Así, si el resultado es cierto para $n = k$, también lo es para $n = k + 1$.

Esto completa la demostración por inducción matemática.

EJEMPLO A.2 Demuestre que la suma de los primeros n enteros positivos es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$.

SOLUCIÓN ► Se busca demostrar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{A.1}$$

Puede tratar de resolver algunos ejemplos para ilustrar que la fórmula (A.1) realmente funciona (esto por supuesto no prueba la afirmación, pero puede ayudar a persuadirle de que se cumple). Por ejemplo,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \frac{10(11)}{2} = 55$$

Es decir, la fórmula es cierta para $N = 10$.

Paso 1. Si $n = 1$, entonces la suma de los primeros 1 enteros es 1. Pero $\frac{(1)(1+1)}{2} = 1$, de manera que la ecuación (A.1) se cumple en el caso de $n = 1$.

Paso 2. Suponga que (A.1) es cierta para $n = k$; es decir,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Debe demostrarse que se cumple para $n = k + 1$. Esto es, se quiere probar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Pero

$$\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= \overbrace{(1 + 2 + 3 + \cdots + k)}^{=\frac{k(k+1)}{2} \text{ por suposición}} + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1) + 2(k+2)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

y la demostración queda completa.

¿En dónde está la dificultad?

En ocasiones la inducción matemática es difícil a primera vista en el paso 2. El paso 1 por lo general es sencillo. En el ejemplo A.1 se insertó el valor $n = 1$ en ambos lados de la ecuación (A.1) y se verificó que $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. El paso 2 fue mucho más difícil. Lo estudiaremos de nuevo.

Hipótesis de inducción

Se *supuso* que la ecuación (A.1) era válida para $n = k$. No se demostró. Esa suposición se denomina **hipótesis de inducción**. Después se utilizó la hipótesis de inducción para demostrar que la ecua-