EJEMPLO 4.4.2 Uso del teorema 4.4.1 para calcular un producto cruz

Calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

SOLUCIÓN ►
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -5 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (4 - 10)\mathbf{i} - (2 - 15)\mathbf{j} + (-4 + 12)\mathbf{k}$$
$$= -6\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

El siguiente teorema resume algunas propiedades del producto cruz. Su demostración se deja como ejercicio (vea los problemas 41 al 44 de esta sección).

Teorema 4.4.2

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea α un escalar, entonces:

i) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

ii) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ (**propiedad anticonmutativa para el producto vectorial**).

iii) $(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

iv) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ (**propiedad distributiva para el producto vectorial**).

v) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (esto se llama **triple producto escalar** de **u**, **v** y **w**).

vi) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ (es decir, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a **u** y a **v**).

vii) Si tanto **u** como **v** no son el vector cero, entonces **u** y **v** son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

El inciso vi) del teorema 4.4.2 es el que se usa con más frecuencia. Se vuelve a establecer como sigue:

> El producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a **u** como a **v**.

Vector normal

Regla de la mano derecha

Se sabe que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es un vector ortogonal a **u** y **v**, pero siempre habrá *dos* vectores unitarios ortogonales a **u** y **v** (vea la figura 4.27). Los vectores **n** y **–n** (**n** por la letra inicial de **normal**) son ambos ortogonales a **u** y **v**. ¿Cuál tiene la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$? La respuesta está dada por la **regla de la mano derecha**. Si se coloca la mano derecha de manera que el índice apunte en la dirección de **u** y el dedo medio en la dirección de **v**, entonces el pulgar apuntará en la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (vea la figura 4.28).

Una vez que se ha estudiado la dirección del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, la atención se dirige a su magnitud.

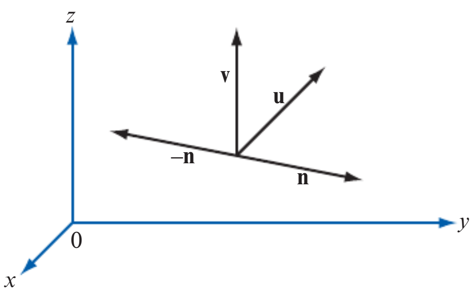

Figura 4.27

Existen exactamente dos vectores, **n** y **–n**, ortogonales a dos vectores no paralelos **u** y **v** en $\mathbb{R}^3$.

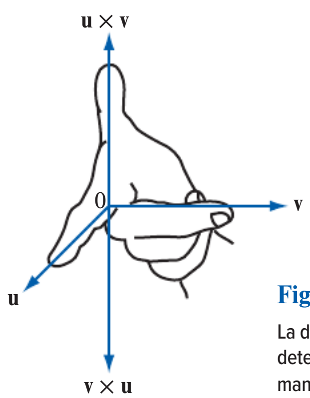

Figura 4.28

La dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ se puede determinar usando la regla de la mano derecha.