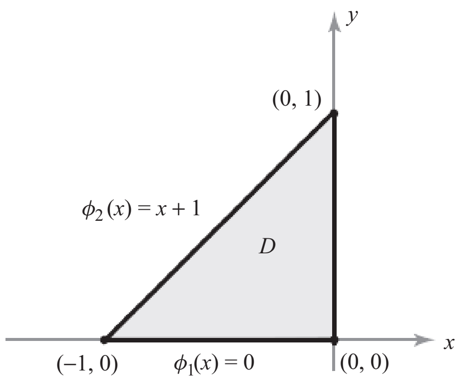

Figura 5.3.8 La base del tetraedro de la Figura 5.3.7 representada como una región *y*-simple.

Utilizando la fórmula (1) con $\phi_1(x) = 0$ y $\phi_2(x) = x + 1$, tenemos

$$\begin{aligned}\iint_D (1 - y + x)\, dA &= \int_{-1}^{0} \int_{0}^{1+x} (1 - y + x)\, dy\, dx \\ &= \int_{-1}^{0} \left[(1+x)y - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1+x} dx \\ &= \int_{-1}^{0} \left[\frac{(1+x)^2}{2}\right] dx = \left[\frac{(1+x)^3}{6}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$ ▲

Ejemplo 3 Sea D una región y-simple. Describir su área $A(D)$ como límite de las sumas de Riemann.

Solución Si recordamos la definición, $A(D) = \iint_D dx\, dy$ es la integral sobre un rectángulo contenedor R de la función $f^* = 1$. Una suma de Riemann S_n para esta integral se obtiene dividiendo R en subrectángulos y haciendo la suma $S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f^*(\mathbf{c}_{jk})\, \Delta x\, \Delta y$, como en la fórmula (1) de la Sección 5.2. Ahora $f^*(\mathbf{c}_{jk})$ es 1 o 0, dependiendo de si $\mathbf{c}_{jk}$ está o no en D. Consideramos aquellos subrectángulos R_{jk} que tienen intersección no vacía con D y seleccionamos $\mathbf{c}_{jk}$ en $D \cap R_{jk}$. Así, S_n es la suma de las áreas de los subrectángulos que intersecan D y $A(D)$ es el límite de estas sumas cuando $n \to \infty$. Por tanto, $A(D)$ es el límite de las áreas de los rectángulos que "circunscriben" a D. Recomendamos hacer un dibujo que acompañe a esta exposición. ▲

Los métodos para tratar las regiones x-simples son completamente análogos a estos. Específicamente, tenemos el siguiente teorema.

Teorema $4'$ Integrales iteradas para regiones *x*-simples Supongamos que D es el conjunto de puntos (x, y) tales que $y \in [c, d]$ y $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$. Si f es continua en D, entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx\right] dy. \tag{2}$$