$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. A partir de la teoría de las sumas de Riemann, podemos demostrar que

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} S_N &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i, y_i, z_i)\|\mathbf{c}'(t_i^*)\|\Delta t_i \\ &= \int_I f(x(t), y(t), z(t))\|\mathbf{c}'(t)\|\, dt = \int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\, ds.\end{aligned}$$

Integral a lo largo de una trayectoria para curvas planas

Un caso especial importante de la integral a lo largo de una trayectoria se produce cuando la trayectoria $\mathbf{c}$ describe una curva plana. Supongamos que todos los puntos $\mathbf{c}(t)$ están en el plano xy y que f es una función con valores reales de dos variables. La integral de f a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}$ es

$$\int_{\mathbf{c}} f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

Si $f(x, y) \geq 0$, esta integral tiene una interpretación geométrica como el "área de una valla". Podemos construir una "valla" cuya base sea la imagen de $\mathbf{c}$ y cuya altura sea $f(x, y)$ en (x, y) (Figura 7.1.2). Si $\mathbf{c}$ se mueve solo una vez a lo largo de la imagen de $\mathbf{c}$, la integral $\int_{\mathbf{c}} f(x, y)\, ds$ representa el área de un lado de esta valla. Los lectores deben intentar justificar esta interpretación por sí mismos, utilizando un argumento similar al empleado para justificar la fórmula de la longitud de arco.

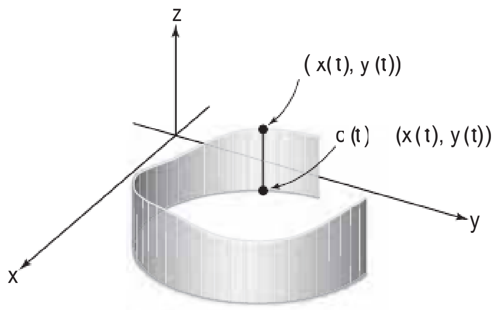

Figura 7.1.2 La integral a lo largo de una trayectoria como el área de una valla.

Ejemplo 2 La tía de Tom Sawyer le pide a su sobrino que pinte ambos lados de la vieja valla mostrada en la Figura 7.1.3. Tom estima que por cada 25 pies^2 que deje que alguien pinte en su lugar, la víctima voluntaria le pagará 5 centavos. ¿Cuánto espera ganar Tom, suponiendo que su tía le proporciona gratis la pintura?

Solución En la Figura 7.1.3, vemos que la base de la valla que está en el primer cuadrante es la trayectoria $\mathbf{c}$: $[0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (30\cos^3 t, 30\,\mathrm{sen}^3\, t)$, y la altura de la valla en (x, y) es $f(x, y) = 1 + y/3$. El área de un lado de la mitad de la valla es igual a la *integral* $\int_{\mathbf{c}} f(x, y)\, ds = \int_{\mathbf{c}}(1 + y/3)\, ds$. Puesto que $\mathbf{c}'(t) = (-90\cos^2 t\,\mathrm{sen}\, t, 90\,\mathrm{sen}^2\, t\cos t)$, tenemos $\|\mathbf{c}'(t)\| = 90\,\mathrm{sen}\, t\cos t$. Por tanto, la integral es