20. Un globo de aire caliente tiene forma de esfera truncada, como se muestra en la Figura 8.2.14. Los gases calientes se escapan a través de la superficie porosa del globo según un campo vectorial de velocidades

$$\mathbf{V}(x,y,z) = \nabla \times \mathbf{\Phi}(x,y,z)$$
$$\text{donde} \qquad \mathbf{\Phi}(x,y,z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Si $R = 5$, calcular el flujo de los gases a través de la superficie.

21. Demostrar que la ley de Faraday implica que $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{H}/\partial t$.

22. Sea S una superficie y sea $\mathbf{F}$ perpendicular a la tangente a la frontera de S. Demostrar que

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

¿Cuál es el significado físico si $\mathbf{F}$ es un campo eléctrico?

23. Considérense dos superficies S_1 y S_2 con la misma frontera ∂S. Describir mediante un dibujo cómo deben orientarse S_1 y S_2 para garantizar que

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

24. Para una superficie S y un vector fijo $\mathbf{v}$, demostrar que

$$2 \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\partial S} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s},$$

donde $\mathbf{r}(x,y,z) = (x,y,z)$.

25. Razonar de manera informal que si S es una superficie cerrada, entonces

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(véase el Ejercicio 23). (Una *superficie cerrada* es aquella que forma la frontera de una región en el espacio; por ejemplo, una esfera es una superficie cerrada).

26. Si C es una curva cerrada que es la frontera de una superficie S y f y g son funciones C^2, demostrar que

(a) $\displaystyle\int_C f\nabla g \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\mathbf{S}$

(b) $\displaystyle\int_C (f\nabla g + g\nabla f) \cdot d\mathbf{s} = 0$

27. (a) Si C es una curva cerrada que es la frontera de una superficie S y $\mathbf{v}$ es un vector constante, demostrar que

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

(b) Demostrar que esto es cierto incluso si C no es la frontera de una superficie S.

28. Demostrar que $\mathbf{\Phi}\colon D \to \mathbb{R}^3, D = [0,\pi] \times [0,2\pi], \mathbf{\Phi}(\phi,\theta) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi,\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,\ \cos\phi)$, que parametriza la esfera unidad, lleva la frontera de D a la mitad de un círculo máximo en S.

29. Verificar el Teorema 6 para el helicoide $\mathbf{\Phi}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta), (r,\theta) \in [0,1] \times [0,\pi/2]$ y el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (z,x,y)$.

30. Demostrar el Teorema 6.

31. Sea $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + (2xy + x)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Sea C la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y S el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ en el plano $z = 0$.

(a) Determinar el flujo de $\mathbf{F}$ hacia el exterior de S.

(b) Determinar la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de C.

(c) Hallar el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$. Verificar el teorema de Stokes directamente en este caso.

32. Sea S una superficie con frontera ∂S y supóngase que $\mathbf{E}$ es un campo eléctrico que es perpendicular a ∂S. Utilizar la ley de Faraday para demostrar que el flujo magnético inducido a través de S es constante en el tiempo.

33. Integrar $\nabla \times \mathbf{F}, \mathbf{F} = (3y, -xz, -yz^2)$ sobre la porción de la superficie $2z = x^2 + y^2$ que se encuentra debajo del plano $z = 2$ directamente y utilizando el teorema de Stokes.

34. La ***ley de Ampère*** establece que si la densidad de corriente eléctrica se describe mediante un campo vectorial $\mathbf{J}$ y el campo magnético inducido es $\mathbf{H}$, entonces la circulación de $\mathbf{H}$ a lo largo de la frontera C de una superficie S es igual a la integral de $\mathbf{J}$ sobre S (es decir, a la corriente total que atraviesa S). Véase la Figura 8.2.15. Demostrar que la *ecuación de Maxwell* estacionaria $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ implica esto.