iii) E se obtiene de I multiplicando el renglón i de I por c. Así, por la propiedad 3.2.2, det E $= c$ det $I = c$.

Lema 3.5.2

Sea B una matriz de $n \times n$ y sea E una matriz elemental. Entonces

$$\det EB = \det E \det B \tag{3.5.18}$$

La prueba de este lema se deduce del lema 3.5.1 y los resultados presentados en la sección 3.2 que relacionan las operaciones elementales con renglones en los determinantes. Los pasos de la prueba se indican en los problemas 1 al 3 de la sección que nos ocupa.

El siguiente teorema es un resultado fundamental en la teoría de matrices.

Teorema 3.5.2

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si det $A \neq 0$.

Demostración

Del teorema 2.6.5, se sabe que existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_m$ y una matriz triangular superior T tal que

$$A = E_1E_2, \ldots, E_mT \tag{3.5.19}$$

Usando el lema 3.5.2 m veces, se ve que

$$\begin{aligned}
\det A &= \det E_1 \det (E_2E_3 \cdots E_mT)\\
&= \det E_1 \det E_2 \det (E_3 \cdots E_mT)\\
&\ \ \vdots\\
&= \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_{m-1} \det (E_mT)
\end{aligned}$$

o sea

$$\det A = \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_{m-1} \det E_m \det T \tag{3.5.20}$$

Por el lema 3.5.1, det $E_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, m$. Se concluye que det $A \neq 0$ si y sólo si det T $\neq 0$.

Ahora suponga que A es invertible. Al usar (3.5.19) y el hecho de que toda matriz elemental es invertible $E_m^{-1} \cdots E_l^{-1}A$ es el producto de matrices invertibles. Así, T es invertible y por el teorema 3.1.2, det $T \neq 0$. Por tanto, det $A \neq 0$.

Si det $A \neq 0$ entonces (3.5.20), det $T \neq 0$, por lo que T es invertible (por el teorema 3.1.2). Entonces el lado derecho de (3.5.20) es el producto de matrices invertibles, y A es invertible. Esto completa la demostración.

Al fin, ahora se puede demostrar el resultado principal. Usando estos resultados establecidos, la prueba es directa.