Aquí $d\omega$ es una 2-forma sobre K y D es una superficie en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\mathbf{\Phi}: D \to \mathbb{R}^3, \mathbf{\Phi}(x, y) = (x, y, 0)$. Dado que P y Q *no* son explícitamente funciones de z, entonces $\partial P/\partial z$ y $\partial Q/\partial z = 0$, y por el Ejemplo 12, $d\omega = (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\ dx\ dy$. En consecuencia, el Teorema 13 no quiere decir más que

$$\int_{\partial D} P\ dx + Q\ dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\ dx\ dy,$$

que es precisamente el teorema de Green. Por tanto, el Teorema 13 se cumple. Del mismo modo, tenemos los siguientes teoremas.

Teorema 12 Teorema de Stokes Sea S una superficie orientada en $\mathbb{R}^3$, cuya frontera está formada por una curva cerrada simple ∂S (Figura 8.5.3) orientada como la frontera de S (véase la Figura 8.2.1). Supongamos que ω es una 1-forma sobre algún conjunto abierto K que contiene a S. Entonces

$$\int_{\partial S} \omega = \iint_S d\omega.$$

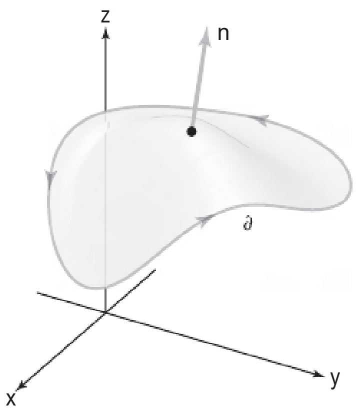

Figura 8.5.3 Una superficie orientada sobre la que se aplica el teorema de Stokes.

Teorema 13 Teorema de Gauss Sea $W \subset \mathbb{R}^3$ una región elemental con ∂W con orientación exterior (véase la Sección 8.4). Si η es una 2-forma sobre alguna región K que contiene W, entonces

$$\iint_{\partial W} \eta = \iiint_W d\eta.$$

Es probable que el lector haya reparado en la gran similitud entre los enunciados de estos teoremas. En las formulaciones basadas en campos vectoriales, hemos utilizado la divergencia para regiones en $\mathbb{R}^3$ (teorema de Gauss) y el rotacional para superficies en $\mathbb{R}^3$ (teorema de Stokes) y regiones en $\mathbb{R}^2$ (teorema de Green). Aquí simplemente utilizamos el concepto unificado de derivada de una forma diferencial para los tres teoremas; y, de hecho, podemos enunciar todos los teoremas como uno solo si proporcionamos algo más de terminología.

Por una 2-***variedad orientada con frontera*** en $\mathbb{R}^3$ entendemos una superficie en $\mathbb{R}^3$ cuya frontera es una curva cerrada simple con una orientación como la que se ha descrito en la Sección 8.2. Por una 3-***variedad orientada*** en $\mathbb{R}^3$ entendemos una región elemental en $\mathbb{R}^3$ (y suponemos que su frontera, que es una superficie, está orientada según la orientación exterior estudiada en la Sección 8.4). Llamaremos al siguiente teorema unificado "teorema de Stokes", de acuerdo con los convenios actuales.