Solución Esta trayectoria no es suave, porque $x(t) = |t|$ no es diferenciable en $t = 0$, como tampoco $y(t) = |t - \frac{1}{2}|$ es diferenciable en t=$\frac{1}{2}$. Sin embargo, si dividimos el intervalo $[-1, 1]$ en los trozos $[-1, 0]$, $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$, vemos que $x(t)$ e $y(t)$ tienen derivadas continuas en cada uno de los intervalos $[-1, 0]$, $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$. (Véase la Figura 4.2.2.)

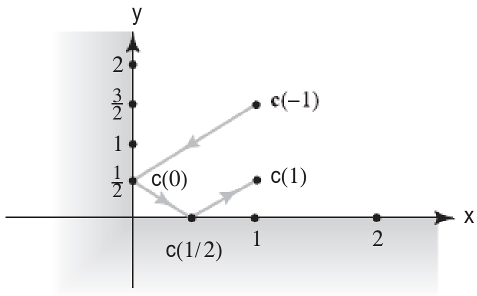

Figura 4.2.2 Una trayectoria suave a trozos.

En el intervalo $[-1, 0]$, $x(t) = -t, y(t) = -t + \frac{1}{2}$, de modo que $\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{2}$. Por tanto, la longitud de arco de $\mathbf{c}$ entre -1 y 0 es $\int_{-1}^{0} \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}$. Análogamente, en $[0, \frac{1}{2}]$, $x(t) = t, y(t) = -t + \frac{1}{2}$, y de nuevo $\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{2}$, de manera que la longitud de arco de $\mathbf{c}$ entre 0 y $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Finalmente, en $[\frac{1}{2}, 1]$ tenemos $x(t) = t, y(t) = t - \frac{1}{2}$, y la longitud de arco de $\mathbf{c}$ entre $\frac{1}{2}$ y 1 es $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Por tanto, la longitud de arco total de $\mathbf{c}$ es $2\sqrt{2}$. Por supuesto, también podríamos haber calculado la respuesta como la suma de las distancias desde $\mathbf{c}(-1)$ a $\mathbf{c}(0)$, desde $\mathbf{c}(0)$ a $\mathbf{c}(\frac{1}{2})$ y desde $\mathbf{c}(\frac{1}{2})$ a $\mathbf{c}(1)$. ▲

Ejemplo 4 Hallar la longitud de arco de $(\cos t, \operatorname{sen} t, t^2)$, $0 \le t \le \pi$.

Solución La trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t^2)$ tiene como vector velocidad $\mathbf{v} = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2t)$. Puesto que

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 4t^2} = \sqrt{1 + 4t^2} = 2\sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2},$$

la longitud de arco es

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{\pi} 2\sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\, dt.$$

Esta integral puede evaluarse usando la siguiente fórmula de la tabla de integrales:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \log\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)\right] + C.$$

Por tanto,

$$L(\mathbf{c}) = 2 \cdot \frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \log\left(t + \sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)\right]\Bigg|_{t=0}^{\pi}$$

$$= \pi\sqrt{\pi^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\log\left(\pi + \sqrt{\pi^2 + \frac{1}{4}}\right) - \frac{1}{4}\log\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)$$