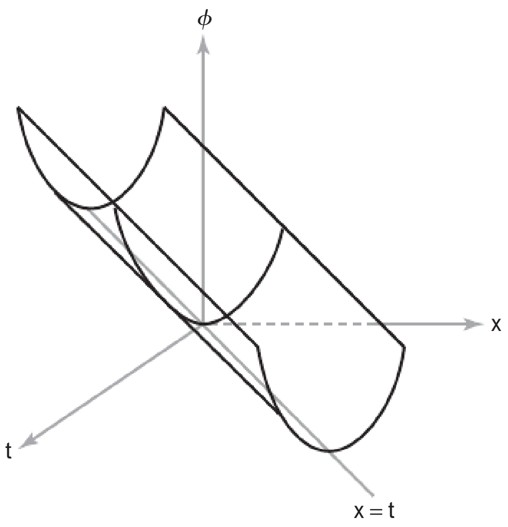

Sección 3.2

1. (a) $f(h_1, h_2) = 1 + h_1 + h_2 + R_1(\mathbf{0}, \mathbf{h})$.

(b) $f(h_1, h_2) = 1 + h_1 + h_2 + \frac{1}{2}h_1^2 + h_1h_2 + \frac{1}{2}h_2^2 + R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h})$.

3. $f(h_1, h_2) = h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2$ [$R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h}) = 0$, en este caso].

5. $f(h_1, h_2) = 1 + h_1 + h_2 + \dfrac{h_1^2}{2} + h_1h_2 + \dfrac{h_2^2}{2} + R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h})$.

7. $f(h_1, h_2) = 1 + h_1h_2 + R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h})$.

9. $g(x, y) = -1 + \dfrac{1}{2}(x - \pi)^2 + \dfrac{1}{2}\left(y - \dfrac{\pi}{2}\right)^2$.

11. $$p(x, y) = 2 - \frac{3\pi^2}{4}(y - 1) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4}(y - 1)^2 - \frac{7\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(y - 1).$$

13. (a) Demostrar que $|R_k(x, a)| \leq AB^{k+1}/(k+1)!$ para A, B constantes y x en el intervalo fijo $[a, b]$. Probar que $R_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. (Usar la convergencia de la serie $\sum c^k/k! = e^c$ y el teorema de Taylor).

(b) El único problema posible es en $x = 0$. Utilizar la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{t\to\infty} p(t)e^t = \infty$$

para todo polinomio $p(t)$. Utilizando esto, establecer que $\lim\limits_{x\to 0^+} p(x)e^{-1/x} = 0$ para toda función racional $p(x)$ y concluir que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k.

(c) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es analítica en $\mathbf{x}_0$ si la serie

$$f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} h_ih_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(\mathbf{x}_0) + \cdots + \frac{1}{k!}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_k}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(\mathbf{x}_0) + \cdots$$

converge a $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})$ para todo $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ en algún disco lo suficientemente pequeño $\|\mathbf{h}\| < \varepsilon$. La función f es analítica si para todo $R > 0$ existe una constante M tal que $|(\partial^k f/\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k})(\mathbf{x})| < M^k$ para todas las derivadas de orden k en todo x que satisface $\|\mathbf{x}\| \leq R$.

(d) $$f(x, y) = 1 + x + y + \tfrac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \cdots + \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x^j y^{k-j} + \cdots$$

Sección 3.3

1. (0, 0); punto de silla.

3. Los puntos críticos están en la recta $y = -x$; son puntos de mínimo local, porque $f(x, y) = (x + y)^2 \geq 0$, y se hace igual a cero solo cuando $x = -y$.

5. (0, 0); punto de silla.

7. $\left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}\right)$; punto de mínimo local.

9. (0, 0); punto de máximo local. (Las pruebas fallan, pero se puede utilizar el hecho de que $\cos z \leq 1$).

$(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$, mínimo local

$(0, \sqrt{\pi})$, mínimo local.

11. No hay puntos críticos.

13. (1, 1) es un mínimo local.

15. $(0, n\pi)$; puntos críticos, no tiene puntos de máximo ni de mínimo.