$$H = \{(x_1, x_2, \ldots x_n): a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales fijos, no todos cero.

22. En $\mathbb{R}^5$ encuentre una base para el hiperplano

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5): 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0\}$$

De los problemas 23 al 31 encuentre una base para el espacio de solución del sistema homogéneo dado.

23. $x + 5y = 0$

24. $8x_1 - 56x_2 = 0$

25. $\begin{aligned} x + 5y &= 0 \\ -2x - 10y &= 0 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} -x + 3y - 12z &= 0 \\ 7x - 3y + z &= 0 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} x - 4y + 6z &= 0 \\ 5x - 6y + 8z &= 0 \\ 11x - 6y + 22z &= 0 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} x_1 - 6x_2 + 11x_3 + 6x_4 &= 0 \\ -15x_1 + 26x_2 - 13x_3 - 10x_4 &= 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} 5x_1 + 8x_2 - 8x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 10x_1 + 11x_2 - 11x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 12x_1 + 11x_3 - 8x_4 &= 0 \end{aligned}$

31. $\begin{aligned} -2w + 4x + 2y - 2z &= 0 \\ w - 2x + 2y &= 0 \\ 2w - x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$

32. Encuentre una base para $\mathbb{D}_3$, el espacio vectorial de matrices diagonales de 3×3. ¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{D}_3$?

33. ¿Cuál es la dimensión D_n, el espacio de matrices diagonales de $n \times n$?

34. Sea $\mathbb{S}_{nn}$ el espacio vectorial de matrices simétricas de $n \times n$. Demuestre que $\mathbb{S}_{nn}$ es un subespacio de $\mathbb{M}_{nn}$ y que $\dim \mathbb{S}_{nn} = [n(n + 1)]/2$.

35. Suponga que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V de dimensión n y $m < n$. Demuestre que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ se puede aumentar a una base para V. Esto es, existen vectores $\mathbf{v}_{m+1}, \mathbf{v}_{m+2}, \ldots, \mathbf{v}_n$ tales que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base. [***Sugerencia:*** Vea la demostración del teorema 5.5.5.]

36. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base en V. Sean $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{u}_n = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n$. Demuestre que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es también una base en V.

37. Demuestre que si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V, entonces $\dim V = n$. [***Sugerencia:*** Utilice el resultado del problema 5.4.61.]

38. Sean H y K dos subespacios de V tales que $H \subseteq K$ y $\dim H = \dim K < \infty$. Demuestre que $H = K$.

39. Sean H y K dos subespacios de V. Defina $H + K = \{\mathbf{h} + \mathbf{k}: \mathbf{h} \in H \text{ y } \mathbf{k} \in K\}$.

a) Demuestre que $H + K$ es un subesapcio de V.
b) Si $H \cap K = \{\mathbf{0}\}$, demuestre que $\dim (H + K) = \dim H + \dim K$.

***40.** Si H es un subespacio vectorial de dimensión finita V, demuestre que existe un subespacio único K de V tal que *a)* $H \cap K = \{\mathbf{0}\}$ y *b)* $H + K = V$.

41. Demuestre que dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en $\mathbb{R}^2$ con puntos terminales en el origen son colineales si y sólo si $\dim \text{gen} \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = 1$.

42. Demuestre que los tres vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ en $\mathbb{R}^3$ con puntos terminales en el origen son coplanares si y sólo si $\dim \text{gen} \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \leq 2$.