5

Integrales dobles y triples

Es al propio Arquímedes (ca. 225 a.C.) a quien debemos la aproximación más cercana a la integración real que podemos encontrar entre los griegos. Su primer avance notable en esta dirección tiene que ver con su demostración de que el área de un segmento parabólico es cuatro tercios la del triángulo que tiene la misma base y el mismo vértice, o dos tercios la del paralelogramo circunscrito.

—D. E. Smith,
History of Mathematics

En este capítulo y en el siguiente estudiaremos la integración de funciones reales de varias variables; en este capítulo se abordan las integrales de funciones de dos y tres variables, o *integrales dobles* y *triples*. La integral doble tiene una interpretación geométrica básica como volumen, y se puede definir rigurosamente como límite de sumas aproximantes. Vamos a presentar varias técnicas para evaluar las integrales dobles y triples y también consideraremos algunas aplicaciones.

5.1 Introducción

En esta sección abordaremos algunos aspectos geométricos de la integral doble, aplazando hasta la Sección 5.2 una exposición más rigurosa en términos de sumas de Riemann.

Integrales dobles como volúmenes

Consideremos una función continua de dos variables $f\colon R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuyo dominio R es un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados. El rectángulo R se puede describir en términos de dos intervalos cerrados $[a, b]$ y $[c, d]$, que representan los lados de R a lo largo de los ejes x e y, respectivamente, como en la Figura 5.1.1. En este caso, decimos que R es el ***producto cartesiano*** de $[a, b]$ y $[c, d]$ y escribimos $R = [a, b] \times [c, d]$.

Supongamos que $f(x, y) \geq 0$ en R, de modo que la gráfica de $z = f(x, y)$ es una superficie que queda por encima del rectángulo R. Esta