El último paso se basa en que la transpuesta de una matriz triangular superior es triangular inferior y viceversa, y en el hecho de que obtener la transpuesta no cambia las componentes de la diagonal de una matriz.

Si A no se puede escribir como LU, entonces existe una matriz permutación P tal que $PA = LU$. Por lo que se acaba de probar,

$$\det PA = \det (PA)^{\top} = \det (A^{\top}P^{\top})$$

y por el teorema 3.2.1,

$$\det P \det A = \det PA = \det (A^{\top}P^{\top}) = \det A^{\top} \det P^{\top}$$

No es complicado probar (vea el problema 54 de esta sección) que si P es una matriz permutación, entonces $\det P = \det P^{\top}$. Como $\det P = \det P^{\top} = \pm 1$, se concluye que $\det A = \det A^{\top}$.

Observación

Dado que los renglones de una matriz son las columnas de su transpuesta, se deduce que todo lo que se pueda decir sobre los renglones de los determinantes comprenden una segunda forma de simplificar los cálculos de los determinantes. Los resultados se prueban para los renglones. Por lo que se acaba de decir, los teoremas se cumplen también para las columnas.

EJEMPLO 3.2.4 Una matriz y su transpuesta tienen el mismo determinante

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces $A^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y es fácil verificar que $|A| = |A^{\top}| = 16$.

En primera instancia se describen estas propiedades estableciendo un teorema del que se deducen diversos resultados importantes. La demostración de este teorema es difícil y se pospone a la siguiente sección.

Teorema 3.2.5 Teorema básico

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\boxed{\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}} \qquad \textbf{(3.2.2)}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Es decir, **se puede calcular det A expandiendo por cofactores en cualquier renglón de A**. Más aún,

$$\boxed{\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}} \qquad \textbf{(3.2.3)}$$

como la columna j de A es $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, la ecuación (3.2.3) indica que **se puede calcular det A expandiendo por cofactores en cualquier columna de A**.