$$\begin{aligned}\frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0} &= \frac{f(x(t),y(t),z(t))-f(x(t_0),y(t_0),z(t_0))}{t-t_0}\\ &= \frac{f(x(t),y(t),z(t))-f(x(t_0),y(t),z(t))}{t-t_0}\\ &\quad + \frac{f(x(t_0),y(t),z(t))-f(x(t_0),y(t_0),z(t))}{t-t_0}\\ &\quad + \frac{f(x(t_0),y(t_0),z(t))-f(x(t_0),y(t_0),z(t_0))}{t-t_0}.\end{aligned}$$

Ahora aplicamos el *teorema del valor medio* del cálculo de una variable, que establece: *si* $g$: $[a,b] \to \mathbb{R}$ *es continua y diferenciable en el intervalo abierto* $(a,b)$, *entonces existe un punto* $c$ *en* $(a,b)$ *tal que* $g(b)-g(a) = g'(c)(b-a)$. Aplicando lo anterior a $f$ como función de $x$, podemos afirmar que, para algún $c$ entre $x$ y $x_0$,

$$f(x,y,z)-f(x_0,y,z) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c,y,z)\right](x-x_0).$$

De la misma forma, calculamos

$$\begin{aligned}\frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0} &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c,y(t),z(t))\right]\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}\\ &\quad + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0),d,z(t))\right]\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\\ &\quad + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x(t_0),y(t_0),e)\right]\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0},\end{aligned}$$

donde $c$, $d$ y $e$ se encuentran entre $x(t)$ y $x(t_0)$, entre $y(t)$ e $y(t_0)$ y entre $z(t)$ y $z(t_0)$, respectivamente. Tomando el límite cuando $t \to t_0$, teniendo en cuenta la continuidad de las derivadas parciales $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z$, y el hecho de que $c$, $d$ y $e$ convergen a $x(t_0), y(t_0)$ y $z(t_0)$, respectivamente, obtenemos la Ecuación (2). ■

## Segundo caso especial de la regla de la cadena

Sea $f$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y sea $g$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Escribimos

$$g(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$$

y definimos $h$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mediante

$$h(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)).$$

En este caso, la regla de la cadena establece que