43. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$x_1 - x_2 - x_3 = 0$

44. $x_1 + 3x_3 = 0$
$2x_2 - 4x_4 = 0$

45. $-5x_2 + x_3 = 0$
$2x_1 + 4x_2 = 0$

46. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$
$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0$

47. $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0$
$-2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - 6x_5 = 0$

48. $2x_2 + x_5 = 0$
$x_1 - 2x_2 - 3x_4 = 0$

49. $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0$

50. Sea $\mathbf{u} = (-1, 3, 2)$.

a) Sea $H = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3: \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0\}$. Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
b) Encuentre dos vectores que pertenezcan a H y que sean linealmente independientes. Denomínelos $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$.
c) Calcule $\mathbf{w} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$.
d) Demuestre que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente dependientes.
e) Dé una interpretación geométrica de los incisos *a*) y *c*), y explique por qué *d*) debe ser cierto.

Complemento ortogonal de *V*

Observación. Si $V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3: \mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para algún número real $\alpha\}$, entonces V es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y a H se le llama **complemento ortogonal de *V***.

51. Elija un vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^3$. Repita los pasos del problema 50 comenzando con el vector que eligió.

52. Demuestre que cualesquiera cuatro polinomios en $\mathbb{P}_2$ son linealmente dependientes.

53. Demuestre que dos polinomios no pueden generar a $\mathbb{P}_2$.

***54.** Demuestre que cualesquiera $n + 2$ polinomios en $\mathbb{P}_n$ son linealmente dependientes.

55. Demuestre que cualquier subconjunto de un conjunto de vectores linealmente independientes es linealmente independiente. [**Nota.** Esto generaliza el problema 37.]

56. Demuestre que cualesquiera siete matrices en $\mathbb{M}_{32}$ son linealmente dependientes.

57. Pruebe que cualesquiera $mn + 1$ matrices en $\mathbb{M}_{mn}$ son linealmente dependientes.

58. Sean S_1 y S_2 dos conjuntos finitos linealmente independientes en un espacio vectorial V. Demuestre que $S_1 \cap S_2$ es un conjunto linealmente independiente.

59. Demuestre que en $\mathbb{P}_n$ los polinomios $1, x, x^2, \ldots x^n$, son linealmente independientes. [***Sugerencia:*** Por supuesto, esto es cierto si $n = 1$. Suponga que $1, x, x^2, \ldots x^{n-1}$ son linealmente independientes y demuestre que esto implica que $1, x, x^2, \ldots x^n$ también son linealmente independientes. Esto completa la prueba por inducción matemática.]

60. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto linealmente independiente. Demuestre que los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes.

61. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores diferentes de cero en un espacio vectorial V. Demuestre que al menos uno de los vectores en S se puede escribir como una combinación lineal de los vectores que le preceden. Es decir, demuestre que existe un entero $k \leq n$ y escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ tales que $\mathbf{v}_k = \alpha_1\mathbf{v}_1, \alpha_2\mathbf{v}_2, \ldots, \alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}$.

62. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores que tiene la propiedad de que el conjunto $\{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\}$ es linealmente dependiente cuando $i \neq j$. Demuestre que cada vector del conjunto es un múltiplo de un solo vector de ese conjunto.