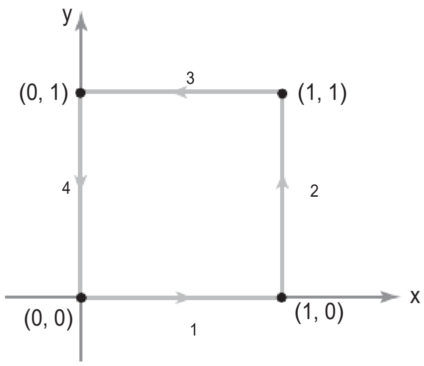

Figura 7.2.12 El perímetro del cuadrado unidad parametrizado en cuatro tramos.

$$\mathbf{c}\colon [0,4] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \begin{cases} (t,0) & 0 \le t \le 1 \\ (1,t-1) & 1 \le t \le 2 \\ (3-t,1) & 2 \le t \le 3 \\ (0,4-t) & 3 \le t \le 4. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_C x^2\,dx + xy\,dy &= \int_0^1 (t^2+0)\,dt + \int_1^2 [0+(t-1)]\,dt \\ &\quad + \int_2^3 [-(3-t)^2+0]\,dt + \int_3^4 (0+0)\,dt \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) + 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ahora calculamos de nuevo esta integral de línea, usando la fórmula (4) y parametrizando las C_i por separado. Obsérvese que $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, donde las C_i son las curvas orientadas mostradas en la Figura 7.2.12. Estas se pueden parametrizar como sigue:

$$\begin{aligned} &C_1\colon\ \mathbf{c}_1(t) = (t,0), 0 \le t \le 1 \\ &C_2\colon\ \mathbf{c}_2(t) = (1,t), 0 \le t \le 1 \\ &C_3\colon\ \mathbf{c}_3(t) = (1-t,1), 0 \le t \le 1 \\ &C_4\colon\ \mathbf{c}_4(t) = (0,1-t), 0 \le t \le 1, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int_{C_1} x^2\,dx + xy\,dy &= \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3} \\ \int_{C_2} x^2\,dx + xy\,dy &= \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2} \\ \int_{C_3} x^2\,dx + xy\,dy &= \int_0^1 -(1-t)^2\,dt = -\frac{1}{3} \\ \int_{C_4} x^2\,dx + xy\,dy &= \int_0^1 0\,dt = 0. \end{aligned}$$

Así, de nuevo,

$$\int_C x^2\,dx + xy\,dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{2}.$$

▲