En la Sección 3.4, estudiaremos el problema de maximizar una función de valores reales sometida a condiciones adicionales, también conocidas como restricciones. Por ejemplo, podríamos desear maximizar $f(x, y, z)$ entre aquellos (x, y, z) restringidos a la esfera unidad, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. En la Sección 3.5 presentamos un teorema técnico (el teorema de la función implícita) útil en el estudio de las restricciones. También resultará útil más adelante cuando abordemos el estudio de las superficies.

3.1 Derivadas parciales iteradas

En el capítulo anterior hemos proporcionado una considerable cantidad de información acerca de la derivada de una aplicación y hemos investigado la geometría asociada con la derivada de funciones con valores reales mediante el uso del gradiente. En esta sección, vamos a estudiar las derivadas de orden superior con el fin de probar la igualdad de las "derivadas parciales segundas cruzadas" de una función. Comenzamos definiendo la terminología necesaria.

Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Recordemos que esto significa que $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$ existen y son continuas. Si estas derivadas, a su vez, tienen derivadas parciales continuas, decimos que f es de ***clase*** C^2, o que es ***dos veces diferenciable con continuidad***. Del mismo modo, si decimos que f es de clase C^3, significa que f tiene derivadas parciales iteradas de tercer orden, y así sucesivamente. He aquí algunos ejemplos de cómo se escriben las derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \text{etc.}$$

Por supuesto, el proceso se puede repetir para las derivadas de tercer orden, y así sucesivamente. Si f es una función solo de x e y, y $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ son diferenciables con continuidad, entonces al tomar las derivadas parciales segundas obtenemos las cuatro funciones

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}.$$

Todas ellas reciben el nombre de ***derivadas parciales iteradas***, mientras que $\partial^2 f/\partial x\, \partial y$ y $\partial^2 f/\partial y\, \partial x$ se denominan ***derivadas parciales cruzadas***.

Ejemplo 1 Hallar las derivadas parciales segundas de $f(x, y) = xy + (x + 2y)^2$.

Solución Las primeras derivadas parciales son: