Ejemplo 6 Sea $\eta = z^2\, dx\, dy$ una 2-forma sobre $\mathbb{R}^3$ y sea S la semiesfera unidad superior en $\mathbb{R}^3$. Hallar $\iint_S \eta$.

Solución Parametrizamos S mediante $\mathbf{\Phi}(u,v) = (\operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u)$, donde $(u,v) \in D = [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$. Por la fórmula (2),

$$\iint_S \eta = \iint_D \cos^2 u \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] du\, dv,$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} \cos u \cos v & -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ \cos u \operatorname{sen} v & \operatorname{sen} u \cos v \end{vmatrix} \\ &= \operatorname{sen} u \cos u \cos^2 v + \cos u \operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v = \operatorname{sen} u \cos u.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\iint_S \eta &= \iint_D \cos^2 u \cos u \operatorname{sen} u\, du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^3 u \operatorname{sen} u\, du\, dv = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos^4 u}{4}\right]_0^{\pi/2} dv = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

▲

Ejemplo 7 Calcular $\iint_S x\, dy\, dz + y\, dx\, dy$, donde S es la superficie orientada descrita por la parametrización $x = u + v, y = u^2 - v^2, z = uv$, donde $(u,v) \in D = [0,1] \times [0,1]$.

Solución Por definición, tenemos

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix} = 2\,(u^2 + v^2);$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & -2v \end{vmatrix} = -2\,(u + v).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}&\iint_S x\, dy\, dz + y\, dx\, dy \\ &= \iint_D [(u+v)(2)(u^2+v^2) + (u^2 - v^2)(-2)(u+v)]\, du\, dv \\ &= 4\iint_D (v^3 + uv^2)\, du\, dv = 4\int_0^1\int_0^1 (v^3 + uv^2)\, du\, dv \\ &= 4\int_0^1 \left[uv^3 + \frac{u^2v^2}{2}\right]_0^1 dv = 4\int_0^1 \left(v^3 + \frac{v^2}{2}\right) dv \\ &= \left[v^4 + \frac{2v^3}{3}\right]_0^1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

▲