Desarrollando la Ecuación 1, tenemos

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right]^2}\,du\,dv. \qquad (2)$$

Por tanto, si f es idénticamente 1, recuperamos la fórmula del área (3) de la Sección 7.4. Al igual que el área de una superficie, la integral de superficie es independiente de la parametrización concreta utilizada. Veremos esto en la Sección 7.6.

Podemos adquirir cierto conocimiento intuitivo acerca de esta integral considerándola como un límite de sumas. Sea D un rectángulo dividido en n^2 rectángulos R_{ij} con áreas $\Delta u\,\Delta v$. Sea $S_{ij} = \mathbf{\Phi}(R_{ij})$ *la porción de la superficie* $\mathbf{\Phi}(D)$ correspondiente a R_{ij} (véase la Figura 7.5.1), y sea $A(S_{ij})$ el área de esta porción de la superficie. Para n grande, f será aproximadamente constante en S_{ij}, y formamos la suma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(\mathbf{\Phi}(u_i, v_j))A(S_{ij}), \qquad (3)$$

donde $(u_i, v_j) \in R_{ij}$. De la Sección 7.4 tenemos una fórmula para $A(S_{ij})$:

$$A(S_{ij}) = \iint_{R_{ij}} \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\,du\,dv,$$

que, por el teorema del valor medio para integrales, es igual a $\|\mathbf{T}_{u_i^*} \times \mathbf{T}_{v_j^*}\|\,\Delta u\,\Delta v$ para algún punto (u_i^*, v_j^*) en R_{ij}. Por tanto, nuestra suma se convierte en

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(\mathbf{\Phi}(u_i, v_j))\|\mathbf{T}_{u_i^*} \times \mathbf{T}_{v_j^*}\|\Delta u\,\Delta v,$$

que es una suma que se aproxima a la última integral de la fórmula (1). Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iint_S f\,dS.$$

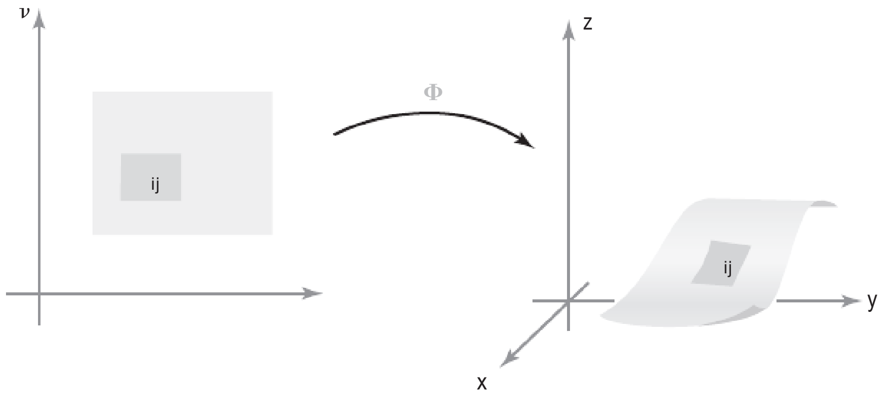

Figura 7.5.1 $\mathbf{\Phi}$ envía una porción R_{ij} de D a una porción de S.