6. Sea $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal definida por

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 17 \\ -10 \end{pmatrix}$$

a) Verifique que el siguiente conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es una base para $\mathbb{R}^4$ y por tanto T está bien definida.

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

b) Encuentre la representación matricial, C, de T respecto a las bases canónicas. Recuerde que necesita encontrar $T(\mathbf{e}_i)$ para $i = 1, \ldots, 4$ y que $T(\mathbf{e}_i)$ es una combinación lineal de $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_4)\}$, donde los coeficientes de las combinaciones lineales son las coordenadas de $\mathbf{e}_i$ respecto a la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.

c) Sea A la matriz $(\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2 \;\; \mathbf{v}_3 \;\; \mathbf{v}_4)$ y sea B la matriz cuyas columnas son los lados derechos de las igualdades en la definición de T; es decir,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 7 & 6 & 1 & 17 \\ 2 & -2 & 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

Verifique que la representación matricial, C, de la transformación T satisface $C = BA^{-1}$. Explique por qué esto es cierto usando los conceptos de coordenadas y matrices de transición.

d) Usando C, encuentre una base para el núcleo y la imagen de T.

7. Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación definida por una rotación *negativa* de $\frac{\pi}{4}$ respecto al origen, después una expansión a lo largo del eje x por un factor de 2 y una expansión a lo largo del eje y por un factor de 3, seguidas de una rotación *positiva* de $\frac{\pi}{4}$ respecto al origen.

a) Encuentre la representación matricial de T respecto a la base canónica.

b) Encuentre la representación matricial de T respecto a la base.

$$B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

c) Explique la manera en la cual se puede describir la geometría de T únicamente en términos de expansiones en ciertas direcciones.