EJEMPLO B.5 Determine las formas polares de los siguientes números complejos: **i)** 1, **ii)** -1, **iii)** i, **iv)** $1 + i$, **v)** $-1 - \sqrt{3}i$ y **vi)** $-2 + 7i$.

SOLUCIÓN ► Los seis puntos están graficados en la figura B.5.

i) De la figura B.5*a*) es evidente que $\arg 1 = 0$. Como $\text{Re } 1 = 1$, se ve que, en forma polar, $1 = 1e^{i0} = 1e^0 = 1$.

ii) Como $\arg(-1) = \pi$ (figura B.5*b*) y $|-1| = 1$, se tiene

$$-1 = 1e^{\pi i} = e^{i\pi}$$

iii) De la figura B.5*c*) se ve que $\arg i = \frac{\pi}{2}$. Puesto que $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, se concluye que

$$i = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

iv) $\arg(1 + i) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right)$ y $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, de manera que

$$1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

v) En este caso, $\tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Sin embargo, $\arg z$ se encuentra en el tercer cuadrante, de manera que $\theta = \frac{\pi}{3} - \pi = \frac{-2\pi}{3}$. Además

$$|-1 - \sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

por lo que

$$-1 - \sqrt{3} = 2e^{\frac{-2\pi i}{2}}$$

vi) Para calcular esto se requiere una calculadora. Se encuentra que, en radianes,

$$\arg z = \tan^{-1}\left(-\frac{7}{2}\right) = \tan^{-1}(-3.5) \approx -1.2925$$

Pero $\tan^{-1} x$ está definida como un número en el intervalo $\left(\frac{-2\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. De la figura B.5*f*), θ está en el segundo cuadrante, por lo que se ve que $\arg z = \pi - \tan^{-1}(3.5) \approx 1.8491$. Después se ve que

$$|-2 + 7i| = \sqrt{(-2)^2 + 7^2} = \sqrt{53}$$

Así,

$$-2 + 7i \approx \sqrt{53}^{1.8491i}$$

EJEMPLO B.6 Convierta los siguientes números complejos de la forma polar a la forma cartesiana **i)** $2e^{\frac{i\pi}{3}}$; **ii)** $4e^{\frac{3\pi i}{2}}$.

SOLUCIÓN ► **i)** $e^{\frac{i\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\text{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$. Entonces $2e^{\frac{i\pi}{3}} = 1 + \sqrt{3}i$.

ii) $e^{\frac{3\pi i}{2}} = \cos 3\frac{\pi}{2} + i\text{sen } 3\frac{\pi}{2} = 0 + i(-1) = -i$. Entonces $4e^{\frac{3\pi i}{2}} = -4i$.

Si $\theta = \arg z$, entonces por la ecuación (B.14), $\arg \bar{z} = -\theta$. Así, puesto que $|\bar{z}| = |z|$,

$$\boxed{\text{Si } z = re^{i\theta}, \text{ entonces } \bar{z} = re^{-i\theta}} \qquad \textbf{(B.18)}$$