38. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^4$$

en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$. (No tiene que utilizarse cálculo.)

39. Repetir el Ejercicio 38 para la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

40. Una curva C en el espacio está definida *implícitamente* en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ mediante la ecuación adicional $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$. Hallar el punto o puntos de C más próximos al origen.

41. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \cos y$ en el rectángulo R definido por $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$.

42. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = xy$ en el rectángulo R definido por $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

43. Sea $f(x, y) = 1 + xy - 2x + y$ y sea D una región triangular en $\mathbb{R}^2$ con vértices en $(-2, 1)$, $(-2, 5)$ y $(2, 1)$. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de f en D. Proporcionar todos los puntos en los que aparecen estos valores de extremo.

44. Sea $f(x, y) = 1 + xy + x - 2y$ y sea D una región triangular en $\mathbb{R}^2$ con vértices en $(1, -2)$, $(5, -2)$ y $(1, 2)$. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de f en D. Proporcionar todos los puntos en los que aparecen estos valores de extremo.

45. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función $f(x, y) = xy + 1/x + 8/y$.

En los Ejercicios 46 a 50, D denota el disco unidad.

46. Sea u una función de clase C^2 en D "estrictamente subarmónica"; es decir, una función que cumple la siguiente desigualdad: $\nabla^2 u = (\partial^2 u/\partial x^2) + (\partial^2 u/\partial y^2) > 0$. Demostrar que u no puede tener un punto de máximo en $D \backslash \partial D$ (el conjunto de puntos que está en D, pero no en ∂D).

47. Sea u una función armónica en D—es decir, $\nabla^2 u = 0$ on $D \backslash \partial D$—y continua en D. Demostrar que si u alcanza su valor máximo en $D \backslash \partial D$, también lo alcanza en ∂D. Esto se denomina en ocasiones "principio del máximo débil" para funciones armónicas. [SUGERENCIA: considérese $\nabla^2(u + \varepsilon e^x), \varepsilon > 0$. Se puede utilizar el siguiente hecho (el cual suele demostrarse en textos más avanzados): dada una secuencia $\{\mathbf{p}_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, de puntos en un conjunto cerrado y acotado A en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, existe un punto $\mathbf{q}$ tal que todo entorno de $\mathbf{q}$ contiene muchos miembros de $\{\mathbf{p}_n\}$.]

48. Definir el concepto de función superarmónica estricta u en D imitando a la definición dada en el Ejercicio 46. Demuestre que u no puede tener un mínimo en $D \backslash \partial D$.

49. Sea u armónica en D como en el Ejercicio 47. Demostrar que si u alcanza su valor mínimo en $D \backslash \partial D$, también lo alcanza en ∂D. Esto se denomina en ocasiones "principio del mínimo débil" para funciones armónicas.

50. Sea ϕ: $\partial D \to \mathbb{R}$ continua y sea T una solución en D de $\nabla^2 T = 0$, continua en D y $T = \phi$ en ∂D.

(a) Utilizar los Ejercicios 46 to 49 para demostrar que una solución así, si existe, tiene que ser única.

(b) Supóngase que $T(x, y)$ representa una función de temperatura independiente del tiempo, siendo ϕ la temperatura en la frontera de una placa circular. Proporcionar una interpretación física del principio enunciado en el apartado (a).

51. (a) Sea f una función de clase C^1 en la recta real $\mathbb{R}$. Supóngase que f tiene exactamente un punto crítico x_0 que es un punto de mínimo local estricto de f. Demostrar que x_0 es también un punto de mínimo absoluto de f; es decir, $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x.

(b) El siguiente ejemplo muestra que la conclusión del apartado (a) no se cumple para funciones de más de una variable. Sea f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}}.$$