Solución Sean $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Está claro que el triángulo cuyos vértices son los extremos de los vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ tiene el mismo área que el triángulo con vértices en $\mathbf{0}, \mathbf{b} - \mathbf{a}$ y $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ (Figura 1.3.4). De hecho, este último es simplemente una traslación del primer triángulo. Puesto que el área del triángulo trasladado es la mitad del área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son $\mathbf{b} - \mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{c} - \mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, tenemos que el área del triángulo con vértices en (1, 1), (0, 2) y (3, 2) es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2},$$

es decir, 3/2. ▲

Existe una interpretación de los determinantes de matrices 3×3 como volúmenes que es análoga a la interpretación de los determinantes de matrices 2×2 como áreas.

Geometría de los determinantes 3×3 El valor absoluto del determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

es el volumen del paralelepípedo cuyos lados adyacentes son los vectores

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}.$$

Para probar la afirmación del recuadro anterior, vamos a fijarnos en la Figura 1.3.5. Así, vemos que la longitud del producto vectorial, a saber, $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$, es el área del paralelogramo con lados adyacentes $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Además, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\| \cos\psi$, donde ψ es el ángulo que forma $\mathbf{c}$ con la normal al plano generado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Puesto que el volumen

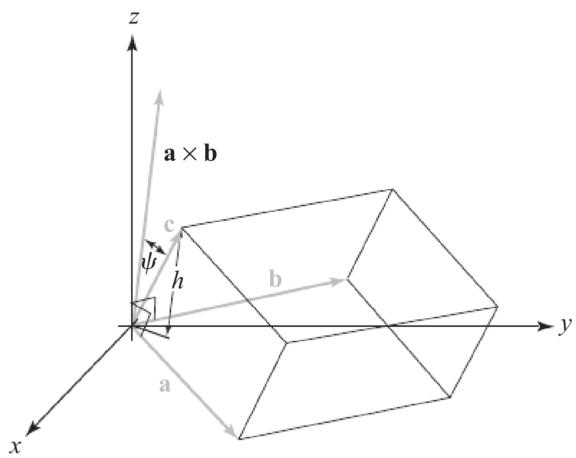

Figura 1.3.5 El volumen del paralelepípedo generado por $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ es el valor absoluto del determinante de la matriz 3×3 cuyas filas son $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.