69. Una matriz A de $n \times n$ tiene la propiedad de que AB es la matriz cero para cualquier matriz B de $n \times n$. Pruebe que A es la matriz cero.

Matriz de probabilidades

70. Una **matriz de probabilidades** es una matriz cuadrada que tiene dos propiedades:

i) Todos sus elementos son no negativos (≥ 0).

ii) La suma de los elementos en cada renglón es 1.

Las siguientes matrices son matrices de probabilidades:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Muestre que el producto PQ es una matriz de probabilidad.

***71.** Sea P una matriz de probabilidades. Pruebe que P^2 es una matriz de probabilidades.

****72.** Sean P y Q dos matrices de probabilidades del mismo tamaño. Pruebe que PQ es una matriz de probabilidades.

73. Pruebe la fórmula (2.2.6) usando la ley asociativa [ecuación (2.2.5)].

***74.** Se puede organizar un torneo de tenis de la siguiente manera. Cada uno de los n tenistas juega contra todos los demás y se registran los resultados en una matriz R de $n \times n$ de la siguiente forma:

$$R_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el tenista } i \text{ le gana al tenista } j \\ 0 & \text{si el tenista } i \text{ pierde contra el tenista } j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Después se asigna al tenista i la calificación

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (R_{ij})^2$$

i) Para un torneo entre cuatro tenistas

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Clasifique a los tenistas según sus calificaciones.

ii) Interprete el significado de la calificación.

75. Sea O una matriz cero de $m \times n$ y sea A una matriz de $n \times p$. Demuestre que $OA = O_1$, donde O_1 es la matriz cero de $m \times p$.

76. Verifique la ley distributiva [ecuación (2.2.7)] para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$