En muchas aplicaciones resulta útil "diagonalizar" una matriz A, es decir, encontrar una matriz diagonal semejante a A.

Definición 8.3.2

Matriz diagonalizable

Una matriz A de $n \times n$ es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D.

Observación. Si D es una matriz diagonal, entonces los valores característicos son sus componentes en la diagonal. Si A es semejante a D, entonces A y D tienen los mismos valores característicos (por el teorema 8.3.1). Uniendo estos dos hechos se observa que si A es diagonalizable, entonces A es semejante a una matriz diagonal cuyas componentes en la diagonal son los valores característicos de A.

El siguiente teorema establece cuándo una matriz es diagonalizable.

Teorema 8.3.2

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores característicos linealmente independientes. En tal caso, la matriz diagonal D semejante a A está dada por

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores característicos de A. Si C es una matriz cuyas columnas son vectores característicos linealmente independientes de A, entonces

$$\boxed{D = C^{-1}AC} \tag{8.3.3}$$

Demostración

Primero se supone que A tiene n vectores característicos linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ que corresponden a los valores característicos (no necesariamente diferentes) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Sea

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}$$