vectorial. Demostrar que $\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es equivalente a $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$, donde C es la curva cerrada obtenida al moverse primero a lo largo de $\mathbf{c}_1$ y luego a lo largo de $\mathbf{c}_2$ en el sentido opuesto.

13. Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria y $\mathbf{T}$ el vector tangente unitario. ¿Qué es $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{s}$?

14. Sea $\mathbf{F} = (z^3 + 2xy)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$. Demostrar que la integral de $\mathbf{F}$ alrededor del perímetro del cuadrado unidad con vértices en $(\pm 1, \pm 1)$ es cero.

15. Usando la trayectoria del Ejercicio 11, obsérvese que una aplicación C^1 $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$ puede tener una imagen que no "parece suave". ¿Podría suceder esto si $\mathbf{c}'(t)$ siempre fuera distinto de cero?

16. ¿Cuál es el valor de la integral de un campo gradiente alrededor de una curva cerrada C?

17. Calcular la integral de línea

$$\int_C 2xyz\, dx + x^2 z\, dy + x^2 y\, dz,$$

donde C es una curva simple orientada que conecta $(1, 1, 1)$ a $(1, 2, 4)$.

18. Supongamos que $\nabla f(x, y, z) = 2xyze^{x^2}\mathbf{i} + ze^{x^2}\mathbf{j} + ye^{x^2}\mathbf{k}$. Si $f(0, 0, 0) = 5$, hallar $f(1, 1, 2)$.

19. Considérese el campo de fuerzas gravitatorio (con $G = m = M = 1$) definido para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Demostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando una partícula se mueve desde (x_1, y_1, z_1) hasta (x_2, y_2, z_2) a lo largo de cualquier trayectoria depende solo de los radios $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

20. Un ciclista sube una montaña siguiendo la trayectoria mostrada en la Figura 7.2.16. Da una vuelta completa alrededor de la montaña hasta alcanzar la cima, siendo su pendiente de subida constante. Durante el trayecto ejerce una fuerza descrita por el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

¿Cuál es el trabajo realizado por el ciclista al viajar desde A hasta B? ¿Qué es poco realista en este modelo de ciclista?

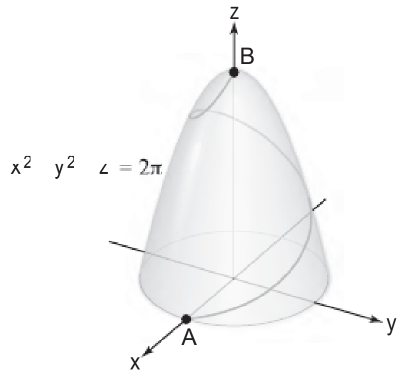

Figura 7.2.16 ¿Cuál es el trabajo realizado al subir esta montaña en bicicleta?

21. Sea $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$ una trayectoria tal que $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$. Recordemos de la Sección 4.1 que cuando se cumple esta condición, se dice que $\mathbf{c}$ es ***regular***. La función f está definida mediante la fórmula $f(x) = \int_a^x \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt$.

(a) ¿Qué es df/dx?

(b) Utilizando la respuesta al apartado (a), demostrar que f: $[a, b] \to [0, L]$, donde L es la longitud de $\mathbf{c}$, tiene una inversa diferenciable g: $[0, L] \to [a, b]$ que satisface $f \circ g(s) = s, g \circ f(x) = x$ (se puede usar el teorema de la función inversa de una variable enunciado al principio de la Sección 3.5.)

(c) Calcular dg/ds.

(d) Recuérdese que se dice que una trayectoria $s \mapsto \mathbf{b}(s)$ tiene rapidez unidad o que está parametrizada por longitud de arco, si $\|\mathbf{b}'(s)\| = 1$. Demostrar que la reparametrización de $\mathbf{c}$ dada por $\mathbf{b}(s) = \mathbf{c} \circ g(s)$ tiene rapidez unidad. Concluir que cualquier trayectoria regular se puede parametrizar mediante la longitud de arco. (Así, por ejemplo, las fórmulas de Frenet del Ejercicio 23 de la Sección 4.2 se pueden aplicar a la reparametrización $\mathbf{b}$.)

22. A lo largo de una "trayectoria termodinámica" C en el espacio (V, T, P):

(i) El calor ganado es $\int_C \Lambda_V\, dV + K_V\, dT$, donde Λ_V, K_V son funciones de (V, T, P), dependiendo del sistema físico concreto.

(ii) El trabajo realizado es $\int_C P\, dV$.