44. Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz de 2×2. Demuestre que d es un valor característico de A con vector característico correspondiente $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

45. Sea $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, donde α, $\beta \in \mathbb{R}$. Encuentre los valores característicos de la matriz $B = A^{\top}A$.

EJERCICIOS CON MATLAB 8.1

1. Considere la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 39 & -95 & 55 \\ 35 & -92 & 55 \\ 35 & -95 & 58 \end{pmatrix}$.

a) Verifique que $\mathbf{x} = (1 \quad 1 \quad 1)^{\top}$ es un vector característico de A con valor característico $\lambda = -2$, que $\mathbf{y} = (3 \quad 4 \quad 5)^{\top}$ es un vector característico de A con valor característico $\mu = 3$ y que $\mathbf{z} = (4 \quad 9 \quad 13)^{\top}$ es un vector característico de A con valor característico $\mu = 3$. [**Nota.** La mejor manera de demostrar que $\mathbf{w}$ es un vector característico de A con valor característico c es demostrar que $(A - cI)\,\mathbf{w} = \mathbf{0}$.]

b) Seleccione un valor aleatorio para el escalar a. Verifique que $a\mathbf{x}$ es un vector característico para A con valor característico $\lambda = -2$. Verifique que $a\mathbf{y}$ y $a\mathbf{z}$ son vectores característicos para A con valor característico $\mu = 3$. Repita para otros tres valores de a.

c) Escoja valores aleatorios para los escalares a y b. Verifique que $\mathbf{w} = a\mathbf{y} + b\mathbf{z}$ es un vector característico de A con valor característico $\mu = 3$. Repita para otros tres juegos de a y b.

d) (*Lápiz y papel*) ¿Qué propiedad de los valores y vectores característicos se ilustra con los incisos *b*) y *c*)?

2. Considere la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.5 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1.5 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Verifique que $\mathbf{x} = (1 \;\; i \;\; 0 \;\; -i)^{\top}$ y $\mathbf{v} = (0 \;\; i \;\; 2 \;\; 1 \;\; +i)^{\top}$ son vectores característicos de A con valor característico $\lambda = 1 + 2i$ y que $\mathbf{y} = (1 \;\; -i \;\; 0 \;\; i)^{\top}$ y $\mathbf{z} = (0 \;\; -i \;\; 2 \;\; 1 \;\; -i)^{\top}$ son vectores característicos de A con valor característico $\mu = 1 - 2i$ (para encontrar la transpuesta de una matriz compleja A utilice `A'`).

b) Seleccione un valor aleatorio *complejo* para el escalar `a` (por ejemplo, `a = 5*(2*rand(1)-1)+i*3*rand(1))`.) Verifique que `ax` y `av` son vectores característicos de A con valor característico $\lambda = 1 + 2i$. Verifique que $a\mathbf{y}$ y $a\mathbf{z}$ son vectores característicos de A con valor característico $\mu = 1 - 2i$. Repita para otros tres valores de a.

c) Seleccione valores aleatorios *complejos* para los escalares a y b. Verifique que $\mathbf{u} = a\mathbf{x} + b\mathbf{v}$ es un vector característico de A con valor característico $\lambda = 2 + i$. Verifique que $\mathbf{w} = a\mathbf{y} + b\mathbf{z}$ es un vector característico de A con valor característico $\mu = 2 - i$. Repita para otros tres juegos de a y b.

d) (*Lápiz y papel*) ¿Qué propiedad de los valores y vectores característicos se ilustra en los incisos *b*) y *c*)?

3. Siga las instrucciones para cada matriz A en los problemas 1, 7, 10 y 16 anteriores.