$\sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)\}$. (Vea el ejemplo 6.3.8.) Sean $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Entonces $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$. Recuerde que en $\mathbb{P}_2[0, 1]$ se definió $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)$ $q(x)\,dx$. Defina $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{3}(2x - 1)$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)\}$; por tanto,

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + b\sqrt{3}(2x - 1) + c\sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$$

y

$$\begin{aligned}
\langle T\mathbf{x}, T\mathbf{y}\rangle &= \int_0^1 [a_1 + b_1\sqrt{3}(2x - 1) + c_1\sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)] \\
&\qquad \times [a_2 + b_2\sqrt{3}(2x - 1) + c_2\sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)]\,dx \\
&= a_1a_2\int_0^1 dx + \int_0^1 b_1b_2 3\,(2x - 1)^2\,dx + \int_0^1 c_1c_2[5(6x^2 - 6x + 1)^2]\,dx \\
&\qquad + (a_1b_2 + a_2b_1)\int_0^1 \sqrt{3}(2x - 1)\,dx \\
&\qquad + (a_1c_2 + a_2c_1)\int_0^1 \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)\,dx \\
&\qquad + (b_1c_2 + b_2c_1)\int_0^1 [\sqrt{3}(2x - 1)][\sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)]\,dx \\
&= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2
\end{aligned}$$

Aquí se ahorró tiempo usando el hecho de que $\{1, \sqrt{3}(2x - 1), \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)\}$ es un conjunto ortonormal. Por tanto, $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2[0, 1]$ es una isometría.

RESUMEN 7.5

- ***Isometría***

  Una transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se llama isometría si para todo $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$

  $$|T\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$$

- Si T es una isometría de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, entonces para todo $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$

  $$|T\mathbf{x} - T\mathbf{y}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{y} \quad T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

- Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una isometría, entonces:

  i) Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ es un conjunto ortogonal, entonces $T\mathbf{u}_1, T\mathbf{u}_2, \ldots, T\mathbf{u}_n$ es un conjunto ortogonal.
  ii) T es un isomorfismo.

- Una transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría si y sólo si la representación matricial de T es ortogonal.