***38.** Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

***39.** Demuestre que

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} = l^n + a_{n-1}l^{n-1} + a_{n-2}l^{n-2} + \cdots + a_1 l + a_0$$

40. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que si la suma de todos los elementos de cada columna de A es cero, entonces $|A| = 0$.

***41.** Una matriz A es **antisimétrica** si $A^{\top} = -A$. Si A es una matriz antisimétrica de $n \times n$, demuestre que $\det A^{\top} = (-1)^n \det A$.

Matriz antisimétrica

42. Usando el resultado del problema 41, demuestre que si A es una matriz antisimétrica de $n \times n$ y n es impar, entonces $\det A = 0$.

43. Una matriz A se llama **ortogonal** si A es invertible y $A^{-1} = A^{\top}$, es decir, $A^{\top}A = AA^{\top} = I$. Demuestre que si A es ortogonal, entonces $\det A = \pm 1$.

Matriz ortogonal

****44.** Sea Δ el triángulo del plano con vértices en (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3). Demuestre que el área del triángulo está dada por

$$\text{Área de } \Delta = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

¿Bajo qué circunstancias este determinante será igual a cero?

****45.** Tres rectas que no son paralelas por pares determinan un triángulo en el plano. Suponga que las rectas están dadas por

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$$

Demuestre que el área determinada por las rectas es

$$\frac{\pm 1}{2A_{13}A_{23}A_{33}}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$