24. Suponer $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $0 \leq r_1 < r_2$. Demostrar que existe una función de clase C^1 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbf{x}) = 0$ para $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \geq r_2$; $0 < f(\mathbf{x}) < 1$ para $r_1 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r_2$; y $f(\mathbf{x}) = 1$ para $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r_1$. [SUGERENCIA: aplicar un polinomio cúbico que verifique $g(r_1^2) = 1$ y $g(r_2^2) = g'(r_2^2) = g'(r_1^2) = 0$ a $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ cuando $r_1 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r_2$.]

25. Hallar una aplicación de clase C^1 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que transforme el vector $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ que parte del origen en el vector $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ con origen en $(1, 1, 0)$ y el vector $\mathbf{k}$ que sale de $(1, 1, 0)$ en el vector $\mathbf{k} - \mathbf{i}$ que sale del origen.

26. ¿Qué es incorrecto en el siguiente argumento? Supóngase que $w = f(x, y, z)$ y $z = g(x, y)$. Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Por tanto, $0 = (\partial w/\partial z)(\partial z/\partial x)$, y entonces $\partial w/\partial z = 0$ o $\partial z/\partial x = 0$, lo que, en general, es absurdo.

27. Demostrar las reglas (III) y (IV) del Teorema 10. (SUGERENCIA: utilizar los mismos trucos de sumar y restar que en el caso de una variable y del Teorema 8.)

28. Demostrar que $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable si y solo si cada una de las m componentes $h_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable. SUGERENCIA: utilizar la función de proyección de coordenadas y la regla de la cadena para obtener una de las implicaciones y para obtener la otra tener en cuenta que

$$\left[\frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}h(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}\right]^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} [h_i(\mathbf{x}) - h_i(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}h_i(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)]^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}$$

29. Utilizar la regla de la cadena y la derivación bajo el signo de integral, en concreto,

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x, y)\, dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy,$$

para demostrar que

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(x, y)\, dy = f(x, x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy.$$

30. ¿Para qué enteros $p > 0$ es la función

$$f(x) = \begin{cases} x^p \operatorname{sen}(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

diferenciable? ¿Para qué valores de p es la derivada continua?

31. Supóngase que $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son diferenciables. Demostrar que la función producto $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es diferenciable y que si $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}$ están en $\mathbb{R}^n$, entonces $[\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y} = f(\mathbf{x}_0)\{[\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}\} + \{[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}\}g(\mathbf{x}_0)$.

32. Sean $g(u, v) = (e^u, u + \operatorname{sen} v)$ y $f(x, y, z) = (xy, yz)$. Calcular $\mathbf{D}(g \circ f)$ en $(0, 1, 0)$ utilizando la regla de la cadena.

33. Sean $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{c}(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$. Suponer que $\nabla f(1, 1, \pi, e^6) = (0, 1, 3, -7)$, $\mathbf{c}(\pi) = (1, 1, \pi, e^6)$, y que $\mathbf{c}'(\pi) = (19, 11, 0, 1)$. Hallar $\dfrac{d(f \circ \mathbf{c})}{dt}$ cuando $t = \pi$.

34. Supóngase que $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y que $g\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.

(a) ¿Qué condición deben cumplir los números n, m, p y q para que $f \circ g$ tenga sentido?

(b) ¿Qué condición deben cumplir los números n, m, p y q for $g \circ f$ tenga sentido?

(c) ¿Cuándo tiene sentido $f \circ f$?

35. Si $z = f(x - y)$, utilizar la regla de la cadena para demostrar que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

36. Sean $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = uv$, $y = u \cos v$, $z = u \operatorname{sen} v$. Utilizar la regla de la cadena para hallar $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ cuando $(u, v) = (1, 0)$.