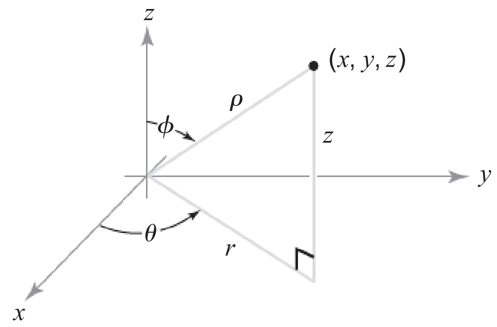

Figura 1.4.5 Coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ); la gráfica de los puntos que satisfacen $\rho = a$ es una esfera.

donde ϕ es el ángulo (entre 0 y π, ambos inclusive) que forma el radio vector $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ con el eje positivo z, en el plano que contiene el $\mathbf{v}$ y el eje z (véase la Figura 1.4.5). Utilizando el producto escalar, podemos expresar ϕ como sigue:

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{v}\|}, \qquad \text{es decir,} \qquad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{v}\|}\right).$$

Tomamos como coordenadas las cantidades ρ, θ, ϕ. Dado que $r = \rho \operatorname{sen}\phi$, podemos usar la Fórmula (2) para determinar x, y, z en función de las coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ.

Definición Las ***coordenadas esféricas*** de (x, y, z) en el espacio son las ternas (ρ, θ, ϕ), y se definen como sigue:

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \qquad z = \rho\cos\phi, \qquad (3)$$

donde

$$\rho \geq 0, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi, \qquad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Nota histórica

En 1773, Joseph Louis Lagrange estaba trabajando en la teoría gravitatoria de Newton aplicada a los elipsoides de revolución. Al intentar calcular la atracción gravitatoria total de tales elipsoides, se encontró con una integral que era difícil de calcular. Motivado por este problema, introdujo las coordenadas esféricas, que le permitieron calcular la integral. Estudiaremos el método del cambio de coordenadas según se aplica a integrales múltiples en la Sección 6.2, y en sus aplicaciones a la gravitación en la Sección 6.3, donde veremos cómo la ley gravitatoria del inverso de los cuadrados permitió a Newton considerar las masas esféricas como masas puntuales.

Las coordenadas esféricas también están estrechamente ligadas a la navegación a través de la latitud y la longitud. Para ver esta relación, observamos en primer lugar que la esfera de radio a centrada en el origen se describe mediante una ecuación muy simple en coordenadas esféricas, a saber, $\rho = a$. Si fijamos el radio a, las coordenadas esféricas θ y ϕ son similares a las coordenadas geográficas de longitud y latitud si tomamos el eje de la tierra como eje z. Sin embargo, hay diferencias: la longitud geográfica es $|\theta|$ y se denomina longitud este u oeste, dependiendo de si θ es positivo o negativo medido desde el meridiano de Greenwich; la latitud geográfica es $|\pi/2 - \phi|$ y se denomina latitud norte o sur, dependiendo de si $\pi/2 - \phi$ es positivo o negativo.