o, de forma equivalente, si $\mathbf{l}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,

$$x = t - 1, \qquad y = 1 - t, \qquad z = t. \qquad \blacktriangle$$

La descripción de un *segmento* de recta requiere que el conjunto de valores que toma el parámetro t sea restringido, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16 Determinar la ecuación del segmento de recta definido entre los puntos (1, 1, 1) y $(2, 1, 2)$.

Solución La *recta* que pasa por los puntos (1, 1, 1) y (2, 1, 2) se describe en forma paramétrica como $(x, y, z) = (1 + t, 1, 1 + t)$, donde t toma todos los valores reales. Cuando $t = 0$, el punto (x, y, z) es (1, 1, 1) y cuando $t = 1$, el punto (x, y, z) es (2, 1, 2). Por tanto, el punto (x, y, z) se encuentra entre (1, 1, 1) y (2, 1, 2) cuando $0 \le t \le 1$, de modo que el *segmento* se describe mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= 1 + t, \\ y &= 1, \\ z &= 1 + t, \end{aligned}$$

junto con las desigualdades $0 \le t \le 1$. ▲

También podemos describir de forma paramétrica otros objetos, además de las rectas.

Ejemplo 17 Describir los puntos del paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ que parten del origen (incluyendo los puntos de las aristas del paralelogramo).

Solución Consideremos la Figura 1.1.24. Si P es cualquier punto interior del paralelogramo dado y dibujamos las rectas l_1 y l_2 que pasan por P y son paralelas a los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, respectivamente, vemos que l_1 interseca el lado del paralelogramo determinado por el vector $\mathbf{b}$ en algún punto $t\mathbf{b}$, donde $0 \le t \le 1$. Del mismo modo, l_2 interseca el lado determinado por el vector $\mathbf{a}$ en algún punto $s\mathbf{a}$, donde $0 \le s \le 1$.

Obsérvese que P es el extremo de la diagonal de un paralelogramo cuyos lados adyacentes son $s\mathbf{a}$ y $t\mathbf{b}$; por tanto, si $\mathbf{v}$ denota el vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, vemos que $\mathbf{v} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. Podemos concluir que todos los puntos del paralelogramo dado son los extremos finales de vectores de la forma $s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ para $0 \le s \le 1$ y $0 \le t \le 1$. Invirtiendo los pasos anteriores, comprobamos que todos los vectores de esta forma tienen su extremo final dentro del paralelogramo.

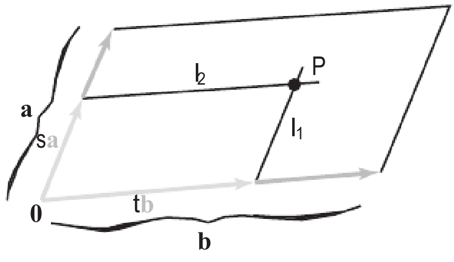

Figura 1.1.24 Descripción de los puntos interiores del paralelogramo formado por los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, con vértice $\mathbf{0}$.

▲