donde $\mathbf{p} = c\mathbf{a}$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{q} = 0$. Si multiplicamos por $\mathbf{a}$ escalarmente en ambos lados de la ecuación $\mathbf{v} = c\mathbf{a} + \mathbf{q}$, tenemos que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = c\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, por lo que $c = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})/(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})$, y por tanto

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{a}\|^2}\, \mathbf{a}.$$

La longitud de $\mathbf{p}$ es

$$\|\mathbf{p}\| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{a}\|^2}\, \|\mathbf{a}\| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{a}\|} = \|\mathbf{v}\| \cos\theta.$$

Proyección ortogonal La ***proyección ortogonal*** de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{a}$ es el vector

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{a}\|^2}\, \mathbf{a}.$$

Ejemplo 8 Hallar la proyección ortogonal de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ on $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

Solución Siendo $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, la proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{a}$ es

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\, \mathbf{a} = \frac{1 - 2}{1 + 4}\, (\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = -\frac{1}{5}\, (\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$$

(véase la Figura 1.2.11). ▲

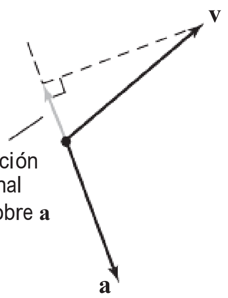

Figura 1.2.11 La proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{a}$ es igual a $-\frac{1}{5}\mathbf{a}$.

Desigualdad triangular

Una aplicación útil de la desigualdad de Cauchy–Schwarz, conocida como ***desigualdad triangular***, relaciona las longitudes de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ y su suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Geométricamente, la desigualdad triangular dice que la longitud de cualquier lado de un triángulo no es mayor que la suma de las longitudes de los otros dos lados (véase la Figura 1.2.12).

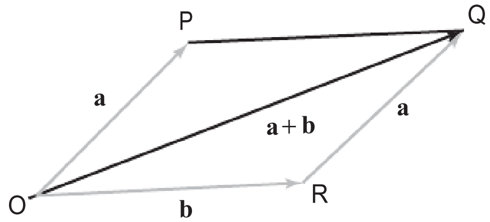

Figura 1.2.12 Esto ilustra que $\|OQ\| \le \|OR\| + \|RQ\|$ o, utilizando notación vectorial, que $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \le \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$, que es la desigualdad triangular.

Teorema 2 Desigualdad triangular Para dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ cualesquiera en el espacio,

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \le \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|.$$