De manera similar, r sen $(\theta + \alpha) = r$ sen $\theta \cos \alpha + r \cos \theta$ sen α, o sea

$$y' = x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta \tag{7.1.4}$$

Sea

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{7.1.5}$$

Entonces de (7.1.3) y (7.1.4) se ve que $A_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. La transformación lineal T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\mathbf{v} = A_\theta\, \mathbf{v}$, donde A_θ está dado por (7.1.5), se llama **transformación de rotación**.

Transformación de rotación

EJEMPLO 7.1.9 Transformación de proyección ortogonal

Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$. La **transformación de proyección ortogonal** P: $V \to H$ se define por

$$P\mathbf{v} = \text{proy}_H \mathbf{v} \tag{7.1.6}$$

Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ una base ortonormal para H. Entonces de la definición 6.1.4, se tiene

$$P\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k \tag{7.1.7}$$

Como $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}$ y $(\alpha\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \alpha(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$, se ve que P es una transformación lineal.

EJEMPLO 7.1.10 Dos operadores de proyección

Se define T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces T es el operador de proyección que toma un vector en el espacio de tres dimensiones y lo proyecta sobre el plano xy. De manera similar, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ proyecta un vector en el espacio sobre el plano xz. Estas dos transformaciones se describen en la figura 7.4.

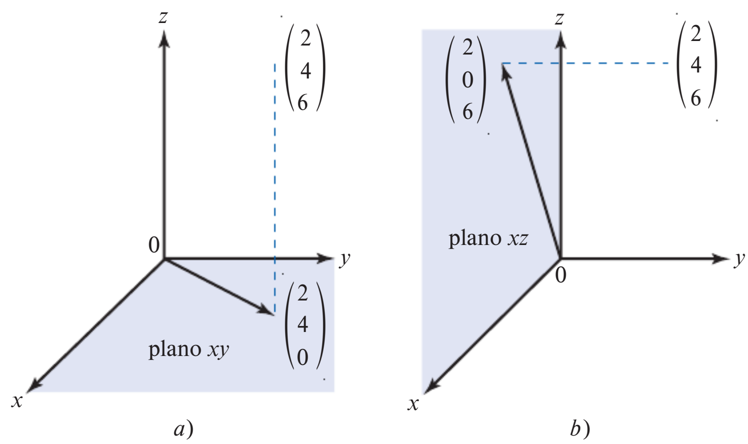

Figura 7.4

a) Proyección sobre el plano *xy*: $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Proyección sobre el plano *xz*: $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$.