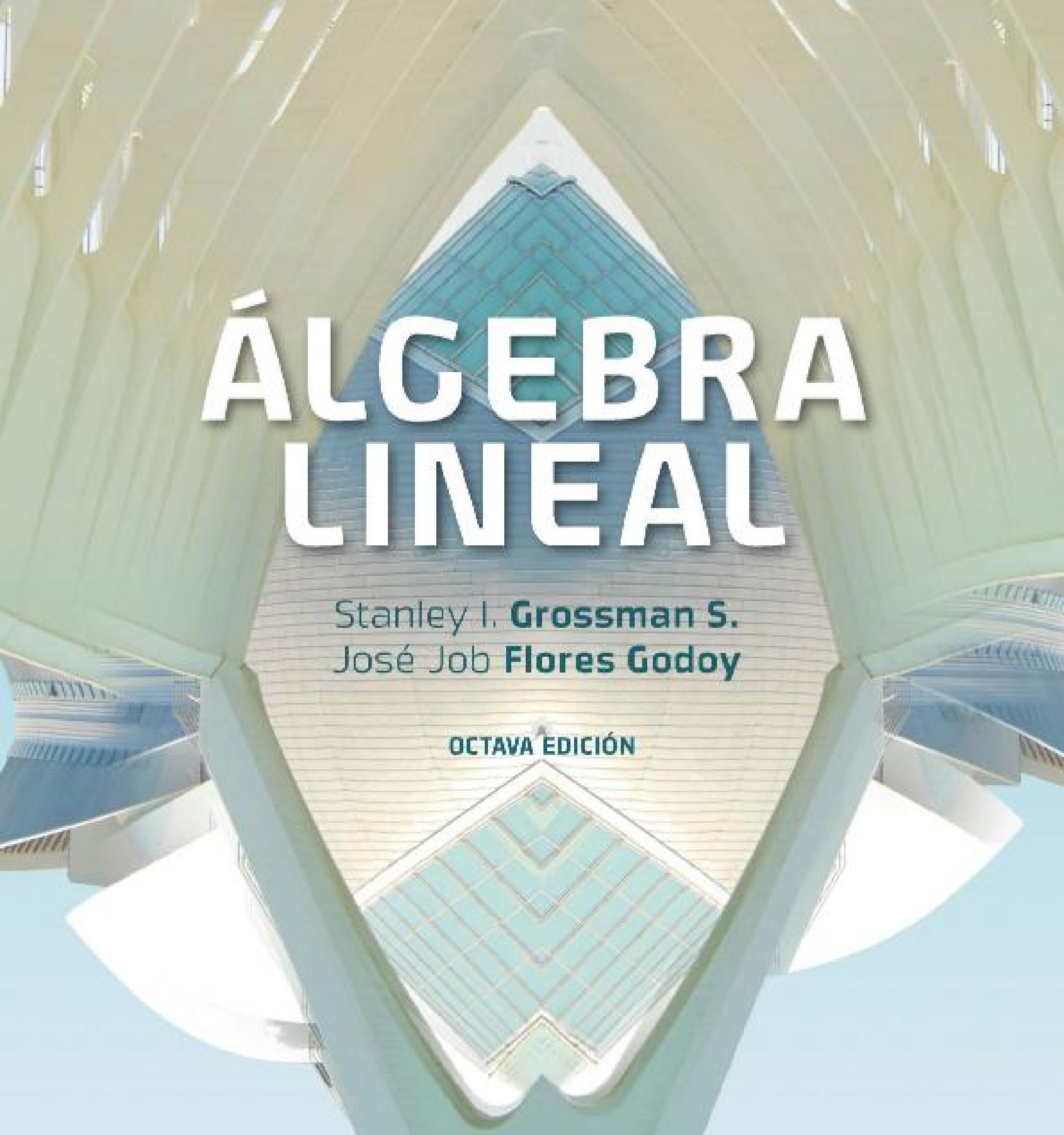


ÁLGEBRA LINEAL

Stanley I. **Grossman S.**
José Job **Flores Godoy**

OCTAVA EDICIÓN

Mc

ÁLGEBRA LINEAL

ÁLGEBRA LINEAL

Octava edición

Stanley I. Grossman S. (finado)
University of Montana
University College London

José Job Flores Godoy
Departamento de matemática
Universidad Católica del Uruguay

Revisión técnica:

Fabiola Vázquez Valencia
Universidad Iberoamericana Ciudad de México

Eleazar Luna Barraza
Universidad Autónoma de Sinaloa, México

María del Pilar Goñi Vélez
Universidad Autónoma de Nuevo León, México

Carmen Judith Vanegas
Universidad Simón Bolívar Caracas, Venezuela

M. Rosalba Espinoza Sánchez
Universidad de Guadalajara México

Adrián Infante
Universidad Simón Bolívar Caracas, Venezuela

Mc Graw Hill

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • GUATEMALA

Director general para Latinoamérica: Martín Chueco
Director editorial Latinoamérica: Hans Serrano
Gerente de portafolio de Universidades Latinoamérica: Gabriela López Ballesteros
Senior Editor: Guillermo Domínguez Chávez
Gerente de preprensa: José Palacios
Supervisor de preprensa: Zeferino García

Mc Graw Hill

ÁLGEBRA LINEAL

Octava edición

Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A,
Piso 16, Col. Desarrollo Santa Fe,
Alcaldía Álvaro Obregón,
C.P. 01376, Ciudad de México.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN 13: 978-1-4562-6980-7
ISBN (edición anterior): 978-607-15-0760-0

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 XXX 24 23 22 21 20 19

Impreso en México *Printed in Mexico*

Dedicatoria

Para Kerstin, Aaron y Erick

Stanley I. Grossman S.

Para Malena e Inés

José Job Flores Godoy

Contenido

Acerca de la octava edición

La publicación de esta edición de *Álgebra lineal* es de manera póstuma ya que Stanley Grossman falleció en diciembre de 2017, no sin antes preparar algunas adecuaciones y dar guía a esta nueva edición. La octava edición de esta obra incluye actualizaciones del contenido con el fin de presentar aplicaciones distintas a las mostradas en ediciones anteriores del libro, con objeto de motivar a los lectores a encontrar usos variados de la disciplina en áreas que de primera instancia no se creería esta herramienta fuera útil.

En esta nueva edición se han hecho algunos cambios como resultado de consultas realizadas a los usuarios que han llevado a prescindir de problemas con el uso de calculadoras. Por otro lado, se incluye una nueva versión del Examen diagnóstico con la intención de ayudar a los usuarios de libro a identificar alguna habilidad que necesiten desarrollar para abordar el contenido del libro de mejor forma.

Se conservan los ejercicios y problemas que deben ser resueltos con MATLAB, que hasta este momento sigue siendo el estándar de software de cómputo numérico, aunque se empieza a encontrar que hay alternativas de software libre que empiezan a tomar preponderancia como herramienta alternativa de MATLAB, por ejemplo Octave (www.gnu.org/software/octave) o Scilab (www.scilab.org) e incluso lenguajes de programación de propósito general para los que se han desarrollado librerías de manipulación de matrices como Python (www.python.org) o Julia (julialang.org).

En esta nueva edición se incluye un capítulo nuevo sobre cadenas de Markov, disponible en el sitio web www.mhhe.com/latam/grossman_algelin8e como ejemplo de material avanzado utilizando las herramientas desarrolladas en los capítulos anteriores. También se incluyen dos nuevas aplicaciones, una sobre el flujo de tráfico y otra sobre crecimiento poblacional utilizando el modelo de Leslie. Ambas son ejemplo de cómo poder utilizar el Álgebra lineal para obtener información y analizar problemas de nuestra vida cotidiana.

Uno de los cambios más notables es que se modificaron alrededor del 25% de los problemas del libro, además de incorporar Connect® de McGraw-Hill, un recurso que esperamos potencie el aprendizaje de los estudiantes.

Agradezco la oportunidad de haber trabajado con Stanley y todo el apoyo del equipo editorial de McGraw-Hill Education.

José Job Flores Godoy
Universidad Católica del Uruguay
Montevideo, Uruguay, febrero 2019

Prefacio

Anteriormente el estudio del álgebra lineal era parte de los planes de estudios de los alumnos de matemáticas y física, principalmente, y también recurrían a ella aquellos que necesitaban conocimientos de la teoría de matrices para trabajar en áreas técnicas como la estadística multivariable. Hoy en día, el álgebra lineal se estudia en diversas disciplinas gracias al uso de las computadoras y al aumento general en las aplicaciones de las matemáticas en áreas que, por tradición, no son técnicas.

Prerrequisitos

Al escribir este libro tuve en mente dos metas. Intenté volver accesibles un gran número de temas de álgebra lineal para una gran variedad de estudiantes que necesitan únicamente conocimientos firmes del álgebra correspondientes a la enseñanza media superior. Como muchos estudiantes habrán llevado un curso de cálculo de al menos un año, incluí también varios ejemplos y ejercicios que involucran algunos temas de esta materia. La sección 8.7 es opcional y sí requiere el uso de herramientas de cálculo, pero salvo este caso, *el cálculo no es un prerrequisito* para este texto.

Aplicaciones

La segunda meta fue convencer a los estudiantes de la importancia del álgebra lineal en sus campos de estudio. De este modo el contexto de los ejemplos y ejercicios hace referencia a diferentes disciplinas. Algunos de los ejemplos son cortos, como las aplicaciones de la multiplicación de matrices al proceso de contagio de una enfermedad. Otros son un poco más grandes; entre éstos se pueden contar el modelo de insumo-producto de Leontief, la teoría de gráficas (sección 2.8), la aproximación por mínimos cuadrados (sección 6.2) y un modelo de crecimiento poblacional (sección 8.2).

Además, se puede encontrar un número significativo de aplicaciones sugestivas en las secciones de MATLAB®.

Teoría

Para muchos estudiantes el curso de álgebra lineal constituye el primer curso real de *matemáticas*. Aquí se solicita a los estudiantes no sólo que lleven a cabo cálculos matemáticos sino también que desarrollen demostraciones. Intenté, en este libro, alcanzar un equilibrio entre la técnica y la teoría. Todas las técnicas importantes se describen con minucioso detalle y se ofrecen ejemplos que ilustran su utilización. Al mismo tiempo, se demuestran todos los teoremas que se pueden probar utilizando los resultados dados aquí. Las demostraciones más difíciles se dan al final de las secciones o en apartados especiales, pero *siempre se dan*. El resultado es un libro que proporcionará a los estudiantes tanto las habilidades algebraicas para resolver los problemas que surjan en sus áreas de estudio como una mayor apreciación de la belleza de las matemáticas.

Características

La octava edición ofrece nuevas características y conserva la estructura ya probada y clásica que tenía la edición anterior. Las nuevas características se enumeran en la página XIII.

Examen diagnóstico

El examen diagnóstico, busca identificar si el alumno posee las nociones mínimas necesarias para un curso exitoso de álgebra lineal. Este examen se compone de 36 reactivos divididos en 7 problemas, cada uno de los cuales evalúa alguna habilidad matemática específica. En la pregunta 1 se evalúa la habilidad de manipular operaciones aritméticas simples. En la pregunta 2 se cuestiona sobre el concepto de conjuntos, que son los elementos que tienen una o varias propiedades en común. En la pregunta 3 se aprecia la manipulación de conjuntos con sus operaciones de unión, intersección y complemento. En el problema 4 se revisan las habilidades básicas de álgebra. En el problema 5 se evalúa la habilidad de factorizar expresiones algebraicas simples. En la pregunta 6 se calcula la habilidad para resolver ecuaciones lineales simples. Finalmente, en la pregunta 7 se estima la habilidad para encontrar raíces de polinomios.

Ejemplos

Los estudiantes aprenden matemáticas mediante ejemplos completos y claros. La séptima edición contiene cerca de 350 ejemplos, cada uno de los cuales incluye todos los pasos algebraicos necesarios para completar la solución. En muchos casos se proporcionaron secciones de ayuda didáctica para facilitar el seguimiento de esos pasos. Adicionalmente, se otorgó un nombre a los ejemplos con el objeto de que resulte más sencillo entender el concepto esencial que ilustra cada uno.

Ejercicios

El texto contiene cerca de 2 750 ejercicios. Al igual que en todos los libros de matemáticas, éstos constituyen la herramienta más importante del aprendizaje. Los problemas conservan un orden de acuerdo con su grado de dificultad y existe un equilibrio entre la técnica y las demostraciones.

Teorema de resumen

Una característica importante es la aparición frecuente del teorema de resumen, que une temas que en apariencia no tienen nada en común dentro del estudio de matrices y transformaciones lineales. En la sección 1.1 se presenta el teorema por vez primera. En las secciones 2.4, 2.6, 3.3, 5.4, 5.7, 7.4 y 8.1 se encuentran versiones cada vez más completas de dicho teorema.

Autoevaluación

Los problemas de autoevaluación están diseñados para valorar si el estudiante comprende las ideas básicas de la sección, y es conveniente que los resuelva antes de que intente solucionar los problemas más generales que les siguen. Casi todos ellos comienzan con preguntas de opción múltiple o falso-verdadero que requieren pocos o ningún cálculo.

Resúmenes de secciones

Al final de cada sección aparece un repaso detallado de los resultados importantes hallados en ésta. Incluye referencias a las secciones en las que se encuentra la información completa.

Geometría

Algunas ideas importantes en álgebra lineal se entienden mejor observando su interpretación geométrica. Por esa razón se han resaltado las interpretaciones geométricas de conceptos importantes en varios lugares de esta edición. Éstas incluyen:

- La geometría de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.
- La interpretación geométrica de un determinante de 2×2.
- La interpretación geométrica del triple producto escalar.
- Cómo dibujar un plano.
- La interpretación geométrica de la dependencia lineal en $\mathbb{R}^3$.
- La geometría de una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.
- Las isometrías de $\mathbb{R}^2$.

Semblanzas históricas

Las matemáticas son más interesantes si se conoce algo sobre el desarrollo histórico del tema. Para estimular este interés se incluyen varias notas históricas breves, dispersas en el libro. Además, hay siete semblanzas no tan breves y con más detalles, entre las que se cuentan las de:

- Carl Friedrich Gauss.
- Sir William Rowan Hamilton.
- Arthur Cayley y el álgebra de matrices.
- Breve historia de los determinantes.
- Josiah Willard Gibbs y los orígenes del análisis vectorial.
- Historia de la inducción matemática.

Características nuevas de la octava edición

Gracias a la participación de profesores y revisores, la nueva edición se ha enriquecido con diversos cambios, como son:

- Se ha renovado el diseño de las páginas con la finalidad de que la obra posea una estructura más organizada y amable para el lector.
- La mayoría de las notas y las observaciones se reubicaron al margen a fin de resaltar su importancia y evitar distraer al lector en el discurso del tema.
- Algunos capítulos de la edición anterior fueron reorganizados con objeto de proporcionar flexibilidad a los profesores en cuanto a los temas que habrán de abordar.
- Se incluye un nuevo examen diagnóstico cuya finalidad es ayudar a los estudiantes a identificar las habilidades mínimas necesarias para aprovechar de la mejor manera el contenido de este libro.

- Gran cantidad de problemas nuevos, además de otros actualizados, que permitirán ejercitar y aplicar las habilidades adquiridas. Por ende, la sección de respuestas al final del libro ha cambiado por completo.

MATLAB®

El texto cuenta con más de 230 problemas opcionales para MATLAB®, muchos de los cuales tienen varios incisos, que aparecen después de la mayoría de las secciones de problemas (MATLAB® es una marca registrada de The Math Works, Inc.). MATLAB® es un paquete poderoso pero amigable, diseñado para manejar problemas de una amplia variedad que requieren cálculos con matrices y conceptos de álgebra lineal. Se puede ver mayor información sobre este programa en la sección de apéndices. Los problemas relacionados directamente con los ejemplos y los problemas normales exhortan al estudiante a explotar el poder de cálculo de MATLAB® y explorar los principios del álgebra lineal mediante el análisis y la obtención de conclusiones. Además, se cuenta con varios incisos de "papel y lápiz" que permiten que el alumno ejercite su juicio y demuestre su aprendizaje de los conceptos.

La sección 1.3 es la primera que contiene problemas de MATLAB®; antes de estos problemas se presenta una introducción y una tutoría breve. Los problemas de MATLAB® en cada sección están diseñados para que el usuario conozca los comandos de MATLAB® a medida que se van requiriendo para la resolución de problemas. Se cuenta con numerosas aplicaciones y problemas proyecto que demuestran la relevancia del álgebra lineal en el mundo real; éstos pueden servir como trabajos de grupo o proyectos cortos.

Muchos de los problemas de MATLAB® están diseñados para animar a los estudiantes a describir teoremas de álgebra lineal. Por ejemplo, un estudiante que genere varias matrices triangulares superiores y calcule sus inversas obtendrá la conclusión natural de que la inversa de una matriz triangular superior es otra triangular superior. La demostración de este resultado no es trivial, pero tendrá sentido si el estudiante "ve" que el resultado es aceptable. Prácticamente todos los conjuntos de problemas de MATLAB® contienen algunos que llevan a resultados matemáticos.

Resalta aquí el hecho de que el material de MATLAB® es *opcional*. Se puede asignar o no según el profesor lo considere conveniente.

En lugar de colocar la sección de MATLAB® a manera de suplemento, se decidió conservarlo dentro de los capítulos para que la integración fuera mayor y más efectiva. Además, se ha cuidado que primero se enseñe a los estudiantes la manera de resolver los problemas "a mano", comprendiendo los conceptos, para después poder incorporar el uso de otras herramientas.

Álgebra lineal conserva el diseño de un libro para cubrirse en *un* semestre. Es de esperarse que, al utilizarlo, el material de MATLAB® se cubra en un laboratorio separado que complemente el trabajo del salón de clase.

Numeración

La numeración de este libro es estándar. Dentro de cada sección, los ejemplos, problemas, teoremas y ecuaciones se encuentran numerados consecutivamente a partir del número 1, y siempre se incluye el capítulo y la sección. De esta forma, el ejemplo 4 en la sección 3.2 siempre se denomina ejemplo 3.2.4.

Organización

El enfoque que se ha utilizado en este libro es gradual. Los capítulos 1 al 3 contienen el material computacional básico común para la mayor parte de los libros de álgebra lineal. El capítulo 1 presen-

presenta la relación de éstos con los sistemas de ecuaciones, estudiados en el capítulo 1. Esta presentación proporciona una mayor motivación para el estudiante y sigue el orden de la mayoría de los temarios del curso. También se incluyó una sección (2.8) en la que se aplican matrices a la teoría de gráficas. El capítulo 3 proporciona una introducción a los determinantes e incluye un ensayo histórico sobre las contribuciones de Leibniz y Cauchy al álgebra lineal (sección 3.5).

Dentro de este material básico, incluso hay secciones opcionales que representan un reto un poco mayor para el estudiante. Por ejemplo, la sección 3.5 proporciona una demostración completa de que det $AB = \det A \det B$. La demostración de este resultado, mediante el uso de matrices elementales, casi nunca se incluye en libros introductorios.

El capítulo 4 analiza los vectores en el plano y el espacio. Muchos de los temas de este capítulo se cubren según el orden con el que se presentan en los libros de cálculo, de manera que es posible que el estudiante ya se encuentre familiarizado con ellos. Sin embargo, como una gran parte del álgebra lineal está relacionada con el estudio de espacios vectoriales abstractos, los alumnos necesitan un acervo de ejemplos concretos que el estudio de los vectores en el plano y el espacio proporciona de manera natural. El material más difícil de los capítulos 5, 6 y 7 se ilustra con ejemplos que surgen del capítulo 4. La sección 4.4 incluye un ensayo histórico sobre Gibbs y el origen del análisis vectorial.

El capítulo 5 contiene una introducción a los espacios vectoriales generales y es necesariamente más abstracto que los capítulos anteriores. No obstante, intentamos presentar el material como una extensión natural de las propiedades de los vectores en el plano, que es en realidad la forma en que surgió el tema. Se ha modificado el orden entre el estudio de cambios de base (sección 5.6) y los conceptos de rango y nulidad de matrices (sección 5.7), por considerar que ésta es una secuencia de conceptos más clara. En la sección opcional (5.8) se demuestra que todo espacio vectorial tiene una base. Al hacerlo se analizan los conjuntos ordenados y el lema de Zorn. Dicho material es más complicado que cualquier otro tema en el libro y se puede omitir. Sin embargo, como el álgebra lineal a menudo se considera el primer curso en el que las demostraciones son tan importantes como los cálculos, en mi opinión el estudiante interesado debe disponer de una demostración de este resultado fundamental. En el capítulo 6 se presenta la relación existente entre los espacios vectoriales y los productos internos, y se incluye una sección (6.2) de aplicaciones interesantes sobre la aproximación por mínimos cuadrados.

El capítulo 7 continúa el análisis que se inició en el capítulo 5 con una introducción a las transformaciones lineales de un espacio vectorial a otro. Comienza con dos ejemplos que muestran la manera natural en la que pueden surgir las transformaciones. La sección 7.3 describe de manera detallada la geometría de las transformaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, e incluye expansiones, compresiones, reflexiones y cortes. La sección 7.5 ahora contiene un estudio más detallado de las isometrías de $\mathbb{R}^2$.

El capítulo 8 describe la teoría de los valores y vectores característicos o valores y vectores propios. Se introducen en la sección 8.1 y en la sección 8.2 se da una aplicación biológica minuciosa del crecimiento poblacional. Las secciones 8.3, 8.4 y 8.5 presentan la diagonalización de una matriz, mientras que la sección 8.6 ilustra, para unos cuantos casos, cómo se puede reducir una matriz a su forma canónica de Jordan. La sección 8.7 estudia las ecuaciones diferenciales matriciales y es la única sección del libro que requiere conocimiento del primer curso de cálculo. Esta sección proporciona un ejemplo de la utilidad de reducir una matriz a su forma canónica de Jordan (que suele ser una matriz diagonal). En la sección 8.8 introduje dos de mis resultados favoritos acerca de la teoría de matrices: el teorema de Cayley-Hamilton y el teorema de los círculos de Gershgorin. El teorema de los círculos de Gershgorin es un resultado muy rara vez estudiado en los libros de álgebra lineal elemental, que proporciona una manera sencilla de estimar los valores propios de una matriz.

En el capítulo 8 tuve que tomar una decisión difícil: si analizar o no valores y vectores propios complejos. Decidí incluirlos porque me pareció lo más adecuado. Algunas de las matrices "más agradables" tienen valores propios complejos. Si se define un valor propio como un número real, sólo en un principio se pueden simplificar las cosas, aunque esto sea un error. Todavía más, en muchas apliteresantes se relacionan con fenómenos periódicos y éstos requieren valores propios complejos. Los números complejos no se evitan en este libro. Los estudiantes que no los han estudiado antes pueden encontrar las pocas propiedades que necesitan en el apéndice B.

El libro tiene cinco apéndices, el primero sobre inducción matemática y el segundo sobre números complejos. Algunas de las demostraciones en este libro hacen uso de la inducción matemática, por lo que el apéndice A proporciona una breve introducción a esta importante técnica para los estudiantes que no la han utilizado.

El apéndice C analiza el concepto básico de la complejidad de los cálculos que, entre otras cosas, ayudará a los estudiantes a entender las razones por las cuales quienes desarrollan software eligen algoritmos específicos. El apéndice D presenta un método razonablemente eficiente para obtener la solución numérica de los sistemas de ecuaciones. Por último, el apéndice E incluye algunos detalles técnicos sobre el uso de MATLAB® en este libro.

Una nota sobre la interdependencia de los capítulos: este libro está escrito en forma secuencial. Cada capítulo depende de los anteriores, con una excepción: el capítulo 8 se puede cubrir sin necesidad de gran parte del material del capítulo 7. Las secciones marcadas como “opcional” se pueden omitir sin pérdida de la continuidad.

Stanley I. Grossman
Londres, Inglaterra

José Job Flores Godoy
Montevideo, Uruguay

Materiales de apoyo

Esta obra cuenta con interesantes complementos que fortalecen los procesos de enseñanza-aprendizaje, así como facilitan su evaluación, los cuales se otorgan a profesores que adoptan este texto para sus cursos.

connect

Connect® de McGraw-Hill es una plataforma de enseñanza-aprendizaje adaptativos que permite estudiar en el libro y asignar y realizar tareas (en idioma español) con el propósito de que el estudiante ponga a prueba su conocimiento y evalúe su aprendizaje. Esta edición incluye con el libro impreso un código de acceso para Connect® por un año a partir de que sea redimido.

Agradecimientos

Esta edición de *Álgebra lineal* ha sido mejorada y enriquecida por los comentarios de profesores que lo han usado a través de los años. McGraw-Hill agradece a los centros de estudio y profesores usuarios de esta obra por su apoyo y retroalimentación.

MÉXICO

Edgar González Villalba
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

César Lozano Díaz
Jonathan Roberto Venegas Becerra
Ricardo Solórzano Gutiérrez
Centro Universitario de Ciencias Económico Administrativas
Universidad de Guadalajara

Martha Erika Cejudo Torres Orozco
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Culhuacán
Instituto Politécnico Nacional

David González Chávez
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente, ITESO

Mario Martínez Cano
Instituto Tecnológico de Veracruz

Héctor Ake Mian
Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec

Enrique Zamora Gallardo
Universidad Anáhuac México, Campus Norte

Araceli Consuelo Campero Carmona
Javier Soriel Jaimes Vidaca
Universidad Autónoma del Estado de México

Daniel Amador Bartolini
Universidad Autónoma de Baja California, Tijuana

Berenice Fong
Irma Uriarte Ramírez
Universidad Autónoma de Baja California, Tijuana, Valle de las Palmas

Gabriel Alejandro Haro Canales
María Guadalupe Lomelí Plascencia
Universidad Autónoma de Guadalajara

Ignacio Navarro Ruiz
Universidad del Valle de Atemajac (UNIVA)

Lino Gustavo Garza Gaona
Roberto Hernández Ramírez
Diana Hernández Alcántara
Juan Carlos Tudón Martínez
María Carina Ramírez Palacios
Maribel Fuentes Dávila
Aminta Garza Pinal
Universidad de Monterrey

Óscar Dávalos Orozco
Universidad Panamericana Bonaterra, Campus Aguascalientes

Arcadio Bruno Cornelio
Omar González González
Universidad Tecnológica de México

ESPAÑA

Roger Estrada
Universitat Ramon Llull

HONDURAS

Sheila Membreño Mejía
Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Julio Valle
Universidad Nacional Autónoma de Honduras, Valle de Sula

¡Conéctate y logra resultados!

PROFESORES

Con Connect®, los profesores obtienen:

- Gestión simple de tareas, dedicando más tiempo a la enseñanza.
- Actividades que se pueden autocalificar.
- Función de filtrado y reporte que permite asignar contenidos que están correlacionados con resultados de aprendizaje, temas, nivel de dificultad y más; así como ejercitarse en actividades individuales, preguntas o categorías. Los informes pueden presentarse por estudiante o para toda la clase.
- Funcionalidades adicionales para que el instructor complemente su curso.

  Question bank – Banco de preguntas en idioma español para repaso y evaluación de conocimientos.

  Tegrity – Aplicación que sirve para grabar audio y video. Con APP para móviles (tablets y teléfonos inteligentes) que permite descargar las lecciones de manera offline.

  Blog – Recurso para promover conversaciones.

  Writing – Herramienta que permite redactar ensayos breves.

  Resource – Almacenamiento en la nube que permite compartir documentos como Word, PPT, Excel u otros.

ESTUDIANTES

Con McGraw-Hill Connect®, los estudiantes obtienen:

- Contenido asignado.
- Fácil acceso en línea a evaluaciones y pruebas.
- Realimentación inmediata y soporte técnico en inglés las 24 horas del día.
- Funcionalidad de autoestudio.
- Connect® permite la ejercitación del estudiante por cuenta propia.
- Question Bank. Banco de preguntas en idioma español que abarca todos los temas tratados en el libro y con los que el estudiante pone a prueba su aprendizaje y detecta los temas que requieren más estudio.

Examen diagnóstico

Problema 1. Realice las siguientes operaciones.

a) $3 - 25 + 12$

b) $10 - (-5) - 4$

c) $(8)(5) + 5$

d) $-\frac{3}{2}\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{10}\right)$

e) $\dfrac{\frac{1}{6} - \frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$

Problema 2. Enumere los elementos de los siguientes conjuntos.

a) $\{x \mid x$ es vocal$\}$

b) $\{q \mid q$ es un número par menor que $16\}$

c) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha$ es una vocal y β es un número impar positivo menor que $10\}$

d) $\{(a, b, c) \mid a$ es azul o rojo, b es una manzana o pera y c es 1 o $2\}$

Problema 3. Considere los siguientes conjuntos.

$U = \{0, 1, 3, 4, 5, 10, 14, 13, 18, 20, 21, 22, 25\}$

$A = \{x \in U \mid x$ es un número par$\}$

$B = \{x \in U \mid x$ es divisor de $10\}$

$C = \{x \in U \mid x > 11\}$

$D = \{x \in U \mid 2 < x < 23\}$

$E = \{x \in U \mid x$ es un número con dígito $1\}$

Determine los siguientes conjuntos.

a) $C \cap D$

b) $E \cup B$

c) B'

d) $E \cup (C \cap D)$

e) $(C \cap A)'$

f) $(B' \cup C')'$

g) $B - E$

h) $E - B$

i) $D' - E$

Problema 4. Simplifique las siguientes expresiones.

a) $(3x - 2x^2 - (4y - 2x)) - 6y$

c) $\dfrac{y+2}{x-1}+\dfrac{y-2}{x+1}$

d) $\dfrac{\dfrac{5x}{2y}}{\dfrac{3}{x}-\dfrac{y}{3}}$

e) $\dfrac{9x^2-4y^2}{(3x-2y)(2x+3y)}$

Problema 5. Factorice las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{9}$

b) $3mn+2m-6s-9ns$

c) $4x^2-12xy+9y^2$

d) $3x^2-2xy+x^2$

Problema 6. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $3x+6=-5x+10$

b) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{4x}=1$

c) $\dfrac{2\sqrt{x}}{7}-\dfrac{5}{\sqrt{2x}}=0$

d) $3a^2-2xa+x^2=(3a-x)(a-x)$

Problema 7. Encuentre las raices de los siguientes polinomios.

a) $3x^3+2x^2$

b) $4x^4-16$

c) $6s^2-s-2$

d) $6q^2-12q+6$

e) $x^3+\pi x^2+ex$

CAPÍTULO

1

Russell Illig/Getty Images

▲ En ingeniería civil, al diseñar y analizar estructuras se resuelven sistemas de ecuaciones que describen los esfuerzos que tendrá que soportar la construcción.

Sistemas de ecuaciones lineales

Objetivos del capítulo

En este capítulo el estudiante. . .

- Recordará algunos conceptos asociados con rectas en el plano y un método de solución de ecuaciones algebraicas simultáneas con dos variables (sección 1.1).
- Estudiará el método de la reducción gaussiana para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas, junto con términos que se usarán a lo largo del texto (sección 1.2).
- Se familiarizará con el programa Matlab, a fin de resolver problemas relacionados con sistemas de ecuaciones (sección 1.3).
- Aprenderá los sistemas homogéneos y las características de su solución (sección 1.4).

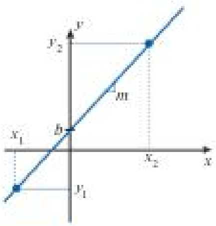


Figura 1.1
Descripción de una recta.

1.0 Preliminares sobre rectas

Este libro trata del álgebra lineal. Al buscar la palabra "lineal" en el diccionario se encuentra, entre otras definiciones, la siguiente: lineal: (del lat. *linealis*). **1.** adj. Perteneciente o relativo a la línea.[1] Sin embargo, en matemáticas la palabra "lineal" tiene un significado mucho más amplio. Una gran parte de la teoría del álgebra lineal elemental es, de hecho, una generalización de las propiedades de la línea recta. A manera de repaso se mencionan algunas propiedades fundamentales sobre las líneas rectas:

i) La **pendiente** m de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{si } x_1 \neq x_2$$

ii) Si $x_2 - x_1 = 0$ y $y_2 \neq y_1$, entonces la recta es vertical y se dice que la pendiente es **indefinida**.[2]

iii) Cualquier recta (a excepción de aquella que tiene una pendiente indefinida) se puede describir con su ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen $y = mx + b$, donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen (el valor de y en el punto en el que la recta cruza el eje y).

iv) Dos rectas distintas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

v) Si la ecuación de la recta se escribe en la forma $ax + by = c$, $(b \neq 0)$, entonces se puede calcular fácilmente la pendiente m, como $m = -a/b$.

vi) Si m_1 es la pendiente de la recta L_1, m_2 es la pendiente de la recta L_2, $m_1 \neq 0$ y L_1 y L_2 son perpendiculares, entonces $m_2 = -1/m_1$.

vii) Las rectas paralelas al eje x tienen pendiente cero.

viii) Las rectas paralelas al eje y tienen pendiente indefinida.

En la siguiente sección se ilustrará la relación que existe entre resolver sistemas de ecuaciones y encontrar los puntos de intersección entre pares de rectas.

1.1 Dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Considere el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x y y:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

Nota

En forma breve también suele referirse al sistema (1.1.1) como un sistema de 2×2.

donde a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 y b_2 son números dados. Cada una de estas ecuaciones corresponde a una línea recta. Cualquier par de números reales (x, y) que satisface el sistema (1.1.1) se denomina como **solución**. Las preguntas que surgen en forma natural son: ¿tiene este sistema varias soluciones y, de ser así, cuántas? Se responderán estas preguntas después de ver algunos ejemplos, en los cuales se usarán propiedades importantes del álgebra elemental:

Propiedad A Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.
Propiedad B Si $a = b$ y c es cualquier número real, entonces $ca = cb$.

La propiedad A establece que si se suman dos ecuaciones se obtiene una tercera ecuación correcta. La propiedad B establece que si se multiplican ambos lados de una ecuación por una constante se obtiene una segunda ecuación válida. Los casos más interesantes de la propiedad B se presentan cuando $c \neq 0$, ya que aunque la ecuación $0 = 0$ es correcta, no es muy útil.

EJEMPLO 1.1.1 Sistema con una solución única

Considere el sistema

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ 5x + 2y &= 12 \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Si se suman las dos ecuaciones se tiene, por la propiedad A, la siguiente ecuación: $8x = 16$ (es decir, $x = 2$). Entonces, si se despeja de la segunda ecuación, $2y = 12 - 5x = 12 - 10 = 2$, entonces $y = 1$. Así, el par (2, 1) satisface el sistema, es decir, al sustituir $x = 2$ y $y = 1$ en (1.1.2) se obtiene

$$\begin{aligned} 3(2) - 2(1) &= \ \ 6 - 2 = \ \ 4 \\ 5(2) - 2(1) &= 10 + 2 = 12 \end{aligned}$$

y la forma en que se encontró la solución muestra que es el único par de números que lo hace. Es decir, el sistema (1.1.2) tiene una **solución única**.

Solución única

EJEMPLO 1.1.2 Sistema con un número infinito de soluciones

Considere el sistema

$$\begin{aligned} x - \ \ y &= \ 7 \\ 2x - 2y &= 14 \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Se puede ver que estas dos ecuaciones son equivalentes. Esto es, cualesquiera dos números, x y y, que satisfacen la primera ecuación también satisfacen la segunda, y viceversa. Para comprobar esto se multiplica la primera ecuación por 2, esto está permitido por la propiedad B. Al ser ambas ecuaciones equivalentes, lo único que podemos hacer es despejar una incógnita en términos de cualquiera otra de las dos ecuaciones. Entonces $x - y = 7$ o $y = x - 7$. Así, el par $(x, x - 7)$ es una solución al sistema (1.1.3) para cualquier número real x. Es decir, el sistema (1.1.3) tiene un **número infinito de soluciones**. Para este ejemplo, los siguientes pares son soluciones: (7, 0); (0, −7), (8, 1), (1, −6), $\left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{2}\right)$ y $(\sqrt{2}, \sqrt{2} - 7)$.

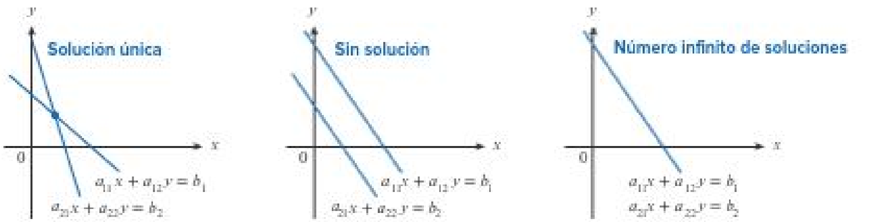
Número infinito de soluciones

EJEMPLO 1.1.3 Sistema sin solución

Considere el sistema

$$\begin{aligned} x - \ \ y &= \ 7 \\ 2x - 2y &= 13 \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Si se multiplica la primera ecuación por 2 (que de nuevo está permitido por la propiedad B) se obtiene $2x - 2y = 14$. Esto contradice la segunda ecuación. Por lo tanto, el sistema (1.1.4) **no tiene solución**.



a) Rectas no paralelas; un punto de intersección

b) Rectas paralelas; sin puntos de intersección

c) Rectas que coinciden; número infinito de puntos de intersección

Sistema inconsistente

Un sistema que no tiene solución se dice que es **inconsistente**.

Geométricamente es fácil explicar lo que sucede en los ejemplos anteriores. Primero, se repite que ambas ecuaciones del sistema (1.1.1) son de líneas rectas. Una solución a (1.1.1) es un punto (x, y) que se encuentra sobre las dos rectas. Si las dos rectas no son paralelas, entonces se intersecan en un solo punto. Si son paralelas, entonces nunca se intersecan (es decir, no tienen puntos en común) o son la misma recta (esto es, tienen un número infinito de puntos en común). En el ejemplo 1.1.1 las rectas tienen pendientes de $\frac{3}{2}$ y $-\frac{5}{2}$, respectivamente, por lo que no son paralelas y tienen un solo punto en común (2, 1). En el ejemplo 1.1.2, las rectas son paralelas (tienen pendiente 1) y coincidentes. En el ejemplo 1.1.3, las rectas son paralelas y distintas. Estas relaciones se ilustran en la figura 1.2.

Ahora se procederá a resolver el sistema (1.1.1) formalmente. Se tiene

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Se deben analizar los siguientes casos:

Caso I Si $a_{12} = a_{22} = 0$, el sistema sólo tiene una incógnita, que es x.

Caso II Si $a_{11} = a_{21} = 0$, el sistema sólo tiene una incógnita, que es y.

Caso III Si $a_{12} = 0$ y $a_{11} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$, entonces $x = \frac{b_1}{a_{11}}$, y se puede usar la segunda ecuación para despejar y.

Caso IV Si $a_{22} = 0$ y $a_{11} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$ y $a_{21} \neq 0$, entonces $x = \frac{b_2}{a_{21}}$, y se puede usar la primera ecuación para despejar y.

Caso V Si $a_{11} = 0$ y $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$, entonces $y = \frac{b_1}{a_{12}}$, y se puede usar la segunda ecuación para despejar x.

Caso VI Si $a_{21} = 0$ y $a_{11} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$, entonces $y = \frac{b_2}{a_{22}}$, y se puede usar la primera ecuación para despejar x.

El último caso necesita un desarrollo más detallado, de modo que consideremos que todos los coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son diferentes a cero.

Si se multiplica la primera ecuación por a_{22} y la segunda por a_{12} se tiene

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y &= a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y &= a_{12}b_2 \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Sistemas equivalentes

Antes de continuar observe que los sistemas (1.1.1) y (1.1.5) son **equivalentes**. Esto quiere decir que cualquier solución del sistema (1.1.1) es una solución del sistema (1.1.5) y viceversa. Ello se concluye directamente de la propiedad B, suponiendo que la constante c sea diferente de cero. Después, si en (1.1.5) se resta la segunda ecuación de la primera, se obtiene

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \tag{1.1.6}$$

Observe que si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, entonces se puede dividir entre este término para obtener

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Después se puede sustituir este valor de x en el sistema (1.1.1) para despejar y, y así se habrá encon-

Se ha demostrado lo siguiente:

> Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, entonces el sistema (1.1.1) tiene una **solución única**.

¿Cómo se relaciona esta afirmación con lo que se analizó anteriormente? En el sistema (1.1.1) se puede ver que la pendiente de la primera recta es $-\frac{a_{11}}{a_{12}}$ y que la pendiente de la segunda es $-\frac{a_{21}}{a_{22}}$. En los problemas 41, 42 y 43 se pide al lector que demuestre que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ si y sólo si las rectas son paralelas (es decir, tienen la misma pendiente). De esta manera se sabe que si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, las rectas no son paralelas y el sistema tiene una solución única.

Lo que se acaba de analizar puede formularse en un teorema. En secciones posteriores de este capítulo y los siguientes se harán generalizaciones de este teorema, y se hará referencia a él como el "teorema de resumen" conforme se avance en el tema. Una vez que se hayan demostrado todas sus partes se podrá estudiar una relación asombrosa entre varios conceptos importantes del álgebra lineal.

Teorema 1.1.1 Teorema de resumen (punto de vista 1)

El sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

de dos ecuaciones con dos incógnitas x y y no tiene solución, tiene una solución única o tiene un número infinito de soluciones. Esto es:

i) Tiene una solución única si y sólo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

ii) No tiene solución o tiene un número infinito de soluciones, si y sólo si

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Los sistemas de m ecuaciones con n incógnitas se estudian en la sección 1.2 y se verá que siempre ocurre lo mismo con respecto a su solución, es decir, que no tienen solución, o que tienen una solución única o un número infinito de soluciones.

AUTOEVALUACIÓN 1.1

I) De las siguientes afirmaciones con respecto a la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, ¿cuál de ellas no es verdadera?

a) Es un par ordenado que satisface ambas ecuaciones.
b) Su gráfica consiste en el (los) punto(s) de intersección de las gráficas de las ecuaciones.
c) Su gráfica es la abscisa de las gráficas de las ecuaciones.
d) Si el sistema es inconsistente, no existe una solución.

II) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para un sistema inconsistente de dos ecuaciones lineales?

a) No existe una solución.
b) La gráfica del sistema está sobre el eje y.
c) La gráfica de la solución es una recta.

III) ¿Cuál de las aseveraciones que siguen es cierta para el siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ 4x + y &= 7 \end{aligned}$$

a) El sistema es inconsistente.
b) La solución es $(-1, 2)$.
c) La solución se encuentra sobre la recta $x = 2$.
d) Las ecuaciones son equivalentes.

IV) De las siguientes ecuaciones que se presentan, ¿cuál de ellas es una segunda ecuación para el sistema cuya primera ecuación es $x - 2y = -5$ si debe tener un número infinito de soluciones?

a) $6y = 3x + 15$ *b*) $6x - 3y = -15$

c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ *d*) $\frac{3}{2}x = 3y + \frac{15}{2}$

V) ¿Cuál de las gráficas de los siguientes sistemas es un par de rectas paralelas?

a) $\begin{aligned} 3x - 2y &= 7 \\ 4y &= 6x - 14 \end{aligned}$ *b*) $\begin{aligned} x - 2y &= 7 \\ 3x &= 4 + 6y \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 3x - 2y &= 6 \end{aligned}$ *d*) $\begin{aligned} 5x + y &= 1 \\ 7y &= 3x \end{aligned}$

Respuestas a la autoevaluación

I) *c*)   **II)** *a*)   **III)** *c*)   **IV)** *a*)   **V)** *b*)

PROBLEMAS 1.1

En los problemas 1 a 18 encuentre las soluciones (si las hay) de los siguientes sistemas dados. En cada caso calcule el valor de $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

1. $\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 3x - y &= -2 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 2x + 3y &= 3 \\ -2x - 3y &= -3 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 4x + 5y &= 0 \\ -2x - y &= 3 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} -2x &= 1 \\ 4x - 3y &= 0 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 3x + 5y &= -1 \\ 5x + 3y &= 3 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 3x - 7y &= -5 \\ 4x - 3y &= -2 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 7x + 4y &= 1 \\ -7x - 4y &= -3 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 7x + 4y &= 0 \\ -7x - 4y &= 0 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} 6x - 3y &= 5 \\ 9x + 9y &= 18 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 9x - 3y &= -3 \\ -2x + 4y &= 1 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} -2x + 3y &= 3 \\ 2x - 3y &= -3 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ -2x + 4y &= -2 \end{aligned}$

15. $-7x + 5y = 2$
$5x = 10$

16. $ax + by = c$
$ax - by = c$

17. $ax + by = c$
$bx + ay = c$

18. $ax - by = c$
$bx + ay = d$

19. Encuentre las condiciones sobre a y b tales que el sistema en el problema 16 tenga una solución única.

20. Encuentre las condiciones sobre a, b y c tales que el sistema en el problema 17 tenga un número infinito de soluciones.

21. Encuentre las condiciones sobre a, b, c y d tales que el sistema en el problema 18 no tenga solución.

22. Considere al sistema de ecuaciones $\begin{matrix} ax + y = 3 \\ x - y = 4 \end{matrix}$. ¿Para qué valores de a el sistema tiene solución única? ¿Para qué valores de a el sistema no tiene solución? ¿Para qué valores de a el sistema tiene un número infinito de soluciones?

En los problemas 23 a 28 encuentre el punto de intersección (si hay uno) de las dos rectas.

23. $-4x + 2y = 1$; $4x - 2y = 1$

24. $-4x + 2y = -1$; $4x - 2y = 1$

25. $-7x - 3y = -1$; $49x - 21y = -7$

26. $-2y - 3x = 7$; $-9y + 5y = -2$

27. $\pi x + y = 0$; $\sqrt{2}x - 5y = -1$

28. $\sqrt{3}x - \sqrt{5}y = 1$; $\sqrt{5}x - \sqrt{3}y = 0$

Sea L una recta y $L_\perp$ la recta perpendicular L que pasa a través de un punto P. La **distancia** de la recta L al punto P se define como la distancia* entre P y el punto de intersección de L y $L_\perp$ (vea figura 1.2).

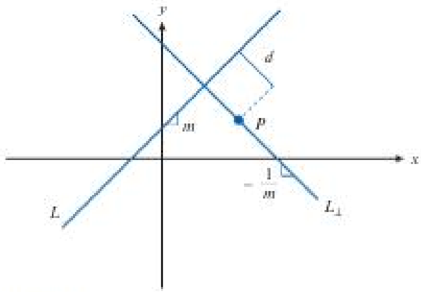


Figura 1.3
Distancia de la recta L al punto P.

En los problemas 29 a 34 encuentre la distancia entre la recta dada y el punto.

29. $x + 3y = -4$; $(2, -3)$

30. $-5x + 6y = 2$; $(1, 3)$

31. $2x - 4y = -42$; $(7, -21)$

32. $7x + 5y = 6$; $(0, 0)$

33. $3x + 7y = 0$; $(-2, -8)$

34. $11x - 12y = 5$; $(0, 4)$

35. Encuentre la distancia entre intersección de las rectas $2m + 3n = 2$ y $-4m - 2n = 1$ con la recta $3m = -2n$.

36. Encuentre la distancia entre la recta paralela a $-3x + 4y = -5$ y que pasa por el punto $(-1, -1)$, y el punto de intersección de las rectas $-7x + 2y = 4$ y $2x - 8y = -1$.

*37. Pruebe que la distancia entre el punto (x_1, y_1) y la recta $ax + by = c$ está dada por

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

38. Suponga que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. Demuestre que las rectas dadas en el sistema de ecuaciones (1.1.1) son paralelas. Suponga que $a_{11} \neq 0$ o $a_{12} \neq 0$ y $a_{21} \neq 0$ o $a_{22} \neq 0$.

39. Si existe una solución única al sistema (1.1.1) muestre que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

40. Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ demuestre que el sistema (1.1.1) tiene una solución única.

41. En un zoológico hay aves (de dos patas) y bestias (de cuatro patas). Si el zoológico contiene 60 cabezas y 200 patas, ¿cuántas aves y bestias viven en él?

42. Una tienda de helados vende sólo helados con soda y malteadas. Se pone 1 onza de jarabe y 4 onzas de helado en un helado con soda, y 1 onza de jarabe y 3 onzas de helado en una malteada. Si la tienda usa 4 galones de helado y 5 cuartos de jarabe en un día, ¿cuántos helados con soda y cuántas malteadas vende? [*Sugerencia:* 1 cuarto = 32 onzas, 1 galón = 4 cuartos.]

43. La compañía Sunrise Porcelain fabrica tazas y platos de cerámica. Para cada taza o plato un trabajador mide una cantidad fija de material y la pone en la máquina que los forma, de donde pasa al vidriado y secado automático. En promedio, un trabajador necesita tres minutos para iniciar el proceso de una taza y dos minutos para el de un plato. El material para una taza cuesta ¢25 y el material para un plato cuesta ¢20. Si se asignan $44 diarios para la producción de tazas y platos, ¿cuántos deben fabricarse de cada uno en un día de trabajo de 8 horas, si un trabajador se encuentra trabajando cada minuto y se gastan exactamente $44 en materiales?

44. Conteste la pregunta del problema 43 si los materiales para una taza y un plato cuestan ¢15 y ¢10, respectivamente, y se gastan $24 en 8 horas de trabajo.

45. Conteste la pregunta del problema 44 si se gastan $25 en 8 horas de trabajo.

1.2 *m* ecuaciones con *n* incógnitas: eliminación de Gauss-Jordan y gaussiana

En esta sección se describe un método para encontrar todas las soluciones (si es que existen) de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Al hacerlo se verá que, igual que en el caso de 2×2, estos sistemas o bien no tienen solución, tienen una solución única o tienen un número infinito de soluciones. Antes de llegar al método general se verán algunos ejemplos sencillos. Como variables, se usarán x_1, x_2, x_3, etc., en lugar de $x, y, z, \ldots$ porque la generalización es más sencilla si se usa la notación con subíndices.

EJEMPLO 1.2.1 Solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: solución única

Resuelva el sistema

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$$

SOLUCIÓN ► En este caso se buscan tres números x_1, x_2, x_3, tales que las tres ecuaciones en (1.2.1) se satisfagan. El método de solución que se estudiará será el de simplificar las ecuaciones como se hizo en la sección 1.1, de manera que las soluciones se puedan identificar de inmediato. Se comienza por dividir la primera ecuación entre 2. Esto da

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \qquad \textbf{(1.2.2a)}$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \qquad \textbf{(1.2.2b)}$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \qquad \textbf{(1.2.2c)}$$

Como se vio en la sección 1.1, al sumar dos ecuaciones se obtiene una tercera ecuación equivalente. Esta nueva ecuación puede sustituir a cualquiera de las dos ecuaciones del sistema que se usaron para obtenerla. Primero se simplifica el sistema (1.2.2) multiplicando ambos lados de la ecuación (1.2.2*a*) por –4 y sumando esta nueva ecuación a la ecuación (1.2.2*b*). Esto da

$$\begin{array}{r} -4x_1 - 8x_2 - 12x_3 = -36 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ \hline -3x_2 - 6x_3 = -12 \end{array}$$

La ecuación $-3x_2 - 6x_3 = -12$ es la nueva ecuación (1.2.2*b*) y el sistema ahora es

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -3x_2 - 6x_3 &= -12 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Nota

Como se puede ver por el desarrollo anterior, se ha *sustituido* la ecuación $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$ por la ecuación $-3x_2 - 6x_3 = -12$. En este ejemplo y otros posteriores se sustituirán ecuaciones con otras más sencillas hasta obtener un sistema cuya solución se pueda identificar de inmediato.

Entonces, la ecuación (1.2.2*a*) se multiplica por –3 y se suma a la ecuación (1.2.2*c*), lo que da por resultado:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \qquad \textbf{(1.2.3a)}$$
$$-3x_2 - 6x_3 = -12 \qquad \textbf{(1.2.3b)}$$
$$-5x_2 - 11x_3 = -23 \qquad \textbf{(1.2.3c)}$$

Observe que en el sistema (1.2.3) se ha eliminado la variable x_1 de las ecuaciones (1.2.3*b*) y (1.2.3*c*). Después se divide la ecuación (1.2.3*b*) por –3:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \qquad \textbf{(1.2.4a)}$$
$$x_2 + 2x_3 = 4 \qquad \textbf{(1.2.4b)}$$
$$-5x_2 - 11x_3 = -23 \qquad \textbf{(1.2.4c)}$$

Se multiplica la ecuación (1.2.4*b*) por –2 y se suma a la ecuación (1.2.4*a*); después se multiplica la ecuación (1.2.4*b*) por 5 y se suma a la ecuación (1.2.4*c*):

$$x_1 - x_3 = 1 \qquad \textbf{(1.2.5a)}$$
$$x_2 + 2x_3 = 4 \qquad \textbf{(1.2.5b)}$$
$$-x_3 = -3 \qquad \textbf{(1.2.5c)}$$

Ahora se multiplica la ecuación (1.2.5*c*) por –1:

$$x_1 - x_3 = 1 \qquad \textbf{(1.2.6a)}$$
$$x_2 + 2x_3 = 4 \qquad \textbf{(1.2.6b)}$$

Por último, se suma la ecuación (1.2.6*c*) a la ecuación (1.2.6*a*) y después se multiplica la ecuación (1.2.6*c*) por –2 y se suma a la ecuación (1.2.6*b*) para obtener el siguiente sistema, el cual es equivalente al sistema (1.2.1):

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 4 \\ x_2 \qquad &= -2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Ésta es la solución única para el sistema. Se escribe en la forma (4, –2, 3). El método que se usó se conoce como **eliminación de Gauss-Jordan**.[3]

Eliminación de Gauss-Jordan

Antes de seguir con otro ejemplo es conveniente resumir lo que se hizo en éste:

i) Se dividió la primera ecuación, entre una constante, para hacer el coeficiente de x_1 igual a 1.

ii) Se "eliminaron" los términos en x_1 de la segunda y tercera ecuaciones. Esto es, los coeficientes de estos términos se volvieron cero al multiplicar la primera ecuación por las constantes adecuadas y sumándola a la segunda y tercera ecuaciones, respectivamente, de manera que al sumar las ecuaciones una de las incógnitas se eliminaba.

iii) Se dividió la segunda ecuación entre una constante, para hacer el coeficiente de x_2 igual a 1 y después se usó la segunda ecuación para "eliminar" los términos en x_2 de la primera y tercera ecuaciones, de manera parecida a como se hizo en el paso anterior.

iv) Se dividió la tercera ecuación entre una constante, para hacer el coeficiente de x_3 igual a 1 y después se usó esta tercera ecuación para "eliminar" los términos de x_3 de la primera y segunda ecuaciones.

Cabe resaltar el hecho de que, en cada paso, se obtuvieron sistemas equivalentes. Es decir, cada sistema tenía el mismo conjunto de soluciones que el precedente. Esto es una consecuencia de las propiedades A y B de la página 2.

Matriz

Antes de resolver otros sistemas de ecuaciones es conveniente introducir una notación que simplifica la escritura de cada paso del procedimiento mediante el concepto de **matriz**. Una matriz es un arreglo rectangular de números y éstas se estudiarán con gran detalle al inicio de la sección 2.1. Por ejemplo, los coeficientes de las variables x_1, x_2, x_3 en el sistema (1.2.1) se pueden escribir como los elementos de una matriz A, llamada **matriz de coeficientes** del sistema:

Matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{1.2.7}$$

Matriz de $m \times n$

Una matriz con m renglones y n columnas se llama una **matriz de $m \times n$**. El símbolo $m \times n$ se lee "m por n". El estudio de matrices constituye gran parte de los capítulos restantes de este libro. Por la conveniencia de su notación para la resolución de sistemas de ecuaciones, las presentamos aquí.

Matriz aumentada

Al usar la notación matricial, el sistema (1.2.1) se puede escribir como la **matriz aumentada**

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \tag{1.2.8}$$

[3] Recibe este nombre en honor del gran matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855) y del ingeniero alemán Wilhelm Jordan (1844-1899). Vea la semblanza bibliográfica de Gauss en la página 21. Jordan fue un experto en investigación geodésica tomando

Ahora es posible introducir cierta terminología. Se ha visto que multiplicar (o dividir) los dos lados de una ecuación por un número diferente de cero da por resultado una nueva ecuación equivalente. Más aún, si se suma un múltiplo de una ecuación a otra del sistema se obtiene otra ecuación equivalente. Por último, si se intercambian dos ecuaciones en un sistema de ecuaciones se obtiene un sistema equivalente. Estas tres operaciones, cuando se aplican a los renglones de la matriz aumentada que representa un sistema de ecuaciones, se denominan **operaciones elementales por renglones**.

Operaciones elementales por renglones

Operaciones elementales por renglones

Las tres operaciones elementales por renglones aplicadas a la matriz aumentada que representa un sistema de ecuaciones son:

Operaciones elementales por renglones

i) Multiplicar (o dividir) un renglón por un número diferente de cero.
ii) Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.
iii) Intercambiar dos renglones.

El proceso de aplicar las operaciones elementales por renglones para simplificar una matriz aumentada se llama **reducción por renglones**.

Reducción por renglones

NOTACIÓN

1. $R_i \to cR_i$ quiere decir "reemplaza el i-ésimo renglón por ese mismo renglón multiplicado por c". [Para multiplicar el i-ésimo renglón por c se multiplica cada número en el i-ésimo renglón por c.]
2. $R_j \to R_j + cR_i$ significa sustituye el j-ésimo renglón por la suma del renglón j más el renglón i multiplicado por c.
3. $R_i \rightleftarrows R_j$ quiere decir "intercambiar los renglones i y j".
4. $A \to B$ indica que las matrices aumentadas A y B son **equivalentes**; es decir, que los sistemas que representan tienen la misma solución.

Matrices aumentadas equivalentes

En el ejemplo 1.2.1 se vio que al usar las operaciones elementales por renglones i) y ii) varias veces, se puede obtener un sistema cuyas soluciones estén dadas en forma explícita. Ahora se repiten los pasos del ejemplo 1.2.1 usando la notación que se acaba de introducir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -11 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

De nuevo se puede "ver" de inmediato que la solución es $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

EJEMPLO 1.2.2 Solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: número infinito de soluciones

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 30 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN ► Para resolver este sistema se procede como en el ejemplo 1.2.1, esto es, primero se escribe el sistema como una matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right)$$

Después se obtiene, sucesivamente,

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esto es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Hasta aquí se puede llegar. Se tienen sólo dos ecuaciones para las tres incógnitas x_1, x_2 y x_3, y por lo tanto existe un número infinito de soluciones. Para comprobar esto se elige a x_3 como parámetro y se despejan a x_1 y x_2 en términos de x_3. Entonces $x_2 = 4 - 2x_3$ y $x_1 = 1 + x_3$. Ésta será una solución para cualquier número x_3. Se escribe esta solución en la forma $(1 + x_3, 4 - 2x_3, x_3)$. Por ejemplo, si $x_3 = 0$, se obtiene la solución $(1, 4, 0)$. Para $x_3 = 10$ se obtiene la solución $(11, -16, 10)$, y por ello para cada valor de x_3 habrá una solución distinta.

EJEMPLO 1.2.3 Sistema inconsistente

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 6x_2 + 7x_3 &= 15 \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

SOLUCIÓN ► La matriz aumentada para este sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

El elemento 1,1 de la matriz no se puede hacer 1 como antes porque al multiplicar 0 por cualquier número real el resultado es 0. En su lugar se puede usar la operación elemental por renglones iii) intercambiar dos renglones, para obtener un número distinto a cero en la posición 1,1. Se puede intercambiar el renglón 1 con cualquiera de los otros dos; sin embargo, al intercambiar los renglones 1 y 3 queda un 1 en esa posición. Al hacerlo se obtiene lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \rightleftarrows R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Es necesario detenerse aquí porque, como se ve, las últimas dos ecuaciones son

$$\begin{aligned} -2x_2 - 3x_3 &= -5 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

lo cual es imposible (si $-2x_2 - 3x_3 = -5$, entonces $2x_2 + 3x_3 = 5$, no 4), por lo que no existe alguna solución. Se puede proceder como en los últimos dos ejemplos para obtener una forma más estándar:

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_2]{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Ahora la última ecuación es $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$, lo cual también es imposible ya que $0 \neq -1$. Así, el sistema (1.2.9) no tiene solución. En este caso se dice que el sistema es **inconsistente**.

Definición 1.2.1

Sistemas inconsistentes y consistentes

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **inconsistente** si no tiene solución. Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **consistente** si tiene al menos una solución.

Se analizarán de nuevo estos tres ejemplos. En el ejemplo 1.2.1 se comenzó con la matriz de coeficientes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

En el proceso de reducción por renglones, A_1 se "redujo" a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo 1.2.2 se comenzó con

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

y se terminó con

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo 1.2.3 se comenzó con

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

y se terminó con

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices R_1, R_2, R_3 se denominan **formas escalonadas reducidas por renglones** de las matrices A_1, A_2 y A_3, respectivamente. En general, se tiene la siguiente definición:

Definición 1.2.2

Forma escalonada reducida por renglones y pivote

Una matriz se encuentra en la **forma escalonada reducida por renglones** si se cumplen las siguientes condiciones:

i) Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz.

ii) El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no todos son cero es 1.

iii) Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en el renglón de abajo está más hacia la derecha que el primer 1 en el renglón de arriba.

iv) Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón (si lo hay) se llama **pivote** para ese renglón.

Nota

La condición iii) se puede reescribir como "el pivote en cualquier renglón está a la derecha del pivote del renglón anterior".

EJEMPLO 1.2.4 Cinco matrices en la forma escalonada reducida por renglones

Las siguientes matrices están en la forma escalonada reducida por renglones:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ \end{pmatrix}$

Las matrices i) y ii) tienen tres pivotes; las otras tres matrices tienen dos pivotes.

Definición 1.2.3

Forma escalonada por renglones

Una matriz está en la forma escalonada por renglones si se cumplen las condiciones i), ii) y iii) de la definición 1.2.2.

EJEMPLO 1.2.5 Cinco matrices en la forma escalonada por renglones

Las siguientes matrices se encuentran en la forma escalonada por renglones:

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ii)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{iv)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{v)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En el siguiente ejemplo se muestra cómo dos matrices en forma escalonada por renglones son equivalentes entre sí. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Esto significa que cualquier matriz que sea equivalente por renglones a la matriz A también lo es a la matriz B.

Como se vio en los ejemplos 1.2.1, 1.2.2 y 1.2.3, existe una fuerte relación entre la forma escalonada reducida por renglones y la existencia de la solución única para el sistema. En el ejemplo 1.2.1 dicha forma para la matriz de coeficientes (es decir, en las primeras tres columnas de la matriz aumentada) tenían un 1 en cada renglón y existía una solución única. En los ejemplos 1.2.2 y 1.2.3 la forma escalonada reducida por renglones de la matriz de coeficientes tenía un renglón de ceros y el sistema no tenía solución o tenía un número infinito de soluciones. Esto siempre es cierto en cualquier sistema de ecuaciones con el mismo número de ecuaciones e incógnitas. Pero antes de estudiar el caso general se analizará la utilidad de la forma escalonada por renglones de una matriz. Es posible resolver el sistema en el ejemplo 1.2.1 reduciendo la matriz de coeficientes a esta forma.

Nota

Por lo general, la forma escalonada por renglones de una matriz no es única. Es decir, una matriz puede ser equivalente, en sus renglones, a más de una matriz en forma escalonada por renglones.

Observación 1

La diferencia entre estas dos formas debe ser evidente a partir de los ejemplos. En la forma escalonada por renglones, todos los números abajo del primer 1 en un renglón son cero. En la forma escalonada reducida por renglones, todos los números abajo y arriba del primer 1 de un renglón son cero. Así, la forma escalonada reducida por renglones es más exclusiva. Esto es, en toda matriz en forma escalonada reducida por renglones se encuentra también la forma escalonada por renglones, pero el inverso no es cierto.

Observación 2

Siempre se puede reducir una matriz a la forma escalonada reducida por renglones o a la forma escalonada por renglones realizando operaciones elementales por renglones. Esta reducción se vio al obtener la forma escalonada reducida por renglones en los ejemplos 1.2.1, 1.2.2 y 1.2.3.

EJEMPLO 1.2.6 Solución de un sistema mediante eliminación gaussiana

Resuelva el sistema del ejemplo 1.2.1 reduciendo la matriz de coeficientes a la forma escalonada por renglones.

SOLUCIÓN ►

Se comienza como antes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & -3 & -6 & | & -12 \\ 0 & -5 & -11 & | & -23 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 5 & -11 & | & -23 \end{pmatrix}$$

Hasta aquí, este proceso es idéntico al anterior; pero ahora sólo se hace cero el número (–5) que está debajo del primer 1 en el segundo renglón:

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & -1 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Sustitución hacia atrás

Eliminación gaussiana

La matriz aumentada del sistema (y los coeficientes de la matriz) se encuentran ahora en la forma escalonada por renglones y se puede ver de inmediato que $x_3 = 3$. Después se usa la **sustitución hacia atrás** para despejar primero x_2 y después x_1. La segunda ecuación queda $x_2 + 2x_3 = 4$. Entonces $x_2 + 2(3) = 4$ y $x_2 = -2$. De igual manera, de la primera ecuación se obtiene $x_1 + 2(-2) + 3(3) = 9$ o $x_1 = 4$. Así, de nuevo se obtiene la solución (4, –2, 3). El método de solución que se acaba de emplear se llama **eliminación gaussiana**.

Se cuenta con dos métodos para resolver los ejemplos de sistemas de ecuaciones:

i) Eliminación de Gauss-Jordan

Se reduce por renglón la matriz aumentada a la forma escalonada reducida por renglones usando el procedimiento descrito en la página 10.

ii) Eliminación gaussiana

Se reduce por renglón la matriz aumentada a la forma escalonada por renglones, se despeja el valor de la última incógnita y después se usa la sustitución hacia atrás para las demás incógnitas.

¿Cuál método es más útil? Depende; al resolver sistemas de ecuaciones en una computadora se prefiere el método de eliminación gaussiana porque significa menos operaciones elementales por renglones. De hecho, como se verá en el apéndice C, para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas usando la eliminación de Gauss-Jordan se requieren aproximadamente $\frac{n^3}{2}$ sumas y multiplicaciones, mientras que la eliminación gaussiana requiere sólo $\frac{n^3}{3}$ sumas y multiplicaciones. La solución numérica de los sistemas de ecuaciones se estudiará en el apéndice D. Por otro lado, a veces es esencial obtener la forma escalonada reducida por renglones de una matriz (una de éstas se estudia en la sección 2.4). En estos casos la eliminación de Gauss-Jordan es el método preferido.

Ahora estudiaremos la solución de un sistema general de m ecuaciones con n incógnitas. La mayor parte de las soluciones de los sistemas se hará mediante la eliminación de Gauss-Jordan debido a que en la sección 2.4 esto se necesitará. Debe tenerse en mente, sin embargo, que la eliminación gaussiana suele ser un enfoque más conveniente.

El sistema general $m \times n$ (de m ecuaciones con n incógnitas) está dado por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad & \quad \vdots \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

En el sistema (1.2.10) todos los coeficientes a_{ij} y b_i son números reales dados. El problema es encontrar todos los conjuntos de n números, denotados por $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$, que satisfacen cada una de las m ecuaciones en (1.2.10). El número a_{ij} es el coeficiente de la variable x_j en la i-ésima ecuación.

Es posible resolver un sistema de m ecuaciones con n incógnitas haciendo uso de la eliminación de Gauss-Jordan o gaussiana. En seguida se proporciona un ejemplo en el que el número de ecuaciones e incógnitas es diferente.

EJEMPLO 1.2.7 Solución de un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 6 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN ► Este sistema se escribe como una matriz aumentada y se reduce por renglones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 19 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Hasta aquí se puede llegar. La matriz de coeficiente se encuentra en forma escalonada reducida por renglones. Es evidente que existe un número infinito de soluciones. Los valores de las variables x_3 y x_4 se pueden escoger de manera arbitraria. Entonces $x_2 = 2 + 8x_3 + 2x_4$ y $x_1 = -2 - 19x_3 - 7x_4$. Por lo tanto, todas las soluciones se representan por $(-2 - 19x_3 - 7x_4, 2 + 8x_3 + 2x_4, x_3, x_4)$. Por ejemplo, si $x_3 = 1$ y $x_4 = 2$ se obtiene la solución $(-35, 14, 1, 2)$.

Al resolver muchos sistemas es evidente que los cálculos se vuelven fastidiosos. Un buen método práctico es usar una calculadora o computadora siempre que las fracciones se compliquen. Debe hacerse notar, sin embargo, que si los cálculos se llevan a cabo en una computadora o calculadora pueden introducirse errores de "redondeo". Este problema se analiza en el apéndice C.

EJEMPLO 1.2.8 Un problema de administración de recursos

Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento A, 1 unidad del alimento B y 2 unidades del alimento C. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento A, 4 del B y 5 del C. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento A, 1 unidad del alimento B y 5 unidades del C. Cada semana se proporcionan al lago 25 000 unidades del alimento A, 20 000 unidades del alimento B y 55 000 del C. Si suponemos que los peces se comen todo el alimento, ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

SOLUCIÓN ► Sean x_1, x_2 y x_3 el número de peces de cada especie que hay en el ambiente del lago. Si utilizamos la información del problema se observa que x_1 peces de la especie 1 consu-

25 000 = suministro total por semana de alimento A. Si se obtiene una ecuación similar para los otros dos alimentos se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25\,000 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 20\,000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 55\,000 \end{aligned}$$

La matriz aumentada del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 25\,000 \\ 1 & 4 & 1 & | & 20\,000 \\ 2 & 5 & 5 & | & 55\,000 \end{pmatrix}$$

Utilizando la reducción de Gauss-Jordan

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 25\,000 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5\,000 \\ 0 & -1 & 5 & | & 5\,000 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to R_1 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 40\,000 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5\,000 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Nota

El sistema de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones. Sin embargo, el problema de administración de recursos tiene sólo un número finito de soluciones porque x_1, x_2 y x_3 deben ser enteros positivos y existen nada más 3 001 enteros en el intervalo [5 000, 8 000]. (Por ejemplo, no puede haber 5 237.578 peces.)

Por consiguiente, si x_3 se elige arbitrariamente, se tiene un número infinito de soluciones dada por $(40\,000 - 5x_3, x_3 - 5\,000, x_3)$. Por supuesto, se debe tener $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$. Como $x_2 = x_3 - 5\,000 \geq 0$, se tiene $x_3 \geq 5\,000$. Esto significa que $0 \leq x_1 \leq 40\,000 - 5(5\,000) = 15\,000$. Por último, como $40\,000 - 5x_3 \geq 0$ se tiene que $x_3 \leq 8\,000$. Esto significa que las poblaciones que pueden convivir en el lago con todo el alimento consumido son

$$\begin{aligned} x_1 &= 40\,000 - 5x_3 \\ x_2 &= x_3 - 5\,000 \\ 5\,000 &\leq x_3 \leq 8\,000 \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $x_3 = 6\,000$, entonces $x_1 = 10\,000$ y $x_2 = 1\,000$.

Análisis de insumo y producto (opcional)

Los siguientes dos ejemplos muestran la forma en la cual pueden surgir los sistemas de ecuaciones en el modelado económico.

EJEMPLO 1.2.9 El modelo de insumo-producto de Leontief

Modelo de insumo-producto de Leontief

Un modelo que se usa con frecuencia en economía es el **modelo de insumo-producto de Leontief**.[4] Suponga un sistema económico que tiene n industrias. Existen dos tipos de demandas en cada industria: la primera, una demanda *externa* desde afuera del sistema. Por ejemplo, si el sistema es un país, la demanda externa puede provenir de otro país. Segunda, la demanda que hace una industria a otra industria en el mismo sistema. Por ejemplo, en Estados Unidos la industria automotriz demanda parte de la producción de la industria del acero.

[4] Así llamado en honor del economista estadounidense Wassily W. Leontief, quien utilizó este modelo en su trabajo pionero "Quan-

Suponga que e_i representa la demanda externa ejercida sobre la *i*-ésima industria. Suponga que a_{ij} representa la demanda interna que la *j*-ésima industria ejerce sobre la *i*-ésima industria. De forma más concreta, a_{ij} representa el número de unidades de producción de la industria *i* que se necesitan para producir una unidad de la industria *j*. Sea x_i la producción de la industria *i*. Ahora suponga que la producción de cada industria es igual a su demanda (es decir, no hay sobreproducción). La demanda total es igual a la suma de demandas internas y externas. Por ejemplo, para calcular la demanda interna de la industria 2 se observa que la industria 1 necesita a_{21} unidades de producción de la industria 2 para producir una unidad de su propia producción. Si la producción de la industria 1 es x_1, entonces $a_{21}x_1$ se trata de la cantidad total que necesita la industria 1 de la industria 2. De esta forma, la demanda interna total sobre la industria 2 es $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$.

Al igualar la demanda total a la producción de cada industria se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 &= x_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 &= x_2\\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \;\; &\;\; \vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + e_n &= x_n
\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

O bien, reescribiendo el sistema (1.2.11) en la forma del sistema (1.2.10) se obtiene

$$\begin{aligned}
(1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n &= e_1\\
-a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n &= e_2\\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \;\; &\;\; \vdots\\
-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (1 - a_{nn})x_n &= e_n
\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

El sistema (1.2.12) de *n* ecuaciones con *n* incógnitas es de fundamental importancia en el análisis económico.

EJEMPLO 1.2.10 **El modelo de Leontief aplicado a un sistema económico con tres industrias**

Suponga que las demandas externas en un sistema económico con tres industrias son 10, 25 y 20, respectivamente. Considere que $a_{11} = 0.2$, $a_{12} = 0.5$, $a_{13} = 0.15$, $a_{21} = 0.4$, $a_{22} = 0.1$, $a_{23} = 0.3$, $a_{31} = 0.25$, $a_{32} = 0.5$ y $a_{33} = 0.15$. Encuentre la producción de cada industria de manera que la oferta sea exactamente igual a la demanda.

SOLUCIÓN ► En este caso $n = 3$, $1 - a_{11} = 0.8$, $1 - a_{22} = 0.9$ y $1 - a_{33} = 0.85$ y el sistema (1.2.12) es

$$\begin{aligned}
0.8x_1 - 0.5x_2 - 0.15x_3 &= 10\\
-0.4x_1 + 0.9x_2 - 0.3x_3 &= 25\\
-0.25x_1 - 0.5x_2 + 0.85x_3 &= 20
\end{aligned}$$

Si se resuelve el sistema por método de eliminación de Gauss-Jordan en una calculadora o computadora, trabajando con cinco decimales en todos los pasos, se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 110.30442\\ 0 & 1 & 0 & 118.74070\\ 0 & 0 & 1 & 125.81787 \end{array}\right)$$

La geometría de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (opcional)

En la figura 1.2, de la página 3, se observó que se puede representar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas mediante dos líneas rectas. Si las rectas tienen un solo punto de intersección, el sistema tiene una solución única; si coinciden, existe un número infinito de soluciones; si son paralelas, no existe una solución y el sistema es inconsistente.

Algo similar ocurre cuando se tienen tres ecuaciones con tres incógnitas.

Como se verá en la sección 4.5, la gráfica de la ecuación $ax + by + cz = d$ en el espacio de tres dimensiones es un plano.

Considere el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} ax - by - cz &= d \\ ex - fy - gz &= h \\ jx - ky - lz &= m \end{aligned} \qquad \textbf{(1.2.13)}$$

en donde $a, b, c, d, e, f, g, h, j, k, l$ y m son constantes y al menos una de ellas en cada ecuación es diferente de cero.

Cada ecuación en (1.2.13) es la ecuación de un plano. *Cada* solución (x, y, z) al sistema de ecuaciones debe ser un punto en *cada uno* de los tres planos. Existen seis posibilidades:

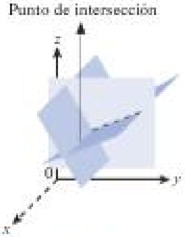


Figura 1.4
Los tres planos se intersecan en un solo punto.

1. Los tres planos se intersecan en un solo punto. Por lo que existe una solución única para el sistema (vea la figura 1.4).
2. Los tres planos se intersecan en la misma recta, por lo que cada punto sobre la recta es una solución y el sistema tiene un número infinito de soluciones (vea la figura 1.5).
3. Los tres planos coinciden. Entonces cada punto sobre el plano es una solución y se tiene un número infinito de soluciones.
4. Dos de los planos coinciden e intersecan a un tercer plano en la recta. Entonces cada punto sobre la recta es una solución y existe un número infinito de soluciones (vea la figura 1.6).
5. Al menos dos de los planos son paralelos y distintos, por lo que ningún punto puede estar en ambos y no hay solución. El sistema es inconsistente (vea la figura 1.7).
6. Dos de los planos coinciden en una recta L. El tercer plano es paralelo a L (y no contiene a L), de manera que ningún punto del tercer plano se encuentra en los dos primeros. No existe una solución y el sistema es inconsistente (vea la figura 1.8).

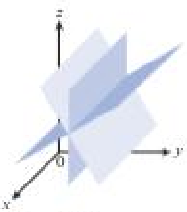


Figura 1.5
Los tres planos se intersecan en la misma recta.

En todos los casos el sistema tiene una solución única, un número infinito de soluciones o es inconsistente. Debido a la dificultad que representa dibujar planos con exactitud, no ahondaremos más en el tema. No obstante, es útil analizar cómo las ideas en el plano xy se pueden extender a espacios más complejos.

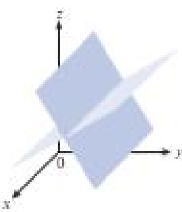


Figura 1.6

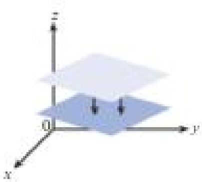


Figura 1.7

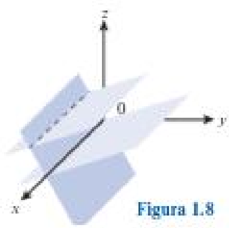


Figura 1.8

Semblanza de...

Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

Carl Friedrich Gauss
(Library of Congress)

Carl Friedrich Gauss es considerado el matemático más grande del siglo XIX, además de uno de los tres matemáticos más importantes de todos los tiempos (Arquímedes y Newton son los otros dos).

Gauss nació en Brunswick, Alemania, en 1777. Su padre, un obrero amante del trabajo, era excepcionalmente obstinado y no creía en la educación formal, e hizo todo lo que pudo para evitar que Gauss fuera a una buena escuela. Por fortuna para Carl (y para las matemáticas), su madre, a pesar de que tampoco contaba con educación, apoyó a su hijo en sus estudios y se mostró orgullosa de sus logros hasta el día de su muerte a la edad de 97 años.

Gauss era un niño prodigio. A los tres años encontró un error en la libreta de cuentas de su padre. Hay una anécdota famosa de Carl, cuando tenía apenas 10 años de edad y asistía a la escuela local de Brunswick. El profesor solía asignar tareas para mantener ocupados a los alumnos y un día les pidió que sumaran los números del 1 al 100. Casi al instante, Carl colocó su pizarra boca abajo con la palabra "listo". Después, el profesor descubrió que Gauss era el único con la respuesta correcta, 5 050. Gauss había observado que los números se podían arreglar en 50 pares que sumaban cada uno 101 $(1 + 100, 2 + 99,$ etc.) y $50 \times 101 = 5050$. Años más tarde, Gauss bromeaba diciendo que podía sumar más rápido de lo que podía hablar.

A la edad de 15 años, el Duque de Brunswick se fijó en él y lo convirtió en su protegido. El duque lo ayudó a ingresar en el Brunswick College en 1795 y, tres años después, a entrar a la Universidad de Göttingen. Indeciso entre las carreras de matemáticas y filosofía, Gauss eligió las matemáticas después de dos descubrimientos asombrosos. Primero inventó el método de mínimos cuadrados una década antes de que Legendre publicara sus resultados. Segundo, un mes antes de cumplir 19 años, resolvió un problema cuya solución se había buscado durante más de dos mil años: Gauss demostró cómo construir, con tan sólo una regla y un compás, un polígono regular cuyo número de lados no es múltiplo de 2, 3 o 5.*

El 30 de marzo de 1796, fecha de este descubrimiento, comenzó un diario que contenía como primera nota las reglas de construcción de un polígono regular de 17 lados. El diario, que contiene los enunciados de 146 resultados en sólo 19 páginas, es unos de los documentos más importantes en la historia de las matemáticas.

Tras un corto periodo en Göttingen, Gauss fue a la Universidad de Helmstädt y, en 1798, a los 20 años, escribió su famosa disertación doctoral. En ella dio la primera demostración matemática rigurosa del teorema fundamental del álgebra que indica que todo polinomio de grado n tiene, contando multiplicidades, exactamente n raíces. Muchos matemáticos, incluyendo a Euler, Newton y Lagrange, habían intentado probar este resultado.

Gauss hizo un gran número de descubrimientos en física al igual que en matemáticas. Por ejemplo, en 1801 utilizó un nuevo procedimiento para calcular, a partir de unos cuantos datos, la órbita del asteroide Ceres. En 1833 inventó el telégrafo electromagnético junto con su colega Wilhelm Weber (1804-1891). Aunque realizó trabajos brillantes en astronomía y electricidad, la que resultó asombrosa fue la producción matemática de Gauss. Hizo contribuciones fundamentales al álgebra y la geometría y en 1811 descubrió un resultado que llevó a Cauchy a desarrollar la teoría de la variable compleja. En este libro se le encuentra en el método de eliminación de Gauss-Jordan. Los estudiantes de análisis numérico aprenden la cuadratura gaussiana: una técnica de integración numérica.

Gauss fue nombrado catedrático de matemáticas de Göttingen en 1807 e impartió clase hasta su muerte en 1855. Aún después de su muerte, su espíritu matemático siguió acosando a los matemáticos del siglo XIX. Con frecuencia, un importante resultado nuevo ya había sido descubierto por Gauss y se podía encontrar en sus notas inéditas.

En sus escritos matemáticos Gauss era un perfeccionista y tal vez sea el último gran matemático que conocía prácticamente todo acerca de su área. Al afirmar que una catedral no era una catedral hasta que se quitara el último de los andamios, ponía todo su empeño para que cada uno de sus trabajos publicados fuera completo, conciso y elegante. Usaba un sello en el que se veía un árbol con unas cuantas frutas y la leyenda *pauca sed matura* (pocas pero maduras). Gauss creía también que las matemáticas debían reflejar el mundo real. A su muerte, Gauss fue honrado con una medalla conmemorativa que llevaba la inscripción "George V, Rey de Hanover, al príncipe de los matemáticos".

* De manera más general, Gauss probó que un polígono regular de n lados se puede construir con regla y compás si y sólo si n es de

RESUMEN 1.2

- Para un sistema lineal

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + b_n \end{matrix}$$

la **matriz de coeficientes** es:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- El sistema lineal anterior se puede escribir utilizando la **matriz aumentada**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

También se puede escribir como $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Una matriz está en la **forma escalonada reducida por renglones** si se cumplen las cuatro condiciones dadas en la página 14.
- Una matriz está en la **forma escalonada por renglones** si se cumplen las primeras tres condiciones de la página 15.
- Un **pivote** es el primer componente diferente de cero en el renglón de una matriz en forma escalonada por renglones o en forma escalonada reducida por renglones.
- Las tres **operaciones elementales por renglones** son

  1. Multiplicar el renglón i de una matriz por c: $R_i \to cR_i$, donde $c \neq 0$.

  2. Multiplicar el renglón i por c y sumarlo al renglón j: $R_j \to R_j + cR_i$.

  3. Permutar los renglones i y j: $R_i \rightleftarrows R_j$.

- La **eliminación de Gauss-Jordan** es el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones mediante la reducción por renglones de la matriz aumentada a la forma escalonada reducida por renglones, usando el proceso descrito en la página 11.
- La **eliminación gaussiana** es el proceso de resolver un sistema de ecuaciones al reducir por renglones la matriz aumentada a la forma escalonada por renglones y utilizando la **sustitución hacia atrás**.
- Un sistema lineal que tiene una o más soluciones se denomina **consistente**.
- Un sistema lineal que no tiene solución se denomina **inconsistente**.
- Un sistema lineal que tiene soluciones cuenta con, ya sea, una **solución única** o un **número infinito de soluciones**.

AUTOEVALUACIÓN 1.2

I) ¿Cuál de los siguientes sistemas tiene la matriz de coeficientes dada a la derecha?

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $3x + 2y = -1$
$y = 5$
$2x = 1$

b) $3x + 2z = 10$
$2x + y = 0$
$-x + 5y + z = 5$

c) $3x = 2$
$2x + y = 0$
$-x + 5y = 1$

d) $3x + 2y - z = -3$
$y + 5z = 15$
$2x + z = 3$

II) ¿Cuál de las siguientes es una operación elemental por renglones?

a) Reemplazar un renglón con un múltiplo diferente de cero de ese renglón.
b) Sumar una constante diferente de cero a cada elemento en un renglón.
c) Intercambiar dos columnas.
d) Reemplazar un renglón con una suma de renglones y una constante diferente de cero.

III) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre la matriz dada?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Está en la forma escalonada por renglón.
b) No está en la forma escalonada por renglón porque el cuarto número en el renglón

c) No está en la forma escalonada por renglón porque el primer elemento diferente de cero en el renglón 1 es 3.

d) No está en la forma escalonada por renglón porque la última columna contiene un cero.

IV) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre el sistema dado?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 2z &= 6 \\ 3x + 3y + 3z &= 10 \end{aligned}$$

a) Tiene una solución única $x = 1, y = 1, z = 1$.

b) Es inconsistente.

c) Tiene un número infinito de soluciones.

Respuestas a la autoevaluación

I) *d*) **II)** *a*) **III)** *c*) **IV)** *b*)

PROBLEMAS 1.2

En los problemas del 1 al 27 utilice el método de eliminación de Gauss-Jordan para encontrar, si existen, todas las soluciones de los sistemas dados.

1. $$\begin{aligned} 9x_1 + 9x_2 - 7x_3 &= 6 \\ -7x_1 \qquad - x_3 &= -10 \\ 9x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 45 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 5x_1 \qquad + 8x_3 &= -16 \\ 3x_1 + 2x_2 - 10x_3 &= -3 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 5x_1 + 28x_2 - 26x_3 &= -8 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 &= -3 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} -1x_1 + \qquad x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -3 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

15.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 1 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4 \\ -3x_1 + 14x_2 - 4x_3 - 7x_4 &= 3 \\ 6x_1 + 12x_2 - 12x_3 - 6x_4 &= 5 \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= -9 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= -8 \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 5 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -2 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 8x_2 - 9x_3 + 15x_4 &= 1 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 4 \\ -3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 9x_4 &= 12 \end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ -3x_1 + x_4 &= 1 \\ 5x_2 + 8x_3 &= 3 \end{aligned}$$

22.
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_4 &= 1 \\ 4x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= -3 \end{aligned}$$

23.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 1x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_3 + 3x_4 &= -1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_4 &= -3 \end{aligned}$$

24.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}$$

25.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 &= -3 \end{aligned}$$

27.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 11 \end{aligned}$$

En los problemas 28 a 39 determine si la matriz dada se encuentra en la forma escalonada por renglones (pero no en la forma escalonada reducida por renglones), en la forma escalonada reducida por renglones o en ninguna de las dos.

28. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **29.** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **30.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **31.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **33.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **34.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **35.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ **37.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **38.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **39.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

En los problemas 40 a 48 utilice las operaciones elementales con renglones para reducir las matrices dadas a la forma escalonada por renglones y a la forma escalonada reducida por renglones.

40. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **41.** $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ **42.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} 7 & 14 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **44.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & 5 & 8 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **45.** $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 & 16 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ **47.** $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & 12 \\ 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **48.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & -14 & -1 \end{pmatrix}$

49. En el ejemplo 1.2.8 suponga que cada semana se suministran al lago 15 000 unidades del primer alimento, 10 000 del segundo y 44 000 del tercero. Considerando que todo alimento se consume, ¿qué población de las tres especies puede coexistir en el lago? ¿Existe una solución única?

50. En el modelo de insumo-producto de Leontief del ejemplo 1.2.9 suponga que se tienen tres industrias. Más aún, suponga que $e_1 = 10$, $e_2 = 15$, $e_3 = 30$, $a_{11} = \frac{1}{3}$, $a_{12} = \frac{1}{2}$, $a_{13} = \frac{1}{6}$, $a_{21} = \frac{1}{4}$, $a_{22} = \frac{1}{4}$, $a_{23} = \frac{1}{8}$, $a_{31} = \frac{1}{12}$, $a_{32} = \frac{1}{3}$, $a_{33} = \frac{1}{6}$. Encuentre la producción de cada industria tal que la oferta sea igual a la demanda.

51. Una inversionista le afirma a su corredor de bolsa que todas sus acciones pertenecen a tres compañías: Delta Airlines, Hilton Hotels y McDonald's, y que hace dos días su valor bajó \$350 pero que ayer aumentó \$600. El corredor recuerda que hace dos días el precio de las acciones de Delta Airlines bajó \$1 por cada una, mientras que las de Hilton Hotels bajaron \$1.50, pero que el precio de las acciones de McDonald's subió \$0.50. También recuerda que ayer el precio de las acciones de Delta subió \$1.50 por acción, el de las de Hilton Hotels bajó otros \$0.50 por acción y las de McDonald's subieron \$1. Demuestre que el corredor no cuenta con la información suficiente para calcular el número de acciones que posee la inversionista en cada compañía, pero que si ella dice tener 200 acciones de McDonald's, el corredor pueda calcular el número de acciones que posee en Delta y en Hilton.

52. Un viajero que acaba de regresar de Europa gastó \$30 diarios en Inglaterra, \$20 diarios en Francia y \$20 diarios en España por concepto de hospedaje. En comida gastó \$20 diarios en Inglatecomida y $140 en gastos adicionales durante su viaje por estos tres países. Calcule el número de días que pasó el viajero en cada país o muestre que los registros son incorrectos debido a que las cantidades gastadas no son compatibles una con la otra.

53. Una embotelladora de refrescos desea cotizar la publicidad de sus productos en televisión, radio y revista; se tienen tres propuestas del plan de medios de acuerdo con el presupuesto asignado acerca de la cantidad de anuncios por medio en el transcurso de un mes. En el primer presupuesto cada anuncio en televisión tiene un coste de $250 000, en radio $5 000 y en revista $30 000. En el segundo presupuesto $310 000, $4 000 y $15 000 y en el último presupuesto $560 000, $10 000 y $35 000. Los totales por presupuesto son los siguientes: $21 795 000, $31 767 000 y $61 225 000. Determine la cantidad de anuncios cotizados por cada medio.

54. Un agente secreto sabe que 60 equipos aéreos, que consisten en aviones de combate y bombarderos, se encuentran estacionados en cierto campo aéreo secreto. El agente quiere determinar cuántos de los 60 equipos son aviones de combate y cuántos son bombarderos. Existe, además, un tipo de cohete que llevan ambos aviones; el de combate lleva seis de ellos y el bombardero sólo dos. El agente averigua que se requieren 250 cohetes para armar a todos los aviones del campo aéreo. Aún más, escucha que se tiene el doble de aviones de combate que de bombarderos en la base (es decir, el número de aviones de combate menos dos veces el número de bombarderos es igual a cero). Calcule el número de aviones de combate y bombarderos presentes en el campo aéreo o muestre que la información del agente es incorrecta debido a su inconsistencia.

55. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 - 20x_3 &= a \\ -6x_1 - 11x_2 - 21x_3 &= b \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= c \end{aligned}$$

Encuentre las condiciones sobre a, b y c para que el sistema sea inconsistente.

56. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= a \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= b \\ -5x_1 - 5x_2 + 21x_3 &= c \end{aligned}$$

Muestre que es inconsistente si $c \neq 2a - 3b$.

***57.** Considere el sistema general de las tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Encuentre las condiciones sobre los coeficientes a_{ij} para que el sistema tenga una solución única.

58. Para el siguiente sistema de ecuaciones lineales determine para qué valores de K el sistema tiene solución única; justifique su solución.

$$\begin{aligned} Kx + y + z &= 1 \\ x + Ky + z &= 1 \end{aligned}$$

59. En el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x - y - Kz &= 0 \\ x - y - 2z &= 1 \\ -x + 2z &= K \end{aligned}$$

determine para qué valores de K el sistema:

a) No tiene solución.
b) Tiene un número infinito de soluciones.
c) Tiene solución única.

1.3 Introducción a MATLAB

Ejemplos de comandos básicos de MATLAB

MATLAB distingue minúsculas y mayúsculas. Esto quiere decir que a y A representan variables diferentes.

Introducción de matrices. Las columnas de un renglón se separan por espacios o comas, y los renglones de una columna se separan por ";" :

`A = [1 2 3;4 5 6;7 8 9]`	Produce la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

`A = [1 2 3;`
`4 5 6;`
`7 8 9]`
	También produce la matriz A anterior

`B = [3;6;1]`	Produce la matriz $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Notación para formar las submatrices y las matrices aumentadas.

`f = A(2,3)`	f es el elemento en el segundo renglón, tercera columna de A.
`d = A(3,:)`	d es el tercer renglón de A.
`d = A(:,3)`	d es la tercera columna de A.
`C = A([2 4]),:)`	C es la matriz que consiste del segundo y cuarto renglones de A.
`C = [A b]`	Forma una matriz aumentada $C = (A\,|\,b)$.

Ejecución de operaciones por renglones.

`A(2,:) = 3*A(2,:)`	$R_2 \rightarrow 3R_2$
`A(2,:) = A(2,:)/4`	$R_2 \rightarrow \frac{1}{4}R_2$
`A([2 3],:) = A([3 2],:)`	Intercambia los renglones 2 y 3
`A(3,:) = A(3,:) + 3*A(2,:)`	$R_3 \rightarrow R_3 + 3R_2$

Nota. Todos estos comandos cambian a la matriz A. Si se quiere conservar la matriz original y llamar a C a la matriz cambiada,

```
C = A
C(2,:) = 3*C(2,:)
```

Generación de matrices aleatorias.

`A = rand(2,3)`	matriz 2×3 con elementos entre 0 y 1
`A = 2*rand(2,3)-1`	matriz 2×3 con elementos entre -1 y 1
`A = 4*(2*rand(2)-1)`	matriz 2×2 con elementos entre -4 y 4
`A = round(10*rand(3))`	matriz 3×3 con elementos enteros entre 0 y 10
`A = 2*rand(3)-1+i*(2*rand(3)-1)`	matriz 3×3 con elementos complejos $a + bi$, a y b entre -1 y 1

Otras características usuales

Help. Si se teclea `help` seguido de un comando MATLAB en la ventana de comandos de MATLAB, aparecerá una descripción del comando en la ventana de comandos.

Doc. Si se teclea `doc` seguido de un comando de MATLAB en la ventana de comando de MATLAB, aparecerá una descripción del comando en la ventana de ayuda.

EJEMPLO 1.3.1

`help :` o `doc :` dará una descripción de cómo se pueden usar ":" en MATLAB.

`help rref` o `doc rref` dará una descripción del comando `rref`.

Uso de las flechas. En la ventana de comandos de MATLAB, al usar la flecha hacia arriba se desplegarán los comandos anteriores. Se pueden usar las flechas para localizar un comando y modificarlo y al oprimir la tecla "enter" se ejecuta el comando modificado.

Comentarios. Si se inicia una línea con el símbolo %, MATLAB interpretará esto como una línea de comentario.

EJEMPLO 1.3.2

```
% Éste es un comentario.
```

Supresión de pantalla. Uso de ;. Si se quiere realizar un comando de MATLAB y no se desea ver los resultados desplegados, se finaliza el comando con un `;` (punto y coma).

Para líneas largas. Para extender una línea se usa "`...`".

```
a= [ 1 2 3 4 5 6 7 8 ...
   9 10]
```

Para desplegar dígitos adicionales. Por lo general MATLAB despliega sólo 4 dígitos después del punto decimal. De esta forma, $\frac{4}{3}$ aparece como 1.3333. El comando `format long` hace que se desplieguen de 14 a 15 dígitos después del punto decimal. Así, si se da `format long` y después $\frac{4}{3}$, en la pantalla aparecerá 1.33333333333333. Para regresar al despliegue normal de 4 dígitos después del punto decimal se da el comando `format short`.

Tutoría de MATLAB

1. Escriba en la ventana de comando de MATLAB las siguientes matrices de dos maneras diferentes.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

2. Forme C como la matriz aumentada $(A \mid b)$, es decir, $C = (A \mid b)$ para las matrices A y $\mathbf{b}$ anteriores.

3. Forme D, una matriz aleatoria de 3×5 con elementos entre -3 y 3.

4. Forme B, una matriz aleatoria de 3×4 con elementos entre -3 y 6. Sugerencia: puede utilizar la ecuación de una recta para trasladar el intervalo $[0, 1]$ al intervalo $[-3$ y $6]$.

5. Forme K, la matriz obtenida a partir de B intercambiando los renglones 1 y 4. No cambie B (primero haga $K = B$. Después cambie K).

6. Realice la operación por renglones $R_3 \rightarrow R_3 + (-\frac{1}{2})R_1$, sobre la matriz C.

7. Dé el comando `B([2 4],[1 3])`. Use una línea de comentario para describir la submatriz de B que se produce.

8. Forme U, la matriz que consiste sólo en la tercera y cuarta columnas de D.

9. ***(Ventana de comandos.)*** Use la flecha hacia arriba para localizar el comando que utilizó para realizar la operación por renglones en **6**. Modifique la línea para realizar la operación con renglones $R_2 \rightarrow R_2 + 3R_1$ y después ejecútela.

10. Forme T, una matriz aleatoria de 8×7 con elementos entre 0 y 1. Dé el comando `doc colon`. A partir de la información dada en la descripción que aparece, determine el uso de la notación ":" para formar, tan eficientemente como sea posible, la matriz S que consiste en los renglones 3 al 8 de la matriz T.

11. Encuentre la forma escalonada reducida por renglones de C usando el comando `rref`. Use este comando para escribir un sistema equivalente de ecuaciones.

PROBLEMAS 1.3

EJERCICIOS CON MATLAB 1.3

1. Para cada uno de los sistemas contenidos en los problemas 1, 2, 5, 8 y 16 de esta sección, dé la matriz aumentada y use el comando `rref` para encontrar la forma escalonada reducida por renglones. Muestre que cada uno de estos sistemas tiene una solución única y que la solución está contenida en la última columna de esta forma escalonada de la matriz aumentada. Use la notación ":" para asignar la variable x a la solución, es decir, a la última columna de esta forma escalonada por renglones de la matriz aumentada. [***Sugerencia:*** Puede emplear el comando `end`, utilice `doc end` para obtener información acerca del comando.]

2. Para cada uno de los sistemas contenidos en los problemas 4, 7, 13 y 18 de esta sección, dé la matriz aumentada y use el comando `rref` para encontrar la forma escalonada reducida por renglones. Concluya que ninguno de estos sistemas tiene solución.

3. Las matrices siguientes son matrices aumentadas de los sistemas de ecuaciones que tienen un número infinito de soluciones.

   a) Para cada una, dé la matriz y use el comando `rref` para encontrar la forma escalonada reducida por renglones.

i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 9 & -5 \end{array}\right)$ ii) $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 4 & -8 & -3 \\ -1 & 5 & 3 & -0 & 2 \end{array}\right)$

iii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 9 & -5 & 7 \\ 4 & 7 & -13 & -2 \\ 2 & 2 & 8 & 9 \\ 10 & 16 & 18 & 5 \end{array}\right)$ iv) $\left(\begin{array}{ccccc|c} -8 & 1 & 0 & -10 & -3 & 1 \\ -6 & 4 & 5 & -10 & 7 & 4 \\ -2 & -3 & -5 & 0 & -10 & -3 \\ -14 & 5 & 5 & -20 & 4 & 5 \\ -6 & -6 & -9 & -9 & -8 & -2 \end{array}\right)$

El resto de este problema necesita trabajo con papel y lápiz.

b) Para cada forma escalonada reducida por renglones, localice los pivotes dibujando un círculo a su alrededor.

c) Para cada forma escalonada reducida, escriba el sistema de ecuaciones equivalente.

d) Resuelva cada uno de estos sistemas equivalentes eligiendo variables arbitrarias que serán las variables correspondientes a las columnas que no tienen pivote en la forma escalonada reducida por renglones (estas variables son las variables naturales que han de escogerse de manera arbitraria).

4. Los siguientes sistemas representan la intersección de tres planos en el espacio de tres dimensiones. Use el comando `rref` como herramienta para resolver los sistemas. ¿Qué se puede concluir sobre la categoría de los planos?

i) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \\ -3x_2 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

iii) $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

iv) $$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

5. Utilice MATLAB para reducir las matrices aumentadas siguientes a la forma escalonada reducida por renglones paso por paso realizando las operaciones por renglones (vea los ejemplos de comandos para operaciones por renglones en la introducción a MATLAB en la página 30). Verifique sus resultados usando el comando `rref`.

Nota

Si llamó A a la matriz original, haga $D = A$ al principio y verifique `rref (D)`.

i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right)$ ii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$

iii) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -4 & -19 \\ -3 & -6 & 12 & 2 & -12 & -8 \\ 1 & 2 & -2 & -4 & -5 & -34 \end{array}\right)$

Vea en el problema 1 de la sección 2.1 de MATLAB del siguiente capítulo más opciones sobre la realización de operaciones por renglones.

6. *a*) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & 12 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad$ *b*) $= \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$

Muestre que el sistema con la matriz aumentada [A **b**] no tiene solución.

b) Sea `b = 2*A(:,1)+A(:,2)+3*A(:,3)-4*A(:,4)`. Recuerde que `A(:,1)` es la primera columna de `A`. Así se están sumando múltiplos de columnas de `A`. Use `rref [A b]` para resolver este sistema.

c) Utilice la flecha hacia arriba para regresar a la línea de `b = 2*A(:,1) +` etc. y edítela para obtener un nuevo conjunto de coeficientes. Una vez más, resuelva el sistema con la matriz aumentada `[A b]` para esta nueva `b`. Repita dos nuevas elecciones de coeficientes.

d) ¿Sería posible poner coeficientes para los que no tengan una solución? La pregunta se refiere a si la siguiente conjetura es cierta: un sistema `[A b]` tiene solución si `b` es una suma de múltiplos de las columnas de `A`. ¿Por qué?

e) Pruebe esta conjetura para `A` formada por:

```
A = 2*rand(5)-1
A(:,3) = 2*A(:,1)-A(:,2)
```

7. Suponga que se quieren resolver varios sistemas de ecuaciones en los que las matrices de coeficientes (los coeficientes de las variables) son los mismos pero tienen lados derechos diferentes. Formando una matriz aumentada más grande se podrán resolver varios lados derechos. Suponga que `A` es la matriz de coeficientes y que `b` y `c` son dos lados derechos diferentes; asigne `Aug = [A b c]` y encuentre `rref(Aug)`.

a) Resuelva los dos sistemas siguientes.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 9 \\ -2x_1 \quad\quad + 3x_3 &= -7 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 16 \\ -2x_1 \quad\quad + 3x_3 &= 11 \end{aligned}$$

b) Resuelva los tres sistemas siguientes.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + 5x_2 - 11x_3 &= -7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -1 \\ -x_1 + 5x_2 - 11x_3 &= -6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 2 \\ -x_1 + 5x_2 - 11x_3 &= -7 \end{aligned}$$

c) Sea A la matriz de coeficientes del inciso *a*). Elija cualesquiera tres lados derechos de su preferencia. Resuelva.

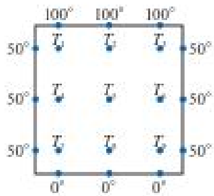
d) Es necesario hacer una observación sobre las soluciones de sistemas *cuadrados*, es decir, sistemas con tantas ecuaciones como variables. Conteste las siguientes preguntas basando sus conclusiones en los incisos *a*) a *c*). (Ponga especial atención a la forma de la parte de los coeficientes de `rref`.)

i) ¿Es posible que un sistema cuadrado tenga una solución única con un lado derecho y un número infinito de soluciones con otro lado derecho? ¿Por qué?

ii) ¿Es posible que un sistema cuadrado tenga una solución única con un lado derecho y no tenga solución con otro?

iii) ¿Es posible que un sistema cuadrado tenga un número infinito de soluciones para un lado

8. **Distribución de calor.** Se tiene una placa rectangular cuyas orillas se mantienen a cierta temperatura. Nos interesa encontrar la temperatura en los puntos interiores. Considere el siguiente diagrama. Hay que hallar aproximaciones para los puntos T_1 a T_9, o sea, la temperatura de los puntos intermedios. Suponga que la temperatura en un punto interior es el promedio de la temperatura de los cuatro puntos que lo rodean: arriba, a la derecha, abajo y a la izquierda.



a) Con esta suposición, establezca un sistema de ecuaciones, considerando primero el punto T_1, después el punto T_2, etc. Reescriba el sistema de manera que todas las variables se encuentren a un lado de la ecuación. Por ejemplo, para T_1 se tiene

$$T_1 = \frac{(100 + T_2 + T_4 + 50)}{4}$$

que se puede reescribir como $4T_1 - T_2 - T_4 = 150$.

Encuentre la matriz de coeficientes y la matriz aumentada. Describa el patrón que observe en la forma de la matriz de coeficientes. Dicha matriz se llama **matriz de banda**. ¿Puede ver de dónde viene el nombre?

b) Resuelva el sistema usando el comando `rref`. Observe que se obtiene una solución única. Use la notación ":" para asignar la solución a la variable `x`.

c) Suponga que `A` es la matriz de coeficientes y `b` es el lado derecho del sistema anterior. Dé el comando `y = A\b`. (La diagonal aquí se llama **diagonal invertida**. No es la diagonal de división.) Compare `y` y `x`.

9. **Modelo de insumo-producto de Leontief**

a) Haga referencia al ejemplo 1.2.10. Resuelva el sistema dado usando el comando `rref` y el comando "\". Observe nuevamente que existe una solución única.

b) Suponga que se tienen tres industrias independientes. La demanda externa para el producto 1 es 300 000; para el producto 2, 200 000, y para el producto 3, 200 000. Suponga que las demandas internas están dadas por

$$a_{11} = .2,\quad a_{12} = .1,\quad a_{13} = .3,\quad a_{21} = .15,\quad a_{22} = .25,\quad a_{23} = .25,$$
$$a_{31} = .1,\quad a_{32} = .05,\quad a_{33} = 0$$

i) ¿Qué le dice $a_{32} = 0.5$?; ¿qué le dice $a_{33} = 0$?

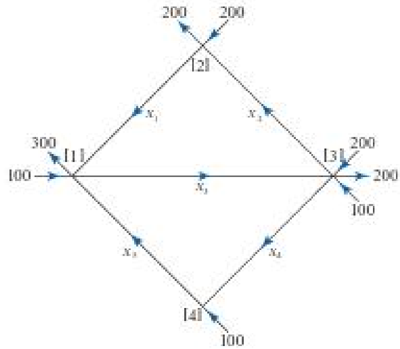
ii) Establezca la matriz aumentada para que el sistema de ecuaciones encuentre que x_i es la producción del artículo i para $i = 1, 2, 3$. PRIMERO VUELVA A LEER EL EJEMPLO 1.2.10.

iii) Resuelva el sistema usando MATLAB. Interprete la solución, es decir, ¿cuánto de cada artículo debe producirse para tener una oferta igual a la demanda?

iv) Suponga que x_i se midió en \$ (dólares de producción) y que está interesado en interpreble `x` a la solución. Dé el comando `format long` (vea la página 29) y después en la ventana de comandos escriba `x seguido de "enter"`. Esto desplegará más dígitos (cuando termine esta parte, dé el comando `format short` para regresar a la forma normal).

10. Flujo de tráfico

a) Considere el siguiente diagrama de una malla de calles de un sentido con vehículos que entran y salen de las intersecciones. La intersección k se denota por $[k]$. Las flechas a lo largo de las calles indican la dirección del flujo del tráfico. Sea x_i el número de vehículos/h que circulan por la calle i. Suponiendo que el tráfico que entra a una intersección también sale, establezca un sistema de ecuaciones que describa el diagrama del flujo de tráfico. Por ejemplo, en la intersección [1], $x_1 + x_5 + 100 = x_3 + 300$, esto es, el tráfico que entra es igual al tráfico que sale, lo que da $x_1 - x_3 + x_5 = 200$.



b) Resuelva el sistema usando el comando `rref`. Habrá un número infinito de soluciones. Escríbalas en términos de las variables que son las naturales para elegirse de manera arbitraria.

c) Suponga que la calle de [1] a [3] necesita cerrarse; es decir, $x_5 = 0$. ¿Puede cerrarse también la calle de [1] a [4] ($x_3 = 0$) sin modificar los sentidos del tránsito? Si no se puede cerrar ¿cuál es la cantidad más pequeña de vehículos que debe poder admitir esta calle (de [1] a [4])?

11. Ajuste de polinomios a puntos. Si se tienen dos puntos en el plano con coordenadas x distintas, existe una recta única $y = c_1x + c_2$ que pasa por ambos puntos. Si se tienen tres puntos en el plano con coordenadas x distintas, existe una parábola única

$$y = c_1x^2 + c_2x + c_3$$

que pasa por los tres puntos. Si se tienen $n + 1$ puntos en el plano con coordenadas x distintas, entonces existe un polinomio de grado n único que pasa a través de los $n + 1$ puntos:

$$y = c_1x^n + c_2x^{(n+1)} + \cdots + c_{n+1}$$

los coeficientes $c_1, \ldots, c_{n+1}$ se pueden encontrar resolviendo un sistema de ecuaciones lineales.

EJEMPLO 1.3.3

Se quiere encontrar c_1, c_2 y c_3, de manera que $y = c_1x^2 + c_2x + c_3$ pase por los puntos P_1, P_2 y P_3.

$$\begin{aligned} 5 &= c_1 2^2 + c_2 2 + c_3 \\ 10 &= c_1 3^2 + c_2 3 + c_3 \\ -3 &= c_1 4^2 + c_2 4 + c_3 \end{aligned}$$

Así, se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 2^2 & 2 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \\ 4^2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema se obtiene $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ 50 \\ -59 \end{pmatrix}$ que indica que la parábola que pasa por cada uno de los puntos es $y = -9x^2 + 50x - 59$. Se dice que la parábola *se ajusta* a los puntos.

a) Para $P_1 = (1, -1)$, $P_2 = (3, 3)$ y $P_3 = (4, -2)$, establezca el sistema de ecuaciones para encontrar los coeficientes de la parábola que se ajusta a los puntos. Sea A la matriz de coeficientes y b el lado derecho. Resuelva el sistema. En un comentario escriba la ecuación de la parábola que se ajusta a los puntos, es decir, que pasa por los tres.

Dé `x = [1;3;4]` y `V = vander(x)`. Compare V con A.

Utilizando `doc vander` describa el funcionamiento del comando `vander`.

b) Para $P_1 = (0, 5)$, $P_2 = (1, -2)$, $P_3 = (3, 3)$ y $P_4 = (4, -2)$, establezca el sistema de ecuaciones, dé la matriz aumentada y utilice MATLAB para resolver el sistema.

Escriba, en un comentario, la ecuación del polinomio cúbico que se ajusta a los cuatro puntos.

Sea `x` el vector columna que contiene las coordenadas x de los puntos P_1 a P_4. Dé `x` y encuentre `V = vander(x)`. Compare `V` con la matriz de coeficientes que encontró al establecer el sistema.

c) Usando algunas características gráficas de MATLAB se pueden visualizar los resultados con los comandos siguientes. Siga estos comandos para los puntos en *a*) y de nuevo para los cuatro puntos en *b*).

Dé `x` como el vector columna de las coordenadas x de los puntos.

Dé `y` como el vector columna de las coordenadas y de los puntos.

Dé los siguientes comandos:

```
V = vander (x)
c = V\y
s = min(x):.01:max(x);
yy = polyval(c,s);
plot(x,y'*',s,yy)
```

El primer comando crea la matriz de coeficientes deseada `(doc vander)`.

El segundo resuelve el sistema obteniendo los coeficientes del polinomio `(doc mldivide)`.

El tercero crea un vector `s` que contiene múltiples elementos, cada uno entre el valor mínimo y máximo de las coordenadas x, de manera que se pueda evaluar el polinomio en muchos puntos para crear una gráfica suave `(doc min, doc max, doc :)`.

El cuarto crea un vector `yy` que contiene las coordenadas y obtenidas evaluando el poli-

El quinto produce una gráfica de los puntos originales (con un símbolo "*") y un dibujo de la gráfica del polinomio (doc plot).

Debe observarse que la gráfica del polinomio pasa a través de los puntos originales (etiquetados con "*").

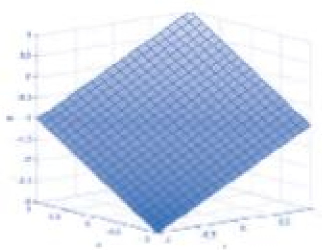
d) Genere x = rand(7,1) y y = rand(7,1) o genere un vector de coordenadas x y un vector de coordenadas y de su preferencia. Asegúrese de cambiar (o elegir) las coordenadas x de manera que sean distintas. Siga los comandos del inciso *c*) para visualizar el ajuste polinomial.

