(b) Sea S la esfera unidad, S_1 la semiesfera superior, S_2 la semiesfera inferior y C la circunferencia unidad. Si $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$, entonces

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$
$$= \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} - \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Pero

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -GmM \iint_S (\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3) \cdot \mathbf{n}\, dS$$
$$= -4\pi GmM$$

dado que $\|\mathbf{r}\| = 1$ y $\mathbf{r} = \mathbf{n}$ en S. Por tanto, $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$ es imposible. Esto no contradice el Teorema 8 porque $\mathbf{F}$ no es suave en el origen.

Sección 8.4

1. 3.

3. 4π, ya que $r = 1$.

5. 4π.

7. 3.

9. (a) 0. (c) $-4/15$.
(b) $4/15$.

11. 6.

13. $\frac{7}{10}$.

15. 1.

17. Aplicar el teorema de la divergencia a $f\mathbf{F}$ utilizando $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f \nabla \cdot \mathbf{F}$.

19. Si $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^2$, entonces $\nabla \cdot \mathbf{F} = 1/r^2$. Si $(0,0,0) \notin \Omega$, el resultado se sigue del teorema de Gauss. Si $(0,0,0) \in \Omega$, calculamos la integral eliminando una pequeña bola $B_\varepsilon = \{(x,y,z) | (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} < \varepsilon\}$ alrededor del origen y haciendo $\varepsilon \to 0$:

$$\iiint_\Omega \frac{1}{r^2}\, dV = \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \frac{1}{r^2}\, dV$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon)} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2}\, dS$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\iint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2}\, dS - \iint_{\partial B_\varepsilon} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2}\, dS \right)$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\iint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2}\, dS - 4\pi\varepsilon \right)$$
$$= \iint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2}\, dS.$$

La integral sobre ∂B_ε se obtiene del Teorema 10 (ley de Gauss), ya que $r = \varepsilon$ en B_ε.

21. Usar la identidad vectorial para $\operatorname{div}(f\mathbf{F})$ y el teorema de la divergencia para el apartado (a). Utilizar la identidad vectorial $\nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$ para el apartado (b).

23. (a) Si $\phi(\mathbf{p}) = \iiint_W \rho(\mathbf{q})/(4\pi\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|)\, dV(\mathbf{q})$, entonces

$$\nabla\phi(\mathbf{p}) = \iiint_W [\rho(\mathbf{q})/4\pi] \nabla_{\mathbf{p}}(1/\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|)\, dV(\mathbf{q})$$
$$= -\iiint_W [\rho(\mathbf{q})/4\pi][(\mathbf{p} - \mathbf{q})/\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^3]\, dV(\mathbf{q}),$$

donde $\nabla_{\mathbf{p}}$ indica el gradiente con respecto a las coordenadas de $\mathbf{p}$ y la integral es el vector cuyas componentes son las tres integrales componentes. Si $\mathbf{p}$ varía en $V \cup \partial V$ y $\mathbf{n}$ es la normal unitaria exterior a ∂V, podemos calcular el producto escalar usando estas componentes y uniendo los trozos para obtener

$$\nabla\phi(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = -\iiint_W \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^3} (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}\, dV(\mathbf{q}).$$

Por tanto,

$$\iint_{\partial V} \nabla\phi(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}\, dV(\mathbf{p}) = -\iint_{\partial V} \left(\iiint_W \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^3} (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}\, d\mathbf{q} \right) dV(\mathbf{p}).$$

Hay esencialmente cinco variables en esta integración, tres porque $\mathbf{q}$ está en W y dos porque $\mathbf{p}$ está en ∂V. Utilizamos el teorema de Fubini para obtener

$$\iint_{\partial V} \nabla\phi \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S}$$
$$= -\iiint_W \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi} \left[\iint_{\partial V} \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^3}\, dS(\mathbf{p}) \right] dV(\mathbf{q}).$$