12. Calcular la integral iterada:

$$\int_1^3 \int_1^2 \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\, dx\, dy.$$

13. Calcular la integral iterada:

$$\int_0^1 \int_0^1 (3x+2y)^7\, dx\, dy.$$

14. Hallar el volumen acotado por la gráfica de $f(x,y) = 1 + 2x + 3y$, el rectángulo $[1,2] \times [0,1]$ y los cuatro lados verticales del rectángulo R, como en la Figura 5.1.1.

15. Repetir el Ejercicio 14 para la función $f(x,y) = x^4 + y^2$ y el rectángulo $[-1,1] \times [-3,-2]$.

5.2 La integral doble sobre un rectángulo

Ya estamos preparados para dar una definición rigurosa de la integral doble como el límite de una secuencia de sumas. La emplearemos luego para *definir* el volumen de la región bajo la gráfica de una función $f(x,y)$. No será necesario que $f(x,y) \geq 0$; pero si $f(x,y)$ toma valores negativos, interpretaremos la integral como un volumen con signo, como se hace con el área bajo la gráfica de una función de una variable. Además, veremos algunas de las propiedades algebraicas fundamentales de la integral doble y probaremos el teorema de Fubini, el cual establece que la integral doble se puede calcular como una integral iterada. Para empezar, vamos a establecer la notación para las particiones y sumas.

Definición de integral

Consideremos un rectángulo cerrado $R \subset \mathbb{R}^2$; es decir, R es un producto cartesiano de dos intervalos: $R = [a,b] \times [c,d]$. Por una ***partición regular*** de R de orden n entendemos dos colecciones ordenadas de $n+1$ puntos igualmente espaciados $\{x_j\}_{j=0}^n$ y $\{y_k\}_{k=0}^n$; es decir, los puntos que satisfacen

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

y

$$x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}, \qquad y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n}$$

(véase la Figura 5.2.1).

Se dice que una función $f(x,y)$ está ***acotada*** si existe un número $M > 0$ tal que $-M \leq f(x,y) \leq M$ para todo (x,y) en el dominio de f. Una función continua en un rectángulo *cerrado* está siempre acotada pero, por ejemplo, $f(x,y) = 1/x$ sobre $(0,1] \times [0,1]$ es continua pero no acotada, ya que $1/x$ se hace arbitrariamente grande para x próximo a 0. El rectángulo $(0,1] \times [0,1]$ no es cerrado, porque el punto 0 falta en el primer factor.

Sea R_{jk} el rectángulo $[x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ y sea $\mathbf{c}_{jk}$ *cualquier* punto de R_{jk}. Supongamos que $f\colon R \to \mathbb{R}$ es una función real acotada. Consideremos la suma