(a) ¿Cuál es la masa total del alambre?

(b) ¿Dónde está el centro de masa del alambre? (Véase la Sección 6.3.)

19. Sea $\mathbf{c}$ la trayectoria dada por $\mathbf{c}(t) = (t^2, t, 3)$ para $t \in [0, 1]$.

(a) Hallar $l(\mathbf{c})$, la longitud de la trayectoria.

(b) Hallar el valor medio de la coordenada y a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}$.

20. Demostrar que la integral de una función $f(x, y)$ a lo largo de una trayectoria C dada por la gráfica de $y = g(x)$, $a \le x \le b$ queda determinada por:

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(x, g(x))\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\, dx$$

Concluir que si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable a trozos, entonces la longitud de la gráfica de g sobre $[a, b]$ está dada por:

$$\int_C f\, ds = \int_a^b \sqrt{1 + g'(x)^2}\, dx.$$

21. Si g: $[a, b] \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable a trozos, definimos la *longitud de la gráfica* de g sobre $[a, b]$ como la longitud de la trayectoria $t \mapsto (t, g(t))$ para $t \in [a,b]$. Demostrar que la longitud de la gráfica de g sobre $[a, b]$ es

$$\int_a^b \sqrt{1 + [g'(x)]^2}\, dx.$$

22. Utilizar el Ejercicio 21 para determinar la longitud de la gráfica de $y = \log x$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$.

23. Utilizar el Ejercicio 20 para calcular la integral de $f(x, y) = y$ a lo largo de la gráfica de la semicircunferencia $y = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \le x \le 1$.

24. Calcular la integral de $f(x, y) = y^2$ sobre la gráfica $y = e^x$, $0 \le x \le 1$.

25. Calcular la integral de $f(x, y, z) = xyz$ a lo largo de la trayectoria $c(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

26. Hallar la masa de un alambre formado por la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 0$ si la densidad en (x, y, z) está dada por $\rho(x, y, z) = x^2$ gramos por unidad de longitud del alambre.

27. Calcular $\int_{\mathbf{c}} f\, ds$, donde $f(x, y, z) = z$ y $\mathbf{c}(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t, t)$ para $0 \le t \le t_0$.

28. Escribir el siguiente límite como una integral de $f(x, y, z) = xy$ a lo largo de cierta trayectoria $\mathbf{c}$ en [0, 1] y calcularlo:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N-1} t_i^2\left(t_{i+1}^2 - t_i^2\right),$$

donde $t_1, \ldots, t_N$ es una partición de $[0, 1]$.

29. Considérense las trayectorias que conectan los puntos $A = (0, 1)$ y $B = (1, 0)$ en el plano xy, como se muestra en la Figura 7.1.5.

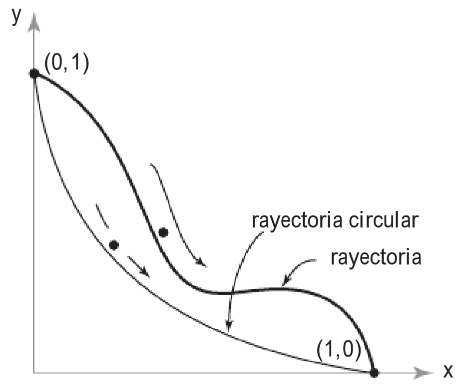

Figura 7.1.5 Curva que une los puntos A y B.

Galileo se planteó la siguiente pregunta: si una cuenta de collar cayera bajo la influencia de la gravedad desde un punto A hasta un punto B a lo largo de una curva en el *menor tiempo posible*, ¿sería dicha curva un arco de circunferencia? Para cualquier trayectoria dada, el tiempo de tránsito T es la integral a lo largo de la misma

$$T = \int \frac{dt}{v},$$

donde la velocidad de la cuenta es $v = \sqrt{2gy}$, siendo g la constante gravitatoria. En 1697, Johann Bernoulli retó al mundo matemático a encontrar la trayectoria a lo largo de la cual la cuenta de deslizaría desde A hasta B en el menor tiempo posible. Esta solución determinaría si las consideraciones de Galileo habían sido correctas.

(a) Calcular T para la trayectoria recta $y = 1 - x$.

(b) Escribir una fórmula para T para el caso de la trayectoria circular de Galileo, dada por $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.