donde $A(D)$ es el área de la región D. Incluso aunque esta desigualdad es obvia, puede ayudarnos a *estimar* las integrales que no se pueden calcular fácilmente *de forma exacta*.

Ejemplo 3 Consideremos la integral

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^6+y^8}}\, dx\, dy,$$

donde D es el cuadrado unidad $[0,1]\times[0,1]$. Puesto que el integrando satisface, para x e y entre 0 y 1,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^6+y^8}} \leq 1,$$

y dado que el cuadrado tiene área igual a 1, obtenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^6+y^8}}\, dx\, dy \leq 1.$$

▲

Igualdad del valor medio

La desigualdad del valor medio puede convertirse en una igualdad cuando f es continua. He aquí el enunciado formal.

Teorema 5 Teorema del valor medio para integrales dobles Supongamos que $f\colon D \to \mathbb{R}$ es continua y que D es una región elemental. Entonces, para algún punto (x_0, y_0) en D, tenemos

$$\iint_D f(x,y)\, dA = f(x_0,y_0)A(D),$$

donde $A(D)$ denota el área de D.

Demostración No podemos probar este teorema de forma rigurosa, ya que requiere algunos conceptos acerca de las funciones continuas que no se demuestran en este curso; no obstante, podemos esbozar las principales ideas que subyacen a la demostración.

Puesto que f es continua en D, tiene un valor máximo M y un valor mínimo m. Por tanto, $m \leq f(x,y) \leq M$ para todo $(x,y) \in D$. Además, $f(x_1,y_1) = m$ y $f(x_2,y_2) = M$ para algún (x_1,y_1) y (x_2,y_2) en D.

Dividiendo entre $A(D)$ la desigualdad (5), tenemos

$$m \leq \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x,y)\, dA \leq M. \tag{6}$$

Como una función continua en D toma todos los valores comprendidos entre sus valores máximo y mínimo (este es el *teorema de los valores intermedios* de dos variables que se demuestra en cálculo avanzado; véase también el Ejercicio de repaso 32) y como por la desigualdad (6) el