que está por encima de la superficie es $\Delta S = \Delta A/\cos\theta$ (Figura 7.5.2). Este enfoque intuitivo nos puede ayudar a recordar la fórmula (5) y a aplicarla a problemas.

Ejemplo 4 Calcular $\iint_S x\, dS$, donde S es el triángulo con vértices en $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ (véase la Figura 7.5.3).

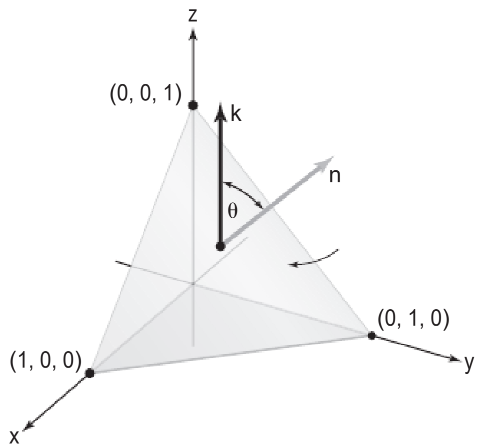

Figura 7.5.3 Al calcular una integral de superficie específica, determinamos una fórmula para la normal unitaria $\mathbf{n}$ y calculamos el ángulo θ como parte de la preparación de la fórmula (5).

Solución Esta superficie es el plano descrito por la ecuación $x+y+z=1$. Puesto que la superficie es un plano, el ángulo θ es constante y un vector unitario normal es $\mathbf{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Por tanto, $\cos\theta = \mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = 1/\sqrt{3}$, y por la Ecuación (5),

$$\iint_S x\, dS = \sqrt{3}\iint_D x\, dx\, dy,$$

donde D es el dominio en el plano xy. Pero

$$\sqrt{3}\iint_D x\, dx\, dy = \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-x} x\, dy\, dx = \sqrt{3}\int_0^1 x(1-x)\, dx = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

▲

Las integrales de funciones sobre superficies resultan útiles para calcular la masa de una superficie cuando la función de densidad de masa m es conocida. La masa total de una superficie con densidad de masa (por unidad de área) m está dada por

$$M(S) = \iint_S m(x,y,z)\, dS. \tag{7}$$

Ejemplo 5 Sea $\mathbf{\Phi}\colon D \to \mathbb{R}^3$ la parametrización del helicoide $S = \mathbf{\Phi}(D)$ del Ejemplo 2 de la Sección 7.4. Recuérdese que $\mathbf{\Phi}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, \theta)$, donde $0 \le \theta \le 2\pi$ y $0 \le r \le 1$. Supongamos que S tiene una densidad de masa en $(x,y,z) \in S$ igual a dos veces la distancia de (x,y,z) al eje central (véase la Figura 7.4.2), es decir, $m(x,y,z) = 2\sqrt{x^2+y^2} = 2r$, en el sistema de coordenadas cilíndricas. Hallar la masa total de la superficie.