Ejemplo 1 Hallar $\iint_T (x^3y + \cos x)\, dA$, donde T es el triángulo formado por todos los puntos (x, y) tales que $0 \le x \le \pi/2, 0 \le y \le x$.

Solución De acuerdo con la Figura 5.3.6 y la fórmula (1), tenemos

$$\iint_T (x^3y + \cos x)\, dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^x (x^3y + \cos x)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{x^3y^2}{2} + y\cos x \right]_{y=0}^{x} dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{x^5}{2} + x\cos x \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^6}{12} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (x\cos x)\, dx = \frac{\pi^6}{(12)(64)} + [x \operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1.$$

▲

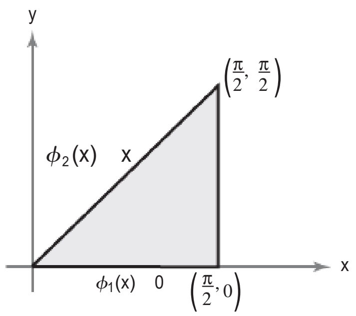

Figura 5.3.6 El tri ángulo T representado como una región y-simple.

En el siguiente ejemplo utilizamos la fórmula (1) para determinar el volumen de un sólido cuya base es una región no rectangular D.

Ejemplo 2 Hallar el volumen del tetraedro delimitado por los planos $y = 0, z = 0, x = 0$ e $y - x + z = 1$ (Figura 5.3.7).

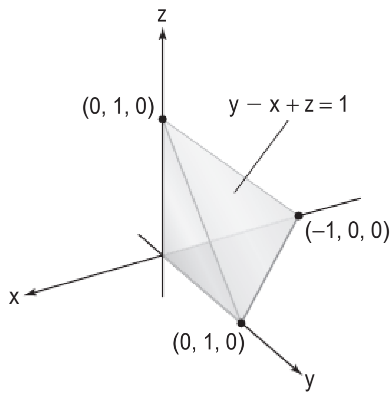

Figura 5.3.7 Un tetraedro delimitado por los planos $y = 0, z = 0, x = 0$ e $y - x + z = 1$.

Solución En primer lugar, observe que el tetraedro dado tiene una base triangular D cuyos puntos (x, y) satisfacen $-1 \le x \le 0$ y $0 \le y \le 1 + x$; por tanto, D es una región y-simple. De hecho, D es una región simple (véase la Figura 5.3.8).

Para cualquier punto (x, y) en D, la altura de la superficie z sobre (x, y) es $1 - y + x$. Por tanto, el volumen que buscamos está dado por la integral

$$\iint_D (1 - y + x)\, dA.$$