Ejemplo 1

$$(1,1,1)+(2,-3,4)=(3,-2,5),$$
$$(x,y,z)+(0,0,0)=(x,y,z),$$
$$(1,7,3)+(a,b,c)=(1+a,7+b,3+c) \quad \blacktriangle$$

El elemento $(0,0,0)$ se denomina ***elemento cero*** (o simplemente ***cero***) de $\mathbb{R}^3$. El elemento $(-a_1,-a_2,-a_3)$ es el ***opuesto*** de (a_1,a_2,a_3), y se escribirá $(a_1,a_2,a_3)-(b_1,b_2,b_3)$ en lugar de $(a_1,a_2,a_3)+(-b_1,-b_2,-b_3)$.

Cuando se suma un vector con su opuesto, el resultado es cero:

$$(a_1,a_2,a_3)+(-a_1,-a_2,-a_3)=(0,0,0).$$

Existen varias operaciones de multiplicación importantes que se definirán en $\mathbb{R}^3$. Una de ellas, el *producto escalar*, asigna un número real a cada par de elementos de $\mathbb{R}^3$. Veremos esto en detalle en la Sección 1.2. Otra de las operaciones de multiplicación en $\mathbb{R}^3$ es la *multiplicación por un escalar* (aquí el término “escalar” es sinónimo de “número real”). Este producto combina escalares (números reales) y elementos de $\mathbb{R}^3$ (ternas ordenadas) para obtener elementos de $\mathbb{R}^3$ de la forma siguiente: dado un escalar α y una terna (a_1,a_2,a_3), definimos la ***multiplicación por un escalar*** como

$$\alpha(a_1,a_2,a_3)=(\alpha a_1,\alpha a_2,\alpha a_3).$$

Ejemplo 2

$$2(4,e,1)=(2\cdot 4,2\cdot e,2\cdot 1)=(8,2e,2),$$
$$6(1,1,1)=(6,6,6),$$
$$1(u,v,w)=(u,v,w),$$
$$0(p,q,r)=(0,0,0) \quad \blacktriangle$$

La suma de ternas y la multiplicación por un escalar satisfacen las siguientes propiedades:

(i) $(\alpha\beta)(a_1,a_2,a_3)=\alpha[\beta(a_1,a_2,a_3)]$ (asociativa)

(ii) $(\alpha+\beta)(a_1,a_2,a_3)=\alpha(a_1,a_2,a_3)+\beta(a_1,a_2,a_3)$ (distributiva)

(iii) $\alpha[(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)]=\alpha(a_1,a_2,a_3)+\alpha(b_1,b_2,b_3)$ (distributiva)

(iv) $\alpha(0,0,0)=(0,0,0)$ (propiedad del cero)

(v) $0(a_1,a_2,a_3)=(0,0,0)$ (propiedad del cero)

(vi) $1(a_1,a_2,a_3)=(a_1,a_2,a_3)$ (propiedad del elemento unidad)

Estas identidades se demuestran directamente a partir de las definiciones de suma y de multiplicación por un escalar. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(a_1,a_2,a_3)&=((\alpha+\beta)a_1,(\alpha+\beta)a_2,(\alpha+\beta)a_3)\\&=(\alpha a_1+\beta a_1,\alpha a_2+\beta a_2,\alpha a_3+\beta a_3)\\&=\alpha(a_1,a_2,a_3)+\beta(a_1,a_2,a_3).\end{aligned}$$

En $\mathbb{R}^2$, la suma y la multiplicación por un escalar se definen como en $\mathbb{R}^3$, suprimiendo la tercera coordenada de cada vector. Todas las propiedades, (i) a (vi), también son válidas.