$$\iint_R (x^2 + y)\, dA = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} + y\right] dy = \left[\frac{1}{3}y + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$

Lo que hemos hecho es mantener fijo y, integrar con respecto a x y luego evaluar el resultado entre los límites dados para la variable x. A continuación, hemos integrado la función resultante (que solo depende de y) con respecto a y para obtener la respuesta final. ▲

Ejemplo 2 Una consecuencia del teorema de Fubini es que el intercambio del orden de integración en las integrales iteradas no cambia el resultado. Verificar esto para el Ejemplo 1.

Solución Realizamos la integración en el otro orden:

$$\int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y)\; dy\, dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^1 dx = \int_0^1 \left[x^2 + \frac{1}{2}\right] dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$

▲

Hemos visto que cuando $f(x, y) \geq 0$ sobre $R = [a, b] \times [c, d]$, la integral $\iint_R f(x, y)\, dA$ se puede interpretar como un volumen. Si la función también toma valores negativos, entonces se puede pensar en la integral doble como en la suma de todos los volúmenes que están entre la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $z = 0$, acotada por los planos $x = a, x = b, y = c$ e $y = d$; aquí los volúmenes por encima de $z = 0$ se cuentan como positivos y los que están por debajo como negativos. Sin embargo, el teorema de Fubini tal como está enunciado sigue siendo válido en el caso en que $f(x, y)$ sea negativa o cambie de signo en R; es decir, no hay restricción sobre el signo de f en las hipótesis del teorema.

Ejemplo 3 Sea R el rectángulo $[-2, 1] \times [0, 1]$ y sea f definida por $f(x, y) = y(x^3 - 12x)$; $f(x, y)$ toma valores positivos y negativos en R. Calcular la integral $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R y(x^3 - 12x)\, dx\, dy$.

Solución Por el teorema de Fubini, podemos escribir

$$\iint_R y(x^3 - 12x)\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\int_{-2}^1 y(x^3 - 12x)\, dx\right] dy$$
$$= \frac{57}{4}\int_0^1 y\, dy = \frac{57}{8}.$$

Alternativamente, integrando primero con respecto a y, tenemos

$$\iint_R y(x^3 - 12x)\, dy\, dx = \int_{-2}^1 \left[\int_0^1 (x^3 - 12x) y\, dy\right] dx$$