$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}_{uu} &= \frac{R^2 - v^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^{3/2}}\mathbf{k}\\ \mathbf{\Phi}_{vv} &= \frac{R^2 - u^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^{3/2}}\mathbf{k}\\ \mathbf{\Phi}_{uv} &= \frac{uv}{(R^2 - u^2 - v^2)^{3/2}}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} = \frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\sqrt{W}}\\ &= \frac{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}{R} \cdot \left(\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\mathbf{i} + \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)\\ &= \frac{1}{R}\left(u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}\,\mathbf{k}\right).\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\ell = \mathbf{N} \cdot \mathbf{\Phi}_{uv} &= \frac{1}{R}\left(\frac{R^2 - v^2}{R^2 - u^2 - v^2}\right)\\ n = \mathbf{N} \cdot \mathbf{\Phi}_{vv} &= \frac{1}{R}\left(\frac{R^2 - u^2}{R^2 - u^2 - v^2}\right)\\ m = \mathbf{N} \cdot \mathbf{\Phi}_{uv} &= \frac{1}{R}\left(\frac{uv}{R^2 - u^2 - v^2}\right).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\ell n - m^2 = \frac{1}{R^2}\left(\frac{(R^2 - v^2)(R^2 - u^2) - u^2v^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^2}\right) = \frac{1}{R^2 - u^2 - v^2}.$$

Dividiendo esto entre W obtenemos $K = 1/R^2$. Por tanto, la curvatura de Gauss no varía de un punto a otro de la semiesfera; es decir, es constante. Esto confirma nuestra intuición de que la esfera es perfectamente simétrica y que su curvatura es la misma en todos los puntos. Por tanto, la curvatura media también debería ser constante. Esto se comprueba como sigue

$$\begin{aligned}H &= \frac{G\ell + En - 2Fm}{2W}\\ &= \frac{1}{2W}\left\{\left(\frac{R^2 - u^2}{R^2 - u^2 - v^2}\right)\frac{1}{R}\left(\frac{R^2 - v^2}{R^2 - u^2 - v^2}\right)\right.\\ &\quad \left. + \left(\frac{R^2 - v^2}{R^2 - u^2 - v^2}\right)\frac{1}{R}\left(\frac{R^2 - u^2}{R^2 - u^2 - v^2}\right) - 2\frac{u^2v^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^2}\right\}\\ &= \frac{1}{W}\left\{\frac{R}{R^2 - u^2 - v^2}\right\} = \frac{1}{R}.\end{aligned}$$

▲