donde H es la imagen de A. Se ilustrará esto con una gráfica para el caso de $n = 3$.

En $\mathbb{R}^3$ la imagen de A será un plano o una recta que pasa por el origen (ya que éstos son los únicos subespacios de $\mathbb{R}^3$ de dimensión uno o dos). Vea la figura 6.5. El vector que minimiza se denota por $\mathbf{u}$. De la figura (y del teorema de Pitágoras) se deduce que $|\mathbf{y} - A\mathbf{u}|$ es mínima cuando $\mathbf{y} - A\mathbf{u}$ es ortogonal a la imagen de A.

Es decir, si $\bar{\mathbf{u}}$ es el vector que minimiza, entonces para todo vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$

$$A\mathbf{u} \perp (\mathbf{y} - A\bar{\mathbf{u}}) \tag{6.2.5}$$

Usando la definición de producto escalar en $\mathbb{R}^n$, se encuentra que (6.2.5) se vuelve

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} \cdot (\mathbf{y} - A\bar{\mathbf{u}}) &= 0 & \\ (A\mathbf{u})^{\top}(\mathbf{y} - A\bar{\mathbf{u}}) &= 0 & \quad \text{fórmula (2.5.6)} \\ (\mathbf{u}^{\top}A^{\top})(\mathbf{y} - A\bar{\mathbf{u}}) &= 0 & \quad \text{teorema 2.5.1 ii)} \end{aligned}$$

o

$$\mathbf{u}^{\top}(A^{\top}\mathbf{y} - A^{\top}A\bar{\mathbf{u}}) = 0 \tag{6.2.6}$$

La ecuación (6.2.6) se cumple para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ sólo si

$$A^{\top}\mathbf{y} - A^{\top}A\bar{\mathbf{u}} = 0 \tag{6.2.7}$$

Al despejar $\bar{\mathbf{u}}$ de (6.2.7) se obtiene

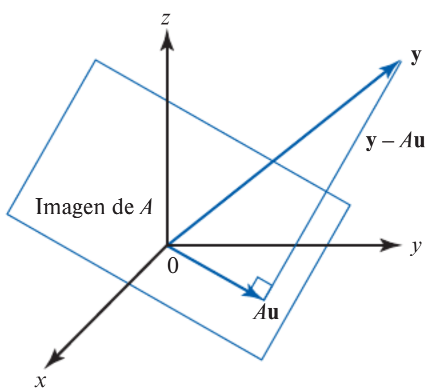

Figura 6.5

$\mathbf{y} - A\mathbf{u}$ es ortogonal a $A\mathbf{u}$.

Solución al problema de mínimos cuadrados para un ajuste por línea recta

Si A y $\mathbf{y}$ son como se definieron en (6.2.3), entonces la recta $y = mx + b$ da el mejor ajuste (en el sentido de mínimos cuadrados) para los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ cuando

$$\begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{u}} = (A^{\top}A)^{-1}A^{\top}\mathbf{y} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{6.2.8}$$

Aquí se ha supuesto que $A^{\top}A$ es invertible. Éste siempre es el caso si los n datos no son colineales. La demostración de este hecho se deja para el final de esta sección.