$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial T}{\partial t}.$$

(c) Demostrar que $T(x,y,z,t)=e^{-kt}(\cos x+\cos y+\cos z)$ satisface la ecuación del calor tridimensional

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial T}{\partial t}.$$

13. Hallar $\partial^2 z/\partial x^2, \partial^2 z/\partial x\,\partial y, \partial^2 z/\partial y\,\partial x$ y $\partial^2 z/\partial y^2$ para

(a) $z=3x^2+2y^2$

(b) $z=(2x^2+7x^2y)/3xy$, en la región donde $x\neq 0$ e $y\neq 0$

14. Hallar todas las derivadas parciales segundas de

(a) $z=\operatorname{sen}(x^2-3xy)$

(b) $z=x^2y^2e^{2xy}$

15. Hallar f_{xy}, f_{yz} , f_{zx} y f_{xyz} para

$$f(x,y,z)=x^2y+xy^2+yz^2.$$

16. Sea $z=x^4y^3-x^8+y^4$.

(a) Calcular $\partial^3 z/\partial y\,\partial x\,\partial x, \partial^3 z/\partial x\,\partial y\,\partial x$ y $\partial^3 z/\partial x\,\partial x\,\partial y$ (también denotada por $\partial^3 z/\partial x^2 \partial y$).

(b) Calcular $\partial^3 z/\partial x\,\partial y\,\partial y, \partial^3 z/\partial y\,\partial x\,\partial y$ y $\partial^3 z/\partial y\,\partial y\,\partial x$ (también denotada por $\partial^3 z/\partial y^2\,\partial x$).

17. Utilizar el Teorema 1 para demostrar que si $f(x,y,z)$ es una función de clase C^3, entonces

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial z\,\partial x}.$$

18. Verificar que

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^3 f}{\partial z\,\partial y\,\partial x}$$

para $f(x,y,z)=ze^{xy}+yz^3x^2$.

19. Verificar que $f_{xzw}=f_{zwx}$ para $f(x,y,z,w)=e^{xyz}\operatorname{sen}(xw)$.

20. Si $f(x,y,z,w)$ es de clase C^3, demostrar que $f_{xzw}=f_{zwx}$.

21. Evaluar todas las derivadas parciales primeras y segundas de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y)=x\arctan(x/y)$

(b) $f(x,y)=\cos\sqrt{x^2+y^2}$

(c) $f(x,y)=\exp(-x^2-y^2)$

22. Sea $w=f(x,y)$ una función de dos variables y sean $x=u+v, y=u-v$. Demostrar que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

23. Sea $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función de clase C^2 y sea $\mathbf{c}(t)$ una curva C^2 en $\mathbb{R}^2$. Escribir una fórmula para la segunda derivada $(d^2/dt^2)((f\circ\mathbf{c})(t))$ utilizando la regla de la cadena dos veces.

24. Sea $f(x,y,z)=e^{xz}\tan(yz)$ y sean $x=g(s,t)$, $y=h(s,t), z=k(s,t)$. Definimos la función $m(s,t)=f(g(s,t),\,h(s,t),k(s,t))$. Hallar una fórmula para m_{st} utilizando la regla de la cadena y verificar que la solución obtenida es simétrica en s y t.

25. Una función $u=f(x,y)$ con derivadas parciales segundas continuas que satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

se dice que es una ***función armónica***. Demostrar que la función $u(x,y)=x^3-3xy^2$ es armónica.

26. ¿Cuáles de las siguientes funciones son armónicas? (véase el Ejercicio 25).

(a) $f(x,y)=x^2-y^2$

(b) $f(x,y)=x^2+y^2$

(c) $f(x,y)=xy$

(d) $f(x,y)=y^3+3x^2y$

(e) $f(x,y)=\operatorname{sen}x\cosh y$

(f) $f(x,y)=e^x\operatorname{sen}y$

27. (a) ¿Es armónica la función $f(x,y,z)=x^2-2y^2+z^2$? ¿Y la función $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$?

(b) La ecuación de Laplace para funciones de n variables es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}=0.$$

Hallar un ejemplo de una función de n variables que sea armónica y verificar que efectivamente es una función armónica.