7. (a)
$$\begin{aligned}\text{Forma}_2\,(\alpha\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2) &= \text{Forma}_2\,(\alpha A_1+A_2,\alpha B_1+B_2,\alpha C_1+C_2)\\ &= (\alpha A_1+A_2)\,dy\,dz+(\alpha B_1+B_2)\,dz\;dx+(\alpha C_1+C_2)\;dx\;dy\\ &= \alpha(A_1\,dy\,dz+B_1\,dz\;dx+C_1\;dx\;dy)+(A_2\,dy\,dz+B_2\,dz\;dx+C_2\;dx\;dy)\\ &= \alpha\,\text{Forma}_2\,(\mathbf{V}_1)+\text{Forma}_2(\mathbf{V}_2).\end{aligned}$$

(b)
$$d\omega=\left(\frac{\partial A}{\partial x}\,dx+\frac{\partial A}{\partial y}\,dy+\frac{\partial A}{\partial z}\,dz\right)\wedge dx+A(dx)^2+\left(\frac{\partial B}{\partial x}\,dx+\frac{\partial B}{\partial y}\,dy+\frac{\partial B}{\partial z}\,dz\right)\wedge dy+B(dy)^2$$
$$+\left(\frac{\partial C}{\partial x}\,dx+\frac{\partial C}{\partial y}\,dy+\frac{\partial C}{\partial z}\,dz\right)\wedge dz+C(dz)^2$$

Pero $(\,dx)^2=(\,dy)^2=(\,dz)^2=dx\wedge dx=dy\wedge dy=dz\wedge dz=0$, $dy\wedge dx=-\,dx\wedge dy$, $dz\wedge dy=-\,dy\wedge dz$, y $dx\wedge\,dz=-\,dz\wedge\,dx$. Por tanto,

$$d\omega=\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial y}\right)dz\;dx+\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)dx\;dy=\text{Forma}_2\,(\text{rot}\,\mathbf{V}).$$

9. Una variedad de dimensión 1 orientada es una curva. Su frontera es un par de puntos que puede considerarse como una variedad de dimensión 0. Por tanto, ω es una 0-forma o función, y $\int_{\partial M}d\omega=\omega(b)-\omega(a)$ si la curva M va de a a b. Además, $d\omega$ es una 1-forma $(\partial\omega/\partial x)\;dx+(\partial\omega/\partial y)\,dy$. Por tanto, $\int_M d\omega$ es la integral de línea $\int_M(\partial\omega/\partial x)\,d\omega+(\partial\omega/\,dy)\,dy=\int_M\nabla\omega\cdot d\mathbf{s}$. Entonces, obtenemos el Teorema 3 de la Sección 7.2, $\int_M\nabla\omega\cdot d\mathbf{s}=\omega(b)-\omega(a)$.

11. Poner $\omega=F_1\;dx\;dy+F_2\,dy\,dz+F_3\,dz\;dx$. La integral se convierte en

$$\begin{aligned}\iint_{\partial T}\omega&=\iiint_T d\omega\\ &=\iiint_T\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}+\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)dx\;dy\;dz.\end{aligned}$$

(a) 0.

(b) 40.

13. Consideremos $\omega=x\,dy\,dz+y\,dz\;dx+z\;dx\;dy$. Calcular $d\omega=3\,dx\,dy\,dz$, de modo que $\frac{1}{3}\iint_{\partial R}\omega=\frac{1}{3}\iiint_R d\omega=\iiint_R dx\,dy\,dz=v(R)$.

Ejercicios de repaso del Capítulo 8

1. (a) $2\pi a^2$. (b) 0.

3. 0.

5. (a) $f=x^4/4-x^2y^3$.
(b) $-1/4$.

7. (a) Comprobar que $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$.
(b) $f=3x^2y\cos z+C$.
(c) 0.

9. 23/6.

11. No: $\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})=2\mathbf{a}$.

13. (a) $\nabla f=3ye^{z^2}\,\mathbf{i}+3xe^{z^2}\mathbf{j}+6xyze^{z^2}\,\mathbf{k}$.
(b) 0.
(c) Ambos lados son 0.

15. $8\pi/3$.

17. $\pi a^2/4$.

19. 21.

21. (a) $\mathbf{G}$ es conservativo; $\mathbf{F}$ no lo es.

(b) $\mathbf{G}=\nabla\phi$ si $\phi=(x^4/4)+(y^4/4)-\dfrac{3}{2}x^2y^2+\dfrac{1}{2}z^2+C$, donde C es cualquier constante.

(c) $\displaystyle\int_\alpha\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=0;\int_\alpha\mathbf{G}\cdot d\mathbf{s}=-\frac{1}{2};$
$\displaystyle\int_\beta\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\frac{1}{3};\int_\beta\mathbf{G}\cdot d\mathbf{s}=-\frac{1}{2}.$