Teorema 5.4.4

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores en $\mathbb{R}^n$ y sea A una matriz de $n \times n$ cuyas columnas son $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Entonces, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes si y sólo si la única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Demostración

Éste es el teorema 5.4.3 para el caso $m = n$.

Teorema 5.4.5

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces $\det A \neq 0$ si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes.

Demostración

Del teorema 5.4.4 y del teorema de resumen (más adelante), las columnas de A son linealmente independientes $\Leftrightarrow$ $\mathbf{0}$ es la única solución a $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$. Aquí, $\Leftrightarrow$ significa "si y sólo si".

El teorema 5.4.5 nos lleva a extender nuestro teorema de resumen.

Teorema 5.4.6 Teorema de resumen (punto de vista 6)

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las ocho afirmaciones siguientes son equivalentes; es decir, cada una implica a las otras siete (de manera que si una es cierta, todas son ciertas).

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector de dimensión n $\mathbf{b}$.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.

v) A es el producto de matrices elementales.

vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii) $\det A \neq 0$.

viii) Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.

Demostración

La única parte que no se ha demostrado hasta el momento es que los renglones de A son linealmente independientes $\Leftrightarrow \det A \neq 0$. Las columnas son independientes $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A^\top = \det A \neq 0$ (vea el teorema 3.2.4) $\Leftrightarrow$ las columnas de $A^\top$ son linealmente independientes. Pero las columnas de $A^\top$ son los renglones de A. Esto completa la prueba.

El siguiente teorema combina las ideas de independencia lineal y conjuntos generadores en $\mathbb{R}^n$.