donde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ son dos puntos cualesquiera de l_1 y l_2, respectivamente, y $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son las direcciones de l_1 y l_2. [SUGERENCIA: Considere el plano que contiene a l_2 y que es paralelo a l_1. Demuestre que el vector $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)/\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|$ es un vector unitario normal a este plano; y proyecte $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ sobre esta dirección normal.]

(b) Hallar la distancia entre la recta l_1 determinada por los puntos $(-1, -1, 1)$ y $(0, 0, 0)$ y la recta l_2 determinada por los puntos $(0, -2, 0)$ y $(2, 0, 5)$.

26. Demostrar que dos planos dados por las ecuaciones $Ax+By+Cz+D_1 = 0$ y $Ax+By+Cz+D_2 = 0$ son paralelos y que la distancia entre ellos es

$$\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

27. (a) Demostrar que el área del triángulo en el plano con los vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

(b) Hallar el área del triángulo con vértices $(1, 2), (0, 1), (-1, 1)$.

28. Transformar los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas y esféricas y dibujarlos:

(a) $(0, 3, 4)$
(b) $(-\sqrt{2}, 1, 0)$
(c) $(0, 0, 0)$
(d) $(-1, 0, 1)$
(e) $(-2\sqrt{3}, -2, 3)$

29. Transformar los siguientes puntos dados en coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas y esféricas y dibujarlos:

(a) $(1, \pi/4, 1)$
(b) $(3, \pi/6, -4)$
(c) $(0, \pi/4, 1)$
(d) $(2, -\pi/2, 1)$
(e) $(-2, -\pi/2, 1)$

30. Transformar los siguientes puntos dados en coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas y cilíndricas, y dibujarlos:

(a) $(1, \pi/2, \pi)$
(b) $(2, -\pi/2, \pi/6)$
(c) $(0, \pi/8, \pi/35)$
(d) $(2, -\pi/2, -\pi)$
(e) $(-1, \pi, \pi/6)$

31. Reescribir la ecuación $z = x^2 - y^2$ utilizando coordenadas cilíndricas y esféricas.

32. Utilizando coordenadas esféricas, demostrar que

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{u}\|}\right),$$

donde $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Proporcionar una interpretación geométrica.

33. Verificar la desigualdades de Cauchy–Schwarz y triangular para

$$\mathbf{x} = (3, 2, 1, 0) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{y} = (1, 1, 1, 2).$$

34. Multiplicar las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

¿Es cierto que $AB = BA$?

35. (a) Demostrar que si A y B son matrices $n \times n$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}).$$

(b) ¿Qué implica la igualdad del apartado (a) respecto a la relación entre la composición de las aplicaciones $\mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x}, \mathbf{y} \mapsto A\mathbf{y}$, y la multiplicación de matrices?

36. Hallar el volumen del paralelepípedo generado por los vectores

$$(1, 0, 1), \quad (1, 1, 1) \quad \text{y} \quad (-3, 2, 0).$$

37. (Para estudiantes con conocimientos de álgebra lineal.) Comprobar que una aplicación lineal T de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ está determinada por una matriz $n \times n$.

38. Hallar la ecuación del plano que contiene el punto $(3, -1, 2)$ y la recta de ecuación $\mathbf{v} = (2, -1, 0) + t(2, 3, 0)$.

39. El trabajo W realizado al mover un objeto desde (0, 0) a (7, 2) sometido a una fuerza constante $\mathbf{F}$ es $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$, donde $\mathbf{r}$ es el vector con su extremo en (7, 2) y su inicio en (0, 0). Las unidades son metros y kilogramos.

(a) Sea la fuerza $\mathbf{F} = 10 \cos \theta\mathbf{i} + 10 \operatorname{sen} \theta\mathbf{j}$. Hallar W en función de θ.