Así,

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{at} & te^{at} \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}$$

Como lo ilustra el ejemplo 8.7.1, es sencillo calcular e^{At} si A es una matriz diagonal. El ejemplo 1 muestra que si $D = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, entonces

$$e^{Dt} = \text{diag}\,(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$$

En el ejemplo 8.7.2 se calculó e^{At} para la matriz A en la forma canónica de Jordan. Resulta que esto es realmente todo lo que se necesita para poder hacerla, como lo sugiere el siguiente teorema.

Teorema 8.7.2

Sea J la forma canónica de Jordan de una matriz A y sea $J = C^{-1}AC$. Entonces $A = CJC^{-1}$ y

$$\boxed{e^{At} = Ce^{Jt}C^{-1}} \tag{8.7.16}$$

Demostración

Primero se observa que

$$\begin{aligned} A^n &= (CJC^{-1})^n = \overbrace{(CJC^{-1})(CJC^{-1})\cdots(CJC^{-1})}^{n \text{ veces}} \\ &= CJ(C^{-1}C)J(C^{-1}C)J(C^{-1}C)\cdots(C^{-1}C)JC^{-1} \\ &= CJ^nC^{-1} \end{aligned}$$

Sigue entonces que

$$(At)^n = C(Jt)^nC^{-1} \tag{8.7.17}$$

Así,

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + (At) + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots = CIC^{-1} + C(Jt)^nC^{-1} + C\frac{(Jt)}{2!}C^{-1} + \cdots \\ &= C\left[I + (Jt) + \frac{(Jt)^2}{2!} + \cdots\right]C^{-1} = Ce^{Jt}C^{-1} \end{aligned}$$

El teorema 8.7.2 dice que para calcular e^{At} en realidad sólo se necesita calcular e^{Jt}. Cuando J es diagonal (como ocurre con frecuencia), entonces se sabe cómo calcular e^{Jt}. Si A es una matriz de 2×2 que no es diagonalizable, entonces $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ y $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$ como se calculó en el teorema 8.7.2. De hecho, no es difícil calcular e^{Jt} cuando J es una matriz de Jordan. Primero es necesario calcular e^{Bt} para una matriz de bloques B de Jordan. Un método para llevarla a cabo se da en los problemas 8.7.23 al 8.7.25.

A continuación se aplicarán los cálculos a un modelo biológico sencillo de crecimiento de población. Suponga que en un ecosistema existen dos especies que interactúan: S_1 y S_2. Se denotan las