prácticamente incompresible. La gran importancia de esta ecuación para el estudio de la electricidad se debe al hecho de que de acuerdo con las hipótesis de Maxwell, el desplazamiento eléctrico obedece las mismas leyes que un fluido incompresible. Entonces, si $\mathbf{D}$ es el desplazamiento eléctrico,

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 0.$$

La interpretación de Gibbs del rotacional era muy similar a la que hemos dado en el Ejemplo 9 para la rotación de un cuerpo rígido. Wilson comenta que un análisis del significado del rotacional para el movimiento de un fluido era "bastante difícil". Incluso actualmente, sigue siendo un concepto algo esquivo, como puede verse en la exposición que sigue al Ejemplo 9. En el Capítulo 8 proporcionamos otra interpretación.

Ejercicios

En los Ejercicios 1 a 4, hallar la divergencia de los campos vectoriales.

1. $\mathbf{V}(x, y, z) = e^{xy}\mathbf{i} - e^{xy}\mathbf{j} + e^{yz}\mathbf{k}$

2. $\mathbf{V}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

3. $\mathbf{V}(x, y, z) = x\mathbf{i} + (y + \cos x)\mathbf{j} + (z + e^{xy})\mathbf{k}$

4. $\mathbf{V}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + (x + y)^2\mathbf{j} + (x + y + z)^2\mathbf{k}$

5. La Figura 4.4.11 muestra algunas líneas de flujo y el movimiento de algunas regiones para un fluido que se mueve en el plano según un campo de velocidades $\mathbf{V}$. ¿Dónde se cumple que div $\mathbf{V} > 0$ y dónde se cumple que div $\mathbf{V} < 0$?

6. Sea $V(x, y, z) = x\mathbf{i}$ el campo vectorial de un fluido en el espacio. Relacionar el signo de la divergencia con la tasa de variación del volumen por el flujo.

7. Dibujar unas cuantas líneas de flujo para $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i}$. Calcular $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y explicar por qué la respuesta dada es coherente con el dibujo.

8. Dibujar unas cuantas líneas de flujo para $\mathbf{F}(x, y) = -3x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$. Calcular $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y explicar por qué su respuesta es coherente con el dibujo.

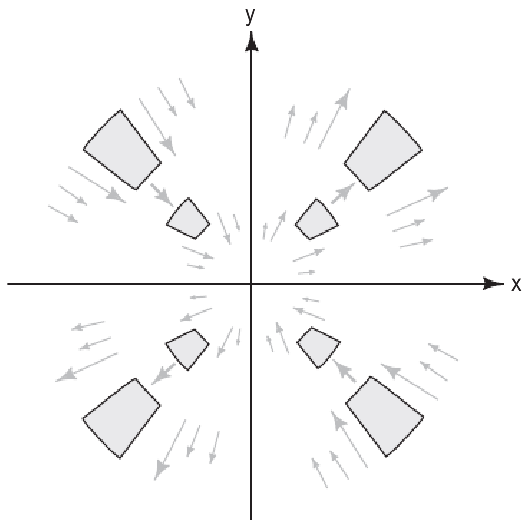

Figura 4.4.11 Las líneas de flujo de un fluido que se mueve en el plano.

En los Ejercicios 9 a 12, calcular la divergencia de los campos vectoriales.

9. $\mathbf{F}(x, y) = x^3\mathbf{i} - x \operatorname{sen}(xy)\mathbf{j}$

10. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

11. $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen}(xy)\mathbf{i} - \cos(x^2y)\mathbf{j}$

12. $\mathbf{F}(x, y) = xe^y\mathbf{i} - [y/(x + y)]\mathbf{j}$

En los Ejercicios 13 a 16, calcular el rotacional, $\nabla \times \mathbf{F}$ de los campos vectoriales.