17. Considere $\mathbb{R}^2$, si $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $Q = Q^{\top}$. Ecuentre condiciones sobre los elementos de Q para que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_* = \mathbf{x}^{\top} Q$ y sea un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

18. En $\mathbb{R}^2$ sea $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - x_2y_2$. ¿Es éste un producto interno? Si no lo es ¿por qué?

Cálculo

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

19. Sea V un espacio con producto interno. Demuestre que $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||$. Esto se denomina **desigualdad de Cauchy-Schwarz**. [***Sugerencia:*** Vea el teorema 6.1.9 de la sección 6.1.]

Desigualdad del triángulo

20. Utilizando el resultado del problema 19, demuestre que $||\mathbf{u} + \mathbf{v}|| \le ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$. Ésta se denomina **desigualdad del triángulo**.

21. En $\mathbb{P}_3[0, 1]$ sea H el subespacio generado por $\{1, x^2\}$. Encuentre $H^{\perp}$.

22. En $C[-1, 1]$ sea H el subespacio generado por las funciones pares. Demuestre que $H^{\perp}$ consiste en las funciones impares. [***Sugerencia:*** f es impar si $f(-x) = -f(x)$ y es par si $f(-x) = f(x)$.]

23. $H = \mathbb{P}_2[0, 1]$ es un subespacio de $\mathbb{P}_3[0, 1]$. Escriba el polinomio $1 + 2x + 3x^2 - x^3$ como $h(x) + p(x)$, donde $h(x) \in H$ y $p(x) \in H^{\perp}$.

***24.** Encuentre un polinomio de segundo grado que mejor se aproxime a sen $\frac{\pi}{2}x$ en el intervalo [0, 1] en el sentido del error cuadrático medio.

25. Resuelva el problema 24 para la función $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Matriz transpuesta conjugada

26. Sea A una matriz de $m \times n$ con elementos complejos. Entonces la **transpuesta conjugada** de A, denotada por A^*, está definida por $(A^*)_{ij} = \overline{a}_{ij}$. Calcule A^* si

$$A = \begin{pmatrix} 3+i & 2-8i \\ 3 & -8i \end{pmatrix}$$

Cálculo

Matriz unitaria

27. Sea A una matriz invertible de $n \times n$ con elementos complejos. A se denomina **unitaria** si $A^{-1} = A^*$. Demuestre que la siguiente matriz es unitaria:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

Cálculo

Valor complejo

28. Se dice que una función f es de **valor complejo** sobre el intervalo (real) $[a, b]$ si $f(x)$ se puede expresar como

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),\quad x \in [a, b]$$

Función de valor complejo continua

donde f_1 y f_2 son funciones de valores reales. La **función de valor complejo** f es continua si f_1 y f_2 son **continuas**. Sea $CV[a, b]$ el conjunto de funciones de valores complejos que son continuas en $[a, b]$. Para f y g en $CV[a, b]$, defina

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx \qquad \textbf{(6.3.15)}$$

Demuestre que (6.3.15) define un producto interno en $CV[a, b]$.

Cálculo

29. Demuestre que $f(x) = \text{sen } x + i \cos x$ y $g(x) = \text{sen } x - i \cos x$ son **ortogonales** en $CV[0, \pi]$.