Estos se obtienen resolviendo las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \\
&\vdots \\
0 &= \frac{\partial h}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} \\
0 &= \frac{\partial h}{\partial \lambda} = g(x_1, \ldots, x_n) - c
\end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

que coinciden con las Ecuaciones (2) anteriores.

Más adelante en esta sección, en el Teorema 10, proporcionaremos los criterios que usan las derivadas parciales segundas para determinar si los puntos son de máximo o de mínimo, análogos a los vistos en la Sección 3.3. Sin embargo, en muchos problemas, es posible distinguir entre máximos y mínimos por observación directa o por medios geométricos. Dado que esto último suele ser más sencillo, vamos a ver en primer lugar algunos ejemplos de este tipo.

Ejemplo 1 Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por $(-1, 0)$ con una inclinación de 45° y sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Hallar los extremos de $f|S$.

Solución Aquí $S = \{(x, y) \mid y - x - 1 = 0\}$, y por tanto hacemos $g(x, y) = y - x - 1$ y $c = 0$. Tenemos $\nabla g(x, y) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$. Los extremos relativos de $f|S$ deben encontrarse en puntos en los que ∇f es ortogonal a S; es decir, en rectas con una inclinación de $-45°$. Pero $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$, que tiene la pendiente deseada solo cuando $x = -y$, o cuando (x, y) está en la recta L que pasa por el origen con una inclinación de $-45°$. Esto puede ocurrir en el conjunto S solo en el único punto en que L y S se intersecan (véase la Figura 3.4.3). Las curvas de nivel de f indican que este punto, $(-1/2, 1/2)$, es un punto de mínimo relativo de $f|S$ (pero no de f). Obsérvese que en este problema, f tiene un mínimo en S pero no un máximo.

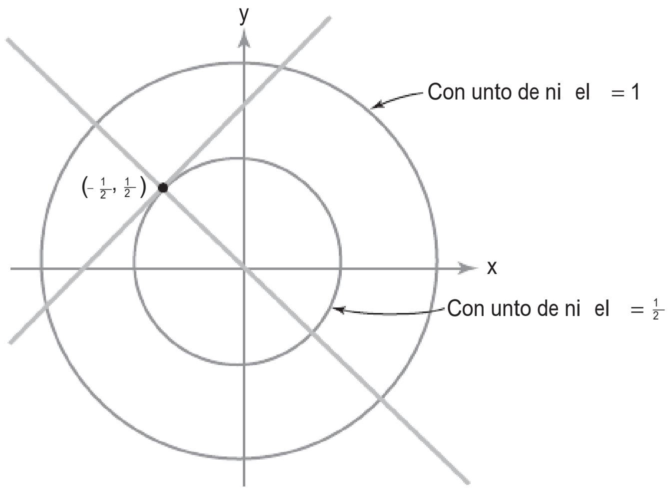

Figura 3.4.3 Geometría asociada con la determinación de los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ restringida a $S = \{(x, y) \mid y - x - 1 = 0\}$. ▲