su valor máximo (o mínimo) en algún punto $\mathbf{x}_0$ de I. Una generalización de este hecho teórico también se cumple en $\mathbb{R}^n$. Estos teoremas garantizan que el máximo o el mínimo que se está buscando realmente existe; por tanto, la búsqueda no será en vano.

> **Definición** Se dice que un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ está ***acotado*** si existe un número $M > 0$ tal que $\|\mathbf{x}\| < M$ para todo $\mathbf{x} \in D$. Un conjunto es ***cerrado*** si contiene todos los puntos de su frontera.
>
> Veamos un ejemplo importante. Obsérvese que los conjuntos de nivel $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \,|\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c\}$ de una función continua f son siempre cerrados.

Así, un conjunto está acotado si está estrictamente contenido en alguna bola (grande). La generalización apropiada del teorema de una variable sobre máximos y mínimos es el siguiente, el cual enunciamos sin demostración.

> **Teorema 7 Teorema de existencia de máximos y mínimos globales** Sea D cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$ y sea $f\colon D \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f alcanza sus valores de máximo y de mínimo absolutos en ciertos puntos $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ de D.

Enunciado de forma simple, $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ son puntos donde f alcanza sus valores mayor y menor. Como en el cálculo de una variable, estos puntos no tienen por qué ser únicos.

Supongamos que ahora $D = U \cup \partial U$, donde U es abierto y ∂U es su frontera. Si $D \subset \mathbb{R}^2$, suponemos que ∂U es una curva suave a trozos; es decir, D es una región acotada por una familia de curvas suaves—por ejemplo, un cuadrado o los conjuntos mostrados en la Figura 3.3.7.

Si $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ están en U, sabemos por el Teorema 4 que son puntos críticos de f. Si están en ∂U y ∂U es una curva suave (es decir, la imagen de una trayectoria suave $\mathbf{c}$ con $\mathbf{c}' \neq 0$), entonces son puntos de máximo y de mínimo de f considerada como una función sobre ∂U. Estas

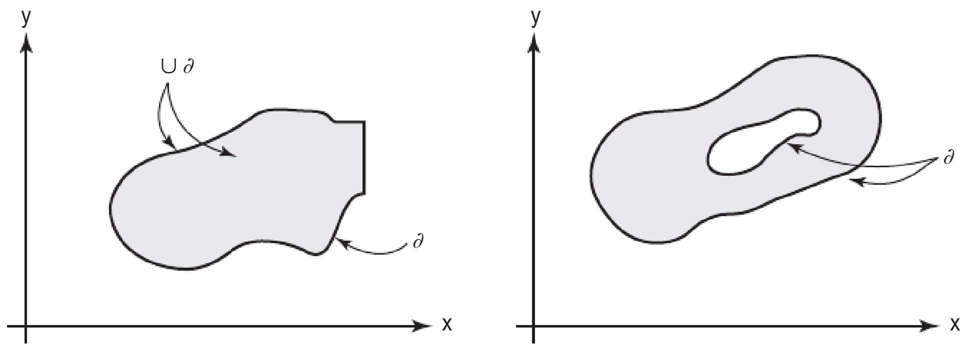

Figura 3.3.7 $D = U \cup \partial U$: dos ejemplos de regiones cuya frontera es una curva suave a trozos.