Nota

A la factorización *LUP* también se le conoce como factorización *LU* con pivoteo parcial.

[***Observación:*** Si se elige una P diferente se obtienen matrices distintas.] Si consideramos el ejemplo 2.7.3, sea

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (que corresponde a la permutación de los dos primeros renglones en el primer paso).

Se debe verificar que

$$PA = L_1U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Solución de un sistema usando la factorización $PA = LU$

Considere el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y suponga que $PA = LU$. Entonces

$$PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$
$$LU\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

y se puede resolver este sistema de la misma manera que en el ejemplo 2.7.2.

EJEMPLO 2.7.4 Solución de un sistema usando la factorización $PA = LU$

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 9 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -6 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN ► Se puede escribir este sistema como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Entonces, del ejemplo 2.7.3

$$LU\mathbf{x} = PA\mathbf{x} = P\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Se busca una $\mathbf{y}$ tal que $L\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$. Es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Entonces $y_1 = -6$, $y_2 = 7$ y $2y_1 + y_3 = 9$, por lo que $y_3 = 21$ y $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix}$