$$C_{B_1\to E} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C_{B_2\to E} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = C_{B_2\to E}^{-1} C_{B_1\to E} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}$$

podemos observar que obtenemos el mismo resultado que en el ejemplo 5.6.3.

Haciendo uso de la notación de esta sección se puede deducir una manera conveniente para determinar si un conjunto de vectores dado en cualquier espacio vectorial de dimensión finita es linealmente dependiente o independiente.

Teorema 5.6.3

Sea $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base del espacio vectorial V de dimensión n. Suponga que

$$(\mathbf{x}_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, (\mathbf{x}_2)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, (\mathbf{x}_n)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes si y sólo si $\det A \neq 0$.

Demostración

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ las columnas de A. Suponga que

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \tag{5.6.16}$$

Después, si se emplea la suma definida en la página 360, se puede escribir (5.6.16) como

$$(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n)_{B_1} = (\mathbf{0})_{B_1} \tag{5.6.17}$$

La ecuación (5.6.17) da dos representaciones del vector cero en V en términos de los vectores de la base B_1. Como la representación de un vector en términos de los vectores de la base es única (por el teorema 5.5.1) se concluye que

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \tag{5.6.18}$$

donde el cero de la derecha es el vector cero en $\mathbb{R}^n$. Pero esto prueba el teorema, ya que la ecuación (5.6.18) incluye a las columnas de A, que son linealmente independientes si y sólo si $\det A \neq 0$.