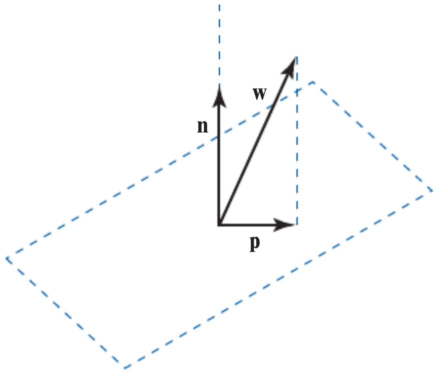


**6.** Para los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, si se forma la matriz $A = [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_k]$, entonces el comando de MATLAB `B = orth(A)` producirá una matriz $B$ cuyas columnas forman una base ortonormal para el subespacio $H$ = imagen de $A$ = gen $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.

*a)* Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ el conjunto de vectores en el problema 1 *b*) de esta sección de MATLAB. Encuentre $A$ y $B$ según se describió. Verifique que las columnas de $B$ son ortonormales.

*b)* Sea $\mathbf{x}$ un vector aleatorio de $3 \times 1$; encuentre $A\mathbf{x}$. Explique por qué $A\mathbf{x}$ está en $H$.

El teorema 6.1.4 dice que si $\mathbf{w}$ está en $H$, entonces $\mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$, donde $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ es una base ortonormal para $H$. Verifique esto para $\mathbf{w} = A\mathbf{x}$ usando el hecho de que $\mathbf{u}_i$ es la $i$-ésima columna de $B$.

*c)* Repita las instrucciones de los incisos *a*) y *b*) para $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, donde cada $\mathbf{v}_i$ es un vector aleatorio de $6 \times 1$ y $\mathbf{x}$ es un vector aleatorio de $4 \times 1$.

**7.** Genere cuatro vectores aleatorios en $\mathbb{R}^6$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$. Sea $H$ = gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. Sea `A = [v1 v2 v3 v4]` y `B = orth(A)`. Sea $\mathbf{u}_i$ la $i$-ésima columna de $B$.

*a)* Sea $\mathbf{w}$ un vector aleatorio de $6 \times 1$. Encuentre la proyección de $\mathbf{w}$ sobre $H$, $\mathbf{p} = \text{proy}_H\, \mathbf{w}$ usando la definición 6.1.4.

Calcule $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_4 \end{pmatrix}$, Verifique que `z = B'w` y `p = BB'w`. Repita para otro vector $\mathbf{w}$.

*b)* Sea $\mathbf{x}$ un vector aleatorio $4 \times 1$ y forme `h = Ax`. Entonces $\mathbf{h}$ está en $H$. Compare $|\mathbf{w} - \mathbf{p}|$ y $|\mathbf{w} - \mathbf{h}|$. Repita para otros tres vectores $\mathbf{x}$. Escriba una interpretación de sus observaciones.

*c)* Sea $\mathbf{z} = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$. Entonces $H$ = gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{z}\}$ (aquí $H$ es el subespacio descrito en los incisos anteriores de este problema). ¿Por qué? Sea `C = [v1 v2 v3 z]` y `D = orth(C)`. Entonces las columnas de $D$ serán otra base ortonormal para $H$.

Sea $\mathbf{w}$ un vector aleatorio de $6 \times 1$. Calcule la proyección de $\mathbf{w}$ sobre $H$ utilizando $B$ y la proyección de $\mathbf{w}$ sobre $H$ usando $D$. Compare los resultados. Repita para otros dos o más vectores $\mathbf{w}$. Escriba la interpretación de sus observaciones.

*d)* (*Lápiz y papel*) Si $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ es una base ortonormal para un subespacio $H$ y $B$ es la matriz $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k]$, pruebe que la proyección de $\mathbf{w}$ sobre $H$ es igual a $BB^{\top}\mathbf{w}$.

**8.** *a)* (*Lápiz y papel*) Si $A$ es una matriz real, explique por qué el espacio nulo de $A^{\top}$ es perpendicular a la imagen de $A$; es decir, si $H = \text{Im}(A)$, entonces el espacio nulo $(A^{\top}) = H^{\perp}$.

*b)* Sea $A$ una matriz aleatoria real de $7 \times 4$. Sea `B = orth(A)` y sea `C = null(A')` (entonces las columnas de $B$ forman una base ortonormal para $H = \text{Im}(A)$ y las columnas de $C$ forman una base ortonormal para $H^{\perp}$). Verifique que las columnas de $C$ son ortonormales.