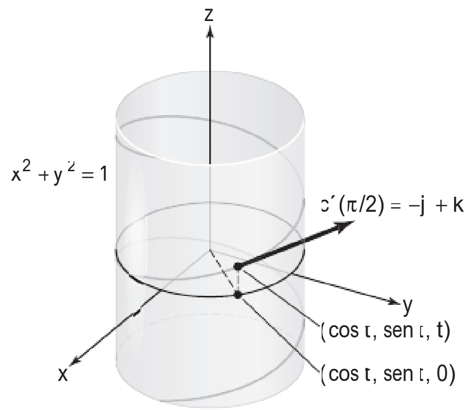

Figura 2.4.9 La hélice $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ se enrolla alrededor del cilindro $x^2 + y^2 = 1$. ▲

Ejemplo 7 La trayectoria cicloidal de una partícula en el borde de un disco de radio R que se mueve con velocidad v está definida por $\mathbf{c}(t) = (vt - R\operatorname{sen}(vt/R), R - R\cos(vt/R))$ (véase el Ejemplo 4). Hallar la velocidad $\mathbf{c}'(t)$ de la partícula como una función de t. ¿Cuándo es la velocidad igual a cero? ¿Es el vector velocidad vertical en algún momento?

Solución Para hallar la velocidad derivamos:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}'(t) &= \left(\frac{d}{dt}\left(vt - R\operatorname{sen}\frac{vt}{R}\right), \frac{d}{dt}\left(R - R\cos\frac{vt}{R}\right)\right)\\ &= \left(v - v\cos\frac{vt}{R}, v\operatorname{sen}\frac{vt}{R}\right).\end{aligned}$$

En notación vectorial, $\mathbf{c}'(t) = (v - v\cos(vt/R))\mathbf{i} + (v\operatorname{sen}(vt/R))\mathbf{j}$. La componente en la dirección de $\mathbf{i}$ es $v(1-\cos(vt/R))$, que vale cero cuando vt/R es un múltiplo entero de 2π. Para dichos valores de t, $\operatorname{sen}(vt/R)$ también es cero, por tanto, los únicos instantes en los que la velocidad es cero son $t = 2\pi nR/v$ para cualquier entero n. En dichos instantes, $\mathbf{c}(t) = (2\pi nR, 0)$, de modo que el punto en movimiento está tocando el suelo. Estos instantes ocurren tras intervalos de tiempo de $2\pi R/v$ (más frecuentemente para discos pequeños, así como para aquellos que ruedan rápidamente).

El vector velocidad nunca es vertical, porque la componente horizontal solamente se anula cuando también lo hace la vertical. ▲

La Figura 2.4.10 muestra algunos vectores velocidad superpuestos sobre la trayectoria cicloidal de la Figura 2.4.6.

Recta tangente

La recta tangente a una trayectoria en un punto es la recta que pasa por el punto con la dirección del vector tangente. Utilizando la forma punto-vector de la ecuación de una recta, obtenemos la ecuación paramétrica de la recta tangente.