Hamilton creía firmemente en la importancia de este operador. Si $f(x, y, z)$ es una función escalar en $\mathbb{R}^3$, entonces la "multiplicación" por ∇ proporciona el gradiente de f:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

que, por supuesto, nos da la dirección de ascenso más rápido (véase la Sección 2.6). Si

$$\mathbf{V}(x,y,z) = V_1(x,y,z)\mathbf{i} + V_2(x,y,z)\mathbf{j} + V_3(x,y,z)\mathbf{k}$$

es un campo vectorial, entonces la "multiplicación cuaterniónica" de ∇ por $\mathbf{V}$ da

$$\nabla\mathbf{V} = -\mathrm{div}\ \mathbf{V} + \mathrm{rot}\ \mathbf{V}.$$

Por tanto, lo que ahora llamamos divergencia de $\mathbf{V}$ es la parte escalar de este producto cambiada de signo y rot $\mathbf{V}$ es la parte vectorial (véase la exposición sobre los cuaterniones de la Sección 1.3).

Hasta donde sabemos, Hamilton nunca proporcionó una interpretación física de la divergencia y el rotacional, pero como consecuencia de su fe en ellos, seguramente creía que tenían una importante interpretación física. Su fe en su formalismo matemático estaba justificado, pero una explicación física de la divergencia y del rotacional tendría que esperar al tratado *Treatise on Electricity and Magnetism* de James Clerk Maxwell. En este texto, Maxwell utilizó tanto la divergencia como el rotacional en sus ecuaciones para la interacción de los campos eléctrico y magnético (las ecuaciones de Maxwell se verán en el Capítulo 8).

Curiosamente, Maxwell denomina *convergencia* a la divergencia y *rotación* (*rotation*) al rotacional (*curl*), un término que se sigue empleando en el campo científico. Fue Josiah Gibbs (Figura 4.4.9) quien renombró los términos convergencia y rotación con los más familiares—divergencia y rotacional—que utilizamos actualmente.

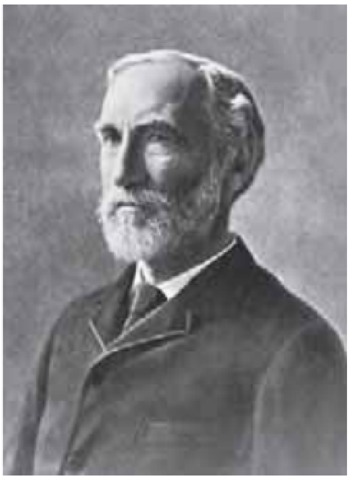

Figura 4.4.9 Josiah Willard Gibbs (1839–1903).

Maxwell proporcionó una interpretación física de la divergencia utilizando el teorema de la divergencia de Gauss, como veremos en la Sección 8.4. Su interpretación física del rotacional como una rotación era bastante breve. Gibbs proporcionó una interpretación más elemental de la divergencia, como hemos hecho en esta sección. En el espíritu de Leibniz (que creía en el significado de dx,dy,dz como magnitudes infinitesimales), Gibbs imaginó un pequeño cubo de dimensiones dx por dy por dz en un fluido. Las caras de este cubo tienen áreas $dx\,dy$, $dy\,dz$ y $dx\,dz$.

En este punto, es posible que el lector esté interesado en escuchar a Gibbs a través de las palabras de su discípulo E. B. Wilson:

> Consideremos la cantidad de fluido que pasa a través de las caras del cubo que son paralelas al plano yz, es decir, perpendiculares al eje x [véase la Figura 4.4.10].
>
> La normal a la cara cuya coordenada x es menor, es decir, la normal a la cara izquierda del cubo es $-\mathbf{i}$. El flujo de sustancia a través de esta cara es
>
> $$-\mathbf{i}\cdot\mathbf{V}(x, y, z)\,dy\,dz.$$
>
> La normal a la cara opuesta, aquella cuya coordenada x es mayor en un incremento dx, es $+\mathbf{i}$, y el flujo a través de ella es por tanto