nuevo $\mathbf{A}$, el nuevo ϕ es $\phi_0 - \partial f/\partial t$; dejamos la verificación como ejercicio para el lector. La condición (10) sobre f se convierte entonces en

$$0 = \nabla \cdot (\mathbf{A}_0 + \nabla f) + \frac{\partial(\phi_0 - \partial f/\partial t)}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \nabla^2 f + \frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

o

$$\nabla^2 f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\left(\nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \frac{\partial \phi_0}{\partial t}\right). \tag{19}$$

Entonces, para poder elegir $\mathbf{A}$ y ϕ que satisfagan $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial\phi/\partial t = 0$, debemos poder resolver la Ecuación (19) para f. En efecto, podemos hacerlo bajo condiciones generales, aunque aquí no lo vamos a probar. La Ecuación (19) se conoce como ***ecuación de ondas no homogénea***.

Si aceptamos que $\mathbf{A}$ y ϕ se pueden elegir para satisfacer $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial\phi/\partial t = 0$, entonces las ecuaciones (16) y (17) para $\mathbf{A}$ y ϕ se convierten en

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{J}; \tag{16$'$}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho. \tag{17$'$}$$

Recíprocamente, si $\mathbf{A}$ y ϕ satisfacen la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial\phi/\partial t = 0, \nabla^2\phi - \partial^2\phi/\partial t^2 = -\rho$ y $\nabla^2 \mathbf{A} - \partial^2 \mathbf{A}/\partial t^2 = -\mathbf{J}$, entonces $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ y $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ satisfacen las ecuaciones de Maxwell. *Este procedimiento entonces "reduce" las ecuaciones de Maxwell a un estudio de la ecuación de ondas.*[7]

Desde el siglo XVIII, se han estudiado soluciones a la ecuación de ondas (estas se estudian en la mayor parte de los cursos sobre ecuaciones diferenciales). Para indicar la naturaleza ondulatoria de las soluciones, observemos por ejemplo que para cualquier función f,

$$\phi(t, x, y, z) = f(x - t)$$

se resuelve la ecuación de ondas $\nabla^2\phi - (\partial^2\phi/\partial t^2) = 0$. Esta solución solo propaga la gráfica de f como una onda; entonces, podemos conjeturar que las soluciones de las ecuaciones de Maxwell tienen naturaleza ondulatoria. Históricamente, todo esto fue el enorme logro de Maxwell, lo que llevó enseguida a Hertz a descubrir las ondas de radio.

Una vez más, las matemáticas muestran su peculiar capacidad no solo para *describir* los fenómenos naturales sino también para *predecirlos*.

[7] Existen algunas variantes de este procedimiento. Para conocer más detalles, véase por ejemplo, *Differential Equations of Applied Mathematics* de G. F. D. Duff y D. Naylor, Wiley, Nueva York, 1966, o cualquier libro sobre teoría electromagnética, tal como *Classical Electrodynamics* de J. D. Jackson, Wiley, Nueva York, 1962.