$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} (x^3 - 12x)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - 6x^2\right]_{-2}^{1} = \frac{57}{8}.$$

▲

Nota histórica

La integral de Riemann

La primera vez que la mayoría de los estudiantes de matemáticas se encuentran con el nombre de Bernhard Riemann es en los cursos de cálculo, donde estudian la integral de Riemann. Leibniz había entendido la integral de una función de una variable como una suma infinita (el signo $\int$ indica una suma) de áreas infinitesimales $f(x)\,dx$, donde dx es una "anchura infinitesimal" y $f(x)$ es la altura del correspondiente rectángulo "infinitesimalmente delgado". Este método intuitivo solía bastar la mayoría de las veces porque el teorema fundamental

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

permitía calcular esta integral (nebulosamente definida) cuando uno conocía la primitiva F de f.

Sin embargo, Riemann estaba interesado en aplicar la integración a funciones de una variable cuya primitiva no era conocida, a funciones en la teoría de números y, en general, a aquellas funciones que "uno no encuentra en la naturaleza".

Cauchy ya sabía que todas las funciones continuas se podían integrar y que el teorema fundamental era válido—es decir, que toda función continua tenía una primitiva. Sin embargo, sus demostraciones no eran del todo rigurosas. Para aplicaciones a la teoría de números y a ciertas series (llamadas *series de Fourier*), Riemann precisaba una definición clara y precisa de integral, la cual presentó en un artículo en 1854. En dicho artículo, se define la integral y se proporcionan las condiciones suficientes y necesarias para que una función acotada f sea integrable en un intervalo $[a, b]$.

En 1876, el matemático alemán Karl J. Thomae generalizó la integral de Riemann a funciones de varias variables, como hemos visto en este capítulo.

En la primera mitad del siglo diecinueve, Cauchy observó que para funciones continuas de dos variables, se cumplía el teorema de Fubini. Pero Cauchy también proporcionó un ejemplo de una función no acotada de dos variables cuyas integrales iteradas no eran iguales. En 1878, Thomae proporcionó el primer ejemplo de función acotada de dos variables para la que existe una integral iterada pero la otra no. En estos ejemplos, las funciones no eran funciones "integrables Riemann" en el sentido descrito en esta sección. Los ejemplos de Cauchy y Thomae demostraron que hay que actuar con cautela y no suponer necesariamente que las integrales iteradas son siempre iguales.

En 1902, el matemático francés Henri Lebesgue desarrolló una generalización realmente drástica de la integral de Riemann. La teoría de Lebesgue permitió la integración de muchísimas más funciones que las que permitía el método de Riemann. Quizá, sin que Lebesgue fuera consciente de ello, su teoría iba a tener un profundo impacto en el desarrollo de muchas áreas de las matemáticas a lo largo del siglo veinte—en particular, en la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales y en la teoría de la probabilidad. Los estudiantes de matemáticas estudian en mayor profundidad la integral de Lebesgue en cursos más avanzados.