Teorema 6.3.6 **Teorema de aproximación de la norma**

Sea H un subespacio de dimensión finita de un espacio vectorial V con producto interno, y sea $\mathbf{v}$ un vector en V. Entonces, $\text{proy}_H\,\mathbf{v}$ es la mejor aproximación de v por un elemento en H en el sentido siguiente: si $\mathbf{h}$ es cualquier otro elemento de H, entonces

$$||\mathbf{v} - \text{proy}_H\mathbf{v}|| < ||\mathbf{v} - \mathbf{h}|| \qquad \textbf{(6.3.9)}$$

EJEMPLO 6.3.10 **Cálculo de una proyección sobre $\mathbb{P}_2[0, 1]$**

Cálculo

Como $\mathbb{P}_2[0, 1]$ es un subespacio de dimensión finita de $C[0, 1]$, se puede hablar de $\text{proy}_{\mathbb{P}_2[0,1]} f$ si $f \in C[0, 1]$. Si $f(x) = e^x$, por ejemplo, se calcula $\text{proy}_{\mathbb{P}_2[0,1]} e^x$. Como $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} = \{1, \sqrt{3}(2x-1),$ por el ejemplo 6.3.8, $\sqrt{5}/(6x^2 - 6x + 1)\}$ es una base ortonormal en $\mathbb{P}_2[0, 1]$, y se tiene

$$\begin{aligned}\text{proy}_{\mathbb{P}_2[0,1]}\, e^x &= \langle e^x, 1\rangle\, 1 + \langle e^x, \sqrt{3}\,(2x-1)\rangle\, \sqrt{3}\,(2x-1)\\ &\quad + \langle e^x, \sqrt{5}\,(6x^2-6x+1)\rangle\, \sqrt{5}\,(6x^2-6x+1)\end{aligned}$$

Pero pueden ahorrarse los cálculos. Usando el hecho de que $\int_0^1 e^x\,dx = e - 1$, $\int_0^1 xe^x\,dx = 1$ y $\int_0^1 x^2e^x\,dx = e - 2$, se obtiene $\langle e^x, 1\rangle = e - 1$, $\langle e^x, \sqrt{3}\,(2x-1)\rangle = \sqrt{3}\,(3-e)$, y $\langle e^x, \sqrt{5}\,(6x^2-6x+1)\rangle = \sqrt{5}\,(7e-19)$. Por último

$$\begin{aligned}\text{proy}_{\mathbb{P}_2[0,1]}\, e^x &= (e-1) + \sqrt{3}\,(3-e)\,\sqrt{3}\,(2x-1)\\ &\quad + \sqrt{5}\,(7e-19)\,(\sqrt{5})\,(6x^2-6x+1)\\ &= (e-1) + (9-3e)\,(2x-1)\\ &\quad + 5(7e-19)\,(6x^2-6x+1)\\ &\approx 1.01 + 0.85x + 0.84x^2\end{aligned}$$

Se concluye la presente sección con una aplicación del teorema de aproximación de la norma.

Aproximación por mínimos cuadrados a una función continua

Sea $f \in C[a, b]$. Se quiere aproximar f por un polinomio de grado n. ¿Cuál es el polinomio que hace esto con el menor error?

Con el fin de responder a esta pregunta, debe definirse el *error*. Existen muchas maneras diferentes de definir el error. A continuación se dan tres:

$$\textbf{Error máximo} = \text{máx}\,|f(x) - g(x)| \quad \text{para } x \in [a, b] \qquad \textbf{(6.3.10)}$$

$$\textbf{Error de área} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \qquad \textbf{(6.3.11)}$$

$$\textbf{Error cuadrático medio} = \int_a^b |f(x) - g(x)|^2\,dx \qquad \textbf{(6.3.12)}$$

EJEMPLO 6.3.11 **Cálculo de errores**

Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ sobre $[0, 1]$. En $x^2 \geq x^3$, de manera que $|x^2 - x^3| = x^2 - x^3$. Entonces