15. $n + n^2$ es par.

16. $n < \dfrac{n^2 - n}{12} + 2$ si $n > 10$.

17. $n(n^2 + 5)$ es divisible entre 6.

***18.** $3n^5 + 5n^3 + 7n$ es divisible entre 15.

***19.** $x^n - 1$ es divisible entre $x - 1$.

***20.** $x^n - y^n$ es divisible entre $x - y$.

***21.** Proporcione una demostración formal de que $(ab)^n = a^n b^n$ para todo entero positivo n.

22. Suponga que todo polinomio tiene al menos una raíz compleja y demuestre que un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces (contando las multiplicidades).

23. Dado que $\det AB = \det A \det B$ para todas las matrices A y B de $n \times n$, demuestre que $\det A_1, A_2, \ldots, A_m = \det A_1 \det A_2 \ldots \det A_m$, donde $A_1, \ldots, A_m$ son matrices de $n \times n$.

24. Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son matrices de $m \times n$, demuestre que $(A_1 + A_2 + \cdots + A_k)^\top = A_1^\top + A_2^\top + \cdots + A_k^\top$. Puede suponer que $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$.

25. Demuestre que existen exactamente 2^n subconjuntos de un conjunto que contiene n elementos.

26. Demuestre que si $2k - 1$ es un entero par para algún entero k, entonces $2(k + 1) - 1 = 2k + 2 - 1 = 2k + 1$ es también un entero par. ¿Es posible obtener una conclusión a partir de la demostración?

27. ¿Qué es incorrecto con la siguiente demostración de que cada caballo, en un conjunto de n caballos tiene el mismo color que cualquier otro caballo en el conjunto?

Paso 1. Es cierto para $n = 1$ ya que sólo hay un caballo en el conjunto y es obvio que tiene el mismo color que él mismo.

Paso 2. Suponga que es cierto para $n = k$. Es decir, cada caballo en un conjunto que contiene k caballos es del mismo color que los demás caballos en el conjunto. Sean $h_1, h_2, \ldots, h_k, h_{k+1}$ los $k + 1$ caballos en el conjunto S. Sea $S_1 = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$ y $S_2 = \{h_2, h_3, \ldots, h_k, h_{k+1}\}$. Entonces ambos, S_1 y S_2, contienen k caballos de manera que los caballos en cada uno de estos conjuntos son del mismo color. Escriba $h_i = h_j$ para indicar que el caballo i tiene el mismo color que el caballo j. Entonces se tiene

$$h_1 = h_2 = h_3 = \cdots = h_k$$

y

$$h_2 = h_3 = h_4 = \cdots = h_k = h_{k+1}$$

Esto significa que

$$h_1 = h_2 = h_3 = \cdots = h_k = h_{k+1}$$

de manera que todos los caballos en S tienen el mismo color. Esto demuestra la afirmación en el caso de $n = k + 1$ y, por lo tanto, la afirmación es cierta para todo n.