$$= \int_a^b [P(x, \phi_2(x)) - P(x, \phi_1(x))]\, dx.$$

Por otra parte, como C_1^+ puede parametrizarse mediante $x \mapsto (x, \phi_1(x))$, $a \leq x \leq b$ y C_2^+ puede parametrizarse mediante $x \mapsto (x, \phi_2(x))$, $a \leq x \leq b$, tenemos

$$\int_a^b P(x, \phi_1(x))\, dx = \int_{C_1^+} P(x, y)\, dx$$

y

$$\int_a^b P(x, \phi_2(x))\ dx = \int_{C_2^+} P(x, y)\ dx.$$

Entonces, invirtiendo las orientaciones,

$$-\int_a^b P(x, \phi_2(x))\, dx = \int_{C_2^-} P(x, y)\, dx.$$

Por tanto,

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{C_1^+} P\, dx - \int_{C_2^-} P\, dx.$$

Como x es constante en B_2^+ y B_1^-, tenemos

$$\int_{B_2^+} P\, dx = 0 = \int_{B_1^-} P\, dx,$$

de modo que

$$\int_{C^+} P\, dx = \int_{C_1^+} P\, dx + \int_{B_2^+} P\, dx + \int_{C_2^-} P\, dx + \int_{B_1^-} P\, dx = \int_{C_1^+} P\, dx + \int_{C_2^-} P\, dx.$$

Por tanto,

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{C_1^+} P\, dx - \int_{C_2^-} P\, dx = -\int_{C^+} P\, dx. \qquad \blacksquare$$

A continuación demostramos un lema análogo intercambiando los papeles de x e y.

Lema 2 Sea D una región x-simple con frontera C. Entonces, si $Q\colon D \to \mathbb{R}$ es C^1,

$$\int_{C^+} Q\, dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy.$$

El signo negativo no aparece aquí, porque intercambiar los papeles de x e y se corresponde con un cambio de orientación en el plano.