

Ejemplo 2

- (a) Calcular las coordenadas esféricas del punto cartesiano $(1, -1, 1)$ y dibujarlo.
- (b) Determinar las coordenadas cartesianas del punto con coordenadas esféricas $(3, \pi/6, \pi/4)$ y dibujarlo.
- (c) Sea el punto con coordenadas cartesianas $(2, -3, 6)$. Hallar sus coordenadas esféricas y dibujarlo.
- (d) Sea el punto con coordenadas esféricas $(1, -\pi/2, \pi/4)$. Determinar sus coordenadas cartesianas y dibujarlo.

Solución

$$(a) \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\theta = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0,955 \approx 54,74^\circ.$$

Véase la Figura 1.4.6(a) y la expresión para θ deducida a partir de la Fórmula (1).

$$(b) x = \rho \sin \phi \cos \theta = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}},$$

$$z = \rho \cos \phi = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Véase la Figura 1.4.6(b).

$$(c) \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$\theta = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{-3}{2}\right) \approx 5,3004 \text{ radianes} \approx 303,69^\circ,$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{6}{7}\right) \approx 0,541 \approx 31,0^\circ.$$

Véase la Figura 1.4.7(a).

$$(d) x = \rho \sin \phi \cos \theta = 1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 0 = 0,$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta = 1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) (-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z = \rho \cos \phi = 1 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Véase la Figura 1.4.7(b).