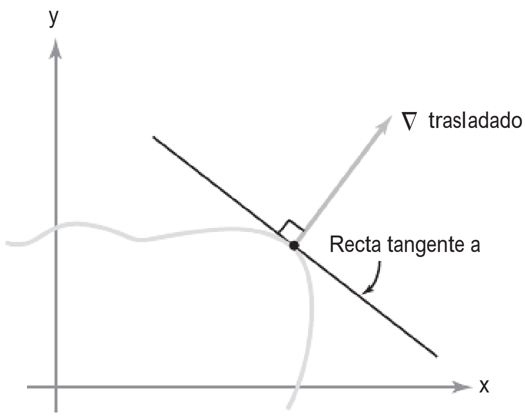

Figura 2.6.3 En el plano, el gradiente ∇f es ortogonal a la curva f = constante.

Ejemplo 6 Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $3xy + z^2 = 4$ en $(1, 1, 1)$.

Solución Aquí $f(x, y, z) = 3xy + z^2$ y $\nabla f = (3y, 3x, 2z)$, que en el punto $(1, 1, 1)$ es el vector $(3, 3, 2)$. Por tanto, el plano tangente es

$$(3, 3, 2) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0;$$

es decir,

$$3x + 3y + 2z = 8.$$

▲

En el Teorema 14 y en la definición posterior, podríamos haber trabajado tanto en dos dimensiones como en tres. Por tanto, si tenemos $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y consideramos una *curva* de nivel

$$C = \{(x, y) \mid f(x, y) = k\},$$

entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a C en cualquier punto (x_0, y_0) de C. Del mismo modo, la recta tangente a C en (x_0, y_0) se expresa mediante la ecuación

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0 \tag{2}$$

si $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$; es decir, la recta tangente es el conjunto de puntos (x, y) que satisface la Ecuación (2) (véase la Figura 2.6.3).

Campo vectorial gradiente

A menudo nos referimos a ∇f como un ***campo vectorial gradiente***. La palabra "campo"significa que ∇f asigna un vector a cada punto en el dominio de f. En la Figura 2.6.4 describimos el gradiente ∇f no por medio de su gráfica que, si $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sería un subconjunto de $\mathbb{R}^6$ —es decir, el conjunto de pares $(\mathbf{x}, \nabla f(\mathbf{x}))$—, sino representando $\nabla f(\mathrm{P})$, para cada punto P como un vector que parte del punto P, no del origen. Como en una gráfica, este método de representación de ∇f contiene el punto P y el valor $\nabla f(\mathrm{P})$ en la misma imagen.