unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

19. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{c}(t) = (e^t, t, t^2), 0 \leq t \leq 1$.

20. Sea $\mathbf{F} = \nabla f$ para una función escalar dada. Sea $\mathbf{c}(t)$ una curva cerrada, es decir, $\mathbf{c}(b) = \mathbf{c}(a)$. Demostrar que $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$.

21. Consideramos la superficie $\mathbf{\Phi}(u, v) = (u^2 \cos v, u^2 \operatorname{sen} v, u)$. Calcular la normal unitaria en $u = 1, v = 0$. Calcular la ecuación del plano tangente en este punto.

22. Sea S la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con z entre 1 y 2 orientada según la normal que apunta hacia fuera del cono. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

23. Sea $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ un campo de velocidades de un fluido (la velocidad se mide en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano xy a través del cuadrado $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

24. Demostrar que el área de la superficie del trozo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ situado encima del rectángulo $[-a, a] \times [-a, a]$, donde $2a^2 < 1$, en el plano xy es

$$A = 2 \int_{-a}^{a} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{a}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx.$$

25. Sea S una superficie y C una curva cerrada que limita a S. Verificar la igualdad

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

si $\mathbf{F}$ es un campo de gradiente (utilizar el Ejercicio de repaso 20).

26. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -y)$ y S es la superficie cilíndrica definida por $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$, con la normal apuntando hacia fuera del cilindro.

27. Sea S la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ entre los planos $z = 0$ y $z = x + 3$. Calcular lo siguiente:

(a) $\iint_S x^2 \, dS$
(b) $\iint_S y^2 \, dS$
(c) $\iint_S z^2 \, dS$

28. Sea Γ la curva de intersección del plano $z = ax + by$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Hallar todos los valores de los números reales a y b tales que $a^2 + b^2 = 1$ y

$$\int_\Gamma y \, dx + (z - x) \, dy - y \, dz = 0.$$

29. Una hélice circular contenida en el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ con pendiente p se puede describir de forma paramétrica mediante

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \operatorname{sen} \theta, \quad z = p\theta, \quad \theta \geq 0.$$

Una partícula se desliza bajo la acción de la gravedad (que actúa en paralelo al eje z) sin rozamiento a lo largo de la hélice. Si la partícula parte de la altura $z_0 > 0$, entonces cuando alcanza la altura $z, 0 \leq z < z_0$, a lo largo de la hélice, su rapidez está dada por

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(z_0 - z)2g},$$

donde s es la longitud de arco a lo largo de la hélice, g es la constante gravitatoria y t es el tiempo.

(a) Hallar la longitud de la porción de la hélice que está entre los planos $z = z_0$ y $z = z_1, 0 \leq z_1 < z_0$.

(b) Calcular el tiempo T_0 que tarda la partícular en alcanzar el plano $z = 0$.