3.1 Definiciones

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz de 2×2. En la sección 2.4 se definió el determinante de A como

$$\boxed{\det A = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}} \tag{3.1.1}$$

Con frecuencia se denotará det A por

$$|A| \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{3.1.2}$$

Observación

No hay que confundir esta notación con las barras de valor absoluto. $|A|$ denota det A si A es una matriz cuadrada. $|x|$ denota el valor absoluto de x si x es un número real o complejo.

Se demostró que A es invertible si y sólo si det $A \neq 0$. Como se verá más adelante, este importante teorema es válido para las matrices de $n \times n$.

En este capítulo se desarrollarán algunas propiedades básicas de los determinantes y se verá cómo se pueden utilizar para calcular la inversa de una matriz y resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

El determinante de una matriz de $n \times n$ se definirá de manera *inductiva*. En otras palabras, se usará lo que se sabe sobre un determinante de 2×2 para definir un determinante de 3×3, que a su vez se usará para definir un determinante de 4×4, y así sucesivamente. Se comienza por definir un determinante de 3×3.*

Definición 3.1.1

Determinante de 3 × 3

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Entonces

$$\boxed{\det A = |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}} \tag{3.1.3}$$

Nota

Observe el signo *menos* antes del segundo término del lado derecho de (3.1.3).

EJEMPLO 3.1.1 **Cálculo de un determinante de 3 × 3**

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Calcule $|A|$.

* Existen varias maneras de definir un determinante y ésta es una de ellas. Es importante darse cuenta de que "det" es una función con dominio el conjunto de matrices cuadradas de números reales (complejos) y codominio el conjunto de números reales (complejos).