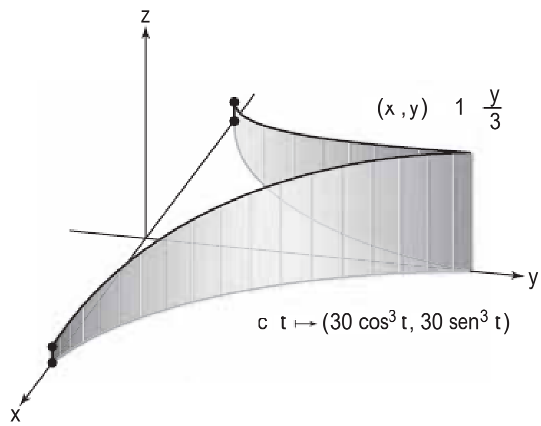

Figura 7.1.3 La valla de Tom Sawyer.

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{c}} \left(1+\frac{y}{3}\right) ds &= \int_0^{\pi/2} \left(1+\frac{30\,\mathrm{sen}^3 t}{3}\right) 90\,\mathrm{sen}\, t \cos t\, dt \\
&= 90 \int_0^{\pi/2} (\mathrm{sen}\, t + 10\,\mathrm{sen}^4 t)\cos t\, dt \\
&= 90 \left[\frac{\mathrm{sen}^2 t}{2} + 2\,\mathrm{sen}^5 t\right]_0^{\pi/2} = 90\left(\frac{1}{2}+2\right) = 225,
\end{aligned}
$$

que es el área en el primer cuadrante. Luego el área de un lado de la valla es 450 pies^2. Como hay que pintar ambos lados de la valla, tenemos que multiplicar por 2 para obtener el área total, que es igual a 900 pies^2. Dividiendo entre 25 y multiplicando después por 5, determinamos que Tom puede ganar hasta $1,80$ dólares por el trabajo. ▲

Con esto terminamos nuestro estudio sobre integración de funciones *escalares* sobre trayectorias. En la siguiente sección vamos a centrarnos en la integración de *campos vectoriales* sobre trayectorias y en el Capítulo 8 veremos muchas más aplicaciones de la integral a lo largo de una trayectoria, cuando estudiemos el análisis vectorial.

Suplemento de la Sección 7.1: Curvatura total de una curva

Los Ejercicios 16, 17 y 20–23 de la Sección 4.2 describen los conceptos de curvatura κ y torsión τ de una curva suave C en el espacio. Si $\mathbf{c}$: $[a, b] \to C \subset \mathbb{R}^3$ es una parametrización de C con rapidez unidad, de modo que $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$, entonces la ***curvatura*** $\kappa(p)$ en $p \in C$ se define como $\kappa(p) = \|\mathbf{c}''(t)\|$, donde $p = \mathbf{c}(t)$. Un resultado de la geometría diferencial dice que si dos curvas tienen rapidez unidad y tienen la misma curvatura y torsión, entonces una se puede obtener a partir de la otra mediante una rotación rígida, traslación o reflexión.

La curvatura $\kappa\colon C \to \mathbb{R}$ es una función con valores reales sobre el conjunto C, de modo que definimos la ***curvatura total*** como su integral a lo largo de C: $\int_C \kappa\, ds$. Los matemáticos han conseguido probar algunos hechos sorprendentes acerca de la curvatura total. Por ejemplo, si C es una curva plana cerrada [es decir, $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$], entonces