mo una integral sobre el triángulo D^*, que es el conjunto de puntos $0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq a - u$. (No intentar calcularla.)

38. Demostrar que $S(\rho, \theta, \phi) = (\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta,\ \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta,\ \rho \cos \phi)$, la aplicación de cambio a coordenadas esféricas, es inyectiva salvo en un conjunto que es unión finita de gráficas de funciones continuas.

6.3 Aplicaciones

En esta sección vamos a analizar las siguientes aplicaciones: medias, centros de masa, momentos de inercia y potencial gravitatorio.

Medias

Si $x_1, \ldots, x_n$ son n números, su ***media*** se define como

$$[x_i]_{\mathrm{m}} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Obsérvese que si todos los x_i tienen el mismo valor c, entonces su media es también, por supuesto, igual a c.

Este concepto nos lleva a definir los valores medios de las funciones como sigue.

Valores medios El ***valor medio*** de una función de una variable en el intervalo $[a, b]$ se define como

$$[f\,]_{\mathrm{m}} = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx}{b - a}.$$

De igual forma, para funciones de dos variables, el cociente entre la integral y el área de D,

$$[f\,]_{\mathrm{m}} = \frac{\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dx\ dy}{\displaystyle\iint_D dx\, dy}, \tag{1}$$

se denomina ***valor medio*** de f sobre D. Análogamente, el ***valor medio*** de una función f en una región W del espacio de tres dimensiones se define como

$$[f\,]_{\mathrm{m}} = \frac{\displaystyle\iiint_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\displaystyle\iiint_W dx\, dy\, dz}.$$

De nuevo, obsérvese que el denominador se ha elegido de forma que si f es una constante, por ejemplo c, entonces $[f\,]_{\mathrm{m}} = c$.