

Cálculo vect

6.^a edición

Jerrold E. Marsden
Anthony Tromba



CÁLCULO VECTORIAL

SEXTA EDICIÓN

CÁLCULO VECTORIAL

SEXTA EDICIÓN

JERROLD E. MARSDEN

California Institute of Technology, Pasadena

ANTHONY TROMBA

University of California, Santa Cruz

TRADUCCIÓN

Vuelapluma

REVISIÓN TÉCNICA

Patricio Cifuentes Muñiz

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid



Pearson

Cálculo vectorial, sexta edición

Jerrold E. Marsden; Anthony Tromba

PEARSON EDUCACIÓN, S. A., Madrid, 2018

ISBN: 978-84-9035-578-7

ISBN ebook: 978-84-2056-866-9

Materia: Cálculo, 372

Formato: 195 x 250mm. Páginas: 632

Vector Calculus 6e

First published in the United States by W.H.Freeman and Company

Copyright © 2012, 2003, 1996, 1988, 1981, 1976 by W.H. Freeman and Company. All rights reserved.

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (arts. 270 y sgts. Código penal).

Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos -www.cedro.org), si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

Todos los derechos reservados.

© **PEARSON, S.A., 2018**

C/ Ribera del Loira, 28

28042 Madrid (España)

www.pearson.es

ISBN: 978-84-9035-578-7

ISBN ebook: 978-84-2056-866-9

Depósito Legal: M-12364-2018

Equipo de edición:

Editor: Miguel Martín-Romo

Equipo de diseño:

Diseñadora Senior: Elena Jaramillo

Equipo de producción:

Directora de producción: Marta Illescas

Coordinadora de producción: Tini Cardoso

Diseño de cubierta: Pearson Educación S. A.

Traducción y Composición: Vuelapluma, S.L.

PRINTED IN SLOVAKIA

Nota sobre enlaces a páginas web ajenas: Este libro incluye enlaces a sitios web cuya gestión, mantenimiento y control son responsabilidad única y exclusiva de terceros ajenos a PEARSON EDUCACIÓN, S. A. Los enlaces u otras referencias a sitios web se incluyen con finalidad estrictamente informativa y se proporcionan en el estado en que se encuentran en el momento de publicación sin garantías, expresas o implícitas, sobre la información que se proporcione en ellas. Los enlaces no implican el aval de PEARSON EDUCACIÓN S. A. a tales sitios, páginas web, funcionalidades y sus respectivos contenidos o cualquier asociación con sus administradores. En consecuencia, PEARSON EDUCACIÓN S. A., no asume responsabilidad alguna por los daños que se puedan derivar de hipotéticas infracciones de los derechos de propiedad intelectual y/o industrial que puedan contener dichos sitios web ni por las pérdidas, delitos o los daños y perjuicios derivados, directa o indirectamente, del uso de tales sitios web y de su información. Al acceder a tales enlaces externos de los sitios web, el usuario estará bajo la protección de datos y políticas de privacidad o prácticas y otros contenidos de tales sitios web y no de PEARSON EDUCACIÓN S. A.

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicas

Contenido

Prefacio	IX
Agradecimientos	XI
Introducción histórica: un breve relato	XIII
Prerrequisitos y notación	XXV
1 Geometría del espacio euclídeo	1
1.1 Vectores en los espacios de dos y tres dimensiones	1
1.2 Producto escalar, longitud y distancia	20
1.3 Matrices, determinantes y el producto vectorial	32
1.4 Coordenadas cilíndricas y esféricas	54
1.5 Espacio euclídeo n -dimensional	61
Ejercicios de repaso del Capítulo 1	72
2 Diferenciación	77
2.1 Geometría de funciones con valores reales	78
2.2 Límites y continuidad	90
2.3 Diferenciación	110
2.4 Introducción a trayectorias y curvas	122
2.5 Propiedades de la derivada	131
2.6 Gradientes y derivadas direccionales	143
Ejercicios de repaso del Capítulo 2	153
3 Derivadas de orden superior: máximos y mínimos	159
3.1 Derivadas parciales iteradas	160
3.2 Teorema de Taylor	169
3.3 Extremos de funciones con valores reales	178
3.4 Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange	199
3.5 Teorema de la función implícita [opcional]	219
Ejercicios de repaso del Capítulo 3	229
4 Funciones con valores vectoriales	235
4.1 La aceleración y la segunda ley de Newton	235
4.2 Longitud de arco	247
4.3 Campos vectoriales	256
4.4 Divergencia y rotacional	266
Ejercicios de repaso del Capítulo 4	282

5 Integrales dobles y triples	287
5.1 Introducción	287
5.2 La integral doble sobre un rectángulo	296
5.3 La integral doble sobre regiones más generales	309
5.4 Cambio del orden de integración	317
5.5 La integral triple	322
Ejercicios de repaso del Capítulo 5	333
6 Fórmula del cambio de variables y a aplicaciones de la integración	337
6.1 Geometría de las aplicaciones de R^2 en R^2	338
6.2 Teorema del cambio de variables	345
6.3 Aplicaciones	361
6.4 Integrales impropias [Opcional]	372
Ejercicios de repaso del Capítulo 6	381
7 Integrales sobre trayectorias y superficies	385
7.1 Integral a lo largo de una trayectoria	385
7.2 Integral de línea	393
7.3 Superficies parametrizadas	412
7.4 Área de una superficie	421
7.5 Integrales de funciones escalares sobre superficies	431
7.6 Integrales de campos vectoriales sobre superficies	439
7.7 Aplicaciones a la geometría diferencial, la física y las formas de la vida	455
Ejercicios de repaso del Capítulo 7	466
8 Teoremas de integración del análisis vectorial	469
8.1 Teorema de Green	470
8.2 El teorema de Stokes	482
8.3 Campos conservativos	498
8.4 Teorema de Gauss	508
8.5 Formas diferenciales	525
Ejercicios de repaso del Capítulo 8	540
Respuestas a los ejercicios impares	543
Índice	587
Créditos de las fotografías	597

A Jerrold E. Marsden, 1942–2010



Jerry Marsden, profesor distinguido de la cátedra Carl F. Braun del California Institute of Technology, Miembro de la Royal Society (como lo fue *Isaac Newton*) y uno de los más eminentes expertos en matemática aplicada a nivel mundial, falleció el 21 de septiembre de 2010, mientras trabajaba en la sexta edición de *Cálculo vectorial*. Los intereses de Jerry eran extraordinariamente amplios; su trabajo ha influido sobre físicos, ingenieros, biólogos y matemáticos en todo el ámbito de la ciencia y la ingeniería. Además de sus muchas publicaciones, (más de 400 artículos en revistas y congresos, así como 21 libros) y de haber recibido prestigiosos galardones científicos, era un brillante conferenciante y profesor. Sabía motivar a sus colegas y a sus alumnos de todo el mundo, y en una extraordinaria variedad de disciplinas. Era una bella persona y fue un amigo entrañable durante casi medio siglo. Se echará dolorosamente de menos su presencia.

—*Anthony Tromba*

Prefacio

Este libro de texto ha sido diseñado para un curso semestral de cálculo de funciones de varias variables y análisis vectorial, que normalmente se imparte en el segundo año de universidad. Además de haber realizado cambios y mejoras a lo largo de todo el texto, también hemos intentado transmitir una sensación de entusiasmo, relevancia e importancia de los temas tratados.

Prerrequisitos

En ocasiones, los cursos de cálculo vectorial van precedidos por un primer curso de álgebra lineal, pero este no es un prerequisito esencial. Únicamente se requieren rudimentos básicos de álgebra de matrices y los conceptos necesarios se desarrollan en el texto. Si este curso va precedido de un curso sobre álgebra lineal, el profesor no tendrá ninguna dificultad para ampliar el material. Sin embargo, sí suponemos que se conocen los fundamentos del cálculo de una variable —los procesos de diferenciación e integración y sus interpretaciones geométricas y físicas, así como el conocimiento de las funciones elementales tales como las funciones trigonométricas y exponenciales.

El papel de la teoría

El texto incluye la mayor parte de la teoría básica, así como muchos ejemplos y problemas concretos. La Sección 2.2, sobre límites y continuidad, se ha diseñado para tratarse de forma somera y es deliberadamente breve. Temas teóricos más sofisticados, como la compacidad y algunas demostraciones delicadas de la teoría de la integración, se han omitido, ya que corresponden a un curso más avanzado de análisis real.

Concreto y orientado al estudiante

A este nivel, las habilidades de cálculo y la compresión intuitiva son importantes y hemos tratado de cubrir esta necesidad haciendo el libro concreto y orientado al estudiante. Por ejemplo, aunque formulamos correctamente la definición de derivada, se ha hecho empleando matrices de derivadas parciales en lugar de transformaciones lineales abstractas. Incluimos también una serie de ilustraciones tomadas de la física, tales como la mecánica de fluidos, la gravitación y la teoría electromagnética, así como de la economía, aunque no se supone ningún conocimiento sobre estas materias.

Ordenación de los temas

Una característica especial del texto es la temprana introducción de los campos de vectores, la divergencia y el rotacional en el Capítulo 4, antes de la integración. El análisis vectorial suele quedar desplazado en un



curso de este tipo y esta ordenación está pensada para evitar esta tendencia. Para ir incluso más allá, puede considerarse estudiar el Capítulo 3 (teoremas de Taylor, máximos y mínimos, multiplicadores de Lagrange) después de Capítulo 8 (teoremas de integración del análisis vectorial).

Nuevo en esta edición

Hemos rediseñado completamente esta sexta edición, conservando y mejorando el equilibrio entre teoría, aplicaciones, material opcional y notas históricas presentadas en las ediciones anteriores.

Estamos encantados con esta nueva edición de *Cálculo vectorial*, especialmente por la inclusión de muchos nuevos ejercicios y ejemplos. Los ejercicios se han clasificado de menor a mayor dificultad, lo que proporciona a los profesores una mayor flexibilidad a la hora de asignar los problemas prácticos. Este rediseño más moderno hace hincapié en las características pedagógicas, que lo convierte en un texto más conciso, amigable y accesible para el estudiante. La calidad de las imágenes se ha mejorado de forma significativa, especialmente en el caso de las figuras tridimensionales, con el fin de reflejar mejor los conceptos clave a los estudiantes. También hemos recortado parte del material histórico, haciéndolo más relevante para los aspectos matemáticos que se estén exponiendo. Esperamos que el lector esté tan encantado como nosotros.

Jerry Marsden y Tony Tromba,
Caltech y UC Santa Cruz, Verano de 2010.

Agradecimientos

Muchos colegas y estudiantes de la comunidad matemática nos han hecho sugerencias y contribuciones valiosas desde que este libro se empezó a escribir. Un primer borrador del libro se escribió en colaboración con Ralph Abraham. Le agradecemos el haberlos permitido seguir adelante basándonos en su trabajo. Es imposible citar a todos aquellos que nos han ayudado en este libro, pero deseamos dar las gracias especialmente a Michael Hoffman y Joanne Seitz por ayuda en las primeras ediciones. También hemos recibido comentarios valiosos de Mary Anderson, John Ball, Patrick Brosnan, Andrea Brose, David Drasin, Gerald Edgar, Michael Fischer, Frank Gerrish, Mohammad Gohmi, Jenny Harrison, Jan Hogendijk, Jan-Jaap Oosterwijk y Anne van Weerden (Utrecht), David Knudson, Richard Kock, Andrew Lenard, William McCain, Gordon McLean, David Merriell, Jeanette Nelson, Dan Norman, Keith Phillips, Anne Perleman, Oren Walter Rosen, Kenneth Ross, Ray Sachs, Diane Sauvageot, Joel Smoller, Francis Su, Melvyn Tews, Ralph and Bob Tromba, Steve Wan, Alan Weinstein, John Wilker y Peter Zvengrowski. Los estudiantes y profesores de Austin Community College merecen una nota especial de agradecimiento, así como nuestros estudiantes de Caltech y de UC Santa Cruz.

Debemos un agradecimiento muy especial a Stefan Hildebrandt y Robert Palais por sus consejos sobre historia.

Damos las gracias a los siguientes profesores por sus revisiones detalladas del manuscrito: Dr. Michael Barbosu, SUNY Brockport; Brian Bradie, Christopher Newport University; Mike Daven, Mount Saint Mary; Elias Deeba, University of Houston—Downtown; John Feroe, Vassar; David Gurari, Case Western Reserve; Alan Horowitz, Penn State; Rhonda Hughes, Bryn Mawr; Frank Jones, Rice University; Leslie Kay, Virginia Tech; Richard Laugesen, University of Michigan; Namyong Lee, Minnesota State University; Tanya Leiese, Rose Hullman Institute; John Lott, University of Michigan; Gerald Paquin, Université du Québec à Montréal; Joan Rand Moschovakis, Occidental College; A. Shadi Tahvildar-Zadeh, Princeton University; Howard Swann, San Jose State University; Denise Szecsei, Stetson University; Edward Taylor, Wesleyan; and Chaogui Zhang, Case Western Reserve. Por la quinta edición, damos las gracias a todos los revisores, y especialmente a Andrea Brose, UCLA, por sus detallados y valiosos comentarios. Por esta sexta edición, queremos dar las gracias a Eliot Brenner, University of Minnesota; Bueno Cachadina Maribel, UCSB; Evan Merrill Bullock, Rice University; Xiaodong Cao, Cornell University; Der-Chen Chang, Georgetown University; Lenny Fukshansky, Claremont McKenna College; Ralph Kauffmann, Purdue University; Mohammed Kazemi, University of North Carolina; Min-Lin Lo, California State University San Bernardino; Douglas Meade, University of South Carolina; Steven Miller, Brown University; Doug Moore, UCSB; Eric J. Moore, University of Toronto Scarborough;

Peter Nyikos, University of South Carolina; Olga Radko, UCLA; David Russell, Virginia Tech; Francisco J. Sayas, University of Minnesota; Ryan Scott, Rice University; Shagi Di Shih, University of Wyoming; Joel Spruck, Johns Hopkins University; Graeme Wilkin, Johns Hopkins University; I Wu, Johns Hopkins University. Los más importantes de todos son los lectores y usuarios del libro cuya lealtad durante más de 35 años ha hecho posible esta sexta edición.

Unas palabras finales de agradecimiento para aquellos que nos han ayudado en la preparación del manuscrito y la producción del libro. Por las ediciones anteriores, gracias a Connie Calica, Nora Lee, Marnie McElhiney, Ruth Suzuki, Ikuko Workman y Esther Zack por su excelente mecanografiado de varias versiones y revisiones del manuscrito; a Herb Holden de Gonzaga University y Jerry Kazdan de la Universidad de Pensilvania por sugerir y preparar las primeras versiones de las figuras generadas por computadora; a Jerry Lyons y Holly Hodder por sus respectivos papeles como nuestros editores matemáticos; a Christine Hastings por su supervisión editorial y a Trumbull Rogers por su experta revisión del texto.

En esta sexta edición, queremos agradecer el gran apoyo de nuestra editora de adquisiciones Terri Ward, de nuestra editora de proyectos Katrina Wilhelm y, de nuevo, de Vivien Weiss, nuestra editora de copia y producción, así como el de Brittney Corrigan-McElroy, sin cuya dedicación y esfuerzo esta nueva edición no habría sido posible. La adición de tantos excelentes ejercicios nuevos ha sido posible gracias a las contribuciones de Corey Shanbrom y Paul Tokorcheck, que tienen una gran experiencia en la enseñanza con este libro.

La actual edición habría sido imposible sin el incansable esfuerzo y la total dedicación de Wendy McKay y Nafiseh Khoram, así como sin el generoso apoyo del California Institute of Technology. Jerry Marsden estaba particularmente orgulloso de estar ligado a esta excelente institución.

Por último, queremos dar las gracias al profesor Ezra Miller de Duke University por sus excelentes sugerencias y correcciones.

Introducción histórica: un breve relato

Esto, por tanto, es *Matemáticas*; te recuerda la forma invisible del alma; proporciona vida a sus propios descubrimientos; despierta la mente y purifica el intelecto; ilumina nuestras ideas intrínsecas; elimina el olvido y la ignorancia que nacen con nosotros.

—Proclus, c. 450

Cum Deus Calculat Fit Mundus. (*Según Dios calcula se va creando el mundo*).

—Leibniz, c. 1700

La palabra *matemáticas* procede de la palabra griega *mathema*, que significa conocimiento, entendimiento, comprensión o percepción, lo que sugiere que el estudio de lo que hoy llamamos matemáticas comenzó haciendo preguntas acerca del mundo. De hecho, la evidencia histórica sugiere que las matemáticas comenzaron hace unos 2.700 años como un intento de comprender la naturaleza. Lamentablemente, en la mayor parte de los escritos matemáticos suelen sacrificarse los contextos y las motivaciones históricas. En esta nueva edición, los autores continúan abordando este problema incluyendo el material histórico y contextual allí donde resulta apropiado. Por tanto, antes de sumergirnos en las matemáticas del *Cálculo vectorial*, expondremos brevemente el desarrollo de las matemáticas hasta el descubrimiento del cálculo.

Matemáticas egipcias, babilónicas y griegas

Generalmente, se admite que las matemáticas se desarrollaron en los siglos sexto y séptimo a.C., algún tiempo después de que los griegos desarrollaran un alfabeto uniforme. No obstante, esto no quiere decir que el conocimiento matemático no existiera antes de los griegos. De hecho, los egipcios y babilonios conocían una gran cantidad de hechos empíricos antes del nacimiento de la civilización griega. Por ejemplo, resolvían ecuaciones de segundo grado, calculaban el área de ciertas figuras geométricas, como cuadrados, rectángulos y triángulos, y tenían una fórmula razonablemente buena para calcular el área de un círculo, que usaba el valor 3,16 para π . También sabían cómo calcular algunos volúmenes como el del cubo, los paralelepípedos, conos, cilindros y (nada sorprendentemente) pirámides. Los antiguos también conocían el teorema de Pitágoras (al menos empíricamente).

Los griegos, que se asentaron por todo el Mediterráneo, debieron desempeñar un papel muy importante en la conservación y divulgación

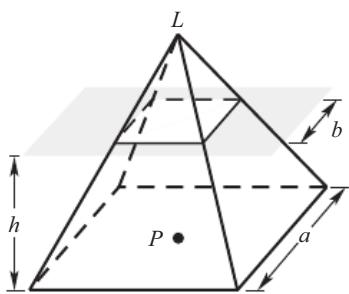


Figura 1 Volumen de un tronco de pirámide con base cuadrada:
 $V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$.

del conocimiento matemático de los egipcios y babilonios. Sin embargo, los griegos se dieron cuenta de que disponían de fórmulas diferentes para calcular las mismas áreas o volúmenes. Por ejemplo, los babilonios tenían una fórmula para determinar el volumen de un tronco de pirámide de base cuadrada y los egipcios tenían otra distinta (véase la Figura 1).

No resulta sorprendente que los egipcios (con experiencia en la construcción de pirámides) tuvieran la fórmula correcta. Ahora bien, dadas las dos fórmulas, estaba claro que solo una podía ser la correcta. Pero, ¿cómo se podía decidir cuál era la correcta? Realmente, esta no es una pregunta para el debate, como sí lo sería una pregunta acerca de la calidad de una obra de arte. Probablemente, fue la necesidad de responder a estas preguntas lo que les llevó a desarrollar la demostración matemática y el método del razonamiento deductivo.

La persona a la que se le suele atribuir la invención de la demostración matemática rigurosa fue un comerciante llamado Tales de Mileto (548 a.C.). Se dice que Tales fue el creador de la geometría griega y que fue esta geometría (medida de la tierra) como teoría matemática abstracta (no como una recopilación de hechos empíricos) apoyada en demostraciones deductivas rigurosas uno de los puntos de partida del pensamiento científico. Esto llevó a la creación del primer modelo matemático para los fenómenos físicos.

Por ejemplo, una de las más bellas teorías geométricas desarrolladas durante la antigüedad fue la de las secciones cónicas. Véase la Figura 2.

Las cónicas incluyen la línea recta, el círculo, la elipse, la parábola y la hipérbola. Su descubrimiento se atribuye a Menecmo, miembro de la escuela del gran filósofo griego Platón. Platón, un discípulo de Sócrates, fundó su escuela *La Academia* (véase la Figura 3) en un área sagrada de la ciudad de Atenas, llamada Hekadameia (dedicada al héroe Hekademos). Todas las academias posteriores reciben su nombre de esta institución, que existió sin interrupción durante 1.000 años hasta que el emperador romano Justiniano la disolvió en el año 529 d.C.

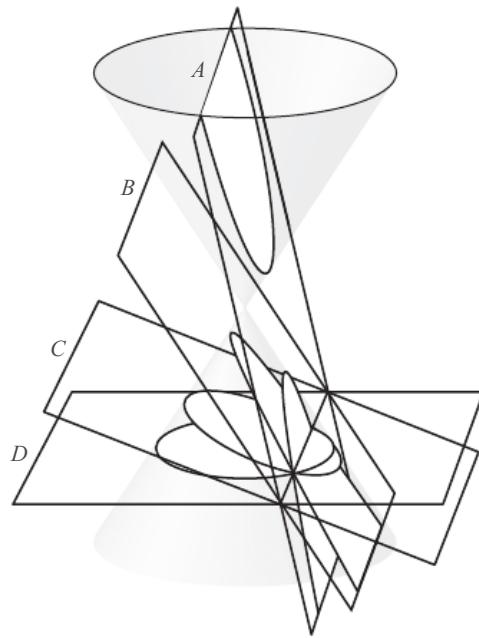


Figura 2 Secciones cónicas: (A) hipérbola, (B) parábola, (C) elipse, (D) círculo.

Figura 3 *Academia de Platón* (mosaico hallado en Pompeya, Villa de T. Siminius Stephanus, 86 × 85 cm, Nápoles, Museo Arqueológico). Los siete hombres se han identificado con certeza como Platón (el tercero por la izquierda) y otros seis filósofos, que debaten sobre el universo, las esferas celestes y las estrellas. El mosaico muestra la Academia de Platón con la ciudad de Atenas al fondo. Es probablemente una copia (del primer siglo a.C.) de una pintura helenística.



Platón planteó el siguiente problema a sus discípulos:

Explicad el movimiento de los cuerpos celestes por medio de alguna teoría geométrica.

¿Por qué era esta una cuestión de interés y confusión para los griegos? La observación desde la Tierra de estos movimientos parece muy complicada. Los movimientos del sol y de la luna se pueden describir de forma aproximada como circulares con velocidad constante, pero las desviaciones de la órbita circular eran problemáticas para los griegos y se sentían retados a encontrar una explicación para estas irregularidades. Las órbitas observadas de los planetas son incluso más complicadas, ya que en una misma revolución parecen cambiar de dirección varias veces.

Los griegos deseaban comprender este movimiento aparentemente errático por medio de su geometría. Eudoxo, Hiparco y más tarde Apolonio de Pérgamo (262–190 a.C.) sugirieron que las órbitas celestes se podían explicar como combinaciones de movimientos circulares (es decir, mediante la construcción de curvas, llamadas epiciclos, descritas por círculos que se mueven sobre otros círculos). Esta idea llegó a ser la teoría astronómica más importante de los dos mil años siguientes. Esta teoría, conocida a través de los escritos del astrónomo griego Tolomeo de Alejandría, se llamó posteriormente “teoría tolemaica”. Véanse las Figuras 4 y 5. Euclides recopiló la mayor parte de la geometría griega en sus *Elementos* (de matemáticas). En realidad, los *Elementos* están formados por trece libros, en los que Euclides recopiló la mayor parte del conocimiento matemático de la época (c. 300 a.C.), transformándolo en una obra maestra lúcida y desarrollada de forma lógica. Además de

los *Elementos*, han llegado hasta nosotros otros escritos de Euclides, que incluyen la *Óptica* y la *Catóptrica* (teoría de los espejos).

El éxito de las matemáticas griegas tuvo una gran influencia en la concepción de la naturaleza. Los platonistas, o seguidores de Platón, distinguían entre el mundo de las ideas y el mundo de los objetos físicos. Platón fue el primero en proponer que la verdad o el conocimiento final no podían obtenerse del mundo material, que está en constante cambio, sino solo de los modelos o construcciones matemáticos. Así, el conocimiento infalible solo podía conseguirse a través de las matemáticas. Platón no solo deseaba utilizar las matemáticas para estudiar la naturaleza, sino que realmente deseaba sustituir la naturaleza por las matemáticas. Para Platón, la realidad descansa únicamente en el mundo de las ideas, especialmente de las ideas matemáticas.



Figura 4 Grabado sobre madera del *Theoricae novae planetarum* de Georg von Peurbach, editado por Oronce Fine como libro de texto para la Universidad de París (1515). Fue la descripción canónica del cielo hasta finales del siglo diecisésis, e incluso tuvo una gran influencia en Copérnico. Peurbach describía la representación mediante esferas sólidas de los modelos planetarios de Tolomeo, lo que probablemente estaba basado en el trabajo de Ibn al-Haytham “Sobre la configuración del mundo” (traducido al latín en el siglo XIII). La misma portada se utilizó en la edición de Sacrosbosco de los primeros cuatro libros de los *Elementos* de Euclides (en extractos), que aparecieron bajo el título *Textus de Sphaera* en París (1521).



Figura 5 Tolomeo observando las estrellas con un cuadrante, junto con una Astronomía alegórica. (De Gregorius Reish, *Margarita Philosophica nova*, Estrasburgo, 1512, uno de los primeros compendios de filosofía y ciencia.) En aquellos tiempos, a Tolomeo se le representaba a menudo como si fuera un rey, porque se creía erróneamente que descendía de la dinastía tolemaica que gobernó Egipto después de Alejandro.

No todo el mundo antiguo estaba de acuerdo con este punto de vista. Aristóteles, un discípulo de Platón, criticó la idea de Platón de reducir la ciencia al estudio de las matemáticas. Aristóteles pensaba que el estudio del mundo material era una de las fuentes primarias de realidad. A pesar de la crítica de Aristóteles, el punto de vista de que las leyes matemáticas gobernaban el universo se estableció con firmeza en el pensamiento clásico. *La búsqueda de las leyes matemáticas de la naturaleza había comenzado.*

Tras la muerte de Arquímedes en el año 212 a.C., la civilización griega entró en un periodo de lenta decadencia. El final de esta civilización llegó en el 640 d.C. con la conquista de Egipto por los árabes. Los textos griegos que aún permanecían en la gran biblioteca de Alejandría se quemaron. Los estudiosos que sobrevivieron emigraron a Constantinopla (hoy parte de Turquía), que era entonces la capital del Imperio Romano de Oriente. Fue en esta gran ciudad donde se conservó lo que sobrevivió de la civilización griega para ser redescubierto por la civilización europea unos quinientos años más tarde.

Matemáticas indias y árabes

Sin embargo, la actividad matemática no cesó con la caída de la civilización griega. A mediados del siglo sexto, en algún lugar del Valle del Ganges, en India, se desarrolló nuestro sistema de numeración moderno. Los indios desarrollaron un sistema de numeración basado en el diez, que empleaba diez símbolos abstractos del cero al nueve que se parecen “ligeramente” a los que hoy utilizamos. Desarrollaron reglas para la suma, la multiplicación y la división (como las de hoy), un sistema infinitamente superior al ábaco romano, que fue utilizado por una clase especial de sirvientes llamados *aritméticos*) a través de toda Europa hasta el siglo xv. Véase la Figura 6.

Tras la caída de Egipto, comenzó el ascenso de la civilización árabe, centrada en Bagdad. Se invitó a estudiosos de Constantinopla y la India a estudiar y compartir sus conocimientos. Fue a través de estos contactos



Figura 6 Aritméticos realizando cálculos con un ábaco.

como los árabes llegaron a adquirir el saber de los antiguos y el nuevo sistema de numeración descubierto por los indios. Véase la Figura 7.

Fueron los árabes quienes nos dejaron la palabra *álgebra*, que procede del libro del astrónomo Mohammed ibn Musa al-Khuwarizmi titulado “Al-Jabr w’al muqabola”, que significa “restaurar” o “equilibrar” (ecuaciones). Al-Khuwarizmi también es responsable de un segundo libro de gran influencia titulado “Kitab al jami’ wa’l tafriq bi hisab al hind” (Técnica india de la suma y la resta), que describía y aclaraba el sistema indio decimal de posición.

La caída de la civilización árabe coincidió con el nacimiento de la civilización europea. La edad moderna comenzó cuando Ricardo Corazón de León llegó a los muros de Jerusalén. Aproximadamente desde 1192 hasta alrededor de 1270, los caballeros cristianos trajeron a Europa los conocimientos de los “infieles”. Alrededor de 1200–1205, Leonardo de Pisa (conocido también como Fibonacci), que había viajado ampliamente por África y Asia Menor, escribió su interpretación (en latín) de las matemáticas árabe y griega. Sus textos históricos atrajeron la atención de una gran audiencia en Europa hacia los trabajos de al-Khuwarizmi y Euclides.

Matemáticas europeas

Alrededor de 1450 Johann Gutenberg inventó la imprenta de caracteres móviles. Combinada con la llegada del papel de lino y algodón descubierto por los chinos, hizo crecer de forma impresionante la divulgación del conocimiento. El rápido desarrollo del comercio y las manufacturas favorecieron el crecimiento de la riqueza y un cambio espectacular en las sociedades europeas pasando del feudalismo a las ciudades estado. En Italia, la madre del Renacimiento, observamos la aparición de estados extraordinariamente ricos como Venecia bajo los Doges y Florencia bajo los Medicis.

Las demandas de la creciente clase de los mercaderes aceleró la adopción del sistema indio de numeración. Las enseñanzas de la Iglesia Católica, que se apoyaban en la autoridad absoluta y el dogma, empezaron a

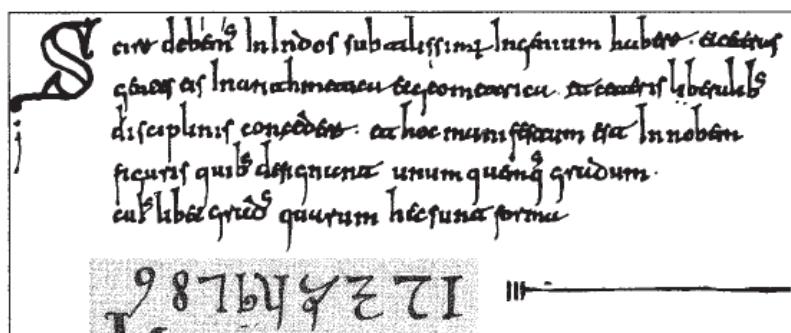


Figura 7 Detalle del *Codex Vigilanus* (976 d.C. norte de España). La primera aparición conocida de los nueve dígitos indoárabigos en Europa Occidental. (Biblioteca de El Escorial, Madrid.)

cuestionarse a causa de las ideas de Platón. Los estudiosos aprendieron de Platón que *el mundo era racional y podía comprenderse*, y que el medio para entender la naturaleza eran las matemáticas. Pero esto contradecía la enseñanza de la iglesia, que enseñaba que Dios había creado el universo. La única solución posible a esta aparente contradicción era que “Dios había creado el universo matemáticamente” o que “Dios es un matemático.”

Quizá resulte sorprendente lo mucho que este punto de vista inspiró el trabajo de muchos matemáticos y científicos entre los siglos XVI y XVIII, ya que, si este era el caso, entendiendo las leyes matemáticas del universo, uno se acercaría a entender al mismísimo Creador. Creíble o no, este punto de vista ha sobrevivido hasta hoy. La siguiente es una cita de Paul Dirac, premio Nobel de Física y creador de la moderna teoría de la mecánica cuántica.

Parece ser una de las propiedades fundamentales de la naturaleza que las leyes fundamentales de la física se describan en términos de una teoría matemática de gran poder y belleza, que requiere un alto conocimiento de las matemáticas para entenderla. Podríamos preguntarnos: ¿por qué la naturaleza se ha construido de esta forma? Solamente podemos responder que nuestros conocimientos actuales parecen mostrar que la naturaleza se ha construido así. Simplemente tenemos que aceptarlo. Podríamos quizás describir la situación diciendo que Dios es un matemático de un nivel muy alto y que ha usado matemáticas muy avanzadas para construir el universo. Nuestros débiles intentos con las matemáticas nos permiten entender una pequeña parte del universo, y a medida que sigamos desarrollando matemáticas cada vez más avanzadas podemos esperar entender mejor el universo.

Las matemáticas comenzaron a ver nuevos avances y aplicaciones. En los siglos XVI y XVII, el álgebra de al-Khuwarizmi fue ampliamente superada por Cardano, Vieta y Descartes. Los babilonios ya habían resuelto la ecuación de segundo grado, pero ahora, dos mil años después, del Ferro y Tartaglia habían resuelto la ecuación cúbica, lo que a su vez les llevó a descubrir los números imaginarios. Como veremos, estos números imaginarios desempeñaron más tarde un papel fundamental en el desarrollo del cálculo vectorial. A principios del siglo XVII, Descartes, motivado quizás por la técnica de la cuadrícula utilizada por los pintores de frescos italianos para situar puntos sobre la pared o los lienzos, creó en un momento de gran inspiración matemática, la geometría de coordenadas (o analítica). Este nuevo modelo matemático nos permite reducir la geometría de Euclides al álgebra y proporciona un método preciso y cuantitativo para describir y calcular curvas y superficies en el espacio.

Anteriormente, el gran trabajo de Arquímedes sobre estática y equilibrio (centros de gravedad, el principio de la palanca—que estudiaremos en este libro) se había comprendido y mejorado, llevando a logros de ingeniería realmente importantes. En una carrera arquitectónica que aún hoy sigue siendo sorprendente, los avances en ingeniería hicieron posible el levantamiento de un número increíble de catedrales por toda Europa, que incluyen el Duomo de Florencia, Nôtre Dame en París y la gran catedral de Colonia, por mencionar algunas. Véase la Figura 8.



Figura 8 Duomo.



Figura 9 Nicolás Copérnico (1473–1543).

Sin embargo, como en la época de los griegos, fue la astronomía lo que dio a las matemáticas su mayor ímpetu. No resulta sorprendente que los astrónomos griegos colocaran a la Tierra y no al Sol en el centro de nuestro universo, ya que diariamente vemos al Sol salir y ponerse. Aún así, es interesante preguntarse si los griegos, que fueron unos magníficos pensadores, al menos intentaron probar la teoría heliocéntrica, que coloca al Sol en el centro del universo. De hecho, lo hicieron. En el siglo III a.C., Aristarco de Samos enseñaba que la Tierra y otros planetas se movían en órbitas circulares alrededor de un sol fijo. Sus hipótesis fueron, por razones diversas, rechazadas. En primer lugar, los astrónomos que se oponían razonaban que si la Tierra verdaderamente se moviera, deberíamos notarlo. En segundo lugar, ¿cómo podrían permanecer en una Tierra en movimiento los objetos que giran con nosotros? Finalmente, ¿por qué las nubes no se quedaban atrás en una Tierra en movimiento?

Estos mismos argumentos volverían a utilizarse en el siglo XVI contra el astrónomo polaco Nicolás Copérnico (véase la Figura 9), que en 1543 presentó la teoría heliocéntrica (los planetas se mueven en una órbita alrededor del Sol). Su libro *Revolutionibus Orbium Coelestium* (*Sobre la revolución de las órbitas celestes*) iniciaría la “revolución copernicana” en la ciencia y proporcionaría al mundo una nueva palabra, *revolucionario*.

En 1619, el astrónomo alemán Johannes Kepler (véase la Figura 10), utilizando los cálculos astronómicos del astrónomo danés Tycho Brahe, demostró que las órbitas planetarias eran en realidad elípticas, las mismas elipses que los griegos habían estudiado como formas abstractas unos 2.000 años antes (véase la Figura 11).

Pero la ley de Kepler de las órbitas elípticas no era más que una de las tres leyes que descubrió y que gobiernan el movimiento de los planetas. La segunda ley de Kepler establece que si un planeta se mueve desde un punto *A* a otro punto *B* en un determinado tiempo *T*, y también se mueve de *A'* a *B'* en el mismo tiempo, y si *S* es un foco de la órbita elíptica, entonces las secciones *SAB* y *SA'B'* tienen áreas iguales (véase



Figura 10 Johannes Kepler (1571–1630).

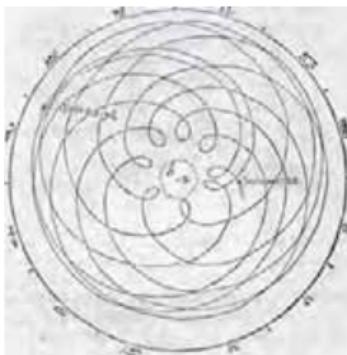


Figura 11 El movimiento de Marte. De la *Astronomia Nova* de Kepler (1609).

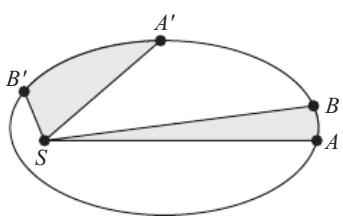


Figura 12 Segunda ley de Kepler.

la Figura 12). La tercera ley de Kepler dice que el cuadrado del tiempo T que un cuerpo planetario necesita para completar una órbita es proporcional a a^3 , donde a es el eje mayor de la órbita elíptica. En forma de ecuación, $T^2 = Ka^3$, donde K es una constante (obtendremos esta ley para las órbitas circulares en el Capítulo 4).

A pesar de la profundidad de estas observaciones, faltaba una explicación que soportara estas leyes. Sin embargo, a mediados del siglo XVII, se entendía completamente que un cambio de velocidad requiere la acción de alguna fuerza, pero cómo esas fuerzas podían influir en el movimiento no estaba nada claro. En 1674, Robert Hooke, intentando explicar las leyes de Kepler, supuso la existencia de una fuerza de atracción que el Sol debía a ejercer sobre los planetas, una fuerza que decrecía con la distancia planetaria. Sin embargo, la teoría de Hooke solo era cualitativa.

Newton

El punto importante que faltaba era una definición precisa tanto de velocidad como de aceleración. Esto finalmente se resolvió mediante la invención del cálculo por parte de Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz (véase la Figura 13). Hooke nunca llegó a comprender las ideas profundas en que se basaba el cálculo infinitesimal. Sin embargo, durante el periodo de 1679–1680 Hooke discutió estas ideas con Newton, incluida la de que la fuerza que el Sol ejerce sobre los planetas era inversamente proporcional al cuadrado de la distancia planetaria.

Después de que Sir Christopher Wren, astrónomo aficionado, arquitecto de la ciudad de Londres y de la magnífica catedral de St. Paul, lanzara un reto público sobre la “determinación teórica” de las órbitas de los planetas, Isaac Newton se interesó seriamente por el problema. Quizá siguiendo algunos rumores, el gran astrónomo inglés Edmund Halley (1656–1743), en agosto de 1684, visitó a Newton en Cambridge y



Figura 13 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716).

le preguntó directamente cuál sería la órbita de un planeta sometido a una fuerza del inverso del cuadrado. Newton le respondió que tenía que ser una elipse. Al preguntarle el sorprendido Halley que cómo sabía eso, la famosa respuesta de Newton fue “*Porque lo he calculado.*” Halley finalmente presionó a Newton para que publicara sus resultados en un libro y estos aparecieron en 1686 en los ahora legendarios *Principia* de Newton (véase la Figura 15).



Figura 14 Isaac Newton, uno de los mayores intelectos científicos y matemáticos de todos los tiempos, creó la noción de vector al concebir las fuerzas como vectoriales. Aquí aparece representado en 1725 (con su pelo natural), solo dos años antes de su muerte, hojeando las páginas de su obra maestra, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, que posiblemente sea la obra científica más influyente y profunda jamás escrita, así como el verdadero punto de partida del cálculo vectorial. (Fuente: cortesía de la National Portrait Gallery, Londres)

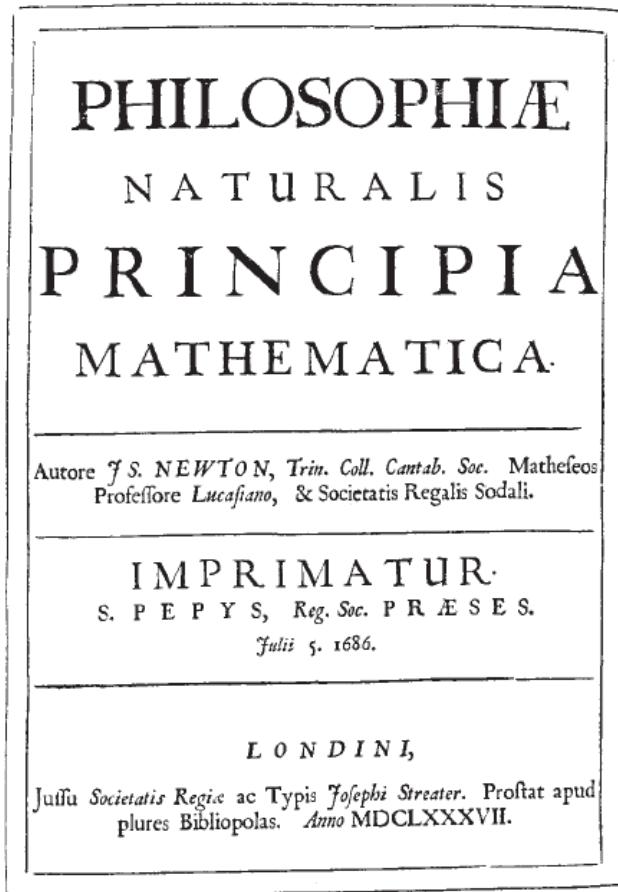


Figura 15 Frontispicio de la impresión con dos líneas de los *Principia*, que lleva la impresión “Prostat apud plures Bibliopolas”, que se denomina en ocasiones la “primera entrega” de la primera edición. La “versión para la exportación” (con las tres líneas “Prostant Venales apud Sam Smith . . . aliosq; nonnullos Bibliopolas”) se llama la segunda entrega de la primera edición. Esta distinción entre la primera y la segunda entrega parece ser infundada. Se ha sugerido que Halley llegó a un acuerdo con Smith en lo relativo a las ventas en el extranjero; de hecho, la mayor parte de las cincuenta copias de Smith parece que se vendieron en el continente.

