EJEMPLO 7.1.11 Operador de transposición

Defina T: $M_{mn} \rightarrow M_{nm}$ por $T(A) = A^{\top}$. Como $(A + B)^{\top} = A^{\top} + B^{\top}$ y $(\alpha A)^{\top} = \alpha A^{\top}$, se ve que T, denominado **operador de transposición**, es una transformación lineal.

EJEMPLO 7.1.12 Operador integral

Cálculo *

Sea J: $C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Jf = \int_0^1 f(x)\,dx$. Para $f, g \in C[0, 1]$, como $\int_0^1 [f(x) + g(x)]\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx$ y $\int_0^1 \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_0^1 f(x)\,dx$, se ve que J es un operador lineal. Por ejemplo, $J(x^3) = \frac{1}{4}$. J se denomina **operador integral**.

EJEMPLO 7.1.13 Operador diferencial

Suponga que D: $C^1(0, 1) \rightarrow C(0, 1)$ se define por $Df = f'$. Para f, $g \in C^1(0, 1)$, como $(f + g)' = f' + g'$ y $(\alpha f)' = \alpha f'$, puede apreciarse que D es un operador lineal. D se denomina **operador diferencial**.

EJEMPLO 7.1.14 Una transformación que no es lineal

Suponga que T: $C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $Tf = f(0) + 1$. Entonces T no es lineal. Para ver esto se calcula

$$T(f + g) = (f + g) + 1 = f(0) + g(0) + 1$$
$$Tf + Tg = [f(0) + 1] + [g(0) + 1] = f(0) + g(0) + 2$$

Esto proporciona otro ejemplo de una transformación que puede parecer lineal, pero que de hecho no lo es.

Advertencia

No toda transformación que parece lineal lo es en realidad. Por ejemplo, defina T: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $Tx = 2x + 3$. Entonces la gráfica de $\{(x, Tx): x \in \mathbb{R}\}$ es una línea recta en el plano xy; pero T no es lineal porque $T(x + y) = 2(x + y) + 3 = 2x + 2y + 3$ y $Tx + Ty = (2x + 3) + (2y + 3) = 2x + 2y + 6$. Las únicas transformaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ son funciones de la forma $f(x) = mx$ para algún número real m. Así, entre todas las funciones cuyas gráficas son rectas, las únicas que son transformaciones lineales son aquellas que pasan por el origen. En álgebra y cálculo, una **función lineal** con dominio $\mathbb{R}$ está definida como una función que tiene la forma $f(x) = mx + b$. Así, se puede decir que una función lineal es una transformación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ si y sólo si b (la ordenada al origen) es cero.

RESUMEN 7.1

- ***Transformación lineal***

  Sean V y W dos espacios vectoriales. Una **transformación lineal** T de V en W es una función que asigna a cada vector $\mathbf{v} \in V$ un vector único $T\mathbf{v} \in W$ y que satisface, para cada $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V y cada escalar α,

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v}$$

  y

$$T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v}$$

* El símbolo Cálculo indica que se necesita el cálculo para resolver el problema.