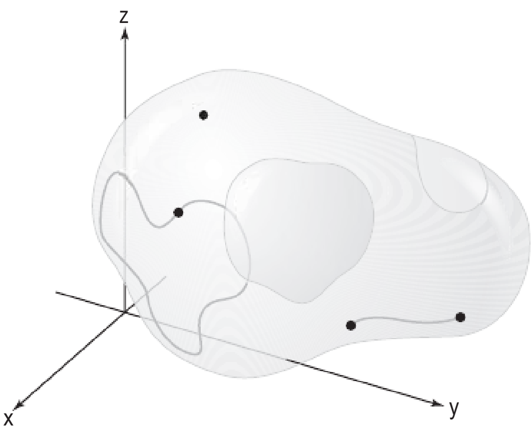

Figura 8.5.2 Los cuatro tipos geométricos de subconjuntos de un conjunto abierto $K \subset \mathbb{R}^3$ a los que se aplica la teoría de las formas diferenciales.

Recordemos (véase la Sección 7.2) que esta integral se calcula como sigue. Supongamos que $\mathbf{c}\colon [a,b] \to K, \mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una parametrización que conserva la orientación de C. Entonces

$$\int_C \omega = \int_{\mathbf{c}} \omega = \int_a^b \left[P(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dy}{dt} + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dz}{dt} \right] dt.$$

El Teorema 1 de la Sección 7.2 garantiza que $\int_C \omega$ no depende de la elección de la parametrización $\mathbf{c}$.

Podemos por tanto interpretar una 1-forma ω sobre K como una regla que asigna un número real a cada curva orientada $C \subset K$; de forma similar, una 2-forma η se puede interpretar como una regla que asigna un número real a cada superficie orientada $S \subset K$; y una 3-forma ν será una regla que asigna un número real a cada subregión elemental de K. Las reglas para asociar números reales con curvas, superficies y regiones están completamente contenidas en las expresiones formales que hemos definido.

Ejemplo 5 Sea $\omega = xy\,dx + y^2 dy + dz$ una 1-forma sobre $\mathbb{R}^3$ y sea C la curva orientada simple en $\mathbb{R}^3$ descrita por la parametrización $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3, 1), 0 \leq t \leq 1$. C está orientada eligiendo la dirección positiva de C para que sea la dirección en la que $\mathbf{c}(t)$ recorre C según t va de 0 a 1. Entonces, según la fórmula (1),

$$\int_C \omega = \int_0^1 [t^5(2t) + t^6(3t^2) + 0]\ dt$$
$$= \int_0^1 (2t^6 + 3t^8)\,dt = \frac{13}{21}.$$

Por tanto, esta 1-forma ω asigna a cada curva orientada simple y a cada curva orientada cerrada simple C en $\mathbb{R}^3$ el número $\int_C \omega$. ▲