Este libro, a menudo y justamente citado como el fundamento de la ciencia moderna, tuvo un impacto inmediato y sorprendente. Alexander Pope escribió:

*La Naturaleza y las leyes de la naturaleza yacen ocultas en la noche,
Dios dijo, “Hágase Newton” y se hizo la luz.*

En la Figura 14, vemos a Newton sosteniendo un ejemplar abierto de sus *Principia*.

Aunque Newton no utilizó el cálculo en los *Principia*, se han dado razonamientos convincentes de que Newton originalmente utilizó el cálculo para deducir las trayectorias de las órbitas planetarias a partir de la ley

del inverso del cuadrado.* Los *Principia* aportaban pruebas de que el universo, como los antiguos griegos habían comprendido, está, de hecho, diseñado matemáticamente. Fue Newton el primero que conceptualizó la fuerza como un *vector*, aunque no proporcionó ninguna definición formal de qué era un vector. Una definición formal tendría que esperar a William Rowan Hamilton, un siglo y medio después de los *Principia*.

La invención del cálculo y el subsiguiente desarrollo del cálculo vectorial fue el verdadero principio de la ciencia y la tecnología modernas, que han cambiado nuestro mundo de forma impresionante. De las matemáticas de la mecánica de Newton a las profundas construcciones intelectuales de la electrodinámica de Maxwell, de la relatividad de Einstein y de la mecánica cuántica de Heisenberg y Schrödinger, hemos visto los descubrimientos de la radio, la televisión, las comunicaciones inalámbricas, los vuelos, las computadoras, los viajes espaciales y las incontables maravillas de la ingeniería.

En todos estos avances subyacen las matemáticas, una excitante aventura de la mente y una manifestación sobresaliente del espíritu humano. En este contexto comenzamos nuestro relato sobre cálculo vectorial.

*Estudiaremos el problema de las órbitas planetarias en la Sección 4.1.

Prerrequisitos y notación

Suponemos que los estudiantes han estudiado el cálculo de funciones de una variable real, incluyendo la geometría analítica en el plano. Algunos estudiantes también pueden haber tenido alguna experiencia con las matrices, aunque lo que necesitaremos de ellas lo veremos en las Secciones 1.3 y 1.5.

También suponemos que los estudiantes estarán familiarizados con funciones de cálculo elemental, tales como $\sin x$, $\cos x$, e^x y $\log x$ (escribimos $\log x$ o $\ln x$ para el logaritmo natural, que en ocasiones se denota como $\log_e x$). Los estudiantes deben conocer, o repasar a medida que el curso avance, las reglas básicas de diferenciación e integración de funciones de una variable, tales como la regla de la cadena, la regla del cociente, la integración por partes, etc.

Ahora vamos a resumir las notaciones que vamos a utilizar más adelante. Los estudiantes pueden repasarlas ahora de forma rápida y volver a ellas posteriormente si les surge la necesidad.

El conjunto de los números reales se denota mediante \mathbb{R} . Así, \mathbb{R} incluye los **enteros**, $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$; los **números racionales**, p/q , donde p y q son enteros ($q \neq 0$) y los **números irracionales**, como $\sqrt{2}, \pi$ y e . Los elementos de \mathbb{R} se pueden visualizar como puntos de la recta real numérica, como se muestra en la Figura P.1.



Figura P.1 Representación geométrica de puntos en la recta real numérica.

Cuando escribimos $a \in \mathbb{R}$ queremos decir que a es un elemento del conjunto \mathbb{R} , en otras palabras, que a es un número real. Dados dos números reales a y b con $a < b$ (esto es, con a menor que b), podemos crear el **intervalo cerrado** $[a, b]$, que consta de todos los x tales que $a \leq x \leq b$, y el **intervalo abierto** (a, b) , que consta de todos los x tales que $a < x < b$. De forma similar, podemos construir los intervalos semiabiertos $(a, b]$ y $[a, b)$ (Figura P.2).



Figura P.2 Representación geométrica de los intervalos (a, b) , (c, d) y (e, f) .

El **valor absoluto** de un número $a \in \mathbb{R}$ se escribe $|a|$ y se define como

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Por ejemplo, $|3| = 3$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$ y $|-6| = 6$. La desigualdad $|a + b| \leq |a| + |b|$ siempre se cumple. La **distancia de a a b** es igual a $|a - b|$. Por tanto, la distancia de 6 a 10 es 4 y de -6 a 3 es 9.

Si escribimos $A \subset \mathbb{R}$, queremos decir que A es un **subconjunto** de \mathbb{R} . Por ejemplo, A podría ser el conjunto de enteros $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Otro ejemplo de subconjunto de \mathbb{R} es el conjunto \mathbb{Q} de los números racionales. Generalmente, para dos colecciones de objetos (es decir, conjuntos) A y B , $A \subset B$ quiere decir que A es un subconjunto de B ; es decir, cada elemento de A es también un elemento de B .

El símbolo $A \cup B$ representa la **unión** de A y B , la colección cuyos elementos son elementos de A o de B (o de ambos). Por tanto,

$$\{\dots, -3, -2, -1, 0\} \cup \{-1, 0, 1, 2, \dots\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

De forma análoga, $A \cap B$ es la **intersección** de A y B ; es decir, este conjunto consta de aquellos elementos de A y B que están en A y en B . Por tanto, la intersección de los dos conjuntos anteriores es $\{-1, 0\}$.

Escribiremos $A \setminus B$ para designar a aquellos elementos de A que no están en B . Por tanto,

$$\{\dots, -3, -2, -1, 0\} \setminus \{-1, 0, 1, 2, \dots\} = \{\dots, -3, -2\}.$$

También podemos especificar conjuntos como se muestra en los siguientes ejemplos:

$$\begin{aligned} \{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ es un entero}\} &= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \\ \{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ es un entero par}\} &= \{\dots, -2, 0, 2, 4, \dots\} \\ \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} &= [a, b]. \end{aligned}$$

Una **función** $f: A \rightarrow B$ es una regla que asigna a cada $a \in A$ un elemento específico $f(a)$ de B . Decimos que A es el **dominio** de f y B es el **espacio de llegada** de f . El conjunto $\{f(x) \mid x \in A\}$ que consta de todos los valores de $f(x)$ se denomina **recorrido** de f . Se denota mediante $f(A)$, el recorrido es un subconjunto del espacio de llegada B . Puede ser todo B , en cuyo caso se dice que f es una función **sobre** B . El hecho de que la función f envíe a a $f(a)$ se denota mediante $a \mapsto f(a)$. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3/(1-x)$ que asigna el número $x^3/(1-x)$ a cada $x \neq 1$ en \mathbb{R} también se puede definir mediante la regla $x \mapsto x^3/(1-x)$. Las funciones también reciben el nombre de **aplicaciones** o **transformaciones**. La notación $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ significa que A es un subconjunto de \mathbb{R} y que f asigna un valor $f(x)$ en \mathbb{R} a cada $x \in A$. La **gráfica** de f consta de todos los puntos del plano $(x, f(x))$ (Figura P.3).

La notación $\sum_{i=1}^n a_i$ significa $a_1 + \dots + a_n$, donde a_1, \dots, a_n son números dados. La suma de los primeros n enteros es

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

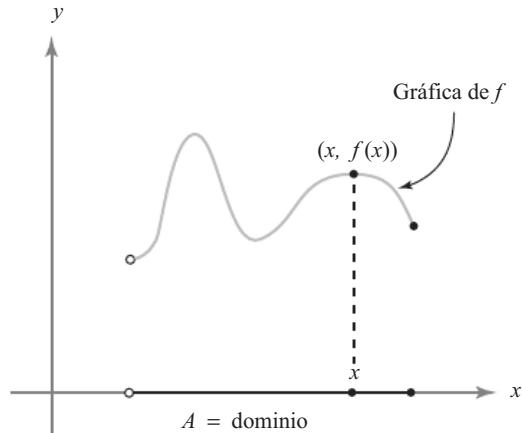


Figura P.3 Gráfica de una función que tiene como dominio el intervalo semiabierto A .

La **derivada** de una función $f(x)$ se denota por $f'(x)$, o

$$\frac{df}{dx},$$

y la **integral definida** se escribe

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Si $y = f(x)$, la derivada también se denota mediante

$$\frac{dy}{dx}.$$

Suponemos que los lectores están familiarizados con la regla de la cadena, la integración por partes y otros resultados básicos del cálculo de funciones de una variable. En particular, deberán saber derivar e integrar la exponencial, el logaritmo y las funciones trigonométricas. Al final del libro se proporcionan tablas de derivadas e integrales, que son adecuadas para las necesidades de este texto.

Las siguientes notaciones se emplearán de forma indistinta: $e^x = \exp x$, $\ln x = \log x$ y $\sen^{-1} x = \arcsen x$.

El final de las demostraciones se ha marcado con el símbolo \blacksquare , mientras que el final de los ejemplos y comentarios se ha marcado con el símbolo \blacktriangle .

Geometría del espacio euclídeo

Los cuaterniones vienen de Hamilton . . . y han sido una verdadera maldición para aquellos que de una manera u otra han tenido relación con ellos. El vector es un superviviente inútil . . . y nunca ha sido de mínima utilidad para criatura alguna.

—Lord Kelvin

En este capítulo vamos a considerar las operaciones básicas con vectores en los espacios de dos y tres dimensiones: suma de vectores, multiplicación por un escalar y los productos escalar y vectorial. En la Sección 1.5 generalizaremos algunos de estos conceptos al espacio de n dimensiones y repasaremos las propiedades de las matrices que se necesitarán en los Capítulos 2 y 3.

1.1 Vectores en los espacios de dos y tres dimensiones

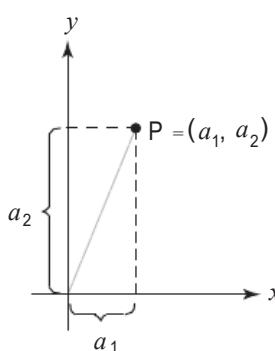


Figura 1.1.1 Coordenadas cartesianas en el plano.

Los puntos P del plano se representan mediante pares ordenados de números reales (a_1, a_2) ; los números a_1 y a_2 se denominan *coordenadas cartesianas* de P . Vamos a dibujar dos rectas perpendiculares, que denominaremos ejes x e y , y a continuación trazamos perpendiculares desde P a dichos ejes, como se muestra en la Figura 1.1.1. Después de designar a la intersección de los ejes x e y como el origen y seleccionar las unidades en dichos ejes, definimos dos distancias con signo a_1 y a_2 como se puede ver en la figura; a_1 es la *coordenada x* de P y a_2 es la *coordenada y*.

De forma similar, los puntos del espacio se pueden representar como ternas ordenadas de números reales. Para ello, elegimos tres rectas perpendiculares entre sí que se corten en un punto del espacio. Estas rectas se denominan *eje x*, *eje y* y *eje z*, y el punto en el que se cortan es el *origen* (este es nuestro punto de referencia). Elegimos una escala en estos ejes, como se muestra en la Figura 1.1.2.

La terna $(0, 0, 0)$ corresponde al origen del sistema de coordenadas y las flechas de los ejes indican las direcciones positivas. Por ejemplo, la terna $(2, 4, 4)$ representa un punto que se encuentra a 2 unidades

del origen según la dirección positiva del eje x , 4 unidades según la dirección positiva del eje y y 4 unidades según la dirección positiva del eje z (Figura 1.1.3).

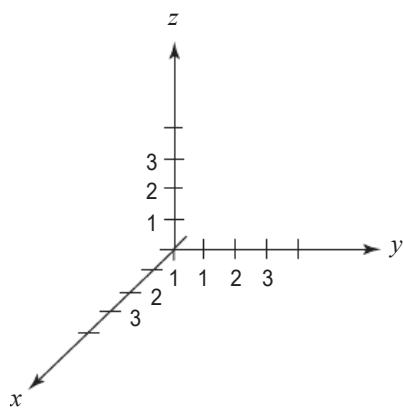


Figura 1.1.2 Coordenadas cartesianas en el espacio.

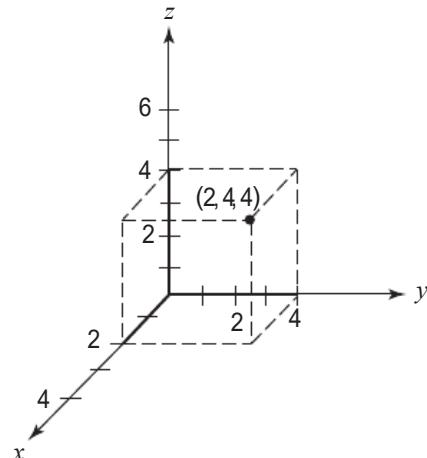


Figura 1.1.3 Representación geométrica del punto $(2, 4, 4)$ en coordenadas cartesianas.

Dado que podemos asociar de este modo puntos en el espacio con ternas ordenadas, a menudo emplearemos la expresión “el punto (a_1, a_2, a_3) ” en lugar de la frase más larga “el punto P que corresponde a la terna (a_1, a_2, a_3) ”. Decimos que a_1 es la **coordenada x** (o primera coordenada), a_2 es la **coordenada y** (o segunda coordenada) y a_3 es la **coordenada z** (o tercera coordenada) de P. También es frecuente denotar los puntos del espacio con las letras x, y y z en lugar de a_1, a_2 y a_3 . Así, la terna (x, y, z) representa un punto cuya primera coordenada es x , su segunda coordenada es y y su tercera coordenada es z .

Vamos a emplear la siguiente notación para la recta, el plano y el espacio tridimensional :

- (i) La recta de los números reales se denota por \mathbb{R}^1 o simplemente \mathbb{R} .
- (ii) El conjunto de los pares ordenados (x, y) de números reales se designa como \mathbb{R}^2 .
- (iii) El conjunto de las ternas ordenadas (x, y, z) de números reales se designa como \mathbb{R}^3 .

Cuando se habla de $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ y \mathbb{R}^3 al mismo tiempo, escribimos \mathbb{R}^n , donde $n = 1, 2$ o 3 ; o \mathbb{R}^m , donde $m = 1, 2, 3$. A partir de la Sección 1.5 también estudiaremos \mathbb{R}^n para $n = 4, 5, 6, \dots$, pero puesto que los casos para $n = 1, 2, 3$ son los más próximos a nuestra intuición geométrica, pondremos un mayor énfasis en ellos a lo largo del libro.

Suma de vectores y multiplicación por un escalar

La operación de la suma se puede extender de \mathbb{R} a \mathbb{R}^2 y a \mathbb{R}^3 . Para \mathbb{R}^3 , se hace como sigue. Dadas las dos ternas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) , definimos su **suma** como

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

Ejemplo 1

$$(1, 1, 1) + (2, -3, 4) = (3, -2, 5), \\ (x, y, z) + (0, 0, 0) = (x, y, z), \\ (1, 7, 3) + (a, b, c) = (1 + a, 7 + b, 3 + c)$$

El elemento $(0, 0, 0)$ se denomina *elemento cero* (o simplemente *cero*) de \mathbb{R}^3 . El elemento $(-a_1, -a_2, -a_3)$ es el *opuesto* de (a_1, a_2, a_3) , y se escribirá $(a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3)$ en lugar de $(a_1, a_2, a_3) + (-b_1, -b_2, -b_3)$.

Cuando se suma un vector con su opuesto, el resultado es cero:

$$(a_1, a_2, a_3) + (-a_1, -a_2, -a_3) = (0, 0, 0).$$

Existen varias operaciones de multiplicación importantes que se definirán en \mathbb{R}^3 . Una de ellas, el *producto escalar*, asigna un número real a cada par de elementos de \mathbb{R}^3 . Veremos esto en detalle en la Sección 1.2. Otra de las operaciones de multiplicación en \mathbb{R}^3 es la *multiplicación por un escalar* (aquí el término “escalar” es sinónimo de “número real”). Este producto combina escalares (números reales) y elementos de \mathbb{R}^3 (ternas ordenadas) para obtener elementos de \mathbb{R}^3 de la forma siguiente: dado un escalar α y una terna (a_1, a_2, a_3) , definimos la *multiplicación por un escalar* como

$$\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3).$$

Ejemplo 2

$$2(4, e, 1) = (2 \cdot 4, 2 \cdot e, 2 \cdot 1) = (8, 2e, 2), \\ 6(1, 1, 1) = (6, 6, 6), \\ 1(u, v, w) = (u, v, w), \\ 0(p, q, r) = (0, 0, 0)$$

La suma de ternas y la multiplicación por un escalar satisfacen las siguientes propiedades:

- (I) $(\alpha\beta)(a_1, a_2, a_3) = \alpha[\beta(a_1, a_2, a_3)]$ (asociativa)
- (II) $(\alpha + \beta)(a_1, a_2, a_3) = \alpha(a_1, a_2, a_3) + \beta(a_1, a_2, a_3)$ (distributiva)
- (III) $\alpha[(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)] = \alpha(a_1, a_2, a_3) + \alpha(b_1, b_2, b_3)$ (distributiva)
- (IV) $\alpha(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ (propiedad del cero)
- (V) $0(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$ (propiedad del cero)
- (VI) $1(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3)$ (propiedad del elemento unidad)

Estas identidades se demuestran directamente a partir de las definiciones de suma y de multiplicación por un escalar. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(a_1, a_2, a_3) &= ((\alpha + \beta)a_1, (\alpha + \beta)a_2, (\alpha + \beta)a_3) \\ &= (\alpha a_1 + \beta a_1, \alpha a_2 + \beta a_2, \alpha a_3 + \beta a_3) \\ &= \alpha(a_1, a_2, a_3) + \beta(a_1, a_2, a_3). \end{aligned}$$

En \mathbb{R}^2 , la suma y la multiplicación por un escalar se definen como en \mathbb{R}^3 , suprimiendo la tercera coordenada de cada vector. Todas las propiedades, (I) a (VI), también son válidas.

Ejemplo 3

Interpretar la ecuación química $2\text{NH}_2 + \text{H}_2 = 2\text{NH}_3$ como una relación algebraica de pares ordenados.

Solución

Podemos pensar en la molécula N_xH_y (x átomos de nitrógeno, y átomos de hidrógeno) como el par ordenado (x, y) . Entonces la ecuación química dada es equivalente a $2(1, 2) + (0, 2) = 2(1, 3)$. Claramente, ambos lados de la ecuación son iguales a $(2, 6)$. ▲

Geometría de las operaciones vectoriales

Volvamos a la geometría de estas operaciones en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 . Por el momento, definimos un **vector** como un segmento recto que nace en el origen; es decir, un segmento recto con un tamaño y una dirección específicos que parte del origen. La Figura 1.1.4 muestra varios vectores, dibujados como flechas que parten del origen. En los textos, los vectores se suelen denotar mediante letras en negrita, como, por ejemplo, **a**. Cuando se escribe a mano, suelen escribirse como \vec{a} o simplemente como a , a veces con una línea recta u ondulada debajo.

Usando esta definición de vector, asociamos con cada vector **a** el punto (a_1, a_2, a_3) donde termina **a** y, recíprocamente, podemos asociar un vector **a** con cada punto (a_1, a_2, a_3) en el espacio. Por tanto, identificaremos **a** con (a_1, a_2, a_3) y escribiremos $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Por esta razón, los elementos de \mathbb{R}^3 no son únicamente ternas ordenadas de números reales, sino también vectores. La terna $(0, 0, 0)$ se denota como **0**. Decimos que a_1, a_2 y a_3 son las **componentes** de **a** o, si pensamos en **a** como en un punto, decimos que son sus **coordenadas**.

