EJEMPLO 6.3.5 El producto interno de dos funciones en C[0, 1]

Cálculo

Sea $f(t) = t^2 \in C[0, 1]$ y $g(t) = (4 - t) \in C[0, 1]$. Entonces

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 t^2(4-t)\,dt = \int_0^1 (4t^2 - t^3)dt = \left(\frac{4t^4}{3} - \frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{13}{12}$$

Definición 6.3.2

Sea V un espacio con producto interno y suponga que **u** y **v** están en V. Entonces

i) **u** y **v** son **ortogonales** si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$.

ii) La **norma** de **u**, denotada por $||\mathbf{u}||$, está dada por

$$\boxed{||\mathbf{u}|| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}} \tag{6.3.3}$$

Nota

Aquí se usa la doble barra en lugar de una sola para evitar confusión con el valor absoluto. En el ejemplo 6.3.7, $||\text{sen } t||$ denota la norma de sen t como un "vector" en $C[0, 2\pi]$ mientras que $|\text{sen } t|$ denota el valor absoluto de la función sen t.

Nota

La ecuación (6.3.3) tiene sentido ya que $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$.

EJEMPLO 6.3.6 Dos vectores ortogonales en $\mathbb{C}^2$

En $\mathbb{C}^2$ los vectores $(3, -i)$ y $(2, 6i)$ son ortogonales porque

$$\langle (3, -i), (2, 6i)\rangle = 3 \cdot \overline{2} + (-i)\overline{(6i)} = 6 + (-i)(6i) = 6 - 6 = 0$$

además $||(3, -i)|| = \sqrt{3 \cdot 3 + (-i)(i)} = \sqrt{10}$.

EJEMPLO 6.3.7 Dos funciones ortogonales en $C[0, 2\pi]$

En $C[0, 2\pi]$ las funciones sen t y cos t son ortogonales, ya que

$$\langle \text{sen } t, \cos t\rangle = \int_0^{2\pi} \text{sen } t \cos t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \text{sen } 2t\, dt = -\frac{\cos 2t}{4}\Bigg|_0^{2\pi} = 0$$

Además,

$$\begin{aligned}
||\text{sen } t|| &= \sqrt{\langle \text{sen } t, \text{sen } t\rangle} \\
&= \left[\int_0^{2\pi} \text{sen}^2\, t\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{\text{sen } 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Si se observan las demostraciones de los teoremas 6.1.1 y 6.1.2, se ve que no se utilizó el hecho de que $V = \mathbb{R}^n$. Los mismos teoremas se cumplen en cualquier espacio con producto interno V. A continuación se enumeran, por conveniencia, después de dar una definición.