> **La aceleración y la segunda ley de Newton** La ***aceleración*** de una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ es
> $$\mathbf{a}(t) = \mathbf{c}''(t).$$
> Si $\mathbf{F}$ es la fuerza actuante y m es la masa de la partícula, entonces
> $$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

En el problema de determinar la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ de una partícula bajo la influencia de un campo de fuerzas dado, $\mathbf{F}$, la ley de Newton se convierte en una ecuación diferencial (es decir, una ecuación que involucra derivadas) para $\mathbf{c}(t)$.

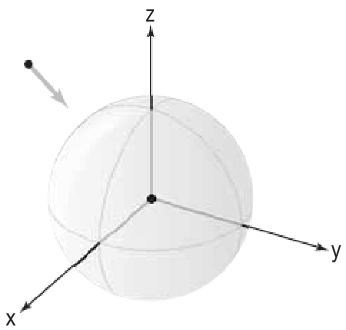

Figura 4.1.3 Una masa M atrae a una masa m con una fuerza $\mathbf{F}$ dada por la ley de Newton de la gravitación: $\mathbf{F} = -GmM\mathbf{r}/r^3$.

Por ejemplo, el movimiento de un planeta que sigue una trayectoria $\mathbf{r}(t)$ alrededor del Sol (que consideramos situado en el origen de coordenadas de $\mathbb{R}^3$) obedece a la ley

$$m\mathbf{r}'' = -\frac{GmM}{r^3}\mathbf{r},$$

donde M es la masa del Sol, m la del planeta, $r = \|\mathbf{r}\|$ y G es la constante gravitacional. La relación usada para determinar la fuerza, $\mathbf{F} = -GmM\mathbf{r}/r^3$, se denomina ***ley de Newton de la gravitación*** (véase la Figura 4.1.3). No haremos en este libro un estudio general de tales ecuaciones, sino que nos restringiremos al caso especial de las órbitas circulares.

Órbitas circulares

Consideremos una partícula de masa m que se mueve con rapidez constante s siguiendo una trayectoria circular de radio r_0. Si suponemos que se mueve en el plano xy, podemos suprimir la tercera componente y escribir su posición como

$$\mathbf{r}(t) = \left(r_0 \cos\frac{st}{r_0}, r_0 \operatorname{sen}\frac{st}{r_0}\right).$$

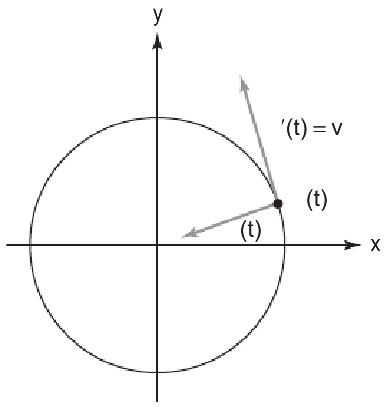

Figura 4.1.4 La posición, velocidad y aceleración de una partícula en movimiento circular.

Nótese que esto es la ecuación de una circunferencia de radio r_0 y que su rapidez está dada por $\|\mathbf{r}'(t)\| = s$. La magnitud s/r_0 se denomina ***frecuencia*** y se denota mediante ω. Por tanto,

$$\mathbf{r}(t) = (r_0 \cos\omega t,\ r_0 \operatorname{sen}\omega t).$$

La aceleración viene dada por

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \left(-\frac{s^2}{r_0}\cos\frac{st}{r_0}, -\frac{s^2}{r_0}\operatorname{sen}\frac{st}{r_0}\right) = -\frac{s^2}{r_0^2}\mathbf{r}(t) = -\omega^2\mathbf{r}(t).$$

Es decir, la aceleración tiene la dirección opuesta a $\mathbf{r}(t)$; es decir, apunta hacia el centro de la circunferencia (véase la Figura 4.1.4). Esta aceleración, multiplicada por la masa de la partícula, se denomina ***fuerza centrípeta***. Aún cuando la rapidez es constante, la dirección de la ve-