Dos vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ son iguales si y solo si $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ y $a_3 = b_3$. Geométricamente, esto quiere decir que **a** y **b** tienen la misma dirección y sentido, y la misma longitud (o “tamaño”).

Geométricamente, definimos la suma de vectores de la siguiente forma. En el plano que contiene los vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ (véase la Figura 1.1.5), se forma el paralelogramo cuyos lados adyacentes

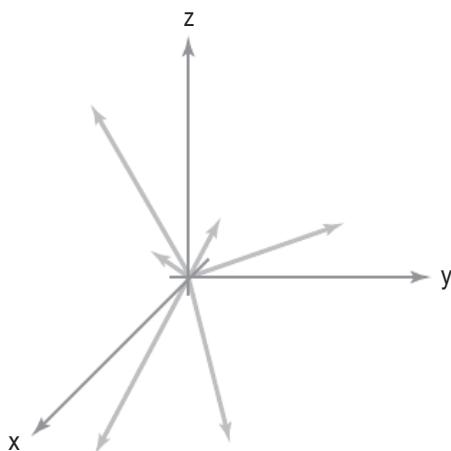


Figura 1.1.4 Geométricamente, los vectores se representan mediante flechas que parten del origen.

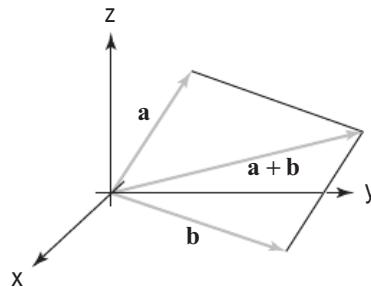


Figura 1.1.5 Geometría de la suma de vectores.

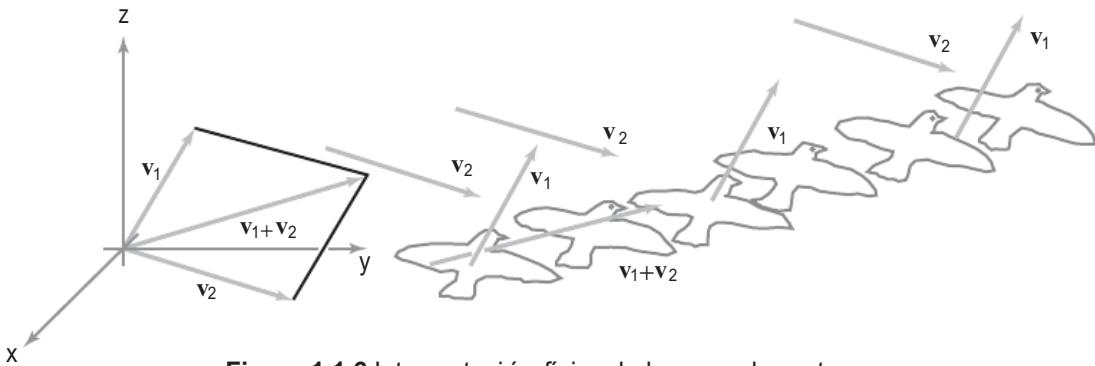


Figura 1.1.6 Interpretación física de la suma de vectores.

son \mathbf{a} y \mathbf{b} . La suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ es el segmento que parte del origen y recorre la diagonal del paralelogramo.

Esta interpretación geométrica de la suma de vectores resulta útil en muchas situaciones físicas, como veremos en la siguiente sección. Consideremos un ejemplo fácil de visualizar, imaginemos un pájaro o un avión volando con una velocidad \mathbf{v}_1 , en presencia de viento con una velocidad \mathbf{v}_2 . La velocidad resultante, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, es la que vemos; véase la Figura 1.1.6.

Para demostrar que esta definición geométrica de la suma es coherente con nuestra definición algebraica, vamos a demostrar que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$. Demostraremos este resultado en el plano y dejamos al lector la demostración para el caso del espacio tridimensional. Por tanto, queremos demostrar que si $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, entonces $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

En la Figura 1.1.7, sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ el vector que termina en el punto A y sea $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ el vector que termina en el punto B. Por definición, el vector $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ termina en el vértice C del paralelogramo OBCA. Para verificar que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, basta con demostrar que las coordenadas de C son $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$. Los lados de los triángulos OAD y BCG son paralelos y los lados OA y BC tienen la misma longitud, lo que expresamos como $OA = BC$. Estos triángulos son semejantes, por lo que $BG = OD$; puesto que BGFE es un rectángulo, $EF = BG$. Además, $OD = a_1$ y $OE = b_1$. Por tanto, $EF = BG = OD = a_1$. Puesto que $OF = EF + OE$, se tiene que $OF = a_1 + b_1$. Esto demuestra que la coordenada

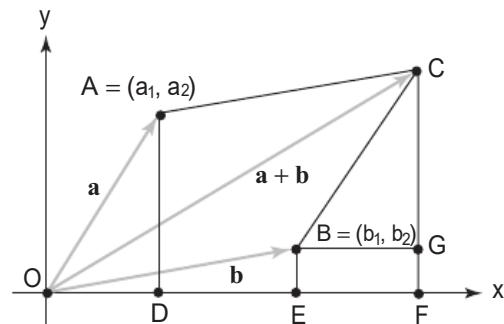


Figura 1.1.7 Construcción utilizada para demostrar que $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

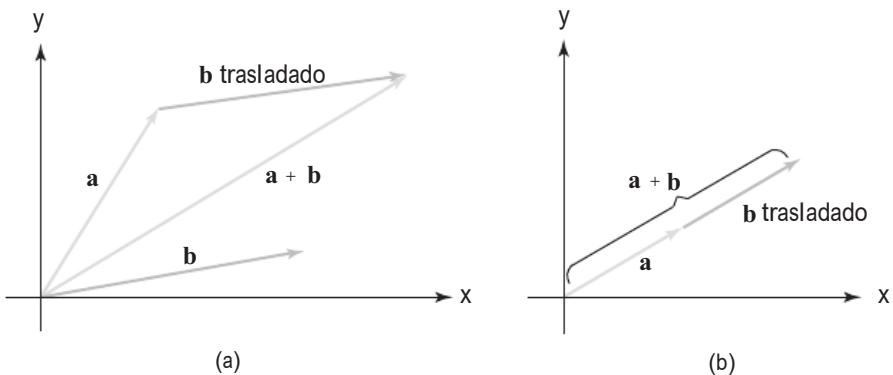


Figura 1.1.8 (a) La suma de vectores se puede visualizar empleando triángulos y paralelogramos. (b) El triángulo se reduce a un segmento cuando \mathbf{a} y \mathbf{b} son colineales.

x de $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ es $a_1 + b_1$. La demostración de que la coordenada y es $a_2 + b_2$ es análoga. En este razonamiento se ha supuesto que \mathbf{A} y \mathbf{B} se encuentran en el primer cuadrante, pero se pueden aplicar razonamientos similares para los restantes cuadrantes.

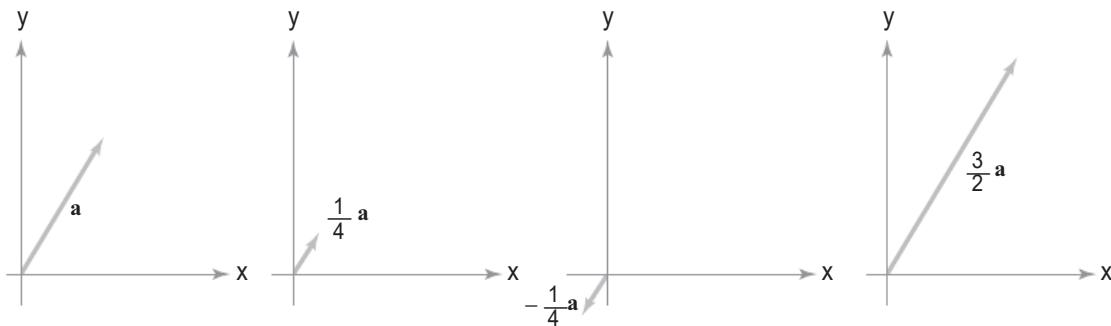
La Figura 1.1.8(a) ilustra otra forma de ver la suma de vectores, empleando triángulos en lugar de paralelogramos. Es decir, trasladamos (sin girar) el segmento que representa al vector \mathbf{b} hasta situar su punto inicial en el extremo final del vector \mathbf{a} . El extremo final del segmento resultante es el extremo final del vector $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Podemos observar que cuando \mathbf{a} y \mathbf{b} son colineales, el triángulo se reduce a un segmento, como se muestra en la Figura 1.1.8(b).

En la Figura 1.1.8 hemos colocado \mathbf{b} a continuación de \mathbf{a} . Es decir, la cola de \mathbf{b} se coloca en la cabeza de \mathbf{a} , y el vector $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ va desde la cola de \mathbf{a} a la cabeza de \mathbf{b} . Si hacemos esto en orden inverso, $\mathbf{b} + \mathbf{a}$, obtenemos el mismo vector recorriendo el paralelogramo por el otro camino. De acuerdo con esta figura, resulta útil hacer que los vectores “resbalen” o “se deslicen”, manteniendo su tamaño y sentido. De hecho,

Vectores Los vectores (también denominados *vectores libres*) se representan mediante segmentos de recta dirigidos en [el plano o] espacio con un extremo inicial (cola) y un extremo final (cabeza). Los segmentos de recta dirigidos obtenidos a partir de otro mediante una traslación en paralelo (sin giro) representan el mismo vector.

Las componentes (a_1, a_2, a_3) de \mathbf{a} tienen las longitudes (con signo) de las proyecciones de \mathbf{a} sobre los tres ejes de coordenadas; de forma equivalente, quedan definidas colocando la cola de \mathbf{a} en el origen y haciendo que la cabeza se coloque en el punto (a_1, a_2, a_3) . Así, escribimos $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Dos vectores se suman colocándolos uno a continuación de otro y dibujando el vector que va desde la cola del primero hasta la cabeza del segundo, como se muestra en la Figura 1.1.8.

Figura 1.1.9 Múltiplos escalares de un vector \mathbf{a} .

vamos a considerar que dos vectores son *iguales* si tienen igual tamaño, dirección y sentido. Cuando el extremo inicial de los vectores se encuentra en el origen, hablamos de *vectores fijos*. Cuando el extremo inicial de los vectores se encuentra en cualquier otro punto, entonces diremos que tenemos *vectores libres* o simplemente *vectores*.

La multiplicación de vectores por un escalar también tiene una interpretación geométrica. Si α es un escalar y \mathbf{a} un vector, definimos $\alpha\mathbf{a}$ como un vector cuya longitud es $|\alpha|$ veces la longitud de \mathbf{a} y que tiene el mismo sentido que \mathbf{a} si $\alpha > 0$ y sentido opuesto si $\alpha < 0$. La Figura 1.1.9 muestra varios ejemplos.

Basándonos en los triángulos semejantes, determinamos que si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y α es un escalar, entonces

$$\alpha\mathbf{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3).$$

Es decir, la definición geométrica coincide con la algebraica.

Dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , ¿cómo representamos el vector $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ geométricamente?, es decir, ¿cuál es la geometría de la resta de vectores? Puesto que $\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b}$, vemos que $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ es el vector que hay que sumar a \mathbf{a} para obtener \mathbf{b} . En vista de esto, podemos concluir que $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ es un vector con el mismo tamaño y paralelo al segmento dirigido que comienza en el punto final de \mathbf{a} y termina en el punto final de \mathbf{b} cuando \mathbf{a} y \mathbf{b} parten del mismo punto (véase la Figura 1.1.10).

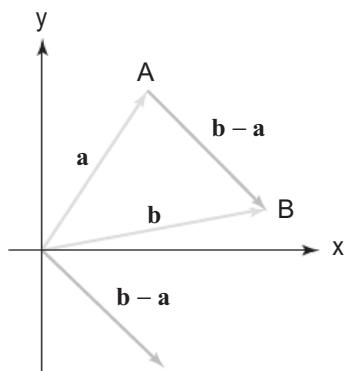
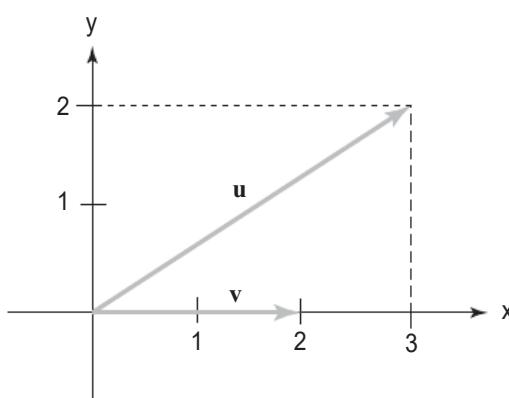


Figura 1.1.10 Geometría de la resta de vectores.

Ejemplo 4

Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} los vectores mostrados en la Figura 1.1.11. Dibujar los vectores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $-2\mathbf{u}$. ¿Cuáles son sus componentes?

Figura 1.1.11 Determinar $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $-2\mathbf{u}$.

Solución

Colocamos la cola de \mathbf{v} en la punta de \mathbf{u} para obtener el vector mostrado en la Figura 1.1.12.

El vector $-2\mathbf{u}$, que también hemos dibujado, tiene una longitud que es el doble de la de \mathbf{u} y apunta en el sentido opuesto. A partir de la figura, vemos que las componentes del vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ son $(5, 2)$ y las del vector $-2\mathbf{u}$ son $(-6, -4)$.

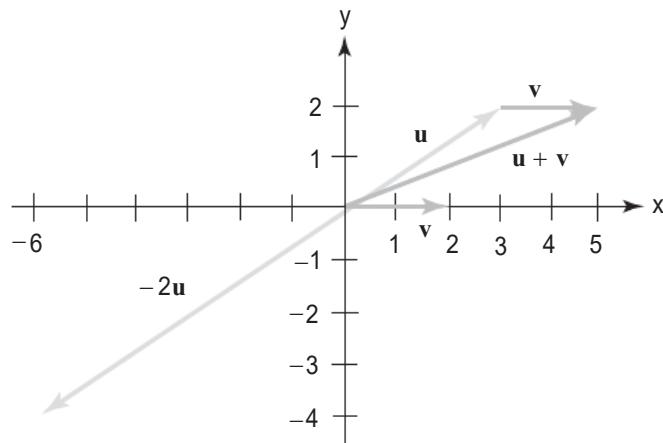


Figura 1.1.12 Cálculo de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $-2\mathbf{u}$.

Ejemplo 5

- Dibujar $-2\mathbf{v}$, donde \mathbf{v} tiene las componentes $(-1, 1, 2)$.
- Si \mathbf{v} y \mathbf{w} son dos vectores cualesquiera, demostrar que $\mathbf{v} - \frac{1}{3}\mathbf{w}$ y $3\mathbf{v} - \mathbf{w}$ son paralelos.

Solución

- El vector $-2\mathbf{v}$ tiene una longitud que es dos veces la longitud de \mathbf{v} y apunta en el sentido opuesto (véase la Figura 1.1.13).
- $\mathbf{v} - \frac{1}{3}\mathbf{w} = \frac{1}{3}(3\mathbf{v} - \mathbf{w})$; los vectores que son múltiplos uno de otros son paralelos.

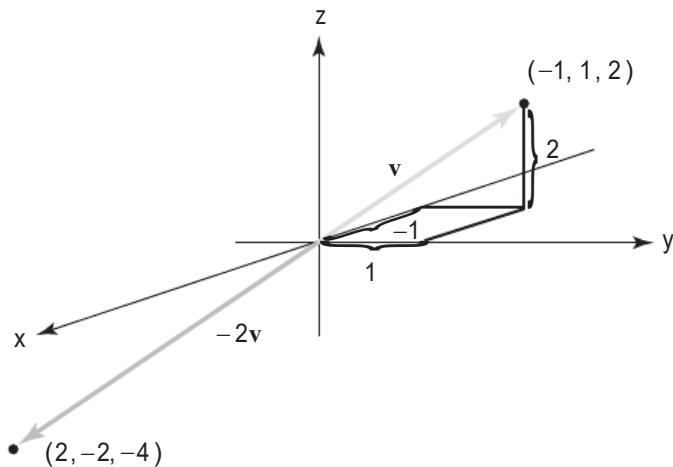


Figura 1.1.13 Multiplicación de $(-1, 1, 2)$ por -2 .

Vectores de la base canónica

Para describir vectores en el espacio, es conveniente presentar tres vectores especiales a lo largo de los ejes x , y y z :

- i:** el vector de componentes $(1, 0, 0)$
- j:** el vector de componentes $(0, 1, 0)$
- k:** el vector de componentes $(0, 0, 1)$.

En la Figura 1.1.14 se ilustran los *vectores de la base canónica*. En el plano tenemos los vectores de la base canónica **i** y **j** de componentes $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

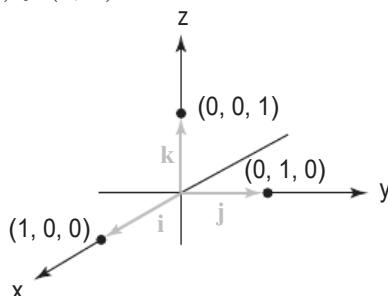


Figura 1.1.14 Vectores de la base canónica.

Sea **a** cualquier vector y sean (a_1, a_2, a_3) sus componentes. Entonces

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$$

ya que el lado derecho de la expresión está dado en componentes por

$$\begin{aligned} a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\ &= (a_1, a_2, a_3). \end{aligned}$$

Por tanto, podemos expresar cada uno de los vectores como una suma de múltiplos escalares de **i**, **j** y **k**.

Vectores de la base canónica

1. Los vectores **i**, **j** y **k** son vectores unitarios a lo largo de los tres ejes de coordenadas, como se muestra en la Figura 1.1.14.
2. Si **a** tiene componentes (a_1, a_2, a_3) , entonces

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

Ejemplo 6

Expresar el vector cuyas componentes son $(e, \pi, -\sqrt{3})$ en función de la base canónica.

Solución

Sustituyendo $a_1 = e$, $a_2 = \pi$ y $a_3 = -\sqrt{3}$ en $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ obtenemos

$$\mathbf{v} = e\mathbf{i} + \pi\mathbf{j} - \sqrt{3}\mathbf{k}. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 7

El vector $(2, 3, 2)$ es igual a $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, y el vector $(0, -1, 4)$ es $-\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. La Figura 1.1.15 muestra el vector $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; dibujar el vector $-\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

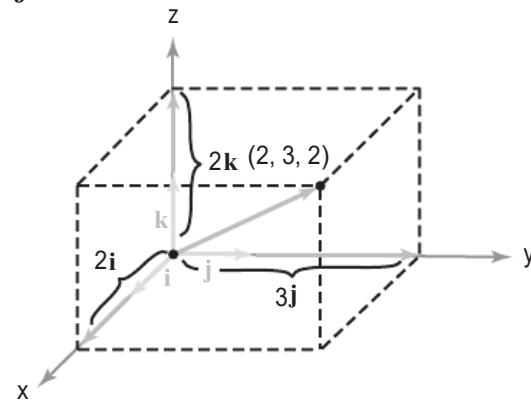


Figura 1.1.15 Representación de $(2, 3, 2)$ en función de los vectores de la base canónica \mathbf{i}, \mathbf{j} y \mathbf{k} .

La suma y la multiplicación por un escalar se pueden expresar en función de los vectores de la base canónica como sigue:

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) + (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j} + (a_3 + b_3)\mathbf{k}$$

y

$$\alpha(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) = (\alpha a_1)\mathbf{i} + (\alpha a_2)\mathbf{j} + \alpha(a_3)\mathbf{k}.$$



Figura 1.1.16 El vector que va de P a P' se denota como $\overrightarrow{PP'}$.

El vector que une dos puntos

Para poder emplear vectores en los problemas geométricos, resulta útil asignar a cada vector un *par* de puntos en el plano o en el espacio de la forma siguiente. Dados dos puntos P y P' , podemos dibujar el vector \mathbf{v} con su cola en P y su cabeza en P' , como se muestra en la Figura 1.1.16, donde escribimos $\overrightarrow{PP'}$ en lugar de \mathbf{v} .

Si $P = (x, y, z)$ y $P' = (x', y', z')$, entonces los vectores que parten del origen hacia P y P' son $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\mathbf{a}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$, respectivamente, por lo que el vector $\overrightarrow{PP'}$ es la diferencia $\mathbf{a}' - \mathbf{a} = (x' - x)\mathbf{i} + (y' - y)\mathbf{j} + (z' - z)\mathbf{k}$. (Véase la Figura 1.1.17.)

