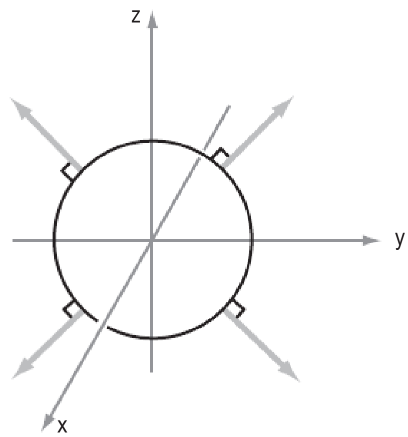

Figura 7.2.3 Campo vectorial $\mathbf{F}$ normal a una circunferencia en el plano *yz*.

▲

Ejemplo 6 Si consideramos el campo y la curva del Ejemplo 4, vemos que el trabajo realizado por el campo es $-\frac{1}{2}$, una cantidad negativa. Esto quiere decir que el campo se opone al movimiento a lo largo de la trayectoria. ▲

Reparametrizaciones

La integral de línea $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ no solo depende del campo $\mathbf{F}$ sino también de la trayectoria $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$. En general, si $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ son dos trayectorias diferentes en $\mathbb{R}^3$, $\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. Por otro lado, veremos que se cumple que $\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \pm \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ para todo campo vectorial $\mathbf{F}$ si $\mathbf{c}_1$ es lo que denominamos una ***reparametrización*** de $\mathbf{c}_2$; en otras palabras, esto significa que $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ son descripciones diferentes de la misma curva geométrica.

Definición Sea h: $I \to I_1$ una función de valores reales de clase C^1 que es una aplicación inyectiva de un intervalo $I = [a, b]$ en otro intervalo $I_1 = [a_1, b_1]$. Sea $\mathbf{c}$: $I_1 \to \mathbb{R}^3$ una trayectoria a trozos C^1. Diremos entonces que la composición

$$\mathbf{p} = \mathbf{c} \circ h\colon I \to \mathbb{R}^3$$

es una ***reparametrización*** de $\mathbf{c}$.

Esto significa que $\mathbf{p}(t) = \mathbf{c}(h(t))$, de modo que h cambia la variable; alternativamente, podemos pensar que h cambia la rapidez con la que se mueve un punto a lo largo de la trayectoria. En efecto, observe que $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{c}'(h(t))h'(t)$, de manera que el vector velocidad para $\mathbf{p}$ es igual que para $\mathbf{c}$ pero multiplicado por el factor escalar $h'(t)$.

Está implícito en la definición que h debe enviar los puntos extremos a puntos extremos; es decir, bien $h(a) = a_1$ y $h(b) = b_1$, o bien $h(a) = b_1$ y $h(b) = a_1$. Distinguimos entonces dos tipos de reparametrización. Si $\mathbf{c} \circ h$ es una reparametrización de $\mathbf{c}$, entonces o bien