AUTOEVALUACIÓN 8.4

Indique si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

I) Los valores característicos de una matriz simétrica son reales.

II) Los vectores característicos de una matriz simétrica son reales.

III) Toda matriz simétrica real es semejante a una matriz diagonal.

IV) Si la matriz real A se puede diagonalizar, entonces existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^{\top}AQ$ es diagonal.

V) Si A es real y simétrica, entonces existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^{\top}AQ$ es diagonal.

VI) Una matriz simétrica es hermitiana.

VII) Una matriz hermitiana es simétrica.

Respuestas a la autoevaluación

I) V **II)** V **III)** V **IV)** F
V) V **VI)** F **VII)** F

PROBLEMAS 8.4

De los problemas 1 al 11 encuentre la matriz ortogonal Q que diagonaliza la matriz simétrica dada. Después verifique que $Q^{\top}AQ = D$, una matriz diagonal cuyas componentes diagonales son los valores característicos de A.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 20 & 16 & -4 \\ 16 & 32 & 16 \\ -4 & 16 & 20 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

12. Sea Q una matriz ortogonal simétrica. Demuestre que si λ es un valor característico de Q, entonces $\lambda = \pm 1$.

Matrices ortogonalmente semejantes

13. La matriz A es **ortogonalmente semejante** a la matriz B si existe una matriz ortogonal Q tal que $B = Q^{\top}AQ$. Suponga que A es ortogonalmente semejante a B y que B es ortogonalmente semejante a C. Demuestre que A es ortogonalmente semejante a C.

14. Demuestre que si $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es ortogonal, entonces $b = \pm c$. [***Sugerencia:*** Escriba las ecuaciones que se obtienen de la ecuación $Q^{\top}Q = I$.]

15. Suponga que A es una matriz simétrica real para la que todos sus valores característicos son cero. Demuestre que A es la matriz cero.