$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \qquad 0 \leq t \leq 4\pi$$

no es una reparametrización de $\mathbf{c}$. Aunque recorre la misma imagen (la circunferencia), lo hace dos veces. ¿Por qué esto implica que γ no es una reparametrización de $\mathbf{c}$?

La integral de línea es una *integral orientada*, en la se produce un cambio de signo (como hemos visto en el Teorema 1) si la orientación de la curva se invierte. La *integral a lo largo de una trayectoria* no tiene esta propiedad. Esto se deduce del hecho de que cambiando t por $-t$ (orientación inversa) solo cambia el signo de $\mathbf{c}'(t)$, no su longitud. Esta es una de las diferencias entre las integrales de línea y las integrales a lo largo de trayectorias. El siguiente teorema, que se demuestra siguiendo el mismo método que en el Teorema 1, prueba que las integrales a lo largo de trayectorias no cambian bajo reparametrizaciones—incluso con aquellas que invierten la orientación.

Teorema 2 Cambio de parametrización para integrales a lo largo de trayectorias Sea $\mathbf{c}$ una curva C^1 a trozos, sea f una función continua (con valores reales) definida sobre la imagen de $\mathbf{c}$ y sea $\mathbf{p}$ cualquier reparametrización de $\mathbf{c}$. Entonces

$$\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\, ds = \int_{\mathbf{p}} f(x, y, z)\, ds. \tag{2}$$

Integrales de línea de campos gradiente

A continuación vamos a considerar una útil técnica para evaluar ciertos tipos de integrales de línea. Recordemos que un campo vectorial $\mathbf{F}$ es un *campo vectorial gradiente* si $\mathbf{F} = \nabla f$ para una cierta función con valores reales f. Así,

$$\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Supongamos que g y G son funciones continuas con valores reales definidas en un intervalo cerrado $[a, b]$, que G es diferenciable en (a, b) y que $G' = g$. Entonces, por el teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b g(x)\, dx = G(b) - G(a).$$

Así, el valor de la integral de g depende solo del valor de G en los puntos extremos del intervalo $[a, b]$. Dado que ∇f representa la derivada de f, podemos preguntarnos si $\int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s}$ está determinada completamente por el valor de f en los extremos $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(b)$. La respuesta está contenida en la siguiente *generalización del teorema fundamental del cálculo.*