Caso 2. Si $R \leq \rho_1$ [es decir, si (x_1, y_1, z_1) está dentro del hueco], entonces $|\rho - R| = \rho - R$ para ρ en $[\rho_1, \rho_2]$ y por tanto

$$\begin{aligned} -V(0,0,R) &= (Gm)\frac{2\pi}{R}\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho[\rho + R - (\rho - R)]\, d\rho = (Gm)4\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho\, d\rho \\ &= (Gm)2\pi\big(\rho_2^2 - \rho_1^2\big). \end{aligned}$$

El resultado es independiente de R y, por tanto, el potencial V es *constante* dentro del hueco. Dado que la fuerza gravitatoria es el gradiente de V cambiado de signo, concluimos que ¡*no hay fuerza gravitatoria en el interior de un planeta hueco uniforme*!

Dejamos al lector el cálculo de $V(0,0,R)$ para el caso de $\rho_1 < R < \rho_2$. Un razonamiento similar muestra que el potencial gravitatorio en el exterior de cualquier cuerpo de masa M con *simetría esférica* (incluso si la densidad es variable) es $V = GMm/R$, donde R es la distancia a su centro (que es su centro de masa).

Ejemplo 8 Hallar el potencial gravitatorio producido por una estrella esférica de masa $M = 3{,}02 \times 10^{30}$ kg que actúa sobre una unidad de masa situada a una distancia $2{,}25 \times 10^{11}$ m de su centro ($G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$).

Solución El potencial negativo es

$$-V = \frac{GM}{R} = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 3{,}02 \times 10^{30}}{2{,}25 \times 10^{11}} = 8{,}95 \times 10^{8}\ \ \mathrm{m^2/s^2}. \quad \blacktriangle$$

Ejercicios

1. Hallar las coordenadas del centro de masa de un triángulo isósceles de densidad uniforme, acotado por el eje x, $y = ax$ e $y = -ax + 2a$.

2. Suponiendo una densidad uniforme, hallar las coordenadas del centro de masa del semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, con $y \geq 0$.

3. Hallar la media de $f(x, y) = y \operatorname{sen} xy$ sobre $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

4. Hallar la media de $f(x, y) = e^{x+y}$ sobre el triángulo con vértices $(0,0), (0,1)$ y $(1,0)$.

5. Hallar el centro de masa de la región comprendida entre $y = x^2$ e $y = x$ si la densidad es $x + y$.

6. Hallar el centro de masa de la región comprendida entre $y = 0$ e $y = x^2$, donde $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

7. Una placa de oro labrada D está definida por $0 \leq x \leq 2\pi$ y $0 \leq y \leq \pi$ (centímetros) y tiene una densidad de masa $\delta(x, y) = y^2 \operatorname{sen}^2 4x + 2$ (gramos por centímetro cuadrado). Si el oro se vende a 7 dólares por gramo, ¿cuánto vale el oro de la placa?

8. En el Ejercicio 7, ¿cuál es la densidad de masa media, en gramos por centímetro cuadrado?

9. (a) Hallar la masa del paralelepípedo $[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1] \times [0, 2]$, suponiendo que la densidad es uniforme.

(b) Hallar lo mismo que en (a), pero con una densidad de masa $\delta(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z + 1$.

10. Hallar la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y por el cono $z^2 = x^2 + y^2$, si la densidad es $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$.