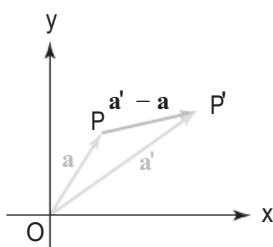


Figura 1.1.17
 $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}$.

Vector que une dos puntos Si el punto P tiene las coordenadas (x, y, z) y P' tiene las coordenadas (x', y', z') , entonces el vector $\overrightarrow{PP'}$ que va desde la punta de P hasta la punta de P' tiene las componentes $(x' - x, y' - y, z' - z)$.

Ejemplo 8

- Determinar las componentes del vector que va de $(3, 5)$ a $(4, 7)$.
- Sumar el vector \mathbf{v} que va de $(-1, 0)$ a $(2, -3)$ y el vector \mathbf{w} que va de $(2, 0)$ a $(1, 1)$.

- (c) Multiplicar el vector \mathbf{v} de (b) por 8. Si el vector resultante se representa mediante el segmento dirigido que va desde $(5, 6)$ a Q , ¿cuáles son las coordenadas de Q ?

Solución

- (a) Como en el recuadro anterior, restamos los pares ordenados: $(4, 7) - (3, 5) = (1, 2)$. Así, las coordenadas buscadas son $(1, 2)$.
- (b) El vector \mathbf{v} tiene las componentes $(2, -3) - (-1, 0) = (3, -3)$ y las de \mathbf{w} son $(1, 1) - (2, 0) = (-1, 1)$. Por tanto, el vector $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ tiene componentes $(3, -3) + (-1, 1) = (2, -2)$.
- (c) El vector $8\mathbf{v}$ tiene componentes $8(3, -3) = (24, -24)$. Si este vector se representa mediante el segmento dirigido que va de $(5, 6)$ a Q , y Q tiene coordenadas (x, y) , entonces $(x, y) - (5, 6) = (24, -24)$, por lo que $(x, y) = (5, 6) + (24, -24) = (29, -18)$. \blacktriangle

Ejemplo 9

Sean $P = (-2, -1)$, $Q = (-3, -3)$ y $R = (-1, -4)$ en el plano xy .

- (a) Dibujar los siguientes vectores: \mathbf{v} que une P a Q ; \mathbf{w} que une Q a R ; \mathbf{u} que une R a P .
- (b) ¿Cuáles son las componentes de \mathbf{v} , \mathbf{w} y \mathbf{u} ?
- (c) ¿Cuál es el vector $\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{u}$?

Solución

(a) Véase la Figura 1.1.18.

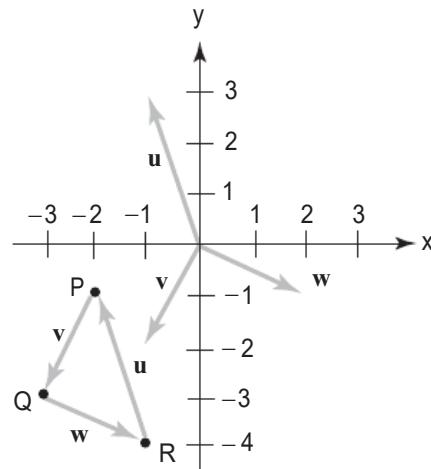


Figura 1.1.18 El vector \mathbf{v} que une P con Q ; \mathbf{w} que une Q con R ; y \mathbf{u} que une R con P .

- (b) Como $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{QR}$ y $\mathbf{u} = \overrightarrow{RP}$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (-3, -3) - (-2, -1) = (-1, -2), \\ \mathbf{w} &= (-1, -4) - (-3, -3) = (2, -1), \\ \mathbf{u} &= -(-1, -4) + (-2, -1) = (-1, 3).\end{aligned}$$

- (c) $\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{u} = (-1, -2) + (2, -1) + (-1, 3) = (0, 0)$. \blacktriangle

Teoremas de geometría con métodos vectoriales

Muchos de los teoremas de la geometría plana se pueden demostrar empleando vectores. He aquí un ejemplo.

Ejemplo 10

Utilizar vectores para demostrar que cada diagonal de un paralelogramo corta a la otra en su punto medio.

Solución

Sea OPRQ el paralelogramo con dos lados adyacentes representados por los vectores $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP}$ y $\mathbf{b} = \overrightarrow{OQ}$. Sea M el punto medio de la diagonal OR y sea N el punto medio de la otra diagonal, PQ. (Figura 1.1.19.)

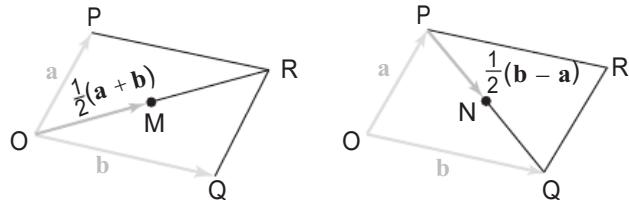


Figura 1.1.19 Si los puntos medios M y N coinciden, entonces las diagonales OR y PQ se cortan entre sí en su punto medio.

Obsérvese que $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ por la regla del paralelogramo para la suma de vectores, de modo que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Por otro lado,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \quad \text{luego} \quad \overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

y, por tanto,

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Puesto que \overrightarrow{OM} y \overrightarrow{ON} son vectores iguales, los puntos M y N coinciden, por lo que las diagonales se cortan en sus puntos medios. ▲

Ecuaciones de rectas

Los planos y rectas son objetos geométricos que se pueden representar mediante ecuaciones. En la Sección 1.3 estudiaremos las ecuaciones que representan planos. Sin embargo, utilizando la interpretación geométrica de la suma de vectores y la multiplicación por un escalar, ahora vamos a definir la *ecuación de una línea l que pasa por el extremo del vector a y tiene la dirección del vector v* (véase la Figura 1.1.20); es decir, la recta l es paralela al vector v .

Según t recorre el conjunto de los números reales, los puntos de la forma $t\mathbf{v}$ son todos los múltiplos escalares del vector \mathbf{v} y por tanto recorre los puntos de la recta *que pasa por el origen* en la dirección de \mathbf{v} . Como cada punto de l es el extremo de la diagonal de un paralelogramo con lados \mathbf{a} y $t\mathbf{v}$ para algún valor real de t , comprobamos que todos los puntos de l son de la forma $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$. Por tanto, la recta l se puede expresar mediante la ecuación $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$. En este caso, decimos que l está

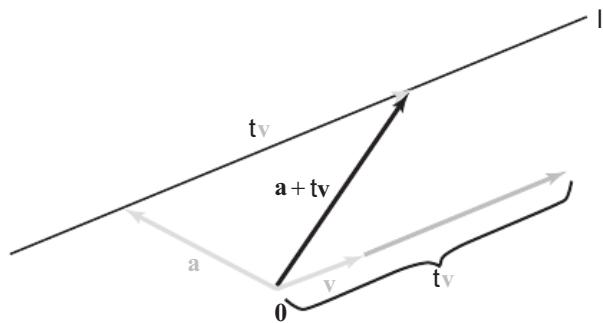


Figura 1.1.20 La recta l , dada en forma paramétrica por $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, tiene la dirección de \mathbf{v} y pasa por el extremo de \mathbf{a} .

expresada **en forma paramétrica**, con el parámetro t . En $t = 0$, $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a}$. A medida que t aumenta, el punto $\mathbf{l}(t)$ se aleja de \mathbf{a} en la dirección de \mathbf{v} . A medida que t decrece desde $t = 0$ tomando valores negativos, $\mathbf{l}(t)$ se aleja de \mathbf{a} en el sentido $-\mathbf{v}$.

Forma punto-vector de una recta La ecuación de la recta l que pasa por la punta de \mathbf{a} y apunta en la dirección del vector \mathbf{v} es $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, donde el parámetro t toma todos los valores reales. Usando coordenadas, las ecuaciones son

$$\begin{aligned}x &= x_1 + at, \\y &= y_1 + bt, \\z &= z_1 + ct,\end{aligned}$$

donde $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = (a, b, c)$. Para rectas en el plano xy , no es necesario tener en cuenta la componente z .

Ejemplo 11

Determinar la ecuación de la recta l que pasa por el punto $(1, 0, 0)$ en la dirección de \mathbf{j} . Véase la Figura 1.1.21.

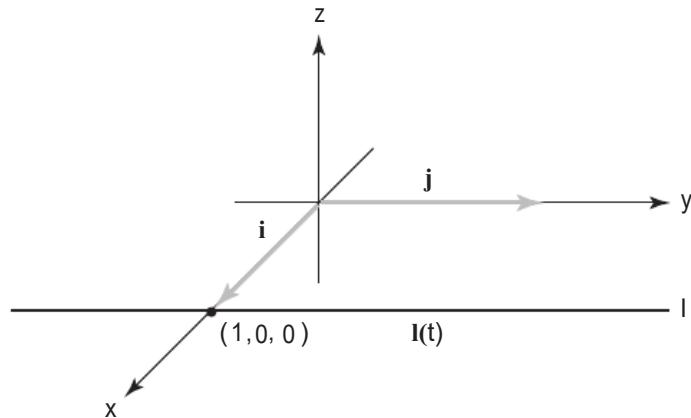


Figura 1.1.21 La recta l pasa por la punta de \mathbf{i} en la dirección de \mathbf{j} .

Solución

La recta deseada se puede expresar paramétricamente como $\mathbf{l}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j}$. Usando coordenadas,

$$\mathbf{l}(t) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 0) = (1, t, 0).$$

Ejemplo 12

- (a) Determinar las ecuaciones de la recta en el espacio que pasa por el punto $(3, -1, 2)$ en la dirección $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
- (b) Determinar la ecuación de la recta en el plano que pasa por el punto $(1, -6)$ en la dirección $5\mathbf{i} - \pi\mathbf{j}$.
- (c) ¿Qué dirección tiene la recta $x = -3t + 2, y = -2(t - 1), z = 8t + 2$?

Solución

- (a) Aquí $\mathbf{a} = (3, -1, 2) = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, por lo que $a = 2, b = -3$ y $c = 4$. De acuerdo con el recuadro anterior, las ecuaciones son

$$\begin{aligned}x &= 3 + 2t, \\y &= -1 - 3t, \\z &= 2 + 4t.\end{aligned}$$

- (b) Aquí $\mathbf{a} = (1, -6)$ y $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - \pi\mathbf{j}$, por lo que la recta buscada es

$$\mathbf{l}(t) = (1, -6) + (5t, -\pi t) = (1 + 5t, -6 - \pi t);$$

es decir,

$$x = 1 + 5t, \quad y = -6 - \pi t.$$

- (c) Teniendo en cuenta el recuadro anterior, construimos el vector $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ a partir de los coeficientes de t : $a = -3, b = -2, c = 8$. Por tanto, la recta apunta en la dirección de $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$. ▲

Ejemplo 13

- ¿Se intersecan las dos rectas $(x, y, z) = (t, -6t + 1, 2t - 8)$ y $(x, y, z) = (3t + 1, 2t, 0)$?

Solución

Si las rectas se intersecan, deben existir dos números t_1 y t_2 tales que los puntos correspondientes sean iguales:

$$(t_1, -6t_1 + 1, 2t_1 - 8) = (3t_2 + 1, 2t_2, 0);$$

es decir, deben satisfacer las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}t_1 &= 3t_2 + 1, \\-6t_1 + 1 &= 2t_2, \\2t_1 - 8 &= 0.\end{aligned}$$

De la tercera ecuación, tenemos $t_1 = 4$. Entonces la primera ecuación puede expresarse como $4 = 3t_2 + 1$; es decir, $t_2 = 1$. Tenemos que comprobar si estos valores satisfacen la segunda ecuación:

$$-6t_1 + 1 \stackrel{?}{=} 2t_2.$$

Como $t_1 = 4$ y $t_2 = 1$, entonces

$$-24 + 1 \stackrel{?}{=} 2,$$

lo que es falso, por lo que las rectas no se intersecan. ▲

Obsérvese que puede haber muchas ecuaciones para una misma recta. Algunas se pueden obtener eligiendo, en lugar de \mathbf{a} , un punto diferente de la recta dada, y escribiendo la ecuación paramétrica de la recta que pasa

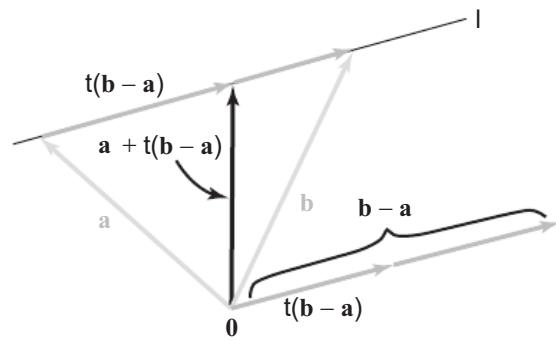


Figura 1.1.22 La recta l , dada en forma paramétrica por $l(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$, pasa por los extremos de \mathbf{a} y \mathbf{b} .

por dicho punto en la dirección de \mathbf{v} . Por ejemplo, el extremo de $\mathbf{a} + \mathbf{v}$ está en la recta $l(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ y, por tanto, $l_1(t) = (\mathbf{a} + \mathbf{v}) + t\mathbf{v}$ representa la misma recta. Es posible obtener otras ecuaciones observando que si $\alpha \neq 0$, el vector $\alpha\mathbf{v}$ tiene el mismo sentido (o el opuesto) que \mathbf{v} . Así, $l_2(t) = \mathbf{a} + t\alpha\mathbf{v}$ es otra ecuación de la recta $l(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$.

Por ejemplo, $l(t) = (1, 0, 0) + (t, t, 0)$ y $l_1(s) = (0, -1, 0) + (s, s, 0)$ representan la misma recta ya que ambas tienen la misma dirección $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y pasan por el punto $(1, 0, 0)$; l pasa por el punto $(1, 0, 0)$ en $t = 0$ y l_1 pasa por el punto $(1, 0, 0)$ en $s = 1$.

Por tanto, la ecuación de una recta no está determinada de manera única. A pesar de ello, se suele utilizar el término “la ecuación de una recta”. Teniendo esto en cuenta, vamos a deducir *la ecuación de una recta que pasa por los extremos de dos vectores dados, \mathbf{a} y \mathbf{b}* . Dado que el vector $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ es paralelo al segmento dirigido de \mathbf{a} hacia \mathbf{b} , calculamos la ecuación paramétrica de la recta que pasa por \mathbf{a} en el sentido de $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ (Figura 1.1.22). Luego,

$$l(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}); \quad \text{es decir,} \quad l(t) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}.$$

A medida que t aumenta de 0 a 1, $t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ comienza siendo el vector cero y su longitud va aumentando (manteniendo la dirección de $\mathbf{b} - \mathbf{a}$) hasta que en $t = 1$ es el vector $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. Por tanto, para $l(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, según t crece de 0 a 1, el vector $l(t)$ se mueve desde la punta de \mathbf{a} hasta la punta de \mathbf{b} a lo largo del segmento dirigido que va de \mathbf{a} hacia \mathbf{b} .

Si $P = (x_1, y_1, z_1)$ es la punta del vector \mathbf{a} y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ es la punta de \mathbf{b} , entonces $\mathbf{v} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$, y por tanto las ecuaciones de la recta son

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)t. \end{aligned}$$

Eliminando t , podemos escribir estas ecuaciones como sigue

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por dos puntos Las ecuaciones paramétricas de la recta l que pasa por los puntos $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ son

$$\begin{aligned}x &= x_1 + (x_2 - x_1)t, \\y &= y_1 + (y_2 - y_1)t, \\z &= z_1 + (z_2 - z_1)t,\end{aligned}$$

donde (x, y, z) es un punto genérico de l y el parámetro t recorre todos los números reales.

Ejemplo 14

Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, 1, -3)$ y $(6, -1, -5)$.

Solución

Utilizando la información del recuadro anterior, elegimos $(x_1, y_1, z_1) = (2, 1, -3)$ y $(x_2, y_2, z_2) = (6, -1, -5)$, de modo que las ecuaciones son

$$\begin{aligned}x &= 2 + (6 - 2)t = 2 + 4t, \\y &= 1 + (-1 - 1)t = 1 - 2t, \\z &= -3 + (-5 - (-3))t = -3 - 2t.\end{aligned}$$



Ejemplo 15

Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ (véase la Figura 1.1.23).

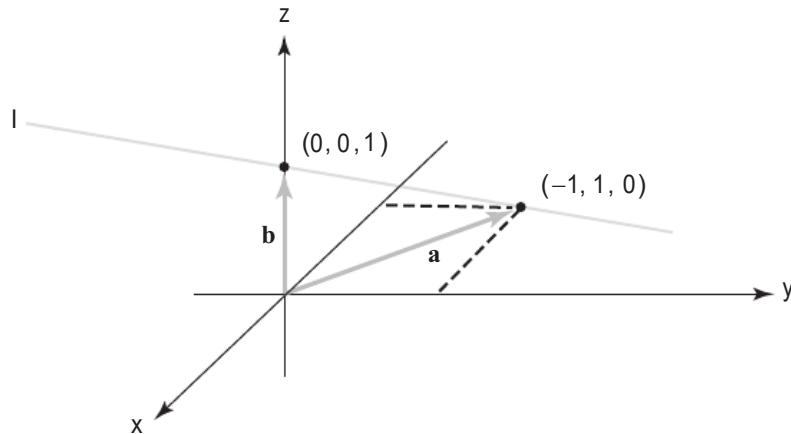


Figura 1.1.23 Determinación de la ecuación de una recta que pasa por dos puntos.

Solución

Representando los puntos dados como $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{k}$, tenemos

$$\mathbf{l}(t) = (1-t)(-\mathbf{i} + \mathbf{j}) + t\mathbf{k} = -(1-t)\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

La ecuación de esta recta se puede entonces expresar como sigue

$$\mathbf{l}(t) = (t-1)\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + t\mathbf{k},$$

o, de forma equivalente, si $\mathbf{l}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,

$$x = t - 1, \quad y = 1 - t, \quad z = t.$$

La descripción de un *segmento* de recta requiere que el conjunto de valores que toma el parámetro t sea restringido, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16

Solución

Determinar la ecuación del segmento de recta definido entre los puntos $(1, 1, 1)$ y $(2, 1, 2)$.

La *recta* que pasa por los puntos $(1, 1, 1)$ y $(2, 1, 2)$ se describe en forma paramétrica como $(x, y, z) = (1 + t, 1, 1 + t)$, donde t toma todos los valores reales. Cuando $t = 0$, el punto (x, y, z) es $(1, 1, 1)$ y cuando $t = 1$, el punto (x, y, z) es $(2, 1, 2)$. Por tanto, el punto (x, y, z) se encuentra entre $(1, 1, 1)$ y $(2, 1, 2)$ cuando $0 \leq t \leq 1$, de modo que el *segmento* se describe mediante las ecuaciones

$$x = 1 + t,$$

$$y = 1,$$

$$z = 1 + t,$$

junto con las desigualdades $0 \leq t \leq 1$.

También podemos describir de forma paramétrica otros objetos, además de las rectas.

Ejemplo 17

Solución

Describir los puntos del paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} que parten del origen (incluyendo los puntos de las aristas del paralelogramo).

Consideremos la Figura 1.1.24. Si P es cualquier punto interior del paralelogramo dado y dibujamos las rectas l_1 y l_2 que pasan por P y son paralelas a los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , respectivamente, vemos que l_1 interseca el lado del paralelogramo determinado por el vector \mathbf{b} en algún punto $t\mathbf{b}$, donde $0 \leq t \leq 1$. Del mismo modo, l_2 interseca el lado determinado por el vector \mathbf{a} en algún punto $s\mathbf{a}$, donde $0 \leq s \leq 1$.

Obsérvese que P es el extremo de la diagonal de un paralelogramo cuyos lados adyacentes son $s\mathbf{a}$ y $t\mathbf{b}$; por tanto, si \mathbf{v} denota el vector \overrightarrow{OP} , vemos que $\mathbf{v} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. Podemos concluir que todos los puntos del paralelogramo dado son los extremos finales de vectores de la forma $s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ para $0 \leq s \leq 1$ y $0 \leq t \leq 1$. Invirtiendo los pasos anteriores, comprobamos que todos los vectores de esta forma tienen su extremo final dentro del paralelogramo.

