Esto se deduce del teorema de Pitágoras (vea la figura 4.4). Se ha usado la notación $|\mathbf{v}|$ para denotar la magnitud de $\mathbf{v}$. Observe que $|\mathbf{v}|$ es un *escalar*.

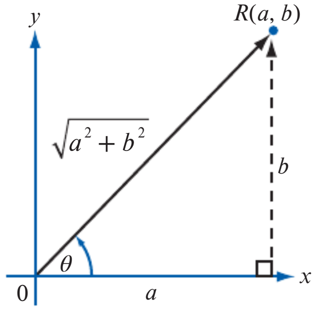

Figura 4.4

La magnitud de un vector con coordenada x igual a a y coordenada y igual a b es $\sqrt{a^2+b^2}$.

EJEMPLO 4.1.1 Cálculo de la magnitud de seis vectores

Nota

$\tan\theta$ es periódica con periodo π. Entonces, si $a \neq 0$, siempre existen *dos* números en $[0, 2\pi)$, tales que $\tan\theta = \frac{b}{a}$. Por ejemplo, $\tan\frac{\pi}{4} = \tan\frac{5\pi}{4} = 1$. Para determinar θ de manera única es necesario determinar el cuadrante de $\mathbf{v}$, como se apreciará en el ejemplo 4.1.2.

Calcule las magnitudes de los vectores i) $\mathbf{v} = (2, 2)$; ii) $\mathbf{v} = (2, 2\sqrt{3})$; iii) $\mathbf{v} = (-2\sqrt{3}, 2)$; iv) $\mathbf{v} = (-3, -3)$; v) $\mathbf{v} = (6, -6)$; vi) $\mathbf{v} = (0, 3)$.

SOLUCIÓN ► i) $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ii) $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2} = 4$

iii) $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2} = 4$

iv) $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

v) $|\mathbf{v}| = \sqrt{6^2+(-6)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

vi) $|\mathbf{v}| = \sqrt{0^2+3^2} = \sqrt{9} = 3$

Dirección de un vector

Se define la **dirección de un vector** $\mathbf{v} = (a, b)$ como el ángulo θ, medido en radianes, que forma el vector con el lado positivo del eje x. Por convención, se escoge θ tal que $0 \leq \theta < 2\pi$. De la figura 4.4 se deduce que si $a \neq 0$, entonces

$$\boxed{\tan\theta = \frac{b}{a}} \tag{4.1.2}$$

Nota

A continuación se presenta la definición del arco tangente con imagen de $[0, 2\pi)$ del cociente de dos números reales a, b, a partir de la función $\tan^{-1}$. que tiene por imagen $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\arctan\left[\frac{b}{a}\right] = \begin{cases} \tan^{-1}\left[\frac{b}{a}\right], & \text{si } a>0, b>0 \\ \tan^{-1}\left[\frac{b}{a}\right]+\pi, & \text{si } a<0 \\ \tan^{-1}\left[\frac{b}{a}\right]+2\pi, & \text{si } a>0, b<0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } a=0, b>0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } a=0, b<0 \end{cases}$$

EJEMPLO 4.1.2 Cálculo de las direcciones de seis vectores

Calcule las direcciones de los vectores en el ejemplo 4.1.1.

SOLUCIÓN ► Estos seis vectores están dibujados en la figura 4.5.

a) $\mathbf{v}$ se encuentra en el primer cuadrante y como $\arctan\theta = \frac{2}{2} = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

b) $\theta = \arctan^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{6} = \arctan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ (ya que $\mathbf{v}$ está en el primer cuadrante).

c) $\mathbf{v}$ está en el segundo cuadrante y como $\arctan^{-1}\frac{2}{2\sqrt{3}} = \arctan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5\pi}{6}$.

d) $\mathbf{v}$ está en el tercer cuadrante y $\arctan^{-1} 1 = \frac{5\pi}{4}$.