para (u, v) en algún dominio D del plano. La integral de una función vectorial $\mathbf{F}$ sobre S fue desarrollada en la Sección 7.6 como

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left[F_1 \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + F_2 \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + F_3 \right] dx\, dy, \qquad (1)$$

donde $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$.

En la Sección 8.1, comenzamos por suponer que considerábamos regiones D simples; aunque esta hipótesis se usaba en la prueba del teorema de Green, ya resaltamos entonces que en realidad el teorema es válido para una clase más amplia de regiones. En esta sección supondremos que D es una región cuya frontera es una curva cerrada simple, y en la cual el teorema de Green es aplicable. El teorema de Green exige elegir una orientación de la frontera de D, como se explicó en la Sección 8.1. La elección de la orientación coherente con el teorema de Green se llamará ***positiva***. Recuérdese que si D es simple, entonces la orientación positiva es la opuesta al sentido de las agujas del reloj (antihoraria).

Supongamos que $\mathbf{c}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2, \mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización de ∂D en la dirección positiva. Entonces definimos la ***curva frontera*** ∂S como la curva orientada cerrada y simple que es la imagen de la aplicación $\mathbf{p}\colon t \mapsto (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ con la orientación inducida por $\mathbf{p}$ (Figura 8.2.1).

Para recordar esta orientación (es decir, la dirección positiva) sobre ∂S, podemos imaginar que somos un "observador" que camina a lo largo de la frontera de la superficie de manera que el vector normal señala hacia arriba; entonces la dirección de movimiento será positiva si la superficie está a la izquierda. Esta orientación de ∂S se llama frecuentemente ***orientación inducida por una normal hacia arriba*** $\mathbf{n}$.

Teorema 5 Teorema de Stokes para gráficas Sea S una superfice orientada definida por una función C^2, $z = f(x, y)$, donde $(x, y) \in D$, que es una región en la cual es válido el teorema de Green, y sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial C^1 sobre S. Entonces, si ∂S denota la frontera de S, orientada como acabamos de definir, se tiene

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Recuérdese que $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es la integral a lo largo de ∂S de la componente tangencial de $\mathbf{F}$, mientras que $\iint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}$ es la integral sobre S de $\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}$, la componente normal de $\mathbf{G}$ (véanse las Secciones 7.2 y 7.6). Por tanto, el teorema de Stokes dice que la integral de la *componente normal del rotacional de un campo vectorial* $\mathbf{F}$ *sobre una superficie* S *es igual a la integral de la componente tangencial de* $\mathbf{F}$ *a lo largo de la frontera* ∂S.