Demostración

Ya se ha visto que las afirmaciones i), iii), iv) y vi) son equivalentes [teorema 2.4.6]. Se demostrará que ii) y iv) son equivalentes. Además se demostrará que ii) y v) son equivalentes. Suponga que ii) se cumple. Entonces la forma escalonada reducida por renglones de A tiene n pivotes; de otra manera al menos una columna de esta forma no tendría pivote y entonces el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tendría un número infinito de soluciones porque se podría dar un valor arbitrario a la variable correspondiente a esa columna (los coeficientes en la columna son cero). Pero si la forma escalonada reducida por renglones de A tiene n pivotes, entonces se trata de I_n.

Inversamente, suponga que iv) se cumple; esto es, suponga que A es equivalente por renglones a I_n. Entonces por el teorema 2.4.6, inciso i), A es invertible y, por el teorema 2.4.6, inciso iii), la solución única de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Así, ii) y iv) son equivalentes. En el teorema 1.1.1 se demostró que i) y vi) son equivalentes en el caso de 2×2. Se probará la equivalencia de i) y vi) en la sección 3.3. Para mostrar que v) implica ii), si la forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes, es decir, tiene la forma:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2.4.17)}$$

Es decir, R es una matriz con unos en la diagonal y ceros debajo de ella, entonces la única solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial, lo que significa que utilizando operaciones elementales por renglones se puede llevar a la matriz A a su forma escalonada. Para tener solución única en un sistema de ecuaciones homogéneo se deben tener todos los pivotes, lo que muestra que ii) implica v).

Para verificar que $B = A^{-1}$ se debe comprobar que $AB = BA = I$. Resulta que sólo se tiene que hacer la mitad de este trabajo.

Teorema 2.4.8

Sean A y B matrices de $n \times n$. Entonces A es invertible y $B = A^{-1}$ ya sea si i) $BA = I$ o si ii) $AB = I$.

Demostración

i) Se supone que $BA = I$. Considere el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si se multiplican por la izquierda ambos lados de esta ecuación por B, se obtiene

$$BA\mathbf{x} = B\mathbf{0} \qquad \textbf{(2.4.18)}$$

Pero $BA = I$ y $B\mathbf{0} = \mathbf{0}$, de manera que (2.4.18) se convierte en $I\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Esto muestra que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la única solución a $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y por el teorema 2.4.7, incisos i) y ii), esto