Solución Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{2t^{3/2}}e^{-x^2/4t} + \frac{1}{t^{1/2}}e^{-x^2/4t}\frac{d}{dt}\left(\frac{-x^2}{4t}\right)\\ &= -\frac{1}{2t^{3/2}}e^{-x^2/4t} + \frac{1}{t^{1/2}}\cdot\frac{x^2}{4t^2}e^{-x^2/4t}\\ &= \frac{1}{2t^{3/2}}\left(-1+\frac{x^2}{2t}\right)e^{-x^2/4t},\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{x}{2t^{3/2}}e^{-x^2/4t}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2t^{3/2}}e^{-x^2/4t} + \frac{x^2}{4t^{(5/2)}}e^{-x^2/4t}\\ &= \frac{\partial u}{\partial t}.\end{aligned}$$

Esta solución se denomina ***solución fundamental*** de la ecuación del calor. ▲

Ejercicios

En los Ejercicios 1 a 6, calcular las derivadas parciales segundas $\partial^2 f/\partial x^2, \partial^2 f/\partial x\,\partial y, \partial^2 f/\partial y\,\partial x, \partial^2 f/\partial y^2$ para cada una de las siguientes funciones. Verificar el Teorema 1 en cada uno de los casos.

1. $f(x,y) = 2xy/(x^2+y^2)^2$, en la región donde $(x,y) \neq (0,0)$

2. $f(x,y,z) = e^z + (1/x) + xe^{-y}$, en la región donde $x \neq 0$

3. $f(x,y) = \cos(xy^2)$

4. $f(x,y) = e^{-xy^2} + y^3x^4$

5. $f(x,y) = 1/(\cos^2 x + e^{-y})$

6. $f(x,y) = \log(x-y)$

7. Hallar todas las derivadas parciales segundas de las siguientes funciones en el punto $\mathbf{x}_0$.

(a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$; $\mathbf{x}_0 = (\pi, 1)$

(b) $f(x,y) = xy^8 + x^2 + y^4$; $\mathbf{x}_0 = (2,-1)$

(c) $f(x,y,z) = e^{xyz}$; $\mathbf{x}_0 = (0,0,0)$

8. Hallar todas las derivadas parciales segundas de $f(x,y) = \sec^3(4y-3x)$.

9. ¿Puede existir una función C^2 $f(x,y)$ con $f_x = 2x - 5y$ y $f_y = 4x + y$?

10. La ecuación de conducción del calor es $u_t = ku_{xx}$. Determinar si $u(x,t) = e^{-kt}\operatorname{sen}(x)$ es una solución.

11. Demostrar que las siguientes funciones satisfacen la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

(a) $f(x,t) = \operatorname{sen}(x-ct)$

(b) $f(x,t) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(ct)$

(c) $f(x,t) = (x-ct)^6 + (x+ct)^6$

12. (a) Demostrar que $T(x,t) = e^{-kt}\cos x$ satisface la ecuación del calor unidimensional

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

(b) Demostrar que $T(x,y,t) = e^{-kt}(\cos x + \cos y)$ satisface la ecuación del calor bidimensional