(b) ¿En qué se convierte la fórmula para $A(S)$ si los vectores $\partial\mathbf{\Phi}/\partial u$ y $\partial\mathbf{\Phi}/\partial v$ son ortogonales?

(c) Utilizar los apartados (a) y (b) para calcular el área de la superficie de una esfera de radio a.

24. El ***funcional de Dirichlet*** para una superficie parametrizada $\mathbf{\Phi}\colon D \to \mathbb{R}^3$ se define por[11]

$$J(\mathbf{\Phi}) = \frac{1}{2}\iint_D \left(\left\|\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial u}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial v}\right\|^2\right) du\, dv.$$

Utilícese el Ejercicio 23 para razonar que el área $A(\mathbf{\Phi}) \leq J(\mathbf{\Phi})$ y que la igualdad se satisface si

$$\text{(a)}\ \left\|\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial u}\right\|^2 = \left\|\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial v}\right\|^2 \quad \text{y} \quad \text{(b)}\ \frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial v} = 0.$$

Comparar estas ecuaciones con el Ejercicio 23 y las observaciones hechas al final de la Sección 7.4. Una parametrización $\mathbf{\Phi}$ que satisface las condiciones (a) y (b) se dice que es ***conforme***.

25. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{\Phi}\colon D \to \mathbb{R}^2$ una función suave $\mathbf{\Phi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ que satisface las condiciones (a) y (b) del Ejercicio 24 y supongamos que

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} > 0.$$

Demostrar que x e y satisfacen las ***ecuaciones de Cauchy–Riemann*** $\partial x/\partial u = \partial y/\partial v$, $\partial x/\partial v = -\partial y/\partial u$. Concluir que $\nabla^2\mathbf{\Phi} = 0$ (es decir, cada componente de $\mathbf{\Phi}$ es armónica).

26. Sea S una esfera de radio r y sea $\mathbf{p}$ un punto interior o exterior de la esfera (pero no sobre ella). Demostrar que

$$\iint_S \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|}\, dS = \begin{cases} 4\pi r & \text{si } \mathbf{p} \text{ está dentro de } S \\ 4\pi r^2/d & \text{si } \mathbf{p} \text{ está fuera de } S, \end{cases}$$

donde d es la distancia desde $\mathbf{p}$ hasta el centro de la esfera y la integración es sobre la esfera. [SUGERENCIA: suponer que $\mathbf{p}$ está sobre el eje z. Luego hacer un cambio de variables y realizar los cálculos. ¿Por qué está justificada esta hipótesis acerca de $\mathbf{p}$?].

27. Hallar el área de la superficie de aquella parte del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$ y también en el octante positivo ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$). Suponer que $a > 0$.

28. Sea una superficie S definida implícitamente por $F(x,y,z) = 0$ para (x,y) en un dominio D de $\mathbb{R}^2$. Demostrar que

$$\iint_S \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| dS = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Comparar con el Ejercicio 22 de la Sección 7.4.

7.6 Integrales de campos vectoriales sobre superficies

El objetivo de esta sección es desarrollar el concepto de integral de un campo vectorial sobre una superficie. Recordemos que la definición de integral de línea estaba motivada por el concepto físico fundamental de *trabajo*. De forma similar, existe un concepto físico básico de *flujo* que motiva la definición de integral de un campo vectorial sobre una superficie.

[11] El funcional de Dirichlet desempeñó un importante papel en las matemáticas del siglo diecinueve. El matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) lo utilizó para desarrollar su teoría de funciones complejas y para proporcionar una demostración del famoso teorema de la aplicación de Riemann. Actualmente sigue empleándose ampliamente como herramienta en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales.