Ejercicios

En los Ejercicios 1 a 4, verificar el teorema de la divergencia para la región W, la frontera ∂W orientada hacia el exterior y el campo vectorial $\mathbf{F}$ dados.

1. $W = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ y $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

2. W como en el Ejercicio 1 y $\mathbf{F} = zy\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.

3. $W = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ (la bola unidad) y $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

4. W como en el Ejercicio 3 y $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

5. Utilizar el teorema de la divergencia para calcular el flujo de $\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + (y-z)\mathbf{j} + (z-x)\mathbf{k}$ hacia el exterior de la esfera unidad.

6. Sea $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$. Calcular la integral de superficie de $\mathbf{F}$ sobre la esfera unidad.

7. Calcular $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y W es el cubo unidad (en el primer octante). Realizar el cálculo directamente y comprobarlo utilizando el teorema de la divergencia.

8. Repetir el Ejercicio 7 para

(a) $\mathbf{F} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

(b) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

9. Sea $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$. Calcular $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para cada una de las siguientes regiones W:

(a) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

(b) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ y $x \geq 0$.

(c) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ y $x \leq 0$.

10. Repetir el Ejercicio 9 para $\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + (y-z)\mathbf{j} + (z-x)\mathbf{k}$.

11. Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = (x - y^2)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$ hacia el exterior del sólido rectangular $[0,1] \times [1,2] \times [1,4]$.

12. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = 3xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ y S es la superficie de la esfera unidad.

13. Sea W la pirámide con el vértice superior $(0,0,1)$ y cuya base tiene vértices en $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(1,1,0)$. Sea S la superficie cerrada bidimensional que limita a W, orientada hacia el exterior de W. Utilizar el teorema de Gauss para calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2y, 3y^2z, 9z^2x).$$

14. Sea W el sólido tridimensional delimitado por las superficies $x = y^2$, $x = 9$, $z = 0$ y $x = z$. Sea S la frontera de W. Utilizar el teorema de Gauss para determinar el flujo de $\mathbf{F}(x,y,z) = (3x - 5y)\mathbf{i} + (4z - 2y)\mathbf{j} + (8yz)\mathbf{k}$ a través de S: $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

15. Calcular $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA$, donde $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ y W es el cubo unidad en el primer octante. Realizar el cálculo directamente y comprobarlo utilizando el teorema de la divergencia.

16. Calcular la integral de superficie $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA$,

donde $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z(x^2 + y^2)^2\mathbf{k}$ y ∂W es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

17. Demostrar que

$$\iiint_W (\nabla f) \cdot \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial W} f\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS - \iiint_W f\, \nabla \cdot \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz.$$

18. Demostrar la identidad

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}).$$

19. Demostrar que $\iiint_W (1/r^2)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial W} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}/r^2)\, dS$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

20. Dados los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^3$ y los números ("cargas") $q_1, \ldots, q_k$. Definimos la función ϕ by $\phi(x,y,z) = \sum_{i=1}^k q_i/(4\pi\, \|\mathbf{r} - \mathbf{v}_i\|)$, donde $\mathbf{r} = (x,y,z)$. Demostrar que para una superficie cerrada S y $\mathbf{E} = -\nabla\phi$,

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q,$$

donde Q es la carga total en el interior de S. (Suponer que se aplica la ley de Gauss del Teorema 10 y que ninguna de la cargas está situada en S.)