iv) Suponga que $\sum_{\mathbf{v}\in M(T)} \alpha_{\mathbf{v}}\mathbf{v} = 0$, donde sólo un número finito de las $\alpha_{\mathbf{v}}$ son diferentes de cero. Se denotan estos escalares por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y a los vectores correspondientes por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Para cada i, $i = 1, 2, \ldots, n$ existe un conjunto $A_i \in T$ tal que $\mathbf{v}_i \in A_i$ (porque cada $\mathbf{v}_i$ está en $M(T)$ y $M(T)$ es la unión de los conjuntos en T). Pero T es totalmente ordenado, de manera que uno de los conjuntos A_i contiene a todos los demás (vea el problema 3 de esta sección); denominados A_k a este conjunto (se puede llegar a esta conclusión sólo porque $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es finito). Así, $A_i \subseteq A_k$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in A_k$. Como A_k es linealmente independiente y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mathbf{v}_i = 0$, se deduce que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Entonces $M(T)$ es linealmente independiente.

v) S es no vacío porque $\varnothing \in S$ ($\varnothing$ denota el conjunto vacío). Se ha demostrado que toda cadena T en S tiene una cota superior, $M(T)$, que está en S. Por el lema de Zorn, S tiene un elemento maximal. Pero S consiste en todos los subconjuntos linealmente independientes de V. El elemento maximal $B \in S$ es, por lo tanto, un subconjunto linealmente independiente maximal de V. Entonces, por el teorema 1, B es una base para V.

PROBLEMAS 5.8

1. Demuestre que todo conjunto linealmente independiente en un espacio vectorial V se puede expandir a una base.

2. Demuestre que todo conjunto generador en un espacio vectorial V tiene un subconjunto que es una base.

3. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n conjuntos en una cadena T. Demuestre que uno de los conjuntos contiene a todos los demás. [***Sugerencia:*** Como T es una cadena, $A_1 \subseteq A_2$ o bien $A_2 \subseteq A_1$. Entonces el resultado es cierto si $n = 2$. Complete la prueba por inducción matemática.]

Ejercicios de repaso

De los ejercicios 1 al 14 determine si el conjunto dado es un espacio vectorial. Si lo es, determine su dimensión. Si es finita, encuentre una base para él.

1. Los vectores (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen $\frac{x-2}{-3} = \frac{z+1}{1}$; $y = 4$.
2. Los vectores (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen $x + 2y - z = 0$.
3. Los vectores (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen $x + 2y - z \leq 0$.
4. Los vectores $(x, y, z, w)^{\top}$ en $\mathbb{R}^4$ que satisfacen $x - 2z + 2w = 0$.
5. Los vectores (x, y, z, w) en $\mathbb{R}^4$ que satisfacen $x + y + z + w = 0$.
6. Los vectores en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen $x = 3t$, $y = -2t$, $z = -t$.
7. Los vectores $(x, y, z, w)^{\top}$ en $\mathbb{R}^4$ que satisfacen $x - y + z - 3w + 5 =$
8. El conjunto de matrices triangulares superiores de $n \times n$ bajo las operaciones de suma de matrices y multiplicación por un escalar.
9. El conjunto de polinomios de grado menor o igual a 5.