Los siguientes dos hechos son consecuencia inmediata: primero, como $T(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = T\mathbf{v}_1 - T\mathbf{v}_2$, se tiene que para todo $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en V

$$\boxed{\|T\mathbf{v}_1 - T\mathbf{v}_2\|_W = \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V}$$

Segundo,

Teorema 7.5.6

Sea $T: V \to W$ una isometría. Entonces para todo $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en V

$$\boxed{\langle T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2\rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle} \tag{7.5.8}$$

Es decir, una isometría preserva los productos internos.

Demostración

La demostración del teorema 7.5.6 es idéntica a la prueba del teorema 7.5.2 con productos internos en V y W en lugar de producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

Definición 7.5.3

Espacios vectoriales isométricamente isomorfos

Se dice que dos espacios vectoriales V y W con el mismo conjunto de escalares son **isométricamente isomorfos** si existe una transformación lineal $T: V \to W$ que sea tanto isometría como isomorfismo.

Teorema 7.5.7

Cualesquiera dos espacios reales de dimensión n con producto interno son isométricamente isomorfos.

Demostración

Sean $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ dos bases ortonormales para V y W, respectivamente. Sea $T: V \to W$ la transformación lineal definida por $T\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Si se puede demostrar que T es una isometría, entonces la demostración queda completa, ya que de acuerdo con el razonamiento del teorema 7.5.5 se llega a que T es también un isomorfismo. Sean $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en V. Entonces existen conjuntos de números reales $c_1, c_2, \ldots, c_n$ y $d_1, d_2, \ldots, d_n$ tales que $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$ y $\mathbf{y} = d_1\mathbf{u}_1 + d_2\mathbf{u}_2 + \cdots + d_n\mathbf{u}_n$. Como los $\mathbf{u}_i$ son ortonormales, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n), (d_1\mathbf{u}_1 + d_2\mathbf{u}_2 + \cdots + d_n\mathbf{u}_n)\rangle = c_1d_1 + c_2d_2 + \cdots + c_nd_n$. De manera similar, como $T\mathbf{x} = c_1T\mathbf{u}_1 + c_2T\mathbf{u}_2 + \cdots + c_nT\mathbf{u}_n = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n$, se obtiene $\langle T\mathbf{x}, T\mathbf{y}\rangle = \langle(c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n), (d_1\mathbf{w}_1 + d_2\mathbf{w}_2 + \cdots + d_n\mathbf{w}_n)\rangle = c_1d_1 + c_2d_2 + \cdots + c_nd_n$, porque los $\mathbf{w}_i$ son ortonormales. Esto completa la prueba.

EJEMPLO 7.5.1 Una isometría entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{P}_2[0, 1]$

El teorema 7.5.7 se ilustra mostrando que $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{P}_2[0, 1]$ son isométricamente isomorfos. En $\mathbb{R}^3$ se usa la base estándar $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. En $\mathbb{P}_2$ se usa la base ortonormal $\{1, \sqrt{3}(2x - 1),$