$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix} U$$

Se ha escrito A como un producto de seis matrices elementales y una matriz triangular superior. Sea L el producto de las matrices elementales. Debe verificar que

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{7}{4} & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix},$$ que se trata de una matriz triangular inferior con unos en la diagonal principal.

Después se puede escribir $A = LU$, donde L es triangular inferior y U es triangular superior. Los elementos de la diagonal de L son todos iguales a 1 y los elementos de la diagonal de U son los pivotes. Esta factorización se llama **factorización LU de A**.

Factorización *LU*

El procedimiento utilizado en el ejemplo 2.7.1 se puede llevar a cabo mientras no se requieran permutaciones para poder reducir A a la forma triangular. Esto no siempre es factible. Por ejemplo, el primer paso en la reducción por renglones de

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

es permutar (intercambiar) los renglones 1 y 2 o los renglones 1 y 3.

Suponga que por el momento dicha permutación no es necesaria. Entonces, al igual que en el ejemplo 2.7.1, se puede escribir $A = E_1, E_2, \ldots E_n\, U$, donde U es una matriz triangular superior y cada matriz elemental es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal. Esto se deduce del hecho de que E es de la forma $R_j + cR_i$ (no hay permutaciones ni multiplicaciones de renglones por constantes). Más aún, los números que se hacen cero en la reducción por renglones están siempre *abajo* de la diagonal de manera que en $R_j + cR_i$ siempre se cumple que $j > i$. De este modo, las c aparecen abajo de la diagonal. La prueba del siguiente teorema no es complicada (vea los problemas 2.7.40 y 2.7.41).

Teorema 2.7.1 Propiedades de multiplicación de matrices triangulares

El producto de las matrices triangulares inferiores con unos en la diagonal es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal. Más aún, el producto de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior.

Teorema 2.7.2 Teorema de la factorización *LU*

Sea A una matriz cuadrada ($n \times n$) y suponga que A se puede reducir por renglones a una matriz triangular U sin hacer alguna permutación entre sus renglones. Entonces existe una matriz triangular inferior L invertible con unos en la diagonal tal que $A = LU$. Si, además, U tiene n pivotes (es decir, A es invertible), entonces esta factorización es única.