$$\frac{\partial Q}{\partial k} = \frac{1}{q}\frac{\partial Q}{\partial K} = \lambda = \frac{1}{p}\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial Q}{\partial l}.$$

Luego en el punto de producción óptima, el cambio marginal en la producción por cada euro de inversión adicional en equipos es igual al cambio marginal de producción por cada euro adicional de mano de obra, y λ es este valor común. En el punto óptimo, el intercambio de un euro de inversión en equipos por un euro de inversión en mano de obra no varía la producción. Lejos del punto óptimo las producciones marginales son diferentes y uno u otro cambio incrementará la producción.

Criterio de la derivada segunda para extremos condicionados

En la Sección 3.3 hemos desarrollado un criterio de la derivada segunda para determinar los extremos de funciones de varias variables examinando el término de segundo grado de la serie de Taylor de f. Si la matriz hessiana de las derivadas parciales segundas es definida positiva o definida negativa en un punto crítico de f, este punto es un punto de mínimo o de máximo relativo, respectivamente.

Naturalmente surge la pregunta de si hay un criterio de la derivada segunda para problemas de máximos y mínimos *sometidos a restricciones*. La respuesta es afirmativa y el criterio implica a una matriz llamada *hessiana orlada*. En primer lugar vamos a exponer el criterio y cómo se aplica al caso de una función $f(x, y)$ de dos variables sujeta a la restricción $g(x, y) = c$.

Teorema 10 Sean $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones suaves (al menos C^2). Sean $\mathbf{v}_0 \in U$, $g(\mathbf{v}_0) = c$ y S la curva de nivel para g con valor c. Supóngase que $\nabla g(\mathbf{v}_0) \neq \mathbf{0}$ y que existe un número real λ tal que $\nabla f(\mathbf{v}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{v}_0)$. Formamos la función auxiliar $h = f - \lambda g$ y el determinante de la matriz ***hessiana orlada***

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x} & -\dfrac{\partial g}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix} \quad \text{evaluada en } \mathbf{v}_0.$$

(i) Si $|\overline{H}| > 0$, entonces $\mathbf{v}_0$ es un punto de máximo local de $f|S$.

(ii) Si $|\overline{H}| < 0$, entonces $\mathbf{v}_0$ es un punto de mínimo local de $f|S$.

(iii) Si $|\overline{H}| = 0$, el criterio no es concluyente y $\mathbf{v}_0$ puede ser un punto de mínimo, de máximo, o ninguno de ellos.