Primero regresamos al caso general [ecuación (8.2.4)]. Suponga que A tiene los valores característicos reales distintos λ_1 y λ_2 con los vectores característicos correspondientes $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Como $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes, forman una base para $\mathbb{R}^2$ y se puede escribir

$$\mathbf{p}_0 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 \tag{8.2.5}$$

para algunos números reales α_1 y α_2. Entonces (8.2.4) se convierte en

$$\mathbf{p}_n = A^n(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) \tag{8.2.6}$$

Pero $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ y $A^2\mathbf{v}_1 = A(A\mathbf{v}_1) = A(\lambda_1\mathbf{v}_1) = \lambda_1 A\mathbf{v}_1 = \lambda_1(\lambda_1\mathbf{v}_1) = \lambda_1^{\,2}\,\mathbf{v}_1$. Así, se puede ver que $A^n\mathbf{v}_1 = \lambda_1^{\,n}\mathbf{v}_1$, $A^n\mathbf{v}_2 = \lambda_2^{\,n}\mathbf{v}_2$ y de (8.2.6)

$$\mathbf{p}_n = \alpha_1\lambda^n{}_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda^n{}_2\mathbf{v}_2 \tag{8.2.7}$$

La ecuación característica de A es $\begin{vmatrix} -\lambda & k \\ \alpha & \beta-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \beta\lambda - k\alpha = 0$, o sea, $\lambda = \dfrac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha k}}{2}$. Por suposición, $k > 0$, $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$. Entonces $4\alpha k > 0$ y $\beta^2 + 4\alpha k > 0$; esto significa que, sin duda, los valores característicos son reales y diferentes y que un valor característico, λ_1, es positivo; el otro, λ_2, es negativo y $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. La ecuación (8.2.7) se puede escribir como

$$\mathbf{p}_n = \lambda_1^n\left[\alpha_1\mathbf{v}_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\alpha_2\mathbf{v}_2\right] \tag{8.2.8}$$

Como $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$, es evidente que $\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n$ se vuelve muy pequeña cuando n crece. Entonces para n grande

$$\mathbf{p}_n \approx \alpha_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 \tag{8.2.9}$$

Esto quiere decir que, a la larga, la distribución de edades se estabiliza y es proporcional a $\mathbf{v}_1$. Cada grupo de edad cambiará por un factor de λ_1 cada año. Así, a la larga, la ecuación (8.2.4) actúa igual que la ecuación (8.2.1). En el corto plazo, es decir, antes de alcanzar la “estabilidad”, los números oscilan. La magnitud de esta oscilación depende de la magnitud de $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ (que es negativa, con lo que se explica la oscilación).

EJEMPLO 8.2.2 Los valores y vectores característicos de *A* determinan el comportamiento de generaciones futuras

Para $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$ se tiene $\lambda^2 - 0.5\lambda - 0.6 = 0$, es decir, $\lambda = \dfrac{0.5 \pm \sqrt{0.25 + 2.4}}{2} = \dfrac{0.5 \pm \sqrt{2.65}}{2}$, de manera que $\lambda_1 \approx 1.06$ y $\lambda_2 \approx -0.56$. Esto explica el 6% de aumento en la población que se observa en la última columna de la tabla 8.1. Correspondiente al valor característico $\lambda_1 = 1.06$, se calcula $(A - 1.06)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1.06 & 2 \\ 0.3 & -0.56 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o $1.06x_1 = 2x_2$, de manera que $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.53 \end{pmatrix}$ es un vector característico. De manera similar, $(A + 0.56)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.56 & 2 \\ 0.3 & 1.06 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de modo que $0.56x_1 + 2x_2 = 0$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.28 \end{pmatrix}$ es un segundo vector característico. Observe que en $\mathbf{v}_1$ se tiene $\dfrac{1}{0.53} \approx 1.88$. Esto explica la razón $\dfrac{P_{j,n}}{P_{a,n}}$ en la quinta columna de la tabla.