Teorema 5.7.4

Si A es una matriz de $m \times n$, entonces

$$\dim R_A = \dim C_A = \dim \operatorname{im} A = \rho(A)$$

Demostración

Se denota por α_{ij} la componente ij de A. Debemos demostrar que $\dim R_A = \dim C_A$. Los renglones de A se denotan por $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$, y sea $k = \dim R_A$. Sea $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_k\}$ una base para R_A. Entonces cada renglón de A se puede expresar como una combinación lineal de los vectores en S, y se tiene, para algunas constantes α_{ij},

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= \alpha_{11}\mathbf{s}_1 + \alpha_{12}\,\mathbf{s}_2 \cdots + \alpha_{1k}\,\mathbf{s}_k \\
\mathbf{r}_2 &= \alpha_{21}\mathbf{s}_1 + \alpha_{22}\,\mathbf{s}_2 \cdots + \alpha_{2k}\,\mathbf{s}_k \\
&\vdots \\
\mathbf{r}_m &= \alpha_{m1}\mathbf{s}_1 + \alpha_{m2}\,\mathbf{s}_2 \cdots + \alpha_{mk}\,\mathbf{s}_k
\end{aligned} \tag{5.7.5}$$

Ahora la componente j de $\mathbf{r}_i$ es α_{ij}. Entonces si se igualan las componentes j de ambos lados de (5.7.5) y se hace $\mathbf{s}_i = (s_{i1}, s_{i2}, \ldots s_{in})$, se obtiene

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \alpha_{11}s_{1j} + \alpha_{12}\,s_{2j} \cdots + \alpha_{1k}s_{kj} \\
a_{2j} &= \alpha_{21}s_{1j} + \alpha_{22}s_{2j} \cdots + \alpha_{2k}\,s_{kj} \\
&\vdots \\
a_{mj} &= \alpha_{m1}s_{1j} + \alpha_{m2}\,s_{2j} \cdots + \alpha_{mk}\,s_{kj}
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} = s_{1j}\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} = s_{2j}\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + s_{kj}\begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix} \tag{5.7.6}$$

Sea $\vec{\alpha}_i$ el vector $\begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix}$. Entonces como el lado izquierdo de (5.7.6) es la columna j de A, se observa que cada columna de A se puede escribir como una combinación lineal de $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_k$, lo que significa que los vectores $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_k$, generan a C_A y

$$\dim C_A \leq k = \dim R_A \tag{5.7.7}$$

Pero la ecuación (5.7.7) se cumple para cualquier matriz A. En particular, se cumple para $A^{\top}$. Pero $C_{A^{\top}} = R_A$ y $R_{A^{\top}} = C_A$. Como de (5.7.7) $\dim C_{A^{\top}} \leq \dim R_{A^{\top}}$, se tiene

$$\dim R_A \leq \dim C_A \tag{5.7.8}$$

Combinando (5.7.7) y (5.7.8) la prueba queda completa.