Ejemplo 4 El cubo $[1,2] \times [1,2] \times [1,2]$ tiene una densidad de masa dada por $\delta(x,y,z) = (1+x)e^z y$. Calcular su masa total.

Solución La masa del cubo es, por la Fórmula (6),

$$\int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 (1+x)e^z y\, dx\, dy\, dz = \int_1^2 \int_1^2 \left[\left(x + \frac{x^2}{2}\right) e^z y\right]_{x=1}^{x=2} dy\, dz$$

$$= \int_1^2 \int_1^2 \frac{5}{2} e^z y\, dy\, dz = \int_1^2 \frac{15}{4} e^z\, dz = \left[\frac{15}{4} e^z\right]_{z=1}^{z=2} = \frac{15}{4}(e^2 - e).$$

▲

Si tanto una región como su densidad de masa son simétricas respecto a un plano, el centro de masa caerá en ese plano. Por ejemplo, en la Fórmula (7) para $\overline{x}$, si la región y la densidad de masa son ambas simétricas respecto al plano yz, entonces el integrando es impar en x y, por tanto, $\overline{x} = 0$. Esta forma de usar la simetría se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 5 Hallar el centro de masa de la región hemisférica W definida por las desigualdades $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$. (Se supone que la densidad es igual a 1).

Solución Por simetría, el centro de masa debe caer en el eje z, por lo que $\overline{x} = \overline{y} = 0$. Para hallar $\overline{z}$, debemos calcular, por la Fórmula (7), el numerador $I = \iiint_W z\, dx\, dy\, dz$. La semiesfera es una región elemental, por lo que la integral es

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} z\, dx\, dy\, dz.$$

Dado que z es constante en las integraciones respecto de x e y, podemos extraerla de los dos primeros signos de integración, obteniendo

$$I = \int_0^1 z \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} dx\, dy \right) dz.$$

En vez de calcular explícitamente las dos integrales interiores, nos fijamos en que son iguales a la integral doble $\iint_D dx\, dy$ sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 1 - z^2$, considerado como región x-simple del plano. El área de este disco es $\pi(1 - z^2)$, por lo que

$$I = \pi \int_0^1 z(1 - z^2)\, dz = \pi \int_0^1 (z - z^3)\, dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

El volumen de la semiesfera es $\frac{2}{3}\pi$, de modo que $\overline{z} = (\pi/4)/(\frac{2}{3}\pi) = \frac{3}{8}$.

▲