(véase la Ecuación (4) de la Sección 2.3). Esto es obviamente cierto, ya que f es diferenciable y la constante c se puede sacar como factor común (véase el Teorema 3(I), Sección 2.2).

(II) Aplicando la desigualdad triangular, podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\
&= \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\
&\leq \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} + \frac{\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|},
\end{aligned}$$

y cada uno de los términos tiende a 0 cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, de lo que se sigue la regla (II). ■

Ejemplo 1 Verificar la fórmula para $\mathbf{D}h$ en la regla (IV) del Teorema 10 para

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{y} \quad g(x, y, z) = x^2 + 1.$$

Solución En este caso

$$h(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + 1},$$

de forma que derivando directamente

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}h(x, y, z) &= \left[\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right] \\
&= \left[\frac{(x^2 + 1)2x - (x^2 + y^2 + z^2)2x}{(x^2 + 1)^2}, \frac{2y}{x^2 + 1}, \frac{2z}{x^2 + 1}\right] \\
&= \left[\frac{2x(1 - y^2 - z^2)}{(x^2 + 1)^2}, \frac{2y}{x^2 + 1}, \frac{2z}{x^2 + 1}\right].
\end{aligned}$$

Por la regla (IV), obtenemos

$$\mathbf{D}h = \frac{g\mathbf{D}f - f\mathbf{D}g}{g^2} = \frac{(x^2 + 1)[2x, 2y, 2z] - (x^2 + y^2 + z^2)[2x, 0, 0]}{(x^2 + 1)^2},$$

que es igual a lo que hemos obtenido directamente. ▲

La regla de la cadena

Como hemos mencionado anteriormente, es en la derivación de las funciones compuestas donde nos encontramos con variaciones sustanciales de la fórmula del cálculo de una variable. Sin embargo, si usamos la notación $\mathbf{D}$, es decir, la notación matricial para las derivadas, la regla de la cadena para funciones de varias variables parece similar a la de la regla para una variable.