## Integrales de 3-formas sobre regiones

Finalmente, debemos interpretar las 3-formas como funciones sobre las subregiones elementales de $K$. Sea $v = f(x, y, z)\ dx\, dy\, dz$ una 3-forma y sea $R \subset K$ una subregión elemental de $K$. Entonces a cada subregión $R \subset K$ le asignamos el número

$$\iiint_R v = \iiint_R f(x, y, z)\ dx\, dy\, dz, \tag{3}$$

que es simplemente la integral triple ordinaria de $f$ sobre $R$, como hemos descrito en la Sección 5.5.

**Ejemplo 8** Supongamos que $v = (x + z)\ dx\, dy\, dz$ y que $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Calcular $\iiint_R v$.

**Solución** Calculamos:

$$\begin{aligned}\iiint_R v &= \iiint_R (x+z)\ dx\, dy\, dz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x+z)\ dx\, dy\, dz\\ &= \int_0^1\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + zx\right]_0^1 dy\, dz = \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + z\right) dy\, dz\\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + z\right) dz = \left[\frac{z}{2} + \frac{z^2}{2}\right]_0^1 = 1.\end{aligned}$$

▲

## Álgebra de las formas diferenciales

Ahora vamos a ver el álgebra (o reglas de multiplicación) de las formas diferenciales que, junto con la derivación de las mismas, nos va a permitir enunciar los teoremas de Green, Stokes y Gauss en términos de las formas diferenciales.

Si $\omega$ es una $k$-forma y $\eta$ es una $l$-forma sobre $K, 0 \le k + l \le 3$, existe un producto denominado ***producto exterior*** $\omega \wedge \eta$ de $\omega$ y $\eta$ que es una $k + l$ forma sobre $K$. El producto exterior satisface las siguientes leyes:

(I) Para cada $k$ existe una $k$-forma nula con la propiedad de que $0 + \omega = \omega$ para toda $k$-forma $\omega$ y $0 \wedge \eta = 0$ para toda $l$-forma $\eta$ si $0 \le k + l \le 3$.

(II) (*Distributiva*) Si $f$ es una 0-forma, entonces

$$(f\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = f(\omega_1 \wedge \eta) + (\omega_2 \wedge \eta).$$

(III) (*Anticonmutativa*) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}(\eta \wedge \omega)$.

(IV) (*Asociativa*) Si $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ son $k_1, k_2, k_3$ formas, respectivamente, con $k_1 + k_2 + k_3 \le 3$, entonces

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3.$$

(V) (*Homogeneidad con respecto a las funciones*) Si $f$ es una 0-forma, entonces