de regularidad de una superficie $S$ depende de la existencia de al menos una parametrización regular para $S$.

(c) Demostrar que el plano tangente de $S$ está bien definido independientemente de la parametrización regular (inyectiva) (se precisa utilizar el teorema de la función inversa de la Sección 3.5).

(d) Tras estas observaciones, ¿es posible determinar una parametrización regular del cono de la Figura 7.3.8?

**22.** La imagen de la parametrización

$$\begin{aligned}\Phi(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ &= (a \operatorname{sen} u \cos v, b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, c \cos u)\end{aligned}$$

con $b < a$, $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$ parametriza un elipsoide.

(a) Demostrar que todos los puntos de la imagen de $\Phi$ satisfacen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(ecuación cartesiana de un elipsoide).

(b) Demostrar que la superficie imagen es regular en todos los puntos.

**23.** La imagen de la parametrización

$$\begin{aligned}\Phi(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ &= ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u) \operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} u)\end{aligned}$$

donde $0 \leq u, v \leq 2\pi$, $0 < r < 1$ parametriza un toro (o dónut) $S$.

(a) Demostrar que todos los puntos de la imagen $(x, y, z)$ satisfacen:

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2.$$

(b) Demostrar que la superficie imagen es regular en todos los puntos.

**24.** Sea $\mathbf{\Phi}$ una superficie regular en $(u_0, v_0)$; es decir, $\mathbf{\Phi}$ es de clase $C^1$ y $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ en $(u_0, v_0)$.

(a) Utilizar el teorema de la función implícita (Sección 3.5) para demostrar que la imagen de $\mathbf{\Phi}$ *cerca de* $(u_0, v_0)$ es la gráfica de una función $C^1$ de dos variables. Si la componente $z$ de $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es distinta de cero, podemos escribirla como $z = f(x, y)$.

(c) Demostrar que el plano tangente en $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$ definido por el plano generado por $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ coincide con el plano tangente de la gráfica de $z = f(x, y)$ en ese punto.

# 7.4 Área de una superficie

Antes de pasar a la integrales de superficie generales, vamos a considerar el problema de calcular el área de una superficie, igual que consideramos el problema de hallar la longitud de arco de una curva antes de estudiar las integrales a lo largo de trayectorias.

## Definición de área de una superficie

En la Sección 7.3 hemos definido una superficie parametrizada $S$ como la *imagen* de una función $\mathbf{\Phi}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, escrita como $\mathbf{\Phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Hemos dicho que la aplicación $\mathbf{\Phi}$ es la parametrización de $S$ y que $S$ era regular en $\mathbf{\Phi}(u, v) \in S$ si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$, donde

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\mathbf{k}.$$