$$\omega \wedge (f\eta) = (f\omega) \wedge \eta = f(\omega \wedge \eta).$$

Obsérvese que las reglas (II) y (III) implican la regla (V).

(VI) Se cumplen las siguientes reglas para la multiplicación de 1-formas:

$$\begin{aligned}
dx \wedge dy &= dx\, dy \\
dy \wedge dx &= -\, dx\, dy = (-1)(dx \wedge dy) \\
dy \wedge dz &= dy\, dz = (-1)(dz \wedge dy) \\
dz \wedge dx &= dz\, dx = (-1)(dx \wedge dz) \\
dx \wedge dx &= 0,\ dy \wedge dy = 0,\ dz \wedge dz = 0 \\
dx \wedge (dy \wedge dz) &= (dx \wedge dy) \wedge dz = dx\, dy\, dz.
\end{aligned}$$

(VII) Si f es una 0-forma y ω es cualquier k-forma, entonces $f \wedge \omega = f\omega$.

Utilizando las leyes (I) a (VII), ahora podemos hallar un producto único de cualquier l-forma η y cualquier k-forma ω, si $0 \leq k + l \leq 3$.

Ejemplo 9 Demostrar que $dx \wedge dy\, dz = dx\, dy\, dz$.

Solución Por la regla (VI), $dy\, dz = dy \wedge dz$. Por tanto,

$$dx \wedge dy\, dz = dx \wedge (dy \wedge dz) = dx\, dy\, dz.$$

▲

Ejemplo 10 Si $\omega = x\, dx + y\, dy$ y $\eta = zy\, dx + xz\, dy + xy\, dz$, hallar $\omega \wedge \eta$.

Solución Calculando $\omega \wedge \eta$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \eta &= (x\, dx + y\, dy) \wedge (zy\, dx + xz\, dy + xy\, dz) \\
&= [(x\, dx + y\, dy) \wedge (zy\, dx)] + [(x\, dx + y\, dy) \wedge (xz\, dy)] \\
&\quad + [(x\, dx + y\, dy) \wedge (xy\, dz)] \\
&= xyz(dx \wedge dx) + zy^2(dy \wedge dx) + x^2 z(dx \wedge dy) + xyz(dy \wedge dy) \\
&\quad + x^2 y(dx \wedge dz) + xy^2(dy \wedge dz) \\
&= -zy^2\, dx\, dy + x^2 z\, dx\, dy - x^2 y\, dz\, dx + xy^2\, dy\, dz \\
&= (x^2 z - y^2 z)\; dx\, dy - x^2 y\, dz\, dx + xy^2\, dy\, dz.
\end{aligned}$$

▲

Ejemplo 11 Si $\omega = x\, dx - y\, dy$ y $\eta = x\, dy\, dz + z\, dx\, dy$, hallar $\omega \wedge \eta$.

Solución

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \eta &= (x\, dx - y\, dy) \wedge (x\, dy\, dz + z\, dx\, dy) \\
&= [(x\, dx - y\, dy) \wedge (x\, dy\, dz)] + [(x\, dx - y\, dy) \wedge (z\, dx\, dy)] \\
&= (x^2\; dx \wedge dy\, dz) - (xy\, dy \wedge dy\, dz) + (xz\, dx \wedge dx\, dy) \\
&\quad - (yz\, dy \wedge dx\, dy) \\
&= [x^2\; dx \wedge (dy \wedge dz)] - [xy\, dy \wedge (dy \wedge dz)] + [xz\, dx \wedge (dx \wedge dy)] \\
&\quad - [yz\, dy \wedge (dx \wedge dy)] \\
&= x^2\, dx\, dy\, dz - [xy(dy \wedge dy) \wedge dz] + [xz(dx \wedge dx) \wedge dy] \\
&\quad - [yz(dy \wedge dx) \wedge dy] \\
&= x^2\, dx\, dy\, dz - xy(0 \wedge dz) + xz(0 \wedge dy) + [yz(dy \wedge dy) \wedge dx] \\
&= x^2\, dx\, dy\, dz.
\end{aligned}$$

▲