Demostración Sea $a = \mathbf{y}\cdot\mathbf{y}$ y $b = -\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$. Si $a = 0$, el teorema es claramente válido, porque entonces $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ y ambos lados de la desigualdad se reducen a 0. Por tanto, podemos suponer que $a \neq 0$. Por el Teorema 3 tenemos

$$\begin{aligned} 0 \le (a\mathbf{x} + b\mathbf{y})\cdot(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) &= a^2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2ab\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + b^2\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \\ &= (\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})^2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - (\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2. \end{aligned}$$

Dividiendo entre $\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}$ se obtiene $0 \le (\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}) - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2$, es decir, $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 \le (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2$. Tomando raíces cuadradas en ambos lados de esta desigualdad se llega al resultado deseado. ■

La desigualdad de Cauchy–Schwarz posee una consecuencia muy útil en términos de longitudes. La desigualdad triangular en $\mathbb{R}^3$ es clara geométricamente y ya la hemos estudiado en la Sección 1.2. La demostración *analítica* de la desigualdad triangular que hemos proporcionado en la Sección 1.2 funciona exactamente igual en $\mathbb{R}^n$ y prueba lo siguiente:

> **Corolario Desigualdad triangular en $\mathbb{R}^n$** Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Entonces
>
> $$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Si el Teorema 4 y su corolario se desarrollan algebraicamente, se convierten en las siguientes útiles desigualdades:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2};$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

Ejemplo 1 Sea $\mathbf{x} = (1, 2, 0, -1)$ e $\mathbf{y} = (-1, 1, 1, 0)$. Verificar el Teorema 4 y su corolario para este caso.

Solución

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \\ \|\mathbf{y}\| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{3} \\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= 1(-1) + 2\cdot 1 + 0\cdot 1 + (-1)0 = 1 \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (0, 3, 1, -1) \\ \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &= \sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}. \end{aligned}$$

Calculamos $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 1 \le 4{,}24 \approx \sqrt{6}\sqrt{3} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$, que verifica el Teorema 4. Del mismo modo, podemos comprobar su corolario:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &= \sqrt{11} \approx 3{,}32 \\ &\le 4{,}18 = 2{,}45 + 1{,}73 \approx \sqrt{6} + \sqrt{3} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \end{aligned}$$ ▲