(b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(0, 2, -1)$ y $(-3, 1, 0)$.

(c) Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector $(-2, 1, 2)$ y que pasa por el punto $(-1, 1, 3)$.

4. (a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(0, 1, 0)$ en la dirección de $3\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

(b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(0, 1, 1)$ y $(0, 1, 0)$.

(c) Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector $(-1, 1, -1)$ y que pasa por el punto $(1, 1, 1)$.

5. Hallar una ecuación para el plano que contiene los puntos (2, 1, −1), (3, 0, 2) y (4, −3, 1).

6. Hallar una ecuación para una recta que es paralela al plano $2x - 3y + 5z - 10 = 0$ y pasa por el punto (−1, 7, 4). (Hay muchas soluciones posibles.)

7. Calcular $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ para los siguientes conjuntos de vectores:

(a) $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}; \mathbf{w} = \mathbf{k}$

(b) $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}; \mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

(c) $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}; \mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

8. Calcular $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ para los vectores del Ejercicio 7.

9. Hallar el coseno del ángulo que forman los vectores del Ejercicio 7.

10. Hallar el área del paralelogramo generado por los vectores del Ejercicio 7.

11. Utilizar notación vectorial para describir el triángulo en el espacio cuyos vértices son el origen y los extremos de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

12. Demostrar que los tres vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ están en el mismo plano que pasa por el origen si y solo si existen tres escalares α, β, γ, no todos cero, tales que $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

13. Para los números reales $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, demostrar que

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2).$$

14. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vectores unitarios ortogonales entre sí. Si $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$, demostrar que

$$\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}, \qquad \beta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}, \qquad \gamma = \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}.$$

Interpretar el resultado geométricamente.

15. Hallar los productos AB y BA donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. Hallar los productos AB y BA donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

17. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ dos vectores en el plano, $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$, y sea λ un número real. Demostrar que el área del paralelogramo determinado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a}$ es la misma que la del paralelogramo determinado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Hacer un esquema. Relacionar este resultado con una propiedad conocida de los determinantes.

18. Hallar el volumen del paralelepípedo determinado por los vértices $(0, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 2, 0), (3, 1, 2)$.

19. Dados los vectores distintos de cero $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^3$, demostrar que el vector $\mathbf{v} = \|\mathbf{a}\|\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|\mathbf{a}$ biseca el ángulo que forman $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

20. Demostrar que los vectores $\|\mathbf{b}\|\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|\mathbf{b}$ y $\|\mathbf{b}\|\mathbf{a} - \|\mathbf{a}\|\mathbf{b}$ son ortogonales.

21. Utilizar la desigualdad triangular para demostrar que $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \geq \Big|\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{w}\|\Big|$.

22. Usar métodos vectoriales para probar que la distancia desde el punto (x_1, y_1) a la recta $ax + by = c$ es

$$\frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

23. Comprobar que la dirección de $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ está dada por la regla de la mano derecha, seleccionando $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ entre los vectores $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

24. (a) Suponer que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}$ para todo $\mathbf{b}$. Demostrar que $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$.

(b) Suponer que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}$ para todo $\mathbf{b}$. ¿Es cierto que $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$?

25. (a) Utilizando métodos vectoriales, demostrar que la distancia entre dos rectas no paralelas l_1 y l_2 está dada por

$$d = \frac{|(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)|}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|},$$