Este fue el principio del alejamiento del estudio de los cuaterniones y la vuelta a los vectores de Newton, con el producto cuaterniónico sustituido por dos productos distintos: el producto escalar y el producto vectorial.

Podemos preguntarnos por qué Hamilton no descubrió primero el producto vectorial, puesto que es un producto en $\mathbb{R}^3$. La razón es que este no tenía la propiedad fundamental que él requería —concretamente, no era asociativo:[3]

$$\mathbf{0} = (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{k} \neq \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) = -\mathbf{k}.$$

Merece comentar que Euler descubrió el producto vectorial en forma de componentes en 1750, y que tres años antes que Hamilton, Olinde Rodrigues también descubrió una forma de multiplicación cuarteniónica.

El alejamiento de los cuaterniones. Los científicos responsables en última instancia de la muerte de los cuaterniones fueron James Clerk Maxwell (véase la Figura 1.3.9), Oliver Heaviside y Josiah Willard Gibbs, uno de los fundadores de la mecánica estadística. En la década de 1860, Maxwell formuló sus monumentales ecuaciones de electricidad y magnetismo. No utilizó ninguna notación vectorial (no existía). En su lugar, Maxwell escribió sus ecuaciones en lo que ahora llamamos "forma de componentes". Alrededor de 1870, Tait comenzó a mantener correspondencia con Maxwell, despertando su interés por los cuaterniones.

Figura 1.3.9 James Clerk Maxwell (1831–1879).

En 1873, Maxwell publicó su genial trabajo, *Treatise on Electricity and Magnetism*. Aquí (como veremos en el Capítulo 8), Maxwell formuló las ecuaciones del campo electromagnético utilizando cuaterniones, lo que motivó a otros físicos y matemáticos a fijarse más detenidamente en ellos. A causa de este trabajo, muchos han llegado a la conclusión de que Maxwell era un defensor del "enfoque cuaterniónico" de la física. Sin embargo, lo cierto es que Maxwell era bastante reacio a utilizar cuaterniones. De hecho, fue Maxwell quien inició el proceso de separar la parte *vectorial* del producto de dos cuaterniones (el producto vectorial) de la parte *escalar* (el producto escalar).

Es sabido que Maxwell estaba preocupado por el hecho de que la parte escalar del "cuadrado" de un vector ($\mathbf{vv}$) era siempre negativa ($-\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$), lo que en el caso de un vector velocidad podría interpretarse como energía cinética negativa—¡Una idea inaceptable!

Fueron Heaviside y Gibbs los que dieron el empujón final en el alejamiento de los cuaterniones. Heaviside, un investigador independiente interesado en la electricidad y el magnetismo, y Gibbs, un profesor de física matemática en Yale, casi de forma simultánea —e independiente—crearon nuestro moderno sistema de análisis vectorial, que acabamos de empezar a estudiar.

[3]Curiosamente, si uno está dispuesto a vivir sin propiedad asociativa, existe un producto de vectores con la mayor parte de las propiedades del producto vectorial en $\mathbb{R}^7$; este implica otro sistema de números denominado *octoniones*, que existe en $\mathbb{R}^8$. La no existencia de un producto vectorial en otras dimensiones es un resultado que queda fuera del ámbito de este texto. Para más información, consulte *American Mathematical Monthly*, **74** (1967), pp. 188–194, y **90** (1983), p. 697, así como J. Baez, "The Octonions", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **39** (2002), pp. 145–206. Se puede probar que sistemas como los cuaterniones y los octoniones solo se pueden dar en dimensión 1 (los reales $\mathbb{R}$), dimensión 2 (los números complejos), dimensión 4 (los cuaterniones) y dimensión 8 (los octoniones). Por otro lado, la forma "correcta" de extender el producto vectorial es introduciendo la noción de *forma diferencial*, la cual existe en *cualquier* dimensión. Estudiaremos su construcción en la Sección 8.5.