jk-ésimo "rectángulo polar" de la malla tiene un área aproximadamente igual a $r_{jk}\,\Delta r\,\Delta\theta$ (para n grande, el jk-ésimo rectángulo polar parecerá un rectángulo con lados de longitudes $r_{jk}\,\Delta\theta$ y Δr.) Esto debería darnos una pista de por qué decimos *el "elemento de área $dx\,dy$ "se transforma en el "elemento de área $r dr\, d\theta$."*

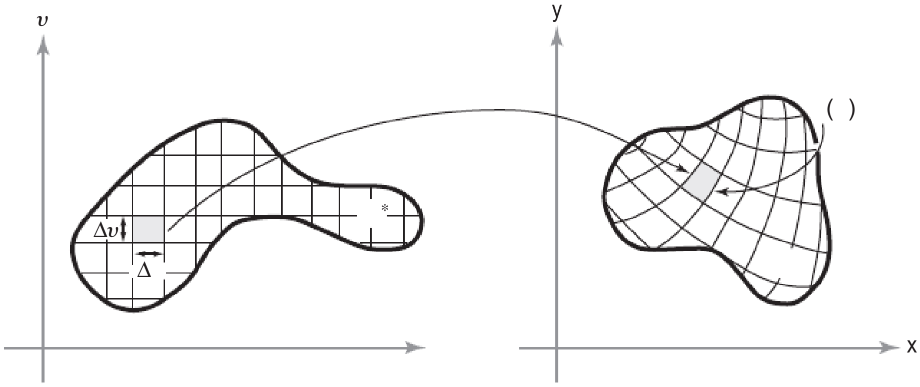

Figura 6.2.3 El área del rectángulo pequeño R es $\Delta u\ \Delta v$. El área de $T(R)$ es aproximadamente $|\partial(x,y)/\partial(u,v)|\Delta u\ \Delta v$.

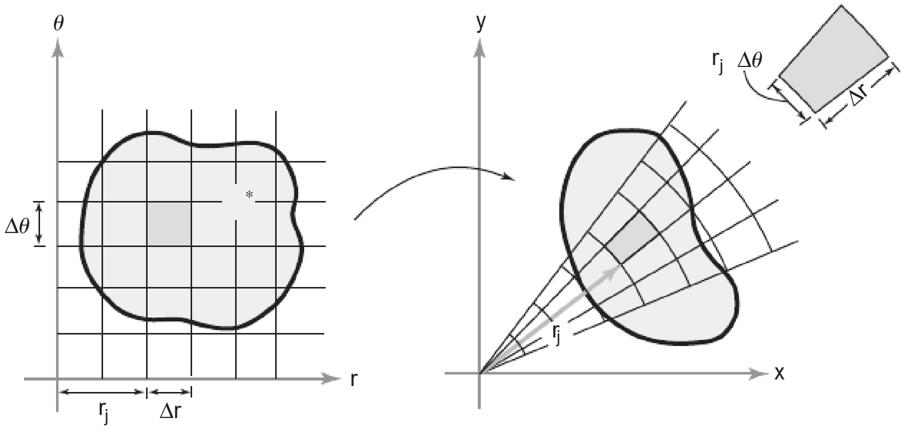

Figura 6.2.4 D^* se transforma en D por la aplicación de cambio a coordenadas polares T.

Ejemplo 2 Sea D la región elemental en el plano xy acotada por la gráfica de la ecuación en coordenadas polares $r = f(\theta)$, donde $\theta_0 \le \theta \le \theta_1$ y $f(\theta) \ge 0$ (véase la Figura 6.2.5). En el plano $r\theta$ consideramos la región r-simple D^*, donde $\theta_0 \le \theta \le \theta_1$ y $0 \le r \le f(\theta)$. La transformación $x = r\cos\theta, y = r \operatorname{sen}\theta$ lleva la región D^* sobre la región D. Utilizar la Ecuación (4) para calcular el área de D.

Solución

$$A(D) = \iint_D dx\,dy = \iint_{D^*} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\,d\theta$$

$$= \iint_{D^*} r\,dr\,d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\left[\int_0^{f(\theta)} r\,dr\right] d\theta$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta_1}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{f(\theta)} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{[f(\theta)]^2}{2} d\theta$$