33. (a) $\frac{4}{3}\pi abc$. (b) $\frac{4}{5}\pi abc$.

35. (a) Comprobar que si $T(u_1, v_1) = T(u_2, v_2)$, entonces $u_1 = u_2$ y $v_1 = v_2$.

(b) 160/3.

37. $\frac{4}{9}a^{2/3}\iint_{D^*}[f((au^2)^{1/3}, (av^2)^{1/3})u^{-1/3}v^{-1/3}]\,du\,dv$.

Sección 6.3

1. $\left(1, \frac{1}{3}a\right)$.

3. $[\pi^2 - \operatorname{sen}(\pi^2)]/\pi^3$.

5. $\left(\frac{11}{18}, \frac{65}{126}\right)$.

7. \$503,64.

9. (a) δ, donde δ es la densidad de masa (constante). (b) 37/12.

11. $500\pi\left(10 - \frac{1}{3}\right)$.

13. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

15. 1/4.

17. Siendo δ la densidad, el momento de inercia es

$$\delta\int_0^k\int_0^{2\pi}\int_0^{a\sec\phi}(\rho^4\operatorname{sen}^3\phi)\,d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

19. $(1{,}00 \times 10^8)$m.

21. (a) El único plano de simetría de la carrocería de un automóvil es el que divide los lados izquierdo y derecho del coche.

(b) $\bar{z}\cdot\iiint_W \delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ es la coordenada z del centro de masa multiplicada por la masa de W. Una reordenación de la fórmula para $\bar{z}$ proporciona la primera línea de la ecuación. El siguiente paso se justifica por la propiedad de la aditividad de las integrales. Por simetría, podemos sustituir z por $-z$ e integrar en la región por encima del plano xy. Finalmente, podemos sacar el signo menos fuera de la segunda integral, y puesto que $\delta(x, y, z) = \delta(u, v, -w)$, estamos restando la segunda integral de sí misma. Por tanto, la respuesta es 0.

(c) En el apartado (b), hemos demostrado que $\bar{z}$ multiplicado por la masa de W es 0. Puesto que la masa tiene que ser positiva, $\bar{z}$ tiene que ser 0.

(d) Por el apartado (c), el centro de masas debe estar en ambos planos.

23. $V = -(4{,}71\times10^{19})Gm/R \approx -(3{,}04\times10^9)m/R$, donde m es la masa de una partícula a la distancia R del centro del planeta.

25. En el plano x, y, el círculo D dado por $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ con centro (y centro de masas) en $(a, 0)$. Además, el área del círculo es $A(D) = \pi r^2$. Por tanto, por el Ejercicio 24, tenemos:

$$\text{Vol}(W) = 2\pi(a)(\pi r^2).$$

Sección 6.4

1. 4.

3. 3/16.

5. $\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)}$.

7. (a) 3π. (b) $\lambda < 1$.

9. La integración de $\iint e^{-xy}\,dx\,dy$ con respecto a x primero y después con respecto a y da log 2. Invirtiendo el orden se obtiene la integral del lado izquierdo de la igualdad dada en el ejercicio.

11. Integrar sobre $[\varepsilon, 1]\times[\varepsilon, 1]$ y hacer $\varepsilon \to 0$ para demostrar que la integral impropia existe y es igual a 2 log 2.

13. $\frac{2\pi}{9}[(1+a^3)^{3/2} - a^{9/2} - 1]$.

15. Utilizar el hecho de que

$$\frac{\operatorname{sen}^2(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

17. Utilizar el hecho de que $e^{x^2+y^2}/(x-y) \geq 1/(x-y)$ en la región dada.

19. Cada una de las integrales es igual a 1/4 y se puede aplicar el Teorema 3 (teorema de Fubini).