Demostrar que los subconjuntos del plano de los Ejercicios 18–21 son abiertos:

18. $A = \{(x, y) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$

19. $B = \{(x, y) \mid y > 0\}$

20. $C = \{(x, y) \mid 2 < x^2 + y^2 < 4\}$

21. $D = \{(x, y) \mid x \neq 0 \text{ y } y \neq 0\}$

22. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ el disco unidad abierto $D_1(0, 0)$ con el punto $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$ añadido y sea $f\colon A \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$ la función constante $f(\mathbf{x}) = 1$. Demostrar que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 1$.

23. Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas, demostrar que las siguientes funciones son continuas

$$f^2 g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto [f(\mathbf{x})]^2 g(\mathbf{x})$$

y

$$f^2 + g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto [f(\mathbf{x})]^2 + g(\mathbf{x})$$

24. (a) Demostrar que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (1 - x)^8 + \cos(1 + x^3)$ es continua.

(b) Demostrar que la aplicación $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 e^x/(2 - \operatorname{sen} x)$ es continua.

25. (a) ¿Puede hacerse $[\operatorname{sen}(x+y)]/(x+y)$ continua definiéndola adecuadamente en (0, 0)?

(b) ¿Puede hacerse $xy/(x^2 + y^2)$ continua definiéndola adecuadamente en (0, 0)?

(c) Demostrar que $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto ye^x + \operatorname{sen} x + (xy)^4$ es continua.

26. Utilizando ε y δ o coordenadas esféricas, demostrar que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$$

27. Utilizar la formulación ε-δ de los límites para demostrar que $x^2 \to 4$ cuando $x \to 2$. Realizar esta demostración usando el Teorema 3.

28. (a) Demostrar que para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $s < t, D_s(\mathbf{x}) \subset D_t(\mathbf{x})$.

(b) Demostrar que si U y V son entornos de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces también lo son $U \cap V$ y $U \cup V$.

(c) Demostrar que los puntos frontera de un intervalo abierto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ son los puntos a y b.

29. Suponer que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ están en $\mathbb{R}^n$ y que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Demostrar que existe una función continua $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $f(\mathbf{x}) = 1, f(\mathbf{y}) = 0$ y $0 \leq f(\mathbf{z}) \leq 1$ para todo $\mathbf{z}$ en $\mathbb{R}^n$.

30. Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $\mathbf{x}_0$ un punto frontera de A. Decimos que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \infty$ si para todo $N > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ y $\mathbf{x} \in A$ implican que $f(\mathbf{x}) > N$.

(a) Demostrar que $\lim_{x\to1} (x - 1)^{-2} = \infty$.

(b) Demostrar que $\lim_{x\to0} 1/|x| = \infty$. ¿Es cierto que $\lim_{x\to0} 1/x = \infty$?

(c) Demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1/(x^2+y^2) = \infty$.

31. Sea $b \in \mathbb{R}$ y $f\colon \mathbb{R}\backslash\{b\} \to \mathbb{R}$ una función. Escribimos $\lim_{x\to b-} f(x) = L$ y decimos que L es el ***límite por la izquierda*** de f en b si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $x < b$ y $0 < |x - b| < \delta$ implican que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(a) Formular una definición de ***límite por la derecha***, o $\lim_{x\to b+} f(x)$.

(b) Hallar $\lim_{x\to0-} 1/(1 + e^{1/x})$ y $\lim_{x\to0+} 1/(1 + e^{1/x})$.

(c) Dibujar la gráfica de $1/(1 + e^{1/x})$.

32. Demostrar que f es continua en $\mathbf{x}_0$ si y solo si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| = 0.$$

33. Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que, para constantes positivas K y α, satisface $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$ para todos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en A . Demostrar que f es continua. Las funciones que verifican la propiedad anterior se llaman ***continuas Hölder*** o, si $\alpha = 1$, ***continuas Lipschitz***.)

34. Demostrar que $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en todos los puntos si y solo si la imagen inversa de todo conjunto abierto es abierta. Es decir, si $U \subset \mathbb{R}^m$ es abierto, entonces $f^{-1}(u) = \{x | f(x) \,\epsilon\, u\}$ es abierto.

35. (a) Hallar un número específico $\delta > 0$ tal que si $|a| < \delta$, entonces $|a^3 + 3a^2 + a| < 1/100$.

(b) Hallar un número específico $\delta > 0$ tal que si $x^2 + y^2 < \delta^2$, entonces $|x^2 + y^2 + 3xy + 180xy^5| < 1/10.000$.