Ejemplo 7 Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos vectores ortogonales no nulos. Si $\mathbf{c}$ es un vector en el plano generado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, entonces existen escalares α y β tales que $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Utilizar el producto escalar para determinar α y β (véase la Figura 1.2.9).

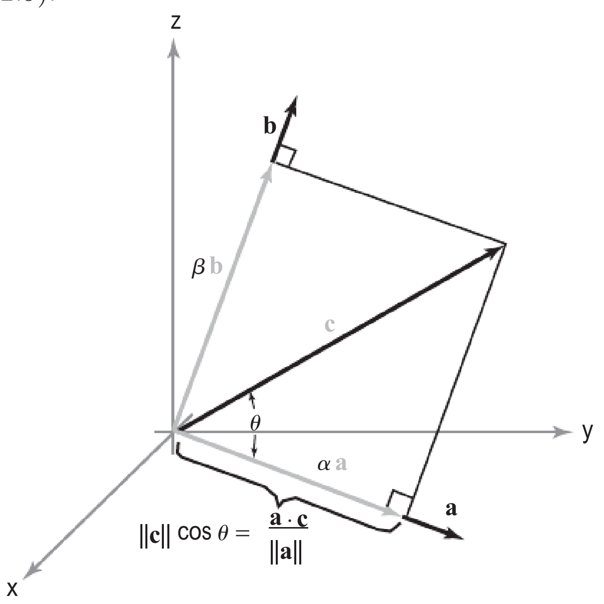

Figura 1.2.9 Geometría para calcular α y β, donde $\mathbf{c} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b}$.

Solución Efectuando el producto escalar de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}$, tenemos

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.$$

Dado que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, y así

$$\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{a}\|^2}.$$

De forma similar,

$$\beta = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{b}\|^2}.$$

▲

Proyección ortogonal

En el ejemplo anterior, al vector $\alpha\mathbf{a}$ se le denomina ***proyección de*** $\mathbf{c}$ ***sobre*** $\mathbf{a}$, y $\beta\mathbf{b}$ es su ***proyección sobre*** $\mathbf{b}$. Formulemos esta idea de forma más general. Si $\mathbf{v}$ es un vector y l es la recta que pasa por el origen en la dirección del vector $\mathbf{a}$, entonces la ***proyección ortogonal de*** $\mathbf{v}$ ***sobre*** $\mathbf{a}$ es el vector $\mathbf{p}$ cuyo extremo final se obtiene trazando una recta perpendicular a l desde el extremo final de $\mathbf{v}$, como se muestra en la Figura 1.2.10.

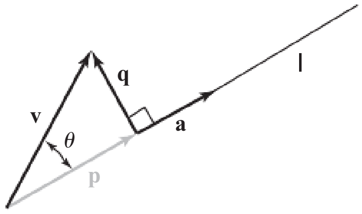

Figura 1.2.10 $\mathbf{p}$ es la proyecci ón ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{a}$.

Si nos fijamos en la figura, vemos que $\mathbf{p}$ es un múltiplo de $\mathbf{a}$ y que $\mathbf{v}$ es la suma de $\mathbf{p}$ y un vector $\mathbf{q}$ perpendicular a $\mathbf{a}$. Por tanto,

$$\mathbf{v} = c\mathbf{a} + \mathbf{q},$$