$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{4}\log\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right) \approx 10{,}63.$$

Como comprobación de este resultado, podemos observar que la trayectoria **c** conecta los puntos $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, \pi^2)$. La distancia entre estos puntos es $\sqrt{4+\pi^2} \approx 3{,}72$, que es menor que 10,63, como debía ser. ▲

Diferencial de la longitud de arco

La fórmula de la longitud de arco sugiere la introducción de la siguiente notación, que será útil en el Capítulo 7, en nuestro estudio sobre integrales de línea.

Diferencial de la longitud de arco Un ***desplazamiento infinitesimal*** de una partícula que sigue una trayectoria $\mathbf{c}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ es

$$d\mathbf{s} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k} = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right) dt,$$

y su longitud

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

es la ***diferencial de la longitud de arco***. Véase la Figura 4.2.3.

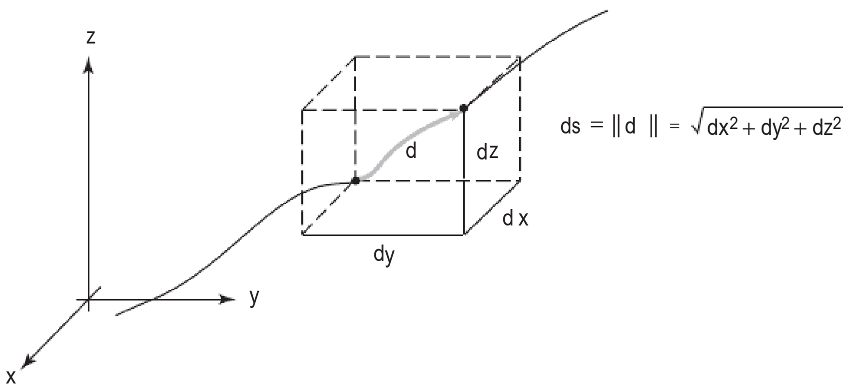

Figura 4.2.3 Diferencial de la longitud de arco.

Estas fórmulas ayudan a recordar la fórmula de la longitud de arco como

$$\text{Longitud de arco} = \int_{t_0}^{t_1} ds.$$

Al igual que hicimos antes con otros conceptos geométricos como la longitud y el ángulo, podemos extender la noción de longitud de arco a trayectorias en el espacio n-dimensional.