EJEMPLO 8.7.1 Cálculo de e^{At} cuando A es una matriz diagonal

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix}$, …, $A^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 3^m \end{pmatrix}$ y

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 3t \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2^2t^2}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^2t^2}{2!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3!} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2^3t^3}{3!} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^3t^3}{3!} \end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 0 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 + (2t) + \frac{(2t)^2}{2!} + \frac{(2t)^3}{3!} + \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 + (3t) + \frac{(3t)^2}{2!} + \frac{(3t)^3}{3!} + \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 8.7.2 Cálculo de e^{At} cuando A es una matriz de 2×2 que no es diagonalizable

Sea $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Entonces, como se verifica fácilmente,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}, \ldots, A^m = \begin{pmatrix} a^m & ma^{m-1} \\ 0 & a^m \end{pmatrix}, \ldots$$

de manera que

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!} & \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{ma^{m-1}t^m}{m!} \\ 0 & \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!} \end{pmatrix}$$

Ahora bien,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{ma^{m-1}t^m}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}t^m}{m!} = t + at^2 + \frac{a^2t^3}{2!} + \frac{a^3t^4}{3!} + \cdots$$

$$= \left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \cdots\right) = te^{at}$$