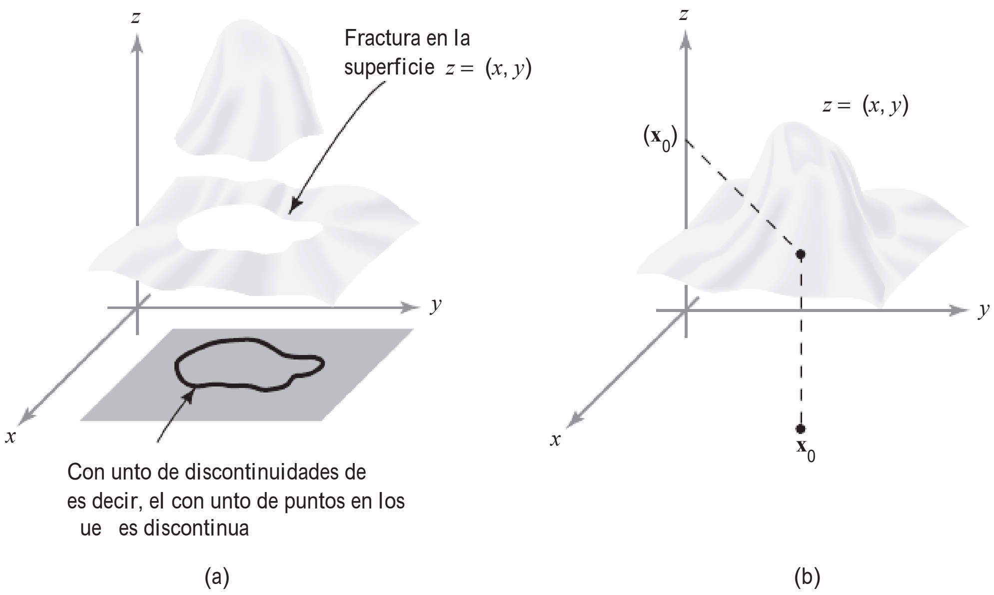

Figura 2.2.14 (a) Una funci ón discontinua de dos variables. (b) Una funci ón continua.

de f (véase la Figura 2.2.13, en la que se ilustra el caso $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). El caso de varias variables es más fácil de visualizar si tratamos con funciones de valores reales de la forma $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En este caso, podemos visualizar f dibujando su gráfica, que consiste en todos los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ con $z = f(x, y)$. La continuidad de f significa, por tanto, que su gráfica no tiene "fracturas" (véase la Figura 2.2.14).

Definición Continuidad Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función dada con dominio A. Sea $\mathbf{x}_0 \in A$. Decimos que f es ***continua*** en $\mathbf{x}_0$ si y solo si

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Si decimos solamente que f es ***continua***, queremos decir que f es continua en cada punto $\mathbf{x}_0$ de A. Si f no es continua en $\mathbf{x}_0$, decimos que f es ***discontinua*** en $\mathbf{x}_0$. Si f es discontinua en algún punto de su dominio, decimos que f es ***discontinua***.

Ejemplo 7 Cualquier polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ es continuo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. De hecho, por el Teorema 3 y el Ejemplo 4,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\right) &= \lim_{x \to x_0} a_0 + \lim_{x \to x_0} a_1 x + \cdots + \lim_{x \to x_0} a_n x^n \\ &= a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n, \end{aligned}$$

ya que el límite de un producto es el producto de los límites, lo que da

$$\lim_{x \to x_0} x^n = \left(\lim_{x \to x_0} x\right)^n = x_0^n.$$

▲