$$= \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$
$$= \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right).$$

Aplicando el Teorema 7 de la Sección 8.3, existe una función con valores reales $\phi$ en $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi.$$

Sustituyendo esta ecuación y $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ en la Ecuación (7) y usando la identidad vectorial (cuya demostración dejamos como ejercicio)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi\right)\\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{J} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi).$$

Es decir,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{J} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right). \tag{16}$$

De nuevo, utilizando la ecuación $\mathbf{E}+\partial\mathbf{A}/\partial t = -\nabla\phi$ y la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$, obtenemos

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = -\nabla^2\phi - \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t}.$$

Esto es,

$$\nabla^2\phi = -\rho - \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t}. \tag{17}$$

Ahora explotemos la libertad de nuestra elección de $\mathbf{A}$. Imponemos la "condición"

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \tag{18}$$

Debemos asegurarnos de que podemos hacer esto. Suponiendo que tenemos un $\mathbf{A}_0$ dado y el correspondiente $\phi_0$, ¿podemos elegir un nuevo $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla f$ y luego un nuevo $\phi$ tal que $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial\phi/\partial t = 0$? Con este