Ejemplo 3 Sea $f(x, y) = 1/(x - y)$ y sea D el conjunto de (x, y) que satisfacen $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq x$. Demostrar que f *no* es integrable en D.

Solución Como el denominador de f es cero en la recta $y = x$, f no está acotada sobre parte de la frontera de D. Sean $0 < \eta < 1$ y $0 < \delta < \eta$, y sea $D_{\eta,\delta}$ el conjunto de (x, y) para los que $\eta \leq x \leq 1 - \eta$ y $\delta \leq y \leq x - \delta$ (Figura 6.4.4).

En este caso, la región D es y-simple con $\phi_1(x) = 0$, $\phi_2(x) = x$ y $\phi_1(0) = \phi_2(0)$. Para asegurar que $D_{\eta,\delta} \subset D$, como muestra la figura, debemos elegir δ con un poco más de cuidado. Un sencillo razonamiento geométrico nos muestra que debemos elegir $2\delta \leq \eta$. Entonces

$$\begin{aligned}
\iint_{D_{\eta,\delta}} f\, dA &= \int_{\eta}^{1-\eta} \int_{\delta}^{x-\delta} \frac{1}{x-y}\; dy\; dx \\
&= \int_{\eta}^{1-\eta} [-\log(x-y)]\Big|_{y=\delta}^{x-\delta} dx \\
&= \int_{\eta}^{1-\eta} [-\log(\delta) + \log(x-\delta)]\, dx \\
&= [-\log\delta] \int_{\eta}^{1-\eta} dx + \int_{\eta}^{1-\eta} \log(x-\delta)\; dx \\
&= -(1-2\eta)\log\delta + [(x-\delta)\log(x-\delta) - (x-\delta)]\Big|_{\eta}^{1-\eta}.
\end{aligned}$$

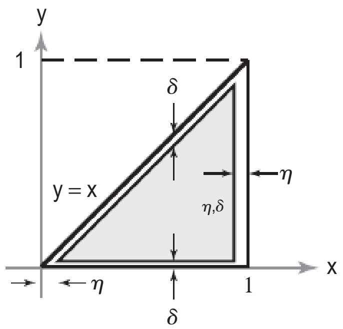

Figura 6.4.4 Dominio contraído $D_{\eta,\delta}$ para un dominio triangular D.

En el último paso, hemos usado el hecho de que $\int \log u\; du = u \log u - u$. Si continuamos la anterior sucesión de igualdades, obtenemos

$$\begin{aligned}
\iint_{D_{\eta,\delta}} f\; dA = &-(1-2\eta)\log\delta + (1-\eta-\delta)\log(1-\eta-\delta) \\
&-1(1-\eta-\delta) - (\eta-\delta)\log(\eta-\delta) + (\eta-\delta).
\end{aligned}$$

Cuando $(\eta, \delta) \to (0, 0)$, el segundo término converge a $1 \log 1 = 0$, mientras que el tercero y el quinto términos convergen a -1 y 0, respectivamente. Sea $v = \eta - \delta$. Dado que $v \log v \to 0$ cuando $v \to 0$ (límite que se calcula utilizando la regla de L'Hôpital que se estudia en cálculo[3]), vemos que el cuarto término tiende a cero cuando $(\eta, \delta) \to (0, 0)$. Es el primer término el que nos va a dar problemas. Tendremos:

$$-(1-2\eta)\log\delta = -\log\delta + 2\eta\log\delta, \tag{2}$$

y resulta fácil ver que esta expresión no converge cuando $(\eta, \delta) \to (0, 0)$. Por ejemplo, sea $\eta = 2\delta$; entonces la expresión (2) es igual a $-\log\delta + 4\delta\log\delta$. Como anteriormente, $4\delta\log\delta \to 0$ cuando $\delta \to 0$, pero $-\log\delta \to +\infty$ cuando $\delta \to 0$, lo que muestra que la expresión (2) no converge. Por tanto, $\lim_{(\eta,\delta)\to(0,0)} \iint_{D_{\eta,\delta}} f\; dA$ no existe, por lo que f no es integrable ▲

[3]La regla de L' Hôpital fue descubierta por Bernoulli y se publicó en el libro de texto de L'Hôpital.