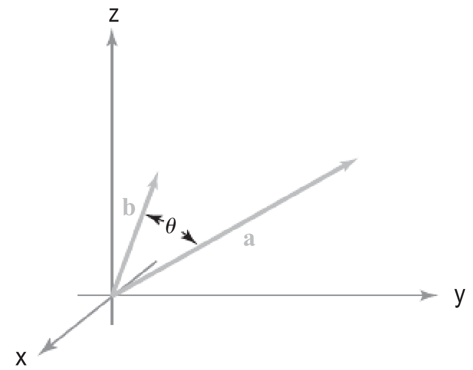

Figura 1.2.1 θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

Algunas propiedades del producto escalar se deducen de la definición. Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ y α y β son números reales, entonces

(I) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$;
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad$ si y solo si $\quad \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

(II) $\alpha\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad$ y $\quad \mathbf{a} \cdot \beta\mathbf{b} = \beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

(III) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad$ y $\quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

(IV) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

Para demostrar la primera de estas propiedades, obsérvese que si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Puesto que a_1, a_2 y a_3 son números reales, sabemos que $a_1^2 \geq 0, a_2^2 \geq 0, a_3^2 \geq 0$. Por tanto, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$. Además, si $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$, entonces $a_1 = a_2 = a_3 = 0$; por tanto, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (vector cero). Las demostraciones de las restantes propiedades del producto escalar se pueden obtener también fácilmente.

A partir del teorema de Pitágoras se deduce que la ***longitud*** del vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ es $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (véase la Figura 1.2.2). La longitud del vector $\mathbf{a}$ se denota mediante $\|\mathbf{a}\|$. Esta magnitud a menudo se denomina ***norma*** de $\mathbf{a}$. Puesto que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, se sigue que

$$\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}.$$

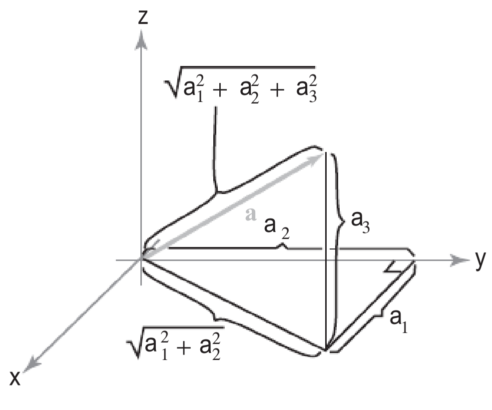

Figura 1.2.2 La longitud del vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ viene dada por la fórmula pitagórica: $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.