Teorema 4.2.5

Sea **v** un vector diferente de cero. Entonces para cualquier otro vector **u** el vector

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}\,\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v}$$

es ortogonal a **v**.

Demostración

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = \left[\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right]\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2}$$

$$= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$$

Los vectores **u**, **v** y **w** se ilustran en la figura 4.14.

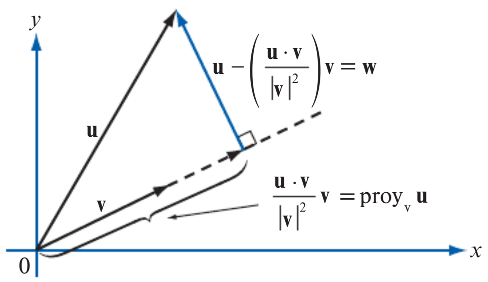

Figura 4.14

El vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\mathbf{v}$ es ortogonal a **v**.

Definición 4.2.4

Proyección

Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero. Entonces la **proyección** de **u** sobre **v** es un vector denotado por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$, que se define por

$$\boxed{\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}} \qquad \textbf{(4.2.4)}$$

La **componente** de **u** en la dirección de **v** es $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, y es un escalar. **(4.2.5)**

Observe que $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ es un vector unitario en la dirección de **v**.

Observación 1. De las figuras 4.14 y 4.15 y del hecho de que $\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$ se deduce que

v y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tienen:

i) la misma dirección si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$ y

ii) direcciones opuestas si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$.