Si la tasa relativa de crecimiento es constante, entonces se tiene

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a \tag{8.7.2}$$

o

$$x'(t) = ax(t) \tag{8.7.3}$$

La ecuación (8.7.3) se denomina **ecuación diferencial** porque es una ecuación que incluye una derivada. No es difícil demostrar que las únicas soluciones a (8.7.3) son de la forma

**Ecuación diferencial**

$$x(t) = ce^{at} \tag{8.7.4}$$

donde $c$ es una constante arbitraria. Sin embargo, si $x(t)$ representa alguna cantidad física, la práctica usual es especificar un **valor inicial** $x_0 = x(0)$ de la cantidad. Después, al sustituir $t = 0$ en (8.7.4) se tiene $x_0 = x(0) = ce^{a \cdot 0} = c$, o sea,

**Valor inicial**

$$x(t) = x_0 e^{at} \tag{8.7.5}$$

La función $x(t)$ dada por (8.7.5) es la solución única a (8.7.3) que satisface la condición inicial $x_0 = x(0)$.

La ecuación (8.7.3) surge en muchas aplicaciones interesantes. Sin duda, algunas se encuentran en los libros de cálculo, en el capítulo que introduce la función exponencial. En esta sección se considera la generalización de la ecuación (8.7.3).

En el modelo anterior se busca una función desconocida. Con frecuencia ocurre que existen varias funciones ligadas por varias ecuaciones diferenciales. Más adelante se darán ejemplos. Considere el siguiente sistema de $n$ ecuaciones diferenciales con $n$ funciones desconocidas:

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}\,x_2(t) + \cdots + a_{1n}\,x_n(t)\\
x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}\,x_2(t) + \cdots + a_{2n}\,x_n(t)\\
\vdots\quad & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}\,x_2(t) + \cdots + a_{nn}\,x_n(t)
\end{aligned} \tag{8.7.6}$$

donde las cantidades $a_{ij}$ son números reales. El sistema (8.7.6) se denomina **sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de $n \times n$**. El término "primer orden" significa que sólo ocurren derivadas de primer orden en el sistema.

Ahora sea

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

En este caso, $\mathbf{x}(t)$ se denomina **función vectorial**. Se define

**Función vectorial**

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

Entonces, si se define la matriz de $n \times n$