(d) Un cubo con una arista de longitud 2 unidades.

11. Sea S la esfera de radio R centrada en el origen. Hallar la ecuación de S en coordenadas cilíndricas.

12. Utilizando coordenadas cilíndricas y vectores ortonormales (ortogonales normalizados) $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$ (véase la Figura 1.4.8),

(a) Expresar cada uno de los vectores $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$ en función de $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ y (x, y, z).

(b) Calcular $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{j}$ analíticamente, usando el apartado (a), y geométricamente.

13. Utilizando coordenadas esféricas y vectores ortonormales (ortogonales normalizados) $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\phi$ [véase la Figura 1.4.8(b)]

(a) Expresar cada uno de los vectores $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\phi$ en función de $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ y (x, y, z).

(b) Calcular $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{j}$ y $\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{j}$ analítica y geométricamente.

14. Expresar el plano $z = x$ en (a) coordenadas cilíndricas y (b) coordenadas esféricas.

15. Demostrar que en coordenadas esféricas:

(a) ρ es la longitud de $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

(b) $\phi = \cos^{-1}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}/\|\mathbf{v}\|)$, donde $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

(c) $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}/\|\mathbf{u}\|)$, donde $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

16. Dos superficies están descritas en coordenadas esféricas mediante las ecuaciones $\rho = f(\theta, \phi)$ y $\rho = -2f(\theta, \phi)$, donde $f(\theta, \phi)$ es una función de dos variables. ¿Cómo se obtiene geométricamente la segunda superficie a partir de la primera?

17. Una membrana circular en el espacio descansa sobre la región $x^2 + y^2 \leq a^2$. La componente z máxima de los puntos de la membrana es b. Supongamos que (x, y, z) es un punto de la membrana. Demostrar que el punto correspondiente (r, θ, z) en coordenadas cilíndricas satisface las condiciones $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $|z| \leq b$.

18. Un tanque con forma de cilindro circular recto de radio 3 m y altura 5 m está lleno hasta la mitad y reposa de lado. Describir el espacio vacío en el interior del tanque eligiendo un sistema adecuado de coordenadas cilíndricas.

19. Se desea diseñar un vibrómetro que soporte los efectos del calentamiento de su cubierta esférica de diámetro d, el cual debe enterrarse a una profundidad de $d/3$ en la tierra y cuya parte superior será calentada por el sol (suponga que la superficie terrestre es plana). El análisis de la conducción del calor requiere una descripción de la parte enterrada de la cubierta en coordenadas esféricas. Hallar dicha descripción.

20. Un cartucho de filtro de aceite es un cilindro circular recto poroso dentro del cual el aceite se difunde desde el eje hacia la superficie curvada exterior. Describir el cartucho en coordenadas cilíndricas, sabiendo que el diámetro del filtro es 11,4 cm, la altura es 14,2 cm y el centro del cartucho está taladrado (a lo largo) desde arriba para permitir la entrada de un perno de 1,6 cm de diámetro.

21. Describir la superficie dada en coordenadas esféricas por $\rho = \cos 2\theta$.

22. (a) Hallar todos los puntos $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ que se representan igual en coordenadas cartesianas que en coordenadas esféricas.

(b) Hallar todos los puntos $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ que se representan igual en coordenadas cartesianas que en coordenadas cilíndricas.

1.5 Espacio euclídeo *n*-dimensional

Vectores en el espacio *n*-dimensional

En las Secciones 1.1 y 1.2 hemos estudiado los espacios $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y hemos proporcionado sus interpretaciones geométricas. Por ejemplo, se puede pensar en un punto (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ como en un objeto geométrico, en concreto, el segmento dirigido o vector que parte del origen y termina en el punto (x, y, z). Por tanto, podemos pensar en $\mathbb{R}^3$ de estas dos formas: