$$\boxed{\text{proy}_H \mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k} \qquad (6.3.6)$$

Las demostraciones de los siguientes teoremas son idénticas a sus contrapartes en $\mathbb{R}^n$ demostrados en la sección 6.1.

Teorema 6.3.3

Sea H un subespacio de espacio de dimensión finita con producto interno V. Suponga que H tiene dos bases ortonormales $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ y $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$. Sea $\mathbf{v} \in V$. Entonces

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_k \rangle \mathbf{w}_k$$

D Definición 6.3.5

Complemento ortogonal

Sea H un subespacio del espacio con producto interno V. Entonces el **complemento ortogonal** de H, denotado por $H^\perp$, está dado por

$$\boxed{H^\perp = \{\mathbf{x} \in V: (\mathbf{x}, \mathbf{h}) = 0 \text{ para toda } \mathbf{h} \in H\}} \qquad (6.3.7)$$

Teorema 6.3.4

Si H es un subespacio del espacio con producto interno V, entonces

i) $H^\perp$ es un subespacio de V.

ii) $H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

iii) $\dim H^\perp = n - \dim H$ si $\dim V = n < \infty$.

Teorema 6.3.5 Teorema de proyección

Sea H un subespacio de dimensión finita del espacio con producto interno V y suponga que $\mathbf{v} \in V$. Entonces existe un par único de vectores $\mathbf{h}$ y $\mathbf{p}$ tales que $\mathbf{h} \in H$, $\mathbf{p} \in H^\perp$, y

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{h} + \mathbf{p}} \qquad (6.3.8)$$

donde $\mathbf{h} = \text{proy}_H \mathbf{v}$.

Si V tiene dimensión finita, entonces $\mathbf{p} = \text{proy}_{H^\perp} \mathbf{v}$.

Observación. Si se estudia la prueba del teorema 6.1.7, se verá que (6.3.8) se cumple incluso si V tiene dimensión infinita. La única diferencia es que si la dimensión de V es infinita, entonces $H^\perp$ tiene dimensión infinita (porque H es de dimensión finita); por consiguiente, $\text{proy}_{H^\perp} \mathbf{v}$ no está definida.