Obsérvese que cada término en la suma de la fórmula (3) es el valor de $f$ en algún punto $\mathbf{\Phi}(u_i, v_j)$ multiplicado por el área de $S_{ij}$. Compárese esto con la interpretación en función de las sumas de Riemann de la integral a lo largo de una trayectoria que vimos en la Sección 7.1.

Si $S$ es una unión de superficies parametrizadas $S_i$, $i = 1, \ldots, N$, que no se cortan excepto posiblemente a lo largo de las curvas que definen sus fronteras, entonces la integral de $f$ sobre $S$ se define mediante

$$\iint_S f\,dS = \sum_{i=1}^{N} \iint_{S_i} f\,dS,$$

como era de esperar. Por ejemplo, la integral sobre la superficie de un cubo se puede expresar como la suma de las integrales sobre las seis caras.

**Ejemplo 1** Supongamos que un helicoide se describe como en el Ejemplo 2 de la Sección 7.4, y sea $f$ una función dada por $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. Hallar $\iint_S f\,dS$.

**Solución** Como en el Ejemplo 2 de la Sección 7.4,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r, \qquad \frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{\partial(x, z)}{\partial(r, \theta)} = \cos\theta.$$

Además, $f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta) = \sqrt{r^2 + 1}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\iint_S f(x, y, z)\,dS &= \iint_D f(\mathbf{\Phi}(r, \theta))\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\|\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2 + 1}\sqrt{r^2 + 1}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{4}{3}\,d\theta = \frac{8}{3}\pi.\end{aligned}$$

▲

## Integrales de superficie sobre gráficas

Supongamos que $S$ es la gráfica de una función $C^1$ $z = g(x, y)$. Recordemos de la Sección 7.4 que podemos parametrizar $S$ por

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = g(u, v),$$

y que en este caso

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2},$$

de modo que

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \qquad (4)$$