Ejemplo 8 Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = xy$. Entonces f es continua, ya que, por los teoremas de los límites y el Ejemplo 4,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} xy = \left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x\right)\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y\right) = x_0 y_0.$$

▲

Podemos ver usando el mismo método que cualquier polinomio $p(x,y)$ [por ejemplo, $p(x,y) = 3x^2 - 6xy^2 + y^3$] en x e y es continuo.

Ejemplo 9 La función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \text{ o } y \leq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

no es continua en (0, 0) ni en ningún punto del eje x positivo o del eje y positivo. De hecho, si $(x_0, y_0) = \mathbf{u}$ es uno de tales puntos (es decir, $x_0 = 0$ e $y_0 \geq 0$, o $y_0 = 0$ y $x_0 \geq 0$) y $\delta > 0$, existen puntos $(x,y) \in D_\delta(\mathbf{u})$, un entorno de $\mathbf{u}$, con $f(x,y) = 1$ y otros puntos $(x,y) \in D_\delta(\mathbf{u})$ con $f(x,y) = 0$. Por tanto, *no* es cierto que $f(x,y) \to f(x_0, y_0) = 1$ cuando $(x,y) \to (x_0, y_0)$. ▲

Para demostrar que una función es continua, podemos utilizar los teoremas de los límites (véanse el Teorema 3 y el Ejemplo 7). Si transcribimos esos resultados en términos de continuidad, llegamos a lo siguiente:

Teorema 4 Propiedades de las funciones continuas Supóngase que $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea c un número real.

(I) Si f es continua en $\mathbf{x}_0$, también lo es cf, donde $(cf)(\mathbf{x}) = c[f(\mathbf{x})]$.

(II) Si f y g son continuas en $\mathbf{x}_0$, también lo es $f + g$, donde la suma de f y g se define como $(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$.

(III) Si f y g son continuas en $\mathbf{x}_0$ y $m = 1$, entonces la función producto fg definida por $(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ es continua en $\mathbf{x}_0$.

(IV) Si $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbf{x}_0$ y no se anula en A, entonces el cociente $1/f$ es continuo en $\mathbf{x}_0$, donde $(1/f)(\mathbf{x}) = 1/f(\mathbf{x})$.

(V) Si $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$, entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$ si y solo si cada una de las funciones con valores reales $f_1, \ldots, f_m$ es continua en $\mathbf{x}_0$.

A menudo se emplea una variante de la propiedad (IV): si $f(\mathbf{x}_0) \neq 0$ y f es continua, entonces $f(\mathbf{x}) \neq 0$ en un entorno de $\mathbf{x}_0$ y, por tanto, $1/f$ está definida en dicho entorno y es continua en $\mathbf{x}_0$.