De la Ecuación (8), se deduce que $x^2 + y^2 + \lambda = 0$. Sea $t = -1/\lambda = 1/(x^2 + y^2)$ [el caso de $\lambda = 0$ es imposible, porque (0, 0) no está sobre la curva $\phi(x, y) = 0$]. Así, las ecuaciones (6) y (7) se pueden escribir como sigue:

$$\begin{aligned} 2(A - t)x + 2By &= 0 \\ 2Bx + 2(C - t)y &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Si estas dos ecuaciones tienen una solución no trivial [recuérdese que $(x, y) = (0, 0)$ no está sobre la curva y, por tanto, no es una solución], se sigue de un teorema de álgebra lineal que su determinante se anula:[12]

$$\begin{vmatrix} A - t & B \\ B & C - t \end{vmatrix} = 0.$$

Dado que esta ecuación es cuadrática en t, tiene dos soluciones, que denominaremos t_1 y t_2. Como $-\lambda = x^2 + y^2$, tenemos $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{-\lambda}$. Sabemos que $\sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia desde el punto (x, y) al origen. Por tanto, si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) denotan las soluciones no triviales de la Ecuación (9) correspondientes a t_1 y t_2, y si t_1 y t_2 son positivas, obtenemos $\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 1/\sqrt{t_2}$ y $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 1/\sqrt{t_1}$. En consecuencia, si $t_1 > t_2$, las longitudes de los semiejes mayor y menor son $1/\sqrt{t_1}$ y $1/\sqrt{t_2}$, respectivamente. Si la curva es una elipse, tanto t_1 como t_2 son, de hecho, reales y positivas. ¿Qué sucede con una hipérbola o una parábola? ▲

Por último, vamos a ver una aplicación a la economía.

Ejemplo 10 Supongamos que la producción de una fábrica es una cantidad Q de un determinado producto, donde Q es una función $f(K, L)$, siendo K el capital invertido en equipos (o inversión) y L es la mano de obra utilizada. Si el precio de la mano de obra es p, el precio de los equipos es q y la fábrica no puede gastar más de B euros, ¿cómo podemos determinar el capital y la mano de obra que maximizan la producción Q?

Solución Es de esperar que si el capital o la mano de obra aumentan, entonces la producción Q también debería aumentar; es decir,

$$\frac{\partial Q}{\partial K} \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial L} \geq 0.$$

También es de esperar que a medida que se incremente la mano de obra a una inversión en equipos dada, la producción adicional obtenida será menor; es decir,

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0.$$

De manera análoga,

[12]La matriz de coeficientes de las ecuaciones no puede tener inversa, porque esto implicaría que la solución es cero. Recuérdese que una matriz que no tiene inversa tiene determinante cero.