ecuación de una hipérbola (como en el ejemplo 8.5.2). Por lo tanto, se puede probar el siguiente teorema.

Teorema 8.5.2

Si $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$, entonces la ecuación (8.5.21) con $d \neq 0$ es la ecuación de:

i) Una hipérbola, si $\det A < 0$.

ii) Una elipse, circunferencia o sección cónica degradada si $\det A > 0$.

iii) Un par de rectas o una sección de cónica degradada si $\det A = 0$.

iv) Si $d = 0$, entonces (8.5.21) es la ecuación de dos rectas si $\det A \neq 0$ o la ecuación de una sola recta si $\det A = 0$.

Demostración

Ya hemos demostrado que i) y ii) son ciertas. Para probar iii), suponga que $\det A = 0$. Entonces por el teorema del resumen 8.1.6, $\lambda = 0$ es un valor característico de A y la ecuación (8.5.22) se convierte en $\lambda_1 x'^2 = d$ o $\lambda_2 x'^2 = d$. Si $\lambda_1 x'^2 = d$ y $\frac{d}{\lambda_1} > 0$, entonces $x' = \pm\sqrt{\frac{d}{\lambda_1}}$ es la ecuación de dos rectas en el plano xy. Si $\frac{d}{\lambda_1} > 0$, entonces tenemos $x'^2 < 0$ (lo cual es imposible) y obtenemos una cónica degenerada. Los mismos resultados son válidos si $\lambda_2 y'^2 = d$. El inciso iv) se deja como ejercicio (problema 8.5.45).

Nota. En el ejemplo 8.5.2 se tenía $\det A = ac - \frac{ac - b^2}{4} = -1$. En los ejemplos 8.5.3 y 8.5.4 se tenía $\det A = 24$.

Los métodos que acaban de describirse se pueden usar para analizar las ecuaciones cuadráticas en más de dos variables. A continuación se proporciona un ejemplo.

EJEMPLO 8.5.5 Una elipsoide

Considere la ecuación cuadrática

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 + 4xz + 4yz + 2z^2 = 100 \tag{8.5.23}$$

Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, entonces (8.5.23) se puede escribir en la forma

$$A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 100 \tag{8.5.24}$$

Del ejemplo 8.4.2, $Q^{\mathrm{T}}AQ = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, donde