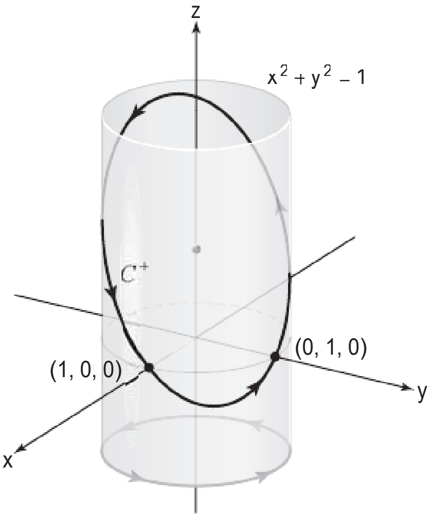

Figura 8.2.2 La curva C es la intersección del cilindro $x^2+y^2=1$ y del plano $x+y+z=1$.

8.2.2). Consideramos el campo $\mathbf{F}=-y^3\mathbf{i}+x^3\mathbf{j}-z^3\mathbf{k}$, cuyo rotacional es $\nabla\times\mathbf{F}=(3x^2+3y^2)\mathbf{k}$. Entonces, por el teorema de Stokes, la integral de línea es igual a la integral de superficie

$$\iint_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}.$$

Pero $\nabla\times\mathbf{F}$ solo tiene componente $\mathbf{k}$. Por tanto, según la fórmula (1), tenemos

$$\iint_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}=\iint_D(3x^2+3y^2)\ dx\,dy.$$

Esta integral puede evaluarse cambiando a coordenadas polares. Haciendo esto, obtenemos:

$$3\iint_D(x^2+y^2)\ dx\,dy=3\int_0^1\int_0^{2\pi}r^2\cdot r\,d\theta\,dr=6\pi\int_0^1 r^3\,dr=\frac{6\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}.$$

Comprobemos *directamente* este resultado evaluando la integral de línea

$$\int_C -y^3\,dx+x^3\,dy-z^3\,dz.$$

Podemos parametrizar la curva ∂D mediante las ecuaciones $x=\cos t$, $y=\operatorname{sen} t$, $z=0$, $0\le t\le 2\pi$.

Por tanto, la curva C estará parametrizada por

$$x=\cos t,\qquad y=\operatorname{sen} t,\qquad z=1-\operatorname{sen} t-\cos t,\qquad 0\le t\le 2\pi.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_C -y^3\,dx+x^3\,dy-z^3\,dz&=\int_0^{2\pi}[(-\operatorname{sen}^3 t)(-\operatorname{sen} t)+(\cos^3 t)(\cos t)\\&\qquad-(1-\operatorname{sen} t-\cos t)^3(-\cos t+\operatorname{sen} t)]\ dt\\&=\int_0^{2\pi}(\cos^4 t+\operatorname{sen}^4 t)\ dt-\int_0^{2\pi}(1-\operatorname{sen} t-\cos t)^3(-\cos t+\operatorname{sen} t)\ dt.\end{aligned}$$