$$Q = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

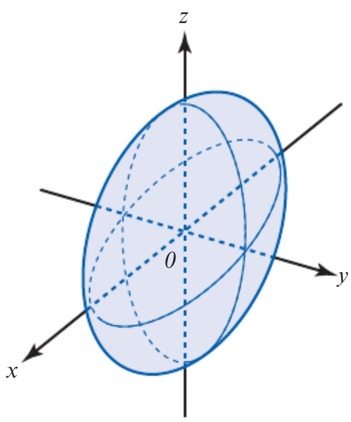
Sea

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = Q^{\top}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)y \\ -\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)x - \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)y + \left(\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)z \\ \left(\frac{2}{3}\right)x + \left(\frac{2}{3}\right)y + \left(\frac{2}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3}\right)z \end{pmatrix}$$

Entonces, como antes, $A = QDQ^{\top}$ y $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = QDQ^{\top}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = DQ^{\top}\mathbf{v} \cdot Q'\mathbf{v} = D\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}$. Por lo tanto, (8.5.24) se puede escribir en términos de las nuevas variables x', y', z' como $D\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = 100$, o sea

$$x'^2 + y'^2 + 10z'^2 = 100 \qquad \textbf{(8.5.25)}$$



$x'^2 + y'^2 + 10z'^2 = 100$

Figura 8.4

El elipsoide $5x^2 + 8xy + 5y^2 + 4xz + 4yz + 2z^2 = 100$, que se puede escribir en las nuevas variables como $x'^2 + y'^2 + 10z'^2 = 100$.

En $\mathbb{R}^3$ la superficie definida por (8.5.25) se denomina **elipsoide** (vea la figura 8.4).

Existe una gran variedad de superficies de tres dimensiones de la forma $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = d$, donde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Esas superficies se denominan **superficies cuadráticas**.

Superficies cuadráticas

Podemos cerrar esta sección con la observación de que las formas cuadráticas se pueden definir en términos de cualquier número de variables.

Definición 8.5.2

Forma cuadrática

Sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y sea A una matriz simétrica de $n \times n$. Entonces una **forma cuadrática** en x_1, $x_2, \ldots, x_n$ es una expresión de la forma

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \qquad \textbf{(8.5.26)}$$

EJEMPLO 8.5.6 Una forma cuadrática en cuatro variables

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 7 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$