definida negativa, pero su determinante es distinto de cero, entonces es de ***tipo silla*** (ni un punto de máximo ni de mínimo). Si el determinante de la forma hessiana es cero, se dice que es de ***tipo degenerado*** y no se puede decir nada acerca de la naturaleza del punto crítico sin realizar un análisis en mayor profundidad. La Figura 3.3.5 ilustra un criterio simple para comprobar si una matriz simétrica es definida positiva. En el caso de dos variables, los criterios para los puntos de máximo y de mínimo se pueden simplificar de forma considerable.

Criterio de la derivada segunda (dos variables)

El Lema 2 y el Teorema 5 implican el siguiente resultado:

Teorema 6 Criterio de la segunda derivada para los puntos de máximo y de mínimo de funciones de dos variables Sea $f(x, y)$ de clase C^2 en un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$. Un punto (x_0, y_0) es un punto de mínimo local (estricto) de f si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(I) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

(II) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$

(III) $D = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0$ en (x_0, y_0)

(D es el ***discriminante*** de la forma cuadrática hessiana.) Si en (II) tenemos <0 en lugar de >0 y la condición de (III) no cambia, entonces tenemos un punto de máximo local (estricto).

Si $D < 0$ (por ejemplo, si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = 0$ o $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0$, pero $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq 0$), entonces (x_0, y_0) es de ***tipo silla*** (ni un punto de máximo ni de mínimo).

Ejemplo 6 Clasificar los puntos críticos de la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2$.

Solución Como en el Ejemplo 5, tenemos que $f(0, 0) = 0$, el origen es el único punto crítico y la forma cuadrática hessiana es

$$Hf(\mathbf{0})(\mathbf{h}) = h_1^2 - 2h_1h_2 + 2h_2^2 = (h_1 - h_2)^2 + h_2^2,$$

la cual es claramente definida positiva. Por tanto, f tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$. Alternativamente, podemos aplicar el Teorema 6. En $(0, 0)$, $\partial^2 f/\partial x^2 = 2, \partial^2 f/\partial y^2 = 4$ y $\partial^2 f/\partial x\, \partial y = -2$. Las condiciones de (I), (II) y (III) se cumplen, por lo que f tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$. ▲