EJEMPLO 3.2.5 Obtención del determinante expandiendo en el segundo renglón o la tercera columna

En el ejemplo 3.1.1 se vio que para $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, det $A = -405$. Expandiendo en el segundo renglón se obtiene

$$\begin{aligned} \det A &= (3)A_{21} + (-5)A_{22} + (1)A_{23} \\ &= (3)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + (-5)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} \\ &= (3)(-75) + (-5)(20) + (1)(80) = -405 \end{aligned}$$

Del mismo modo, si se expande en la tercera columna se obtiene

$$\begin{aligned} \det A &= (-2)A_{13} + (1)A_{23} + (9)A_{33} \\ &= (-2)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} + (9)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \\ &= (-2)(-22) + (1)(-80) + (9)(-41) = -405 \end{aligned}$$

El lector debe verificar que se obtiene el mismo resultado con la expansión por cofactores en el tercer renglón o la primera o segunda columna.

Ahora se presentan y se demuestran algunas propiedades adicionales de los determinantes. En cada paso se supone que A es una matriz de $n \times n$. Se observará que estas propiedades se pueden utilizar para reducir mucho el trabajo necesario para evaluar un determinante.

Propiedad 3.2.1

Si cualquier renglón o columna de A es un vector cero, entonces det $A = 0$.

Demostración

Suponga que el renglón i de A contiene sólo ceros. Esto es $a_{ij} = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Entonces, det $A = a_{i1}\mathrm{A}_{i1} + a_{i2}\mathrm{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\mathrm{A}_{in} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$. La misma prueba funciona si la columna j es el vector cero.

EJEMPLO 3.2.6 Si A tiene un renglón o columna de ceros, entonces det $A = 0$

Es fácil verificar que $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Propiedad 3.2.2

Si el renglón i o columna j de A se multiplica por un escalar c, entonces det A se multiplica por c. Es decir, si se denota por B esta nueva matriz, entonces