Definición 5.8.3

Combinación lineal, conjunto generador, independencia lineal y base

i) Sea C un subconjunto de un espacio vectorial V. Entonces cualquier vector que se puede expresar en la forma (5.8.1) se denomina **combinación lineal** de vectores en C. El conjunto de combinaciones lineales de vectores en C se denota por L(C).

ii) Se dice que el conjunto C **genera** el espacio vectorial V si $V \subseteq \mathrm{L}(C)$.

iii) Se dice que un subconjunto C de un espacio vectorial V es **linealmente independiente** si

$$\sum_{\mathbf{v}\in C} \alpha_{\mathbf{v}}\mathbf{v} = 0$$

se cumple sólo cuando $\alpha_{\mathbf{v}} = 0$ para todo $\mathbf{v} \in C$.

iv) El subconjunto B de un espacio vectorial V es una **base** para V si genera a V y es linealmente independiente.

Observación. Si C contiene sólo un número finito de vectores, estas definiciones son precisamente las que se vieron antes en este capítulo.

Teorema 5.8.1

Sea B un subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial V. Entonces B es una base si y sólo si es maximal; es decir, si $B \subsetneqq D$, entonces D es linealmente dependiente.

Demostración

Suponga que B es una base y que $B \subsetneqq D$. Seleccione $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x} \in D$ *pero* $\mathbf{x} \notin B$. Como B es una base, $\mathbf{x}$ puede escribirse como una combinación lineal de vectores en B:

$$\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{v}\in B} \alpha_{\mathbf{v}}\mathbf{v}$$

Si $\alpha_{\mathbf{v}} = 0$ para toda $\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y D es dependiente. De otra manera, $\alpha_{\mathbf{v}} \neq 0$ para alguna $\mathbf{v}$, y así la suma

$$\mathbf{x} - \sum_{\mathbf{v}\in B} \alpha_{\mathbf{v}}\mathbf{v} = 0$$

demuestra que D es dependiente; por lo tanto, B es maximal.

De forma inversa, suponga que B es maximal. Sea $\mathbf{x}$ un vector en V que no está en B. Sea $D = B \cup \{\mathbf{x}\}$. Entonces D es dependiente (ya que B es maximal) y existe una ecuación

$$\sum_{\mathbf{v}\in B} \alpha_{\mathbf{v}}\mathbf{v} + \beta\mathbf{x} = 0$$

en la que no todos los coeficientes son cero. Pero $\beta \neq 0$, porque de otra manera se obtendría una contradicción de la independencia lineal de B. Así, se puede escribir

$$\mathbf{x} = -\beta^{-1} \sum_{\mathbf{v}\in B} \alpha_{\mathbf{v}}\mathbf{v}^{*}$$

Entonces, B es un conjunto generador y, por lo tanto, es una base para V.

* Si los escalares son números reales o complejos, entonces $\beta^{-1} = 1/\beta$.