12. Gráfica de planos

Podemos graficar planos en MATLAB de la siguiente forma, considere la ecuación normal de un plano $ax + by + cz = d$ donde a, b, c, d son constantes conocidas. Los siguientes comandos de MATLAB construyen el plano y lo despliegan en una gráfica:

```
% Crea datos x e y entre -1 y 1 espaciados 0.1
[x, y] = meshgrid(-1:0.1:1,-1:0.1:1); %doc meshgrid
% Evalua los puntos de la malla xy en el plano
z = -1/c*(a*x + b*y + c);
% Grafica el plano en una ventana
surf(x,y,z) %Plot the surface
% Incluye etiquetas en los ejes
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z')
```

Como ejemplo, el plano tiene la siguiente gráfica



Grafique los siguientes planos

a) $-x - y + z = 1$ entorno al punto (–2, 4). Sugerencia:

```
[x, y] = meshgrid(-3:0.1:-1,3:0.1:5);
```

b) $3x + 2y - z = 0$ entorno al punto (0, 0).

c) $3x + 2y - z = 0$ en el primer cuadrante.

d) $3x + 2y - z = 0$ y $-x - y + z = 1$ en la misma gráfica. Sugerencia: Después de graficar el primer plano utilice el comando hold on (doc hold on para más información).

e) Elija planos adecuados para reproducir los diferentes casos presentados en las figuras 1.4 a

1.4 Sistemas homogéneos de ecuaciones

Sistemas lineales homogéneos y no homogéneos

Un sistema general de $m \times n$ ecuaciones lineales [sistema (1.2.10)] se llama **homogéneo** si todas las constantes $b_1, b_2, \ldots, b_m$, son cero; si alguna o algunas de las constantes $b_1, \ldots, b_m$ es o son diferentes de cero, decimos que el sistema lineal es **no homogéneo**. Es decir, el sistema general homogéneo está dado por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Los sistemas homogéneos surgen de diferentes formas. Se estudiará un sistema homogéneo en la sección 5.3. En dicha sección se resolverán algunos sistemas homogéneos, de nueva cuenta, mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan.

Como se vio en la sección 1.2, con respecto a las soluciones de los sistemas lineales no homogéneos existen tres posibilidades: que no tenga soluciones, que tenga una solución o que tenga un número infinito de soluciones. Para el sistema general homogéneo la situación es más sencilla.

Solución trivial o solución cero

Soluciones no triviales

Para sistemas generales homogéneos, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ es siempre una solución (llamada **solución trivial** o **solución cero**), por lo que sólo se tienen dos posibilidades: la solución trivial es la única solución o existe un número infinito de soluciones además de ésta. Las soluciones distintas a la solución cero se llaman **soluciones no triviales**.

EJEMPLO 1.4.1 Sistema homogéneo que tiene únicamente la solución trivial

Resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN ► Ésta es la versión homogénea del sistema del ejemplo 1.2.1 en la página 8. Al reducir en forma sucesiva, se obtiene (después de dividir la primera ecuación entre 2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Así, el sistema tiene una solución única (0, 0, 0). Esto es, la única solución al sistema es la trivial.

EJEMPLO 1.4.2 Un sistema homogéneo con un número infinito de soluciones

Resuelva el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN ► Al hacer uso de la eliminación de Gauss-Jordan se obtiene, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -11 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{9}R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 9R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora la matriz aumentada está en la forma escalonada reducida por renglones, y, como tenemos un renglón de ceros, esto nos indica que existe un número infinito de soluciones. Si elegimos a x_3 como parámetro, encontramos que toda solución es de la forma $\left(\frac{1}{9}x_3, \frac{5}{9}x_3, x_3\right)$. Si, por ejemplo, $x_3 = 0$, se obtiene la solución trivial. Si $x_3 = 1$ se obtiene la solución $\left(\frac{1}{9}, \frac{5}{9}\right)$. Si $x_3 = 9\pi$ se obtiene la solución $(\pi, 5\pi, 9\pi)$.

EJEMPLO 1.4.3 Un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene un número infinito de soluciones

Resuelva el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

SOLUCIÓN ► Al reducir por renglones, utilizando el método de Gauss-Jordan se obtiene

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{6}R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} & 0 \end{array}\right)$$

En esta ocasión tenemos más incógnitas que ecuaciones, por lo que hay un número infinito de soluciones. Si elegimos a x_3 como parámetro, encontramos que toda solución es de la forma $\left(\frac{5}{6}x_3, \frac{11}{6}x_3, x_3\right)$.

En términos generales, si hay más incógnitas que ecuaciones, el sistema homogéneo (1.4.1) siempre tendrá un número infinito de soluciones. Para ver esto observe que si sólo tuviera la solución trivial, la reducción por renglones conduciría al sistema

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ x_2 \qquad\qquad &= 0 \\ &\vdots \\ x_n &= 0 \end{aligned}$$

y, posiblemente, algunas ecuaciones adicionales de la forma $0 = 0$. Pero este sistema tiene al menos tantas ecuaciones como incógnitas. Puesto que la reducción por renglones no cambia ni el número de ecuaciones ni el número de incógnitas, se tiene una contradicción en la suposición de que había más incógnitas que ecuaciones. Entonces se tiene el teorema 1.4.1.

Teorema 1.4.1 **Sistemas homogéneos: condición para tener un número infinito de soluciones**

El sistema homogéneo (1.4.1) tiene un número infinito de soluciones si $n > m$, es decir, si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones.

RESUMEN 1.4

- Un sistema **homogéneo** de m ecuaciones con n incógnitas es un sistema lineal de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

- Un sistema lineal homogéneo siempre tiene por solución a la **solución trivial** (o **solución cero**)

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

- Las soluciones para un sistema lineal homogéneo diferentes de la trivial se denominan **soluciones no triviales**.
- El sistema lineal homogéneo anterior tiene un número infinito de soluciones si tiene más incógnitas que ecuaciones ($n > m$)

AUTOEVALUACIÓN 1.4

I) ¿Cuáles de los siguientes sistemas deben tener soluciones no triviales?

a) $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned}$

II) ¿Para qué valores de k tendrá soluciones no triviales el siguiente sistema?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 3y - 4z &= 0 \\ 3x + 4y + kz &= 0 \end{aligned}$$

a) 1 *b)* 2 *c)* 3 *d)* 4 *e)* -3 *f)* 0

Respuestas a la autoevaluación

I) *c)* **II)** *e)*

PROBLEMAS 1.4

En los problemas 1 a 20 encuentre todas las soluciones a los sistemas homogéneos.

1. $$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= 0 \\ -x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ -6x_1 - 3x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_1 - 7x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 3x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} -2x_1 + 7x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 &= 0 \\ -4x_2 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 &= 0 \\ 4x_2 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 6x_2 &= 0 \\ 4x_1 - 12x_2 &= 0 \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} -2x_1 + 6x_2 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -7x_1 + 21x_2 &= 0 \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

20. $$\begin{aligned} 4x_1 + 10x_2 - 6x_3 &= 0 \\ -6x_1 - 9x_2 - 9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

21. Muestre que el sistema homogéneo de ecuaciones

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0$$

tiene un número infinito de soluciones si y sólo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

22. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + kx_3 &= 0 \end{aligned}$$

¿Para qué valor de k tendrá soluciones no triviales?

*23. Considere el sistema homogéneo de 3×3

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Encuentre condiciones sobre los coeficientes a_{ij} tales que la solución trivial sea la única solución.

Ejercicios con MATLAB 1.4

1. *a*) Genere cuatro matrices aleatorias con más columnas (incógnitas) que renglones (ecuaciones).
   b) Use el comando `rref` para encontrar la forma escalonada reducida por renglones de cada una de las matrices aleatorias.
   c) Para cada matriz aleatoria use la fórmula escalonada reducida por renglones para escribir la solución a los sistemas homogéneos asociados. Verifique el teorema 1.4.1, es decir, que en este caso siempre hay un número infinito de soluciones.
   (Para usar MATLAB para la generación de matrices aleatorias, remítase a la sección anterior a los problemas de MATLAB de la sección 1.2.)

2. ¿Cuál es su conclusión acerca de la solución de un sistema homogéneo cuya matriz de coeficiente tiene más renglones (ecuaciones) que columnas (incógnitas)? Resuelva los sistemas homogéneos cuyas matrices de coeficientes se dan en seguida. ¿Los resultados conforman su conclusión?

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

3. Balanceo de reacciones químicas. Al balancear reacciones químicas tales como la de la fotosíntesis

$$CO_2 + H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$$

se buscan enteros positivos x_1, x_2, x_3 y x_4, que no tengan un divisor común diferente de 1, de manera que en

$$x_1(CO_2) + x_2(H_2O) \quad \rightarrow \quad x_3(C_6H_{12}O_6) + x_4(O_2)$$

el número de átomos de cada elemento químico involucrado es el mismo en cada lado de la reacción. El número de átomos de un elemento químico lo indica un subíndice; por ejemplo, en CO_2 hay un átomo de C (carbono) y dos átomos de O (oxígeno). Esto nos lleva a un sistema homogéneo de ecuaciones. ¿Por qué se obtiene un sistema homogéneo de ecuaciones como resultado del "balanceo"?

$$\begin{array}{llcl}
\text{C:} & x_1 & = & 6x_3 \\
\text{O:} & 2x_1 + x_2 & = & 6x_3 + 2x_4 \\
\text{H:} & 2x_2 & = & 12x_3
\end{array}
\quad \text{o} \quad
\begin{array}{rcl}
x_1 - 6x_3 & = & 0 \\
2x_1 + x_2 - 6x_3 - 2x_4 & = & 0 \\
2x_2 - 12x_3 & = & 0
\end{array}$$

Este sistema tiene más incógnitas que ecuaciones, por lo que se espera un número infinito de soluciones. Para resolver el sistema se introduce la matriz aumentada, se usa el comando `rref` y se escribe la solución en términos de las variables arbitrarias. Uno de los requerimientos será elegir las variables arbitrarias de manera que x_1, x_2, x_3 y x_4 sean enteros sin un divisor común diferente de 1.

Para los sistemas que aquí se presentan habrá una variable arbitraria correspondiente a la última columna de la `rref` (forma escalonada reducida por renglones) de la matriz de coeficientes. La notación "`:`" se utiliza para encontrar la elección correcta de variables arbitrarias para producir enteros y asignar la variable `z` a la última columna de la `rref` de la matriz de coeficientes. Se da el comando `xx = rats(z)`. Éste desplegará los números de la columna en forma de fracciones en lugar de decimales. También se puede dar el comando `format rat` y después se despliega `xx` (asegúrese de dar el comando `format short` para regresar a la forma normal).

a) Resuelva el sistema anterior para la reacción de fotosíntesis y encuentre los enteros x_1 a x_4 sin común divisor diferente de 1 que la balancean.

b) Establezca el sistema de ecuaciones homogéneas que balancea la reacción entre:

$$Pb(N_3)_2 + Cr(MnO_4)_2 \quad \rightarrow \quad Cr_2O_3 + MnO_2 + Pb_3O_4 + NO$$

Resuelva el sistema y encuentre los enteros x_1 a x_6 sin divisor común diferente de 1 que balancea la reacción.

APLICACIÓN ESPECIAL I

Flujo del tráfico

Como se verá más tarde en esta aplicación, hay muchas formas en las que el "tráfico" puede fluir. Sin embargo, el uso más común del término se refiere al flujo del tráfico vehicular, y es aquí donde se iniciará.

El estudio del flujo del tráfico no es un concepto académico abstracto, como puede dar fe de ello cualquiera que haya estado al volante en una gran ciudad durante la hora pico. INRIX es una agencia que informa sobre los congestionamientos de tránsito. Emite reportes y estudios de casos, que pueden encontrarse aquí:

Los congestionamientos de tráfico producen no solo un desperdicio de tiempo sino que aumentan la contaminación, y el calentamiento global.

Los reportes de INRIX aseguran que los conductores de las ciudades con los diez peores congestionamientos pasan tres semanas extra al año en sus autos, con respecto a ciudades con menor congestionamiento, perdiendo el tiempo y respirando humos tóxicos.

Se iniciará con un modelo sencillo para estudiar el flujo del tráfico.

Considérese el flujo del tráfico en el diagrama siguiente.

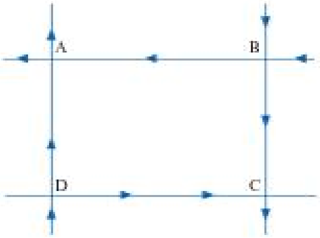


Figura 1

En el modelo, se imponen dos condiciones simplificadoras.

1, Cada una de las cuatro calles que rodean al área son calles de un sentido, con sus direcciones indicadas por las flechas.

2, Hay cuatro intersecciones denotadas A, B, C y D. El número de vehículos que entran a cada intersección es igual al número de vehículos que salen de ella en un momento determinado.

¿Son realistas estos supuestos? Por supuesto que no. En cualquier momento determinado, es muy probable que el número de vehículos que entran es diferente al número de los que salen. Por ejemplo, el tráfico que llega a una gran ciudad puede ser mucho más abundante que el tráfico que sale durante la hora pico de la mañana, y a la inversa en la tarde.

No es realista, pero es útil. Esto es habitual en el MODELADO MATEMÁTICO. Se observa qué sucede en el caso más sencillo y después se intenta ampliar los resultados a casos más realistas, y difíciles.

- Sea que x denote al tráfico entrante en la intersección A
- Sea que y denote al tráfico saliente en la intersección A
- Sea que z denote al tráfico entrante en la intersección B
- Sea que w denote al tráfico saliente en la intersección B
- Sea que u denote al tráfico entrante en la intersección C
- Sea que v denote al tráfico saliente en la intersección C
- Sea que s denote al tráfico entrante en la intersección D
- Sea que t denote al tráfico saliente en la intersección D

Entonces

1. En la intersección A, tráfico entrante = tráfico saliente o $x + y = y + x$
2. En la intersección B, tráfico entrante = tráfico saliente o $z + w = w + z$
3. En la intersección C, tráfico entrante = tráfico saliente o $u + v = v + u$

Este sistema de cuatro ecuaciones en ocho incógnitas tiene un número infinito de soluciones y no es muy interesante, o informativo.

Sin embargo, tres matemáticos en Kumasi, Ghana, lo hicieron realmente muy interesante.[1]

Kumasi es la segunda ciudad más grande de Ghana y sus congestionamientos de tráfico son tan malos como los de Washington DC, San Francisco, Ciudad de México y Londres. Alguna vez, el autor de este libro manejó dos horas para recorrer 100 metros un sábado en la mañana en Kumasi. Y no, no había dónde estacionarse.

Todos coinciden en que la congestión de las calles es un problema grave. Los ingenieros en Kumasi decidieron hacer algo al respecto. Eligieron una red de 4 calles muy congestionadas en Kumasi y contaron el número de autos que se movían por ellas.

Las cuatro calles se ilustran en la Figura 2. Los ingenieros contaron el número de vehículos por hora (vph) entre las 6 am y las 10 pm como base de referencia, y de las 10 am a las 2 pm en la hora pico de media semana. Aquí, x, y, z y w representan el flujo de tráfico en las cuatro intersecciones.

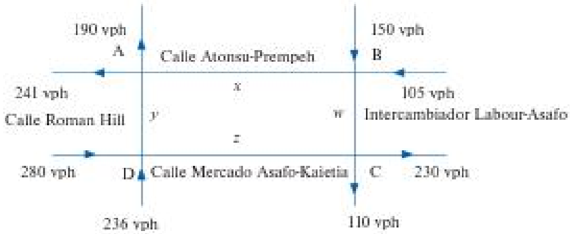


Figura 2
Diagrama de cuatro calles de un sentido en Kumasi.

Este sistema de ecuaciones para el modelo se formuló como sigue:

1. En la intersección A: Tráfico entrante $= x + y$, tráfico saliente $= 241 + 190$, por lo tanto, $x + y = 431$.
2. En la intersección B: Tráfico entrante $= 150 + 105$, tráfico saliente $= x + w$, por lo tanto, $x + w = 255$.
3. En la intersección C: Tráfico entrante $= z + w$, tráfico saliente $= 230 + 110$, por lo tanto, $z + w = 340$.
4. En la intersección D: Tráfico entrante $= 280 + 236$, tráfico saliente $= y + z$, por lo tanto, $y + z = 516$.

Los congestionamientos se anotaron como un sistema de ecuaciones lineales como sigue:

$$\begin{aligned} x + y &= 431 \\ x + w &= 255 \\ z + w &= 340 \\ y + z &= 516 \end{aligned}$$

Se usa entonces el método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver el sistema de ecuaciones. La matriz aumentada y de forma escalonada de renglones del sistema anterior es como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 431 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 255 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 340 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 516 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Operaciones de renglón}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 255 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 176 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 340 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones que corresponde a esta forma escalonada de renglones es:

$$x + w = 255$$
$$y - w = 176$$
$$z + w = 340$$

Expresando cada variable principal en términos de la variable restante, se tiene

$$x = -w + 255$$
$$y = w + 176$$
$$z = -w + 340$$

Si se toma un limite de 100 vph en el intercambiador Labour-Asafo , entonces los valores de x, y y z serán:

$$x = -100 + 255 = 155 \text{ vph}$$
$$y = 100 + 176 = 276 \text{ vph}$$
$$z = -100 + 340 = 240 \text{ vph}$$

Discusión de los resultados

El sistema de modelado de ecuaciones tiene muchas soluciones, y por lo tanto, son posibles muchos flujos de tráfico. Debido a la naturaleza del modelo, un conductor tiene una cierta cantidad de elecciones en la intersección. Considerando el tramo DC (Calle Mercado Asafo-Kaietia), es deseable tener un flujo de tráfico z lo más bajo posible a lo largo de este tramo de la calle. Así, los flujos pueden controlarse a lo largo de varios ramales mediante el uso de semáforos. De acuerdo con el modelo, la tercera ecuación en el sistema muestra que z estará en el mínimo cuando w sea tan grande como sea posible, siempre y cuando no exceda 340. El valor más grande que puede asumirse de w sin causar valores negativos de x, o y es 255. Por lo tanto, el valor más pequeño de w es $-255 + 340$ o 85. Cualquier intervención vial en entre el intercambiador Labour-Asafo a la calle Roman Hill debe permitir un volumen de tráfico de al menos 85 vph. Así, para mantener fluyendo al tráfico deben canalizarse 240 vph entre D y C (Calle Mercado Asafo-Kaietia), 155 vph entre A y B (Calle Atonsu-Prempeh) y 276 vph entre las intersecciones A y D (Calle Roman Hill).

Conclusión

Se ha establecido que el congestionamiento de tráfico en las cuatro calles de un sentido que unen la Calle Labour-Prempeh, la Calle Roman Hill, la Calle Mercado Asafo-Kaietia y el intercambiador Asafo-Labour puede minimizarse si cualquier intervención vial en el intercambiador Labour-Asafoa la calle Roman Hill permite un volumen de tráfico de al menos 85 vph. Así, para mantener fluyendo al tráfico, deben canalizarse 240 vph entre D y C (Calle Mercado Asafo-Kaietia), 155 vph entre A y B (Calle Atonsu-Prempeh) y 276 vph entre las intersecciones A y D (Calle Roman Hill) respectivamente.

Este es un resultado impresionante, pero de valor limitado, porque las cosas nunca son tan sencillas. El tráfico puede estar fluyendo bien en un momento y, debido a un accidente, detenerse.

Otro problema es que los números usados en el problema son promedios. Sin embargo, un promedio de muchas mediciones puede tener muy poco que ver con lo que está sucediendo en un mo-

A continuación, algunas de las formas en las que el flujo del "tráfico" se analiza de maneras diferentes a los automóviles en las calles:

- Flujo de mercancías y personas en las redes de transporte. Esto por supuesto incluye a personas en automóviles, pero también mucho más.
- Flujo de datos en redes de comunicaciones, por ejemplo, líneas telefónicas.
- Flujos de capital en redes de relaciones comerciales.

En su tesis de maestría[2] de la Universidad de Rochester, González Matheus proporciona la estadística y el modelado para el flujo de datos de una red. Sería imposible siquiera tratar de resumir este enorme trabajo en este libro. En su lugar, se muestra una ilustración (figura 3) de qué puede suceder.

Considérese una red fuertemente conectada compuesta por dos puntos de datos. Esto significa que hay dos estados posibles y que cada uno está conectado, o no, al otro. La matriz que representa esta situación está compuesta por ceros y unos, 0 si no hay conexión y un 1 si sí hay conexión.

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

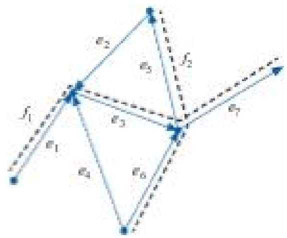


Figura 3

Este tipo de situación se presenta de muchas formas. Puede representar dos de las conexiones de una red telefónica. O puede representar la presencia o ausencia de una señal eléctrica. (Su computadora, en esencia, solo reconoce ceros y unos).

En la vida real las cosas son más complicadas. Puede que haya miles, o incluso millones, de estados posibles, pero la matriz que represente a dos de ellos seguirá teniendo ceros y unos. Sin embargo, cualquier número es posible si se añade el número de formas para pasar del estado l al estado j.

En la Figura 4 se muestra una gráfica de algunas conexiones de internet en una semana.

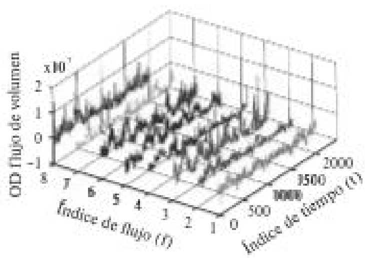
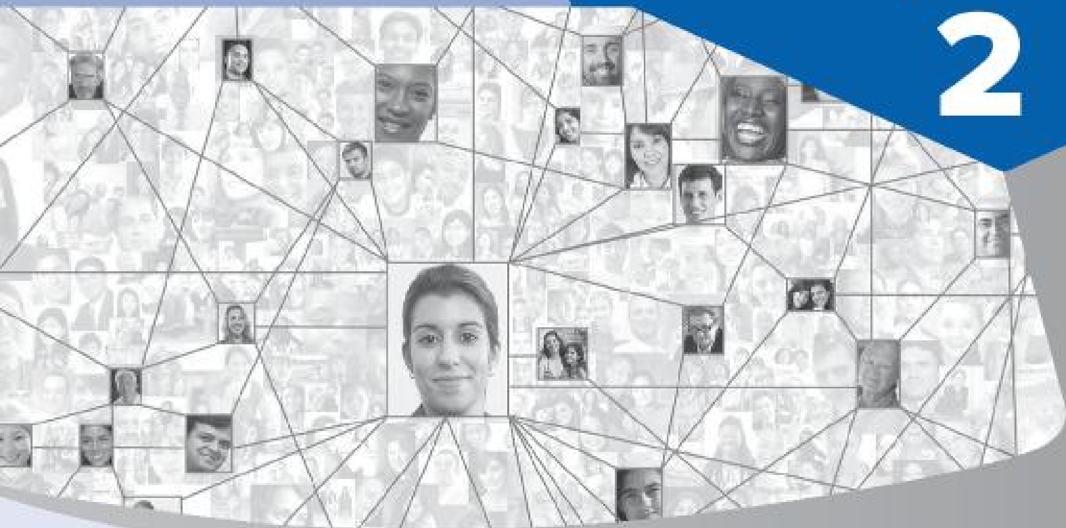


Figura 4

CAPÍTULO

2



John Lund/Blend Images

▲ En el estudio de sistemas complejos, un objeto de interés son las redes formadas por elementos conectados entre sí. La descripción de las conexiones entre elementos suele representarse por una matriz conocida como matriz de interconexión.

Vectores y matrices

Objetivos del capítulo

En este capítulo el estudiante. . .

- Se familiarizará con los vectores y matrices, así como con las operaciones de suma y multiplicación por escalar (sección 2.1).
- Estudiará la definición y las propiedades de la multiplicación entre matrices y vectores (sección 2.2).
- Conocerá la relación entre matrices y vectores con sistemas de ecuaciones, así como el concepto de soluciones a sistemas de ecuaciones homogéneos y no homogéneos (sección 2.3).
- Aprenderá el concepto de inversa de una matriz y su relación con la solución de sistemas de ecuaciones (sección 2.4).
- Entenderá la operación de transposición de una matriz, sus propiedades y el caso de las matrices simétricas (sección 2.5).
- Profundizará en la forma matricial de las operaciones elementales por renglón que pueden aplicarse a matrices en general (sección 2.6).
- Estudiará la factorización de matrices en términos de dos matrices triangulares con características especiales (sección 2.7).
- Ejercitará la aplicación de los sistemas de ecuaciones, matrices y vectores, y analizará algunos conceptos asociados con gráficas dirigidas (sección 2.8).

2.1 Definiciones generales

El estudio de vectores y matrices es la médula del álgebra lineal. El estudio de vectores comenzó esencialmente con el trabajo del matemático irlandés sir William Hamilton (1805-1865).[1] Su deseo de encontrar una forma de representar un cierto tipo de objetos en el plano y el espacio lo llevó a descubrir lo que él llamó *cuaterniones*. Esta noción condujo al desarrollo de lo que ahora se conoce como *vectores*. A lo largo de toda su vida y del resto del siglo XIX hubo un debate considerable sobre la utilidad de los cuaterniones y de los vectores. Al final del siglo el físico inglés lord Kelvin escribió que los cuaterniones, "aun cuando son bellamente ingeniosos, han sido un mal peculiar para todos aquellos que los han manejado de alguna manera y los vectores... nunca han sido de menor utilidad para ninguna criatura".

Pero Kelvin estaba equivocado. En la actualidad casi todas las ramas de la física clásica y moderna se representan mediante el lenguaje de vectores. Los vectores también se usan, cada vez más, en las ciencias biológicas y sociales.[2]

En la página 2 se describió la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas como un par de números (x, y). En el ejemplo 1.2.1 se escribió la solución a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas como la terna de números $(4, -2, 3)$. Tanto (x, y) como $(4, -2, 3)$ son **vectores**.

Definición 2.1.1

Vector renglón de n componentes

Un vector de n componentes se define como un conjunto **ordenado** de n números escritos de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.1.1}$$

Definición 2.1.2

Vector columna de n componentes

Un **vector columna de n componentes** es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2.1.2}$$

Componentes de un vector

En (2.1.1) o (2.1.2), x_1 se denomina la **primera componente** del vector, x_2 es la **segunda componente**, y así sucesivamente. En términos generales, x_k se denomina la **k-ésima componente** del vector.

[1] Vea la semblanza bibliográfica de Hamilton en la página 56.

[2] Un análisis interesante sobre el desarrollo del análisis vectorial moderno se puede consultar en el libro de M. J. Crowe, *A History*

Con objeto de simplificar, con frecuencia se hará referencia a un vector renglón de n componentes como un **vector renglón** o un **vector de dimensión n**. Del mismo modo, se usará el término **vector columna** (o **vector de dimensión n**) para denotar a un vector columna de n componentes.

Cualquier vector cuyos elementos sean todos cero se denomina **vector cero**.

Vector cero

EJEMPLO 2.1.1 Cuatro vectores

Los siguientes son vectores:

i) (3, 6) es un vector renglón (o un vector de dimensión 2)

ii) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ es un vector columna (o un vector de dimensión 3)

iii) (2, −1, 0, 4) es un vector renglón (o un vector de dimensión 4)

iv) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector columna y un vector cero

Advertencia

La palabra *ordenado* contenida en la definición de un vector es de fundamental importancia. Dos vectores con las mismas componentes escritas en diferente orden no son iguales. De esta forma, por ejemplo, los vectores renglón (1, 2) y (2, 1) no son iguales.

A lo largo del libro se resaltarán los vectores con letras minúsculas negritas como **u**, **v**, **a**, **b**, **c**, y así sucesivamente. Un vector cero se denota por **0**. Más aún, como en términos generales resultará obvio cuando se trate de un vector renglón o de un vector columna, se hará referencia a ellos simplemente como “vectores”.

Los vectores surgen de diversas maneras. Suponga que el jefe de compras de una fábrica debe ordenar cantidades diferentes de acero, aluminio, aceite y papel. Él puede mantener el control de las unidades a ordenar con un solo vector donde a cada posición se le asocia algún tipo de material, si pensamos en asociar en la primera posición la cantidad de acero, en la segunda posición la cantidad de aluminio, en la tercera posición la cantidad de aceite y en la cuarta posición la cantidad de papel. Entonces el vector $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix}$ indica que ordenará 10 unidades de acero, 30 unidades de aluminio, etcétera.

Observación

Se puede observar aquí por qué el orden en que se escriben las componentes de un vector es sumamente importante. Es evidente que los vectores $\begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix}$ tienen significados muy distintos para el comprador.

En seguida se describirán algunas propiedades de los vectores. Puesto que sería repetitivo hacerlo primero para los vectores renglón y después para los vectores columna, se presentarán todas las definiciones en términos de vectores columna. Los vectores renglón tienen definiciones similares.

Las componentes de todos los vectores en este texto son números reales o complejos.[3] Se denota al conjunto de todos los números reales por el símbolo $\mathbb{R}$ y al conjunto de números complejos por el símbolo $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R}$

$\mathbb{C}$

[3] Un número complejo es un número de la forma $a + ib$, en donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$. En el apéndice B se da una descripción de los números complejos. No se habla de vectores complejos otra vez hasta el capítulo 5: serán útiles en especial en

Definición 2.1.3

El símbolo $\mathbb{R}^n$

Se usa el símbolo $\mathbb{R}^n$ para denotar al conjunto de todos los vectores de dimensión n, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, donde cada a_i es un número real.

Definición 2.1.4

El símbolo $\mathbb{C}^n$

De manera similar, se usa el símbolo $\mathbb{C}^n$ para denotar al conjunto de todos los vectores de dimensión n, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, donde cada c_i es un número complejo (ver apéndice B sobre números complejos).

En el capítulo 4 se analizarán los conjuntos $\mathbb{R}^2$ (vectores en el plano) y $\mathbb{R}^3$ (vectores en el espacio). En el capítulo 5 se examinarán conjuntos arbitrarios de vectores.

Observe que los vectores son tipos especiales de matrices.

Definición 2.1.5

Matriz

Una matriz A de $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números dispuestos en m renglones y n columnas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \textbf{(2.1.3)}$$

Renglones y columnas de una matriz

Componente o elemento

El símbolo $m \times n$ se lee "m por n". A menos que se establezca lo contrario, se supondrá siempre que los números en una matriz o vector son reales. El vector renglón $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{in})$ se llama **renglón i** y el vector columna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \end{pmatrix}$ se llama **columna j**. La **componente o elemento ij** de A, denotado por a_{ij}, es el número que aparece en el renglón i y la columna j de A. En ocasiones se escribirá la matriz A como $A = (a_{ij})$. Por lo general, las matrices se denotarán con letras mayúsculas.

Si A es una matriz $m \times n$ con $m = n$, entonces A se llama **matriz cuadrada**. Una matriz $m \times n$ con todos los elementos iguales a cero se denomina **matriz cero** de $m \times n$.

Se dice que una matriz de $m \times n$ tiene **tamaño** $m \times n$.

Matriz cuadrada

Matriz cero

Tamaño de una matriz

EJEMPLO 2.1.2 Cinco matrices

En seguida se presentan cinco matrices de diferentes tamaños:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz de 2×2 (cuadrada).

ii) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz de 3×2.

iii) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz de 2×3.

iv) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz de 3×3 (cuadrada).

v) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz cero de 2×4.

Nota histórica

El matemático inglés James Joseph Sylvester (1814-1897) fue el primero que utilizó el término "matriz" en 1850, para distinguir las matrices de los determinantes (que se estudiarán en el capítulo 3). La idea era que el término "matriz" tuviera el significado de "madre de los determinantes".

Notación con paréntesis cuadrados. En algunos libros las matrices se presentan dentro de paréntesis cuadrados en lugar de paréntesis redondos. Por ejemplo, las primeras dos matrices del ejemplo 2.1.2 se pueden escribir como

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **ii)** $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

En este texto se utilizarán exclusivamente paréntesis redondos.

A través del libro se hace referencia al renglón i, la columna j y la componente ij de una matriz para diferentes valores de i y j. Estas ideas se ilustran en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.1.3 Localización de las componentes de una matriz

Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

encuentre las componentes a_{12}, a_{31} y a_{22}.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & \text{2a. columna} & \\ & \downarrow & \end{array} \\ \text{1er. renglón} \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

En las siguientes matrices sombreadas se puede ver que la componente (a_{31}) es 7 y la componente (a_{22}) es -3:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{1a. columna} & & \\ \downarrow & & \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{3er. renglón} \rightarrow & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & \text{2a. columna} & \\ & \downarrow & \end{array} \\ \text{2o. renglón} \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

D Definición 2.1.6

Igualdad de matrices

Sean las matrices $A = (a_{ij})$ de $m_1 \times n_1$ y $B = (b_{ij})$ y $m_2 \times n_2$ son iguales si

1) Son del mismo tamaño, es decir, $m_1 = m_2 = m$ y $n_1 = n_2 = n$.
2) Las componentes correspondientes son iguales, es decir, $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

EJEMPLO 2.1.4 Matrices iguales y matrices distintas

¿Son iguales las siguientes matrices?

i) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1+3 & 1 & 2+3 \\ 1+1 & 1-4 & 6-6 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Nota

Los vectores son matrices de un renglón o de una columna.

Cada vector es un tipo especial de matriz. Así, por ejemplo, el vector renglón de n componentes $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ es una matriz de $1 \times n$, mientras que el vector columna de n compo-

nentes $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ es una matriz

SOLUCIÓN ►

i) Sí; ambas matrices son de 2×3 y $1 + 3 = 4$, $2 + 3 = 5$, $1 + 1 = 2$, $1 - 4 = -3$ y $6 - 6 = 0$.

ii) No; hay algunas componentes que son distintas, por ejemplo, las componentes (1, 1) son diferentes. Esto es cierto aun cuando las dos matrices contienen los mismos números. Las componentes *correspondientes* deben ser iguales. Esto significa que la componente (a_{ij}) en A debe ser igual a la componente (b_{ij}) en B, etcétera.

Las matrices, al igual que los vectores, surgen en un gran número de situaciones prácticas. Por ejemplo, en la página 49 se analizó la manera en que el vector $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix}$ puede representar las cantidades ordenadas de cuatro productos distintos utilizados por un fabricante. Suponga que se tienen cinco plantas diferentes, entonces la matriz de 4×5 podría representar las órdenes de los cuatro productos en cada una de las cinco plantas.

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 & 16 & 25 \\ 30 & 10 & 20 & 25 & 22 \\ 15 & 22 & 18 & 20 & 13 \\ 60 & 40 & 50 & 35 & 45 \end{pmatrix}$$

Se puede apreciar, a manera de ejemplo, que la planta 4 ordena 25 unidades del segundo producto (q_{24}) mientras que la planta 2 ordena 40 unidades del cuarto producto (q_{42}).

Las matrices se pueden sumar y multiplicar por números reales.

Definición 2.1.7

Suma de matrices

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices $m \times n$. Entonces la suma de A y B es la matriz $m \times n$, $A + B$ dada por

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \quad \textbf{(2.1.4)}$$

Es decir, $A + B$ es la matriz $m \times n$ que se obtiene al sumar las componentes correspondientes de A y B.

Advertencia

La suma de dos matrices se define únicamente cuando las matrices son del mismo tamaño. Así, por ejemplo, no es posible sumar las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ o las matrices (vectores) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Es decir, son incompatibles bajo la suma.

EJEMPLO 2.1.5 **Suma de dos matrices**

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & -5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & 4 \\ -6 & 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Escalares

Al utilizar vectores se hace referencia a los números como **escalares** (que pueden ser reales o complejos dependiendo de si los vectores en cuestión son reales o complejos).

Definición 2.1.8

Multiplicación de una matriz por un escalar

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de $m \times n$ y si α es un escalar, entonces la matriz $m \times n$, αA, está

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.1.5}$$

Esto es $\alpha A = (\alpha a_{ij})$ es la matriz obtenida al multiplicar cada componente de A por α. Si $\alpha A = B = (b_{ij})$, entonces $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

Nota histórica

El término "escalar" encuentra su origen con Hamilton. Su definición de cuaternión incluía lo que él definió como una "parte real" y una "parte imaginaria". En su artículo "On Quartenions, or on a New System of Imagineries in Algebra", en *Philosophical Magazine*, 3a. Serie, 25(1844):26-27, escribió: "La parte real algebraicamente puede tomar... todos los valores contenidos en la *escala* de la progresión de números desde el infinito negativo al infinito positivo; la llamaremos, entonces, la *parte escalar* o simplemente el *escalar* del cuaternión..." En el mismo artículo Hamilton definió la parte imaginaria de su cuaternión como la parte *vectorial*. Aunque éste no fue el primer uso que se dio a la palabra "vector", sí fue la primera vez que se usó en el contexto de las definiciones contenidas en esta sección. Es importante mencionar que el artículo del que se tomó la cita anterior marca el inicio del análisis vectorial moderno.

EJEMPLO 2.1.6 Múltiplos escalares de matrices

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Entonces $2A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 8 & 12 \\ -4 & 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$,

$$-\tfrac{1}{3}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -2 \\ \frac{2}{3} & -1 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad 0A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 2.1.7 Suma de múltiplos escalares de dos vectores

Sea $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcule $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

SOLUCIÓN ► $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$

El teorema que se presenta a continuación proporciona las propiedades básicas sobre la suma de matrices y la multiplicación por escalares. Se demuestra la parte (iii) y se deja el resto de la prueba

Teorema 2.1.1

Sean A, B y C tres matrices de $m \times n$ y sean α y β dos escalares. Entonces:

i) $A + 0 = A$

ii) $0A = 0$

iii) $A + B = B + A$ **(ley conmutativa para la suma de matrices)**

iv) $(A + B) + C = A + (B + C)$ **(ley asociativa para la suma de matrices)**

v) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ **(ley distributiva para la multiplicación por un escalar)**

vi) $1A = A$

vii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Demostración de iii)

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

Por ende

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$a + b = b + a$ para cualesquiera dos números reales a y b

$$= \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} & \cdots & b_{1n} + a_{1n} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} & \cdots & b_{2n} + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} + a_{m1} & b_{m2} + a_{m2} & \cdots & b_{mn} + a_{mn} \end{pmatrix} = B + A$$

Nota

El cero en el inciso i) del teorema es la matriz cero de $m \times n$. En el inciso ii) el cero a la izquierda es un escalar mientras que el cero a la derecha es la matriz cero de $m \times n$.

EJEMPLO 2.1.8 Ilustración de la ley asociativa para la suma de matrices

Para ilustrar la ley asociativa se observa que

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

De igual manera

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Semblanza de...

Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865

Sir William Rowan Hamilton

Sir William Rowan Hamilton nació en Dublín en 1805, en donde pasó la mayor parte de su vida, y fue sin duda el más grande matemático irlandés. El padre (un abogado) y la madre de Hamilton murieron cuando era apenas un niño. Su tío, un lingüista, se hizo cargo de su educación. A la edad de cinco años, Hamilton podía leer inglés, hebreo, latín y griego. Cuando cumplió los 13 dominaba, además de los idiomas del continente europeo, sánscrito, chino, persa, árabe, malasio, hindú, bengalí y varios otros. Hamilton disfrutaba escribir poesía, tanto en su infancia como en la vida adulta, y entre sus amigos se contaban los grandes poetas ingleses Samuel Taylor Coleridge y William Wordsworth. Sin embargo, la poesía de Hamilton se consideraba tan mala que resultó una bendición que desarrollara otros intereses, especialmente aquellos relacionados con las matemáticas.

Aunque disfrutó las matemáticas desde niño, el interés de Hamilton creció de manera importante después de un encuentro casual a la edad de 15 años con Zerah Colburn, el estadounidense que calculó las descargas eléctricas de los rayos. Poco después, Hamilton comenzó a leer los libros importantes de matemáticas de su tiempo. En 1823, a los 18 años, descubrió un error en la *Mécanique céleste* de Simon Laplace y escribió un artículo impresionante sobre el tema. Un año más tarde entró al Trinity College en Dublín.

La carrera universitaria de Hamilton fue sobresaliente. A los 21 años, siendo todavía estudiante de licenciatura, había impresionado a tal grado a sus maestros que fue nombrado Astrónomo Real de Irlanda y profesor de Astronomía en la universidad. Poco después escribió lo que ahora se considera un trabajo clásico en óptica. Haciendo uso únicamente de la teoría matemática, predijo la refracción cónica en cierto tipo de cristales. Más tarde los físicos confirmaron esta teoría. En parte debido a este trabajo, Hamilton fue armado caballero en 1835.

El primer artículo puramente matemático de Hamilton apareció en 1833. En él describió una manera algebraica de manipular pares de números reales. Este trabajo sienta las reglas que se usan hoy en día para sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos. No obstante, en un principio, Hamilton no pudo desarrollar una multiplicación para ternas o n-eadas ordenadas de números para $n > 2$. Durante 10 años estudió este problema, y se dice que lo resolvió en un rato de inspiración mientras caminaba por el Puente de Brougham en Dublín en 1843. La clave era descartar la conocida propiedad conmutativa de la multiplicación. Los nuevos objetos que creó se llamaron cuaterniones, que fueron los precursores de lo que ahora se conoce como vectores. En la actualidad, una placa incrustada en el puente cuenta la historia.

Aquí, mientras caminaba
el 16 de octubre de 1843,
sir William Rowan Hamilton
descubrió, en un instante de
genialidad, la fórmula fundamental
para la multiplicación de cuaterniones
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
y la grabó en una piedra de este puente.

Durante el resto de su vida, Hamilton pasó la mayor parte del tiempo desarrollando el álgebra de cuaterniones. Él suponía que tendrían un significado revolucionario en la física matemática. Su trabajo monumental sobre este tema, *Treatise on Quaternions*, fue publicado en 1853. Más tarde trabajó en una extensión del tema, *Elements of quaternions*. Aunque Hamilton murió en 1865 antes de terminar esta obra, su hijo publicó el trabajo en 1866.

Los estudiantes de matemáticas y física conocen a Hamilton dentro de muchos otros contextos. En física matemática, por ejemplo, se encuentra la función hamiltoniana que con frecuencia representa la energía total de un sistema, y las ecuaciones diferenciales de dinámica de Hamilton-Jacobi. En la teoría de matrices, el teorema de Hamilton-Cayley establece que toda matriz satisface su propia ecuación característica. Esto se estudiará en el capítulo 8.

A pesar del gran trabajo desarrollado, los últimos años de Hamilton fueron un tormento. Su esposa estaba semiinválida y él fue atacado por el alcoholismo. Es gratificante, por tanto, señalar que durante esos últimos años la recién formada American National Academy of Sciences eligió a sir William Rowan Hamilton como su primer miembro extranjero.

El ejemplo 2.1.8 ilustra la importancia de la ley asociativa de la suma de vectores, ya que si se desea sumar tres matrices o más, únicamente se podrá hacerlo sumándolas de dos en dos. La ley asociativa indica que esto se puede llevar a cabo de dos maneras diferentes obteniendo el mismo resultado. Si no fuera así, sería más difícil definir la suma de tres o más matrices ya que tendría que especificarse si se quiere definir la suma de $A + B + C$ como $(A + B) + C$ o como $A + (B + C)$.

RESUMEN 2.1

- Un **vector renglón de n componentes** es un conjunto ordenado de n números denominados **escalares**, escritos como $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Un **vector columna de n componentes** es un conjunto ordenado de n números escritos como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Un vector cuyas componentes son todas cero se denomina **vector cero**.
- La **suma de vectores** y la **multiplicación por escalares** están definidas por

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \alpha\mathbf{a}=\begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

- Una **matriz de $m \times n$** es un arreglo rectangular de mn números arreglados en m renglones y n columnas

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Una matriz cuyas componentes son todas cero se denomina **matriz cero**.
- Si A y B son matrices de $m \times n$, entonces $A + B$ y αA (α un escalar) son matrices de $m \times n$

La componente ij de $A + B$ es $a_{ij} + b_{ij}$
La componente ij de αA es αa_{ij}.

AUTOEVALUACIÓN 2.1

I) ¿Cuál de las siguientes aseveraciones es cierta para la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

a) Es una matriz cuadrada.

b) Si se multiplica por el escalar –1, el producto es $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Es una matriz de 3×2.

d) Es la suma de $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

II) ¿Cuál de los incisos es $2A - 4B$ si $A = (2 \ \ 0 \ \ 0)$ y $B = (3 \ \ 1)$?

a) $(-8 \quad -4)$
b) $(5 \quad 0 \quad 1)$
c) $(16 \quad -4 \quad 0)$
d) Esta operación no se puede realizar.

III) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es necesaria cuando se encuentra la diferencia (restas) de dos matrices?

a) Las matrices deben ser del mismo tamaño.
b) Las matrices deben ser cuadradas.
c) Las matrices deben ser ambas vectores renglón o vectores columna.
d) Una matriz debe ser un vector renglón y la otra un vector columna.

IV) ¿Cuáles serían los elementos de la segunda columna de la matriz B si

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

a) –2, –8, 1 *b*) 4, –8
c) 2, 8, –1 *d*) –4, 8

V) ¿Cuál de las siguientes opciones debe ser el segundo renglón de la matriz B si $3A - B = 2C$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

a) –3, 2, 6 *b*) 0, –2, 9
c) 3, –2, 6 *d*) 0, 2, –9

Respuestas a la autoevaluación

I) *b*) **II)** *d*) **III)** *a*) **IV)** *b*) **V)** *b*)

PROBLEMAS 2.1

En los problemas 1 a 14 realice los cálculos indicados con $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$

1. $\mathbf{a}+\mathbf{b}$
2. $3\mathbf{b}$
3. $5\mathbf{a}$
4. $-2\mathbf{c}$
5. $\mathbf{b}+3\mathbf{c}$
6. $2\mathbf{a}-5\mathbf{b}$
7. $-3\mathbf{b}+2\mathbf{c}$
8. $-5\mathbf{a}+3\mathbf{b}$
9. $0\mathbf{c}$
10. $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$
11. $2\mathbf{a}+4\mathbf{b}-3\mathbf{c}$
12. $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}+4\mathbf{c}$
13. $3\mathbf{b}-7\mathbf{c}+2\mathbf{a}$
14. $\alpha\mathbf{a}-\frac{1}{\beta}\mathbf{b}$, con α y β escalares reales

En los problemas 15 a 26 realice los cálculos indicados con $\mathbf{a}=(0\ \ 1\ \ 2)$, $\mathbf{b}=(1\ \ 3\ \ 5)$ y $\mathbf{c}=(4\ \ -2\ \ 9)$.

15. $\mathbf{b}+\mathbf{c}$
16. $\mathbf{c}-\mathbf{a}$
17. $4\mathbf{c}$
18. $-2\mathbf{b}$
19. $7\mathbf{b}+4\mathbf{c}$
20. $2\mathbf{a}-\mathbf{c}$
21. $4\mathbf{b}-7\mathbf{a}$
22. $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$
23. $\mathbf{c}-\mathbf{b}+2\mathbf{a}$
24. $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}-4\mathbf{c}$
25. $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}+4\mathbf{c}$
26. $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$

En los problemas 27 a 43 realice las operaciones indicadas con $A=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -2 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 0 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -1 & 0\\ 6 & -2\end{pmatrix}$.

27. $3A$
28. $A+B$
29. $C-A$
30. $A-C$
31. $2C-5A$
32. $0B$ (0 es el cero escalar)
33. $-7A+3B$
34. $6B-7A+0C$
35. $A+B+C$
36. $C-A-B$
37. $B-A-2C$
38. $2A-3B+4C$
39. $7C-B+2A$
40. Encuentre una matriz D tal que $2A+B-D$ es la matriz cero de 3×2.
41. Encuentre una matriz E tal que $A+2B-3C+E$ es la matriz cero de 3×2.
42. Encuentre una matriz F tal que $2A+B-3F$ es la matriz de 3×2 con todos sus elementos iguales a 1.
43. Encuentre una matriz G tal que $A+B+G$ es la matriz de 3×2 con todos sus elementos iguales a 1.
44. Dados $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$, resuelva la siguiente ecuación:

    $4(B-C+2X)=-3X-A$
45. Dados $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, encuentre una matriz X tal que $AX+XB=C$.

En los problemas 46 a 57 realice las operaciones indicadas con $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 6\\ 4 & 1 & 1\\ -2 & 9 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 5 & -9\\ 3 & -4 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}7 & 4 & 2\\ -5 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

46. $A - 2B$ **47.** $3A - C$ **48.** $3B - 2A$

49. $A + B + C$ **50.** $2A - B + 2C$ **51.** $3A + 2B - 4C$

52. $C - A - B$ **53.** $4C - 2B + 3A$

54. Encuentre una matriz D tal que $A + B + C + D$ es la matriz cero de 3×3.

55. Encuentre una matriz E tal que $3C - 2B + 8A - 4E$ es la matriz cero de 3×3.

56. Encuentre una matriz F tal que $A + B + C + F$ es la matriz de 3×3 con todos sus elementos iguales a 1.

57. Encuentre una matriz G tal que $2A + B - 3C + G$ es la matriz de 3×3 con todos sus elementos iguales a 1.

58. Encuentre una matriz H tal que $3A - 2B + 4H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

59. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$ y sea $\bar{0}$ la matriz cero de $m \times n$. Utilice las definiciones 2.1.7 y 2.1.8 para demostrar que $0A = \bar{0}$ y que $\bar{0} + A = A$. De igual manera, muestre que $1A = A$.

60. Si $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$ son tres matrices de $m \times n$, calcule $(A + B) + C$ y $A + (B + C)$ y muestre que son iguales.

61. Si α y β son escalares y A y B son matrices de $m \times n$, calcule $\alpha(A + B)$ y $\alpha A + \alpha B$ y muestre que son iguales. Calcule además $(\alpha + \beta)A$ y $\alpha A + \beta A$ y muestre que son iguales.

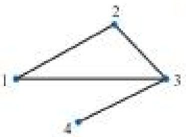


Figura 2.1

62. Considere la "gráfica" que une los cuatro puntos de la figura 2.1. Construya una matriz de 4×4 que tenga la propiedad de que $a_{ij} = 0$ si el punto i no está conectado (unido por una línea) con el punto j y $a_{ij} = 1$ si el punto i está conectado con el punto j.

63. Haga lo mismo que en el problema 62 (construyendo una matriz de 5×5) para la gráfica de la figura 2.2.

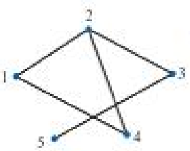


Figura 2.2

64. En la fabricación de cierto producto se necesitan cuatro materias primas. El vector $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$ representa una demanda dada de la fábrica para cada una de las cuatro materias primas para producir una unidad del producto. Si $\mathbf{d}$ es el vector demanda de la fábrica 1 y $\mathbf{e}$ es el vector demanda de la fábrica 2, ¿qué representan los vectores $\mathbf{d} + \mathbf{e}$ y $2\mathbf{d}$?

EJERCICIOS CON MATLAB 2.1

1. El presente problema proporciona la práctica necesaria para trabajar con la notación matricial al igual que con los procedimientos que se usarán en problemas futuros. En los problemas anteriores, al realizar la operación con renglones $R_j \rightarrow R_j + cR_i$ se encontraba, por mera observación, el multiplicador c, el cual se puede calcular con exactitud a partir de los elementos de la matriz.

Ejemplo

$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \end{pmatrix}$

Para crear un cero en la posición que ocupa i se necesita $R_3 \to R_3 + (-i/f)R_2$. Observe que $f = A(2, 3)$ y que $i = A(3, 3)$:

```
c = A(3,3)/A(2,3)
```

En términos generales, $c = -$(elemento que debe hacerse cero/pivote usado):

```
A(3,:) = A(3,:) + c*A(2,:)
```

***a*)** Para la matriz que sigue realice las operaciones con renglones $R_j \to R_j + cR_i$ para obtener la matriz en forma escalonada por renglón (no la forma escalonada reducida por renglones), excepto que el elemento pivote no necesita ser 1. (No multiplique ni divida un renglón por un número para crear unos.) Encuentre todos los multiplicadores usando la notación de matrices anterior. En esta matriz sus multiplicadores serán números sencillos para que pueda verificar conforme el proceso avanza:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -4 \\ -3 & -6 & 12 & 2 & -12 \\ 1 & 2 & -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

***b*)** Oprima `A = rand(4,5)`

```
A(:,3) = 2*A(:,1) + 4*A(:,2)
```

Siga las instrucciones del inciso *a*). Asegúrese de calcular los multiplicadores usando la notación matricial.

Vea el problema 2 de MATLAB en la sección 2.6, una situación en la que se quiere realizar el tipo de reducción que se acaba de describir.

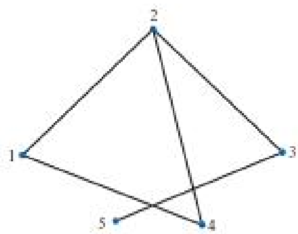
2. Características de MATLAB. ***Introducción eficiente de matrices dispersas***

***a*)** En el problema 62 se le pidió que estableciera matrices para gráficas en las que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el punto } i \text{ está conectado con el punto } j \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Para la mayor parte de este tipo de gráficas la matriz consiste en muchos ceros y algunos unos. En MATLAB se puede introducir una matriz con ceros en todos sus elementos y después modificarla renglón por renglón.

Considere la siguiente gráfica:



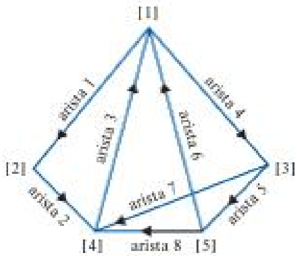
`a = zeros(5)`

`a(1,[2 4]) = [1 1]` (1 está conectado con 2 y 4)

`a(2,[1 3 4]) = [1 1 1]` (1 está conectado con 1, 3 y 4)

Termine de introducir la matriz anterior y verifique el resultado con su respuesta al problema 63.

b) Considere la siguiente gráfica dirigida:



Defina

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } j \text{ va al nodo } i \\ -1 & \text{si la arista } j \text{ sale del nodo } i \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

¿De qué tamaño será A? Introduzca `A = zeros(n,m)`, donde n es el número de renglones y m es el número de columnas `(doc zeros)`. Se modificará A columna por columna viendo una arista a la vez. Por ejemplo,

`A([1 2],1) = [-1;1]` la arista 1 sale del [1] y va al [2]

`A([4 5],8) = [1;-1]` la arista 8 sale del [5] y va al [4]

Complete el proceso anterior para encontrar A.

3. *a*) Introduzca cualesquiera dos matrices A y B de distinto tamaño. Encuentre $A + B$; ¿qué le dice MATLAB?

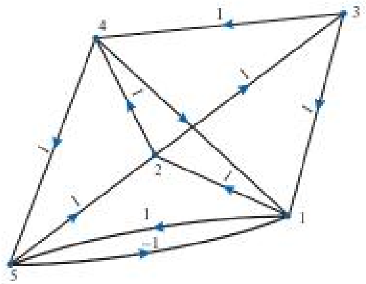
b) Introduzca cualesquiera dos matrices A y B del mismo tamaño. Suponga que s es un escalar. De sus conocimientos algebraicos sobre las manipulaciones con números, ¿a qué conclusión llegaría sobre las relaciones `s*A, s*B y s*(A+B)`? Utilice una línea de comentario para escribir esta conclusión. Verifique su conclusión con tres elecciones diferentes de s. Verifique su conclusión con otra elección de A y otra elección de B para tres valores de s. (Si va a usar MATLAB para generar matrices aleatorias, consulte la presentación anterior de Ejercicios con MATLAB 1.3.)

4. Es posible construir una representación de una gráfica dirigida en una figura utilizando MATLAB. Para lograr esto se utiliza el comando `digraph (doc digraph)`, en esta instancia utilizaremos la siguiente secuencia de comando de MATLAB

```
s = [1 1 2 2 3 3 4 4 5 5];  % Vector de nodos de inicio de cada arista
t = [2 5 3 4 4 1 5 1 1 2];  % Vector de nodos de fin de cada arista
     % los vectores s, t deben ser de la misma longitud
p = [1 1 1 1 1 1 1 1 -1 1]; % vector de pesos de cada arista
n = {'1' '2' '3' '4' '5'}; % nombres o etiquetas de los nodos
G = digraph(s,t,p,n);       % Construye la gráfica dirigida entre
                            % los nodos s, t de aristas con pesos p y los
```

```
plot(G,'Layout','force','EdgeLabel',G.Edges.Weight,'NodeFontsize',20,...
      'Linewidth',2,'Arrowsize',14,'EdgeFontsize',15)
```

Al finalizar la secuencia de comandos se obtiene la siguiente figura



a) Construya vectores `s, t, p, n` para una gráfica dirigida con 7 nodos y obtenga una figura utilizando los comandos anteriormente mencionados.

2.2 Productos vectorial y matricial

La definición de un producto de dos matrices presentada en esta sección fue motivada al estudiar un cierto tipo de cambio de coordenadas y su relación con los sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO 2.2.1 Producto de un vector de demanda y un vector de precios

Suponga que un fabricante produce cuatro artículos. Su demanda está dada por el **vector de demanda** $\mathbf{d} = (30 \ \ 20 \ \ 40 \ \ 10)$ (una matriz de 1×4). El precio por unidad que recibe el fabricante por los artículos está dado por el **vector de precios** $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \$20 \\ \$15 \\ \$18 \\ \$40 \end{pmatrix}$ (una matriz de 4×1). Si se cumple la demanda, ¿cuánto dinero recibirá el fabricante?

SOLUCIÓN ► La demanda del primer artículo es 30, y el fabricante recibe \$20 por cada artículo vendido. Por consiguiente recibe $(30)(20) = \$600$ de las ventas del primer artículo. Si se sigue este razonamiento, se ve que la cantidad total de dinero que recibe es

$$(30)(20) + (20)(15) + (40)(18) + (10)(40) = 600 + 300 + 720 + 400 = \$2\,020$$

Este resultado se escribe como

$$(30 \quad 20 \quad 40 \quad 10)\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 18 \\ 40 \end{pmatrix} = 2\,020$$

Es decir, se multiplicó un vector renglón de 4 componentes y un vector columna de 4

Nota

En el último ejemplo se multiplicó un vector renglón por un vector columna

Definición 2.2.1

Producto escalar

Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ dos vectores. Entonces el **producto escalar** de **a** y **b** denotado por $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, está dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{2.2.1}$$

Producto punto

Producto interno

Debido a la notación en (2.2.1), el producto escalar se llama con frecuencia **producto punto** o **producto interno** de los vectores. Observe que el producto escalar de dos vectores de dimensión n es un escalar (es decir, es un número).

Advertencia

Al tomar el producto escalar de a y b es necesario que a y b tengan el mismo número de componentes.

A menudo se tomará el producto escalar de un vector renglón y un vector columna. En este caso se tiene

Producto escalar representado como vector renglón por vector columna

vector renglón $1 \times n$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{2.2.2}$$

Éste es un número real (un escalar)

vector columna $n \times 1$

EJEMPLO 2.2.2 Producto escalar de dos vectores

Sea $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

SOLUCIÓN ► $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-4)(3) + (-2)(-2) + (3)(-5) = -12 + 4 - 15 = -23.$

EJEMPLO 2.2.3 Producto escalar de dos vectores

Sea $\mathbf{a} = (2, -5, 4, -6)$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

SOLUCIÓN ► Aquí $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2)(1) + (-5)(0) + (4)(-7) + (-6)(3) = 2 + 0 - 28 - 18 = -44$

El teorema que se presenta a continuación se deduce directamente de la definición del producto escalar. Se demuestra la parte ii) y se deja el resto como ejercicio.

Teorema 2.2.1

Sean **a**, **b** y **c** tres vectores de dimensión n y sea α un escalar. Entonces

i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = 0$

ii) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ **(ley conmutativa del producto escalar)**

iii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ **(ley distributiva del producto escalar)**

iv) $(\alpha\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

Prueba de ii)

Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + \underset{\uparrow}{a_nb_n} = b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$ab = ba$ para cualesquiera dos números a y b

Observe que *no* existe una ley asociativa para el producto escalar. La expresión $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ no tiene sentido porque ninguno de los dos lados de la ecuación está definido. Para el lado izquierdo, esto se concluye a partir de que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es un escalar y el producto escalar del escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y el vector **c** no está definido.

Ahora se define el producto de dos matrices.

Definición 2.2.2

Producto de dos matrices

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$, y sea $B = (b_{ij})$ una matriz de $n \times p$. Entonces el **producto** de A y B es una matriz $m \times p$, $C = (c_{ij})$, en donde

$$\boxed{c_{ij} = (\text{renglón } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B)} \qquad (2.2.3)$$

Es decir, el elemento ij de AB es el producto punto del renglón i de A y la columna j de B. Si esto se extiende, se obtiene

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}} \qquad (2.2.4)$$

Si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, entonces se dice que A

Matrices

Advertencia

Dos matrices se pueden multiplicar únicamente si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones de la segunda. De otro modo, los vectores que forman el renglón i en A y la columna j de B no tendrán el mismo número de componentes y el producto punto en la ecuación (2.2.3) no estará definido. Dicho de otro modo, las matrices A y B serán incompatibles bajo la multiplicación. Para ilustrar esto se consideran las siguientes matrices de A y B:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{renglón } i \text{ de } A \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{columna } j \text{ de } B \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Los vectores renglón y columna sombreados deben tener el mismo número de componentes.

EJEMPLO 2.2.4 Producto de dos matrices de 2 × 2

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, calcule AB y BA.

SOLUCIÓN ► A es una matriz de 2×2 y B es una matriz de 2×2, entonces $C = AB = (2 \times 2) \times (2 \times 2)$ también es una matriz de 2×2. Si $C = (c_{ij})$, ¿cuál es el valor de c_{11}? Se sabe que

$$c_{11} = (\text{1er. renglón de } A) \cdot (\text{1a. columna de } B)$$

Reescribiendo las matrices se tiene

$$\text{1er. renglón de } A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{1a. columna de } B \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Así,

$$c_{11} = (1 \quad 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 + 15 = 18$$

De manera similar, para calcular c_{12} se tiene

$$\text{1er. renglón de } A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{2a. columna de } B \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

y

$$c_{12} = (1 \quad 3)\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 + 18 = 16$$

Siguiendo el procedimiento se encuentra que

$$c_{21} = (-2 \quad 4)\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = -6 + 20 = 14$$

y

$$c_{22} = (-2 \quad 4)\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 4 + 24 = 28$$

Entonces

$$C = AB = \begin{pmatrix} 18 & 16 \\ 14 & 28 \end{pmatrix}$$

De manera similar, sin escribir los pasos intermedios, se ve que

$$C' = BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & 9-8 \\ 5-12 & 15+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -7 & 39 \end{pmatrix}$$

Observación

El ejemplo 2.2.4 ilustra un hecho sumamente importante: *en términos generales, el producto de matrices no es conmutativo*. Es decir, $AB \neq BA$. En ocasiones ocurre que $AB = BA$, pero se trata de una excepción, no de una regla. Si $AB = BA$ se dice que A y B **conmutan**. De hecho, como lo ilustra el siguiente ejemplo, puede ocurrir que AB esté definida y BA no lo esté. Así, debe tenerse cuidado en el *orden* de la multiplicación de dos matrices.

EJEMPLO 2.2.5 El producto de una matriz de 2 × 3 y una de 3 × 4 está definido pero el producto de una matriz 3 × 4 y una de 2 × 3 no lo está

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule AB.

SOLUCIÓN ► Primero observe que A es una matriz de 2×3 y B es una matriz de 3×4. Por lo que el número de columnas de A es igual al número de renglones de B. Por tanto, el producto AB está definido y es una matriz de 2×4. Sea $AB = C = (c_{ij})$. Entonces

$$c_{11} = (2 \quad 0 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 23 \qquad c_{12} = (2 \quad 0 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = -5$$

$$c_{13} = (2 \quad 0 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \qquad c_{14} = (2 \quad 0 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 5$$

$$c_{21} = (4 \quad 1 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 15 \qquad c_{22} = (4 \quad 1 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$$

$$c_{23} = (4 \quad 1 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 26 \qquad c_{24} = (4 \quad 1 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 39$$

Así, $AB = \begin{pmatrix} 23 & -5 & 2 & 5 \\ 15 & 6 & 26 & 39 \end{pmatrix}$. Esto completa el problema. Observe que el producto BA no está definido ya que el número de columnas de B (cuatro) no es igual al número de renglones de A (dos).

EJEMPLO 2.2.6 Contacto directo e indirecto con una enfermedad contagiosa

En este ejemplo se muestra la forma en la cual se puede usar la multiplicación de matrices para modelar la manera en que se extiende una enfermedad contagiosa. Suponga que cuatro individuos han contraído esta enfermedad. Este grupo entra en contacto con seis personas de un segundo grupo. Estos contactos, llamados *contactos directos*, se pueden representar por una matriz de 4×6. En seguida se da un ejemplo de este tipo de matrices.

Matriz de contacto directo: primero y segundo grupos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso se hace $a_{ij} = 1$ si la i-ésima persona del primer grupo entra en contacto con la j-ésima persona del segundo grupo. Por ejemplo, el 1 en la posición (2, 4) significa que la segunda persona del primer grupo (infectada) entró en contacto con la cuarta persona del segundo grupo. Ahora suponga que un tercer grupo de cinco personas tiene varios contactos directos con individuos del segundo grupo. Esto también se puede representar mediante una matriz.

Matriz de contacto directo: segundo y tercer grupos

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que $b_{64} = 0$, lo que quiere decir que la sexta persona del segundo grupo no tiene contacto con la cuarta persona del tercer grupo.

Los contactos *indirectos* o *de segundo orden* entre individuos del primero y tercer grupos se representan mediante la matriz de 4×5, $C = AB$. Para ver esto, observe que una persona del grupo 3 puede quedar contagiada por alguien del grupo 2, quien a su vez fue contagiada por alguien del grupo 1. Por ejemplo, como $a_{24} = 1$ y $b_{45} = 1$ se ve que, indirectamente, la quinta persona del grupo 3 tuvo contacto (a través de la cuarta persona del grupo 2) con la segunda persona del grupo 1. El número total de contactos indirectos entre la segunda persona del grupo 1 y la quinta persona del grupo 3 está dado por

$$\begin{aligned} c_{25} &= a_{21}b_{15} + a_{22}b_{25} + a_{23}b_{35} + a_{24}b_{45} + a_{25}b_{55} + a_{26}b_{65} \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 2 \end{aligned}$$

Ahora se calcula.

Matriz de contacto indirecto: primero y tercer grupos

$$C = AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se ha visto que las matrices, en general, no conmutan. El siguiente teorema muestra que la ley asociativa sí se cumple.

Teorema 2.2.2 Ley asociativa de la multiplicación de matrices

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times m$, $B = (b_{ij})$ una matriz de $m \times p$ y $C = (c_{ij})$ una matriz de $p \times q$. Entonces la **ley asociativa**

$$\boxed{A(BC) = (AB)C} \tag{2.2.5}$$

se cumple y ABC, definida por cualesquiera de los lados de la ecuación (2.2.5), es una matriz de $n \times q$.

La prueba de este teorema no es difícil, pero es laboriosa. Se desarrolla mejor usando la notación de sumatoria. Por esta razón se pospone hasta el final de esta sección.

De aquí en adelante se escribirá el producto de tres matrices simplemente como ABC. Se puede hacer esto porque $(AB)C = A(BC)$; entonces se obtiene la misma respuesta independientemente de cómo se lleve a cabo la multiplicación (siempre y cuando no se conmute ninguna de las matrices).

La ley asociativa se puede extender a productos de más matrices. Por ejemplo, suponga que AB, BC y CD están definidas. Entonces

$$\boxed{ABCD = A(B(CD)) = ((AB)C)D = A(BC)D = (AB)(CD)} \tag{2.2.6}$$

Existen dos leyes distributivas para la multiplicación de matrices.

Teorema 2.2.3 Leyes distributivas de la multiplicación de matrices

Si todas las sumas y todos los productos siguientes están definidos, entonces

$$\boxed{A(B + C) = AB + AC} \tag{2.2.7}$$

y

$$\boxed{(A + B)C = AC + BC} \tag{2.2.8}$$

Las demostraciones se presentan al final de la sección.

Multiplicación de matrices como una combinación lineal de las columnas de A

$$A\mathbf{x}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} a_{1n}x_n \\ a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

o

$$A\mathbf{x}=x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.2.9}$$

Nota

El producto de la matriz A de $m \times n$ y el vector columna $\mathbf{x}$ es una combinación lineal de las columnas de A.

Observe que $\mathbf{c}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ es la primera columna de A, $\mathbf{c}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$ es la segunda columna de A y así sucesivamente. Entonces (2.2.9) se puede escribir como

$$A\mathbf{x}=x_1\mathbf{c}_1+x_2\mathbf{c}_2+\cdots+x_n\mathbf{c}_n \tag{2.2.10}$$

Combinación lineal

El lado derecho de la expresión (2.2.10) se llama **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$. Las combinaciones lineales se estudiarán con detalle en la sección 5.3.

Suponga ahora que B es una matriz de $n \times p$. Sean $C = AB$ y $\mathbf{c}_1$ la primera columna de C. Entonces

$$\mathbf{c}_1=\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1} \end{pmatrix}$$

$$=b_{11}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}+b_{21}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}+\cdots+b_{n1}\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \quad (*)$$

es igual a la combinación lineal de las columnas de A. Lo mismo se cumple para todas las columnas de $C = AB$, donde se ve que

> Cada columna del producto AB es una combinación lineal de las columnas de A.

EJEMPLO 2.2.7 Cómo escribir las columnas de AB como combinación lineal de las columnas de A

Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Entonces $AB = \begin{pmatrix} -3 & -15 \\ 10 & 26 \\ 13 & 32 \end{pmatrix}$. Ahora bien, usando la propiedad (*),

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \text{una combinación lineal de las columnas de } A$$

y

$$\begin{pmatrix} -15 \\ 26 \\ 32 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \text{una combinación lineal de las columnas de } A.$$

Multiplicación de matrices por bloques

En ciertas situaciones es prudente manejar las matrices como bloques de matrices más pequeñas, llamadas **submatrices**, y después multiplicar bloque por bloque en lugar de componente por componente. La multiplicación en bloques es muy similar a la multiplicación normal de matrices.

Submatriz

EJEMPLO 2.2.8 Multiplicación por bloques

Considere el producto $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

El lector debe verificar que este producto esté definido. Ahora se realiza una partición de estas matrices mediante líneas punteadas.

$$AB = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & H \\ J & K \end{pmatrix}$$

Existen otras maneras de formar la partición. En este caso $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, y así sucesivamente. Si suponemos que todos los productos y las sumas de matrices están definidos, se puede multiplicar de manera normal para obtener

$$AB = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & H \\ J & K \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} CG + DJ & CH + DK \\ \hline EG + FJ & EH + FK \end{array}\right)$$

Ahora

$$CG = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad CG = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -12 & 13 \end{pmatrix}$$

y

De manera similar

$$EH = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad FK = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

y

$$EH + FK = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El lector debe verificar que $CH + DK = \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \end{pmatrix}$ y $EG + FJ = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -11 & -1 \end{pmatrix}$ de manera que

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} CG + DJ & CH + DK \\ \hline EG + FJ & EH + FK \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -7 & 13 & 13 \\ -10 & 21 & 20 \\ \hline -3 & 4 & -1 \\ -11 & -1 & -1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} -7 & 13 & 13 \\ -10 & 21 & 20 \\ -3 & 4 & -1 \\ -11 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ésta es la misma respuesta que se obtiene si se multiplica AB directamente.

Partición conformante

Cuando se hace una partición de dos matrices y, al igual que en el ejemplo 2.2.8, todos los productos de submatrices están definidos, se dice que la partición es **conformante**.

EJEMPLO 2.2.9 Dos matrices que son conmutativas

Suponga que las matrices A y B son cuadradas y que se hacen particiones conformantes de $C = \begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} I & B \\ O & I \end{pmatrix}$. Muestre que C y D son conmutativas. Aquí O denota la matriz cero e I es una matriz cuadrada que tiene la propiedad de que $AI = IA = A$ siempre que estos productos estén definidos.

SOLUCIÓN ►

$$CD = \begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & B \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + A \cdot O & IB + AI \\ O \cdot I + I \cdot O & O \cdot B + I^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B + A \\ O & I \end{pmatrix}$$

en donde $I^2 = I \cdot I$. Del mismo modo

$$DC = \begin{pmatrix} I & B \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + B \cdot O & IA + BI \\ O \cdot I + I \cdot O & O \cdot A + I^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A + B \\ O & I \end{pmatrix}$$

Como $B + A = A + B$, $CD = DC$, es decir, las matrices son conmutativas.

Para poder probar los teoremas 2.2.2 y 2.2.3 y para estudiar muchas otras partes del material de este libro es necesario utilizar la *notación de sumatoria*. Si el lector no está familiarizado con ella, conforme avance en el libro obtendrá suficiente información al respecto. De otra manera puede ir directamente a las demostraciones de los teoremas 2.2.2 y 2.2.3.

Aplicación: cadena de Markov

Una cadena de Markov es un proceso estocástico sin "memoria", en el sentido de que el estado futuro del proceso únicamente depende del estado actual en que se encuentre, sin importar cómo es que ta el estado de interés por una matriz que representa la transición entre los estados, esto es $\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k$, donde $\mathbf{x}_k$ representa el estado en el tiempo actual, $\mathbf{x}_{k+1}$ es el estado en el tiempo siguiente y P es la **matriz de transición** que tiene la propiedad de que la suma de sus columnas es igual a 1.

Matriz de transición

Como ejemplo tenemos una empresa que realiza estudios de mercado y está estudiando los patrones de compra para tres productos que son competidores entre sí. La empresa ha determinado el porcentaje de residentes de casas que cambiarían de un producto a otro después de un mes (suponga que cada residente compra uno de los tres productos y que los porcentajes no cambian de un mes a otro). Esta información se presenta en forma de matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.05 \\ 0.05 & 0.75 & 0.05 \\ 0.15 & 0.05 & 0.9 \end{pmatrix}$$

donde el elemento p_{ij} es el porcentaje que cambia del producto j al producto i. Por ejemplo, $p_{12} = 0.2$ significa que 20% de los residentes que compran el producto 2 cambia al producto 1 después de un mes.

Observe que $P^n\mathbf{x}$ representa cuántos residentes están utilizando cada producto después de n meses. Si consideramos dos condiciones iniciales tales que la suma de los residentes sean 60 000, por ejemplo

$$\mathbf{x}_a = \begin{pmatrix} 60\,000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_b = \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 40\,000 \\ 18\,000 \end{pmatrix}$$

y calculamos $P^{25}\mathbf{x}_a$, obtenemos

$$P^{25}\mathbf{x}_a = \begin{pmatrix} 18\,013.05 \\ 9\,998.6 \\ 31\,988.29 \end{pmatrix}, \quad P^{25}\mathbf{x}_b = \begin{pmatrix} 18\,043.62 \\ 10\,004.02 \\ 31\,952.36 \end{pmatrix}$$

Si ahora repetimos el cálculo para $P^{50}\mathbf{x}_a$, $P^{50}\mathbf{x}_b$ obtenemos

$$P^{50}\mathbf{x}_a = \begin{pmatrix} 18\,000.01 \\ 10\,000.00 \\ 31\,999.99 \end{pmatrix}, \quad P^{50}\mathbf{x}_b = \begin{pmatrix} 18\,000.04 \\ 10\,000.00 \\ 31\,999.96 \end{pmatrix}$$

lo cual nos sugiere que para cualquier $\mathbf{x}$ tal que la suma de sus elementos sean 60 000

$$\lim_{n\to\infty} P^n\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 18\,000 \\ 10\,000 \\ 32\,000 \end{pmatrix}$$

Nota

Código de MATLAB:

```
P=[.8,.2,.05;
.05,.75,.05;
.15.05.9];
xa=[60e3;0;0];
xb=[2e3;40e3;18e3];
P25=P^25;
P50=P^50;
P25xa=P25*xa
P25xb=P25*xb
P50xa=P50*xa
P50xb=P50*xb
```

La notación con $\sum$

Una suma[4] se puede escribir de la siguiente manera, si $N \geq M$.

que se lee "suma de los términos a_k cuando el valor de k va de M a N". En este contexto, $\sum$ se llama **signo de sumatoria** y k se conoce como **índice de la suma**.

Signo de sumatoria

Índice de la suma

EJEMPLO 2.2.10 Interpretación de la notación de sumatoria

Desarrolle la suma $\sum_{k=1}^{5} b_k$.

SOLUCIÓN ► Comenzando con $k = 1$ y terminando con $k = 5$ se obtiene

$$\sum_{k=1}^{5} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$

EJEMPLO 2.2.11 Interpretación de la notación de sumatoria

Desarrolle la suma $\sum_{k=3}^{6} c_k$.

SOLUCIÓN ► Comenzando con $k = 3$ y terminando con $k = 6$ se obtiene

$$\sum_{k=3}^{6} c_k = c_3 + c_4 + c_5 + c_6$$

EJEMPLO 2.2.12 Interpretación de la notación de sumatoria

Calcule $\sum_{k=-2}^{3} k^2$.

SOLUCIÓN ► En este caso $a_k = k^2$ y k va de -2 a 3.

Nota

El índice de la sumatoria puede tomar valores enteros negativos o cero.

$$\begin{aligned}\sum_{k=-2}^{3} k^2 &= (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \\ &= 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 = 19\end{aligned}$$

EJEMPLO 2.2.13 Cómo escribir una suma usando la notación de sumatoria

Escriba la suma $S_8 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8$ usando el signo de sumatoria.

SOLUCIÓN ► Como $1 = (-1)^2, -2 = (-1)^3 \cdot 2, 3 = (-1)^4 \cdot 3\ldots$, se tiene

$$S_8 = \sum_{k=1}^{8} (-1)^{k+1} k$$

EJEMPLO 2.2.14 **Cómo escribir el producto escalar haciendo uso de la notación de sumatoria**

La ecuación (2.2.1) para el producto escalar se puede escribir de manera compacta usando la notación de sumatoria:

SOLUCIÓN ► $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$

La fórmula (2.2.4) para la componente ij del producto AB se puede escribir

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}} \tag{2.2.12}$$

La notación de sumatoria permite describir propiedades de sumas de un número finito de elementos de forma simplificada. Por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n$$

$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

A continuación se resumen ésta y otras propiedades.

Teorema 2.2.4 Propiedades de la notación de sumatoria

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones reales y c un número real. Entonces

$$\sum_{k=M}^{N} ca_k = c\sum_{k=M}^{N} a_k \tag{2.2.13}$$

$$\sum_{k=M}^{N} (a_k + b_k) = \sum_{k=M}^{N} a_k + \sum_{k=M}^{N} b_k \tag{2.2.14}$$

$$\sum_{k=M}^{N} (a_k - b_k) = \sum_{k=M}^{N} a_k - \sum_{k=M}^{N} b_k \tag{2.2.15}$$

$$\sum_{k=M}^{N} a_k = \sum_{k=M}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{N} a_k \qquad \text{si } M < m < N \tag{2.2.16}$$

Las demostraciones de estas propiedades se dejan como ejercicios al lector (vea los problemas 107 a 109).

Ahora se usará la notación de sumatoria para probar la ley asociativa y la ley distributiva.

Demostración

Ley asociativa del teorema 2.2.2

Como A es de $n \times m$ y B es de $m \times p$, AB es de $n \times p$. Entonces $(AB)C = (n \times p) \times (p \times q)$ es una matriz de $n \times q$. De manera similar, BC es de $m \times q$ y $A(BC)$ es de $n \times q$ de manera que $(AB)C$ y $A(BC)$ son ambas del mismo tamaño. Debe demostrarse que la componente ij de $(AB)C$ es igual a la componente ij de $A(BC)$. Si se define $D = (d_{ij}) = AB$, entonces

$$d_{ij} \overset{\text{de (2.2.12)}}{=} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} a_{kj}$$

La componente ij de $(AB)C = DC$ es

$$\sum_{l=1}^{p} d_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

Ahora se define $E = (e_{ij}) = BC$. Entonces

$$e_{kj} = \sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj}$$

y la componente ij de $A(BC) = AE$ es

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} e_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

Así, la componente ij de $(AB)C$ es igual a la componente ij de $A(BC)$. Esto demuestra la ley asociativa.

Demostración

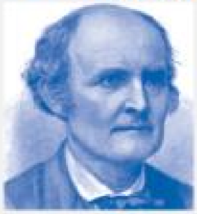
Leyes distributivas del teorema 2.2.3

Se demuestra la primera ley distributiva [ecuación (2.2.7)]. La demostración de la segunda [ecuación (2.2.8)] es idéntica y, por lo mismo, se omite. Sea A una matriz de $n \times m$ y sean B y C matrices de $m \times p$. La componente kj de $B + C$ es $b_{kj} + c_{kj}$ y la componente ij de $A(B + C)$ es

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \overset{\text{de (2.2.12)}}{=} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{m} a_{ik} c_{kj} =$$ componente ij de AB más la componente ij de AC, y esto demuestra la ecuación (2.2.7).

Semblanza de...

Arthur Cayley y el álgebra de matrices



Arthur Cayley
(Library of Congress)

Arthur Cayley (1821-1895), un matemático inglés, desarrolló en 1857 el álgebra de matrices, es decir, las reglas que ilustran la forma en la cual se suman y multiplican las matrices. Nació en Richmond, en Surrey (cerca de Londres) y fue educado en el Trinity College, Cambridge, donde se graduó en 1842. Ese mismo año obtuvo el primer lugar en la difícil prueba para obtener el premio Smith. Durante varios años estudió y ejerció la carrera de leyes, pero nunca dejó que su práctica en la abogacía interfiriera con su trabajo en las matemáticas. Siendo estudiante de leyes viajó a Dublín y asistió a las conferencias de Hamilton sobre cuaterniones. Cuando se estableció la cátedra Sadlerian en Cambridge en 1863, le ofrecieron el puesto a Cayley, quien lo aceptó, renunciando a un lucrativo futuro como abogado a cambio de la modesta remuneración de la vida académica. Pero fue entonces que pudo dedicar *todo* su tiempo a las matemáticas.

Cayley está clasificado como el tercer matemático más prolífico en la historia; lo sobrepasan sólo Euler y Cauchy. Comenzó a publicar siendo todavía estudiante de la universidad en Cambridge. Durante sus años de abogado publicó entre 200 y 300 artículos y continuó su copioso trabajo a lo largo de toda su vida. La colección masiva *Collected Mathematical Papers* de Cayley contiene 966 artículos y consta de 13 grandes volúmenes con un promedio de 600 páginas cada uno. Es casi imposible hallar un área dentro de las matemáticas puras que Cayley no haya estudiado y enriquecido.

Además de desarrollar la teoría de matrices, Cayley fue pionero en sus contribuciones a la geometría analítica, la teoría de determinantes, la geometría de n dimensiones, la teoría de curvas y superficies, el estudio de formas binarias, la teoría de funciones elípticas y el desarrollo de la teoría de invariantes.

El estilo matemático de Cayley refleja su formación legal ya que sus artículos son severos, directos, metódicos y claros. Poseía una memoria fenomenal y parecía nunca olvidar nada que hubiera visto o leído alguna vez. Tenía además un temperamento singularmente sereno, calmado y amable. Se le llamaba "el matemático de los matemáticos".

Cayley desarrolló un interés poco común por la lectura de novelas. Las leía mientras viajaba, mientras esperaba que una junta comenzara y en cualquier momento que considerara oportuno. Durante su vida leyó miles de novelas, no sólo en inglés, sino también en griego, francés, alemán e italiano. Disfrutaba mucho pintar, en especial con acuarela y mostraba un marcado talento como especialista de esta técnica. También era un estudiante apasionado de la botánica y la naturaleza en general.

Cayley era, en el verdadero sentido de la tradición inglesa, un alpinista amateur e hizo viajes frecuentes al continente para realizar caminatas y escalar montañas. Cuenta la historia que decía que la razón por la que se unió al alpinismo fue que, aunque sentía que el ascenso era arduo y cansado, la gloriosa sensación de goce que lograba cuando conquistaba una cima era como el que experimentaba cuando resolvía un problema difícil de matemáticas o cuando completaba una teoría matemática intrincada.

Las matrices surgieron con Cayley, relacionadas con las transformaciones lineales del tipo

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \qquad \textbf{(2.2.17)}$$

donde a, b, c, d son números reales, y donde puede pensarse que son funciones que convierten al vector (x, y) en el vector (x', y'). Las transformaciones se estudiarán con detalle en el capítulo 7. Aquí se observa que la transformación (2.2.17) está completamente determinada por los cuatro coeficientes a, b, c, d y por lo tanto puede simbolizarse por el arreglo matricial cuadrado

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

al que se ha dado el nombre de matriz 2×2. Como dos transformaciones del tipo de (2.2.17) son idénticas si y sólo si tienen los mismos coeficientes, Cayley definió que dos matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

eran iguales si y sólo si $a = e$, $b = f$, $c = g$ y $d = h$.

Ahora suponga que la transformación (2.2.17) va seguida de la transformación

$$\begin{aligned} x'' &= ex' + fy' \\ y'' &= gx' + hy' \end{aligned} \qquad \textbf{(2.2.18)}$$

Entonces

$$x'' = e(ax + by) + f(cx + dy) = (ea + fc)x + (eb + fd)y$$

y

$$y'' = g(ax + by) + h(cx + dy) = (ga + hc)x + (gb + hd)y$$

Esto llevó a Cayley a la siguiente definición para el producto de dos matrices:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$$

que es, por supuesto, un caso especial de la definición general del producto de dos matrices que se dio en la página 65.

Es interesante recalcar cómo, en matemáticas, observaciones muy sencillas pueden llevar a definiciones y teoremas importantes.

RESUMEN 2.2

- El **producto escalar** de dos vectores de n componentes es:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

- *Productos de dos matrices*

  Sea A una matriz de $m \times n$ y B una matriz de $n \times p$. Entonces AB es una matriz de $m \times p$ y la componente de ij de AB = (renglón i de A) · (columna j de B)

$$=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}\,b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,c_{kj}$$

- En términos, los productos de matrices no son conmutativos; es decir, casi siempre ocurre que $AB \neq BA$.

- *Ley asociativa de la multiplicación de matrices*

  Si A es una matriz de $n \times m$, B es de $m \times p$ y C es de $p \times q$, entonces

$$A(BC)=(AB)C$$

  y tanto $A(BC)$ como $(AB)C$ son matrices de $n \times q$.

- *Leyes distributivas de la multiplicación de matrices*

  Si todos los productos están definidos, entonces

$$A(B+C)=AB+AC \quad \text{y} \quad (A+B)C=AC+BC$$

AUTOEVALUACIÓN 2.2

I) De las siguientes afirmaciones, ¿cuál es cierta para la multiplicación de las matrices A y B?

a) Se puede realizar sólo si A y B son matrices cuadradas.
b) Cada elemento c_{ij} es el producto de a_{ij} y b_{ij}.
c) $AB = BA$.
d) Se puede realizar sólo si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B.

II) ¿Cuál de los siguientes sería el tamaño de la matriz producto AB si se multiplica la matriz A de 2×4 por la matriz B de 4×3?

a) 2×3 *b*) 3×2 *c*) 4×4
d) Este producto no se puede calcular.

III) Indique cuál de los siguientes enunciados es correcto para las matrices A y B si AB es un vector columna.

a) B es un vector columna.
b) A es un vector renglón.
c) A y B son matrices cuadradas.
d) El número de renglones de A debe ser igual al número de columnas de B.

IV) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el producto AB es cierta si A es una matriz de 4×5?

a) B debe tener cuatro renglones y el resultado tendrá cinco columnas.
b) B debe tener cinco columnas y el resultado será una matriz cuadrada.
c) B debe tener cuatro columnas y el resultado tendrá cinco renglones.
d) B debe tener cinco renglones y el resultado tendrá cuatro renglones.

Respuestas a la autoevaluación

I) *d*) **II)** *a*) **III)** *a*) **IV)** *d*)

PROBLEMAS 2.2

En los problemas 1 a 8 calcule el producto escalar de los dos vectores.

1. $(3, -2, 5); (-1, -2, 6)$

2. $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

4. $(7, -4); (-1, -4)$

5. $(a, b); (c, d)$

6. $(p, -2p, 3p); (-3, 1, -4)$

7. $\left(\pi \quad \frac{\pi^2}{3} \quad 3\right); (\pi^2, -9\pi, \pi^3)$

8. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$

9. Sea $\mathbf{a}$ un vector de dimensión n. Pruebe que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$.

10. Encuentre las condiciones sobre un vector $\mathbf{a}$ tales que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$.

En los problemas 11 a 19 realice las operaciones indicadas con $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ \ldots \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ \ldots \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ \ldots \end{pmatrix}$.

11. $(2\mathbf{a})\cdot(3\mathbf{b})$ **12.** $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ **13.** $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

14. $\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ **15.** $(2\mathbf{b})\cdot(3\mathbf{c}-5\mathbf{a})$ **16.** $(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(3\mathbf{b}-4\mathbf{a})$

17. $(3\mathbf{b}-4\,\mathbf{a})\cdot(4\mathbf{c}+2\mathbf{b}-\mathbf{a})$ **18.** $\dfrac{1}{\mathbf{a}\cdot(4\,\mathbf{c})}\mathbf{b}-4\mathbf{c}$ **19.** $\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}$

En los problemas 20 a 36 realice los cálculos indicados , de ser posible explique porqué no se pueden realizar.

20. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}(3 \quad 5)$ **21.** $(3 \quad 5)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **22.** $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **24.** $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **25.** $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **27.** $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}(3 \quad -2)$ **28.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

29. $(3 \quad -2)\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **30.** $(1 \quad 4 \quad 0 \quad 2)\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ **31.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **33.** $\begin{pmatrix} 7 & 10 & 6 & -2 \\ 10 & 0 & -8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{7}{6} & \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{10}{3} \\ 3 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **35.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $a, b, c, d, e, f, g, h, j$, son números reales.

37. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$, encuentre un vector no nulo $b = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tal que $Ab = 6b$.

38. Encuentre una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

40. Encuentre B tal que $AB = C$. Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

41. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, pruebe que $A^2 + B^2 = (A + B)^2$.

42. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, encuentre las condiciones para a, b, c y d tal que $AB = BA$.

43. Una matriz A de $n \times n$ tal que $A^2 = I_n$ se llama involutiva. Pruebe que la siguiente matriz es involutiva:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

44. Demuestre que $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ con $n \in \mathbb{Z}^+$.

45. Sean a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} números reales dados tales que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Encuentre los números b_{11}, b_{12}, b_{21} y b_{22} tales que $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

46. Dada la siguiente matriz pruebe que $A^2 = A$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

47. Verifique la ley asociativa para la multiplicación de las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

48. De la misma forma que en el ejemplo 2.2.6, suponga que un grupo de personas ha contraído una enfermedad contagiosa. Estas personas tienen contacto con un segundo grupo que, a su vez, tiene contacto con un tercer grupo. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ representa los contactos entre el grupo contagioso y los miembros del grupo 2, y si $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ representa los contactos entre los grupos 2 y 3. *a*) ¿Cuántas personas hay en cada grupo? *b*) Encuentre la matriz de contactos indirectos entre los grupos 1 y 3.

49. Conteste la pregunta del problema 48 para

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&1&0&1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&0&1\\0&1&1&0&0&0&1\\0&1&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Vectores ortogonales

Se dice que dos vectores **a** y **b** son **ortogonales** si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$. En los problemas 50 a 56 determine cuáles pares de vectores son ortogonales.[5]

50. $(1\ \ -3); (4\ \ -2)$ **51.** $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ **52.** $(7\ \ -5\ \ 4\ \ 11); (2\ \ 4\ \ 3\ \ 2)$

53. $\begin{pmatrix}1\\4\\-7\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$ **54.** $(1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)$ **55.** $\begin{pmatrix}1\\3\\-7\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}4\\8\\4\end{pmatrix}$

56. $\begin{pmatrix}a\\0\\b\\0\\c\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\d\\0\\e\\0\end{pmatrix}$

57. Determine la relación entre los números α y β tales que $(3\beta\ \ -2\ \ 1\ \ 3)$ es ortogonal a $(4\ \ 1\ \ -2\alpha\ \ 2)$.

58. Determine todos los números α y β tales que los vectores $\begin{pmatrix}1\\-\alpha\\2\\3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}4\\5\\-2\beta\\3\end{pmatrix}$ son ortogonales.

59. Demuestre el teorema 2.2.1 usando la definición de producto escalar.

60. Un fabricante de joyería de diseño tiene órdenes por dos anillos, tres pares de aretes, cinco prendedores y un collar. El fabricante estima que le llevará 1 hora de mano de obra hacer un anillo, $1\frac{1}{2}$ horas hacer un par de aretes, $\frac{1}{2}$ hora para un prendedor y 2 horas para un collar.

a) Exprese las órdenes del fabricante como un vector renglón.
b) Exprese los requerimientos en horas para los distintos tipos de joyas como un vector columna.
c) Utilice el producto escalar para calcular el número total de horas que requerirá para terminar las órdenes.

61. Un turista regresó de un viaje por América del Sur con divisa extranjera de las siguientes denominaciones: 1 000 pesos argentinos, 20 reales de Brasil, 100 pesos colombianos, 5 000 pesos chilenos y 50 colones de Costa Rica. En dólares, un peso argentino valía \$0.3174, los reales brasileños \$0.4962, los pesos colombianos \$0.000471, los pesos chilenos \$0.00191 y los colones \$0.001928.

a) Exprese la cantidad de cada tipo de moneda por medio de un vector renglón.
b) Exprese el valor de cada tipo de moneda en dólares por medio de un vector columna.
c) Utilice el producto escalar para calcular cuántos dólares valía el dinero extranjero del turista.

62. Una compañía paga un salario a sus ejecutivos y les da un porcentaje de sus acciones como un bono anual. El año pasado el presidente de la compañía recibió \$80 000 y 50 acciones, se pagó a cada uno de los vicepresidentes \$45 000 y 20 acciones y el tesorero recibió \$40 000 y 10 acciones.

a) Exprese los pagos a los ejecutivos en dinero y acciones como una matriz de 2×3.

b) Exprese el número de ejecutivos de cada nivel como un vector columna.

c) Utilice la multiplicación de matrices para calcular la cantidad total de dinero y el número total de acciones que pagó la compañía a los ejecutivos el año pasado.

63. La siguiente tabla contiene ventas, utilidades brutas por unidad y los impuestos por unidad sobre las ventas de una compañía grande:

	Producto					
Mes	Artículo vendido I	II	III	Artículo	Utilidad unitaria (en cientos de dólares)	Impuestos unitarios (en cientos de dólares)
Enero	4	2	20	I	3.5	1.5
Febrero	6	1	9	II	2.75	2
Marzo	5	3	12	III	1.5	0.6
Abril	8	2.5	20			

Elabore una matriz que muestre las utilidades y los impuestos totales de cada mes.

64. Sea A una matriz cuadrada. Entonces A^2 se define simplemente como AA. Calcule
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}^2$.

65. Calcule A^2 si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

66. Calcule A^3 si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

67. Calcule A^2, A^3, A^4 y A^5 donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

68. Calcule A^2, A^3, A^4 y A^5 donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

69. Una matriz A de $n \times n$ tiene la propiedad de que AB es la matriz cero para cualquier matriz B de $n \times n$. Pruebe que A es la matriz cero.

Matriz de probabilidades

70. Una **matriz de probabilidades** es una matriz cuadrada que tiene dos propiedades:

i) Todos sus elementos son no negativos (≥ 0).

ii) La suma de los elementos en cada renglón es 1.

Las siguientes matrices son matrices de probabilidades:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Muestre que el producto PQ es una matriz de probabilidad.

***71.** Sea P una matriz de probabilidades. Pruebe que P^2 es una matriz de probabilidades.

****72.** Sean P y Q dos matrices de probabilidades del mismo tamaño. Pruebe que PQ es una matriz de probabilidades.

73. Pruebe la fórmula (2.2.6) usando la ley asociativa [ecuación (2.2.5)].

***74.** Se puede organizar un torneo de tenis de la siguiente manera. Cada uno de los n tenistas juega contra todos los demás y se registran los resultados en una matriz R de $n \times n$ de la siguiente forma:

$$R_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el tenista } i \text{ le gana al tenista } j \\ 0 & \text{si el tenista } i \text{ pierde contra el tenista } j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Después se asigna al tenista i la calificación

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (R_{ij})^2$$

i) Para un torneo entre cuatro tenistas

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Clasifique a los tenistas según sus calificaciones.

ii) Interprete el significado de la calificación.

75. Sea O una matriz cero de $m \times n$ y sea A una matriz de $n \times p$. Demuestre que $OA = O_1$, donde O_1 es la matriz cero de $m \times p$.

76. Verifique la ley distributiva [ecuación (2.2.7)] para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

En los problemas 77 a 81 multiplique las matrices usando los bloques indicados.

77. $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ \hline 3 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ \hline 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{array}\right)$

78. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|cc} -3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{array}\right)$

79. $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ \hline -2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \\ \hline 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 3 \end{array}\right)$

80. $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} e & f & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

81. $\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

82. Sea $A = \begin{pmatrix} I & O \\ C & I \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} I & O \\ D & I \end{pmatrix}$. Si se hace una partición conformante de A y B, demuestre que A y B conmutan. Considere que I es una matriz identidad y O es una matriz de ceros.

En los problemas 83 a 92 evalúe las sumas dadas.

83. $\sum_{k=1}^{5} k$

84. $\sum_{i=1}^{3} i^3$

85. $\sum_{k=1}^{3} 2$

86. $\sum_{k=2}^{7} k(k+1)$

87. $\sum_{k=1}^{8} 3^k$

88. $\sum_{n=1}^{5} \frac{n+2}{n+1}$

89. $\sum_{k=1}^{5} (-1)^k (k+1)$

90. $\sum_{q=-3}^{5} (-1)^{q+1} \frac{q+2}{q+4}$

91. $\sum_{j=2}^{4} \sum_{k=1}^{j} jk$

92. $\sum_{k=1}^{3} \sum_{j=2}^{4} k^2 j^3$

En los problemas 93 a 106 escriba cada suma haciendo uso de la notación de sumatoria.

93. $-1 + 2 + 5 + 8 + 11$

95. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+\frac{7}{8}+\cdots+\frac{n}{n+1}$

96. $1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+4^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{5}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}$

97. $x-x^3+x^5-x^7+x^9$

98. $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}$

99. $-1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}+\frac{1}{a^7}-\frac{1}{a^8}+\frac{1}{a^9}$

100. $1\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot 7+7\cdot 9+9\cdot 11+11\cdot 13+13\cdot 15+15\cdot 17$

101. $3^2+4^3+5^6+6^7$

102. $|a_{11}|+|a_{12}|+|a_{13}|+|a_{21}|+|a_{22}|+|a_{23}|$

103. $a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}+a_{31}+a_{32}$

104. $a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}+a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}$

105. $a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}+a_{34}b_{42}+a_{35}b_{52}$

106. $a_{21}b_{11}c_{15}+a_{21}b_{12}c_{25}+a_{21}b_{13}c_{35}+a_{21}b_{14}c_{45}$
$+a_{22}b_{21}c_{15}+a_{22}b_{12}c_{25}+a_{22}b_{23}c_{35}+a_{22}b_{24}c_{45}$
$+a_{23}b_{31}c_{15}+a_{23}b_{32}c_{25}+a_{23}b_{33}c_{35}+a_{23}b_{34}c_{45}$

107. Pruebe la fórmula (2.2.14) extendiendo los términos de

$$\sum_{k=M}^{N}(a_k+b_k)$$

108. Pruebe la fórmula (2.2.15).
[*Sugerencia:* Utilice (2.2.13) para demostrar que $\sum_{k=M}^{N}(-a_k)=-\sum_{k=M}^{N}a_k$. Luego use (2.2.14).]

109. Pruebe la fórmula (2.2.16).

EJERCICIOS CON MATLAB 2.2

Información de MATLAB

Una matriz producto AB se forma mediante `A*B`.

Una potencia entera de una matriz, A^n, se encuentra con `A^n`, donde n tiene un valor asignado previamente.

Se repiten algunos comandos básicos para generar matrices aleatorias; para una matriz aleatoria de $n \times m$ con elementos entre $-c$ y c, `A=c*(2*rand(n,m)-1)`; para una matriz aleatoria de $n \times m$ con elementos enteros entre $-c$ y c, `B=round(c*(2*rand(n,m)-1))`. Para generar matrices con elementos complejos se generan A y B como se acaba de indicar y se hace `C=A+i*B`. Si un problema pide que se generen matrices aleatorias con ciertos elementos, genere matrices tanto reales como complejas.

1. Introduzca cualesquiera dos matrices A de 3×4 y B de 4×2. Encuentre `A*B` y `B*A`. Comente acerca de los resultados.

2. Genere dos matrices aleatorias, A y B, con elementos entre -10 y 10. Encuentre AB y BA. Repita

3. Introduzca las matrices A, $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{z}$ siguientes.

$$A=\begin{pmatrix}2&9&-23&0\\0&4&-12&4\\7&5&-1&1\\7&8&-10&4\end{pmatrix}\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}34\\24\\15\\33\end{pmatrix}\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}-5\\10\\2\\2\end{pmatrix}\quad \mathbf{z}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\0\end{pmatrix}$$

a) Muestre que $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ y $A\mathbf{z}=\mathbf{0}$.

b) Con base en sus conocimientos de la manipulación algebraica normal y usando los resultados del inciso *a*), ¿qué podría decir que sería igual $A(\mathbf{x}+s\mathbf{z})$, donde s es cualquier escalar? Pruebe calculando $A(\mathbf{x}+s\mathbf{z})$ para al menos cinco escalares s diferentes.

4. *a*) Genere dos matrices aleatorias con elementos enteros A y B tales que el producto AB esté definido. Modifique B de manera que tenga dos columnas iguales. (Por ejemplo, `B(:,2) = B(:,3).`)

b) Encuentre AB y vea sus columnas. ¿Qué puede decir sobre las columnas de AB si B tiene dos columnas iguales?

c) Pruebe su conclusión repitiendo las instrucciones anteriores para otros tres pares de matrices A y B (no elija sólo matrices cuadradas).

d) (*Lápiz y papel*) Pruebe su conclusión haciendo uso de la definición de multiplicación de matrices.

5. Genere una matriz aleatoria A de 5×6 con elementos entre -10 y 10 y genere un vector aleatorio $\mathbf{x}$ de 6×1 con elementos entre -10 y 10. Encuentre

```
A*x-(x(1)*A(:,1)+ · · · +x(6)*A(:,6)).
```

Repita el proceso para otros pares de A y $\mathbf{x}$. ¿Qué relación tiene esto con la expresión (2.2.10) de esta sección?

6. *a*) Sea $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Suponga que $B=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$.

Establezca el sistema de ecuaciones, con incógnitas x_1 a x_4, que surge al hacer $AB=BA$. Verifique que el sistema sea homogéneo con matriz de coeficientes

$$R=\begin{pmatrix}0&-c&b&0\\-b&a-d&0&b\\c&0&d-a&-c\\0&c&-b&1\end{pmatrix}$$

b) Para $A=\begin{pmatrix}1&-1\\5&-4\end{pmatrix}$ es necesario encontrar una matriz B tal que $AB=BA$.

i) Introduzca la matriz R anterior y obtenga x_1, x_2, x_3 y x_4 del sistema homogéneo con matriz de coeficientes R. Explique por qué hay un número infinito de soluciones con un valor arbitrario para una variable.

ii) Encuentre `rat(rref(R))` y utilice esto para elegir un valor para la variable arbitraria de manera que x_i sea un entero. Puede utilizar el comando `format rat` en la

iii) Introduzca la matriz $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ que resulta y verifique que $AB = BA$.

iv) Repita iii) para otra elección de la variable arbitraria.

c) Repita el proceso anterior para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

d) Repita el proceso anterior para una matriz A de 2×2 de su elección.

7. Genere un par de matrices aleatorias, A y B de 2×2 con elementos entre -10 y 10. Encuentre $C = (A + B)^2$ y $D = A^2 + 2AB + B^2$. Compare C y D (encuentre $C - D$). Genere dos pares más de matrices de 2×2 y repita lo anterior. Introduzca un par de matrices, A y B, generadas con MATLAB en el problema 6*b*) de esta sección y encuentre $C - D$ como antes. Introduzca el par de matrices, A y B, generadas con MATLAB en el problema 6*c*) de esta sección y encuentre $C - D$. Con esta evidencia, ¿cuál es su conclusión acerca de la afirmación $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Pruebe su conclusión.

8. *a*) Introduzca `A=round(10*(2*rand(6,5)21))`. Dé `E=[1 0 0 0 0 0]` y encuentre `E*A`. Sea `E=[0 0 1 0 0 0]` y encuentre `E*A`. Describa cómo se compone EA de partes de A y la manera en que esto depende de la posición de los elementos iguales a 1 en la matriz E.

b) Sea `E=[2 0 0 0 0 0]`; encuentre `E*A`. Sea `E=[0 0 2 0 0 0]`; encuentre `E*A`. Describa cómo se compone EA de partes de A y la manera en que esto depende de la posición del elemento 2 en la matriz E.

c) i) Sea `E=[1 0 1 0 0 0]` y encuentre `E*A`. Describa cómo se compone EA de partes de A y la manera en que la relación depende de la posición de los elementos 1 en la matriz E.

ii) Sea `E=[2 0 1 0 0 0]` y encuentre `E*A`. Describa cómo se compone EA de partes de A y la manera en que la relación depende de la posición de los elementos distintos de cero en la matriz E.

d) Asuma que A es una matriz de $n \times m$ y E es de $1 \times n$, donde el k-ésimo elemento de E es igual a algún número p. De *a*) y *b*) formule una conclusión sobre la relación entre A y EA. Pruebe su conclusión generando una matriz aleatoria A (para alguna elección de n y m), formando dos matrices E diferentes (para alguna elección de k y p), y encontrando EA para cada E. Repita esto para otra matriz A.

e) Suponga que A es una matriz de $n \times m$ y E es de $1 \times n$, donde el k-ésimo elemento de E es igual a algún número p y el j-ésimo elemento de E es igual a algún número q. Del inciso *c*) formule una conclusión sobre la relación entre A y EA. Pruebe su conclusión generando una matriz aleatoria A, formando dos matrices diferentes E de la forma descrita y encontrando EA para cada E. Repita lo anterior para otra matriz A.

f) Suponga que A es de $n \times m$ y F es de $m \times 1$, donde el k-ésimo elemento de F es igual a algún número p y el j-ésimo elemento de F es igual a algún número q. Considere AF. Realice un experimento como el anterior para determinar una conclusión sobre la relación entre AF y A.

9. Matriz triangular superior

a) Sean A y B cualesquiera dos matrices aleatorias de 3×3. Sea `UA=triu(A)` y `UB=triu(B)`. El comando `triu` (`doc triu`) forma matrices triangulares superiores. Encuentre `UA*UB`. ¿Qué propiedad tiene el producto? Repita para otros tres pares de matrices aleatorias de $n \times n$, haciendo uso de diferentes valores de n.

b) (*Lápiz y papel*) A partir de sus observaciones escriba una conclusión acerca del producto de dos matrices triangulares superiores. Pruebe su conclusión usando la definición de multiplicación de matrices.

c) ¿Cuál sería su conclusión acerca del producto de dos matrices triangulares inferiores? Pruebe su conclusión para al menos tres pares de matrices triangulares inferiores. [*Sugerencia:* Use `tril(A)` y `tril(B)` para generar matrices triangulares inferiores a partir de las matrices aleatorias A y B (`doc tril`).]

10. Matrices nilpotentes

Se dice que una matriz A diferente de cero es **nilpotente** si existe un entero k tal que $A^k = 0$. El **índice de nilpotencia** se define como el entero más pequeño para el que $A^k = 0$.

Matriz nilpotente

Índice de nilpotencia

a) Genere una matriz aleatoria de 5×5. Sea `B=triu(A,1)`, ¿qué forma tiene B? Compare B^2, B^3, etc.; demuestre que B es nilpotente y encuentre su índice de nilpotencia.

b) Repita las instrucciones del inciso *a*) para `B=triu(A,2)`.

c) Genere una matriz aleatoria A de 7×7. Repita los incisos *a*) y *b*) usando esta A.

d) Con base en la experiencia adquirida en las partes *a*), *b*) y *c*) (y más investigación sobre el comando `B=triu(A,j)`, donde j es un entero), genere una matriz C de 6×6 que sea nilpotente con un índice de nilpotencia igual a 3.

11. Matrices por bloques

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, entonces $AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$.

Explique cuándo este patrón es cierto si $a, b, \ldots, h$, son matrices en lugar de números.

Genere ocho matrices de 2×2, A, B, C, D, E, F, G y H. Encuentre `AA=[A B; C D]` y `BB [E F; G H]`. Encuentre `AA*BB` y compárela con `K=[A*E+B*G A*F+B*H; C*E+D*G C*F+D*H]` (es decir, encuentre `AA*BB–K`). Repita para otros dos conjuntos de matrices, $A, B, \ldots, H$.

12. Producto exterior

Genere una matriz aleatoria A de 3×4 y una matriz aleatoria B de 4×5. Calcule

$$(\text{col } 1\ A)(\text{row } 1\ B) + (\text{col } 2\ A)(\text{row } 2\ B) + \cdots + (\text{col } 4\ A)(\text{row } 4\ B)$$

y etiquete esta expresión como D. Encuentre $D - AB$. Describa la relación entre D y AB. Repita esto para una matriz aleatoria A de tamaño 5×5 y una matriz aleatoria B de tamaño 5×6 (en este caso la suma para calcular D implica la suma de cinco productos).

13. Matrices de contacto

Considere cuatro grupos de personas: el grupo 1 está compuesto de $A1$, $A2$ y $A3$, el grupo 2 está compuesto de 5 personas, de $B1$ a $B5$; el grupo 3 consta de 8 personas, de $C1$ a $C8$, y el grupo 4 de 10 personas, $D1$ a $D10$.

a) Dada la siguiente información introduzca las tres matrices de contacto directo (vea en el problema 2 de MATLAB de la sección 2.1 una manera eficiente de introducir estas matrices).

Contactos:

($A1$ con $B1$, $B2$) ($A2$ con $B2$, $B3$) ($A3$ con $B1$, $B4$, $B5$)

($B1$ con $C1$, $C3$, $C5$) ($B2$ con $C3$, $C4$, $C7$)

($C1$ con $D1$, $D2$, $D3$) ($C2$ con $D3$, $D4$, $D6$) ($C3$ con $D8$, $D9$, $D10$)

($C4$ con $D4$, $D5$, $D7$) ($C5$ con $D1$, $D4$, $D6$, $D8$) ($C6$ con $D2$, $D4$)

($C7$ con $D1$, $D5$, $D9$) ($C8$ con $D1$, $D2$, $D4$, $D6$, $D7$, $D9$, $D10$)

b) Encuentre la matriz de contacto indirecto para los contactos del grupo 1 con el grupo 4. ¿Cuáles elementos son cero? ¿Qué significa esto? Interprete el elemento (1, 5) y el (2, 4) de esta matriz de contacto indirecto.

c) ¿Cuál de las personas del grupo 4 tiene más contactos indirectos con el grupo 1? ¿Qué persona tiene menos contactos? ¿Qué persona del grupo 1 es la "más peligrosa" (por contagiar la enfermedad) para las personas del grupo 4? ¿Por qué?

[*Sugerencia:* Existe una manera de usar la multiplicación de matrices para calcular las sumas de renglón y columna. Utilice los vectores `d=ones(10,1)` y `e=ones(1,3)`. Aquí el comando `ones(n,m)` produce una matriz de tamaño $n \times m$, en donde todos los elementos son iguales a 1 `(doc ones)`.]

14. Cadena de Markov

Una empresa que realiza estudios de mercado está estudiando los patrones de compra para tres productos que son competidores entre sí. La empresa ha determinado el porcentaje de residentes de casas que cambiarían de un producto a otro después de un mes (suponga que cada residente compra uno de los tres productos y que los porcentajes no cambian de un mes a otro). Esta información se presenta en forma de matriz:

$$p_{ij} = \text{porcentaje que cambia } del \text{ producto } j \text{ } al \text{ producto } i$$

Matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.05 \\ 0.05 & 0.75 & 0.05 \\ 0.15 & 0.05 & 0.9 \end{pmatrix} \quad P \text{ se llama } \textbf{matriz de transición.}$$

Por ejemplo, $P_{12} = 0.2$ significa que 20% de los residentes que compran el producto 2 cambia al producto 1 después de un mes y $P_{22} = 0.75$ significa que 75% de los residentes que compraban el producto 2 continúa comprándolo después de un mes. Suponga que existe un total de 30 000 residentes.

a) (*Lápiz y papel*) Interprete los otros elementos de P.

b) Sea $\mathbf{x}$ una matriz de 3×1, donde x_k= el número de residentes que compran el producto k. ¿Cuál es la interpretación de $P\mathbf{x}$? ¿Y de $P^2\mathbf{x} = P(P\mathbf{x})$?

c) Suponga inicialmente que

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10\,000 \\ 10\,000 \\ 10\,000 \end{pmatrix}$$

Encuentre $P^n\mathbf{x}$ para $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$ y 50. Describa el comportamiento de los vectores $P^n\mathbf{x}$ conforme n crece. ¿Qué interpretación se le puede dar a esto?

d) Suponga inicialmente que

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30\,000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) Elija su propio vector inicial para **x**, en donde las componentes de **x** sumen 30 000. Repita las instrucciones y haga una comparación con los resultados anteriores.

f) Calcule P^n y $30\,000P^n$ para los valores de n dados antes. ¿Qué observa sobre las columnas de P^n? ¿Cuál es la relación de las columnas de $30\,000\ P^n$ y los resultados anteriores de este problema?

g) Tomemos el caso de una agencia de renta de automóviles que tiene tres oficinas. Un auto rentado en una oficina puede ser devuelto en cualquiera de ellas. Suponga que

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.05 & 0.75 & 0.1 \\ 0.15 & 0.15 & 0.8 \end{pmatrix}$$

es una matriz de transición tal que P_{ij} = porcentaje de autos rentados en la oficina j y devueltos en la oficina i después de un periodo. Suponga que se tiene un total de 1 000 automóviles. De acuerdo con sus observaciones en los incisos anteriores de este problema, encuentre la distribución a largo plazo de los autos, es decir, el número de autos que habrá a la larga en cada oficina. ¿Cómo puede usar esta información una oficina de renta de automóviles?

15. Matriz de población

Problema proyecto

Una población de peces está dividida en cinco grupos de edades distintas en donde el grupo 1 representa a los pequeños y el grupo 5 a los de mayor edad. La matriz siguiente representa las tasas de nacimiento y supervivencia:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$$

s_{1j} = número de peces que nacen por cada pez en el grupo j en un año
s_{ij} = número de peces en el grupo j que sobrevive y pasa al grupo i, donde $i > 1$

Por ejemplo, $s_{13} = 2$ dice que cada pez del grupo 3 tiene 2 crías en un año y $s_{21} = 0.4$ dice que 40% de los peces en el grupo 1 sobrevive al grupo 2 un año después.

a) (*Lápiz y papel*) Interprete los otros elementos de S.

b) (*Lápiz y papel*) Sea **x** la matriz de 5×1 tal que x_k = número de peces en el grupo k. Explique por qué $S^2\mathbf{x}$ representa el número de peces en cada grupo dos años más tarde.

c) Sea

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5\,000 \\ 10\,000 \\ 20\,000 \\ 20\,000 \\ 5\,000 \end{pmatrix}$$

Encuentre `floor(S^n*x)` para n = 10, 20, 30, 40 y 50 (el comando `floor` redondea al menor entero más cercano (`doc floor`)). ¿Qué sucede con la población de peces a través del tiempo? ¿Está creciendo o está pereciendo? Explique.

d) Los cambios en las tasas de nacimiento y supervivencia pueden afectar el crecimiento de la la población. Cambie s_{13} otra vez a 2 y s_{32} a 0.3 y repita los comandos del inciso *c*). Describa lo que parece estar sucediendo con la población.

e) (*Lápiz y papel*) Suponga que se tiene interés en criar esta población de peces. Sea **h** el vector de 5×1, en donde h_j = número de peces criados del grupo j al final del año. Argumente por qué `u=S*x-h` proporciona el número de peces que se tienen al final del año después de la cosecha y luego por qué el número de peces al final de dos años después de la cosecha está dado por `w=S*u-h`.

f) Cambie s_{13} otra vez a 2 y s_{32} otra vez a 5. Suponga que se decide criar sólo peces maduros, es decir, peces del grupo 5. Se examinarán las posibilidades de cosecha a través de un periodo de 15 años. Sea `h = [0;0;0;0;2000]`. Para demostrar que ésta no es una cosecha que se pueda seguir utilice los comandos

```
u=S*x-h
u=S*u-h
```

Repita el último comando (con la flecha hacia arriba) hasta que obtenga un número negativo de peces después de una cosecha. ¿Durante cuántos años se puede recoger esta cantidad?

g) Experimente con otras cosechas del grupo 5 para encontrar la cantidad máxima de peces que se pueden obtener en un año dado con el fin de sostener este nivel de cosecha durante 15 años (introduzca `h=[0;0;0;0;n]` para un número n y repita los comandos del inciso *f*) según sea necesario para representar 15 años de cosecha). Escriba una descripción de su experimento y de sus resultados.

h) Siga con el experimento hasta ver si se puede encontrar un vector **h** que represente las cosechas de los grupos 4 y 5 que permitirían que cada año se cosecharan más peces (y que se sostuviera la cosecha durante 15 años). Escriba una descripción de su experimento y de sus resultados.

2.3 Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

En la sección 1.2 se estudiaron los sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad \textbf{(2.3.1)}$$

Sea A la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

x el vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y **b** el vector $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Como A es una matriz de $m \times n$ y x es una matriz de

Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.3.2}$$

EJEMPLO 2.3.1 Cómo escribir un sistema mediante su representación matricial

Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

(Vea el ejemplo 1.2.1.) Esto se puede escribir como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es mucho más sencillo escribir el sistema (2.3.1) en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Además existen otras ventajas. En la sección 2.4 se observará la rapidez con que se puede resolver un sistema cuadrado si se conoce una matriz llamada la *inversa* de A. Aun sin ella, como ya se vio en la sección 1.2, es mucho más sencillo escribir los cálculos usando una matriz aumentada.

Sistema homogéneo

Si $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ es el vector cero de $m \times 1$, entonces el sistema (2.3.1) es **homogéneo** (vea la sección 1.4) y se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{(forma matricial de un sistema de ecuaciones homogéneo).}$$

Sistema no homogéneo

Si alguno de los elementos del vector $\mathbf{b}$ es diferente de cero, entonces decimos que el sistema es **no homogéneo.**

Existe una relación fundamental entre los sistemas homogéneos y los no homogéneos. Sea A una matriz $m \times n$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{0} = \overset{m \text{ ceros}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Nota

Todo vector $\mathbf{x}$ que sea solución de un sistema no homogéneo se conoce como solución particular.

El sistema lineal no homogéneo general se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.3.4}$$

Sistema homogéneo asociado

Con A y $\mathbf{x}$ dados en (2.3.4) y $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, un **sistema homogéneo asociado** se define como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2.3.5}$$

Teorema 2.3.1

Sean $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ soluciones al sistema no homogéneo (2.3.4). Entonces su diferencia $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ es una solución al sistema homogéneo asociado (2.3.5).

Demostración

$$A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \overset{\substack{\text{por la ley distributiva}\\(2.2.7)}}{=} A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Corolario

Sea $\mathbf{x}$ una solución particular al sistema no homogéneo (2.3.4) y sea $\mathbf{y}$ otra solución a (2.3.4). Entonces existe una solución $\mathbf{h}$ al sistema homogéneo (2.3.5) tal que

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h} \tag{2.3.6}$$

Demostración

Si $\mathbf{h}$ está definida por $\mathbf{h} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, entonces $\mathbf{h}$ es una solución de (2.3.5) por el teorema 2.3.1 y $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h}$.

Observación

Un resultado muy similar se cumple para las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas (vea los problemas 30 y 31). Una de las bondades de las matemáticas es que temas en apariencia muy diferentes pueden tener una fuerte interrelación.

El teorema 2.3.1 y su corolario son muy útiles. Establecen que

> Con objeto de encontrar todas las soluciones al sistema no homogéneo (2.3.4), basta con encontrar una solución a (2.3.4), que llamaremos solución particular (x_p), y todas las soluciones al sistema homogéneo asociado (2.3.5), que llamaremos solución homogénea (x_h).

EJEMPLO 2.3.2 **Cómo escribir un número infinito de soluciones como una solución particular a un sistema no homogéneo más las soluciones al sistema homogéneo**

Encuentre todas las soluciones al sistema no homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 1 \\ -x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

usando el resultado anterior.

SOLUCIÓN ► Primero, se encuentra una solución mediante la reducción por renglones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13 & 4 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las ecuaciones correspondientes a los primeros dos renglones del último sistema son

$$x_1 = 4 - 13x_3 \quad \text{y} \quad x_2 = -2 + 7x_3$$

con lo que las soluciones son

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (4 - 13x_3, -2 + 7x_3, x_3) = \mathbf{x_p} + \mathbf{x_h}$$

donde $\mathbf{x_p} = (4, -2, 0)$ es una solución particular y $\mathbf{x_h} = x_3(-13, 7, 1)$, donde x_3 es un número real, es una solución al sistema homogéneo asociado. Por ejemplo, $x_3 = 0$ lleva a la solución $(4, -2, 0)$ mientras que $x_3 = 2$ da la solución $(-22, 12, 2)$.

RESUMEN 2.3

- Los sistemas de ecuaciones lineales se pueden escribir como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Toda solución del sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede escribir como $x = x_p + x_h$, donde x_p es alguna solución particular y x_h es toda solución homogénea.

AUTOEVALUACIÓN 2.3

I) Si el sistema $\begin{pmatrix} x - z = 2 \\ y + z = 3 \\ x + 2y = 4 \end{pmatrix}$ se escribe en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, entonces $A =$ _______.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Respuesta a la autoevaluación

PROBLEMAS 2.3

En los problemas 1 a 8 escriba el sistema dado en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

1.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 12 \\ -5x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 6 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 8 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 10x_2 - 6x_3 &= -9 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_4 - 3x_5 &= 0 \\ -5x_3 - 2x_4 - 6x_5 &= 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} 8x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 7x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 5 \\ x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 3 \\ 4x_2 + 4x_4 &= 2 \\ 5x_1 + 2x_2 &= -1 \\ 3x_2 + 9x_3 &= 4 \end{aligned}$$

En los problemas 9 a 20 escriba el sistema de ecuaciones representado por la matriz aumentada correspondiente.

9. $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$

10. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 20 \end{array}\right)$

11. $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$

12. $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & -3 & 12 \\ 8 & 11 & -3 & 1 \\ -1 & 12 & -1 & 2 \end{array}\right)$

13. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

14. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$

15. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right)$

16. $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \end{array}\right)$

17. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 8 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \\ 6 & -5 & -2 & 8 \end{array}\right)$

18. $\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha & \beta & 3\alpha & 4\beta & \gamma \\ -3\alpha & 0 & 4\beta & 0 & 2\gamma \\ \beta & 0 & 0 & \alpha & -\gamma \end{array}\right)$

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -7 & 9 & -8 \\ 6 & -7 & -6 & -2 \end{array}\right)$

20. $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{array}\right)$

21. Encuentre la matriz A y los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ tales que el sistema representado por la siguiente matriz aumentada se escriba en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y resuelva el sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

En los problemas 22 a 29 encuentre todas las soluciones al sistema no homogéneo dado, encontrando primero una solución (si es posible) y después todas las soluciones al sistema homogéneo asociado.

22. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 12 \\ -5x_1 + 9x_2 &= 7 \end{aligned}$$

23. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 18 \end{aligned}$$

24. $$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

25. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 12 \\ -5x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 7 \\ -4x_1 + 12x_2 - 9x_3 &= 19 \end{aligned}$$

26. $$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 5 \\ -10x_1 + 9x_2 + 5x_3 &= -2 \end{aligned}$$

27. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_4 - 3x_5 &= 0 \\ -5x_3 - 2x_4 - 6x_5 &= 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_5 &= 7 \end{aligned}$$

28. $$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 &= 3 \\ -5x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 4x_4 &= 1 \\ -16x_1 + 27x_2 + 21x_3 - 10x_4 &= 11 \end{aligned}$$

29. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 6 \end{aligned}$$

30. Considere la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

Cálculo

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \qquad \textbf{(2.3.7)}$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son continuas y se supone que la función desconocida y tiene una segunda derivada. Muestre que si y_1 y y_2 son soluciones a (2.3.7), entonces $c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución para cualesquiera constantes c_1 y c_2.

31. Suponga que y_p y y_q son soluciones a la ecuación no homogénea

Cálculo

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \qquad \textbf{(2.3.8)}$$

Demuestre que $y_p - y_q$ es una solución a (2.3.7). Suponga aquí que $f(x)$ no es la función cero.

32. Si $y(x) = c_1\cos(x) + c_2\mathrm{sen}(x)$ encuentre los valores de c_1 y c_2 tales que $y(0) = 1$ y $y'(0) = -1$.

Cálculo

Ejercicios con MATLAB 2.3

1. *a)* Genere una matriz aleatoria A de 3×3 con elementos entre -10 y 10 y genere un vector aleatorio **b** de 3×1 con elementos entre -10 y 10. Haciendo uso de MATLAB resuelva el sistema con la matriz aumentada `[A b]` usando `rref`. Utilice la notación "`:`" para poner la solución en la variable `x`. Encuentre A**x** y compare con `b` (encuentre `A*x-b`). Encuentre `y=x(1)*A(:,1)+x(2)*A(:,2+x(3)*A(:,3)` y compare con `b` (encuentre `y-b`). Repita esto para otros tres vectores `b`. ¿Cuál es su conclusión acerca de la relación entre A**x**, **y** y **b**?

b) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 17 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 5 & 9 & 19 & 4 \\ 9 & 5 & 23 & -4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 16 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Nota

Para generar matrices aleatorias revise la presentación anterior de los problemas de MATLAB 2.2.

i) Resuelva el sistema con la matriz aumentada `[A b]` usando `rref`. Si existe un número infinito de soluciones, haga una elección para las variables arbitrarias y encuentre e introduzca el vector solución **x** correspondiente.

ii) Encuentre `A*x` y `y=x(1)*A(:,1)+x(2)*A(:,2)+x(3)*A(:,3)+ x(4)*A(:,4)` y compare $A\mathbf{x}$, **y** y **b**.

iii) Repita para otras dos variables arbitrarias.

iv) ¿Cuál es su conclusión acerca de la relación entre $A\mathbf{x}$, **y** y **b**?

2. *a*) Suponga que los elementos de A y **x** son números reales. Haciendo uso de la definición de multiplicación de matrices, argumente por qué $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ significa que cada renglón de A es perpendicular a **x** (recuerde que dos vectores reales son perpendiculares si su producto escalar es cero).

b) Con el resultado del inciso *a*) encuentre todos los vectores **x** perpendiculares a los dos vectores:

$$(1, 2, -3, 0, 4) \quad \text{y} \quad (4, -5, 2, 0, 1)$$

3. *a*) Recuerde el problema 3 de MATLAB 2.2 (vuelva a resolverlo). ¿Cómo se relaciona esto con el corolario del teorema 2.3.1?

b) Considere las matrices A y **b** del problema 1*b*) de MATLAB en esta sección.

i) Verifique que el sistema `[A b]` tiene un número infinito de soluciones.

ii) Sea `x=A\b`. Verifique, usando la multiplicación de matrices, que esto produce una solución al sistema con la matriz aumentada `[A b]` (observe que al ejecutar la instrucción, se hace una advertencia). Si no existe una solución única, el comando "\" (`doc mldivide`).

iii) Considerando `rref(A)`, encuentre cuatro soluciones al sistema homogéneo `[A 0]`. Introduzca uno a la vez, llamándolo `z` y verifique mediante la multiplicación de matrices que `x+z` es una solución al sistema con la matriz aumentada `[A b]`.

4. *a*) Observe `rref(A)` para la A dada a continuación y argumente por qué el sistema `[A b]` tiene una solución independientemente del vector **b** de 4×1 que se elija.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 9 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Concluya que todo vector **b** es una combinación lineal de las columnas de A. Genere tres vectores aleatorios **b** de 4×1 y, para cada **b**, encuentre los coeficientes necesarios para escribir **b** como una combinación lineal de las columnas de A.

c) Observando `rref(A)` para la siguiente A, argumente las razones por las cuales existe un vector **b** de 4×1 para el que el sistema `[A b]` no tiene solución. Realice un experimento para encontrar un vector **b** para el que no exista una solución.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & -6 & 7 \\ 3 & 9 & -15 & 9 \\ 9 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

d) ¿Cómo se pueden generar vectores **b** que garanticen una solución? Tome una decisión sobre el procedimiento y descríbalo con un comentario. Pruebe su procedimiento formando con él tres vectores **b** y después resolviendo los sistemas correspondientes (vea el problema 6 de MATLAB en la sección 1.3).

e) Pruebe que su procedimiento es válido usando la teoría desarrollada en el texto.

5. En este problema descubrirá las relaciones entre la forma escalonada reducida por renglones de una matriz y la información sobre las combinaciones lineales de las columnas de A. La parte de MATLAB del problema implica, únicamente, el cálculo de algunas formas escalonadas reducidas por renglones. La teoría se basa en los hechos de que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ significa que $\mathbf{x}$ es una solución al sistema $[A\ \mathbf{0}]$ y que

$$\mathbf{0} = x_1(\text{col } 1 \text{ de } A) + \cdots + x_n(\text{col } n \text{ de } A)$$

a) **i)** Sea A la matriz del problema 4*c*) de MATLAB en esta sección. Encuentre `rref(A)`. (El resto de este inciso requiere de trabajo con papel y lápiz.)

ii) Encuentre las soluciones al sistema homogéneo escrito en términos de las elecciones naturales de las variables arbitrarias.

iii) Establezca una variable arbitraria igual a 1 y las otras variables arbitrarias iguales a 0 y encuentre las otras incógnitas para producir un vector solución $\mathbf{x}$. Para esta $\mathbf{x}$, escriba lo que dice la afirmación

$$\mathbf{0} = A\mathbf{x} = x_1(\text{col } 1 \text{ de } A) + \cdots + x_n(\text{col } n \text{ de } A)$$

y despeje la columna de A que corresponde a la variable arbitraria que igualó a 1. Verifique sus datos.

iv) Ahora establezca otra variable arbitraria igual a 1 y las otras variables arbitrarias iguales a 0. Repita iii). Continúe de la misma manera para cada variable arbitraria.

v) Revise `rref(A)` y vea si reconoce algunas relaciones entre lo que acaba de descubrir y los números en `rref(A)`.

b) Sea A la matriz en el problema 1*b*) de MATLAB en esta sección. Repita las instrucciones anteriores.

c) Sea A una matriz aleatoria de 6×6. Modifique A de manera que

```
A(:,3)=2*A(:,2)-3*A(:,1)
A(:,5)=-A(:,1)+2*A(:,2) -3*A(:,4)
A(:,6)=A(:,2)+4*A(:,4)
```

Repita las instrucciones anteriores.

2.4 Inversa de una matriz cuadrada

En esta sección se definen dos tipos de matrices que son fundamentales en la teoría de matrices. En primer lugar, se presenta un ejemplo sencillo. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$. Observe que $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y que y $BA = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, es decir, $AB = BA = I_2$. La matriz I_2 se llama *matriz identidad* de 2×2. La matriz B se llama la *matriz inversa* de A y se deno-

Nota

La diagonal de $A = (a_{ij})$ consiste en las componentes a_{11}, a_{22}, a_{33}, etc. A menos que se establezca de otra manera, se hará referencia a la diagonal principal simplemente como la **diagonal**.

Definición 2.4.1

Matriz identidad

La **matriz identidad** I_n de $n \times n$ es una matriz de $n \times n$ cuyos elementos de la **diagonal principal** son iguales a 1 y todos los demás son 0. Esto es,

$$\boxed{I_n = (b_{ij}) \quad \text{donde} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}} \tag{2.4.1}$$

EJEMPLO 2.4.1 Dos matrices identidad

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota

I_n funciona para las matrices de $n \times n$ de la misma manera que el número 1 funciona para los números reales ($1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para todo número real a).

Teorema 2.4.1

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces

$$\boxed{AI_n = I_nA = A}$$

Es decir, I_n conmuta con toda matriz de $n \times n$ y la deja sin cambio después de la multiplicación por la derecha o por la izquierda.

Demostración

Sea c_{ij} el elemento ij de AI_n. Entonces

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ij}b_{jj} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Pero por (2.4.1), esta suma es igual a a_{ij}. Así $AI_n = A$. De una manera similar se puede demostrar que $I_nA = A$ y esto demuestra el teorema.

Notación. De aquí en adelante se escribirá la matriz identidad únicamente como I, ya que si A es de $n \times n$ los productos IA y AI están definidos sólo si I es también de $n \times n$.

Observación 1

A partir de esta definición se deduce inmediatamente que $(A^{-1})^{-1} = A$ si A es invertible.

Observación 2

Esta definición *no* establece que toda matriz cuadrada tiene inversa. De hecho, existen muchas matrices cuadradas que no tienen inversa.

Definición 2.4.2

La inversa de una matriz

Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Suponga que

$$AB = BA = I$$

Entonces B se llama la **inversa** de A y se denota por A^{-1}. Entonces se tiene

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

Una matriz cuadrada que no es invertible se le denomina **singular** y una matriz invertible se llama **no singular**.

Matriz singular

Matriz no singular

En la definición 2.4.2 se sugiere que la inversa de una matriz es única. Y esta declaración es cierta, como lo dice el siguiente teorema.

Teorema 2.4.2

Si una matriz A es invertible, entonces su inversa es única.

Demostración

Suponga que B y C son dos inversas de A. Se puede demostrar que $B = C$. Por definición se tiene $AB = BA = I$ y $AC = CA = I$. Por la ley asociativa de la multiplicación de matrices se tiene que $B(AC) = (BA)C$. Entonces

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

Por lo tanto, $B = C$, y el teorema queda demostrado.

A continuación se presenta otra propiedad importante sobre las inversas.

Teorema 2.4.3

Sean A y B dos matrices invertibles de $n \times n$. Entonces AB es invertible y

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

Demostración

Para probar este resultado es necesaria la definición 2.4.2. Es decir, $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ si y sólo si $B^{-1}A^{-1}(AB) = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. Se trata, únicamente, de una consecuencia ya que

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ecuación (2.2.6)}}}{=} B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

y

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

Considere el sistema de n ecuaciones con n incógnitas

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

y suponga que A es invertible. Entonces

$$\begin{aligned} A^{-1}A\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} && \text{se multiplicó el término de la izquierda por } A^{-1} \\ I\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} && A^{-1}A = I \\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} && I\mathbf{x} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

Ésta es una solución al sistema porque

Nota

Del teorema 2.4.3 se concluye que $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. Vea el problema 2.4.23.

Si $\mathbf{y}$ es un vector tal que $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$, entonces los cálculos anteriores demuestran que $\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b}$. Es decir, $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Se ha demostrado lo siguiente:

Teorema 2.4.4 Solución de sistemas de ecuaciones lineales en términos de su matriz inversa

Si A es invertible, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
tiene una solución única $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ **(2.4.2)**

Ésta es una de las razones por la que se estudian las matrices inversas.

Ya que se ha definido la inversa de una matriz, surgen dos preguntas básicas.

Pregunta 1. ¿Qué matrices tienen inversa?

Pregunta 2. Si una matriz tiene inversa ¿cómo se puede calcular?

En la presente sección se contestan ambas preguntas. Se comenzará por analizar lo que ocurre en el caso 2×2.

EJEMPLO 2.4.2 Cálculo de la inversa de una matriz de 2×2

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

SOLUCIÓN ► Suponga que A^{-1} existe. Se escribe $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ y se usa el hecho de que $AA^{-1} = I$. Entonces

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3z & 2y-3w \\ -4x+5z & -4y+5w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las dos últimas matrices pueden ser iguales únicamente si cada una de sus componentes correspondientes son iguales. Esto significa que

$$2x \qquad - 3z \qquad = 1 \tag{2.4.3}$$

$$2y \qquad - 3w = 0 \tag{2.4.4}$$

$$-4x \qquad + 5z \qquad = 0 \tag{2.4.5}$$

$$-4y \qquad + 5w = 1 \tag{2.4.6}$$

Éste es un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Observe que hay dos ecuaciones que involucran únicamente a x y a z [las ecuaciones (2.4.3) y (2.4.5)] y dos que incluyen sólo a y y w [las ecuaciones (2.4.4) y (2.4.6)]. Se escriben estos dos sistemas en la forma aumentada:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{array}\right) \tag{2.4.7}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \end{array}\right) \tag{2.4.8}$$

De la sección 1.2 se sabe que si el sistema (2.4.7) (con las variables x y z) tiene una solución única, la eliminación de Gauss-Jordan en (2.4.7) dará como resultado

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & z \end{array}\right)$$

en donde (x, z) es el único par de números que satisface $2x - 3z = 1$ y $-4x + 5z = 0$. De igual manera, la reducción por renglones de (2.4.8) dará como resultado

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & w \end{array}\right)$$

donde (y, w) es el único par de números que satisface $2y - 3w = 0$ y $-4y + 5w = 1$.

Como las matrices de coeficientes en (2.4.7) y (2.4.8) son iguales se puede realizar la reducción por renglones sobre las dos matrices aumentadas al mismo tiempo, considerando la nueva matriz aumentada.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{2.4.9}$$

Si A es invertible, entonces el sistema definido por (2.4.3), (2.4.4), (2.4.5) y (2.4.6) tiene una solución única y, por lo que acaba de decirse, la reducción de renglones da

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & z & w \end{array}\right)$$

Ahora se llevan a cabo los cálculos, observando que la matriz de la izquierda en (2.4.9) es A y la matriz de la derecha es I:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + 4R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + \frac{3}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Así, $x = -\frac{5}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$, $z = -2$, $w = -1$ y $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Verificando se tiene

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces A es invertible y $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 2.4.3 Una matriz de 2 × 2 que no es invertible

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Determine si A es invertible y si es así, calcule su inversa.

SOLUCIÓN ► Si $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ existe, entonces

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z & y+2w \\ -2x-4z & -2y-4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto conduce al sistema

$$\begin{array}{rrrrl} x & & +2z & & = 1 \\ & y & & +2w & = 0 \\ -2x & & -4z & & = 0 \\ & -2y & & -4w & = 1 \end{array} \qquad (2.4.10)$$

Si se aplica el mismo procedimiento que en el ejemplo 2.4.1 se puede escribir este sistema en la forma de matriz aumentada $(A \mid I)$ y reducir por renglones:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Hasta aquí se puede llegar. El último renglón se lee $0 = 2$ o $0 = 1$, dependiendo de cuál de los dos sistemas de ecuaciones (en x y z o en y y w) se esté resolviendo. Entonces el sistema (2.4.10) es inconsistente y A no es invertible.

Los últimos dos ejemplos ilustran un procedimiento que siempre funciona cuando se quiere encontrar la inversa de una matriz.

Procedimiento para encontrar la inversa de una matriz cuadrada A

Paso 1. Se escribe la matriz aumentada $(A|I)$.

Paso 2. Se utiliza la reducción por renglones para poner la matriz A a su forma escalonada reducida por renglones.

Paso 3. Se decide si A es invertible.

a) Si la forma escalonada reducida por renglones de A es la matriz identidad I, entonces A^{-1} es la matriz que se tiene a la derecha de la barra vertical.

b) Si la reducción de A conduce a un renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces A no es invertible.

Observación

a) y *b)* se pueden expresar de otra manera:

Una matriz A de $n \times n$ es invertible si y sólo si su forma escalonada reducida por renglones es la matriz identidad; es decir, si su forma escalonada reducida por renglones tiene n pivotes.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Entonces se define

$$\boxed{\text{Determinante de } A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (2.4.11)$$

Determinante de una matriz 2 × 2

El determinante de A se denota por det A.

Teorema 2.4.5

Sea A = una matriz de 2 × 2. Entonces

i) A es invertible si y sólo si det $A \neq 0$.

ii) Si det $A \neq 0$, entonces

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}} \quad (2.4.12)$$

Nota

La fórmula (2.4.12) se puede obtener directamente aplicando el procedimiento para calcular una inversa (ver el problema 2.4.57).

Demostración

Primero, suponga que det $A \neq 0$ y sea $B = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$. Entonces $BA = \frac{1}{\det A}$ $\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

De manera similar, $AB = I$, lo que muestra que A es invertible y que $B = A^{-1}$. Todavia debe demostrarse que si A es invertible, entonces det $A \neq 0$. Para esto, se considera el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Se lleva a cabo de esta forma porque del teorema de resumen (teorema 1.1.15) se sabe que si este sistema tiene una solución única, entonces $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. El sistema se puede escribir en la forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.4.14)$$

con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Entonces, como A es invertible, se ve de (2.4.2) que el sistema (2.4.14) tiene una solución única dada por

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Pero por el teorema 1.1.1, el hecho de que el sistema (2.4.13) tenga una solución única implica que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A \neq 0$. Esto completa la prueba.

EJEMPLO 2.4.4 Cálculo de la inversa de una matriz de 2 × 2

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

SOLUCIÓN ► Se encuentra que $\det A = (2)(3) - (-4)(1) = 10$; por lo tanto, A^{-1} existe. De la ecuación (2.4.12) se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

Verificación

$$A^{-1}A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 2.4.5 Una matriz de 2 × 2 que no es invertible

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

SOLUCIÓN ► Se encuentra que $\det A = (1)(-4) - (2)(-2) = -4 + 4 = 0$, de manera que A^{-1} no existe, como se observó en el ejemplo 2.4.3.

El procedimiento descrito para encontrar la inversa (si existe) de una matriz de 2×2 funciona para matrices de $n \times n$ donde $n > 2$. Se ilustra con varios ejemplos.

EJEMPLO 2.4.6 Cálculo de la inversa de una matriz de 3 × 3

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (vea el ejemplo 1.2.1). Calcule A^{-1} si existe.

SOLUCIÓN ► Primero se pone A seguido de I en la forma de matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y después se lleva a cabo la reducción por renglones.

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & -11 & | & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -\frac{11}{6} & -\frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Como A se redujo a I se tiene

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$ se factoriza $\frac{1}{6}$ para que los cálculos sean más sencillos.

Verificación

$$A^{-1}A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = I.$$

También se puede verificar que $AA^{-1} = I$.

Advertencia

Cuando se calcula A^{-1} es fácil cometer errores numéricos. Por ello es importante verificar los cálculos viendo que $A^{-1}A = I$.

EJEMPLO 2.4.7 Una matriz de 3 × 3 que no es invertible

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

SOLUCIÓN ► De acuerdo con el procedimiento anterior se obtiene, sucesivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to R_1 + 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hasta aquí se puede llegar. La matriz A no puede reducirse a la matriz identidad, por lo que se puede concluir que A no es invertible.

Observación

Hay otra forma de ver el resultado del último ejemplo. Sea **b** cualquier vector de 3 × 1 y considere el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si se trata de resolver esto por el método de eliminación gaussiana, se terminaría con una ecuación que se lee $0 = c \neq 0$ como en el ejemplo 2.4.7, o $0 = 0$. Es decir, el sistema no tiene solución o bien, tiene un número infinito de soluciones. La posibilidad que se elimina es que el sistema tenga solución única. Pero si A^{-1} existiera, entonces habría una solución única dada por $x = A^{-1}\mathbf{b}$. La conclusión que se obtiene es

Definición 2.4.3

Matrices equivalentes por renglones

Suponga que la matriz A se puede transformar en la matriz B mediante operaciones con renglones. Entonces se dice que A y B son **equivalentes por renglones**.

El razonamiento anterior se puede usar para probar el siguiente teorema (vea el problema 2.4.58).

Teorema 2.4.6

Sea A una matriz de $n \times n$.

i) A es invertible si y sólo si A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n; esto es, si la forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.

ii) A es invertible si y sólo si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector $\mathbf{b}$ de dimensión n.

iii) Si A es invertible, entonces la solución única de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

iv) A es invertible si y sólo si su forma escalonada reducida por renglones tiene n pivotes.

EJEMPLO 2.4.8 **Uso de la inversa de una matriz para resolver un sistema de ecuaciones**

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_2 - x_3 &= -4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 7 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN ► Este sistema se puede escribir como $Ax = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Así, la solución única está dada por

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2.4.15)}$$

EJEMPLO 2.4.9 La tecnología y las matrices de Leontief: modelo de la economía estadounidense en 1958

En el modelo de insumo-producto de Leontief, descrito en el ejemplo 1.2.9, se obtuvo el sistema

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & + & e_1 & = & x_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & + & e_2 & = & x_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \cdots + & a_{nn}x_n & + & e_n & = & x_n \end{array}$$

que se puede escribir como

$$A\mathbf{x} + \mathbf{e} = I\mathbf{x}$$

o

$$(I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{e} \qquad \textbf{(2.4.16)}$$

La matriz A de demandas internas se llama **matriz de tecnología**, y la matriz $I - A$ se llama **matriz de Leontief**. Si la matriz de Leontief es invertible, entonces los sistemas (2.4.15) y (2.4.16) tienen soluciones únicas.

Matriz de tecnología

Matriz de Leontief

Leontief utilizó su modelo para analizar la economía de Estados Unidos en 1958.[8] Dividió la economía en 81 sectores y los agrupó en seis familias de sectores relacionados. Con objeto de simplificar se tratará cada familia de sectores como un solo sector, de manera que se pueda ver la economía estadounidense como una economía con seis industrias. Estas industrias se enumeran en la tabla 2.1.

Tabla 2.1 Clasificación de la economía por vectores

Sector	Ejemplos
No metales terminados (NMT)	Muebles, alimentos procesados
Metales terminados (MT)	Electrodomésticos, vehículos automotores
Metales básicos (MB)	Herramientas (producción intermitente), minería
No metales básicos (NMB)	Agricultura, imprenta
Energía (E)	Petróleo, carbón
Servicio (S)	Diversiones, bienes raíces

La tabla de insumo-producto (tabla 2.2) presenta las demandas internas durante 1958 sobre la base de las cifras de Leontief. Las unidades en la tabla están expresadas en millones de dólares. Así, por ejemplo, el número 0.173 en la posición 6,5 significa que para producir energía equivalente a \$1 millón, es necesario proporcionar \$0.173 millones = \$173 000 en servicios. De forma similar, 0.037 en la posición 4,2 significa que con el fin de producir artículos metálicos terminados, es necesario gastar \$0.037 millones = \$37 000 en productos no metálicos básicos.

Tabla 2.2 Demandas internas en 1958 en la economía de Estados Unidos

	NMT	MT	MB	NMB	E	S
NMT	0.170	0.004	0	0.029	0	0.008
MT	0.003	0.295	0.018	0.002	0.004	0.016
MB	0.025	0.173	0.460	0.007	0.011	0.007
NMB	0.348	0.037	0.021	0.403	0.011	0.048
E	0.007	0.001	0.029	0.025	0.358	0.025
S	0.120	0.074	0.104	0.123	0.173	0.234

Por último, las demandas externas estimadas por Leontief sobre la economía de Estados Unidos en 1958 (en millones de dólares) se presentan en la tabla 2.3.

Con el fin de manejar la economía de Estados Unidos en 1958 para satisfacer todas las demandas externas, ¿cuántas unidades deben producirse en cada uno de los seis sectores?

Tabla 2.3 Demandas externas sobre la economía de Estados Unidos en 1958 (en millones de dólares)

NMT	99 640
MT	75 548
MB	14 444
NMB	33 501
E	23 527
S	263 985

SOLUCIÓN ► La matriz tecnológica está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0.170 & 0.004 & 0 & 0.029 & 0 & 0.008 \\ 0.003 & 0.295 & 0.018 & 0.002 & 0.004 & 0.016 \\ 0.025 & 0.173 & 0.460 & 0.007 & 0.011 & 0.007 \\ 0.348 & 0.037 & 0.021 & 0.403 & 0.011 & 0.048 \\ 0.007 & 0.001 & 0.039 & 0.025 & 0.358 & 0.025 \\ 0.120 & 0.074 & 0.104 & 0.123 & 0.173 & 0.234 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 99\,640 \\ 75\,548 \\ 14\,444 \\ 33\,501 \\ 23\,527 \\ 263\,985 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz de Leontief, se resta

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.170 & 0.004 & 0 & 0.029 & 0 & 0.008 \\ 0.003 & 0.295 & 0.018 & 0.002 & 0.004 & 0.016 \\ 0.025 & 0.173 & 0.460 & 0.007 & 0.011 & 0.007 \\ 0.348 & 0.037 & 0.021 & 0.403 & 0.011 & 0.048 \\ 0.007 & 0.001 & 0.039 & 0.025 & 0.358 & 0.025 \end{pmatrix}$$

El cálculo de la inversa de una matriz de 6×6 es una actividad laboriosa. Los siguientes resultados (redondeados a tres cifras decimales) se obtuvieron usando MATLAB:

$$(I-A)^{-1} \begin{pmatrix} 1.234 & 0.014 & 0.007 & 0.064 & 0.006 & 0.017 \\ 0.017 & 1.436 & 0.056 & 0.014 & 0.019 & 0.032 \\ 0.078 & 0.467 & 1.878 & 0.036 & 0.044 & 0.031 \\ 0.752 & 0.133 & 0.101 & 1.741 & 0.065 & 0.123 \\ 0.061 & 0.045 & 0.130 & 0.083 & 1.578 & 0.059 \\ 0.340 & 0.236 & 0.307 & 0.315 & 0.376 & 1.349 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el vector de la salida "ideal" está dado por

$$\mathbf{x} = (I-A)^{-1}\mathbf{e} \simeq \begin{pmatrix} 131\,033.21 \\ 120\,458.90 \\ 80\,680.56 \\ 178\,732.04 \\ 66\,929.26 \\ 431\,562.04 \end{pmatrix}$$

Esto significa que se requería aproximadamente de 131 033 unidades (equivalentes a \$131 033 millones) de productos no metálicos terminados, 120 459 unidades de productos metálicos terminados, 80 681 unidades de productos metálicos básicos, 178 732 unidades de productos no metálicos básicos, 66 929 unidades de energía y 431 562 unidades de servicios, para manejar la economía de Estados Unidos y cumplir con las demandas externas en 1958.

En la sección 1.1 se encontró la primera forma del teorema de resumen (teorema 1.1.1). Ahora se puede mejorar. El siguiente teorema establece que varias afirmaciones sobre la inversa, la unicidad de las soluciones, la equivalencia por renglones y los determinantes son equivalentes. En este momento, se puede probar la equivalencia de los incisos i), ii), iii), iv) y v). La prueba concluirá después de desarrollar cierta teoría básica sobre determinantes (vea el teorema 3.3.4).

Teorema 2.4.7 Teorema de resumen (punto de vista 2)

Sea A una matriz de $n \times n$, por lo que las seis afirmaciones siguientes son equivalentes. Es decir, cada una de ellas implica a las otras cinco (de manera que si se cumple una, todas se cumplen, y si una es falsa, todas son falsas).

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector $\mathbf{b}$ de dimensión n.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n, de $n \times n$; es decir, la forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.

v) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vi) $\det A \neq 0$ (hasta ahora sólo se ha definido $\det A$ si A es una matriz de 2×2).

Demostración

Ya se ha visto que las afirmaciones i), iii), iv) y vi) son equivalentes [teorema 2.4.6]. Se demostrará que ii) y iv) son equivalentes. Además se demostrará que ii) y v) son equivalentes. Suponga que ii) se cumple. Entonces la forma escalonada reducida por renglones de A tiene n pivotes; de otra manera al menos una columna de esta forma no tendría pivote y entonces el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tendría un número infinito de soluciones porque se podría dar un valor arbitrario a la variable correspondiente a esa columna (los coeficientes en la columna son cero). Pero si la forma escalonada reducida por renglones de A tiene n pivotes, entonces se trata de I_n.

Inversamente, suponga que iv) se cumple; esto es, suponga que A es equivalente por renglones a I_n. Entonces por el teorema 2.4.6, inciso i), A es invertible y, por el teorema 2.4.6, inciso iii), la solución única de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Así, ii) y iv) son equivalentes. En el teorema 1.1.1 se demostró que i) y vi) son equivalentes en el caso de 2×2. Se probará la equivalencia de i) y vi) en la sección 3.3. Para mostrar que v) implica ii), si la forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes, es decir, tiene la forma:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.4.17}$$

Es decir, R es una matriz con unos en la diagonal y ceros debajo de ella, entonces la única solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial, lo que significa que utilizando operaciones elementales por renglones se puede llevar a la matriz A a su forma escalonada. Para tener solución única en un sistema de ecuaciones homogéneo se deben tener todos los pivotes, lo que muestra que ii) implica v).

Para verificar que $B = A^{-1}$ se debe comprobar que $AB = BA = I$. Resulta que sólo se tiene que hacer la mitad de este trabajo.

Teorema 2.4.8

Sean A y B matrices de $n \times n$. Entonces A es invertible y $B = A^{-1}$ ya sea si i) $BA = I$ o si ii) $AB = I$.

Demostración

i) Se supone que $BA = I$. Considere el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si se multiplican por la izquierda ambos lados de esta ecuación por B, se obtiene

$$BA\mathbf{x} = B\mathbf{0} \tag{2.4.18}$$

Pero $BA = I$ y $B\mathbf{0} = \mathbf{0}$, de manera que (2.4.18) se convierte en $I\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Esto muesquiere decir que A es invertible. Todavía debe demostrarse que $B = A^{-1}$. Sea $A^{-1} = C$. Entonces, $AC = I$. Así

$$BAC = B(AC) = BI = B \quad \text{y} \quad BAC = (BA)C = IC = C$$

Por lo tanto, $B = C$, y el inciso i) queda demostrado.

ii) Sea $AB = I$. Entonces del inciso i), $A = B^{-1}$. De la definición 2.4.2 esto significa que $AB = BA = I$, lo que prueba que A es invertible y que $B = A^{-1}$. Esto completa la demostración.

RESUMEN 2.4

- La **matriz identidad** $n \times n$, I_n, es la matriz de $n \times n$ con unos en la **diagonal principal** y ceros en otra parte. I_n se denota generalmente por I.
- Si A es una matriz cuadrada, entonces $AI = IA = A$.
- La matriz A de $n \times n$ es **invertible** si existe una matriz A^{-1} de $n \times n$ tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

  En este caso la matriz A^{-1} se llama la **inversa** de A.
- Si A es invertible, su inversa es única.
- Si A y B son matrices invertibles de $n \times n$, entonces AB es invertible y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- Para determinar si una matriz A de $n \times n$ es invertible:

  i) Se escribe la matriz cuadrada aumentada $(A|I)$.

  ii) Se reduce A por renglones a la forma escalonada reducida por renglones.

  iii) *a*) Si la forma escalonada reducida por renglones de A es I, entonces A^{-1} será la matriz a la derecha de la raya vertical punteada.

  b) Si la forma escalonada reducida por renglones de A contiene un renglón de ceros, entonces A no es invertible.

- La matriz de 2×2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es invertible si y sólo si el determinante de A, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

  En cuyo caso

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

- Dos matrices A y B son **equivalentes por renglón** si A se puede transformar en B reduciendo por renglones.

AUTOEVALUACIÓN 2.4

I) Indique cuál de las siguientes afirmaciones es correcta.

a) Toda matriz cuadrada tiene inversa.
b) Una matriz cuadrada tiene inversa si su reducción por renglones lleva a un renglón de ceros.
c) Una matriz cuadrada es invertible si tiene inversa.
d) Una matriz cuadrada B es la inversa de A si $AI = B$.

II) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre un sistema de ecuaciones en forma de matriz?

a) Es de la forma $A^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
b) Si tiene una solución única, la solución será $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.
c) Tiene solución si A no es invertible.
d) Tiene una solución única.

III) ¿Cuál de las siguientes matrices es invertible?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *d*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

IV) Considere una matriz invertible A y señale cuál de las siguientes afirmaciones es cierta.

a) El producto de A por I es A^{-1}.
b) A es una matriz de 2×3.
c) $A = A^{-1}$.
d) A es una matriz cuadrada.

V) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre el sistema?

$$\begin{aligned} 4x - 5y &= 3 \\ 6x + 7y &= 4 \end{aligned}$$

a) No tiene solución porque $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ no es invertible.

b) Tiene solución $(-1, -\frac{1}{2})$.

c) Si tuviera una solución se encontraría resolviendo $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

d) Su solución es $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Respuestas a la autoevaluación

PROBLEMAS 2.4

En los problemas 1 a 22 determine si la matriz dada es invertible. De ser así, calcule la inversa.

1. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -8 & 14 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 2 & 24 & 48 \\ 0 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ 3\alpha - 2\delta & 3\beta - 2\varepsilon & 3\delta - 2\zeta \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **17.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ **19.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} -4 & -5 & -1 & -7 \\ 1 & 4 & -9 & 8 \\ -6 & -2 & -20 & 2 \\ 3 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}$ **21.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **22.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

23. Muestre que si A, B y C son matrices invertibles, entonces ABC es invertible y $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

24. Si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son matrices invertibles de $n \times n$, muestre que $A_1 \cdot A_2, \ldots, A_m$ es invertible y calcule su inversa.

25. Muestre que la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ es su propia inversa.

26. Muestre que la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es su propia inversa si $A = \pm I$ o si $a_{11} = -a_{22}$ y $a_{21}a_{12} = 1 - a^2_{11}$.

27. Encuentre el vector de producción $\mathbf{x}$ en el modelo de insumo-producto de Leontief si

$$n = 3, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

*28. Asuma que A es de $n \times m$ y B es de $m \times n$, de manera que AB es de $n \times n$. Demuestre que AB no es invertible si $n > m$. [*Sugerencia:* Muestre que existe un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero tal que $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y luego aplique el teorema 2.4.7.]

*29. Utilice los métodos de esta sección para encontrar las inversas de las siguientes matrices con elementos complejos:

a) $\begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 1 \\ 1-i & 1+i & 0 \end{pmatrix}$

30. Demuestre que para todo número real θ la matriz $\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.

31. Calcule la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Matriz diagonal

32. Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se llama **diagonal** si todos sus elementos fuera de la diagonal principal son cero. Esto es, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (la matriz del problema 2.4.31 es diagonal). Demuestre que una matriz diagonal es invertible si y sólo si cada uno de los elementos de la diagonal es diferente de cero.

33. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Una matriz diagonal tal que sus componentes en la diagonal principal son todas diferentes de cero. Calcule A^{-1}.

34. Calcule la inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

35. Demuestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ no es invertible.

Matriz triangular superior

Matriz triangular inferior

*36. Una matriz cuadrada se llama **triangular superior (inferior)** si todos sus elementos abajo (arriba) de la diagonal principal son cero (la matriz en el problema 2.4.34 es triangular superior y la matriz en el problema 2.4.35 es triangular inferior). Demuestre que una matriz triangular superior o triangular inferior es invertible si y sólo si cada uno de los elementos de la diagonal es diferente de cero.

37. Demuestre que la inversa de una matriz triangular superior invertible es triangular superior.

En los problemas 38 a 41 se da una matriz. En cada caso demuestre que la matriz no es invertible encontrando un vector **x** diferente de cero tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

38. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ **39.** $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & i & 1 \\ 1-2a & -2+a & 1 \end{pmatrix}$ **40.** $\begin{pmatrix} 7 & -21 & 9 \\ 9 & -27 & 3 \\ -8 & 24 & -8 \end{pmatrix}$ **41.** $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ -3 & 7 & -1 \\ 3 & 17 & 3 \end{pmatrix}$

42. Sean A, B, F y M matrices invertibles de $m \times n$. Si $M = I + F(\lambda I - A_r)^{-1}B$ y $A_r = A + BF$.
Demuestre que $M^{-1} = B^{-1}(\lambda I - A_r)(\lambda I - A)^{-1}B$.

43. Sean A, B, C, D, F y N matrices invertibles de $m \times n$. Si $N = D + C_r(\lambda I - A_r)^{-1}B$, $M^{-1} = B^{-1}(\lambda I - A_r)(\lambda I - A)^{-1}B$, $CF = C + DF$ y $A_r = A + BF$.
Demuestre que $NM^{-1} = D + C(\lambda I - A)^{-1}B$.

44. Una fábrica de muebles de calidad tiene dos divisiones: un taller de máquinas herramienta donde se fabrican las partes de los muebles, y una división de ensamble y terminado en la que se unen las partes para obtener el producto final. Suponga que se tienen 12 empleados en el taller y 20 en la división y que cada empleado trabaja 8 horas. Suponga también que se producen únicamente dos artículos: sillas y mesas. Una silla requiere $\frac{384}{17}$ horas de maquinado y $\frac{480}{17}$ horas de ensamble y terminado. Una mesa requiere $\frac{240}{17}$ horas de maquinado y $\frac{640}{17}$ horas de ensamble y terminado. Suponiendo que se tiene una demanda ilimitada de estos productos y que el fabricante desea mantener ocupados a todos sus empleados, ¿cuántas sillas y cuántas mesas puede producir esta fábrica al día?

45. La alacena de ingredientes mágicos de una hechicera contiene 10 onzas de tréboles de cuatro hojas molidos y 14 onzas de raíz de mandrágora en polvo. La alacena se resurte en forma automática siempre y cuando ella termine con todo lo que tiene. Una poción de amor requiere $\frac{1}{13}$ onzas de tréboles y $2\frac{2}{13}$ onzas de mandrágora. Una receta de un conocido tratamiento para el resfriado común requiere $5\frac{5}{13}$ onzas de tréboles y $10\frac{10}{13}$ onzas de mandrágora. ¿Qué cantidad de la poción de amor y del remedio para resfriado debe combinar la hechicera para usar toda la reserva en su alacena?

46. Un granjero nutre a su ganado con una mezcla de dos tipos de alimento. Una unidad estándar del alimento A proporciona a un novillo 10% del requerimiento diario de proteína y 15% del de carbohidratos. Si el granjero quiere alimentar a su ganado con 100% de los requerimientos mínimos diarios de proteínas y carbohidratos, ¿cuántas unidades de cada tipo de alimento debe recibir un novillo al día?

47. Una versión muy simplificada de una tabla de insumo-producto para la economía de Israel en 1958 divide dicha economía en tres sectores —agricultura, manufactura y energía— con los siguientes resultados.[7]

	Agricultura	Manufactura	Energía
Agricultura	0.293	0	0
Manufactura	0.014	0.207	0.017
Energía	0.044	0.010	0.216

a) ¿Cuántas unidades de producción agrícola se requieren para obtener una unidad de producto agrícola?

b) ¿Cuántas unidades de producción agrícola se requieren para obtener 200 000 unidades de productos de esta naturaleza?
c) ¿Cuántas unidades de producción agrícola se requieren para obtener 50 000 unidades de energía?
d) ¿Cuántas unidades de energía se requieren para obtener 50 000 unidades de productos agrícolas?

48. Si se continúa con el problema 47, las exportaciones (en miles de libras israelíes) en 1958 fueron las siguientes:

Agricultura	13 213
Manufactura	17 597
Energía	1 786

a) Calcule la matriz tecnológica y la de Leontief.
b) Determine el valor en libras israelíes de los productos agrícolas, la energía y los artículos manufacturados necesarios para hacer funcionar este modelo y exportar el valor establecido de cada producto.

En los problemas 49 a 56 calcule la forma escalonada por renglones de la matriz dada y utilícela para determinar en forma directa si es invertible.

49. La matriz del problema 4.

50. La matriz del problema 1.

51. La matriz del problema 5.

52. La matriz del problema 10.

53. La matriz del problema 13.

54. La matriz del problema 16.

55. La matriz del problema 18.

56. La matriz del problema 19.

57. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y suponga que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Derive la fórmula (2.4.12) mediante reducción por renglones de la matriz aumentada $\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}\right)$.

58. Demuestre los incisos i), ii) y iv) del teorema 2.4.6.

59. Calcule la inversa de $\begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix}$ donde A es una matriz cuadrada. [*Sugerencia:* Revise la multiplicación de matrices por bloques en la página 71.][a]

60. Considere que A_{11} y A_{22} son invertibles y encuentre la inversa de $\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$.

61. Si A y B son matrices invertibles, resuelva para X:

a) $BXA = B$
b) $A^{-1}X = A$

a

EJERCICIOS CON MATLAB 2.4

Información de MATLAB. El comando de MATLAB `eye(n)` forma la matriz identidad de $n \times n$ (`doc eye`). El comando de MATLAB `size(A)` reporta el número de renglones y columnas de la matriz A (`doc size`).

1. *a*) Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$, forme `R=[A eye(size(A))]`.

i) Encuentre la forma escalonada reducida por renglones de R. Utilice la notación " : " para asignar el nombre de la variable S a la matriz que consiste en las tres últimas columnas de la forma escalonada reducida por renglones de R.

ii) Encuentre `SA` y `AS`. Describa la relación entre `A` y `S`.

iii) Compare `S` con `inv(A)` (`doc inv`).

b) Repita las instrucciones anteriores para `A=2*rand(5)-1`. (Utilice `R=[A eye(size(A))]` y haga S igual a las cinco últimas columnas de la forma escalonada reducida por renglones.)

2. Considere las matrices

i) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \\ 7 & -14 & 0 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

v) $\frac{-1}{56}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

vi) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Para cada matriz A:

a) Use el comando `rref` para probar si es invertible y encuentre `inv(A)`.
b) Si A no es invertible, ponga atención en los mensajes de MATLAB cuando dé `inv(A)`.
c) Si A es invertible, verifique que `inv(A)` da la inversa. Seleccione un vector aleatorio b para el lado derecho, muestre que el sistema `[A b]` tiene una solución única usando el comando `rref`, asigne la solución a la variable `x` y compare `x` con `y=inv(A)*b` (encuentre `x-y`). Repita esto para otro vector `b`.

3. *a*) Sea `A= round(10*(2*rand(5)-1))`. Sea `B=A` pero modifique uno de los renglones de B a `B(3,:)=3*B(1,:)+5*B(2,:)`. Muestre que B no es invertible.

c) (*Lápiz y papel*) Considerando el proceso de reducción a la forma escalonada reducida por renglones, demuestre que una matriz B no es invertible si un renglón es una combinación lineal de otros renglones.

4. Sea `A=round(10*(2*rand(7)-1))`.

Sea `B` = `A` pero `B(:,3) = 2*B(:,1) - B(:,2)`.

Sea `C` = `A` pero `C(:,4) = C(:,1) + C(:,2)-C(:,3)` y `C(:,6)= 3*C(:,2)`.

Sea `D` = `A` pero `D(:,2) = 3*D(:,1)`, `D(:,4) = 2*D(:,1)-D(:,2)+4*D(:,3)`, `D(:,5) = D(:,2)- 5*D(:,3)`.

a) Encuentre `rref` de `B`, `C` y `D`. ¿Qué puede concluir acerca de la invertibilidad de una matriz en la que algunas columnas son combinaciones lineales de otras columnas?

b) Pruebe su conclusión con otra matriz aleatoria generada `E` y modificada cambiando algunas columnas a una combinación lineal de otras.

c) Para `B`, `C`, `D` y `E`, busque patrones en los números de `rref` que reflejen los coeficientes de las combinaciones lineales. Describa dichos patrones.

d) ¿De qué forma se relaciona este problema con el problema 5 de MATLAB 2.3?

5. Tipos especiales de matrices

a) Genere cinco matrices aleatorias triangulares superiores con elementos enteros entre –10 y 10. Utilice el comando `triu`. Para dos de las matrices generadas cambie un elemento de la diagonal a 0 (por ejemplo, si la matriz se llama A, modifíquela con el comando `A(2,2)=0`).

i) Pruebe si cada una es invertible. Describa una conclusión que relacione los términos de la diagonal de la matriz triangular superior con la propiedad de ser o no invertible. Pruebe su conclusión con tres o más matrices triangulares superiores.

ii) Para cada matriz invertible encontrada en i) encuentre la inversa utilizando el comando `inv`. ¿Cuál es su conclusión acerca de la forma de la inversa de una matriz triangular superior? ¿Cómo son los elementos de la diagonal de la inversa en relación con los elementos de la diagonal de la matriz original? ¿De qué forma se relaciona esta observación con i)?

iii) (*Lápiz y papel*) Suponga que A es una matriz triangular superior de 3×3

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}.$$

Describa los pasos necesarios para reducir la matriz aumentada `[A I]` (I es la matriz identidad) a la forma escalonada reducida por renglones y utilice la descripción para verificar las conclusiones sobre las inversas de matrices triangulares superiores a las que llegó en i) y ii).

b) Pruebe si las siguientes matrices y otras con el mismo patrón general son o no invertibles. Describa sus resultados:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

indica este hecho acerca de la matriz de coeficientes? Pruebe su conclusión: primero dé un vector `x` con coordenadas distintas y encuentre `V = vander(x)`; después pruebe V. Repita el mismo procedimiento para otros tres vectores `x`.

6. Considere las siguientes matrices.

$$A1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A3 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 9 & 10 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad A4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & 8 & -8 & -9 \\ 1 & 2 & -2 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A5 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -9 \\ 7 & -14 & 8 & 7 & -2 \\ 7 & -14 & 0 & 4 & 11 \\ 9 & -18 & 1 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

a) Haciendo uso de comando `rref`, pruebe si las matrices `A1` a `A5` son o no invertibles. Pruebe la invertibilidad de `A1*A2`, `A1*A3`, `A1*A4`, `A1*A5`, `A2*A3`, `A2*A4`, `A2*A5`, `A3*A4`, `A3*A5` y `A4*A5`. Obtenga una conclusión sobre la relación entre la invertibilidad de dos matrices y la invertibilidad de su producto. Explique la forma en la cual la evidencia soporta su conclusión.

b) Para cada par de matrices A y B del problema anterior tales que AB es invertible, encuentre

`inv(A*B)-inv(A)*inv(B)`   e   `inv(A*B)-inv(B)*inv(A`

Obtenga una fórmula para $(AB)^{-1}$ en términos de A^{-1} y B^{-1}. Explique.

7. Perturbaciones: matrices cercanas a una matriz no invertible

Introduzca la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Verifique que A no es invertible. En lo que sigue A se cambia a una matriz invertible C que es cercana a A, modificando uno de los elementos de A:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9+f \end{pmatrix}$$

Antes de continuar, dé el comando `format short e`. Este comando hará que los números aparezcan en notación científica. En MATLAB, por ejemplo, `1.e-5` representa 10^{-5}.

a) Introduzca

```
f=1.e-5; C=A; C(3,3)=A(3,3)+f;
```

Verifique que C es invertible y encuentre `inv(C)`.

b) Repita para `f=1.e-7` y `f=1.e-10`.

c) Comente acerca del tamaño de los elementos de `inv(C)` (realizando una comparación con el tamaño de los elementos de C) conforme f se hace pequeño, es decir, conforme C se acerca más a no ser invertible.

d) Se investigará la exactitud de las soluciones a los sistemas en los que la matriz de coeficientes es cercana a ser invertible. Observe que si

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9+f \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24+f \end{pmatrix}$$

entonces `Cx=b`, donde $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; es decir, $\mathbf{x}$ es la solución exacta. Introduzca `x=[1;1;1]`.

Para cada f utilizada en *a)* y *b)*, forme `C` y `b` y resuelva el sistema `Cy=b` haciendo uso de `inv(C)` (dando el nombre de $\mathbf{y}$ a la solución). Encuentre `z=x-y`. ¿Qué tan cercana es la solución calculada $\mathbf{y}$ a la solución exacta $\mathbf{x}$? ¿Cómo cambia la exactitud conforme f se hace más pequeña, es decir, conforme C se acerca a no ser invertible?

8. Este problema se refiere al modelo de insumo-producto de Leontief. Resuelva los problemas usando $(I-A)^{-1}$, donde A es la matriz tecnológica que describe las demandas internas. Interprete sus resultados. [***Sugerencia* de MATLAB:** La matriz I de $n \times n$ se puede generar con `eye(n)`.]

a) El problema 45 de esta sección.

b) El problema 9*b*) de la sección de MATLAB 1.3.

Utilice `format long` si desea más dígitos en las respuestas.

9. Criptografía

Uno de los procedimientos que se utilizan para encriptar un mensaje secreto es hacer uso de una determinada matriz cuadrada cuyos elementos son enteros y cuya matriz inversa también contiene elementos enteros. Se recibe un mensaje, se asigna un número a cada letra (por ejemplo A = 1, B = 2, etc., y espacio = 27), se arreglan los números en una matriz de izquierda a derecha en cada renglón, donde el número de elementos en el renglón es igual al tamaño de la matriz de código, se multiplica esta matriz por la matriz de código *por la derecha*, se transcribe el mensaje a una cadena de números (que se lee de izquierda a derecha a lo largo de cada renglón) y se manda el mensaje.

El destinatario del mensaje conoce la matriz de código. Él o ella reacomodan el mensaje encriptado en una matriz de izquierda a derecha en cada renglón, en donde el número de elementos en un renglón coincide con el tamaño de la matriz de código, multiplica *por la derecha* por el inverso de la matriz de código y puede leer el mensaje decodificado (de izquierda a derecha en cada renglón).

a) (*Lápiz y papel*) Si se arregla el mensaje en una matriz realizando una lectura de izquierda a matriz de código, ¿por qué debe multiplicarse por la derecha? ¿Por qué al multiplicar por la inversa se decodifica el mensaje (es decir, se deshace el encriptado)?

b) Usted ha recibido el siguiente mensaje que fue encriptado usando la matriz dada A. Decodifíquelo (suponga que A = 1, B = 2, y así sucesivamente, y espacio = 27).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & 8 & -8 & -9 \\ 1 & 2 & -2 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Mensaje. 47, 49, −19, 257, 487, 10, −9, 63, 137, 236, 79, 142, −184, 372, 536, 59, 70, −40, 332, 588

[*Sugerencia:* El primer renglón de la matriz que necesita construir es 47 49 −19 257 487. Ahora continúe con el segundo reglón.]

2.5 Transpuesta de una matriz

En correspondencia a toda matriz existe otra que, como se verá en el capítulo 3, tiene propiedades muy similares a las de la matriz original.

D Definición 2.5.1

Transpuesta

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$. Entonces la **transpuesta** de A, que se escribe $A^{\top}$, es la matriz de $n \times m$ que se obtiene al intercambiar los renglones por las columnas de A. De manera breve, se puede escribir $A^{\top} = (a_{ji})$. En otras palabras

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ entonces } A^{\top} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2.5.1)}$$

Simplemente se coloca el renglón i de A como la columna i de $A^{\top}$ y la columna j de A como el renglón j de $A^{\top}$.

EJEMPLO 2.5.1 Obtención de las transpuestas de tres matrices

Encuentre las transpuestas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 2 & -3 & 4 \\ \hdashline 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN ► Al intercambiar los renglones y las columnas de cada matriz se obtiene

$$A^{\top}=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}\qquad B^{\top}=\begin{pmatrix}2&-1\\3&4\\1&6\end{pmatrix}\qquad C^{\top}=\begin{pmatrix}1&2&0&2\\2&-3&1&-1\\-6&4&2&5\end{pmatrix}$$

Observe, por ejemplo con respecto a la matriz C, que 4 es la componente en el renglón 2 y la columna 3 mientras que con respecto a la matriz de $C^{\top}$ 4 es la componente en el renglón 3 y la columnas 2. Esto significa que el elemento 2,3 de C es el elemento 3,2 de $C^{\top}$.

Teorema 2.5.1

Suponga que $A = (a_{ij})$ es una matriz de $n \times m$ y $B = (b_{ij})$ es una matriz de $m \times p$. Entonces

i) $(A^{\top})^{\top} = A$. **(2.5.2)**

ii) $(AB)^{\top} = B^{\top}A^{\top}$. **(2.5.3)**

iii) Si A y B son de $n \times m$, entonces $(A + B)^{\top} = A^{\top} + B^{\top}$. **(2.5.4)**

iv) Si A es invertible, entonces $A^{\top}$ es invertible y $(A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}$. **(2.5.5)**

Demostración

i) Esto sigue directamente de la definición de la transpuesta.

ii) Primero, se observa que AB es una matriz de $n \times p$, de manera que $(AB)^{\top}$ es de $p \times n$. También $B^{\top}$ es de $p \times m$ y $A^{\top}$ es de $m \times n$, de manera que $B^{\top}A^{\top}$ es de $p \times n$. De esta forma, ambas matrices en la ecuación (2.5.3) tienen el mismo tamaño. Ahora, el elemento ij de AB es $\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$, y éste es el elemento ji de $(AB)^{\top}$. Sean $C = B^{\top}$ y $D = A^{\top}$. Entonces el elemento ij, c_{ij}, de C es b_{ji} y el elemento ij, d_{ij}, de D es a_{ji}. Así, el elemento ji de CD = elemento ji de $B^{\top}A^{\top} = \sum_{k=1}^{m} c_{jk}\,d_{ki} = \sum_{k=1}^{m} b_{kj}a_{ik} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\,b_{kj}$ = elemento ji de $(AB)^{\top}$. Lo dicho completa la demostración de la parte ii).

iii) Esta parte se deja como ejercicio (vea el problema 2.5.17).

iv) Sea $A^{-1}= B$. Entonces $AB = BA = I$ de manera que, del inciso ii), $(AB)^{\top} = B^{\top}A^{\top} = I^{\top} = I$ y $(BA)^{\top} = A^{\top}B^{\top} = I$. Por tanto, $A^{\top}$ es invertible y $B^{\top}$ es el inverso de $A^{\top}$, es decir, $(A^{\top})^{-1} = B^{\top} = (A^{-1})^{\top}$.

La transpuesta juega un papel de suma importancia en la teoría de matrices. En capítulos posteriores se verá que A y $A^{\top}$ tienen muchas propiedades en común. Como las columnas de $A^{\top}$ son renglones de A se podrán establecer hechos sobre la transpuesta para concluir que casi todo lo que es cierto para los renglones de una matriz se cumple para sus columnas.

La siguiente definición es fundamental en la teoría de matrices.

Definición 2.5.2

Matriz simétrica

La matriz (cuadrada) A de $n \times n$ se denomina **simétrica** si $A^{\top} = A$. Es decir, las columnas de

EJEMPLO 2.5.2 Cuatro matrices simétricas

Las siguientes cuatro matrices son simétricas:

$$I \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

En los capítulos 6 y 8 se verá la importancia de las matrices simétricas reales.

Otra forma de escribir el producto escalar

Sean $\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ dos vectores columna con n componentes. Entonces, de la ecuación (2.2.1),

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_2 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

Ahora bien, $\mathbf{a}$ es una matriz de $n \times 1$ de manera que $a^\top$ es una matriz de $1 \times n$ y

$$\mathbf{a}^\top = (a_1, a_2 \ldots a_n)$$

Entonces $\mathbf{a}^\top\mathbf{b}$ es una matriz de 1×1 (o escalar), y por la definición de la multiplicación de matriz

$$\mathbf{a}^\top\mathbf{b} = (a_1a_2 \ \ldots a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_2 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

De ese modo, si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores columna de n componentes, entonces

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}^\top\mathbf{b}} \qquad \textbf{(2.5.6)}$$

La fórmula (2.5.6) será de utilidad más adelante en este libro.

RESUMEN 2.5

- Si $A = (a_{ij})$, entonces la **transpuesta de A**, denotada por $A^\top$, está dada por $A^\top = (a_{ij})$.

- ***Propiedades de la transpuesta***

  Si todas las sumas y productos están definidos y A es invertible, entonces

  $(A^{\top})^{\top} = A \qquad (AB)^{\top} = B^{\top}A^{\top} \qquad (A + B)^{\top} = A^{\top} + B^{\top}.$

  si A es invertible, entonces $(A^{-1})^{\top} = (A^{-1})^{\top}$

- Una matriz cuadrada A es **simétrica** si $A^{\top} = A$.
- El producto interno ente dos vectores columna $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se puede escribir como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^{\top}\mathbf{b}$$

donde $\mathbf{a}^{\top}$ es un vector renglón, y ahora la operación $\mathbf{a}^{\top}\mathbf{b}$ es una multiplicación entre matrices.

AUTOEVALUACIÓN 2.5

I) Si una matriz A es de 3×4, entonces $A^{\top}$ es una matriz de _______.

a) 4×3 *b)* 3×4 *c)* 3×3 *d)* 4×4

II) *Falso-verdadero:* $A^{\top}$ está definida sólo si A es una matriz cuadrada.

III) *Falso-verdadero:* Si A es una matriz de $n \times n$, entonces la diagonal principal de $A^{\top}$ es la misma que la diagonal principal de A.

IV) *Falso-verdadero:* $[(A^{\top})^{\top}]^{\top} = A^{\top}$

V) La transpuesta de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es _______.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Respuestas a la autoevaluación

I) *a)* **II)** *F)* **III)** *V)* **IV)** *V)* **V)** *b)*

PROBLEMAS 2.5

En los problemas 1 a 16 encuentre la transpuesta de la matriz dada.

5. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} a & b & g & d \\ e & z & J & w \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ **15.** $(1 \quad -2 \quad -5)$ **16.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

17. Sean A y B matrices de $n \times m$. Demuestre, usando la definición 2.5.1, que $(A + B)^{\top} = A^{\top} + B^{\top}$.

18. Una matriz A de $n \times n$ es normal si $AA^{\top} = A^{\top}A$. Pruebe que la siguiente matriz es normal.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

19. Encuentre los números α y β tales que $\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 5 & -6 & 2 \\ \beta & 2 & 4 \end{pmatrix}$ es simétrica.

20. Si A y B son matrices simétricas de $n \times n$, demuestre que $A + B$ es simétrica.

21. Si A y B son matrices simétricas de $n \times n$, demuestre que $(AB)^{\top} = BA$.

22. Demuestre que para cualquier matriz A la matriz producto $AA^{\top}$ está definida y es una matriz simétrica.

23. Demuestre que toda matriz diagonal es simétrica (vea el problema 2.4.32).

24. Demuestre que la transpuesta de toda matriz triangular superior es triangular inferior (vea el problema 2.4.36).

25. Una matriz cuadrada se denomina **antisimétrica** si $A^{\top} = -A$ (es decir $a_{ij} = -a_{ji}$). ¿Cuáles de las siguientes matrices son antisimétricas?

Matriz antisimétrica

a) $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

26. Sean A y B dos matrices antisimétricas de $n \times n$. Demuestre que $A + B$ es antisimétrica.

27. Si A es una matriz real antisimétrica, demuestre que toda componente en la diagonal principal de A es cero.

28. Si A y B son matrices antisimétricas de $n \times n$, demuestre que $(AB)^{\top} = BA$ de manera que AB es

29. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que la matriz $\frac{1}{2}(A + A^{\top})$ es simétrica.

30. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que la matriz $\frac{1}{2}(A - A^{\top})$ es antisimétrica.

***31.** Demuestre que cualquier matriz cuadrada se puede escribir de una forma única como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

***32.** Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz con elementos reales no negativos que tiene las propiedades siguientes: i) $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$ y $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$ y ii) $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \end{pmatrix} = 0$. Demuestre que A es invertible y que $A^{-1} = A^{\top}$.

De los problemas 33 a 38 calcule $(A^{\top})^{-1}$ y $(A^{-1})^{\top}$ y demuestre que son iguales.

33. $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ **34.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ **35.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

36. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **37.** $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **38.** $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

En los problemas 39 a 41 evalúe las expresiones indicadas si

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 10 \\ 10 & 9 & -7 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

39. $A^{\top} - A$.

40. $(B^{\top} + C)^{\top}$.

41. $B^{\top}B$.

EJERCICIOS CON MATLAB 2.5

Información de MATLAB. En la mayoría de las aplicaciones, para encontrar la transpuesta de A, $A^{\top}$, se da `A'`. Aquí `'` es el apóstrofo. Si A tiene elementos complejos, `A'` ocasionará la transpuesta conjugada compleja; si desea encontrar la transpuesta de A (sin conjugación compleja), utilice `A.'`

Para generar matrices aleatorias, consulte los problemas que aparecen en la sección Ejercicios con MATLAB 2.2.

1. Genere cuatro pares, A y B, de matrices aleatorias tales que AB esté definido. Elija algunas ma-

2. Consulte el problema 2 de MATLAB 2.4. Para cada matriz presentada, verifique si $A^\top$ es o no invertible y relacione este dato con la invertibilidad de A. Cuando tenga sentido para la matriz, compare `inv(A')` con `inv(A)'`.

3. Genere cuatro matrices cuadradas aleatorias de diferentes tamaños.

   a) Para cada matriz A, encuentre `B=A'+ A`. Describa los patrones observados en la forma de estas matrices B.

   b) Para cada matriz A, sea `C=A'- A`. Describa los patrones observados en estas matrices C.

   c) Genere cuatro matrices aleatorias de diferentes tamaños, algunas cuadradas y otras no cuadradas. Para cada matriz F generada, encuentre `G=F*F'`. Describa los patrones observados en la forma de estas matrices G.

   d) (*Lápiz y papel*) Pruebe sus observaciones en los incisos *a*), *b*) y *c*) usando las propiedades de la transpuesta.

4. *a*) (*Lápiz y papel*) Si A es una matriz con elementos reales, explique las razones por las cuales al resolver el sistema $A^\top \mathbf{x} = \mathbf{0}$ se obtienen todos los vectores reales $\mathbf{x}$ tales que $\mathbf{x}$ es perpendicular a todas las *columnas* de A.

   b) Para cada matriz A dada encuentre todos los vectores reales $\mathbf{x}$ tales que $\mathbf{x}$ es perpendicular a todas las *columnas* de A.

   i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 0 \\ 7 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. Matrices ortogonales

   PROBLEMA PROYECTO

   Sea `A=2*rand(4)-1` y sea `Q=orth(A) (doc orth)`. Q es un ejemplo de matriz *ortogonal*. Las matrices ortogonales tienen propiedades especiales que se explorarán en este problema.

   a) Genere un par de vectores aleatorios de 4×1, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$. Calcule el producto escalar de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, llámelo $\mathbf{s}$. Calcule el producto escalar de $Q\mathbf{x}$ y $Q\mathbf{y}$; llámelo $\mathbf{r}$. Encuentre $\mathbf{s} - \mathbf{r}$ y utilice `format short e` para el despliegue en pantalla. Repita para otros tres pares de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$. ¿Cuál es su conclusión al comparar el producto escalar de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ con el producto escalar de $Q\mathbf{x}$ y $Q\mathbf{y}$?

   b) Pruebe su conclusión del inciso *a*). Genere tres matrices ortogonales Q de diferentes tamaños (usando el comando `orth`) y al menos dos pares de vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ por cada Q. Genere cuando menos una matriz compleja Q. Para cada Q y par $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, compare el producto escalar de $Q\mathbf{x}$ y $Q\mathbf{y}$. Escriba una descripción de su proceso y sus respectivos resultados.

   c) Para cada Q generada demuestre que la longitud de cada columna de Q es igual a 1 y que cualesquiera dos columnas diferentes de Q son perpendiculares entre si (la longitud de un vector está dada por la raiz cuadrada del producto escalar de un vector consigo mismo: longitud `=sqrt(x'*x)` puede utilizar el comando `norm` en MATLAB `(doc norm)`. Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es igual a cero.

   d) Para cada Q explore la relación entre `Q`, `Q'` e `inv(Q)`. Formule una conclusión sobre esta relación. Describa su investigación y su proceso de pensamiento. Genere otras dos matrices aleatorias ortogonales de tamaños más grandes y pruebe su conclusión.

   e) (*Lápiz y papel*) Utilice la conclusión resultante del inciso *d*) (y otras propiedades conocidas)

Utilice la conclusión del inciso *b*) para probar la observación del inciso *c*). [*Sugerencia:* Dada la columna de Q seleccione un vector adecuado $\mathbf{x}$ tal que $Q\mathbf{x}$ sea igual a la columna dada.]

2.6 Matrices elementales y matrices inversas

Considere que A es una matriz de $m \times n$. Entonces, como se muestra a continuación, se pueden realizar operaciones elementales con renglones en A multiplicando A por la izquierda por una matriz adecuada. Recordando de la sección 1.2, las operaciones elementales con renglones son:

i) Multiplicar el renglón i por un número c diferente de cero $\qquad R_i \to cR_i$

ii) Sumar un múltiplo del renglón i al renglón j $\qquad R_j \to R_j + cR_i$

iii) Permutar (intercambiar) los renglones i y j $\qquad R_i \rightleftarrows R_j$

Definición 2.6.1

Matriz elemental

Matriz elemental

Una matriz (cuadrada) E de $n \times n$ se denomina una **matriz elemental** si se puede obtener a partir de la matriz identidad, I_n, de $n \times n$ mediante *una sola* operación elemental con renglones.

Notación. Una matriz elemental se denota por E, o por cR_i, $R_j + cR_i$, o por P_{ij} de acuerdo con la forma en que se obtuvo de I. En este caso, P_{ij} (la matriz de permutación) es la matriz obtenida a partir del intercambio de los renglones de i y j de I.

EJEMPLO 2.6.1 Tres matrices elementales

Obtenga tres matrices elementales de 3×3.

i) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3R_2$$

Matriz obtenida multiplicando el segundo renglón de I por 3

ii) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_3 - 2R_1$$

Matriz obtenida multiplicando el primer renglón de I por -2 y sumándolo al tercer renglón

iii) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightleftarrows R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{23}$$

Matriz obtenida permutando el segundo y tercer renglones de I

La prueba del siguiente teorema se deja como ejercicio (vea los problemas 2.6.79 a 2.6.81).

Teorema 2.6.1

Para realizar una operación elemental por renglón en una matriz A se multiplica A por la izquierda por la matriz elemental adecuada.

EJEMPLO 2.6.2 **Operaciones elementales mediante la multiplicación por matrices elementales**

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Realice las siguientes operaciones elementales con los renglones de A multiplicando A por la izquierda por una matriz elemental adecuada.

i) Multiplique el segundo renglón por 3.

ii) Multiplique el primer renglón por -2 y súmelo al tercer renglón.

iii) Permute el segundo y tercer renglones.

SOLUCIÓN ► Como A es una matriz de 3×4, cada matriz elemental E debe ser de 3×3, ya que E debe ser cuadrada y multiplica a A por la izquierda. Se usan aquí los resultados del ejemplo 2.6.1.

i) $$(3R_2)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 12 & 6 & 9 & -15 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

ii) $$(R_3 - 2R_1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & -7 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

iii) $$(P_{23})A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Considere los siguientes tres productos, con $c \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.6.1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.6.2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \end{pmatrix} \tag{2.6.3}$$

Las ecuaciones (2.6.1), (2.6.2) y (2.6.3) indican que toda matriz elemental es invertible y que su inversa es del mismo tipo (tabla 2.4). Estos datos se deducen a partir del teorema 2.6.1. Es obvio que si se realizan las operaciones $R_j \to R_j + cR_i$ seguida de $R_j \to R_j - cR_i$ sobre la matriz A, la matriz A no cambia. También $R_i \to cR_i$ seguida de $R_i \to \frac{1}{c}R_i$, y la permuta de los mismos dos renglones dos veces deja la matriz A sin cambio. Se tiene

$$(cR_i)^{-1} = \frac{1}{c}R_i \tag{2.6.4}$$

$$(R_j + cR_i)^{-1} = R_j - cR_i \tag{2.6.5}$$

$$(P_{ij})^{-1} = P_{ij} \tag{2.6.6}$$

La ecuación (2.6.6) indica que

Toda matriz de permutación elemental es su propia inversa.

Resumiendo los resultados:

Tabla 2.4 Matrices elementales y sus inversas

Matriz elemental tipo E	Efecto de multiplicar A por la izquierda por E	Representación simbólica de las operaciones elementales	Al multiplicar por la izquierda, E^{-1} hace lo siguiente	Representación simbólica de la operación inversa
Multiplicación	Multiplica el renglón i de A por $c \neq 0$	cR_i	Multiplica el renglón i de A por $\frac{1}{c}$	$\frac{1}{c}R_i$
Suma	Multiplica el renglón i de A por c y lo suma al renglón j	$R_j + cR_i$	Multiplica el renglón i de A por $-c$ y lo suma al renglón j	$R_j - cR_i$
Permutación	Permuta los renglones i y j de A	P_{ij}	Permuta los renglones i y j de A	P_{ij}

Nota

El inverso de una matriz elemental se puede encontrar por inspección. No es necesario realizar cálculos.

Teorema 2.6.2

Toda matriz elemental es invertible. El inverso de una matriz elemental es una matriz del mismo tipo.

Teorema 2.6.3

Una matriz cuadrada es invertible si y sólo si es el producto de matrices elementales.

Demostración

Sea $A = E_1E_2, \ldots, E_m$ donde cada E_i es una matriz elemental. Por el teorema 2.6.2, cada E_i es invertible. Más aún, por el teorema 2.4.3, A es invertible[9] y

$$A^{-1} = E_m^{-1}E_{m-1}^{-1}\cdots E_2^{-1}E_1^{-1}$$

En forma inversa, suponga que A es invertible. De acuerdo con el teorema 2.4.6 (teorema de resumen), A es equivalente por renglones a la matriz identidad, lo que significa que A se puede reducir a I mediante un número finito de operaciones elementales. Para el teorema 2.6.1 cada operación de este tipo se logra multiplicando A por la izquierda por una matriz elemental y, por consiguiente, existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_m$ tales que

$$E_m E_{m-1}, \ldots, E_2 E_1 A = I$$

Así, del teorema 2.4.7,

$$E_m E_{m-1}, \ldots, E_2 E_1 = A^{-1}$$

y como cada E_i, es invertible por el teorema 2.6.2,

$$A = (A^{-1})^{-1} = (E_m E_{m-1}\cdots E_2 E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_{m-1}^{-1}E_m^{-1} \tag{2.6.7}$$

Como la inversa de una matriz elemental es una matriz elemental, se ha escrito A como el producto de matrices elementales y esto completa la prueba.

EJEMPLO 2.6.3 **Cómo escribir una matriz invertible como el producto de matrices elementales**

Demuestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es invertible y escríbala como un producto de matrices elementales.

SOLUCIÓN ► Ya se ha trabajado con esta matriz, en el ejemplo 1.2.1. Para resolver el problema se reduce A a I y se registran las operaciones elementales con renglones. En el ejemplo 2.4.6 se redujo A a I haciendo uso de las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{2}R_1 & R_2 - 4R_1 & R_3 - 3R_1 & -\frac{1}{3}R_2 \\ R_1 - 2R_2 & R_3 + 5R_2 & -R_3 & R_1 + R_3 \\ R_2 - 2R_3 & & & \end{array}$$

A^{-1} se obtuvo comenzando con I y aplicando estas nueve operaciones elementales. De este modo, A^{-1} es el producto de nueve matrices elementales:

$$A^{-1} = \underset{R_2 - 2R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_1 + R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{-R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \underset{R_3 + 5R_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_1 - 2R_2}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\times \underset{-\frac{1}{3}R_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_3 - 3R_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_2 - 4R_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{-\frac{1}{2}R_1}{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Por lo que $A = (A^{-1})^{-1}$ = producto de las inversas de las nueve matrices en orden opuesto:

$$\begin{array}{cccccc}
\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & R_2 - 2R_3 & R_1 + R_3 & -R_3 & R_3 + 5R_2 & R_1 - 2R_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\times & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & -\frac{1}{3}R_2 & R_3 - 3R_1 & R_2 - 4R_1 & -\frac{1}{2}R_1
\end{array}$$

Se puede hacer uso del teorema 2.6.3 para extender el teorema de resumen.

Teorema 2.6.4 Teorema de resumen (punto de vista 3)

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes siete afirmaciones son equivalentes. Es decir, cada una implica a las otras seis (de manera que si una afirmación es cierta, todas son ciertas, y si una es falsa, todas son falsas).

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector de dimensión n $\mathbf{b}$.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n; es decir, la forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.

v) A se puede escribir como el producto de matrices elementales.

vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii) $\det A \neq 0$ (por ahora, $\det A$ está definido sólo si A es una matriz de 2×2).

Existe un resultado adicional que será útil en la sección 3.5. En primera instancia se necesita una definición (dada antes en el problema 2.4.35.

D Definición 2.6.2

Matriz triangular superior y matriz triangular inferior

Una matriz cuadrada se denomina **triangular superior** (**inferior**) si todas sus componentes abajo (arriba) de la diagonal principal son cero.

EJEMPLO 2.6.4 Dos matrices triangulares superiores y dos matrices triangulares inferiores

Nota

a está debajo de la diagonal principal

Las matrices U y V son triangulares superiores mientras que las matrices L y M son triangulares inferiores:

$$U=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad V=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.6.5

Sea A una matriz cuadrada. Entonces A se puede escribir como un producto de matrices elementales y una matriz triangular superior U. En el producto, las matrices elementales se encuentran a la izquierda y la matriz triangular superior a la derecha.

Demostración

La eliminación gaussiana para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ da como resultado una matriz triangular superior. Para que esto sea evidente, observe que la eliminación gaussiana terminará cuando la matriz esté en la forma escalonada por renglones y la forma escalonada por renglones de una matriz cuadrada sea triangular superior. Se denota mediante U a la forma escalonada por renglones de A. Entonces A se reduce a U a través de una serie de operaciones elementales por renglón, cada una de las cuales se puede obtener multiplicando por una matriz elemental. Así,

$$U = E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1 A$$

y

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{m-1}^{-1} E_m^{-1} U$$

Como la inversa de una matriz elemental es una matriz elemental se ha escrito A como el producto de matrices elementales y U.

EJEMPLO 2.6.5 Cómo escribir una matriz como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior

Escriba la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior.

SOLUCIÓN ► Se reduce A por renglones para obtener la forma escalonada por renglones:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{3}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Después, al trabajar hacia atrás, se ve que

$$U=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-5\\0&0&0\end{pmatrix}=\underset{R_3+R_2}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}\underset{R_3\to R_3-R_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}}$$

$$\times\underset{R_2\to R_2-2R_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\underset{R_1\to\frac{1}{3}R_1}{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}\underset{A}{\begin{pmatrix}3&6&9\\2&5&1\\1&1&8\end{pmatrix}}$$

y tomando las inversas de las cuatro matrices elementales se obtiene

$$U=\begin{pmatrix}3&6&9\\2&5&1\\1&1&8\end{pmatrix}=\underset{R_1\to 3R_1}{\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}\underset{R_2\to R_2+2R_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}$$

$$\times\underset{R_3\to R_3+R_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}\underset{R_3\to R_3-R_2}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}}\underset{U}{\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-5\\0&0&0\end{pmatrix}}$$

RESUMEN 2.6

- Una **matriz elemental** es una matriz cuadrada que se obtiene llevando a cabo exactamente una operación con renglones sobre la matriz identidad. Los tres tipos de matrices elementales son:

  cR_i se multiplica el renglón i de I por c: $c \neq 0$.

  $R_j + cR_i$ se multiplica el renglón i de I por c y se suma al renglón j: $c \neq 0$.

  P_{ij} se permutan los renglones i y j.

- Una matriz cuadrada es invertible si y sólo si es el producto de matrices elementales.
- Cualquier matriz cuadrada se puede escribir como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior.)

AUTOEVALUACIÓN 2.6

De las afirmaciones siguientes indique si son falsas o verdaderas:

I) El producto de dos matrices elementales es una matriz elemental.

II) El inverso de una matriz elemental es una matriz elemental.

III) Toda matriz se puede escribir como el producto de matrices elementales.

IV) Toda matriz cuadrada se puede escribir como el producto de matrices elementales.

V) Toda matriz invertible se puede escribir como el producto de matrices elementales.

VI) Toda matriz cuadrada se puede escribir como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior.

Elija la opción que represente la respuesta correcta.

VII) La inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ es __________.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

VIII) La inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ es __________.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

IX) La inversa de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es __________.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Respuestas a la autoevaluación

I) *F* **II)** *V* **III)** *F* **IV)** *F* **V)** *V* **VI)** *V*

PROBLEMAS 2.6

De los problemas 1 a 17 determine cuáles matrices son matrices elementales.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

De los problemas 18 a 31 escriba la matriz elemental de 3×3 que lleva a cabo las operaciones con renglones dadas sobre una matriz A de 3×5 mediante multiplicaciones por la izquierda.

18. $R_1 \to \frac{1}{2}R_1$ 19. $R_1 \to -6R_1$ 20. $R_2 \to R_2 + 2R_1$ 21. $R_3 \to R_3 - 8R_2$

22. $R_2 \to R_2 + 3R_3$ 23. $R_1 \to R_1 - 7R_3$ 24. $R_1 \rightleftarrows R_3$

25. $R_2 \rightleftarrows R_3$ 26. $R_1 \rightleftarrows R_2$ 27. $R_2 \to R_2 + R_3$

28. $R_1 \to -R_1$ 29. $R_1 \to R_1 - 4R_2$ 30. $R_2 \to \pi R_2$ 31. $R_3 \to R_3 + pR_1$

De los problemas 32 a 46 encuentre la matriz elemental E tal que $EA = B$.

32. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ 33. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

34. $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ 35. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

36. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 37. $A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 9 \\ 8 & 7 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 9 \\ 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

38. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 39. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

40. $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ \dots \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ \dots \end{pmatrix}$ 41. $A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 9 \\ \dots \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 7 & -1 \\ \dots \end{pmatrix}$

42. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ **43.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -6 \end{pmatrix}$

44. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

45. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ g & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} g & d \\ a & b \end{pmatrix}$ **46.** $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \varepsilon & \zeta \\ \iota & \kappa \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ -4\gamma + \varepsilon & -4\delta + \zeta \\ \iota & \kappa \end{pmatrix}$

De los problemas 47 a 63 encuentre la inversa de la matriz elemental dada.

47. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **48.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **49.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ **50.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

51. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **52.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **53.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **54.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

55. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **56.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **57.** $\begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

58. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **59.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **60.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

61. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **62.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **63.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

De los problemas 64 a 73 demuestre que cada matriz es invertible y escríbala como un producto de matrices elementales.

64. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ **65.** $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **66.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

67. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **68.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **69.** $\begin{pmatrix} \frac{13}{4} & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

70. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **71.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **72.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **73.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & -10 \\ -4 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

74. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ donde $ac \neq 0$. Escriba A como un producto de tres matrices elementales y concluya que A es invertible.

75. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ donde $adf \neq 0$. Escriba A como un producto de seis matrices elementales y concluya que A es invertible.

***76.** Sea A una matriz triangular superior de $n \times n$. Pruebe que si toda componente en la diagonal de A es diferente de cero, entonces A es invertible. [*Sugerencia:* Remítase a los problemas 74 y 75.]

***77.** Demuestre que si A es una matriz triangular superior de $n \times n$ con componentes diferentes de cero en la diagonal, entonces A^{-1} es triangular superior.

***78.** Utilice el teorema 2.5.1, inciso iv), y el resultado del problema 2.6.77 para demostrar que si A es una matriz triangular inferior con componentes diferentes de cero en la diagonal, entonces A es invertible y A^{-1} es triangular inferior.

79. Demuestre que si P_{ij} es la matriz de $n \times n$ obtenida permutando los renglones i y j de I_n, entonces $P_{ij}A$ es la matriz obtenida al permutar los renglones i y j de A.

80. Sea A_{ij} la matriz con c en la posición ji, unos en la diagonal y ceros en otro lado. Demuestre que $A_{ij}A$ es la matriz obtenida al multiplicar el renglón i de A por c y sumarlo al renglón de j.

81. Sea M_i la matriz con c en la posición ii, unos en las otras posiciones de la diagonal, y ceros en otro lado. Demuestre que M_iA es la matriz obtenida al multiplicar el renglón i de A por c.

De los problemas 82 a 91 escriba cada matriz cuadrada como un producto de matrices elementales y de una matriz triangular superior.

82. $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$ **83.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ **84.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ **85.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

86. $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 9 \\ -9 & -13 & -5 \\ 18 & 6 & 23 \end{pmatrix}$ **87.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **88.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

89. $\begin{pmatrix} 5 & -7 & -5 \\ 0 & 4 & -10 \\ -10 & 30 & -38 \end{pmatrix}$ **90.** $\begin{pmatrix} -5 & 9 & -5 \\ 5 & -12 & 7 \\ -10 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **91.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

EJERCICIOS CON MATLAB 2.6

1. El presente problema explora la forma de las matrices elementales. Observe que cada matriz elemental se puede obtener a partir de la matriz identidad con una modificación. Por ejemplo,

$$F=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&c&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \text{es la identidad con } F(2, 2) = c$$

En MATLAB, `F = eye(3); F(2,2) = c`

$$F=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&c&1\end{pmatrix} \qquad \text{es la identidad de } F(3, 2) = c$$

En MATLAB, `F = eye(3); F(3,2) = c`

$$F=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \qquad \text{es la identidad con renglones 2 y 3 intercambiados}$$

En MATLAB, `F = eye(3); F([2, 3],:) = F([3, 2],:)`

a) Dé `A= round(10*(2*rand(4)-1))`. De la manera recién descrita, introduzca las matrices F que representan las siguientes operaciones con renglones. Encuentre `F*A` para probar que F lleva a cabo las operaciones realizadas.

i) $R_3 \to 4R_3$ **ii)** $R_1 \to R_1 - 3R_2$ **iii)** Intercambio de R_1 y R_4

b) Encuentre `inv(F)` para cada F de *a*). Para cada F, explique las razones por las cuales `inv(F)` es una matriz elemental y describa qué operaciones representa con renglones. ¿Por qué es esta operación la "inversa" de la operación original con renglones?

2. Es necesario reducir una matriz dada a la forma escalonada reducida por renglones multiplicándola por matrices elementales, guardando el producto en el orden en el que se usa. Por cuestión de exactitud deberán calcularse los multiplicadores usando la notación matricial (vea en MATLAB 2.1, problema 1, el cálculo de los multiplicadores y observe en el problema 1 de esta sección cómo se forman las matrices elementales).

a) Sea $A=\begin{pmatrix}7&2&3\\-1&0&4\\2&1&1\end{pmatrix}$.

introduzca esta matriz y guárdela en A. Dé `B = A`. Esto coloca una copia de A en B. Se puede reducir B de manera que contenga `rref(A)` y quede en A la matriz original.

```
c = -B(2,1)/B(1,1)
F1 = eye(3); F1(2,1) = c
B = F1*B
F = F1
c = -B(3,1)/B(1,1)
```

forme `F2` con c en la posición correcta

```
B = F2*B
F = F2*F
```

Continúe de esta manera hasta que `B` se encuentre en la forma escalonada reducida por renglones. Si cualquier elemento pivote es cero, será necesario realizar un intercambio de renglones multiplicando por la matriz elemental adecuada.

b) Encuentre `F*A` y `A*F` donde F es el producto de las matrices elementales usadas y A es la matriz original. ¿Qué le dice esto sobre la relación entre F y A? (justifique su respuesta).

c) Encuentre `D=F1`$^{-1}$`*F2`$^{-1}$`*···*Fm`$^{-1}$, donde `F1` es la primera matriz elemental usada y `Fm` es la última matriz elemental usada. ¿Cuál es la relación entre `D` y `A`?

d) Repita de los incisos *a*) a *c*) para $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. *a*) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Realice las operaciones por renglones haciendo uso de la multiplicación por matrices elementales que se describió en el problema 1 de esta sección, guardando los productos de las matrices elementales pero realizando únicamente operaciones con renglones de la forma $R_j \to R_j + cR_i$ hasta que A se reduzca a la forma triangular superior (no cree unos en las posiciones pivote). Dé a cada matriz elemental un nombre de variable y despliegue todas las que use y sus inversas. Llame U a la forma triangular superior, que es el resultado final, y F al producto de todas las matrices elementales utilizadas.

b) Encuentre $L = F1^{-1} * F2^{-1} * \ldots Fm^{-1}$, donde $F1$ es la primera matriz elemental usada y Fm la última. ¿Qué puede deducir acerca de la forma de L, los de las matrices elementales y los de las inversas de éstas? (analice los elementos y sus posiciones).

c) Verifique que $LU = A$ (asegúrese de que A sea la matriz original. Recuerde que U es el resultado final de la reducción). Pruebe que esto sea cierto.

d) Repita de los incisos *a*) a *c*) para $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 & 3 \\ 8 & 10 & 1 & 4 \\ 10 & 7 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$.

2.7 Factorizaciones *LU* de una matriz

En esta sección se muestra la forma en la cual se escribe una matriz cuadrada como un producto de una matriz triangular inferior (con diagonal principal de unos) por una matriz triangular superior. Esta factorización resulta útil para resolver sistemas lineales con una computadora y se puede utilizar para probar resultados importantes sobre matrices.

En la sección 1.2 se estudió la **eliminación gaussiana**. En ese proceso se puede reducir una matriz a la forma escalonada por renglones. Recuerde que la forma escalonada por renglones de una matriz cuadrada es una matriz triangular superior con unos y ceros en la diagonal principal. A manera de ejemplo, la forma escalonada por renglones de una matriz de 3×3 se ve como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para los propósitos de esta sección se pretende reducir por renglones una matriz a la forma triangular superior donde los números diferentes de cero en la diagonal principal no son necesariamente unos. Esto se logra no insistiendo en que cada pivote sea igual a 1.

EJEMPLO 2.7.1 Encuentre una factorización *LU* de una matriz *A*

Reduzca por renglones la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ a una matriz triangular superior y después escriba A como un producto de una matriz triangular inferior y una matriz triangular superior.

SOLUCIÓN ► Se procede como antes; sólo que esta vez no se dividen los elementos de la diagonal (pivotes) por si mismos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + \frac{3}{2}R_1}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & \frac{5}{2} & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \to R_3 - \frac{5}{8}R_2 \\ R_4 \to R_4 - \frac{7}{4}R_2}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 20 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - \frac{20}{3}R_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix} = U$$

Usando las matrices elementales como en el ejemplo 2.6.5, se puede escribir

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

o

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix} U$$

Se ha escrito A como un producto de seis matrices elementales y una matriz triangular superior. Sea L el producto de las matrices elementales. Debe verificar que

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{7}{4} & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix}$, que se trata de una matriz triangular inferior con unos en la diagonal principal.

Después se puede escribir $A = LU$, donde L es triangular inferior y U es triangular superior. Los elementos de la diagonal de L son todos iguales a 1 y los elementos de la diagonal de U son los pivotes. Esta factorización se llama **factorización LU de A**.

Factorización *LU*

El procedimiento utilizado en el ejemplo 2.7.1 se puede llevar a cabo mientras no se requieran permutaciones para poder reducir A a la forma triangular. Esto no siempre es factible. Por ejemplo, el primer paso en la reducción por renglones de

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

es permutar (intercambiar) los renglones 1 y 2 o los renglones 1 y 3.

Suponga que por el momento dicha permutación no es necesaria. Entonces, al igual que en el ejemplo 2.7.1, se puede escribir $A = E_1 E_2 \ldots E_n U$, donde U es una matriz triangular superior y cada matriz elemental es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal. Esto se deduce del hecho de que E es de la forma $R_j + cR_i$ (no hay permutaciones ni multiplicaciones de renglones por constantes). Más aún, los números que se hacen cero en la reducción por renglones están siempre *abajo* de la diagonal de manera que en $R_j + cR_i$ siempre se cumple que $j > i$. De este modo, las c aparecen abajo de la diagonal. La prueba del siguiente teorema no es complicada (vea los problemas 2.7.40 y 2.7.41).

Teorema 2.7.1 Propiedades de multiplicación de matrices triangulares

El producto de las matrices triangulares inferiores con unos en la diagonal es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal. Más aún, el producto de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior.

Teorema 2.7.2 Teorema de la factorización *LU*

Sea A una matriz cuadrada ($n \times n$) y suponga que A se puede reducir por renglones a una matriz triangular U sin hacer alguna permutación entre sus renglones. Entonces existe una matriz triangular inferior L invertible con unos en la diagonal tal que $A = LU$. Si, además, U tiene n pivotes (es decir, A es invertible), entonces esta factorización es única.

Demostración

U y L se obtienen como en el ejemplo 2.7.1. Sólo es necesario probar la unicidad en el caso de que A sea invertible. Como U tiene n pivotes, su forma escalonada por renglones también tiene n pivotes (para verificar esto divida cada renglón de U por el pivote en ese renglón). Entonces, de acuerdo con el teorema de resumen en la página 134, U es invertible.

Para demostrar que L es invertible, considere la ecuación $L\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se deduce que $x_1 = 0$, $a_{21}x_1 + x_2 = 0$, etc., lo que demuestra que $x_1 = x_2 \cdots = x_n = 0$ y L es invertible por el teorema de resumen. Para demostrar la unicidad, suponga que $A = L_1U_1 = L_2U_2$. Entonces

$$\begin{aligned} U_1U_2^{-1} &= (L_1^{-1}L_1)(U_1U_2^{-1}) = L_1^{-1}(L_1U_1)U_2^{-1} = L_1^{-1}(L_2U_2)U_2^{-1} \\ &= (L_1^{-1}L_2)(U_2U_2^{-1}) = L_1^{-1}L_2 \end{aligned}$$

Por el resultado del problema 2.4.36, U_2^{-1} es triangular superior y L_1^{-1} es triangular inferior. Todavía más, según el teorema 2.7.1, $L_1^{-1}L_2$ es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal mientras que $U_1U_2^{-1}$ es triangular superior. La única forma en que una matriz triangular superior y una inferior pueden ser iguales es si ambas son diagonales. Como $L_1^{-1}L_2$ tiene unos en la diagonal se ve que

$$U_1U_2^{-1} = L_1^{-1}L_2 = I$$

de lo que se deduce que $U_1 = U_2$ y $L_1 = L_2$.

Uso de la factorización *LU* para resolver un sistema de ecuaciones

Suponga que se quiere resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es invertible. Si A satisface la hipótesis del teorema 2.7.2 se puede escribir

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Como L es invertible, existe un vector único $\mathbf{y}$ tal que $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Como U también es invertible, existe un vector único $\mathbf{x}$ tal que $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Entonces $A\mathbf{x} = L(U\mathbf{x}) = L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ y nuestro sistema está resuelto. Observe que $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ se puede resolver directamente mediante la sustitución hacia adelante, mientras que el sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ se puede resolver por sustitución hacia atrás. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.7.2 Uso de la factorización *LU* para resolver un sistema

Resuelva el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN ► Del ejemplo 2.7.1 se puede escribir $A = LU$, donde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{7}{4} & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix}$$

El sistema $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ conduce a las ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 4 \\ 2y_1 + y_2 \qquad\qquad\quad &= -8 \\ -\tfrac{3}{2}y_1 + \tfrac{5}{8}y_2 + y_3 \qquad &= -4 \\ -y_1 + \tfrac{7}{4}y_2 + \tfrac{20}{3}y_3 + y_4 &= -1 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} y_1 &= 4 \\ y_2 &= -8 - 2y_1 = -16 \\ y_3 &= -4 + \tfrac{3}{2}y_1 + \tfrac{5}{8}y_2 = 12 \\ y_4 &= -1 + y_1 - \tfrac{7}{4}y_2 - \tfrac{20}{3}y_3 = -49 \end{aligned}$$

Se acaba de realizar la sustitución hacia delante. Ahora, de $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ se obtiene

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 4 \\ 4x_2 - 8x_3 - 8x_4 &= -16 \\ 3x_3 + 9x_4 &= 12 \\ +49x_4 &= -49 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} x_4 &= 1 \\ 3x_3 &= 12 - 9x_4 = 3, \text{ de manera que } x_3 = 1 \\ 4x_2 &= -16 + 8x_3 + 8x_4 = 0, \text{ de manera que } x_2 = 0 \\ 2x_1 &= 4 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -2, \text{ por lo que } x_1 = -1 \end{aligned}$$

La solución es

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La factorización $PA = LU$

Suponga que con el propósito de reducir A a una matriz triangular se requiere alguna permutación. Una matriz de permutación elemental es una matriz elemental asociada con la operación de intercambio con renglones $R_i \rightleftarrows R_j$. Suponga que, de momento, se sabe por anticipado cuáles permutaciones deben realizarse. Cada permutación se lleva a cabo multiplicando A por la izquierda por una matriz de permutación elemental denotada por P_i. Suponga que en la reducción por renglones se realizan n permutaciones. Sea

$$P = P_n P_{n-1} \dots P_2 P_1$$

Matriz de el producto de las matrices de permutaciones elementales se llama **matriz de permutación**. De forma

Ahora, hacer las n permutaciones de antemano es equivalente a multiplicar A por la izquierda por P. Es decir,

> *PA* es una matriz que debe ser reducida por renglones a una matriz triangular superior sin realizar permutaciones adicionales.

EJEMPLO 2.7.3 Una factorización $PA = LU$

Para reducir A por renglones a la forma triangular superior, primero se intercambian los renglones 1 y 3 y después se continúa como se muestra a continuación.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Al realizar esta reducción por renglones se hicieron dos permutaciones. Primero se intercambiaron los renglones 1 y 3 y después los renglones 2 y 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightleftarrows R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightleftarrows R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

y

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se puede reducir a una forma triangular superior sin permutaciones. Se tiene

$$P = P_2 P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, como en el ejemplo 2.7.1,

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Al generalizar el resultado del ejemplo 2.7.3 se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 2.7.3 Factorización *LUP*

Sea A una matriz invertible de $n \times n$. Entonces existe una matriz de permutación P tal que

$$PA = LU$$

donde L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U es triangular superior. Para cada P (puede haber más de una), las matrices L y U son únicas.

Nota

A la factorización LUP también se le conoce como factorización LU con pivoteo parcial.

[*Observación:* Si se elige una P diferente se obtienen matrices distintas.] Si consideramos el ejemplo 2.7.3, sea

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (que corresponde a la permutación de los dos primeros renglones en el primer paso).

Se debe verificar que

$$PA = L_1U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Solución de un sistema usando la factorización $PA = LU$

Considere el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y suponga que $PA = LU$. Entonces

$$PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$
$$LU\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

y se puede resolver este sistema de la misma manera que en el ejemplo 2.7.2.

EJEMPLO 2.7.4 Solución de un sistema usando la factorización $PA = LU$

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 9 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -6 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN ► Se puede escribir este sistema como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Entonces, del ejemplo 2.7.3

$$LU\mathbf{x} = PA\mathbf{x} = P\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Se busca una $\mathbf{y}$ tal que $L\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$. Es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Entonces $y_1 = -6$, $y_2 = 7$ y $2y_1 + y_3 = 9$, por lo que $y_3 = 21$ y $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}$

Continuando, se busca una $\mathbf{x}$ tal que $U\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix}$; es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -6 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -3x_3 &= 21 \end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned} x_3 &= -7 \\ 2x_2 + 3(-7) = 7&\text{, de manera que } x_2 = 14 \\ x_1 - 2(14) + 5(-7) = -6&\text{, por lo que } x_1 = 57 \end{aligned}$$

La solución es

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 57 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix}$$

En este momento podemos renunciar al teorema del resumen, incluyendo la factorización *LUP* de la matriz.

Teorema 2.7.4 Teorema de resumen (punto de vista 4)

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes ocho afirmaciones son equivalentes. Es decir, cada una implica a las otras seis (de manera que si una afirmación es cierta, todas son ciertas, y si una es falsa, todas son falsas).

1. A es invertible.
2. La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).
3. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector de dimensión n $\mathbf{b}$.
4. A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n; es decir, la forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.
5. A se puede escribir como el producto de matrices elementales.
6. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.
7. $\det A \neq 0$ (por ahora, $\det A$ está definido sólo si A es una matriz de 2×2).
8. Existen una matriz de permutación P, una matriz triangular inferior L con unos en la diagonal principal y una matriz triangular superior invertible U, tales que $PA = LU$.

Una forma sencilla para encontrar la factorización *LU* de una matriz

Suponga que A es una matriz cuadrada que se puede reducir a una matriz triangular superior sin llevar a cabo permutaciones. Por ende existe un camino más sencillo para encontrar la factorización *LU*

EJEMPLO 2.7.5 Un camino más sencillo para obtener la factorización *LU*

Encuentre la factorización LU de

$$A=\begin{pmatrix}2&3&2&4\\4&10&-4&0\\-3&-2&-5&-2\\-2&4&4&-7\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN ► El presente problema se resolvió en el ejemplo 2.7.1. Ahora se hará uso de un método más sencillo. Si $A = LU$, se sabe que A se puede factorizar como:

$$A=\begin{pmatrix}2&3&2&4\\4&10&-4&0\\-3&-2&-5&-2\\-2&4&4&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\b&c&1&0\\d&e&f&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&2&4\\0&u&v&w\\0&0&x&y\\0&0&0&z\end{pmatrix}=LU$$

Observe que el primer renglón de U es el mismo que el primer renglón de A porque al reducir A a la forma triangular, no hace falta modificar los elementos del primer renglón.

Se pueden obtener todos los coeficientes faltantes con tan sólo multiplicar las matrices. La componente 2, 1 de A es 4. De este modo, el producto escalar del segundo renglón de L y la primera columna de U es igual a 4:

$$4 = 2a \text{ o } a = 2$$

Así,

$$\begin{pmatrix}2&3&2&4\\4&10&-4&0\\-3&-2&-5&-2\\-2&4&4&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\\cancel{b}-\frac{3}{2}&\cancel{c}\,\frac{5}{8}&1&0\\\cancel{d}-1&\cancel{e}\,\frac{7}{4}&\cancel{f}\,\frac{20}{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&2&4\\0&\cancel{u}4&\cancel{v}-8&\cancel{w}-8\\0&0&\cancel{x}3&\cancel{y}9\\0&0&0&\cancel{z}-49\end{pmatrix}$$

Después se tiene:

componente 2, 2: $\quad 10 = 6 + u \Rightarrow u = 4$

De aquí en adelante se pueden insertar los valores que se encuentran en L y U:

componente 2, 3: $\quad -4 = 4 + v \Rightarrow v = -8$

componente 2, 4: $\quad 0 = 8 + w \Rightarrow w = -8$

componente 3, 1: $\quad -3 = 2b \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$

componente 3, 2: $\quad -2 = -\frac{9}{2} + 4c \Rightarrow c = \frac{5}{8}$

componente 3, 3: $\quad -5 = -3 - 5 + x \Rightarrow x = 3$

componente 3, 4: $\quad -2 = -6 - 5 + y \Rightarrow y = 9$

componente 4, 1: $\quad -2 = 2d \Rightarrow d = -1$

componente 4, 2: $\quad 4 = -3 + 4e \Rightarrow e = \frac{7}{4}$

componente 4, 3: $\quad 4 = -2 - 14 + 3f \Rightarrow f = \frac{20}{3}$

Observación

Resulta sencillo, en una computadora, poner en práctica la técnica ilustrada en el ejemplo 2.7.5.

Advertencia

La técnica que se ilustra en el ejemplo 2.7.5 funciona únicamente si A se puede reducir a una matriz triangular sin realizar permutaciones. Si las permutaciones son necesarias, primero se debe multiplicar A por la izquierda por una matriz de permutación adecuada; después se puede aplicar este proceso para obtener la

La factorización es el resultado que se obtuvo en el ejemplo 2.7.1 con un esfuerzo considerablemente menor.

Factorización *LU* para matrices singulares

Si A es una matriz cuadrada singular (no invertible), la forma escalonada por renglones de A tendrá al menos un renglón de ceros, al igual que la forma triangular de A. Es posible que todavía se pueda escribir $A = LU$ o $PA = LU$, pero en este caso U no será invertible y L y U pueden no ser únicas.

EJEMPLO 2.7.6 Cuando *A* no es invertible, la factorización *LU* puede no ser única

Haciendo uso de la técnica de los ejemplos 2.7.1 o 2.7.5 se obtiene la factorización

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = LU$$

Sin embargo, si se hace $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & x & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A = L_1U$ para cualquier número real x.

En este caso, A tiene una factorización LU pero no es única. Debe verificarse que A no es invertible.

Por otro lado,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L'U'$$

y esta factorización es única, aunque B no sea invertible. El lector debe verificar estos datos.

Nota

Para una matriz cuadrada no invertible, su factorización *LU* puede ser o no única.

Factorización *LU* para matrices no cuadradas

En ocasiones es posible encontrar factorizaciones LU para matrices que no son cuadradas.

Teorema 2.7.5 Factorización *LU* para matrices no cuadradas

Sea A una matriz de $m \times n$. Suponga que A se puede reducir a su forma escalonada por renglones sin realizar permutaciones. Entonces existen una matriz L triangular inferior de $m \times m$ con unos en la diagonal y una matriz U de $m \times n$ con $u_{ij} = 0$ si $i > j$ tales que $A = LU$.

Observación: La condición $U_{ij} = 0$ si $i > j$ significa que U es triangular superior en el sentido de que todos los elementos que se encuentran por debajo de la diagonal principal son 0. Por ejemplo, una

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ 0 & d_2 & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & d_3 & u_{34} & u_{35} \end{pmatrix} \tag{2.7.1}$$

mientras que una matriz U de 5×3 que satisface esta condición tiene la forma

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & d_2 & u_{23} \\ 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7.2}$$

La prueba de este teorema no se presenta aquí; en su lugar se muestran dos ejemplos.