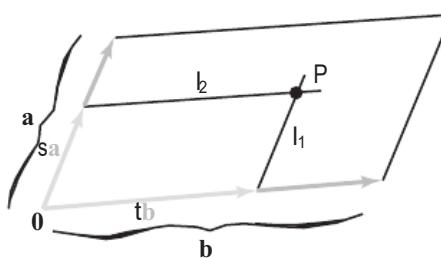


Figura 1.1.24 Descripción de los puntos interiores del paralelogramo formado por los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , con vértice 0 .

Al igual que dos rectas diferentes que pasan por el origen determinan el plano que las contiene, también lo hacen dos vectores no paralelos. Si aplicamos el mismo razonamiento que en el Ejemplo 17, vemos que el plano formado por los dos vectores no paralelos \mathbf{v} y \mathbf{w} consta de todos los puntos de la forma $s\mathbf{v} + t\mathbf{w}$, donde s y t pueden tomar cualquier valor real, como en la Figura 1.1.25.

Hemos descrito los puntos de un plano mediante dos parámetros. Por ello, decimos que el plano es **bidimensional**. De forma similar, se dice que una recta es **unidimensional** ya se encuentre en el plano o en el espacio, o sea la recta de los números reales.

El plano determinado por \mathbf{v} y \mathbf{w} se llama **plano generado por \mathbf{v} y \mathbf{w}** . Cuando \mathbf{v} es un múltiplo escalar de \mathbf{w} y $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, entonces \mathbf{v} y \mathbf{w} son paralelos y el plano degenera en una línea recta. Cuando $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$ (es decir, ambos son el vector cero), obtenemos un único punto.

Existen tres planos particulares que surgen de forma natural en un sistema de coordenadas y que resultarán útiles más adelante. El plano definido por los vectores \mathbf{i} y \mathbf{j} es el **plano xy** , el plano definido por \mathbf{j} y \mathbf{k} es el **plano yz** y el plano definido por \mathbf{i} y \mathbf{k} es el **plano xz** . Estos planos se ilustran en la Figura 1.1.26.

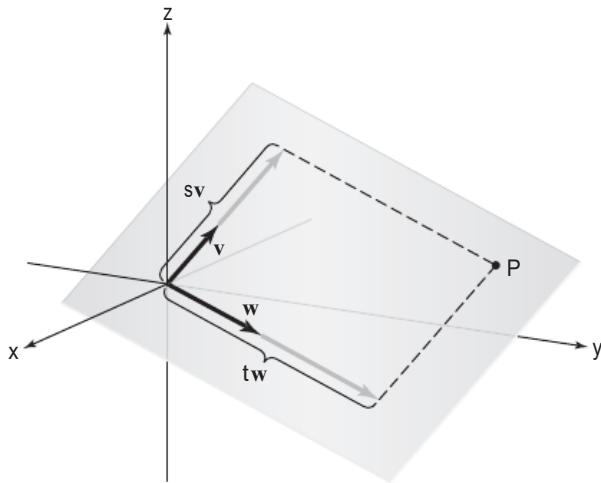


Figura 1.1.25 Descripción de los puntos P del plano determinado por los vectores \mathbf{v} y \mathbf{w} .

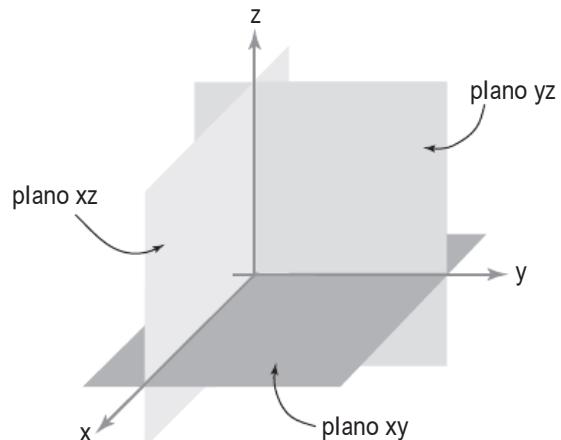


Figura 1.1.26 Los tres planos coordinados.

Ejercicios

Completar los cálculos en los Ejercicios 1 a 4.

1. $(-21, 23) - (? , 6) = (-25, ?)$

3. $(8a, -2b, 13c) = (52, 12, 11) + \frac{1}{2}(?, ?, ?)$

2. $3(133; -0,33; 0) + (-399; 0,99; 0) = (?, ?, ?)$

4. $(2, 3, 5) - 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = (?, ?, ?)$

En los Ejercicios 5 a 8, dibujar los vectores dados \mathbf{v} y \mathbf{w} . En el mismo dibujo, trazar los vectores $-\mathbf{v}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ y $\mathbf{v} - \mathbf{w}$.

5. $\mathbf{v} = (2, 1)$ y $\mathbf{w} = (1, 2)$
6. $\mathbf{v} = (0, 4)$ y $\mathbf{w} = (2, -1)$
7. $\mathbf{v} = (2, 3, -6)$ y $\mathbf{w} = (-1, 1, 1)$
8. $\mathbf{v} = (2, 1, 3)$ y $\mathbf{w} = (-2, 0, -1)$
9. Sean $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Dibujar \mathbf{v} , \mathbf{w} , $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, $2\mathbf{w}$, y $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ en el plano.
10. Dibujar $(1, -2, 3)$ y $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -1)$. ¿Por qué estos vectores apuntan en sentidos opuestos?

En los Ejercicios 13 a 19, utilice la notación vectorial, de conjuntos o ambas para describir los puntos indicados en las configuraciones dadas.

13. Plano definido por $\mathbf{v}_1 = (2, 7, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (0, 2, 7)$.
14. Plano definido por $\mathbf{v}_1 = (3, -1, 1)$ y $\mathbf{v}_2 = (0, 3, 4)$.
15. Recta que pasa por $(-1, -1, -1)$ en la dirección de \mathbf{j} .
16. Recta que pasa por $(0, 2, 1)$ en la dirección de $2\mathbf{i} - \mathbf{k}$.
17. Recta que pasa por $(-1, -1, -1)$ y $(1, -1, 2)$.
18. Recta que pasa por $(-5, 0, 4)$ y $(6, -3, 2)$.
19. El paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores $\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ y $-2\mathbf{j}$.
20. Demostrar que $\mathbf{l}_1(t) = (1, 2, 3) + t(1, 0, -2)$ y $\mathbf{l}_2(t) = (2, 2, 1) + t(-2, 0, 4)$ parametrizan la misma recta.
21. ¿Se encuentran los puntos $(2, 3, -4)$, $(2, 1, -1)$ y $(2, 7, -10)$ sobre la misma recta?
22. Sean $\mathbf{u} = (1, 2)$, $\mathbf{v} = (-3, 4)$ y $\mathbf{w} = (5, 0)$:

En los Ejercicios 29 a 31, utilizar métodos vectoriales para describir las configuraciones dadas.

29. El paralelepípedo cuyas aristas son los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} que salen del origen.
30. Los puntos interiores del paralelogramo que tiene un vértice en (x_0, y_0, z_0) y cuyos lados se ex-

11. ¿Qué restricciones deben tener x, y y z para que la terna (x, y, z) represente un punto sobre el eje y ? ¿Y sobre el eje z ? ¿Y en el plano xz ? ¿Y en el plano yz ?
12. (a) Generalizar la construcción geométrica de la Figura 1.1.7 para demostrar que si $\mathbf{v}_1 = (x, y, z)$ y $\mathbf{v}_2 = (x', y', z')$, entonces $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x + x', y + y', z + z')$.
(b) Utilizando un argumento basado en triángulos semejantes, demostrar que $\alpha\mathbf{v} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ cuando $\mathbf{v} = (x, y, z)$.
13. Dibujar estos vectores en \mathbb{R}^2 .
14. Determinar los escalares λ_1 y λ_2 tales que $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v}$.
15. Sean A, B y C los vértices de un triángulo. Determinar $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.
16. Determinar los puntos de intersección de la recta $x = 3 + 2t, y = 7 + 8t, z = -2 + t$, es decir, $\mathbf{l}(t) = (3 + 2t, 7 + 8t, -2 + t)$, con los planos coordenados.
17. Demostrar que no existen puntos (x, y, z) que satisfagan $2x - 3y + z - 2 = 0$ y estén sobre la recta $\mathbf{v} = (2, -2, -1) + t(1, 1, 1)$.
18. Demostrar que todos los puntos de la recta $\mathbf{v} = (1, -1, 2) + t(2, 3, 1)$ satisfacen la ecuación $5x - 3y - z - 6 = 0$.
19. Determinar si las rectas $x = 3t + 2, y = t - 1, z = 6t + 1$ y $x = 3s - 1, y = s - 2, z = s$ se intersecan.
20. ¿Se intersecan las rectas $(x, y, z) = (t + 4, 4t + 5, t - 2)$ y $(x, y, z) = (2s + 3, s + 1, 2s - 3)$?
21. El plano determinado por los puntos (x_0, y_0, z_0) , (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) .

tienden desde dicho vértice, teniendo el mismo tamaño y sentido que los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} .

Demostrar las afirmaciones dadas en los Ejercicios 32 a 34.

- 32.** El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de la longitud de este último.

- 33.** Si PQR es un triángulo en el espacio y $b > 0$ es un número, entonces existe un triángulo con la-

dos paralelos a los de PQR y con longitudes que son b veces las longitudes de los lados de PQR.

- 34.** Las medianas de un triángulo se intersecan en un punto, y ese punto divide a cada mediana en razón de 2 : 1.

Los Problemas 35 y 36 requieren cierto conocimiento de notación química.

- 35.** Expresar la ecuación química $\text{CO} + \text{H}_2\text{O} = \text{H}_2 + \text{CO}_2$ como una ecuación con ternas ordenadas (x_1, x_2, x_3) , donde x_1, x_2, x_3 son el número de átomos de carbono, hidrógeno y oxígeno, respectivamente, en cada molécula.

- 36.** (a) Expresar la ecuación química $p\text{C}_3\text{H}_4\text{O}_3 + q\text{O}_2 = r\text{CO}_2 + s\text{H}_2\text{O}$ como una ecuación con ternas ordenadas con coeficientes desconocidos p, q, r y s .

(b) Determinar el entero positivo más pequeño para p, q, r y s .

(c) Ilustrar la solución mediante un diagrama vectorial en el espacio.

- 37.** Determinar una recta que esté completamente contenida en el conjunto definido por la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1.2 Producto escalar, longitud y distancia

En esta sección y en la siguiente estudiaremos dos productos de vectores: el producto escalar y el producto vectorial. Ambos son muy útiles en aplicaciones de la física y tienen interesantes interpretaciones geométricas. El primer producto que vamos a considerar es el *producto escalar*. A veces también se le denomina *producto interno*.

Producto escalar

Supongamos que tenemos dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} en \mathbb{R}^3 (Figura 1.2.1) y que deseamos hallar el ángulo entre ellos, es decir, el menor ángulo que forman \mathbf{a} y \mathbf{b} en el plano que ambos generan. El producto escalar nos permite hacer esto. En primer lugar, vamos a desarrollar el concepto formalmente y luego demostraremos que este producto hace lo que queremos. Sean $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Definimos el *producto escalar* de \mathbf{a} y \mathbf{b} , y lo expresamos como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, como el número real

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Obsérvese que el producto escalar de dos vectores es una magnitud escalar. En ocasiones, el producto escalar se escribe como $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$; luego, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ significan exactamente lo mismo.

Ejemplo 1

- (a) Si $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, calcular $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
(b) Calcular $(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{k} - 2\mathbf{j})$.

Solución

- (a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 = 3 - 1 - 2 = 0$.
(b) $(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{k} - 2\mathbf{j}) = (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (0\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -5$.



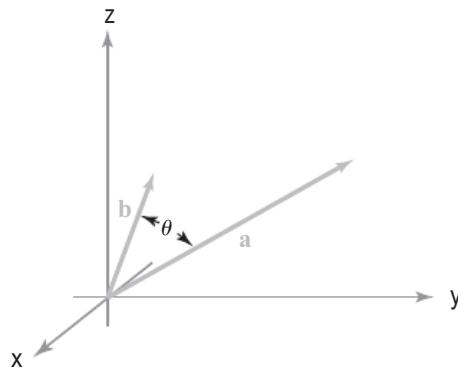


Figura 1.2.1 θ es el ángulo entre los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} .

Algunas propiedades del producto escalar se deducen de la definición. Si \mathbf{a}, \mathbf{b} y \mathbf{c} son vectores en \mathbb{R}^3 y α y β son números reales, entonces

- (I) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$;
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ si y solo si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.
- (II) $\alpha\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ y $\mathbf{a} \cdot \beta\mathbf{b} = \beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.
- (III) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ y $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.
- (IV) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

Para demostrar la primera de estas propiedades, obsérvese que si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Puesto que a_1, a_2 y a_3 son números reales, sabemos que $a_1^2 \geq 0, a_2^2 \geq 0, a_3^2 \geq 0$. Por tanto, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$. Además, si $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$, entonces $a_1 = a_2 = a_3 = 0$; por tanto, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (vector cero). Las demostraciones de las restantes propiedades del producto escalar se pueden obtener también fácilmente.

A partir del teorema de Pitágoras se deduce que la **longitud** del vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ es $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (véase la Figura 1.2.2). La longitud del vector \mathbf{a} se denota mediante $\|\mathbf{a}\|$. Esta magnitud a menudo se denomina **norma** de \mathbf{a} . Puesto que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, se sigue que

$$\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}.$$

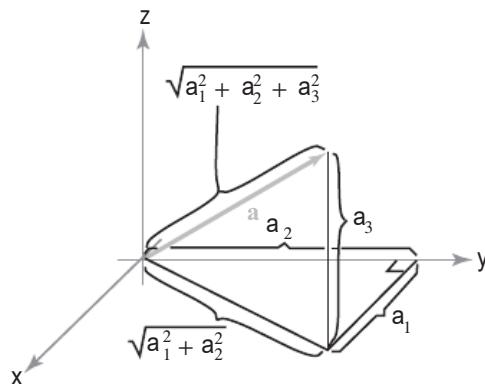


Figura 1.2.2 La longitud del vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ viene dada por la fórmula pitagórica: $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Vectores unitarios

Los vectores con norma 1 se denominan *vectores unitarios*. Por ejemplo, los vectores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son vectores unitarios. Obsérvese que para cualquier vector \mathbf{a} , $\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ es un vector unitario; cuando dividimos \mathbf{a} entre $\|\mathbf{a}\|$, decimos que hemos *normalizado* \mathbf{a} .

Ejemplo 2

Solución

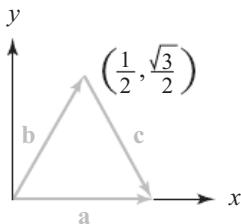


Figura 1.2.3 Los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} están representados por los lados de un triángulo equilátero.

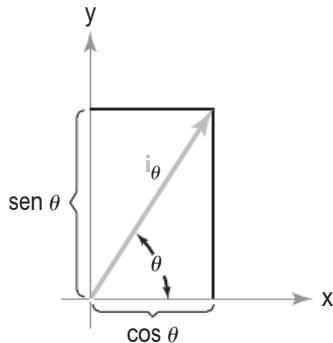


Figura 1.2.4 Las coordenadas de \mathbf{i}_θ son $\cos \theta$ y $\sin \theta$; es un vector unitario porque $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

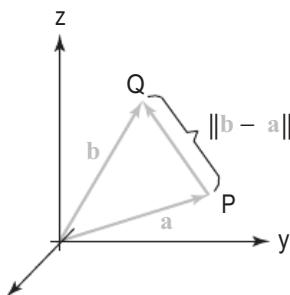


Figura 1.2.5 La distancia entre los extremos de \mathbf{a} y \mathbf{b} es $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$.

(a) Normalizar $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}$.

(b) Determinar vectores unitarios \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} en el plano, tales que $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$.

(a) Sabemos que $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (1/2)^2} = (1/2)\sqrt{53}$, entonces la normalización de \mathbf{v} es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} = \frac{4}{\sqrt{53}} \mathbf{i} + \frac{6}{\sqrt{53}} \mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{53}} \mathbf{k}.$$

(b) Puesto que los tres vectores tienen que tener longitud 1, el triángulo con lados \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} tiene que ser equilátero, como se muestra en la Figura 1.2.3. Si orientamos el triángulo como en la figura, podemos tomar $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, y entonces necesariamente

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}, \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}.$$

Se puede comprobar que efectivamente $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{c}\| = 1$ y que $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$. ▲

En el plano, definimos el vector $\mathbf{i}_\theta = (\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j}$, que es el vector unitario que forma un ángulo θ con el eje x (véase la Figura 1.2.4).

Distancia

Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores, hemos visto que el vector $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ es paralelo y tiene el mismo tamaño que el segmento dirigido que va del extremo de \mathbf{a} al extremo de \mathbf{b} . De aquí se deduce que la distancia entre los extremos de \mathbf{a} y \mathbf{b} es $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ (véase la Figura 1.2.5).

Producto escalar y longitud Dados $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, su *producto escalar* es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

y la *longitud* de \mathbf{a} es

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Para *normalizar* un vector \mathbf{a} , basta con hacer

$$\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Distancia La *distancia entre* los extremos de \mathbf{a} y \mathbf{b} es $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ y la *distancia entre* P y Q es $\|\overrightarrow{PQ}\|$.

Ejemplo 3

Hallar la distancia desde el extremo del vector \mathbf{i} , es decir, el punto $(1, 0, 0)$, hasta el extremo del vector \mathbf{j} , es decir, el punto $(0, 1, 0)$.

Solución

$$\|\mathbf{j} - \mathbf{i}\| = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2}. \quad \blacktriangle$$

Ángulo entre dos vectores

Ahora vamos a ver que el producto escalar sirve efectivamente para medir el ángulo entre dos vectores.

Teorema 1 Sean \mathbf{a} y \mathbf{b} dos vectores en \mathbb{R}^3 y sea θ , donde $0 \leq \theta \leq \pi$, el ángulo entre ellos (Figura 1.2.6). Entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta.$$

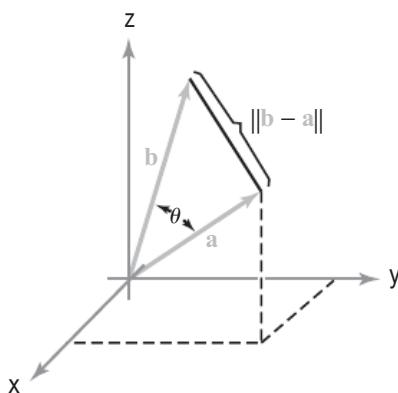


Figura 1.2.6 Los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y el ángulo θ que forman entre ellos; la geometría del Teorema 1 y su demostración.

De la identidad $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$ se deduce que si \mathbf{a} y \mathbf{b} son distintos de cero, podemos expresar el ángulo que forman como

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \right).$$

Demostración Si aplicamos la regla trigonométrica del coseno al triángulo que tiene un vértice en el origen y como lados adyacentes los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} (como se muestra en la figura), se sigue que

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta.$$

Puesto que $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$, $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ y $\|\mathbf{b}\|^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$, podemos escribir la ecuación anterior como

$$(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta.$$

También podemos desarrollar $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$ de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\&= \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \\&= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos \theta.$$

Esto es, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos \theta$. ■

Ejemplo 4

Hallar el ángulo entre los vectores $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ (véase la Figura 1.2.7).

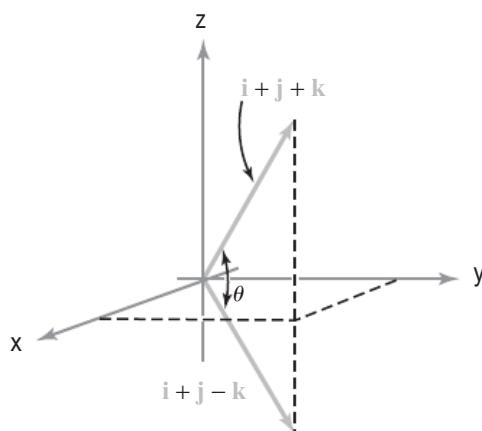


Figura 1.2.7 Cálculo del ángulo entre $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución

Aplicando el Teorema 1, tenemos

$$(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) = \|\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\| \|\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}\| \cos \theta,$$

y así

$$1 + 1 - 1 = (\sqrt{3})(\sqrt{3}) \cos \theta.$$

Por tanto,

$$\cos \theta = \frac{1}{3}.$$

Esto es,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 1,23 \text{ radianes } (71^\circ). \quad \blacktriangle$$

La desigualdad de Cauchy–Schwarz

El Teorema 1 muestra que el producto escalar de dos vectores es el producto de sus longitudes por el coseno del ángulo que forman. Esta fórmula es a menudo muy útil en los problemas de naturaleza geométrica. Una consecuencia importante del Teorema 1 es:

Corolario Desigualdad de Cauchy–Schwarz Para cualquier par de vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , se tiene

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$$

donde la igualdad se satisface si y solo si \mathbf{a} es un múltiplo escalar de \mathbf{b} , o alguno de ellos es $\mathbf{0}$.

