Demostración

Sea λ un valor característico de A con vector característico $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Sea $m = \text{máx}\ \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$. Entonces $\left(\frac{1}{m}\right)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ es un vector característico de A correspondiente a λ y máx $\{|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_n|\} = 1$. Sea y_i un elemento de $\mathbf{y}$ con $|y_i| = 1$. Ahora bien, $A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$. La componente i del vector de dimensión n $A\mathbf{y}$ es $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n$. La componente i de $\lambda\mathbf{y}$ es λy_i. Entonces

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n = \lambda y_i$$

lo que se puede escribir como

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i1} y_j = \lambda y_i \qquad \textbf{(8.8.11)}$$

Restando $a_{ii}y_i$ en ambos lados, la ecuación (8.8.11) se puede escribir como

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{i1} y_j = \lambda y_i - a_{ii} y_i = (\lambda - a_{ii}) y_i \qquad \textbf{(8.8.12)}$$

Después, tomando el valor absoluto en ambos lados de (8.8.12) y usando la desigualdad del triángulo ($|a + b| \leq |a| + |b|$), se obtiene

$$|(a_{ii} - \lambda)y_i| = \left| -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} a_{ij} y_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} |a_{ij}||y_j| \qquad \textbf{(8.8.13)}$$

Se dividen ambos lados de (8.8.13) entre $|y_i|$ (que es igual a 1) para obtener

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} |a_{ij}| \frac{|y_j|}{|y_i|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} |a_{ij}| \leq r_1 \qquad \textbf{(8.8.14)}$$

El último paso sigue el hecho de que $|y_j| \leq |y_i|$ (por la forma en que se eligió y_i). Pero esto prueba el teorema, ya que (8.8.14) muestra que $\lambda \in D_i$.

Para ejemplificar el teorema anterior, utilizando la información del ejemplo 8.1.4, se había encontrado que los valores característicos de A son 1, –2 y 3, los cuales están dentro de las tres circunferencias, como se puede apreciar en la figura 8.6.

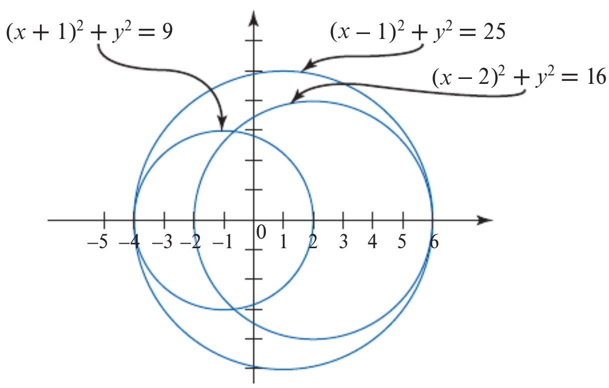

Figura 8.6

Todos los valores característicos de A están dentro de estas tres circunferencias.