EJEMPLO 2.7.7 Factorización LU de una matriz 4×3

Encuentre la factorización LU de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -12 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN ► Procediendo como en el ejemplo 2.7.5 se establece

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & u & v \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = LU$$

Debe verificar que esto lleva de inmediato a

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & \frac{15}{2} & 1 & 0 \\ 4 & \frac{7}{2} & \frac{13}{19} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -76 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 2.7.8 Factorización LU de una matriz 3×4

Encuentre la factorización LU de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN ► Se escribe

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & u & v & w \end{pmatrix}$$

Al despejar las variables como en el ejemplo 2.7.5 se obtiene

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

Nota

Como en el caso de una matriz cuadrada singular, si una matriz no cuadrada tiene una factorización *LU*, puede ser o no única.

Una observación sobre las computadoras y la factorización *LU*

Los sistemas de software como MATLAB y otros, pueden llevar a cabo la factorización $PA = LU$ de una matriz cuadrada. Sin embargo, la matriz L que se obtiene a veces no es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal pero puede ser una permutación de dicha matriz. De otro modo, el sistema puede dar una matriz triangular inferior L y una U con unos en la diagonal. La razón de esto es que estos sistemas usan una factorización LU para calcular las inversas y los determinantes y para resolver sistemas de ecuaciones. Ciertos reordenamientos o permutaciones minimizarán los errores de redondeo acumulados. Se profundiza sobre estos errores y procedimientos en los apéndices C y D.

Mientras tanto, debe tenerse en cuenta que los resultados que se obtienen en la computadora con frecuencia serán diferentes de los obtenidos a mano. En particular, si A se puede reducir a una matriz triangular sin permutaciones, entonces cuando $PA = LU$, $P = I$. No obstante, muchas veces se obtendrá una P diferente en la computadora. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

igual que en los ejemplos 2.7.1 y 2.7.5, entonces MATLAB da la factorización $A = LU$, donde

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{9} & -\frac{40}{83} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{11}{18} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{83}{9} & \frac{41}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota

Una permutación de renglones de L lleva a una matriz triangular inferior con unos en la diagonal.

RESUMEN 2.7

- ***Factorización LU***

  Suponga que la matriz invertible A se puede reducir por renglones a una matriz triangular superior sin realizar permutaciones. Entonces existen matrices únicas L y U tales que L es triangular inferior con unos en la diagonal, U es una matriz superior invertible y $A = LU$.

- ***Matriz de permutación***

  $E = P_{ij}$ es una matriz de permutación elemental. Un producto de matrices permutación elementales se denomina matriz de permutación.

- ***Factorización PA = LU***

  Sea cualquier matriz $m \times n$. Entonces existe una matriz permutación P tal que $PA = LU$ donde L y U

• ***Teorema de resumen***

Sea A una matriz de $n \times n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = 0$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = 0$).

iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector de dimensión n $\mathbf{b}$.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.

v) A se puede escribir como un producto de matrices elementales.

vi) $\det A \neq 0$ (por ahora, $\det A$ está definido sólo si A es una matriz de 2×2).

vii) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

viii) Existen una matriz permutación P, una matriz triangular inferior L con unos en la diagonal, y una matriz triangular superior invertible U, tales que $PA = LU$.

AUTOEVALUACIÓN 2.7

De las aseveraciones siguientes, indique cuál es verdadera y cuál es falsa:

I) Para toda matriz cuadrada A existen matrices invertibles L y U tales que $A = LU$, donde L es triangular inferior con unos en la diagonal y U es triangular superior.

II) Para toda matriz invertible A, existen L y U como en el problema 2.7.1.

III) Para toda matriz invertible A existe una matriz de permutación P tal que $PA = LU$, donde L y U son como en el problema 2.7.1.

IV) El producto de matrices de permutación es una matriz de permutación.

Respuestas a la autoevaluación

I) *F*) **II)** *F*) **III)** *V*) **IV)** *V*)

PROBLEMAS 2.7

De los problemas 1 a 14 encuentre la matriz triangular inferior L con unos en la diagonal y una matriz triangular superior U tal que $A = LU$.

1. $\begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -56 & 73 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 10 & 10 & 6 \\ 60 & 70 & 28 \\ 100 & 170 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 5 & -7 & -5 \\ 20 & 24 & -30 \\ -20 & -24 & 22 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ 6 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} -7 & 4 & 3 & 10 \\ 35 & -15 & -22 & -53 \\ 0 & 5 & -15 & -1 \\ -28 & -24 & 108 & 48 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 13. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 4 & 9 & -9 & 6 & -5 \\ -28 & -70 & 62 & -35 & 41 \\ -32 & -121 & 57 & 9 & 81 \\ 32 & 51 & -35 & 20 & -8 \\ 8 & 39 & 49 & -145 & 45 \end{pmatrix}$

De los problemas 15 a 26 resuelva el sistema dado usando la factorización LU. Esto es, resuelva $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

15. $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -14 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

17. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

18. $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -20 & 57 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

19. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

20. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 18 & -19 & 17 \\ -27 & 36 & -39 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

21. $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 12 & 15 & 26 \\ -36 & -48 & -101 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$

22. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

23. $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ 6 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$

24. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -5 & 2 \\ -3 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \\ 44 \end{pmatrix}$

25. $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 12 \\ -20 \end{pmatrix}$

26. $A = \begin{pmatrix} 4 & -10 & -8 & -8 \\ 24 & -52 & -53 & -43 \\ 20 & -18 & -63 & -28 \\ 32 & -128 & -34 & -91 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$

De los problemas 27 a 39, *a*) encuentre una matriz de permutación P y matrices triangulares inferior y superior L y U tales que $PA = LU$; *b*) utilice el resultado del inciso *a*) para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

27. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

28. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ -10 & -8 & 3 \\ 15 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$

29. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

30. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

31. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 9 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

32. $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -8 \\ 1 & -2 & 4 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

33. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$

34. $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

35. $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

36. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

37. $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & -6 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

38. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 5 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

39. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 5 & -10 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

40. Suponga que L y M son triangulares inferiores con unos en la diagonal. Demuestre que LM es triangular inferior con unos en la diagonal. [*Sugerencia:* Si $B = LM$, demuestre que

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} m_{ki} = 1 \quad \text{y} \quad b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} m_{kj} = 0 \qquad \text{si } j > i.]$$

41. Demuestre que el producto de dos matrices triangulares superiores es triangular superior.

42. Demuestre que $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ tiene más de una factorización LU.

43. Realice el mismo procedimiento con la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -6 & 0 \\ 5 & -2 & -4 & 5 \\ 1 & -4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

De los problemas 44 a 52 encuentre una factorización *LU* para cada matriz singular:

44. $\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}$ **45.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 6 & -6 & 4 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ **46.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 13 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **48.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ **49.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

50. $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & -11 \\ -2 & 6 & 2 & -6 \\ -1 & -4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ **51.** $\begin{pmatrix} 0 & -9 & -2 \\ 0 & -22 & -5 \\ 0 & -44 & -9 \end{pmatrix}$ **52.** $\begin{pmatrix} 0 & -7 & -7 & -6 \\ 0 & 28 & 35 & 22 \\ 0 & -14 & 21 & -22 \\ 0 & 35 & 14 & 28 \end{pmatrix}$

De los problemas 53 a 60 encuentre una factorización *LU* para cada matriz no cuadrada.

53. $\begin{pmatrix} -2 & -7 & -2 & 2 \\ -8 & -35 & -17 & 7 \end{pmatrix}$ **54.** $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ **55.** $\begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 & 4 \\ 6 & -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

56. $\begin{pmatrix} -9 & 3 & 5 & -4 & 6 \\ 63 & -23 & -25 & 20 & -44 \\ 45 & -13 & -34 & 30 & -37 \end{pmatrix}$ **57.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 5 & 3 & 5 \\ -6 & 3 & 4 \\ -3 & 5 & -3 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **58.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \\ -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

59. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & -10 \\ -6 & -4 & -1 & 22 \\ -3 & -44 & -77 & -12 \\ 18 & -4 & -31 & -69 \\ -12 & 4 & 37 & 116 \end{pmatrix}$ **60.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 15 \\ -1 & 24 \\ -1 & -21 \\ 4 & 72 \end{pmatrix}$

EJERCICIOS CON MATLAB 2.7

1. Si se siguen los pasos descritos en el problema 3 de MATLAB 2.6, encuentre la descomposición LU para A; es decir, encuentre L y U y verifique que $LU = A$. Aquí U no es triangular superior sino que se encuentra en la forma escalonada reducida por renglones (excepto que los pivotes no necesariamente son iguales a 1):

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 & 6 \\ 10 & 1 & -8 & 9 \\ 4 & 7 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

2. El uso de la descomposición LU para resolver sistemas (con soluciones únicas) es más eficiente que los métodos presentados anteriormente.

Información de MATLAB. El comando `x=A\b` resuelve el sistema $[A\ \mathbf{b}]$ encontrando la factorización LU de la matriz A y haciendo sustituciones hacia delante y hacia atrás. Se puede comparar la eficiencia del algoritmo utilizado para resolver un problema, si medimos el tiempo que requirió para llegar al resultado. En MATLAB, con los comandos `tic, toc (doc tic, doc toc)`, se puede medir el tiempo transcurrido desde que se inició un comando hasta su fin. Con el objetivo de poder comparar la eficiencia de los diferentes algoritmos introduzca los siguientes comandos de MATLAB en la ventana de comando

a) Elija `A=rand(50)` y `b=rand(50,1)`. Introduzca

```
tic;A\b;toc
tic;A\b;t_lu=toc
```

Es necesario llevar a cabo este proceso ya que la primera vez que se llama a un algoritmo la computadora tiene que cargar en memoria el programa adecuado. Con el segundo comando, únicamente se mide el tiempo de ejecución del programa sin incluir el tiempo de carga en memoria del algoritmo.

Repita ahora con

```
rref([A,b]);
tic;rref([A,b]);t_rref=toc
```

b) Repita para otros tres pares A y $\mathbf{b}$ (utilice tamaños diferentes y mayores que 50).

c) Comente la comparación de los dos tiempos de ejecución `t_lu` y `t_rref`.

3. MATLAB puede encontrar una descomposición LU, pero puede no ser lo que usted espera. Casi siempre existe una matriz de permutación P implícita.

a) Sea `A=2*rand(3)-1`. Introduzca `[L,U,P]=lu(A)` `(doc lu)` y verifique que $LU = PA$. Repita para dos o más matrices cuadradas aleatorias de diferentes tamaños.

b) La razón por la que casi siempre existe una P es que para minimizar los errores de redondeo, se intercambian los renglones con el objeto de que el elemento mayor (en valor absoluto) de una columna (entre los renglones que no se han usado) esté en la posición pivote.

Sea `A=round(10*(2*rand(4)-1))`. Para esta A, encuentre L, U y P usando el comando `lu`. Sea `C=P*A`.

i) Reduzca a la forma triangular utilizando operaciones con renglones de la forma $R_j \to R_j + c*R_i$ (calcule sus multiplicadores haciendo uso de la notación matricial y realizando las operaciones con renglones mediante la multiplicación por matrices elementales) (vea el

ii) Demuestre que puede proceder la reducción y que en cada etapa el pivote es el elemento más grande (en valor absoluto) de los elementos de la columna que está abajo de la posición pivote. Verifique que el resultado final es la matriz U producida por el comando `lu`.

iii) Describa la relación entre los multiplicadores y sus posiciones (en la matriz elemental que realiza la operación con el renglón) y los elementos de L y sus posiciones en L.

4. Introduzca una matriz aleatoria A de 3×3. Encuentre L, U y P utilizando el comando `lu` como en el problema 3 de MATLAB en esta sección. Interprete la información almacenada en L al igual que en el problema 3 de MATLAB 2.6 (o como se observó en el problema 2.7.3 de esta sección), realice las operaciones con renglones indicadas para PA y muestre que el resultado final es U (debe estar seguro de referirse a un elemento de L usando la notación matricial y no el número desplegado).

2.8 Teoría de gráficas: una aplicación de matrices

En los últimos años se ha dedicado mucha atención a un área relativamente nueva de la investigación matemática denominada **teoría de gráficas**. Las gráficas, que se definirán en breve, son útiles en el estudio de la forma en la cual se interrelacionan las componentes de las redes que surgen en el comercio, las ciencias sociales, la medicina y otras áreas más. Por ejemplo, las gráficas resultan de utilidad en el estudio de las relaciones familiares en una tribu, la propagación de una enfermedad contagiosa o una red de vuelos comerciales que comunican a un número dado de ciudades importantes. La teoría de gráficas es un tema de gran amplitud. En esta sección se presentarán únicamente algunas definiciones y se mostrará la cercanía de la relación entre la teoría de gráficas y la teoría de matrices.

A continuación se ilustrará de qué manera surge una gráfica en la práctica.

EJEMPLO 2.8.1 Representación de un sistema de comunicación mediante una gráfica

Suponga que se está analizando un sistema de comunicaciones unido por líneas telefónicas.

En este sistema hay cinco estaciones. En la siguiente tabla se indican las líneas disponibles en dirección "a", y provenientes "de" las estaciones:

Estación	1	2	3	4	5
1		✓			
2	✓				✓
3				✓	
4		✓	✓		
5	✓			✓	

Por ejemplo, la marca del cuadro (1, 2) indica que hay una línea de la estación 1 a la estación 2. La información en la tabla se puede representar por una gráfica dirigida como la que se ilustra en la fi-

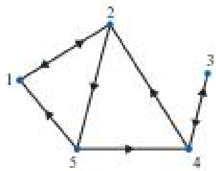


Figura 2.3
La gráfica muestra las líneas de una estación en dirección a las otras.

Gráfica dirigida

Vértices

Aristas

En general, una **gráfica dirigida** es una colección de n puntos denominados **vértices**, denotados por $V_1, V_2, \ldots V_n$, junto con un número finito de **aristas** que unen distintos pares de vértices. Cualquier gráfica dirigida se puede representar mediante una matriz de $n \times n$ en donde el número de la posición ij es el número de aristas que unen el vértice i con el vértice j.

EJEMPLO 2.8.2 Representación matricial de una gráfica dirigida

La representación matricial de la gráfica en la figura 2.3 es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.8.1)$$

EJEMPLO 2.8.3 Representación matricial de dos gráficas dirigidas

Encuentre las representaciones matriciales de las gráficas dirigidas en la figura 2.4.

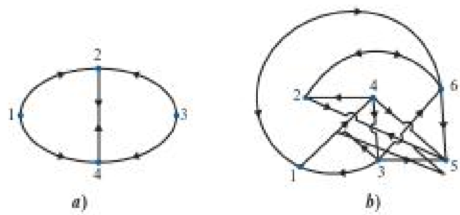


Figura 2.4
Dos gráficas dirigidas.

SOLUCIÓN ► *a*) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *b*) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

EJEMPLO 2.8.4 Obtención de una gráfica a partir de su representación matricial

Esboce la gráfica representada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN ► Como A es una matriz de 5×5, la gráfica tiene cinco vértices. Vea la figura 2.5.

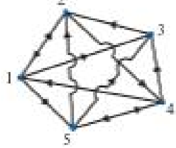


Figura 2.5

La gráfica dirigida representada por A.

Observación

En los ejemplos presentados se tienen gráficas dirigidas que satisfacen las siguientes dos condiciones:

i) Ningún vértice está conectado consigo mismo.
ii) A lo más una arista lleva de un vértice a otro.

La matriz que representa una gráfica dirigida que satisface estas condiciones se denomina **matriz de incidencia**. Sin embargo, en términos generales es posible tener ya sea un 1 en la diagonal principal de una representación matricial (indicando una arista de un vértice hacia sí mismo) o un entero mayor que 1 en la matriz (indicando más de una trayectoria de un vértice a otro). Para evitar situaciones más complicadas (pero manejables), se ha supuesto, y se seguirá suponiendo, que i) y ii) se satisfacen.

Matriz de incidencia

EJEMPLO 2.8.5 Una gráfica dirigida que describe el dominio de un grupo

Las gráficas dirigidas se utilizan con frecuencia en sociología para estudiar las interacciones grupales. En muchas situaciones de esta naturaleza, algunos individuos dominan a otros. El dominio puede ser de índole física, intelectual o emocional. Para ser más específicos, se supone que en una situación que incluye a seis personas, un sociólogo ha podido determinar quién domina a quién (esto se pudo lograr mediante pruebas psicológicas, cuestionarios o simplemente por observación). La gráfica dirigida en la figura 2.6 indica los hallazgos del sociólogo.

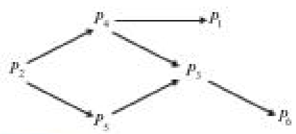


Figura 2.6

La representación matricial de esta gráfica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

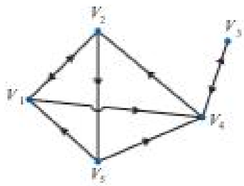


Figura 2.7

Existen trayectorias de V_1 a V_5 aun cuando no hay una arista de V_1 a V_5. Una de estas trayectorias es $V_1 \to V_2 \to V_5$.

No tendría mucho sentido introducir la representación matricial de una gráfica si lo único viable fuera escribirlas. Existen varios hechos no tan visibles que se pueden preguntar sobre las gráficas. Para ilustrar lo anterior considere la gráfica en la figura 2.7.

Observe que aunque no hay una arista de V_1 a V_5 es posible mandar un mensaje entre estos dos vértices. De hecho, hay cuando menos dos maneras de hacerlo:

$$V_1 \to V_2 \to V_5 \tag{2.8.2}$$

y

$$V_1 \to V_4 \to V_2 \to V_5 \tag{2.8.3}$$

Trayectoria

Cadena

La ruta de un vértice hacia otro se denomina **trayectoria** o **cadena**. La trayectoria de V_1 a V_5 en (2.8.2) se llama **2-cadena** porque atraviesa por dos aristas. La trayectoria (2.8.3) se llama **3-cadena**. En general una trayectoria que atraviesa por n aristas (y por tanto pasa por $n + 1$ vértices) se llama ***n*-cadena**. Ahora, regresando a la gráfica, se puede observar que es posible ir de V_1 a V_5 a lo largo de la 5-cadena

$$V_1 \to V_4 \to V_3 \to V_4 \to V_2 \to V_5 \tag{2.8.4}$$

Sin embargo, no resultaría muy interesante hacerlo, ya que con una parte de la trayectoria no se obtiene nada. Una trayectoria en la que un vértice se encuentra más de una vez se denomina **redundante**. La 5-cadena (2.8.4) es redundante porque el vértice 4 se encuentra dos veces.

Es de gran interés poder determinar la trayectoria más corta (si es que existe) que une a dos vértices en una gráfica dirigida. Existe un teorema que muestra cómo esto se puede lograr, pero primero se hará una observación importante. Como se ha visto, la representación matricial de la gráfica en la figura 2.3 está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se calcula

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe con más cuidado las componentes de A^2. Por ejemplo, el 1 en la posición (2, 4) es el producto escalar del segundo renglón y la cuarta columna de A:

$$(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

El último 1 del segundo renglón representa la arista

$$V_2 \to V_5$$

El último 1 en la cuarta columna representa la arista

$$V_5 \to V_4$$

Al multiplicar, estos unos representan la 2-cadena

$$V_2 \to V_5 \to V_4$$

De igual manera, el 2 en la posición (5, 2) de A^2 es el producto escalar del quinto renglón y la segunda columna de A:

$$(1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

Siguiendo el razonamiento anterior se puede apreciar que esto indica el par de 2-cadenas:

$$V_5 \to V_1 \to V_2$$

y

$$V_5 \to V_4 \to V_2$$

Si se generalizan estos hechos se pueden probar los siguientes resultados:

Teorema 2.8.1

Si A es la matriz de incidencia de una gráfica dirigida, la componente ij de A^2 da el número de 2-cadenas de un vértice i a un vértice j.

Haciendo uso de este teorema se puede demostrar que el número de 3-cadenas que unen el vértice i con el vértice j es la componente ij de A^3. En el ejemplo 2.8.2

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, las dos 3-cadenas del vértice 4 al vértice 2 son

$$V_4 \to V_3 \to V_4 \to V_2$$

y

$$V_4 \to V_2 \to V_1 \to V_2$$

Ambas cadenas son redundantes. Las dos 3-cadenas del vértice 5 al vértice 1 son

$$V_5 \to V_4 \to V_2 \to V_1$$

y

$$V_5 \to V_1 \to V_2 \to V_1$$

El siguiente teorema responde la pregunta que se hizo acerca de encontrar la trayectoria más corta entre dos vértices.

Teorema 2.8.2

Sea A una matriz de incidencia de una gráfica dirigida. Sea $a_{ij}^{(n)}$ la componente ij de A^n.

i) Si $a_{ij}^{(n)} = k$, entonces existen exactamente k n-cadenas del vértice i al vértice j.

ii) Más aún, si $a_{ij}^{(m)} = 0$ para toda $m < n$ y $a_{ij}^{(n)} \neq 0$, entonces la cadena más corta del vértice i al vértice j es una n-cadena.

EJEMPLO 2.8.6 Cálculo de cadenas mediante las potencias de la matriz de incidencia

En el ejemplo 2.8.2 se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^5 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nota

También se tienen 5-cadenas (todas redundantes) que unen el vértice 2 consigo mismo.

Como $a_{13}^{(1)} = a_{13}^{(2)} = a_{13}^{(3)} = 0$ y $a_{13}^{(4)} = 1$, se observa que la ruta más corta del vértice 1 al vértice 3 es una 4-cadena que está dada por

$$V_1 \to V_2 \to V_5 \to V_4 \to V_3$$

EJEMPLO 2.8.7 Dominio indirecto de un grupo

En el ejemplo de sociología (ejemplo 2.8.5), una cadena (que no es una arista) representa control indirecto de una persona sobre otra. Es decir, si Pedro domina a Pablo, quien domina a María, se puede ver que Pedro ejerce algún control (aunque sea indirecto) sobre María. Para determinar quién tiene control directo o indirecto sobre quién, sólo es necesario calcular las potencias de la matriz de incidencia A. Se tiene

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\1&0&2&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&2\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Como se vio en la gráfica de la figura 2.6, estas matrices muestran que la persona P_2 tiene control directo o indirecto sobre todas las demás. Él o ella tiene control directo sobre P_4 y P_5, control de segundo orden sobre P_1 y P_3, y control de tercer orden sobre P_6.

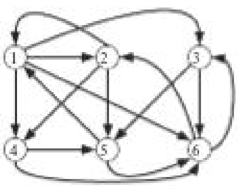
Nota

En el mundo real las situaciones son mucho más complejas. Puede haber cientos de estaciones en una red de comunicaciones o cientos de individuos en un estudio sociológico dominante-pasivo. En estos casos, las matrices son esenciales para manejar la gran cantidad de datos que deben estudiarse.

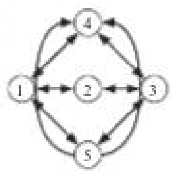
PROBLEMAS 2.8

De los problemas 1 a 4 encuentre la representación matricial de la gráfica dirigida dada.

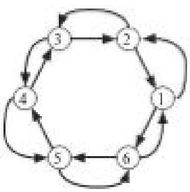
1.



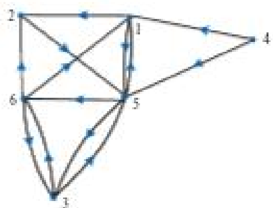
2.



3.



4.



De los problemas 5 a 8 dibuje las gráficas que representan las matrices dadas.

5. $\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&1\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. Pruebe que la ruta más corta que une dos vértices en una gráfica dirigida no es redundante.

12. Si A es la matriz de incidencia de una gráfica dirigida, muestre que $A + A^2$ representa el número total de 1- y 2-cadenas entre los vértices.

13. Describa la dominación directa e indirecta dada por la gráfica de la figura 2.8.

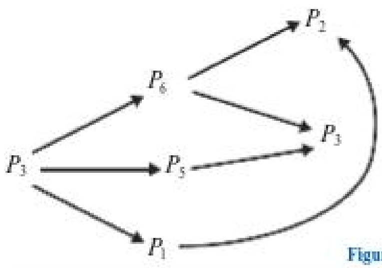


Figura 2.8

Ejercicios de repaso

De los ejercicios 1 a 8 calcule la forma escalonada por renglones y la inversa (si existe) de la matriz dada.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 20 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 12 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \\ -1 & 2 & -6 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 7 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 9 a 13, primero escriba el sistema en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, después calcule A^{-1} y, por último, use la multiplicación de matrices para obtener el vector solución.

9. $\begin{aligned} 8x_1 + 7x_2 &= -1 \\ -4x_1 + x_2 &= -4 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} x_1 + 7x_2 &= 3 \\ 3x_1 - 20x_2 &= 8 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}- x_3} &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} 8x_1 + 7x_2 &= -1 \\ -4x_1 + x_3 &= -4 \\ -4x_1 + x_3 &= -4 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= -1 \\ 3x_3 + 2x_4 &= -2 \end{aligned}$

a) Determine si la matriz E dada es invertible; si lo es, calcule su inversa utilizando la adjunta.
b) Determine $E^{-1} + \text{Adj}\, E =$
c) Determine $E^{\top} + E^{-1} + \text{Adj}\, E =$
d) Determine $(E^{-1} + E^{\top}) + E^{\top} + E^{-1} + \text{Adj}\, E =$

De los ejercicios 14 a 22 calcule la transpuesta de la matriz dada y determine si la matriz es simétrica o antisimétrica.[10]

14. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 0 & 3+2i & 4-3i \\ -3-2i & 0 & 1+i \\ -4+3i & -1+i & 0 \end{pmatrix}, i = \sqrt{-1}$ **18.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ **19.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & -8 \\ 6 & 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$ **21.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

22. Sea $F = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ calcule $(F^{*} + F^{-1})^{-1}$.

De los ejercicios 23 a 27 encuentre una matriz elemental de 3×3 que llevaría a cabo las operaciones con renglones dadas.

23. $R_2 \rightleftarrows -R_3$ **24.** $R_1 \to R_1 + 2R_2$ **25.** $R_3 \to R_3 - 5R_1$

26. $R_3 \to 8R_1$ **27.** $R_3 \to R_3 - \frac{3}{4}R_2$

De los ejercicios 28 a 31 encuentre la inversa de la matriz elemental.

28. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **29.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **30.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **31.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 32 y 33 escriba la matriz como el producto de matrices elementales.

32. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **33.** $\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

De los ejercicios 34 y 35 escriba cada matriz como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior.

34. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 36 y 37 encuentre la factorización LU de A y utilícela para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

36. $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -6 \\ -5 & -2 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

37. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -10 \\ 35 & 14 & -75 \\ 20 & 82 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -26 \\ 102 \end{pmatrix}$

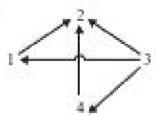
De los ejercicios 38 y 39 encuentre una matriz permutación P y las matrices L y U tales que $PA = LU$ y utilícelas para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

38. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

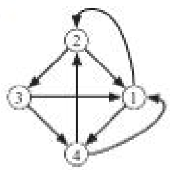
39. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 40 y 41 encuentre la matriz que representa cada gráfica.

40.



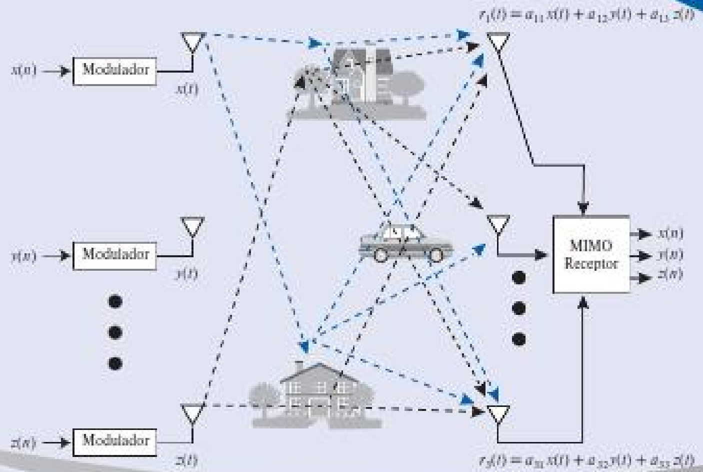
41.



42. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

CAPÍTULO

3



▲ En el estudio de sistemas de comunicaciones inalámbricos con múltiples entradas y múltiples salidas, información diversa es transmitida de forma simultánea por cada una de las antenas de transmisión. Los determinantes juegan un papel importante en las estrategias de codificación de la información transmitida y recibida.
[Fuente: http://rfdesign.com/military_defense_,electronics/0408DE-MIMO-wireless-revolution-Figure01.jpg.]

Determinantes

Objetivos del capítulo

En este capítulo el estudiante. . .

- Estudiará la definición inductiva de los determinantes y el caso particular para matrices triangulares y su interpretación como área de un paralelogramo (sección 3.1).
- Aprenderá las propiedades fundamentales de los determinantes relacionadas con la multiplicación entre matrices y factorizaciones *LUP*, así como las propiedades para simplificar su evaluación sin tener que hacer uso de la definición inductiva (sección 3.2).
- Relacionará el determinante de una matriz con la existencia de su inversa (sección 3.3).
- Se familiarizará con el uso de las determinantes para encontrar fórmulas cerradas para la solución de sistemas de *n* ecuaciones con *n* incógnitas (sección 3.4).
- Aprenderá las definiciones de los teoremas relacionados con las propiedades de los determinantes (sección 3.2).

3.1 Definiciones

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz de 2×2. En la sección 2.4 se definió el determinante de A como

$$\boxed{\det A = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}} \qquad (3.1.1)$$

Con frecuencia se denotará $\det A$ por

$$|A| \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (3.1.2)$$

Observación

No hay que confundir esta notación con las barras de valor absoluto. $|A|$ denota $\det A$ si A es una matriz cuadrada. $|x|$ denota el valor absoluto de x si x es un número real o complejo.

Se demostró que A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$. Como se verá más adelante, este importante teorema es válido para las matrices de $n \times n$.

En este capítulo se desarrollarán algunas propiedades básicas de los determinantes y se verá cómo se pueden utilizar para calcular la inversa de una matriz y resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

El determinante de una matriz de $n \times n$ se definirá de manera *inductiva*. En otras palabras, se usará lo que se sabe sobre un determinante de 2×2 para definir un determinante de 3×3, que a su vez se usará para definir un determinante de 4×4, y así sucesivamente. Se comienza por definir un determinante de 3×3.*

Definición 3.1.1

Determinante de 3 × 3

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Entonces

$$\boxed{\det A = |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}} \qquad (3.1.3)$$

Nota

Observe el signo *menos* antes del segundo término del lado derecho de (3.1.3).

EJEMPLO 3.1.1 Cálculo de un determinante de 3 × 3

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Calcule $|A|$.

* Existen varias maneras de definir un determinante y ésta es una de ellas. Es importante darse cuenta de que "det" es una función

SOLUCIÓN ►

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 4((-5)(9) - (6)(1)) - 7((3)(9) - (-8)(1)) + (-2)((3)(6) - (-8)(-5))$$

$$= 4(-51) - 7(35) - 2(-22)$$

$$= -405$$

EJEMPLO 3.1.2 **Cálculo de un determinante de 3×3**

Calcule $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix}$.

SOLUCIÓN ► $$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 12 + 3(-3) + 5(-3) = 0$$

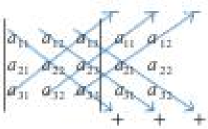
Hay otro método con el que se pueden calcular determinantes de 3×3. De la ecuación (3.1.3) se tiene

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

es decir

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{33} \qquad \textbf{(3.1.4)}$$

Se escribe A y se le adjuntan sus primeras dos columnas:



A continuación se calculan los seis productos, poniendo signo *menos* antes de los productos con flechas hacia arriba, y se suman todos. Esto da la suma de la ecuación (3.1.4).

EJEMPLO 3.1.3 **Cálculo de un determinante de 3×3 usando el nuevo método**

Calcule $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ usando el nuevo método.

SOLUCIÓN ► Si se escribe $\left|\begin{array}{rrr|rr} 3 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right|$ y se multiplica como lo indican las flechas se obtiene

$$\begin{aligned} |A| &= (3)(2)(4) + (5)(3)(-1) + (2)(4)(2) - (-1)(2)(2) - (2)(3)(3) - (4)(4)(5) \\ &= 24 - 15 + 16 + 4 - 18 - 80 = -69 \end{aligned}$$

Advertencia

Este método *no* funciona para determinantes de $n \times n$ si $n > 3$. Si intenta algo similar para determinantes de 4×4 o de orden mayor, obtendrá una respuesta equivocada.

Antes de definir los determinantes de $n \times n$ debe observarse que la ecuación (3.1.3) está formada por tres determinantes de 2×2, si definimos las siguientes matrices: $M_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ (es la matriz formada al eliminar el primer renglón y la primera columna de la matriz A); $M_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$ (es la matriz formada al eliminar el primer renglón y la segunda columna de la matriz A), y $M_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ (es la matriz formada al eliminar el primer renglón y la tercera columna de la matriz A). Si ahora definimos a $\mathrm{A}_{11} = \det M_{11}$, $\mathrm{A}_{12} = -\det M_{12}$, $\mathrm{A}_{13} = \det M_{13}$, podemos escribir la ecuación (3.1.3) como

$$\boxed{\det A = |A| = a_{11}\mathrm{A}_{11} + a_{12}\mathrm{A}_{12} + a_{13}\mathrm{A}_{13}} \qquad \textbf{(3.1.5)}$$

Utilizando las observaciones del párrafo anterior podemos definir ahora el caso general de estas matrices, resultado de eliminar algún renglón o columna de una matriz.

Definición 3.1.2

Menor

Menor *ij* de *A*

Sea A una matriz de $n \times n$ y sea M_{ij} la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene de A eliminando el renglón i y la columna j. M_{ij} se llama el **menor *ij*** de A.

EJEMPLO 3.1.4 **Cálculo de dos menores de una matriz de 3 × 3**

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Encuentre M_{13} y M_{32}.

SOLUCIÓN ► Eliminando el primer renglón y la tercera columna de A se obtiene $M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. De manera similar, si se elimina el tercer renglón y la segunda columna se obtiene

EJEMPLO 3.1.5 **Cálculo de dos menores de una matriz de 4 × 4**

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Encuentre M_{32} y M_{24}.

SOLUCIÓN ► Al quitar el tercer renglón y la segunda columna de A se encuentra que $M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. De igual manera, $M_{24} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Definición 3.1.3

Cofactor

Sea A una matriz de $n \times n$. El **cofactor ij** de A, denotado por A_{ij}, está dado por

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}} \tag{3.1.6}$$

Esto es, el cofactor ij de A se obtiene tomando el determinante del menor ij y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$. Observe que

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j \text{ es par} \\ -1 & \text{si } i + j \text{ es impar} \end{cases}$$

Cofactor ij de A

EJEMPLO 3.1.6 **Cálculo de dos cofactores de una matriz de 4 × 4**

En el ejemplo 3.1.5 se tiene

$$-A_{32} = (-1)^{3+2}\,|M_{32}| = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -8$$

$$-A_{24} = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -192$$

Observación

La definición 3.1.3 tiene sentido a partir de la definición de un determinante de $n \times n$ con la suposición de que ya se sabe lo que es un determinante de $(n-1) \times (n-1)$.

Con las definiciones anteriores de cofactores estamos en posibilidad de considerar el caso genaral de matrices de $n \times n$. Considere

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \tag{3.1.7}$$

Definición 3.1.4

Observación

En la ecuación (3.1.8) se define el determinante mediante la expansión por cofactores en el primer renglón de A. En la siguiente sección se verá (teorema 3.2.5) que se obtiene la misma respuesta si se expande por cofactores en cualquier renglón o columna.

Determinante $n \times n$

Sea A una matriz de $n \times n$ como en (3.1.7). Entonces el determinante de A, denotado por det A o $|A|$, está dado por

$$
\begin{aligned}
\det A = |A| &= a_{11}\mathrm{A}_{11} + a_{12}\mathrm{A}_{12} + a_{13}\mathrm{A}_{13} + \cdots + a_{1n}\mathrm{A}_{1n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\mathrm{A}_{1k}
\end{aligned}
\tag{3.1.8}
$$

Expansión por cofactores

La expresión en el lado derecho de (3.1.8) se llama **expansión por cofactores**.

EJEMPLO 3.1.7 Cálculo del determinante de una matriz de 4 × 4

Calcule det A, de donde

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}
$$

SOLUCIÓN ►

$$
\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}\mathrm{A}_{11} + a_{12}\mathrm{A}_{12} + a_{13}\mathrm{A}_{13} + a_{14}\mathrm{A}_{14}
$$

$$
= 1\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}
$$

$$
= 1(-92) - 3(-70) + 5(2) - 2(-16) = 160
$$

Es obvio que el cálculo del determinante de una matriz de $n \times n$ puede ser laborioso. Para calcular un determinante de 4×4 deben calcularse cuatro determinantes de 3×3. Para calcular un determinante de 5×5 deben calcularse cinco determinantes de 4×4, lo que equivale a calcular veinte determinantes de 3×3. Por fortuna existen técnicas que simplifican estos cálculos. Algunos de estos métodos se presentan en la siguiente sección. Sin embargo, existen algunas matrices para las cuales es muy sencillo calcular los determinantes. Se comienza por repetir la definición dada en la página 134.

Definición 3.1.5

Matriz triangular superior

Matriz triangular inferior

Matriz diagonal

Matriz triangular

Una matriz cuadrada se denomina **triangular superior** si todas sus componentes abajo de la diagonal son cero. Es una matriz **triangular inferior** si todas sus componentes arriba de la diagonal son cero. Una matriz se denomina **diagonal** si todos los elementos que no se encuentran sobre la diagonal son cero; es decir, $A = (a_{ij})$ es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$, triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$ y diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Observe que una matriz

EJEMPLO 3.1.8 Seis matrices triangulares

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ son triangulares superiores;

$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son triangulares inferiores; I (la matriz identidad) y

$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ son diagonales. Observe que la matriz E es también triangular superior y triangular inferior.

EJEMPLO 3.1.9 El determinante de una matriz triangular inferior

La matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ es triangular inferior. Calcule det A.

SOLUCIÓN ► $\det A = a_{11}\mathrm{A}_{11} + 0\mathrm{A}_{12} + 0\mathrm{A}_{13} + 0\mathrm{A}_{14} = a_{11}\mathrm{A}_{11}$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

El ejemplo 3.1.9 se puede generalizar para probar el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$ triangular superior o inferior. Entonces

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}} \qquad (3.1.9)$$

Esto es: *el determinante de una matriz triangular es igual al producto de sus componentes en la diagonal.*

Demostración

La parte triangular inferior del teorema se deduce del ejemplo 3.1.9. Se demostrará la parte gular superior de 2×2, entonces $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ y $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12} \cdot 0 = a_{11}a_{22}$, de manera que el teorema se cumple para $n = 2$. Se supondrá que se cumple para $k = n - 1$ y se demostrará para $k = n$. El determinante de una matriz triangular superior de $n \times n$ es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Cada uno de estos determinantes es el determinante de una matriz triangular superior de $(n - 1) \times (n - 1)$ que, de acuerdo con la hipótesis de inducción, es igual al producto de las componentes en la diagonal. Todas las matrices, excepto la primera, tienen una columna de ceros, por lo que por lo menos una de sus componentes diagonales es cero. De este modo, todos los determinantes, excepto el primero, son cero. Por último,

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} \cdots a_{nn})$$

lo que prueba que el teorema se cumple para matrices de $n \times n$.

EJEMPLO 3.1.10 Determinantes de seis matrices triangulares

Los determinantes de las seis matrices triangulares en el ejemplo 3.1.8 son $|A| = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$; $|B| = (-2)(0)(1)(-2) = 0$; $|C| = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$; $|D| = 0$; $|I| = 1$; $|E| = (2)(-7)(-4) = 56$.

El siguiente teorema será de gran utilidad.

Teorema 3.1.2

Sea T una matriz triangular superior. Entonces T es invertible si y sólo si $\det T \neq 0$.

Demostración

Sea

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Del teorema 3.1.1,

$$\det T = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Así, det $T \neq 0$ si y sólo si todos sus elementos en la diagonal son diferentes de cero.

Si det $T \neq 0$, entonces T se puede reducir por renglones a I de la siguiente manera. Para $i = 1, 2, \ldots, n$, se divide el renglón i de T por $a_{ii} \neq 0$ para obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ésta es la forma escalonada por renglones de T, que tiene n pivotes, y por el teorema de resumen (2.6.4), T es invertible.

Suponga que det $T = 0$. Entonces al menos una de las componentes de la diagonal es cero. Sea a_{ii} la primera de estas componentes. Entonces T se puede escribir como

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i} & a_{i-1,i-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{i,i+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Cuando T se reduce a su forma escalonada por renglones, no se tiene pivote en la columna i (explique por qué). Entonces la forma escalonada por renglones de T tiene menos de n pivotes, y por el teorema de resumen se puede concluir que T no es invertible.

Interpretación geométrica del determinante de 2 × 2

Sea $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. En la figura 3.1 se graficaron los puntos (a, c) y (b, d) en el plano xy y se dibujaron los segmentos de recta de $(0, 0)$ a cada uno de estos puntos. Se supone que estas dos rectas no son colineales. Esto equivale a suponer que (b, d) no es un múltiplo de (a, c).

El **área generada por A** se define como el área del paralelogramo con cuatro vértices en $(0, 0)$, (a, c), (b, d) y $(a + b, c + d)$.

Área generada por A

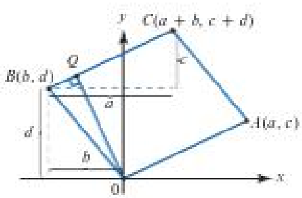


Figura 3.1

Teorema 3.1.3

El área generada por $A = |\det A|$.*

Demostración

Se supone que a y c son diferentes de cero. La prueba para $a = 0$ o $c = 0$ se dejará como ejercicio (vea el problema 21 de esta sección).

El área del paralelogramo = base × altura. La base del paralelogramo en la figura 3.1 tiene longitud $\overline{0A} = \sqrt{a^2 + c^2}$. La altura del paralelogramo es $\overline{0Q}$, de donde $0Q$ es el segmento perpendicular a BC. De la figura se ve que las coordenadas de C, el cuarto vértice del paralelogramo, son $x = a + b$ y $y = c + d$. Así,

$$\text{Pendiente de } BC = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(c+d)-d}{(a+b)-b} = \frac{c}{a}$$

Entonces la ecuación de la recta que pasa por B y C es

$$\frac{y-d}{x-b} = \frac{c}{a} \qquad \text{o} \qquad y = \frac{c}{a}x + d - \frac{bc}{a}$$

$$\text{Pendiente de } 0Q \overset{\text{Propiedad iv)}}{=} -\frac{1}{\text{pendiente de } BC} = -\frac{a}{c}$$

La ecuación de la recta que pasa por (0, 0) y Q es

$$\frac{(y-0)}{(x-0)} = -\frac{a}{c} \qquad \text{o} \qquad y = -\frac{a}{c}x$$

Q es la intersección de BC y $0Q$, por lo que satisface ambas ecuaciones. En el punto de intersección se tiene

$$\frac{c}{a}x + d - \frac{bc}{a} = -\frac{a}{c}x$$

$$\left(\frac{c}{a}x + \frac{a}{c}\right)x = \frac{bc}{a} - d$$

$$\frac{a^2+c^2}{ac}x = \frac{bc-ad}{a}$$

$$x = \frac{ac(bc-ad)}{a(a^2+c^2)} = \frac{c(bc-ad)}{a^2+c^2} = -\frac{c(ad-bc)}{a^2+c^2} = -\frac{c\det A}{a^2+c^2}$$

y

$$y = -\frac{a}{c}x = -\frac{a}{c}\cdot -\frac{-c\det A}{a^2+c^2} = \frac{a\det A}{a^2+c^2}$$

Entonces Q tiene coordenadas $\left(\frac{-c\det A}{a^2+c^2}, \frac{a\det A}{a^2+c^2}\right)$

y

$$\overline{0Q} = \text{distancia de } (0, 0) \text{ a } Q = \sqrt{\frac{-c^2(\det A)^2}{(a^2+c^2)^2} + \frac{a^2(\det A)^2}{(a^2+c^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(c^2+a^2)(\det A)^2}{(a^2+c^2)^2}} = \sqrt{\frac{(\det A)^2}{a^2+c^2}} = \frac{|\det A|}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

Finalmente,

$$\text{área del paralelogramo} = \overline{0A} \times \overline{0Q} = \sqrt{a^2+c^2} \times \frac{|\det A|}{\sqrt{a^2+c^2}} = |\det A|$$

Se podrá dar una demostración mucho más sencilla de este teorema cuando se analice el producto cruz de dos vectores en la sección 4.4.

RESUMEN 3.1

- El **determinante** de una matriz de 2×2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ está dado por

$$\text{Determinante de } A = \det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- **Determinante de 3 × 3**

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- El **menor *ij*** de la matriz A de $n \times n$, denotado por M_{ij}, es la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ obtenida al eliminar el renglón i y la columna j de A.

- El **cofactor *ij*** de A, denotado por A_{ij}, está dado por

$$\mathrm{A}_{ij} = (-i)^{i+j} \det M_{ij}$$

- ***Determinante de n × n***

  Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\det A = a_{11}\mathrm{A}_{11} = a_{12}\mathrm{A}_{12} + \cdots + a_{1n}\mathrm{A}_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\mathrm{A}_{1k}$$

  La suma anterior se denomina la **expansión de det *A* por cofactores en el primer renglón.**

- Si A es una matriz de $n \times n$, **triangular superior**, **triangular inferior** o **diagonal**, cuyas componentes en la diagonal son $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, entonces

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a$$

AUTOEVALUACIÓN 3.1

I) ¿Cuál de los siguientes es el cofactor de 3 en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

a) 8 *b)* −8 *c)* 3

d) 6 *e)* −10 *f)* 0

II) ¿Cuál de las siguientes es 0 para toda a y b?

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} a & -b \\ -a & b \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} a & a \\ b & -b \end{vmatrix}$

d) Los determinantes no se pueden establecer porque no se parecen los valores de a y b.

III) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $\det A =$ ____________.

a) 0 *b)* 12 *c)* −12 *d)* 6 *e)* −6

IV) ¿Cuáles de las siguientes matrices no son invertibles?

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Respuestas a la autoevaluación

I) *a)* **II)** *b)* **III)** *c)* **IV)** *b), c)*

PROBLEMAS 3.1

En los problemas 1 al 16 calcule el determinante.

1. $\begin{vmatrix} 7 & 9 & -5 \\ 9 & 3 & 1 \\ -8 & -8 & 10 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} -8 & 4 & -6 \\ 1 & -3 & -3 \\ -3 & -4 & -1 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 10 & 10 & -8 \\ -7 & 0 & -2 \\ 10 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ **7.** $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 3 & 2 & \frac{1}{3} \\ \frac{10}{3} & 3 & \frac{7}{3} \end{vmatrix}$ **10.** $\begin{vmatrix} -2 & -10 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ **11.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ **13.** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **14.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -2 & -7 \\ 9 & -9 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ **16.** $\begin{vmatrix} -8 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & -3 & 0 & -4 \\ -5 & 0 & 7 & 5 & 5 \\ -2 & 0 & -10 & 3 & -7 \end{vmatrix}$

17. Demuestre que si A y B son matrices diagonales de $n \times n$, entonces $\det AB = \det A \det B$.

***18.** Demuestre que si A y B son matrices triangulares inferiores, entonces $AB = \det A \det B$.

19. Demuestre que, en general, no se cumple que $\det (A + B) = \det A + \det B$. (Use un contraejemplo.)

20. Muestre que si A es triangular, entonces $\det A \neq 0$ si y sólo si todos los elementos en la diagonal de A son diferentes de cero.

21. Pruebe el teorema 3.1.3 cuando A tiene coordenadas $(0, c)$ o $(a, 0)$.

****22.** Más sobre la interpretación geométrica del determinante: sean $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ dos vectores y sean $\mathbf{v}_1 = A\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{v}_2 = A\mathbf{u}_2$. Demuestre que (área generada por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$) = (área generada por $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$) $|\det A|$.

En los problemas 23 a 25 discuta según el parámetro a cuando el determinante de las matrices indicadas es positivo, negativo y cero.

23. $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ **24.** $\begin{pmatrix} -5 & a & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$ **25.** $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & a \\ 4 & -a & 0 \end{pmatrix}$

EJERCICIOS CON MATLAB 3.1

Información de MATLAB

El comando `det(A)` encuentra el determinante de A `(doc det)`. Al igual que antes se puede utilizar MATLAB para generar matrices aleatorias de $n \times n$. Por ejemplo,

`A=2*rand(n)-1` (con elementos entre –1 y 1)

`A=2*rand(n)-1+i*(2*rand(n)-1)` (con elementos reales e imaginarios entre –1 y 1)

1. En este problema deberá investigar la relación entre $\det(A)$ y la invertibilidad de A.

a) Para cada matriz, determine si A es o no invertible (utilizando `rref`) y encontrando $\det(A)$. ¿De qué forma puede usar `det(A)` para determinar si A es o no invertible?

i) $\begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ -9 & 9 & 7 \\ 4 & -2 & -9 \end{pmatrix}$ **ii)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **iii)** $\begin{pmatrix} 23 & 19 & 11 \\ 5 & 1 & 5 \\ 9 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} 8 & -3 & 5 & -9 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 8 & -5 \\ -9 & 10 & 1 & -5 & -5 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ **v)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & 8 & -8 & -9 \\ 1 & 2 & -2 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$

b) Los incisos i) y ii) que se muestran a continuación prueban su conclusión del inciso *a*) con varias matrices aleatorias (elija por lo menos cuatro matrices en i) de distintos tamaños y al menos cuatro matrices en ii). Incluya cuando menos una matriz con elementos complejos para cada inciso.

i) Sea A una matriz aleatoria de $n \times n$. Encuentre $\det(A)$. Utilice los conocimientos anteriores para determinar si A es o no es invertible. ¿De qué forma apoya su conclusión esta evidencia?

ii) Sea B una matriz aleatoria de $n \times n$, pero para alguna j arbitraria, sea `B(:,j)` igual a una combinación lineal de algunas columnas de B (de su elección). Por ejemplo, `B(:,3)=B(:,1)+2*B(:,2)`. Determine si B es o no invertible y encuentre $\det(B)$. ¿De qué forma apoya su conclusión esta evidencia?

2. Para seis matrices aleatorias A con elementos reales (para valores diferentes de n), compare `det(A)` con `det(A')` donde `A'` denota (en MATLAB) la transpuesta de A. Incluya por lo menos dos matrices no invertibles (vea la descripción en el problema 1 *b*) ii) de MATLAB en esta sección). ¿Qué le indica su comparación? Repita el mismo procedimiento para matrices con elementos complejos.

3. Construya seis pares de matrices aleatorias, A y B, de $n \times n$ (use valores de n). Para cada par, sea $C = A + B$. Compare $\det(C)$ y $\det(A) + \det(B)$. Obtenga una conclusión sobre la afirmación

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$$

4. *a)* Haciendo uso de los pares de matrices (A y B) dados, formule una conclusión respecto a `det(A*B)` en términos de los determinantes de A y B.

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ **ii)** $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}$

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

iv) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 & 5 \\ 9 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

b) Pruebe también su conclusión generando matrices aleatorias de $n \times n$ (genere cuando menos seis pares con diferentes valores de n. Incluya un par en el que una de las matrices sea no invertible. Incluya matrices con elementos complejos).

5. *a*) Para las siguientes matrices, formule una conclusión respecto a `det(A)` y `det(inv(A))`.

i) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

b) Pruebe su conclusión con varias (cuando menos seis) matrices aleatorias invertibles de $n \times n$ para diferentes valores de n. Incluya matrices con elementos complejos.

c) (*Lápiz y papel*) Pruebe su conclusión utilizando la definición de la inversa (es decir, considere AA^{-1}) y la propiedad descubierta en el problema 4 de MATLAB de esta sección.

6. Sea `A=2*rand(6)-1`.

a) Elija i, j y c y sea B la matriz obtenida al realizar la operación con renglones $R_j \to cR_i + R_j$ sobre A. Compare det(A) y det(B). Repita para cuando menos otros cuatro valores de i, j y c. ¿A qué conclusión llega sobre la relación entre el determinante de A y el determinante de la matriz obtenida a partir de A realizando el tipo de operación con renglones dada?

b) Siga las instrucciones del inciso *a*) pero para la operación con renglones $R_i \to cR_i$.

c) Siga las instrucciones del inciso *a*) pero para la operación con renglones que intercambia R_i y R_j.

d) Para cada operación con renglones realizada en *a*), *b*) y *c*) encuentre la matriz elemental F tal que FA sea la matriz obtenida al realizar la operación sobre los renglones de A. Encuentre det(F). Explique los resultados obtenidos en los incisos *a*), *b*) y *c*) utilizando su observación sobre det(F) y su conclusión del problema 4 de MATLAB en esta sección.

7. Es sabido que si A es una matriz triangular superior, entonces det(A) es el producto de los elementos de la diagonal. Considere la siguiente matriz M, donde A, B y D son matrices aleatorias de $n \times n$ y 0 representa a la matriz que consiste sólo de ceros:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

¿Puede obtener una relación entre det(M) y los determinantes de A, B y D?

a) Introduzca matrices aleatorias de $n \times n$, A, B y D. Sea `C=zeros(n)`. A partir de la matriz bloque, $M = [A, B; C, D]$. Pruebe su conclusión (si todavía no ha formulado una conclusión, encuentre los determinantes de M, A, B y D y busque patrones). Repita para otros n, A, B y D.

b) Repita el proceso anterior para

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & D & E \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$$

8. *(Este problema usa el archivo con extensión m, ornt.m)* Una aplicación geométrica de los determinantes de 2×2 hace referencia a la orientación. Si se viaja por las aristas de un paralelogramo, se va en el sentido (orientación) de las manecillas del reloj o en sentido contrario. La multiplicación por una matriz de 2×2 puede afectar dicha orientación.

   Dados dos vectores **u** y **v**, suponga que se traza el paralelogramo formado al comenzar en (0, 0), recorrer hasta el final de **u**, después hasta el final de **u** + **v**, luego hasta el final de **v** y después de regreso a (0, 0); se lleva a cabo esto mismo para el paralelogramo formado por A**u** y A**v**, donde A es una matriz de 2×2 (el cual se recorre primero a lo largo de A**u**).

   ¿Cuándo se invertirá la orientación (en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario) del paralelogramo formado por A**u** y A**v** respecto a la orientación del paralelogramo formado por **u** y **v**?

   La siguiente función de MATLAB, de nombre *ornt. m*, se puede utilizar para investigar esta pregunta. Una vez que haya escrito la función en el archivo de nombre *ornt.m*, dé `doc ornt` para obtener una descripción de lo que hace este archivo.

```
function ornt(u,v,A)

% ORNT grafica paralelogramos formados por u,v y Au, Av con
%      la orientacion descrita en la pantalla.
%
%      u: vector de 2X1
%      v: vector de 2X1
%      A: Matriz 2X2

% paralelogramo del origen->u->u+v->v->origen
PP=[[0;0],u,u+v,v,[0;0]];
PP1=PP(:,1:4);
% datos originales
subplot(121)
pplot(PP,PP1)
axis square
title('Orientacion Inicial')
xlabel('De 1\rightarrow 2\rightarrow 3\rightarrow 4\rightarrow 1')

% datos despues de la multiplicacion por A
subplot(122)
pplot(A*PP,A*PP1)
axis square
title(['Despues de la mult por A=[',...
   num2str(A(1,:)),';',num2str(A(2,:)),']'])
xlabel('De 1\rightarrow 2\rightarrow 3\rightarrow 4\rightarrow 1')

% funcion auxiliar unicamente visible dentro de ornt
function pplot(PP,PP1)
plot(PP(1,:),PP(2,:),'b',PP1(1,:),PP1(2,:),'*');
text(PP1(1,:)',PP1(2,:)',num2str([1:4]'));
grid

%Fin de funcion ORNT
```

Para cada uno de los siguientes problemas, introduzca **u**, **v** y A (aquí **u** y **v** son vectores de 2×1 y A es una matriz de 2×2). Encuentre `det A`. Escriba en la ventana de comando `ornt(u, v, A)`. En una pantalla de gráficas aparecerán los paralelogramos formados por **u** y **v** y por A**u** y A**v** con la orientación descrita en la misma. ¿Se modificó la orientación? Después de resolver el siguiente problema, formule una conclusión respecto a la forma en la cual se puede utilizar `det(A)` para determinar si cambiará o no la orientación. Pruebe su conclusión con más ejemplos (cambie A y/o **u** y **v**).

Para cada A utilice `u=[1;0]` y `v=[0;1]`, y después `u=[-2;1]` y `v=[1;3]`.

Nota importante. Cuando termine con este problema, asegúrese de dar el comando `clf` (`doc clf`) para limpiar la ventana de gráficas antes de comenzar otro problema.

3.2 Propiedades de los determinantes

Existen algunos problemas en matemáticas que, en estricta teoría, son sencillos pero que en la práctica son imposibles. Piense por ejemplo en el caso de un determinante de una matriz de 50×50. Se puede calcular expandiendo por **cofactores**. Esto implica 50 determinantes de 49×49, que a su vez implican $50 \cdot 49$ determinantes de 48×48, que implican a su vez... $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \ldots \cdot 3$ determinantes de 2×2. Ahora bien, $50 \cdot 49 \ldots \cdot 3 = 50!/2 = 1.5 \times 10^{64}$ determinantes de 2×2. Suponga que se cuenta con una computadora que puede calcular un millón $= 10^6$ determinantes de 2×2 por segundo. Tomaría alrededor de 1.5×10^{58} segundos $= 4.8 \times 10^{50}$ años terminar el cálculo (el universo tiene alrededor de 15 000 millones de años $= 1.5 \times 10^{10}$ años según la versión teórica más reciente). Es obvio que, si bien el cálculo de un determinante de 50×50, siguiendo la definición de expansión por cofactores, es teóricamente directo, en la práctica es imposible.

Por otra parte, una matriz de 50×50 no es tan rara. Piense en 50 tiendas en las que se ofrecen 50 productos diferentes. De hecho, las matrices de $n \times n$ con $n > 100$ surgen con frecuencia en la práctica. Por fortuna, existen cuando menos dos maneras de reducir de forma significativa la cantidad de trabajo necesaria para calcular un determinante.

El primer resultado que se necesita es quizá el teorema más importante sobre determinantes. Este teorema establece que el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes.

Teorema 3.2.1

Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Entonces

$$\boxed{\det AB = \det A \det B} \tag{3.2.1}$$

Es decir, *el determinante del producto es el producto de los determinantes.*

Demostración

Si se utilizan matrices elementales, la prueba está dada en la sección 3.5. En el problema 49 de esta sección se pide que verifique este resultado para el caso 2×2.

Observación

Note que el producto de la izquierda es un producto de matrices mientras que el de la derecha es de escalares.

EJEMPLO 3.2.1 Ilustración de la propiedad det AB = det A det B

Verifique el teorema 3.2.1 para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN ► Det $A = 16$ y det $B = -8$. Se puede calcular

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -5 \\ 11 & -7 & 5 \\ 10 & 2 & -18 \end{pmatrix}$$

y det $AB = -128 = (16)(-8) =$ det A det B.

Advertencia

El determinante de la suma no siempre es igual a la suma de los determinantes. Es decir, para la mayoría de los pares de matrices, A y B,

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B$$

Por ejemplo, sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$:

$$\det A = -2 \quad \det B = 6 \quad \text{y} \quad \det(A + B) = 22 \neq \det A + \det B = -2 + 6 = 4$$

Utilizando la factorización LU de una matriz cuadrada A de $n \times n$ se tiene $A = LU$. Entonces, por el teorema 3.2.1,

$$\det A = \det LU = \det L \det U$$

Pero L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal, así

$$\det L = \text{producto de los elementos en la diagonal} = 1$$

De manera similar, como U es triangular superior,

$$\det U = \text{producto de los elementos en la diagonal}$$

Entonces se tiene el siguiente teorema:

Teorema 3.2.2

Si una matriz cuadrada A tiene la factorización LU, $A = LU$ donde L tiene unos en la diagonal, entonces

$$\det A = \det U = \text{producto de los elementos de la diagonal de } U$$

EJEMPLO 3.2.2 Uso de la factorización *LU* para calcular el determinante de una matriz de 4 × 4

Calcule det A, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN ► Del ejemplo 2.7.1, $A = LU$, donde $U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix}$ por lo que $\det A = \det U = (2)(4)(3)(-49) = -1\,176$.

Si A no se puede reducir a la forma triangular sin hacer permutaciones, por el teorema 2.7.3, existe una matriz permutación P tal que

$$PA = LU$$

Es sencillo probar que si P es una matriz permutación, entonces $\det P = \pm 1$ (vea el problema 53 de esta sección). Entonces

$$\begin{aligned} \det PA &= \det LU \\ \det P \det A &= \det L \det U = \det U \qquad \boxed{\det L = 1} \\ \pm \det A &= \det U \\ \det A &= \pm \det U \end{aligned}$$

Teorema 3.2.3

Si $PA = LU$, donde P es una matriz permutación y L y U son como antes, entonces

$$\det A = \frac{\det U}{\det P} = \pm \det U$$

EJEMPLO 3.2.3 Uso de la factorización $PA = LU$ para calcular el determinante de una matriz de 3×3

Encuentre $\det A$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN ► Del ejemplo 2.7.3, se encontró que $PA = LU$, donde

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, $\det P = 1$ y $\det U = (1)(2)(-3)$, de manera que $\det A = \frac{-6}{1} = -6$.

Se establecerá un importante teorema sobre determinantes.

Teorema 3.2.4 $\det A^{\top} = \det A$

Demostración

Suponga que $A = LU$. Entonces $A^{\top} = (LU)^{\top} = U^{\top}L^{\top}$ por el teorema 2.5.1 ii). Se calcula

$$\begin{aligned} \det A &= \det L \det U = \det U \\ \det A^{\top} &= \det U^{\top} \det L^{\top} = \det U^{\top} = \det U = \det A \qquad \boxed{\det L = 1} \end{aligned}$$

El último paso se basa en que la transpuesta de una matriz triangular superior es triangular inferior y viceversa, y en el hecho de que obtener la transpuesta no cambia las componentes de la diagonal de una matriz.

Si A no se puede escribir como LU, entonces existe una matriz permutación P tal que $PA = LU$. Por lo que se acaba de probar,

$$\det PA = \det (PA)^{\top} = \det (A^{\top}P^{\top})$$

y por el teorema 3.2.1,

$$\det P \det A = \det PA = \det (A^{\top}P^{\top}) = \det A^{\top} \det P^{\top}$$

No es complicado probar (vea el problema 54 de esta sección) que si P es una matriz permutación, entonces $\det P = \det P^{\top}$. Como $\det P = \det P^{\top} = \pm 1$, se concluye que $\det A = \det A^{\top}$.

Observación

Dado que los renglones de una matriz son las columnas de su transpuesta, se deduce que todo lo que se pueda decir sobre los renglones de los determinantes comprenden una segunda forma de simplificar los cálculos de los determinantes. Los resultados se prueban para los renglones. Por lo que se acaba de decir, los teoremas se cumplen también para las columnas.

EJEMPLO 3.2.4 Una matriz y su transpuesta tienen el mismo determinante

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces $A^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y es fácil verificar que $|A| = |A^{\top}| = 16$.

En primera instancia se describen estas propiedades estableciendo un teorema del que se deducen diversos resultados importantes. La demostración de este teorema es difícil y se pospone a la siguiente sección.

Teorema 3.2.5 Teorema básico

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\boxed{\det A = a_{i1}\mathrm{A}_{i1} + a_{i2}\mathrm{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\mathrm{A}_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\mathrm{A}_{ik}} \qquad (3.2.2)$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Es decir, **se puede calcular det A expandiendo por cofactores en cualquier renglón de A**. Más aún,

$$\boxed{\det A = a_{1j}\mathrm{A}_{1j} + a_{2j}\mathrm{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\mathrm{A}_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\mathrm{A}_{kj}} \qquad (3.2.3)$$

como la columna j de A es $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, la ecuación (3.2.3) indica que **se puede calcular det A**

EJEMPLO 3.2.5 **Obtención del determinante expandiendo en el segundo renglón o la tercera columna**

En el ejemplo 3.1.1 se vio que para $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $\det A = -405$. Expandiendo en el segundo renglón se obtiene

$$\begin{aligned} \det A &= (3)A_{21} + (-5)A_{22} + (1)A_{23} \\ &= (3)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + (-5)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} \\ &= (3)(-75) + (-5)(20) + (1)(80) = -405 \end{aligned}$$

Del mismo modo, si se expande en la tercera columna se obtiene

$$\begin{aligned} \det A &= (-2)A_{13} + (1)A_{23} + (9)A_{33} \\ &= (-2)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} + (9)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \\ &= (-2)(-22) + (1)(-80) + (9)(-41) = -405 \end{aligned}$$

El lector debe verificar que se obtiene el mismo resultado con la expansión por cofactores en el tercer renglón o la primera o segunda columna.

Ahora se presentan y se demuestran algunas propiedades adicionales de los determinantes. En cada paso se supone que A es una matriz de $n \times n$. Se observará que estas propiedades se pueden utilizar para reducir mucho el trabajo necesario para evaluar un determinante.

Propiedad 3.2.1

Si cualquier renglón o columna de A es un vector cero, entonces $\det A = 0$.

Demostración

Suponga que el renglón i de A contiene sólo ceros. Esto es $a_{ij} = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Entonces, $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$. La misma prueba funciona si la columna j es el vector cero.

EJEMPLO 3.2.6 **Si A tiene un renglón o columna de ceros, entonces $\det A = 0$**

Es fácil verificar que $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Propiedad 3.2.2

Si el renglón i o columna j de A se multiplica por un escalar c, entonces $\det A$ se multiplica por c. Es decir, si se denota por B esta nueva matriz, entonces

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c|A| \qquad (3.2.4)$$

Demostración

Para probar (3.2.4) se expande el renglón i de A para obtener

$$\det B = ca_{i1}A_{i1} + ca_{i2}A_{i2} + \cdots + ca_{in}A_{in} = c(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) = c \det A$$

En el caso de las columnas se puede hacer una prueba similar.

EJEMPLO 3.2.7 Ilustración de la propiedad 3.2.2

Observación

Al utilizar la propiedad 3.2.2 se puede probar (vea el problema 3.2.37) que para cualquier escalar α y cualquier matriz A de $n \times n$, $\det \alpha A = \alpha^n \det A$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces $\det A = 16$. Si se multiplica el segundo renglón por 4 se tiene $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 12 & 4 & 16 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ y $\det B = 64 = 4 \det A$. Si se multiplica la tercera columna por -3 se obtiene $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & -12 \\ 0 & -2 & -15 \end{pmatrix}$ y $\det C = -48 = -3 \det A$.

Propiedad 3.2.3

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{y } C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & + & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & + & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & + & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\boxed{\det C = \det A + \det B} \qquad (3.2.5)$$

En otros términos, suponga que A, B y C son idénticas excepto por la columna j y que la columna j de C es la suma de las j-ésimas columnas de A y B. Entonces, $\det C = \det A + \det B$. La misma afirmación es cierta para renglones.

Demostración

Se expande $\det C$ respecto a la columna j para obtener

$$\begin{aligned}\det C &= (a_{1j} + \alpha_{1j})\,\mathrm{A}_{1j} + (a_{2j} + \alpha_{2j})\,\mathrm{A}_{2j} + \cdots + (a_{nj} + \alpha_{nj})\,\mathrm{A}_{nj}\\ &= (a_{1j}\mathrm{A}_{1j} + a_{2j}\mathrm{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\mathrm{A}_{nj})\\ &\quad + (\alpha_{1j}\mathrm{A}_{1j} + \alpha_{2j}\mathrm{A}_{2j} + \cdots + \alpha_{nj}\mathrm{A}_{nj}) = \det A + \det B\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.2.8 Ilustración de la propiedad 3.2.3

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1-6 & 2 \\ 3 & 1+2 & 4 \\ 0 & -2+4 & 5 \end{pmatrix}$.

Entonces $\det A = 16$, $\det B = 108$ y $\det C = 124 = \det A + \det B$.

Propiedad 3.2.4

El intercambio de cualesquiera dos renglones (o columnas) distintos de A tiene el efecto de multiplicar $\det A$ por -1.

Demostración

Se prueba la afirmación para los renglones y se supone primero que se intercambian dos renglones adyacentes. Es decir, se supone que se intercambian los renglones i y el $(i + 1)$. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Después, expandiendo $\det A$ respecto al renglón i y B respecto al renglón $(i + 1)$ se obtiene

$$\begin{aligned}\det A &= a_{i1}\mathrm{A}_{i1} + a_{i2}\mathrm{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\mathrm{A}_{in}\\ \det B &= a_{i1}\mathrm{B}_{i+1,1} + a_{i2}\mathrm{B}_{i+1,2} + \cdots + a_{in}\mathrm{B}_{i+1,n}\end{aligned} \qquad (3.2.6)$$

Aquí, $\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$, donde M_{ij} es menor ij de A. Observe que el menor $(i + 1)\,j$ de B coincide con M_{ij}. Entonces

$$\mathrm{B}_{i+1,j} = (-1)^{i+1+j} \det M_{ij} = -(-1)^{i+j} \det M_{ij} = -\mathrm{A}_{ij}$$

De manera que, de la ecuación (3.2.6), $\det B = -\det A$.

Ahora, suponga que $i < j$ y que deben intercambiarse los renglones i y j. Esto se puede llevar a cabo intercambiando renglones varias veces. Se harán $j - i$ intercambiados para mover el renglón j al renglón i. Entonces el renglón i estará en el renglón $(i + 1)$ y pasará por otros $j - i - 1$ intercambios para mover el renglón i al renglón j. Para ilustrar esto, se intercambian los renglones 2 y 6:*

$$\underbrace{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\6\\5\\7\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\2\\3\\6\\4\\5\\7\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\2\\6\\3\\4\\5\\7\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\6\\2\\3\\4\\5\\7\end{matrix}}_{\substack{6-2=4 \text{ intercambia para}\\ \text{mover el 6 a la posición 2}}} \to \underbrace{\begin{matrix}1\\6\\3\\2\\4\\5\\7\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\6\\3\\4\\2\\5\\7\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\6\\3\\4\\5\\2\\7\end{matrix}}_{\substack{6-2-1=3 \text{ intercambia para}\\ \text{mover el 2 a la posición 6}}}$$

Por último, el número total de intercambios de renglones adyacentes es $(j - i) + (j - i - 1) = 2j - 2i - 1$, que es impar. Entonces, det A se multiplica por -1 un número impar de veces, que es lo que se quería demostrar.

EJEMPLO 3.2.9 Ilustración de la propiedad 3.2.4

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Al intercambiar los renglones 1 y 3 se obtiene $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Al intercambiar las columnas 1 y 2 de A se obtiene $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Por lo que, haciendo los cálculos directos, se encuentra que det $A = 16$ y det $B =$ det $C = -16$.

Propiedad 3.2.5

Si A tiene dos renglones o columnas iguales, entonces det $A = 0$.

Demostración

Suponga que los renglones i y j de A son iguales. Al intercambiar dichos renglones se obtiene una matriz B que tiene la propiedad de que det $B = -$det A (de la propiedad 3.2.4). Pero como renglón $i =$ renglón j, al intercambiarlos se obtiene la misma matriz. Así, $A = B$ y det $A =$ det $B = -$det A. Por tanto, 2 det $A = 0$, lo que puede ocurrir sólo si det $A = 0$.

EJEMPLO 3.2.10 **Ilustración de la propiedad 3.2.5**

Mediante el cálculo directo se puede verificar que para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ [dos renglones iguales] y $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ [dos columnas iguales], $\det A = \det B = 0$.

Propiedad 3.2.6

Si un renglón (columna) de A es un múltiplo escalar de otro renglón (columna), entonces $\det A = 0$.

Demostración

Sea $(a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}) = c(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$. Entonces por la propiedad 3.2.2,

$$\det A = c \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \text{renglón } j \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(de la propiedad 3.2.5)}$$

EJEMPLO 3.2.11 **Ilustración de la propiedad 3.2.6**

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ -4 & 6 & -10 \end{vmatrix} = 0$ ya que el tercer renglón es igual a -2 veces el primero.

EJEMPLO 3.2.12 **Otra ilustración de la propiedad 3.2.6**

$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 12 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 9 & -3 \\ 7 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$ porque la cuarta columna es igual a tres veces la segunda.

Propiedad 3.2.7

Si se suma un múltiplo escalar de un renglón (columna) de A a otro renglón (columna) de A,

Demostración

Sea B la matriz obtenida sumando c veces el renglón i de A al renglón j de A. Entonces

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ca_{i1} & a_{j2}+ca_{i2} & \cdots & a_{jn}+ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(por la propiedad 3.2.3)

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \det A + 0 = \det A \text{ (el cero viene de la propiedad 3.2.6)}$$

EJEMPLO 3.2.13 Ilustración de la propiedad 3.2.7

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces $\det A = 16$. Si se multiplica el tercer renglón por 4 y se suma al segundo renglón, se obtiene una nueva matriz B dada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3+4(0) & 1+4(-2) & 4+5(4) \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 24 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

y $\det B = 16 = \det A$.

Las propiedades que se acaban de presentar simplifican la evaluación de determinantes de alto orden. Se "reduce por renglones" el determinante, usando la propiedad 3.2.7, hasta que tenga una forma en la que se pueda evaluar con facilidad. La meta más común será utilizando la propiedad 3.2.7 de manera repetida hasta que 1) el nuevo determinante tenga un renglón (columna) de ceros o un renglón (columna) que sea múltiplo de otro –en cuyo caso el determinante es cero–, o 2) que la nueva matriz sea triangular, con lo que su determinante será el producto de sus elementos en la dia-

EJEMPLO 3.2.14 **Utilice las propiedades de los determinantes para calcular un determinante de 4 × 4**

Calcule $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

SOLUCIÓN ► (Vea el ejemplo 3.1.7.)

Ya existe un cero en la primera columna, por lo que lo más sencillo es reducir otros elementos de la primera columna a cero. Se puede continuar la reducción buscando una matriz triangular.

Se multiplica el primer renglón por -2 y se suma al tercer renglón; se multiplica el primer renglón por -3 y se suma al cuarto.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{vmatrix}$$

Se multiplica el segundo renglón por -5 y -7 y se suma el tercer y cuarto renglones, respectivamente.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix}$$

Se factoriza -16 del tercer renglón (utilizando la propiedad 3.2.2).

$$= -16 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix}$$

Se multiplica el tercer renglón por 32 y se suma al cuarto.

$$= -16 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

Ahora se tiene una matriz triangular superior y $|A| = -16(1)(-1)(1)(10) = (-16)(-10) = 160$.

EJEMPLO 3.2.15 Uso de las propiedades para calcular un determinante de 4 × 4

Calcule $|A|$, si $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN ► Existen varias formas de proceder en este caso y no es evidente cuál de ellas será la más rápida para llegar a la respuesta. Sin embargo, como ya existe un cero en el primer renglón, se comienza la reducción en ese renglón.

Se multiplica la segunda columna por 2 y por –4 y se suma a la primera y cuarta columnas, respectivamente

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \\ 12 & 7 & 3 & -27 \\ -11 & -7 & 2 & 33 \end{vmatrix}$$

Se intercambian las primeras dos columnas.

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \\ 7 & 12 & 3 & -27 \\ -7 & -11 & 2 & 33 \end{vmatrix}$$

Se multiplica la segunda columna por –5 y por –6 y se suma a la tercera y cuarta columnas, respectivamente.

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & -57 & -99 \\ -7 & -11 & 57 & 99 \end{vmatrix}$$

Como la cuarta columna es ahora un múltiplo de la tercera (columna $4 = \frac{99}{57} \times$ columna 3) se ve que $|A| = 0$.

EJEMPLO 3.2.16 Uso de las propiedades para calcular un determinante de 5 × 5

Calcule $|A|$, si $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN ► Sumando primero el renglón 2 y después el renglón 4 al renglón 5, se obtiene

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(por la propiedad 3.2.1)}$$

Este ejemplo ilustra el hecho de que un poco de observación antes de comenzar los cálculos puede simplificar las cosas considerablemente.

Existe una propiedad adicional sobre determinantes que resultará de gran utilidad.

Teorema 3.2.6

Demostración

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\boxed{a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \qquad \text{si } i \neq j} \qquad \textbf{(3.2.7)}$$

Nota. Del teorema 3.2.5, la suma en la ecuación (3.2.7) es igual a det A si $i = j$.

Demostración

Sea

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \text{renglón } j \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces, como dos renglones de B son iguales, det $B = 0$. Pero $B = A$ excepto por el renglón j. De esta forma se calcula det B expandiendo en el renglón j de B, se obtiene la suma en (3.2.7) y el teorema queda demostrado. Observe que al hacer la expansión respecto al renglón j, este renglón se elimina al calcular los cofactores de B. Así, $B_{jk} = A_{jk}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.

RESUMEN 3.2

- Si $A = LU$ es una factorización LU de A, entonces det A = det U
- Si $PA = LU$ es una factorización LU de PA, entonces det A = det U/det P = ±det U

- *Teorema básico*

  Si A es una matriz de $n \times n$, entonces

$$\det A = a_{i1}\,\mathrm{A}_{i1} + a_{i2}\,\mathrm{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\,\mathrm{A}_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{ik}$$

  y

$$\det A = a_{1j}\,\mathrm{A}_{1j} + a_{2j}\,\mathrm{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\,\mathrm{A}_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\,b_{kj}$$

  para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, n$. Es decir, el determinante de A se puede obtener expandiendo en cualquier renglón o columna de A.

- Si cualquier renglón o columna de A es el vector cero, entonces $\det A = 0$.
- Si cualquier renglón (columna) de A se multiplica por un escalar, entonces $\det A$ se multiplica por c.
- Si A y B son dos matrices de $n \times n$ que son iguales excepto por la columna j (renglón i) y C es la matriz que es idéntica a A y B excepto que la columna j (renglón i) de C es la suma de la columna j de A y la columna j de B (renglón i de A y renglón i de B), entonces $\det C = \det A + \det B$.
- El intercambio de cualesquiera dos columnas o renglones distintos de A tiene el efecto de multiplicar $\det A$ por -1.
- Si cualquier renglón (columna) de A se multiplica por un escalar y se suma a cualquier otro renglón (columna) de A, entonces $\det A$ no cambia.
- Si un renglón (columna) de A es un múltiplo de otro renglón (columna) de A, entonces $\det A = 0$.
- $\det A = \det A^{\mathrm{T}}$.

AUTOEVALUACIÓN 3.2

I) ¿Cuáles de los siguientes determinantes son 0?

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

II) ¿Cuáles de los siguientes determinantes son 0?

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ *d*) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

III) El determinante de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ es ________.

a) 4 *b*) 10 *c*) −10 *d*) 8 *e*) 6

Respuestas a la autoevaluación

I) *b*) **II)** *c*) **III)** *a*)

PROBLEMAS 3.2

De los problemas 1 al 27 evalúe el determinante usando los métodos de esta sección.

1. $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ **9.** $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ **11.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ **12.** $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 9 & 5 & -7 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 8 \end{vmatrix}$ **14.** $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ **15.** $\begin{vmatrix} -10 & 7 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & -1 & -7 \\ -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **17.** $\begin{vmatrix} -3 & -3 & 1 & 4 \\ -3 & -3 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **18.** $\begin{vmatrix} 0 & -8 & -5 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -6 \\ 10 & 0 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ **20.** $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}$ **21.** $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 4 \\ -28 & 0 & -13 & 6 \\ -10 & -4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ **23.** $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ **24.** $\begin{vmatrix} 2 & -5 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 6 & -15 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$ **26.** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -6 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ **27.** $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

De los problemas 28 al 36 calcule el determinante suponiendo que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 6$$

28. $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$ **29.** $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ **30.** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ **32.** $\begin{vmatrix} 4a_{11} & 4a_{12} & 4a_{13} \\ 4a_{21} & 4a_{22} & 4a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$ **33.** $\begin{vmatrix} 4a_{11} & -2a & 3a_{12} \\ 4a_{21} & -2a_{23} & 3a_{22} \\ 4a_{31} & -2a_{33} & 3a_{32} \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & 2a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & 2a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$ **35.** $\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & -a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

36. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - 3a_{11} & a_{22} - 3a_{12} & a_{23} - 3a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

37. Usando la propiedad 3.2.2, demuestre que si α es un escalar y A es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, entonces $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

***38.** Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

***39.** Demuestre que

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} = l^n + a_{n-1}l^{n-1} + a_{n-2}l^{n-2} + \cdots + a_1 l + a_0$$

40. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que si la suma de todos los elementos de cada columna de A es cero, entonces $|A| = 0$.

***41.** Una matriz A es **antisimétrica** si $A^\top = -A$. Si A es una matriz antisimétrica de $n \times n$, demuestre que $\det A^\top = (-1)^n \det A$.

Matriz antisimétrica

42. Usando el resultado del problema 41, demuestre que si A es una matriz antisimétrica de $n \times n$ y n es impar, entonces $\det A = 0$.

43. Una matriz A se llama **ortogonal** si A es invertible y $A^{-1} = A^\top$, es decir, $A^\top A = A A^\top = I$. Demuestre que si A es ortogonal, entonces $\det A = \pm 1$.

Matriz ortogonal

****44.** Sea Δ el triángulo del plano con vértices en (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3). Demuestre que el área del triángulo está dada por

$$\text{Área de } \Delta = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

¿Bajo qué circunstancias este determinante será igual a cero?

****45.** Tres rectas que no son paralelas por pares determinan un triángulo en el plano. Suponga que las rectas están dadas por

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Demuestre que el área determinada por las rectas es

$$\frac{\pm 1}{2A_{13}A_{23}A_{33}}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{vmatrix}$$

Determinante de Vandermonde

46. El **determinante de Vandermonde*** de 3 × 3 está dado por

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

Demuestre que $D_3 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$.

47. $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$ es el determinante de Vandermonde de 4 × 4. Demuestre que

$D_4 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)$.

**48. a) Defina el determinante de Vandermonde de $n \times n$, D_n.

b) Demuestre que $D_n = \prod_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{n-1} (a_j - a_i)$, donde $\prod$ representa la palabra "producto". Observe que el producto en el problema 47 se puede escribir $D_4 = \prod_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{3} (a_j - a_i)$.

49. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

a) Escriba el producto AB.
b) Calcule det A, det B y det AB.
c) Demuestre que det AB = (det A)(det B).

Matriz nilpotente

50. La matriz A de $n \times n$ se llama **nilpotente** si $A^k = 0$, la matriz cero, para algún entero $k \geq 1$. Demuestre que las siguientes matrices son nilpotentes al encontrar la k más pequeña tal que $A^k = 0$.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

51. Demuestre que si A es nilpotente, entonces det $A = 0$.

Matriz idempotente

52. La matriz A se llama **idempotente** si $A^2 = A$. ¿Cuáles son los valores posibles para det A si A es idempotente?

53. Sea P una matriz permutación. Demuestre que det $P = \pm 1$. [*Sugerencia:* Por la definición en la página 146, $P = P_n P_{n+1} \ldots P_2 P_1$, donde cada P_i es una matriz permutación elemental. Utilice la propiedad (3.2.4) para demostrar que det $P_i = -1$ y después calcule det P usando el teorema 3.2.1.]

54. Sea P una matriz permutación. Demuestre que P^{T} también es una matriz permutación y que det P = det P^{T}. [*Sugerencia:* Si P_i es una matriz permutación elemental, demuestre que $P^{\mathrm{T}}_i = P_i$.]

Ejercicios con MATLAB 3.2

1. *a*) Sea `A=round(10*(2*rand(n)-1))` para $n = 2$. Encuentre `det(A)`. Ahora encuentre `det(2*A)`. Repita para $n = 3$ y $n = 4$.

   b) (*Papel y lápiz*) Concluya una fórmula para det(2A) en términos de n y det(A). Concluya una fórmula para det(kA) para k general.

   c) Use MATLAB para probar su fórmula para det (3A).

   d) (*Papel y lápiz*) Pruebe la fórmula utilizando las propiedades aprendidas en esta sección.

2. Para las siguientes matrices, primero encuentre det (A). Después reduzca A a la forma triangular superior U, utilizando operaciones con renglones de la forma $R_j \to R_j + cR_i$, o intercambiando R_i y R_j. Encuentre det (U) y verifique que det (A) = $(-1)^k$ det (U), donde k es el número de intercambios de renglones realizado en el proceso de reducción.

   a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ *b*) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   c) Para esta matriz, antes de cada operación con renglones, intercambie los renglones de manera que el elemento en la posición pivote sea el de mayor valor absoluto de los elementos posibles a usar como ese pivote:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   d) Elija una matriz aleatoria A de $n \times n$ y redúzcala a la forma triangular superior encontrando la descomposición LU de A mediante el comando `[L,U,P]=lu(A)`. Use P para determinar el número de intercambios de renglones realizados y verifique que det (A) = $(-1)^k$ det (U), donde k es el número de intercambios de renglones. Describa el papel de det(P). Repita para otras dos matrices A.

3.3 Determinantes e inversas

En esta sección se analiza la forma en que se pueden calcular las inversas de las matrices haciendo uso de los determinantes. Más aún, se completa la tarea iniciada en el capítulo 2, de probar el importante teorema de resumen (vea los teoremas 2.4.7 y 2.6.4), que muestra la equivalencia de varias propiedades de las matrices. Se comienza con un resultado sencillo.

Teorema 3.3.1

Si A es invertible, entonces det $A \neq 0$ y

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}} \qquad (3.3.1)$$

Demostración

Suponga que A es invertible. Por el teorema del resumen (punto de vista 4) de la sección 2.7, si A es invertible es equivalente a decir que existe una descomposición LUP de A tal que $\det A = \pm\det U$ (teorema 3.2.3) con U es triangular superior e invertible, lo que implica que U tiene n pivotes, por lo que $\det U \neq 0$; por tanto, $\det A \neq 0$. Del teorema 3.2.1,

$$1 = \det I = \det AA^{-1} = \det A \det A^{-1} \tag{3.3.2}$$

lo que implica que

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Antes de utilizar determinantes para calcular las inversas es necesario definir la *adjunta* de una matriz $A = (a_{ij})$. Sea $B = (\mathrm{A}_{ij})$ la matriz de cofactores de A (recuerde que un cofactor, definido en la página 173, es un número). Entonces

$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \cdots & \mathrm{A}_{1n} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \cdots & \mathrm{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{A}_{n1} & \mathrm{A}_{n2} & \cdots & \mathrm{A}_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.3.3}$$

Definición 3.3.1

La adjunta

Sea A una matriz de $n \times n$ y sea B, dada por (3.3.3), la matriz de sus cofactores. Entonces, la **adjunta** de A, escrito adj A, es la transpuesta de la matriz B de $n \times n$; es decir,

$$\boxed{\operatorname{adj} A = B^{\top} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \cdots & \mathrm{A}_{n1} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} & \cdots & \mathrm{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{A}_{1n} & \mathrm{A}_{2n} & \cdots & \mathrm{A}_{nn} \end{pmatrix}} \tag{3.3.4}$$

Observación

En algunos libros se usa el término adjugada de A en lugar de adjunta, ya que adjunta tiene un segundo significado en matemáticas. En este libro se usará la palabra adjunta.

EJEMPLO 3.3.1 **Cálculo de la adjunta de una matriz de 3 × 3**

$\Big(\, 2 \quad 4 \quad 3 \,\Big)$

SOLUCIÓN ► Se tiene $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 12$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -3$, $A_{13} = -3$, $A_{21} = -13$,

$A_{22} = 5$, $A_{23} = 2$, $A_{31} = -7$, $A_{32} = 2$ y $A_{33} = 2$. Así, $B = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
y $\text{adj } A = B^{\top} = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 3.3.2 Cálculo de la adjunta de una matriz de 4 × 4

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule adj A.

SOLUCIÓN ► Esto es más laborioso ya que se tienen que calcular dieciséis determinantes de 3 × 3. Por ejemplo, se tiene

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -2 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 10 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{y} \quad A_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & -12 & -6 \\ -2 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 3.$$

Al comparar estos cálculos se encuentra que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$\text{adj } A = B^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 3.3.3 La adjunta de una matriz de 2 × 2

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Entonces $\text{adj } A = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

Advertencia

Al calcular la adjunta de una matriz, no olvide transponer la matriz de cofactores.

Teorema 3.3.2

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

$$(A)(\text{adj } A) = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = (\det A)I \tag{3.3.5}$$

Demostración

Sea $C = (c_{ij}) = (A)(\text{adj } A)$. Entonces

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \cdots & \mathrm{A}_{1n} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \cdots & \mathrm{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{A}_{n1} & \mathrm{A}_{n2} & \cdots & \mathrm{A}_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.3.6}$$

Se tiene

$$c_{ij} = (\text{renglón } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de adj } A)$$

$$(a_{i1} a_{i2} \text{ L } a_{in}) \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{j1} \\ \mathrm{A}_{j2} \\ \text{M} \\ \mathrm{A}_{jn} \end{pmatrix}$$

Así

$$c_{ij} = a_{i1}\mathrm{A}_{j1} + a_{i2}\mathrm{A}_{j2} + \text{L} + a_{1n}\mathrm{A}_{jn} \tag{3.3.7}$$

Ahora, si $i = j$, la suma en (3.3.7) es igual a $a_{i1}\mathrm{A}_{i1} + a_{i2}\mathrm{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\mathrm{A}_{in}$ que es la expansión de $\det A$ sobre el renglón i de A. Por otro lado, si $i \neq j$, entonces del teorema 3.2.6, la suma en (3.3.7) es igual a cero. Por tanto,

$$c_{ij} = \begin{cases} \det A & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Esto prueba el teorema.

Ahora se puede establecer el resultado principal.

Teorema 3.3.3

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$. Si $\det A \neq 0$, entonces

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj } A} \tag{3.3.8}$$

Demostración

La primera parte de este teorema es el teorema 3.5.2. Si $\det A \neq 0$, entonces se demuestra que $\left(\frac{1}{\det A}\right)(\text{adj } A)$ es la inversa de A multiplicándola por A y obteniendo la matriz identidad:

$$(A)\left(\frac{1}{\det A}\text{adj } A\right) = \frac{1}{\det A}\underset{\text{teorema 3.3.2}}{[A(\text{adj } A)]} = \frac{1}{\det A}(\det A)I = I$$

Pero por el teorema 2.4.8, si $AB = I$, entonces $B = A^{-1}$. Así,

$$\left(\frac{1}{\det A}\right)\text{adj } A = A^{-1}$$

Nota

Observe que el teorema 2.4.5, para matrices de 2×2 es un caso especial de este teorema.

EJEMPLO 3.3.4 Uso del determinante y la adjunta para calcular la inversa

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Determine si A es invertible y, de ser así, calcule A^{-1}.

SOLUCIÓN ► Como $\det A = 3 \neq 0$ se ve que A es invertible. Del ejemplo 3.3.1,

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Así

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Verificación

$$A^{-1}A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I$$

EJEMPLO 3.3.5 Cálculo de la inversa de una matriz de 4 × 4 usando el determinante y la adjunta

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN ► Haciendo uso de las propiedades de los determinantes, se calcula det $A = -1 \neq 0$ y por tanto A^{-1} existe. Por el ejemplo 3.3.2 se tiene

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Así
$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Nota 1. Como ya se habrá observado, si $n > 3$, por lo general es más fácil calcular A^{-1} con la reducción por renglones que utilizando adj A; aun para el caso de 4×4 es necesario calcular 17 determinantes de 3×3 (16 para la adjunta de A más det A). Sin embargo, el teorema 3.3.3 es de suma importancia ya que, antes de hacer la reducción por renglones, el cálculo de det A (si se puede hacer fácilmente) dice si A^{-1} existe o no existe.

Nota 2. En muchas aplicaciones de la teoría de matrices, las matrices están dadas en forma simbólica (es decir, en términos de variables) en lugar de numérica. Por ejemplo, se puede tener $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ en lugar de $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Así, la mejor forma de proceder será considerando muchas veces el cálculo de los determinantes. Esto es particularmente cierto en algunas aplicaciones de ingeniería, como la teoría de control.

En la sección 2.6 se presentó el teorema de resumen (teoremas 1.1.1, 2.4.7, 2.6.4 y 2.7.4). Éste es el teorema que une muchos conceptos desarrollados en los primeros capítulos de este libro.

Teorema 3.3.4 Teorema de resumen (punto de vista 5)

Sea A una matriz de $n \times n$. Las siguientes siete afirmaciones son equivalentes. Es decir, cada una implica a las otras seis (de manera que si una es cierta, todas lo son).

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector de dimensión n $\mathbf{b}$.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.

v) A es el producto de matrices elementales.

vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii) det $A \neq 0$.

En el teorema 2.4.7 se demostró la equivalencia de los incisos i), ii), iii), iv) y vi). En el teorema 2.6.3 se demostró la equivalencia de los incisos i) y v). El teorema 3.3.1 (o teorema 3.5.2)

RESUMEN 3.3

- La matriz A de $n \times n$ es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$.
- $\det AB = \det A \det B$.
- Si A es invertible, entonces $\det A \neq 0$ y

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

- Sea A una matriz de $n \times n$. La **adjunta** o **adjugada** de A, denotada por adj A, es la matriz de $n \times n$ cuya componente ij es A_{ji}, el cofactor ji de A.
- Si $\det A \neq 0$, entonces A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

- ***Teorema de resumen***

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes siete afirmaciones son equivalentes:

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector de dimensión n $\mathbf{b}$.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.

v) A es el producto de matrices elementales.

vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii) $\det A \neq 0$.

AUTOEVALUACIÓN 3.3

I) El determinante de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ es -149. La componente 2, 3 de A^{-1} está dada por

a) $-\dfrac{1}{49}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

b) $\dfrac{1}{49}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

c) $-\dfrac{1}{49}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

d) $\dfrac{1}{49}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

II) El determinante de $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ -1 & 5 & 8 \\ 6 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ es 468. La componente 3, 1 de A^{-1} es

a) $\frac{26}{468}$ *b)* $\frac{26}{468}$ *c)* $\frac{46}{468}$ *d)* $\frac{46}{468}$

Respuestas a la autoevaluación

I) *d)* **II)** *a)*

PROBLEMAS 3.3

De los problemas 1 al 16 utilice los métodos de esta sección para determinar si la matriz dada es invertible. De ser así, calcule la inversa.

1. $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 7 & -21 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 10 & 10 & 6 \\ 10 & 10 & -8 \\ -7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 6 & -10 & 4 \\ 10 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **13.** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -10 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & -4 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

17. Utilice determinantes para demostrar que una matriz A de $n \times n$ es invertible si y sólo si $A^{\top}$ es invertible.

18. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ verifique que $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

19. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ verifique que $\det A^{-1} = \frac{1}{\;}$.

20. ¿Para cuáles valores de α la matriz $\begin{pmatrix} \alpha+1 & -3 \\ 5 & 1-\alpha \end{pmatrix}$ es no invertible?

21. ¿Para qué valores de α la matriz $\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{pmatrix}$ no tiene inversa?

22. Suponga que la matriz A de $n \times n$ es no invertible. Demuestre que $(A)(\text{adj } A)$ es la matriz cero.

23. Sea θ un número real. Demuestre que $\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.

24. Sea θ un número real. Demuestre que $\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.

25. Sea t un número real. Demuestre que $\begin{pmatrix} -\frac{15}{e^{4t}} & 0 \\ \frac{25}{e^{4t}} - \frac{25}{e^{3t}} & -\frac{15}{e^{4t}} \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.

Ejercicios con MATLAB 3.3

1. Genere una matriz aleatoria de $n \times m$ con `A=2*rand(n,m)-1` para algunos valores de n y m tales que $m > n$. Encuentre el determinante de $A^{\top}A$. ¿Cuál es su conclusión acerca de $A^{\top}A$? Pruebe su conclusión para otras tres matrices A. ¿Es válida su conclusión si $m < n$?

2. La siguiente secuencia de instrucciones de MATLAB calcula la matriz adjunta de una matriz aleatoria A de orden n

```
% Orden de la matriz de interes
n=4;
% Define matriz de interes
A = rand(n);
% Inicializa matriz que al final sera la matriz adjunta de A
C = zeros(size(A));
% Ciclo para obtener la matriz de cofactores
for i=1:n
   vec_renglon=1:n;
   vec_renglon(i)=[]; % excluir el renglon i
   for j=1:n
      vec_columna=1:n;
      vec_columna(j)=[]; % excluir la columna j
      C(i,j)=det(A(vec_renglon,vec_columna))*(-1)^(i+j);
   end
end
% Matriz Adjunta, es la transpuesta de la matriz de
% cofactores
C=C';
```

a) Modifique el orden de la matriz A dado en la segunda línea a 50. En la pantalla de comando escriba la siguiente secuencia de instrucciones

```
tic;adjunta;toc
tic;adjunta;t_adjunta=toc
```

En la variable `t_adjunta` se guarda el tiempo que se utilizó para ejecutar el programa `adjunta.m`

b) Calcule la adjunta como

```
tic;D = det(A)*inv(A);toc
tic; D = det(A)*inv(A);t_det_inv=toc.
```

En la variable `t_det_inv` se guarda el tiempo que se utilizó para ejecutar los comandos que producen la matriz adjunta de A.

c) Compare adj(A), calculada en el inciso *a*), con D, calculada en el inciso *b*). ¿Por qué esperaría eso? [***Sugerencia:*** Encuentre la máxima variación entre los elementos de C y D, los comandos `abs`, `max` le pueden ser útiles.]

d) Compare los tiempos de ejecución. ¿Qué descubrió al comparar estos tiempos?

3. Se ha demostrado que A no es invertible si det(A) = 0. Una suposición natural es que si A es cercana a ser no invertible, entonces det(A) estará cerca de 0.

Considere la siguiente matriz C. Verifique que C es no invertible. Dé `A = C; A(3,3) = C(3,3) + 1.e-10`. Verifique que A es invertible y observe que A es cercana a la matriz no invertible C. Encuentre `det(A)`. ¿Qué puede concluir sobre la "suposición natural" que se mencionó?

$$C = 20^* \begin{pmatrix} 7 & 7 & -7 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & -10 & 4 & 8 & 6 \\ 9 & 7 & -5 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & -9 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 9 & 10 & 8 \\ 1 & 9 & -17 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA PROYECTO

4. *a*) Introduzca una matriz A triangular superior de 5×5 con elementos enteros de manera que el determinante de A sea 1. Elija valores de c (entero), i y j y realice varias operaciones con renglones de la forma $R_j \rightarrow R_j + cR_i$ de manera que la matriz esté completa, es decir, que tenga el menor número de ceros posible. Llame A a la nueva matriz.

b) Verifique que det(A) es todavía igual a 1. ¿Por qué es esto de esperarse? Encuentre inv(A) y verifique que tiene elementos enteros. ¿Por qué es esto de esperarse?

c) Consulte el problema 9 de MATLAB 2.4 sobre encriptar y decodificar los mensajes. Este problema le pide que encripte un mensaje para su profesor haciendo uso de la matriz A creada anteriormente.

i) Cree un mensaje para su profesor. Utilizando números en lugar de letras, tal y como se describió en el problema 9 de MATLAB 2.4, escriba el mensaje en forma matricial para que pueda multiplicarlo por la derecha por A para codificar el mensaje (puede ser que necesite colocar espacios adicionales al final del mensaje).

ii) Utilice A para encriptar el mensaje.

iii) Entregue el mensaje encriptado a su profesor (como una cadena de números) y la matriz A.

3.4 Regla de Cramer

En la presente sección se examina un viejo método para resolver sistemas con el mismo número de incógnitas y ecuaciones. Considere el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{3.4.1}$$

que puede escribirse en la forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3.4.2}$$

Si $\det A \neq 0$, el sistema (3.4.2) tiene una solución única dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Se puede desarrollar un método para encontrar dicha solución sin reducción por renglones y sin calcular A^{-1}.

Sea $D = \det A$. Se definen n nuevas matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Es decir, A_i es la matriz obtenida al reemplazar la columna i de A por $\mathbf{b}$. Por último, sea $D_1 = \det A_1$, $D_2 = \det A_2, \ldots, D_n = \det A_n$.

Teorema 3.4.1 Regla de Cramer

Sea A una matriz de $n \times n$ y suponga que $\det A \neq 0$. Entonces la solución única al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por

$$\boxed{x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_i = \frac{D_i}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}} \tag{3.4.3}$$

Demostración

La solución a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Pero

$$A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{D}(\text{adj } A)\,\mathbf{b} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \mathrm{M} \\ b_n \end{pmatrix} \tag{3.4.4}$$

Ahora bien, $(\text{adj } A)\mathbf{b}$ es un vector de dimensión n cuya componente j es

$$(A_{1j} - A_{2j} - \cdots - A_{nj}) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n \tag{3.4.5}$$

Considere la matriz

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3.4.6)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{columna } j \end{array}$$

Nota histórica

La regla de Cramer recibe su nombre en honor del matemático suizo Gabriel Cramer (1704-1752). Cramer publicó la regla en 1750 en su libro *Introduction to the Analysis of Lines of Algebraic Curves*. De hecho, existe evidencia que sugiere que Colin Maclaurin (1698-1746) conocía la regla desde 1729; Maclaurin fue quizá el matemático británico más sobresaliente en los años que siguieron a la muerte de Newton. La regla de Cramer es uno de los resultados más conocidos en la historia de las matemáticas. Durante casi 200 años fue fundamental en la enseñanza del álgebra y de la teoría de las ecuaciones. Debido al gran número de cálculos requeridos, se utiliza muy poco en la actualidad. Sin embargo, el resultado fue muy determinante en su tiempo.

Si se expande el determinante de A_j respecto a su columna j, se obtiene

$$D_j = b_1 \text{ (cofactor de } b_1) + b_2 \text{ (cofactor de } b_2) + \cdots + b_n \text{ (cofactor de } b_n) \qquad (3.4.7)$$

Pero para encontrar el cofactor de b_i, por ejemplo, se elimina el renglón i y la columna j de A_j (ya que b_i está en la columna j de A_j). Pero la columna j de A_j es $\mathbf{b}$, y si se elimina se tendrá simplemente el menor ij, M_{ij}, de A. Entonces

$$\text{cofactor de } b_i \text{ en } A_j = A_{ij}$$

De manera que (3.4.7) se convierte en

$$D_j = A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n \qquad (3.4.8)$$

Por esta razón se trata de lo mismo que el lado derecho de (3.4.5). Por tanto, la componente i de $(\text{adj } A)\mathbf{b}$ es D_i y se tiene

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{D}(\text{adj } A)\,\mathbf{b} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_1}{D} \\ \frac{D_2}{D} \\ \vdots \\ \frac{D_n}{D} \end{pmatrix}$$

y la prueba queda completa.

EJEMPLO 3.4.1 Solución de un sistema de 3 × 3 utilizando la regla de Cramer

Resuelva el sistema usando la regla de Cramer:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad (3.4.9)$$

SOLUCIÓN ► El presente ejemplo ya se resolvió en el ejemplo 1.2.1 haciendo uso de la reducción por renglones. También se pudo resolver calculando A^{-1} (ejemplo 2.4.6) y después encontrando $A^{-1}\mathbf{b}$. Ahora se resolverá usando la regla de Cramer. Primero, se tiene

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

de manera que el sistema (3.4.9) tiene una solución única. Después $D_1 = \begin{vmatrix} 18 & 4 & 6 \\ 24 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 24$,

$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 6 \\ 4 & 24 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -12$ y $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 4 & 5 & 24 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 18$. Por tanto, $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = -\dfrac{24}{6} = 4$,

$x_2 = \dfrac{D_2}{D} = -\dfrac{12}{6} = -2$ y $x_3 = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{18}{6} = 3$.

EJEMPLO 3.4.2 Solución de un sistema de 4 × 4 usando la regla de Cramer

Demuestre que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 + 6x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= -1 \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

tiene una solución única y encuéntrela utilizando la regla de Cramer.

SOLUCIÓN ► En el ejemplo 3.2.14 se vio que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 160 \neq 0$$

por lo que el sistema tiene una solución única. Para encontrarla se calcula $D_1 = -464$; $D_2 = 280$; $D_3 = -56$; $D_4 = 112$. Así, $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-464}{160}$, $x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{280}{160}$, $x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-56}{160}$ y $x_4\ \frac{D_4}{D} = \frac{112}{160}$. Estas soluciones se pueden verificar por sustitución directa en el sistema 3.4.10.

RESUMEN 3.4

- *Regla de Cramer*

  Sea A una matriz de $n \times n$ con $\det A \neq 0$. Entonces la solución única al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por

$$x_1 = \frac{D_1}{\det A}, x_2 = \frac{D_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{\det A}$$

  donde D_j es el determinante de la matriz obtenida al reemplazar la columna j de A por el vector columna $\mathbf{b}$.

AUTOEVALUACIÓN 3.4

I) Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 7 \\ 3x + 8y - z &= 2 \\ -5x - 12y + 6z &= 11 \end{aligned}$$

Si $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 8 & -1 \\ -5 & -12 & 6 \end{vmatrix}$, entonces $y =$ ________.

a) $\dfrac{1}{D}\begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 2 & 8 & -1 \\ 11 & -12 & 6 \end{vmatrix}$

b) $\dfrac{1}{D}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 8 & 2 \\ -5 & -12 & 11 \end{vmatrix}$

c) $\dfrac{1}{D}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -5 & 11 & 6 \end{vmatrix}$

d) $\dfrac{1}{D}\begin{vmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ -5 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

Respuesta a la autoevaluación

I) *c)*

PROBLEMAS 3.4

De los problemas 1 al 9 resuelva el sistema dado usando la regla de Cramer.

1. $\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= -7 \\ -5x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} -5x_1 + 8x_2 + 10x_3 &= -8 \\ x_1 - 7x_2 \qquad &= -2 \\ 10x_1 + 10x_2 + 6x_3 &= 9 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - x_3 &= -1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 2x_2 \qquad &= 0 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 \qquad - x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_3 + 6x_4 &= 3 \\ x_1 \qquad\qquad - x_4 &= 5 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= -10 \\ 3x_2 + 2x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_5 &= -6 \end{aligned}$

*10. Considere el triángulo en la figura 3.2

a) Demuestre, utilizando la trigonometría elemental, que

$$\begin{array}{rcrcl} c\cos A & & & + \; a\cos C & = b \\ b\cos A & + & a\cos B & & = c \\ & & c\cos B & + \; b\cos C & = a \end{array}$$

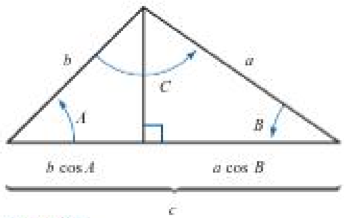


Figura 3.2

b) Si se piensa que el sistema del inciso *a*) es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, $\cos A$, $\cos B$ y $\cos C$, demuestre que el determinante del sistema es diferente de cero.

c) Utilice la regla de Cramer para despejar $\cos C$.

d) Utilice el inciso *c*) para probar la **ley de cosenos**: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

EJERCICIOS CON MATLAB 3.4

1. Las siguientes instrucciones resuelven el sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ utilizando la regla de Cramer

```
function [tiempo_promedio] = cramer(n,num_iteraciones)
% CRAMER genera un sistema de ecuaciones con solucion unica
%
%  n: orden del sistema de ecuaciones
%  n_iteraciones: numero de veces que se resuelve el sistema para
%                 calcular el tiempo promedio de ejecucion
%
%  tiempo_promedio: tiempo promedio de ejecucion

% Orden del sistema a resolver
% Generar matriz A y vector b;
detA = 0;
% Ciclo para generar la matriz A que garantice que tiene inversa
while abs(detA)<1e-10
   A = rand(n);
   detA = det(A); % Calculo del determinante de A
end
b = rand(n,1);
% Inicializacion del vector de resultados
x = zeros(n,1);
% Inicializacion del vector de tiempos
t_cram = zeros(num_iteraciones+1,1);
% Ciclo para generar el tiempo promedio de ejecucion
for k=1:num_iteraciones+1
   tic; % inicio del cronometro para calcular el tiempo de ejecucion
   % Calculo del determinante de A
   detA=det(A);
   % Ciclo para encontrar vector x utilizando
   % regla de Cramer
   for i=1:n
          C=A;
          C(:,i)=b;
          x(i)=det(C)/detA;
   end
   t_cram(k)=toc; % detener el cronometro
end
tiempo_promedio = mean(t_cram(2:end));
```

Guarde las instrucciones en un archivo tipo *m* con nombre `cramer.m`

a) Ejecute las siguientes instrucciones desde la línea de comando de MATLAB *b*) Resuelva el sistema usando `z=A\b`. Dé los siguientes comandos

```
tic;z=A\b;toc
tic;z=A\b;t_lu=toc
```

En la variable `t_lu` se guarda el tiempo de ejecución.

c) Compare `x` y `z` calculando `x-z` y despliegue el resultado utilizando `format short e`. Compare los tiempos de ejecución. ¿Cuáles fueron sus hallazgos con estas comparaciones?

d) Repita para una matriz aleatoria de 70 × 70. ¿Qué otras afirmaciones puede hacer sobre los tiempos de ejecución?

3.5 Demostración de tres teoremas importantes y algo de historia

Antes se citaron tres teoremas que resultan de fundamental importancia en la teoría de matrices determinantes. Las demostraciones de estos teoremas son más complicadas que las demostraciones que ya se analizaron. Trabaje despacio en estas demostraciones; la recompensa será un mejor entendimiento de algunas ideas importantes acerca del álgebra lineal.

Teorema 3.5.1 Teorema básico

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\det A = a_{11}\text{A}_{11} + a_{12}\text{A}_{12} + \cdots + a_{1n}\text{A}_{1n}\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\text{A}_{1k}$$

$$= a_{i1}\text{A}_{i1} + a_{i2}\text{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\text{A}_{in}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\text{A}_{ik} \qquad \textbf{(3.5.1)}$$

$$= a_{1j}\text{A}_{1j} + a_{2j}\text{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\text{A}_{nj}\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\text{A}_{kj} \qquad \textbf{(3.5.2)}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

Nota. La primera igualdad es la definición 3.1.4 del determinante mediante la expansión por cofactores del primer renglón; la segunda igualdad dice que la expansión por cofactores de cualquier otro renglón lleva al determinante; la tercera igualdad dice que la expansión por cofactores de cualquier columna da el determinante. De acuerdo con la observación de la página 193 se necesita, únicamente, probar el teorema para los renglones [ecuación (3.5.1)].

Demostración

Se probará la igualdad (3.5.1) por inducción matemática. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de 2 × 2, primero se expande por cofactores el primer renglón: $\det A = a_{11}\text{A}_{11} + a_{12}\text{A}_{12} = a_{11}(a_{22}) + a_{12}(-a_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. De este modo, expandiendo en el segundo renglón se obtiene $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} = a_{21}(-a_{12}) + a_{22}(a_{11}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Entonces se obtiene el mismo resultado expandiendo en cualquier renglón de una matriz de 2 × 2, y esto prueba la igualdad (3.5.1) en el caso 2 × 2.

Ahora se supone que la igualdad (3.5.1) se cumple para todas las matrices de $(n-1) \times (n-1)$. Debe demostrarse que se cumple para las matrices de $n \times n$. El procedimiento será expandir por cofactores los renglones 1 e i, y demostrar que las expansiones son idénticas. La expansión en el primer renglón da el siguiente término general

Observe que éste es el único lugar en la expansión de $|A|$ en el cual aparece el término a_{1k} ya que otro término general sería $a_{1m}A_{1m} = (-1)^{1+m}a_{1m}|M_{1m}|$, con $k \neq m$ y M_{1m} se obtiene eliminando el primer renglón y la m-ésima columna de A (y a_{1k} está en el primer renglón de A). Como M_{1k} es una matriz de $(n-1) \times (n-1)$, por la hipótesis de inducción se puede calcular $|M_{1k}|$ expandiendo en el renglón i de A [que es el renglón $(i-1)$ de M_{1k}]. Un término general de esta expansión es

$$a_{il}(\text{cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k}) \quad (k \neq l) \tag{3.5.4}$$

Por las razones descritas, éste es el único término en la expansión de $|M_{1k}|$ en el i-ésimo renglón de A que contiene el término a_{il}. Sustituyendo (3.5.4) en la ecuación (3.5.3) se encuentra que

$$(-1)^{1+k}a_{1k}a_{il}\,(\text{cofactor de } a_{il} \text{en } M_{1k})\ (k \neq l) \tag{3.5.5}$$

es la única ocurrencia del término $a_{1k}a_{il}$ en la expansión por cofactores de det A en el primer renglón.

Ahora, si se expande por cofactores en el renglón i de A (donde $i \neq 1$), el término general es

$$(-1)^{i+l}a_{il}|M_{il}| \tag{3.5.6}$$

y el término general en la expansión de $|M_{il}|$ en el primer renglón de M_{il} es

$$a_{1k}\,(\text{cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il})\ \ (k \neq l) \tag{3.5.7}$$

Si se inserta (3.5.7) en el término (3.5.6) se encuentra que la única ocurrencia del término $a_{il}a_{1k}$ en la expansión del renglón i de det A es

$$(-1)^{i+l}a_{1k}a_{il}(\text{cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il})\ (k \neq l) \tag{3.5.8}$$

Si se puede demostrar que las expansiones (3.5.5) y (3.5.8) son la misma, entonces (3.5.1) quedará demostrada, ya que el término en (3.5.5) es la única ocurrencia de $a_{1k}a_{il}$ en la expansión del primer renglón, el término en (3.5.8) es la única ocurrencia de $a_{1k}a_{il}$en la expansión del i-ésimo renglón, y k, i y l, son arbitrarios. Lo que demostrará que las sumas de términos en las expansiones en los renglones 1 e i son iguales.

Ahora, sea $M_{1i,kl}$ la matriz de $(n-2) \times (n-2)$ obtenida al eliminar los renglones 1 e i y las columnas k y l de A (esto se llama **menor de segundo orden** de A). Primero se supone que $k < l$. Después

$$M_{1k} = \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2l} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,k-1} & a_{i,k+1} & \cdots & a_{il} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.5.9}$$

$$M_{il} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k} & \cdots & a_{i-1,l-1} & a_{i-1,l+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k} & \cdots & a_{i+1,l-1} & a_{i+1,l+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{n,l-1} & a_{n,l+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.5.10}$$

De (3.5.9) y (3.5.10) se aprecia que

$$\text{Cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k} = (-1)^{(i-1)+(l-1)}|M_{1i,kl}| \tag{3.5.11}$$

$$\text{Cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il} = (-1)^{1+k}|M_{1i,kl}| \tag{3.5.12}$$

Entonces (3.5.5) se convierte en

$$(-1)^{1+k} a_{1k}\, a_{il}(-1)^{(i-1)+(l-1)}|M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l-1} a_{1k} a_{il}|M_{1i,kl}| \tag{3.5.13}$$

y (3.5.8) se convierte en

$$(-1)^{i+l} a_{1k}\, a_{il}(-1)^{1+k}|M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l+1} a_{1k} a_{il}|M_{1i,kl}| \tag{3.5.14}$$

Pero $(-1)^{i+k+l-1} = (-1)^{i+k+l+1}$, de modo que los lados derechos de las ecuaciones (3.5.13) y (3.5.14) son iguales. Así, las expresiones (3.5.5) y (3.5.8) son iguales y (3.5.1) queda demostrado en el caso $k < l$; después por un razonamiento similar se encuentra que si $k > l$,

$$\text{Cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k} = (-1)^{(i-1)+l}|M_{1i,kl}|$$

$$\text{Cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il} = (-1)^{1+(k-1)}|M_{1i,kl}|$$

de manera que (3.5.5) se convierte en

$$(-1)^{1+k} a_{1k}\, a_{il}(-1)^{(i-1)+l}|M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l} a_{1k}\, a_{il}|M_{1i,kl}|$$

y (3.5.8) se convierte en

$$(-1)^{i+l} a_{1k}\, a_{il}(-1)^{1+k-1}|M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l} a_{1k} a_{il}|M_{1i,kl}|$$

y esto completa la prueba de la ecuación (3.5.1).

Ahora se quiere probar que para cualesquiera dos matrices de $n \times n$, A y B, $\det AB = \det A \det B$. La prueba es más compleja e incluye varios pasos. Se usarán diversos hechos sobre las matrices elementales probados en la sección 2.6.

Primero se calculan los determinantes de las matrices elementales.

Lema 3.5.1

Sea E una matriz elemental:

i) Si E es una matriz que representa la operación elemental $R_i \rightleftarrows R_j$, entonces $\det E = -1$. **(3.5.15)**

ii) Si E es una matriz que representa la operación elemental $R_j \to R_j + cR_i$ entonces $\det E = 1$. **(3.5.16)**

iii) Si E es la matriz que representa la operación elemental $R_i \to cR_i$, entonces $\det E = c$. **(3.5.17)**

Demostración

i) $\det I = 1$. E se obtiene de I intercambiando los renglones i y j de I. Por la propiedad 3.2.4, $\det E = (-1) \det I = -1$.

ii) E se obtiene de I multiplicando el renglón i de I por c y sumándolo al renglón j. Entonces

iii) E se obtiene de I multiplicando el renglón i de I por c. Así, por la propiedad 3.2.2, det E $= c$ det $I = c$.

Lema 3.5.2

Sea B una matriz de $n \times n$ y sea E una matriz elemental. Entonces

$$\det EB = \det E \det B \tag{3.5.18}$$

La prueba de este lema se deduce del lema 3.5.1 y los resultados presentados en la sección 3.2 que relacionan las operaciones elementales con renglones en los determinantes. Los pasos de la prueba se indican en los problemas 1 al 3 de la sección que nos ocupa.

El siguiente teorema es un resultado fundamental en la teoría de matrices.

Teorema 3.5.2

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si det $A \neq 0$.

Demostración

Del teorema 2.6.5, se sabe que existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_m$ y una matriz triangular superior T tal que

$$A = E_1E_2, \ldots, E_mT \tag{3.5.19}$$

Usando el lema 3.5.2 m veces, se ve que

$$\begin{aligned}
\det A &= \det E_1 \det (E_2E_3 \cdots E_mT) \\
&= \det E_1 \det E_2 \det (E_3 \cdots E_mT) \\
&\;\;\vdots \\
&= \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_{m-1} \det (E_mT)
\end{aligned}$$

o sea

$$\det A = \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_{m-1} \det E_m \det T \tag{3.5.20}$$

Por el lema 3.5.1, det $E_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, m$. Se concluye que det $A \neq 0$ si y sólo si det T $\neq 0$.

Ahora suponga que A es invertible. Al usar (3.5.19) y el hecho de que toda matriz elemental es invertible $E_m^{-1} \cdots E_1^{-1}A$ es el producto de matrices invertibles. Así, T es invertible y por el teorema 3.1.2, det $T \neq 0$. Por tanto, det $A \neq 0$.

Si det $A \neq 0$ entonces (3.5.20), det $T \neq 0$, por lo que T es invertible (por el teorema 3.1.2). Entonces el lado derecho de (3.5.20) es el producto de matrices invertibles, y A es invertible. Esto completa la demostración.

Al fin, ahora se puede demostrar el resultado principal. Usando estos resultados establecidos, la prueba es directa.

Semblanza de...

Breve historia de los determinantes

Gottfried Wilhelm Leibniz
(Colección de David Eugene Smith, Rare Book and Manuscript Library, Columbia University)

Los determinantes aparecieron en la literatura matemática más de un siglo antes que las matrices. El término *matriz* fue utilizado por primera vez por James Joseph Sylvester, cuya intención era que su significado fuera "madre de los determinantes".

Algunos grandes matemáticos de los siglos XVII y XIX participaron en el desarrollo de las propiedades de los determinantes. La mayoría de los historiadores cree que la teoría de los determinantes encuentra su origen en el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), quien junto con Newton, fue co-inventor del cálculo. Leibniz utilizó los determinantes en 1693 en referencia a los sistemas de ecuaciones lineales simultáneas. Sin embargo, algunos piensan que un matemático japonés, Seki Kowa, hizo lo mismo casi 10 años antes.

Quien contribuyó de manera más importante en la teoría de los determinantes fue el matemático francés Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Cauchy redactó una memoria de 84 páginas, en 1812, que contenía la primera prueba del teorema det AB = det A det B. En 1840 definió la ecuación característica de la matriz A como la ecuación polinomial det $(A - \lambda I) = 0$. Dicha ecuación se estudiará con detalle en el capítulo 8.

Cauchy escribió en forma extensa, tanto sobre matemáticas puras como sobre matemáticas aplicadas. Sólo Euler contribuyó en mayor medida. Cauchy participó en muchas áreas que incluyen teoría de funciones reales y complejas, teoría de la probabilidad, la geometría, la teoría de propagación de ondas y series infinitas.

Se otorga a Cauchy el crédito de establecer un nuevo estándar de rigor en las publicaciones matemáticas. Después de Cauchy, se tornó más difícil publicar un artículo basado en la intuición; se pedía adhesión estricta a las demostraciones formales.

Augustin-Louis Cauchy
(Colección de David Eugene Smith, Rare Book and Manuscript Library, Columbia University)

El vasto volumen de las publicaciones de Cauchy era una inspiración. Cuando la Academia Francesa de las Ciencias inició sus publicaciones periódicas *Comptes Rendu* en 1835, Cauchy les envió su trabajo para que lo publicaran. Pronto la cuenta de impresión de sólo el trabajo de Cauchy creció tanto que la Academia puso un límite de cuatro páginas por artículo publicado. Esta regla todavía está en vigor.

Vale la pena mencionar aquí algunos matemáticos. La expansión de un determinante por cofactores fue utilizada por primera vez por un matemático francés, Pierre-Simon Laplace (1749-1827). Laplace es más conocido por la transformada de Laplace que se estudia en cursos de matemáticas aplicadas.

Una aportación importante a la teoría de determinantes (después de Cauchy) fue la del matemático alemán Carl Gustav Jacobi (1804-1851). Fue con él que la palabra "determinante" ganó su aceptación final. Jacobi usó primero un determinante aplicado a las funciones para establecer la teoría de funciones de diversas variables. Más tarde, Sylvester bautizó a este determinante el *jacobiano*. Los estudiantes actuales estudian los jacobianos en los cursos de cálculo de distintas variables.

Por último, ninguna historia de determinantes estaría completa sin el libro *An Elementary Theory of Determinants*, escrito en 1867 por Charles Dodgson (1832-1898). En dicho libro Dodgson da las condiciones bajo las cuales los sistemas de ecuaciones tienen soluciones no triviales. Estas condiciones están escritas en términos de los determinantes de los menores de las matrices de coeficientes. Charles Dodgson es más conocido por su seudónimo de escritor, Lewis Carroll. Con ese nombre publicó su famoso libro *Alicia en el país de las maravillas*.

Teorema 3.5.3

Sean A y B matrices de $n \times n$. Entonces

$$\det AB = \det A \det B \tag{3.5.21}$$

Demostración

Caso 1: det A = det $B = 0$. Entonces por el teorema 3.5.2, B no es invertible, así por el teorema 2.4.7, existe un vector de dimensión n $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Entonces $(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Por tanto, de nuevo por el teorema 2.4.7, AB no es invertible. Por el teorema 3.5.2, *Caso 2*: $\det A = 0$ y $\det B \neq 0$. A no es invertible, por lo que existe un vector de dimensión n $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Como $\det B \neq 0$, B es invertible y existe un vector único $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Entonces $AB\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) = A\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Así, AB no es invertible, esto es

$$\det AB = 0 = 0 \det B = \det A \det B$$

Caso 3: $\det A \neq 0$. A es invertible y se puede escribir como un producto de matrices elementales:

$$A = E_1, E_2, \cdots, E_m$$

Entonces

$$AB = E_1, E_2, \cdots, E_m B$$

Usando el resultado del lema 3.5.2 repetidas veces, se ve que

$$\begin{aligned}\det AB &= \det (E_1 E_2 \cdots E_m B)\\ &= \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_m \det B\\ &= \det (E_1 E_2 \cdots E_m) \det B\\ &= \det A \det B\end{aligned}$$

PROBLEMAS 3.5

1. Sea E la representación $R_i \rightleftarrows R_j$ y sea B una matriz de $n \times n$. Demuestre que $\det EB = \det E \det B$. [***Sugerencia:*** Describa la matriz EB y después utilice la ecuación (3.5.15) y la propiedad 3.5.4.]

2. Sea E la representación $R_j \to R_j + cR_i$ y sea B una matriz de $n \times n$. Demuestre que $\det EB = \det E \det B$. [***Sugerencia:*** Describa la matriz EB y después utilice la ecuación (3.5.16) y la propiedad 3.5.7.]

3. Sea E la representación $R_i \to cR_i$ y sea B una matriz de $n \times n$. Demuestre que $\det EB = \det E \det B$. [***Sugerencia:*** Describa la matriz EB y después utilice la ecuación (3.5.7) y la propiedad 3.5.2.]

Ⓔ Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 al 12 calcule el determinante.

1. $\begin{vmatrix} 7 & -8 \\ 9 & 9 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & -4 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 10 & 100 & 6 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 0 & -3 & -5 \\ -5 & -3 & -3 \\ -4 & -5 & -2 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \\ -6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & -10 & -4 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} -4 & 4 & 8 & -6 \\ -6 & 6 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -4 & 3 \\ -5 & -6 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 13 al 19 utilice determinantes para calcular la inversa (si existe).

13. $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 6 & -1 & -5 & -8 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 20 al 24 resuelva el sistema utilizando la regla de Cramer.

20. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= -7 \\ -5x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 7 \\ -3x_1 - 6x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= -3 \\ x_4 &= 5 \\ x_3 + x_4 &= -3 \end{aligned}$

CAPÍTULO

4

Shutterstock/Valex

▲ Los vectores en dos y tres dimensiones se emplean en todos los ámbitos de la física para representar diversos fenómenos en disciplinas como mecánica, electricidad y magnetismo, óptica y mecánica de fluidos, sólo por mencionar algunas.

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Objetivos del capítulo

En este capítulo el estudiante. . .

- Conocerá las propiedades principales de los vectores en dos dimensiones (sección 4.1).
- Aprenderá, utilizando el producto escalar entre vectores, a definir el concepto de ortogonalidad y la operación de proyección (sección 4.2).
- Identificará las principales propiedades de los vectores en tres dimensiones (sección 4.3).
- Estudiará una nueva operación binaria junto con sus propiedades, un producto entre vectores que da como resultado un vector (sección 4.4).
- Se familiarizará con las descripciones y propiedades de las rectas y los planos en el espacio haciendo uso de las herramientas definidas en las secciones anteriores (sección 4.5).

En la sección 2.1 se definieron los vectores columna y vectores renglón como conjuntos ordenados de n números reales o escalares. En el siguiente capítulo se definirán otros tipos de conjuntos de vectores, denominados *espacios vectoriales*.

En principio, el estudio de los espacios vectoriales arbitrarios es un tema abstracto. Por esta razón es útil poder contar con un grupo de vectores que se pueden visualizar fácilmente para usarlos como ejemplos.

En el presente capítulo se discutirán las propiedades básicas de los vectores en el plano xy y en el espacio real de tres dimensiones. Los estudiantes que conocen el cálculo de varias variables ya están familiarizados con este material, en cuyo caso se podrá cubrir rápidamente, a manera de repaso. Para los que no, el estudio de este capítulo proporcionará ejemplos que harán mucho más comprensible el material de los capítulos 5, 6 y 7.

4.1 Vectores en el plano

Como se definió en la sección 2.1, $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de vectores (x_1, x_2) con x_1 y x_2 números reales. Como cualquier punto en el plano se puede escribir en la forma (x, y), es evidente que se puede pensar que cualquier punto en el plano es un vector en $\mathbb{R}^2$, y viceversa. De este modo, los términos "el plano" y "$\mathbb{R}^2$" con frecuencia son intercambiables. Sin embargo, para muchas aplicaciones físicas (incluyendo las nociones de fuerza, velocidad, aceleración y momento) es importante pensar en un vector no como un punto sino como una entidad que tiene "longitud" y "dirección". Ahora se verá cómo se lleva a cabo esto.

Segmento de recta dirigido

Sean P y Q dos puntos en el plano. Entonces el **segmento de recta dirigido** de P a Q, denotado por $\overrightarrow{PQ}$, es el segmento de recta que va de P a Q (vea la figura 4.1*a*). Observe que los segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ son diferentes puesto que tienen direcciones opuestas (figura 4.1*b*).

a) $\overrightarrow{PQ}$ *b*) $\overrightarrow{QP}$

Figura 4.1

Los segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ apuntan hacia direcciones opuestas.

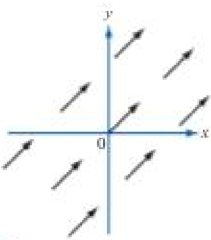


Figura 4.2

Un conjunto de segmentos de recta dirigidos equivalentes.

Punto inicial

son su magnitud (longitud) y su dirección. Si dos segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma magnitud y dirección, se dice que son **equivalentes** sin importar en dónde se localizan respecto al origen. Los segmentos de recta dirigidos de la figura 4.2 son todos equivalentes.

Observación

Los segmentos de recta dirigidos en la figura 4.2 son todos representaciones del mismo vector.

Segmentos de recta dirigidos equivalentes

Definición 4.1.1

Definición geométrica de un vector

El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama **vector**. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se denomina **representación** del vector.

Vector

Representación del vector

De la definición 4.1.1 se observa que un vector dado $\mathbf{v}$ se puede representar de múltiples formas. Observe la figura 4.3: sea $\overrightarrow{PQ}$ una representación de $\mathbf{v}$; entonces, sin cambiar magnitud ni dirección, se puede mover $\overrightarrow{PQ}$ en forma paralela de manera que su punto inicial se traslada al origen. Después se obtiene el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{0R}$, que es otra representación del vector $\mathbf{v}$. Ahora suponga que la R tiene las coordenadas cartesianas (a, b). Entonces se puede describir el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{0R}$ por las coordenadas (a, b). Es decir, $\overrightarrow{0R}$ es el segmento de recta dirigido con punto inicial $(0, 0)$ y punto terminal (a, b). Puesto que una representación de un vector es tan buena como cualquier otra, se puede escribir el vector $\mathbf{v}$ como (a, b).

Nota

La forma de la definición geométrica de un vector presenta la noción de una clase de equivalencias, la cual es útil para dividir conjuntos en subconjuntos ajenos. Además, es suficiente elegir un elemento de cada subconjunto para representar a todos los otros elementos.

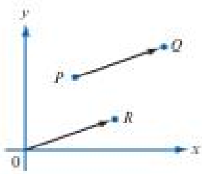


Figura 4.3

Se puede mover $\overrightarrow{PQ}$ para obtener un segmento de recta dirigido equivalente con su punto inicial en el origen. Observe que $\overrightarrow{0R}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son paralelos y tienen la misma longitud.

Observación

Con la definición 4.1.2 es posible pensar en un punto en el plano xy con coordenadas (a, b) como un vector que comienza en el origen y termina en (a, b).

Definición 4.1.2

Definición algebraica de un vector

Un **vector** $\mathbf{v}$ en el plano xy es un par ordenado de números reales (a, b). Los números a y b se denominan **elementos** o **componentes** del vector $\mathbf{v}$. El **vector cero** es el vector $(0, 0)$.

Observación

El vector cero tiene magnitud cero. Por lo tanto, puesto que los puntos inicial y terminal coinciden, se dice que el vector cero *no tiene dirección*.

Observación

Se hace hincapié en que las definiciones 4.1.1 y 4.1.2 describen, precisamente, los mismos objetos. Cada punto de vista (geométrico o algebraico) tiene sus ventajas. La definición 4.1.2 es la de un vector de dimensión 2 que se ha estado utilizando.

Puesto que en realidad un vector es un conjunto de segmentos de recta equivalentes, se define la **magnitud** o **longitud de un vector** como la longitud de cualquiera de sus representaciones y su **dirección** como la dirección de cualquiera de sus representaciones. Haciendo uso de la representación $\overrightarrow{0R}$ y escribiendo el vector $\mathbf{v} = (a, b)$ se define a

Magnitud o longitud de un vector

$$\boxed{|\mathbf{v}| = \text{magnitud de } \mathbf{v} = \sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \textbf{(4.1.1)}$$

Esto se deduce del teorema de Pitágoras (vea la figura 4.4). Se ha usado la notación $|\mathbf{v}|$ para denotar la magnitud de $\mathbf{v}$. Observe que $|\mathbf{v}|$ es un *escalar.*

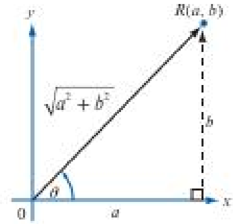


Figura 4.4

La magnitud de un vector con coordenada x igual a a y coordenada y igual a b es $\sqrt{a^2+b^2}$.

EJEMPLO 4.1.1 Cálculo de la magnitud de seis vectores

Calcule las magnitudes de los vectores i) $\mathbf{v} = (2, 2)$; ii) $\mathbf{v} = (2, 2\sqrt{3})$; iii) $\mathbf{v} = (-2\sqrt{3}, 2)$; iv) $\mathbf{v} = (-3, -3)$; v) $\mathbf{v} = (6, -6)$; vi) $\mathbf{v} = (0, 3)$.

SOLUCIÓN ► i) $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ii) $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

iii) $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$

iv) $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

v) $|\mathbf{v}| = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

vi) $|\mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$

Nota

$\tan\theta$ es periódica con periodo π. Entonces, si $a \neq 0$, siempre existen *dos* números en $[0, 2\pi)$, tales que $\tan\theta = \frac{b}{a}$. Por ejemplo, $\tan\frac{\pi}{4} = \tan\frac{5\pi}{4} = 1$. Para determinar θ de manera única es necesario determinar el cuadrante de $\mathbf{v}$, como se apreciará en el ejemplo 4.1.2.

Dirección de un vector

Se define la **dirección de un vector** $\mathbf{v} = (a, b)$ como el ángulo θ, medido en radianes, que forma el vector con el lado positivo del eje x. Por convención, se escoge θ tal que $0 \leq \theta < 2\pi$. De la figura 4.4 se deduce que si $a \neq 0$, entonces

$$\boxed{\tan\theta = \frac{b}{a}} \tag{4.1.2}$$

Nota

A continuación se presenta la definición del arco tangente con imagen de $[0, 2\pi)$ del cociente de dos números reales a, b, a partir de la función $\tan^{-1}$, que tiene por imagen $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\arctan\left[\frac{b}{a}\right] = \begin{cases} \tan^{-1}\left[\frac{b}{a}\right], & \text{si } a > 0, b > 0 \\ \tan^{-1}\left[\frac{b}{a}\right] + \pi, & \text{si } a < 0 \\ \tan^{-1}\left[\frac{b}{a}\right] + 2\pi, & \text{si } a > 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } a = 0, b > 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 4.1.2 Cálculo de las direcciones de seis vectores

Calcule las direcciones de los vectores en el ejemplo 4.1.1.

SOLUCIÓN ► Estos seis vectores están dibujados en la figura 4.5.

a) $\mathbf{v}$ se encuentra en el primer cuadrante y como $\arctan\theta = \frac{2}{2} = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

b) $\theta = \arctan^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{6} = \arctan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ (ya que $\mathbf{v}$ está en el primer cuadrante).

c) $\mathbf{v}$ está en el segundo cuadrante y como $\arctan^{-1}\frac{2}{2\sqrt{3}} = \arctan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5\pi}{6}$

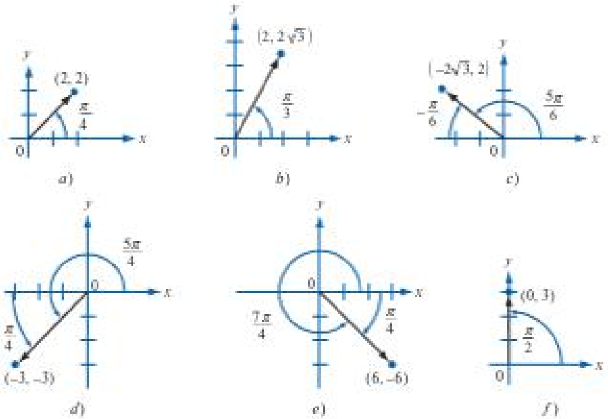


Figura 4.5

Direcciones de seis vectores.

e) Como v está en el cuarto cuadrante y $\arctan^{-1}(-1) = -\frac{7\pi}{4}$

f) La definición de $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ de $\theta = \frac{\pi}{2}$

En general, si $b > 0$

$$\text{Dirección de } (0, b) = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \text{dirección de } (0, -b) = \frac{3\pi}{2} \qquad b > 0$$

En la sección 2.1 se definió la suma de vectores y la multiplicación por un escalar. ¿Qué significan en términos geométricos estos conceptos? Se comienza con la multiplicación por un escalar. Si $\mathbf{v} = (a, b)$, entonces $\alpha\mathbf{v} = (\alpha a, \alpha b)$. Se encuentra que

$$|\alpha\mathbf{v}| = \sqrt{\alpha^2 a^2 + \alpha^2 b^2} = |\alpha|\ \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha||\mathbf{v}| \tag{4.1.3}$$

es decir,

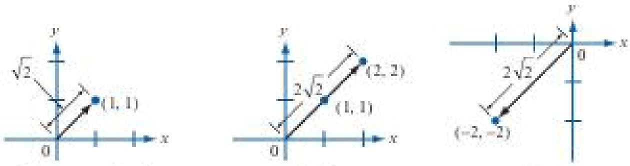
Magnitud de $\alpha\mathbf{v}$

Multiplicar un vector por un escalar diferente de cero tiene el efecto de multiplicar la longitud del vector por el valor absoluto de ese escalar.

Más aún, si $\alpha > 0$, entonces $\alpha\mathbf{v}$ está en el mismo cuadrante que $\mathbf{v}$ y, por lo tanto, la dirección de $\alpha\mathbf{v}$ es la *misma* que la dirección de $\mathbf{v}$ ya que $\arctan^{-1}\left(\frac{\alpha b}{\alpha a}\right) = \arctan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$. Si $\alpha < 0$, entonces $\alpha\mathbf{v}$ tiene dirección opuesta a la de $\mathbf{v}$. En otras palabras,

Dirección de $\alpha\mathbf{v}$

Dirección de $\alpha\mathbf{v}$ = dirección de $\mathbf{v}$, si $\alpha > 0$ **(4.1.4)**



a) El vector original **v** *b*) 2**v** *c*) −2**v**

Figura 4.6

El vector 2**v** tiene la misma dirección que **v** y el doble de su magnitud. El vector −2**v** tiene dirección opuesta a **v** y el doble de su magnitud.

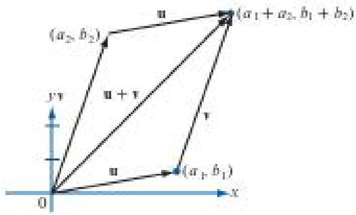


Figura 4.7

La regla del paralelogramo para sumar vectores.

EJEMPLO 4.1.3 Multiplicación de un vector por un escalar

Sea $\mathbf{v} = (1, 1)$. Entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ y $|2\mathbf{v}| = |(2, 2)| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2|\mathbf{v}|$. Todavía más, $|-2\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} = 2|\mathbf{v}|$. Así, la dirección de $2\mathbf{v}$ es $\frac{\pi}{4}$, mientras que la dirección de $-2\mathbf{v}$ es $\frac{5\pi}{4}$ (vea la figura 4.6).

Ahora suponga que se suman dos vectores: $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$ como en la figura 4.7. De la figura se puede apreciar que el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ se puede obtener trasladando la representación del vector **v** de manera que su punto inicial coincida con el punto terminal (a_1, b_1) del vector **u**. Por lo tanto, se puede obtener el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ dibujando un paralelogramo con un vértice en el origen y lados **u** y **v**. Entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es el vector que va del origen a lo largo de la diagonal del paralelogramo.

Nota. Al igual que un segmento de recta es la distancia más corta entre dos puntos, se deduce de inmediato, de la figura 4.7, que

Desigualdad del triángulo

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \le |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \tag{4.1.5}$$

Desigualdad del triángulo

Por razones que resultan obvias en la figura 4.7, la desigualdad (4.1.5) se denomina **desigualdad del triángulo.**

También se puede utilizar la figura 4.7 para obtener una representación geométrica del vector

Existen dos vectores especiales en $\mathbb{R}^2$ que nos permiten representar a cualquier otro vector en el plano de una forma conveniente. Se denota el vector (1, 0) por el símbolo **i** y el vector (0, 1) por el símbolo **j** (vea la figura 4.9). Si $\mathbf{v} = (a, b)$ es cualquier vector en el plano, entonces como $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$, se puede escribir

Vectores i y j

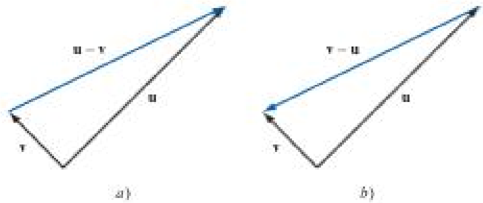


Figura 4.8

Los vectores **u** − **v** y **v** − **u** tienen la misma magnitud pero direcciones opuestas.

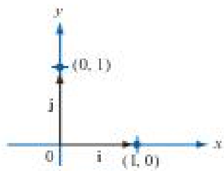


Figura 4.9

Los vectores **i** y **j**.

$$\boxed{\mathbf{v} = (a, b) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}} \qquad (4.1.6)$$

Con esta representación se dice que **v** está *expresado en sus componentes horizontal y vertical*. Los vectores **i** y **j** tienen dos propiedades:

i) Ninguno de ellos es múltiplo del otro. (En la terminología del capítulo 5, son *linealmente independientes*.)

ii) Cualquier vector **v** se puede escribir en términos de **i** y **j** como en la ecuación (4.1.6).*

Nota histórica

Hamilton utilizó por primera vez los símbolos **i** y **j**. Definió su cuaternión como una cantidad de la forma $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, donde a es la "parte escalar" y $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ es la "parte vectorial". En la sección 4.3 se escribirán los vectores en el espacio en la forma $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$.

Bajo estas dos condiciones se dice que **i** y **j** forman una **base** en $\mathbb{R}^2$. En el capítulo 5 se estudiarán las bases en espacios vectoriales arbitrarios.

Base

Ahora se definirá un tipo de vector que es muy útil en ciertas aplicaciones.

D Definición 4.1.3

Vector unitario

Un **vector unitario** es un vector con longitud 1.

EJEMPLO 4.1.4 Un vector unitario

El vector $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{j}$ es un vector unitario ya que

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

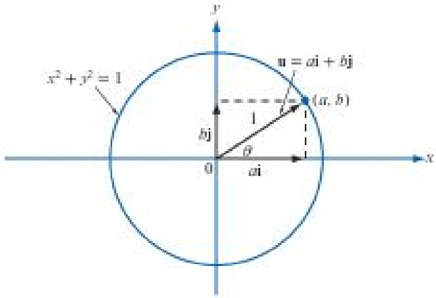


Figura 4.10

El punto terminal de un vector unitario que tiene su punto inicial en el origen se encuentra sobre el círculo unitario (círculo centrado en el origen con radio 1).

Sea $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ un vector unitario. Entonces $|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, de manera que $a^2 + b^2 = 1$ y $\mathbf{u}$ se puede representar por un punto en el círculo unitario (vea la figura 4.10). Si θ es la dirección de $\mathbf{u}$, es claro que $a = \cos\theta$ y $b = \operatorname{sen}\theta$. De este modo, cualquier vector unitario $\mathbf{u}$ se puede escribir en la forma

Representación de un vector unitario

$$\mathbf{u} = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} \tag{4.1.7}$$

donde θ es la dirección de $\mathbf{u}$.

EJEMPLO 4.1.5 Cómo escribir un vector unitario como $(\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$

El vector unitario $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{j}$ del ejemplo 4.1.4 se puede escribir en la forma de (4.1.7) con $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

También se tiene (vea el problema 4.1.26).

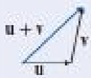
> Sea $\mathbf{v}$ un vector diferente de cero. Entonces $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$.

EJEMPLO 4.1.6 Cómo encontrar un vector unitario con la misma dirección que un vector dado diferente de cero

Encuentre un vector unitario que tiene la misma dirección que $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

SOLUCIÓN ► Aquí $|\mathbf{v}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, por lo que $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)\mathbf{i} - \left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$ es el vec-

Tabla 4.1

Objeto	Definición intuitiva	Expresión en términos de componentes si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$, y $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$
Vector $\mathbf{v}$	Un objeto que tiene magnitud y dirección	$v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ o (v_1, v_2)
$\lvert\mathbf{v}\rvert$	Magnitud (o longitud) de $\mathbf{v}$	$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$
$\alpha\mathbf{v}$	$\nearrow \mathbf{v}$ $\nearrow \alpha\mathbf{v}$ (en este dibujo $\alpha = 2$)	$\alpha v_1\mathbf{i} + \alpha v_2\mathbf{j}$ o $(\alpha v_1, \alpha v_2)$
$-\mathbf{v}$	$\nearrow \mathbf{v}$ $\swarrow -\mathbf{v}$	$-v_1\mathbf{i} - v_2\mathbf{j}$ o $(-v_1, -v_2)$ o $-(v_1, v_2)$
$\mathbf{u} + \mathbf{v}$		$(u_1 + v_1)\mathbf{i} + (u_2 + v_2)\mathbf{j}$ o $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
$\mathbf{u} - \mathbf{v}$		$(u_1 - v_1)\mathbf{i} + (u_2 - v_2)\mathbf{j}$ o $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

RESUMEN 4.1

- El **segmento de recta dirigido** que se extiende de P a Q en $\mathbb{R}^2$ denotado por $\overrightarrow{PQ}$ es el segmento de recta que va de P a Q.
- Dos segmentos de recta dirigidos en $\mathbb{R}^2$ son **equivalentes** si tienen la misma magnitud (longitud) y dirección.
- ***Definición geométrica de un vector***

  Un vector en $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos en $\mathbb{R}^2$ equivalentes a un segmento de recta dirigido dado. Una **representación** del vector tiene su punto inicial en el origen y se denota por $\overrightarrow{0R}$.
- ***Definición algebraica de un vector***

  Un vector $\mathbf{v}$ en el plano xy ($\mathbb{R}^2$) es un par ordenado de números reales (a, b). Los números a y b se llaman **elementos** o **componentes** del vector $\mathbf{v}$. El **vector cero** es el vector $(0, 0)$.
- Las definiciones geométrica y algebraica de un vector en $\mathbb{R}^2$ se relacionan de la siguiente manera: si $\mathbf{v} = (a, b)$, entonces una representación de $\mathbf{v}$ es $\overrightarrow{0R}$, donde $R = (a, b)$.
- Si $\mathbf{v} = (a, b)$, entonces la **magnitud de v**, denotada por $\lvert\mathbf{v}\rvert$, está dada por $\lvert\mathbf{v}\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Si $\mathbf{v}$ es un vector en $\mathbb{R}^2$, entonces la **dirección de v** es el ángulo en $[0, 2\pi]$ que forma cualquier representación de $\mathbf{v}$ con el lado positivo del eje x.

- ***Desigualdad del triángulo***

  En $\mathbb{R}^2$

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$$

- En $\mathbb{R}^2$ sean $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$; entonces $\mathbf{v} = (a, b)$ se puede escribir como $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.
- Un **vector unitario** $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^2$ es un vector que satisface $|\mathbf{u}| = 1$. En $\mathbb{R}^2$ un vector unitario se puede escribir como

$$\mathbf{u} = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\text{sen}\ \theta)\mathbf{j}$$

  donde θ es la dirección de $\mathbf{u}$.

AUTOEVALUACIÓN 4.1

I) Un *vector* es __________.

a) dos puntos en el plano *xy*.
b) un segmento de recta entre dos puntos.
c) un segmento de recta dirigido de un punto a otro.
d) una colección de segmentos de recta dirigidos equivalentes.

II) Si $P = (3, -4)$ y $Q = (8, 6)$, el vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene longitud _______.

a) $|3|+|-4|$ *b*) $(3)^2 + (-4)^2$

c) $(3-8)^2 + (-4-6)^2$ *d*) $\sqrt{(8-3)^2 + (6-(-4))^2}$

III) La dirección del vector (4, 8) es ________.

a) π *b*) $\tan^{-1}(8-4)$ *c*) $\left(\frac{8}{4}\right)\pi$ *d*) $\tan^{-1}\left(\frac{8}{4}\right)$

IV) Si $\mathbf{u} = (3, 4)$ y $\mathbf{v} = (5, 8)$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ________.

a) (7, 13) *b*) (8, 12) *c*) (2, 4) *d*) (15, 32)

V) Si $\mathbf{u} = (4, 3)$, entonces el vector unitario con la misma dirección que $\mathbf{u}$ es _______.

a) (0.4, 0.3) *b*) (0.8, 0.6) *c*) $\left(\frac{4}{5}\ \frac{3}{5}\right)$ *d*) $\left(\frac{4}{7}\ \frac{3}{7}\right)$

Respuestas a la autoevaluación

I) *d*) **II)** *d*) **III)** *d*) **IV)** *b*) **V)** *b* = *c*

PROBLEMAS 4.1

De los problemas 1 al 19 encuentre la magnitud y dirección del vector dado.

1. $\mathbf{v} = (4, 4)$ **2.** $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, -2)$ **3.** $\mathbf{v} = (7, 9)$ **4.** $\mathbf{v} = (-4, -4)$

9. $\mathbf{v} = (3, -8)$ **10.** $\mathbf{v} = (1, -\sqrt{3})$ **11.** $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, -2\right)$ **12.** $\mathbf{v} = (-5, 1)$

13. $\mathbf{v} = (1, 2)$ **14.** $\mathbf{v} = \left(-\frac{4}{7}, -\frac{4}{14}\right)$ **15.** $\mathbf{v} = (10, 10)$ **16.** $\mathbf{v} = (-7, 10)$

17. $\mathbf{v} = (10, 0)$ **18.** $\mathbf{v} = (6, -8)$ **19.** $\mathbf{v} = (\pi, 0)$

20. Sea $\mathbf{u} = (2, 3)$ y $\mathbf{v} = (-5, 4)$. Encuentre: *a*) $3\mathbf{u}$; *b*) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; *c*) $\mathbf{v} - \mathbf{u}$; *d*) $2\mathbf{u} - 7\mathbf{v}$. Bosqueje estos vectores.

21. Sea $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Encuentre: *a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; *b*) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$; *c*) $\mathbf{v} - \mathbf{u}$; *d*) $-2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$; *e*) $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$; *f*) $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$. Bosqueje estos vectores.

22. Sea $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$. Encuentre: *a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; *b*) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$; *c*) $3\mathbf{u}$; *d*) $-7\mathbf{v}$; *e*) $8\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$; *f*) $4\mathbf{v} - 6\mathbf{u}$. Bosqueje estos vectores.

23. Demuestre que el vector $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ es un vector unitario.

24. Muestre que los vectores **i** y **j** son vectores unitarios.

25. Demuestre que el vector $\mathbf{i}\sqrt{\frac{3}{5}} - \mathbf{j}\sqrt{\frac{2}{5}}$ es un vector unitario.

26. Demuestre que si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \neq 0$, entonces $\mathbf{u} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{j}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección que **v**.

De los problemas 27 al 34 encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.

27. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ **28.** $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ **29.** $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - \mathbf{j}$ **30.** $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$

31. $\mathbf{v} = \frac{5}{3}\mathbf{i} + \frac{5}{2}\mathbf{j}$ **32.** $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$; $a \neq 0$

33. $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ **34.** $\mathbf{v} = -5\mathbf{i}$

35. Si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, demuestre que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta$ y $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \operatorname{sen}\theta$, donde θ es la dirección de **v**.

36. Si $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, encuentre sen θ y cos θ.

37. Si $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, encuentre sen θ y cos θ.

Un vector **v** tiene dirección opuesta a la del vector **u** si la dirección de **v** es igual a la dirección de **u** más π radianes. De los problemas 38 al 45 encuentre un vector unitario **v** que tenga dirección opuesta a la dirección del vector dado **u**.

38. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ **39.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **40.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \frac{1}{8}\mathbf{j}$ **41.** $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{u}$

42. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ **43.** $\mathbf{v} = -8\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **44.** $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$ **45.** $\mathbf{u} = -5\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$

46. Sea $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que: *a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; *b*) $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$; *c*) $3\mathbf{u} + 8\mathbf{v}$.

47. Sea $P = (c, d)$ y $Q = (c + a, d + b)$. Muestre que la magnitud de $\overrightarrow{PQ}$ es $\sqrt{a^2 + b^2}$.

48. Demuestre que la dirección de $\overrightarrow{PQ}$ en el problema 47 es la misma que la dirección del vector (a, b). [***Sugerencia:*** Si $R = (a, b)$, demuestre que la recta que pasa por los puntos P y Q es paralela a la recta que pasa por los puntos 0 y R.]

De los problemas 49 al 56 encuentre un vector **v** que tenga la magnitud y dirección dadas.

52. $|\mathbf{v}| = 1, \theta = \frac{\pi}{4}$ **53.** $|\mathbf{v}| = \frac{1}{2}, \theta = \frac{7\pi}{4}$ **54.** $|\mathbf{v}| = \pi, \theta = \frac{\pi}{2}$

55. $|\mathbf{v}| = e, \theta = -\frac{\pi}{2}$ **56.** $|\mathbf{v}| = 3, \theta = -\frac{5\pi}{4}$

***57.** Demuestre de manera algebraica (es decir, estrictamente de las definiciones de suma y magnitud de vectores) que para cualesquiera dos vectores **u** y **v**, $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

58. Demuestre que si **u** y **v** son diferentes del vector cero, entonces $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ si y sólo si **u** es un múltiplo escalar positivo de **v**.

EJERCICIOS CON MATLAB 4.1

Información de MATLAB

Introduzca un vector como una matriz de 2×1 o de 3×1. La suma y multiplicación por un escalar es la misma que para las matrices.

Producto escalar de `u` y `v`: `u'*v`

Magnitud (*longitud*) de `v`: `sqrt(v'*v)` o `norm(v)`

Dirección de *v*: vea el ejemplo 4.1.2 y use el hecho de que $\tan^{-1}(c)$ se encuentra con `atan(c)`. También se puede utilizar el comando `atan2(x,y)` (ver `doc atan2`)

Gráficas: varios problemas utilizan gráficas. Se proporcionan instrucciones especificas en cada problema.

1. ***a)*** Utilice MATLAB para verificar los resultados obtenidos con lápiz y papel para la magnitud y dirección de los vectores de los problemas impares 1 al 12 de esta sección.

Nota. $\sqrt{3}$ se encuentra con `sqrt(3)`.

b) Utilice MATLAB para encontrar la magnitud y dirección de los vectores en los problemas pares 38 al 48 en esta sección.

2. Las combinaciones lineales de vectores serán importantes en el trabajo futuro. Este problema describe una manera de visualizar las combinaciones lineales de vectores en el plano (vea también el problema 3 siguiente).

a) Se quieren graficar varias combinaciones lineales de dos vectores dados en el mismo conjunto de ejes. Cada vector será representado por una recta de (0, 0) al punto terminal del vector. Sean **u** y **v** dos matrices (vectores) de 2×1 dadas. Se quieren graficar varios vectores **z**, donde $\mathbf{z} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ con $-1 \leq a, b \leq 1$ para ayudar a la comprensión de la geometría de una combinación lineal. Lea la nota sobre *gráficas* que se presentó antes de estos problemas de MATLAB.

Introduzca el siguiente código de MATLAB que grafica tres vectores, los vectores **u** (en verde) y **v** (en azul) y la combinación lineal $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ (en color especificado por `cc`)

```
comlin=@(a,b,u,v,cc)plot([0 v(1)],[0,v(2)],'b',[0,u(1)],[0,u(2)],'g',...
          [0,a*u(1)+b*v(1)],[0,a*u(2)+b*v(2)],cc,'linewidth',5);
```

Elija los vectores columna **u** y **v**, por ejemplo

```
u = [1,2]; v = [-2,3];
```

al ejecutar la función se grafican los tres vectores con el vector de la combinación lineal en

```
comlin(0.1,0.2,u,v,'c')
```

Para lograr que en la pantalla gráfica queden la figura anterior después del llamado de la función `comlin` se puede escribir el comando `hold on`, por ejemplo

```
comlin(0.1,0.2,u,v,'c'); hold on
```

¿Cómo se verá la pantalla de gráficas si se grafican múltiples casos de `a` y `b`?

Repita cinco veces el comando anterior con diferentes valores de `a` y `b` entre `0` y `1`. Observe la geometría de la gráfica final y responda la pregunta.

Repita cinco veces el comando anterior con diferentes valores de `a` entre `0` y `1`, y `b` entre `-1` y `0`, cambie el color de la combinación a rojo (`'r'`), es decir

```
comlin(0.1,-0.2,u,v,'r'); hold on
```

Observe la geometría de la gráfica final y responda la pregunta.

Repita cinco veces el comando anterior con diferentes valores de `a` entre `-1` y `0`, y `b` entre `0` y `1`, cambie el color de la combinación a magenta (`'m'`), es decir

```
comlin(-0.1,0.2,u,v,'m'); hold on
```

Observe la geometría de la gráfica final y responda la pregunta.

Repita cinco veces el comando anterior con diferentes valores de `a` entre `-1` y `0`, y `b` entre `-1` y `0`, cambie el color de la combinación a negra (`'k'`), es decir

```
comlin(-0.1,-0.2,u,v,'k'); hold on
```

Observe la geometría de la gráfica final y responda la pregunta.

¿Cómo se vería la gráfica si se graficaran cada vez más combinaciones lineales?

Al terminar este problema dé el comando `hold off`.

b) Siguiendo las instrucciones anteriores, explore lo que ocurre si comienza con **u** y **v** paralelos.

Al terminar este problema, dé el comando `hold off`.

3. (*Este problema usa el archivo lincomb.m*) Dados dos vectores no paralelos en el plano se puede escribir otro vector en el plano como una combinación lineal de estos dos vectores. El archivo *lincomb.m* se presenta a continuación. **M**

```
function lincomb(u,v,w)

% LINCOMB función que grafica los vectores u,v,w y
%       se expresa w como la combinacion lineal
%       del u,v es decir
%          w = a u + b v, con a,b reales, u y v no paralelos
%
%    u: vector de 2x1
%    v: vector de 2x1
%    w: vector de 2x1

% define el origen
origen=[0;0];
% se encuentran los valores de las constantes
% de la combinacion lineal
A=[u,v];
xx=A\w;
Ou=[origen,u];
Ov=[origen,v];
Ow=[origen,w];
```

```
plot(Ou(1,:),Ou(2,:),'-*b',Ov(1,:),Ov(2,:),'-*b',...
    Ow(1,:),Ow(2,:),'-*g')
text(u(1)/2,u(2)/2,'\bf u')
text(v(1)/2,v(2)/2,'\bf v')
text(w(1)/2,w(2)/2,'\bf w')
hold on
plot(PP1(1,:),PP1(2,:),':r')
grid on
%
title(['u=[',num2str(u(1)),';',num2str(u(2)),'], ',...
   'v=[',num2str(v(1)),';',num2str(v(2)),'], ',...
   'w=[',num2str(w(1)),';',num2str(w(2)),']'])
xlabel(['w = (',num2str(xx(1),2),...
    ') u + (',num2str(xx(2),2),') v'])
%
axis square
a=axis;
axis([min(a([1,3])),max(a([2,4])),min(a([1,3])),max(a([2,4]))])
%
hold off
```

Una vez que se haya escrito la función en un archivo con nombre *lincomb.m*, dé el comando `doc lincomb` para tener una descripción de este archivo con extensión *m*.

Sean **u** y **v** dos vectores de 2×1 que no son paralelos. Sea `w=5*(2*rand(2,1-1)`. Dé `lincomb(u,v,w)`. Primero verá graficados **u**, **v** y **w**. Oprima cualquier tecla y aparecerá la geometría de **w** escrita como una combinación lineal de **u** y **v**. Repita para diferentes vectores **w**, **u** y **v**.

4.2 El producto escalar y las proyecciones en $\mathbb{R}^2$

En la sección 2.2 se definió el producto escalar de dos vectores. Si $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v}$ (a_2, b_2), entonces

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2} \tag{4.2.1}$$

Ahora se verá la interpretación geométrica del producto escalar.

Definición 4.2.1

Ángulo entre vectores

Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero. Entonces el **ángulo φ entre u y v** está definido como el ángulo no negativo más pequeño* entre las representaciones de **u** y **v** que tienen el origen como punto inicial. Si $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ para algún escalar α, entonces $\varphi = 0$ si $\alpha > 0$ y $\varphi = \pi$ si $\alpha < 0$.

Esta definición se ilustra en la figura 4.11. Observe que φ siempre se puede elegir para que sea un ángulo no negativo en el intervalo $[0, \pi]$.

Teorema 4.2.1 La magnitud de un vector en términos del producto escalar

Demostración

Sea $\mathbf{v}$ un vector. Entonces

$$\boxed{|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \quad (4.2.2)$$

Demostración

Sea $\mathbf{v} = (a, b)$. Entonces

$$|\mathbf{v}|^2 = a^2 + b^2$$

y

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (a, b) \cdot (a, b) = a \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2 = |\mathbf{v}|^2$$

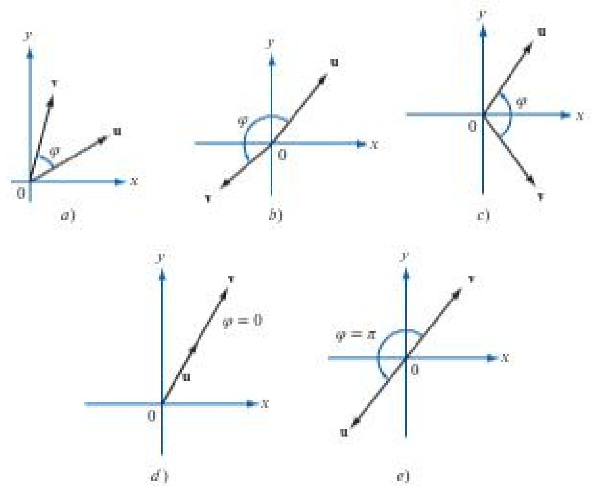


Figura 4.11

Ángulo ϕ entre dos vectores.

Teorema 4.2.2

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores diferentes de cero. Si φ es el ángulo entre ellos, entonces

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}} \quad (4.2.3)$$

Demostración

La ley de los cosenos (vea el problema 3.4.10) establece que en el triángulo de la figura 4.12

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

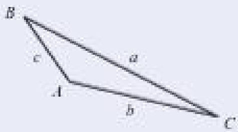


Figura 4.12

Triángulo con lados a, b y c.

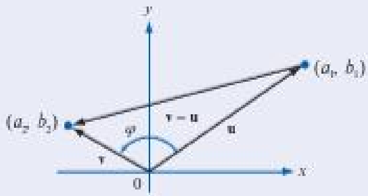


Figura 4.13

Triángulo con lados $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ y $|\mathbf{v}-\mathbf{u}|$.

Ahora se colocan las representaciones de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ con los puntos iniciales en el origen de manera que $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$ (vea la figura 4.13). Entonces de la ley de los cosenos, $|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2 - 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi$. Pero

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2 &\overset{\text{de (4.2.2)}}{=} (\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \overset{\text{teorema 2.2.1 iii)}}{=} \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \\ &= |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + |\mathbf{u}|^2 \end{aligned}$$

Así, después de restar $|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2$ en ambos lados de la igualdad, se obtiene $-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi$, y el teorema queda demostrado.

Observación. Haciendo uso de la ecuación 4.2.3 se puede definir el producto escalar $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ como

$$\boxed{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi}$$

EJEMPLO 4.2.1 Cálculo del ángulo entre dos vectores

Encuentre el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

SOLUCIÓN $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -14 + 3 = -11$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-7)^2+1^2} = \sqrt{50}$. Así,

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = \frac{-11}{\sqrt{13}\sqrt{50}} = \frac{-11}{\sqrt{650}} \simeq -0.431455497^{*}$$

de manera que

$$\varphi = \cos^{-1}(-0.431455497) \simeq 2.0169^{**} (\approx 115.6^\circ)$$

Nota. Como $0 \le \varphi \le \pi$, $\cos^{-1}(\cos\varphi) = \varphi$.

Definición 4.2.2

Vectores paralelos

Dos vectores diferentes de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son **paralelos** si el ángulo entre ellos es cero o π. Observe que los vectores paralelos tienen la misma dirección o direcciones opuestas.

EJEMPLO 4.2.2 **Dos vectores paralelos**

Demuestre que los vectores $\mathbf{u} = (2, -3)$ y $\mathbf{v} = (-4, 6)$ son paralelos.

SOLUCIÓN ► $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = \dfrac{-8-18}{\sqrt{13}\sqrt{52}} = \dfrac{-26}{\sqrt{13}(2\sqrt{13})} = \dfrac{-26}{2(13)} = -1.$

Por lo tanto, $\varphi = \pi$ (de manera que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen direcciones opuestas).

Teorema 4.2.3

Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para alguna constante α si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos.

Demostración

La prueba se deja como ejercicio (vea el problema 42 de esta sección).

Definición 4.2.3

Vectores ortogonales

Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ diferentes de cero son **ortogonales** (o **perpendiculares**) si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

EJEMPLO 4.2.3 **Dos vectores ortogonales**

Demuestre que los vectores $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ son ortogonales.

SOLUCIÓN ► $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 3\cdot -44\cdot 3 = 0$. Esto implica que $\cos\varphi = \dfrac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = 0$, y como φ está en el intervalo $[0, \pi]$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Teorema 4.2.4

Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ diferentes de cero son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Demostración

Esta prueba también se deja como ejercicio (vea el problema 43 de esta sección).

Muchos problemas interesantes se refieren a la noción de la proyección de un vector sobre otro. Antes de definir esto se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 4.2.5

Sea $\mathbf{v}$ un vector diferente de cero. Entonces para cualquier otro vector $\mathbf{u}$ el vector

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$$

es ortogonal a $\mathbf{v}$.

Demostración

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = \left[\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right]\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2}$$

$$= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$$

Los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ se ilustran en la figura 4.14.

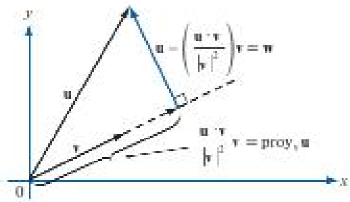


Figura 4.14

El vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$.

Definición 4.2.4

Proyección

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores diferentes de cero. Entonces la **proyección** de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es un vector denotado por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$, que se define por

$$\boxed{\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}} \qquad \textbf{(4.2.4)}$$

La **componente** de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$ es $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, y es un escalar. **(4.2.5)**

Observe que $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$.

Observación 1. De las figuras 4.14 y 4.15 y del hecho de que $\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$ se deduce que

$\mathbf{v}$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tienen:

i) la misma dirección si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$ y

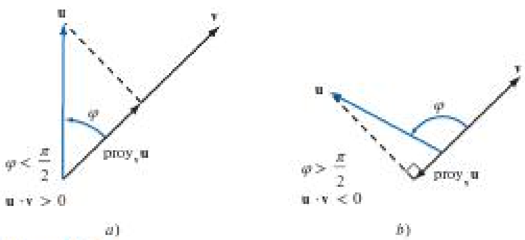


Figura 4.15

a) **v** y proy$_{\mathbf{v}}$ **u** tienen la misma dirección si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$.
b) **v** y proy$_{\mathbf{v}}$ **u** tienen direcciones opuestas si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$.

Observación 2. Se puede pensar en la proy$_{\mathbf{v}}$ **u** como la componente de **v** del vector **u**.

Observación 3. Si **u** y **v** son ortogonales, entonces $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, de manera que proy$_{\mathbf{v}}$ $\mathbf{u} = 0$.

Observación 4. Una definición alternativa de la proyección es: si **u** y **v** son vectores diferentes de cero, entonces proy$_{\mathbf{v}}$ **u** es el único vector con las siguientes propiedades:

i) proy$_{\mathbf{v}}$ **u** es paralelo a **v**.
ii) $\mathbf{u}$ − proy$_{\mathbf{v}}$ **u** es ortogonal a **v**.

EJEMPLO 4.2.4 Cálculo de una proyección

Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Calcule proy$_{\mathbf{v}}$ **u**.

SOLUCIÓN ► $\text{Proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \left[\frac{5}{(\sqrt{2})^2}\right]\mathbf{v} = \left(\frac{5}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{5}{2}\right)\mathbf{j}$ (vea la figura 4.16).

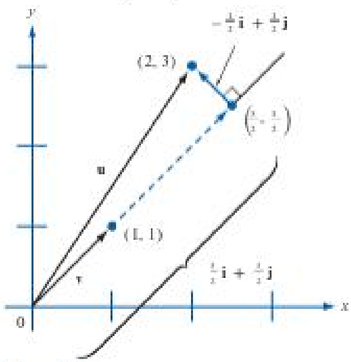


Figura 4.16

La proyección de (2, 3) sobre (1, 1) es $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

EJEMPLO 4.2.5 Cálculo de una proyección

SOLUCIÓN ► En este caso $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = -\frac{1}{2}$; así, $\text{proy}_\mathbf{v}\,\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$ (vea la figura 4.17).

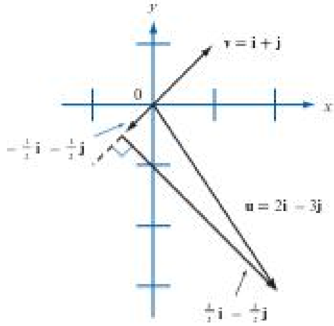


Figura 4.17

La proyección de $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ sobre $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ es $-\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$.

RESUMEN 4.2

- Sean $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$; entonces el **producto escalar** o **producto punto** de **u** y **v**, denotado por $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, está dado por

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = a_1a_2 + b_1b_2$$

Si $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$, entonces

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

- El **ángulo** ϕ entre dos vectores **u** y **v** en $\mathbb{R}^2$ es el único número en $[0, \pi]$ que satisface

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$$

- Dos vectores en $\mathbb{R}^2$ son **paralelos** si el ángulo entre ellos es 0 o π. Son paralelos si uno es un múltiplo escalar del otro.

- Dos vectores $\mathbb{R}^2$ son **ortogonales** si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$. Son ortogonales si y sólo si su producto escalar es cero.

- Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^2$. La **proyección** de **u** sobre **v** es un vector, denotado por $\text{proy}_\mathbf{v}\,\mathbf{u}$, que está definido por

$$\text{proy}_\mathbf{v}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$$

El escalar $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ se llama la **componente** de **u** en la dirección de **v**.

- $\text{proy}_\mathbf{v}\,\mathbf{u}$ es paralelo a **v** y $\mathbf{u} - \text{proy}_\mathbf{v}\,\mathbf{u}$ es ortogonal a **v**.

AUTOEVALUACIÓN 4.2

I) $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} =$ ________.

a) 1
b) $\sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2}$
c) 0
d) $\mathbf{i} + \mathbf{j}$

II) $(3, 4) \cdot (3, 2) =$ ________.

a) $(3 + 3)(4 + 2) = 36$
b) $(3)(3) + (4)(2) = 17$
c) $(3 - 3)(2 - 4) = 0$
d) $(3)(3) - (4)(2) = 1$

III) El coseno del ángulo entre $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ es ________.

a) $0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$
b) 0
c) $\sqrt{2}$
d) $\frac{1}{\sqrt{2+0}}$

IV) Los vectores $2\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ y $3\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{j}$ son ________.

a) Ni paralelos ni ortogonales
b) Paralelos
c) Ortogonales
d) Idénticos

V) $\text{Proy}_{\mathbf{w}}\mathbf{u} =$ ______________.

a) $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$
b) $\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$
c) $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\, \mathbf{w}}{|\mathbf{w}||\mathbf{w}|}$
d) $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\, \mathbf{u}}{|\mathbf{u}||\mathbf{u}|}$

Respuestas a la autoevaluación

I) *c*) II) *b*) III) *b*) IV) *c*) V) *c*)

PROBLEMAS 4.2

De los problemas 1 al 11 calcule el producto escalar de los dos vectores y el coseno del ángulo entre ellos.

1. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$
2. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
3. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = -7\mathbf{j}$
4. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$
5. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
6. $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = \beta\mathbf{j}$; α, β reales
7. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \end{pmatrix}$
8. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
9. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$
10. $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$
11. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
12. Demuestre que para cualesquiera números reales α y β, los vectores $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \beta\mathbf{i} - \alpha\mathbf{j}$ son ortogonales.

De los problemas 14 al 20 determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Después esboce cada par.

14. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -8\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

15. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

17. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

18. $\mathbf{u} = -\mathbf{i}\sqrt{3} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i}2\sqrt{3} + 3\mathbf{j}$

19. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = -23\mathbf{j}$

20. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

21. Sean $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}$. Determine α tal que:

a) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.
b) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos.
c) El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\frac{\pi}{4}$.
d) El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\frac{\pi}{3}4$.

22. Sean $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$. Determine α y β tales que:

a) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.
b) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos.
c) El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\frac{\pi}{4}$.
d) El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\frac{\pi}{3}4$.

23. En el problema 21 demuestre que no existe un valor de α para el que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen direcciones opuestas.

24. Encuentre condiciones para α y β del problema 22 para que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tengan la misma dirección.

En los problemas 25 al 38 calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

25. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

26. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \end{pmatrix}$

27. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

28. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

29. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

30. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

31. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

32. $\mathbf{u} = -\mathbf{i}\sqrt{3} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i}2\sqrt{3} - 3\mathbf{j}$

33. $\mathbf{u} = -\mathbf{i}\sqrt{5} + \mathbf{j}2\sqrt{3}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i}3\sqrt{3} - \mathbf{j}2\sqrt{5}$

34. $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; α y β reales positivos

35. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

36. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

37. $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} - \beta\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; α y β reales positivos con $\alpha > \beta$

38. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

39. Sean $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. Establezca una condición sobre a_1, b_1, a_2 y b_2 que asegure que $\mathbf{v}$ y $\text{proy}_\mathbf{v}\mathbf{u}$ tengan la misma dirección.

40. En el problema 39 establezca una condición que asegure que $\mathbf{v}$ y $\text{proy}_\mathbf{v}\mathbf{u}$ tengan direcciones opuestas.

41. Sean $P = (-1, 1)$, $Q = (5, 2)$, $R = (2, -5)$ y $S = (1, -2)$. Calcule $\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}} \overrightarrow{RS}$ y $\text{proy}_{\overrightarrow{RS}} \overrightarrow{PQ}$.

42. Sean $P = (-1, 4)$, $Q = (2, 1)$, $R = (-7, -5)$ y $S = (1, 1)$. Calcule $\text{proy}_{\overrightarrow{PR}} \overrightarrow{QS}$ y $\text{proy}_{\overrightarrow{QS}} \overrightarrow{PR}$.

43. Pruebe que los vectores diferentes de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para alguna constante α. [*Sugerencia:* Demuestre que $\cos\varphi = \pm 1$ si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$.]

44. Pruebe que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

45. Demuestre que el vector $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es ortogonal a la recta $ax + by + c = 0$.

46. Demuestre que el vector $\mathbf{u} = b\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ es paralelo a la recta $ax + by + c = 0$.

47. Un triángulo tiene vértices $(-1, 3)$, $(10, 1)$ y $(23, -6)$. Encuentre el coseno de cada ángulo.

48. Un triángulo tiene vértices (a_1, b_1), (a_2, b_2) y (a_3, b_3). Encuentre el coseno de cada ángulo.

*49. La **desigualdad de Cauchy-Schwarz** establece que para cualesquiera números reales a_1, a_2, b_1 y b_2

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left\| \sum_{i=1}^{2} a_i b_i \right\| \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{2} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{2} b_i^2\right)}$$

Utilice el producto escalar para probar esta fórmula. ¿Bajo qué circunstancias se puede sustituir la desigualdad por una igualdad?

*50. Pruebe que la distancia más corta entre un punto y una recta se mide por una línea que pasa por el punto y es perpendicular a la recta.

51. Encuentre la distancia entre $P = (-3, 2)$ y la recta que pasa por los puntos $Q = (-1, 7)$ y $R = (3, 5)$.

52. Encuentre la distancia entre $(3, 7)$ y la recta que va a lo largo del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ que pasa por el origen.

53. Sea A una matriz de 2×2 tal que cada columna es un vector unitario y que las dos columnas son ortogonales. Demuestre que A es invertible y que $A^{-1} = A^{\top}$ (A se conoce como **matriz ortogonal**).

Matriz ortogonal

Ejercicios con MATLAB 4.2

1. Para los pares de vectores de los problemas 24 a 32, verifique los vectores proyección calculados con lápiz y papel usando MATLAB (consulte la información de manejo de MATLAB anterior a los problemas de MATLAB 4.1).

2. (*Este problema usa el archivo prjtn.m*) El problema se refiere a la visualización de las proyecciones. A continuación se presenta la función prjtn.m.

M

```
function prjtn(u,v)
% PRJTN funcion proyeccion. Grafica la proyeccion del vector u
%       en la direccion del vector v
%
%       u: vector de 2x1
%       v: vector de 2x1
origen=[0;0];

P=(u'*v)/(v'*v)*v;

Ou=[origen,u];
Ov=[origen,v];
OP=[origen,P];
uMP=[u,P];

plot(Ou(1,:),Ou(2,:),'22b*',Ov(1,:),Ov(2,:),'22b*',...
   OP(1,:),OP(2,:),'-go',uMP(1,:),uMP(2,:),':m')
text(u(1)/2,u(2)/2,'\bf u');
text(u(1),u(2),'1')
text(v(1)/2,v(2)/2,'\bf v');
text(v(1),v(2),'2')
text(P(1)/2,P(2)/2,'\bf P');
text(P(1),P(2),'3')
a=axis;
axis([min(a([1,3]))-1,max(a([2,4]))+1,...
    min(a([1,3]))-1,max(a([2,4]))+1])
axis square
grid on
title('P es la proyeccion de u en v')
xlabel('u termina en 1, v termina en 2, P termina en 3')
```

Una vez que se ha escrito la función en un archivo con nombre prjtn dé el comando `doc prjtn` para tener una descripción de este archivo con extensión *m*.

Para los pares de vectores **u** y **v** dados en seguida:

a) Introduzca **u** y **v** como matrices de 2×1 y calcule **p** = proyección de **u** sobre **v**.

b) Dé el comando `prjtn(u, v)` (este archivo despliega **u** y **v** en la pantalla de gráficas. Oprima cualquier tecla y bajará una perpendicular del punto terminal de **u** hasta la recta determinada por **v**. Oprima cualquier tecla y se indicará el vector proyección).

c) Mientras observa las gráficas en la pantalla, verifique que el vector **p** graficado sea el vector calculado en *a*). Localice el vector (paralelo a) **u** – **p**. ¿Cuál es la relación geométrica entre **u** – **p** y **v**?

i) **u** = [2; 1] **v** = [3; 0]

ii) **u** = [2; 3] **v** = [–3; 0]

iii) **u** = [2; 1] **v** = [–1; 2]

iv) **u** = [2; 3] **v** = [–1; –2]

v) Elija sus propios vectores **u** y **v** (al menos tres pares).

4.3 Vectores en el espacio

Terna ordenada

Se ha visto que cualquier punto en el plano se puede representar como un par ordenado de números reales. De manera análoga, cualquier punto en el espacio se puede representar por una **terna ordenada** de números reales

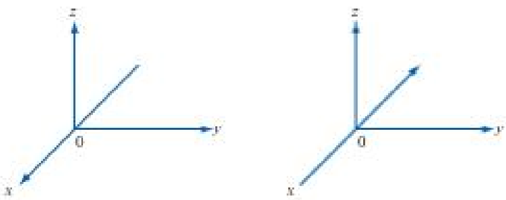
$$(a, b, c) \tag{4.3.1}$$

$\mathbb{R}^3$
Origen
eje x
eje y
eje z

Los vectores de la forma (4.3.1) constituyen el espacio $\mathbb{R}^3$. Para representar un punto en el espacio, se comienza por elegir un punto en $\mathbb{R}^3$. A este punto se le denomina el **origen**, denotado por 0. Después se dibujan tres rectas perpendiculares entre sí, a las que se llama el **eje x**, el **eje y** y el **eje z**. Dichos ejes se pueden seleccionar de diferentes formas, pero la más común tiene los ejes x y y horizontales y el eje z vertical. Sobre cada eje se elige una dirección positiva y la distancia a lo largo de cada eje se mide como el número de unidades en esta dirección positiva a partir del origen.

Sistema derecho
Sistema izquierdo

Los dos sistemas básicos para dibujar estos ejes se describen en la figura 4.18. Si los ejes se colocan como en la figura 4.18*a*), entonces el sistema se denomina **sistema derecho**; si se colocan como en la figura 4.18*b*), se trata de un **sistema izquierdo**. En las figuras, las flechas indican la dirección positiva de los ejes. La razón para la elección de estos términos es la siguiente: en un sistema derecho, si coloca su mano derecha de manera que el dedo índice señale en la dirección positiva del eje x mientras que el medio apunta en la dirección positiva del eje y, entonces su pulgar apuntará en la dirección positiva del eje z. Este concepto se ilustra en la figura 4.19. La misma regla funciona para e l sistema izquierdo con los dedos de la mano izquierda. En el resto de este libro se seguirá la práctica común de describir los ejes de coordenadas usando un sistema derecho.



a) *b*)

Figura 4.18
a) Un sistema derecho; *b*) Un sistema izquierdo.

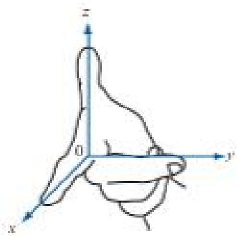


Figura 4.19
La mano derecha indica las direcciones de un sistema derecho.

Planos coordenados

Los tres ejes en nuestro sistema determinan tres **planos coordenados**, que se denominan plano xy, plano xz y plano yz. El plano xy contiene los ejes x y y y es simplemente el plano con el que se ha venido trabajando hasta ahora en la mayor parte del libro. Se puede pensar en los planos xz y yz de modo similar.

Al tener nuestra estructura construida de ejes coordenados y planos, podemos describir cualquier punto P en $\mathbb{R}^3$ de una sola manera:

$$\boxed{P = (x, y, z)} \qquad (4.3.2)$$

en donde la primera coordenada x es la distancia dirigida del plano yz a P (medida en la dirección positiva del eje x a lo largo de una recta paralela al eje x), la segunda coordenada y es la distancia dirigida desde el plano xz hasta P (medida en la dirección positiva del eje y y a lo largo de una recta paralela al eje y), y la tercera coordenada z es la distancia dirigida desde el plano xy hasta P (medida en la dirección positiva del eje z y a lo largo de una recta paralela al eje z).

En este sistema, los tres planos coordenados dividen al espacio $\mathbb{R}^3$ en ocho **octantes**, de la misma forma que en $\mathbb{R}^2$ los ejes coordenados dividen al plano en cuatro cuadrantes. El octante en el que los tres ejes coordenados son positivos siempre se selecciona como el primero.

Sistema de coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3$

El sistema coordenado que acaba de establecerse con frecuencia se conoce como **sistema de coordenadas rectangulares** o **sistema de coordenadas cartesianas**. Una vez que la noción de describir un punto en este sistema le resulte familiar, pueden extenderse muchas de las ideas a partir del plano.

Teorema 4.3.1

Sean $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ dos puntos en el espacio. Entonces la distancia $\overline{PQ}$ entre P y Q está dada por

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \qquad (4.3.3)$$

Se pide al lector que pruebe este resultado en el problema 49.

EJEMPLO 4.3.1 **Cálculo de la distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^3$**

Calcule la distancia entre los puntos $(3, -1, 6)$ y $(-2, 3, 5)$.

SOLUCIÓN ► $\overline{PQ} = \sqrt{[3-(-2)]^2 + (-1-3)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{42}.$

En las secciones 4.1 y 4.2 se desarrollaron las propiedades geométricas de los vectores en el plano. Dada la similitud entre los sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, no es una sorpresa que los vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ tengan estructuras muy similares. Ahora se desarrollará el concepto de un vector en el espacio. El desarrollo seguirá de cerca los avances de las últimas dos secciones y, por lo tanto, se omitirán algunos detalles.

Segmento de recta dirigido

Vector en $\mathbb{R}^3$

Representación de un vector

Sean P y Q dos puntos distintos en $\mathbb{R}^3$. Entonces el **segmento de recta dirigido** $\overrightarrow{PQ}$ es el segmento de recta que se extiende de P a Q. Dos segmentos de recta dirigidos son **equivalentes** si tienen la misma magnitud y dirección. Un **vector en $\mathbb{R}^3$** es el conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado, y cualquier segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ en ese conjunto se llama una **representación** de un vector.

Hasta aquí las definiciones son idénticas. Por conveniencia, se elige P en el origen para poder describir el vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{0Q}$ mediante las coordenadas (x, y, z) del punto Q.

Magnitud de un vector

Entonces la **magnitud** de $\mathbf{v} = |\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (del teorema 4.3.1).

EJEMPLO 4.3.2 **Cálculo de la magnitud de un vector en $\mathbb{R}^3$**

Sea $\mathbf{v} = (1, 3, -2)$. Encuentre $|\mathbf{v}|$.

SOLUCIÓN ► $|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}.$

D ► Definición 4.3.1

Sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ dos vectores, y sea α un número real (escalar). Entonces se define

y

Suma de vectores y multiplicación por un escalar en $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
$$\alpha\mathbf{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

Ésta es la misma definición de suma de vectores y multiplicación por un escalar que se tenía; se ilustra en la figura 4.20.

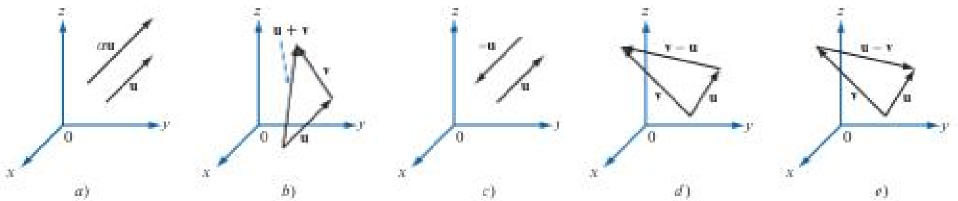


Figura 4.20

Ilustración de la suma de vectores y la multiplicación por un escalar en $\mathbb{R}^3$.

Un **vector unitario** $\mathbf{u}$ es un vector con magnitud 1. Si $\mathbf{v}$ es un vector diferente de cero, entonces $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$.

Vector unitario

EJEMPLO 4.3.3 **Cálculo de un vector unitario en $\mathbb{R}^3$**

Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que $\mathbf{v} = (2, 4, -3)$.

SOLUCIÓN ► Como $\mathbf{v} = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$ se tiene

$$\mathbf{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}, -\frac{3}{\sqrt{29}}\right)$$

Ahora se puede definir formalmente la dirección de un vector en $\mathbb{R}^3$. No se puede definir como el ángulo θ que forma el vector con el eje x positivo ya que, por ejemplo, si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, por lo que existe un número infinito de vectores que forman un ángulo θ con el lado positivo del eje x, y estos vectores juntos forman un cono (vea la figura 4.21).

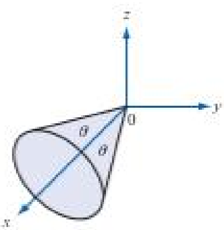


Figura 4.21

Todos los vectores que están en este cono forman un ángulo θ con la parte positiva del eje x.

Definición 4.3.2

Dirección en $\mathbb{R}^3$

La **dirección** de un vector $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^3$ se define como el vector unitario $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

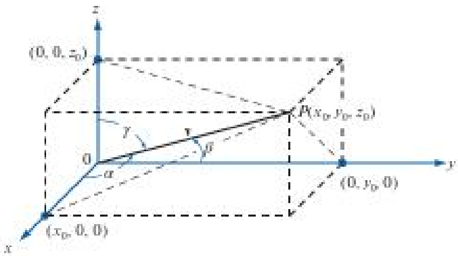


Figura 4.22

El vector **v** forma un ángulo α con el lado positivo del eje x, β con el lado positivo del eje y y γ con el eje positivo del eje z.

Observación

Se pudo haber definido la dirección de un vector **v** en $\mathbb{R}^2$ de esta manera, ya que si $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, entonces $\mathbf{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, donde θ es la dirección de **v**.

Es conveniente definir la dirección de un vector **v** en términos de algunos ángulos. Sea **v** el vector $\overrightarrow{0P}$ descrito en la figura 4.22. Definimos α como el ángulo entre **v** y el eje x positivo, β el ángulo entre **v** y el eje y positivo, y γ el ángulo entre **v** y el eje z positivo. Los ángulos α, β y γ se denominan **ángulos directores** del vector **v**. Entonces, de la figura 4.22,

Ángulos directores

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x_0}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos\beta = \frac{y_0}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos\gamma = \frac{z_0}{|\mathbf{v}|}} \tag{4.3.4}$$

Si **v** es un vector unitario, entonces $|\mathbf{v}| = 1$ y

$$\boxed{\cos\alpha = x_0, \qquad \cos\beta = y_0, \qquad \cos\gamma = z_0} \tag{4.3.5}$$

Por definición, cada uno de estos tres ángulos cae en el intervalo de $[0, \pi]$. Los cosenos de estos ángulos se denominan **cosenos directores** del vector **v**. Observe, de la ecuación (4.3.4), que

Cosenos directores

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = 1} \tag{4.3.6}$$

Si α, β y γ son tres números cualesquiera entre cero y π tales que satisfacen la condición (4.3.6), entonces determinan de manera única un vector unitario dado por $\mathbf{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Números directores

Observación. Si $\mathbf{v} = (a, b, c)$ y $|\mathbf{v}| \neq 1$, entonces los números a, b y c se llaman **números directores** del vector **v**.

EJEMPLO 4.3.4 Cálculo de los cosenos directores de un vector en $\mathbb{R}^3$

Encuentre los cosenos directores del vector $\mathbf{v} = (4, -1, 6)$.

SOLUCIÓN ► La dirección de **v** es $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{53}} = \left(\frac{4}{\sqrt{53}}, -\frac{1}{\sqrt{53}}, \frac{6}{\sqrt{53}}\right)$. Entonces $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{53}}$

calculadora para obtener $\alpha \approx 56.7^\circ \approx 0.989$ rad, $\beta \approx 97.9^\circ \approx 1.71$ rad y $\gamma = 34.5^\circ \approx 0.602$ rad. En la figura 4.23 se presenta un esbozo del vector, junto con los ángulos α, β y γ.

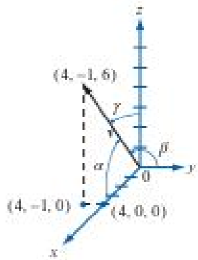


Figura 4.23

Los cosenos directores de (4, −1, 6) son cos α, cos β y cos γ.

EJEMPLO 4.3.5 Cálculo de un vector en $\mathbb{R}^3$ dados su magnitud y cosenos directores

Encuentre un vector $\mathbf{v}$ de magnitud 7 cuyos cosenos directores son $\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

SOLUCIÓN ► Sea $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Entonces $\mathbf{u}$ es un vector unitario ya que $|\mathbf{u}| = 1$. Así, la dirección de $\mathbf{v}$ está dada por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\ \mathbf{u} = 7\mathbf{u} = \left(\frac{7}{\sqrt{6}}, \frac{7}{\sqrt{3}}, \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$.

Nota. Este problema se puede resolver porque $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$.

Es interesante observar que si $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^2$ es un vector unitario, se puede escribir $\mathbf{v} = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$, donde θ es la dirección de $\mathbf{v}$, y entonces $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ son los cosenos directores de $\mathbf{v}$. En este caso, $\alpha = \theta$ y se define β como el ángulo que forma $\mathbf{v}$ con el eje y (vea la figura 4.24). Por lo tanto, $\beta = \left(\frac{\pi}{2}\right) - \alpha$, de manera que $\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2-\alpha}\right) = \operatorname{sen}\alpha$ y $\mathbf{v}$ se puede escribir en la forma de "cosenos directores"

$$\mathbf{v} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j}$$

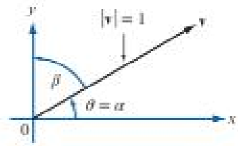


Figura 4.24

Si $\beta = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ y $\mathbf{v}$ es un vector unitario, entonces $\mathbf{v} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j}$.

En la sección 4.1 se observó que cualquier vector en el plano se puede escribir en términos de los vectores base $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. Para extender esta idea a $\mathbb{R}^3$ se define

$$\boxed{\mathbf{i} = (1, 0, 0) \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1)} \tag{4.3.7}$$

Aquí, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son vectores unitarios. El vector $\mathbf{i}$ está sobre el eje x, $\mathbf{j}$ sobre el eje y y $\mathbf{k}$ sobre el eje z. En la figura 4.25 se puede ver un bosquejo. Si $\mathbf{v} = (x, y, z)$ es cualquier vector en $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\mathbf{v} = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Esto es, *cualquier vector* $\mathbf{v}$ *en* $\mathbb{R}^3$ *se puede escribir de manera única en términos de los vectores* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ *y* $\mathbf{k}$.

La definición de producto escalar en $\mathbb{R}^3$ es la definición que se presentó en la sección 2.2. Observe que $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$ e $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0$.

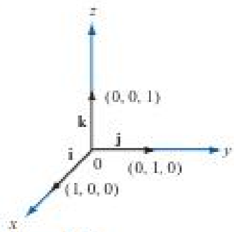


Figura 4.25

Los vectores base $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en $\mathbb{R}^3$.

Teorema 4.3.2

Si φ denota el ángulo positivo más pequeño entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ diferentes de cero, se tiene

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}} \tag{4.3.8}$$

Demostración

La prueba es casi idéntica a la prueba del teorema 4.2.2 y se deja al lector como ejercicio (vea

EJEMPLO 4.3.6 **Cálculo del coseno del ángulo entre dos vectores en $\mathbb{R}^3$**

Calcule el coseno del ángulo entre $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

SOLUCIÓN ► $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 7$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{14}$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{26}$, por lo que $\cos \varphi \, \frac{7}{\sqrt{(14)(26)}} = \frac{7}{\sqrt{364}} \approx 0.3669$ y $\varphi \approx 68.5° \approx 1.2$ rad.

Definición 4.3.3

Vectores paralelos y ortogonales

Dos vectores **u** y **v** diferentes de cero son:

i) **Paralelos** si el ángulo entre ellos es cero o π.

ii) **Ortogonales** (o **perpendiculares**) si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

Teorema 4.3.3

i) Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces **u** y **v** son paralelos si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para algún escalar $\alpha \neq 0$.

ii) Si **u** y **v** son diferentes de cero, entonces **u** y **v** son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Demostración

De nuevo la prueba es sencilla y se deja como ejercicio (vea el problema 54).

Ahora se dará la definición de la proyección de un vector sobre otro. Primero se establece el teorema análogo al teorema 4.2.5 (y cuya demostración es idéntica).

Teorema 4.3.4

Sea **v** un vector diferente de cero. Entonces, para cualquier otro vector **u**,

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$$

es ortogonal a **v**, es decir, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Definición 4.3.4

Proyección

Proyección de **u** sobre **v**

Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero. Entonces la **proyección** de **u** sobre **v**, denotada por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$, está definida por

$$\boxed{\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}} \qquad (4.3.9)$$

EJEMPLO 4.3.7 **Cálculo de una proyección en $\mathbb{R}^3$**

Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$. Encuentre $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

SOLUCIÓN ► En este caso, $\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{2}{41}$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{2}{41}\mathbf{i} + \frac{4}{41}\mathbf{j} - \frac{12}{41}\mathbf{k}$. La componente de $\mathbf{u}$ en la dirección $\mathbf{v}$ es $\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{41}}$.

Observe que, igual que en el plano, $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es un vector que tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$ si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$ y la dirección opuesta a la de $\mathbf{v}$ si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$.

RESUMEN 4.3

- El **segmento de recta dirigido** que se extiende de P a Q en $\mathbb{R}^3$ denotado por $\overrightarrow{PQ}$ es el segmento de recta que va de P a Q.
- Dos segmentos de recta dirigidos en $\mathbb{R}^3$ son **equivalentes** si tienen la misma magnitud (longitud) y dirección.
- ***Definición geométrica de un vector***

  Un vector en $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos en $\mathbb{R}^3$ equivalentes a un segmento de recta dirigido dado. Una representación de un vector tiene su punto inicial en el origen y se denota por $\overrightarrow{0R}$.
- ***Definición algebraica de un vector***

  El **vector cero** es el vector (0, 0). En $\mathbb{R}^3$, un vector $\mathbf{v}$ es una **terna ordenada** de números reales (a, b, c): los números a, b y c son las componentes del vector $\mathbf{v}$. El **vector cero** en $\mathbb{R}^3$ es el vector (0, 0, 0).
- Las definiciones geométrica y algebraica de un vector en $\mathbb{R}^3$ se relacionan de la siguiente manera: si $\mathbf{v} = (a, b, c)$, entonces una representación de $\mathbf{v}$ es $\overrightarrow{0R}$, donde $R = (a, b, c)$.
- Si $\mathbf{v} = (a, b, c)$, entonces la magnitud de $\mathbf{v}$ está dada por $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- ***Desigualdad del triángulo***

  En $\mathbb{R}^3$

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$$

- En $\mathbb{R}^3$, sean $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$; entonces $\mathbf{v} = (a, b, c)$ se puede escribir como

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

- Un **vector unitario** $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^3$ es un vector que satisface $|\mathbf{u}| = 1$.

  Si $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$, entonces

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

- El **ángulo** φ entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^3$ es el único número en $[0, \pi]$ que satisface

- Dos vectores en $\mathbb{R}^3$ son **paralelos** si el ángulo entre ellos es 0 o π. Son paralelos si uno es un múltiplo escalar del otro.
- Dos vectores $\mathbb{R}^3$ son **ortogonales** si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$. Son ortogonales si y sólo si su producto escalar es cero.
- Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^3$. La **proyección** de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es un vector, denotado por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$, que está definido por

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$$

  El escalar $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ se llama la **componente** de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$.
- $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es paralelo a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$.
- La **dirección** de un vector $\mathbf{v}$ $\mathbb{R}^3$ es el vector unitario

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

- Si $\mathbf{v} = (a, b, c)$, entonces $\cos\alpha = \frac{a}{|\mathbf{v}|}$, $\cos\beta = \frac{b}{|\mathbf{v}|}$ y $\cos\gamma = \frac{c}{|\mathbf{v}|}$ se llaman **cosenos directores** de $\mathbf{v}$.

AUTOEVALUACIÓN 4.3

I) Responda si la afirmación siguiente es falsa o verdadera. La práctica común seguida en este libro es desplegar los ejes xyz para $\mathbb{R}^3$ como un sistema derecho.

Respuesta: ____________________

II) La distancia entre los puntos (1, 2, 3) y (3, 5, −1) es ______.

a) $\sqrt{(1+2+3)^2 + (3+5-1)^2}$ *b*) $\sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2}$

c) $\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}$ *d*) $\sqrt{4^2 + 7^2 + 2^2}$

III) El punto (0.3, 0.5, 0.2) está ______ la esfera unitaria.

a) en la tangente a *b*) sobre

c) dentro de *d*) fuera de

IV) $(x-3)^2 + (y+5)^2 + z^2 = 81$ es la ecuación de la esfera con __________.

a) centro 81 y radio (−3, 5, 0) *b*) radio 81 y centro (−3, 5, 0)

c) radio −9 y centro (3, −5, 0) *d*) radio 9 y centro (3, −5, 0)

V) $\mathbf{j} - (4\mathbf{k} - 3\mathbf{i}) =$ _______.

a) (1, −4, −3) *b*) (1, −4, 3)

c) (−3, 1, −4) *d*) (3, 1, −4)

VI) $(\mathbf{i} + 3\mathbf{k} - \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{k} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{i}) =$ _______.

a) $2 + 4 + 3 = 9$ *b*) $(1 + 3 - 1)(1 - 4 + 2) = -3$

VII) El vector unitario en la misma dirección que $\mathbf{i} + 3\mathbf{k} - \mathbf{j}$ es ____________.

a) $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

b) $\frac{1}{5}(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$

c) $\frac{1}{3}(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$

d) $\frac{1}{3}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$

VIII) La componente de $\mathbf{u}$ en la dirección $\mathbf{w}$ es

a) $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ *b)* $\dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ *c)* $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\,\mathbf{w}}{|\mathbf{w}||\mathbf{w}|}$ *d)* $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\,\mathbf{u}}{|\mathbf{w}||\mathbf{u}|}$

Respuestas a la autoevaluación

I) V **II)** *c)* **III)** *c)* **IV)** *d)*
V) *d)* **VI)** *a)* **VII)** *c)* **VIII)** *a)*

PROBLEMAS 4.3

De los problemas 1 al 6 encuentre la distancia entre los puntos:

1. $(3, -4, 7)$; $(3, -4, 9)$

2. $(2, -3, -1)$; $(1, -1, 4)$

3. $(-2, 1, 3)$; $(4, 1, 3)$

4. $P = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$

5. $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$

6. $P = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$

En los problemas 7 al 26 encuentre la magnitud y los cosenos directores del vector dado.

7. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

8. $\mathbf{v} = 3\mathbf{j}$

9. $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

10. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i}$

11. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

12. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$

13. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

14. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

15. $\mathbf{v} = \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

16. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

17. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

18. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

20. $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 6\mathbf{k}$

21. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

22. $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

23. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

24. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

25. $\mathbf{v} = 150\mathbf{i} - 120\mathbf{j} - 180\mathbf{k}$

26. $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

27. Los tres ángulos directores de cierto vector unitario son los mismos y están entre cero y $\frac{\pi}{2}$. ¿Cuál es el vector?

29. Demuestre que no existe un vector unitario cuyos ángulos directores sean $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{4}$.

30. Sea $P = (-2, 1, 4)$ y $Q = (3, 5, -8)$. Encuentre un vector unitario en la misma dirección de $\overrightarrow{PQ}$.

31. Sea $P = (3, 1, -3)$ y $Q = (2, 4, 6)$. Encuentre un vector unitario cuya dirección es opuesta a la de $\overrightarrow{PQ}$.

32. Utilizando P y Q del problema 31, encuentre todos los puntos R tales que $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{PQ}$.

*33. Demuestre que el conjunto de puntos que satisfacen la condición del problema 32 y la condición $|\overrightarrow{P}| = 1$ forman un círculo.

Desigualdad del triángulo

34. **Desigualdad del triángulo** Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en $\mathbb{R}^3$, demuestre que $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

35. ¿Bajo qué circunstancias puede sustituirse la desigualdad en el problema 34 por un signo de igualdad?

En los problemas 36 al 51, sea $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{t} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

36. Calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$
37. Calcule $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$
38. Calcule $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$
39. Calcule $\mathbf{t} + 3\mathbf{w} - \mathbf{v}$
40. Calcule $2\mathbf{u} + 7\mathbf{w} + 5\mathbf{v}$
41. Calcule $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})$
42. Calcule $2\mathbf{v} + 7\mathbf{t} - \mathbf{w}$
43. Calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
44. Calcule $(3\mathbf{t} - 2\mathbf{u}) \cdot (5\mathbf{v} + 2\mathbf{w})$
45. Calcule $|\mathbf{w}|$
46. Calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}$
47. Calcule el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$
48. Calcule el ángulo entre $\mathbf{t}$ y $\mathbf{w}$
49. Calcule $\text{proy}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}$
50. Calcule $\text{proy}_{\mathbf{t}}\, \mathbf{w}$
51. Calcule $\mathbf{w} \cdot \text{proy}_{\mathbf{t}}\, \mathbf{v}$

52. Pruebe el teorema 4.3.1. [*Sugerencia:* Utilice el teorema de Pitágoras dos veces en la figura 4.26.]

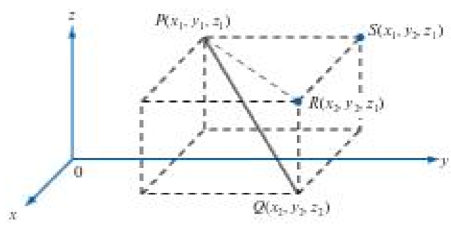


Figura 4.26

53. Pruebe el teorema 4.3.2.

54. Pruebe el teorema 4.3.3.

55. Pruebe el teorema 4.3.4.

4.4 El producto cruz de dos vectores

Hasta el momento el único producto de vectores considerado ha sido el producto escalar o producto punto. Ahora se define un nuevo producto, llamado *producto cruz* (o *producto vectorial*), que está definido *sólo* en $\mathbb{R}^3$.

Nota histórica

El producto cruz fue definido por Hamilton en uno de una serie de artículos publicados en *Philosophical Magazine* entre 1844 y 1850.

Definición 4.4.1

Producto cruz

Sean $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}$. Entonces el **producto cruz (cruz vectorial)** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, denotado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, es un nuevo vector definido por

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{i} + (c_1a_2 - a_1c_2)\mathbf{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k}} \tag{4.4.1}$$

Aquí el producto cruz parece estar definido de manera arbitraria. Es evidente que existen muchas maneras de definir un producto vectorial. ¿Por qué se escogió esta definición? La respuesta a esta pregunta se da en la presente sección demostrando algunas propiedades del producto cruz e ilustrando algunas de sus aplicaciones.

Nota

Note que el resultado del producto cruz es un vector, mientras que el resultado del producto escalar es un escalar.

EJEMPLO 4.4.1 Cálculo del producto cruz de dos vectores

Sean $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Calcule $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

SOLUCIÓN ► Usando la fórmula (4.4.1) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= [(-1)(-4) - (2)(3)]\mathbf{i} + [(2)(2) - (1)(-4)]\mathbf{j} + [(1)(3) - (-1)(2)]\mathbf{k} \\ &= -2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 5\mathbf{k}\end{aligned}$$

Nota. En este ejemplo, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot (-2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = -2 - 8 + 10 = 0$. De manera similar, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. Es decir, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$. Como se verá en breve, el producto cruz de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es siempre ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Antes de continuar el estudio de las aplicaciones del producto cruz se observa que existe una forma sencilla de calcular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ usando determinantes.

Teorema 4.4.1

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}$$

Demostración

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{i} + (c_1a_2 - a_1c_2)\mathbf{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k}$$

Nota

En realidad no se tiene un determinante porque **i**, **j** y **k** no son números. Sin embargo, al usar la notación de determinantes, el teorema 4.4.1 ayuda a recordar cómo calcular un producto cruz.

EJEMPLO 4.4.2 **Uso del teorema 4.4.1 para calcular un producto cruz**

Calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

SOLUCIÓN ►

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -5 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (4-10)\mathbf{i} - (2-15)\mathbf{j} + (-4+12)\mathbf{k}$$

$$= -6\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

El siguiente teorema resume algunas propiedades del producto cruz. Su demostración se deja como ejercicio (vea los problemas 41 al 44 de esta sección).

Teorema 4.4.2

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea α un escalar, entonces:

i) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

ii) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ (**propiedad anticonmutativa para el producto vectorial**).

iii) $(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

iv) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ (**propiedad distributiva para el producto vectorial**).

v) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (esto se llama **triple producto escalar** de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$).

vi) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ (es decir, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$).

vii) Si tanto $\mathbf{u}$ como $\mathbf{v}$ no son el vector cero, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

El inciso vi) del teorema 4.4.2 es el que se usa con más frecuencia. Se vuelve a establecer como sigue:

> El producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$.

Vector normal

Regla de la mano derecha

Se sabe que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es un vector ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, pero siempre habrá *dos* vectores unitarios ortogonales a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ (vea la figura 4.27). Los vectores $\mathbf{n}$ y $-\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ por la letra inicial de **normal**) son ambos ortogonales a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. ¿Cuál tiene la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$? La respuesta está dada por la **regla de la mano derecha**. Si se coloca la mano derecha de manera que el índice apunte en la dirección de $\mathbf{u}$ y el dedo medio en la dirección de $\mathbf{v}$, entonces el pulgar apuntará en la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (vea la figura 4.28).

Una vez que se ha estudiado la dirección del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, la atención se dirige a su magnitud.

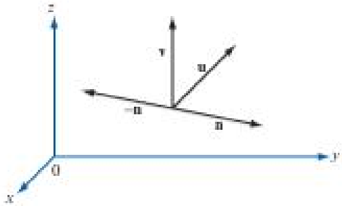


Figura 4.27

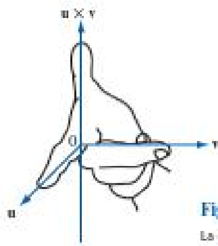


Figura 4.28

La dirección de u × v se puede

Teorema 4.4.3

Si φ es un ángulo entre **u** y **v**, entonces

$$\boxed{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|\ \text{sen}\ \varphi} \qquad (4.4.2)$$

Demostración

No es difícil demostrar (comparando coordenadas) que $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2\ |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$ (vea el problema 40). Entonces, como $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 = |\mathbf{u}|^2\ |\mathbf{v}|^2 \cos^2\varphi$ (del teorema 4.3.2),

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2 &= |\mathbf{u}|^2\ |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2\ |\mathbf{v}|^2\cos^2\varphi = |\mathbf{u}|^2\ |\mathbf{v}|^2\ (1-\cos^2\theta)\\ &= |\mathbf{u}|^2\ |\mathbf{v}|^2\ \text{sen}^2\ \varphi\end{aligned}$$

y el teorema queda demostrado después de sacar la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación. Observe que sen $\varphi \geq 0$ porque $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Existe una interpretación geométrica interesante del teorema 4.4.3. Los vectores **u** y **v** están dibujados en la figura 4.29 y se puede pensar que son dos lados adyacentes de un paralelogramo. Entonces de la geometría elemental se ve que

El área del paralelogramo que tiene lados adyacentes **u** y **v** es igual a $|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|\ \text{sen}\ \varphi = |\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$ **(4.4.3)**

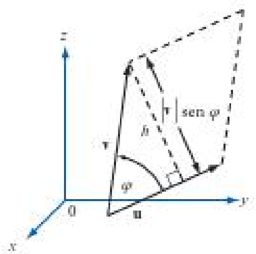


Figura 4.29

φ es el ángulo entre **u** y **v**. $\frac{h}{|\mathbf{v}|} = \text{sen}\ \varphi$, de manera que $h = |\mathbf{v}|\ \text{sen}\ \varphi$.

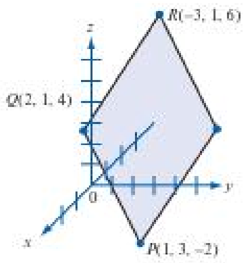


Figura 4.30

Un paralelogramo en $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 4.4.3 Cálculo del área de un paralelogramo en $\mathbb{R}^3$

Encuentre el área del paralelogramo con vértices consecutivos en $P = (1, 3, -2)$, $Q = (2, 1, 4)$ y $R = (-3, 1, 6)$ (vea la figura 4.30).

$$\text{Área} = |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}| = |(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \times (-5\mathbf{i} + 2\mathbf{k})|$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 6 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = |4\mathbf{i} - 32\mathbf{j} - 10\mathbf{k}| = \sqrt{1\,140} \text{ unidades cuadradas.}$$

Interpretación geométrica de los determinantes de 2 × 2 (otra vez)

En la sección 3.1 se estudió el significado geométrico de un determinante de 2 × 2. Ahora se observará el mismo problema. Haciendo uso del producto cruz se obtiene el resultado de la sección 3.1 en forma más sencilla. Sea A una matriz de 2 × 2 y sean **u** y **v** dos vectores de dos componentes. Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Estos vectores están dados en la figura 4.31.

Área generada

El **área generada** por **u** y **v** se define como el área del paralelogramo dado en la figura. Se puede pensar que **u** y **v** son vectores en $\mathbb{R}^3$ que están en el plano xy. Entonces $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, y

$$\text{área generada por } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & u_1 & 0 \\ v_2 & u_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= |(u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}| = |u_1v_2 - u_2v_1|^*$$

Ahora sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}' = A\mathbf{v}$. Entonces $\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix}$.

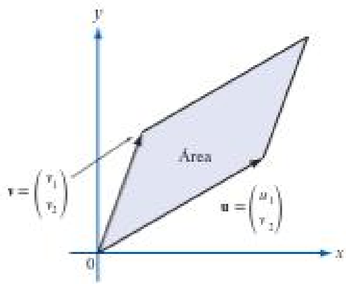


Figura 4.31

El área de la región sombreada es el área generada por **u** y **v**.

¿Cuál es el área generada por **u**′ y **v**′? Se calcula siguiendo los pasos anteriores.

$$\text{Área generada por } \mathbf{u}' \text{ y } \mathbf{v}' = |\mathbf{u}' \times \mathbf{v}'| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_{11}u_1 + a_{12}u_2 & a_{21}u_1 + a_{22}u_2 & 0 \\ a_{11}v_1 - a_{12}v_2 & a_{21}v_1 + a_{22}v_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= |(a_{11}u_1 + a_{12}u_2)(a_{21}v_1 + a_{22}v_2) - (a_{21}u_1 + a_{22}u_2)(a_{11}v_1 - a_{12}v_2)|$$

La manipulación algebraica verifica que la última expresión es igual a

$$|(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(u_1v_2 - u_2v_1)| = \pm\det A \text{ (área generada por } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v})$$

Entonces (en este contexto): *el determinante tiene el efecto de multiplicar el área.* En el problema 48 se pide al lector que demuestre que de cierta forma un determinante de 3×3 tiene el efecto de multiplicar el volumen.

Interpretación geométrica del triple producto escalar

Sean **u**, **v** y **w** tres vectores que no están en el mismo plano. Entonces forman los lados de un **paralelepípedo** en el espacio (vea la figura 4.32). Calculemos su volumen. La base del paralelepípedo es un paralelogramo. Su área, de (3), es igual a $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

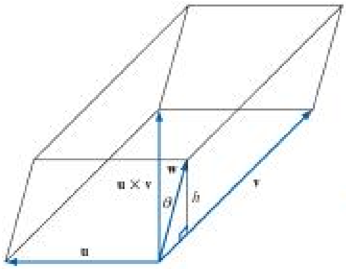


Figura 4.32

Tres vectores **u**, **v** y **w**, que no están en el mismo plano, determinarán un paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$.

El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a **u** como a **v**, y por ello es ortogonal al paralelogramo determinado por **u** y **v**. La altura del paralelepípedo, h, se mide a lo largo del vector ortogonal al paralelogramo.

Del análisis de la proyección, se ve que h es el valor absoluto de la componente de **w** en la dirección (ortogonal) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Así, de la ecuación (4.3.10):

$$h = \text{componente de } \mathbf{w} \text{ en la dirección } \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left|\frac{\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}\right|$$

Entonces

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = \text{área de base} \times \text{altura}$$

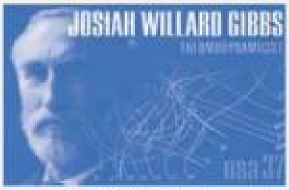
$$= |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \left[\frac{\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}\right] = |\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$$

Es decir,

El volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores **u**, **v** y **w** es igual a $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$. Dicho de otro modo, valor **(4.4.4)**

Semblanza de...

Josiah Willard Gibbs y los orígenes del análisis vectorial (1839-1903)



Josiah Willard Gibbs
(The Granger Collection, Nueva York)

Como se ha observado anteriormente, el estudio de los vectores se originó con la invención de los cuaterniones de Hamilton. Hamilton y otros desarrollaron los cuaterniones como herramientas matemáticas para la exploración del espacio físico. Pero los resultados fueron decepcionantes porque vieron que los cuaterniones eran demasiado complicados para entenderlos con rapidez y aplicarlos fácilmente. Los científicos se dieron cuenta de que muchos problemas se podían manejar considerando la parte vectorial por separado y de este modo comenzó el análisis vectorial.

Este trabajo se debe principalmente al físico estadounidense Josiah Willard Gibbs (1839-1903). Como nativo de New Haven, Connecticut, Gibbs estudió matemáticas y física en la Universidad de Yale y recibió el grado de doctor en 1863. Posteriormente estudió matemáticas y física en París, Berlín y Heidelberg. En 1871, fue nombrado profesor de física en Yale. Era un físico original que realizó muchas publicaciones en el área fisicomatemática. El libro de Gibbs *Vector Analysis* apareció en 1881 y de nuevo en 1884. En 1902 publicó *Elementary Principles of Statistical Mechanics*. Los estudiantes de matemáticas aplicadas se encontraron con el singular **fenómeno de Gibbs** en las series de Fourier.

El libro pionero de Gibbs, *Vector Analysis*, era en realidad un panfleto pequeño impreso para la distribución privada —en principio para que sus estudiantes lo usaran—. De cualquier forma, creó un gran entusiasmo entre aquellos que veían una alternativa a los cuaterniones, por lo que pronto el libro fue ampliamente difundido. Finalmente, el material se convirtió en un libro formal escrito por E. B. Wilson. El libro *Vector Analysis* de Gibbs y Wilson se basaba en la cátedra de Gibbs, y se publicó en 1901.

Todos los estudiantes de física elemental se encuentran con el trabajo de Gibbs. En la introducción a la física, un espacio vectorial se ve como un segmento de recta dirigido, o flecha. Gibbs dio definiciones de igualdad, suma y multiplicación de vectores; éstas son esencialmente las definiciones dadas en este capítulo. En particular, la parte vectorial de un cuaternión se escribía como $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, y ésta es la forma en que ahora se describen los vectores en $\mathbb{R}^3$.

Gibbs definió el producto escalar, inicialmente sólo para los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$$
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = 0$$

Siguió a esto la definición más general. Gibbs aplicó el producto escalar en problemas referentes a la fuerza (recuerde, primero era físico). Si $\mathbf{F}$ es un vector de fuerza de magnitud $|\mathbf{F}|$ que actúa en la dirección del segmento $\overrightarrow{OQ}$ (vea la figura 4.33), entonces, la efectividad de esta fuerza en la dirección del segmento $\overrightarrow{OP}$ (es decir, a lo largo del vector $\mathbf{u}$) es $\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}$. Si $|\mathbf{u}| = 1$, entonces $\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}$ es la componente de $\mathbf{F}$ en la dirección de $\mathbf{u}$. También el producto cruz tiene un significado físico.

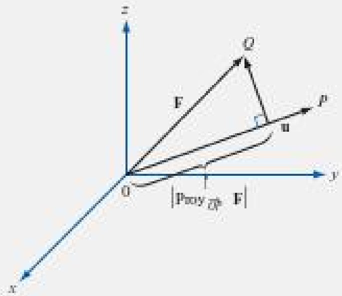


Figura 4.33
La efectividad de $\mathbf{F}$ en la dirección de $\overrightarrow{OP}$ es la componente de $\mathbf{F}$ en la dirección de $\overrightarrow{OP}$ ($= \mathbf{u}$) si $|\mathbf{u}| = 1$.

Suponga que un vector de fuerza $\mathbf{F}$ actúa en un punto P en el espacio en la dirección de $\overrightarrow{PQ}$. Si $\mathbf{u}$ es el vector representado por $\overrightarrow{OP}$, entonces el momento de fuerza ejercido por $\mathbf{F}$ alrededor del origen es el vector $\mathbf{u} \times \mathbf{F}$ (vea la figura 4.34).

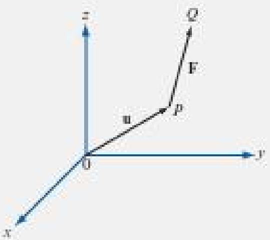


Figura 4.34
El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{F}$ es el momento de la fuerza alrededor del origen.

Tanto el producto escalar como el producto cruz entre vectores aparecen frecuentemente en las aplicaciones físicas que involucran el cálculo de varias variables. Éstas incluyen las famosas ecuaciones de Maxwell en electromagnetismo.

Al estudiar matemáticas al final del siglo XX, no debemos perder de vista el hecho de que la mayor parte de las matemáticas modernas se desarrollaron para resolver problemas del mundo real. Los vectores fueron desarrollados por Gibbs y otros para faci-

RESUMEN 4.4

- Sea $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}$. Entonces el **producto cruz** o **producto vectorial** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, denotado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, está dado por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

- ***Propiedades del producto cruz***

  i) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

  ii) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

  iii) $(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

  iv) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$.

  v) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (el **triple producto escalar**).

  vi) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$.

  vii) Si tanto $\mathbf{u}$ como $\mathbf{v}$ no son el vector cero, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

- Si φ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$ sen φ = área del paralelogramo con lados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

AUTOEVALUACIÓN 4.4

I) $\mathbf{i} \times \mathbf{k} - \mathbf{k} \times \mathbf{i} =$ ______.

a) 0 *b*) $\mathbf{j}$ *c*) $2\mathbf{j}$ *d*) $-2\mathbf{j}$

II) $\mathbf{i} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) =$ ______.

a) 0 *b*) $\mathbf{0}$ *c*) 1 *d*) $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

III) $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \times \mathbf{k}$ ______.

a) 0 *b*) $\mathbf{0}$ *c*) 1 *d*) no está definido

IV) $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{j} + \mathbf{k}) =$ ______.

a) 0 *b*) $\mathbf{0}$ *c*) 1 *d*) $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

V) El seno del ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ es ______.

a) $\dfrac{|\mathbf{u} \times \mathbf{w}|}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{w}|}$ *b*) $\dfrac{|\mathbf{u} \times \mathbf{w}|}{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}|}$

c) $\dfrac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}|}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{w}|}$ *d*) $|\mathbf{u} \times \mathbf{w}| - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}|$

VI) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} =$ ______.

a) $|\mathbf{u}|^2$ *b*) 1 *c*) 0 *d*) $\mathbf{0}$

Respuestas a la autoevaluación

I) *d*)	**II)** *c*)	**III)** *b*) = vector cero [**Nota.** $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \times \mathbf{k}$ *está* definido porque $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{k} = \mathbf{0} = \mathbf{i} \times [\mathbf{j} \times \mathbf{k})]$
IV) *d*)	**V)** *a*)	**VI)** *c*) = vector cero

PROBLEMAS 4.4

En los problemas 1 al 27 encuentre el producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

1. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

2. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

3. $\mathbf{u} = -7\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 9\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

4. $\mathbf{u} = -7\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

5. $\mathbf{u} = 5\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 1\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

6. $\mathbf{u} = -5\mathbf{i} + 1\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 10\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$

7. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$

8. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{k}$

9. $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} + 10\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

10. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

11. $\mathbf{u} = -10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + \mathbf{k}$

12. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$

13. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

14. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

15. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

16. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

17. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

18. $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

19. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

20. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

21. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

22. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

23. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = b\mathbf{i} + b\mathbf{j} + b\mathbf{k}$

24. $\mathbf{u} = -5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \frac{4}{3}\mathbf{k}$

25. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

26. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

27. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

28. Encuentre dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ como a $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

29. Encuentre dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ como a $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

30. Utilice el producto cruz para encontrar el seno del ángulo φ entre los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

31. Utilice el producto escalar para calcular el coseno del ángulo φ entre los vectores del problema 30. Después demuestre que para los valores calculados, $\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$.

En los problemas 32 al 39 encuentre el área del paralelogramo con los vértices adyacentes dados.

32. $(1, -2, 3)$; $(2, 0, 1)$; $(0, 4, 0)$

33. $(-8, 0, 10)$, $(-3, 2, -6)$, $(5, -5, 0)$

34. $(5, 1, 3)$; $(8, -1, -6)$; $(-7, -9, 6)$

35. $(7, -2, -3)$; $(-4, 1, 6)$; $(5, -2, 3)$

36. $(a, 0, 0)$; $(0, b, 0)$; $(0, 0, c)$

37. $(a, b, 0)$; $(a, 0, b)$; $(0, a, b)$

40. Demuestre que $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$. [*Sugerencia:* Escríbalo en términos de componentes.]

41. Utilice las propiedades 3.2.1, 3.2.4, 3.2.2 y 3.2.3 (en ese orden) para probar los incisos i), ii), iii) y iv) del teorema 4.4.2.

42. Pruebe el teorema 4.4.2 inciso v) escribiendo las componentes de cada lado de la igualdad.

43. Pruebe el teorema 4.4.2 inciso vi). [*Sugerencia:* Utilice los incisos ii) y v) y la propiedad de que el producto escalar es conmutativo para demostrar que $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = -\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$.]

44. Pruebe el teorema 4.4.2 inciso vii). [*Sugerencia:* Use el teorema 4.3.3, la propiedad 3.2.6, y la ecuación (4.4.2).]

45. Demuestre que si $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ y $\mathbf{w} = (a_3, b_3, c_3)$, entonces

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

46. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $3\mathbf{i}+2\mathbf{k}$, $-7\mathbf{j}+3\mathbf{k}$.

47. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$, donde $P = (5, 1, 3)$, $Q = (-3, 1, 4)$, $R = (-1, 0, 2)$ y $S = (-3, -1, 5)$.

****48.** El **volumen generado** por tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^3$ está definido como el volumen del paralelepípedo cuyos lados son $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ (como en la figura 4.32). Sea A una matriz de 3×3 y sean $\mathbf{u}_1 = A\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1 = A\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}_1 = A\mathbf{w}$. Demuestre que

Volumen generado

Volumen generado por $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 = (\det A)$(volumen generado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$).

Esto muestra que el determinante de una matriz de 2×2 multiplica el área; el determinante de una matriz de 3×3 multiplica el volumen.

49. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule el volumen generado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.
b) Calcule el volumen generado por $A\mathbf{u}$, $A\mathbf{v}$ y $A\mathbf{w}$.
c) Calcule $\det A$.
d) Demuestre que [volumen en el inciso *b*)] = $(\pm\det A)\times$ [volumen en el inciso *a*)].

