39. Sean $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. Establezca una condición sobre a_1, b_1, a_2 y b_2 que asegure que $\mathbf{v}$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ tengan la misma dirección.

40. En el problema 39 establezca una condición que asegure que $\mathbf{v}$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tengan direcciones opuestas.

41. Sean $P = (-1, 1)$, $Q = (5, 2)$, $R = (2, -5)$ y $S = (1, -2)$. Calcule $\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\,\overrightarrow{RS}$ y $\text{proy}_{\overrightarrow{RS}}\,\overrightarrow{PQ}$.

42. Sean $P = (-1, 4)$, $Q = (2, 1)$, $R = (-7, -5)$ y $S = (1, 1)$. Calcule $\text{proy}_{\overrightarrow{PR}}\,\overrightarrow{QS}$ y $\text{proy}_{\overrightarrow{QS}}\,\overrightarrow{PR}$.

43. Pruebe que los vectores diferentes de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para alguna constante α. [***Sugerencia:*** Demuestre que $\cos\varphi = \pm 1$ si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$.]

44. Pruebe que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

45. Demuestre que el vector $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es ortogonal a la recta $ax + by + c = 0$.

46. Demuestre que el vector $\mathbf{u} = b\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ es paralelo a la recta $ax + by + c = 0$.

47. Un triángulo tiene vértices $(-1, 3)$, $(10, 1)$ y $(23, -6)$. Encuentre el coseno de cada ángulo.

48. Un triángulo tiene vértices (a_1, b_1), (a_2, b_2) y (a_3, b_3). Encuentre el coseno de cada ángulo.

***49.** La **desigualdad de Cauchy-Schwarz** establece que para cualesquiera números reales a_1, a_2, b_1 y b_2

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left\|\sum_{i=1}^{2} a_i b_i\right\| \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{2} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{2} b_i^2\right)}$$

Utilice el producto escalar para probar esta fórmula. ¿Bajo qué circunstancias se puede sustituir la desigualdad por una igualdad?

***50.** Pruebe que la distancia más corta entre un punto y una recta se mide por una línea que pasa por el punto y es perpendicular a la recta.

51. Encuentre la distancia entre $P = (-3, 2)$ y la recta que pasa por los puntos $Q = (-1, 7)$ y $R = (3, 5)$.

52. Encuentre la distancia entre $(3, 7)$ y la recta que va a lo largo del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ que pasa por el origen.

53. Sea A una matriz de 2×2 tal que cada columna es un vector unitario y que las dos columnas son ortogonales. Demuestre que A es invertible y que $A^{-1} = A^{\top}$ (A se conoce como **matriz ortogonal**).

Matriz ortogonal

Ejercicios con MATLAB 4.2

1. Para los pares de vectores de los problemas 24 a 32, verifique los vectores proyección calculados con lápiz y papel usando MATLAB (consulte la información de manejo de MATLAB anterior a los problemas de MATLAB 4.1).

2. (*Este problema usa el archivo prjtn.m*) El problema se refiere a la visualización de las proyecciones. A continuación se presenta la función prjtn.m.

M