SOLUCIÓN ► Del ejemplo 2.7.1 se puede escribir $A = LU$, donde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{7}{4} & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix}$$

El sistema $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ conduce a las ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 4 \\ 2y_1 + \ y_2 \qquad\qquad\qquad &= -8 \\ -\tfrac{3}{2}y_1 + \tfrac{5}{8}y_2 + \ y_3 \qquad &= -4 \\ -y_1 + \tfrac{7}{4}y_2 + \tfrac{20}{3}y_3 + \ y_4 &= -1 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} y_1 &= 4 \\ y_2 &= -8 - 2y_1 = -16 \\ y_3 &= -4 + \tfrac{3}{2}y_1 + \tfrac{5}{8}y_2 = 12 \\ y_4 &= -1 + y_1 - \tfrac{7}{4}y_2 - \tfrac{20}{3}y_3 = -49 \end{aligned}$$

Se acaba de realizar la sustitución hacia delante. Ahora, de $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ se obtiene

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 4 \\ 4x_2 - 8x_3 - 8x_4 &= -16 \\ 3x_3 + 9x_4 &= 12 \\ +49x_4 &= -49 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} x_4 &= 1 \\ 3x_3 &= 12 - 9x_4 = 3, \text{ de manera que } x_3 = 1 \\ 4x_2 &= -16 + 8x_3 + 8x_4 = 0, \text{ de manera que } x_2 = 0 \\ 2x_1 &= 4 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -2, \text{ por lo que } x_1 = -1 \end{aligned}$$

La solución es

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La factorización $PA = LU$

Suponga que con el propósito de reducir A a una matriz triangular se requiere alguna permutación. Una matriz de permutación elemental es una matriz elemental asociada con la operación de intercambio con renglones $R_i \rightleftarrows R_j$. Suponga que, de momento, se sabe por anticipado cuáles permutaciones deben realizarse. Cada permutación se lleva a cabo multiplicando A por la izquierda por una matriz de permutación elemental denotada por P_i. Suponga que en la reducción por renglones se realizan n permutaciones. Sea

$$P = P_n P_{n-1} \ldots P_2 P_1$$

Matriz de permutación

el producto de las matrices de permutaciones elementales se llama **matriz de permutación**. De forma alternativa, una matriz de permutación es una matriz $n \times n$ cuyos renglones son los renglones de I_n, pero no necesariamente en el mismo orden.