Si suponemos que también podemos evaluar esta integral impropia como el límite de las integrales sobre los rectángulos $R_a = [-a,a] \times [-a,a]$ cuando $a \to \infty$, obtenemos

$$\lim_{a\to\infty} \iint_{R_a} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \pi.$$

Por reducción a integrales iteradas, podemos escribir esto como

$$\lim_{a\to\infty} \left[\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx \int_{-a}^{a} e^{-y^2} dy\right] = \left[\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx\right]^2 = \pi.$$

Es decir,

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right]^2 = \pi.$$

Así, tomando raíces cuadradas, llegamos al resultado deseado.

He aquí una variante de la integral gaussiana: evaluar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}\, dx.$$

Para hacerlo, hay que utilizar la fórmula de cambio de variables $y = \sqrt{2}x$ a fin de reducir el problema a la integral gaussiana recién calculada:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} dx &= \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} e^{-2x^2} dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a} e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

▲

Fórmula del cambio de variables para integrales triples

Para enunciar esta fórmula, definimos primero el jacobiano de una transformación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$—es una extensión fácil del caso de dos variables.

Definición Sea $T\colon W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función C^1 definida por las ecuaciones $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$. Entonces el ***jacobiano*** de T, que se denota por $\partial(x,y,z)/\partial(u,v,w)$, es el determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$