*d*) ¿Cómo se pueden generar vectores **b** que garanticen una solución? Tome una decisión sobre el procedimiento y descríbalo con un comentario. Pruebe su procedimiento formando con él tres vectores **b** y después resolviendo los sistemas correspondientes (vea el problema 6 de MATLAB en la sección 1.3).

*e*) Pruebe que su procedimiento es válido usando la teoría desarrollada en el texto.

**5.** En este problema descubrirá las relaciones entre la forma escalonada reducida por renglones de una matriz y la información sobre las combinaciones lineales de las columnas de $A$. La parte de MATLAB del problema implica, únicamente, el cálculo de algunas formas escalonadas reducidas por renglones. La teoría se basa en los hechos de que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ significa que $\mathbf{x}$ es una solución al sistema $[A\ \mathbf{0}]$ y que

$$\mathbf{0} = x_1(\text{col } 1 \text{ de } A) + \cdots + x_n(\text{col } n \text{ de } A)$$

*a*) **i)** Sea $A$ la matriz del problema 4*c*) de MATLAB en esta sección. Encuentre `rref(A)`. (El resto de este inciso requiere de trabajo con papel y lápiz.)

**ii)** Encuentre las soluciones al sistema homogéneo escrito en términos de las elecciones naturales de las variables arbitrarias.

**iii)** Establezca una variable arbitraria igual a 1 y las otras variables arbitrarias iguales a 0 y encuentre las otras incógnitas para producir un vector solución $\mathbf{x}$. Para esta $\mathbf{x}$, escriba lo que dice la afirmación

$$\mathbf{0} = A\mathbf{x} = x_1(\text{col } 1 \text{ de } A) + \cdots + x_n(\text{col } n \text{ de } A)$$

y despeje la columna de $A$ que corresponde a la variable arbitraria que igualó a 1. Verifique sus datos.

**iv)** Ahora establezca otra variable arbitraria igual a 1 y las otras variables arbitrarias iguales a 0. Repita iii). Continúe de la misma manera para cada variable arbitraria.

**v)** Revise `rref(A)` y vea si reconoce algunas relaciones entre lo que acaba de descubrir y los números en `rref(A)`.

*b*) Sea $A$ la matriz en el problema 1*b*) de MATLAB en esta sección. Repita las instrucciones anteriores.

*c*) Sea $A$ una matriz aleatoria de $6 \times 6$. Modifique $A$ de manera que

```
A(:,3) = 2*A(:,2) -3*A(:,1)
A(:,5) = -A(:,1) +2*A(:,2) -3*A(:,4)
A(:,6) = A(:,2) +4*A(:,4)
```

Repita las instrucciones anteriores.

## 2.4 Inversa de una matriz cuadrada

En esta sección se definen dos tipos de matrices que son fundamentales en la teoría de matrices. En primer lugar, se presenta un ejemplo sencillo. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$. Observe que $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y que y $BA = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, es decir, $AB = BA = I_2$. La matriz $I_2$ se llama *matriz identidad* de $2 \times 2$. La matriz $B$ se llama la *matriz inversa* de $A$ y se denota por $A^{-1}$. De forma similar, podemos decir que $A$ es la *matriz inversa* de $B$ y denotarla por $B^{-1}$.