Ejemplo 2 Sea S la superficie definida por $z = x^2 + y$, donde D es la región $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. Calcular $\iint_S x\,dS$.

Solución Si hacemos $z = g(x, y) = x^2 + y$, la fórmula (4) da

$$\begin{aligned}
\iint_S x\,dS &= \iint_D x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \\
&= \int_{-1}^{1}\int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2 + 1}\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\left[\int_0^1 (2 + 4x^2)^{1/2}(8x\,dx)\right]dy \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}[(2 + 4x^2)^{3/2}]|_0^1\,dy \\
&= \frac{1}{12}\int_{-1}^{1}(6^{3/2} - 2^{3/2})\,dy = \frac{1}{6}(6^{3/2} - 2^{3/2}) \\
&= \sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

▲

Ejemplo 3 Calcular $\iint_S z^2\,dS$, donde S es la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solución Para este problema es conveniente utilizar coordenadas esféricas y representar la esfera paramétricamente mediante la ecuación $x = \cos\theta \operatorname{sen}\phi, y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, z = \cos\phi$, sobre la región D en el plano $\theta\phi$ dado por las desigualdades $0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. A partir de la Ecuación (1) obtenemos

$$\iint_S z^2\,dS = \iint_D (\cos\phi)^2\|\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi\|\,d\theta\,d\phi.$$

Un pequeño cálculo [usando la fórmula (2) de la Sección 7.4; véase el Ejercicio 12] demuestra que

$$\|\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi\| = \operatorname{sen}\phi.$$

(Téngase en cuenta que para $0 \leq \phi \leq \pi$, tenemos $\operatorname{sen}\phi \geq 0$). Por tanto,

$$\begin{aligned}
\iint_S z^2\,dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\phi \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}[-\cos^3\phi]_0^{\pi}\,d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

▲

Este ejemplo también demuestra que sobre una esfera de radio R,

$$\iint_S f\ \ ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\phi,\theta)R^2 \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta,$$