50. El **triple producto cruz** de tres vectores en $\mathbb{R}^3$ está definido como el vector $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$. Demuestre que

Triple producto cruz

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$$

EJERCICIOS CON MATLAB 4.4

1. Utilice MATLAB para calcular el producto cruz de los vectores dados en los problemas 1, 2, 3, 4 y 10 de esta sección. Verifique sus respuestas calculando los productos escalares de los resultados con los vectores individuales (¿qué valor deben tener estos productos escalares?). El producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está definido como un vector de 3×1 dado por

```
[u(2)*v(3)-u(3)*v(2); -u(1)*v(3)+u(3)*v(1);
        u(1)*v(2)-v(1)*u(2)].
```

También puede utilizar el comando `cross`. Para más información utilice `doc cross` desde la pantalla de comandos de MATLAB.

2. *a)* Dé tres vectores aleatorios de 3×1, **u**, **v** y **w** (use `2*rand(3,1)-1`). Calcule $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, el producto escalar de **u** con $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (esto es `u'*cross(v,w)`). Sea $B = [\mathrm{u\ v\ w}]$. Encuentre $\det(B)$. Compare $\det(B)$ con el producto escalar. Haga lo mismo para varios juegos de **u**, **v** y **w**. Formule una conclusión y después pruébela (lápiz y papel).

   b) Sean **u**, **v** y **w** tres vectores aleatorios de 3×1 y sea A una matriz aleatoria de 3×3. Sea `A = round(10*(2*rand(3)-1))`. Calcule $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$, $|A\mathbf{u} \cdot (A\mathbf{v} \times A\mathbf{w})|$ y $|\det(A)|$. (En MATLAB, `abs(a)` dé $|\mathbf{a}|$.) Haga esto para varias matrices A hasta que pueda formular una conclusión respecto a las tres cantidades calculadas. Pruebe sus conclusiones para otras matrices aleatorias A.

   Según sus conclusiones, ¿qué significado geométrico tiene $|\det(A)|$?

   c) (*Lápiz y papel*) Usando *a*) demuestre que $A\mathbf{u} \cdot (A\mathbf{v} \times A\mathbf{w}) = \det([A\mathbf{u}\ A\mathbf{v}\ A\mathbf{w}])$, donde A es una matriz de 3×3. Argumente por qué $[A\mathbf{u}\ A\mathbf{v}\ A\mathbf{w}] = AB$, donde $B = [\mathbf{u}\ \mathbf{v}\ \mathbf{w}]$.

   Ahora pruebe la conclusión obtenida en el inciso *b*).

4.5 Rectas y planos en el espacio

En el plano $\mathbb{R}^2$ se puede encontrar la ecuación de una recta si se conocen dos puntos sobre la recta, o bien un punto y la pendiente de la misma. En $\mathbb{R}^3$ la intuición dice que las ideas básicas son las mismas. Como dos puntos determinan una recta, debe poderse calcular la ecuación de una recta en el espacio si se conocen dos puntos sobre ella. De manera alternativa, si se conoce un punto y la dirección de una recta, también debe ser posible encontrar su ecuación.

Comenzamos con dos puntos $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ sobre una recta L. Un vector paralelo a L es aquel con representación $\overrightarrow{PQ}$. Entonces,

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} \tag{4.5.1}$$

es un vector paralelo a L. Ahora sea $R = (x, y, z)$ otro punto sobre la recta. Entonces $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$, que a su vez es paralelo a **v**, de manera que por el teorema 4.3.3,

$$\overrightarrow{PR} = t\mathbf{v} \tag{4.5.2}$$

para algún número real t. Ahora vea la figura 4.35. Se tiene (en cada uno de los tres casos posibles)

$$\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{PR} \tag{4.5.3}$$

y al combinar (4.5.2) y (4.5.3) se obtiene

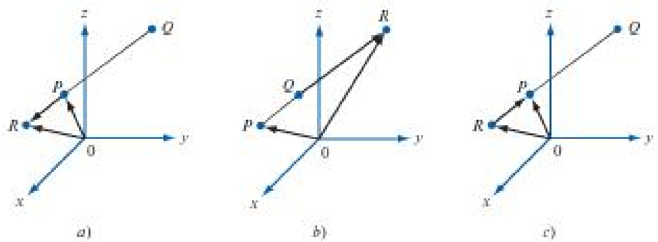


Figura 4.35
En los tres casos $\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{PR}$

Ecuación vectorial de una recta

La ecuación (4.5.4) se denomina **ecuación vectorial de una recta** L. Si R está sobre L, entonces (4.5.4) se satisface para algún número real t. Inversamente, si (4.5.4) se cumple, entonces invirtiendo los pasos, se ve que $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a $\mathbf{v}$, lo que significa que R está sobre L.

Si se extienden las componentes de la ecuación (4.5.4) se obtiene

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} + t(x_2 - x_1)\mathbf{i} + t(y_2 - y_1)\mathbf{j} + t(z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

o sea

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1) \end{aligned}} \qquad (4.5.5)$$

Ecuaciones paramétricas de una recta

Las ecuaciones (4.5.5) se denominan **ecuaciones paramétricas de una recta.**

Por último, al despejar t en (4.5.5) y definir $x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = b$ y $z_2 - z_1 = c$, se encuentra que si $a, b, c \neq 0$,

$$\boxed{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y + y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}} \qquad (4.5.6)$$

Ecuaciones simétricas de una recta

Las ecuaciones (4.5.6) se llaman **ecuaciones simétricas de una recta**. Aquí a, b y c son números directores del vector $\mathbf{v}$. Por supuesto, las ecuaciones (4.5.6) son válidas sólo si a, b y c son diferentes de cero.

EJEMPLO 4.5.1 Determinación de las ecuaciones de una recta

Encuentre las ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas de la recta L que pasa por los puntos $P = (2, -1, 6)$ y $Q = (3, 1, -2)$.

SOLUCIÓN ► Primero se calcula $\mathbf{v} = (3 - 2)\mathbf{i} + [1 - (-1)]\mathbf{j} + (-2 - 6)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$. Después, de (4.5.4), si $R = (x, y, z)$ está sobre la recta, se obtiene $\overrightarrow{0R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \overrightarrow{0P} + t\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k} + t(\hat{i} + 2\mathbf{j} - 8\mathbf{k})$, o sea,

$$x = 2 + t \qquad y = -1 + 2t \qquad z = 6 - 8t \qquad \text{ecuaciones paramétricas}$$

Por último, como $a = 1$, $b = 2$ y $c = -8$, las ecuaciones simétricas son

$$x - 2 \quad y + 1 \quad z - 6$$

Para verificar estas ecuaciones se comprueba que (2, −1, 6) y (3, 1, −2) estén en realidad en la recta. Se tiene [después de insertar estos puntos en (4.5.7)]

$$\frac{2-2}{1}=\frac{-1+1}{2}=\frac{6-6}{-8}=0$$

$$\frac{3-2}{1}=\frac{1+1}{2}=\frac{-2-6}{-8}=1$$

Se pueden encontrar otros puntos en la recta. Por ejemplo, si $t = 3$, se obtiene

$$3=\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-6}{-8}$$

lo que lleva al punto (5, 5, −18).

EJEMPLO 4.5.2 Obtención de las ecuaciones simétricas de una recta

Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos (1, −2, 4) y es paralela al vector $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

SOLUCIÓN ► Se usa la fórmula (4.5.6) con $P = (x_1, y_1, z_1) = (1, -2, 4)$ y $\mathbf{v}$ como se dio, de manera que $a = 1$, $b = 1$ y $c = -1$. Esto lleva a

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{1}$$

¿Qué pasa si uno de los números directores a, b y c es cero?

EJEMPLO 4.5.3 Determinación de las ecuaciones simétricas de una recta cuando un número director es cero

Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que contiene los puntos $P = (3, 4, -1)$ y $Q = (-2, 4, 6)$.

SOLUCIÓN ► Aquí $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$ y $a = -5$, $b = 0$, $c = 7$. Entonces una representación paramétrica de la recta es $x = 3 - 5t$, $y = 4$ y $z = -1 + 7t$. Despejando t se encuentra que

$$\frac{x+3}{-5}=\frac{z+1}{7} \quad \text{y} \quad y=4$$

La ecuación $y = 4$ es la ecuación de un plano paralelo al plano xz, así que se obtuvo una ecuación de una recta en ese plano.

EJEMPLO 4.5.4 Determinación de las ecuaciones simétricas de una recta cuando dos números directores son cero

Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos $P = (2, 3, -2)$ y $Q = (2, -1, -2)$.

SOLUCIÓN ► Aquí $\mathbf{v} = -4\mathbf{j}$ de manera que $a = 0$, $b = -4$ y $c = 0$. Una representación paramétrica de la recta es, por la ecuación (4.5.5), dada por $x = 2$, $y = 3 - 4t$,

Advertencia

Las ecuaciones paramétricas o simétricas de una recta no son únicas. Para ver esto, simplemente comience con otros dos puntos arbitrarios sobre

$z = -2$, que es paralela al eje y y pasa por los puntos $(2, 0, -2)$. De hecho, la ecuación $y = 3 - 4t$ dice, en esencia, que y puede tomar cualquier valor (mientras que x y z permanecen fijos).

EJEMPLO 4.5.5 Ilustración de la falta de unicidad en las ecuaciones simétricas de una recta

En el ejemplo 4.5.1 la recta cuyas ecuaciones se encontraron contiene al punto $(5, 5, -18)$. Al elegir $P = (5, 5, -18)$ y $Q = (3, 1, -2)$, se encuentra que $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$, de manera que $x = 5 - 2t$, $y = 5 - 4t$ y $z = -18 + 16t$. (Observe que si $t = \frac{3}{2}$ se obtiene $(x, y, z) = (2, -1, 6)$.) Las ecuaciones simétricas son ahora

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+18}{16}$$

Note que $(-2, -4, 16) = -2(1, 2, -8)$.

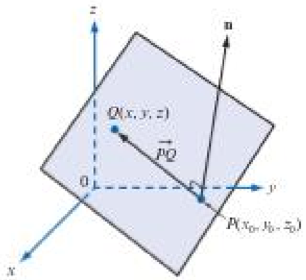


Figura 4.36

El vector $\mathbf{n}$ es ortogonal a todos los vectores en el plano.

Así como la ecuación de una recta en el espacio se obtiene especificando un punto sobre la recta y un vector *paralelo* a esta recta, pueden derivarse ecuaciones de un plano en el espacio especificando un punto en el plano y un vector ortogonal a todos los vectores en el plano. Este vector ortogonal se llama **vector normal** al plano y se denota por $\mathbf{n}$ (vea la figura 4.36).

Vector normal

Definición 4.5.1

Plano

Sea P un punto en el espacio y sea $\mathbf{n}$ un vector dado diferente de cero. Entonces el conjunto de todos los puntos Q para los que $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$ constituye un **plano** en $\mathbb{R}^3$.

Notación. Por lo general, un plano se denota por el símbolo π.

Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo sobre un plano con vector normal $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Si $Q = (x, y, z)$ es otro punto en el plano, entonces $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$.

Como $\overrightarrow{PQ} \perp \mathbf{n}$, tenemos que $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$. Pero esto implica que

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{4.5.8}$$

Una manera más común de escribir la ecuación de un plano se deriva de (4.5.8):

Ecuación cartesiana de un plano

$$ax + by + cz = d \tag{4.5.9}$$

$$\text{donde } d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \overrightarrow{0P} \cdot \mathbf{n}$$

EJEMPLO 4.5.6 Determinación de la ecuación de un plano que pasa por un punto dado y tiene un vector normal dado

Encuentre un plano π que pasa por el punto $(2, 5, 1)$ y que tiene un vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN ► De (4.5.8) se obtiene directamente $(x - 2) - 2(y - 5) + 3(z - 1) = 0$, es decir,

$$x - 2y + 3z = -5 \tag{4.5.10}$$

i) El *plano xy* pasa por el origen (0, 0, 0) y cualquier vector a lo largo del eje z es normal a él. El vector más simple es **k**. Así, de (4.5.8) se obtiene $0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0$, lo que lleva a

$$z = 0 \tag{4.5.11}$$

como la ecuación del plano xy. (Este resultado no debe sorprender.)

ii) El *plano xz* tiene la ecuación

$$y = 0 \tag{4.5.12}$$

iii) El *plano yz* tiene la ecuación

$$x = 0 \tag{4.5.13}$$

El dibujo de un plano

No es difícil dibujar un plano.

Caso 1. *El plano es paralelo a un plano coordenado.* Si el plano es paralelo a uno de los planos coordenados, entonces la ecuación del plano es una de las siguientes:

$$\begin{aligned} x &= a \quad \text{(paralelo al plano } yz\text{)} \\ y &= b \quad \text{(paralelo al plano } xz\text{)} \\ z &= c \quad \text{(paralelo al plano } xy\text{)} \end{aligned}$$

Cada plano se dibuja como un rectángulo con lados paralelos a los otros dos ejes coordenados. La figura 4.37 presenta un bosquejo de estos tres planos.

Caso 2. *El plano interseca a cada eje coordenado.* Suponga que una ecuación del plano es

$$ax + by + cz = d \qquad \text{con } abc \neq 0.$$

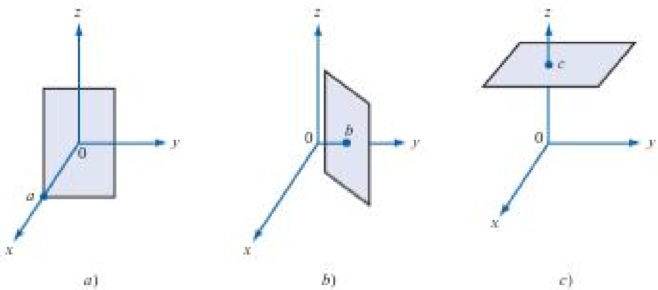


Figura 4.37

Tres planos paralelos a algún plano coordenado.

El cruce con el eje x es el punto $\left(\frac{d}{a}, 0, 0\right)$, el cruce con el eje y es el punto $\left(0, \frac{d}{b}, 0\right)$ y el cruce con el eje z es el punto $\left(0, 0, \frac{d}{c}\right)$.

Paso 3. Trace dos líneas paralelas, dibuje un paralelogramo cuya diagonal es el tercer lado del triángulo.
Paso 4. Extienda el paralelogramo dibujando cuatro líneas paralelas.

Este proceso se ilustra con la gráfica del plano $x + 2y + 3z = 6$ en la figura 4.38. Los cruces son $(6, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 2)$.

Tres puntos no colineales determinan un plano ya que determinan dos vectores no paralelos que se intersecan en un punto (vea la figura 4.39).

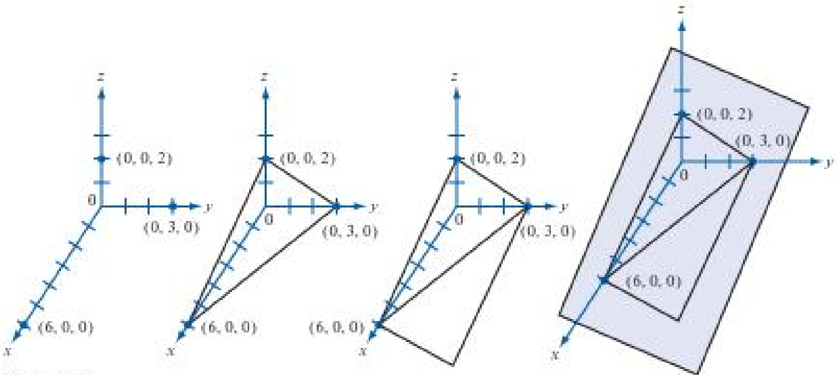


Figura 4.38

Dibujo del plano $x + 2y + 3z = 6$ en cuatro pasos.

EJEMPLO 4.5.7 Determinación de la ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados

Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos $P = (1, 2, 1)$, $Q = (-2, 3, -1)$ y $R = (1, 0, 4)$.

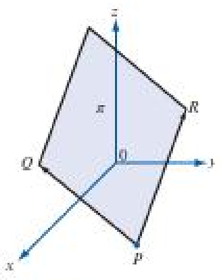


Figura 4.39

Los puntos P, Q y R determinan un plano siempre que no sean colineales.

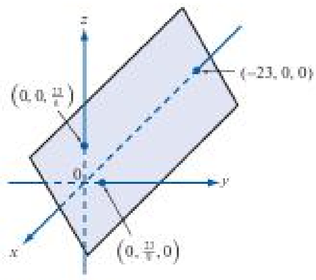


Figura 4.40

El plano $-x + 9y + 6z = 23$.

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

y se obtiene, usando el punto P en la ecuación (4.5.8),

$$\pi: -(x-1) + 9(y-2) + 6(z-1) = 0$$

es decir,

$$-x + 9y + 6z = 23$$

Observe que si se escoge otro punto, digamos Q, se obtiene la ecuación $-(x+2) + 9(y-3) + 6(z+1) = 0$, que se reduce a $-x + 9y + 6z = 23$. La figura 4.40 presenta un bosquejo de este plano.

Definición 4.5.2

Planos paralelos

Dos planos son **paralelos** si sus vectores normales son paralelos, es decir, si el producto cruz de sus vectores normales es cero.

En la figura 4.41 se dibujaron dos planos paralelos.

Nota

Observe que dos planos paralelos pueden ser coincidentes. Por ejemplo, los planos $x + y + z = 1$ y $2x + 2y + 2z = 2$ son coincidentes (son el mismo).

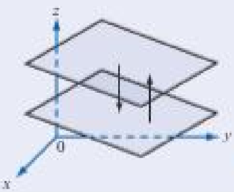


Figura 4.41

Se dibujaron dos planos paralelos.

EJEMPLO 4.5.8 Dos planos paralelos

Los planos π_1: $2x + 3y - z = 3$ y π_2: $-4x - 6y + 2z = 8$ son paralelos ya que $\mathbf{n}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{n}_2 = -4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = -2\mathbf{n}_1$ (y $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$).

Si dos planos no son paralelos, entonces se intersecan en una línea recta.

EJEMPLO 4.5.9 Puntos de intersección de planos

Encuentre todos los puntos de intersección de los planos $2x - y - z = 3$ y $x + 2y + 3z = 7$.

SOLUCIÓN ► Las coordenadas de cualquier punto (x, y, z) sobre la recta de intersección de estos dos planos deben satisfacer las ecuaciones $x + 2y + 3z = 7$ y $2x - y - z = 3$. Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas mediante reducción por renglones se obtiene, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -7 & -11 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, $y = \frac{11}{5} - \left(\frac{7}{5}\right)z$ y $x = \frac{13}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)z$. Por último, con $z = t$ se obtiene una representación paramétrica de la recta de intersección: $x = \frac{13}{5} - \frac{1}{5}t$, $y = \frac{11}{5} - \frac{7}{5}t$ y $z = t$.

A partir del teorema 4.4.2, inciso vi), se puede derivar un hecho interesante: si **w** está en el plano de **u** y **v**, entonces **w** es perpendicular a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, lo que significa que $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$. Inversamente, si $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0$, entonces **w** es perpendicular a $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, de manera que **w** se encuentra en el plano determinado por **u** y **v**. De lo anterior se concluye que

> Tres vectores **u**, **v** y **w** son coplanares si y sólo si su producto triple escalar es cero.

RESUMEN 4.5

- Sean $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ dos puntos sobre una recta L en $\mathbb{R}^3$. Sea $\mathbf{v} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$ y sea $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$ y $c = z_2 - z_1$.

  Ecuación vectorial de una recta: $\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + t\mathbf{v}$.

  Ecuaciones paramétricas de una recta:
  $$x = x_1 + at$$
  $$y = y_1 + bt$$
  $$z = z_1 + ct$$

  Ecuaciones simétricas de una recta: $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$, si a, b y c son diferentes de cero.

- Sea P un punto en $\mathbb{R}^3$ y sea **n** un vector dado diferentes de cero; entonces el conjunto de todos los puntos Q para los que $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$ constituye un plano en $\mathbb{R}^3$. El vector **n** se llama **vector normal** al plano.

- Si $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ y $P = (x_0, y_0, z_0)$, entonces la ecuación del plano se puede escribir
  $$ax + by + cz = d$$
  donde
  $$d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \overrightarrow{0P} \cdot \mathbf{n}$$

- El **plano *xy*** tiene la ecuación $z = 0$; el **plano *xz*** tiene la ecuación $y = 0$; el **plano *yz*** tiene la ecuación $x = 0$.

- Dos planos son **paralelos** si sus vectores normales son paralelos. Si los dos planos no son paralelos, entonces se intersecan en una línea recta.

AUTOEVALUACIÓN 4.5

I) La recta que pasa por los puntos (1, 2, 4) y (5, 10, 15) satisface la ecuación ______.

c) $(x, y, z) = (5, 10, 15) + s(4, 8, 11)$

d) $\frac{x-5}{4} = \frac{y-10}{8} = \frac{z-15}{11}$

II) La recta que pasa por el punto $(7, 3, -4)$ y es paralela al vector $\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ satisface la ecuación ________.

a) $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+4}{2}$

b) $(x, y, z) = (1, 5, 2) + t(7, 3, -4)$

c) $\frac{x-7}{8} = \frac{y-3}{8} = \frac{z+4}{-2}$

d) $(x, y, z) = (7, 3, -4) + s(8, 8, -2)$

III) La ecuación vectorial $(x, y, z) - (3, 5, -7) = t(-1, 4, 8)$ describe _________.

a) la recta que pasa por $(-1, 4, 8)$ y es paralela a $3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
b) la recta que pasa por $(-3, -5, 7)$ y es paralela a $-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$
c) la recta que pasa por $(3, 5, -7)$ y es perpendicular a $-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$
d) la recta que pasa por $(3, 5, -7)$ y es paralela a $-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

IV) El plano que pasa por $(5, -4, 3)$ que es ortogonal a $\mathbf{j}$ satisface ________.

a) $y = -4$
b) $(x - 5) + (z - 3) = 0$
c) $x + y + z = 4$
d) $5x - 4y + 3z = -4$

V) El plano que pasa por $(5, -4, 3)$ que es ortogonal a $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ satisface _________.

a) $y = -4$
b) $(x - 5)/1 = (y + 4)/1 = (z - 3)/1$
c) $x + y + z = 4$
d) $5x - 4y + 3z = -4$

VI) El vector ___________ es ortogonal al plano que satisface $2(x - 3) - 3(y + 2) + 5(z - 5) = 0$.

a) $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$
b) $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
c) $(2 - 3)\mathbf{i} + (-3 + 2)\mathbf{j} + (5 - 5)\mathbf{k}$
d) $(2)(-3)\mathbf{i} + (-3)(2)\mathbf{j} + (5)(-5)\mathbf{k}$

VII) El plano que satisface $6x + 18y - 12z = 17$ es ________ al plano $-5x - 15y + 10z = 29$.

a) idéntico
b) paralelo
c) ortogonal
d) ni paralelo ni ortogonal

Respuestas a la autoevaluación

I) *a*), *b*), *c*), *d*) II) *a*) III) *d*) IV) *a*)
V) *c*) VI) *b*) VII) *b*)

PROBLEMAS 4.5

En los problemas 1 al 19 encuentre una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las simétricas de la recta indicada.

1. Contiene a $(1, -1, 1)$ y $(-1, 1, -1)$
2. Contiene a $(2, -1, 1)$ y $(-2, 1, 1)$

4. Contiene a $(2, 3, -4)$ y $(3, 2, 1)$
5. Contiene a $(-7, -9, 6)$ y $(9, 5, 7)$
6. Contiene a $(-5, 1, 10)$ y $(10, -7, 10)$
7. Contiene a $(1, 2, 3)$ y $(-1, 2, -2)$
8. Contiene a $(2, 2, 1)$ y es paralela a $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$
9. Contiene a $(-2, 6, 8)$ y es paralela a $-4\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$
10. Contiene a $(10, 0, 6)$ y es paralela a $-8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
11. Contiene a $(-2, 3, -2)$ y es paralela a $4\mathbf{k}$
12. Contiene a $(-2, 3, 7)$ y es paralela a $3\mathbf{j}$
13. Contiene a $(6, 10, 3)$ y es paralela a $-10\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
14. Contiene a (a, b, c) y es paralela a $d\mathbf{j}$
15. Contiene a (a, b, c) y es paralela a $d\mathbf{j} + e\mathbf{k}$
16. Contiene a (a, b, c) y es paralela a $d\mathbf{k}$
17. Contiene a $(-9, 8, 0)$ y es ortogonal a $d\mathbf{j}$
18. Contiene a $(4, 1, -6)$ y es paralela a $\left(\frac{x-2}{3}\right) = \left(\frac{y+1}{6}\right) = \left(\frac{z-5}{2}\right)$
19. Contiene a $(4, 5, 5)$ y es paralela a $\frac{8-x}{2} = \frac{y+9}{3} = \frac{z+4}{-7}$
20. Sea L_1 la recta dada por

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$$

y sea L_2 la recta dada por

$$\frac{x-x_1}{a_2} = \frac{y-y_1}{b_2} = \frac{z-z_1}{c_2}$$

Demuestre que L_1 es ortogonal a L_2 si y sólo si $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

21. Demuestre que las rectas

$$L_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2}$$

son ortogonales.

22. Demuestre que las rectas

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{3} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-8}{9}$$

son paralelas.

La rectas en $\mathbb{R}^3$ que no tienen la misma dirección no necesitan tener un punto en común.

23. Demuestre que las rectas L_1: $x = 1 + t$, $y = -3 + 2t$, $z = -2 - t$ y L_2: $x = 17 + 3s$, $y = 4 + s$, $z = -8 - s$ tienen el punto $(2, -1, -3)$ en común.
24. Demuestre que las rectas L_1: $x = 2 - t$, $y = 1 + t$, $z = -2t$ y L_2: $x = 1 + s$, $y = -2s$, $z = 3 + 2s$ *no* tienen un punto en común.
25. Sea L dada en forma vectorial $\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + t\mathbf{v}$. Encuentre un número t tal que $\overrightarrow{0R}$ sea perpendicu-

De los problemas 26 al 29, utilice el resultado del problema 25 para encontrar la distancia entre la recta L (que contiene a P y es paralela a $\mathbf{v}$) y el origen.

26. $P = (1, -5, 6)$; $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

27. $P = (-3, 1, 2)$; $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

28. $P = (-9, 3, 3)$; $\mathbf{v} = -6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$

29. $P = (-2, -5, -4)$; $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

De los problemas 30 al 35, encuentre una recta L ortogonal a las dos rectas dadas y que pase por el punto dado.

30. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{-3}; \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+3}{6}; (0, 0, 0)$

31. $\frac{x+1}{-4} = \frac{y+9}{-6} = \frac{z+5}{-8}; \frac{x+5}{-6} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+8}{5}; (0, 1, 0)$

32. $x = 3 - 2t, y = 4 + 3t, z = -7 + 5t; x = -2 + 4s, y = 3 - 2s, z = 7 + s; (-2, 3, 4)$

33. $x = 4 + 10t, y = -4 - 8t, z = 3 + 7t; x = -2t, y = 1 + 4t, z = -7 - 3t; (4, 6, 0)$

34. $x = \frac{y}{6} = z + 6; x = 4, \frac{y+3}{-2} = \frac{z+3}{7}; (0, 1, 1)$

35. $\frac{x+2}{6} = \frac{y-7}{6} = \frac{z-1}{-7}; x = 4, 2 - y = \frac{z-1}{3}; (-10, -1, -2)$

***36.** Calcule la distancia entre las rectas

$$L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-4}{-4} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+2}{1}$$

[*Sugerencia:* La distancia se mide a lo largo del vector $\mathbf{v}$ que es perpendicular a L_1 y a L_2. Sea P un punto en L_1 y Q un punto en L_2. Entonces la longitud de la proyección de $\overrightarrow{PQ}$ sobre $\mathbf{v}$ es la distancia entre las rectas, medida a lo largo del vector que es perpendicular a ambas.]

***37.** Encuentre la distancia entre las rectas

$$L_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z-2}{4} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{1}$$

De los problemas 38 al 55, encuentre la ecuación del plano.

38. $P = (0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = \mathbf{i}$

39. $P = (0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = \mathbf{j}$

40. $P = (-9, 3, 3)$; $\mathbf{n} = -6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$

41. $P = (1, 2, 3)$; $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

42. $P = (1, 2, 3)$; $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

43. $P = (1, -1, 6)$; $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

44. $P = (1, 2, 3)$; $\mathbf{n} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

45. $P = (2, -1, 6)$; $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

46. $P = (5, -5, 0)$; $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$

47. $P = (-3, 11, 2)$; $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

48. $P = (2, 7, -1)$; $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

49. $P = (1, -8, -7)$; $\mathbf{n} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

50. Contiene a $(1, 2, -4)$, $(2, 3, 7)$ y $(4, -1, 3)$

51. Contiene a $(-5, -5, -3)$, $(2, -7, -1)$ y $(4, -4, 0)$

53. Contiene a (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1)

54. Contiene a (−7, −2, −4), (2, 2, 2) y (−5, −5, −4)

55. (7, 2, 1), (9, −4, 5), (5, −3, 1)

Planos ortogonales

Dos planos son **ortogonales** si sus vectores normales son ortogonales. De los problemas 56 al 62 determine si los planos dados son paralelos, ortogonales, coincidentes (es decir, el mismo) o ninguno de los anteriores.

56. π_1: $x + y + z = 2$; π_2: $2x + 2y + 2z = 4$

57. π_1: $6x - 3y + 4z = 4$; π_2: $x - 6y + 3z = 0$

58. π_1: $9x + 9y - z = 143$; π_2: $x - y - 10z = -56$

59. π_1: $2x - y + z = 3$; π_2: $x + y - z = 7$

60. π_1: $8x - 2y - 2z = 0$; π_2: $4x - y - z = 0$

61. π_1: $4x - y + 7z = 34$; π_2: $4x + 5y - z = -75$

62. π_1: $6x - 3y + 4z = 4$; π_2: $12x - 6y + 8z = 10$

De los problemas 63 al 66, encuentre la ecuación del conjunto de todos los puntos de intersección de los dos planos.

63. π_1: $3x + 3y + 8z = 4$; π_2: $3x + 3y - 6z = -5$

64. π_1: $3x - y + 4z = 3$; π_2: $-4x - 2y + 7z = 8$

65. π_1: $3y = -7$; π_2: $2x - 5y + 3z = -2$

66. π_1: $-2x - y + 17z = 4$; π_2: $2x - y - z = -7$

***67.** Sea π un plano, P un punto sobre el plano, **n** un vector normal al plano y Q un punto fuera del plano (vea la figura 4.42). Demuestre que la distancia perpendicular D de Q al plano está dada por

$$D = |\text{proy}_{\mathbf{n}}\,\overrightarrow{PQ}\,| = \frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$$

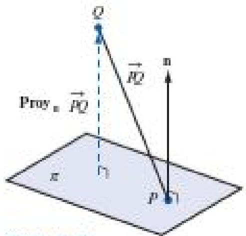


Figura 4.42

De los problemas 68 al 71 encuentre la distancia del punto dado al plano dado.

68. (−7, −5, −7); $9x + 2y + 5z = 97$

69. (−1, 1, 2); $3y - 6z = 4$

71. $(3, 0, -2)$; $x + 2y + z = 1$

72. Pruebe que la distancia entre el plano $ax + by + cz = d$ y el punto (x_0, y_0, z_0) está dado por

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ángulo entre dos planos

El **ángulo entre dos planos** está definido como el ángulo agudo* entre sus vectores normales. De los problemas 73 al 75 encuentre el ángulo entre los dos planos.

73. Los planos del problema 63

74. Los planos del problema 64

75. Los planos del problema 66

Representación paramétrica de un plano

*76. Sean **u** y **v** dos vectores no paralelos diferentes de cero en un plano π. Demuestre que si **w** es cualquier otro vector en π, entonces existen escalares α y β tales que $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$. Esto se denomina **representación paramétrica** del plano π. [*Sugerencia:* Dibuje un paralelogramo en el que $\alpha\mathbf{u}$ y $\beta\mathbf{v}$ formen lados adyacentes y el vector diagonal sea **w**.]

Vectores coplanares

*77. Tres vectores **u**, **v** y **w** se llaman **coplanares** si están todos en el mismo plano π. Demuestre que si **u**, **v** y **w** pasan todos a través del origen, entonces son coplanares si y sólo si el triple producto escalar es igual a cero: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$.

De los problemas 78 al 84 determine si los tres vectores de posición dados (es decir, con punto inicial en el origen) son coplanares. Si lo son, encuentre la ecuación del plano que los contiene.

78. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 9\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

79. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 8\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$

80. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -8\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -2\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

81. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

82. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$

83. $\mathbf{u} = 9\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

84. $\mathbf{u} = -5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 8\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

E Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 al 9 encuentre la magnitud y dirección del vector dado.

1. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
2. $\mathbf{v} = (8, 10)$
3. $\mathbf{v} = (-1, -6)$
4. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
5. $\mathbf{v} = \left(2, -2\sqrt{3}\right)$
6. $\mathbf{v} = (3, -10)$
7. $\mathbf{v} = \left(3, -\sqrt{5}\right)$
8. $\mathbf{v} = 5\pi\mathbf{i} + 2\pi\mathbf{j}$
9. $\mathbf{v} = (-6, 1)$

En los ejercicios 10 al 14 escriba el vector **v**, representado por $\overrightarrow{PQ}$, en la forma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Bosqueje $\overrightarrow{PQ}$ y **v**.

10. $P = (1, 2)$; $Q = (-2, -3)$

11. $P = (1, -2)$; $Q = (7, 12)$

12. $P = (10, 10)$; $Q = (-7, 10)$

13. $P = (-3, 4)$; $Q = (-2, -4)$

14. $P = (-1, 3)$; $Q = (3, -1)$

En los problemas 15 al 18, con $\mathbf{u} = (5, -4)$ y $\mathbf{v} = (-3, 1)$ encuentre

15. $-3\mathbf{v}$

16. $-2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$

17. $5\mathbf{v} + 4\mathbf{u}$

18. $-2(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

En los problemas 19 al 22, con $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ encuentre

19. $5\mathbf{u}$

20. $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$

21. $2\mathbf{v} + 4\mathbf{u}$

22. $-5\mathbf{u} + 6\mathbf{v}$

En los ejercicios 23 al 31 encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.

23. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

24. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

25. $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

26. $\mathbf{v} = \pi\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

27. $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

28. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

29. $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} - 9\mathbf{j}$

30. $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

31. $\mathbf{v} = 3\sqrt{3}\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\mathbf{j}$

32. Si $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ encuentre sen θ y cos θ, donde θ es la dirección de $\mathbf{v}$.

33. Encuentre un vector unitario con la dirección opuesta a $\mathbf{v} = -3\sqrt{2}\mathbf{i} + 2\sqrt{3}\mathbf{j}$.

34. Encuentre dos vectores unitarios ortogonales a $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

35. Encuentre un vector unitario con la dirección opuesta a la de $\mathbf{v} = -\frac{5}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}$.

En los ejercicios 36 al 40 encuentre un vector $\mathbf{v}$ que tenga la magnitud y dirección dadas.

36. $|\mathbf{v}| = 2;\quad \theta = \frac{\pi}{3}$

37. $|\mathbf{v}| = 6;\quad \theta = \frac{2\pi}{3}$

38. $|\mathbf{v}| = 3;\quad \theta = \frac{5\pi}{4}$

39. $|\mathbf{v}| = \frac{3}{2};\quad \theta = \frac{\pi}{2}$

40. $|\mathbf{v}| = 7;\quad \theta = \frac{5\pi}{6}$

En los ejercicios 41 al 45 calcule el producto escalar de los dos vectores y el coseno del ángulo entre ellos.

41. $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 4\mathbf{j};\quad \mathbf{v} = -12\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$

42. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} - \mathbf{j};\quad \mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

43. $\mathbf{u} = -3\mathbf{j};\quad \mathbf{v} = \mathbf{i}\sqrt{3} - \mathbf{j}$

44. $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 4\mathbf{j};\quad \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

45. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j};\quad \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

En los ejercicios 46 al 53 determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Después bosqueje cada par.

46. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j};\quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

47. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j};\quad \mathbf{j} = -7\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

48. $\mathbf{u} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j};\quad \mathbf{v} = \mathbf{i}\sqrt{3} - \mathbf{j}$

49. $\mathbf{u} = -\frac{\sqrt{5}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j};\quad \mathbf{v} = \mathbf{i}\sqrt{5} + 5\mathbf{j}$

50. $\mathbf{u} = -12\mathbf{i} - 6\mathbf{j};\quad \mathbf{j} = -9\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

51. $\mathbf{u} = -7\mathbf{i} - 7\mathbf{j};\quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$

52. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j};\quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

53. $\mathbf{u} = -7\mathbf{i} - 7\mathbf{j};\quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$

54. Sean $\mathbf{u} = \frac{\sqrt{5}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}$. Determine α tal que

a) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ sean ortogonales.
b) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ sean paralelos.
c) El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ sea $\frac{\pi}{4}$.

En los ejercicios 55 al 62 calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

55. $\mathbf{u} = -12\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

56. $\mathbf{u} = 14\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

57. $\mathbf{u} = -8\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

58. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 9\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

59. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

60. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$

61. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -6\mathbf{j}$

62. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

63. Sean $P = (3, -2)$, $Q = (4, 7)$, $R = (-1, 3)$ y $S = (2, -1)$. Calcule $\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\,\overrightarrow{RS}$ y $\text{proy}_{\overrightarrow{RS}}\,\overrightarrow{PQ}$.

En los ejercicios 64 al 67 encuentre la distancia entre los dos puntos dados.

64. $(1, -9, -3)$; $(2, 2, -9)$

65. $(-9, -10, -1)$; $(12, -3, 3)$

66. $(2, -7, 0)$; $(0, 5, -8)$

67. $(0, -7, -7)$; $(-6, -6, -6)$

En los ejercicios 68 al 71 encuentre la magnitud y los cosenos directores del vector dado.

68. $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

69. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

70. $\mathbf{v} = \pi\mathbf{i} - 2\pi\mathbf{j} + 2\pi\mathbf{k}$

71. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

72. Encuentre un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{PQ}$, donde $P = (3, -1, 2)$ y $Q = (3, -1, 2)$.

73. Encuentre un vector unitario cuya dirección sea opuesta a la de $\overrightarrow{PQ}$, donde $P = (1, -3, 0)$ y $Q = (0, 4, -3)$.

En los ejercicios 74 al 83 sean $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Calcule:

74. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

75. $3\mathbf{v} + 5\mathbf{w}$

76. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{w}$

77. $\text{proy}_{\mathbf{w}}\,(\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u})$

78. $\text{proy}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{u}$

79. $2\mathbf{u} - 4\mathbf{v} + 7\mathbf{w}$

80. $2\mathbf{u} + 6\mathbf{v} + 3\,\text{proy}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{v}$

81. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$

82. El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$

83. El ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$

En los ejercicios 84 al 87 encuentre el producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

84. $\mathbf{u} = -8\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

85. $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} + \mathbf{j} - 8\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

86. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

87. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

88. Encuentre dos vectores unitarios ortogonales a $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

89. Calcule el área del paralelogramo con vértices adyacentes $(1, 4, -2)$, $(-3, 1, 6)$ y $(1, -2, 3)$.

En los ejercicios 90 al 95 encuentre una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las simétricas de la recta dada.

90. Contiene a $(3, 2, -4)$ y $(0, 2, 3)$

91. Contiene a $(1, -7, 7)$ y $(-1, 0, 7)$

92. Contiene a $(-4, 1, 0)$ y $(3, 0, 7)$

94. Contiene a (1, 2, 0) y es perpendicular a $-\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

95. Contiene a (1, −2, −3) y es paralela a L_2: $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-2}{(-3)} = \dfrac{z+41}{2}$

96. Demuestre que las rectas L_1: $x = 3 - 2t$, $y = 4 + t$, $z = -2 + 7t$ y L_2: $x = -3 + s$, $y = 2 - 4s$, $z = 1 + 6s$ no tienen puntos en común.

97. Encuentre la distancia del origen a la recta que pasa por el punto (3, 1, 5) y que tiene la dirección de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

98. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por (−1, 2, 4) y es ortogonal a L_1: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+6}{3} = \dfrac{z}{(-2)}$ y L_2: $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+3}{4}$.

En los ejercicios 99 al 101 encuentre la ecuación del plano que contiene al punto dado y es ortogonal al vector normal dado.

99. $P = (0, 2, -1)$; $\quad \mathbf{n} = 3\mathbf{i} - \mathbf{k}$

100. $P = (1, -4, 6)$; $\quad \mathbf{n} = 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

101. $P = (-4, 1, 6)$; $\quad \mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

102. Encuentre la ecuación del plano que contiene a los puntos (−2, 4, 1), (3, −7, 5) y (−1, −2, −1).

103. Encuentre la ecuación del plano que contiene a los puntos (−4, 3, 9), (−6, −2, −8) y (1, −6, −7).

104. Encuentre los puntos de intersección de los planos π_1: $3x - y + 2z = -7$ y π_2: $-6x + 2y - 4z = 14$.

105. Encuentre (de existir) el punto de intersección del plano π_1: $-4x + 3y - 2z = 12$ y la recta L: $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = 2 + t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$.

106. Encuentre todos los puntos de intersección de los planos π_1: $-2x + 3y = 6$ y π_2: $-2x + 3y + z = 3$.

107. Encuentre los puntos de intersección de los planos π_1: $3x - y + 2z = -7$ y π_2: $6x + 2y - 4z = 14$.

108. Encuentre la distancia desde (1, −2, 3) al plano $2x - y - z = 6$.

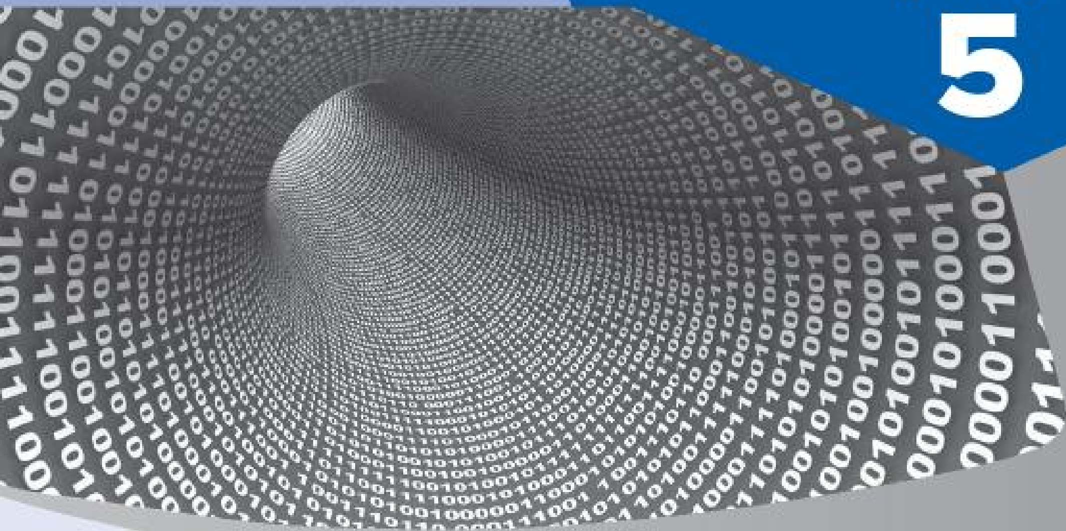
109. Encuentre la distancia desde (1, 2, −1) al plano $2y + 3z = 1$.

110. Encuentre el ángulo entre los planos del ejercicio 97.

111. Demuestre que los vectores de posición $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = 9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ son coplanares y encuentre la ecuación del plano que los contiene.

CAPÍTULO

5



Shutterstock/Valex

▲ Utilizando espacios vectoriales se han desarrollado códigos que detectan y corrigen errores en la transmisión de información en forma digital. Todos los dispositivos utilizados hoy en día (computadoras, teléfonos celulares, redes de telecomunicaciones, etc.) emplean alguno de estos tipos de codificación.

Espacios vectoriales

Objetivos del capítulo

En este capítulo el estudiante. . .

- Aprenderá los axiomas con que se forma un espacio vectorial real (sección 5.1).
- Estudiará el concepto de subespacio vectorial, que consiste en subconjuntos de un espacio vectorial que a su vez tienen estructura de espacio vectorial (sección 5.2).
- Se familiarizará con la operación básica de los espacios vectoriales, que es la combinación lineal, así como también con el concepto de espacio generado, que es una clase de subespacio (sección 5.3).
- Conocerá la propiedad de independencia lineal definida a partir del concepto de combinación lineal y sus característi-
- Profundizará en el conjunto mínimo de vectores con los que se puede generar todo un espacio vectorial (conjunto al cual se denomina base). Utilizando la característica de las bases, definirá el concepto de dimensión de un espacio vectorial (sección 5.5).
- Sabrá cómo expresar vectores con bases diferentes y el procedimiento para relacionar dichas presentaciones (sección 5.6).
- Aprenderá a definir conceptos relacionados con subespacios vectoriales formados a partir de los renglones y las columnas de matrices (sección 5.7).

5.1 Definición y propiedades básicas

Como se observó en el capítulo anterior, los conjuntos $\mathbb{R}^2$ (vectores en el plano) y $\mathbb{R}^3$ (vectores en el espacio) cuentan con diversas propiedades peculiares. Se pueden sumar dos vectores en $\mathbb{R}^2$ y obtener otro vector en $\mathbb{R}^2$. En la suma, los vectores en $\mathbb{R}^2$ obedecen las leyes conmutativa y asociativa. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ y $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Se pueden multiplicar vectores en $\mathbb{R}^2$ por escalares y obtener las leyes distributivas. En $\mathbb{R}^3$ se cumplen las mismas propiedades.

Espacios vectoriales

Los conjuntos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ junto con las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar se denominan **espacios vectoriales**. Se puede decir, de forma intuitiva, que un espacio vectorial es un conjunto de objetos con dos operaciones que obedecen las reglas que acaban de escribirse.

En el presente capítulo habrá un cambio, en apariencia grande, del mundo concreto de la solución de ecuaciones y del manejo sencillo de los vectores que se visualizan, al mundo abstracto de los espacios vectoriales arbitrarios. Existe una ventaja en este cambio. Una vez que, en términos generales, se establecen los hechos sobre los espacios vectoriales, se pueden aplicar estos hechos a *todos* los espacios de esta naturaleza. De otro modo, tendría que probarse cada hecho una y otra vez para cada nuevo espacio vectorial que nos encontráramos (y existe un sinfín de ellos). Pero como se verá más adelante, muchos de los teoremas abstractos que se demostrarán, en términos reales no son más difíciles que los que ya se han estudiado.

D Definición 5.1.1

Espacio vectorial real

Un **espacio vectorial real V** es un conjunto de objetos, denominados **vectores**, junto con dos operaciones binarias llamadas **suma** y **multiplicación por un escalar**, y que satisfacen los diez axiomas enumerados en el siguiente recuadro.

Notación. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V y si α es un número real, entonces la suma se escribe como $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ y el producto escalar de α y $\mathbf{x}$ como $\alpha\mathbf{x}$.

Antes de presentar la lista de las propiedades que satisfacen los vectores en un espacio vectorial deben mencionarse dos asuntos de importancia. En primer lugar, mientras que puede ser útil pensar en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ al manejar un espacio vectorial, con frecuencia ocurre que el espacio vectorial parece ser muy diferente a estos cómodos espacios (en breve tocaremos este tema). En segunda instancia, la definición 5.1.1 ofrece una definición de un espacio vectorial *real*. La palabra "real" significa que los escalares que se usan son números reales. Sería igualmente sencillo definir un espacio vectorial *complejo* utilizando números complejos en lugar de reales. Este libro está dedicado principalmente a espacios vectoriales reales, pero las generalizaciones a otros conjuntos de escalares presentan muy poca dificultad.

Axiomas de un espacio vectorial

Nota. Los primeros cinco axiomas se utilizan para definir a un grupo abeliano, y los axiomas vi) al x) describen la interacción de los escalares y los vectores mediante la operación binaria de un escalar y un vector.

i) Si $\mathbf{x} \in V$ y $\mathbf{y} \in V$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ **(cerradura bajo la suma).**

ii) Para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ en V, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$

iii) Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que para todo $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$
(el $\mathbf{0}$ se llama **vector cero** o **idéntico aditivo**).

iv) Si $\mathbf{x} \in V$, existe un vector $-\mathbf{x}$ en $\in V$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
($-\mathbf{x}$ se llama **inverso aditivo** de $\mathbf{x}$).

v) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
(**ley conmutativa de la suma de vectores**).

vi) Si $\mathbf{x} \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha\mathbf{x} \in V$
(**cerradura bajo la multiplicación por un escalar**).

vii) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$
(**primera ley distributiva**).

viii) Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)\,\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$
(**segunda ley distributiva**).

ix) Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$
(**ley asociativa de la multiplicación por escalares**).

x) Para cada vector $\mathbf{x} \in V$, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Campo

Los escalares tienen una estructura denominada **campo**, la cual consiste en un conjunto de elementos y dos operaciones binarias (por ejemplo, los número reales y las operaciones de adición y multiplicación). Los números reales con la operación de suma cumplen con los axiomas del grupo abeliano. Además, la multiplicación es asociativa y distributiva por la derecha e izquierda. Existe un elemento neutro llamado unidad, y todo número real diferente de cero tiene un elemento inverso.

Nota

En los problemas 5.1.23 y 5.1.24 se estudian la propiedad de unicidad sobre el elemento neutro aditivo y el elemento inverso aditivo en un espacio vectorial.

EJEMPLO 5.1.1 El espacio $\mathbb{R}^n$

Sea $V = \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_j \in \mathbb{R} \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n \right\}$.

Cada vector en $\mathbb{R}^n$ es una matriz de $n \times 1$. Según la definición de suma de matrices dada en la página 53, $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ es una matriz de $n \times 1$ si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son matrices de $n \times 1$. Haciendo $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ y $-\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$, se observa que los axiomas ii) a x) se obtienen de la definición de suma de vectores (matrices) y el teorema 2.1.1.

Nota

Los vectores en $\mathbb{R}^n$ se pueden escribir indistintamente como vectores renglón o vectores columna.

EJEMPLO 5.1.2 Espacio vectorial trivial

Sea $V = \{0\}$. Es decir, V consiste sólo en el número 0. Como $0 + 0 = 1 \cdot 0 = 0 + (0 + 0) = (0 + 0)$

EJEMPLO 5.1.3 Conjunto que no es un espacio vectorial

Nota

Verificar los diez axiomas puede ser laborioso. En adelante se verificarán únicamente aquellos axiomas que no son obvios.

Sea $V = \{1\}$. Es decir, V consiste únicamente del número 1. Éste *no* es un espacio vectorial ya que viola el axioma i) –el axioma de cerradura–. Para verlo con más claridad, basta con observar que $1 + 1 = 2 \notin V$. También viola otros axiomas; sin embargo, con sólo demostrar que viola al menos uno de los diez axiomas queda probado que V no es un espacio vectorial.

EJEMPLO 5.1.4 El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que se encuentran en una recta que pasa por el origen constituye un espacio vectorial

Sea $V = \{(x, y)$: $y = mx$, donde m es un número real fijo y x es un número real arbitrario$\}$.

Es decir, V consiste en todos los puntos que están sobre la recta $y = mx$ que pasa por el origen y tiene pendiente m. Para demostrar que V es un espacio vectorial se puede verificar que se cumple cada uno de los axiomas. Observe que los vectores en $\mathbb{R}^2$ se han escrito como renglones en lugar de columnas, lo que en esencia es lo mismo.

i) Suponga que $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{y} = (x_2, y_2)$ están en V. Entonces $y_1 = mx_1$, $y_2 = mx_2$, y

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, mx_1) + (x_2, mx_2) = (x_1 + x_2, mx_1 + mx_2)\\ &= (x_1 + x_2, m(x_1 + x_2)) \in V\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple el axioma i).

ii) Suponga que $(x, y) \in V$. Entonces $y = mx$ y $-(x, y) = -(x, mx) = (-x, m(-x))$, de manera que $-(x, y)$ también pertenece a V y $(x, mx) + (-x, m(-x)) = (x - x, m(x - x)) = (0, 0)$.

Todo vector en V es un vector en $\mathbb{R}^2$, y $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial, como se muestra en el ejemplo 5.1.1. Como $(0, 0) = \mathbf{0}$ está en V (explique por qué), todas las demás propiedades se deducen del ejemplo 5.1.1. Entonces V es un espacio vectorial.

EJEMPLO 5.1.5 El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que se encuentran sobre una recta que no pasa por el origen no constituye un espacio vectorial

Sea $V = \{(x, y)$: $y = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}\}$. Es decir, V es el conjunto de puntos que están sobre la recta $y = 2x + 1$. V *no* es un espacio vectorial porque no se cumple la cerradura bajo la suma, como sucede en el ejemplo 5.1.3. Para ver esto, suponga que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) están en V. Entonces,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Si el vector del lado derecho estuviera en V, se tendría

$$y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) + 1 = 2x_1 + 2x_2 + 1$$

Pero $y_1 = 2x_1 + 1$ y $y_2 = 2x_2 + 1$, de manera que

$$y_1 + y_2 = (2x_1 + 1) + (2x_2 + 1) = 2x_1 + 2x_2 + 2$$

Por lo tanto, se concluye que

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \notin V \text{ si } (x_1, y_1) \in V \text{ y } (x_2, y_2) \in V$$

Por ejemplo, $(0, 1)$ y $(3, 7)$ están en V, pero $(0, 1) + (3, 7) = (3, 8)$ no está en V porque $8 \neq 2 \cdot 3 + 1$.

se encuentra en V porque $0 \neq 2 \cdot 0 + 1$. No es difícil demostrar que el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que está sobre cualquier recta que no pasa por (0, 0) no constituye un espacio vectorial.

EJEMPLO 5.1.6 El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que se encuentran en un plano que pasa por el origen constituye un espacio vectorial

Sea $V = \{(x, y, z): ax + by + cz = 0\}$. Esto es, V es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que está en el plano con vector normal (a, b, c) y que pasa por el origen. Al igual que en el ejemplo 5.1.4, los vectores se escriben como renglones en lugar de columnas.

Suponga que (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) están en V. Entonces $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in V$ porque

$$a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) = (ax_1 + by_1 + cz_1) + (ax_2 + by_2 + cz_2) = 0 + 0 = 0$$

Por lo tanto, el axioma i) se cumple. Los otros axiomas se verifican fácilmente. De este modo, el conjunto de puntos que se encuentra en un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen constituye un espacio vectorial.

EJEMPLO 5.1.7 El espacio vectorial $\mathbb{P}_n$

Sea $V = \mathbb{P}_n$ el conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a n. Si $p \in P_n$, entonces

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde cada a_i es real. La suma de $p(x) + q(x)$ está definida de la manera usual: si $q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, entonces

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Nota

Se dice que las funciones constantes (incluyendo la función $f(x) = 0$) son polinomios de **grado cero**.

Es obvio que la suma de dos polinomios de grado menor o igual a n es otro polinomio de grado menor o igual a n, por lo que se cumple el axioma i). Las propiedades ii) y v) a x) son claras. Si se define el polinomio $\mathbf{0} = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x + 0$, entonces $\mathbf{0} \in P_n$ y el axioma iii) se cumple. Por último, sea $-p(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$; se ve que el axioma iv) se cumple, con lo que P_n es un espacio vectorial real.

EJEMPLO 5.1.8 Los espacios vectoriales C[0, 1] y C[a, b]

Cálculo*

Sea $V = C[0, 1]$ el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas en el intervalo [0, 1]. Se define

$$(f + g)x = f(x) + g(x) \text{ y } (\alpha f)(x) = \alpha[f(x)]$$

Como la suma de funciones continuas es continua, el axioma i) se cumple y los otros axiomas se verifican fácilmente con $\mathbf{0}$ = la función cero y $(-f)(x) = -f(x)$. Del mismo modo, $C[a, b]$, el conjunto de funciones de valores reales definidas y continuas en $[a, b]$, constituye un espacio vectorial.

EJEMPLO 5.1.9 El espacio vectorial M_{mn}

Si $V = M_{mn}$ denota el conjunto de matrices de $m \times n$ con componentes reales, entonces con la suma de matrices y multiplicación por un escalar usuales se puede verificar que M_{mn} es un espacio vectorial cuyo neutro aditivo es la matriz de ceros de dimensiones $m \times n$.

EJEMPLO 5.1.10 Un conjunto de matrices invertibles puede no formar un espacio vectorial

Nota

Se usa un signo para evitar confusión con el signo + normal que denota la suma de matrices.

Sea S_3 el conjunto de matrices invertibles de 3×3. Se define la "suma" $A \oplus B$ por $A \oplus B = AB$. Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible (por el teorema 2.4.3) de manera que el axioma i) se cumple. El axioma ii) es sencillamente la ley asociativa para la multiplicación de matrices (teorema 2.2.2); los axiomas iii) y iv) se satisfacen con $\mathbf{0} = I_3$ y $-A = A^{-1}$. Sin embargo, $AB \neq BA$ en general; entonces el axioma v) no se cumple y por lo tanto S_3 no es un espacio vectorial.

EJEMPLO 5.1.11 Un conjunto de puntos en un semiplano puede no formar un espacio vectorial

Sea $V = [(x, y): y \geq 0]$. V consiste en los puntos en $\mathbb{R}^2$ en el semiplano superior (los primeros dos cuadrantes). Si $y_1 \geq 0$ y $y_2 \geq 0$, entonces $y_1 + y_2 \geq 0$; así, si $(x_1, y_1) \in V$ y $(x_2, y_2) \in V$, entonces $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in V$. Sin embargo, V no es un espacio vectorial ya que el vector $(1, 1)$, por ejemplo, no tiene un inverso en V porque $(-1, -1) \notin V$. Más aún, el axioma vi) falla, ya que si $(x, y)\ \alpha\ V$, entonces $\alpha\,(x, y)\ \alpha\ V$ si $\alpha < 0$.

EJEMPLO 5.1.12 El espacio $\mathbb{C}^n$

Sea $V = \mathbb{C}^n = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n): c_i$ es un número complejo para $i = 1, 2, \ldots, n\}$ y el conjunto de escalares es el conjunto de números complejos. No es difícil verificar que $\mathbb{C}^n$ también es un espacio vectorial.

Como lo sugieren estos ejemplos, existen diferentes tipos de espacios vectoriales y muchas clases de conjuntos que *no* son espacios vectoriales. Antes de terminar esta sección se demostrarán algunos resultados sobre los espacios vectoriales.

Teorema 5.1.1

Sea V un espacio vectorial. Entonces

i) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo escalar α.

ii) $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in V$.

iii) Si $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\alpha = 0$ o $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (o ambos).

iv) $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in V$.

Demostración

i) Por el axioma iii), $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$; y del axioma vii), Sumando $-\alpha\mathbf{0}$ en los dos lados de (5.1.1) y usando la ley asociativa (axioma ii), se obtiene

$$\begin{aligned}\alpha\mathbf{0} + (-\alpha\mathbf{0}) &= [\alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0}] + (-\alpha\mathbf{0})\\ \mathbf{0} &= \alpha\mathbf{0} + [\alpha\mathbf{0} + (-\alpha\mathbf{0})]\\ \mathbf{0} &= \alpha\mathbf{0} + \mathbf{0}\\ \mathbf{0} &= \alpha\mathbf{0}\end{aligned}$$

ii) Se usa, esencialmente, la misma prueba que en la parte i). Se comienza con $0 + 0 = 0$ y se usa el axioma vii) para ver que $0\mathbf{x} = (0 + 0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x}$ o $0\mathbf{x} + (-0\mathbf{x}) = 0\mathbf{x} + [0\mathbf{x} + (-0\mathbf{x})]$ o $\mathbf{0} = 0\mathbf{x} + \mathbf{0} = 0\mathbf{x}$.

iii) Sea $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si $\alpha \neq 0$ se multiplican ambos lados de la ecuación por $1/\alpha$ para obtener $(1/\alpha)(\alpha\mathbf{x}) = (1/\alpha)\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$ [por la parte i)]. Pero $(1/\alpha)(\alpha\mathbf{x}) = 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (por el axioma ix), de manera que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

iv) Primero se usa el hecho de que $1 + (-1) = 0$. Después, usando la parte ii), se obtiene

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{x} = [1 + (-1)]\mathbf{x} = 1\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} \qquad (5.1.2)$$

Se suma $-\mathbf{x}$ en ambos lados de (5.1.2) para obtener

$$\begin{aligned}-\mathbf{x} = \mathbf{0} + (-\mathbf{x}) &= \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) + (-1)\mathbf{x}\\ &= \mathbf{0} + (-1)\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}\end{aligned}$$

De este modo, $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$. Observe que el orden de la suma en la ecuación anterior se pudo invertir utilizando la ley conmutativa (axioma v).

Observación. La parte iii) del teorema 5.1.1 no es tan obvia como parece. Existen situaciones conocidas en las que $xy = 0$ no implica que x o y sean cero. Como ejemplo, se tiene la multiplicación de matrices de 2×2. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en donde ni A ni B son cero y, como se puede verificar, $AB = 0$, el resultado del producto de estas matrices es la matriz cero.

RESUMEN 5.1

- Un **espacio vectorial real** V es un conjunto de objetos, denominados **vectores**, junto con dos operaciones denominadas **suma** (denotada por $\mathbf{x} + \mathbf{y}$) y **multiplicación por un escalar** (denotada por $\alpha\mathbf{x}$) que satisfacen los siguientes axiomas:

  i) Si $\mathbf{x} \in V$ y $\mathbf{y} \in V$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ **(cerradura bajo la suma)**.

  ii) Para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ en V, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ **(ley asociativa de la suma de vectores)**.

  iii) Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que para todo $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (el $\mathbf{0}$ se llama **vector cero** o **idéntico aditivo**).

  iv) Si $\mathbf{x} \in V$, existe un vector $-\mathbf{x}$ en V tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ($-\mathbf{x}$ se llama **inverso aditivo de x**).

  v) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ **(ley conmutativa de la suma de vectores)**.

vii) Si **x** y **y** están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$
(primera ley distributiva).

viii) Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$
(segunda ley distributiva).

ix) Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta\mathbf{x})$
(ley asociativa de la multiplicación por escalares).

x) Para cada $\mathbf{x} \in V$, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

- El **espacio** $\mathbb{R}^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}: x_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \ldots, n\}$.
- El **espacio** P_n = {polinomios de grado menor que o igual a n}.
- El **espacio** $C[a, b]$ = {funciones reales continuas en el intervalo $[a, b]$}.
- El **espacio** M_{mn} = {matrices de $m \times n$ con coeficientes reales}.
- El **espacio** $\mathbb{C}^n = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n): c_i \in \mathbb{C}$ para $i = 1, 2, \ldots, n\}$. $\mathbb{C}$ denota el conjunto de números complejos.

AUTOEVALUACIÓN 5.1

De las siguientes afirmaciones, indique si son falsas o verdaderas:

I) El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ con $y = -3x$ es un espacio vectorial real.

II) El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ con $y = -3x + 1$ es un espacio vectorial real.

III) El conjunto de matrices invertibles de 5×5 forma un espacio vectorial (con "+" definido como en la suma de matrices ordinaria).

IV) El conjunto de múltiplos constantes de la matriz idéntica de 2×2 es un espacio vectorial (con "+" definido como en III).

V) El conjunto de matrices idénticas de $n \times n$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$ es un espacio vectorial (con "+" definido como en III).

VI) El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ con $2x - y - 12z = 0$ es un espacio vectorial real.

VII) El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ con $2x - y - 12z = 1$ es un espacio vectorial real.

VIII) El conjunto de polinomios de grado 3 es un espacio vectorial real (con "+" definido como la suma de polinomios ordinaria).

Respuestas a la autoevaluación

I) V II) F III) F IV) V V) F VI) V VII) F VIII) F

PROBLEMAS 5.1

De los problemas 1 al 27 determine si el conjunto dado es un espacio vectorial. De no ser así proporcione una lista de los axiomas que no se cumplen.

1. El conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ como vectores, el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ como escalares y la operación de multiplicación para números naturales.
2. El conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ como vectores, el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ como escalares, la operación de suma para números naturales y la multiplicación entre números naturales para la operación de multiplicación de escalar y vector.
3. El conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ como vectores, el conjunto de números naturales $\mathbb{Z}$ como escalares, la operación de suma para números enteros y la multiplicación entre números enteros para la operación de multiplicación de escalar y vector.
4. El conjunto de matrices diagonales de $n \times n$ bajo la suma de matrices y multiplicación por un escalar usuales.
5. El conjunto de matrices diagonales de $n \times n$ bajo la multiplicación (es decir, $A \oplus B = AB$).
6. $\{(x, y): y \leq 0; x, y \text{ reales}\}$ con la suma de vectores y multiplicación por un escalar usuales.
7. Los vectores en el plano que está en el primer cuadrante.
8. El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ de la forma (x, x, x).
9. El conjunto de polinomios de grado 4 bajo las operaciones del ejemplo 5.1.7.
10. El conjunto de polinomios de grado 5 bajo las operaciones del ejemplo 5.1.7.
11. El conjunto de matrices simétricas de $n \times n$ (vea la sección 2.5) bajo la suma y multiplicación por un escalar usuales.
12. El conjunto de matrices de 2×2 que tienen la forma $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ bajo la suma y multiplicación por un escalar usuales.
13. El conjunto de matrices $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ con las operaciones de suma de matrices y multiplicación por un escalar usuales.
14. El conjunto de matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donde a, b, c, d son números reales diferentes de cero con la operación de suma entre vectores $\mathbb{Q}$ definida por $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & b_1b_2 \\ c_1c_2 & d_1d_2 \end{pmatrix}$, el conjunto de escalares de los reales positivos y la multiplicación usual de escalar y matriz.
15. El conjunto de vectores de los números racionales $\mathbb{Q}$ con la operación de suma, el conjunto de escalares los números enteros $\mathbb{Z}$ y la operación de multiplicación de escalar y vector la multiplicación usual.
16. El conjunto que consiste en un solo vector $(0, 0)$ bajo las operaciones usuales en $\mathbb{R}^2$.
17. El conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con término constante cero.
18. El conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con término constante a_0 positivo.
19. El conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con término constante a_0 negativo.
20. El conjunto de funciones continuas de valores reales definidas en $[0, 1]$ con $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$

21. El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que se encuentran sobre una recta que pasa por el origen.

22. El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que se encuentran sobre la recta $x = 3t + 1$, $y = 2t$, $z = 2t + 4$.

23. $\mathbb{R}^2$ con la suma definida por $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$ y la multiplicación por un escalar ordinaria.

Cálculo

24. El conjunto del problema 23 con la multiplicación por un escalar definida por $\alpha(x, y) = (\alpha + \alpha x - 1, \alpha + \alpha y - 1)$.

25. El conjunto que consiste en un objeto con la suma definida por *objeto* + *objeto* = *objeto* y la multiplicación por un escalar definida por α (*objeto*) = *objeto*.

Cálculo

26. El conjunto de funciones diferenciables definidas en $[0, 1]$ con las operaciones del ejemplo 5.1.8.

*27. El conjunto de números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$, donde a y b son números racionales, bajo la suma de números reales usual y la multiplicación por un escalar definida sólo para escalares racionales.

28. Demuestre que en un espacio vectorial el elemento idéntico aditivo es único.

29. Demuestre que en un espacio vectorial todo vector tiene un inverso aditivo único.

30. Si **x** y **y** son vectores en un espacio vectorial V, demuestre que existe un vector único $\mathbf{z} \in V$ tal que $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{y}$.

31. Demuestre que el conjunto de números reales positivos forma un espacio vectorial bajo las operaciones $x + y = xy$ y $\alpha x = x^\alpha$.

Cálculo

32. Considere la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas. Demuestre que el conjunto de soluciones de la ecuación es un espacio vectorial bajo las reglas usuales para la suma de funciones y multiplicación por un escalar.

EJERCICIOS CON MATLAB 5.1

M

1. El archivo *vctrsp.m* es una demostración sobre la geometría de algunas propiedades de los espacios vectoriales de vectores en $\mathbb{R}^2$.

A continuación se presenta el código de la función *vctrsp.m*

```
function vctrsp(x,y,z,a)
% VCTRSP funcion que ilustra las propiedades geometricas
%        de conmutatividad y asociatividad de la suma de vectores.
%        Tambien la propiedad distributiva de la multiplicacion
%        por un escalar de la suma de vectores
%
%        x: vector 2x1
%        y: vector 2x1
%        z: vector 2x1
%        a: escalar

% Inicializacion de datos usados en la funcion
origen=[0;0];Ox=[origen,x];Oy=[origen,y];Oz=[origen,z];
xy=[x,y+x];yx=[y,x+y];yz=[y,y+z];
```

```
% Borrar ventana de comandos y cerrar todas las ventanas
% de figuras abiertas
clc;
disp('Funcion VCTRSP')
disp(' ')
close all;
% Conmutatividad
figure(1)
hold off
subplot(121)
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'b--*',Oy(1,:),Oy(2,:),'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2,x(2)/2,'\bf x');
text(y(1)/2,y(2)/2,'\bf y');
grid
axis square
axis tight
aa=axis;
axis([min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1,...
  min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1])
title('Vectores originales')
subplot(122)
hold off
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'b--*',Oy(1,:),Oy(2,:),'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
hold on
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'r:',xy(1,:),xy(2,:),'r:',...
  Oxy(1,:),Oxy (2,:),'-m*');
set(h,'LineWidth',2)
h=plot(Oy(1,:),Oy(2,:),'g:',yx(1,:),yx(2,:),'g:',...
  Oxy(1,:),Oxy(2,:),'-m*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2,x(2)/2,'\bf x');
text(y(1)/2,y(2)/2,'\bf y');
text(xy(1,2)/2,xy(2,2)/2,'\bf x+y=y+x')
grid
axis square
axis tight
aa=axis;
axis([min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1,...
  min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1])
title('Suma de vectores, conmutatividad')
hold off
disp('Oprima alguna tecla para continuar figura 2');
pause;
% Asociatividad
figure(2)
hold off
subplot(131)
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'b--*',Oy(1,:),Oy(2,:),'b--*',...
  Oz(1,:), Oz(2,:),'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2,x(2)/2,'\bf x');
text(y(1)/2,y(2)/2,'\bf y');
text(z(1)/2,z(2)/2,'\bf z');
grid
axis square
axis tight
```

```
axis([min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1,min(aa([1,3]))-1,...
  max(aa([2,4]))+1])
title('Vectores originales')
subplot(132)
hold off
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'b--*',Oy(1,:),Oy(2,:),...
  'b--*',Oz(1,:),Oz(2,:),'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
hold on
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'r:',xy(1,:),xy(2,:),'r:',Oxy(1,:),...
  Oxy(2,:),'-m*');
set(h,'LineWidth',2)
h=plot(Oxy(1,:),Oxy(2,:),':g*',xyMz(1,:),xyMz(2,:),':m*');
set(h,'LineWidth',2)
h=plot(Oxyz(1,:),Oxyz(2,:),'--c*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2,x(2)/2,'\bf x');
text(y(1)/2,y(2)/2,'\bf y');
text(z(1)/2,z(2)/2,'\bf z');
text(xy(1,2)/2,xy(2,2)/2,'\bf x+y')
text(xyMz(1,2)/2,xyMz(2,2)/2,'\bf (x+y)+z')
grid
axis square
axis tight
aa=axis;
axis([min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1,...
  min(aa([1,3]))-1, max(aa([2,4]))+1])
title('Suma de vectores, (x+y)+z')
hold off
subplot(133)
hold off
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'b--*',Oy(1,:),Oy(2,:),...
  'b--*', Oz(1,:),Oz(2,:),'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
hold on
h=plot(Oy(1,:),Oy(2,:),'r:',yz(1,:),yz(2,:),'r:',Oyz(1,:),...
  Oyz(2,:),'-m*');
set(h,'LineWidth',2)
h=plot(Oyz(1,:),Oyz(2,:),':g*',yzMx(1,:),yzMx(2,:),':m*');
set(h,'LineWidth',2)
h=plot(Oxyz(1,:),Oxyz(2,:),'--c*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2,x(2)/2,'\bf x');
text(y(1)/2,y(2)/2,'\bf y');
text(z(1)/2,z(2)/2,'\bf z');
text(yz(1,2)/2,yz(2,2)/2,'\bf y+z')
text(yzMx(1,2)/2,yzMx(2,2)/2,'\bf x+(y+z)')
grid
axis square
axis tight
aa=axis;
axis([min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1,min(aa([1,3]))-1,...
  max(aa([2,4]))+1])
title('Suma de vectores, x+(y+z)')
hold off
disp('Oprima alguna tecla para continuar figura 3');
pause;
% Distributibidad de multiplicacion por escalar sobre suma de vectores
```

```
subplot(131)
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'b--*',Oy(1,:),Oy(2,:),'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2,x(2)/2,'\bf x');
text(y(1)/2,y(2)/2,'\bf y');
grid
axis square
axis tight
aa=axis;
axis([min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1,...
  min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1])
title('Vectores originales')
subplot(132)
hold off
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'b--*',Oy(1,:),Oy(2,:),'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
hold on
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'r:',xy(1,:),xy(2,:),'r:',...
  Oxy(1,:)*a,Oxy(2,:)*a,'-m*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2,x(2)/2,'\bf x');
text(y(1)/2,y(2)/2,'\bf y');
text(xy(1,2)/2*a,xy(2,2)/2*a,'\bf a(x+y)')
grid
axis square
axis tight
aa=axis;
axis([min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1,...
  min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1])
title('Suma de vectores, a(x+y)')
hold off
subplot(133)
hold off
h=plot(Ox(1,:)*a,Ox(2,:)*a,'b--*',Oy(1,:)*a,Oy(2,:)*a,'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
hold on
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:)*a,'r:',xy(1,:)*a,xy(2,:)*a,'r:',...
  Oxy(1,:)*a,Oxy(2,:)*a,'-m*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2,x(2)/2*a,'\bf x');
text(y(1)/2,y(2)/2*a,'\bf y');
text(xy(1,2)/2*a,xy(2,2)/2*a,'\bf a(x+y)')
grid
axis square
axis tight
aa=axis;
axis([min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1,...
  min(aa([1,3]))-1,max(aa([2,4]))+1])
title('Suma de vectores, ax+ay')
hold off
```

Después de escribir en un archivo con nombre `vctrsp.m`, dé `doc vctrsp` para ver una descripción del uso de la función.

Introduzca los vectores **x**, **y** y **z**, y el escalar **a** dados en seguida, y después dé el comando `vctrsp(x,y,z,a)`. La demostración ilustrará la geometría de las propiedades conmutativa y asociativa de la suma de vectores y de la propiedad distributiva de la multiplicación por un escalar sobre la suma de vectores. Puede resultar útil maximizar la ventana de interés para la mejor

a) $\mathbf{x} = [3;0]$, $\mathbf{y} = [2;2]$, $\mathbf{z} = [-2;4]$. Use $a = 2$, $a = \frac{1}{2}$ y $a = -2$.
b) $\mathbf{x} = [-5;5]$, $\mathbf{y} = [0;-4]$, $\mathbf{z} = [4;4]$. Use $a = 2$, $a = \frac{1}{3}$ y $a = -\frac{1}{3}$.
c) Su propia elección de **x**, **y**, **z** y/o a.

2. *a*) Elija algunos valores para n y m y genere tres matrices aleatorias de $n \times m$, llamadas X, Y y Z. Genere dos escalares aleatorios a y b (por ejemplo, `a = 2*rand(1)-1`). Verifique todas las propiedades del espacio vectorial para estas matrices y escalares. Para demostrar $A = B$, compruebe que $A - B = 0$; para la propiedad iii) decida cómo generar el idéntico aditivo para matrices de $n \times m$. Repita para otros tres juegos de X, Y, Z, a y b (para las mismas n y m).
b) (*Lápiz y papel*) Pruebe las propiedades del espacio vectorial para M_{nm}, las matrices de $n \times m$.
c) (*Lápiz y papel*) ¿Cuál es la diferencia entre los incisos *a*) y *b*)?

5.2 Subespacios vectoriales

Del ejemplo 5.1.1, se sabe que $\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \text{ y } y \in \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial. En el ejemplo 5.1.4 se vio que $V = \{(x, y): y = mx\}$ también es un espacio vectorial. Adicionalmente, es evidente que $V \subset \mathbb{R}^2$. Esto es, $\mathbb{R}^2$ tiene un subconjunto que también es un espacio vectorial. De hecho, todos los espacios vectoriales tienen subconjuntos que también son espacios vectoriales. En esta sección se examinarán estos importantes subconjuntos.

D Definición 5.2.1

Subespacios vectoriales

Se dice que H es un subespacio vectorial de V si H es un subconjunto no vacío de V, y H es un espacio vectorial, junto con las operaciones de suma entre vectores y multiplicación por un escalar definidas para V.

Se puede decir que el subespacio H **hereda** las operaciones del espacio vectorial "padre" V.

Existen múltiples ejemplos de subespacios en este capítulo; sin embargo, en primer lugar, se demostrará un resultado que hace relativamente sencillo determinar si un subconjunto de V es en realidad un subespacio de V.

Teorema 5.2.1 Subespacio vectorial

Un subconjunto no vacío H de un espacio vectorial V es un subespacio de V si se cumplen las dos reglas de cerradura:

Reglas de cerradura para ver si un subconjunto no vacío es un subespacio

i) Si $\mathbf{x} \in H$ y $\mathbf{y} \in H$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in H$.

ii) Si $\mathbf{x} \in H$, entonces $\alpha\mathbf{x} \in H$ para todo escalar α.

Demostración

Es obvio que si H es un espacio vectorial, entonces las dos reglas de cerradura deben cumplirse. De lo contrario, para demostrar que H es un espacio vectorial, debe demostrarse que los axiomas i) a x) en las páginas 286 y 287 se cumplen bajo las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar definidas en V. Las dos operaciones de cerradura [axiomas i) y iv)] se cumplen por hipótesis. Como los vectores en H son también vectores en V, las identidades asociativa, conmutativa, distributiva y multiplicativa [axiomas ii), v), vii), viii), ix) y x)] se cumplen. Sea $\mathbf{x} \in H$. Entonces $0\mathbf{x} \in H$ por hipótesis ii). Pero por el teorema 5.1.1 (parte ii), $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$. De este modo, $\mathbf{0} \in H$ y se cumple el axioma iii). Por último, por la parte ii), $(-1)\mathbf{x} \in H$ para todo $\mathbf{x} \in H$. Por el teorema 5.1.1 (parte iv), $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x} \in H$, de manera que se cumple el axioma iv) y la prueba queda completa.

Este teorema demuestra que para probar si H es o no un subespacio de V, es suficiente verificar que

$\mathbf{x} + \mathbf{y}$ y $\alpha\mathbf{x}$ están en H cuando $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en H y α es un escalar.

La prueba anterior contiene un hecho que por su importancia merece ser mencionado de forma explícita:

Todo subespacio de un espacio vectorial V contiene al $\mathbf{0}$. **(5.2.1)**

Este hecho con frecuencia facilitará la averiguación de si un subconjunto de V en particular *no* es un subespacio de V. Es decir, si un subconjunto no contiene al $\mathbf{0}$, entonces no es un subespacio. Note que el vector cero en H, un subespacio de V, es el mismo que el vector cero en V.

A continuación se mostrarán algunos ejemplos de subespacios.

EJEMPLO 5.2.1 El subespacio trivial

Para cualquier espacio vectorial V, el subconjunto $\{\mathbf{0}\}$ que consiste en el vector cero es únicamente un subespacio ya que $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo número real α [parte i) del teorema 5.1.1]. Esto se denomina **subespacio trivial**.

EJEMPLO 5.2.2 Un espacio vectorial es un subespacio en sí mismo

Para cada espacio vectorial V, V es un subespacio de sí mismo.

Los primeros dos ejemplos muestran que todo espacio vectorial V contiene dos subespacios, $\{\mathbf{0}\}$ y V (que coinciden si $V = \{\mathbf{0}\}$). Es más interesante encontrar otros subespacios. Los subespacios distintos a $\{\mathbf{0}\}$ y $\mathbf{V}$ se denominan **subespacios propios**.

Subespacios propios

EJEMPLO 5.2.3 Un subespacio propio de $\mathbb{R}^2$

Sea $H = \{(x, y): y = mx\}$ (vea el ejemplo 5.1.4). Entonces, como ya se dijo, H es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

cir, un conjunto de puntos que se encuentra sobre una recta que pasa por el origen es el único tipo de subespacio propio de $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 5.2.4 Un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$

Sea $H = \{(x, y, z): x = at, y = bt$ y $z = ct; a, b, c, t$ reales$\}$. Entonces H consiste en los vectores en $\mathbb{R}^3$ que se encuentran sobre una recta que pasa por el origen. Para ver que H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, sea $\mathbf{x} = (at_1, bt_1, ct_1) \in H$ y $\mathbf{y} = (at_2, bt_2, ct_2) \in H$. Entonces

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (a(t_1 + t_2), b(t_1 + t_2), c(t_1 + t_2)) \in H$$

y

$$\alpha\mathbf{x} = (a(\alpha t_1), b(\alpha t_1), c(\alpha t_1)) \in H.$$

Así, H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 5.2.5 Otro subespacio propio de $\mathbb{R}^3$

Sea $\pi = \{(x, y, z): ax + by + cz = 0; a, b, c$ reales$\}$. Entonces, como se vio en el ejemplo 5.1.6, π es un espacio vectorial; así, π es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

En la sección 5.5 se demostrará que los conjuntos de vectores que se encuentran sobre rectas y planos que pasan por el origen son los únicos subespacios propios de $\mathbb{R}^3$.

Antes de analizar más ejemplos es importante observar que *no todo espacio vectorial tiene subespacios propios.*

Nota

Observe que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real; es decir, $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial en donde los escalares se toman como los números reales. Éste es el ejemplo 5.1.1, con $n = 1$.

EJEMPLO 5.2.6 $\mathbb{R}$ no tiene subespacios propios

Sea H un subespacio de $\mathbb{R}$. Si $H \neq \{\mathbf{0}\}$, entonces H contiene un número real α diferente de cero. Por el axioma vi), $1 = (1/\alpha)\,\alpha \in H$ y $\beta 1 = \beta \in H$ para todo número real β. Así, si H no es el subespacio trivial, entonces $H = \mathbb{R}$. Es decir, $\mathbb{R}$ **no** tiene subespacios propios.

EJEMPLO 5.2.7 Algunos subespacios propios de $\mathbb{P}_n$

Si $\mathbb{P}_n$ denota el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a n (ejemplo 5.1.7), y si $0 \leq m < n$, entonces $\mathbb{P}_m$ es un subespacio propio de $\mathbb{P}_n$ como se verifica fácilmente.

EJEMPLO 5.2.8 Un subespacio propio de $\mathbb{M}_{mn}$

Sea $\mathbb{M}_{mn}$ (ejemplo 5.1.10) el espacio vectorial de matrices de $m \times n$ con componentes reales y sea $H = \{A \in \mathbb{M}_{mn}: a_{11} = 0\}$. Por la definición de suma de matrices y multiplicación por un escalar, es obvio que los dos axiomas de cerradura se cumplen de manera que H es un subespacio.

EJEMPLO 5.2.9 Un subconjunto que no es un subespacio propio de $\mathbb{M}_{nn}$

Sea $V = \mathbb{M}_{nn}$ (las matrices de $n \times n$) y sea $H = \{A \in \mathbb{M}_{nn}: A$ es invertible$\}$. Entonces H no es un subespacio ya que la matriz cero de $n \times n$ no está en H.

Nota

$\mathbb{P}_n[0, 1]$ denota el conjunto de polinomios

EJEMPLO 5.2.10 Un subespacio propio de $C[0, 1]$

Cálculo

$\mathbb{P}_n[0, 1] \subset C[0, 1]$ (vea el ejemplo 5.1.8) porque todo polinomio es continuo y $\mathbb{P}_n$ es

EJEMPLO 5.2.11 $C^1[0, 1]$ es un subespacio propio de $C[0, 1]$

Sea $C^1[0, 1]$ el conjunto de funciones con primeras derivadas continuas definidas en $[0, 1]$. Como toda función diferenciable es continua, se tiene $C^1[0, 1] \subset C[0, 1]$. Puesto que la suma de dos funciones diferenciables es diferenciable y un múltiplo constante de una función diferenciable es diferenciable, se ve que $C^1[0, 1]$ es un subespacio de $C[0, 1]$. Se trata de un subespacio propio porque no toda función continua es diferenciable.

EJEMPLO 5.2.12 Otro subespacio propio de $C[0, 1]$

Si $f \in C[0, 1]$, entonces $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe. Sea $H = \{f \in C[0, 1]: \int_0^1 f(x)\,dx = 0\}$. Si $f \in H$ y $g \in H$, entonces $\int_0^1 [f(x) + g(x)]\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx = 0 + 0 = 0$ y $\int_0^1 \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Así $f + g$ y αf están en H para todo número real α. Esto muestra que H es un subespacio propio de $C[0, 1]$.

Como lo ilustran los últimos tres ejemplos, un espacio vectorial puede tener un número grande y variado de subespacios propios. Antes de terminar esta sección se demostrará un hecho interesante sobre subespacios.

Teorema 5.2.2

Sean H_1 y H_2 dos subespacios de un espacio vectorial V. Entonces $H_1 \cap H_2$ es un subespacio de V.

Demostración

Observe que $H_1 \cap H_2$ es no vacío porque contiene al $\mathbf{0}$. Sea $\mathbf{x}_1 \in H_1 \cap H_2$ y $\mathbf{x}_2 \in H_1 \cap H_2$. Entonces como H_1 y H_2 son subespacios, $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in H_1$, y $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in H_2$. Esto significa que $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in H_1 \cap H_2$ De manera similar, $\alpha\mathbf{x}_1 \in H_1 \cap H_2$. Por lo tanto, se cumplen los dos axiomas de cerradura y $H_1 \cap H_2$ es un subespacio.

EJEMPLO 5.2.13 La intersección de dos subespacios de $\mathbb{R}^3$ es un subespacio

En $\mathbb{R}^3$ sea $H_1 = \{(x, y, z): 2x - y - z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): x + 2y + 3z = 0\}$. Entonces H_1 y H_2 consisten en vectores que se encuentran sobre planos que pasan por el origen y son, según el ejemplo 5.2.5, subespacios de $\mathbb{R}^3$. $H_1 \cap H_2$ es la intersección de los dos planos que se calculan como en el ejemplo 4.5.9 de la sección 4.5:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 2x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

Reduciendo renglones se tiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{array}\right)$$

De este modo, todas las soluciones al sistema homogéneo están dadas por $\left(-\frac{1}{5}z, -\frac{7}{5}z, z\right)$. Haciendo $z = t$ se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta L en $\mathbb{R}^3$: $x = -\frac{1}{5}t$, $y = -\frac{7}{5}t$, $z = t$. Como se observó en el ejemplo 5.2.4, el conjunto de vectores sobre L constituye un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Observación. No es necesariamente cierto que si H_1 y H_2 son subespacios de V, $H_1 \cup H_2$ es un subespacio de V (puede o no serlo). Por ejemplo, $H_1 = \{(x, y): y = 2x\}$ y $\{(x, y): y = 3x\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^2$, pero $H_1 \cup H_2$ *no* es un subespacio. Para ver esto, observe que $(1, 2) \in H_1$ y $(1, 3) \in H_2$, de manera que tanto $(1, 2)$ como $(1, 3)$ están en $H_1 \cup H_2$. Pero $(1, 2) + (1, 3) = (2, 5) \notin H_1 \cup H_2$ porque $(2, 5) \notin H_1$ y $(2, 5) \in H_2$. Así, $H_1 \cup H_2$ no es cerrado bajo la suma y por lo tanto no es un subespacio.

RESUMEN 5.2

- Un **subespacio** H de un espacio vectorial V es un subconjunto de V que es en sí un espacio vectorial.
- Un subespacio no vacío H de un espacio vectorial V es un subespacio de V si las dos siguientes reglas se cumplen:
  i) Si $\mathbf{x} \in H$ y $\mathbf{y} \in H$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in H$.
  ii) Si $\mathbf{x} \in H$, entonces $\alpha\mathbf{x} \in H$ para cada escalar α.
- Un **subespacio propio** de un espacio vectorial V es un subespacio de V diferente de $\{\mathbf{0}\}$ y de V.

AUTOEVALUACIÓN 5.2

De las siguientes aseveraciones, evalúe si son falsas o verdaderas.

I) Conjunto de vectores de la forma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

II) El conjunto de vectores de la forma $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

III) El conjunto de matrices diagonales de 3×3 es un subespacio de $\mathbb{M}_{33}$.

IV) El conjunto de matrices triangulares superiores de 3×3 es un subespacio de $\mathbb{M}_{33}$.

V) El conjunto de matrices triangulares de 3×3 es un subespacio de $\mathbb{M}_{33}$.

VI) Sea H un subespacio de $\mathbb{M}_{22}$. Entonces $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ debe estar en H.

VII) Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x + 3y - z = 0 \right\}$ y $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - 2y + 5z = 0 \right\}$. Entonces

VIII) Si H y K son los subconjuntos del problema VII, entonces $H \cap K$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

IX) El conjunto de polinomios de grado 2 es un subespacio de $\mathbb{P}_3$.

Respuestas a la autoevaluación

I) F	II) V	III) V	IV) V	V) F
VI) V	VII) F	VIII) V	IX) F	

PROBLEMAS 5.2

De los problemas 1 al 29 determine si el subconjunto dado H del espacio vectorial V es un subespacio de V.

1. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y): x = 3, y \in \mathbb{R}\}$

2. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y): y \leq 0\}$

3. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y): x = y\}$

4. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y): y = 2x\}$

5. $V = \mathbb{R}^3$; $H =$ el plano yz

6. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y): 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$

7. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$

8. $V = \mathbb{M}_{nn}$; $H = \{D \in \mathbb{M}_{nn}: D \text{ es diagonal}\}$

9. $V = \mathbb{M}_{nn}$; $H = \{T \in \mathbb{M}_{nn}; T \text{ es triangular superior}\}$

10. $V = \mathbb{M}_{nn}$; $H = \{T : T \text{ es triangular inferior}\}$

11. $V = \mathbb{M}_{nn}$; $H = \{S \in \mathbb{M}_{nn}: S \text{ es simétrica}\}$

12. $V = \mathbb{M}_{nn}$; $H = \{A \in \mathbb{M}_{nn}: a_{ij} = 0\}$

13. $V = M_{22}$; $H = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$

14. $V = \mathbb{R}$; $H = \mathbb{Q}$

15. $V = \mathbb{M}_{22}$; $H = \left\{ A \in \mathbb{M}_{nn}; A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$

16. $V = \mathbb{M}_{22}$; $H = \left\{ A \in \mathbb{M}_{nn}; A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a & a-1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$

17. $V = \mathbb{M}_{22}$; $H = \left\{ A \in \mathbb{M}_{nn}; A = \begin{pmatrix} a & -a \\ 0 & -a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$

18. $V = \mathbb{M}_{22}$; $H = \left\{ A \in \mathbb{M}_{nn}; A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$

19. $V = \mathbb{P}_4$; $H = \{p \in \mathbb{P}_4: \text{grado } p = 4\}$

20. $V = \mathbb{P}_n$; $H = \{p \in \mathbb{P}_n: p(0) = 0 \text{ y } p'(0) = 0\}$

22. $V = \mathbb{P}_n$; $H = \{p \in \mathbb{P}_n: p(0) = 0\}$

23. $V = \mathbb{P}_n$; $H = \{p \in \mathbb{P}_n: p(0) = 1\}$

24. $V = C[0, 1]$; $H = \{f \in C[0, 1]: f(0) = f(1) = 0\}$

25. $V = C[0, 1]$; $H = \{f \in C[0, 1]: f(0) = 2\}$

Cálculo

26. $V = C^1[0, 1]$; $H = \{f \in C^1[0, 1]: f'(0) = 0\}$

Cálculo

27. $V = C[a, b]$; donde a y b son números reales y $a < b$; $H = \{f \in C[a, b]: \int_a^b f(x)dx = 0\}$

Cálculo

28. $V = C[a, b]$; $H = \{f \in C[a, b]: \int_a^b f(x)dx = 1\}$

Cálculo

29. $V = C[a, b]$; $H = \{f \in C[a, b]: \int_a^b f^2(x)dx \leq 1\}$

30. Sea $V = \mathbb{M}_{22}$; $H_1 = \{A \in \mathbb{M}_{22}: a_{11} = 0\}$ y $H = \left\{A \in \mathbb{M}_{nn}: A = \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\right\}$.

   a) Demuestre que H_1 y H_2 son subespacios.
   b) Describa el subconjunto de $H = H_1 \cap H_2$ y muestre que es un subespacio.

Cálculo

31. Si $V = C[0, 1]$, sea H_1 el subespacio del ejemplo 5.2.10 y H_2 el subespacio del ejemplo 5.2.11. Describa el conjunto $H_1 \cap H_2$ y demuestre que es un subespacio.

Espacio nulo de una matriz

32. Sea A una matriz de $n \times m$ y sea $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m: A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^m$. H se llama **espacio nulo** de la matriz A.

33. En el problema 32 sea $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m: A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$. Demuestre que H no es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Hiperplano en $\mathbb{R}^4$

34. Sea $H = \{(x, y, z, w): ax + by + cz + dw = 0\}$, donde a, b, c y d son números reales, no todos cero. Demuestre que H es un subespacio propio de $\mathbb{R}^4$. H se llama un **hiperplano en $\mathbb{R}^4$** que pasa por el origen.

Hiperplano en $\mathbb{R}^n$

35. Sea $H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales no todos cero. Demuestre que H es un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$. H se llama un **hiperplano en $\mathbb{R}^n$** que pasa por el origen.

36. Sean H_1 y H_2 subespacios de un espacio vectorial V. Sea $H_1 + H_2 = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ con $\mathbf{v}_1 \in H_1$ y $\mathbf{v}_2 \in H_2\}$. Demuestre que H_1 y H_2 es un subespacio de V.

37. Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Demuestre que $H = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2; a, b$ reales$\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

*38. En el problema 37 demuestre que si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son no colineales, entonces $H = \mathbb{R}^2$.

Subespacio generado

*39. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores arbitrarios en un espacio vectorial V. Sea $H = \{\mathbf{v} \in V: \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n\}$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares. Demuestre que H es un subespacio de V. H se llama el **subespacio generado** por los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

EJERCICIOS CON MATLAB 5.2

1. *a)* Genere una matriz aleatoria A de 4×4 y sea `S = triu(A) + triu(A)'`. Verifique que S es simétrica.
   b) Usando el inciso *a)*, genere dos matrices aleatorias de 4×4 reales simétricas, S y T, y un es-

c) ¿Por qué se puede decir que se ha reunido evidencia de que el subconjunto de matrices simétricas de 4×4 es un subespacio de $\mathbb{M}_{44}$?

d) (*Lápiz y papel*) Pruebe que el subconjunto de matrices simétricas de $n \times n$ es un subespacio de $\mathbb{M}_{nn}$.

5.3 Combinación lineal y espacio generado

Se ha visto que todo vector $\mathbf{v} = (a, b, c)$ en $\mathbb{R}^3$ se puede escribir en la forma

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

en cuyo caso se dice que $\mathbf{v}$ es una *combinación lineal* de los tres vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$. De manera más general se tiene la siguiente definición.

Definición 5.3.1

Combinación lineal

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores en un espacio vectorial V. Entonces cualquier vector de la forma

$$\boxed{a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n} \tag{5.3.1}$$

donde, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares se denomina una **combinación lineal** de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

EJEMPLO 5.3.1 Una combinación lineal en $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ya que $\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 5.3.2 Una combinación lineal en $\mathbb{M}_{23}$

En $\mathbb{M}_{23}$, $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, lo que muestra que $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 5.3.3 Combinaciones lineales en $\mathbb{P}_n$

En $\mathbb{P}_n$ todo polinomio se puede escribir como una combinación lineal de los "monomios" $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

Definición 5.3.2

Conjunto generador

Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ de un espacio vectorial V **generan** a V si todo vector en V se puede escribir como una combinación lineal de los mismos. Es decir, para todo $\mathbf{v} \in V$ existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

(5.3.2)

EJEMPLO 5.3.4 Conjunto de vectores que generan $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

En la sección 4.1 se vio que los vectores $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan $\mathbb{R}^2$. En la sección 4.3 se vio que $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan $\mathbb{R}^3$.

Ahora se verá brevemente la generación de algunos otros espacios vectoriales.

EJEMPLO 5.3.5 $n + 1$ vectores que generan a $\mathbb{P}_n$

Del ejemplo 5.3.3 se deduce que los monomios $1, x, x^2, \ldots, x^n$ generan a $\mathbb{P}_n$.

EJEMPLO 5.3.6 Cuatro vectores que generan a $\mathbb{M}_{22}$

Como $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, vemos que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ generan a $\mathbb{M}_{22}$.

EJEMPLO 5.3.7 Ningún conjunto finito de polinomios generan a P

Sea P el espacio vectorial de polinomios. Entonces ningún conjunto *finito* de polinomios genera a P. Para ver esto, suponga que $p_1, p_2, \ldots, p_m$ son polinomios. Sea p_k el polinomio de mayor grado en este conjunto y sea $N = \text{grado}(p_k)$. Entonces el polinomio $p(x) = x^{N+1}$ no se puede escribir como una combinación lineal de $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Por ejemplo, si $N = 3$, entonces $x^4 \neq c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ para cualesquiera escalares c_0, c_1, c_2 y c_3.

Ahora se analizará otra forma de encontrar subespacios de un espacio vectorial V.

Definición 5.3.3

Espacio generado por un conjunto de vectores

Sea $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, k vectores de un espacio vectorial V. El **espacio generado** por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es el conjunto de combinaciones lineales $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. Es decir

$$\boxed{\text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_k\mathbf{v}_k\}} \qquad (5.3.3)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son escalares arbitrarios.

Teorema 5.3.1 El espacio generado por vectores es un subespacio vectorial

Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un subespacio de V.

Demostración

EJEMPLO 5.3.8 El espacio generado por dos vectores en $\mathbb{R}^3$

Sea $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4)$ y $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 6)$. Entonces $H = \text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = a_1(2, -1, 4) + a_2(4, 1, 6)\}$.

¿Cuál es la apariencia de H? Si $\mathbf{v} = (x, y, z) \in H$, entonces se tiene $x = 2a_1 + 4a_2$, $y = -a_1 + a_2$ y $z = 4a_1 + 6a_2$. Si se piensa que (x, y, z) está fijo, entonces estas ecuaciones se pueden ver como un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas a_1, a_2. Este sistema se resuelve en la forma usual:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & y \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 6 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 6 & z \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 0 & 6 & x + 2y \\ 0 & 10 & z + 4y \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{6}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 0 & 1 & \frac{x + 2y}{6} \\ 0 & 10 & z + 4y \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 10R_2]{R_1 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{x}{6} + \frac{2y}{3} \\ 0 & 1 & \frac{x}{6} + \frac{y}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-5x}{3} + \frac{2y}{3 + z} \end{array}\right)$$

Desde el capítulo 1 se observa que el sistema tiene una solución únicamente si $\frac{-5x}{3} + \frac{2y}{3} + z = 0$; o multiplicando por -3, si

$$5x - 2y - 3z = 0 \tag{5.3.4}$$

La ecuación (5.3.4) es la ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen.

Este último ejemplo se puede generalizar para probar el siguiente hecho interesante:

> El espacio generado por dos vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^3$ que no son paralelos es un plano que pasa por el origen.

En los problemas 5.3.22 y 5.3.23 se encuentra la sugerencia de una demostración.

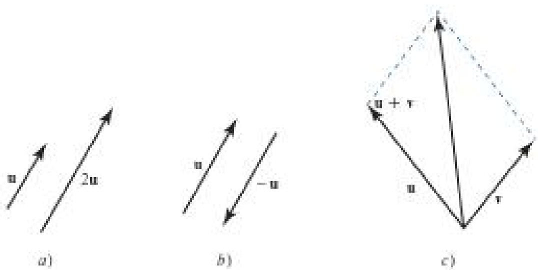


Figura 5.1

$\mathbf{u} + \mathbf{v}$ se obtiene de la regla del paralelogramo.

Se puede dar una interpretación geométrica de este resultado. Vea los vectores de la figura 5.1. Se conoce (de la sección 4.1) la interpretación geométrica de los vectores $2\mathbf{u}$, $-\mathbf{u}$ y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, por ejemplo. Haciendo uso de éstos, se observa que cualquier otro vector en el plano de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se puede obtener como una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. La figura 5.2 muestra cuatro situaciones diferentes en las

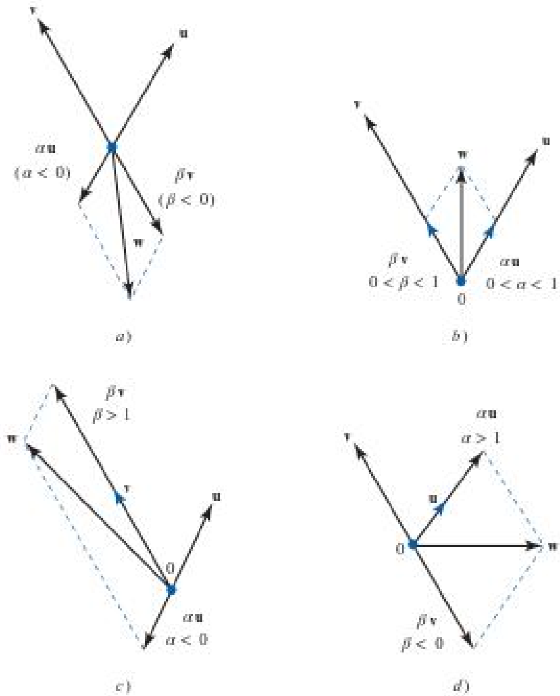


Figura 5.2

En cada caso $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ para valores adecuados de α y β.

Observación. En las definiciones 5.3.2 y 5.3.3 se utilizaron dos términos diferentes: "genera" y "espacio generado". Se hace hincapié en que

verbo
↓

Un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *genera* a V si todo vector en V se puede escribir como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$; pero

sustantivo
↓

El *espacio generado* por los n vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ es el conjunto de combinaciones lineales de estos vectores.

Estos dos conceptos son diferentes –aun cuando los términos se parezcan–.

Se cierra esta sección con la mención de un resultado útil. Su demostración no es difícil y se deja como ejercicio (vea el problema 5.3.24).

Teorema 5.3.2

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$, $n + 1$ vectores que están en un espacio vectorial V. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ genera a V, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ también genera a V. Es decir, si se agregan

RESUMEN 5.3

- Una **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ es un espacio vectorial V es la suma de la forma

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$$

  donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son escalares.

- Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en un espacio vectorial V **generan** a V si todo vector en V se puede expresar como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

- El **espacio generado por un conjunto de vectores** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ en un espacio vectorial V es el conjunto de combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.

- gen $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k]$ es un subespacio de V.

AUTOEVALUACIÓN 5.3

I) ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores no pueden generar a $\mathbb{R}^2$?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

II) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de polinomios generan a $\mathbb{P}_2$?

a) $1, x^2$ *b)* $3, 2x, -x^2$

c) $1 + x, 2 + 2x, x^2$ *d)* $1, 1 + x, 1 + x^2$

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos.

III) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ está en el espacio generado por $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

IV) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ está en el espacio generado por $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

V) $[1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{10\,000}]$ genera a P.

VI) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ genera a $\mathbb{M}_{22}$.

VII) gen $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

VIII) gen $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\0\\8\\2\end{pmatrix}\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

IX) Si $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$ genera a $\mathbb{R}^2$, entonces $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}\right\}$ también genera $\mathbb{R}^2$.

Respuestas a la autoevaluación

I) *a, b, d* **II)** *b, d* **III)** V **IV)** F **V)** V
VI) V **VII)** F **VIII)** V **IX)** V

PROBLEMAS 5.3

De los problemas 1 al 25 determine si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial dado.

1. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix}$

2. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

3. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

4. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

5. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

6. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\-12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-10\\5\end{pmatrix}$

7. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

8. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}9\\0\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-7\\-1\\-2\end{pmatrix}$

9. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\5\end{pmatrix}$

10. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

11. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-8\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix}$

12. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}-7\\-6\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}14\\-6\\18\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}35\\18\\-21\end{pmatrix}$

13. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}4\\4\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\4\\-24\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\0\\-6\end{pmatrix}$

14. En $\mathbb{R}^3$: $(-8, -7, 9), (-5, 6, -8), (8, 1, -1)$

15. En $\mathbb{R}^3$: $(1, -1, 2), (-1, 1, 2), (0, 0, 1)$

16. En $\mathbb{R}^3$: $(0, -4, 6), (-1, 0, 6), (2, -4, -6)$

17. En $\mathbb{R}^3$: $(42, 12, -16), (-9, 8, 4), (6, 7, -2), (-2, 2, 0)$

18. En $\mathbb{P}_2$: $1 - x, 3 - x^2$

19. En $\mathbb{P}_2$: $1 + x, x + x^2, 4$

20. En $\mathbb{P}_2$: $x^2 + 1; x^2 - 1; x + 6$

21. En $\mathbb{P}_2$: $1 + x, x + x^2, \ 3 + 4x + x^2, -2 + x + 3x^2$

22. En $\mathbb{P}_2$: $-10 + 3x + 11x^2, 10 + 9x - 4x^2, 5 + x + 4x^2$

23. En $\mathbb{M}_{22}$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

24. En $\mathbb{M}_{22}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

25. En $\mathbb{M}_{23}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

De los problemas 26 al 33 describa el espacio generado por los vectores.

26. $\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} -12 \\ -16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 20 \\ -23 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 24 \\ -2 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 39 \\ 20 \\ 38 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -34 \\ 12 \\ -22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -18 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -23 \\ 25 \\ 25 \\ -56 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

*35. Si $p_1, p_2, \ldots, p_m$ genera $\mathbb{P}_m$, demuestre que $m \geq n + 1$.

36. Demuestre que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\alpha\mathbf{u}$ están en gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. [*Sugerencia:* Utilizando la definición de espacio generado, escriba $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\alpha\mathbf{u}$ como combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.]

37. Demuestre que el conjunto infinito $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ genera P, el espacio vectorial de polinomios.

38. Sea H un subespacio de V que contiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Demuestre que gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq H$. Es decir, gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es el subespacio *más pequeño* de V que contiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

39. Sean $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que si $\mathbf{v}_2 = c\mathbf{v}_1$, entonces gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una recta que pasa por el origen.

**40. En el problema 39 suponga que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ no son paralelos. Demuestre que $H =$ gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es un plano que pasa por el origen. ¿Cuál es la ecuación del plano? [*Sugerencia:* Si $(x, y, z) \in H$, escriba $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$ y encuentre una condición respecto a x, y y z tal que el sistema de 3×2 resultante tenga una solución.]

41. Pruebe el teorema 5.3.2. [*Sugerencia:* Si $\mathbf{v} \in V$, escriba $\mathbf{v}$ como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ con el coeficiente de $\mathbf{v}_{n+1}$ igual a cero.]

42. Demuestre que $\mathbb{M}_{22}$ se puede generar con matrices invertibles.

43. Sean $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ dos n-vectores en un espacio vectorial V. Suponga que

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{12}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{u}_n \\
\mathbf{v}_2 &= a_{21}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{u}_n \\
&\vdots \\
\mathbf{v}_n &= a_{n1}\mathbf{u}_1 + a_{n2}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{u}_n
\end{aligned}$$

Demuestre que si

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} =$ gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

EJERCICIOS CON MATLAB 5.3

M

1. Visualización de las combinaciones lineales

a) Vuelva a trabajar con los problemas 2 y 3 de MATLAB 4.1.

b) (*Use el archivo combo.m*) El archivo *combo.m* ilustra la combinación lineal `a * u1 + b * u2 + c * u3`. A continuación se presenta el código de la función `combo.m`:

```
function combo(x,y,z,a,b,c)
% COMBO funcion que grafica la combinacion lineal
%       w= ax + by + cz
%
```

```
%        z: vector de 2x1
%        a: escalar
%        b: escalar
%        c: escalar

origen=[0;0];
Ox=[origen,x];Oy=[origen,y];Oz=[origen,z];
xy=[a*x,a*x+b*y];yx=[b*y,a*x+b*y];OxMy=[origen,a*x+b*y];
T=a*x+b*y;
OTMz=[origen,T+c*z];

clc;
disp('COMBO')
figure(1)
clf
h=plot(Ox(1,:),Ox(2,:),'b--*',Oy(1,:),Oy(2,:),...
  'b--*',Oz(1,:),Oz(2,:),'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2,x(2)/2,'\bf x');
text(y(1)/2,y(2)/2,'\bf y');
text(z(1)/2,z(2)/2,'\bf z');
axis square
hold on
disp('Vectores originales')
disp('Oprima alguna tecla para continuar')
disp(' ')
pause
plot(Ox(1,:)*a,Ox(2,:)*a,'r:',Oy(1,:)*b,Oy(2,:)*b,'r:',...
  xy(1,:),xy(2,:),'r:',yx(1,:),yx(2,:),'r:');
h=plot(OxMy(1,:),OxMy(2,:),'g-*');
set(h,'LineWidth',2)
text(x(1)/2*a,x(2)/2*a,'\bf ax');
text(y(1)/2*b,y(2)/2*b,'\bf by');
text(OxMy(1,2)/2,OxMy(2,2)/2,'\bf T')
Tz=[T,T+c*z];
zT=[z*c,T+c*z];
plot(Tz(1,:),Tz(2,:),':k',c*Oz(1,:),c*Oz(2,:),':k',...
  zT(1,:),zT(2,:),':k')
h=plot(OTMz(1,:),OTMz(2,:),'-m*');
set(h,'LineWidth',2)
text(z(1)/2*c,z(2)/2*c,'\bf cz')
text(OTMz(1,2)/2,OTMz(2,2)/2,'\bf w')
title('T=a x + b y ')
xlabel('w = T + c z = a x + b y + c z')
disp('Combinacion lineal de vectores originales')
```

Con `doc combo` se obtiene una descripción. Dados tres vectores u_1, u_2, u_3 y tres escalares a, b y c, `combo(u1,u2,u3,a,b,c)` ilustra la geometría de la combinación lineal anterior. Hay pausas durante el despliegue de pantallas; para continuar, oprima cualquier tecla.

i) $\mathbf{u1} = [1;2]$, $\mathbf{u2} = [-2;3]$, $\mathbf{u3} = [5;4]$, $a = -2$, $a = 2$, $b = 2$, $c = -1$

ii) $\mathbf{u1} = [1;1]$, $\mathbf{u2} = [-1;1]$, $\mathbf{u3} = [3;0]$, $a = 2$, $b = -1$, $c = .5$

iii) Vectores de su elección

2. *a)* (*Lápiz y papel*) Decir que $\mathbf{w}$ está en gen $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ significa que existen escalares c_1 y c_2 tales que $\mathbf{w} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v}$. Para los conjuntos de vectores dados, escriba $\mathbf{w} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v}$, interprete esto como un sistema de ecuaciones para las incógnitas c_1 y c_2, verifique que la matriz aumentada

i) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

ii) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

iii) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

M *b*) (*Utilice el archivo lincomb.m*) Verifique los resultados (y observe la geometría) introduciendo primero los vectores `u`, `v` y `w` y después dando `lincomb(u,v,w)` para cada uno de los conjuntos de vectores en el inciso *a*).

3. *a*) (*Lápiz y papel*) Decir que $\mathbf{w}$ está en gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ significa que existen escalares c_1, c_2 y c_3 tales que $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$. Para cada conjunto de vectores dado, escriba $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$, interprételo como un sistema de ecuaciones para las incógnitas c_1, c_2 y c_3, verifique que la matriz aumentada para el sistema sea $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3 | \mathbf{w}]$ y resuelva el sistema. Observe que habrá un número infinito de soluciones.

i) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

ii) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) (*Lápiz y papel*) Este inciso y el inciso *c*) exploran el "significado" de tener un número infinito de soluciones. Para cada conjunto de vectores en el inciso *a*):

i) Haga $c_3 = 0$ y despeje c_2 y c_1. Escriba $\mathbf{w}$ como combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

ii) Haga $c_2 = 0$ y despeje c_1 y c_3. Escriba $\mathbf{w}$ como combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_3$.

iii) Haga $c_1 = 0$ y despeje c_2 y c_3. Escriba $\mathbf{w}$ como combinación lineal de $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$.

c) (Utilice el archivo `combine2.m`) A continuación se presenta el código de la función `combine2.m`:

```
function combine2(v1,v2,v3,w);
% COMBINE2 funcion que grafica las combinaciones lineales de
           pares de vectores (v1,v2), (v2,v3), (v1,v3) para producir
           al vector w, los pares de vectores no deben ser paralelos
%
%     v1: vector 2x1
%     v2: vector 2x1
%     v3: vector 2x1
%      w: vector 2x1

origen=[0;0];
Ov1=[origen,v1];Ov2=[origen,v2];Ov3=[origen,v3];Ow=[origen,w];

wv1v2=[v1,v2]\w;wv2v3=[v2,v3]\w;wv1v3=[v1,v3]\w;

Ov1Mv2w=[origen,wv1v2(1)*v1,wv1v2(2)*v2,[v1,v2]*wv1v2];
```

```
clc;
close all
figure(1)
subplot(221)
plot_vectores_originales(Ov1,Ov2,Ov3,Ow);
title('Vectores Originales')
axis square
subplot(222)
plot_vectores_originales(Ov1,Ov2,Ov3,Ow);
hold on
plot_vectores_comb(Ov1Mv2w)
texto=['w = (',convierte(wv1v2(1)),')v_1 + (',...
  convierte(wv1v2(2)),')v_2'];
title(texto)
axis square
subplot(223)
plot_vectores_originales(Ov1,Ov2,Ov3,Ow);
hold on
plot_vectores_comb(Ov2Mv3w)
texto=['w = (',convierte(wv2v3(1)),')v_2 + (',...
  convierte(wv2v3(2)),')v_3'];
title(texto)
axis square
subplot(224)
plot_vectores_originales(Ov1,Ov2,Ov3,Ow);
hold on
plot_vectores_comb(Ov1Mv3w)
texto=['w = (',convierte(wv1v3(1)),')v_1 + (',...
  convierte(wv1v3(2)),')v_3'];
title(texto)
axis square

%------------------------------
function plot_vectores_originales(v1,v2,v3,w)
% PLOT_VECTORES_ORIGINALES función auxiliar que grafica vectores
%
%     v1,v2,v3,2: matrices de 2x2, primera columna coordenadas del pun-
          to de partida
%         segunda columna coordenadas de punto final

h=plot(v1(1,:),v1(2,:),'b--*',v2(1,:),v2(2,:),'b--*',...
   v3(1,:),v3(2,:),'b--*',w(1,:),w(2,:),'b--*');
set(h,'LineWidth',2)
text(v1(1,2)/2,v1(2,2)/2,'\bf v_1');
text(v2(1,2)/2,v2(2,2)/2,'\bf v_2');
text(v3(1,2)/2,v3(2,2)/2,'\bf v_3');
text(w(1,2)/2,w(2,2)/2,'\bf w');

%------------------------------
function plot_vectores_comb(AA)
% PLOT_VECTORES_COMB funcion que grafica un cuadrado a partir de las
                     columnas de la matriz AA
%
%     AA: matriz de 2x4, donde las columnas son las
%         coordenadas de los vertices

plot(AA(1,1:2),AA(2,1:2),'r:',AA(1,[1,3]),AA(2,[1,3]),'r:',...
   AA(1,[2,4]),AA(2,[2,4]),'r:',AA(1,[3,4]),AA(2,[3,4]),'r:');
```

```
%------------------------------
function str=convierte(num)
% CONVIERTE dado un numero regresa la representacion racional como una
  cadena de caracteres
%
%           num: escalar
%           str: cadena de caracters con la representacion
                 racional de num

[temp1N,temp1D]=rat(num);
if temp1D~=1
   str=[num2str(temp1N),'/',num2str(temp1D)];
else
   str=num2str(temp1N);
end
```

Dando `help combine2` se obtiene una descripción. Para cada conjunto de vectores en el inciso *a*), introduzca los vectores v_1, v_2, v_3 y w y después dé `combine2(v1,v2,v3,w)`. Con esto se demuestra la geometría de las observaciones del inciso *b*).

Nota. Es importante observar que los vectores v_1, v_2, v_3 tomados por pares no son paralelos.

4. ***a***) (*Lápiz y papel*) Para el conjunto de vectores $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ y el vector **w** en i) del inciso *c*), escriba la ecuación expresando $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$, como un sistema de ecuaciones con c_1, c_2 y c_3 como incógnitas. Escriba la matriz aumentada para este sistema de ecuaciones y verifique que sea $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3 | \mathbf{w}]$. Explique por qué **w** es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ si y sólo si el sistema tiene solución.

b) Para cada conjunto de vectores $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k]$ y **w** en el inciso *c*), encuentre la matriz aumentada `[v1,v2,...,vk|w]` y resuelva el sistema correspondiente usando el comando `rref`.

Forme $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$, una solución al sistema de ecuaciones si existe la solución.

c) Para cada caso trabajado en el inciso *b*), escriba una conclusión diciendo si **w** es o no es una combinación lineal de $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k]$ y por qué. De ser así, verifique que $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$, donde $c_1, \ldots, c_k$ sean las componentes del vector solución **c** en el inciso *b*).

i) $\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ $\quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 25 \end{pmatrix}$

ii) $\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ $\quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 25 \end{pmatrix}$

iii) $\left\{\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}\right\}$ $\quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 10.5 \\ 2 \\ -14 \\ 3.5 \end{pmatrix}$

iv) en el mismo conjunto que en iii); $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

v) $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 11 \\ -17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -19 \\ -9 \\ -46 \\ 74 \end{pmatrix}$

vi) en el mismo conjunto que en i); $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

vii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. ***a)*** Para $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ dados, sea `A = [v1,v2,...,vk]` y encuentre `rref(A)`. Argumente por qué habrá una solución al sistema `[A|w]` para cualquier $\mathbf{w}$ en el $\mathbb{R}^n$ indicado. Explique por qué se puede concluir que el conjunto genera a todo ese $\mathbb{R}^n$.

i) $\mathbb{R}^3$ $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

ii) $\mathbb{R}^3$ $\left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

b) Para $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ dados, sea `A = [v1,v2,...,vk]` y encuentre `rref(A)`. Argumente por qué habrá alguna $\mathbf{w}$ en el $\mathbb{R}^n$ indicado para el que no hay una solución al sistema `[A|w]`. Experimente usando MATLAB para encontrar dicha w. Explique por qué puede concluir que el conjunto no genera todo $\mathbb{R}^n$.

i) $\mathbb{R}^4$ $\left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

ii) $\mathbb{R}^4$ $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 11 \\ -17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$

iii) $\mathbb{R}^3$ $\left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

6. Considere las matrices en el problema 2 de MATLAB 2.4. Pruebe la invertibilidad de cada ma-

matriz es $n \times n$). Escriba una conclusión respecto a la relación entre la invertibilidad de una matriz de $n \times n$ y si las columnas de la matriz generan todo $\mathbb{R}^n$.

7. Recuerde de problemas anteriores que $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$; es decir, $\mathbf{w}$ está en gen $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k]$ siempre que $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$ es una solución al sistema de ecuaciones cuya matriz aumentada es $[\mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_k | \mathtt{w}]$.

a) Para el siguiente conjunto de vectores, muestre que cualquier $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^4$ estará en el espacio generado por el conjunto de vectores pero habrá un número infinito de maneras de escribir $\mathbf{w}$ como una combinación lineal del conjunto de vectores; es decir, habrá un número infinito de maneras de elegir los coeficientes $c_1, \ldots, c_k$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 27 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Para cada $\mathbf{w}$ dada:

i) Resuelva el sistema para encontrar los coeficientes necesarios para escribir $\mathbf{w}$ como una combinación lineal del conjunto de vectores y escriba las soluciones en términos de variables arbitrarias naturales (es decir, las variables correspondientes a las columnas en la `rref` sin pivotes).

ii) Establezca variables arbitrarias iguales a cero y escriba $\mathbf{w}$ como una combinación lineal de los vectores en el conjunto.

iii) Verifique que $\mathbf{w}$ es igual a la combinación lineal que encontró:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 23 \\ -15 \\ 33 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -13 \\ 18 \\ -45 \\ 18 \end{pmatrix}$$

c) A partir de los resultados del inciso *b*), ¿qué vectores del conjunto original no fueron necesarios al escribir $\mathbf{w}$ como combinación lineal del conjunto de vectores? ¿Por qué? ¿Cómo pueden reconocerse en la forma escalonada por renglones reducidos de la matriz cuyas columnas son el conjunto de vectores?

d) Considere el subconjunto de los vectores originales obtenido eliminando los vectores no necesarios. Demuestre que cada vector no necesario está en el espacio generado por este subconjunto de vectores. Argumente la razón por la que cualquier vector $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^4$ estará en el espacio generado por este subconjunto de vectores y por la que los coeficientes de la combinación lineal son únicos.

e) Repita los incisos *a*) a *d*) para el siguiente conjunto de vectores y los vectores $\mathbf{w}$ dados en $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 32 \\ 32 \\ \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 26 \\ 31 \\ \end{pmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ \end{pmatrix}$$

8. Aplicación Una compañía de concreto almacena las tres mezclas básicas, que se presentan a continuación. Las cantidades se miden en gramos y cada "unidad" de mezcla pesa 60 gramos. Puede formular mezclas especiales revolviendo combinaciones de las tres mezclas básicas; entonces las mezclas especiales posibles pertenecen al espacio generado por los tres vectores que representan las tres mezclas básicas.

	A	B	C
Cemento	20	18	12
Agua	10	10	10
Arena	20	25	15
Grava	10	5	15
Tobas	0	2	8

a) ¿Se puede hacer una mezcla que consiste en 1000 g de cemento, 200 g de agua, 1000 g de arena, 500 g de grava y 300 g de tobas? ¿Por qué sí o por qué no? De ser posible, ¿cuántas unidades de cada una de las mezclas A, B y C se necesitan para formular la mezcla especial?

b) Suponga que desea preparar 5 000 g de concreto con una razón de agua a cemento de 2 a 3 con 1 250 g de cemento. Si debe incluir 1 500 g de arena y 1 000 g de grava en las especificaciones, encuentre la cantidad de tobas para hacer 5 000 g de concreto. ¿Se puede formular ésta como una mezcla especial? De ser así, ¿cuántas unidades de cada mezcla se necesitan para formular la mezcla especial?

Nota. Este problema fue tomado de "Teaching Elementary Linear Algebra with MATLAB to Engineering Students" de Deborah P. Levinson, en *Proceedings of the Fifth International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, 1992.

9. Si nos fijamos únicamente en los coeficientes, es posible representar polinomios como vectores.

Sea $p(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 1$. $p(x)$ se puede representar como el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

En esta representación, la primera componente es el término constante, la segunda componente es el coeficiente del término x, la tercera el coeficiente de x^2 y la cuarta el de x^3.

a) (*Lápiz y papel*) Explique por qué $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ representa el polinomio $q(x) = x^3 + 3x - 5$.

b) Encuentre el polinomio $r(x) = 2p(x) - 3q(x)$. Encuentre el vector $\mathbf{w} = 2\mathbf{v} - 3\mathbf{u}$ y explique por qué $\mathbf{w}$ representa a $r(x)$.

Para los incisos *c*) a *e*), primero represente cada polinomio por un vector como se describió. Después conteste las preguntas sobre el espacio generado como si se tratara de un conjunto de vectores.

c) En P_2, ¿está $p(x) = 2x - 1$ en el espacio generado por $\{-5x^2 - 2, -6x^2 - 9x + 8, -x^2 - 7x + 9\}$? Si así es, escriba $p(x)$ como una combinación de los polinomios en el conjunto *d*) En P_3, ¿está $p(x) = x^3 + 3x^2 + 29x - 17$ en el espacio generado por $\{-2x^3 - 7x^2 + 8x - 8, 7x^3 + 9x^2 + 3x + 5, -7x^3 + 6x^2 - x - 3\}$? Si así es, escriba $p(x)$ como una combinación lineal de los polinomios del conjunto. ¿Genera el conjunto de polinomios a todo P_3? ¿Por qué?

e) ¿Genera a P_3 el siguiente conjunto de polinomios? ¿Por qué?

$$\{x^3 - x + 2, x^3 + x^2 + 3x + 1, 2x^3 + x^2 + 2x + 1, -x^2 + 1\}$$

10. Suponga que $A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ b_1 & d_1 & f_1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 & e_2 \\ b_2 & d_2 & f_2 \end{pmatrix}$.

Sean $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ e_1 \\ f_1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ e_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$. Observe que $\mathbf{v}$ representa a la matriz A en el sentido de que está construido a partir de A, comenzando con el elemento (1, 1) de A, enumerando los elementos de la primera columna en orden, continuando la lista con los elementos de la segunda columna y terminando con los de la tercera. Observe también que $\mathbf{w}$ representa a B de la misma manera.

a) (*Lápiz y papel*) Escriba la matriz $C = A - 2B$. Escriba el vector que representa a C en la forma descrita y verifique que este vector sea igual a $\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$.

Para los incisos *b*) y *d*), primero represente cada matriz por un vector como el que se describió. Después conteste las preguntas relativas al espacio generado como si se refirieran a vectores.

b) ¿Está $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 29 & -17 \end{pmatrix}$ en el espacio generado por el siguiente conjunto de matrices? De ser así, escríbala como una combinación lineal:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$$

¿Genera este conjunto a todo M_{22}? ¿Por qué?

c) ¿Está $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -10 \\ -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ en el espacio generado por el siguiente conjunto de matrices? De ser así, escríbala como una combinación lineal.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 9 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & -1 & 5 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 & -10 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} \right\}$$

¿Genera este conjunto a todo M_{23}? ¿Por qué?

d) ¿Genera el siguiente conjunto de matrices todo M_{22}? ¿Por qué?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

5.4 Independencia lineal

En el estudio del álgebra lineal, una de las ideas centrales es la de dependencia o independencia lineal de los vectores. En esta sección se define el significado de independencia lineal y se muestra su relación con la teoría de sistemas homogéneos de ecuaciones y determinantes.

Empezamos tratando de contestar la siguiente pregunta: ¿existe una relación especial entre los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$? Por supuesto, se puede apreciar que $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$; o si se escribe esta ecuación de otra manera,

$$2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \tag{5.4.1}$$

En otras palabras, el vector cero se puede escribir como una combinación no trivial de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ (es decir, donde los coeficientes en la combinación lineal no son ambos cero). ¿Qué tienen de especial los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix}$? La respuesta a esta pregunta es más difícil a simple vista. Sin embargo, es sencillo verificar que $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$; reescribiendo esto se obtiene

$$3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \tag{5.4.2}$$

Se ha escrito el vector cero como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. Parece que los dos vectores en la ecuación (5.4.1) y los tres vectores en la ecuación (5.4.2) tienen una relación más cercana que un par arbitrario de dos vectores o una terna arbitraria de tres vectores. En cada caso, se dice que los vectores son *linealmente dependientes*. En términos generales, se tiene la importante definición que a continuación se presenta.

D Definición 5.4.1

Dependencia e independencia lineal

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores en un espacio vectorial V. Entonces se dice que los vectores son **linealmente dependientes** si existen n escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *no todos cero* tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{5.4.3}$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son **linealmente independientes**.

Para decirlo de otra forma, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes si la ecuación $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ se cumple únicamente para $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Son linealmente dependientes si el vector cero en V se puede expresar como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ con coeficientes no todos iguales a cero.

¿Cómo se determina si un conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente? El caso de dos vectores es sencillo.

Nota

Se dice que los *vectores* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *son* linealmente independientes (o dependientes), o que *el conjunto* de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *es* linealmente independiente (o dependiente). Esto es, se usan las dos frases indistintamente.

Teorema 5.4.1 Dependencia e independencia lineal

Dos vectores en un espacio vectorial son linealmente dependientes si y sólo si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro.

Demostración

Primero suponga que $\mathbf{v}_2 = c\mathbf{v}_1$ para algún escalar $c \neq 0$. Entonces $c\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente dependientes. Por otro parte, suponga que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente dependientes. Entonces existen constantes c_1 y c_2 al menos uno distinto de cero, tales que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Si $c_1 \neq 0$, entonces dividiendo entre c_1 se obtiene $\mathbf{v}_1 + (c_2/c_1)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, o sea,

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{c_2}{c_1}\right)\mathbf{v}_2$$

Es decir, $\mathbf{v}_1$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{v}_2$. Si $c_1 = 0$, entonces $c_2 \neq 0$ y, por lo tanto, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1$.

EJEMPLO 5.4.1 Dos vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^4$

Los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes ya que $\mathbf{v}_2 = -3\mathbf{v}_1$.

EJEMPLO 5.4.2 Dos vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$

Los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes; si no lo fueran, se tendría $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 2c \\ 4c \end{pmatrix}$. Entonces $2 = c$, $5 = 2c$ y $-3 = 4c$, lo cual es evidentemente imposible para cualquier número c.

EJEMPLO 5.4.3 Determinación de la dependencia o independencia lineal de tres vectores en $\mathbb{R}^3$

Determine si los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

SOLUCIÓN ► Suponga que $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces multiplicando y sumando se obtiene $\begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ -2c_1 - 2c_2 + c_3 \\ 3c_1 + 7c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Esto lleva al sistema homogéneo de

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 \qquad &= 0 \\ -2c_1 - 2c_2 + \ \ c_3 &= 0 \\ 3c_1 \qquad + 7c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

De este modo, los vectores serán linealmente dependientes si y sólo si el sistema (5.4.4) tiene soluciones no triviales. Se escribe el sistema (5.4.4) usando una matriz aumentada y después se reduce por renglones. La forma escalonada reducida por renglones de

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right) \text{ es } \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Este último sistema de ecuaciones se lee $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Por lo tanto, (5.4.4) no tiene soluciones no triviales y los vectores dados son linealmente independientes.

EJEMPLO 5.4.4 **Determinación de la dependencia lineal de tres vectores en $\mathbb{R}^3$**

Determine si los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

SOLUCIÓN ► La ecuación $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ conduce al sistema homogéneo

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 + 11c_3 &= 0 \\ -3c_1 \qquad - \ \ 6c_3 &= 0 \\ 4c_2 + 12c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{5.5.5}$$

Escribiendo el sistema (5.5.5) en la forma de matriz aumentada y reduciendo por renglones, se obtiene

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 11 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 9 & 27 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nos podemos detener aquí, ya que la teoría de la sección 1.4 muestra que el sistema (5.5.5) tiene un número infinito de soluciones. Por ejemplo, la última matriz aumentada se lee

$$\begin{aligned} c_1 \qquad + 2c_3 &= 0 \\ c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$-2\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-6\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ y los vectores son linealmente dependientes.

Interpretación geométrica de la dependencia lineal en $\mathbb{R}^3$

En el ejemplo 5.4.3 se encontraron tres vectores en $\mathbb{R}^3$ que eran linealmente independientes. En el ejemplo 5.4.4 se encontraron tres vectores que eran linealmente dependientes. ¿Qué significado geométrico tiene esto?

Suponga que **u**, **v** y **w** son tres vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$. Se pueden tratar los vectores como si tuvieran un punto terminal en el origen. Entonces existen constantes c_1, c_2 y c_3, no todas cero, tales que

$$c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = \mathbf{0} \qquad (5.4.6)$$

Suponga que $c_3 \neq 0$ (un resultado similar se cumple si $c_1 \neq 0$ o $c_2 \neq 0$). Entonces se pueden dividir ambos lados de (5.4.6) entre c_3 y reacomodar los términos para obtener

$$\mathbf{w} = -\frac{c_1}{c_3}\mathbf{u} = -\frac{c_2}{c_3}\mathbf{v} = A\mathbf{u} + B\mathbf{u}$$

donde $A = -c_1/c_3$ y $B = -c_2/c_3$ Ahora se demostrará que **u**, **v** y **w** son coplanares. Se calcula

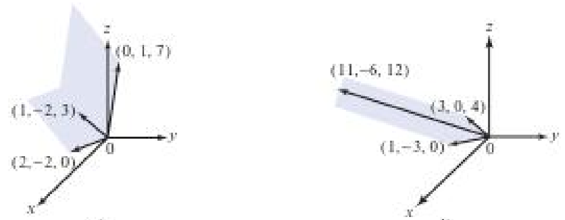
$$\begin{aligned}\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= (A\mathbf{u}\times B\mathbf{v}) = (\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = A[\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})] + B[\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})]\\ &= A\cdot 0 + B\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

porque **u** y **v** son ambos ortogonales a $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ (vea la página 260). Sea $\mathbf{n} = \mathbf{u}\times\mathbf{v}$. Si $\mathbf{n} = \mathbf{0}$, entonces por el teorema 4.4.2 parte vii) **u** y **v** son paralelos (y colineales). Así **u**, **v** y **w** están en cualquier plano que contiene tanto a **u** como a **v** y, por consiguiente son coplanares. Si $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, entonces **u** y **v** están en el plano que consiste en aquellos vectores que pasan por el origen que son ortogonales a **n**. Pero **w** está en el mismo plano porque $\mathbf{w}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = 0$. Esto muestra que **u**, **v** y **w** son coplanares.

En el problema 5.4.66 se pide al lector que demuestre que si **u**, **v** y **w** son coplanares, son linealmente dependientes. Se concluye que

Tres vectores en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes si y sólo si son coplanares.

La figura 5.3 ilustra este hecho utilizando los vectores en los ejemplos 5.4.3 y 5.4.4.



a) Estos tres vectores son independientes y no coplanares

b) Estos tres vectores son independientes y coplanares

Figura 5.3

Dos conjuntos de tres vectores.

Teorema 5.4.2

Un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^m$ es siempre linealmente dependiente si $n > m$.

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores en $\mathbb{R}^m$ e intentemos encontrar constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos cero tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{5.4.7}$$

Sea $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Entonces la ecuación (5.4.7) se convierte en

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n &= 0 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\;\; \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n &= 0 \end{aligned} \tag{5.4.8}$$

Pero el sistema (5.4.8) es el sistema (1.4.1), según el teorema 1.4.1, tiene un número infinito de soluciones si $n > m$. De esta forma, existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos cero, que satisfacen (5.4.8) y, por lo tanto, los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes.

EJEMPLO 5.4.5 Cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$ que son linealmente dependientes

Los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes ya que constituyen un conjunto de cuatro vectores de tres elementos.

Existe un corolario importante (y obvio) del teorema 5.4.2.

Corolario 5.4.1

Un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ contiene a lo sumo n vectores.

Nota

El corolario se puede expresar de otra forma. Si se tienen n vectores de dimensión n linealmente independientes, no se pueden incluir más vectores sin convertir el conjunto en uno linealmente dependiente.

Del sistema (5.4.8) se puede hacer otra observación importante cuya prueba se deja como ejercicio (refiérase al problema 32 de la presente sección).

Teorema 5.4.3

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Entonces las columnas de A consideradas como vectores son linealmente dependientes si y sólo si el sistema (5.4.8), que se puede escribir como $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$, tiene soluciones no triviales. Aquí $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 5.4.6 Soluciones a un sistema homogéneo escritas como combinaciones lineales de vectores solución linealmente independientes

Considere el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned} \tag{5.4.9}$$

SOLUCIÓN ► Haciendo una reducción de renglones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

El último sistema es

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 9x_3 + 6x_4 &= 0 \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Se ve que este sistema tiene un número infinito de soluciones, que se escriben como una combinación lineal de los vectores columna:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9x_3 - 6x_4 \\ -4x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.4.10}$$

Observe que $\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones linealmente independientes para (5.4.9) porque ninguno de los dos es múltiplo del otro (el lector debe verificar que sean soluciones). Como x_3 y x_4 son números reales arbitrarios, se ve de (5.4.10) que el conjunto de soluciones al sistema (5.4.9) es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por estos dos vectores solución linealmente independientes.

Teorema 5.4.4

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores en $\mathbb{R}^n$ y sea A una matriz de $n \times n$ cuyas columnas son $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Entonces, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes si y sólo si la única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Demostración

Éste es el teorema 5.4.3 para el caso $m = n$.

Teorema 5.4.5

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces $\det A \neq 0$ si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes.

Demostración

Del teorema 5.4.4 y del teorema de resumen (más adelante), las columnas de A son linealmente independientes $\Leftrightarrow$ $\mathbf{0}$ es la única solución a $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$. Aquí, $\Leftrightarrow$ significa "si y sólo si".

El teorema 5.4.5 nos lleva a extender nuestro teorema de resumen.

Teorema 5.4.6 Teorema de resumen (punto de vista 6)

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las ocho afirmaciones siguientes son equivalentes; es decir, cada una implica a las otras siete (de manera que si una es cierta, todas son ciertas).

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector de dimensión n $\mathbf{b}$.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.

v) A es el producto de matrices elementales.

vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii) $\det A \neq 0$.

viii) Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.

Demostración

La única parte que no se ha demostrado hasta el momento es que los renglones de A son linealmente independientes $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$. Las columnas son independientes $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\det A^{\top} = \det A \neq 0$ (vea el teorema 3.2.4) $\Leftrightarrow$ las columnas de $A^{\top}$ son linealmente independientes. Pero las columnas de $A^{\top}$ son los renglones de A. Esto completa la prueba.

Teorema 5.4.7

Cualquier conjunto de n vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$.

Demostración

Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$, vectores linealmente independientes y sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Debemos demostrar que existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Es decir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.4.11}$$

En (5.4.11) se multiplican componentes, se igualan y se suman para obtener un sistema de n ecuaciones con n incógnitas $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n &= x_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n &= x_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n &= x_n \end{aligned} \tag{5.4.12}$$

Se puede escribir (5.4.12) como $A\mathbf{c} = \mathbf{v}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Pero $\det A \neq 0$ ya que las columnas de A son linealmente independientes. De manera que el sistema (5.4.12) tiene una solución única $\mathbf{c}$ por el teorema 5.4.6 y el teorema queda demostrado.

Observación. Esta demostración no sólo muestra que $\mathbf{v}$ se puede escribir como una combinación lineal de los vectores independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, sino también que esto se puede lograr *de una sola manera* (ya que el vector solución $\mathbf{c}$ es único).

EJEMPLO 5.4.7 Tres vectores en $\mathbb{R}^3$ generan $\mathbb{R}^3$ si su determinante es diferente de cero

Los vectores (2, −1, 4), (1, 0, 2) y (3, −1, 5) generan $\mathbb{R}^3$ porque $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ y, por lo tanto, Todos los ejemplos que se han dado hasta ahora han sido en el espacio $\mathbb{R}^n$. Esto no representa una restricción tan grande como parece. En la sección 5.4 (teorema 5.4.6) se demostrará que diferentes espacios vectoriales de apariencia muy distinta tienen, en esencia, las mismas propiedades. Por ejemplo, se verá que el espacio $\mathbb{P}_n$ es fundamentalmente el mismo que $\mathbb{R}^{n+1}$. Se dirá que dos espacios vectoriales con esta forma son *isomórficos*.

Este importante resultado tendrá que esperar hasta el capítulo 7. Mientras tanto, se darán algunos ejemplos en espacios diferentes a $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLO 5.4.8 Tres matrices linealmente independientes en $\mathbb{M}_{23}$

En $\mathbb{M}_{23}$, sean $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Determine si A_1, A_2 y A_3 son linealmente dependientes o independientes.

SOLUCIÓN ► Suponga que $c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = 0$. Entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 - c_2 - c_3 & c_2 & 2c_1 + 4c_2 + c_3 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 & c_1 + 3c_2 + 2c_3 & -c_1 + c_3 \end{pmatrix}$$

Esto nos proporciona un sistema homogéneo de seis ecuaciones con tres incógnitas, c_1, c_2 y c_3, en el cual resulta bastante sencillo verificar que la única solución es $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. De este modo, las tres matrices son linealmente independientes.

EJEMPLO 5.4.9 Cuatro polinomios linealmente independientes en $\mathbb{P}_3$

En $\mathbb{P}_3$ determine si los polinomios $1, x, x^2$ y x^3 son linealmente dependientes o independientes.

SOLUCIÓN ► Suponga que $c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 = 0$. Esto debe cumplirse para todo número real x. En particular, si $x = 0$, se obtiene $c_1 = 0$. Entonces, haciendo $x = 1, -1, 2$ se obtiene, sucesivamente,

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 + c_4 &= 0 \\ -c_2 + c_3 - c_4 &= 0 \\ 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 &= 0 \end{aligned}$$

El determinante de este sistema homogéneo es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

De manera que el sistema tiene una solución única $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ y los cuatro polinomios son linealmente independientes. Esto se puede ver de otra forma. Se sabe que cualquier polinomio de grado 3 tiene a lo más tres raíces reales. Pero si $c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 = 0$ para algunas constantes diferentes de cero c_1, c_2, c_3 y c_4 y para todo número real x, entonces se ha construido un polinomio

EJEMPLO 5.4.10 **Tres polinomios linealmente independientes en $\mathbb{P}_2$**

En $\mathbb{P}_2$, determine si los polinomios $x - 2x^2$, $x^2 - 4x$ y $-7x + 8x^2$ son linealmente dependientes o independientes.

SOLUCIÓN ► Sea $c_1(x - 2x^2) + c_2(x^2 - 4x) + c_3(-7x + 8x^2) = 0$. Reacomodando los términos se obtiene

$$(c_1 - 4c_2 - 7c_3)x + (-2c_1 + c_2 + 8c_3)x^2 = 0$$

Esta ecuación se cumple para todo x si y sólo si

$$c_1 - 4c_2 - 7c_3 = 0$$

y

$$-2c_1 + c_2 + 8c_3 = 0$$

Pero para el teorema 1.4.1, este sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas tiene un número infinito de soluciones, lo que muestra que los polinomios son linealmente dependientes.

Si se resuelve este sistema homogéneo se obtiene, sucesivamente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -7 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{25}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & 0 \end{array}\right)$$

Así, se puede dar un valor arbitrario a c_3, $c_1 = \frac{25}{7}c_3$ y $c_2 = -\frac{6}{7}c_3$. Si, por ejemplo, $c_3 = 7$, entonces $c_1 = 25$, $c_2 = -6$ y se tiene

$$25(x - 2x^2) - 6(x^2 - 4x) + 7(-7x + 8x^2) = 0$$

RESUMEN 5.4

- ***Dependencia e independencia lineal***

  Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en un espacio vectorial V son **linealmente dependientes** si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos cero tales que

  $$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = 0$$

  Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son **linealmente independientes**.

- Dos vectores en un espacio vectorial V son linealmente dependientes si y sólo si uno es múltiplo escalar del otro.

- Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$.

AUTOEVALUACIÓN 5.4

I) ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores son linealmente independientes?

a) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix}11\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}-3\\-11\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\11\end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

II) ¿Cuál de los siguientes pares de vectores es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$?

a) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix}11\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}-3\\-11\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\11\end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

III) ¿Cuál de los siguientes conjuntos de vectores *debe* ser linealmente dependiente?

a) $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}j\\k\\l\end{pmatrix}$

Aquí $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ y l son números reales.

Indique si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas:

IV) Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ también son linealmente independientes.

V) Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ también son linealmente dependientes.

VI) Si A es una matriz de 3×3 y $\det A = 0$, entonces los renglones de A son vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$.

VII) Los polinomios $3, 2x, -x^3$ y $3x^4$ son linealmente independientes en P_4.

VIII) Las matrices $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2 & 3\\-5 & 0\end{pmatrix}$ son linealmente independientes en M_{22}.

Respuestas a la autoevaluación

I) Todos **II)** Todos **III)** *b, d* **IV)** F

PROBLEMAS 5.4

De los problemas 1 al 28 determine si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente.

1. $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -10 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -32 \\ 18 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} -6 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -20 \\ -29 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$

17. En $\mathbb{P}_2$: $-8 - 8x$, $7 + 3x + 4x^2$, $5 - x + 6x^2$

18. En $\mathbb{P}_2$: $1 - x$, x

19. En $\mathbb{P}_2$: $-x$, $x^2 - 2x$, $3x + 5x^2$

20. En $\mathbb{P}_3$: $1 - x$, $7 + 3x + 4x^2$, $2x^3$

21. En $\mathbb{P}_3$: x, $x^2 - x$, $x^3 - x$

22. En $\mathbb{P}_4$: $x - 1$, $(x - 1)(x - 2)$, $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$, x^4

23. En $\mathbb{P}_3$ $[-1, 1]$: 1, x, $\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

24. En $\mathbb{M}_{22}$: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}$

25. Sea M_{22}: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

26. En $C[0, 1]$: e^x, e^{-x}

***27.** En $C[0, 1]$: sen x, cos x

***28.** En $C[0, 1]$: $x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$

29. Determine una condición sobre los números a, b, c y d tal que los vectores $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sean linealmente dependientes.

***30.** Encuentre una condición sobre los números a_{ij} tal que los vectores $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ sean linealmente dependientes.

31. ¿Para qué valor(es) de α serán linealmente dependientes los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 4 \end{pmatrix}$?

32. ¿Para qué valor(es) de α serán linealmente dependientes los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$? [*Sugerencia:* Observe con atención.]

33. ¿Para qué valor(es) de α serán linealmente dependientes los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$?

34. ¿Para qué valor(es) de α y β serán linealmente independientes los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$?

35. Pruebe el teorema 5.4.3. [*Sugerencia:* Observe con atención el sistema 5.4.10.]

36. Demuestre que si los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^m$, con $m < n$, y si $\mathbf{v}_{n+1}$ es cualquier otro vector en $\mathbb{R}^m$, entonces el conjunto $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ es linealmente dependiente.

37. Demuestre que si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ $(n \geq 2)$ son linealmente independientes, entonces también lo son $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, donde $k < n$.

38. Demuestre que si los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ diferentes de cero en $\mathbb{R}^n$ son ortogonales (vea la página 82), entonces el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es linealmente independiente.

***39.** Suponga que $\mathbf{v}_1$ es ortogonal a $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ y que $\mathbf{v}_2$ es ortogonal a $\mathbf{v}_3$. Si $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son diferentes de cero, demuestre que el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente.

40. Sea A una matriz cuadrada (de $n \times n$) cuyas columnas son los vectores, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Demuestre que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes si y sólo si la forma escalonada por renglones de A no contiene un renglón de ceros.

De los problemas 41 al 49 escriba las soluciones a los sistemas homogéneos dados en términos de uno o más vectores linealmente independientes.

41. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ **42.** $2x_1 - x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 0$

43. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$x_1 - x_2 - x_3 = 0$

44. $x_1 + 3x_3 = 0$
$2x_2 - 4x_4 = 0$

45. $-5x_2 + x_3 = 0$
$2x_1 + 4x_2 = 0$

46. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$
$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0$

47. $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0$
$-2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - 6x_5 = 0$

48. $2x_2 + x_3 = 0$
$x_1 - 2x_2 - 3x_4 = 0$

49. $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0$

50. Sea $\mathbf{u} = (-1, 3, 2)$.

a) Sea $H = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0\}$. Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
b) Encuentre dos vectores que pertenezcan a H y que sean linealmente independientes. Denominelos $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$.
c) Calcule $\mathbf{w} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$.
d) Demuestre que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente dependientes.
e) Dé una interpretación geométrica de los incisos *a)* y *c)*, y explique por qué *d)* debe ser cierto.

Complemento ortogonal de V

Observación. Si $V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para algún número real $\alpha\}$, entonces V es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y a H se le llama **complemento ortogonal de V**.

51. Elija un vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^3$. Repita los pasos del problema 50 comenzando con el vector que eligió.

52. Demuestre que cualesquiera cuatro polinomios en $\mathbb{P}_2$ son linealmente dependientes.

53. Demuestre que dos polinomios no pueden generar a $\mathbb{P}_2$.

***54.** Demuestre que cualesquiera $n + 2$ polinomios en $\mathbb{P}_n$ son linealmente dependientes.

55. Demuestre que cualquier subconjunto de un conjunto de vectores linealmente independientes es linealmente independiente. [**Nota.** Esto generaliza el problema 37.]

56. Demuestre que cualesquiera siete matrices en $\mathbb{M}_{32}$ son linealmente dependientes.

57. Pruebe que cualesquiera $mn + 1$ matrices en $\mathbb{M}_{mn}$ son linealmente dependientes.

58. Sean S_1 y S_2 dos conjuntos finitos linealmente independientes en un espacio vectorial V. Demuestre que $S_1 \cap S_2$ es un conjunto linealmente independiente.

59. Demuestre que en $\mathbb{P}_n$ los polinomios $1, x, x^2, \ldots x^n$, son linealmente independientes. [***Sugerencia:*** Por supuesto, esto es cierto si $n = 1$. Suponga que $1, x, x^2, \ldots x^{n-1}$ son linealmente independientes y demuestre que esto implica que $1, x, x^2, \ldots x^n$ también son linealmente independientes. Esto completa la prueba por inducción matemática.]

60. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto linealmente independiente. Demuestre que los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes.

61. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores diferentes de cero en un espacio vectorial V. Demuestre que al menos uno de los vectores en S se puede escribir como una combinación lineal de los vectores que le preceden. Es decir, demuestre que existe un entero $k \leq n$ y escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ tales que $\mathbf{v}_k = \alpha_1\mathbf{v}_1, \alpha_2\mathbf{v}_2, \ldots, \alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}$.

62. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores que tiene la propiedad de que el conjunto $\{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\}$ es linealmente dependiente cuando $i \neq j$. Demuestre que cada vector del conjunto es un múlti-

Cálculo

63. Sean f y g en $C^1[0, 1]$. Entonces el **wronskiano*** de f y g está definido por

$$W(f, g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

Demuestre que si f y g son linealmente dependientes, entonces $W(f, g)(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

Cálculo

64. Determine una definición adecuada para el wronskiano de las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C^{(n-1)}[0, 1]$.**

65. Suponga que **u**, **v** y **w**, son linealmente independientes. Pruebe o desapruebe: $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ y $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ son linealmente independientes.

66. ¿Para qué valores reales de c son linealmente independientes los vectores $(1 - c, 1 + c)$ y $(1 + c, 1 - c)$?

67. Demuestre que los vectores $(1, a, a^2)$, $(1, b, b^2)$ y $(1, c, c^2)$ son linealmente independientes si $a \neq b$, $a \neq c$ y $b \neq c$.

68. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto linealmente independiente y suponga que $\mathbf{v} \notin \text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Demuestre que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

69. Encuentre un conjunto de tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. [*Sugerencia:* Encuentre un vector $\mathbf{v} \notin \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$.]

70. Encuentre un conjunto linealmente independiente de vectores en $\mathbb{P}_2$ que contenga a los polinomios $1 - x^2$ y $1 + x^2$.

71. Encuentre un conjunto linealmente independiente de vectores en $\mathbb{P}_2$ que contenga a los polinomios $x + x^2$ y $1 + x$.

72. Suponga que $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ son coplanares.

a) Demuestre que existen constantes a, b y c no todas cero tales que

$$\begin{aligned} au_1 + bu_2 + cu_3 &= 0 \\ av_1 + bv_2 + cv_3 &= 0 \\ aw_1 + bw_2 + cw_3 &= 0 \end{aligned}$$

b) Explique por qué

$$\det = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = 0$$

c) Use el teorema 5.4.3 para demostrar que **u**, **v** y **w** son linealmente dependientes.

* Así denominado por el matemático polaco Jozef María Hoene-Wronski (1778-1853). Hoene-Wronski pasó la mayor parte de su vida adulta en Francia. Trabajó en la teoría de determinantes y fue conocido también por sus escritos críticos sobre filosofía de las

EJERCICIOS CON MATLAB 5.4

1. Utilice `rref` para verificar la independencia o dependencia de los conjuntos de vectores de los problemas 1 al 16 de esta sección. Explique sus conclusiones.

2. *a)* Para los problemas 9 y 12 argumente por qué los vectores no son coplanares.
   b) Explique las razones por las cuales los conjuntos de vectores dados son coplanares.

   i) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$ ii) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}\right\}$

3. Elija m y n con $m > n$ y sea `A = 2*rand(n,m)-1`. Determine la dependencia o independencia de las columnas de A. Repita para otros cuatro valores de m y n. Escriba una conclusión sobre la independencia lineal de las columnas de una matriz que tiene más columnas que renglones. Pruebe su conclusión.

4. Considere las matrices del problema 2 en MATLAB 2.4. Pruebe la invertibilidad de cada A, la independencia lineal de las columnas de A y la independencia lineal de los renglones de A (considere A^T). Escriba una conclusión relacionando la invertibilidad de A^T con la independencia lineal de las columnas de A y con la independencia lineal de los renglones de A. Pruebe su conclusión en términos de las propiedades de la forma escalonada reducida por renglones.

5. *a)* *(Lápiz y papel)* Si A es de $n \times m$ y $\mathbf{z}$ es de $m \times 1$, explique por qué $\mathbf{w} = A\mathbf{z}$ está en el espacio generado por las columnas de A.
   b) Para cada conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ dado, genere un vector aleatorio $\mathbf{w}$ que se encuentre en el espacio generado por ese conjunto [use el inciso *a*)]. Pruebe la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}\}$. Repita para otros tres vectores $\mathbf{w}$.

   i) $\left\{\begin{pmatrix}8\\7\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-7\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\-6\\-1\end{pmatrix}\right\}$ ii) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\4\end{pmatrix}\right\}$ iii) $\left\{\begin{pmatrix}4\\3\\2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\2\\8\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\\2\\6\end{pmatrix}\right\}$

   c) Escriba una conclusión a lo siguiente: si $\mathbf{w}$ está en gen $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, entonces...

6. *a)* Recuerde los conjuntos de vectores en los problemas 3 y 7 de MATLAB 5.3. Para $\mathbf{w}$ en el espacio generado por esos conjuntos de vectores, había un número infinito de maneras de escribir $\mathbf{w}$ como una combinación lineal de los vectores. Verifique que cada uno de esos conjuntos de vectores es linealmente dependiente.
   b) *(Lápiz y papel)* Pruebe la siguiente afirmación: para los vectores en $\mathbb{R}^n$ tales que $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$, tiene una solución, existe un número infinito de soluciones para $c_1, c_2, \ldots, c_k$ si y sólo si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es linealmente independiente. [***Sugerencia:*** Piense en la forma escalonada reducida por renglones.]

7. *a)* Elija n y m con $m \le n$ y sea `A = 2*rand(n,m)-1`. Verifique que las columnas de A sean linealmente independientes. Cambie A de manera que alguna(s) columna(s) sea(n) combinaciones lineales de otras columnas de A (por ejemplo, `B = A;B(:,3) = 3*B(:,1)-2*B(:,2))`. Verifique que las columnas de B sean dependientes.

Repita para otras combinaciones lineales. ¿Qué columnas de `rref(B)` no tienen pivotes? ¿Cómo se relaciona esto con su combinación lineal?

b) Repita el inciso *a*) para otros cuatro juegos de n, m y A.

c) Escriba una conclusión a lo siguiente: si una columna A es una combinación lineal de otras columnas entonces...

d) Vuelva a hacer el problema 5 de MATLAB 2.3. Verifique que para cada matriz A en ese problema que las columnas son dependientes.

e) Escriba una conclusión a lo siguiente: si las columnas de A son linealmente dependientes, entonces...

f) (*Lápiz y papel*) Pruebe su conclusión.

8. *a*) Del problema 7 de esta sección y del problema 5 de MATLAB 2.3, se puede concluir que si las columnas de A son dependientes, entonces las columnas de A correspondientes a las columnas sin pivotes en `rref(A)` se pueden escribir como combinaciones lineales de las columnas de A correspondientes a las columnas con pivotes en `rref(A)`. Siguiendo el proceso descrito en el problema 5 de MATLAB 2.3, determine cuáles columnas de las matrices dadas son combinaciones lineales de otras columnas; escriba estas columnas como combinaciones lineales y verifique, utilizando MATLAB, que estas combinaciones lineales son correctas.

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ **ii)** $\begin{pmatrix} 10 & 0 & -10 & -6 & 32 \\ 8 & 2 & -4 & -7 & 32 \\ -5 & 7 & 19 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 11 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & -5 & -20 & 9 \\ 7 & 6 & 11 & 3 & 8 \\ 8 & 2 & -2 & -16 & 6 \\ 7 & 3 & 2 & -9 & 7 \end{pmatrix}$ **iv)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

b) (*Lápiz y papel*) Realice el problema 61 de la sección 5.4.

9. *a*) Demuestre que los siguientes conjuntos de vectores son independientes pero que existe un vector en su $\mathbb{R}^n$ respectivo que no se encuentra en el espacio generado por el conjunto.

i) $\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ii) $\mathbb{R}^4$ vea el inciso *b*) ii) del problema 5 de esta sección de MATLAB.

iii) $\mathbb{R}^4$ vea el inciso *b*) iii) del problema 5 de esta sección de MATLAB.

b) Demuestre que los siguientes conjuntos de vectores generan todo su $\mathbb{R}^n$ respectivo, pero que no son linealmente independientes.

i) $\mathbb{R}^2$ $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ **ii)** $\mathbb{R}^3$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

iii) $\mathbb{R}^4$ $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) ¿Es posible alguna de las situaciones en los incisos *a*) o *b*) si se considera un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^n$? ¿Por qué? Proporcione ejemplos usando MATLAB.

d) (*Lápiz y papel*) Escriba una conclusión relacionando la independencia lineal con la generación de todo $\mathbb{R}^n$ para el conjunto de m vectores en $\mathbb{R}^n$. Considere $m > n$, $m = n$ y $m < n$. Pruebe su afirmación considerando las propiedades de la forma escalonada reducida por renglones de la matriz cuyas columnas son el conjunto de vectores.

10. *a*) Verifique que cada conjunto de vectores dado sea linealmente independiente.

$$\text{i) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ii) } \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{iii) } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

iv) Genere cuatro vectores aleatorios en simbolo $\mathbb{R}^4$ utilizando el comando `rand`. Verifique la independencia (siga generando conjuntos hasta que obtenga uno independiente).

b) Forme una matriz A invertible de 4×4. Para cada conjunto de vectores linealmente independientes $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k]$ del inciso *a*), verifique la dependencia o independencia de $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k\}$ para determinar qué conjuntos $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k\}$ son independientes.

c) Forme una matriz A de 4×4 que no sea invertible (por ejemplo, dada una matriz invertible A, cambie una de las columnas para que sea una combinación lineal de otras). Para cada conjunto de vectores linealmente independientes $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k\}$ del inciso *a*), verifique la dependencia o independencia de $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k\}$ para determinar qué conjuntos $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k\}$ son independientes.

d) Escriba una conclusión describiendo cuándo la multiplicación por una matriz cuadrada preserva la independencia de un conjunto de vectores.

11. Utilice MATLAB para verificar la dependencia o independencia de los conjuntos de polinomios de los problemas 17 al 22 de esta sección. Si el conjunto es dependiente, escriba los polinomios dependientes como combinaciones lineales de otros polinomios en el conjunto y verifique estas combinaciones lineales (vea el problema 9 de MATLAB 5.3 y el problema 8 de MATLAB 5.4).

12. Utilice MATLAB para verificar la dependencia o independencia de los conjuntos de matrices de los problemas 23 al 25 de la sección 5.4. Si el conjunto es dependiente, escriba las matrices dependientes como combinaciones lineales de otras matrices en el conjunto y verifique esas combinaciones lineales (vea el problema 10 de MATLAB 5.3 y el problema 8 de MATLAB 5.4).

13. *a*) Genere un conjunto de cinco matrices aleatorias en $\mathbb{M}_{22}$ y muestre que el conjunto es linealmente dependiente. Repita para otros dos conjuntos de matrices.

b) Genere un conjunto de siete matrices aleatorias en $\mathbb{M}_{23}$ y muestre que son linealmente dependientes. Repita para otros dos conjuntos de matrices.

c) Para $\mathbb{M}_{42}$, ¿cuántas matrices se necesitan en un conjunto para garantizar que es dependiente? Pruebe su conclusión generando conjuntos de matrices aleatorias. Demuestre que los conjuntos con menos matrices no son necesariamente dependientes.

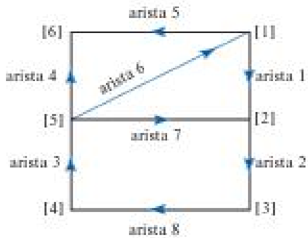
d) (*Lápiz y papel*) Trabaje los problemas 44 y 45 de esta sección.

14. Ciclos en digráficas e independencia lineal Para una gráfica dirigida (*digráfica*), la matriz de incidencia nodo-arista está definida como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } j \text{ entra al nodo } i \\ -1 & \text{si la arista } j \text{ sale del nodo } i \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Por lo tanto, cada columna corresponde a una arista de la digráfica.

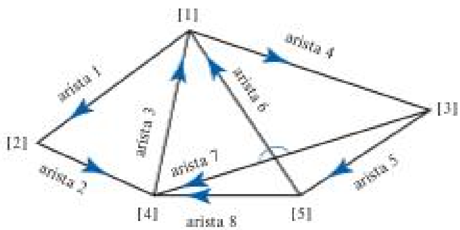
a) Para la digráfica siguiente, establezca la matriz de incidencia nodo-arista A (para introducir A de manera eficiente, vea el problema 2 de MATLAB 2.1).



b) Encuentre un ciclo cerrado (*ciclo no dirigido*) en la digráfica y observe qué aristas incluye. Verifique la dependencia o independencia de las columnas de A que corresponden a estas aristas (por ejemplo, siguiendo la arista 1, después el opuesto de la arista 7, luego la arista 4 y después el opuesto de la arista 5, se forma un ciclo. Forme la matriz `[A(:,1) A(:,7) A(:,4) A(:,5)]` y verifique la independencia). Encuentre tantos ciclos cerrados como pueda reconocer y pruebe la dependencia o independencia de las columnas correspondientes de A.

c) Considere un subconjunto de aristas que no contengan ciclos cerrados. Pruebe la dependencia o independencia de las columnas correspondientes de A.

d) Repita los incisos *a*) a *c*) para la siguiente gráfica:



e) Escriba una conclusión sobre la relación entre ciclos no dirigidos en una digráfica y la dependencia o independencia lineal de las columnas de la matriz de incidencia nodo-arista de la digráfica.

Nota

Este problema fue inspirado por una conferencia dada por Gilbert Strang en la *University of New Hampshire*, en junio de 1991.

5.5 Bases y dimensión

Se ha visto que en $\mathbb{R}^2$ conviene escribir vectores como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{i} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $\mathbf{j} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. En $\mathbb{R}^3$ se escribieron los vectores en términos de $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Ahora se

Definición 5.5.1

Base

Un conjunto finito de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para un espacio vectorial V si

i) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente.

ii) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V.

Ya se han analizado algunos ejemplos de bases. En el teorema 5.4.7, por ejemplo, se vio que cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$. De esta forma,

Todo conjunto de n vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ es una base en $\mathbb{R}^n$.

En $\mathbb{R}^n$ se define

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base canónica

Puesto que los vectores $\mathbf{e}_i$ son las columnas de una matriz identidad (que tiene determinante 1), $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente y, por lo tanto, constituye una base en $\mathbb{R}^n$. Esta base especial se denomina **base canónica** en $\mathbb{R}^n$. Ahora se encontrarán bases para algunos otros espacios.

EJEMPLO 5.5.1 Base canónica para $\mathbb{P}_n$

Por el ejemplo 5.4.9, los polinomios $1, x, x^2$ y x^3 son linealmente independientes en $\mathbb{P}_3$; para el ejemplo 5.3.3, estos polinomios generan $\mathbb{P}_3$. Así, $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base para $\mathbb{P}_3$. En general, los monomios $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$ constituyen una base para $\mathbb{P}_n$. Ésta se denomina la **base canónica** para $\mathbb{P}_n$.

EJEMPLO 5.5.2 Base canónica para $\mathbb{M}_{22}$

En el ejemplo 5.3.6 se vio que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ generan a $\mathbb{M}_{22}$. Si $\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces es evidente que $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Así, estas cuatro matrices son linealmente independientes y forman una base para $\mathbb{M}_{22}$, lo que se denomina **base canónica** para $\mathbb{M}_{22}$.

EJEMPLO 5.5.3 Una base para un subespacio de $\mathbb{R}^3$

Encuentre una base para el conjunto de vectores que se encuentra en el plano

SOLUCIÓN ► En el ejemplo 5.2.6 se observó que π es un espacio vectorial. Para encontrar una base, primero se observa que si x y z se escogen arbitrariamente y si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi$, entonces $y = 2x + 3z$. Así, los vectores en π tienen la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ 2x - 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lo cual muestra que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan a π. Como es evidente que estos dos vectores son linealmente independientes (porque uno no es múltiplo del otro), forman una base para π.

Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ es una base para V, entonces cualquier otro vector $\mathbf{v} \in V$ se puede escribir como $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$. ¿Puede escribirse de otra manera como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_i$? La respuesta es **no** (vea la observación que sigue a la demostración del teorema 5.4.7, para el caso $V = \mathbb{R}^n$).

Teorema 5.5.1

Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para V y si $\mathbf{v} \in V$, entonces existe un conjunto *único* de escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$.

Demostración

Existe cuando menos un conjunto de dichos escalares porque $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V. Suponga entonces que $\mathbf{v}$ se puede escribir de dos maneras como una combinación lineal de los vectores de la base.

Es decir, suponga que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n$$

Entonces, restando se obtiene la ecuación

$$(c_1 - d_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - d_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Pero como los $\mathbf{v}_i$ son linealmente independientes, esta ecuación se cumple si y sólo si $c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = \cdots = c_n - d_n = 0$. Así, $c_1 = d_1, c_2 = d_2, \ldots, c_n = d_n$ y el teorema queda demostrado.

Se ha visto que un espacio vectorial tiene múltiples bases. Una pregunta surge de manera natural: ¿contienen todas las bases el mismo número de vectores? En $\mathbb{R}^3$ la respuesta es: por supuesto, sí. Para ver esto, se observa que cualesquiera tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ forman una base. Pero menos vectores no pueden formar una base ya que, como se vio en la sección 5.3, el espacio generado por dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ es un plano —y un plano no es todo $\mathbb{R}^3$—. De manera similar, un conjunto de cuatro vectores o más en $\mathbb{R}^3$ no puede ser linealmente independiente, pues si los tres primeros vectores en el conjunto son linealmente independientes, entonces forman una base; por lo tanto, todos los demás vectores en el conjunto se pueden expresar como una combinación lineal de los primeros tres. Entonces, todas las bases en $\mathbb{R}^3$ contienen tres

Teorema 5.5.2

Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ son bases en un espacio vectorial V, entonces $m = n$; es decir, cualesquiera dos bases en un espacio vectorial V tienen el mismo número de vectores.

Demostración*

Sea $S_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ y $S_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ dos bases para V. Debe demostrarse que $m = n$. Esto se prueba mostrando que si $m > n$, entonces S_1 es un conjunto linealmente independiente, lo que contradice la hipótesis de que S_1 es una base. Esto demostrará que $m \le n$. La misma prueba demostrará que $n \le m$, y esto prueba el teorema. Así, basta demostrar que si $m > n$, entonces S_1 es dependiente. Como S_2 constituye una base, todo $\mathbf{u}_i$ se puede expresar como una combinación lineal de las $\mathbf{v}_j$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{v}_n \\
\mathbf{u}_2 &= a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{v}_n \\
&\vdots \\
\mathbf{u}_m &= a_{m1}\mathbf{v}_1 + a_{m2}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{v}_n
\end{aligned} \tag{5.5.1}$$

Para demostrar que S_1 es dependiente, deben encontrarse escalares $c_1, c_2, \ldots, c_m$, no todos cero, tales que

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0} \tag{5.5.2}$$

Sustituyendo (5.5.1) en (5.5.2) se obtiene

$$\begin{aligned}
&c_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{v}_n) + c_2(a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{v}_n) \\
&\qquad + \cdots + c_m(a_{m1}\mathbf{v}_1 + a_{m2}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{5.5.3}$$

La ecuación (5.5.3) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
&(a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \cdots + a_{m1}c_m)\mathbf{v}_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{m2}c_m)\mathbf{v}_2 \\
&\qquad + \cdots + (a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \cdots + a_{mn}c_m)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{5.5.4}$$

Pero como $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes, se debe tener

$$\begin{aligned}
a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \cdots + a_{m1}c_m &= 0 \\
a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{m2}c_m &= 0 \\
&\vdots \\
a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \cdots + a_{mn}c_m &= 0
\end{aligned} \tag{5.5.5}$$

El sistema (5.5.5) es un sistema homogéneo de n ecuaciones con las m incógnitas $c_1, c_2, \ldots, c_m$, y como $m > n$, el teorema 1.4.1 dice que el sistema tiene un número infinito de soluciones. De esta forma, existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_m$, no todos cero, tales que (5.5.2) se satisface y, por lo tanto, S_1 es un conjunto linealmente dependiente. Esta contradicción prueba que $m \le n$ si se cambian los papeles de S_1 y S_2; se demuestra que $n \le m$ y la prueba queda completa.

Por este teorema se puede definir uno de los conceptos centrales en el álgebra lineal.

Definición 5.5.2

Dimensión

Si el espacio vectorial V tiene una base con un número finito de elementos, entonces la **dimensión** de V es el número de vectores en todas las bases y V se denomina **espacio vectorial de dimensión finita**. De otra manera, V se denomina **espacio vectorial de dimensión infinita**. Si $V = \{\mathbf{0}\}$, entonces se dice que V tiene **dimensión cero**.

Notación. La dimensión V se denota por dim V.

Observación. No se ha demostrado que todo espacio vectorial tiene una base. Esta difícil prueba aparece en la sección 5.8. Pero no se requiere para que la definición 5.5.2 tenga sentido, ya que si V tiene una base finita, entonces V es de dimensión finita. De otra manera, V tiene dimensión infinita. Por lo tanto, con el fin de demostrar que V tiene dimensión infinita, sólo es necesario demostrar que V no tiene una base finita, lo que se puede hacer probando que V contiene un número infinito de vectores linealmente independientes (vea el ejemplo 5.5.7).

EJEMPLO 5.5.4 La dimensión de $\mathbb{R}^n$

Como n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ constituyen una base, se observa que

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

EJEMPLO 5.5.5 La dimensión de $\mathbb{P}_n$

Para el ejemplo 5.5.1 y el problema 5.4.47, los polinomios $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ constituyen una base en $\mathbb{P}_n$. Entonces dim $\mathbb{P}_n = n + 1$.

EJEMPLO 5.5.6 La dimensión de $\mathbb{M}_{mn}$

En $\mathbb{M}_{mn}$, sea A_{ij} la matriz de $m \times n$ con un uno en la posición ij y cero en otra parte. Es sencillo demostrar que las matrices A_{ij} para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$ forman una base para $\mathbb{M}_{mn}$. Así, dim $\mathbb{M}_{mn} = mn$.

EJEMPLO 5.5.7 *P* tiene dimensión infinita

En el ejemplo 5.3.7 se observó que ningún conjunto finito de polinomios genera a P. Entonces P no tiene una base finita y, por lo tanto, es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Existe un gran número de teoremas sobre la dimensión de un espacio vectorial.

Teorema 5.5.3

Suponga que dim $V = n$. Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ es un conjunto de m vectores linealmente independientes en V, entonces $m \le n$.

Demostración

Sea $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ una base para V. Si $m > n$, entonces, igual que en la prueba del teorema 5.5.2, se pueden encontrar constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$ no todas cero, tales que la ecuación (5.5.2) se satisface. Esto contradice la independencia lineal de los vectores $\mathbf{u}_i$. Así, $m \le n$.

Teorema 5.5.4

Sea H un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V. Entonces H tiene dimensión finita y

$$\boxed{\dim H \le \dim V} \tag{5.5.6}$$

Demostración

Sea $\dim V = n$. Cualquier conjunto de vectores linealmente independientes en H es también linealmente independiente en V. Por el teorema 5.5.3, cualquier conjunto linealmente independiente en H puede contener a lo más n vectores. Si $H = \{\mathbf{0}\}$, entonces $\dim H = 0$. Si $\dim H \ne \{\mathbf{0}\}$, sea $\mathbf{v}_1 \ne \mathbf{0}$ un vector en H y $H_1 = \text{gen } \{\mathbf{v}_1\}$. Si $H_1 = H$, $\dim H = 1$ y la prueba queda completa. De lo contrario, elija a $\mathbf{v}_2 \in H$ tal que $\mathbf{v}_2 \notin H_1$ y sea $H_2 = \text{gen } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, y así sucesivamente. Continuamos hasta encontrar vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ tales que $H = \text{gen } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. El proceso tiene que terminar porque se pueden encontrar a lo más n vectores linealmente independientes en H. Entonces $H = k \le n$.

El teorema 5.5.4 tiene algunas consecuencias interesantes. Presentaremos dos de ellas.

EJEMPLO 5.5.8 $C[0, 1]$ y $C^1[0, 1]$ tienen dimensión infinita

Cálculo

Sea $P[0, 1]$ el conjunto de polinomios definido en el intervalo $[0, 1]$. Entonces $P[0, 1] \subset C[0, 1]$. Si la dimensión de $C[0, 1]$ fuera finita, entonces $P[0, 1]$ también tendría dimensión finita. Pero según el ejemplo 5.5.7, no es así. Por lo tanto, $C[0, 1]$ tiene dimensión infinita. De manera similar, como $P[0, 1] \subset C^1[0, 1]$ (ya que todo polinomio es diferenciable), también se tiene que la dimensión de $C^1[0, 1]$ es infinita.

En términos generales,

Cualquier espacio vectorial que contiene un subespacio de dimensión infinita es de dimensión infinita.

EJEMPLO 5.5.9 Los subespacios de $\mathbb{R}^3$

Se puede usar el teorema 5.5.4 para encontrar *todos* los subespacios de $\mathbb{R}^3$. Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Existen cuatro posibilidades: $H = \{\mathbf{0}\}$, $\dim H = 1$, $\dim H = 2$ y $\dim H = 3$. Si $\dim H = 3$, entonces H contiene una base de tres vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ en $\mathbb{R}^3$. Pero entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ también forman una base para $\mathbb{R}^3$, y así, $H = \text{gen } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \mathbb{R}^3$. Por lo tanto, la única manera de obtener un subespacio *propio* de $\mathbb{R}^3$ es teniendo $\dim H = 1$ o $\dim H = 2$. Si $\dim H = 1$, entonces H tiene una base que consiste en un vector $\mathbf{v} = (a, b, c)$. Sea $\mathbf{x}$ en H. Entonces $\mathbf{x} = t(a, b, c)$ para algún número real t [puesto que (a, b, c) genera a H]. Si $\mathbf{x} = (x, y, z)$, esto significa que $x = at$, $y = bt$, $z =$ ct. Pero ésta es la ecuación de una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen con la dirección del vector

Ahora, suponga que dim $H = 2$ y sea $\mathbf{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $\mathbf{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ una base para H. Si $x = (x, y, z) \in H$, entonces existen números reales s y t tales que $\mathbf{x} = s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$ o $(x, y, z) = s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$. Entonces

$$\begin{aligned} x &= sa_1 + ta_2 \\ y &= sb_1 + tb_2 \\ z &= sc_1 + tc_2 \end{aligned} \tag{5.5.7}$$

Sea $\mathbf{v}_3 = (\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Entonces del teorema 4.4.2, parte iv), se tiene $\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ y $\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Ahora calculamos

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z &= \alpha(sa_1 + ta_2) + \beta(sb_1 + tb_2) + \gamma(sc_1 + tc_2) \\ &= (\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1)s + (\alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2)t \\ &= (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1)s + (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2)t = 0 \end{aligned}$$

Así, si $(x, y, z) \in H$, entonces $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, lo que muestra que H es un plano que pasa por el origen con vector normal $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Por lo tanto, se ha demostrado que

> Los únicos subespacios propios de $\mathbb{R}^3$ son los conjuntos de vectores que se encuentran en una recta o un plano que pasa por el origen.

EJEMPLO 5.5.10 Espacio de solución y espacio nulo

Sea A una matriz de $m \times n$ y sea $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Sean $\mathbf{x}_1 \in S$ y $\mathbf{x}_2 \in S$; entonces $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $A(\alpha\mathbf{x}_1) = \alpha(A\mathbf{x}_1) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$, de manera que S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y dim $S \leq n$. S se denomina **espacio de solución** del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. También se denomina **espacio nulo** de la matriz A.

Espacio de solución

Espacio nulo

EJEMPLO 5.5.11 Una base para el espacio de solución de un sistema homogéneo

Encuentre una base (y la dimensión) para el espacio de solución S del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x + 2y - \ \ z &= 0 \\ 2x - \ \ y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN ► Aquí $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Como A es una matriz de 2×3, S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Reduciendo por renglones, se encuentra, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces $y = z$ y $x = -z$, de manera que todas las soluciones son de la forma $\begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix}$. Así, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es

EJEMPLO 5.5.12 Una base para el espacio de solución de un sistema homogéneo

Encuentre una base para el espacio de solución S del sistema

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0 \\ 4x - 2y + 6z &= 0 \\ -6x + 3y - 9z &= 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN ► Reduciendo renglones se obtiene

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

lo que da una sola ecuación: $2x - y + 3z = 0$. S es un plano y, por el ejemplo 5.5.3, una base está dada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y dim $S = 2$.

Antes de dar por terminada esta sección, demostraremos un resultado útil para encontrar una base para un espacio vectorial arbitrario. Se ha visto que n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ constituyen una base para $\mathbb{R}^n$. Este hecho se cumple para *todo* espacio vectorial de dimensión finita.

Teorema 5.5.5

Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V de dimensión n constituyen una base para V.

Demostración

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores. Si generan el espacio V, entonces constituyen una base. De lo contrario, existe un vector $\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} \notin$ gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Esto significa que los $n + 1$ vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}$ son linealmente independientes. Para ver esto, observe que si

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n + c_{n+1}\mathbf{u} = 0 \qquad \textbf{(5.5.8)}$$

Entonces $c_{n+1} = 0$, porque de lo contrario podríamos escribir $\mathbf{u}$ como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ dividiendo la ecuación (5.5.8) entre c_{n+1} y poniendo todos los términos, excepto $\mathbf{u}$, en el lado derecho. Pero si $c_{n+1} = 0$, entonces (5.5.8) es

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = 0$$

lo que significa que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, ya que los $\mathbf{v}_i$ son linealmente independientes. Ahora sea $W =$ gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}\}$. Como todos los vectores entre las llaves están en V, W es un subespacio de V. Como $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}$ son linealmente independientes, forman una base para W, y dim $W = n + 1$. Pero por el teorema 5.5.4, dim $W \leq n$. Esta contradicción muestra que *no* existe el vector $\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} \notin$ gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Así, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ genera a V y, por lo tanto, constituye una base para V.

RESUMEN 5.5

- ***Base***

  Un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ es una base para un espacio vectorial V si

  i) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente.

  ii) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V.

- Todo conjunto de n vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ es una base en $\mathbb{R}^n$.

- La **base canónica** en $\mathbb{R}^n$ consiste en n vectores

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ***Dimensión***

  Si el espacio vectorial V tiene una base finita, entonces la **dimensión** de V es el número de vectores en cada base y V se denomina un **espacio vectorial de dimensión finita**. De otra manera, V se denomina **espacio vectorial de dimensión infinita**. Si $V = \{\mathbf{0}\}$, entonces se dice que V tiene **dimensión cero**.

  La dimensión de V se denota por dim V.

- Si H es un subespacio del espacio de dimensión finita V, entonces dim $H \leq$ dim V.

- Los únicos subespacios propios de $\mathbb{R}^3$ son los conjuntos de vectores que están en una recta o en un plano que pasa por el origen.

AUTOEVALUACIÓN 5.5

Indique cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos.

I) Cualesquiera tres vectores en $\mathbb{R}^3$ forman una base para $\mathbb{R}^3$.

II) Cualesquiera tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ forman una base para $\mathbb{R}^3$.

III) Una base en un espacio vectorial es única.

IV) Sea H un subespacio propio de $\mathbb{R}^4$. Es posible encontrar cuatro vectores linealmente independientes en H.

V) Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x + 11y - 17z = 0 \right\}$. Entonces dim $H = 2$.

VI) Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para el espacio vectorial V. Entonces *no* es posible encontrar un vector $\mathbf{v} \in V$ tal que $\mathbf{u} \notin$ gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

VII) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \right\}$ es una base para M_{22}.

Respuestas a la autoevaluación

I) F II) V III) F IV) F V) V VI) V VII) V

PROBLEMAS 5.5

De los problemas 1 al 14 determine si el conjunto dado es una base para el espacio vectorial a que se refiere.

1. En P_2: $-6 - 2x + 3x^2, -8 - x + 6x^2, -4 - x + 5x^2, 1 - x + x^2$
2. En P_2: $1 - x^2, x$
3. En P_2: $5 - x + 8x^2, 1 + x, 1 + 2x^2$
4. En P_2: $1 + 3x + 7x^2, 5 + 12x + 35x^2, 8 + 5x - 12x^2$
5. En P_2: $x^2 - 1, x^2 - 2, x^2 - 3$
6. En P_3: $x, 1 + x, x + 2x^2, x + 3x^3$
7. En P_2: $10 - x - 10x^2, -23 + 14x + 53x^2, -1 + 4x + 11x^2$
8. En P_3: $3, x^3 - 4x + 6, x^2$
9. En M_{22}: $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 8 & -20 \end{pmatrix}$
10. En M_{22}: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, donde $abcd \neq 0$
11. En M_{22}: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
12. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x - y = 0\}$; $(1, 1), (4, 4)$
13. En $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 2x + 3y = 0\}$; $(6, -4)$
14. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y = 0\}$; $(1, -1), (-3, 3)$
15. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en el plano $3x - 2y + 5z = 0$.
16. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores perpendiculares a la recta $x = 2y = 3z$.
17. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en la recta $x = 2$, $y = -2t$, $z = 3t$.
18. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en la recta $x = 2y = 3z$.
19. Demuestre que los únicos subespacios propios en $\mathbb{R}^2$ son rectas que pasan por el origen.
20. En $\mathbb{R}^4$ sea $H = \{(x, y, z, w): ax + by + cz + dw = 0\}$, donde $a, b, c, d \neq 0$.

    a) Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.
    b) Encuentre una base para H.
    c) ¿Cuánto vale dim H?

$$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales fijos, no todos cero.

22. En $\mathbb{R}^5$ encuentre una base para el hiperplano

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5): 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0\}$$

De los problemas 23 al 31 encuentre una base para el espacio de solución del sistema homogéneo dado.

23. $x + 5y = 0$

24. $8x_1 - 56x_2 = 0$

25.
$$\begin{aligned} x + 5y &= 0 \\ -2x - 10y &= 0 \end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

27.
$$\begin{aligned} -x + 3y - 12z &= 0 \\ 7x - 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

28.
$$\begin{aligned} x - 4y + 6z &= 0 \\ 5x - 6y + 8z &= 0 \\ 11x - 6y + 22z &= 0 \end{aligned}$$

29.
$$\begin{aligned} x_1 - 6x_2 + 11x_3 + 6x_4 &= 0 \\ -15x_1 + 26x_2 - 13x_3 - 10x_4 &= 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

30.
$$\begin{aligned} 5x_1 + 8x_2 - 8x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 10x_1 + 11x_2 - 11x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 12x_1 \qquad + 11x_3 - 8x_4 &= 0 \end{aligned}$$

31.
$$\begin{aligned} -2w + 4x + 2y - 2z &= 0 \\ w - 2x + 2y &= 0 \\ 2w - x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

32. Encuentre una base para $\mathbb{D}_3$, el espacio vectorial de matrices diagonales de 3×3. ¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{D}_3$?

33. ¿Cuál es la dimensión D_n, el espacio de matrices diagonales de $n \times n$?

34. Sea $\mathbb{S}_{nn}$ el espacio vectorial de matrices simétricas de $n \times n$. Demuestre que $\mathbb{S}_{nn}$ es un subespacio de $\mathbb{M}_{nn}$ y que dim $\mathbb{S}_{nn} = [n(n + 1)]/2$.

35. Suponga que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V de dimensión n y $m < n$. Demuestre que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ se puede aumentar a una base para V. Esto es, existen vectores $\mathbf{v}_{m+1}, \mathbf{v}_{m+2}, \ldots, \mathbf{v}_n$ tales que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base. [*Sugerencia:* Vea la demostración del teorema 5.5.5.]

36. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base en V. Sean $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{u}_n = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n$. Demuestre que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es también una base en V.

37. Demuestre que si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V, entonces dim $V = n$. [*Sugerencia:* Utilice el resultado del problema 5.4.61.]

38. Sean H y K dos subespacios de V tales que $H \subseteq K$ y dim H = dim $K < \infty$. Demuestre que $H = K$.

39. Sean H y K dos subespacios de V. Defina $H + K = \{\mathbf{h} + \mathbf{k}: \mathbf{h} \in H \text{ y } \mathbf{k} \in K\}$.

a) Demuestre que $H + K$ es un subesapcio de V.
b) Si $H \cap K = \{\mathbf{0}\}$, demuestre que dim $(H + K)$ = dim H + dim K.

***40.** Si H es un subespacio vectorial de dimensión finita V, demuestre que existe un subespacio único K de V tal que *a)* $H \cap K = \{\mathbf{0}\}$ y *b)* $H + K = V$.

41. Demuestre que dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en $\mathbb{R}^2$ con puntos terminales en el origen son colineales si y sólo si dim gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = 1$.

42. Demuestre que los tres vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ en $\mathbb{R}^3$ con puntos terminales en el origen son copla-

43. Demuestre que cualesquiera n vectores que generan un espacio V de dimensión n forman una base para V. [*Sugerencia:* Demuestre que si los n vectores no son linealmente independientes, entonces dim $V < n$.]

*44. Demuestre que todo subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita tiene una base.

45. Encuentre dos bases para $\mathbb{R}^4$ que contengan a $(1, 0, 1, 0)$ y $(0, 1, 0, 1)$ y no tengan otros vectores en común.

46. ¿Para qué valores del número real a los vectores $(a, 1, 0)$, $(1, 0, a)$ y $(1 + a, 1 - a)$ constituyen una base para $\mathbb{R}^3$?

EJERCICIOS CON MATLAB 5.5

Los problemas en esta sección se concentran en el trabajo con bases para *todo* $\mathbb{R}^n$ (o todo P_n o todo M_{nm}). Los problemas en la sección 5.6 se concentran en bases de subespacios.

1. *a)* Verifique que los conjuntos dados en el inciso *b)* forman una base para el espacio vectorial indicado. Explique cómo se satisface cada una de las propiedades de la definición de una base.

   b) Genere un vector aleatorio en el espacio vectorial dado. Demuestre que se trata de una combinación lineal de los vectores de la base con coeficientes únicos para la combinación lineal. Repita para otros dos vectores aleatorios.

   i) $\mathbb{R}^3 \left\{ \begin{pmatrix} 8.25 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.01 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -6.5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ **ii)** $\mathbb{R}^5 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

   iii) $M_{22} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1.2 & 2.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.5 & 4 \\ 4.3 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

   (Vea el problema 10 de MATLAB 5.3.)

   iv) P_4 $[x^4 - x^3 + 2x + 1,\ x^4 + 3x^2 - x + 4,\ 2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 5,$
   $x^4 + x^3 - 2x^2 + x,\ x^4 + x^3 + x^2 + x + 1]$

2. Para los conjuntos de vectores en el problema 9*b*) de MATLAB 5.4 demuestre que esos conjuntos generan su $\mathbb{R}^n$ respectivo pero no forman una base. Para cada conjunto, genere un vector aleatorio **w** en su $\mathbb{R}^n$ correspondiente y verifique que **w** es una combinación lineal del conjunto de vectores pero que los coeficientes de la combinación lineal no son únicos. Repita para otros dos vectores **w**.

3. Para cada base en el problema 1 de MATLAB de esta sección:

   a) Elimine un vector del conjunto y muestre que el nuevo conjunto no es una base, describiendo qué propiedad de las bases no se satisface. Repita (elimine otro vector).

   b) Genere un vector aleatorio **w** en el espacio vectorial. Agregue **w** al conjunto de vectores. Muestre que el nuevo conjunto no es una base, describa qué propiedad no se satisface. Repita con otro **w**.

   c) (*Lápiz y papel*) Escriba una demostración, basada en la forma escalonada reducida por ren-

4. *a*) La dimensión de $\mathbb{M}_{32}$ es 6. Genere cinco matrices aleatorias en $\mathbb{M}_{32}$ y muestre que no forman una base para $\mathbb{M}_{32}$, describiendo la propiedad de las bases que no se satisface. Genere siete matrices aleatorias en $\mathbb{M}_{32}$ y muestre que no forman una base para $\mathbb{M}_{32}$; asimismo, describa la propiedad que no se satisface.

b) (*Lápiz y papel*) Escriba una demostración, basada en la forma escalonada por renglones reducidos, de que la dimensión de $\mathbb{M}_{nm}$ es nm, el producto de n y m.

5. Considere las matrices en el problema 2 de MATLAB 2.4 y las matrices cuyas columnas son los vectores en los conjuntos de vectores dados en el problema 1*b*) i) y ii) de esta sección.

a) Determine para cada matriz A (digamos que su tamaño es $n \times n$) si es invertible y si las columnas de A forman una base para $\mathbb{R}^n$.

b) Escriba una conclusión relacionando la propiedad de invertibilidad con la propiedad de que las columnas formen una base.

c) (*Lápiz y papel*) Pruebe su conclusión.

6. *a*) (*Lápiz y papel*) Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5\}$ es una base para $\mathbb{R}^5$. Suponga que $\mathbf{w}_1 = A\mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_2 = A\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{w}_5 = A\mathbf{v}_5$, para alguna matriz A de $n \times 5$. Conteste las preguntas siguientes para completar la descripción de cómo encontrar $A\mathbf{w}$ para cualquier $\mathbf{w}$ si nada más se sabe lo que A le hace a la base.

i) Dado cualquier $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^5$, argumente por qué $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_5\mathbf{v}_5$, donde $c_1, \ldots, c_5$ son únicos.

ii) Muestre que $A\mathbf{w} = c_1\mathbf{w}_1 + \ldots + c_5\mathbf{w}_5$.

iii) Argumente por qué $A\mathbf{w} = [\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \mathbf{w}_3\mathbf{w}_4\mathbf{w}_5]\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}$.

b) Sea $\{\mathbf{v}_1 \ldots, \mathbf{v}_5\}$ la base en $\mathbb{R}^5$ dada en el problema 1*b*) ii) de esta sección de MATLAB. Suponga que

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 36 \\ 25 \\ 13 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Encuentre $A\mathbf{w}$, donde

i) $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 9 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$

ii) `w=2*rand(5, 1)-1`

c) Repita *b*) para

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.6 Cambio de bases

En $\mathbb{R}^2$ se expresaron vectores en términos de la base canónica $\mathbf{i} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. En $\mathbb{R}^n$ se definió la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n\}$. En $\mathbb{P}_n$ se definió la base estándar como $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Estas bases se usan ampliamente por la sencillez que ofrecen el trabajar con ellas. Pero en ocasiones ocurre que es más conveniente alguna otra base. Existe un número infinito de bases para elegir, ya que en un espacio vectorial de dimensión n, cualesquiera n vectores, linealmente independientes, forman una base. En esta sección se verá cómo cambiar de una base a otra mediante el cálculo de cierta matriz.

Iniciaremos con un ejemplo sencillo. Sean $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Entonces, $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es la base canónica en $\mathbb{R}^2$. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. Como $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes (porque $\mathbf{v}_1$ no es un múltiplo de $\mathbf{v}_2$), $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una segunda base en $\mathbb{R}^2$. Sea $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ un vector en $\mathbb{R}^2$. Esta notación significa que

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2$$

Es decir, $\mathbf{x}$ está expresado en términos de los vectores de la base B_1. Para hacer hincapié en este hecho, se escribe

$$(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Como B_2 es otra base en $\mathbb{R}^2$, existen escalares c_1 y c_2 tales que

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \tag{5.6.1}$$

Una vez que se encuentran estos escalares se puede escribir

$$(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

para indicar que $\mathbf{x}$ está ahora expresado en términos de los vectores en B_2. Para encontrar los números c_1 y c_2 se escribe la base anterior ($\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$) en términos de la nueva base ($\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$). Es sencillo verificar que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\mathbf{v}_1 = \frac{3}{5}\mathbf{v}_2 \tag{5.6.2}$$

y

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{5}\mathbf{v}_2 \tag{5.6.3}$$

es decir,

$$(\mathbf{u}_1)_{B_2} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\-\frac{3}{5}\end{pmatrix} \text{ y } (\mathbf{u}_2)_{B_2} = \begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

Entonces,

de (5.6.2) y (5.6.3)

$$= \left(\frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2\right)\mathbf{v}_1 + \left(-\frac{3}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2\right)\mathbf{v}_2$$

Asi, de (5.6.1),

$$c_1 = \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2$$
$$c_2 = -\frac{3}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2$$

o

$$(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 \\ -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, entonces

$$(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{13}{5} \end{pmatrix}$$

Verificación.

$$\frac{2}{5}\mathbf{v}_1 - \frac{13}{5}\mathbf{v}_2 = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{13}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{13}{5} \\ \frac{6}{5} - \frac{26}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= 3\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2$$

Matriz de transición

La matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ se denomina **matriz de transición** de B_1 a B_2, y se ha demostrado que

$$(\mathbf{x})_{B_2} = A(\mathbf{x})_{B_1} \tag{5.6.4}$$

En la figura 5.4 se ilustran las dos bases $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

Es sencillo generalizar este ejemplo. Sin embargo, antes es necesario ampliar la notación. Sean $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ dos bases para un espacio vectorial real V de dimensión n. Sea $\mathbf{x} \in V$. Entonces $\mathbf{x}$ se puede escribir en términos de ambas bases:

$$\mathbf{x} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + b_n\mathbf{u}_n \tag{5.6.5}$$

y

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_n\mathbf{v}_n \tag{5.6.6}$$

donde las b_i y c_i son números reales. Así, $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ denota la representación de $\mathbf{x}$ en

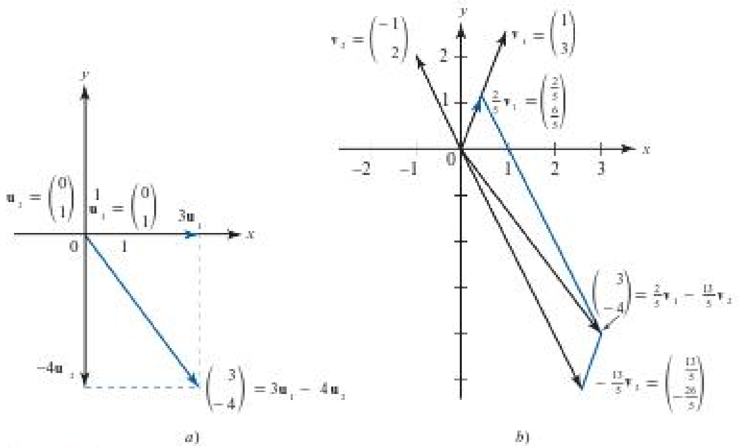


Figura 5.4

a) Expresión de $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en términos de la base canónica $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

b) Expresión de $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en términos de la base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

términos de la base B_1. Esto no es ambiguo porque los coeficientes b_j en (5.6.5) son únicos, según el teorema 5.5.1. De igual manera, $(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ tiene un significado similar. Suponga que $\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$ y $\mathbf{w}_2 = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \cdots + b_n\mathbf{u}_n$. Entonces $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (a_1 + b_1)\mathbf{u}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (a_n + b_n)\mathbf{u}_n$, de manera que

$$(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)_{B_1} = (\mathbf{w}_1)_{B_1} + (\mathbf{w}_2)_{B_1}$$

Es decir, en la nueva notación se pueden sumar vectores igual que como se suman en $\mathbb{R}^n$. Los coeficientes de la "suma" de vectores son las sumas de los coeficientes de los dos vectores individuales. Más aún, es sencillo demostrar que

$$\alpha(\mathbf{w})_{B_1} = (\alpha\mathbf{w})_{B_1}$$

Ahora, como B_2 es una base, cada $\mathbf{u}_j$ en B_1 se puede escribir como una combinación lineal de las $\mathbf{v}_i$. Así, existe un conjunto único de escalares $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ tales que para $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\mathbf{u}_j = a_{1j}\mathbf{v}_1 + a_{2j}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{nj}\mathbf{v}_n \tag{5.6.7}$$

o sea,

$$(\mathbf{u}_j)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{5.6.8}$$

Definición 5.6.1

Matriz de transición

La matriz A de $n \times n$ cuyas columnas están dadas por (5.6.8) se denomina **matriz de transición** de la base B_1 a la base B_2. Esto es,

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \uparrow \quad\ \uparrow \quad\ \uparrow \qquad\qquad \uparrow \\ (\mathbf{u}_1)_{B_2}\ (\mathbf{u}_2)_{B_2}\ (\mathbf{u}_3)_{B_2} \ldots (\mathbf{u}_n)_{B_2} \end{array} \tag{5.6.9}$$

Nota

Si se cambia el orden en el que se escriben los vectores de la base, entonces también debe cambiarse el orden de las columnas en la matriz de transición.

Teorema 5.6.1

Sean B_1 y B_2 bases para un espacio vectorial V. Sea A la matriz de transición de B_1 a B_2. Entonces para todo $\mathbf{x} \in V$

$$\boxed{(\mathbf{x})_{B_2} = A(\mathbf{x})_{B_1}} \tag{5.6.10}$$

Demostración

Se usa la representación de $\mathbf{x}$ dada en (5.6.5) y (5.6.6):

$$\mathbf{x} \overset{\text{de (5.6.5)}}{=} b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \cdots + b_n\mathbf{u}_n$$

$$\overset{\text{de (5.6.7)}}{=} b_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{v}_n) + b_2(a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{v}_n) + \cdots + b_n(a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{v}_n)$$

$$= (a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n)\mathbf{v}_1 + (a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n)\mathbf{v}_2 + \cdots + (a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \cdots + a_{nn}b_n)\mathbf{v}_n$$

$$\overset{\text{de (5.6.6)}}{=} c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n \tag{5.6.11}$$

Así,

$$(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \overset{\text{de (5.6.11)}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \cdots + a_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A(\mathbf{x})_{B_1} \tag{5.6.12}$$

Teorema 5.6.2

Sea A la matriz de transición de B_1 a B_2. Entonces A^{-1} es la matriz de transición de B_2 a B_1.

Demostración

Sea C la matriz de transición de B_2 a B_1. Entonces de (5.6.10) se tiene

$$(\mathbf{x})_{B_1} = C(\mathbf{x})_{B_2} \tag{5.6.13}$$

Pero $(\mathbf{x})_{B_2} = A(\mathbf{x})_{B_1}$, y sustituyendo esto en (5.6.13) se obtiene

$$(\mathbf{x})_{B_1} = CA(\mathbf{x})_{B_1} \tag{5.6.14}$$

Se deja como ejercicio (vea el problema 50 de la presente sección) demostrar que (5.6.14) se cumple para todo $\mathbf{x}$ en V sólo si $CA = I$. Por lo tanto, del teorema 2.4.8, $C = A^{-1}$, y el teorema queda demostrado.

Observación. Este teorema hace especialmente sencillo encontrar la matriz de transición a partir de una base canónica $B_1 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n]$ en $\mathbb{R}^n$ a cualquier otra base en $\mathbb{R}^n$. Sea B_2 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ cualquier otra base. Sea C la matriz cuyas columnas son los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Entonces C es la matriz de transición de B_2 a B_1, ya que cada vector $\mathbf{v}_i$ está expresado ya en términos de la base canónica. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, la matriz de transición de B_1 a B_2 es C^{-1}.

Nota

Como en la página 355, la matriz de transición es única respecto al orden en que se escriben los vectores de la base B_2.

Procedimiento para encontrar la matriz de transición de la base canónica a la base $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

i) Se escribe la matriz C cuyas columnas son $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

ii) Se calcula C^{-1}. Ésta es la matriz de transición que se busca.

EJEMPLO 5.6.1 **Expresión de vectores en $\mathbb{R}^3$ en términos de una nueva base**

En $\mathbb{R}^3$, sea $B_1 = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ y $B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$. Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, escriba $\mathbf{x}$ en términos de los vectores en B_2.

SOLUCIÓN ► Primero se verifica que B_2 es una base. Esto es evidente ya que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Como $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, de inmediato se ve que la matriz de transición C

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Así, de acuerdo con el teorema 5.6.2, la matriz de transición A de B_1 a B_2 es

$$A = C^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, entonces

$$(\mathbf{x})_{B_2} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Para verificar, observe que

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{7}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 5.6.2 Expresión de polinomios en $\mathbb{P}_2$ en términos de una nueva base

En $\mathbb{P}_2$, la base canónica en $B_1 = \{1, x, x^2\}$. Otra base es $B_2 = \{4x - 1, 2x^2 - x, 3x^2 + 3\}$. Si $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$, escriba p en términos de los polinomios en B_2.

SOLUCIÓN ► Primero verifique que B_2 es una base. Si $c_1(4x - 1) + c_2(2x^2 - x) + c_3(3x^2 + 3) = 0$ para toda x, entonces al reacomodar los términos se obtiene

$$(-c_1 + 3c_3)1 + (4c_1 - c_2)x + (2c_2 + 3c_3)x^2 = 0$$

Pero como $\{1, x, x^2\}$ es un conjunto linealmente independiente, se debe tener

$$\begin{aligned} -c_1 \qquad + 3c_3 &= 0 \\ 4c_1 - c_2 \qquad &= 0 \\ 2c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

El determinante de este sistema homogéneo es $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$, lo que significa que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ es la única solución. Ahora $(4x - 1)_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $(2x^2 - x)_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $(3 + 3x^2)_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Así, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es la matriz de transición de B_2 a B_1, de manera que

$$A = C^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición de B_1 a B_2. Como $(a_0 + a_1x + a_2x^2)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, se tiene

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2)_{B_1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{27}[-3a_0 + 6a_1 + 3a_2] \\ \frac{1}{27}[-12a_0 + 3a_1 + 12a_2] \\ \frac{1}{27}[8a_0 + 2a_1 + a_2] \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si $p(x) = 5x^2 - 3x + 4$, entonces

$$(5x^2 - 3x + 4)_{B_2} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{27} \\ \frac{21}{27} \\ \frac{31}{27} \end{pmatrix}$$

o

$$5x^2 - 3x + 4 \overset{\text{verifique esto}}{\downarrow}= \frac{15}{27}(4x - 1) + \frac{21}{27}(4x^2 - x) + \frac{31}{27}(3x^2 + 3)$$

EJEMPLO 5.6.3 **Conversión de una base a otra en $\mathbb{R}^2$**

Sean $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ dos bases en $\mathbb{R}^2$. Si $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, exprese $\mathbf{x}$ en términos de los vectores de B_2.

SOLUCIÓN ► Este problema es un poco más difícil porque ninguna de las dos bases es canónica. Deben expresarse los vectores de B_1 como una combinación lineal de los vectores en B_2. Es decir, deben encontrarse constantes $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}$ tales que

$$\begin{pmatrix} 3 \\ \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -5 \\ \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -5 \\ \end{pmatrix}$$

lo que conduce a los siguientes sistemas:

$$\begin{aligned} 2a_{11} - 5a_{21} &= 3 \\ 4a_{11} + 3a_{21} &= 1 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} 2a_{12} - 5a_{22} &= 2 \\ 4a_{12} + 3a_{22} &= -1 \end{aligned}$$

Las soluciones son $a_{11} = \frac{7}{13}, a_{21} = -\frac{5}{13}, a_{12} = \frac{1}{26}$ y $a_{22} = -\frac{5}{13}$. Entonces $A = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}$

y
$$(\mathbf{x})_{B_2} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{26}(14b_1 + b_2) \\ -\frac{10}{26}(b_1 + b_2) \end{pmatrix}$$

en base canónica

Por ejemplo, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$; entonces $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_1} = b_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

de manera que
$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y
$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_1} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{41}{26} \\ -\frac{20}{26} \end{pmatrix}$$

Es decir,

¡verifique!
$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{41}{26}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{20}{26}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Como se vio en el ejemplo 5.6.3, encontrar la matriz de transición entre dos bases diferentes a la canónica requirió expresar los vectores de una base en términos de la otra. Es posible simplificar un poco el procedimiento si utilizamos como paso intermedio la representación en la base canónica, ya que es sencillo encontrar la matriz de transición de una base cualquiera a la base canónica. Lo que se requiere representar esquemáticamente es lo siguiente: si queremos encontrar la matriz de transición de una base B_1 a una base B_2 usando la canónica E, encontramos las matrices de transición de las bases B_1 y B_2 a la base E, es decir, hallamos $C_{B_1 \to E}$ y $C_{B_2 \to E}$ y encontramos que $C_{E \to B_2} = C^{-1}_{B_2 \to E}$ por el teorema 5.6.2. Finalmente, encontramos la matriz de transición de B_1 a B_2

$$A_{B_1 \to B_2} = C_{E \to B_2} C_{B_1 \to E} = C^{-1}_{B_2 \to E} C_{B_1 \to E} \tag{5.6.15}$$

Ahora mostraremos el procedimiento con la información del ejemplo 5.6.3.

EJEMPLO 5.6.4 Obtención de la matriz de transición entre dos bases a través de la base canónica

Utilizando las bases del ejemplo 5.6.3, encuentre la matriz de transición de B_1 a B_2 por medio del

$$C_{B_1\to E}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}, C_{B_2\to E}=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$A=C_{B_2\to E}^{-1}C_{B_1\to E}=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 4 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{26}\begin{pmatrix}3 & 5\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{26}\begin{pmatrix}14 & 1\\ -10 & -10\end{pmatrix}$$

podemos observar que obtenemos el mismo resultado que en el ejemplo 5.6.3.

Haciendo uso de la notación de esta sección se puede deducir una manera conveniente para determinar si un conjunto de vectores dado en cualquier espacio vectorial de dimensión finita es linealmente dependiente o independiente.

Teorema 5.6.3

Sea $B_1=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base del espacio vectorial V de dimensión n. Suponga que

$$(\mathbf{x}_1)_{B_1}=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix}, (\mathbf{x}_2)_{B_1}=\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{n2}\end{pmatrix}, \ldots, (\mathbf{x}_n)_{B_1}=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{nn}\end{pmatrix}$$

Sea

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

Entonces $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes si y sólo si $\det A \neq 0$.

Demostración

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ las columnas de A. Suponga que

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \tag{5.6.16}$$

Después, si se emplea la suma definida en la página 360, se puede escribir (5.6.16) como

$$(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n)_{B_1} = (\mathbf{0})_{B_1} \tag{5.6.17}$$

La ecuación (5.6.17) da dos representaciones del vector cero en V en términos de los vectores de la base B_1. Como la representación de un vector en términos de los vectores de la base es única (por el teorema 5.5.1) se concluye que

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \tag{5.6.18}$$

donde el cero de la derecha es el vector cero en $\mathbb{R}^n$. Pero esto prueba el teorema, ya que la ecuación (5.6.18) incluye a las columnas de A, que son linealmente independientes si y sólo si

EJEMPLO 5.6.5 **Determinación de si tres polinomios en $\mathbb{P}_2$ son linealmente dependientes o independientes**

En $\mathbb{P}_2$, determine si los polinomios $3-x$, $2+x^2$ y $4+5x-2x^2$ son linealmente dependientes o independientes.

SOLUCIÓN ► Si se utiliza la base $B_1 = \{1, x, x^2\}$ se tiene $(3-x)_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(2+x^2)_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $(4+5x-2x^2)_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Entonces $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$, con lo que los polinomios son independientes.

EJEMPLO 5.6.6 **Determinación de si cuatro matrices de 2 × 2 son linealmente dependientes o independientes**

En $\mathbb{M}_{22}$ determine si las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

SOLUCIÓN ► Utilizando la base estándar $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ se obtiene $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$, de manera que las matrices son dependientes. Observe que $\det A = 0$ porque el cuarto renglón es la suma de los tres primeros. Además, observe que

$$-29\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 20\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo que ilustra que las cuatro matrices son linealmente dependientes.

RESUMEN 5.6

- Sean $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ dos bases para el espacio vectorial V. Si $\mathbf{x} \in V$ y

$$\mathbf{x} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \cdots + b_n\mathbf{u}_n = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

entonces se escribe $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ y $(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Suponga que $(\mathbf{u})_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \end{pmatrix}$. Entonces la **matriz de transición** de B_1 a B_2 es la matriz de $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Más aún, $(\mathbf{x})_{B_2} = A(\mathbf{x})_{B_1}$.

- Si A es la matriz de transición de B_1 a B_2 entonces A^{-1} es la matriz de transición de B_2 a B_1.

- Si $(\mathbf{x}_j)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, entonces $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes si y sólo si $\det A \neq 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

AUTOEVALUACIÓN 5.6

Elija el inciso que complete correctamente los siguientes enunciados.

I) La matriz de transición en $\mathbb{R}^2$ de la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ a la base $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ es ____.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ *d*) $\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

II) La matriz de transición en $\mathbb{R}^2$ de la base $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ a la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es ____.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ *d*) $\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

III) La matriz de transición en P_1 de la base $\{1, x\}$ a la base $\{2 + 3x, -4 + 5x\}$ es ______.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ *c*) $\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ *d*) $\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Respuestas a la autoevaluación

PROBLEMAS 5.6

En los problemas 1 al 8 escriba $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ en términos de la base dada.

1. $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ **7.** $\left\{\begin{pmatrix} -7 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}\right\}$

8. $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$, donde $ad - bc \neq 0$

De los problemas 9 al 15 escriba $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ en términos de la base dada.

9. $\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **13.** $\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **15.** $\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}\right\}$

De los problemas 16 al 20 escriba los polinomios $a_0 + a_1x + a_2x^2$ en $\mathbb{P}_2$ en términos de la base dada.

16. $[x, 1 + x, 1 + x^2]$ **17.** $\{1 + x + 4x^2, -3 + 4x - 2x^2, 3 - 2x + 4x^2\}$

18. $[-2 - 4x - x^2, -4 + 4x - 4x^2, -1 + 5x + 5x^2, -1 + 5x + 15^2]$

19. $[x + x^2, 3x + 2x^2, 1 + x + x^2]$ **20.** $[x^2, -1 - x + x^2, -x]$

21. En $\mathbb{M}_{22}$ escriba la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ en términos de la base $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right\}$

22. En $\mathbb{R}^2$ suponga que $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$, donde $B_1 = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. Escriba $\mathbf{x}$ en términos de la base $B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

23. En $\mathbb{R}^2$ suponga que $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, donde $B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Escriba $\mathbf{x}$ en términos de la base

24. En $\mathbb{P}_3$ exprese el polinomio $4x^2 - x + 5$ en términos de la base polinomial $1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3$.

25. En $\mathbb{R}^3$ suponga que $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, donde $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$. Escriba $\mathbf{x}$ en términos de la base $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

26. En $\mathbb{R}^2$, $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ donde $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Escriba $\mathbf{x}$ en términos de la base $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

27. En $\mathbb{R}^3$ suponga que $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donde $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$. Escriba $\mathbf{x}$ en términos de la base $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

28. En $\mathbb{R}^3$ suponga que $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, donde $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$. Escriba $\mathbf{x}$ en términos de la base $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$.

29. En $\mathbb{P}_2$, $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ donde $B_1 = \{1 - x, 3x, x^2 - x - 1\}$. Escriba $\mathbf{x}$ en términos de la base $B_2 = \{x, 1 + x, 1 + x^2\}$.

De los problemas 30 al 39 utilice el teorema 5.6.2 para determinar si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente.

30. En $\mathbb{P}_2$: $2 + 3x + 5x^2, 1 - 2x + x^2, -1 + 6x^2$

31. En $\mathbb{P}_2$: $5 - x + 3x^2, 1 + 4x + x^2, 2 - 4x - x^2$

32. En $\mathbb{P}_2$: $2 + x, x^2 + x + 1$

33. En $\mathbb{P}_2$: $x + 4x^2, -2 + 2x, 2 + x + 12x^2$

34. En $\mathbb{P}_2$: $2 - 4x - x^2, -4 + 4x^2, -5 + 3x + x^2$

35. En $\mathbb{P}_2$: $x^2 + 1, x + 1, x + 2, x^2 + 4$

36. En $\mathbb{P}_3$: $1 + x^2, -1 - 3x + 4x^2 + 5x^3, 2 + 5x - 6x^3, 4 + 6x + 3x^2 + 7x^3$

38. En $\mathbb{M}_{22}$: $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

39. En $\mathbb{M}_{22}$: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & e \\ f & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ j & k \end{pmatrix}$ donde $acfk \neq 0$

40. En $\mathbb{P}_n$, sean $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$, $n + 1$ polinomios tales que $p_i(0) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Demuestre que los polinomios son linealmente dependientes.

Cálculo

***41.** En el problema 5.6.40, en lugar de $p_i(0) = 0$, suponga que $p_i^{(j)} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n + 1$ y para alguna j con $1 \leq j \leq n$, donde $p_i^{(j)}$ denota la j-ésima derivada de p_i. Demuestre que los polinomios son linealmente dependientes en P_n.

42. En $\mathbb{M}_{mn}$ sean $A_1, A_2, \ldots, A_{mn}$ mn matrices cuyas componentes en la posición 1,1 son cero. Demuestre que las matrices son linealmente dependientes.

***43.** Suponga que los ejes x y y en el plano se rotan en sentido positivo (contrario al de las manecillas del reloj), un ángulo θ (medido en radianes). Esto da nuevos ejes que se denotan por (x', y'). ¿Cuáles son las coordenadas x, y de los vectores de la base **i** y **j** rotados?

44. Demuestre que la matriz del cambio de coordenadas en el problema 43 está dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

45. Si en los problemas 43 y 44, $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad, escriba el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ en términos de los nuevos ejes coordenados x' y y'.

46. Si $\theta = \frac{5\pi}{4} = 225°$, escriba $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ en términos de los nuevos ejes coordenados.

47. Si $\theta = 2\pi/3 = 120°$, escriba $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en términos de los nuevos ejes coordenados.

48. Sea $C = (c_{ij})$ una matriz invertible de $n \times n$ y sea $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para el espacio vectorial. Sea

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}_{B_1} = \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix}_{B_1} = \mathbf{c}_n = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}_{B_1}$$

Demuestre que $B_2 = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ es una base para V.

49. Sean B_1 y B_2 dos bases para el espacio vectorial V de dimensión n y sea C la matriz de transición de B_1 a B_2. Demuestre que C^{-1} es la matriz de transición de B_2 a B_1.

50. Demuestre que $(\mathbf{x})_{B_2} = CA(\mathbf{x})_{B_1}$ para todo $\mathbf{x}$ en un espacio vectorial V si y sólo si $CA = I$. [*Sugerencia:* Sea $\mathbf{x}_i$ el vector i en B_1. Entonces $(\mathbf{x}_i)_{B_1}$ tiene un uno en la posición i y un cero en otra

EJERCICIOS CON MATLAB 5.6

1. Sea $B = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, donde $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Observe que B es una base para $\mathbb{R}^2$. Para $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^2$, $(\mathbf{w})_B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ significa que $\mathbf{w} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$.

M

a) Para los vectores $\mathbf{w}$ dados, escriba el sistema de ecuaciones para encontrar $(\mathbf{w})_B$, es decir, encuentre a y b y resuelva a mano. Verifique dando `lincomb(v1 v2, w)` (use el archivo `lincomb.m` de la sección MATLAB 4.1).

i) $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **ii)** $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) *(Lápiz y papel)* En general, explique por qué $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es una solución al sistema cuya matriz aumentada es `[v1 v2|w]`.

2. Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nos referimos al vector i en B como $\mathbf{v}_i$.

a) Verifique que B es una base para $\mathbb{R}^4$.

b) *(Lápiz y papel)* Escriba el sistema de ecuaciones para encontrar $(\mathbf{w})_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, las coordenadas de $\mathbf{w}$ con respecto a B. Demuestre que `[v1 v2 v3 v4|w]` es la matriz aumentada para el sistema.

c) Resuelva el sistema para $(\mathbf{w})_B$. Verifique que $\mathbf{w} = A(\mathbf{w})_B$ donde `A = [v1 v2 v3 v4]`.

d) Para las bases $B = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$ y los vectores $\mathbf{w}$ dados, encuentre $(\mathbf{w})_B$ y verifique que $\mathbf{w} = A(\mathbf{w})_B$, donde `A = [v1 v2 v3 v4]`.

i) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ .5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \\ 2.5 \end{pmatrix} \right\}$

`w = round(10*(2*rand(4,1)-1))`

ii) Para B, genere cuatro vectores aleatorios de 4×1 (verifique que forman una base). Para $\mathbf{w}$ genere un vector aleatorio de 4×1.

3. Sea $B = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$ como en el problema 2*a*) de esta sección de MATLAB. Sea

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) *(Lápiz y papel)* Argumente las razones por las cuales si encuentra `rref` de la matriz $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4 \mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3\ \mathbf{w}_4]$ = `[v1 v2 v3 v4 eye(4)]`, entonces la 5a. columna de `rref` es *b*) Encuentre $(\mathbf{w}_1)_B$, $(\mathbf{w}_2)_B$, $(\mathbf{w}_3)_B$ y $(\mathbf{w}_4)_B$. Forme C, la matriz cuya *i*-ésima columna es igual a $(\mathbf{w}_i)_B$. Verifique que C es igual a la inversa de $\mathrm{A} = [\mathrm{v}_1\ \ \mathrm{v}_2\ \ \mathrm{v}_3\ \ \mathrm{v}_4]$. Utilice las observaciones del inciso *a*) para explicar por qué.

c) Sea $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Observe que $\mathbf{w} = \mathbf{1w}_1 + (-\mathbf{2w}_2) + \mathbf{3w}_3 + \mathbf{4w}_4$

i) Resuelva $[A\,|\,\mathbf{w}] = [\mathrm{v}_1\ \ \mathrm{v}_2\ \ \mathrm{v}_3\ \ \mathrm{v}_4\,|\,\mathrm{w}]$ para encontrar $(\mathbf{w})_B$

ii) Verifique que $C\mathbf{w} = A^{-1}\mathbf{w} = (\mathbf{w})_B$ [aquí, C es la matriz del inciso *b*)].

iii) (*Lápiz y papel*) C se llama matriz de transición, ¿de dónde a dónde? Utilizando el subinciso ii) y recordando lo que son las columnas de C, explique por qué

$$(\mathbf{w})_B = 1(\mathbf{w}_1)_B - 2(\mathbf{w}_2)_B + 3(\mathbf{w}_3)_B + 4(\mathbf{w}_4)_B$$

d) Repita el inciso *c*) para B y $\mathbf{w}$ en el problema 2*d* i) en esta sección de MATLAB.

4. *a*) Lea el problema 9 de MATLAB 5.3. Explique por qué ahí se encontraron las coordenadas de un polinomio en términos de la base canónica para polinomios.

b) Resuelva los problemas 21 a 23 de esta sección.

5. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Sea $C = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$

a) Verifique que B y C son bases para $\mathbb{R}^3$. Haga $\mathrm{W} = [\mathrm{w}_1\ \ \mathrm{w}_2\ \ \mathrm{w}_3]$ y $\mathrm{V} = [\mathrm{v}_1\ \ \mathrm{v}_2\ \ \mathrm{v}_3]$.

b) (*Lápiz y papel*) Escriba los tres sistemas de ecuaciones necesarios para expresar cada vector en B como una combinación lineal de vectores en C. Explique por qué las soluciones a estos sistemas se pueden encontrar resolviendo el (los) sistema(s) con la matriz aumentada $[\mathrm{w}_1\ \ \mathrm{w}_2\ \ \mathrm{w}_3\,|\,\mathrm{v}_1\ \ \mathrm{v}_2\ \ \mathrm{v}_3]$.

c) Resuelva el (los) sistema(s) para encontrar $(\mathbf{v}_1)_C$, $(\mathbf{v}_2)_C$ y $(\mathbf{v}_3)_C$ y forme la matriz $D = [(\mathbf{v}_1)_C\ (\mathbf{v}_2)_C\ (\mathbf{v}_3)_C]$.

d) Sea $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Encuentre $(\mathbf{x})_B$ y $(\mathbf{x})_C$. Verifique que $(\mathbf{x})_C = D(\mathbf{x})_B$.

Repita para un vector aleatorio $\mathbf{x}$ de 3×1.

e) Con W y V dados en el inciso *a*), encuentre $W^{-1}V$ y compárelo con D.

f) Repita los incisos *a*) a *e*) con

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ .5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \\ 2.5 \end{pmatrix} \right\}$$

g) (*Lápiz y papel*) Explique por qué $W^{-1}V = D$ en dos formas:

i) Con base en los procesos de solución de $[W|V]$ para encontrar D.

ii) Interpretando W^{-1} y V como matrices de transición que incluyen las bases canónicas.

6. Empleando lo aprendido en el problema 5 de esta sección de MATLAB:

a) Trabaje los problemas 22 al 24.

b) Genere una base aleatoria B para $\mathbb{R}^5$ y una base aleatoria C para $\mathbb{R}^5$. Encuentre la matriz de transición, T, de B a C. Verifique su respuesta generando un vector aleatorio $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^5$, encontrando $(\mathbf{x})_B$ y $(\mathbf{x})_C$ y mostrando que $T(\mathbf{x})_B = (\mathbf{x})_C$.

7. Sean B y C como se dieron en el problema 5*a*) de esta sección de MATLAB. Sea D la base

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\8\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\7\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}.5\\1\\.5\end{pmatrix}\right\}$$

a) Encuentre T, la matriz de transición de B a C. Encuentre S, la matriz de transición de C a D. Encuentre K, la matriz de transición de B a D.

b) Dé una conclusión sobre la manera de encontrar K a partir de T y S. Pruebe su conclusión. Explique su razonamiento.

c) Repita los incisos *a*) y *b*) para tres bases aleatorias (B, C y D) para $\mathbb{R}^4$.

8. Sea $B = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$. Sea $A = \left\{\begin{pmatrix}5\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\-19\\-24\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\19\\24\end{pmatrix}\right\}$.

a) Verifique que $A\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2$ y $A\mathbf{v}_3 = 5\mathbf{v}_3$.

b) Suponga que $\mathbf{x} = -1\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3$. Observe que $(\mathbf{x})_B = \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$. Encuentre $\mathbf{z} = A\mathbf{x}$, después encuentre $(\mathbf{z})_B$ y verifique $(\mathbf{z})_B = D(\mathbf{x})_B$, donde $D = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.

c) Sea $\mathbf{x} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3$. Repita el inciso *b*) para otros tres juegos de a, b y c.

d) Sea $V = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$. Demuestre que $A = VDV^{-1}$.

e) Repita los incisos *a*) a *d*) para

$$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\9\\8\end{pmatrix}\right\}, \qquad A = \begin{pmatrix}37 & -33 & 28\\ 48.5 & -44.5 & 38.5\\ 12 & -12 & 11\end{pmatrix}$$

Verifique que $A\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = 4\mathbf{v}_2$ y $A\mathbf{v}_3 = 0.5\,\mathbf{v}_3$ y utilice

$$D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & .5\end{pmatrix}$$

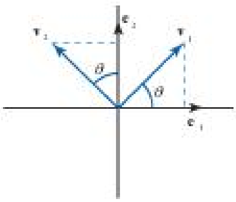
$$D = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Considerando este hecho y pensando en términos de matrices de transición, explique por qué $A = VDV^{-1}$, donde $V = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$.

9. **Cambio de base por rotación en $\mathbb{R}^2$** Sean $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ la base canónica para $\mathbb{R}^2$, donde $\mathbf{e}_1$ es un vector unitario a lo largo del eje x y $\mathbf{e}_2$ es un vector unitario a la largo del eje y. Si se rotan los ejes un ángulo θ en sentido positivo alrededor del origen, entonces $\mathbf{e}_1$ rota a un vector $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{e}_2$ rota a un vector $\mathbf{v}_2$ tal que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$.

a) *(Lápiz y papel)* Demuestre que

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



b) Sea $V = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$. Entonces $\mathbf{v}_1 = V\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{v}_2 = V\mathbf{e}_2$. Exploraremos la geometría de $\mathbf{w} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$, es decir, la geometría de las combinaciones lineales en términos de la nueva base.Nos interesa la relación de las combinaciones lineales con la rotación.

Suponga que $\mathbf{x} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$. Entonces $\mathbf{w} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = V\mathbf{x}$ representa el vector $\mathbf{x}$ rotado en sentido positivo un ángulo θ alrededor del origen.

El programa de MATLAB que se muestra a continuación ayuda a visualizar esta geometría. Grafica los vectores como segmentos de recta que comienzan en el origen. El vector $\mathbf{x}$ se grafica en rojo y el vector $\mathbf{w}$ en azul. Observe cómo $\mathbf{w}$ (el vector azul) es la rotación positiva θ de $\mathbf{v}$ (el vector rojo). Dé el comando `plot` primero y después los dos comandos de `axis`. Vea la gráfica después de los comandos `axis`.

Precaución. La impresión de la gráfica producida directamente de la pantalla no mostrará longitudes iguales ni los ángulos rectos como tales.

```
a=1;b=2; % define vector a rotar
x=[a;b]; M=norm(x);
th=pi/2; % Ángulo de rotación
v1=[cos(th);sin(th)];
v2=[-sin(th);cos(th)];
V=[v1,v2]; % Matriz de cambio de base
w=V*x; % rotación del vector x
plot([0,x(1)],[0,x(2)],'r',[0,w(1)],[0,w(2)],'b')
axis square
axis([-M M -M M]);
grid
title('Vector origina: rojo, Vector rotado: azul')
```

Repita las instrucciones anteriores, modificando los valores para a y b.

Repita las instrucciones anteriores para $\theta = \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$ y un ángulo arbitrario. Para cada ángulo, elija dos a y b. Cuando termine con esta parte, dé el comando `clf` (doc clf) para borrar la figura utilizada.

c) Digamos que una base tiene **orientación dada por θ** si es una base obtenida rotando la base canónica en sentido positivo alrededor del origen un ángulo θ.

Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base con orientación dada por θ. Suponga que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ representan direcciones de sensores para un dispositivo de rastreo. El dispositivo registra la localización de un objeto como coordenadas con respecto a la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Si dos dispositivos tienen orientaciones diferentes, ¿cómo puede hacer uso uno de la información recabada por el otro? Esto incluye traducir las coordenadas en términos de una de las bases a coordenadas en términos de la otra base.

i) Suponga que $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base con orientación dada por $\frac{\pi}{4}$ y $C = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ es una base con orientación dada con $\frac{2\pi}{3}$. Encuentre la matriz de transición T de la base B a la base C. Encuentre la matriz de transición S de la base C a la base B. (**Nota.** Las líneas 3, 4 y 5 en el programa de MATLAB del inciso *b*) dan un ejemplo de cómo encontrar una base con orientación $\frac{\pi}{2}$.)

ii) Suponga que el dispositivo con orientación dada $\frac{\pi}{4}$ localiza un objeto con coordenadas [0.5; 3]. Encuentre las coordenadas del objeto respecto al dispositivo con orientación $\frac{2\pi}{3}$. Explique su proceso. Verifique su resultado encontrando las coordenadas estándar del objeto haciendo uso de las coordenadas [0.5; 3] para la primera base B y encuentre las coordenadas estándar del objeto empleando las coordenadas encontradas para la segunda base C.

iii) Suponga que el dispositivo con orientación $\frac{2\pi}{3}$ localiza un objeto con coordenadas [2; –1.4]. Encuentre las coordenadas del objeto respecto al dispositivo con orientación $\frac{\pi}{4}$. Explique su proceso. Verifique su respuesta igual que en el subinciso ii).

iv) El archivo `rotcoor.m` de MATLAB ayuda a visualizar el proceso anterior. El formato es `rotcoor(E, F, c)`, donde E y F son matrices de 2×2 cuyas columnas forman una base para $\mathbb{R}^2$ y **c** es una matriz de 2×1 que representa las coordenadas de un vector con respecto a la base dada por E. Se muestra en una figura los vectores que forman a la matriz E en color rojo y los vectores que forman a la matriz F en color verde. Se observa el vector resultado de la combinación lineal de la base E y la combinación lineal resultante para la base F en color azul.

El archivo se presenta a continuación:

```
function rotcoor(E,F,c)
%
% ROTCOOR funcion que grafica el vector c de la base E como un vector
% de la base F
%
% E: matrix 2x2, columnas son una base
% F: matriz 2x2, columnas son una base
% c: vector de 2x1 con respecto a la base E
% definición de matriz de transición de base E a base F
T=F\E;
% vector c en base F
v1=T*c;
```

```
OE1=[origen,E(:,1)];
OE2=[origen,E(:,2)];
OF1=[origen,F(:,1)];
OF2=[origen,F(:,2)];
OE1mE2=[origen,E*c];
E1mE2=[E(:,1)*c(1),E*c];
E2mE1=[E(:,2)*c(2),E*c];
F1mF2=[F(:,1)*v1(1),F*v1];
F2mF1=[F(:,2)*v1(2),F*v1];

plot(OE1(1,:),OE1(2,:),'r:*',OE2(1,:),OE2(2,:),'r:*');
hold on
plot(c(1)*OE1(1,:),c(1)*OE1(2,:),'r:',...
   c(2)*OE2(1,:),c(2)*OE2(2,:),'r:')
text(E(1,1)/2,E(2,1)/2,'\bf E_1','Color','red');
text(E(1,2)/2,E(2,2)/2,'\bf E_2','Color','red');
h=plot(OE1mE2(1,:),OE1mE2(2,:),'-b*');
set(h,'LineWidth',2)
text(OE1mE2(1,2)/2,OE1mE2(2,2)/2,'\bf Ec=Fv1','Color','blue')
plot(E1mE2(1,:),E1mE2(2,:),'r:')
plot(E2mE1(1,:),E2mE1(2,:),'r:')
title(['E_1c_1+E_2c_2=[' num2str(E(:,1)'),']
   (',num2str(c(1)),...')+[' num2str(E(:,2)'),'](',...
   num2str(c(2)),')'])
xlabel(['F_1v1_1+F_2v1_2=[' num2str(F(:,1)'),'](',...
   num2str(v1(1)),')+[' num2str(F(:,2)'),...']
   (',num2str(v1(2)),')'])

plot(OF1(1,:),OF1(2,:),'g:*',OF2(1,:),OF2(2,:),'g:*');
plot(v1(1)*OF1(1,:),v1(1)*OF1(2,:),'g:',v1(2)*OF2(1,:),...
   v1(2)*OF2(2,:),'g:')
text(F(1,1)/2,F(2,1)/2,'\bf F_1','Color','green');
text(F(1,2)/2,F(2,2)/2,'\bf F_2','Color','green');
plot(F1mF2(1,:),F1mF2(2,:),'g:')
plot(F2mF1(1,:),F2mF1(2,:),'g:')
grid on
axis square
```

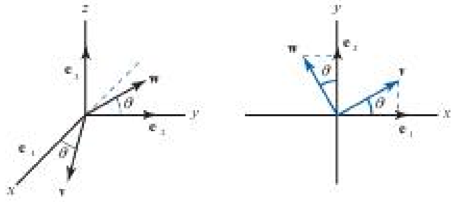
Utilice este archivo para visualizar los resultados de los subincisos ii) y iii). Verifique sus respuestas para dichos subincisos utilizando la información en la pantalla. Por ejemplo, en ii), E será la base para la orientación de $\frac{\pi}{4}$, F la base para la orientación $\frac{2\pi}{3}$ y $\mathbf{c} = [0.5; 3]$.

10. Cambio de base por rotaciones en $\mathbb{R}^3$; inclinar, desviar, rodar

a) *(Lápiz y papel)* En $\mathbb{R}^3$ se puede rotar en sentido positivo alrededor del eje x, del eje y o del eje z (los ejes x, y y z forman un sistema coordenado de la mano derecha). Sean $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ los vectores unitarios de la base canónica en las direcciones positivas de los ejes x, y y z, respectivamente.

i) Una rotación positiva un ángulo θ alrededor del eje z producirá una base $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{e}_3\}$, donde $\mathbf{v}$ es el vector obtenido al rotar $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{w}$ es el vector obtenido al rotar $\mathbf{e}_2$. Usando los diagramas siguientes como guía, demuestre que

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

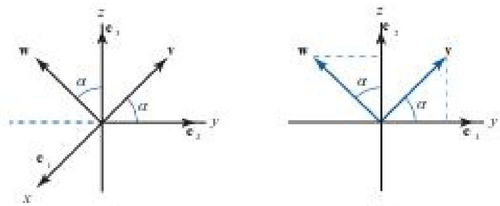


a) b)

Sea $Y = [\mathrm{v}\ \ \mathrm{w}\ \ \mathrm{e}_3]$. Interprete Y como matriz de transición.

ii) Una rotación positiva un ángulo α alrededor del eje x producirá una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, donde $\mathbf{v}$ es el vector obtenido al rotar $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{w}$ es el vector obtenido al rotar $\mathbf{e}_3$. Usando los diagramas siguientes como guía, demuestre que

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

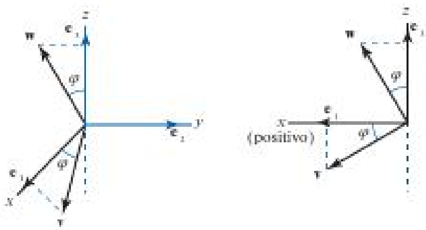


a) b)

Sea $R = [\mathrm{e}_1\ \ \mathrm{v}\ \ \mathrm{w}]$. Interprete R como una matriz de transición.

iii) Una rotación positiva un ángulo θ alrededor del eje y producirá una base $\{\mathbf{v}, \mathbf{e}_2, \mathbf{w}\}$, donde $\mathbf{v}$ es el vector obtenido al rotar $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{w}$ es el vector obtenido al rotar $\mathbf{e}_3$. Empleando los diagramas siguientes como guía, demuestre que

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ -\operatorname{sen}(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$



a) b)

b) (*Lápiz y papel*) Suponga que Y es una matriz como la obtenida en el inciso *a*) i) para un ángulo θ, R es una matriz como la obtenida en el inciso *a*) ii) para un ángulo α, y P es una matriz como la obtenida en el inciso *a*) iii) para un ángulo φ.

Las matrices Y, R y P para cualesquiera tres ángulos tienen interpretaciones geométricas similares a la de una matriz de rotación en $\mathbb{R}^2$. Sea M cualquiera de estas matrices de rotación. Sea $\mathbf{u} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$. Entonces $\mathbf{r} = M\mathbf{u}$ dará las coordenadas estándar del vector obtenido al rotar el vector $\mathbf{u}$.

Haciendo uso de esta interpretación geométrica, explique por qué la matriz YR representa una rotación positiva un ángulo α alrededor del eje x seguida de la rotación positiva un ángulo θ alrededor del eje z.

¿Qué matriz representará una rotación positiva un ángulo θ alrededor del eje z seguida de una rotación positiva un ángulo α alrededor del eje x? ¿Puede esperarse que esta matriz dé el mismo resultado que la matriz del párrafo anterior? ¿Por qué?

c) Las rotaciones de las que se ha hablado son de utilidad para describir la **posición** de una nave espacial (o un avión). La posición es la orientación rotacional de la nave alrededor de su centro. Aquí se supone que la nave tiene un conjunto de ejes a través de su centro de masa tales que los ejes x y y forman un ángulo recto (como un eje que va de atrás hacia adelante de la nave y el otro de lado a lado) y el eje z es perpendicular a los ejes x y y para formar un sistema de la mano derecha.

Se pueden hacer correcciones a la posición realizando rotaciones, como las descritas en el inciso *a*). Sin una forma de control de posición un satélite comienza a girar. Una rotación alrededor del eje z se denomina maniobra de **desviación**, una rotación alrededor del eje x se denomina maniobra de **giro**, y una rotación del eje y se denomina maniobra de **inclinación**.

Suponga que el conjunto de ejes de la nave está alineado inicialmente con un sistema de referencia fijo (ejes que representan una base canónica). La posición de la nave puede darse mediante una matriz cuyas columnas son vectores unitarios en las direcciones de los ejes asociados con la nave.

i) Encuentre la matriz que representa la posición de la nave después de realizar una maniobra de inclinación con un ángulo $\frac{\pi}{4}$, seguida de una maniobra de giro con un ángulo de $\frac{-\pi}{3}$, y después una maniobra de desviación con un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.

ii) Realice las mismas maniobras en diferente orden y compare las posiciones (describa el orden de las maniobras).

iii) Repita para otro conjunto de ángulos para cada tipo de maniobra, es decir, encuentre las posiciones derivadas de realizar las maniobras en dos órdenes distintos (describiendo los órdenes) y compare dichas posiciones.

d) Suponga que dos satélites con diferentes posiciones deben transferir información entre sí. Cada satélite registra la información en términos de su sistema de coordenadas; es decir, registra la información como coordenadas referidas a la base de los vectores unitarios que definen su sistema de ejes. Además del ajuste por localización (que es simplemente una traslación), la transferencia de información requiere del uso de una matriz de transición de las coordenadas de un satélite a las coordenadas del otro.

i) Considere que la orientación de una nave es la dada en el inciso *c*) i) y la orientación de la otra es la dada en el inciso *c*) ii). Suponga que la primera nave registra la localización de un objeto como `p=[0.2;0.3;-1]`. Traduzca esta información al sistema de coordenadas de la segunda nave. Verifique el resultado encontrando las coordenadas estándar del objeto con la lectura de la primera nave y después encontrando las coordenadas están-

ii) Repita para dos naves cuyas orientaciones se generaron en el inciso *c*) iii).

e) **Opcional.** Suponga que su nave tiene una matriz de posición dada por `A = orth (rand(3))`. Experimente con las maniobras de inclinación, desviación y giro para realinear la nave con el sistema de referencia fijo (base canónica).

PROBLEMA PROYECTO

11. Combine los problemas 9 y 10 de esta sección de MATLAB.

5.7 Rango, nulidad, espacio renglón y espacio columna

En la sección 5.4 se introdujo la noción de independencia lineal. Por otro lado, se demostró que si A es una matriz invertible de $n \times n$, entonces las columnas y los renglones de A forman conjuntos de vectores linealmente independientes. Sin embargo, si A no es invertible (de manera que $\det A = 0$), o si A no es una matriz cuadrada, entonces estos resultados no dicen nada sobre el número de renglones o columnas linealmente independientes de A. Eso es lo que se estudiará en esta sección. También se mostrará la forma en la cual se puede obtener una base para el espacio generado de un conjunto de vectores mediante la reducción por renglones.

Sea A una matriz de $m \times n$ y sea

El espacio nulo de una matriz
$$N_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \tag{5.7.1}$$

Entonces, como se vio en el ejemplo 5.5.10, N_A es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Definición 5.7.1

Espacio nulo y nulidad de una matriz

N_A se denomina el **espacio nulo** de A y $\nu(A) = \dim N_A$ se denomina **nulidad** de A. Si N_A contiene sólo al vector cero, entonces $\nu(A) = 0$.

Nota

El espacio nulo de una matriz también se conoce como **kernel**.

EJEMPLO 5.7.1 Espacio nulo y nulidad de una matriz de 2 × 3

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces, como se vio en el ejemplo 5.5.11, N_A está generado por $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $\nu(A) = 1$.

EJEMPLO 5.7.2 Espacio nulo y nulidad de una matriz de 3 × 3

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$. Entonces, por el ejemplo 5.5.12, $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ es una base para N_A, y $\nu(A) = 2$.

Teorema 5.7.1

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si $\nu(A) = 0$.

Demostración

De acuerdo con el teorema de resumen [teorema 5.4.6, partes i) y ii)], A es invertible si y sólo si la única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Pero según la ecuación (5.7.1), esto significa que A es invertible si y sólo si $N_A = \{\mathbf{0}\}$. Así, A es invertible si y sólo si $\nu(A) = \dim N_A = 0$.

Definición 5.7.2

Imagen de una matriz

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces la **imagen** de A, denotada por im$A$, está dada por

$$\boxed{\text{im}A = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m: A\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ para alguna } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}} \tag{5.7.2}$$

Teorema 5.7.2

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces la imagen de A im$A$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Demostración

Suponga que $\mathbf{y}_1$ y $\mathbf{y}_2$, están en im$A$. Entonces existen vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ en $\mathbb{R}^n$ tales que $\mathbf{y}_1 = A\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}_2$. Por lo tanto,

$$A(\alpha\mathbf{x}_1) = \alpha A\mathbf{x}_1 = \alpha\mathbf{y}_1 \text{ y } A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$$

por lo que $\alpha\mathbf{y}_1$ y $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ están en im$A$. Así, del teorema 5.2.1, im$A$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Definición 5.7.3

Rango de una matriz

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces el **rango** de A, denotado por $\rho(A)$, está dado por

$$\boxed{\rho(A) = \dim \text{im}A}$$

Se darán dos definiciones y un teorema que facilitarán en cierta medida el cálculo del rango.

Definición 5.7.4

Espacio de los renglones y espacio de las columnas de una matriz

Si A es una matriz de $m \times n$, sean $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\}$ los renglones de A y $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ las co-

$$\boxed{R_A = \textbf{espacio de los renglones de } A = \text{gen } \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\}} \qquad (5.7.3)$$

y

$$\boxed{C_A = \textbf{espacio de las columnas de } A = \text{gen } \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}} \qquad (5.7.4)$$

Nota

R_A es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y C_A es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Se ha introducido una gran cantidad de notación en tan sólo tres páginas.

Antes de dar un ejemplo, se demostrará que dos de estos cuatro espacios son los mismos.

Teorema 5.7.3

Para cualquier matriz A, $C_A = \text{im}A$. Es decir, la imagen de una matriz es igual al espacio de sus columnas.

Demostración

Para demostrar que $C_A = \text{im}A$ se demuestra que $\text{im}A \subseteq C_A$ e $\text{im}A \subseteq C_A$.

i) Se quiere probar que $\text{im}A \subseteq C_A$. Suponga que $\mathbf{y} \in \text{im}A$. Entonces existe un vector $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Pero como se observó en la sección 2.2, $A\mathbf{x}$ se puede expresar como una combinación lineal de las columnas de A. Por lo tanto, $\mathbf{y} \in C_A$, de manera que $\text{im}A \subseteq C_A$.

ii) Se quiere probar que $\text{im}A \subseteq C_A$. Suponga que $\mathbf{y} \in C_A$. Entonces $\mathbf{y}$ se puede expresar como una combinación lineal de las columnas de A como en la ecuación (2.2.9). Sea $\mathbf{x}$ el vector columna de los coeficientes de esta combinación lineal. Entonces, igual que en la ecuación (2.2.9), $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Así, $\mathbf{y} \in \text{im}A$, lo que prueba que $\text{im}A \subseteq C_A$.

EJEMPLO 5.7.3 Cálculo de N_A, $\nu(A)$, im$A$, $\rho(A)$, R_A y C_A para una matriz de 2×3

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. A es una matriz de 2×3.

i) El *espacio nulo de* $A = N_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Como se vio en el ejemplo 5.7.1,

$$N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

ii) La *nulidad de* $A = \nu(A) = \dim N_A = 1$.

iii) Se sabe que $\text{im}A = C_A$. Las primeras dos columnas de A son vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$ y, por lo tanto, forman una base para $\mathbb{R}^2$. La $\text{im}A = C_A = \mathbb{R}^2$.

iv) $\rho(A) = \dim \text{im}A = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

v) El *espacio de los renglones de* $A = R_A = \text{gen }\{(1, 2, -1), (2, -1, 3)\}$. Como estos dos vectores son linealmente independientes, se ve que R_A es un subespacio de dimensión dos de $\mathbb{R}^3$. Del ejemplo 5.5.9, se observa que R_A es un plano que pasa por el origen.

Teorema 5.7.4

Si A es una matriz de $m \times n$, entonces

$$\dim R_A = \dim C_A = \dim \operatorname{im} A = \rho(A)$$

Demostración

Se denota por a_{ij} la componente ij de A. Debemos demostrar que $\dim R_A = \dim C_A$. Los renglones de A se denotan por $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$, y sea $k = \dim R_A$. Sea $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_k\}$ una base para R_A. Entonces cada renglón de A se puede expresar como una combinación lineal de los vectores en S, y se tiene, para algunas constantes α_{ij},

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \alpha_{11}\mathbf{s}_1 + \alpha_{12}\mathbf{s}_2 \cdots + \alpha_{1k}\mathbf{s}_k \\ \mathbf{r}_2 &= \alpha_{21}\mathbf{s}_1 + \alpha_{22}\mathbf{s}_2 \cdots + \alpha_{2k}\mathbf{s}_k \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_m &= \alpha_{m1}\mathbf{s}_1 + \alpha_{m2}\mathbf{s}_2 \cdots + \alpha_{mk}\mathbf{s}_k \end{aligned} \tag{5.7.5}$$

Ahora la componente j de $\mathbf{r}_i$ es a_{ij}. Entonces si se igualan las componentes j de ambos lados de (5.7.5) y se hace $\mathbf{s}_i = (s_{i1}, s_{i2}, \ldots s_{in})$, se obtiene

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \alpha_{11}s_{1j} + \alpha_{12}s_{2j} \cdots + \alpha_{1k}s_{kj} \\ a_{2j} &= \alpha_{21}s_{1j} + \alpha_{22}s_{2j} \cdots + \alpha_{2k}s_{kj} \\ &\vdots \\ a_{mj} &= \alpha_{m1}s_{1j} + \alpha_{m2}s_{2j} \cdots + \alpha_{mk}s_{kj} \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = s_{1j}\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} = s_{2j}\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + s_{kj}\begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix} \tag{5.7.6}$$

Sea $\vec{\alpha}_i$ el vector $\begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix}$. Entonces como el lado izquierdo de (5.7.6) es la columna j de A, se observa que cada columna de A se puede escribir como una combinación lineal de $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_k$, lo que significa que los vectores $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_k$, generan a C_A y

$$\dim C_A \leq k = \dim R_A \tag{5.7.7}$$

Pero la ecuación (5.7.7) se cumple para cualquier matriz A. En particular, se cumple para $A^{\top}$. Pero $C_{A^{\top}} = R_A$ y $R_{A^{\top}} = C_A$. Como de (5.7.7) $\dim C_{A^{\top}} \leq \dim R_{A^{\top}}$, se tiene

$$\dim R_A \leq \dim C_A \tag{5.7.8}$$

EJEMPLO 5.7.4 **Cálculo de im$A$ y $\rho(A)$ para una matriz de 3 × 3**

Encuentre una base para im$A$ y determine el rango de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN ► Como $\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_3 = -3\mathbf{r}_1$, se ve que $\rho(A) = \dim R_A = 1$. Así, toda columna en C_A es una base para $C_A = \text{im}A$. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ es una base para im$A$.

El siguiente teorema simplificará los cálculos de la imagen, el rango y la nulidad.

Teorema 5.7.5

Si A es equivalente por renglones a B, entonces $R_A = R_B$, $\rho(A) = \rho(B)$ y $\nu(A) = \nu(B)$.

Demostración

Recuerde que según la definición 2.4.3, A es equivalente por renglones a B si A se puede "reducir" a B mediante operaciones elementales con renglones. Suponga que C es la matriz obtenida al realizar operaciones elementales en A. Primero se muestra que $R_A = R_C$. Como B se obtiene realizando varias operaciones elementales con los renglones de A, el primer resultado, aplicado varias veces, implicará que $R_A = R_B$.

Caso 1: Intercambio de dos renglones de A. Entonces $R_A = R_C$ porque los renglones de A y C son los mismos (escritos en diferente orden).

Caso 2: Multiplicación del renglón i de A por $c \neq 0$. Si los renglones de A son $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_m\}$, entonces los renglones de C son $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, c\mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_m\}$. Es obvio que $c\mathbf{r}_i = c(\mathbf{r}_i)$ y $\mathbf{r}_i = (1/c)(c\mathbf{r}_i)$. De esta forma, cada renglón de C es un múltiplo de un renglón de A y viceversa, lo que significa que cada renglón de C está en el espacio generado por los renglones de A y viceversa. Así se tiene

$$R_A \subseteq R_C \text{ y } R_C \subseteq R_A; \quad \text{por lo tanto, } R_C = R_A$$

Caso 3: Multiplicación del renglón i de A por $c \neq 0$ y suma del mismo al renglón j. Ahora los renglones de C son $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_j + c\mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_m\}$. En este caso,

$$\mathbf{r}_j = \underbrace{(\mathbf{r}_j + c\mathbf{r}_i)}_{\text{renglón } j \text{ de } C} - c\underbrace{\mathbf{r}_i}_{\text{renglón } i \text{ de } C}$$

de manera que todos los renglones de A se pueden expresar como una combinación lineal de los renglones de C y viceversa. Entonces, como antes,

$$R_A \subseteq R_C \text{ y } R_C \subseteq R_A; \quad \text{por lo tanto, } R_C = R_A$$

Se ha demostrado que $R_A = R_B$. Por lo tanto, $\rho(R_A) = \rho(R_B)$. Por último, el conjunto de soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ no cambia bajo las operaciones elementales. Así, $N_A = N_B$ y entonces $\nu(A) = \nu(B)$.

El teorema 5.7.5 es de suma importancia. Indica, por ejemplo, que el rango y el espacio de los ren-

Teorema 5.7.6

El rango de una matriz es igual al número de pivotes en su forma escalonada por renglones.

EJEMPLO 5.7.5 **Cálculo de $\rho(A)$ y R_A para una matriz de 3×3**

Determine el rango y el espacio de los renglones de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. La forma escalonada por renglones de A es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$. Como B tiene dos pivotes, $\rho(A) = \dim R_A = 2$. Una base para R_A consiste en los primeros dos renglones de B:

$$R_A = \text{gen}\,\{(1, -1, 3), (0, 1, -1)\}$$

El teorema 5.7.5 es útil cuando se quiere encontrar una base para el espacio generado por un conjunto de vectores.

EJEMPLO 5.7.6 **Determinación de una base para el espacio generado por cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$**

Encuentre una base para el espacio generado por

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN ► Se expresan los vectores como renglones de una matriz A y después se reduce la matriz a la forma escalonada por renglones. La matriz que se obtiene tendrá el mismo espacio de renglones que A. La forma escalonada por renglones de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que tiene dos pivotes.

Entonces, una base para gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\}$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Existe un camino relativamente sencillo para encontrar el espacio nulo de una matriz

EJEMPLO 5.7.7 **Cálculo del espacio nulo de una matriz de 4 × 4**

Encuentre el espacio nulo de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & -14 & 14 \\ 3 & 6 & -12 & 9 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN ► La forma escalonada por renglones reducidos de A es

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -32 & 31 \\ 0 & 1 & 14 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en la prueba del teorema 5.7.5, las soluciones a $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ son las mismas que las soluciones a $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, entonces $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$ da como resultado

$$\begin{aligned} x_1 - 32x_3 + 31x_4 &= 0 \\ x_2 + 14x_3 - 14x_4 &= 0 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} x_1 &= 32x_3 - 31x_4 \\ x_2 &= -14x_3 + 14x_4 \end{aligned}$$

de manera que si $\mathbf{x} \in N_A$, entonces

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 32x_3 + 31x_4 \\ -14x_3 + 14x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 32 \\ -14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -31 \\ 14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base para } N_A}$$

Esto es, $N_A = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 32 \\ -14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -31 \\ 14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

El procedimiento usado en el ejemplo 5.7.7 siempre se puede utilizar para encontrar el espacio nulo de una matriz.

Se hace aquí una observación geométrica interesante:

> Todo vector en el espacio de los renglones de una matriz real es ortogonal a todo vector en su espacio nulo.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $\mathbf{r}_i$ denota el i-ésimo renglón de A, se ve de la ecuación anterior que $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{x} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, m$. Así, si $\mathbf{x} \in N_A$, entonces $\mathbf{r}_i \perp \mathbf{x}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$. Pero si $\mathbf{y} \in R_A$, entonces $\mathbf{y} = c_1\mathbf{r}_1 + \cdots + c_m\mathbf{r}_m$, para algunas constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Entonces $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = (c_1\mathbf{r}_1 + c_2\mathbf{r}_2 + \cdots + c_m\mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{x} = c_1\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{x} + c_2\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{x} + \cdots + c_m\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{x} = 0$, lo que prueba la afirmación.

En el ejemplo 5.7.7, $R_A = \text{gen}\,\{(1, 0, -32, 31), (0, 1, 14, -14)\}$ y $N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 32 \\ -14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -31 \\ 14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

El lector debe verificar que los vectores de la base para R_A, en efecto, son ortogonales a los vectores de la base para N_A.

El siguiente teorema da la relación entre el rango y la nulidad.

Teorema 5.7.7

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces

$$\boxed{\rho(A) + \nu(A) = n}$$

Es decir, el rango de A más la nulidad de A es igual al número de columnas de A.

Demostración

Se supone que $k = \rho(A)$ y que las primeras k columnas de A son linealmente independientes. Sea $\mathbf{c}_i$ $(i > k)$ cualquier otra columna de A. Como $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k$ forman una base para C_A, se tiene, para algunos escalares $a_1, a_2, \ldots, a_k$,

$$\mathbf{c}_i = a_1\mathbf{c}_1 + a_2\mathbf{c}_2 + \cdots + a_k\mathbf{c}_k$$

Así, sumando $-a_1\mathbf{c}_1, -a_2\mathbf{c}_2, \ldots, -a_k\mathbf{c}_k$ sucesivamente a la i-ésima columna de A, se obtiene una nueva matriz B de $m \times n$ con $\rho(B) = \rho(A)$ y $\nu(B) = \nu(A)$ con la columna i de B igual a $\mathbf{0}$.* Esto se hace a todas las demás columnas de A (excepto las primeras k) para obtener la matriz

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\rho(D) = \rho(A)$ y $\nu(D) = \nu(A)$. Mediante un posible reacomodo de los renglones de D, se puede suponer que los primeros k renglones son independientes. Después se hace lo mismo con los renglones de D (esto es, sumar múltiplos de los primeros k renglones a los últimos $m - k$) para obtener una nueva matriz:

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\rho(F) = \rho(A)$ y $\nu(F) = \nu(A)$. Ahora es obvio que si $i > k$, entonces $F\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$,* de manera que $E_k = \{\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_{k+2}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente de $n - k$ vectores de N_F. Ahora se demostrará que E_k genera N_F. Sea $\mathbf{x} \in N_F$ un vector de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\mathbf{0} = F\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kk}x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz del sistema homogéneo de $k \times k$ dado es diferente de cero, ya que los renglones de esta matriz son linealmente independientes. De esta forma, la única solución al sistema es $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$. Entonces $\mathbf{x}$ tiene la forma

$$(0, 0, \ldots, 0, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) = x_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + x_{k+2}\mathbf{e}_{k+2} + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

Esto significa que E_k genera N_F, de manera que $\nu(F) = n - k = n - \rho(F)$, lo que completa la prueba.

Nota. Se sabe que $\rho(A)$ es igual al número de pivotes n de la forma escalonada por renglones de A y es igual al número de columnas de la forma escalonada por renglones de A que contienen pivotes. Entonces, del teorema 5.7.7, $\nu(A)$ = número de columnas de la forma escalonada por renglones de A que no contienen pivotes.

EJEMPLO 5.7.8 **Ilustración de que $\rho(A) + \nu(A) = n$**

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ se calculó (en los ejemplos 5.7.1 y 5.7.3) que $\rho(A) = 2$ y $\nu(A) = 1$; esto ilustra que $\rho(A) + \nu(A) = n(=3)$.

EJEMPLO 5.7.9 **Ilustración de que $\rho(A) + \nu(A) = n$**

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ calcule $\nu(A)$.

SOLUCIÓN ► En el ejemplo 5.7.5 se encontró que $\rho(A) = 2$. Así, $\nu(A) = 3 - 2 = 1$. El lector puede demostrar esto directamente resolviendo el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para encontrar que $N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Teorema 5.7.8

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si $\rho(A) = n$.

Demostración

Por el teorema 5.7.1, A es invertible si y sólo si $\nu(A) = 0$. Pero por el teorema 5.7.7, $\rho(A) = n - \nu(A)$. Así, A es invertible si y sólo si $\rho(A) = n - 0 = n$.

Ahora se demostrará la aplicación del concepto de rango para determinar si un sistema de ecuaciones lineales tiene soluciones o si es inconsistente. De nuevo, se considera el sistema de m ecuaciones en n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{5.7.9}$$

lo que se escribe como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Se utiliza el símbolo $(A, \mathbf{b})$ para denotar la matriz aumentada de $m \times (n + 1)$ obtenida (como en la sección 1.2) agregando el vector $\mathbf{b}$ a A.

Teorema 5.7.9

El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene cuando menos una solución si y sólo si $\mathbf{b} \in C_A$. Esto ocurrirá si y sólo si A y la matriz aumentada $(A, \mathbf{b})$ tienen el mismo rango.

Demostración

Si $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ son las columnas de A, entonces podemos escribir el sistema (5.7.9) como

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{b} \tag{5.7.10}$$

El sistema (5.7.10) tendrá solución si y sólo si $\mathbf{b}$ se puede escribir como una combinación lineal de las columnas de A. Es decir, para tener una solución debemos tener $\mathbf{b} \in C_A$. Si $\mathbf{b} \in C_A$, entonces $(A, \mathbf{b})$ tiene el mismo número de columnas linealmente independientes de A, así que A y $(A, \mathbf{b})$ tienen el mismo rango. Si $\mathbf{b} \notin C_A$, entonces $\rho(A, \mathbf{b}) = \rho(A) + 1$ y el sistema no tiene soluciones. Esto completa la prueba.

EJEMPLO 5.7.10 **Uso del teorema 5.7.9 para determinar si un sistema tiene soluciones**

Determine si el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + \ \ 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + \ \ 6x_3 &= 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 40 \end{aligned}$$

tiene soluciones.

SOLUCIÓN ► Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix}$. La forma escalonada por renglones de A es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\rho(A) = 2$. La forma escalonada por renglones de la matriz aumentada $(A, \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right)$ es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, que tiene tres pivotes, por lo que $\rho(A, \mathbf{b}) = 3$ y el sistema no tiene solución.

EJEMPLO 5.7.11 **Uso del teorema 5.7.9 para determinar si un sistema tiene soluciones**

Determine si el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -2 \\ 4x_1 + x_2 + \ \ x_3 &= 6 \end{aligned}$$

tiene soluciones.

SOLUCIÓN ► Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $\det A = 0$, de manera que $\rho(A) < 3$. Como la primera columna no es un múltiplo de la segunda, es evidente que las primeras dos columnas son linealmente independientes; así, $\rho(A) = 2$. Para calcular $\rho(A, \mathbf{b})$ se reduce por renglones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \end{array}\right)$$

Se ve que $\rho(A, \mathbf{b}) = 2$ y existe un número infinito de soluciones para el sistema (si hubiera una solución única se tendría $\det A \neq 0$).

Los resultados de esta sección permiten mejorar el teorema de resumen, visto por última vez en

Teorema 5.7.10 Teorema de resumen (punto de vista 7)

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes diez afirmaciones son equivalentes; es decir, cada una implica a las otras nueve (si una se cumple, todas se cumplen).

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector de dimensión n $\mathbf{b}$.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad, I_n, de $n \times n$.

v) A se puede expresar como el producto de matrices elementales.

vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii) Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.

viii) $\det A \neq 0$.

ix) $\nu(A) = 0$.

x) $\rho(A) = n$.

Más aún, si una de ellas no se cumple, entonces para cada vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones. Tiene un número infinito de soluciones si y sólo si $\rho(A) = \rho(A, \mathbf{b})$.

RESUMEN 5.7

- El **espacio nulo** de una matriz A de $n \times n$ es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$N_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

- La nulidad de una matriz A de $n \times n$ es la dimensión de N_A y se denota por $\nu(A)$.
- Sea A una matriz de $m \times n$. La **imagen de A**, denotado por im$A$, es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ dado por

$$\text{im}A = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ para alguna } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

- El **rango de A**, denotado por $\rho(A)$, es la dimensión de la imagen de A.
- El **espacio de los renglones de A**, denotado por R_A, es el espacio generado por los renglones de A y es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
- El **espacio de las columnas de A**, denotado por C_A es el espacio generado por las columnas de A y es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.
- Si A es una matriz de $m \times n$, entonces

$$C_A = \text{im}A \text{ y } \dim R_A = \dim C_A = \dim \text{im}A = \rho(A)$$

Más aún,

$$\rho(A) + \nu(A) = n$$

- El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución si y sólo si $\rho(A) = \rho(A, \mathbf{b})$, donde $(A, \mathbf{b})$ es la matriz

- *Teorema de resumen*

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector de dimensión n $\mathbf{b}$.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad, I_n, de $n \times n$.

v) A se puede expresar como el producto de matrices elementales.

vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii) Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.

viii) $\det A \neq 0$.

ix) $\nu(A) = 0$.

x) $\rho(A) = n$.

AUTOEVALUACIÓN 5.7

Elija la opción que complete correctamente los siguientes enunciados.

I) El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ es _______.

a) 1 *b*) 2 *c*) 3 *d*) 4

II) La nulidad de la matriz en el problema 1 es _______.

a) 1 *b*) 2 *c*) 3 *d*) 4

III) Si una matriz de 5×7 tiene nulidad 2, entonces su rango es _______.

a) 5 *b*) 3 *c*) 2 *d*) 7

e) No se puede determinar sin más información.

IV) El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ es _______.

a) 1 *b*) 2 *c*) 3

V) La nulidad de la matriz en el problema IV es _______.

a) 0 *b*) 1 *c*) 2 *d*) 3

VI) Si A es una matriz de 4×4 y $\det A = 0$, entonces el valor máximo posible para $\rho(A)$ es _______.

a) 1 *b*) 2 *c*) 3 *d*) 4

VII) En el problema IV, $\dim C_A =$ _______.

VIII) En el problema I, dim R_A = _______.

a) 1 *b*) 2 *c*) 3 *d*) 4

Falso-verdadero

IX) En cualquier matriz de $m \times n$, $C_A = R_A$.

X) En cualquier matriz de $m \times n$, $C_A = \text{im}A$.

Respuestas a la autoevaluación

I) *c*)	**II)** *a*)	**III)** *a*)	**IV)** *a*)	**V)** *b*)
VI) *c*)	**VII)** *a*)	**VIII)** *a*)	**IX)** F	**X)** V

PROBLEMAS 5.7

De los problemas 1 al 21 encuentre el rango y la nulidad de la matriz dada.

1. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -4 \\ 9 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 & -1 \\ 4 & 4 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

De los problemas 22 al 28 encuentre una base para la imagen y el espacio nulo de la matriz dada.

22. La matriz del problema 5.

23. La matriz del problema 7.

24. La matriz del problema 8.

25. La matriz del problema 12.

26. La matriz del problema 15.

27. La matriz del problema 18.

28. La matriz del problema 21.

De los problemas 29 al 33 encuentre una base para el espacio generado por los conjuntos de vectores dados.

29. (2, 0, 3), (−1, 1, 1), (1, 3, 3), (4, 2, 7)

30. (1, −2, 3), (2, −1, 4), (3, −3, 3), (2, 1, 0)

31. (1, −3, −1, −2), (3, 1, −1, 2), (11, −3, −5, 2), (7, 9, −1, 10)

32. (1, −1, 1, −1), (2, 0, 0, 1), (4, −2, 2, 1), (7, −3, 3, −1)

33. (3, 0, −6), (−1, −1, −1), (4, −2, −14)

De los problemas 34 al 38 utilice el teorema 5.7.9 para determinar si el sistema dado tiene alguna solución.

34.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 3 \end{aligned}$$

35.
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - 11x_3 + 3x_4 &= -4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= -5 \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 + 3x_4 &= -2 \\ 4x_1 - x_2 - 11x_3 &= 1 \end{aligned}$$

36.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

37.
$$\begin{aligned} -4x_1 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 - 9x_4 &= -2 \\ 18x_1 + 4x_2 + x_3 - 16x_4 &= -3 \\ -13x_1 - 3x_2 + x_3 + 11x_4 &= -3 \end{aligned}$$

38.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 11x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 7x_1 + 9x_2 - x_3 + 110x_4 &= -5 \end{aligned}$$

39. Demuestre que el rango de una matriz diagonal es igual al número de componentes diferentes de cero en la diagonal.

40. Sea A una matriz triangular inferior de $n \times n$ con ceros en la diagonal. Demuestre que $\rho(A) < n$.

41. Demuestre que si A es una matriz de $m \times n$ y $m < n$, entonces *a*) $\rho(A) \leq m$ y *b*) $\nu(A) \geq n - m$.

42. Demuestre que para cualquier matriz A, $\rho(A) = \rho(A^{\top})$.

43. Sean A y B matrices de $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente. Demuestre que $\rho(AB) \leq \min(\rho(A), \rho(B))$.

44. Sea A una matriz de $m \times n$ y sean B y C matrices invertibles de $m \times m$ y $n \times n$, respectivamente. Pruebe que $\rho(A) = \rho(BA) = \rho(AC)$. Es decir, si se multiplica una matriz por una matriz invertible, el rango no cambia.

***45.** Sean A y B matrices de $m \times n$. Demuestre que si $\rho(A) = \rho(B)$, entonces existen matrices invertibles C y D tales que $B = CAD$.

46. Sea A una matriz de 5×7 con rango 5. Demuestre que el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene cuando menos una solución para cada vector de dimensión 5 $\mathbf{b}$.

47. Suponga que cualesquiera k renglones de A son linealmente independientes mientras que cua-

48. Si $B = CAD$, donde C y D son invertibles, demuestre que $\rho(A) = \rho(B)$.

49. Sea A una matriz de $m \times n$. Suponga que para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ existe una $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ al que $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Demuestre que $\rho(A) = m$.

50. Si A es una matriz de $n \times n$, demuestre que $\rho(A) < n$ si y sólo si existe un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

51. Pruebe que el rango de una matriz es igual al número de pivotes en su forma escalonada por renglones. [*Sugerencia:* Demuestre que si la forma escalonada por renglones tiene k pivotes, entonces dicha forma tiene exactamente k renglones linealmente independientes.]

Ejercicios con MATLAB 5.7

1. Para cada matriz dada:

a) Encuentre una base para el espacio nulo siguiendo el ejemplo 5.7.7. Esto incluye resolver el sistema homogéneo de ecuaciones adecuado.

b) Verifique que el conjunto de vectores obtenido para cada problema es un conjunto independiente.

c) (*Lápiz y papel*) Si el conjunto de vectores ha de ser una base para el espacio nulo, también debe demostrarse que cada vector en el espacio nulo se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de la base. Demuestre que cada vector en el espacio nulo, es decir, cada solución al sistema homogéneo resuelto en el inciso *a*), se puede escribir como una combinación lineal de los vectores encontrados en *a*).

d) Para cada problema, encuentre las dimensiones del espacio nulo. Dé una explicación. ¿Cómo se relaciona la dimensión con el número arbitrario de variables que surgen en la solución del sistema homogéneo resuelto en *a*)?

i)-vi) Problemas 9, 10 y 13 a 17 de la sección 5.7.

vii) $\begin{pmatrix} -6 & -2 & -18 & -2 & -10 \\ -9 & 0 & -18 & 4 & -5 \\ 4 & 7 & 29 & 2 & 13 \end{pmatrix}$

2. *a*) **i)** Para el problema 17 de esta sección, encuentre la base para el espacio nulo siguiendo el ejemplo 5.7.7.

ii) Sea `R = rref(A)`. Verifique que la base consiste en el único vector `B = [-R(1, 4);-R (2, 4);-R(3, 4);1]`.

iii) Verifique que `A*B = 0`. ¿Por qué esperaría esto?

b) **i)** Para la matriz $A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -18 & -2 & -10 \\ -9 & 0 & -18 & 4 & -5 \\ 4 & 7 & 29 & 2 & 13 \end{pmatrix}$ encuentre la base para el espacio nulo.

ii) Sea `R = rref(A)` y sea

`B = [[-R(1,3);-R(2,3);1;0;0] [-R(1,5);-R(2,5);0;-R(3,5);1]]`

Verifique que las columnas de B sean los vectores de la base que encontró en el inciso *b*) i).

c) Para las siguientes matrices A, encuentre `R = rref(A)` y la base para el espacio nulo formando una matriz B, como se ilustra en los ejemplos de los incisos *a*) y *b*). Verifique que `A*B = 0`. (Para ayudar a reconocer el procedimiento para encontrar B, por ejemplo, en *b*), las columnas 3 y 5 de R no tienen pivotes, lo que indica que x_3 y x_5 eran variables arbitrarias. Las columnas 3 y 5 de R *no* son vectores en el espacio nulo, pero se puede encontrar una base para el espacio nulo utilizando adecuadamente los números en las columnas 3 y 5. Observe que la tercera y quinta posiciones en los vectores de la base son 1 o 0.)

i) $A = \begin{pmatrix} -9 & 3 & -8 & -5 & -1 \\ 5 & 0 & -5 & -5 & -3 \\ -7 & 0 & 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

ii) `A = rand(4,6);A(:,4) = 1/3*A(:,2)-2/7*A(:,3)`

3. *a*) MATLAB tiene un comando `null(A)` (`doc null`) que producirá una base para el espacio nulo de A (produce una base ortonormal). Vea en la sección 6.1 una definición de ortonormal.

i) Para cada matriz A en el problema 2 de esta sección de MATLAB, encuentre `N = null(A)`. Encuentre B, la matriz cuyas columnas forman una base para el espacio nulo utilizando el procedimiento del ejemplo 5.7.7.

ii) ¿Cuántos vectores hay en cada base? ¿Qué propiedad confirma este hecho?

iii) Considerando `rref([B N])` y `rref([N B])`, verifique que cada vector en la base para el espacio nulo determinado por el comando `null` es una combinación lineal de los vectores de la base encontrados en las columnas de B, y que cada vector columna en B es una combinación lineal de los vectores de la base encontrado con el comando `null`. Explique su razonamiento y el proceso. Explique por qué esta afirmación debe ser cierta.

b) El algoritmo utilizado por el comando `null` de MATLAB es numéricamente más estable que el proceso que incluye `rref`; es decir, `null` es mejor en cuanto a minimizar los errores de redondeo. Para la matriz A siguiente, encuentre `N = null(A)` y encuentre `B` como en el inciso *a*). Encuentre `A*B` y `A*N` y analice la forma en la cual esto proporciona alguna evidencia para la afirmación hecha al principio del inciso *a*).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 & 9 \\ -3 & 6 & 6 & 3.56 & 3 \\ 4.2 & -8.4 & -10 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Aplicación geométrica del espacio nulo

a) (*Lápiz y papel*) Argumente por qué una base para el espacio nulo de una matriz A de $m \times n$ será una base para el subespacio de todos los vectores en $\mathbb{R}^n$ perpendiculares (ortogonales) a los *renglones* de A.

b) Encuentre una base para el plano formado por todos los vectores perpendiculares a $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) Encuentre una base para la recta perpendicular al plano generado por $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$.

d) Encuentre una base para el subespacio de todos los vectores perpendiculares a

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\5\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\\1\\4\\0\end{pmatrix}\right\}$$

5. Aplicación del espacio nulo a sistemas de ecuaciones

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix}0 & 8 & -6 & -5 & 4 & -4\\ 9 & 2 & 4 & -10 & 9 & 8\\ 5 & 7 & -7 & -2 & -5 & 3\\ 1 & -7 & -8 & -9 & -6 & -7\end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix}46\\29\\0\\-15\end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\\4\\-2\end{pmatrix}$$

a) Demuestre que **x** es una solución al sistema $[A\ \mathbf{b}]$ (utilice la multiplicación de matrices).

b) Encuentre una base para el espacio nulo de A, formando una matriz cuyas columnas sean los vectores de la base.

c) Genere un vector **w** que sea una combinación lineal de los vectores de la base encontrados en el inciso *b*) (utilice la multiplicación de matrices). Demuestre que $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{w}$ es una solución al sistema $[A\ \mathbf{b}]$. Repita para otro vector **w**.

6. Para los siguientes conjuntos de vectores:

a) Sea A la matriz cuyos *renglones* son los vectores. Encuentre `rref(A)`. Utilice el comando `":"` para encontrar la matriz C que consiste sólo de los renglones diferentes de cero de `rref(A)`. Sea `B = C'`. Explique por qué las columnas de B son una base para el espacio generado por los vectores (vea el ejemplo 5.7.6).

b) Verifique que la base encontrada es linealmente independiente.

c) Verifique que cada vector en el conjunto original es una combinación lineal única de los vectores de la base. Describa cualquier patrón que descubra en los coeficientes de las combinaciones lineales.

i) $$\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\4\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ii) $$\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\3\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\7\\2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\1\\4\\1\\5\end{pmatrix}\right\}$$

iii) $$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\-5\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\8\\-2\\3\\3\end{pmatrix}\right\}$$

b) Para las matrices siguientes, encuentre una base para la imagen, formando una matriz cuyas columnas sean los vectores básicos. Verifique que cada columna de la matriz original es una combinación lineal única de los vectores de la base.

i)-iv) Las matrices de los problemas 9 y 15 a 17 de esta sección.

v) `A = round(10*(2*rand(5)-1));A(:,2) = .5*A(:,1); A(:,4) = A(:,1)-1/3*A(:,3)`

8. *a*) Para cada matriz del problema 7 de esta sección de MATLAB, encuentre `rref(A)` y `rref(A')`.

b) Encuentre una base para el espacio de las columnas de A y por lo tanto la dimensión de ese espacio.

c) Encuentre una base para el espacio de los renglones de A y por lo tanto la dimensión de ese espacio.

d) Escriba una conclusión relacionando la dimensión del espacio de las columnas de A con la dimensión del espacio de los renglones de A.

e) ¿Qué tienen en común `rref(A)` y `rref(A')` y cómo se relaciona esto con el inciso *d*)?

9. Este problema explica otra forma de encontrar una base para un espacio generado por vectores de manera que la base consista en un subconjunto del conjunto original de vectores.

a) Recuerde (o resuelva) los problemas 3 y 7 de MATLAB 5.3. Si A es la matriz cuyas columnas son los vectores de un conjunto dado, concluya que las columnas de A correspondientes a las columnas sin pivote, en la forma escalonada reducida por *renglones*, no se necesitan para formar el espacio generado por el conjunto original de vectores.

b) Para los conjuntos de vectores en el problema 6 de esta sección de MATLAB, sea A la matriz cuyas *columnas* son los vectores en el conjunto dado.

i) Usando `rref(A)` para decidir qué vectores del conjunto original se pueden eliminar (no son necesarios), forme una matriz B que sea una submatriz de la A original que consista en el número mínimo de vectores del conjunto original necesarios para formar el espacio generado.

ii) Verifique que el subconjunto elegido (las columnas de la submatriz) sea linealmente independiente.

iii) Verifique que el número de vectores es el mismo que el número de vectores en la base determinada en el problema 6 de esta sección de MATLAB.

iv) Verifique que cada vector en la base encontrada en el problema 6 es una combinación lineal única de la base encontrada en este problema y que cada vector de esta base es una combinación lineal única de la base del problema 6. [*Sugerencia:* Si C es la matriz cuyas columnas son los vectores de la base encontrados en el problema 6, observe `rref([B C])` y `rref([C B])`.]

c) Siga las instrucciones del inciso *b*) para el espacio de las columnas de las matrices en el problema 7 de esta sección de MATLAB.

10. Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$. Suponga que se quiere agregar algunos vectores al conjunto para crear una base para todo $\mathbb{R}^n$ que contenga al conjunto original. Para cada conjunto de vectores dado:

a) Sea A la matriz tal que la columna i de A es igual a $\mathbf{v}_i$. Forma la matriz $B = [A\ I]$, donde I es la matriz identidad de $n \times n$. Verifique que las columnas de B generan a todo $\mathbb{R}^n$.

b) Siga el procedimiento descrito en el problema 9 de esta sección de MATLAB para encontrar

i) Genere tres vectores aleatorios $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ en $\mathbb{R}^5$ utilizando MATLAB (primero verifique que sean linealmente independientes).

ii) En $\mathbb{R}^4$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) (*Lápiz y papel*) Explique por qué este procedimiento siempre dará una base para $\mathbb{R}^n$ que contiene el conjunto original de vectores linealmente independientes.

11. El comando de MATLAB `orth(A)` `(doc orth)` producirá una base para la imagen (espacio de las columnas) de la matriz A. (Produce una base ortogonal.) Para cada matriz del problema 7 de esta sección de MATLAB, utilice `orth(A)` para encontrar una base para el espacio de las columnas de A. Verifique que esta base contiene el mismo número de vectores que la base encontrada en el problema 7 y demuestre que todos los vectores de la base encontrada utilizando `orth` son una combinación lineal de la base encontrada en el problema 7. Demuestre, además, que los vectores de la base del problema 7 son una combinación lineal de la base encontrada con `orth`.

12. Encuentre una base para el espacio generado por los siguientes conjuntos:

a) En P_3: $\{-x^3 + 4x + 3, -x^3 - 1, x^2 - 2x, 3x^2 + x + 4\}$ [vea el problema 5.3.9 de MATLAB].

b) En M_{22}: $\left\{ \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -18 & -18 \\ 29 & -19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \right\}$ [vea el problema 5.3.10 de MATLAB].

13. *a*) Elija un valor para $n \geq 4$ y genere una matriz aleatoria A de $n \times n$ usando MATLAB. Encuentre `rref(A)` y `rank(A)` (el comando `rank(A)` `(doc rank)` encuentra al rango de A). Verifique que A es invertible.

b) Haga `B = A` y cambie una columna de B para que sea una combinación lineal de las columnas anteriores de B. Encuentre `rref(B)` y `rank(B)`. Verifique que B no es invertible.

c) Sea B la matriz del inciso *b*) después del cambio y cambie otra columna de B para que sea una combinación lineal de las columnas anteriores de B. Encuentre `rref(B)` y `rank(B)`. Verifique que B no es invertible.

d) Repita para otras cuatro matrices A (use diferentes valores de n).

e) Con base en la evidencia reunida, obtenga una conclusión sobre la relación entre `rank(A)` y el número de pivotes en `rref(A)`.

f) Dé una conclusión sobre la relación entre `rank(A)`, el tamaño de A y la invertibilidad de A.

g) Forme una matriz de 5×5 con rango 2 y una matriz de 6×6 con rango 4.

14. *a*) Genere tres matrices aleatorias reales de $n \times m$ de tamaños distintos, con m diferente de n. Encuentre `rank(A)` y `rank(A')`.

b) Escoja un valor de n y genere tres matrices reales de $n \times n$, con diferente rango (vea el problema 13 de esta sección de MATLAB). Encuentre `rank(A)` y `rank(A')`. Repita para otro valor de n.

c) Describa la relación entre `rank(A)` y `rank(A')`.

d) Describa la relación entre este problema y el problema 8 de esta sección.

15. Considere el sistema de ecuaciones de los problemas 1 a 3 de MATLAB 1.3. Para dos de los sistemas de cada problema, encuentre el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz au-no una solución. Pruebe su conclusión con algún *otro* sistema en estos problemas. Demuestre su conclusión.

16. Exploración del rango de matrices especiales

a) **Matrices cuadradas mágicas** El comando `magic(n)` `(doc magic)` genera un cuadrado mágico de $n \times n$ (un cuadrado mágico tiene la propiedad de que la suma de las columnas es igual a la suma de los renglones). Genere tres matrices cuadradas mágicas para cada valor de $n = 3, \ldots, 9$ y encuentre sus rangos. ¿Cómo afecta al rango el tamaño de la matriz? Describa los patrones descubiertos.

Nota. Este problema está inspirado en una conferencia dada por Cleve Moler en la *University of New Hampshire* en 1991.

b) Examine el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ y de las siguientes dos matrices con este patrón. Describa el comportamiento del rango de dichas matrices. Pruebe su conclusión. [*Sugerencia:* Observe el renglón $j + 1$ – renglón j.]

c) Genere un vector aleatorio $\mathbf{u}$ de $n \times 1$ y un vector aleatorio $\mathbf{v}$ de $n \times 1$. Forme `A = u*v'`, una matriz aleatoria de $n \times n$. Encuentre el rango de A. Repita para otros tres juegos de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Describa el rango de las matrices formadas de esta manera.

17. Rango y productos de matrices

a) Elija un valor para n y sea A una matriz invertible de $n \times n$. [*Sugerencia:* Vea las matrices invertibles encontradas en problemas anteriores o genere una matriz aleatoria utilizando el comando `rand`. Verifique su invertibilidad.] Genere cuatro matrices de $n \times m$, algunas cuadradas y otras no, con diferentes rangos (vea el problema 13 de esta sección de MATLAB para crear matrices con ciertos rangos). Lleve un registro de cada rango. Para cada B (una de estas matrices), sea `C = A*B`. Encuentre `rank(C)`. Relacione rango (C) con rango (B). Complete la siguiente afirmación: si A es invertible y B tiene rango k, entonces AB tiene rango ______. Describa la relación entre este problema y el problema 10 de MATLAB 5.4.

b) Genere una matriz A de 6×6 con rango 4. Genere matrices aleatorias de $6 \times m$ con diferentes rangos, algunos mayores y otros menores que 4. Para cada B (una de estas cuatro matrices), encuentre `rank(A*B)` y relaciónelo con los rangos de A y B.

c) Repita el inciso *b*) con A, una matriz de 5×7 con rango 3 y matrices B de $7 \times m$.

d) Formule una conclusión relacionando rango (AB) con rango (A) y rango (B).

e) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Encuentre rango (A), rango (B) y rango (AB). Modifique la conclusión del inciso *d*). [*Sugerencia:* Piense en desigualdades.]

PROBLEMA PROYECTO

18. **Ciclos en digráficas** Las gráficas dirigidas, como las que siguen, se usan para describir situaciones físicas. Una de dichas situaciones se refiere a circuitos eléctricos en donde la corriente fluye por las aristas. Al aplicar las leyes de Kirchhoff para determinar la corriente que pasa por cada que es necesario examinar una "base" para los ciclos cerrados, es decir, el mínimo número de ciclos que genera todos los demás.

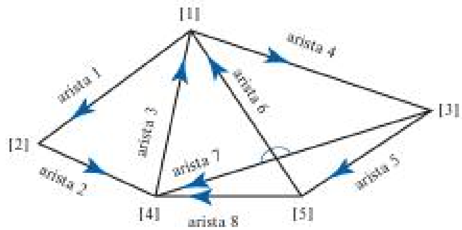
Los diagramas como el que se muestra a continuación reciben el nombre de gráficas dirigidas, o **digráficas**. Un ciclo cerrado en una gráfica dirigida se denomina **ciclo no dirigido**.

a) Cualquier digráfica tiene una matriz asociada denominada **matriz de incidencia nodo-arista**. Se define como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } j \text{ entra al nodo } i \\ -1 & \text{si la arista } j \text{ sale del nodo } i \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Es sencillo establecer (o introducir con MATLAB) una matriz de incidencia nodo-arista observando una arista a la vez (vea el problema 2 de MATLAB 2.1).

Introduzca la matriz de incidencia A para la digráfica siguiente. Observe que cada arista corresponde a una columna de A y que A será una matriz de $n \times m$, donde n es el número de nodos y m el número de aristas.



b) Un ciclo (ciclo cerrado) se puede representar por un vector de $m \times 1$ en donde cada elemento del vector corresponde al coeficiente de una arista. Por ejemplo, un ciclo en la digráfica anterior es: inicio en el nodo [3], luego arista 5, después por la arista 8 y por el opuesto de la arista 7. Esto se puede expresar como arista 5 + arista 8 – arista 7, que se puede representar por el vector $m \times 1$: $(0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ -1\ 1)^t$.

i) Verifique que este vector está en el espacio nulo de A, la matriz de incidencia nodo-arista.

ii) Forme el vector correspondiente al ciclo que va del nodo [1] al nodo [2] al nodo [4] al nodo [3] y de regreso al nodo [1]. Verifique que este vector se encuentra en el espacio nulo de A.

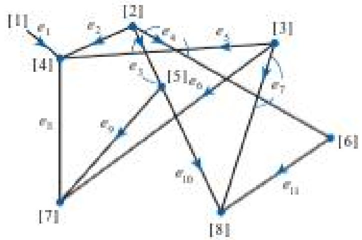
c) Verifique que $\mathbf{x} = (1\ 1\ 2\ 0\ 0\ -1\ 0\ 1)^t$ está en el espacio nulo de A. Demuestre que este vector corresponde al ciclo que comienza en el nodo [1] y sigue arista 1 + arista 2 + arista 3 – arista 6 + arista 8 + arista 3.

d) Encuentre una base para el espacio nulo de A.

e) Para cada vector en la base, identifique el ciclo que corresponde al vector escribiendo las aristas en el orden que siguen. Dibújelo etiquetando las aristas y nodos.

f) Forme una combinación lineal de estos vectores básicos (del espacio nulo de A) usando coeficientes de 1 y –1. Identifique el ciclo que describe esta combinación lineal escribiendo las aristas en el orden que siguen, como se hizo en el inciso *c*). (Dibuje el ciclo.)
Repita para otra combinación lineal.

g) Identifique un ciclo en la digráfica que no esté en la base del espacio nulo o uno de los ciclos descritos en el inciso *f*). Escriba el vector correspondiente en el espacio nulo de A. Encuentre los coeficientes necesarios para expresar el vector como una combinación lineal de los vectores de la base para el espacio nulo. Dibuje (o describa de alguna manera) su ciclo y los ciclos *h*) Para el siguiente diagrama, introduzca la matriz de incidencia nodo-arista y repita los incisos *d*) a *g*) para esta digráfica. La etiqueta e_i se refiere a la arista *i*.



Nota. Este problema fue inspirado en una conferencia dada por Gilbert Strang en la *University of New Hampshire* en junio de 1991.

PROBLEMA PROYECTO

19. Subespacio suma y subespacio intersección Sean V y W subespacios de $\mathbb{R}^n$. El subespacio intersección se define como

$$U = V \cap W = \{\mathbf{z} \text{ en } \mathbb{R}^n \mid \mathbf{z} \text{ está en } V \text{ y } \mathbf{z} \text{ está en } W\}.$$

El subespacio suma se define como

$$S = V + W = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \text{ para alguna } \mathbf{v} \text{ en } V \text{ y alguna } \mathbf{w} \text{ en } W\}.$$

Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es una base para V y $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ es una base para W.

a) (*Lápiz y papel*) Verifique que U y S son subespacios.

b) (*Lápiz y papel*) Verifique que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ genera a S, el subespacio suma.

c) Para cada par de bases de V y W dadas, encuentre una base para $S = V + W$ y encuentre la dimensión de S. Verifique algunas respuestas generando un vector aleatorio en S (genere vectores aleatorios en V y W y súmelos) y demostrando que el vector es una combinación lineal de los vectores de la base que encontró.

i) Base para $V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Para $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ii) Base para $V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ Para $W = \left\{ \begin{pmatrix} -0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 18 \\ 20 \\ -1 \\ -19 \end{pmatrix} \right\}$

iii) Base para $V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right.$

$$\text{Para } W = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 0 \\ 8 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

d) (*Lápiz y papel*) Sea $\overline{V}$ la matriz $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k]$ y sea $\overline{W}$ la matriz $[\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m]$. Sea A la matriz $[\overline{V}\,\overline{W}]$. Suponga que $\mathbf{p}$ es un vector de $(k + m) \times 1$, *en el espacio nulo de A*. Sea $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$, donde $\mathbf{a}$ es de $k \times 1$ y $\mathbf{b}$ es de $m \times 1$.

Demuestre que $\overline{V}\mathbf{a} = -\overline{W}\mathbf{b}$. Haciendo $\mathbf{z} = \overline{V}\mathbf{a}$, explique por qué se puede concluir que $\mathbf{z}$ está en U, la intersección de V y W.

e) (*Lápiz y papel*) Inversamente, suponga que $\mathbf{z}$ está en U, la intersección de V y W.

Explique por qué $\mathbf{z} = \overline{V}\mathbf{x}$ para alguna $\mathbf{x}$ y $\mathbf{z} = \overline{W}\ \mathbf{y}$ para alguna $\mathbf{y}$. Argumente por qué el vector $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix}$ está en el espacio nulo de A.

f) (*Lápiz y papel*) Explique por qué se puede concluir que U, la intersección, es igual a

$$\left\{ \overline{V}\mathbf{a} \;\middle|\; \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \text{ está en el espacio nulo de } A \right\}$$

Concluya que si $\{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_q\}$ está en la base del espacio nulo de A y cada $\mathbf{s}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{b}_i \end{pmatrix}$ donde $\mathbf{a}_i$ es de $k \times 1$ y $\mathbf{b}_i$ es de $m \times 1$, entonces $[\overline{V}\mathbf{a}_1, \ldots, \overline{V}\mathbf{a}_q]$ genera a U.

g) Usando la información del inciso *f*), encuentre una base para $U = V \cap W$ para los pares de bases para V y W dados en el inciso *c*). Para cada par, encuentre la dimensión de U. Verifique algunas respuestas. Verifique que el conjunto de vectores que encontró es linealmente independiente y muestre que una combinación lineal de vectores en el conjunto está en V y en W.

h) Dé una conclusión de su trabajo anterior relacionando las dimensiones de V, W, U y S.

5.8 Fundamentos de la teoría de espacios vectoriales: existencia de una base (opcional)

En esta sección se demuestra uno de los resultados más importantes del álgebra lineal: **todo espacio vectorial tiene una base**. La demostración es más difícil que cualquier otra que hayamos hecho en este libro; incluye conceptos que son parte de los fundamentos de las matemáticas. Se requiere de un esfuerzo para comprender los detalles. Sin embargo, después de hacerlo, podrá tener una apreciación más profunda de lo que constituye una idea matemática esencial.

Comenzaremos por dar algunas definiciones.

Definición 5.8.1

Orden parcial

Sea S un conjunto. Un **orden parcial** de S es una relación, denotada por $\leq$, que está definida

i) $x \leq x$ para todo $x \in S$ **ley reflexiva**

ii) Si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$ **ley antisimétrica**

iii) Si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$ **ley transitiva**

Notación

$x < y$ significa que $x \leq y$ y $x \neq y$.

Puede ocurrir que existan elementos x y y en S tales que no se cumplan $x \leq y$ ni $y \leq x$. Sin embargo, si para cada $x, y \in S$, $x \leq y$ o $y \leq x$, se dice que el orden es un **orden total**. Si $x \leq y$ o $y \leq x$, entonces se dice que x y y son **comparables**.

EJEMPLO 5.8.1 Un orden parcial en $\mathbb{R}$

Los números reales están parcialmente ordenados por $\leq$, donde $\leq$ quiere decir "menor o igual que". El orden en este caso es un orden total.

EJEMPLO 5.8.2 Un orden parcial en un conjunto de subconjuntos

Sea S un conjunto y suponga que $P(S)$, denominado el **conjunto potencia** de S, denota el conjunto de todos los subconjuntos de S.

Se dice que $A \leq B$ si $A \subseteq B$. La relación de inclusión es un orden parcial sobre $P(S)$. Es sencillo probar esto. Se tiene

i) $A \subseteq A$ para todo conjunto A.

ii) $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ si y sólo si $A = B$.

iii) Suponga que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Si $x \in A$, entonces $x \in B$, de manera que $x \in C$. Esto significa que $A \subseteq C$.

A excepción de circunstancias especiales (por ejemplo, si S contiene sólo un elemento), el orden no será un orden total. Esto se ilustra en la figura 5.13.

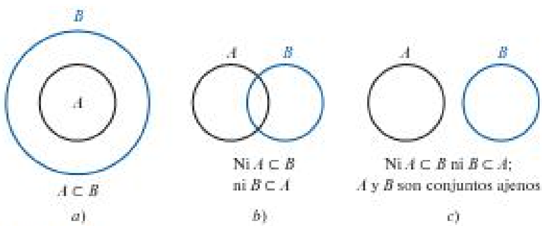


Figura 5.13

Tres posibilidades para la inclusión de conjuntos.

Definición 5.8.2

Cadena, cota superior y elemento maximal

Sea S un conjunto parcialmente ordenado por $\leq$.

i) Un subconjunto T de S se llama **cadena** si es totalmente ordenado; es decir, si x y y son elementos distintos de T, entonces $x \leq y$ o $y \leq x$.

ii) Sea C un subconjunto de S. Un elemento $u \in S$ es una **cota superior** para C si $c \leq u$ para

iii) El elemento $m \in S$ es un **elemento maximal** para S si no existe una $s \in S$ con $m < s$.

Observación 1. En ii), la cota superior para C debe ser comparable con todo elemento en C pero no es necesario que esté en C (aunque debe estar en S). Por ejemplo, el número 1 es una cota superior para el conjunto (0, 1) pero no se encuentra en (0, 1). Cualquier número mayor que 1 es una cota superior. Sin embargo, no existe un número en (0, 1) que sea una cota superior para (0, 1).

Observación 2. Si m es elemento maximal para S, no necesariamente ocurre que $s \leq m$ para toda $s \in S$. De hecho, m puede ser comparable con muy pocos elementos de S. La única condición para la maximalidad es que no exista un elemento de S "mayor que" m.

EJEMPLO 5.8.3 Una cadena de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

Sea $S = \mathbb{R}^2$. Entonces $P(S)$ consiste en subconjuntos del plano xy. Sea $D_r = \{(x, y): x^2 + y^2 < r^2\}$; es decir, D_r es un disco abierto de radio r —el interior del círculo de radio r centrado en el origen—. Sea

$$T = \{D_r: r > 0\}$$

Claramente, T es una cadena, ya que si D_{r_1} y D_{r_2} están en T, entonces

$$D_{r_1} \subseteq D_{r_2} \text{ si } r_1 \leq r_2 \text{ y } D_{r_2} \subseteq D_{r_1} \text{ si } r_2 \leq r_1$$

Antes de seguir, es necesaria una notación nueva. Sea V un espacio vectorial. Se ha visto que una combinación lineal de vectores en V es una suma finita

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n.$$

Si se han estudiado series de potencia, se habrán visto sumas infinitas de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Por ejemplo,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots$$

Aquí se necesita un tipo diferente de suma. Sea C un conjunto de vectores en V.* Para cada $\mathbf{v} \in C$, si $\alpha_\mathbf{v}$ denota un escalar (el conjunto de escalares está dado en la definición de V). Entonces cuando escribimos

$$\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{v} \in C} \alpha_\mathbf{v} \mathbf{v} \tag{5.8.1}$$

se entenderá que sólo un número finito de escalares $\alpha_\mathbf{v}$ son diferentes de cero y que todos los términos con $\alpha_\mathbf{v} = 0$ se dejan fuera de la sumatoria. La suma (5.8.1) se puede describir como sigue:

Para cada $\mathbf{v} \in C$, se asigna un escalar $\alpha_\mathbf{v}$ y se forma el producto $\alpha_\mathbf{v}\mathbf{v}$. Entonces $\mathbf{x}$ es la suma del subconjunto finito de los vectores $\alpha_\mathbf{v}\mathbf{v}$ para el que $\alpha_\mathbf{v} \neq 0$.

Definición 5.8.3

Combinación lineal, conjunto generador, independencia lineal y base

i) Sea C un subconjunto de un espacio vectorial V. Entonces cualquier vector que se puede expresar en la forma (5.8.1) se denomina **combinación lineal** de vectores en C. El conjunto de combinaciones lineales de vectores en C se denota por $L(C)$.

ii) Se dice que el conjunto C **genera** el espacio vectorial V si $V \subseteq L(C)$.

iii) Se dice que un subconjunto C de un espacio vectorial V es **linealmente independiente** si

$$\sum_{v \in C} \alpha_v v = 0$$

se cumple sólo cuando $\alpha_v = 0$ para todo $\mathbf{v} \in C$.

iv) El subconjunto B de un espacio vectorial V es una **base** para V si genera a V y es linealmente independiente.

Observación. Si C contiene sólo un número finito de vectores, estas definiciones son precisamente las que se vieron antes en este capítulo.

Teorema 5.8.1

Sea B un subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial V. Entonces B es una base si y sólo si es maximal; es decir, si $B \subsetneq D$, entonces D es linealmente dependiente.

Demostración

Suponga que B es una base y que $B \subsetneq D$. Seleccione $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x} \in D$ *pero* $\mathbf{x} \notin B$. Como B es una base, $\mathbf{x}$ puede escribirse como una combinación lineal de vectores en B:

$$\mathbf{x} = \sum_{v \in B} \alpha_v v$$

Si $\alpha_v = 0$ para toda $\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y D es dependiente. De otra manera, $\alpha_v \neq 0$ para alguna $\mathbf{v}$, y así la suma

$$\mathbf{x} - \sum_{v \in B} \alpha_v \mathbf{v} = 0$$

demuestra que D es dependiente; por lo tanto, B es maximal.

De forma inversa, suponga que B es maximal. Sea $\mathbf{x}$ un vector en V que no está en B. Sea $D = B \cup \{\mathbf{x}\}$. Entonces D es dependiente (ya que B es maximal) y existe una ecuación

$$\sum_{v \in B} \alpha_v v + \beta \mathbf{x} = 0$$

en la que no todos los coeficientes son cero. Pero $\beta \neq 0$, porque de otra manera se obtendría una contradicción de la independencia lineal de B. Así, se puede escribir

$$\mathbf{x} = -\beta^{-1} \sum_{v \in B} \alpha_v v^*$$

Entonces, B es un conjunto generador y, por lo tanto, es una base para V.

¿Hacia dónde lleva todo esto? Quizá pueda verse la dirección general. Se ha definido el orden en los conjuntos y los elementos maximales. Se ha demostrado que un conjunto linealmente independiente es una base si es maximal. Falta únicamente un resultado que puede ayudar a probar la existencia de un elemento maximal. Ese resultado es una de las suposiciones básicas de las matemáticas.

Muchos de los lectores estudiaron la geometría euclidiana en la secundaria. Tal vez ahí tuvieron su primer contacto con una demostración matemática. Para probar cosas, Euclides hizo ciertas suposiciones que denominó *axiomas*. Por ejemplo, supuso que la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta. Comenzando con estos axiomas, él y sus alumnos de geometría pudieron demostrar muchos teoremas.

En todas las ramas de las matemáticas es necesario tener axiomas. Si no se hace una suposición, no es posible probar nada. Para completar nuestra demostración se necesita el siguiente axioma:

Lema de Zorn*

Si S es un conjunto parcialmente ordenado, no vacío, tal que toda cadena no vacía tiene una cota superior, entonces S tiene un elemento maximal.

Observación. El **axioma de elección** dice, a grandes rasgos, que dado un número (finito o infinito) de conjuntos no vacíos, existe una función que elige un elemento de cada conjunto. Este axioma es equivalente al lema de Zorn; es decir, si se supone el axioma de elección, se puede probar el lema de Zorn y viceversa. Una demostración de esta equivalencia y otros interesantes resultados se pueden encontrar en el excelente libro *Naive Set Theory* de Paul R. Halmos (Nueva York: Van Nostrand, 1960), en especial en la página 63.

Finalmente se puede establecer y probar el resultado central.

Teorema 5.8.2

Todo espacio vectorial V tiene una base.

Demostración

Se quiere demostrar que V tiene un subconjunto linealmente independiente maximal. Esto se hace en varios pasos.

i) Sea S una colección de subconjuntos, todos linealmente independientes, parcialmente ordenados por inclusión.

ii) Una cadena en S es un subconjunto T de S tal que si A y B están en T, $A \subseteq B$ o bien, $B \subseteq A$.

iii) Sea T una cadena. Se define

$$M(T) = \bigcup_{A \in T} A$$

Es evidente que $M(T)$ es un subconjunto de V y $A \subseteq M(T)$ para todo $A \in T$. Se quiere demostrar que $M(T)$ es una cota superior para T. Como $A \subseteq M(T)$ para todo $A \in T$, sólo es necesario demostrar que $M(T) \in S$; es decir, debe demostrarse que $M(T)$ es linealmente independiente.

* Max A. Zorn (1906-1993) pasó varios años en la University of Indiana donde fue profesor emérito hasta su muerte el 9 de marzo de

iv) Suponga que $\sum_{v \in M(T)} \alpha_v v = 0$, donde sólo un número finito de las α_i son diferentes de cero. Se denotan estos escalares por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y a los vectores correspondientes por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Para cada i, $i = 1, 2, \ldots, n$ existe un conjunto $A_i \in T$ tal que $\mathbf{v}_i \in A_i$ (porque cada $\mathbf{v}_i$ está en $M(T)$ y $M(T)$ es la unión de los conjuntos en T). Pero T es totalmente ordenado, de manera que uno de los conjuntos A_i contiene a todos los demás (vea el problema 3 de esta sección); denominados A_k a este conjunto (se puede llegar a esta conclusión sólo porque $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es finito). Así, $A_i \subseteq A_k$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in A_k$. Como A_k es linealmente independiente y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = 0$, se deduce que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Entonces $M(T)$ es linealmente independiente.

v) S es no vacío porque $\varnothing \in S$ ($\varnothing$ denota el conjunto vacío). Se ha demostrado que toda cadena T en S tiene una cota superior, $M(T)$, que está en S. Por el lema de Zorn, S tiene un elemento maximal. Pero S consiste en todos los subconjuntos linealmente independientes de V. El elemento maximal $B \in S$ es, por lo tanto, un subconjunto linealmente independiente maximal de V. Entonces, por el teorema 1, B es una base para V.

PROBLEMAS 5.8

1. Demuestre que todo conjunto linealmente independiente en un espacio vectorial V se puede expandir a una base.

2. Demuestre que todo conjunto generador en un espacio vectorial V tiene un subconjunto que es una base.

3. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n conjuntos en una cadena T. Demuestre que uno de los conjuntos contiene a todos los demás. [*Sugerencia:* Como T es una cadena, $A_1 \subseteq A_2$ o bien $A_2 \subseteq A_1$. Entonces el resultado es cierto si $n = 2$. Complete la prueba por inducción matemática.]

Ejercicios de repaso

De los ejercicios 1 al 14 determine si el conjunto dado es un espacio vectorial. Si lo es, determine su dimensión. Si es finita, encuentre una base para él.

1. Los vectores (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen $\frac{x-2}{-3} = \frac{z+1}{1}$; $y = 4$.
2. Los vectores (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen $x + 2y - z = 0$.
3. Los vectores (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen $x + 2y - z \leq 0$.
4. Los vectores $(x, y, z, w)^T$ en $\mathbb{R}^4$ que satisfacen $x - 2z + 2w = 0$.
5. Los vectores (x, y, z, w) en $\mathbb{R}^4$ que satisfacen $x + y + z + w = 0$.
6. Los vectores en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen $x = 3t$, $y = -2t$, $z = -t$.
7. Los vectores $(x, y, z, w)^T$ en $\mathbb{R}^4$ que satisfacen $x - y + z - 3w + 5 =$
8. El conjunto de matrices triangulares superiores de $n \times n$ bajo las operaciones de suma de matrices y multiplicación por un escalar.

10. El conjunto de polinomios de grado menor o igual a 2.

11. El conjunto de polinomios de grado 5.

12. El conjunto de matrices de 3×2, $A = (a_{ij})$, con $a_{12} = 0$, bajo las operaciones de suma de matrices y multiplicación por un escalar.

13. El conjunto en el ejercicio 10, excepto $a_0 = 0$.

14. El conjunto $S = [f \in C[0, 2]: f(2) = 0]$.

En los ejercicios 15 al 25 determine si el conjunto dado de vectores es linealmente dependiente o independiente.

15. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

22. $\mathbb{P}_2$: $-4x + x^2, -1 - 2x - x^2, 1 - 2x + 3x^2$

23. En $\mathbb{P}_3$: $1, 2 + x^2, 3 - x, 7x^2 - 8x$

24. En $\mathbb{M}_{22}$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

25. En $\mathbb{M}_{22}$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

26. Usando determinantes, establezca si cada conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $(2, 1, 4); (3, -2, 6); (-1, -4, -2)$

c) $(-3, -3, 0, -8), (-5, -2, -3, -14), (-2, 2, 0, 0), (0, -1, -3, -6)$

d) $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 27 al 34 encuentre una base para el espacio vectorial y determine su dimensión.

27. Los vectores en $\mathbb{R}^3$ que están en el plano $3x + 4z = 0$.

30. $H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y - z - 2 = 0\}$ **31.** $\{p \in P_3 : p(1) = 0\}$

32. El conjunto de matrices diagonales de 3×3.

33. $\mathbb{M}_{32}$ **34.** $\mathbb{M}_{23}$

De los ejercicios 35 al 43 encuentre el espacio nulo, la imagen, la nulidad y el rango de la matriz dada.

35. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **36.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ **37.** $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

38. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ **39.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **40.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

41. $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ -8 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ **42.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ **43.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 44 al 48 escriba el vector dado en términos de los vectores básicos dados.

44. En $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

45. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

46. En $\mathbb{P}_2$: $p(x) = x$; $3 + x + x^2$, $1 - x - 2x^2$, $-1 + 2x + x^2$

47. En $\mathbb{M}_{22}$: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

48. En $\mathbb{M}_{22}$: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

CAPÍTULO

6

Shutterstock/Franck Boston

▲ Algunos algoritmos de reconocimiento de patrones tienen que resolver problemas de mínimos cuadrados para poder evaluar si el patrón presentado coincide con el patrón modelo. Aplicaciones de estas técnicas son el reconocimiento facial de individuos, el reconocimiento de huellas dactilares, la identificación de código de barras o aplicaciones de física médica.

Espacios vectoriales con producto interno

Objetivos del capítulo

En este capítulo el estudiante. . .

- Se familiarizará con la forma como la operación de producto interno se introduce a la estructura de espacio vectorial en $\mathbb{R}^n$, y estudiará los conceptos de ortogonalidad y proyecciones, ahora con respecto a espacios vectoriales (sección 6.1).
- Aprenderá a utilizar los resultados de proyecciones en subespacios vectoriales y conocerá la solución de un problema por mínimos cuadrados, que también se puede interpretar como un problema de minimización en varias variables (sección 6.2).
- Utilizando la experiencia de las secciones 6.1 y 6.2, sabrá cómo obtener el resultado general para espacios vectoriales de dimensión infinita (sección 6.3).

6.1 Bases ortonormales y proyecciones en $\mathbb{R}^n$

En $\mathbb{R}^n$ se vio que n vectores linealmente independientes constituyen una base. La base canónica $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es la de mayor uso. Estos vectores tienen dos propiedades:

i) $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ si $i \neq j$

ii) $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$

Definición 6.1.1

Conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$

Se dice que un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ en $\mathbb{R}^n$ es un **conjunto ortonormal** si

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0 \qquad \text{si } i \neq j \tag{6.1.1}$$

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1 \tag{6.1.2}$$

Si sólo se satisface la ecuación (6.1.1) se dice que el conjunto es **ortogonal**.

Como se trabajará ampliamente con el producto escalar en esta sección, recordaremos algunos hechos básicos (vea el teorema 2.2.1). Sin mencionarlos de nuevo en forma explícita, se utilizarán en el resto de esta sección.

Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ están en $\mathbb{R}^n$ y α es un número real, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \tag{6.1.3}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \tag{6.1.4}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \tag{6.1.5}$$

$$(\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \tag{6.1.6}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \tag{6.1.7}$$

Ahora se presenta otra definición útil.

Definición 6.1.2

Longitud o norma de un vector

Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces la **longitud** o **norma** de $\mathbf{v}$, denotada por $|\mathbf{v}|$, está dada por

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \tag{6.1.8}$$

Nota. Si $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Esto significa que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0 \text{ y } \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad \text{si y sólo si } \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{6.1.9}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} \geq 0 \qquad \text{para toda } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \tag{6.1.10}$$

$$|\mathbf{v}| = 0 \qquad \text{si y sólo si } \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{6.1.11}$$

EJEMPLO 6.1.1 **La norma de un vector en $\mathbb{R}^2$**

Sea $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ cumple con la definición usual de longitud de un vector en el plano (vea la ecuación 4.1.1).

EJEMPLO 6.1.2 **La norma de un vector en $\mathbb{R}^3$**

Sea $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ como en la sección 4.3.

EJEMPLO 6.1.3 **La norma de un vector en $\mathbb{R}^5$**

Sea $\mathbf{v} = (2, -1, 3, 4, -6) \in \mathbb{R}^5$, entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{4 + 1 + 9 + 16 + 36} = \sqrt{66}$.

Ahora puede establecerse otra vez la definición 6.1.1:

> Un conjunto de vectores es ortonormal si cualquier par de ellos es ortogonal y cada uno tiene longitud unitaria.

Los conjuntos de vectores ortonormales son bastante sencillos de manejar. Se verá un ejemplo de esta característica en el capítulo 7. Ahora se probará que cualquier conjunto finito de vectores ortogonales diferentes de cero es linealmente independiente.

Teorema 6.1.1

Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un conjunto ortogonal de vectores diferentes de cero, entonces S es linealmente independiente.

Demostración

Suponga que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Entonces, para cualquier $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{0}\cdot\mathbf{v}_i &= (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_i\mathbf{v}_i + \cdots + c_k\mathbf{v}_k)\cdot\mathbf{v}_i \\ &= c_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_i) + c_2(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_i) + \cdots + c_i(\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i) + \cdots + c_k(\mathbf{v}_k\cdot\mathbf{v}_i) \\ &= c_1\,0 + c_2\,0 + \cdots + c_i|\mathbf{v}_i|^2 + \cdots + c_k\,0\; c_i|\mathbf{v}_i|^2 \end{aligned}$$

Como $\mathbf{v}_i \neq 0$ por hipótesis, $|\mathbf{v}_i|^2 > 0$ y se tiene $c_i = 0$. Esto es cierto para $i = 1, 2, \ldots, k$, lo que completa la prueba.

Ahora se verá cómo *cualquier* base en $\mathbb{R}^n$ se puede "convertir" en una base ortonormal. El método descrito a continuación se denomina **proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt**.

Nota

Jörgen Pederson Gram (1850-1916) fue un actuario danés que estuvo muy interesado en la ciencia de la medida. Erhardt Schmidt (1876-1959) fue un matemático alemán.

Teorema 6.1.2 Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea H un subespacio de dimensión m de $\mathbb{R}^n$. Entonces H tiene una base orto-

Nota

Observe que H puede ser $\mathbb{R}^n$ en este teorema. Es decir, $\mathbb{R}^n$ mismo tiene una

Demostración

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ una base de H. Se probará el teorema construyendo una base ortonormal a partir de los vectores en S. Antes de dar los pasos para esta construcción, se observa el hecho sencillo de que un conjunto de vectores linealmente independiente no contiene al vector cero (vea el problema 6.1.25).

Paso 1. Elección del primer vector unitario

Sea
$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \tag{6.1.12}$$

Entonces

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = \left(\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}\right)\left(\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}\right) = \left(\frac{1}{|\mathbf{v}_1|^2}\right)(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) = 1$$

de manera que $|\mathbf{u}_1| = 1$.

Paso 2. Elección de un segundo vector ortogonal a $\mathbf{u}_1$

En la sección 4.2 (teorema 4.2.5) se vio que, en $\mathbb{R}^2$, el vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$. En este caso $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$ es la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$. Esto se ilustra en la figura 6.1.

Resulta que el vector $\mathbf{w}$ obtenido es ortogonal a $\mathbf{v}$ cuando $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ están en $\mathbb{R}^n$ para cualquier $n \geq 2$. Observe que como $\mathbf{u}_1$ es un vector unitario para cualquier vector $\mathbf{v}$, $\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{|\mathbf{u}_1|}\mathbf{u}_1 = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1$.

Sea
$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 \tag{6.1.13}$$

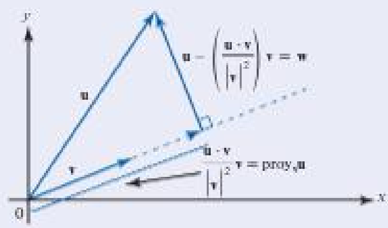


Figura 6.1

El vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$.

entonces
$$\mathbf{v}_2' \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)(1) = 0$$

de manera que $\mathbf{v}'_2$ es ortogonal a $\mathbf{u}_1$. Más aún, por el teorema 6.1.1, $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{v}_2'$ son linealmente independientes; $\mathbf{v}'_2 \neq \mathbf{0}$ porque de otra manera $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \frac{(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)}{|\mathbf{v}_1|}\mathbf{v}_1$, lo que contradice la independencia de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

Paso 3. Elección de un segundo vector unitario

Sea
$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{|\mathbf{v}_2'|} \tag{6.1.14}$$

Entonces es evidente que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es un conjunto ortonormal

Suponga que se han construido los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$ $(k < m)$ y que forman un conjunto ortonormal. Se mostrará cómo construir $\mathbf{u}_{k+1}$.

Paso 4. Continuación del proceso

Sea

$$\mathbf{v}'_{k+1} = \mathbf{v}_{k+1} - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_1) - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 - \cdots - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_k)\,\mathbf{u}_k \tag{6.1.15}$$

entonces para $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_i) - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_i) - \cdots \\ - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i)(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i) - \cdots - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_k)(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_i)\end{aligned}$$

Pero $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_i = 0$ si $j \neq i$ y $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1$. Por tanto,

$$\mathbf{v}'_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i - \mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i = 0$$

Así, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k, \mathbf{v}'_{k+1}\}$ es un conjunto linealmente independiente, ortogonal y $\mathbf{v}'_{k+1} \neq \mathbf{0}$.

Paso 5

Sea $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{v}'_{k+1}/|\mathbf{v}'_{k+1}|$. Entonces es claro que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}\}$ es un conjunto ortonormal, y se puede continuar de esta manera hasta que $k+1 = m$, con lo que se completa la prueba.

Nota. Como cada $\mathbf{u}_i$ es una combinación lineal de vectores $\mathbf{v}_i$, gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ es un subespacio de gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, y como cada espacio tiene dimensión k, los espacios son iguales.

EJEMPLO 6.1.4 Construcción de una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$

Construya una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ comenzando con la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

SOLUCIÓN ► Se tiene $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{2}$, entonces $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$. Entonces

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

Como $|\mathbf{v}'_2| = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\mathbf{u}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

Continuando, se tiene $\mathbf{v}'_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Por último, $|\mathbf{v}'_3| = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, de manera que $\mathbf{u}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Así, una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ es $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Este resultado debe verificarse.

EJEMPLO 6.1.5 Una base ortonormal para un subespacio de $\mathbb{R}^3$

Encuentre una base ortonormal para el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ que está sobre el plano $\pi\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + 3z = 0\right\}$.

SOLUCIÓN ► Como se vio en el ejemplo 5.6.3, una base para este subespacio de dos dimensiones es $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{5}$ y $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Continuando, se define

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{12}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por último, $|\mathbf{v}'_2| = \sqrt{\frac{70}{25}} = \sqrt{\frac{70}{5}}$, de manera que $\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}'_2}{|\mathbf{v}'_2|} = \frac{5}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \ldots \end{pmatrix}$.

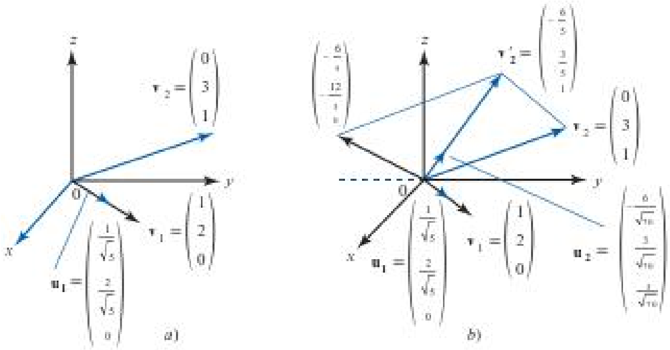


Figura 6.2

Los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ forman una base ortogonal para el plano generado por los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$

De esta forma, una base ortonormal es $\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}\right\}$. Para verificar esta respuesta, se observa que

1) los vectores son ortogonales,
2) cada uno tiene longitud 1 y
3) cada uno satisface $2x - y + 3z = 0$.

En la figura 6.2 *a*) se dibujaron los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{u}_1$. En la figura 6.2 *b*) se dibujaron los vectores $-\begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{12}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ -\frac{12}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ y se sumó a $\mathbf{v}_2$ usando la regla del paralelogramo para obtener $\mathbf{v}'_2 = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$. Por último, $\mathbf{u}_2$ es un vector unitario a lo largo de $\mathbf{v}'_2$.

Ahora se definirá un nuevo tipo de matriz que será muy útil en los capítulos que siguen.

Definición 6.1.3

Matriz ortogonal

Una matriz Q de $n \times n$ se llama **ortogonal** si Q es invertible y

$$\boxed{Q^{-1} = Q^{\top}} \qquad (6.1.16)$$

Observe que si $Q^{-1} = Q^{\top}$, entonces $Q^{\top}Q = I$.

No es difícil construir matrices ortogonales, de acuerdo con el siguiente teorema.

Teorema 6.1.3

La matriz Q de $n \times n$ es ortogonal si y sólo si las columnas de Q forman una base ortonormal

Demostración

Sea

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$Q^{\top} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sea $B = (b_{ij}) = Q^{\top}Q$. Entonces

$$b_{ij} = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + b_{ni}b_{nj} = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j \qquad \textbf{(6.1.17)}$$

donde $\mathbf{c}_i$ denota la i-ésima columna de Q. Si las columnas de Q son ortonormales, entonces

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \qquad \textbf{(6.1.18)}$$

Es decir, $B = I$. Inversamente, si $Q^{\top} = Q^{-1}$, entonces $B = I$ de manera que (6.1.18) se cumple y (6.1.17) muestra que las columnas de Q son ortonormales. Esto completa la prueba.

EJEMPLO 6.1.6 Una matriz ortogonal

Del ejemplo 6.1.4, los vectores $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ forman una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$.

Así, la matriz $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal. Para verificar esto se observa que

$$Q^{\top}Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En la prueba del teorema 6.1.3 se definió $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1$. Pero como se ha visto, $(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \text{proy}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v}_2$ (ya que $|\mathbf{u}_1|^2 = 1$). Ahora se ampliará este concepto de proyección sobre un vector a proyección sobre un subespacio.

Definición 6.1.4

Proyección ortogonal

Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$. Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces la **proyección ortogonal** de $\mathbf{v}$ sobre H, denotada por $\text{proy}_H \mathbf{v}$, está dada por

$$\boxed{\text{proy}_H \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\,\mathbf{u}_k} \qquad (6.1.19)$$

Observe que $\text{proy}_H \mathbf{v} \in H$.

EJEMPLO 6.1.7 Proyección ortogonal de un vector sobre un plano

Encuentre $\text{proy}_\pi \mathbf{v}$, donde π es el plano $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + 3z = 0 \right\}$, y $\mathbf{v}$ es vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN ► Del ejemplo 6.1.5, una base ortonormal para π es $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$.

Entonces

$$\text{proy}_\pi \mathbf{v} = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{-6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} \frac{-6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{24}{70} \\ -\frac{12}{70} \\ -\frac{20}{70} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

La notación de la proyección proporciona una forma conveniente para escribir un vector en $\mathbb{R}^n$ en términos de una base ortonormal.

Teorema 6.1.4

Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\boxed{\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\,\mathbf{u}_k} \qquad (6.1.20)$$

Demostración

Como B es una base, se puede escribir $\mathbf{v}$ de manera única como $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$. Entonces

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_i = c_1(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_i) = c_2(\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_i) + \cdots + c_i(\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_i) + \cdots + c_n(\mathbf{u}_n\cdot\mathbf{u}_i) = c_i$$

ya que los vectores $\mathbf{u}_i$ son ortonormales. Como esto se cumple para $i = 1, 2, \ldots, n$, la demostración queda completa.

EJEMPLO 6.1.8 **Expresión de un vector en términos de una base ortonormal**

Escriba el vector $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ en términos de la base ortonormal $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\right\}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$+ \left[\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} + \frac{6}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

Antes de continuar, es necesario que una proyección ortogonal esté claramente definida, lo que significa que la definición de $\text{proy}_H\,\mathbf{v}$ es independiente de la base ortonormal elegida en H. El siguiente teorema se hace cargo de este problema.

Teorema 6.1.5

Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Suponga que H tiene dos bases ortonormales, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ y $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$. Sea $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_k)\,\mathbf{u}_k$$

Demostración

Elija vectores $\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+2}, \ldots, \mathbf{u}_n$ tales que $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ sea una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$ (esto se puede hacer igual que en la prueba del teorema 6.1.2).† Después $B_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+2}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es también una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$. Para ver esto, observe primero que ninguno de los vectores $\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+2}, \ldots, \mathbf{u}_n$ puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ porque ninguno de estos vectores está en H y $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ es una base para H. Así, B_2 es una base para $\mathbb{R}^n$ porque contiene n vectores linealmente independientes. La oportunidad de los vectores en B_2 se deduce de la manera en que se escogieron ($\mathbf{u}_{k+j}$ es ortogonal a todo vector en H para $j = 1, 2, \ldots, n-k$). Sea $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Entonces del teorema 6.1.4 [ecuación (6.1.20)]

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_k)\,\mathbf{u}_k + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_{k+1})\,\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_n)\,\mathbf{u}_n \\ &= (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_1)\,\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_2)\,\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_k)\,\mathbf{w}_k + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_{k+1})\,\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_n)\,\mathbf{u}_n\end{aligned} \tag{6.1.22}$$

La ecuación (6.1.21) se deduce de la ecuación (6.1.22).

Definición 6.1.5

Complemento ortogonal

Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$. El **complemento ortogonal** de H denotado por $H^\perp$, está dado por

$$H^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}\cdot\mathbf{h} = 0 \text{ para toda } \mathbf{h} \in H\}$$

Teorema 6.1.6

Si H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces

i) $H^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

ii) $H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

iii) $\dim H^\perp = n - \dim H$.

Demostración

i) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en $H^\perp$ y si $\mathbf{h} \in H$, entonces $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot\mathbf{h} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{h} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{h} = 0 + 0 = 0$ y $(\alpha\mathbf{x}\cdot\mathbf{h}) = \alpha(\mathbf{x}\cdot\mathbf{h}) = 0$, de manera que $H^\perp$ es un subespacio.

ii) Si $\mathbf{x} \in H \cap H^\perp$, entonces $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = 0$, de manera que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, lo que muestra que $H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

iii) Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ una base ortonormal para H. Por el resultado del problema 5.5.32, esto puede expandirse a una base B para $\mathbb{R}^n$: $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Utilizando el proceso de Gram-Schmidt, se puede convertir a B en una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$. Igual que en la prueba del teorema 6.1.2, la base que ya es ortonormal $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ no cambia en el proceso y se obtiene la base ortonormal $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. Para completar la prueba es necesario demostrar, únicamente, que $\{\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base para $H^\perp$. Como los vectores $\mathbf{u}_i$ son independientes, debe demostrarse que generan a $H^\perp$. Sea $\mathbf{x} \in H^\perp$; entonces por el teorema 6.1.4

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k)\,\mathbf{u}_k$$
$$+ (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_{k+1})\,\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_n)\,\mathbf{u}_n$$

Sin embargo, $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, ya que $\mathbf{x} \in H^\perp$ y $\mathbf{u}_i \in H$. Por tanto, $\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_{k+1})\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n$. Esto muestra que $\{\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base para $H^\perp$, lo que significa que dim $H^\perp = n - k$.

Los espacios H y $H^\perp$ permiten "descomponer" cualquier vector en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 6.1.7 Teorema de proyección

Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Entonces existe un par único de vectores $\mathbf{h}$ y $\mathbf{p}$ tales que $\mathbf{h} \in H$, $\mathbf{p} \in H^\perp$ y $\mathbf{v} = \mathbf{h} + \mathbf{p}$. En particular, $\mathbf{h} = \text{proy}_H \mathbf{v}$ y $\mathbf{p} = \text{proy}_{H^\perp} \mathbf{v}$, de manera que

$$\mathbf{v} = \mathbf{h} + \mathbf{p} = \text{proy}_H \mathbf{v} + \text{proy}_{H^\perp} \mathbf{v} \tag{6.1.23}$$

Demostración

Sea $\mathbf{h} = \text{proy}_H \mathbf{v}$ y sea $\mathbf{p} = \mathbf{v} - \mathbf{h}$. Por la definición 6.1.4 se tiene $\mathbf{h} \in H$. Ahora se mostrará que $\mathbf{p} \in H^\perp$. Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ una base ortonormal para H. Entonces

$$\mathbf{h} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$$

Sea $\mathbf{x}$ un vector en H. Existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, tales que

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{v} - \mathbf{h}) \cdot \mathbf{x} = [\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k]\\ [\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k]\end{aligned} \tag{6.1.24}$$

Como $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$, es sencillo verificar que el producto escalar (6.1.24) está dado por

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i) - \sum_{i=1}^{k} \alpha(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i) = 0$$

Así, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = 0$ para todo $\mathbf{x} \in H$, lo que significa que $\mathbf{p} \in H^\perp$. Para demostrar que $\mathbf{p} = \text{proy}_{H^\perp} \mathbf{v}$, se amplía $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ a una base ortonormal en $\mathbb{R}^n$: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. Entonces $\{\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base para $H^\perp$, y por el teorema 6.1.4,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\,\mathbf{u}_k + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_{k+1})\,\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_n)\,\mathbf{u}_n\\ &= \text{proy}_H \mathbf{v} + \text{proy}_{H^\perp} \mathbf{v}\end{aligned}$$

Esto prueba la ecuación (6.1.23). Para probar la unicidad, suponga que $\mathbf{v} = \mathbf{h}_1 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{h}_2 - \mathbf{p}_2$, donde $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in H$ y $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in H^\perp$. Entonces $\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$. Pero $\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2 \in H$ y $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 \in H^\perp$, de manera que $\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2 \in H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Así, $\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$, lo que completa la prueba.

EJEMPLO 6.1.9 Descomposición de un vector en $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^3$, sea $\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + 3z = 0 \right\}$. Exprese el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ en términos de $\mathbf{h} + \mathbf{p}$, donde $\mathbf{h} \in \pi$ y $\mathbf{p} \in \pi^\perp$.

SOLUCIÓN ► Una base ortonormal para π es $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} \right\}$, y del ejemplo 6.1.7, $\mathbf{h} = \text{proy}_\pi \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \in \pi$. Entonces

$$\mathbf{p} = \mathbf{v} - \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{7} \\ -\frac{10}{7} \\ \frac{30}{7} \end{pmatrix} \in \pi^\perp.$$

Observe que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{h} = 0$.

El siguiente teorema es muy útil en estadística y otras áreas de aplicación. Se dará una aplicación de este teorema en la siguiente sección y se aplicará una versión amplificada de este resultado en la sección 6.3.

Teorema 6.1.8 Teorema de aproximación de la norma

Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Entonces $\text{proy}_H \mathbf{v}$ es la mejor aproximación para $\mathbf{v}$ en H en el siguiente sentido: si $\mathbf{h}$ es cualquier otro vector en H, entonces

$$\boxed{|\mathbf{v} - \text{proy}_H \mathbf{v}| < |\mathbf{v} - \mathbf{h}|} \qquad \textbf{(6.1.25)}$$

Demostración

Del teorema 6.1.7, $\mathbf{v} - \text{proy}_H \mathbf{v} \in H^\perp$. Se escribe

$$\mathbf{v} - \mathbf{h} = (\mathbf{v} - \text{proy}_H \mathbf{v}) + (\text{proy}_H \mathbf{v} - \mathbf{h})$$

El primer término de la derecha está en $H^\perp$, mientras que el segundo está en H; así, Ahora

$$\begin{aligned}|\mathbf{v}-\mathbf{h}|^2 &= (\mathbf{v}-\mathbf{h})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{h})\\ &= [(\mathbf{v}-\text{proy}_H\,\mathbf{v}) + (\text{proy}_H\,\mathbf{v}-\mathbf{h})]\cdot[(\mathbf{v}-\text{proy}_H\mathbf{v}) + (\text{proy}_H\,\mathbf{v}-\mathbf{h})]\\ &= |\mathbf{v}-\text{proy}_H\,\mathbf{v}|^2 + 2(\mathbf{v}-\text{proy}_H\mathbf{v})\cdot(\text{proy}_H\,\mathbf{v}-\mathbf{h}) + |\text{proy}_H\,\mathbf{v}-\mathbf{h}|^2\\ &= |\mathbf{v}-\text{proy}_H\,\mathbf{v}|^2 + |\text{proy}_H\,\mathbf{v}-\mathbf{h}|^2\end{aligned}$$

Pero $|\text{proy}_H\,\mathbf{v}-\mathbf{h}|^2 > 0$ porque $\mathbf{h} \neq \text{proy}_H\,\mathbf{v}$. Por tanto,

$$|\mathbf{v}-\mathbf{h}|^2 > |\mathbf{v}-\text{proy}_H\mathbf{v}|^2$$

es decir

$$|\mathbf{v}-\mathbf{h}| > |\mathbf{v}-\text{proy}_H\mathbf{v}|$$

Bases ortogonales en $\mathbb{R}^3$ con coeficientes enteros y normas enteras

En ocasiones es útil construir una base ortogonal de vectores donde las coordenadas y la norma de cada vector son enteros. Por ejemplo,

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$$

constituye una base ortogonal en $\mathbb{R}^3$ donde cada vector tiene norma 3. Otro ejemplo es

$$\left\{\begin{pmatrix}12\\4\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-25\\48\\-36\end{pmatrix}\right\}$$

que constituye una base ortogonal en $\mathbb{R}^3$ cuyos vectores tienen normas 13, 5 y 65, respectivamente. Resulta que encontrar una base como ésta en $\mathbb{R}^3$ no es tan difícil como parece. Anthony Osborne y Hans Liebeck abordan este tema en su interesante artículo "Orthogonal Bases of $\mathbb{R}^3$ with Integer Coordinates and Integer Lenghts" en *The American Mathematical Monthly*, vol. 96, núm. 1, enero de 1989, pp. 49-53.

Esta sección se cierra con un teorema importante.

Teorema 6.1.9 Desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$. Entonces

i) $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$. **(6.1.27)**

ii) $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$ sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$ para algún número real λ.

Demostración

i) Si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (o ambos), entonces (6.1.27) se cumple (ambos lados son iguales a 0).

$$0 \leq \left|\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right|^2 = \left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} - \frac{2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}$$

$$= \frac{|\mathbf{u}|^2}{|\mathbf{u}|^2} - \frac{2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} + \frac{|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2} = 2 - \frac{2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

Así, $\frac{2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \leq 2$, de manera que $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \leq 1$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$. En forma similar, comenzando con $0 \leq \left|\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} + \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right|^2$, se llega a $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \geq -1$, o sea, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \geq -|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$. Con estas dos desigualdades se obtiene

$$-|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \leq \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \quad \text{o} \quad |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$

ii) Si $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$, entonces $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\lambda\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}| = |\lambda||\mathbf{v}|^2$ y $|\mathbf{u}||\mathbf{v}| = |\lambda\mathbf{v}||\mathbf{v}| = |\lambda||\mathbf{v}||\mathbf{v}| = |\lambda||\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|$. Inversamente, suponga que $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$ con $\mathbf{u} \neq 0$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Entonces

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = 1, \text{ de manera que } \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \pm 1.$$

Caso 1: $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = 1$. Entonces

$$\left|\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right|^2 = \left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) \overset{\text{como en i)}}{=} 2 - \frac{2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = 2 - 2 = 0$$

Así,

$$\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad \text{o} \quad \mathbf{u} = \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Caso 2: $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = -1$. Entonces

$$\left|\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right|^2 - 2 + \frac{2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = 2 - 2 = 0$$

de manera que

$$\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = -\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = -\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

RESUMEN 6.1

- Los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ en $\mathbb{R}^n$ forman un **conjunto ortogonal** si $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ para $i \neq j$. Si además $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, se dice que el conjunto es **ortonormal**.
- $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}|^{\frac{1}{2}}$ se llama **longitud** o **norma** de $\mathbf{v}$.
- Todo subespacio de $\mathbb{R}^n$ tiene una base ortonormal. El **proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt** se puede utilizar para construir tal base.

- Una matriz de $n \times n$ es ortogonal si y sólo si sus columnas forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$.
- Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con una base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$. Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces la **proyección ortogonal** de $\mathbf{v}$ sobre H, denotada por $\text{proy}_H \mathbf{v}$, está dada por

$$\text{proy}_H \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$$

- Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Entonces el **complemento ortogonal** de H, denotado por $H^{\perp}$, está dado por

$$H^{\perp} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \mathbf{x} \cdot \mathbf{h} = 0 \text{ para todo } \mathbf{h} \in H\}$$

- ***Teorema de proyección***

Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Entonces existe un par único de vectores $\mathbf{h}$ y $\mathbf{p}$ tales que $\mathbf{h} \in H$, $\mathbf{p} \in H^{\perp}$ y

$$\mathbf{v} = \mathbf{h} + \mathbf{p} = \text{proy}_H \mathbf{v} + \text{proy}_{H^{\perp}} \mathbf{v}$$

- ***Teorema de aproximación de la norma***

Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Entonces, en H, $\text{proy}_H\mathbf{v}$ es la mejor aproximación a $\mathbf{v}$ en el siguiente sentido: si $\mathbf{h}$ es cualquier otro vector en H, entonces

$$|\mathbf{v} - \text{proy}_H \mathbf{v}| < |\mathbf{v} - \mathbf{h}|$$

AUTOEVALUACIÓN 6.1

Indique si las siguientes aseveraciones son falsas o verdaderas

I) El conjunto $\{(1, 1), (1, -1)\}$ es un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^2$.

II) El conjunto $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ es un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^2$.

III) Toda base en $\mathbb{R}^n$ se puede convertir en una base ortonormal utilizando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.

IV) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es ortogonal.

V) La matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ es ortogonal.

Elija el inciso que responda la siguiente pregunta

VI) ¿Para cuáles de las siguientes matrices Q^{-1} es igual a $Q^{\top}$?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{6}{\sqrt{40}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{40}} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{6}{\sqrt{40}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-2}{\sqrt{40}} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Respuestas a la autoevaluación

PROBLEMAS 6.1

De los problemas 1 al 18 construya una base ortonormal para el espacio o subespacio vectorial dado.

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. En $\mathbb{R}^2$, comenzando con los vectores básicos $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y = 0\}$.

4. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x - 2y = 0\}$.

5. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: ax + by = 0\}$.

6. En $\mathbb{R}^2$, comenzando con $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ donde $ad - bc \neq 0$.

7. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x + y + z = 0\}$

8. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 2x + y = 0\}$

9. $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x + 2y + 3z = 0\}$

10. $L = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

11. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x = 3t, y = 4t, z = 0; t \in \mathbb{R}\}$

12. $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x = t, y = 2t, z = -2t; t \in \mathbb{R}\}$

13. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x + y + z = 0, 2x - y + 3z = 0\}$

14. $\pi = \{(x, y, z): ax + by + cz = 0\}$, donde $abc \neq 0$

15. $L = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ $abc \neq 0$

16. $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5: 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0\}$

17. $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5: x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, 2x_2 + 3x_4 = 0\}$

18. H es el espacio de soluciones de

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ -2x + 2y - 3z &= 0 \\ 4x - 8y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

19. Encuentre una base ortonormal en $\mathbb{R}^2$ que incluya al vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

20. Encuentre una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ que incluya al vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

***21.** Encuentre una base ortonormal en $\mathbb{R}^4$ que incluya los vectores

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

22. Demuestre que $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal.

23. Demuestre que si P y Q son matrices ortogonales de $n \times n$, entonces PQ es ortogonal.

24. Verifique el resultado del problema 23 con

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-\sqrt{8}}{3} \\ \frac{\sqrt{8}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

25. Demuestre que si Q es una matriz ortogonal simétrica, entonces $Q^2 = I$.

26. Demuestre que si Q es ortogonal, entonces $\det Q = \pm 1$.

27. Demuestre que para cualquier número real t, la matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & \cos t \\ \cos t & -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$ es ortogonal.

28. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$. Pruebe que $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. [*Sugerencia:* Si $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, entonces es sencillo encontrar constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ con $c_i \neq 0$ tales que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.]

De los problemas 29 al 37 se dan un subespacio H y un vector $\mathbf{v}$.

a) Calcule $\text{proy}_H \mathbf{v}$;
b) encuentre una base ortonormal para $H^\perp$;
c) escriba $\mathbf{v}$ como $\mathbf{h} + \mathbf{p}$ donde $\mathbf{h} \in H$ y $\mathbf{p} \in H^\perp$.

29. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \right\}; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

30. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0 \right\}; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

31. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0 \right\}; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

32. $H = [(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0, abc \neq 0; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ c \end{pmatrix}$

33. $H = [(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y - z = 0], \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

34. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \right\}; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

35. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0 \right\}; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

36. $H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4: x = 3t, y = -2t, z = t, w = -t, t \in \mathbb{R}\}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

37. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4: 2x - y + 3z - w = 0 \right\}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

38. Sean $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ dos vectores ortonormales en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| = \sqrt{2}$.

39. Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ son ortonormales, demuestre que

$$|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_n|^2 = |\mathbf{u}_1|^2 + |\mathbf{u}_2|^2 + \cdots + |\mathbf{u}_n|^2 = n$$

40. Encuentre una condición sobre los números a y b tales que $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \right\}$ y $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\}$ forman una base ortonormal en $\mathbb{R}^2$.

41. Demuestre que *cualquier* base ortonormal en $\mathbb{R}^2$ es de una de las formas dadas en el problema 40.

42. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, pruebe que si $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente dependientes.

43. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, pruebe la **desigualdad del triángulo**:

Desigualdad del triángulo

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \le |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$$

[*Sugerencia:* Obtenga la expansión de $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2$.]

44. Suponga que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ (no todos cero) y que

$$|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_k| = |\mathbf{x}_1| + |\mathbf{x}_2| + \cdots + |\mathbf{x}_k|$$

Demuestre que dim gen $\{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_n\} = 1$. [*Sugerencia:* Utilice los resultados de los problemas 42 y 43.]

45. Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortonormal en $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Pruebe que $|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1|^2 + |\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2|^2 + \cdots + |\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_n|^2$. Esta igualdad se conoce como **identidad de Parseval** en $\mathbb{R}^n$.

Identidad de Parseval

46. Demuestre que para cualquier subespacio H de $\mathbb{R}^n$, $(H^\perp)^\perp = H$.

47. Sean H_1 y H_2 dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ y suponga que $H_1^\perp = H_2^\perp$. Demuestre que $H_1 = H_2$.

48. Sean H_1 y H_2 dos subespacios de $\mathbb{R}^n$; demuestre que si $H_1 \subset H_2$, entonces $H_2^\perp \subset H_1^\perp$.

49. Demuestre el **teorema generalizado de Pitágoras**: sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ con $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Entonces

Teorema generalizado de Pitágoras

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$$

Ejercicios con MATLAB 6.1

Recordatorio de MATLAB