$$\frac{\partial P}{\partial y} = xe^{xy}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{x+y}.$$

Estas dos cantidades no son iguales y por tanto **F** no puede tener una función potencial.

(b) En este caso, hallamos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x \operatorname{sen} y = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

y por tanto **F** tiene una función potencial $f$. Para calcular $f$ resolvemos las ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \operatorname{sen} y.$$

Por tanto, $f(x,y) = x^2 \cos y + h_1(y)$ y $f(x,y) = x^2 \cos y + h_2(x)$. Si $h_1$ y $h_2$ son la misma constante, entonces se satisfacen ambas ecuaciones, y por tanto $f(x,y) = x^2 \cos y$ es una función potencial para **F**. ▲

**Ejemplo 4** Sea $\mathbf{c}$: $[1,2] \to \mathbb{R}^2$ dada por $x = e^{t-1}$, $y = \operatorname{sen}(\pi/t)$. Calcular la integral

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} 2x \cos y \, dx - x^2 \operatorname{sen} y \, dy,$$

donde $\mathbf{F} = (2x \cos y)\mathbf{i} - (x^2 \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$.

**Solución** Los extremos son $\mathbf{c}(1) = (1,0)$ y $\mathbf{c}(2) = (e,1)$. Dado que $\partial(2x \cos y)/\partial y = \partial(-x^2 \operatorname{sen} y)/\partial x$, **F** es irrotacional y por tanto un campo vectorial gradiente (como hemos visto en el Ejemplo 3). Entonces, por el Teorema 7, podemos sustituir **c** por cualquier curva a trozos $C^1$ que tenga los mismos puntos extremos, en particular, por la trayectoria poligonal que va de $(1,0)$ a $(e,0)$ y luego a $(e,1)$. Por tanto, la integral de línea tiene que ser igual a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_1^e 2t \cos 0 \; dt + \int_0^1 -e^2 \operatorname{sen} t \; dt = (e^2 - 1) + e^2(\cos 1 - 1)\\ &= e^2 \cos 1 - 1.\end{aligned}$$

Alternativamente, utilizando el Teorema 3 de la Sección 7.2, tenemos

$$\int_{\mathbf{c}} 2x \cos y \, dx - x^2 \operatorname{sen} y \, dy = \int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\mathbf{c}(2)) - f(\mathbf{c}(1)) = e^2 \cos 1 - 1,$$

ya que $f(x,y) = x^2 \cos y$ es una función potencial para **F**. Evidentemente, esta técnica es más simple que calcular directamente la integral. ▲

Concluimos esta sección con un teorema que es bastante similar, en esencia, al Teorema 7. El Teorema 7 estaba motivado en parte como un recíproco del resultado que establece que rot $\nabla f = \mathbf{0}$ para cualquier función $C^1$ $f$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$—o, si rot $\mathbf{F} = 0$, entonces $\mathbf{F} = \nabla f$. También