EJEMPLO 5.7.7 Cálculo del espacio nulo de una matriz de 4 × 4

Encuentre el espacio nulo de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & -14 & 14 \\ 3 & 6 & -12 & 9 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN ► La forma escalonada por renglones reducidos de A es

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -32 & 31 \\ 0 & 1 & 14 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en la prueba del teorema 5.7.5, las soluciones a $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ son las mismas que las soluciones a $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, entonces $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$ da como resultado

$$\begin{aligned} x_1 - 32x_3 + 31x_4 &= 0 \\ x_2 + 14x_3 - 14x_4 &= 0 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} x_1 &= 32x_3 - 31x_4 \\ x_2 &= -14x_3 + 14x_4 \end{aligned}$$

de manera que si $\mathbf{x} \in N_A$, entonces

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 32x_3 + 31x_4 \\ -14x_3 + 14x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 32 \\ -14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -31 \\ 14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base para } N_A}$$

Esto es, $N_A = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 32 \\ -14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -31 \\ 14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

El procedimiento usado en el ejemplo 5.7.7 siempre se puede utilizar para encontrar el espacio nulo de una matriz.

Se hace aquí una observación geométrica interesante:

> Todo vector en el espacio de los renglones de una matriz real es ortogonal a todo vector en su espacio nulo.

En notación abreviada esto se describe como $R_A \perp N_A$. Para ver por qué, considere la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si A es una matriz de $m \times n$, entonces se tiene