$z = -2$, que es paralela al eje y y pasa por los puntos $(2, 0, -2)$. De hecho, la ecuación $y = 3 - 4t$ dice, en esencia, que y puede tomar cualquier valor (mientras que x y z permanecen fijos).

EJEMPLO 4.5.5 Ilustración de la falta de unicidad en las ecuaciones simétricas de una recta

En el ejemplo 4.5.1 la recta cuyas ecuaciones se encontraron contiene al punto $(5, 5, -18)$. Al elegir $P = (5, 5, -18)$ y $Q = (3, 1, -2)$, se encuentra que $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$, de manera que $x = 5 - 2t$, $y = 5 - 4t$ y $z = -18 + 16t$. (Observe que si $t = \frac{3}{2}$ se obtiene $(x, y, z) = (2, -1, 6)$.) Las ecuaciones simétricas son ahora

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+18}{16}$$

Note que $(-2, -4, 16) = -2(1, 2, -8)$.

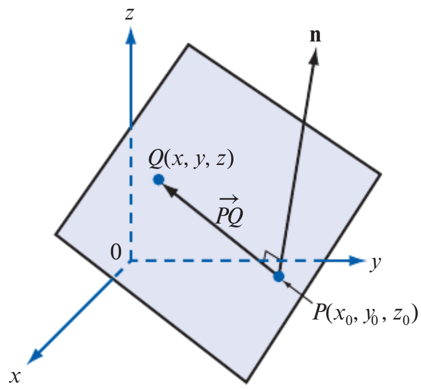

Figura 4.36
El vector **n** es ortogonal a todos los vectores en el plano.

Así como la ecuación de una recta en el espacio se obtiene especificando un punto sobre la recta y un vector *paralelo* a esta recta, pueden derivarse ecuaciones de un plano en el espacio especificando un punto en el plano y un vector ortogonal a todos los vectores en el plano. Este vector ortogonal se llama **vector normal** al plano y se denota por **n** (vea la figura 4.36).

Vector normal

Definición 4.5.1

Plano

Sea P un punto en el espacio y sea $\mathbf{n}$ un vector dado diferente de cero. Entonces el conjunto de todos los puntos Q para los que $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$ constituye un **plano** en $\mathbb{R}^3$.

Notación. Por lo general, un plano se denota por el símbolo π.

Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo sobre un plano con vector normal $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Si $Q = (x, y, z)$ es otro punto en el plano, entonces $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$.

Como $\overrightarrow{PQ} \perp \mathbf{n}$, tenemos que $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$. Pero esto implica que

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{4.5.8}$$

Una manera más común de escribir la ecuación de un plano se deriva de (4.5.8):

Ecuación cartesiana de un plano

$$ax + by + cz = d \tag{4.5.9}$$
$$\text{donde } d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \overrightarrow{0P} \cdot \mathbf{n}$$

EJEMPLO 4.5.6 Determinación de la ecuación de un plano que pasa por un punto dado y tiene un vector normal dado

Encuentre un plano π que pasa por el punto $(2, 5, 1)$ y que tiene un vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN ► De (4.5.8) se obtiene directamente $(x - 2) - 2(y - 5) + 3(z - 1) = 0$, es decir,

$$x - 2y + 3z = -5 \tag{4.5.10}$$

Los tres planos coordenados se representan de la siguiente manera: