8.4 Matrices simétricas y diagonalización ortogonal

En esta sección se verá que las matrices simétricas reales tienen varias propiedades importantes. En particular, se demuestra que cualquier matriz simétrica real tiene n vectores característicos reales linealmente independientes y, por lo tanto, por el teorema 8.3.2, es diagonalizable. Se comenzará demostrando que los valores característicos de una matriz simétrica real son reales.

Nota

Recuerde que A es simétrica si y sólo si $A^\top = A$.

Teorema 8.4.1

Sea A una matriz simétrica real de $n \times n$. Entonces los valores característicos son reales.

Demostración

Sea λ un valor característico de A con vector característico $\mathbf{v}$, es decir, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. En general, $\lambda \in \mathbb{C}$, el vector $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ y el producto interno en $\mathbb{C}^n$ (vea la definición 6.3.1, y el ejemplo 6.3.2 satisface

$$\langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \text{ y } \langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}\rangle = \overline{\alpha}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \qquad (8.4.1)$$

Nota

Esta demostración usa material de la sección 7.5 y debe omitirse si no se cubrió.

Entonces

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \langle \lambda\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \lambda\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \qquad (8.4.2)$$

como A es simétrica, esto es $A = A^\top$, y por el teorema 5.5.1,

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, A^\top\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \lambda\mathbf{v}\rangle = \overline{\lambda}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \qquad (8.4.3)$$

Igualando (8.4.2) y (8.4.3) se tiene

$$\lambda\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \overline{\lambda}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \qquad (8.4.4)$$

Pero $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = ||\mathbf{v}||^2 \neq 0$, ya que $\mathbf{v}$ es un vector característico. Entonces se pueden dividir ambos lados de (8.4.4) entre $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$ para obtener

$$\lambda = \overline{\lambda} \qquad (8.4.5)$$

Si $\lambda = a + ib$, entonces $\overline{\lambda} = a - ib$, y de (8.4.5) se tiene

$$a + ib = a - ib \qquad (8.4.6)$$

lo que se cumple sólo si $b = 0$. Esto muestra que $\lambda = a$; por lo tanto, λ es real y la demostración queda completa.

Se vio en el teorema 8.1.3 que los vectores característicos correspondientes a valores característicos diferentes son linealmente independientes. Para matrices simétricas reales el resultado es más contundente: *los vectores característicos de una matriz simétrica real correspondientes a valores característicos diferentes son ortogonales.*