Ejemplo 3 Demostrar que en las proximidades del punto $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$, podemos resolver

$$\begin{aligned} xu + yvu^2 &= 2 \\ xu^3 + y^2v^4 &= 2 \end{aligned}$$

de forma única para obtener u y v como funciones de x e y. Calcular $\partial u/\partial x$ en el punto (1, 1).

Solución Para comprobar que se puede resolver, formamos las ecuaciones

$$\begin{aligned} F_1(x, y, u, v) &= xu + yvu^2 - 2 \\ F_2(x, y, u, v) &= xu^3 + y^2v^4 - 2 \end{aligned}$$

y el determinante

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad \text{en} \qquad (1, 1, 1, 1) \\ &= \begin{vmatrix} x + 2yuv & yu^2 \\ 3u^2x & 4y^2v^3 \end{vmatrix} \qquad \text{en} \qquad (1, 1, 1, 1) \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9. \end{aligned}$$

Dado que $\Delta \neq 0$, el teorema general de la función implícita nos asegura la resolubilidad. Para hallar $\partial u/\partial x$, derivamos implícitamente las ecuaciones dadas en x utilizando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} x\frac{\partial u}{\partial x} + u + y\frac{\partial v}{\partial x}u^2 + 2yvu\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ 3xu^2\frac{\partial u}{\partial x} + u^3 + 4y^2v^3\frac{\partial v}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Haciendo $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ tenemos

$$\begin{aligned} 3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -1 \\ 3\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial v}{\partial x} &= -1. \end{aligned}$$

Despejamos $\partial u/\partial x$ multiplicando la primera ecuación por 4 y restando se tiene $\partial u/\partial x = -\frac{1}{3}$. ▲

Teorema de la función inversa

Un caso particular del teorema general de la función implícita es el *teorema de la función inversa.* Ahora vamos a intentar resolver las n ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= y_1 \\ &\dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= y_n \end{aligned}\right\} \tag{4}$$