

6

Fórmula del cambio de variables y aplicaciones de la integración

Si se atasca en un problema de cálculo y no sabe qué hacer, intente integrar por partes o hacer un cambio de variables.

—Jerry Kazdan

Dios no se preocupa por nuestras dificultades matemáticas. Él integra empíricamente.

—Albert Einstein

La **fórmula del cambio de variables** es uno de los métodos de integración más potentes del cálculo de una variable; permite calcular integrales tales como

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx$$

mediante la sustitución o *cambio de variables* $u = x^2$, que reduce el problema a la fácil tarea de integrar e^u con respecto a u . En este capítulo, desarrollamos la *fórmula multidimensional del cambio de variables*, que es especialmente importante y útil para calcular integrales múltiples en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

Uno de los ingredientes clave en la fórmula del cambio de variables es cómo cambiar variables en varias dimensiones. Esto implica el concepto de aplicación, el cual aparece en varias situaciones interesantes. Por ejemplo, consideremos un objeto que se deforma, como un pez nadando. Al cambiar su forma, podemos imaginar la correspondencia instantánea entre los puntos del pez en estado de reposo y en su forma actual. Este tipo de correspondencia es, de hecho, la idea principal que hay detrás de un cambio de variables, en este caso, de una región