Teorema 3 Integrales de línea de campos vectoriales gradiente Supongamos que $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 y que $\mathbf{c}: [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es una trayectoria a trozos C^1. Entonces

$$\int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\mathbf{c}(b)) - f(\mathbf{c}(a)).$$

Demostración Aplicamos la regla de la cadena a la siguiente función compuesta

$$F: t \mapsto f(\mathbf{c}(t))$$

y obtenemos

$$F'(t) = (f \circ \mathbf{c})'(t) = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t).$$

La función F es una función con valores reales de la variable t y, por tanto, por el teorema fundamental del cálculo de una variable,

$$\int_a^b F'(t)\, dt = F(b) - F(a) = f(\mathbf{c}(b)) - f(\mathbf{c}(a)).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt = \int_a^b F'(t)\, dt &= F(b) - F(a) \\ &= f(\mathbf{c}(b)) - f(\mathbf{c}(a)).\end{aligned}$$

■

Ejemplo 9 Sea $\mathbf{c}$ la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t^4/4, \operatorname{sen}^3(t\pi/2), 0), t \in [0, 1]$. Calcular

$$\int_{\mathbf{c}} y\, dx + x\, dy$$

$\big($lo que significa $\int_{\mathbf{c}} y\, dx + x\, dy + 0\, dz\big)$.

Solución Reconocemos $y\, dx + x\, dy$, o, lo que es equivalente, el campo vectorial $y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, como el gradiente de la función $f(x, y, z) = xy$. Luego,

$$\int_{\mathbf{c}} y\, dx + x\, dy = f(\mathbf{c}(1)) - f(\mathbf{c}(0)) = \frac{1}{4} \cdot 1 - 0 = \frac{1}{4}.$$

▲

Obviamente, si podemos reconocer el integrando como un gradiente, entonces la evaluación de la integral será mucho más fácil. Por ejemplo, intentemos obtener la integral del Ejemplo 9 directamente. En el cálculo de una variable, toda integral, en principio, se puede obtener hallando una primitiva. Sin embargo, para campos vectoriales esto no siempre es cierto, ya que un campo vectorial dado no es necesariamente un gradiente. Veremos este punto en detalle en la Sección 8.3, donde obtendremos una prueba para determinar si un campo vectorial $\mathbf{F}$ es un gradiente; es decir, si $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna f.