La factorización es el resultado que se obtuvo en el ejemplo 2.7.1 con un esfuerzo considerablemente menor.

Factorización *LU* para matrices singulares

Si A es una matriz cuadrada singular (no invertible), la forma escalonada por renglones de A tendrá al menos un renglón de ceros, al igual que la forma triangular de A. Es posible que todavía se pueda escribir $A = LU$ o $PA = LU$, pero en este caso U no será invertible y L y U pueden no ser únicas.

EJEMPLO 2.7.6 Cuando *A* no es invertible, la factorización *LU* puede no ser única

Haciendo uso de la técnica de los ejemplos 2.7.1 o 2.7.5 se obtiene la factorización

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = LU$$

Sin embargo, si se hace $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & x & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A = L_1U$ para cualquier número real x.

En este caso, A tiene una factorización LU pero no es única. Debe verificarse que A no es invertible.

Por otro lado,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L'U'$$

y esta factorización es única, aunque B no sea invertible. El lector debe verificar estos datos.

Nota

Para una matriz cuadrada no invertible, su factorización *LU* puede ser o no única.

Factorización *LU* para matrices no cuadradas

En ocasiones es posible encontrar factorizaciones LU para matrices que no son cuadradas.

Teorema 2.7.5 Factorización *LU* para matrices no cuadradas

Sea A una matriz de $m \times n$. Suponga que A se puede reducir a su forma escalonada por renglones sin realizar permutaciones. Entonces existen una matriz L triangular inferior de $m \times m$ con unos en la diagonal y una matriz U de $m \times n$ con $u_{ij} = 0$ si $i > j$ tales que $A = LU$.

Observación: La condición $U_{ij} = 0$ si $i > j$ significa que U es triangular superior en el sentido de que todos los elementos que se encuentran por debajo de la diagonal principal son 0. Por ejemplo, una matriz U de 3×5 que satisface esta condición tiene la forma