que es la fórmula de Taylor de primer orden. Integrando por partes de nuevo:

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_0+h} f''(\tau)(x_0+h-\tau)\, d\tau \\
&\quad = -\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_0+h} f''(\tau)\, d(x_0+h-\tau)^2 \\
&\quad = \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_0+h} f'''(\tau)(x_0+h-\tau)^2\, d\tau,
\end{aligned}$$

lo que, una vez sustituido en la fórmula anterior, da la ***fórmula de Taylor de segundo orden***:

$$\begin{aligned}
&f(x_0+h) = \\
&f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_0+h} f'''(\tau)(x_0+h-\tau)^2\, d\tau.
\end{aligned}$$

Este es el teorema de Taylor para $k = 2$.

El teorema de Taylor para k general se obtiene por medio de sucesivas integraciones por partes. La Ecuación (2) que establece que $R_k(x_0, h)/h^k \to 0$ cuando $h \to 0$ se puede interpretar como sigue. Para τ en el intervalo $[x_0,\, x_0+h]$, tenemos que $|x_0+h-\tau| \le |h|$ y $f^{k+1}(\tau)$, es continua y está acotada; supongamos que $|f^{k+1}(\tau)| \le M$. Entonces

$$|R_k(x_0,h)| = \left|\int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-\tau)^k}{k!} f^{k+1}(\tau)\, d\tau\right| \le \frac{|h|^{k+1}}{k!}M$$

y, en particular, $|R_k(x_0,\, h)/h^k| \le |h|\, M/k! \to 0$ cuando $h \to 0$.

Teorema de Taylor para varias variables

Nuestro siguiente objetivo en esta sección es demostrar un teorema análogo que sea válido para funciones de varias variables. Ya conocemos una versión de primer orden; es decir, para $k = 1$. En efecto, si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y definimos

$$R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{h}),$$

de modo que

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{h}) + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

entonces, por la definición de diferenciabilidad,

$$\frac{|R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} \to 0 \quad \text{cuando} \quad \mathbf{h} \to 0;$$

es decir, $R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$ se anula hasta primer orden en $\mathbf{x}_0$. En resumen, tenemos: