Se ha visto que las matrices, en general, no conmutan. El siguiente teorema muestra que la ley asociativa sí se cumple.

Teorema 2.2.2 Ley asociativa de la multiplicación de matrices

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times m$, $B = (b_{ij})$ una matriz de $m \times p$ y $C = (c_{ij})$ una matriz de $p \times q$. Entonces la **ley asociativa**

$$\boxed{A(BC) = (AB)C} \quad \textbf{(2.2.5)}$$

se cumple y ABC, definida por cualesquiera de los lados de la ecuación (2.2.5), es una matriz de $n \times q$.

La prueba de este teorema no es difícil, pero es laboriosa. Se desarrolla mejor usando la notación de sumatoria. Por esta razón se pospone hasta el final de esta sección.

De aquí en adelante se escribirá el producto de tres matrices simplemente como ABC. Se puede hacer esto porque $(AB)C = A(BC)$; entonces se obtiene la misma respuesta independientemente de cómo se lleve a cabo la multiplicación (siempre y cuando no se conmute ninguna de las matrices).

La ley asociativa se puede extender a productos de más matrices. Por ejemplo, suponga que AB, BC y CD están definidas. Entonces

$$\boxed{ABCD = A(B(CD)) = ((AB)C)D = A(BC)D = (AB)(CD)} \quad \textbf{(2.2.6)}$$

Existen dos leyes distributivas para la multiplicación de matrices.

Teorema 2.2.3 Leyes distributivas de la multiplicación de matrices

Si todas las sumas y todos los productos siguientes están definidos, entonces

$$\boxed{A(B + C) = AB + AC} \quad \textbf{(2.2.7)}$$

y

$$\boxed{(A + B)C = AC + BC} \quad \textbf{(2.2.8)}$$

Las demostraciones se presentan al final de la sección.

Multiplicación de matrices como una combinación lineal de las columnas de A

Sea A una matriz de $m \times n$ y $\mathbf{x}$ un vector de $n \times 1$. Considere el producto AX que produce un vector $m \times 1$ como se muestra a continuación