*El siguiente **método de los mínimos cuadrados** debe aplicarse en los Ejercicios 40 a 45.*

En ocasiones, ocurre que la teoría que hay detrás de un experimento indica que los datos experimentales deberían disponerse aproximadamente a lo largo de una recta de la forma $y = mx + b$. Por supuesto, los resultados reales nunca se corresponden exactamente con la teoría. Entonces estamos frente al problema de determinar la recta que *mejor se ajusta* a un determinado conjunto de datos experimentales $(x_1, y_1), \ldots,$ (x_n, y_n), como se muestra en la Figura 3.R.5. Si suponemos que la recta $y = mx + b$ se ajusta a los datos, cada punto se desviará verticalmente de la recta en una cantidad $d_i = y_i - (mx_i + b)$.
Nos gustaría elegir m y b de tal modo que el efecto total de estas desviaciones sea lo más pequeño posible. Sin embargo, dado que algunos son negativos y otros son positivos, tendríamos muchas cancelaciones y por tanto un ajuste muy malo. Esto nos lleva a sospechar que una mejor medida del error total podría ser la suma de los *cuadrados* de estas desviaciones. Así llegamos al problema de hallar m y b tales que minimicen la función

$$s = f(m, b) = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)^2,$$

donde $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ son los datos dados.

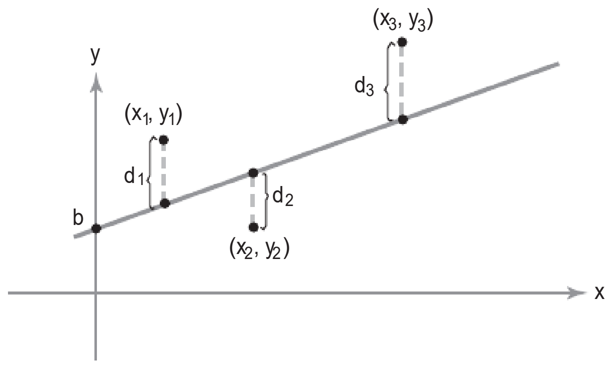

Figura 3.R.5 El método de los mínimos cuadrados trata de hallar la recta que aproxima mejor un conjunto de datos.

40. Para cada conjunto de tres puntos de datos, dibujar los puntos, escribir la función $f(m, b)$ a partir de la ecuación anterior, determinar los valores de m y b que proporcionan el mejor ajuste de acuerdo con el método de los mínimos cuadrados y dibujar la recta.

(a) $(x_1, y_1) = (1, 1)$
$(x_2, y_2) = (2, 3)$
$(x_3, y_3) = (4, 3)$

(b) $(x_1, y_1) = (0, 0)$
$(x_2, y_2) = (1, 2)$
$(x_3, y_3) = (2, 3)$

41. Demostrar que si solo se dan dos puntos de datos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), este método da como resultado la recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

42. Demostrar que las ecuaciones para un punto crítico, $\partial s/\partial b = 0$ y $\partial s/\partial m = 0$, son equivalentes a

$$m\left(\sum x_i\right) + nb = \left(\sum y_i\right)$$

y

$$m\left(\sum x_i^2\right) + b\left(\sum x_i\right) = \left(\sum x_i y_i\right),$$

donde todas las sumas van de $i = 1$ a $i = n$.

43. Si $y = mx + b$ es la recta que mejor se ajusta a los puntos de datos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ según el método de los mínimos cuadrados, demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b) = 0;$$

es decir, las desviaciones positivas y negativas se cancelan (véase el Ejercicio 42).