Demostración Si \mathbf{a} no es un múltiplo escalar de \mathbf{b} , entonces θ , el ángulo que forman, no es cero ni π , y por tanto $|\cos \theta| < 1$, y se tiene la desigualdad; de hecho, si \mathbf{a} y \mathbf{b} son distintos de cero, se tiene la desigualdad *estricta*. Cuando \mathbf{a} es un múltiplo escalar de \mathbf{b} , entonces $\theta = 0$ o π y $|\cos \theta| = 1$, y en este caso se tiene la igualdad. ■

Ejemplo 5

Verificar la desigualdad de Cauchy–Schwarz para $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

Solución

El producto escalar es $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -3 + 0 + 1 = -2$, de modo que $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = 2$. Además, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ y $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$, y también se cumple que $2 \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{10}$ ya que $\sqrt{3} \cdot \sqrt{10} > \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \geq 2$. ▲

Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores no nulos de \mathbb{R}^3 y θ es el ángulo que forman, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ si y solo si $\cos \theta = 0$. Por tanto, *el producto escalar de dos vectores no nulos es cero si y solo si los vectores son perpendiculares*. Así, el producto escalar nos proporciona un método adecuado para determinar si dos vectores son perpendiculares. A menudo diremos que los vectores perpendiculares son *ortogonales*. Los vectores de la base canónica \mathbf{i}, \mathbf{j} y \mathbf{k} son ortogonales entre sí y tienen longitud 1; estos sistemas de vectores se llaman *ortonormales*. Vamos a adoptar el convenio de que el vector cero es ortogonal a todos los vectores.

Ejemplo 6

Los vectores $\mathbf{i}_\theta = (\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j}$ y $\mathbf{j}_\theta = -(\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j}$ son ortogonales, porque

$$\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{j}_\theta = -\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta = 0.$$

Aquí, \mathbf{i}_θ es la rotación de \mathbf{i} , θ° en sentido antihorario. Y \mathbf{j}_θ es la rotación de \mathbf{j} , θ° en sentido antihorario (véase la Figura 1.2.8).

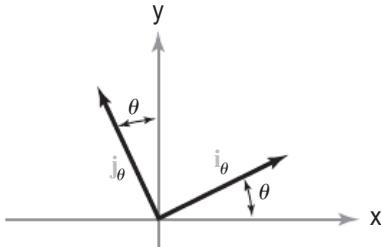


Figura 1.2.8 Los vectores \mathbf{i}_θ y \mathbf{j}_θ son ortogonales y tienen longitud igual a 1, es decir, son ortonormales. ▲

Ejemplo 7

Sean \mathbf{a} y \mathbf{b} dos vectores ortogonales no nulos. Si \mathbf{c} es un vector en el plano generado por \mathbf{a} y \mathbf{b} , entonces existen escalares α y β tales que $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Utilizar el producto escalar para determinar α y β (véase la Figura 1.2.9).

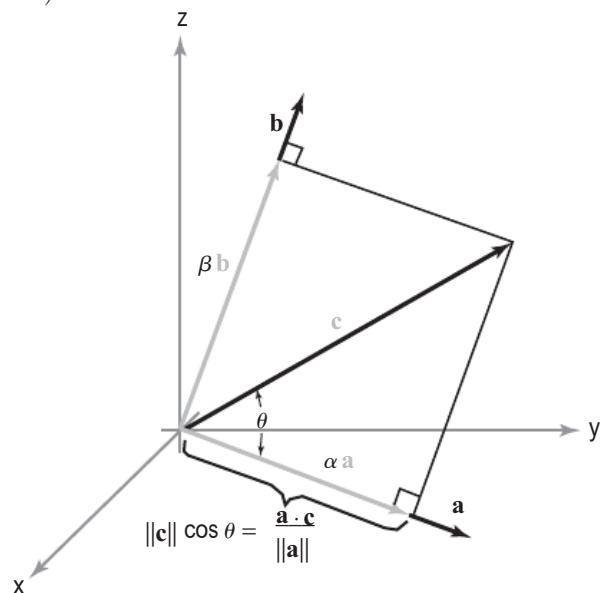


Figura 1.2.9 Geometría para calcular α y β , donde $\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$.

Solución

Efectuando el producto escalar de \mathbf{a} y \mathbf{c} , tenemos

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \beta \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Dado que \mathbf{a} y \mathbf{b} son ortogonales, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, y así

$$\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{\|\mathbf{a}\|^2}.$$

De forma similar,

$$\beta = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{\|\mathbf{b}\|^2}.$$

**Proyección ortogonal**

En el ejemplo anterior, al vector $\alpha\mathbf{a}$ se le denomina *proyección de \mathbf{c} sobre \mathbf{a}* , y $\beta\mathbf{b}$ es su *proyección sobre \mathbf{b}* . Formulemos esta idea de forma más general. Si \mathbf{v} es un vector y l es la recta que pasa por el origen en la dirección del vector \mathbf{a} , entonces la *proyección ortogonal de \mathbf{v} sobre \mathbf{a}* es el vector \mathbf{p} cuyo extremo final se obtiene trazando una recta perpendicular a l desde el extremo final de \mathbf{v} , como se muestra en la Figura 1.2.10.

Si nos fijamos en la figura, vemos que \mathbf{p} es un múltiplo de \mathbf{a} y que \mathbf{v} es la suma de \mathbf{p} y un vector \mathbf{q} perpendicular a \mathbf{a} . Por tanto,

$$\mathbf{v} = c\mathbf{a} + \mathbf{q},$$

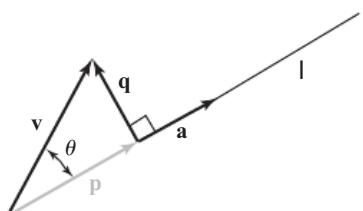


Figura 1.2.10 \mathbf{p} es la proyección ortogonal de \mathbf{v} sobre \mathbf{a} .

donde $\mathbf{p} = c\mathbf{a}$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{q} = 0$. Si multiplicamos por \mathbf{a} escalarmente en ambos lados de la ecuación $\mathbf{v} = c\mathbf{a} + \mathbf{q}$, tenemos que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = c\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, por lo que $c = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})/(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})$, y por tanto

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}.$$

La longitud de \mathbf{p} es

$$\|\mathbf{p}\| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{a}\|^2} \|\mathbf{a}\| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{a}\|} = \|\mathbf{v}\| \cos \theta.$$

Proyección ortogonal La *proyección ortogonal* de \mathbf{v} sobre \mathbf{a} es el vector

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}.$$

Ejemplo 8

Solución

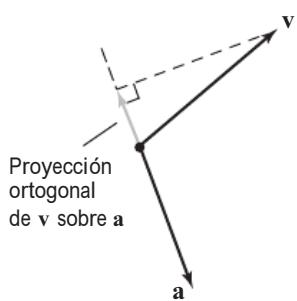


Figura 1.2.11 La proyección ortogonal de \mathbf{v} sobre \mathbf{a} es igual a $\mathbf{a} - \frac{1}{5}\mathbf{a}$.

Hallar la proyección ortogonal de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ on $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

Siendo $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, la proyección ortogonal de \mathbf{v} sobre \mathbf{a} es

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} = \frac{1-2}{1+4} (\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = -\frac{1}{5} (\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$$

(véase la Figura 1.2.11). ▲

Desigualdad triangular

Una aplicación útil de la desigualdad de Cauchy–Schwarz, conocida como *desigualdad triangular*, relaciona las longitudes de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} y su suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Geométricamente, la desigualdad triangular dice que la longitud de cualquier lado de un triángulo no es mayor que la suma de las longitudes de los otros dos lados (véase la Figura 1.2.12).

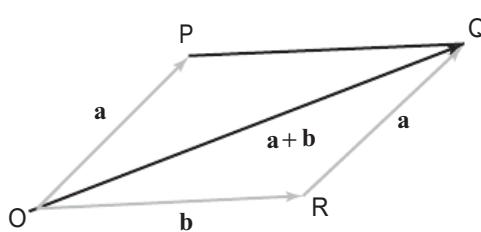


Figura 1.2.12 Esto ilustra que $\|OQ\| \leq \|OR\| + \|RQ\|$ o, utilizando notación vectorial, que $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$, que es la desigualdad triangular.

Teorema 2 Desigualdad triangular Para dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} cualesquiera en el espacio,

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|.$$

Demostración Aunque este resultado resulta claro geométricamente, es útil proporcionar una demostración utilizando la desigualdad de Cauchy–Schwarz, ya que la prueba se puede generalizar al caso de vectores n -dimensionales. Primero elevamos el lado izquierdo al cuadrado:

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2.$$

Usando la desigualdad de Cauchy–Schwarz, tenemos

$$\|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\|^2 = (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2.$$

Por tanto,

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 \leq (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2;$$

tomando la raíz cuadrada en ambos lados se obtiene el resultado. ■

Ejemplo 9

Solución

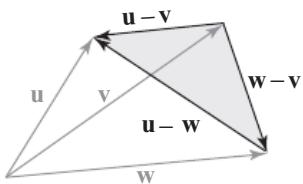


Figura 1.2.13 Ilustración de la desigualdad $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|$.

- (a) Verificar la desigualdad triangular para $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
- (b) Demostrar que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|$ para cualesquiera vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} . Ilustrarlo con un dibujo en el que \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} tengan el mismo origen.
- (a) Tenemos que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, por lo que $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$. Por otro lado, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2}$ y $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{6}$, así que la desigualdad triangular asegura que $\sqrt{14} \leq \sqrt{2} + \sqrt{6}$. Los números confirman esta afirmación: $\sqrt{14} \approx 3,74$, mientras que $\sqrt{2} + \sqrt{6} \approx 1,41 + 2,45 = 3,86$.
- (b) Sabemos que $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (\mathbf{u} - \mathbf{w}) + (\mathbf{w} - \mathbf{v})$, por lo que el resultado se sigue de la desigualdad triangular al reemplazar \mathbf{a} por $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ y \mathbf{b} por $\mathbf{w} - \mathbf{v}$. Geométricamente, estamos considerando el triángulo sombreado de la Figura 1.2.13. ▲

Aplicaciones de los vectores a la física

Un ejemplo sencillo de una magnitud física representada por un vector es un desplazamiento. Supongamos que en una parte de la superficie terrestre, suficientemente pequeña para poder considerarla plana, introducimos coordenadas de modo que el eje x apunte al este, el eje y apunte al norte y la unidad de longitud sea el kilómetro. Si nos encontramos en el punto P y deseamos ir al punto Q , el *vector desplazamiento* $\mathbf{d} = \overrightarrow{PQ}$ que une P con Q nos dice en qué sentido y qué distancia tenemos que recorrer. Si x e y son las componentes de este vector, el desplazamiento de P a Q es “ x kilómetros al este, y kilómetros al norte.”

Ejemplo 10

Supongamos que dos navegantes que no pueden verse entre sí, pero sí pueden comunicarse por radio, desean determinar la posición relativa de sus barcos. Explicar cómo pueden hacerlo si cada uno de ellos es capaz de determinar su vector desplazamiento con respecto al mismo faro.

Solución

Sean P_1 y P_2 las posiciones de los barcos y sea Q la posición del faro. El desplazamiento del faro con respecto al barco i -ésimo es el vector \mathbf{d}_i

que une P_i con Q . El desplazamiento del segundo barco con respecto al primero es el vector \mathbf{d} que une P_1 a P_2 . Tenemos que $\mathbf{d} + \mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_1$ (Figura 1.2.14), y por tanto $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2$. Es decir, el desplazamiento desde un barco al otro es la diferencia entre los desplazamientos desde los barcos al faro.

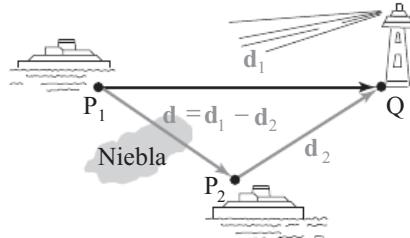


Figura 1.2.14 Se pueden emplear métodos vectoriales para situar objetos.▲

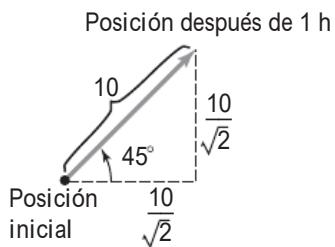


Figura 1.2.15 Si un objeto se mueve en dirección noreste a 10 km/h, su vector velocidad tiene componentes $(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2}) = 10(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, donde $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ es el vector unidad en la dirección noreste.

También podemos representar la velocidad de un objeto en movimiento mediante un vector. Por el momento, solo consideraremos objetos que se mueven con velocidad uniforme a lo largo de rectas. Por ejemplo, supongamos que un barco atraviesa un lago a 10 kilómetros por hora (km/h) en dirección noreste. Después de una hora de viaje, el desplazamiento es $(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2}) \approx (7,07, 7,07)$; véase la Figura 1.2.15.

El vector cuyas componentes son $(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2})$ es el *vector velocidad* del barco. En general, si un objeto se mueve uniformemente a lo largo de una recta, *su vector velocidad es el vector desplazamiento desde su posición en cualquier instante a su posición 1 unidad de tiempo posterior*. Si aparece una corriente en el lago, que se mueve hacia el este a 2 km/h, y el barco continúa en la dirección original con su motor a la misma potencia, su desplazamiento después de una hora tendrá como componentes $(10/\sqrt{2} + 2, 10/\sqrt{2})$; véase la Figura 1.2.16. Por tanto, el nuevo vector velocidad tendrá como componentes $(10/\sqrt{2} + 2, 10/\sqrt{2})$. Observe que este vector es la suma del vector velocidad original $(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2})$ del barco y el vector velocidad $(2, 0)$ de la corriente.

Desplazamiento y velocidad Si un objeto tiene un vector velocidad (constante) \mathbf{v} , entonces en t unidades de tiempo, el vector desplazamiento resultante del objeto es $\mathbf{d} = t\mathbf{v}$; por tanto, después de $t = 1$, el vector desplazamiento es igual al vector velocidad. Véase la Figura 1.2.17.

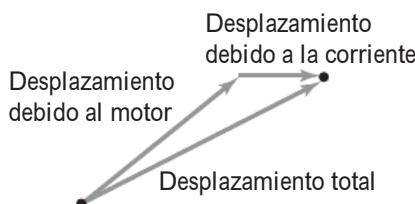


Figura 1.2.16 El desplazamiento total es la suma de los desplazamientos debidos al motor y a la corriente.

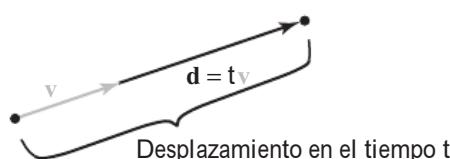


Figura 1.2.17
Desplazamiento = tiempo × velocidad.

Ejemplo 11

Un pájaro vuela en línea recta con un vector velocidad $10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (en kilómetros por hora). Supongamos que (x, y) son sus coordenadas en el suelo y z es su altura.

- Si el pájaro se encuentra en la posición $(1, 2, 3)$ en un determinado instante, ¿cuál será su posición una hora más tarde? ¿Y un minuto más tarde?
- ¿Cuántos segundos tarda el pájaro en ascender 10 metros?

Solución

- El vector desplazamiento desde $(1, 2, 3)$ después de una hora está dado por $10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$, por lo que la nueva posición es $(1, 2, 3) + (10, 6, 1) = (11, 8, 4)$. Después de un minuto, el vector desplazamiento desde $(1, 2, 3)$ es $\frac{1}{60}(10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \frac{1}{6}\mathbf{i} + \frac{1}{10}\mathbf{j} + \frac{1}{60}\mathbf{k}$, y así la nueva posición es $(1, 2, 3) + (\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{60}) = (\frac{7}{6}, \frac{21}{10}, \frac{181}{60})$.
- Después de t segundos ($= t/3600$ horas), el vector desplazamiento desde $(1, 2, 3)$ es $(t/3600)(10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}) = (t/360)\mathbf{i} + (t/600)\mathbf{j} + (t/3600)\mathbf{k}$. El incremento en altura es la componente z , es decir, $t/3600$. Esto será igual a 10 m ($= \frac{1}{100}$ km) cuando $t/3600 = \frac{1}{100}$, es decir, cuando $t = 36$ s. ▲

Ejemplo 12

En física, las fuerzas tienen tamaño (módulo), dirección y sentido, y se pueden por tanto representar mediante vectores. Si varias fuerzas actúan a la vez sobre un objeto, la fuerza resultante se representa mediante la suma de los vectores fuerza individuales. Supongamos que las fuerzas $\mathbf{i} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ están actuando sobre un cuerpo. ¿Qué tercera fuerza \mathbf{F} tenemos que aplicar para contrarrestar a las otras dos, es decir, para conseguir que la fuerza total sea igual a cero?

Solución

La fuerza \mathbf{F} se debe elegir de modo que $(\mathbf{i} + \mathbf{k}) + (\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \mathbf{F} = \mathbf{0}$; es decir, $\mathbf{F} = -(\mathbf{i} + \mathbf{k}) - (\mathbf{j} + \mathbf{k}) = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. (Recordemos que $\mathbf{0}$ es el vector cero, el vector cuya componentes son todas cero.) ▲

Ejercicios

- Calcular $(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$.
- Calcular $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, donde $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.
- Determinar el ángulo entre $7\mathbf{j} + 19\mathbf{k}$ y $-2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ (aproximado al grado más cercano).
- Calcular $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} = \sqrt{3}\mathbf{i} - 315\mathbf{j} + 22\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$.
- ¿Es $\|8\mathbf{i} - 12\mathbf{k}\| \cdot \|6\mathbf{j} + \mathbf{k}\| - |(8\mathbf{i} - 12\mathbf{k}) \cdot (6\mathbf{j} + \mathbf{k})|$ igual a cero? Explicar la respuesta.

En los Ejercicios 6 a 11, calcular $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ para los vectores de \mathbb{R}^3 dados.

