Después, para $\lambda_2 = 2 + \sqrt{5}$ se calcula $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} & -2 \\ -2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$. Observe que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ (lo que debe ser cierto según el teorema 8.4.2). Entonces $|\mathbf{v}_2| = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, de manera que $\mathbf{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$.

Por último,

$$Q = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

$$Q^{\mathsf{T}} = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 & -1-\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$Q^{\mathsf{T}}AQ = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4-2\sqrt{5} & -3-\sqrt{5} \\ -7+3\sqrt{5} & 4-2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 10-14\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 10+6\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 8.4.2 Diagonalización de una matriz simétrica de 3 × 3 usando una matriz ortogonal

Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces A es simétrica y $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-10)$. Se calculan los vectores característicos linealmente independientes correspondientes a $\lambda = 1$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Correspondiente a $\lambda = 10$ se encuentra $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para encontrar Q se aplica el proceso de Gram-Schmidt a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, una base para E_1. Como $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{2}$, se hace $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$. Después

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$