16. Demuestre que si una matriz real A de 2×2 tiene vectores característicos ortogonales, entonces A es simétrica.

17. Sea A una matriz real antisimétrica ($A^\top = -A$). Demuestre que todo valor característico de A es de la forma $i\alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$. Es decir, demuestre que todo valor característico de A es un número **imaginario**.

18.** Demuestre que los valores característicos de una matriz hermitiana compleja de $n \times n$ son reales. [Sugerencia:*** Utilice el hecho de que en $\mathbb{C}^n$ $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, A^*\mathbf{y}\rangle$.]

***19.** Si A es una matriz hermitiana de $n \times n$, demuestre que los vectores característicos correspondientes a valores característicos distintos son ortogonales.

****20.** Repitiendo la demostración del teorema 8.4.3, pero sustituyendo $\bar{\mathbf{v}}_i^\top$ por $\mathbf{v}_i^\top$ donde sea adecuado, demuestre que cualquier matriz hermitiana de $n \times n$ tiene n vectores característicos ortonormales.

21. Encuentre una matriz unitaria U tal que U^*AU es diagonal, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 3-2i \\ 3+2i & 0 \end{pmatrix}$.

22. Haga lo mismo que en el problema 21 para $A = \begin{pmatrix} -1 & 2+i \\ 1-2i & 2 \end{pmatrix}$.

23. Demuestre que el determinante de una matriz hermitiana es real.

EJERCICIOS CON MATLAB 8.4

1. ***a)*** (*Lápiz y papel*) Si A es una matriz simétrica *aleatoria* de $n \times$ n, entonces se espera que A tenga valores característicos distintos y que los vectores característicos asociados sean ortogonales. Explique por qué se puede decir que se espera que exista una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$ que consiste en vectores característicos de A.

b) Genere cinco matrices simétricas aleatorias A (no todas del mismo tamaño) generando matrices reales aleatorias B y después formando `A = triu(B) + triu(B)'`. Para cada matriz A generada, verifique lo que se espera según el inciso *a*). Verifique que existe una matriz Q y una matriz diagonal D tales que $A = QDQ^\top$.

2. Si A es una matriz de valores complejos, entonces A^* se puede encontrar como `A'` con MATLAB. Genere una matriz A aleatoria de valores complejos de 4×4 (use `A = B + i*C`, donde B y C son matrices aleatorias de valores reales encontradas con el comando `rand`). Genere la matriz `H = triu(A) + triu(A)'`.

a) Verifique que H es hermitiana. Encuentre los valores característicos de H. Aun cuando H es de valores complejos, ¿qué observa sobre los valores característicos?

b) Repita las instrucciones del problema 1 de esta sección de MATLAB pero cambie la palabra *simétrica* por *hermitiana*, cambie $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{C}^n$ y cambie $Q^\top$ por Q^*.

3. Geometría Suponga que A es una matriz real simétrica de 2×2. Entonces existe una matriz diagonal D y una matriz ortogonal Q tales que $A = QDQ^\top$.

a) (*Lápiz y papel*) Como Q es ortogonal, se tiene que det(Q) es +1 o bien –1. ¿Por qué? Se sabe que si det(Q) = –1, al multiplicar una columna de Q por –1 se produce una nueva Q que todavía es ortogonal pero que tiene det(Q) = 1. ¿Por qué? Explique por qué la nueva Q todavía contiene una base ortonormal de vectores característicos que están en correspondencia correcta con los valores característicos de D de manera que $A = QDQ^\top$ para la nueva Q.

b) (*Lápiz y papel*) Usando los hechos de que Q es ortogonal, que det (Q) = 1 y que un vector de longitud 1 se puede escribir como (cos(θ) sen(θ)) para algún ángulo θ, explique por qué se puede escribir