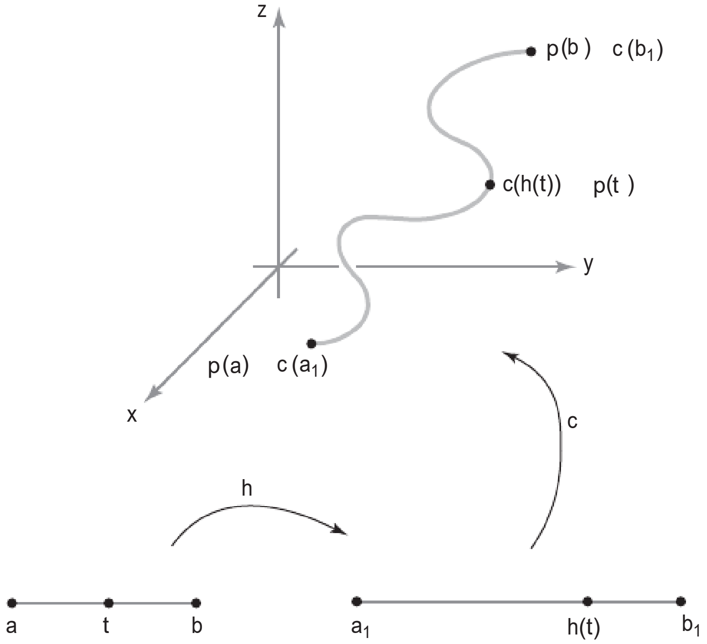

Figura 7.2.5 La trayectoria $\mathbf{p} = \mathbf{c} \circ h$ es una reparametrización de $\mathbf{c}$.

Teorema 1 Cambio de reparametrización para integrales de línea Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre la trayectoria C^1 $\mathbf{c}$: $[a_1, b_1] \to \mathbb{R}^3$ y sea $\mathbf{p}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de $\mathbf{c}$. Si $\mathbf{p}$ conserva la orientación, entonces

$$\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

y si $\mathbf{p}$ invierte la orientación, entonces

$$\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Demostración Por hipótesis, tenemos una aplicación h tal que $\mathbf{p} = \mathbf{c} \circ h$. Por la regla de la cadena, $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{c}'(h(t))h'(t)$, y por tanto

$$\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [\mathbf{F}(\mathbf{c}(h(t))) \cdot \mathbf{c}'(h(t))]h'(t)\, dt.$$

Haciendo el cambio de variable $s = h(t)$, obtenemos

$$\int_{h(a)}^{h(b)} \mathbf{F}(\mathbf{c}(s)) \cdot \mathbf{c}'(s)\, ds$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{a_1}^{b_1} \mathbf{F}(\mathbf{c}(s)) \cdot \mathbf{c}'(s)\, ds = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} & \text{si } \mathbf{p} \text{ conserva la orientación} \\ \displaystyle\int_{b_1}^{a_1} \mathbf{F}(\mathbf{c}(s)) \cdot \mathbf{c}'(s)\, ds = -\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} & \text{si } \mathbf{p} \text{ invierte la orientación.} \end{cases}$$

■