e) Repita los incisos *b*) y *c*) para **v** y **w** de su elección.

f) (*Lápiz y papel*) Explique de qué forma ilustra este problema el teorema 6.1.7 de esta sección, donde H es gen $\{\mathbf{v}\}$.

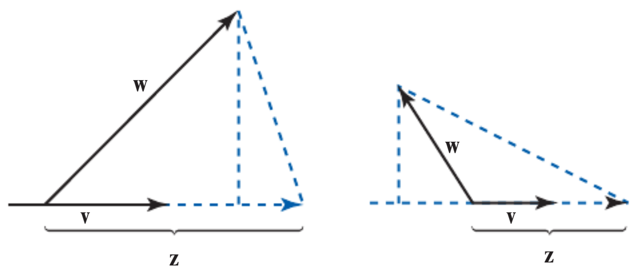
4. *a*) Sea **v** un vector longitud 1 en la dirección de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (divida el vector entre su longitud). Sea $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, encuentre **p**, el vector proyección de **w** sobre **v** y calcule $|\mathbf{w} - \mathbf{p}|$.

b) Elija cualquier valor escalar para c; haga $\mathbf{z} = c\mathbf{v}$ y verifique que $|\mathbf{w} - \mathbf{z}| \geq |\mathbf{w} - \mathbf{p}|$. Repita para otros tres valores de c. Explique la relación entre esto y el teorema 6.1.8, donde H es gen $\{\mathbf{v}\}$.

c) Repita los incisos *a*) y *b*) con $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

d) Repita los incisos *a*) y *b*) para vectores **v** y **w** arbitrarios.

e) (*Lápiz y papel*) En el siguiente diagrama esquemático etiquete con **p** al vector proyección de **w** sobre **v**, y localice $\mathbf{w} - \mathbf{p}$ y $\mathbf{w} - \mathbf{z}$. Explique la manera en que estos diagramas ilustran la geometría del teorema 6.1.8, donde H es el subespacio gen $\{\mathbf{v}\}$.



5. Proyección sobre un plano en $\mathbb{R}^3$.

a) Sea $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Encuentre una base ortonormal $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ para el plano dado por el gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, usando el proceso de Gram-Schmidt.

b) (*Lápiz y papel*) Verifique que $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es perpendicular tanto a $\mathbf{v}_1$ como a $\mathbf{v}_2$ y, por tanto, es perpendicular a $H = \text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Sea $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}$. Explique por qué **n** es una base ortonormal para $H^{\perp}$.

c) La definición 6.1.4 dice que la proyección de un vector **w** sobre H está dada por $\text{proy}_H\,\mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{z}_1)\mathbf{z}_1 + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{z}_2)\,\mathbf{z}_2$. El teorema 6.1.7 dice que $\mathbf{w} = \text{proy}_H\,\mathbf{w} + \text{proy}_{H^{\perp}}\,\mathbf{w}$, que puede reexpresarse como $\text{proy}_H\,\mathbf{w} = \mathbf{w} - \text{proy}_{H^{\perp}}\,\mathbf{w}$.

Para cuatro vectores **w** de 3×1 arbitrarios, calcule $\text{proy}_H\,\mathbf{w}$ de las dos maneras y compare los resultados. (**Nota.** Como $H^{\perp}$ es de dimensión uno, $\text{proy}_{H^{\perp}}\,\mathbf{w}$ es igual al vector proyección de **w** sobre **n**.)

d) (*Lápiz y papel*) El siguiente diagrama ilustra la geometría de $\text{proy}_H\mathbf{w} = \mathbf{w} - \text{proy}_{H^{\perp}}\,\mathbf{w}$. En el diagrama, localice $\mathbf{h} = \text{proy}_{H^{\perp}}\mathbf{w}$, bosqueje $\mathbf{w} - \mathbf{h}$ y verifique que es paralela a **p**, la proyección de **w** sobre el plano.