Teorema 9 Teorema de la divergencia de Gauss Sea W una región elemental simétrica en el espacio. Denotamos mediante ∂W la superficie cerrada orientada que limita W. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial suave definido en W. Entonces

$$\iiint_W (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV = \iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

o, alternativamente,

$$\iiint_W (\text{div } \mathbf{F})\, dV = \iint_{\partial W} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS.$$

Demostración Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, entonces, por definición, la divergencia de $\mathbf{F}$ está dada por div $\mathbf{F} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z$, de modo que podemos escribir (utilizando la aditividad de la integral de volumen)

$$\iiint_W \text{div } \mathbf{F}\, dV = \iiint_W \frac{\partial P}{\partial x}\, dV + \iiint_W \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV + \iiint_W \frac{\partial R}{\partial z}\, dV.$$

Por otro lado, la integral de superficie en cuestión es

$$\begin{aligned}\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iint_{\partial W} (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, dS \\ &= \iint_{\partial W} P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{\partial W} Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{\partial W} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS.\end{aligned}$$

El teorema quedará demostrado si probamos la tres igualdades siguientes

$$\iint_{\partial W} P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_W \frac{\partial P}{\partial x}\, dV, \tag{1}$$

$$\iint_{\partial W} Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_W \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV, \tag{2}$$

y

$$\iint_{\partial W} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_W \frac{\partial R}{\partial z}\, dV. \tag{3}$$

Probaremos la Ecuación (3); las otras dos igualdades se pueden probar de forma análoga.

Dado que W es una región elemental simétrica, existe una pareja de funciones

$$z = g_1(x, y), \qquad z = g_2(x, y),$$

cuyo dominio común es una región elemental D en el plano xy, tal que W es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) que satisfacen

$$g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y), \qquad (x, y) \in D.$$