EJEMPLO 7.1.6 Transformación de reflexión

Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. Es fácil verificar que T es lineal. En términos geométricos, T toma un vector en $\mathbb{R}^2$ y lo refleja respecto al eje y (vea la figura 7.2).

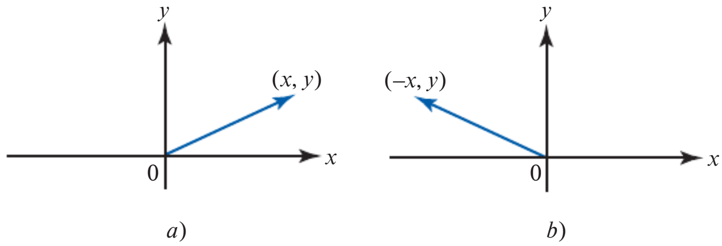

Figura 7.2

El vector $(-x, y)$ es la reflexión respecto al eje y del vector (x, y).

EJEMPLO 7.1.7 Transformación de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por la multiplicación por una matriz de $m \times n$

Sea A una matriz de $m \times n$ y defina $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$. Como $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$ y $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$ si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en $\mathbb{R}^n$, se observa que T es una transformación lineal. Entonces *toda matriz A de $m \times n$ se puede utilizar para definir una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$*. En la sección 7.3 se verá que se cumple el converso: *toda transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita se puede representar por una matriz.*

EJEMPLO 7.1.8 Transformación de rotación

Suponga que el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en el plano xy se rota un ángulo θ (medido en grados o radianes) en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Llame a este nuevo vector rotado $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Entonces, como se ve en la figura 7.3, si r denota la longitud de $\mathbf{v}$ (que no cambia por la rotación),

$$x = r\cos\alpha \qquad y = r\,\text{sen}\,\alpha$$

$$x' = r\cos(\theta + \alpha) \qquad y' = r\,\text{sen}\,(\theta + \alpha)$$

Nota

Esto se deduce de la definición estándar de cos θ y sen θ como las coordenadas x y y de un punto en el círculo unitario. Si (x, y) es un punto en el círculo de radio r con centro en el origen, entonces $x = r\cos\varphi$ y $y = r\,\text{sen}\,\varphi$, donde φ es el ángulo que forma el vector (x, y) con el lado positivo del eje x.

Pero $r\cos(\theta + \alpha) = r\cos\theta\cos\alpha - r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\alpha$, de manera que

$$x' = x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta \tag{7.1.3}$$

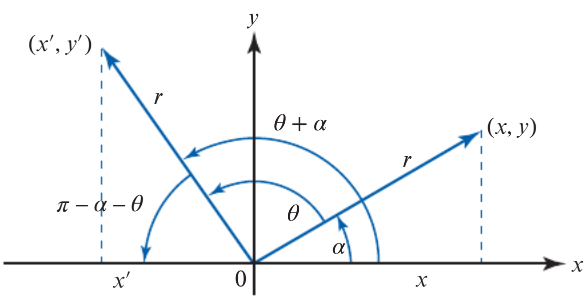

Figura 7.3

(x', y') se obtiene rotando (x, y) un ángulo θ.