$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}\, dx\, dy.$$

13. Sea W el primer octante de la bola $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$, donde $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Calcular la integral impropia

$$\iiint_W \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/4}}{\sqrt{z+(x^2+y^2+z^2)^2}}\, dx\, dy\, dz$$

por medio de un cambio de variables.

14. Sea f una función no negativa que puede ser no acotada y discontinua en la frontera de una región elemental D. Sea g una función similar tal que $f(x,y) \leq g(x,y)$ siempre que ambas estén definidas. Supongamos que $\iint_D g(x,y)\, dA$ existe. Razonar informalmente que esto implica la existencia de $\iint_D f(x,y)\, dA$.

15. Utilizar el Ejercicio 14 para demostrar que

$$\iint_D \frac{\operatorname{sen}^2(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dy\, dx$$

existe, donde D es el disco unidad $x^2+y^2 \leq 1$.

16. Sea f como en el Ejercicio 14 y sea g una función tal que $0 \leq g(x,y) \leq f(x,y)$ siempre que ambas estén definidas. Supongamos que $\iint_D g(x,y)\, dA$ no existe. Razonar informalmente por qué $\iint_D f(x,y)\, dA$ no puede existir.

17. Utilizar el Ejercicio 16 para demostrar que

$$\iint_D \frac{e^{x^2+y^2}}{x-y}\, dy\, dx$$

no existe, siendo D el conjunto de puntos (x,y) tales que $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq x$.

18. Sea D la región no acotada definida como el conjunto de puntos (x,y,z) con $x^2+y^2+z^2 \geq 1$. Por medio de un cambio de variables, calcular la integral impropia

$$\iiint_D \frac{dx\, dy\, dz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

19. Calcular

$$\int_0^1 \int_0^y \frac{x}{y}\, dx\, dy \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 \int_x^1 \frac{x}{y}\, dy\, dx.$$

¿Se puede aplicar el teorema de Fubini?

20. En el Ejercicio 17 de la Sección 5.2 demostramos que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy\, dx \neq \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy.$$

Por tanto, el teorema de Fubini no se verifica en este caso, a pesar de que existen ambas integrales impropias iteradas. ¿Qué es lo que falla?

21. Si $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, y si existe la integral impropia de g

$$\iint_D g(x,y)\, dx\, dy,$$

entonces $\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ también existe. Utilizar este hecho y los Ejercicios 5 y 6 para demostrar que si $0 < \alpha, \beta < 1$ y $1 < \gamma, \rho$, entonces existe

$$\iint_D \frac{dx\, dy}{x^\alpha y^\beta + x^\gamma y^\rho}$$

donde $D = [0,\infty) \times [0,\infty)$. [SUGERENCIA: escribir $D = D_1 \cup D_2$ y aplicar el Ejercicio 14 por separado a cada D_i.]

Ejercicios de repaso del Capítulo 6

1. (a) Hallar una transformación lineal que transforme el cuadrado $S = [0,1] \times [0,1]$ en el paralelogramo P con vértices (0, 0), (2, 0), (1, 2), (3, 2).

(b) Dar una fórmula de cambio de variables apropiada para la transformación hallada en el apartado (a).

2. (a) Hallar la imagen del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ por la transformación $T(x,y) = (2x, x+3y)$.