Ejemplo 11 Hallar los extremos de $f(x, y) = (x-y)^n$ sujeta a la restricción $x^2+y^2 = 1$, donde $n \geq 1$.

Solución Igualamos a cero las derivadas primeras de la función auxiliar h definida por $h(x, y, \lambda) = (x-y)^n - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$:

$$\begin{aligned} n(x-y)^{n-1} - 2\lambda x &= 0 \\ -n(x-y)^{n-1} - 2\lambda y &= 0 \\ -(x^2 + y^2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones vemos que $\lambda(x + y) = 0$. Si $\lambda = 0$, entonces $x = y = \pm\sqrt{2}/2$. Si $\lambda \neq 0$, entonces $x = -y$. En la Figura 3.4.6 se representan los cuatro puntos críticos y los valores correspondientes de $f(x, y)$ se enumeran a continuación:

(A)	$x=\sqrt{2}/2$	$y=\sqrt{2}/2$	$\lambda=0$	$f(x,y)=0$
(B)	$x=\sqrt{2}/2$	$y=-\sqrt{2}/2$	$\lambda=n(\sqrt{2})^{n-2}$	$f(x,y)=(\sqrt{2})^n$
(C)	$x=-\sqrt{2}/2$	$y=-\sqrt{2}/2$	$\lambda=0$	$f(x,y)=0$
(D)	$x=-\sqrt{2}/2$	$y=\sqrt{2}/2$	$\lambda=(-1)^{n-2}n(\sqrt{2})^{n-2}$	$f(x,y)=(-\sqrt{2})^n$.

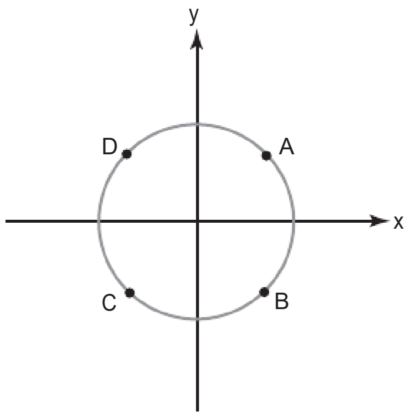

Figura 3.4.6 Los cuatro puntos críticos del Ejemplo 11.

Por inspección vemos que si n es par, entonces A y C son puntos de mínimo y B y D son puntos de máximo. Si n es impar, entonces B es punto de máximo, D es punto de mínimo y A y C no son ni una cosa ni la otra. Vamos a comprobar si el Teorema 10 es coherente con estas observaciones.

El determinante de la matriz hessiana orlada es

$$\begin{aligned} |\overline{H}| &= \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y \\ -2x & n(n-1)(x-y)^{n-2} - 2\lambda & -n(n-1)(x-y)^{n-2} \\ -2y & -n(n-1)(x-y)^{n-2} & n(n-1)(x-y)^{n-2} - 2\lambda \end{vmatrix} \\ &= -4n(n-1)(x-y)^{n-2}(x+y)^2 + 8\lambda(x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Si $n = 1$ o si $n \geq 3$, $|\overline{H}| = 0$ en A, B, C y D. Si $n = 2$, entonces $|\overline{H}| = 0$ en B y D, y -16 en A y C. Así, el criterio de la derivada segunda reconoce los puntos de mínimo en A y C, pero no concluye la existencia de puntos de máximo en B y D para $n = 2$. Tampoco es concluyente para los demás valores de n. ▲