36. $H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4: x = 3t, y = -2t, z = t, w = -t, t \in \mathbb{R}\}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

37. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4: 2x - y + 3z - w = 0 \right\}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

38. Sean $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ dos vectores ortonormales en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| = \sqrt{2}$.

39. Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ son ortonormales, demuestre que

$$|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_n|^2 = |\mathbf{u}_1|^2 + |\mathbf{u}_2|^2 + \cdots + |\mathbf{u}_n|^2 = n$$

40. Encuentre una condición sobre los números a y b tales que $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \right\}$ y $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\}$ forman una base ortonormal en $\mathbb{R}^2$.

41. Demuestre que *cualquier* base ortonormal en $\mathbb{R}^2$ es de una de las formas dadas en el problema 40.

42. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, pruebe que si $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente dependientes.

43. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, pruebe la **desigualdad del triángulo**:

Desigualdad del triángulo

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$$

[***Sugerencia:*** Obtenga la expansión de $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2$.]

44. Suponga que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ (no todos cero) y que

$$|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_k| = |\mathbf{x}_1| + |\mathbf{x}_2| + \cdots + |\mathbf{x}_k|$$

Demuestre que dim gen $\{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_n\} = 1$. [***Sugerencia:*** Utilice los resultados de los problemas 42 y 43.]

45. Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortonormal en $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Pruebe que $|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1|^2 + |\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2|^2 + \cdots + |\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_n|^2$. Esta igualdad se conoce como **identidad de Parseval** en $\mathbb{R}^n$.

Identidad de Parseval

46. Demuestre que para cualquier subespacio H de $\mathbb{R}^n$, $(H^\perp)^\perp = H$.

47. Sean H_1 y H_2 dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ y suponga que $H_1^\perp = H_2^\perp$. Demuestre que $H_1 = H_2$.

48. Sean H_1 y H_2 dos subespacios de $\mathbb{R}^n$; demuestre que si $H_1 \subset H_2$, entonces $H_2^\perp \subset H_1^\perp$.

49. Demuestre el **teorema generalizado de Pitágoras**: sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ con $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Entonces

Teorema generalizado de Pitágoras

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$$

EJERCICIOS CON MATLAB 6.1

Recordatorio de MATLAB

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ se calcula con `u'*v` o `v'*u`. $|\mathbf{v}|$ se calcula con `sqrt(v'*v)` o `norm(v)`. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ se calcula con `((u'*v)/(v'*v))*v` (el vector proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$).