EJEMPLO 5.3.8 El espacio generado por dos vectores en $\mathbb{R}^3$

Sea $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4)$ y $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 6)$. Entonces $H = \text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = a_1(2, -1, 4) + a_2(4, 1, 6)\}$.

¿Cuál es la apariencia de H? Si $\mathbf{v} = (x, y, z) \in H$, entonces se tiene $x = 2a_1 + 4a_2$, $y = -a_1 + a_2$ y $z = 4a_1 + 6a_2$. Si se piensa que (x, y, z) está fijo, entonces estas ecuaciones se pueden ver como un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas a_1, a_2. Este sistema se resuelve en la forma usual:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & y \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 6 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 6 & z \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 0 & 6 & x + 2y \\ 0 & 10 & z + 4y \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{6}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 0 & 1 & \frac{x + 2y}{6} \\ 0 & 10 & z + 4y \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 10R_2]{R_1 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{x}{6} + \frac{2y}{3} \\ 0 & 1 & \frac{x}{6} + \frac{y}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-5x}{3} + \frac{2y}{3 + z} \end{array}\right)$$

Desde el capítulo 1 se observa que el sistema tiene una solución únicamente si $\frac{-5x}{3} + \frac{2y}{3} + z = 0$; o multiplicando por -3, si

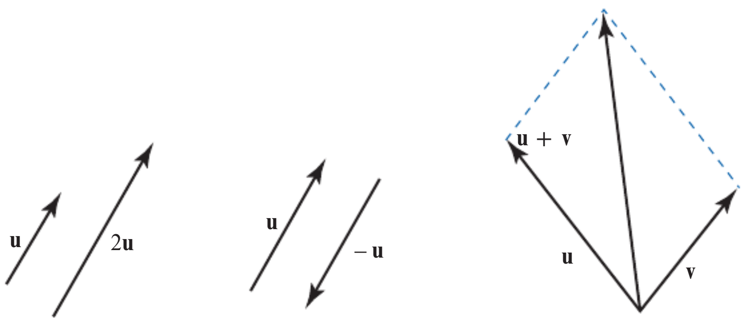
$$5x - 2y - 3z = 0 \tag{5.3.4}$$

La ecuación (5.3.4) es la ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen.

Este último ejemplo se puede generalizar para probar el siguiente hecho interesante:

> El espacio generado por dos vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^3$ que no son paralelos es un plano que pasa por el origen.

En los problemas 5.3.22 y 5.3.23 se encuentra la sugerencia de una demostración.



a) *b)* *c)*

Figura 5.1

u + **v** se obtiene de la regla del paralelogramo.

Se puede dar una interpretación geométrica de este resultado. Vea los vectores de la figura 5.1. Se conoce (de la sección 4.1) la interpretación geométrica de los vectores 2**u**, –**u** y **u** + **v**, por ejemplo. Haciendo uso de éstos, se observa que cualquier otro vector en el plano de **u** y **v** se puede obtener como una combinación lineal de **u** y **v**. La figura 5.2 muestra cuatro situaciones diferentes en las que un tercer vector **w** en el plano de **u** y **v** se puede escribir como $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ para valores adecuados de α y β.