33. Calcule e^{At}, donde $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

8.8 Una perspectiva diferente: los teoremas de Cayley-Hamilton y Gershgorin

Existen muchos resultados interesantes sobre los valores característicos de una matriz. En esta sección se estudiarán dos de ellos. El primero dice que cualquier matriz satisface su propia ecuación característica. El segundo muestra cómo localizar, de manera general, los valores característicos de cualquier matriz, prácticamente sin hacer cálculos.

Sea $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ un polinomio y sea A una matriz cuadrada. Entonces las potencias de A están definidas y se define

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I \qquad \textbf{(8.8.1)}$$

EJEMPLO 8.8.1 Evaluación de *p*(*A*)

Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ y $p(x) = x^2 - 5x + 3$. Entonces $p(A) = A^2 - 5A + 3I = \begin{pmatrix} 13 & 24 \\ 18 & 61 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -20 \\ -15 & -35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 4 \\ 3 & 29 \end{pmatrix}$.

La expresión (8.8.1) es un polinomio con coeficientes escalares definido para una matriz variable. También se puede definir un polinomio cuyos coeficientes son *matrices cuadradas* de $m \times m$ por

$$Q(\lambda) = B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \cdots + B_n\lambda^n \qquad \textbf{(8.8.2)}$$

Si A es una matriz del mismo tamaño que las matrices B, entonces se define

$$Q(A) = B_0 + B_1A + B_2A^2 + \cdots + B_nA^n \qquad \textbf{(8.8.3)}$$

Debe tenerse cuidado en (8.8.3), ya que las matrices no conmutan bajo la multiplicación.

Teorema 8.8.1

Si $P(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ son polinomios en la variable escalar λ cuyos coeficientes provienen de matrices cuadradas y si $P(\lambda) = Q(\lambda)(A - \lambda I)$, entonces $P(A) = 0$.

Demostración

Si $Q(\lambda)$ está dado por la ecuación (8.8.2), entonces

$$P(\lambda) = (B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \cdots + B_n\lambda^n)(A - \lambda I) = B_0A + B_1A\lambda + B_2A\lambda^2 + \cdots + B_nA\lambda^n - B_0\lambda - B_1\lambda^2 - B_2\lambda^3 - \cdots - B_n\lambda^{n+1} \qquad \textbf{(8.8.4)}$$

Entonces, sustituyendo A en lugar de λ en (8.8.4), se obtiene

$$P(A) = B_0A + B_1A^2 + B_2A^3 + \cdots + B_nA\lambda^{n+1} - B_0A - B_1A^2 - B_2A^3 - \cdots - B_nA^{n+1} = 0$$