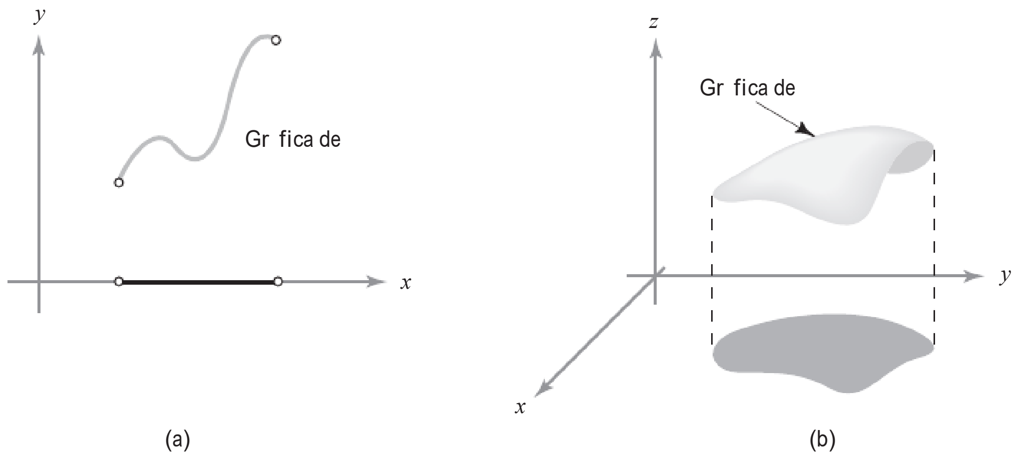

Figura 2.1.2 Gráficas de (a) una función de una variable y de (b) una funci ón de dos variables.

Para el caso $n = 1$, la gráfica es una curva en $\mathbb{R}^2$, mientras que para $n = 2$, es una superficie en $\mathbb{R}^3$ (véase la Figura 2.1.2). Para $n = 3$, es difícil visualizar la gráfica porque, puesto que los humanos vivimos en un mundo tridimensional, nos resulta difícil imaginar conjuntos en $\mathbb{R}^4$. Con el fin de superar esta dificultad, introducimos la idea de conjunto de nivel.

Conjuntos, curvas y superficies de nivel

Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Un ***conjunto de nivel*** es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ en el que f es constante; por ejemplo, el conjunto en el que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es un conjunto de nivel para f. Esto sí podemos visualizarlo: es exactamente una esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^3$. Formalmente, un conjunto de nivel es el conjunto de (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = c$, donde c es una constante. El comportamiento o estructura de una función quedan determinados en parte por la forma de sus conjuntos de nivel; en consecuencia, comprender estos conjuntos nos ayuda a entender la función en cuestión. Los conjuntos de nivel también resultan útiles para entender la funciones de dos variables $f(x, y)$, en cuyo caso hablamos de ***curvas de nivel***.

La idea es similar a la que se usa para elaborar mapas topográficos en los que se trazan líneas que representan altitudes constantes; caminar a lo largo de una de estas líneas significa caminar sobre un camino horizontal. En el caso de una colina que se eleva sobre el plano xy, una gráfica de todas las curvas de nivel nos proporciona una buena idea de la función $h(x, y)$, que representa la altura de la colina en cada punto (x, y) (véase la Figura 2.1.3).

Ejemplo 1 La función constante $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2$ —es decir, la función $f(x, y) = 2$— tiene por gráfica el plano horizontal $z = 2$ en $\mathbb{R}^3$. La curva de nivel del valor c es vacía si $c \neq 2$, y es todo el plano xy si $c = 2$. ▲

Ejemplo 2 La función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x + y + 2$, tiene por gráfica el plano inclinado $z = x + y + 2$. Este plano interseca al plano xy $(z = 0)$