Si en el Teorema 6 se tiene $D < 0$, entonces tenemos un punto de silla. De hecho, podemos demostrar que $f(x, y)$ es mayor que $f(x_0, y_0)$ cuando nos alejamos de (x_0, y_0) en una cierta dirección y menor cuando nos alejamos en la dirección ortogonal (véase el Ejercicio 32). La apariencia general es similar a la figura mostrada en la Figura 3.3.3. Para determinar la apariencia de la gráfica cerca de (x_0, y_0) en el caso de $D = 0$ se precisa un análisis más profundo.

Resumamos ahora el procedimiento para tratar con funciones de dos variables: después de localizar todos los puntos críticos y calcular sus correspondientes formas cuadráticas hessianas, vemos que algunas de estas hessianas puede ser definidas positivas, indicando que se trata de un punto de mínimo relativo; otras pueden ser definidas negativas, indicando un punto de máximo relativo; y algunas tomarán valores positivos y negativos, indicando puntos de silla. La forma de la gráfica en un punto de silla donde $D < 0$ es como la mostrada en la Figura 3.3.3. Los puntos críticos en los que $D \neq 0$ se denominan ***puntos críticos no degenerados***. Tales puntos son puntos de máximo, de mínimo o de silla. Los restantes puntos críticos, donde $D = 0$, se pueden examinar directamente mediante conjuntos de nivel, secciones o cualquier otro método. Tales puntos críticos se dice que son ***degenerados***; los métodos desarrollados en este capítulo no nos proporcionan una idea del comportamiento de una función cerca de tales puntos, por lo que los examinaremos caso por caso.

Ejemplo 7 Localizar los puntos de máximo y de mínimo relativos y los puntos de silla de la función

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1).$$

Solución En primer lugar tenemos que localizar los puntos críticos de esta función; según el Teorema 3, calculamos

$$\nabla f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}\,\mathbf{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}\,\mathbf{j}.$$

Así, $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ si y solo si $(x, y) = (0, 0)$, de modo que el único punto crítico de f es $(0, 0)$. Ahora tenemos que determinar si este es un punto de máximo, de mínimo o de silla. Las derivadas parciales segundas son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - (2x)(2x)}{(x^2 + y^2 + 1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - (2y)(2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2},$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{-2x(2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0, 0) = 0,$$