$$\int_{\mathbf{c}} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz = \int_a^b \left(F_1\frac{dx}{dt} + F_2\frac{dy}{dt} + F_3\frac{dz}{dt}\right) dt = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}.$$

Obsérvese que podemos pensar en $d\mathbf{s}$ como en la forma diferencial $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$. Luego la forma diferencial $F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$ se puede expresar como el producto escalar $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$.

Ejemplo 2 Calcular la integral de línea

$$\int_{\mathbf{c}} x^2\,dx + xy\,dy + \,dz,$$

donde $\mathbf{c}$: $[0,1] \to \mathbb{R}^3$ está dada por $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, 1) = (x(t), y(t), z(t))$.

Solución Calculamos $dx/dt = 1,\ dy/dt = 2t,\ dz/dt = 0$; por tanto,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} x^2\,dx + xy\,dy + \,dz &= \int_0^1 \left([x(t)]^2\,\frac{dx}{dt} + [x(t)y(t)]\,\frac{dy}{dt}\right) dt\\ &= \int_0^1 (t^2 + 2t^4)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{11}{15}.\end{aligned}$$ ▲

Ejemplo 3 Calcular la integral de línea

$$\int_{\mathbf{c}} \cos z\,dx\ +\ e^x\,dy\ +\ e^y\,dz,$$

donde la trayectoria $\mathbf{c}$ se define mediante $\mathbf{c}(t) = (1, t, e^t)$ y $0 \le t \le 2$.

Solución Calculamos $dx/dt = 0, dy/dt = 1,\ dz/dt = e^t$, y por tanto

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} \cos z\,dx + e^x\,dy + e^y\,dz &= \int_0^2 (0 + e + e^{2t})\,dt\\ &= \left[et + \frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^2 = 2e + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$ ▲

Ejemplo 4 Sea $\mathbf{c}$ la trayectoria

$$x = \cos^3\theta, \qquad y = \operatorname{sen}^3\theta, \qquad z = \theta, \qquad 0 \le \theta \le \frac{7\pi}{2}$$

(véase la Figura 7.2.2). Calcular la integral

$$\int_{\mathbf{c}} (\operatorname{sen} z\,dx + \cos z\,dy - (xy)^{1/3}\,dz)$$

Solución En este caso, tenemos

$$\frac{dx}{d\theta} = -3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = 3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta, \qquad \frac{dz}{d\theta} = 1,$$