ya que entonces la expresión completa $x^2 + y^2 + z^2$ se puede sustituir por una variable: ρ^2. Si W^* es la región tal que

$$0 \leq \rho \leq 1, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \qquad 0 \leq \phi \leq \pi,$$

podemos aplicar la Fórmula (10) y escribir

$$\iiint_W \exp{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, dV = \iiint_{W^*} \rho^2 e^{\rho^3} \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi.$$

Esta integral es igual a la integral iterada

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\phi\, d\rho &= 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi e^{\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\rho \\ &= -2\pi \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} [\cos\phi]_0^\pi\, d\rho \\ &= 4\pi \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2\, d\rho = \frac{4}{3}\pi \int_0^1 e^{\rho^3} (3\rho^2)\, d\rho \\ &= \left[\frac{4}{3}\pi e^{\rho^3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi(e-1).\end{aligned}$$

▲

Ejemplo 7 Sea W la bola de radio R y centro $(0,0,0)$ en $\mathbb{R}^3$. Hallar el volumen de W.

Solución El volumen de W es $\iiint_W dx\, dy\, dz$. Esta integral se puede calcular reduciéndola a integrales iteradas o considerando W como un volumen de revolución, pero vamos a evaluarla aquí por medio de coordenadas esféricas. Obtenemos

$$\iiint_W dx\, dy\, dz = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = \frac{R^3}{3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3} \int_0^\pi \operatorname{sen}\phi\; d\phi = \frac{2\pi R^3}{3}\{-[\cos(\pi) - \cos(0)]\} = \frac{4\pi R^3}{3},$$

que es la fórmula usual del volumen de una esfera. ▲

Ejercicios

1. Sugerir una sustitución/transformación que permita simplificar los siguientes integrandos y determinar sus jacobianos.

(a) $\iint_R (3x + 2y) \operatorname{sen}(x - y)\, dA$

(b) $\iint_R e^{(-4x+7y)} \cos(7x - 2y)\, dA$

2. Sugerir una sustitución/transformación que permita simplificar los siguientes integrandos y determinar sus jacobianos.

(a) $\iint_R (5x + y)^3 (x + 9y)^4\, dA$

(b) $\iint_R x \operatorname{sen}(6x + 7y) - 3y \operatorname{sen}(6x + 7y)\, dA$