iii) El elemento $m \in S$ es un **elemento maximal** para S si no existe una $s \in S$ con $m < s$.

Observación 1. En ii), la cota superior para C debe ser comparable con todo elemento en C pero no es necesario que esté en C (aunque debe estar en S). Por ejemplo, el número 1 es una cota superior para el conjunto (0, 1) pero no se encuentra en (0, 1). Cualquier número mayor que 1 es una cota superior. Sin embargo, no existe un número en (0, 1) que sea una cota superior para (0, 1).

Observación 2. Si m es elemento maximal para S, no necesariamente ocurre que $s \leq m$ para toda $s \in S$. De hecho, m puede ser comparable con muy pocos elementos de S. La única condición para la maximalidad es que no exista un elemento de S "mayor que" m.

EJEMPLO 5.8.3 Una cadena de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

Sea $S = \mathbb{R}^2$. Entonces $P(S)$ consiste en subconjuntos del plano xy. Sea $D_r = \{(x, y): x^2 + y^2 < r^2\}$; es decir, D_r es un disco abierto de radio r –el interior del círculo de radio r centrado en el origen–. Sea

$$T = \{D_r: r > 0\}$$

Claramente, T es una cadena, ya que si D_{r_1} y D_{r_2} están en T, entonces

$$D_{r_1} \subseteq D_{r_2} \text{ si } r_1 \leq r_2 \text{ y } D_{r_2} \subseteq D_{r_1} \text{ si } r_2 \leq r_1$$

Antes de seguir, es necesaria una notación nueva. Sea V un espacio vectorial. Se ha visto que una combinación lineal de vectores en V es una suma finita

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n.$$

Si se han estudiado series de potencia, se habrán visto sumas infinitas de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Por ejemplo,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots$$

Aquí se necesita un tipo diferente de suma. Sea C un conjunto de vectores en V.* Para cada $\mathbf{v} \in C$, si $\alpha_{\mathbf{v}}$ denota un escalar (el conjunto de escalares está dado en la definición de V). Entonces cuando escribimos

$$\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{v} \in C} \alpha_{\mathbf{v}} \mathbf{v} \tag{5.8.1}$$

se entenderá que sólo un número finito de escalares $\alpha_{\mathbf{v}}$ son diferentes de cero y que todos los términos con $\alpha_{\mathbf{v}} = 0$ se dejan fuera de la sumatoria. La suma (5.8.1) se puede describir como sigue:

Para cada $\mathbf{v} \in C$, se asigna un escalar $\alpha_{\mathbf{v}}$ y se forma el producto $\alpha_{\mathbf{v}}\mathbf{v}$. Entonces $\mathbf{x}$ es la suma del subconjunto finito de los vectores $\alpha_{\mathbf{v}}\,\mathbf{v}$ para el que $\alpha_{\mathbf{v}} \neq 0$.

* C no es necesariamente un subespacio de V.