De los problemas 22 al 28 encuentre una base para la imagen y el espacio nulo de la matriz dada.

22. La matriz del problema 5.

23. La matriz del problema 7.

24. La matriz del problema 8.

25. La matriz del problema 12.

26. La matriz del problema 15.

27. La matriz del problema 18.

28. La matriz del problema 21.

De los problemas 29 al 33 encuentre una base para el espacio generado por los conjuntos de vectores dados.

29. (2, 0, 3), (–1, 1, 1), (1, 3, 3), (4, 2, 7)

30. (1, –2, 3), (2, –1, 4), (3, –3, 3), (2, 1, 0)

31. (1, –3, –1, –2), (3, 1, –1, 2), (11, –3, –5, 2), (7, 9, –1, 10)

32. (1, –1, 1, –1), (2, 0, 0, 1), (4, –2, 2, 1), (7, –3, 3, –1)

33. (3, 0, –6), (–1, –1, –1), (4, –2, –14)

De los problemas 34 al 38 utilice el teorema 5.7.9 para determinar si el sistema dado tiene alguna solución.

34.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 3 \end{aligned}$$

35.
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - 11x_3 + 3x_4 &= -4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= -5 \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 + 3x_4 &= -2 \\ 4x_1 - x_2 - 11x_3 &= 1 \end{aligned}$$

36.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

37.
$$\begin{aligned} -4x_1 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 - 9x_4 &= -2 \\ 18x_1 + 4x_2 + x_3 - 16x_4 &= -3 \\ -13x_1 - 3x_2 + x_3 + 11x_4 &= -3 \end{aligned}$$

38.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 11x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 7x_1 + 9x_2 - x_3 + 110x_4 &= -5 \end{aligned}$$

39. Demuestre que el rango de una matriz diagonal es igual al número de componentes diferentes de cero en la diagonal.

40. Sea A una matriz triangular inferior de $n \times n$ con ceros en la diagonal. Demuestre que $\rho(A) < n$.

41. Demuestre que si A es una matriz de $m \times n$ y $m < n$, entonces *a*) $\rho(A) \leq m$ y *b*) $\nu(A) \geq n - m$.

42. Demuestre que para cualquier matriz A, $\rho(A) = \rho(A^\top)$.

43. Sean A y B matrices de $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente. Demuestre que $\rho(AB) \leq$ mín $(\rho(A), \rho(B))$.

44. Sea A una matriz de $m \times n$ y sean B y C matrices invertibles de $m \times m$ y $n \times n$, respectivamente. Pruebe que $\rho(A) = \rho(BA) = \rho(AC)$. Es decir, si se multiplica una matriz por una matriz invertible, el rango no cambia.

***45.** Sean A y B matrices de $m \times n$. Demuestre que si $\rho(A) = \rho(B)$, entonces existen matrices invertibles C y D tales que $B = CAD$.

46. Sea A una matriz de 5×7 con rango 5. Demuestre que el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene cuando menos una solución para cada vector de dimensión 5 $\mathbf{b}$.

47. Suponga que cualesquiera k renglones de A son linealmente independientes mientras que cualesquiera $k + 1$ renglones de A son linealmente dependientes. Demuestre que $\rho(A) = k$.