Teorema 3.3.2

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

$$(A)(\text{adj } A) = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = (\det A)I \tag{3.3.5}$$

Demostración

Sea $C = (c_{ij}) = (A)(\text{adj } A)$. Entonces

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.3.6}$$

Se tiene

$$c_{ij} = (\text{renglón } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de adj } A)$$

$$(a_{i1}\, a_{i2}\; \mathrm{L}\; a_{in}) \begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \mathrm{M} \\ A_{jn} \end{pmatrix}$$

Así

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \mathrm{L} + a_{1n}A_{jn} \tag{3.3.7}$$

Ahora, si $i = j$, la suma en (3.3.7) es igual a $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$ que es la expansión de $\det A$ sobre el renglón i de A. Por otro lado, si $i \neq j$, entonces del teorema 3.2.6, la suma en (3.3.7) es igual a cero. Por tanto,

$$c_{ij} = \begin{cases} \det A & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Esto prueba el teorema.

Ahora se puede establecer el resultado principal.

Teorema 3.3.3

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$. Si $\det A \neq 0$, entonces

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj } A} \tag{3.3.8}$$