
&= |\mathbf{v}-\text{proy}_H\,\mathbf{v}|^2 + 2(\mathbf{v}-\text{proy}_H\,\mathbf{v})\cdot(\text{proy}_H\,\mathbf{v}-\mathbf{h}) + |\text{proy}_H\,\mathbf{v}-\mathbf{h}|^2\\
&= |\mathbf{v}-\text{proy}_H\,\mathbf{v}|^2 + |\text{proy}_H\,\mathbf{v}-\mathbf{h}|^2
\end{aligned}
$$

Pero $|\text{proy}_H\,\mathbf{v}-\mathbf{h}|^2 > 0$ porque $\mathbf{h} \neq \text{proy}_H\mathbf{v}$. Por tanto,

$$|\mathbf{v}-\mathbf{h}|^2 > |\mathbf{v}-\text{proy}_H\,\mathbf{v}|^2$$

es decir

$$|\mathbf{v}-\mathbf{h}| > |\mathbf{v}-\text{proy}_H\,\mathbf{v}|$$

Bases ortogonales en $\mathbb{R}^3$ con coeficientes enteros y normas enteras

En ocasiones es útil construir una base ortogonal de vectores donde las coordenadas y la norma de cada vector son enteros. Por ejemplo,

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$$

constituye una base ortogonal en $\mathbb{R}^3$ donde cada vector tiene norma 3. Otro ejemplo es

$$\left\{\begin{pmatrix}12\\4\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-25\\48\\-36\end{pmatrix}\right\}$$

que constituye una base ortogonal en $\mathbb{R}^3$ cuyos vectores tienen normas 13, 5 y 65, respectivamente. Resulta que encontrar una base como ésta en $\mathbb{R}^3$ no es tan difícil como parece. Anthony Osborne y Hans Liebeck abordan este tema en su interesante artículo "Orthogonal Bases of $\mathbb{R}^3$ with Integer Coordinates and Integer Lenghts" en *The American Mathematical Monthly*, vol. 96, núm. 1, enero de 1989, pp. 49-53.

Esta sección se cierra con un teorema importante.

Teorema 6.1.9 Desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$. Entonces

i) $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$. **(6.1.27)**

ii) $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$ sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$ para algún número real λ.

Demostración

i) Si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (o ambos), entonces (6.1.27) se cumple (ambos lados son iguales a 0). Si se supone que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces