Sumas, productos, cocientes

Estas reglas funcionan del mismo modo que en el cálculo de una variable.

Teorema 10 Sumas, productos, cocientes

(I) **Regla de la multiplicación por una constante**. Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y sea c un número real. Entonces $h(\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \qquad \text{(igualdad de matrices).}$$

(II) **Regla de la suma**. Sean $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciables en $\mathbf{x}_0$. Entonces $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) \qquad \text{(suma de matrices).}$$

(III) **Regla del producto**. Sean $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $\mathbf{x}_0$ y sea $h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$. Entonces $h\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0).$$

(Obsérvese que cada lado de esta ecuación es una matriz $1 \times n$. En el Ejercicio 31 al final de esta sección se presenta una regla del producto más general.)

(IV) **Regla del cociente**. Con las mismas hipótesis que en la regla (III), sea $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ y supongamos que g nunca se anula en U. Entonces h es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = \frac{g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)}{[g(\mathbf{x}_0)]^2}.$$

Demostración Las demostraciones de las reglas (I) a (IV) siguen casi exactamente las mismas líneas que en el caso de una variable, pero con una notación algo diferente. Demostraremos las reglas (I) y (II), y dejaremos las de las reglas (III) y (IV) para el Ejercicio 27.

(I) Para demostrar que $\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$, tenemos que demostrar que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0,$$

es decir, que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|cf(\mathbf{x}) - cf(\mathbf{x}_0) - c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0,$$