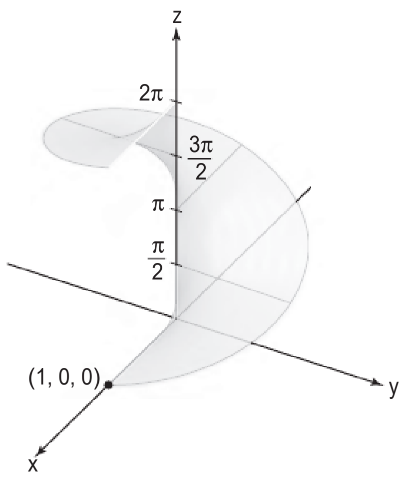

Figura 7.4.2 El helicoide $x = r\cos\theta, y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, z = \theta$.

El integrando del área es por tanto $\sqrt{r^2+1}$, que nunca se anula, por tanto, la superficie es regular. El área del helicoide es

$$\iint_D \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\|\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2+1}\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{r^2+1}\, dr.$$

Después de unos pocos cálculos (usando la tabla de integrales), determinamos que esta integral es igual a

$$\pi[\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})]. \qquad \blacktriangle$$

Área de la superficie de una gráfica

Una superficie S dada en la forma $z = g(x, y)$, donde $(x, y) \in D$, admite la parametrización

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = g(u, v)$$

para $(u, v) \in D$. Cuando g es de clase C^1, esta parametrización es suave y la fórmula para el área de la superficie se reduce a

$$A(S) = \iint_D \left(\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}\right) dA, \tag{4}$$

después de aplicar las fórmulas

$$\mathbf{T}_u = \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{k}, \qquad \mathbf{T}_v = \mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial v}\mathbf{k},$$

y

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = -\frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial v}\mathbf{j} + \mathbf{k} = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

como vimos en el Ejemplo 4 de la Sección 7.3.