$$\begin{aligned}\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt && \text{(por definición)}\\ &= \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}\right]\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt && \text{(cancelando } \|\mathbf{c}'(t)\|) \quad (1)\\ &= \int_a^b [\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{T}(t)]\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt. \end{aligned}$$

Esta fórmula dice que $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ es igual a algo que es similar a la integral de la componente tangencial $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{T}(t)$ de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{c}$. De hecho, la última parte de la fórmula (1) es análoga a la integral de una función escalar f a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}$.[3]

Para calcular una integral de línea en un caso particular, bien podemos utilizar la definición original o bien integrar la componente tangencial de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{c}$, como establece la fórmula (1), dependiendo de que sea más fácil o más apropiado.

Ejemplo 1 Sea $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$ con $0 \le t \le 2\pi$. Sea el campo vectorial $\mathbf{F}$ definido por $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$.

Solución Aquí, $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{F}(\operatorname{sen} t, \cos t, t) = (\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, y $\mathbf{c}'(t) = (\cos t)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Por tanto,

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t) = \operatorname{sen} t\cos t - \cos t\operatorname{sen} t + t = t,$$

y por tanto

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} t\,dt = 2\pi^2.$$

▲

Otra forma común de escribir las integrales de línea es

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz,$$

donde F_1, F_2 y F_3 son las componentes del campo vectorial $\mathbf{F}$. Decimos que la expresión $F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$ es una ***forma diferencial***.[4] Por *definición*, la integral de una forma diferencial a lo largo de una trayectoria $\mathbf{c}$, donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, es

[3]Si $\mathbf{c}$ no se corta a sí misma [es decir, si $\mathbf{c}(t_1) = \mathbf{c}(t_2)$ implica que $t_1 = t_2$], entonces cada punto P sobre C (la curva imagen de $\mathbf{c}$) se puede escribir de forma única como $\mathbf{c}(t)$ para algún t. Si definimos $f(\mathrm{P}) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{c})\cdot\mathbf{T}(t)$, f es una función sobre C; por definición, su integral a lo largo de $\mathbf{c}$ está dada por la fórmula (1) y no existe ninguna dificultad en interpretar literalmente $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ como una integral a lo largo de una trayectoria. Si $\mathbf{c}$ se corta a sí misma, no podemos definir f como una función sobre C como antes (¿por qué?); sin embargo, en este caso sigue siendo útil pensar en el lado derecho de la fórmula (1) como en una integral a lo largo de una trayectoria.

[4]En la Sección 8.5 se proporciona una breve exposición sobre la teoría general de las formas diferenciales.