(c) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

11. Para las funciones del Ejercicio 10, ¿cuál es la dirección de máximo crecimiento en $(1,1,1)$?

12. Demostrar que el vector normal unitario a la superficie $x^3y^3 + y - z + 2 = 0$ en $(0,\ 0,\ 2)$ está dado por $\mathbf{n} = (1/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

13. Hallar un vector normal unitario a la superficie $\cos(xy) = e^z - 2$ en $(1, \pi, 0)$.

14. Verificar los Teoremas 13 y 14 para $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

15. Demostrar que la definición que sigue al Teorema 14 da, como caso especial, la fórmula para el plano tangente a la gráfica de $f(x,y)$ si se considera la gráfica como una superficie de nivel de $F(x,y,z) = f(x,y) - z$ (véase la Sección 2.3).

16. Sea $f(x,y) = -(1-x^2-y^2)^{1/2}$ para (x,y) tal que $x^2+y^2 < 1$. Demostrar que el plano tangente a la gráfica de f en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ es ortogonal al vector con componentes $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$. Interpretar esto geométricamente.

17. Para las siguientes funciones $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, hallar ∇f y $\mathbf{g}'$ y evaluar $(f \circ \mathbf{g})'(1)$.

(a) $f(x,y,z) = xz + yz + xy$, $\mathbf{g}(t) = (e^t, \cos t, \operatorname{sen} t)$

(b) $f(x,y,z) = e^{xyz}$, $\mathbf{g}(t) = (6t, 3t^2, t^3)$

(c) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)\log\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\mathbf{g}(t) = (e^t, e^{-t}, t)$

18. Calcular la derivada direccional de f en las direcciones dadas $\mathbf{v}$ y en los puntos dados P.

(a) $f(x,y,z) = xy^2 + y^2z^3 + z^3x$, $\mathrm{P} = (4,-2,-1)$, $\mathbf{v} = 1/\sqrt{14}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

(b) $f(x,y,z) = x^{yz}$, $\mathrm{P} = (e,e,0)$, $\mathbf{v} = \frac{12}{13}\mathbf{i} + \frac{3}{13}\mathbf{j} + \frac{4}{13}\mathbf{k}$

19. Un individuo se encuentra de pie sobre la gráfica de $f(x,y) = 100 - 2x^2 - 3y^2$ en el punto $(2,\ 3,\ 65)$.

(a) ¿Cuáles son las coordenadas xy del punto más alto de la gráfica?

(b) Demostrar que el gradiente de f es el vector cero en el punto determinado en (a).

20. Determinar los dos puntos del hiperboloide $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ en los que el plano tangente es paralelo al plano $2x + 2y + z = 5$.

21. Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $r = \|\mathbf{r}\|$. Demostrar que

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

22. El capitán Ralph tiene problemas cerca de la cara iluminada de Mercurio. La temperatura del casco de su nave cuando se encuentra en (x,y,z) está dada por $T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$, donde x, y y z se miden en metros. En este momento está en la posición $(1,1,1)$.

(a) ¿En qué dirección debe moverse para que la temperatura baje lo más rápidamente posible?

(b) Si la nave viaja a e^8 metros por segundo, ¿a qué velocidad disminuirá la temperatura si se desplaza en esa dirección?

(c) Lamentablemente, el metal del casco se romperá si se enfría a una velocidad mayor que $\sqrt{14}e^2$ grados por segundo. Describir el conjunto de posibles direcciones en las que puede desplazarse para disminuir la temperatura a un ritmo menor que el límite permitido.

23. Se dice que una función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es *independiente de la segunda variable* si existe una función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = g(x)$ para todo x en $\mathbb{R}$. En este caso, calcular ∇f en función de g'.

24. Sean f y g funciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$. Suponer que f es diferenciable y $\nabla f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\mathbf{x}$. Demostrar que las esferas centradas en el origen están contenidas en los conjuntos de nivel de f; es decir, f es constante en dichas esferas.

25. Una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice que es una función *par* si $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$. Si f es diferenciable y par, hallar $\mathbf{D}f$ en el origen.

26. Suponer que una montaña tiene la forma del paraboloide elíptico $z = c - ax^2 - by^2$, donde a, b y c son constantes positivas, x e y son las coordenadas este–oeste y norte–sur y z es la altitud por encima del nivel del mar (x, y, z se miden en metros). En el punto $(1,\ 1)$, ¿en qué dirección crece la altitud más rápidamente? Si se suelta una canica en $(1,\ 1)$, ¿en qué dirección comenzaría a rodar?