(b) Hallar la fuerza que actúa sobre la partícula en el instante $t = \pi/4$.

(c) Escribir una expresión (en términos de una integral) para la longitud de arco de la curva $\mathbf{c}(t)$ entre $t = 0$ y $t = \pi/4$.

35. (a) Sea $g(x, y, z) = x^3 + 5yz + z^2$ y sea $h(u)$ una función de una variable tal que $h'(1) = 1/2$. Sea $f = h \circ g$. Partiendo del punto (1, 0, 0), ¿en qué direcciones está cambiando f al 50 % de su tasa máxima de variación?

(b) Para $g(x,y,z) = x^3 + 5yz + z^2$, calcular $\mathbf{F} = \nabla g$, el gradiente de g, y comprobar directamente que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ en cada punto (x,y,z).

36. (a) Escribir en forma paramétrica la curva que es la intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e $y = 1$.

(b) Hallar la ecuación de la recta tangente a esta curva en (1, 1, 1).

(c) Escribir una expresión integral para la longitud de arco de esta curva. ¿Cuál es el valor de esta integral?

37. En meteorología, el ***gradiente negativo de presiones*** $\mathbf{G}$ es una magnitud vectorial que apunta desde la regiones de alta presión hacia las regiones de baja presión, normal a las líneas de presión constante (***isobaras***).

(a) En un sistema de coordenadas xy,

$$\mathbf{G} = -\frac{\partial P}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{j}.$$

Escribir una fórmula para la magnitud del gradiente negativo de presiones.

(b) Si el gradiente horizontal de presión fuera la única fuerza horizontal que actúa sobre el aire, el viento debería soplar directamente a través de las isobaras en la dirección de $\mathbf{G}$, y para una determinada masa de aire, con aceleración proporcional a la magnitud de $\mathbf{G}$. Explicar esto usando la segunda ley de Newton.

(c) A causa de la rotación de la Tierra, el viento no soplará en la dirección sugerida en el apartado (b). En su lugar, obedece la ***ley de Buys–Ballot***, que dice: "Si en el hemisferio norte, estamos de pie de espaldas al viento, las altas presiones se encuentran a nuestra derecha y las bajas presiones se encuentran a la izquierda." Dibujar una figura e introducir las coordenadas xy de modo que $\mathbf{G}$ apunte en la dirección apropiada.

(d) Enunciar e ilustrar gráficamente la ley de Buys–Ballot para el hemisferio sur, en el que la orientación de las altas y bajas presiones se invierte.

38. Una esfera de masa m, radio a y densidad uniforme tiene un potencial u y una fuerza gravitatoria $\mathbf{F}$ a una distancia r del centro (0, 0, 0), dados por

$$u = \frac{3m}{2a} - \frac{mr^2}{2a^3}, \qquad \mathbf{F} = -\frac{m}{a^3}\mathbf{r} \qquad (r \leq a);$$
$$u = \frac{m}{r}, \qquad \mathbf{F} = -\frac{m}{r^3}\mathbf{r} \qquad (r > a).$$

donde $r = \|\mathbf{r}\|, \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

(a) Verificar que $\mathbf{F} = \nabla u$ en el interior y el exterior de la esfera.

(b) Comprobar que u satisface la ecuación de Poisson: $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2 =$ constante dentro de la esfera.

(c) Demostrar que u satisface la ecuación de Laplace: $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2 = 0$ fuera de la esfera.

39. Una hélice circular que está sobre el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ con un desplazamiento vertical ρ se puede describir paramétricamente mediante

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\operatorname{sen}\theta, \quad z = \rho\theta, \quad \theta \geq 0.$$

Una partícula se desliza bajo la acción de la gravedad (que actúa paralela el eje z) sin rozamiento a lo largo de la hélice. Si la partícula parte de una altura $z_0 > 0$, entonces cuando alcanza la altura z a lo largo de la hélice, su rapidez está dada por

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(z_0 - z)2g},$$

donde s es la longitud de arco a lo largo de la hélice, g es la constante de la gravedad, t es el tiempo y $0 \leq z \leq z_0$.

(a) Hallar la longitud de la parte de la hélice que se encuentra entre los planos $z = z_0$ y $z = z_1, 0 \leq z_1 < z_0$.

(b) Calcular el tiempo T_0 que tarda la partícula en alcanzar el plano $z = 0$.

40. Una esfera de radio igual a 10 centímetros (cm) con centro en (0, 0, 0) gira alrededor del eje z