Demostración

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ una base de H. Se probará el teorema construyendo una base ortonormal a partir de los vectores en S. Antes de dar los pasos para esta construcción, se observa el hecho sencillo de que un conjunto de vectores linealmente independiente no contiene al vector cero (vea el problema 6.1.25).

Paso 1. Elección del primer vector unitario

Sea
$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \tag{6.1.12}$$

Entonces

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = \left(\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}\right)\left(\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}\right) = \left(\frac{1}{|\mathbf{v}_1|^2}\right)(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) = 1$$

de manera que $|\mathbf{u}_1| = 1$.

Paso 2. Elección de un segundo vector ortogonal a $\mathbf{u}_1$

En la sección 4.2 (teorema 4.2.5) se vio que, en $\mathbb{R}^2$, el vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$. En este caso $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$ es la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$. Esto se ilustra en la figura 6.1.

Resulta que el vector $\mathbf{w}$ obtenido es ortogonal a $\mathbf{v}$ cuando $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ están en $\mathbb{R}^n$ para cualquier $n \geq 2$. Observe que como $\mathbf{u}_1$ es un vector unitario para cualquier vector $\mathbf{v}$, $\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}_1|}\mathbf{u}_1 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1$.

Sea
$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 \tag{6.1.13}$$

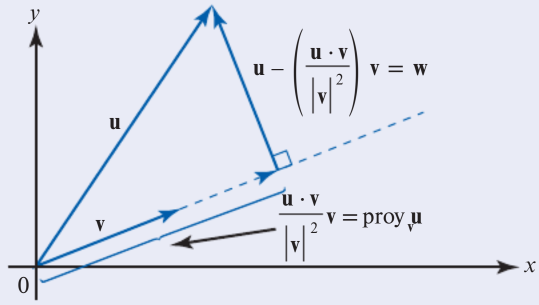

Figura 6.1

El vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$.

entonces
$$\mathbf{v}_2' \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)(1) = 0$$

de manera que $\mathbf{v}'_2$ es ortogonal a $\mathbf{u}_1$. Más aún, por el teorema 6.1.1, $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{v}_2'$ son linealmente independientes; $\mathbf{v}'_2 \neq \mathbf{0}$ porque de otra manera $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \frac{(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)}{|\mathbf{v}_1|}\mathbf{v}_1$, lo que contradice la independencia de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

Paso 3. Elección de un segundo vector unitario

Sea
$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{|\mathbf{v}_2'|} \tag{6.1.14}$$

Entonces es evidente que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es un conjunto ortonormal.