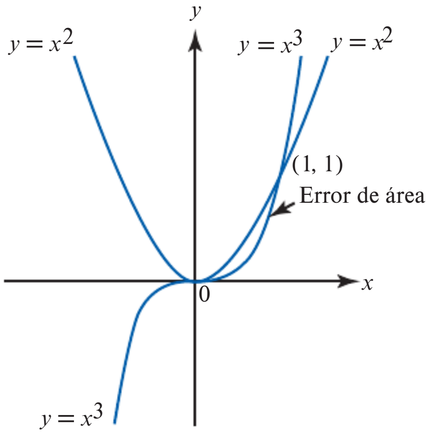

Figura 6.8

Ilustración del error de área.

Cálculo

i) Error máximo = $\text{máx}(x^2 - x^3)$. Para calcular esto, se calcula $\frac{d}{dx}(x^2 - x^3) = 2x - 3x^2 = x(2 - 3x) = 0$ cuando $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$. El error máximo ocurre cuando $x = \frac{2}{3}$ y está dado por $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right] = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27} \approx 0.148$.

ii) Error de área = $\int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \approx 0.083$. La figura 6.8 ilustra esto.

iii) Error cuadrático medio = $\int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = \int_0^1 (x^4 - 2x^5 + x^6)\, dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{1}{105} \approx 0.00952$.

Las medidas de error son útiles. El error cuadrático medio se utiliza en estadística y en otras aplicaciones. Se puede usar el teorema de aproximación de la norma para encontrar el polinomio único de grado n que se aproxima a una función continua dada con el error cuadrático medio más pequeño.

Del ejemplo 6.3.4, $C[a, b]$ es un espacio con producto interno con

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\, dt \qquad \textbf{(6.3.13)}$$

Para todo entero positivo, n, $\mathbb{P}_n[a, b]$, el espacio de polinomios de grado n definidos sobre $[a, b]$, es un subespacio de dimensión finita de $C[a, b]$. Se puede calcular, para $f \in C[a, b]$ y $p_n \in \mathbb{P}_n[a, b]$,

$$\begin{aligned} \| f - p_n \|^2 = \langle f - p_n, f - p_n\rangle &= \int_a^b (f(t) - p_n(t))(f(t) - p_n(t))\, dt \\ &= \int_a^b | f(t) - p_n(t) |^2\, dt = \text{error cuadrático medio} \end{aligned}$$

Así, por el teorema 6.3.6,

> El polinomio de grado n que se aproxima a una función continua con el error cuadrático medio más pequeño está dado por
>
> $$p_n = \text{proy}_{\mathbb{P}_n} f \qquad \textbf{(6.3.14)}$$