Ejemplo 13 Sea f una 0-forma. Utilizando únicamente las reglas de derivación (1) a (3) y el hecho de que $d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$, demostrar que $d(df) = 0$.

Solución Por la regla (1),

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz,$$

y por tanto

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\, dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y} dy\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial z}\, dz\right).$$

Trabajando solo con el primer término y utilizando la regla (3), obtenemos

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\, dx\right) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x} \wedge\, dx\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \wedge\, dx + \frac{\partial f}{\partial x} \wedge d(dx) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x}\, dz\right) \wedge\, dx + 0 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\, dy \wedge\, dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x}\, dz \wedge\, dx \\ &= -\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\, dx\; dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x}\, dz\;\, dx. \end{aligned}$$

De forma similar, determinamos que

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\, dx\; dy - \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y} dy\, dz$$

y

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z}\, dz\; dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} dy\, dz.$$

Sumando, obtenemos $d(df) = 0$ por la igualdad de las derivadas parciales cruzadas. ▲

Ejemplo 14 Demostrar que $d(\, dx\; dy), d(dy\, dz)$ y $d(\, dz\; dx)$ son cero.

Solución Para probar el primer caso, usamos la propiedad (3):

$$d(dx\; dy) = d(dx \wedge dy) = [d(dx) \wedge dy - dx \wedge d(dy)] = 0.$$

Los otros casos son similares. ▲

Ejemplo 15 Si $\eta = F(x, y, z)\;\, dx\; dy + G(x, y, z)\, dy\, dz + H(x, y, z)\, dz\;\, dx$, hallar $d\eta$.

Solución Por la propiedad (2),

$$d\eta = d(F\;\, dx\; dy) +\; d(G\, dy\, dz) + d(H\, dz\;\, dx).$$