**Distancia** La ***distancia entre*** los extremos de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es $\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|$ y la ***distancia entre*** P y Q es $\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\|$.

**Ejemplo 3** Hallar la distancia desde el extremo del vector $\mathbf{i}$, es decir, el punto $(1, 0, 0)$, hasta el extremo del vector $\mathbf{j}$, es decir, el punto $(0, 1, 0)$.

**Solución** $\|\mathbf{j}-\mathbf{i}\| = \sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2+(0-0)^2} = \sqrt{2}$. ▲

## Ángulo entre dos vectores

Ahora vamos a ver que el producto escalar sirve efectivamente para medir el ángulo entre dos vectores.

**Teorema 1** Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea $\theta$, donde $0 \le \theta \le \pi$, el ángulo entre ellos (Figura 1.2.6). Entonces

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

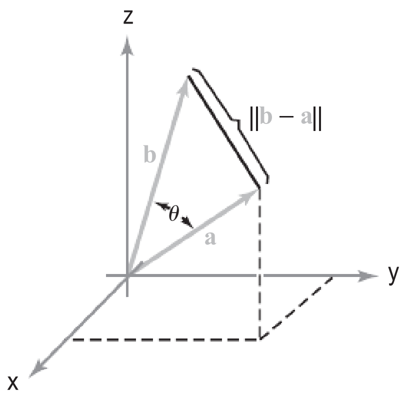


**Figura 1.2.6** Los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y el ángulo $\theta$ que forman entre ellos; la geometría del Teorema 1 y su demostración.

De la identidad $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta$ se deduce que si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son distintos de cero, podemos expresar el ángulo que forman como

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}\right).$$

**Demostración** Si aplicamos la regla trigonométrica del coseno al triángulo que tiene un vértice en el origen y como lados adyacentes los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (como se muestra en la figura), se sigue que

$$\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

Puesto que $\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2 = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ y $\|\mathbf{b}\|^2 = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$, podemos escribir la ecuación anterior como

$$(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$