Teorema 11 *Cont.*

donde $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F$ denota la derivada (parcial) de F con respecto a la variable $\mathbf{x}$ —es decir, $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F = [\partial F/\partial x_1, \ldots, \partial F/\partial x_n]$; en otras palabras,

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial z}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Una vez que sabemos que $z = g(\mathbf{x})$ existe y es diferenciable, se puede comprobar la fórmula (1) derivando implícitamente; para ello, basta observar que la regla de la cadena aplicada a $F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ da

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) + \left[\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))\right][\mathbf{D}g(\mathbf{x})] = 0,$$

que es equivalente a la Fórmula (1).

Ejemplo 1 En este caso particular del teorema de la función implícita, es importante reconocer la necesidad de tomar entornos suficientemente pequeños U y V. Por ejemplo, considérese la ecuación

$$x^2 + z^2 - 1 = 0;$$

es decir, $F(x, z) = x^2 + z^2 - 1$, con $n = 1$. Aquí $(\partial F/\partial z)(x, z) = 2z$, y entonces el caso particular del teorema de la función implícita se aplica a puntos (x_0, z_0), que satisfagan $x_0^2 + z_0^2 - 1 = 0$ y $z_0 \neq 0$. Por tanto, cerca de dichos puntos, z es una función única de x. Esta función es $z = \sqrt{1 - x^2}$ si $z_0 > 0$ y $z = -\sqrt{1 - x^2}$ si $z_0 < 0$. Obsérvese que z está

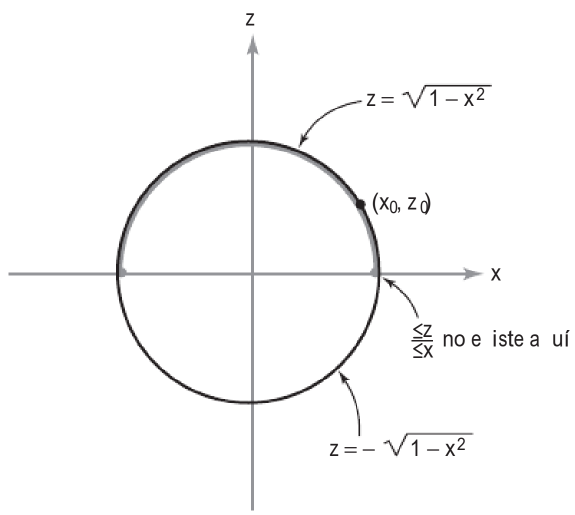

Figura 3.5.2 En el teorema de la función implícita es necesario tomar entornos pequeños.