Definición Curvas y superficies de nivel Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces el ***conjunto de nivel de valor*** c se define como el conjunto de aquellos puntos $\mathbf{x} \in U$ en los que $f(\mathbf{x}) = c$. Si $n = 2$, hablamos de una ***curva de nivel*** (de valor c); y si $n = 3$, hablamos de una ***superficie de nivel***. En símbolos, el conjunto de nivel de valor c se escribe:

$$\{\mathbf{x} \in U \mid f(\mathbf{x}) = c\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Obsérvese que el conjunto de nivel siempre está en el dominio de la función.

Ejemplo 3 Describir la gráfica de la función cuadrática $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2+y^2$.

Solución La gráfica es el ***paraboloide de revolución*** $z = x^2 + y^2$, orientado hacia arriba desde el origen, alrededor del eje z. La curva de nivel de valor c es vacía para $c < 0$; para $c > 0$, la curva de nivel de valor c es el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = c\}$, una circunferencia de radio $\sqrt{c}$ centrada en el origen. Por tanto, elevado a una altura c por encima del plano xy, el conjunto de nivel es una circunferencia de radio $\sqrt{c}$, lo que indica una forma parabólica (véanse las Figuras 2.1.6 y 2.1.7). ▲

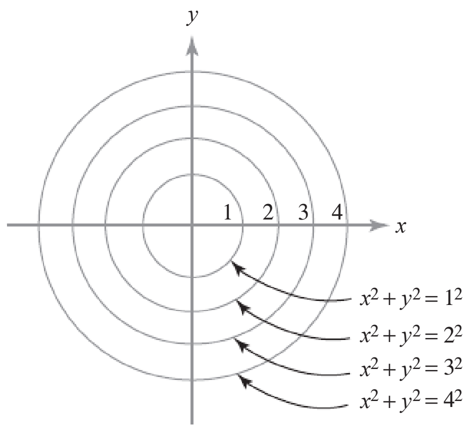

Figura 2.1.6 Algunas curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.

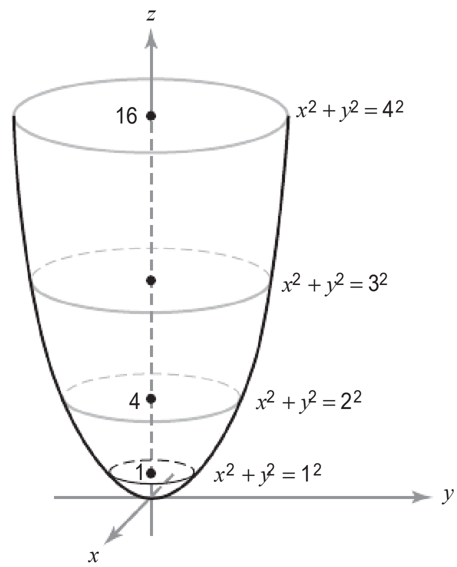

Figura 2.1.7 Curvas de nivel de la Figura 2.1.6 elevadas a la gráfica.

El método de las secciones

Por ***sección*** de la gráfica de f entendemos la intersección de la gráfica con un plano (vertical). Por ejemplo, si P_1 es el plano xz de $\mathbb{R}^3$, definido por $y = 0$, entonces la sección de la función f del Ejemplo 3 es el conjunto

$$P_1 \cap \text{ gráfica } f = \{(x, y, z) \mid y = 0, z = x^2\},$$