EJEMPLO 7.3.3 Representación matricial de una transformación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$

Defina $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 3z \\ 4x - 2y + 6z \\ -6x + 3y - 9z \end{pmatrix}$. Encuentre A_T, nu T, im T, $\nu(T)$ y $\rho(T)$.

SOLUCIÓN ► Como $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ se tiene

$$A_T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Del ejemplo 5.7.4, se ve que $\rho(A) \overset{\text{teorema 7.3.2 ii)}}{=} \rho(T) = 1$ e im $T = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}\right\}$.
Entonces $\nu(T) = 2$.

Para encontrar $N_A \overset{\text{teorema 7.3.2 iii)}}{=}$ nu T, se reduce por renglones para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esto significa que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in N_A$ si $2x - y + 3z = 0$, o sea, $y = 2x + 3z$. Estableciendo primero $x = 1$, $z = 0$ y después $x = 0$, $z = 1$, se obtiene una base para N_A:

$$\text{nu } T = N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

EJEMPLO 7.3.4 Representación matricial de una transformación cero

Es fácil verificar que si T es la transformación cero de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entonces A_T es la matriz cero de $m \times n$. De igual manera, si T es la transformación identidad de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, entonces $A_T = I_n$.

EJEMPLO 7.3.5 Representación matricial de una transformación de rotación en $\mathbb{R}^2$

Se vio en el ejemplo 7.1.8, que si T es la función que rota a todo vector en $\mathbb{R}^2$ un ángulo θ, entonces $A_T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Ahora se generalizará el concepto de representación matricial a espacios arbitrarios de dimensión finita.