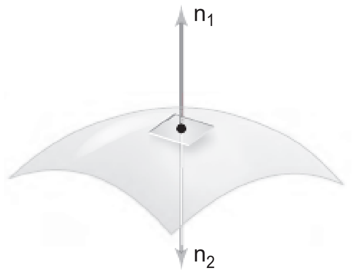

Figura 7.6.2 Las dos normales unitarias posibles a una superficie en un punto.

Definición Superficies orientadas *Cont.* o ***negativa***.[12] En cada punto $(x, y, z) \in S$ existen dos vectores unitarios normales, $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$, donde $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ (véase la Figura 7.6.2). Cada uno de ellos se puede asociar con una de las caras de la superficie. Por tanto, para especificar una cara de una superficie S, en cada punto elegimos un vector unitario normal $\mathbf{n}$ que apunta hacia fuera desde la cara positiva de S en dicho punto.

Esta definición asume que nuestra superficie tiene dos caras. De hecho, esto es necesario, porque ¡hay ejemplos de superficies con una sola cara! El primer ejemplo conocido de una superficie así fue la banda de Möbius (llamada así por el matemático y astrónomo alemán A. F. Möbius, quien, junto con el matemático J. B. Listing, la descubrió en 1858). En las Figuras 7.6.3 y 7.6.4 se proporcionan imágenes de dicha superficie. En cada punto de M, hay dos normales unitarias, $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$. Sin embargo, $\mathbf{n}_1$ no determina una única cara de M y $\mathbf{n}_2$ tampoco. Para ver esto de forma intuitiva, podemos deslizar $\mathbf{n}_2$ alrededor de la curva cerrada C (Figura 7.6.3). Cuando $\mathbf{n}_2$ vuelve a un punto fijo p de C coincidirá con $\mathbf{n}_1$, lo que demuestra que tanto $\mathbf{n}_1$ como $\mathbf{n}_2$ apuntan hacia fuera de la misma cara de M y, en consecuencia, M solo tiene una cara.

La Figura 7.6.4 es una banda de Möbius tal y como fue dibujada por el conocido matemático y artista del siglo XX M. C. Escher. Ilustra unas hormigas arrastrándose a lo largo de una banda de Möbius. Después de una vuelta alrededor de la banda (sin cruzar el borde) terminan en la "cara opuesta" de la superficie.

Sea $\mathbf{\Phi}\colon D \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie orientada S y supongamos que S es regular en $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0), (u_0, v_0) \in D$; definimos entonces el vector $(\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0})/\|\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}\|$. Si $\mathbf{n}(\mathbf{\Phi}(u_0, v_0))$ denota la normal unitaria a S en $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$, se sigue que

$$(\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0})/\|\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}\| = \pm\mathbf{n}(\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)).$$

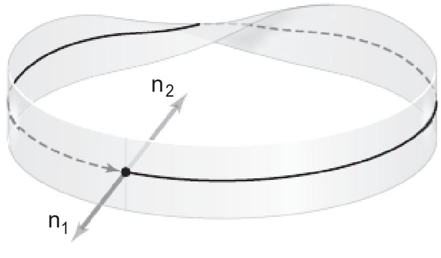

Figura 7.6.3 La banda de Möbius: deslizamos $\mathbf{n}_2$ alrededor de C una vez; cuando $\mathbf{n}_2$ vuelva a su punto inicial, coincidirá con $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$.

[12]Utilizamos el término "cara" en un sentido intuitivo. Este concepto puede desarrollarse de forma rigurosa, aunque no lo vamos a hacer aquí. También, la elección de la cara que se va a denominar "exterior" suele venir dictado por la propia superficie, como, por ejemplo, en el caso de la esfera. En otros casos, la denominación es algo arbitraria (por ejemplo, véase la superficie mostrada en la Figura 7.6.2).