Hipótesis de inducción

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{k+1}{6}[k(2\,k+1) + 6(k+1)]$$

$$= \frac{k+1}{6}[2k^2 + 7k + 6]$$

$$= \frac{k+1}{6}[(k+2)(2k+3)]$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)[2\,(k+1)+1]}{6}$$

que es la ecuación (A.4) para $n = k + 1$ y la prueba queda completa. Para ilustrar la fórmula observe que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = \frac{7(7+1)\,(2\cdot 7+1)}{6}$$

$$= \frac{7\cdot 8\cdot 15}{6} = 140$$

EJEMPLO A.4 Utilice el método de inducción matemática para demostrar la fórmula para la suma de una sucesión geométrica:

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad a \neq 1 \tag{A.5}$$

SOLUCIÓN ► **Paso 1.** Si $n = 0$ (el primer entero en este caso), entonces

$$\frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-a}{1-a} = 1 = a^n$$

Así, la ecuación (A.5) se cumple para $n = 0$. (Se usa $n = 0$ en lugar de $n = 1$ debido a que $a^0 = 1$ es el primer término.)

Paso 2. Suponga que (A.5) se cumple para $n = k$, es decir,

Hipótesis de inducción $\qquad 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \dfrac{1-a^{k+1}}{1-a}$

Entonces

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^k + a^{k+1} = (1 + a + a^2 + \cdots + a^k) + a^{k+1}$$

Hipótesis de inducción

$$= \frac{1-a^{k+1}}{1-a} + a^{k+1}$$

$$= \frac{1-a^{k+1} + (1-a)a^{k+1}}{1-a} = \frac{1-a^{k+2}}{1-a}$$

de manera que la ecuación (A.5) se cumple para $n = k + 1$ y la demostración queda completa.