b) Resuelva el sistema usando `z=A\b`. Dé los siguientes comandos

```
tic;z=A\b;toc
tic;z=A\b;t_lu=toc
```

En la variable `t_lu` se guarda el tiempo de ejecución.

c) Compare `x` y `z` calculando `x−z` y despliegue el resultado utilizando `format short e`. Compare los tiempos de ejecución. ¿Cuáles fueron sus hallazgos con estas comparaciones?

d) Repita para una matriz aleatoria de 70×70. ¿Qué otras afirmaciones puede hacer sobre los tiempos de ejecución?

3.5 Demostración de tres teoremas importantes y algo de historia

Antes se citaron tres teoremas que resultan de fundamental importancia en la teoría de matrices determinantes. Las demostraciones de estos teoremas son más complicadas que las demostraciones que ya se analizaron. Trabaje despacio en estas demostraciones; la recompensa será un mejor entendimiento de algunas ideas importantes acerca del álgebra lineal.

Teorema 3.5.1 Teorema básico

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\det A = a_{11}\,\mathrm{A}_{11} + a_{12}\,\mathrm{A}_{12} + \cdots + a_{1n}\,\mathrm{A}_{1n} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\,\mathrm{A}_{1k}$$

$$= a_{i1}\,\mathrm{A}_{i1} + a_{i2}\,\mathrm{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\,\mathrm{A}_{in} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\mathrm{A}_{ik} \qquad \textbf{(3.5.1)}$$

$$= a_{1j}\,\mathrm{A}_{1j} + a_{2j}\,\mathrm{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\,\mathrm{A}_{nj} \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\mathrm{A}_{kj} \qquad \textbf{(3.5.2)}$$

para $i = 1, 2, \ldots , n$ y $j = 1, 2, \ldots , n$.

Nota. La primera igualdad es la definición 3.1.4 del determinante mediante la expansión por cofactores del primer renglón; la segunda igualdad dice que la expansión por cofactores de cualquier otro renglón lleva al determinante; la tercera igualdad dice que la expansión por cofactores de cualquier columna da el determinante. De acuerdo con la observación de la página 193 se necesita, únicamente, probar el teorema para los renglones [ecuación (3.5.1)].

Demostración

Se probará la igualdad (3.5.1) por inducción matemática. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de 2×2, primero se expande por cofactores el primer renglón: $\det A = a_{11}\mathrm{A}_{11} + a_{12}\mathrm{A}_{12} = a_{11}(a_{22}) + a_{12}(-a_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. De este modo, expandiendo en el segundo renglón se obtiene $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} = a_{21}(-a_{12}) + a_{22}(a_{11}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Entonces se obtiene el mismo resultado expandiendo en cualquier renglón de una matriz de 2×2, y esto prueba la igualdad (3.5.1) en el caso 2×2.

Ahora se supone que la igualdad (3.5.1) se cumple para todas las matrices de $(n - 1) \times (n - 1)$. Debe demostrarse que se cumple para las matrices de $n \times n$. El procedimiento será expandir por cofactores los renglones 1 e i, y demostrar que las expansiones son idénticas. La expansión en el primer renglón da el siguiente término general

$$a_{1k}\mathrm{A}_{1k} = (-1)^{i+k} a_{1k}\,|M_{1k}| \qquad \textbf{(3.5.3)}$$