EJERCICIOS CON MATLAB 5.4

1. Utilice `rref` para verificar la independencia o dependencia de los conjuntos de vectores de los problemas 1 al 16 de esta sección. Explique sus conclusiones.

2. ***a)*** Para los problemas 9 y 12 argumente por qué los vectores no son coplanares.

b) Explique las razones por las cuales los conjuntos de vectores dados son coplanares.

i) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$ **ii)** $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}\right\}$

3. Elija m y n con $m > n$ y sea `A = 2*rand(n,m)-1`. Determine la dependencia o independencia de las columnas de A. Repita para otros cuatro valores de m y n. Escriba una conclusión sobre la independencia lineal de las columnas de una matriz que tiene más columnas que renglones. Pruebe su conclusión.

4. Considere las matrices del problema 2 en MATLAB 2.4. Pruebe la invertibilidad de cada A, la independencia lineal de las columnas de A y la independencia lineal de los renglones de A (considere $A^{\top}$). Escriba una conclusión relacionando la invertibilidad de $A^{\top}$ con la independencia lineal de las columnas de A y con la independencia lineal de los renglones de A. Pruebe su conclusión en términos de las propiedades de la forma escalonada reducida por renglones.

5. ***a)*** (*Lápiz y papel*) Si A es de $n \times m$ y $\mathbf{z}$ es de $m \times 1$, explique por qué $\mathbf{w} = A\mathbf{z}$ está en el espacio generado por las columnas de A.

b) Para cada conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ dado, genere un vector aleatorio $\mathbf{w}$ que se encuentre en el espacio generado por ese conjunto [use el inciso *a*)]. Pruebe la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}\}$. Repita para otros tres vectores $\mathbf{w}$.

i) $\left\{\begin{pmatrix}8\\7\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-7\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\-6\\-1\end{pmatrix}\right\}$ **ii)** $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\4\end{pmatrix}\right\}$ **iii)** $\left\{\begin{pmatrix}4\\3\\2\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\2\\8\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\1\\2\\6\end{pmatrix}\right\}$

c) Escriba una conclusión a lo siguiente: si $\mathbf{w}$ está en gen $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, entonces...

6. ***a)*** Recuerde los conjuntos de vectores en los problemas 3 y 7 de MATLAB 5.3. Para $\mathbf{w}$ en el espacio generado por esos conjuntos de vectores, había un número infinito de maneras de escribir $\mathbf{w}$ como una combinación lineal de los vectores. Verifique que cada uno de esos conjuntos de vectores es linealmente dependiente.

b) (*Lápiz y papel*) Pruebe la siguiente afirmación: para los vectores en $\mathbb{R}^n$ tales que $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$, tiene una solución, existe un número infinito de soluciones para $c_1, c_2, \ldots, c_k$ si y sólo si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es linealmente independiente. [***Sugerencia:*** Piense en la forma escalonada reducida por renglones.]

7. ***a)*** Elija n y m con $m \le n$ y sea `A = 2*rand(n,m)-1`. Verifique que las columnas de A sean linealmente independientes. Cambie A de manera que alguna(s) columna(s) sea(n) combinaciones lineales de otras columnas de A (por ejemplo, `B = A;B(:,3) = 3*B(:,1)-2*B(:,2))`. Verifique que las columnas de B sean dependientes.