5. Sea $\Phi(u, v) = (e^u \cos v, e^u \operatorname{sen} v, v)$ una aplicación de $D = [0, 1] \times [0, \pi]$ en el plano uv sobre una superficie S en el espacio xyz.

(a) Hallar $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$.

(b) Hallar la ecuación del plano tangente a S cuando $(u, v) = (0, \frac{\pi}{2})$.

(c) Hallar el área de $\mathbf{\Phi}(D)$.

6. Hallar el área de la superficie definida por $z = xy$ y $x^2 + y^2 \leq 2$.

7. Utilizar una integral de superficie para determinar el área del triángulo T en $\mathbb{R}^3$ con vértices en $(1, 1, 0)$, $(2, 1, 2)$ y $(2, 3, 3)$. Comprobar la respuesta determinando las longitudes de los lados y usando la geometría clásica. [SUGERENCIA: expresar el triángulo como la gráfica $z = g(x, y)$ sobre un triángulo T^* en el plano xy.]

8. Utilizar una integral sobre una superficie para determinar el área del cuadrilátero D in $\mathbb{R}^3$ de vértices en $(-1, 1, 2)$, $(1, 1, 2)$, $(0, 3, 5)$ y $(5, 3, 5)$. Comprobar la respuesta determinando las longitudes de los lados y usando la geometría clásica (véase la sugerencia del problema anterior).

9. Sea $\mathbf{\Phi}(u, v) = (u - v, u + v, uv)$ y sea D el disco unidad en el plano uv. Hallar el área de $\mathbf{\Phi}(D)$.

10. Hallar el área de la porción de la esfera unidad contenida en el cono $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ (véase el Ejercicio 1).

11. Demostrar que la superficie $x = 1/\sqrt{y^2 + z^2}$, donde $1 \leq x < \infty$, ¡se puede llenar pero no se puede pintar!

12. Hallar una parametrización de la superficie $x^2 - y^2 = 1$, donde $x > 0, -1 \leq y \leq 1$ y $0 \leq z \leq 1$. Utilizar la respuesta para expresar el área de la superficie como una integral.

13. Representar el elipsoide E:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

paramétricamente y escribir la integral que da el área de su superficie $A(E)$. (No calcular la integral).

14. Hacemos girar la curva $y = f(x), a \leq x \leq b$ alrededor del eje y. Demostrar que el área de la superficie barrida está dada por la Ecuación (6); es decir,

$$A = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Interpretar la fórmula geométricamente utilizando la longitud de arco y la distancia al eje de rotación.

15. Hallar el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ alrededor del eje y.

16. Utilizar la fórmula (4) para calcular el área de la superficie del cono del Ejemplo 1.

17. Hallar el área de la superficie definida por $x + y + z = 1$, $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

18. Demostrar que para los vectores $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$, se tiene la fórmula

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right]^2}.$$

19. Dibujar y calcular el área de la superficie dada por

$$x = r\cos\theta, \quad y = 2r\cos\theta, \quad z = \theta, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

20. Demostrar el *teorema de Pappus*: Sea $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^2$ una trayectoria C^1 cuya imagen se encuentra en el semiplano derecho y es una curva cerrada simple. El área de la superficie lateral generada al rotar la imagen de $\mathbf{c}$ alrededor del eje y es igual a $2\pi\bar{x}l(\mathbf{c})$, donde $\bar{x}$ es el valor medio de las coordenadas x de puntos sobre $\mathbf{c}$ y $l(\mathbf{c})$ es la longitud de $\mathbf{c}$. (Véanse los Ejercicios 16 a 19 de la Sección 7.1 para ver una exposición acerca de los valores medios.)

21. El cilindro $x^2 + y^2 = x$ divide la esfera unidad S en dos regiones S_1 y S_2, donde S_1 corresponde al interior del cilindro y S_2 al exterior. Hallar la relación de las áreas $A(S_2)/A(S_1)$.

22. Supongamos que una superficie S que es la gráfica de una función $z = f(x, y)$, donde $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ se puede describir también como el conjunto de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ con $F(x, y, z) = 0$ (una superficie de nivel). Deducir una fórmula para $A(S)$ que solo implique a F.

23. Calcular el área del cono truncado mostrado en la Figura 7.4.7 utilizando (a) solo geometría y después (b) una fórmula para el área de la superficie.