$$A\mathbf{x}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} a_{1n}x_n \\ a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

o

$$A\mathbf{x}=x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \quad \textbf{(2.2.9)}$$

Nota

El producto de la matriz A de $m \times n$ y el vector columna $\mathbf{x}$ es una combinación lineal de las columnas de A.

Observe que $\mathbf{c}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ es la primera columna de A, $\mathbf{c}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$ es la segunda columna de A y así sucesivamente. Entonces (2.2.9) se puede escribir como

$$A\mathbf{x}=x_1\mathbf{c}_1+x_2\mathbf{c}_2+\cdots+x_n\mathbf{c}_n \quad \textbf{(2.2.10)}$$

Combinación lineal

El lado derecho de la expresión (2.2.10) se llama **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$. Las combinaciones lineales se estudiarán con detalle en la sección 5.3.

Suponga ahora que B es una matriz de $n \times p$. Sean $C = AB$ y $\mathbf{c}_1$ la primera columna de C. Entonces

$$\mathbf{c}_1=\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1} \end{pmatrix}$$

$$=b_{11}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}+b_{21}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}+\cdots+b_{n1}\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \quad (*)$$

es igual a la combinación lineal de las columnas de A. Lo mismo se cumple para todas las columnas de $C = AB$, donde se ve que

> Cada columna del producto AB es una combinación lineal de las columnas de A.

EJEMPLO 2.2.7 **Cómo escribir las columnas de *AB* como combinación lineal de las columnas de *A***

Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.