Figura 4.4.8). En el Ejemplo 10, *las líneas de flujo del campo vectorial* **V** *son circunferencias centradas en el origen, a pesar de lo cual vamos a demostrar que el flujo es irrotacional.* No obstante, el lector debe estar prevenido ante la posible confusión a la que puede dar lugar el término "irrotacional".

Ejemplo 10 Comprobar que el campo vectorial

$$\mathbf{V}(x,y,z)=\frac{y\mathbf{i}-x\mathbf{j}}{x^2+y^2}$$

es irrotacional si $(x,y)\neq(0,0)$ (es decir, excepto donde $\mathbf{V}$ no está definido).

Solución El rotacional es

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{V}&=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{-x}{x^2+y^2} & 0\end{vmatrix}\\ &=0\mathbf{i}+0\mathbf{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]\mathbf{k}\\ &=\left[\frac{-(x^2+y^2)+2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\mathbf{k}=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

▲

Los gradientes son irrotacionales

La siguiente identidad es una relación básica entre el gradiente y el rotacional, que se debería comparar con el hecho de que para cualquier vector $\mathbf{v}$, tenemos que $\mathbf{v}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

Teorema 1 Rotacional de un gradiente Para cualquier función f de clase C^2

$$\nabla\times(\nabla f)=\mathbf{0}.$$

Es decir, el rotacional de cualquier gradiente es el vector cero.

Demostración Puesto que $\nabla f=(\partial f/\partial x,\partial f/\partial y,\partial f/\partial z)$, por definición, tenemos

$$\nabla\times\nabla f=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}$$