punto del espacio (x, y, z) en el instante t (véase la Figura 2.1.1). Especificar la velocidad de reacción de una solución que contiene seis productos químicos en reacción A, B, C, D, E, F en proporciones x, y, z, w, u, v requiere una aplicación $\sigma\colon U \subset \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, donde $\sigma(x, y, z, w, u, v)$ proporciona la velocidad cuando los productos químicos están en las proporciones indicadas. Para especificar el vector cardíaco (el vector que proporciona el módulo y la dirección de la corriente eléctrica en el corazón) en el instante de tiempo t se necesita una aplicación $\mathbf{c}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \mathbf{c}(t)$.

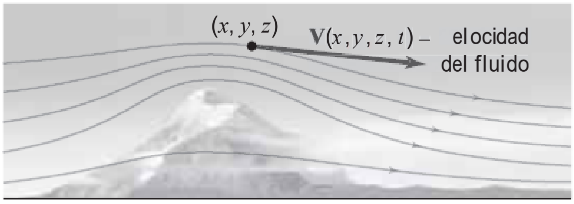

Figura 2.1.1 Un fluido en movimiento define un campo vectorial $\mathbf{V}$ especificando la velocidad de las partículas del fluido en cada punto del espacio y en cada instante de tiempo.

Cuando $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, decimos que f es una ***función de n variables con valores reales y dominio*** U. La razón por la que decimos "n variables" es simplemente porque consideramos las coordenadas de un punto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ como n variables, y $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ depende de estas variables. Decimos "valores reales" porque $f(x_1, \ldots, x_n)$ es un número real. Una gran parte de nuestro trabajo se llevará a cabo usando funciones con valores reales, por lo que debemos prestarles una especial atención.

Gráficas de funciones

Si $f\colon U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n = 1)$, la ***gráfica*** de f es el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por todos los puntos $(x, f(x))$ del plano, para x perteneciente a U. Este subconjunto se puede interpretar como una curva en $\mathbb{R}^2$. Simbólicamente, expresamos esto como sigue

$$\text{gráfica de } f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in U\},$$

donde las llaves significan "el conjunto de todos" y la barra vertical se lee como "tales que". Dibujar la gráfica de una función de una variable es una herramienta útil que ayuda a visualizar cómo se comporta realmente la función (véase la Figura 2.1.2). Es útil generalizar la idea de gráfica a funciones de varias variables, lo que nos lleva a la siguiente definición:

Definición Gráfica de una función Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Definimos la ***gráfica*** de f como el subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ formado por los puntos

$$(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$$

de $\mathbb{R}^{n+1}$ en los que $(x_1, \ldots, x_n)$ es un punto de U. Simbólicamente,

$$\text{gráfica } f = \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in U\}.$$