EJEMPLO 6.3.12 La mejor aproximación cuadrática media a e^x

Del ejemplo 6.3.10, el polinomio de segundo grado que mejor se aproxima a e^x sobre [0, 1], en el sentido del error cuadrático medio, está dado por

$$p_2(x) \approx 1.01 + 0.85x + 0.84x^2$$

RESUMEN 6.3

- ***Espacio con producto interno***

  El espacio vectorial complejo V se llama un **espacio con producto interno** si para cada par de vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V existe un número complejo único $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ denominado el **producto interno** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, tal que si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ están en V y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces

  i) $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$

  ii) $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = 0$

  iii) $(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w})$

  iv) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$

  iv) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$

  vi) $(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

  vii) $(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}) = \overline{\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

- *Producto interno en $\mathbb{C}^n$*

  $$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \cdots + x_n\overline{y}_n$$

- Sea V un espacio con producto interno y suponga que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en V. Entonces

  $$\mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} \text{ son } \textbf{ortogonales} \text{ si } \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

- La **norma** de $\mathbf{u}$, denotada por $||\mathbf{u}||$, está dada por

  $$|\mathbf{u}|| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$$

- ***Conjunto ortonormal***

  El conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un **conjunto ortonormal** en V si

  $$(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0 \qquad \text{para } i \neq j$$

  y

  $$||\mathbf{v}_i|| = \sqrt{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)} = 1$$

  Si sólo se cumple la primera condición, entonces se dice que el conjunto es **ortogonal**.

- ***Proyección ortogonal***

  Sea H un subespacio vectorial con producto interno V con una base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$. Si $\mathbf{v} \in V$, entonces la **proyección ortogonal** de $\mathbf{v}$ sobre H, denotada por $\text{proy}_H \mathbf{v}$, está dada por

  $$\text{proy}_H \mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k$$

- ***Complemento ortogonal***

  Sea H un subespacio del espacio con producto interno V. Entonces el **complemento ortogonal** de H, denotado por $H^\perp$, está dado por

  $$H^\perp = \{\mathbf{x} \in V: (\mathbf{x}, \mathbf{h}) = 0 \text{ para toda } \mathbf{h} \in H\}$$