SOLUCIÓN ► Al igual que en la sección 1.2 se comienza por escribir el sistema en la forma de matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Como suponemos que A es invertible, su forma escalonada reducida por renglones es la matriz identidad de $n \times n$. Se supone que en la reducción no se permutan (intercambian) renglones ya que este intercambio no involucra sumas o multiplicaciones. Más aún, el control del número de renglones es una tarea de almacenamiento de datos que requiere mucho menos tiempo que una suma.

Para controlar qué números se están calculando durante un paso dado, se escribe la matriz aumentada con letras C y L. Una C denota el número que acaba de calcularse. Una L denota un número que no sufre cambio.

Paso 1. Se multiplica cada número en el primer renglón por $\frac{1}{a_{11}}$ para obtener

$n + 4$ columnas

Total en el paso 1

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & C & C & \cdots & C & C & C \\ L & L & L & \cdots & L & L & L \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ L & L & L & \cdots & L & L & L \end{array}\right)$$

n multiplicaciones
$\frac{a_{11}}{a_{11}} = 1$ no requiere cálculos, simplemente se inserta un 1 en la posición 1,1
no hay sumas

Paso 2. Se multiplica el renglón 1 por a_{i1} y se suma al renglón i para $i = 2, 3, \ldots, n$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & L & L & \cdots & L & L & L \\ 0 & C & C & \cdots & C & C & C \\ 0 & C & C & \cdots & C & C & C \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & C & C & \cdots & C & C & C \end{array}\right)$$

Contemos las operaciones.

Para obtener el nuevo renglón 2:

El cero en la posición 2,1 no requiere trabajo. Se sabe que el número en la posición 2,1 será cero, por lo que simplemente se coloca en ese lugar. Existen $(n + 1) - 1 = n$ números en el segundo renglón que deben cambiar. Por ejemplo, si a_{22} se denota por a'_{22}, entonces

$$a'_{22} = a_{22} - a_{21}\, a_{12}$$

Esto requiere una multiplicación y una suma. Como hay n números que cambiar en el segundo renglón, se necesitan n multiplicaciones y n sumas en el segundo renglón. Lo mismo ocurre en cada uno de los $n - 1$ renglones de 2 a n. Entonces

Total para el paso 2

$(n - 1)n$ multiplicaciones

$(n - 1)n$ sumas

Notación. En adelante a'_{ij} denotará el último cálculo en el renglón i y la columna j.