c) ¿Es posible alguna de las situaciones en los incisos *a*) o *b*) si se considera un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^n$? ¿Por qué? Proporcione ejemplos usando MATLAB.

d) (*Lápiz y papel*) Escriba una conclusión relacionando la independencia lineal con la generación de todo $\mathbb{R}^n$ para el conjunto de m vectores en $\mathbb{R}^n$. Considere $m > n$, $m = n$ y $m < n$. Pruebe su afirmación considerando las propiedades de la forma escalonada reducida por renglones de la matriz cuyas columnas son el conjunto de vectores.

10. *a*) Verifique que cada conjunto de vectores dado sea linealmente independiente.

i) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\4\end{pmatrix}\right\}$ **ii)** $\left\{\begin{pmatrix}4\\3\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\2\\8\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\2\\8\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ **iii)** $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\5\end{pmatrix}\right\}$

iv) Genere cuatro vectores aleatorios en símbolo $\mathbb{R}^4$ utilizando el comando `rand`. Verifique la independencia (siga generando conjuntos hasta que obtenga uno independiente).

b) Forme una matriz A invertible de 4×4. Para cada conjunto de vectores linealmente independientes $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ del inciso *a*), verifique la dependencia o independencia de $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k\}$ para determinar qué conjuntos $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k\}$ son independientes.

c) Forme una matriz A de 4×4 que no sea invertible (por ejemplo, dada una matriz invertible A, cambie una de las columnas para que sea una combinación lineal de otras). Para cada conjunto de vectores linealmente independientes $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k\}$ del inciso *a*), verifique la dependencia o independencia de $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k\}$ para determinar qué conjuntos $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k\}$ son independientes.

d) Escriba una conclusión describiendo cuándo la multiplicación por una matriz cuadrada preserva la independencia de un conjunto de vectores.

11. Utilice MATLAB para verificar la dependencia o independencia de los conjuntos de polinomios de los problemas 17 al 22 de esta sección. Si el conjunto es dependiente, escriba los polinomios dependientes como combinaciones lineales de otros polinomios en el conjunto y verifique estas combinaciones lineales (vea el problema 9 de MATLAB 5.3 y el problema 8 de MATLAB 5.4).

12. Utilice MATLAB para verificar la dependencia o independencia de los conjuntos de matrices de los problemas 23 al 25 de la sección 5.4. Si el conjunto es dependiente, escriba las matrices dependientes como combinaciones lineales de otras matrices en el conjunto y verifique esas combinaciones lineales (vea el problema 10 de MATLAB 5.3 y el problema 8 de MATLAB 5.4).

13. *a*) Genere un conjunto de cinco matrices aleatorias en $\mathbb{M}_{21}$ y muestre que el conjunto es linealmente dependiente. Repita para otros dos conjuntos de matrices.

b) Genere un conjunto de siete matrices aleatorias en $\mathbb{M}_{23}$ y muestre que son linealmente dependientes. Repita para otros dos conjuntos de matrices.

c) Para $\mathbb{M}_{42}$, ¿cuántas matrices se necesitan en un conjunto para garantizar que es dependiente? Pruebe su conclusión generando conjuntos de matrices aleatorias. Demuestre que los conjuntos con menos matrices no son necesariamente dependientes.

d) (*Lápiz y papel*) Trabaje los problemas 44 y 45 de esta sección.

14. **Ciclos en digráficas e independencia lineal** Para una gráfica dirigida (*digráfica*), la matriz de incidencia nodo-arista está definida como