Sección 2.5

1. Utilizar la partes (I), (II) y (III) del Teorema 10. La derivada en $\mathbf{x}$ es $2(f(\mathbf{x})+1)\mathbf{D}f(\mathbf{x})$.

3. Calcular cada una de ellas de dos formas; las respuestas son

(a) $(f\circ \mathbf{c})'(t)=e^t(\cos t-\operatorname{sen} t)$.
(b) $(f\circ \mathbf{c})'(t)=15t^4\exp(3t^5)$.
(c) $(f\circ \mathbf{c})'(t)=(e^{2t}-e^{-2t})[1+\log(e^{2t}+e^{-2t})]$.
(d) $(f\circ \mathbf{c})'(t)=(1+4t^2)\exp(2t^2)$.

5. Utilizar el Teorema 10(III) y sustituir las matrices por vectores.

7. $(f\circ g)(x,y)=$

$(\tan(e^{x-y}-1)-e^{x-y}, e^{2(x-y)}-(x-y)^2)$

y $\quad \mathbf{D}(f\circ g)(1,1)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix}$.

9. $\frac{1}{2}\cos(1)\cos(\log\sqrt{2})$.

11. (a) $\mathbf{p}(t)=(3\operatorname{sen}(t)+2,1,\cos(t)+t^2)$, $\mathbf{p}'(\pi)=(-3,0,2\pi)$.
(b) $\mathbf{c}(\pi)=(-1,0,\pi)$, $\mathbf{c}'(\pi)=(0,-1,1)$,

$$\mathbf{D}f(-1,0,\pi)=\begin{bmatrix}0 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\pi\end{bmatrix}.$$

(c) $(-3,0,2\pi)$.

13. $-2\cos t\operatorname{sen} t e^{\operatorname{sen} t}+\operatorname{sen}^4 t+\cos^3 t e^{\operatorname{sen} t}-3\cos^2 t\operatorname{sen}^2 t$ para (a) y (b).

15. $(2,0)$.

17. (a) $h(x,y)=f(x,u(x,y))=f(p(x),u(x,y))$. Aquí utilizamos p solo como notación: $p(x)=x$. Desarrollando:

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$$

puesto que

$$\frac{dp}{dx}=\frac{dx}{dx}=1$$

JUSTIFICACIÓN: Sean (p,u) las variables de f. Para usar la regla de la cadena debemos expresar h como una composición de funciones; es decir, primero determinamos g tal que $h(x,y)=f(g(x,y))$. Sea $g(x,y)=(p(x),u(x,y))$. Por tanto, $\mathbf{D}h=(\mathbf{D}f)(\mathbf{D}g)$. Luego

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial u}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial u}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\end{bmatrix},$$

y por tanto $\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial p}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

También puede darse $\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$ como una solución. Esto requiere una cuidadosa interpretación a causa de la posible ambigüedad del significado de $\partial f/\partial x$, razón por la que hemos utilizado el nombre de p.

(b) $\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{dv}{dx}$.

(c) $\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{dw}{dx}$.

19. (a) $G(x,y(x))=0$ y por tanto $\dfrac{\partial G}{\partial x}+\dfrac{\partial G}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}=0$.

(b)
$$\begin{bmatrix}\frac{dy_1}{dx}\\ \frac{dy_2}{dx}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \frac{\partial G_1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial G_2}{\partial y_1} & \frac{\partial G_2}{\partial y_2}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\partial G_1}{\partial x}\\ \frac{\partial G_2}{\partial x}\end{bmatrix}$$

donde $^{-1}$ indica la matriz inversa.
La primera componente de esta ecuación es

$$\frac{dy_1}{dx}=\frac{-\frac{\partial G_1}{\partial x}\frac{\partial G_2}{\partial y_2}+\frac{\partial G_2}{\partial x}\frac{\partial G_1}{\partial y_2}}{\frac{\partial G_1}{\partial y_1}\frac{\partial G_2}{\partial y_2}-\frac{\partial G_2}{\partial y_1}\frac{\partial G_1}{\partial y_2}}.$$

(c) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x}{3y^2+e^y}$.

21. Aplicar la regla de la cadena a $\partial G/\partial T$, donde $G(t(T,P),p(T,P),V(T,P))=P(V-b)e^{a/RVT}-RT$ es idénticamente a 0; $t(T,P)=T$; y $p(T,P)=P$.

23. Definir $R_1(\mathbf{h})=f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}_0)-[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h}$.

25. Sean g_1 y g_2 funciones C^1 de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ tal que $g_1(\mathbf{x})=1$ para $\|\mathbf{x}\|<\sqrt{2}/3$; $g_1(\mathbf{x})=0$ para