7.4 Isomorfismos

En esta sección se introduce una terminología importante y después se demuestra un teorema que muestra que todos los espacios vectoriales de n dimensiones son "en esencia" el mismo.

Definición 7.4.1

Transformación uno a uno

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal; entonces T es **uno a uno** (escrito 1-1) si

$$\boxed{T\mathbf{v}_1 = T\mathbf{v}_2 \text{ implica que } \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2} \qquad \textbf{(7.4.1)}$$

Es decir, T es 1-1 si y sólo si todo vector $\mathbf{w}$ en la imagen de T es la imagen de exactamente un vector de V.

Nota

Una transformación 1-1 se llama también **inyectiva**.

Teorema 7.4.1

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces T es 1-1 si y sólo si nu $T = \{\mathbf{0}\}$.

Demostración

Suponga que nu $T = \{\mathbf{0}\}$ y $T\mathbf{v}_1 = T\mathbf{v}_2$. Entonces $T\mathbf{v}_1 - T\mathbf{v}_2 = T(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$, lo que significa que $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \in$ nu $T = \{\mathbf{0}\}$. Así, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$; por tanto, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, lo que muestra que T es 1-1. Ahora se probará que si T es 1-1, entonces nu $T = \{\mathbf{0}\}$. Suponga que T es 1-1 y $\mathbf{v} \in$ nu T. Entonces $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Pero también $T\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Así, como T es 1-1, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Esto completa la prueba.

EJEMPLO 7.4.1 **Una transformación 1-1 de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$**

Defina $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x - y \end{pmatrix}$. Es sencillo encontrar $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\rho(A_T) = 2$; así, $\nu(A_T) = 0$ y $N_{A_T} =$ nu $T = \{\mathbf{0}\}$. Por tanto, T es 1-1.

EJEMPLO 7.4.2 **Una transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que no es 1-1**

Defina $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x - 2y \end{pmatrix}$. Entonces $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\rho(A_T) = 1$ y $\nu(A_T) = 1$; por tanto, $\nu(T) = 1$ y T no es 1-1. Observe, por ejemplo, que $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 = T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Definición 7.4.2

Transformación sobre

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces se dice que T es sobre W o simplemente **sobre** si para todo $\mathbf{w} \in W$ existe cuando menos una $\mathbf{v} \in V$ tal que $T\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Es decir, T es sobre W si y sólo si im $T = W$.

Nota

Una transformación sobre se denomina también **suprayectiva**.