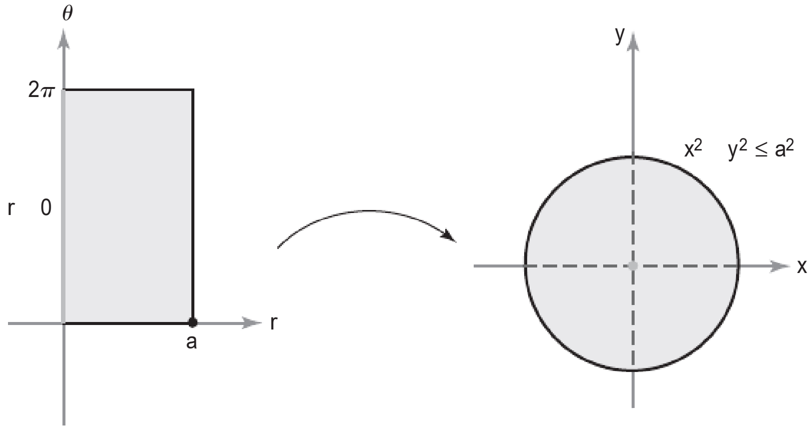

Figura 6.2.7 La imagen del rectángulo D^* después de la transformación a coordenadas polares es el disco D.

Ejemplo 4 Calcular $\iint_D \log(x^2+y^2)\,dx\,dy$, donde D es la región en el primer cuadrante comprendida entre los arcos de las circunferencias $x^2+y^2=a^2$ y $x^2+y^2=b^2$, donde $0<a<b$ (Figura 6.2.8).

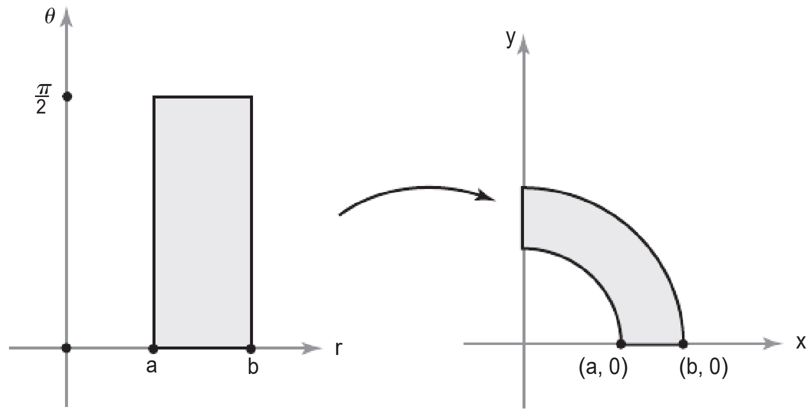

Figura 6.2.8 La aplicación de cambio a coordenadas polares transforma un rectángulo D^* en una parte de un anillo D.

Solución Estas circunferencias tienen las siguientes ecuaciones en coordenadas polares $r=a$ y $r=b$. Además, en el integrando aparace $r^2=x^2+y^2$. Por tanto, un cambio a coordenadas polares simplificará tanto el integrando como la región de integración. De acuerdo con el Ejemplo 7 de la Sección 6.1, la transformación a coordenadas polares

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

transforma el rectángulo D^*, dado por $a\le r\le b, 0\le\theta\le\pi/2$ en la región D. Esta transformación es inyectiva en D^* y, por tanto, por la fórmula (7), tenemos

$$\begin{aligned}\iint_D \log(x^2+y^2)\,dx\,dy &= \int_a^b\int_0^{\pi/2} r\log r^2\,d\theta\,dr\\ &= \frac{\pi}{2}\int_a^b r\log r^2\,dr = \frac{\pi}{2}\int_a^b 2r\log r\,dr.\end{aligned}$$