En la prueba del teorema 6.1.3 se definió $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1$. Pero como se ha visto, $(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \text{proy}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v}_2$ (ya que $|\mathbf{u}_1|^2 = 1$). Ahora se ampliará este concepto de proyección sobre un vector a proyección sobre un subespacio.

Definición 6.1.4

Proyección ortogonal

Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$. Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces la **proyección ortogonal** de $\mathbf{v}$ sobre H, denotada por $\text{proy}_H \mathbf{v}$, está dada por

$$\boxed{\text{proy}_H \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\,\mathbf{u}_k} \qquad \textbf{(6.1.19)}$$

Observe que $\text{proy}_H \mathbf{v} \in H$.

EJEMPLO 6.1.7 Proyección ortogonal de un vector sobre un plano

Encuentre $\text{proy}_\pi \mathbf{v}$, donde π es el plano $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + 3z = 0\right\}$, y $\mathbf{v}$ es vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN ► Del ejemplo 6.1.5, una base ortonormal para π es $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$.

Entonces

$$\text{proy}_\pi \mathbf{v} = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \frac{-6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} \frac{-6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{24}{70} \\ -\frac{12}{70} \\ -\frac{20}{70} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

La notación de la proyección proporciona una forma conveniente para escribir un vector en $\mathbb{R}^n$ en términos de una base ortonormal.

Teorema 6.1.4

Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\boxed{\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\,\mathbf{u}_k} \qquad \textbf{(6.1.20)}$$

Esto es, $\mathbf{v} = \text{proy}_{\mathbb{R}^n} \mathbf{v}$.