7. Siga las instrucciones del problema 6 de la sección 8.1 de MATLAB, incisos *b*) a *d*), pero reemplace A^{-1} con A^2 e `inv(A)` con `A*A`.

8. Para cada matriz A en los problemas 10, 12, 13 y 22 de esta sección y una matriz aleatoria A de 4×4, genere una matriz aleatoria invertible C del mismo tamaño de A y forme $B = CAC^{-1}$. Ignore el orden en que aparecen los valores (y considere los números pequeños como cero) para comparar los valores característicos de A, `eig(A)`, con los valores característicos de B, `eig(B)`. Describa cualquier conclusión a la que pueda llegar partiendo de estas comparaciones.

9. Se ha visto que los valores característicos de una matriz aleatoria real de $n \times n$ puede ser cualquier número real o complejo siempre que los números complejos ocurran en pares conjugados complejos. Se examinarán algunas categorías especiales de matrices reales para ver si estas clases tienen restricciones especiales sobre los tipos posibles de valores característicos (debido a las consideraciones de errores de redondeo suponga que los números pequeños son cero).

a) Genere una matriz aleatoria real *simétrica* de $n \times n$ para algún valor de n (sea B una matriz aleatoria de $n \times n$. Sea `A = triu(B)+triu(B)'`). Encuentre `eig(A)`. Repita para otras cuatro matrices simétricas A (utilice más de un valor de n). Concluya una propiedad de los valores característicos de las matrices simétricas.

b) Una clase especial de matrices simétricas reales es la de las matrices C formadas por $C = AA^{\top}$ para cualquier matriz A. Genere cinco matrices de este tipo (no utilice matrices del mismo tamaño). Encuentre `eig(C)` para cada una. Proporcione una conclusión sobre una propiedad de los valores característicos de las matrices de la forma $AA^{\top}$.

10. Se vio que una matriz tiene valores característicos distintos, por lo que los vectores característicos son linealmente independientes. Una clase de vectores linealmente independientes es la clase de los vectores ortogonales. Genere una matriz aleatoria *simétrica* real A igual que en el problema 9 de MATLAB 8.1. Encuentre `[V,D] = eig(A)` y verifique que los valores característicos son distintos y que los vectores característicos son ortogonales. Repita para otras cuatro matrices A (utilice tamaños diferentes).

11. **Teoría de gráficas** Para una gráfica de vértices y aristas, se define la **matriz de adyacencia** A de la gráfica como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ y } j \text{ están conectados por una arista} \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Se utiliza la convención de que $a_{ij} = 0$.

El **número cromático** de la gráfica se define como el número mínimo de colores necesarios para colorear los vértices de la gráfica de modo que dos vértices adyacentes no tengan asignado el mismo color. Los **vértices** son **adyacentes** si están conectados por una arista.

Número cromático

Vértices adyacentes

La matriz de adyacencia de una gráfica es simétrica (¿por qué?); entonces, los valores característicos serán valores reales (vea la sección 8.3 o el problema 9 de esta sección de MATLAB) y, por lo tanto, se pueden ordenar de mayor a menor (en este caso se ordena como se haría con los números sobre la recta real; *no* se ordena sólo por magnitud). Sea λ_1 el valor característico más grande y sea λ_n el valor característico más pequeño. Resultará que λ_1 es positivo y que λ_n es negativo.

Suponga que la **gráfica** es **conexa**; es decir, existe una trayectoria de cada vértice a cualquier otro, quizá a través de otros vértices. Sea χ el número cromático. Entonces se puede demostrar que

Gráfica conexa

$$1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \le \chi \le 1 + \lambda_1$$