Solución Sea $(x, y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Por la identidad $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta = r^2 \leq 1$, vemos que el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $(x, y) \in D$ tienen la propiedad de que $x^2+y^2 \leq 1$, y por tanto D está contenido en el disco unidad. Además, cualquier punto (x, y) del disco unidad se puede expresar como $(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ para ciertos $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Por tanto, D es el disco unidad (véase la Figura 6.1.2).

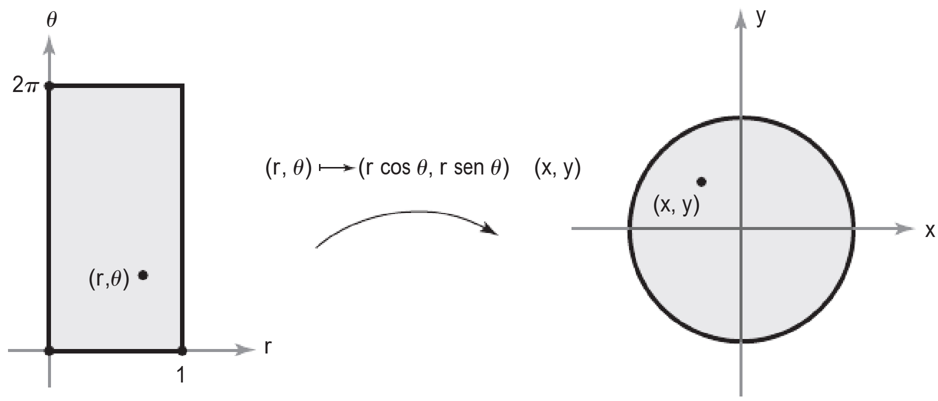

Figura 6.1.2 T proporciona un cambio de variables entre coordenadas euclídeas y polares. El círculo unidad es la imagen de un rect ángulo. ▲

Ejemplo 2 Sea T la aplicación definida como $T(x, y) = ((x + y)/2, (x - y)/2)$ y sea $D^* = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ un cuadrado cuya longitud del lado es 2 y está centrado en el origen. Determinar la imagen D obtenida al aplicar T a D^*.

Solución En primer lugar, determinamos el efecto de T sobre la recta $\mathbf{c}_1(t) = (t, 1)$, donde $-1 \leq t \leq 1$ (véase la Figure 6.1.3). Tenemos que $T(\mathbf{c}_1(t)) = ((t+1)/2, (t-1)/2)$. La aplicación $t \mapsto T(\mathbf{c}_1(t))$ es una parametrización de la recta $y = x - 1, 0 \leq x \leq 1$, ya que $(t - 1)/2 = (t + 1)/2 - 1$. Este es el segmento de recta que une $(1, 0)$ y $(0, -1)$.

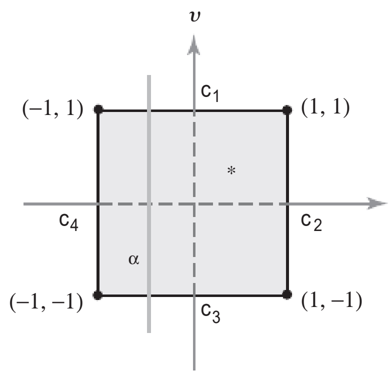

Figura 6.1.3 Dominio de la transformación T del Ejemplo 2.

Sean

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_2(t) &= (1, t), & -1 \leq t \leq 1\\
\mathbf{c}_3(t) &= (t, -1), & -1 \leq t \leq 1\\
\mathbf{c}_4(t) &= (-1, t), & -1 \leq t \leq 1
\end{aligned}$$