$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) &= 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

En el Teorema 11 teníamos la condición $\partial F/\partial z \neq 0$. La condición apropiada para el teorema general de la función implícita es que $\Delta \neq 0$,[15] donde Δ es el determinante de la matriz $m \times m$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{bmatrix}$$

evaluada en el punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$; en un entorno de dicho punto, podemos resolver de manera única $\mathbf{z}$ en función de $\mathbf{x}$.

Teorema 12 Teorema general de la función implícita Si $\Delta \neq 0$, entonces cerca del punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$, la Ecuación (3) define de manera única funciones (suaves)

$$z_i = k_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Sus derivadas se pueden calcular por derivación implícita.

[14]Pueden encontrarse tres demostraciones diferentes del caso general en:

(a) E. Goursat, *A Course in Mathematical Analysis*, I, Dover, Nueva York, 1959, p. 45. (Esta demostración deduce el teorema general mediante aplicaciones sucesivas del Teorema 11.)
(b) T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2ª ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.
(c) J. E. Marsden y M. Hoffman, *Elementary Classical Analysis*, 2ª ed., Freeman, Nueva York, 1993.

De estas fuentes, las dos últimas utilizan ideas más sofisticadas que no se suelen abordar hasta un curso avanzado de análisis. No obstante, los lectores con conocimientos de álgebra lineal podrán comprender fácilmente la primera de ellas.

[15]Para los estudiantes que hayan cursado álgebra lineal: la condición $\Delta \neq 0$ tiene una interpretación simple en el caso en que F *sea lineal*; en concreto, $\Delta \neq 0$ es equivalente a que el rango de F sea igual a m, lo que a su vez es equivalente al hecho de que el espacio de soluciones de $F = 0$ es m-dimensional.