Teorema 4.4.3

Si φ es un ángulo entre **u** y **v**, entonces

$$\boxed{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|\ \text{sen}\ \varphi} \qquad (4.4.2)$$

Demostración

No es difícil demostrar (comparando coordenadas) que $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2\ |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ (vea el problema 40). Entonces, como $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = |\mathbf{u}|^2\ |\mathbf{v}|^2 \cos^2 \varphi$ (del teorema 4.3.2),

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 &= |\mathbf{u}|^2\ |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2\ |\mathbf{v}|^2 \cos^2 \varphi = |\mathbf{u}|^2\ |\mathbf{v}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= |\mathbf{u}|^2\ |\mathbf{v}|^2\ \text{sen}^2\ \varphi \end{aligned}$$

y el teorema queda demostrado después de sacar la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación. Observe que sen $\varphi \geq 0$ porque $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Existe una interpretación geométrica interesante del teorema 4.4.3. Los vectores **u** y **v** están dibujados en la figura 4.29 y se puede pensar que son dos lados adyacentes de un paralelogramo. Entonces de la geometría elemental se ve que

El área del paralelogramo que tiene lados adyacentes **u** y **v** es igual a $|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|\ \text{sen}\ \varphi = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ **(4.4.3)**

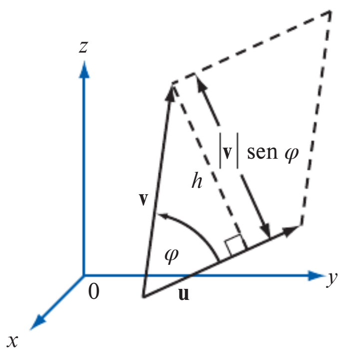

Figura 4.29

φ es el ángulo entre **u** y **v**. $\dfrac{h}{|\mathbf{v}|} = \text{sen}\ \varphi$, de manera que $h = |\mathbf{v}|\ \text{sen}\ \varphi$.

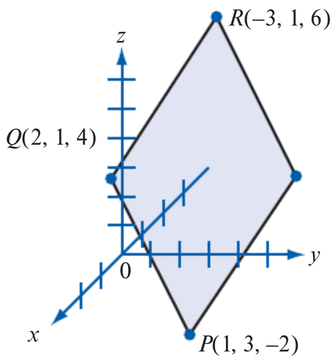

Figura 4.30

Un paralelogramo en $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 4.4.3 Cálculo del área de un paralelogramo en $\mathbb{R}^3$

Encuentre el área del paralelogramo con vértices consecutivos en $P = (1, 3, -2)$, $Q = (2, 1, 4)$ y $R = (-3, 1, 6)$ (vea la figura 4.30).

SOLUCIÓN ► El paralelogramo.