También podemos desarrollar $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) &= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})\\ &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}-2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

Esto es, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta$. ■

Ejemplo 4 Hallar el ángulo entre los vectores $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ e $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (véase la Figura 1.2.7).

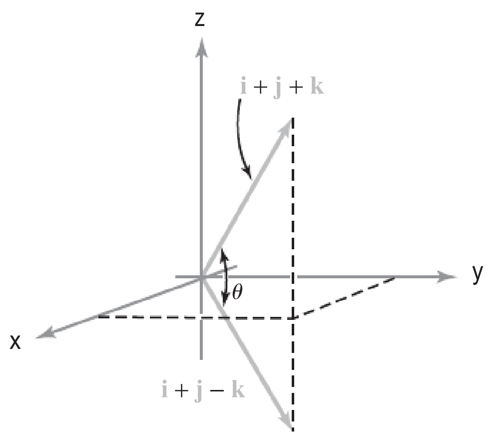

Figura 1.2.7 Cálculo del ángulo entre $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ y $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

Solución Aplicando el Teorema 1, tenemos

$$(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})=\|\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\|\|\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}\|\cos\theta,$$

y así

$$1+1-1=(\sqrt{3})(\sqrt{3})\cos\theta.$$

Por tanto,

$$\cos\theta=\tfrac{1}{3}.$$

Esto es,

$$\theta=\cos^{-1}(\tfrac{1}{3})\approx 1{,}23 \text{ radianes } (71^\circ).$$ ▲

La desigualdad de Cauchy–Schwarz

El Teorema 1 muestra que el producto escalar de dos vectores es el producto de sus longitudes por el coseno del ángulo que forman. Esta fórmula es a menudo muy útil en los problemas de naturaleza geométrica. Una consecuencia importante del Teorema 1 es: