Antes de continuar debe observarse que det $Q = -1$. Para que Q sea una matriz de rotación es necesario que det $Q = 1$. Esto se logra fácilmente invirtiendo los vectores característicos. Así, se hace $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 4$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ahora det $Q = 1$. Entonces $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, y (8.5.17) se puede expresar como $D\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 4$ o

$$6x'^2 + 4y'^2 = 4 \qquad \textbf{(8.5.18)}$$

donde

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{pmatrix}$$

Reescribiendo (8.5.18) se obtiene $\dfrac{x'^2}{\left(\frac{4}{6}\right)} + \dfrac{y'^2}{1} = 1$, que es la ecuación (8.5.13) con $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ y $b = 1$.

Más aún, como $\frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ y $\frac{-1}{\sqrt{2}} < 0$, del problema 45, se tiene $\theta = 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{3} =$ 315°. Por lo tanto, (8.5.17) es la ecuación de una elipse estándar rotada un ángulo de 315° (o 45° en el sentido de las manecillas del reloj) (vea la figura 8.3).

EJEMPLO 8.5.4 Una sección cónica degenerada

Identifique la sección cónica cuya ecuación es

$$-5x^2 + 2xy - 5y^2 = 4 \qquad \textbf{(8.5.19)}$$

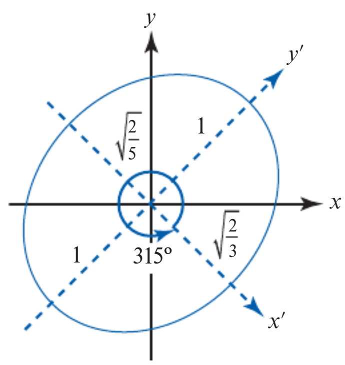

Figura 8.3
La elipse $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 4$.

SOLUCIÓN ► Haciendo referencia al ejemplo 8.5.3, la ecuación (8.5.19) se puede volver a escribir como

$$-6x'^2 - 4y'^2 = 4 \qquad \textbf{(8.5.20)}$$

Como para cualesquiera números reales x' y y', $-6x'^2 - 4y'^2 \leq 0$, se ve que no existen números reales x y y que satisfagan (8.5.19). La sección cónica definida por (8.5.19) se denomina **sección cónica degenerada**.

Existe una manera sencilla de identificar la sección cónica definida por

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \qquad \textbf{(8.5.21)}$$

Si $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$, entonces la ecuación característica de A es

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + \frac{(ac - b^2)}{4} = 0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

Esto significa que $\lambda_1\lambda_2 = ac - \frac{b^2}{4}$. Pero como se ha visto, la ecuación (8.5.21) se puede volver a escribir como

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d \qquad \textbf{(8.5.22)}$$

Si λ_1 y λ_2 tienen el mismo signo, entonces (8.5.21) define una elipse (o un círculo) o una cónica degenerada como en los ejemplos 8.5.3 y 8.5.4. Si λ_1 y λ_2 tienen signo contrario, entonces (8.5.21) es la