Ejemplo 12 Una aplicación interesante de la integral de línea es la formulación matemática de la ley de Ampère, que relaciona las corrientes eléctricas con sus efectos magnéticos.[6] Supongamos que $\mathbf{H}$ denota un campo magnético en $\mathbb{R}^3$ y sea C una curva cerrada orientada en $\mathbb{R}^3$. Con las unidades físicas apropiadas, la ley de Ampère establece que

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I,$$

donde I es la corriente neta que atraviesa cualquier superficie acotada por C (véase la Figura 7.2.13).

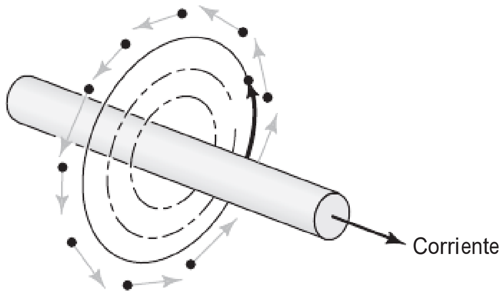

Figura 7.2.13 El campo magnético $\mathbf{H}$ que rodea a un cable por el que circula una corriente I satisface la ley de Ampère: $\int_C \mathbf{H} \cdot d\,\mathbf{s} = I$.

▲

Por último, debemos comentar que la integral de línea tiene otro significado físico importante, concretamente, la interpretación de $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ como *circulación*, donde $\mathbf{V}$ es el campo de velocidades de un fluido, el cual estudiaremos en la Sección 8.2. Por tanto, con la ayuda de las integrales de línea es posible analizar una amplia variedad de conceptos físicos, desde la noción de trabajo hasta los campos electromagnéticos y los movimientos de los fluidos.

Ejercicios

1. Calcular la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot\, ds,$$

donde $\mathbf{F}(x, y) = y^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$ y C es la parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que empieza en $(1, 0)$ y termina en $(0, 1)$, orientada en sentido antihorario.

2. Repetir el Problema 1 para $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$, donde C es la circunferencia unidad completa $x^2 + y^2 = 1$.

3. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de cada una de las siguientes trayectorias:

(a) $\mathbf{c}(t) = (t, t, t), \quad 0 \leq t \leq 1$

(b) $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

(c) $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen} t, 0, \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

(d) $\mathbf{c}(t) = (t^2, 3t, 2t^3), \quad -1 \leq t \leq 2$

4. Calcular las siguientes integrales de línea:

(a) $\int_{\mathbf{c}} x\, dy - y\, dx$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

[6] Alrededor de 1820, Hans Christian Oersted descubrió que las corrientes eléctricas producen efectos magnéticos. Véase cualquier texto de física elemental para ver una exposición sobre los fundamentos físicos de estas ideas.