que es lo mismo que $z = g(x, y)$. Entonces, en el punto (u_0, v_0),

$$\mathbf{T}_u = \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k} \ \text{ y } \ \mathbf{T}_v = \mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k},$$

y para $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = -\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \mathbf{k} \neq \mathbf{0}. \tag{2}$$

Es distinto de cero ya que el coeficiente de $\mathbf{k}$ es 1; en consecuencia, la parametrización $(u, v) \mapsto (u, v, g(u, v))$ es regular en todos los puntos. Además, el plano tangente en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (u_0, v_0, g(u_0, v_0))$ está dado por la fórmula (1), como

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial u}, -\frac{\partial g}{\partial v}, 1\right) = 0,$$

donde las derivadas parciales están calculadas en (u_0, v_0). Recordemos que $x = u$ e $y = v$, de modo que podemos escribir esto como

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x - x_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)(y - y_0), \tag{3}$$

donde $\partial g/\partial x$ y $\partial g/\partial y$ están calculadas en (x_0, y_0). ▲

Este ejemplo también demuestra que la definición de plano tangente para superficies parametrizadas coincide con una de las dadas para superficies obtenidas como gráficas, ya que la Ecuación (3) es la misma fórmula que hemos obtenido en el Capítulo 2 para el plano tangente a S en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

También resulta útil considerar las superficies suaves a tramos, es decir, las superficies formadas por un determinado número de imágenes de superficies suaves parametrizadas. Por ejemplo, la superficie de un cubo en $\mathbb{R}^3$ es una superficie de este tipo. Veremos estas superficies en la Sección 7.4.

Ejemplo 5 Hallar una parametrización para el hiperboloide de una hoja:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Solución Dado que x e y aparecen en la combinación $x^2 + y^2$, la superficie es invariante bajo rotaciones alrededor del eje z, y por tanto es natural escribir

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta.$$

Entonces $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ se convierte en $r^2 - z^2 = 1$. Podemos parametrizar esto de forma apropiada como sigue [9]

$$r = \cosh u, \qquad z = \operatorname{senh} u.$$

Por tanto, una parametrización es

$$x = (\cosh u)(\cos\theta), \qquad y = (\cosh u)(\operatorname{sen}\theta), \qquad z = \operatorname{senh} u,$$

donde $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < u < \infty$. ▲