Como en el caso sin restricciones, también existe un criterio de la derivada segunda para funciones de más de dos variables. Si buscamos los extremos de $f(x_1, \ldots, x_n)$ sujeta a una única restricción $g(x_1, \ldots, x_n) = c$, primero formamos la matriz hessiana orlada para la función auxiliar $h(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda(g(x_1, \ldots, x_n) - c)$ como sigue:

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{-\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{-\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{-\partial g}{\partial x_n} \\ \dfrac{-\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \dfrac{-\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{-\partial g}{\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2\,\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

En segundo lugar, examinamos los determinantes de las submatrices diagonales de orden ≥ 3 en los puntos críticos de h. Si todos son negativos, es decir, si

$$\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial g}{\partial x_2} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial g}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial g}{\partial x_3} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_3} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2\,\partial x_3} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_3} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_3} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2\,\partial x_3} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} < 0, \ldots,$$

entonces estamos en un punto de mínimo local de $f|S$. Si comienzan con un subdeterminante positivo 3×3 y alternan los signos (es decir, $>0, <0, >0, <0, \ldots$), entonces estamos en un punto de máximo local. Si todos son distintos de cero y no encajan en ninguno de estos patrones, entonces el punto no es ni un máximo ni un mínimo (se dice que es un punto de tipo silla).[13]

[13]Para ver un estudio detallado, véase C. Caratheodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, Holden-Day, San Francisco, 1965; Y. Murata, *Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems*, Academic Press, Nueva York, 1977, pp. 263–271; o D. Spring, *Am. Math. Mon.* 92 (1985): 631–643.