$$f = [f_1 \quad \cdots \quad f_m] \quad \text{y} \quad \mathbf{D}f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = 2[\cos(f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}))]f(\mathbf{x})\mathbf{D}f(\mathbf{x})$. ▲

Ejercicios

1. Si $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable, demostrar que $\mathbf{x} \mapsto f^2(\mathbf{x}) + 2f(\mathbf{x})$ también es diferenciable y calcular su derivada en función de $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$.

2. Demostrar que las siguientes funciones son diferenciables y hallar sus derivadas en un punto arbitrario:

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$

(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2 + x + y$

(d) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$

(e) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{xy}$

(f) $f\colon U \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, donde $U = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$

(g) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^4 - y^4$

3. Verificar el primer caso especial de la regla de la cadena para la composición $f \circ \mathbf{c}$ en cada uno de los casos siguientes:

(a) $f(x, y) = xy, \mathbf{c}(t) = (e^t, \cos t)$

(b) $f(x, y) = e^{xy}, \mathbf{c}(t) = (3t^2, t^3)$

(c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)\log\sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t})$

(d) $f(x, y) = x\exp(x^2 + y^2), \mathbf{c}(t) = (t, -t)$

4. ¿Cuál es el vector velocidad para cada una de las trayectorias $\mathbf{c}(t)$ del Ejercicio 3?

5. Sean $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciables. Demostrar que $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

6. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Haciendo el cambio de variables

$$x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \quad y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \quad z = \rho\cos\phi$$

(coordenadas esféricas) en $f(x, y, z)$, calcular $\partial f/\partial\rho, \partial f/\partial\theta$ y $\partial f/\partial\phi$ en función de $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$.

7. Sean $f(u, v) = (\tan(u - 1) - e^v, u^2 - v^2)$ y $g(x, y) = (e^{x-y}, x - y)$. Calcular $f \circ g$ y $\mathbf{D}(f \circ g)(1, 1)$.

8. Sea $f(u, v, w) = (e^{u-w}, \cos(v + u) + \operatorname{sen}(u + v + w))$ y $g(x, y) = (e^x, \cos(y - x), e^{-y})$. Calcular $f \circ g$ y $\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0)$.

9. Hallar $(\partial/\partial s)(f \circ T)(1, 0)$, donde $f(u, v) = \cos u \operatorname{sen} v$ y $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se define como $T(s, t) = (\cos(t^2 s), \log\sqrt{1 + s^2})$.

10. Supóngase que la temperatura en el punto (x, y, z) del espacio es $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Una partícula sigue la hélice circular $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ y sea $T(t)$ su temperatura en el instante t.

(a) Calcular $T'(t)$.

(b) Hallar un valor aproximado para la temperatura en $t = (\pi/2) + 0{,}01$.

11. Sea $f(x, y, z) = (3y + 2, x^2 + y^2, x + z^2)$. Sea $\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$.

(a) Hallar la trayectoria $\mathbf{p} = f \circ \mathbf{c}$ y el vector velocidad $\mathbf{p}'(\pi)$.

(b) Hallar $\mathbf{c}(\pi), \mathbf{c}'(\pi)$ y $\mathbf{D}f(-1, 0, \pi)$.

(c) Considerando $\mathbf{D}f(-1, 0, \pi)$ como una aplicación lineal, hallar $\mathbf{D}f(-1, 0, \pi)\ (\mathbf{c}'(\pi))$.

12. Sean $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ y $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas como $h(x, y, z) = (xyz, e^{xz}, x\operatorname{sen}(y), \frac{-9}{x}, 17)$ y $g(u, v) = (v^2 + 2u, \pi, 2\sqrt{u})$. Hallar $\mathbf{D}(h \circ g)(1, 1)$.

13. Si que un pato está nadando sobre la circunferencia $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t$ y la temperatura del agua está dada por la fórmula $T = x^2 e^y - xy^3$, hallar dT/dt, la variación de temperatura que el