7. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{c}_1(t) \times \mathbf{c}_2(t)]$.

8. $\dfrac{d}{dt}\{\mathbf{c}_1(t) \cdot [2\mathbf{c}_2(t) + \mathbf{c}_1(t)]\}$.

9. Consideremos la hélice dada por $\mathbf{c}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$. Demostrar que el vector aceleración es siempre paralelo al plano xy.

10. Demostrar la regla del producto escalar.

11. Determinar cuáles de las siguientes trayectorias son regulares:

(a) $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.

(b) $\mathbf{c}(t) = (t^3, t^5, \cos t)$.

(c) $\mathbf{c}(t) = (t^2, e^t, 3t + 1)$.

12. Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ los vectores de velocidad y aceleración de una partícula que se mueve según una trayectoria $\mathbf{c}$. Suponer que la posición inicial de la partícula es $\mathbf{c}(0) = (3, 4, 0)$, la velocidad inicial es $\mathbf{v}(0) = (1, 1, -2)$ y la función de aceleración es $\mathbf{a}(t) = (0, 0, 6)$. Determinar $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{c}(t)$.

13. La aceleración, la velocidad inicial y la posición inicial de una partícula que se mueve por el espacio están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= (2, -6, -4), \\ \mathbf{v}(0) &= (-5, 1, 3), \\ \mathbf{r}(0) &= (6, -2, 1). \end{aligned}$$

La trayectoria de la partícula interseca con el plano yz exactamente dos veces. Determinar esos dos puntos de intersección.

14. La aceleración, la velocidad inicial y la posición inicial de una partícula que se mueve por el espacio están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= (-6, 2, 4), \\ \mathbf{v}(0) &= (2, -5, 1), \\ \mathbf{r}(0) &= (-3, 6, 2). \end{aligned}$$

La trayectoria de la partícula intersecta con el plano xz exactamente dos veces. Determinar esos dos puntos de intersección.

15. Si $\mathbf{r}(t) = 6t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, ¿qué fuerza actúa sobre una partícula de masa m que se mueve a lo largo de $\mathbf{r}$ en el instante $t = 0$?

16. Supongamos que una partícula de masa 1 gramo (g) sigue la trayectoria del Ejercicio 1, con unidades en segundos y centímetros. ¿Qué fuerza actúa sobre ella en el instante $t = 0$? (La respuesta debe incluir las unidades correspondientes.)

17. Un cuerpo de masa 2 kilogramos se mueve a lo largo de una circunferencia de 3 metros de radio, completando una revolución cada 5 segundos. Hallar la fuerza centrípeta que actúa sobre el cuerpo.

18. Hallar la fuerza centrípeta que actúa sobre un cuerpo de masa 4 kilogramos (kg), que se mueve a lo largo de una circunferencia de 10 metros (m) de radio con una frecuencia de 2 revoluciones por segundo (rps).

19. Demostrar que si la aceleración de un objeto es siempre perpendicular a la velocidad, entonces la rapidez del objeto es constante. (SUGERENCIA: véase el Ejemplo 1.)

20. Demostrar que, en un máximo o mínimo local de $\|\mathbf{r}(t)\|$, el vector $\mathbf{r}'(t)$ es perpendicular a $\mathbf{r}(t)$.

21. Un satélite está en una órbita circular 500 millas por encima de la superficie de la Tierra. ¿Cuál es el periodo de la órbita? (Como valor del radio de la Tierra podemos tomar 4000 millas, es decir, $6{,}436 \times 10^6$ metros.)

22. ¿Cuál es la aceleración del satélite del Ejercicio 21? ¿Y la fuerza centrípeta?

23. Hallar la trayectoria $\mathbf{c}$ tal que $\mathbf{c}(0) = (0, -5, 1)$ y $\mathbf{c}'(t) = (t, e^t, t^2)$.

24. Sea $\mathbf{c}$ una trayectoria en $\mathbb{R}^3$ con aceleración cero. Demostrar que $\mathbf{c}$ es una línea recta o un punto.

25. Hallar trayectorias $\mathbf{c}(t)$ cuyas imágenes sean las siguientes curvas.

(a) $\{(x, y) \mid y = e^x\}$.

(b) $\{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 = 1\}$.

(c) Una línea recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa a través del origen y del punto (a, b, c).

(d) $\{(x, y) \mid 9x^2 + 16y^2 = 4\}$.

26. Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria, $\mathbf{v}(t)$ su velocidad y $\mathbf{a}(t)$ la aceleración. Supongamos que $\mathbf{F}$ es una aplicación C^1 de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, $m > 0$ y $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = m\mathbf{a}(t)$ (segunda ley de Newton). Demostrar que

$$\frac{d}{dt}[m\mathbf{c}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{c}(t) \times \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$$