17. No necesariamente. Probar con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

19. (a) La suma de dos funciones continuas y un múltiplo escalar de una función continua son continuas.

(b) (I) $(\alpha f + \beta g) \cdot h$

$$= \int_0^1 (\alpha f + \beta g)(x) h(x)\ dx$$
$$= \alpha \int_0^1 f(x)h(x)\ dx + \beta \int_0^1 g(x)h(x)\ dx$$
$$= \alpha f \cdot h + \beta g \cdot h.$$

(II) $f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)\ dx$

$$= \int_0^1 g(x)f(x)\ dx = g \cdot f.$$

Para las condiciones (III) y (IV), el integrando es un cuadrado perfecto. Por tanto, la integral es no negativa y solo puede ser 0 si el integrando es 0 en todos los puntos. Si $f(x) \neq 0$ para algún x, entonces sería positiva en un entorno de x por la continuidad y la integral sería positiva.

21. Calcular los productos de matrices de las dos formas y comprobar que se obtiene la identidad.

23. $(\det A)(\det A^{-1}) = \det (AA^{-1}) = \det (I) = 1.$

Ejercicios de repaso del Capítulo 1

1. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$; $3\mathbf{v} = 9\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$; $6\mathbf{v} + 8\mathbf{w} = 26\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$; $-2\mathbf{v} = -6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$; $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 4$; $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$.
El dibujo debe mostrar $\mathbf{v}, \mathbf{w}, 3\mathbf{v}, 6\mathbf{v}, 8\mathbf{w}$, $6\mathbf{v} + 8\mathbf{w}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ como la proyección de $\mathbf{v}$ a lo largo de $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ como un vector perpendicular tanto a $\mathbf{v}$ como $\mathbf{w}$.

3. (a) $\mathbf{l}(t) = -\mathbf{i} + (2 + t)\mathbf{j} - \mathbf{k}$.
(b) $\mathbf{l}(t) = (3t - 3)\mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j} - t\mathbf{k}$.
(c) $-2x + y + 2z = 9$.

5. $10x + 4y - 2z = 26$.

7. (a) 0.
(b) 5.
(c) -10.

9. (a) $\pi/2$.
(b) $5/(2\sqrt{15})$.
(c) $-10/(\sqrt{6}\sqrt{17})$.

11. $\{st\mathbf{a} + s(1 - t)\mathbf{b} \mid 0 \leq t \leq 1 \text{ y } 0 \leq s \leq 1\}$.

13. Sean $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{w} = (b_1, b_2, b_3)$, y aplicar la desigualdad CBS.

15. $AB = \begin{bmatrix} 11 & 23 & 3 \\ 8 & 18 & 3 \\ 6 & 8 & 3 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 6 \\ 1 & 11 & 11 \\ 3 & 18 & 18 \end{bmatrix}$

17. El área es el valor absoluto de

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda a_2 \end{vmatrix}.$$

(Un múltiplo de una fila de un determinante se puede añadir a otra fila sin que cambie su valor). El dibujo debe mostrar dos paralelogramos con la misma base y la misma altura.

19. Los cosenos de las dos partes del ángulo son iguales, porque

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}/\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{v}\| &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|)/\|\mathbf{v}\| \\ &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}/\|\mathbf{b}\|\|\mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

21. La desigualdad triangular da $\|\mathbf{v}\| = \|(\mathbf{v} - \mathbf{w}) + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{w}\|$, lo que implica que $\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$. Un argumento similar proporciona $\|\mathbf{w}\| - \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$.

23. $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}$; etc.

25. (a) SUGERENCIA: la longitud de la proyección del vector que conecta cualquier pareja de puntos, uno de cada recta, sobre $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)/\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|$ es d.
(b) $\sqrt{2}$.

27. (a) Observar que

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

(b) $\frac{1}{2}$.