Superficies de revolución

En la mayor parte de los libros dedicados al cálculo de una variable, se demuestra que el área de la superficie lateral generada al girar la gráfica de una función $y = f(x)$ alrededor del eje x está dada por

$$A = 2\pi \int_a^b (|f(x)|\sqrt{1 + [f'(x)]^2})\, dx. \tag{5}$$

Si la gráfica gira alrededor del eje y, el área de la superficie es

$$A = 2\pi \int_a^b (|x|\sqrt{1 + [f'(x)]^2})\, dx. \tag{6}$$

Deduciremos la fórmula (5) utilizando los métodos que acabamos de desarrollar; la fórmula (6) podemos obtenerla de forma similar (Ejercicio 10).

Para deducir la fórmula (5) a partir de la fórmula (3), debemos proporcionar una parametrización de S. Definimos la parametrización como

$$x = u, \qquad y = f(u)\cos v, \qquad z = f(u)\sin v$$

sobre la región D dada por

$$a \leq u \leq b, \qquad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Esto es de hecho una parametrización de S, ya que para u fija, el punto

$$(u, f(u)\cos v, f(u)\,\mathrm{sen}\, v)$$

describe una circunferencia de radio $|f(u)|$ con centro en $(u, 0, 0)$ (Figura 7.4.3). Calculamos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -f(u)\,\mathrm{sen}\, v, \qquad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = f(u)f'(u), \qquad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} = f(u)\cos v,$$

y por tanto, por la fórmula (3)

$$\begin{aligned}
A(S) &= \iint_D \sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right]^2}\, du\, dv \\
&= \iint_D \sqrt{[f(u)]^2\,\mathrm{sen}^2 v + [f(u)]^2[f'(u)]^2 + [f(u)]^2\cos^2 v}\, du\, dv \\
&= \iint_D |f(u)|\sqrt{1 + [f'(u)]^2}\, du\, dv \\
&= \int_a^b \int_0^{2\pi} |f(u)|\sqrt{1 + [f'(u)]^2}\, dv\, du \\
&= 2\pi \int_a^b |f(u)|\sqrt{1 + [f'(u)]^2}\, du,
\end{aligned}$$

que es la fórmula (5).