52. Verificar la regla de la cadena para la función $f(x, y) = x^2/(2 + \cos y)$ y la trayectoria $x = e^t$, $y = e^{-t}$.

53. Suponer que $u(x, t)$ satisface la ecuación diferencial $u_t + uu_x = 0$ y que x, como función $x = f(t)$ de t, satisface $dx/dt = u(x, t)$. Demostrar que $u(f(t), t)$ es constante en t.

54. El desplazamiento en el instante t y la posición horizontal sobre una recta x de una cuerda de violín está dada por $u = \operatorname{sen}(x-6t) + \operatorname{sen}(x+6t)$. Calcular la velocidad de la cuerda en $x = 1$ cuando $t = \frac{1}{3}$.

55. La ***ley de los gases perfectos*** $PV = nRT$ relaciona una constante R, el número n de moles del gas, el volumen V, la temperatura Kelvin T y la presión P.

(a) Demostrar que cada una de las variables n, P, T, V es función de las restantes variables y determinar explícitamente las ecuaciones que las definen.

(b) Calcular $\partial V/\partial T, \partial T/\partial P, \partial P/\partial V$ y demostrar que su producto es igual a -1.

56. La ***temperatura potencial*** θ se define en función de la temperatura T y de la presión p mediante

$$\theta = T\left(\frac{1000}{p}\right)^{0{,}286}.$$

La temperatura y la presión se pueden considerar como funciones de la posición (x, y, z) en la atmósfera y también del tiempo t.

(a) Determinar fórmulas para $\partial\theta/\partial x, \partial\theta/\partial y, \partial\theta/\partial z, \partial\theta/\partial t$ en función de las derivadas parciales de T y p.

(b) La condición $\partial\theta/\partial z < 0$ se considera como una atmósfera inestable, ya que lleva a grandes desplazamientos verticales de paquetes de aire a partir de un solo ímpetu hacia arriba o hacia abajo. Los meteorólogos utilizan la fórmula

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\theta}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{C_p}\right),$$

donde $g = 32{,}2$ y C_p es una constante positiva. ¿Cómo varía la temperatura en la dirección ascendente en una atmósfera inestable?

57. El volumen específico V, la presión P y la temperatura T de un gas de van der Waals están relacionados por $P = RT/(V-\beta) - \alpha/V^2$, donde α, β y R son constantes.

(a) Explicar por qué dos cualesquiera de V, P y T pueden considerarse variables independientes que determinan la tercera variable.

(b) Hallar $\partial T/\partial P, \partial P/\partial V, \partial V/\partial T$. Identificar qué variables son constantes e interpretar físicamente cada derivada parcial.

(c) Verificar que $(\partial T/\partial P)(\partial P/\partial V)(\partial V/\partial T) = -1$(no $+1$!).

58. La altura h del volcán hawaiiano Mauna Loa se describe (de forma aproximada) mediante la función $h(x, y) = 2{,}59 - 0{,}00024y^2 - 0{,}00065x^2$, donde h es la altura por encima del nivel del mar en millas y x e y miden las distancias en millas este–oeste y norte–sur desde la cima de la montaña. En $(x, y) = (-2, -4)$:

(a) ¿A qué velocidad crece la altitud en la dirección $(1, 1)$ (es decir, en la dirección nordeste)? Exprese la respuesta en millas de altitud por milla de distancia horizontal recorrida.

(b) ¿En qué dirección se encuentra el camino de máxima pendiente positiva?

59. (a) ¿En qué dirección es la derivada direccional de $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ en $(1,\ 1)$ igual a cero?

(b) ¿Y en un punto arbitrario (x_0, y_0) del primer cuadrante?

(c) Describir las curvas de nivel de f. En particular, estudiarlas en función del resultado del apartado (b).

60. (a) Demostrar que la curva $x^2 - y^2 = c$, para *cualquier* valor de c, satisface la ecuación diferencial $dy/dx = x/y$.

(b) Dibujar algunas de las curvas $x^2 - y^2 = c$, por ejemplo para $c = \pm 1$. En varios puntos (x, y) a lo largo de estas curvas, dibujar un segmento corto de pendiente x/y; comprobar que estos segmentos parecen ser tangentes a la curva. ¿Qué sucede cuando $y = 0$? ¿Qué sucede cuando $c = 0$?

61. Supóngase que f es una función diferenciable de una variable y que la función $u = g(x, y)$ se define como