Figura 7.4.5 Un muchacho haciendo una pompa de jabón. Pintura del artista francés Jean Baptiste Siméon Chardin (1699–1779), The Metropolitan Museum of Art, Nueva York.

Análogamente, ¿por qué los planetas y el Sol son redondos? ¿Qué es lo que determina realmente la forma de nuestro universo?

Las respuestas a estas preguntas implican conceptos fundamentales abordados en este libro; en concreto, problemas de máximos y mínimos, y el caso de los problemas de determinación del área y el volumen de las pompas de jabón. Las pompas de jabón son redondas por su naturaleza más económica. La forma esférica es la superficie de mínima área posible que contiene un determinado volumen (que en el caso de una pompa es el aire).

Los problemas matemáticos de esta clase se clasifican dentro del cálculo de variaciones, un área casi tan antigua como el propio cálculo.

Para obtener más información, véase el libro *The Parsimonious Universe* de Hildebrandt y Tromba (Springer-Verlag, 1995).

Ejercicios

1. Hallar el área de la superficie de la esfera unidad S representada paramétricamente por $\mathbf{\Phi}\colon D \to S \subset \mathbb{R}^3$, donde D es el rectángulo $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$ y $\mathbf{\Phi}$ está dada por las ecuaciones

$$x = \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \quad y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \quad z = \cos\phi.$$

Obsérvese que podemos representar la esfera completa de forma paramétrica, pero no podemos representarla en la forma $z = f(x, y)$.

2. En el Ejercicio 1, ¿qué ocurre si permitimos que ϕ varíe desde $-\pi/2$ a $\pi/2$? ¿Y si varía entre 0 y 2π? ¿Por qué obtenemos respuestas diferentes?

3. Hallar el área del helicoide del Ejemplo 2 si el dominio D es $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 3\pi$.

4. El toro T se puede representar paramétricamente mediante la función $\mathbf{\Phi}\colon D \to \mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{\Phi}$ está dada por las funciones coordenadas $x = (R + \cos\phi)\cos\theta$, $y = (R + \cos\phi)\operatorname{sen}\theta$, $z = \operatorname{sen}\phi$; D es el rectángulo $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, es decir, $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$; y $R > 1$ es fijo (véase la Figura 7.4.6). Demostrar que $A(T) = (2\pi)^2 R$, primero usando la fórmula (3) y luego usando la fórmula (6).

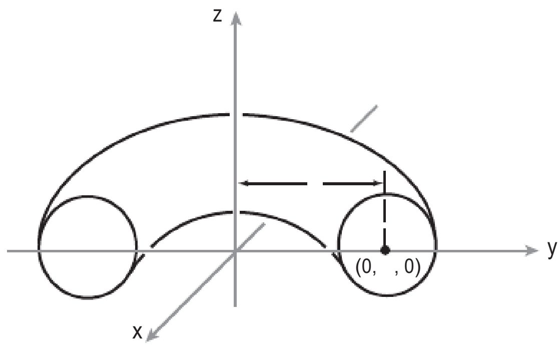

Figura 7.4.6 Sección transversal de un toro.