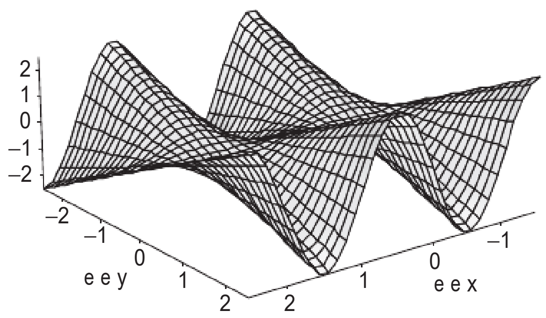

Figura 3.R.3 Gráfica de $z = y \operatorname{sen}(\pi x)$.

14. En la Figura 3.R.4 se muestra una gráfica de la función $z = \operatorname{sen}(\pi x)/(1 + y^2)$. Verificar que esta función tiene máximos y mínimos alternados sobre el eje x y ningún otro punto crítico.

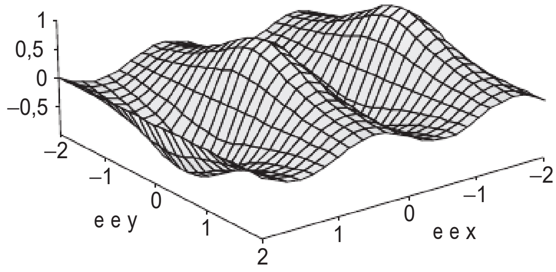

Figura 3.R.4 Gráfica de $z = \operatorname{sen}(\pi x)/(1 + y^2)$.

En los Ejercicios 15 a 20, hallar los extremos de las funciones dadas sujetas a las restricciones indicadas.

15. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$, sujeta a $x^2 + y^2 = 1$

16. $f(x, y) = xy - y^2$, sujeta a $x^2 + y^2 = 1$

17. $f(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$, sujeta a $x^2 + y^2 = 1$

18. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, sujeta a $x + y = 1$

19. $z = xy$, sujeta a la condición $x + y = 1$

20. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, sujeta a la condición $x + y = \pi/4$

21. Determinar los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ más próximos al origen.

22. Utilizar el teorema de la función implícita para calcular dy/dx para

(a) $x/y = 10$

(b) $x^3 - \operatorname{sen} y + y^4 = 4$

(c) $e^{x+y^2} + y^3 = 0$

23. Hallar la distancia más corta desde el punto $(0, b)$ a la parábola $x^2 - 4y = 0$. Resolver este problema utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange y también sin emplear el método de Lagrange.

24. Determinar todos los valores de k para los que la función $g(x, y, z) = x^2 + kxy + kxz + ky^2 + kz^2$ tiene un mínimo local en $(0, 0, 0)$.

25. Hallar y clasificar todos los puntos críticos de la función $g(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + y^3 + 3x^2 - \frac{3}{2}y^2 + 20$.

26. Resolver los siguientes problemas geométricos usando el método de Lagrange.

(a) Hallar la distancia más corta desde el punto (a_1, a_2, a_3) en $\mathbb{R}^3$ al plano cuya ecuación está dada por $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$, donde $(b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$.

(b) Hallar el punto más próximo al origen que está sobre la recta intersección de los dos planos $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ y $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$.

(c) Demostrar que el volumen del paralelepípedo rectangular más grande que se puede inscribir en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

es $8abc/3\sqrt{3}$.

27. Una partícula se mueve en un potencial $V(x, y) = x^3 - y^2 + x^2 + 3xy$. Determinar si $(0, 0)$ es un punto de equilibrio estable; es decir, si $(0, 0)$ es o no es un punto de mínimo local estricto de V.

28. Estudiar la naturaleza de la función $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ cerca de $(0, 0)$. Demostrar que el punto $(0, 0)$ es un punto crítico degenerado; es decir, $D = 0$. Esta superficie se denomina *silla de mono*.

29. Determinar el máximo de $f(x, y) = xy$ sobre la curva $(x + 1)^2 + y^2 = 1$.

30. Hallar el máximo y el mínimo de $f(x, y) = xy - y + x - 1$ en el conjunto $x^2 + y^2 \leq 2$.