El siguiente ejemplo ilustra algunas técnicas que resultan útiles para determinar si un conjunto es abierto.

Ejemplo 1 Demostrar que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ es un conjunto abierto.

Solución El conjunto está representado en la Figura 2.2.4.

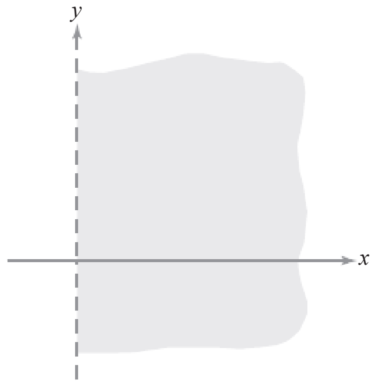

Figura 2.2.4 Demostrar que A es un conjunto abierto.

Intuitivamente, este conjunto es abierto, porque ninguno de los puntos de la "frontera", $x = 0$, está contenido en el conjunto. Un argumento así suele bastar cuando uno se ha acostumbrado al concepto de conjunto abierto. Sin embargo, al principio deben proporcionarse más detalles. Para demostrar que A es un conjunto abierto, tenemos que demostrar que para todo punto $(x, y) \in A$ existe $r > 0$ tal que $D_r(x, y) \subset A$. Si $(x, y) \in A$, entonces $x > 0$. Se elige $r = x$. Si $(x_1, y_1) \in D_r(x, y)$, tenemos que

$$|x_1 - x| = \sqrt{(x_1 - x)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} < r = x,$$

y por tanto $x_1 - x < x$ y $x - x_1 < x$. La última desigualdad implica que $x_1 > 0$, es decir, $(x_1, y_1) \in A$. Por tanto, $D_r(x, y) \subset A$, y en consecuencia A es un conjunto abierto (véase la Figura 2.2.5). ▲

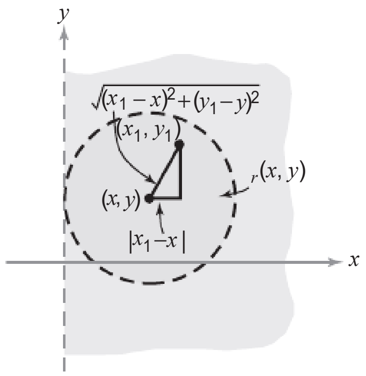

Figura 2.2.5 Construcción de un disco alrededor de un punto de A que está complementamente contenido en A.

Es útil dar un nombre especial a un conjunto abierto que contiene un punto dado $\mathbf{x}$, ya que esta idea surge a menudo en el estudio de límites y continuidad. Así, por ***entorno*** de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se entiende un conjunto abierto U que contiene al punto $\mathbf{x}$. Por ejemplo, $D_r(\mathbf{x}_0)$ es un entorno de $\mathbf{x}_0$ para todo $r > 0$. El conjunto A del Ejemplo 1 es un entorno del punto $\mathbf{x}_0 = (3, -10)$.

Frontera

Presentamos ahora formalmente el concepto de punto frontera, al que hemos aludido en el Ejemplo 1.

> **Definición Puntos frontera** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se llama ***punto frontera*** de A si todo entorno de $\mathbf{x}$ contiene al menos un punto de A y al menos un punto que no está en A.