$$\iint_P xy\,dx\,dy = \iint_{P^*} (u-v)(2u-v)\,du\,dv = \int_{-2}^{0}\int_0^1 (2u^2 - 3vu + v^2)\,du\,dv$$
$$= \int_{-2}^{0} \left[\frac{2}{3}u^3 - \frac{3u^2v}{2} + v^2u\right]_0^1 dv = \int_{-2}^{0}\left[\frac{2}{3} - \frac{3}{2}v + v^2\right] dv$$
$$= \left[\frac{2}{3}v - \frac{3}{4}v^2 + \frac{v^3}{3}\right]_{-2}^{0} = -\left[\frac{2}{3}(-2) - 3 - \frac{8}{3}\right]$$
$$= -\left[-\frac{12}{3} - 3\right] = 7.$$

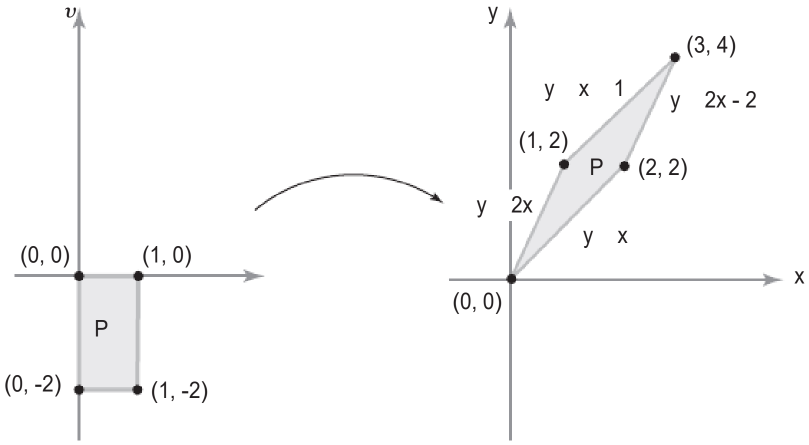

Figura 6.2.6 El efecto de $T(u, v) = (u - v, 2u - v)$ sobre el rect ángulo P^*. ▲

Integrales en coordenadas polares

Consideremos el rectángulo D^* definido por $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a$ en el plano $r\theta$. La transformación T dada por $T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ transforma D^* en el disco D de ecuación $x^2 + y^2 \leq a^2$ en el plano xy. Esta transformación representa el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Sin embargo, T no satisface los requisitos del teorema del cambio variables, porque no es inyectiva en D^*: en particular, T transforma todos los puntos con $r = 0$ en $(0, 0)$ (véase la Figura 6.2.7 y el Ejemplo 3 de la Sección 6.1). No obstante, el teorema del cambio de variables es válido en este caso. Básicamente, la razón de esto es que el conjunto de puntos donde T no es inyectiva está en uno de los lados de D^*, que es la gráfica de una curva suave y, por tanto, es irrelevante para la integración. En resumen, la fórmula es válida cuando T transforma D^* en D de forma inyectiva, excepto posiblemente en los puntos de la frontera de D^*.

Cambio de variables, coordenadas polares

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta \qquad (7)$$