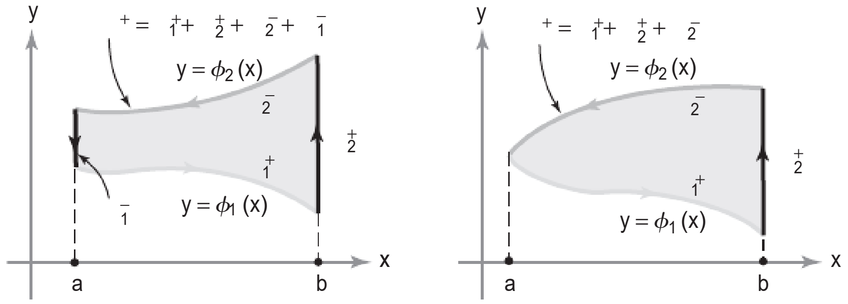

Figura 8.1.2 Dos ejemplos que muestran cómo descomponer la frontera positivamente orientada de una región y-simple D en varias componentes orientadas.

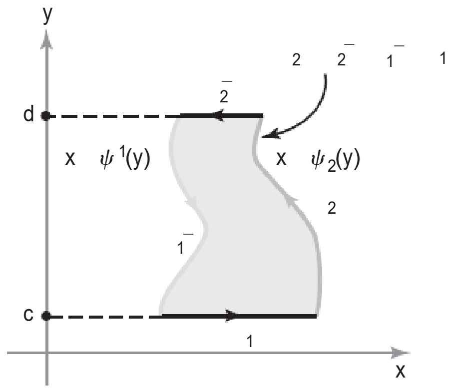

Figura 8.1.3 Un ejemplo que muestra cómo descomponer la frontera positivamente orientada de una región x-simple D en componentes orientadas.

Teorema de Green

Ahora vamos a demostrar dos lemas como preparación para el teorema de Green.

> **Lema 1** Sea D una región y-simple y sea C su frontera. Supongamos que $P\colon D \to \mathbb{R}$ es de clase C^1. Entonces
>
> $$\int_{C^+} P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$$
>
> (El término de la izquierda denota la integral de línea $\int_{C^+} P\,dx + Q\,dy$, donde $Q = 0$).

Demostración Supongamos que la región D está descrita por

$$a \le x \le b \qquad \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x).$$

Descomponemos C^+ escribiendo $C^+ = C_1^+ + B_2^+ + C_2^- + B_1^-$ (véase la Figura 8.1.2). Por el teorema de Fubini, podemos calcular la integral doble como una integral iterada y usar a continuación el teorema fundamental del cálculo:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\;dx$$