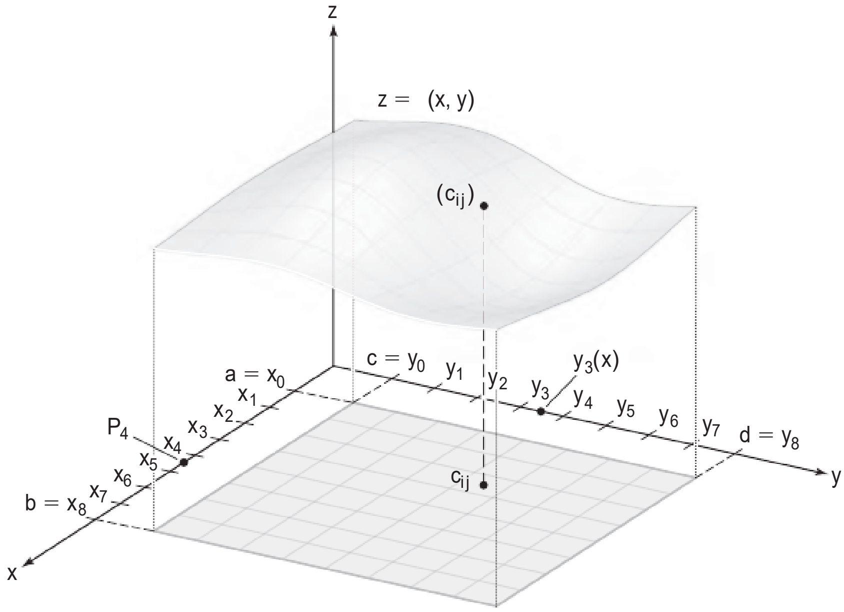


**Figura 5.2.6** Notación necesaria en la demostración del teorema de Fubini: $n = 8$.

donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ es una partición del intervalo $[a, b]$ en $n$ partes iguales y $p_j$ es cualquier punto de $[x_j, x_{j+1}]$. Con $\mathbf{c}_{jk} = (p_j, Y_k(p_j)) \in R_{jk}$, tenemos [sustituyendo $p_j$ por $x$ en la Ecuación (5)]

$$F(p_j) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})(y_{k+1} - y_k).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b F(x)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j)(x_{j+1} - x_j) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})(y_{k+1} - y_k)(x_{j+1} - x_j) \\
&= \iint_R f(x, y)\, dA.
\end{aligned}$$

Luego hemos probado que

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

Utilizando el mismo razonamiento, podemos demostrar que

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

Estas dos conclusiones son exactamente lo que queríamos probar. ■

El teorema de Fubini se puede generalizar al caso en que $f$ no sea necesariamente continua. Aunque no vamos a presentar una demostración, vamos a enunciar aquí una versión más general.