Ejemplo 2 El cubo unidad W dado por

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

es una región elemental simétrica en el espacio (véanse las Figuras 8.4.3 y 5.5.5).

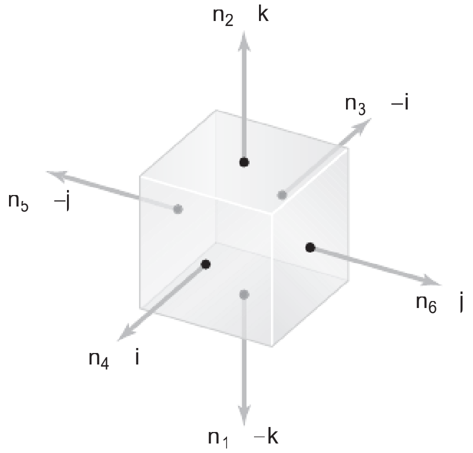

Figura 8.4.3 La orientaci ón exterior en el cubo.

Expresamos las caras como sigue

$$\begin{aligned}
&S_1\colon z = 0, && 0 \leq x \leq 1, && 0 \leq y \leq 1\\
&S_2\colon z = 1, && 0 \leq x \leq 1, && 0 \leq y \leq 1\\
&S_3\colon x = 0, && 0 \leq y \leq 1, && 0 \leq z \leq 1\\
&S_4\colon x = 1, && 0 \leq y \leq 1, && 0 \leq z \leq 1\\
&S_5\colon y = 0, && 0 \leq x \leq 1, && 0 \leq z \leq 1\\
&S_6\colon y = 1, && 0 \leq x \leq 1, && 0 \leq z \leq 1.
\end{aligned}$$

A partir de la Figura 8.4.3, vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_2 &= \mathbf{k} = -\mathbf{n}_1,\\
\mathbf{n}_4 &= \mathbf{i} = -\mathbf{n}_3,\\
\mathbf{n}_6 &= \mathbf{j} = -\mathbf{n}_5,
\end{aligned}$$

y por tanto para un campo vectorial continuo $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$,

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial W} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = -\iint_{S_1} F_3\, dS + \iint_{S_2} F_3\, dS - \iint_{S_3} F_1\, dS\\
+ \iint_{S_4} F_1\, dS - \iint_{S_5} F_2\, dS + \iint_{S_6} F_2\, dS.
\end{aligned}$$

Teorema de Gauss

Hemos llegado al último de los tres teoremas centrales de este capítulo. Este teorema relaciona las integrales de superficie con las integrales de volumen; en otras palabras, el teorema establece que si W es una región en $\mathbb{R}^3$, entonces el flujo de un campo vectorial $\mathbf{F}$ que sale a través de la superficie cerrada ∂W es igual a la integral de div $\mathbf{F}$ sobre W. Comenzamos suponiendo que W es una región elemental simétrica (Figura 5.5.5).