Ejemplo 1 Hallar el valor medio de $f(x,y) = x\,\mathrm{sen}^2(xy)$ en la región $D = [0,\pi] \times [0,\pi]$.

Solución En primer lugar, calculamos

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^\pi \int_0^\pi x\,\mathrm{sen}^2(xy)\,dx\,dy\\ &= \int_0^\pi \left[\int_0^\pi \frac{1-\cos(2xy)}{2} x\,dy\right] dx\\ &= \int_0^\pi \left[\frac{y}{2} - \frac{\mathrm{sen}(2xy)}{4x}\right] x\Big|_{y=0}^{\pi} dx\\ &= \int_0^\pi \left[\frac{\pi x}{2} - \frac{\mathrm{sen}(2\pi x)}{4}\right] dx = \left[\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\cos(2\pi x)}{8\pi}\right]\Big|_0^\pi\\ &= \frac{\pi^3}{4} + \frac{\cos(2\pi^2)-1}{8\pi}.\end{aligned}$$

Por tanto, el valor medio de f, por la Fórmula (1), es

$$\frac{\pi^3/4 + [\cos(2\pi^2)-1]/8\pi}{\pi^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\cos(2\pi^2)-1}{8\pi^3} \approx 0{,}7839. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 2 La temperatura en los puntos del cubo $W = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ es proporcional al cuadrado de la distancia al origen.

(a) ¿Cuál es la temperatura media?

(b) ¿En qué puntos del cubo es la temperatura igual a la temperatura media?

Solución

(a) Sea c la constante de proporcionalidad, de forma que $T = c(x^2 + y^2 + z^2)$ y la temperatura media es $[T]_{\mathrm{m}} = \frac{1}{8}\iiint_W T\,dx\,dy\,dz$, ya que el volumen del cubo es 8. Por tanto,

$$[T]_{\mathrm{m}} = \frac{c}{8}\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

La integral triple es la suma de las integrales de x^2, de y^2 y de z^2. Dado que el papel de x, y, z en la descripción del cubo es simétrico, las tres integrales serán iguales, de modo que

$$[T]_{\mathrm{m}} = \frac{3c}{8}\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 z^2 dx\,dy\,dz = \frac{3c}{8}\int_{-1}^1 z^2\left(\int_{-1}^1\int_{-1}^1 dx\,dy\right) dz.$$

La integral interior es igual al área del cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$. El área de dicho cuadrado es 4, luego

$$[T]_{\mathrm{m}} = \frac{3c}{8}\int_{-1}^1 4z^2\,dz = \frac{3c}{2}\left(\frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-1}^1 = c.$$

(b) La temperatura coincide con la temperatura media en todos los puntos que satisfacen $c(x^2+y^2+z^2) = c$—es decir, en todos los puntos que están en la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$. $\blacktriangle$