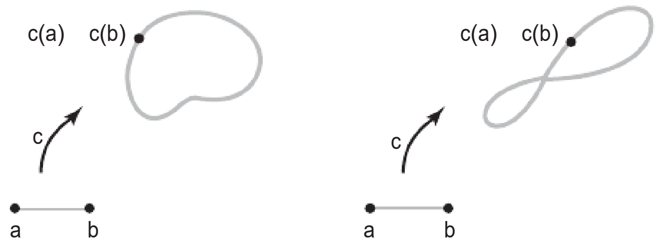

Figura 7.2.8 Una curva cerrada simple (izquierda) y una curva cerrada que no es simple (derecha).

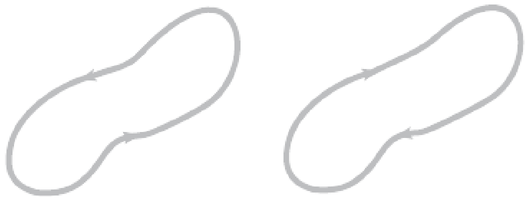

Figura 7.2.9 Dos posibles orientaciones para una curva cerrada simple C.

Integrales de línea e integrales a lo largo de trayectorias sobre curvas simples orientadas y sobre curvas cerradas simples C:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \qquad \text{y} \qquad \int_C f ds = \int_{\mathbf{c}} f\, ds, \qquad (3)$$

donde $\mathbf{c}$ es cualquier parametrización *que conserva la orientación* de C.

En virtud de los Teoremas 1 y 2, estas integrales no dependen de la elección de $\mathbf{c}$ siempre y cuando $\mathbf{c}$ sea inyectiva (excepto posiblemente en los extremos).[5] Lo que queremos destacar aquí es que, *aunque una curva tiene que parametrizarse para poder integrarla a lo largo de la misma, no es necesario incluir la parametrización en la notación de la integral.*

Ejemplo 10 Si $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado en el eje x, entonces I, como curva, tiene dos orientaciones: una que corresponde al movimiento desde a hasta b (de izquierda a derecha) y otra que corresponde al movimiento desde b hasta a (de derecha a izquierda). Si f es una función continua con valores reales en I, denotando I con la primera orientación mediante I^+ e I con la segunda orientación mediante I^-, tenemos

$$\int_{I^+} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx = -\int_{I^-} f(x)\, dx. \qquad \blacktriangle$$

[5]No hemos probado que cualesquiera dos trayectorias inyectivas $\mathbf{c}$ y $\mathbf{p}$ con la misma imagen deben ser reparametrizaciones una de la otra, aunque omitiremos este detalle técnico.