Se analizará de nuevo la matriz Q. Como Q es real y ortogonal, $1 = \det QQ^{-1} = \det QQ^{\mathrm{T}} = \det Q \det Q^{\mathrm{T}} = \det Q \det Q = (\det Q)^2$. Entonces $\det Q = \pm 1$. Si $\det Q = -1$ se pueden intercambiar los renglones de Q para hacer el determinante de esta nueva Q igual a 1. Así, se puede demostrar (vea el problema 45) que $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ para algún número θ con $0 \le \theta < 2\pi$. Pero del ejemplo 7.1.8, esto significa que Q es una matriz de rotación. Por lo tanto, se ha demostrado el siguiente teorema.

Teorema 8.5.1 Teorema de los ejes principales en $\mathbb{R}^2$

Sea

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \qquad \textbf{(8.5.10)}$$

una ecuación cuadrática en las variables x y y. Entonces existe un número único θ en $[0, 2\pi]$ tal que la ecuación (8.5.10) se puede escribir en la forma

$$a'x'^2 + c'y'^2 = d \qquad \textbf{(8.5.11)}$$

donde x' y y' son los ejes obtenidos al rotar los ejes x y y un ángulo θ en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Más aún, los números a' y c' son los valores característicos de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$. Los ejes x' y y' se denominan **ejes principales** de la gráfica de la ecuación cuadrática (8.5.10).

Ejes principales

Se puede usar el teorema 8.5.1 para identificar tres secciones cónicas importantes. Recuerde que las **ecuaciones estándar** de un círculo, elipse e hipérbola son

Ecuaciones estándar

Círculo: $$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \textbf{(8.5.12)}$$

Elipse: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textbf{(8.5.13)}$$

Hipérbola: $$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & \textbf{(8.5.14)} \\ \text{o} & \\ \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} + 1 & \textbf{(8.5.15)} \end{cases}$$

EJEMPLO 8.5.2 Identificación de una hipérbola

Identifique la sección cónica cuya ecuación es

$$x^2 + 4xy + 3y^2 = 6 \qquad \textbf{(8.5.16)}$$

SOLUCIÓN ► En el ejemplo 8.5.1 se encontró que lo anterior se puede escribir como $(2 - \sqrt{5})x'^2 + (2 + \sqrt{5})y'^2 + 6$, o sea