Por casualidad, Newton fue el primero en enviar la solución [que resultó ser una cicloide—la misma curva (invertida) que hemos estudiado en el Ejemplo 4 de la Sección 2.4], pero lo hizo de manera anónima. Sin embargo, no engañó a Bernoulli. Cuando este recibió la solución, inmediatamente supo quién era su autor y exclamó "Reconozco al león por sus garras". Aunque la solución de este problema es un cicloide, se la conoce en la literatura como la *braquistocrona*. Este fue el principio del importante campo conocido como *cálculo de variaciones*.[2]

7.2 Integral de línea

Vamos a considerar ahora el problema de integrar un *campo vectorial* a lo largo de una trayectoria. Comenzaremos estudiando el concepto de *trabajo* con el fin de motivar la definición general.

Trabajo ejercido por un campo de fuerza

Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza en el espacio, entonces una partícula de prueba (por ejemplo, una pequeña carga unidad en un campo eléctrico o una masa unitaria en un campo gravitatorio) experimentará una fuerza $\mathbf{F}$. Supongamos que la partícula se mueve a lo largo de la imagen de una trayectoria $\mathbf{c}$ mientras $\mathbf{F}$ actúa sobre ella. Un concepto fundamental es el de *trabajo realizado* por $\mathbf{F}$ sobre la partícula a medida que recorre la trayectoria $\mathbf{c}$. Si $\mathbf{c}$ es un desplazamiento rectilíneo dado por el vector $\mathbf{d}$ y si $\mathbf{F}$ es una fuerza constante, entonces el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ para mover la partícula a lo largo de la trayectoria es el producto escalar $\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}$:

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{d} = (\text{magnitud de la fuerza})\times(\text{desplazamiento en la dirección de la fuerza}).$$

Si la trayectoria es curva, podemos imaginar que está formada por una sucesión de desplazamientos rectilíneos infinitesimales o que se puede *aproximar* mediante un número finito de desplazamientos rectilíneos. Entonces (como en la deducción de las fórmulas para la integral a lo largo de una trayectoria de la sección anterior) llegamos a la siguiente fórmula para el trabajo realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria $\mathbf{c}\colon [a,b]\to\mathbb{R}^3$:

$$\text{Trabajo realizado por } \mathbf{F} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt.$$

Podemos probar esta deducción como sigue. Según t varía en el pequeño intervalo de t a $t+\Delta t$, la partícula se mueve de $\mathbf{c}(t)$ a $\mathbf{c}(t+\Delta t)$, que corresponde a un vector de desplazamiento $\Delta\mathbf{s} = \mathbf{c}(t+\Delta t) - \mathbf{c}(t)$ (véase la Figura 7.2.1).

A partir de la definición de derivada obtenemos la aproximación $\Delta\mathbf{s} \approx \mathbf{c}'(t)\Delta t$. Por tanto, el trabajo realizado al ir de $\mathbf{c}(t)$ a $\mathbf{c}(t+\Delta t)$ es aproximadamente

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\Delta\mathbf{s} \approx \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)\,\Delta t.$$

[2]Gracias a Tanya Leise por sugerir este ejercicio.