- $\mathbf{u} = 15\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \pi\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
- $\mathbf{u} = 2\mathbf{j} - \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{j} + \mathbf{i}$
- $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
- $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
- $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{j}$
- $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

- 12.** Sea $\mathbf{v} = (2, 3)$. Supóngase que $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ es perpendicular a \mathbf{v} y que $\|\mathbf{w}\| = 5$. Esto determina \mathbf{w} salvo el signo. Hallar un tal \mathbf{w} .
- 13.** Hallar b y c de modo que $(5, b, c)$ sea ortogonal a $(1, 2, 3)$ y a $(1, -2, 1)$.
- 14.** Sean $\mathbf{v}_1 = (0, 3, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 3)$. Estos tres vectores que parten del origen determinan el paralelepípedo P .
- Dibujar P .
 - Determinar la longitud de la diagonal principal (desde el origen a su vértice opuesto).
- 15.** ¿Cuál es la relación geométrica entre los vectores \mathbf{v} y \mathbf{w} si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|?$
- 16.** Normalizar los vectores de los Ejercicios 6 a 8.
- 17.** Hallar el ángulo que forman los vectores de los Ejercicios 9 a 11. Si es necesario, se puede expresar la respuesta en función de \cos^{-1} .
- 18.** Determinar todos los valores de x tales que $(x, 1, x)$ y $(x, -6, 1)$ son ortogonales.
- 19.** Determinar todos los valores de x tales que $(7, x, -10)$ y $(3, x, x)$ son ortogonales.
- 20.** Hallar la proyección de $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ sobre $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.
- 21.** Hallar la proyección de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ sobre $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
- 22.** ¿Qué restricciones deben establecerse para el escalar b para que el vector $2\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ sea ortogonal a
(a) $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y (b) \mathbf{k} ?
- 23.** Los vectores \mathbf{v} y \mathbf{w} son los lados de un triángulo equilátero cuya longitud es 1. Calcular $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.
- 24.** Sea $\mathbf{b} = (3, 1, 1)$ y P el plano que pasa por el origen dado por $x + y + 2z = 0$.
- Hallar una base ortogonal para P . Es decir, determinar dos vectores ortogonales no nulos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in P$.
 - Hallar la proyección ortogonal de \mathbf{b} sobre P .
- 25.** Hallar dos vectores no paralelos que sean ortogonales a $(1, 1, 1)$.
- 26.** Hallar la recta que pasa por $(3, 1, -2)$ y que interseca y es perpendicular a la recta $x = -1 + t$, $y = -2 + t$, $z = -1 + t$. [SUGERENCIA: Si (x_0, y_0, z_0) es el punto de intersección, hallar sus coordenadas.]
- 27.** Usando el producto escalar, demostrar el teorema inverso del teorema de Pitágoras. Es decir, demostrar que si las longitudes de los lados de un triángulo satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.
- 28.** Para el vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, sean α, β, γ los ángulos entre \mathbf{v} y los ejes x, y y z , respectivamente. Demostrar que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.
- 29.** Un barco se encuentra en la posición $(1, 0)$ en una carta náutica (que tiene el norte en la dirección positiva del eje y) y avista una roca en la posición $(2, 4)$. ¿Cuál es el vector que une el barco a la roca? ¿Qué ángulo θ forma este vector con la dirección norte? (A este ángulo se le denomina *orientación* de la roca desde el barco.)
- 30.** Supóngase que el barco del Ejercicio 29 navega con rumbo norte a una velocidad de 4 nudos respecto del agua. Hay una corriente que fluye en dirección este con una velocidad de 1 nudo. Las unidades de la carta son millas náuticas; 1 nudo = 1 milla náutica por hora.
- Si no hubiera corriente, ¿qué vector \mathbf{u} representaría la velocidad del barco con respecto al fondo del mar?
 - Si el barco se dejara llevar por la corriente, ¿qué vector \mathbf{v} representaría su velocidad con respecto al fondo del mar?
 - ¿Qué vector \mathbf{w} representa la velocidad total del barco?
 - ¿Dónde se encontrará el barco una 1 hora después?
 - ¿Debería el capitán cambiar el rumbo del barco?
 - ¿Y si la roca fuera un iceberg?
- 31.** Un avión se encuentra en la posición $(3, 4, 5)$ al mediodía y viaja con una velocidad de $400\mathbf{i} + 500\mathbf{j} - \mathbf{k}$ kilómetros por hora. El piloto avista un aeropuerto en la posición $(23, 29, 0)$.
- ¿A qué hora pasará el avión sobre el aeropuerto? (Suponga que la tierra es plana y que el vector \mathbf{k} apunta hacia arriba.)
 - ¿A qué altura se encontrará el avión cuando pase sobre el aeropuerto?

- 32.** La velocidad del viento \mathbf{v}_1 es de 40 millas por hora (mi/h) de este a oeste mientras que un avión viaja con una velocidad respecto del aire \mathbf{v}_2 de 100 mi/h en dirección norte. La velocidad del avión con respecto al suelo es el vector suma $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.
- Hallar $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.
 - Hacer un dibujo a escala.
- 33.** Una fuerza de 50 kp forma un ángulo de 50° con el eje horizontal y apunta hacia la derecha. Determinar sus componentes horizontal y vertical. Mostrar todos los resultados en una figura.
- 34.** Dos personas tiran en horizontal de dos cuerdas atadas a un poste, el ángulo entre las cuerdas es de 60° . La persona A tira con una fuerza de 150 kp y la persona B tira con una fuerza de 110 kp.
- La fuerza resultante es el vector suma de las dos fuerzas. Hacer un dibujo a escala que represente gráficamente las tres fuerzas.
 - Usando trigonometría, determinar las fórmulas de los vectores de las dos fuerzas en un sistema de coordenadas elegido convenientemente. Hacer la suma algebraica y determinar el ángulo que forma la fuerza resultante con la fuerza ejercida por A.
- 35.** Una masa de 1-kilogramo (1-kg) situada en el origen cuelga de dos cuerdas fijadas en los puntos $(1, 1, 1)$ y $(-1, -1, 1)$. Si la fuerza de la gravedad apunta en la dirección del vector $-\mathbf{k}$, ¿cuál es el vector que describe la fuerza a lo largo de cada cuerda? [SUGERENCIA: utilizar la simetría del problema. Una masa de 1-kg pesa 9.8 newtons (N).]
- 36.** Supóngase que sobre un objeto que se mueve en la dirección $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ se ejerce una fuerza dada por el vector $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Expresar esta fuerza como la suma de una fuerza en la dirección del movimiento y una fuerza perpendicular a la dirección del movimiento.
- 37.** Una fuerza de 6 N forma un ángulo de $\pi/4$ radianes con el eje y , y apunta hacia la derecha. La fuerza actúa en contra del movimiento de un objeto que se mueve a lo largo de la recta que une $(1, 2)$ con $(5, 4)$.
- Hallar una fórmula para el vector \mathbf{F} .
 - Hallar el ángulo θ que forman la dirección de desplazamiento $\mathbf{D} = (5 - 1)\mathbf{i} + (4 - 2)\mathbf{j}$ y la dirección de \mathbf{F} .
 - El *trabajo realizado* es $\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$, o, equivalentemente, $\|\mathbf{F}\| \|\mathbf{D}\| \cos \theta$. Calcular el trabajo usando ambas fórmulas y compararlo.
- 38.** Demostrar que en cualquier paralelogramo la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de las dos diagonales.
- 39.** Utilizando vectores, demostrar que las diagonales de un rectángulo son perpendiculares si y solo si el rectángulo es un cuadrado.

1.3 Matrices, determinantes y el producto vectorial

En la Sección 1.2 hemos definido un producto de vectores que era un escalar. En esta sección, definiremos un producto de vectores que es un vector; es decir, veremos cómo, dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , podemos obtener un tercer vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, llamado *producto vectorial* de \mathbf{a} por \mathbf{b} . Este nuevo vector tendrá la importante propiedad geométrica de que es perpendicular al plano generado (determinado) por \mathbf{a} y \mathbf{b} . La definición del producto vectorial se basa en los conceptos de matriz y determinante, los cuales vamos a desarrollar en primer lugar. Después estudiaremos las implicaciones geométricas de la estructura matemática construida.

Matrices 2×2

Definimos una *matriz* 2×2 como una tabla u ordenación (*array*)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son cuatro escalares. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$$

son matrices 2×2 . El **determinante**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

de dicha matriz es el número real definido por la ecuación

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1)$$

Ejemplo 1 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2; \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 42 = -2$ ▲

Matrices 3×3

Una matriz 3×3 **matriz** es una ordenación

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

donde, de nuevo, cada a_{ij} es un escalar; a_{ij} denota el elemento de la matriz que está en la fila i -ésima y la columna j -ésima. Definimos el **determinante** de una matriz 3×3 mediante la regla

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Sería difícil memorizar la Fórmula (2) sin algún recurso mnemotécnico. La regla que hay que aprender es que recorremos la primera fila multiplicando a_{1j} por el determinante de la matriz 2×2 obtenida al eliminar la primera fila y la j -ésima columna, y después sumamos todo, recordando poner un signo menos delante del término a_{12} . Por ejemplo, el determinante que hay que multiplicar en el segundo término de la Fórmula (2),

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

se obtiene tachando la primera fila y la segunda columna de la matriz 3×3 dada:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0$$

**Propiedades de los determinantes**

Una propiedad importante de los determinantes es que el intercambio de dos filas o de dos columnas da lugar a un cambio de signo. Para determinantes 2×2 , esto es consecuencia de la definición; en el caso de las filas, tenemos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = -(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

y para las columnas,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

Dejamos que el lector compruebe esta propiedad para el caso 3×3 .

Una segunda propiedad fundamental de los determinantes es que podemos sacar como factor común escalares de cualquier fila o columna. Para determinantes 2×2 , esto significa

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix}.$$

De forma similar, para determinantes 3×3 tenemos

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

y así sucesivamente. Estos resultados se deducen de las definiciones. En particular, si cualquier fila o columna contiene únicamente ceros, el valor del determinante es cero.

Un tercer hecho fundamental acerca de los determinantes es el siguiente: *si cambiamos una fila (o columna) sumándole otra fila (o, respectivamente, otra columna) el valor del determinante no cambia*. Para el caso 2×2 , esto significa que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + a_1 & b_2 + a_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 \\ b_1 + b_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 + a_2 \\ b_1 & b_1 + b_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Para el caso 3×3 , esto significa

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 + b_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 + c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

y así sucesivamente. De nuevo, esta propiedad se puede probar utilizando la definición de determinante.

Ejemplo 3

Supongamos que $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}$; es decir,

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = \alpha(b_1, b_2, b_3) + \beta(c_1, c_2, c_3).$$

Demostrar que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Solución

Vamos a demostrar el caso para $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$. El caso en que $\alpha = 0 = \beta$ es trivial, y el caso en que exactamente uno de α, β sea cero es una simple modificación del caso que probamos. Utilizando las propiedades fundamentales de los determinantes, el determinante en cuestión es

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{\alpha} \begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ &\quad \text{(sacando el factor } -1/\alpha \text{ de la segunda fila)} \\ &= \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \left(-\frac{1}{\beta}\right) \begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix} \\ &\quad \text{(sacando el factor } -1/\beta \text{ de la tercera fila)} \\ &= \frac{1}{\alpha\beta} \begin{vmatrix} \beta c_1 & \beta c_2 & \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix} \\ &\quad \text{(sumando la segunda fila a la primera)} \\ &= \frac{1}{\alpha\beta} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix} \\ &\quad \text{(sumando la tercera fila a la primera)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Estrechamente relacionado con estas propiedades está el hecho de que *podemos desarrollar un determinante 3×3 recorriendo cualquier fila o columna* usando los signos indicados en el siguiente patrón:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Por ejemplo, el lector puede comprobar que podemos desarrollar “por menores” recorriendo la fila central:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Volvamos a calcular el segundo determinante del Ejemplo 2 usando esta fórmula:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (-4)(-6) + (5)(12) + (-6)(6) = 0.$$

Los determinantes parecen haber sido inventados y utilizados por primera vez por Leibniz en 1693, en relación con las soluciones de ecuaciones lineales. Maclaurin y Cramer desarrollaron sus propiedades entre 1729 y 1750; en particular, probaron que la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

es

$$x_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

lo que se conoce como *regla de Cramer*. Aunque este método es bastante ineficaz desde el punto de vista numérico, es muy importante en la teoría de matrices. Más tarde, Vandermonde (1772) y Cauchy (1812), trabajando con determinantes como un tema separado al que merecía la pena prestar una atención especial, desarrollaron este campo de forma más sistemática, con contribuciones de Laplace, Jacobi y otros. Las fórmulas para volúmenes de paralelepípedos utilizando determinantes se deben a Lagrange (1775). Las estudiaremos más adelante en esta sección. Aunque durante el

Nota histórica

siglo XIX, los matemáticos estudiaron las matrices y determinantes, ambos temas se consideraron como disciplinas distintas. Para conocer toda la historia hasta 1900, consulte T. Muir, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* (reimpreso por Dover, Nueva York, 1960).

Producto vectorial

Una vez establecidas las propiedades necesarias de los determinantes y expuesta su historia, estamos preparados para estudiar el producto vectorial.

Definición Producto vectorial Supongamos que $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ son vectores en \mathbb{R}^3 . El **producto vectorial** o **producto cruz** de \mathbf{a} y \mathbf{b} , denotado por $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, se define como el vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k},$$

o, formalmente,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Aunque únicamente hemos definido los determinantes para matrices de números *reales*, esta expresión formal que incluye *vectores* es una buena ayuda para recordar el producto vectorial.

Ejemplo 4

Hallar $(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

Solución

$$(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$



Algunas propiedades algebraicas del producto vectorial se deducen de la definición. Si \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son vectores y α , β y γ son escalares, entonces

$$(i) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

$$(ii) \quad \mathbf{a} \times (\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \beta(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \text{ y } (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

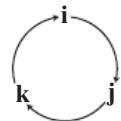
Observe que $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{a})$, por la propiedad (i). Por tanto, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. En particular,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

También,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$$

lo que podemos recordar permutando cíclicamente $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ de este modo:



Para proporcionar una interpretación geométrica del producto vectorial, en primer lugar vamos a ver el producto mixto. Dados tres vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} y \mathbf{c} , el número real

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

se denomina **producto mixto** de \mathbf{a}, \mathbf{b} y \mathbf{c} (en este orden). Para obtener una fórmula para él, sean $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. Entonces

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \cdot (c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3. \end{aligned}$$

Este es el desarrollo por menores de la tercera fila del determinante, de modo que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Si \mathbf{c} es un vector del plano generado por los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , entonces la tercera fila del determinante, que expresa $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ es una combinación lineal de la primera y segunda filas, y por tanto $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$. En otras palabras, *el vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a cualquier vector del plano generado por \mathbf{a} y \mathbf{b} , y en particular a ambos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b}* .

A continuación, calculamos la longitud de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Observe que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - b_1 a_3)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2. \end{aligned}$$

Si desarrollamos los términos de la última expresión, podemos agruparlos para obtener

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2,$$

que es igual a

$$\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \cos^2 \theta = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \sin^2 \theta,$$

donde θ es el ángulo que forman \mathbf{a} y \mathbf{b} , $0 \leq \theta \leq \pi$. Sacando raíces cuadradas y sabiendo que $\sqrt{k^2} = |k|$, obtenemos que $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$.

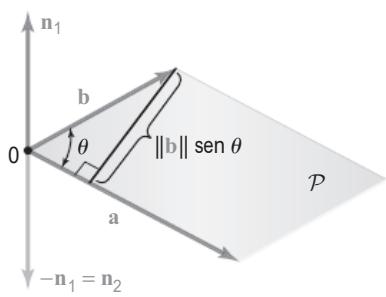


Figura 1.3.1 n_1 y n_2 son los dos posibles vectores ortogonales a a y b , que tienen norma $\|a\| \|b\| |\sin \theta|$.

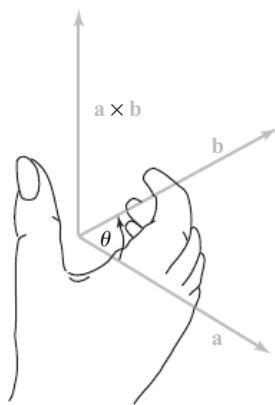


Figura 1.3.2 La regla de la mano derecha para determinar en cuál de las dos posibles direcciones apunta $a \times b$.

Combinando estos resultados, concluimos que $a \times b$ es un *vector perpendicular al plano P generado por a y b y de longitud $\|a\| \|b\| \sin \theta$* . En la Figura 1.3.1 vemos que esta longitud es también el área del paralelogramo (con base $\|a\|$ y altura $\|b\| \sin \theta$) generado por a y b . Existen dos posibles vectores que satisfacen estas condiciones, ya que se pueden elegir dos direcciones perpendiculares (o normales) a P . Esto se ve claramente en la Figura 1.3.1, que muestra las dos posibilidades n_1 y $-n_1$ perpendiculares a P , con $\|n_1\| = \|-n_1\| = \|a\| \|b\| |\sin \theta|$.

¿Qué vector representa $a \times b$, n_1 o $-n_1$? La respuesta es n_1 . Pruebe a calcular algunos casos como $k = i \times j$ para comprobarlo. La siguiente “regla de la mano derecha” determina la dirección de $a \times b$ en general. La *mano derecha* se coloca de tal modo que los dedos se curven de a hacia b a través del ángulo *agudo* θ que forman ambos, como se muestra en la Figura 1.3.2. Entonces el dedo pulgar apunta en la dirección de $a \times b$.

Producto vectorial Definición geométrica: $a \times b$ es el vector tal que:

- (1) $\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \theta$, el área del paralelogramo generado por a y b (θ es el ángulo que forman a y b ; $0 \leq \theta \leq \pi$); véase la Figura 1.3.3.
- (2) $a \times b$ es perpendicular a a y b , y la terna $(a, b, a \times b)$ satisface la regla de la mano derecha.

Fórmula con componentes:

$$(a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i - (a_1 b_3 - a_3 b_1) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k.$$

Reglas algebraicas:

1. $a \times b = \mathbf{0}$ si y solo si a y b son paralelos o si a o b es cero.
2. $a \times b = -b \times a$.
3. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.
4. $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.
5. $(\alpha a) \times b = \alpha(a \times b)$.

Tabla de multiplicación:

		Segundo factor		
		i	j	k
Primer factor	x	0	k	-j
	i	-k	0	i
	j	j	-i	0

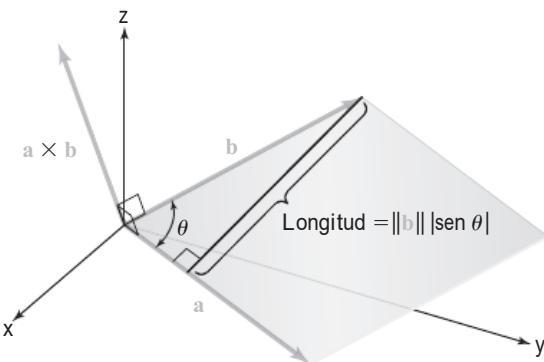


Figura 1.3.3 La longitud de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es el área del paralelogramo formado por \mathbf{a} y \mathbf{b} .

Ejemplo 5

Hallar el área del paralelogramo generado por los dos vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

Solución

Calculamos el producto vectorial de \mathbf{a} y \mathbf{b} aplicando la fórmula de las componentes o fórmula del determinante, con $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $b_1 = -1$, $b_2 = 0$, $b_3 = -1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= [(2)(-1) - (3)(0)]\mathbf{i} + [(3)(-1) - (1)(-1)]\mathbf{j} + [(1)(0) - (2)(-1)]\mathbf{k} \\ &= -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Por tanto, el área es

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{3}. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 6

Hallar un vector unitario ortogonal a los vectores $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución

Un vector perpendicular a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ es su producto vectorial, esto es, el vector

$$(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Como $\|\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}\| = \sqrt{3}$, el vector

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

es un vector unitario perpendicular a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} + \mathbf{k}$. ▲

Ejemplo 7

Deducir una identidad que relacione los productos escalar y vectorial a partir de las fórmulas

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta \quad \text{y} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

eliminando θ .

Solución

Vemos que $\sin \theta$ y $\cos \theta$ están multiplicados por la misma expresión, lo que sugiere que podemos elevar al cuadrado ambas fórmulas y después sumar los resultados. Obtenemos

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2,$$

por lo que

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2.$$

Esta identidad es interesante porque establece una relación entre los productos escalar y vectorial ▲

Geometría de los determinantes

Usando el producto vectorial, podemos obtener una interpretación geométrica de los determinantes 2×2 y 3×3 . Sean $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ dos vectores en el plano. Si θ es el ángulo que forman \mathbf{a} y \mathbf{b} , hemos visto que $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| |\sin \theta|$ es el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son \mathbf{a} y \mathbf{b} . El producto vectorial expresado como determinante es

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Por tanto, el área $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ es el valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Geometría de los determinantes 2×2 El valor absoluto del determinante $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ es el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. El signo del determinante es $+$ cuando el ángulo que forman \mathbf{a} y \mathbf{b} , al girar en sentido antihorario, es menor que π .

Ejemplo 8

Hallar el área del triángulo con vértices en los puntos $(1,1)$, $(0, 2)$ y $(3, 2)$ (véase la Figura 1.3.4).

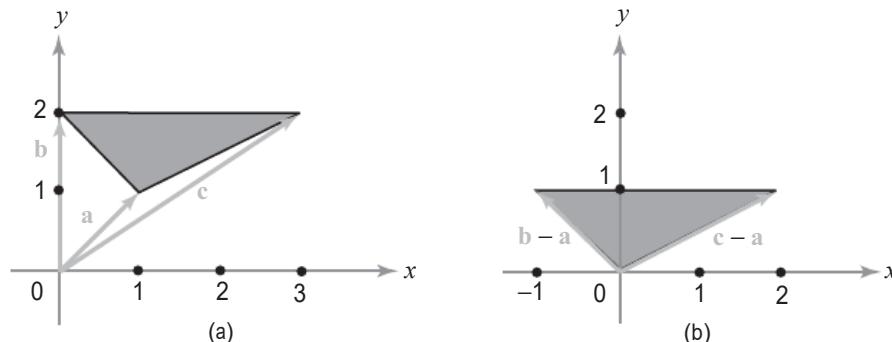


Figura 1.3.4 (a) Hallar el área A del triángulo sombreado expresando los lados como diferencias de vectores (b) para obtener $A = \|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})\|/2$.

Solución

Sean $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Está claro que el triángulo cuyos vértices son los extremos de los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} tiene el mismo área que el triángulo con vértices en $\mathbf{0}$, $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ y $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ (Figura 1.3.4). De hecho, este último es simplemente una traslación del primer triángulo. Puesto que el área del triángulo trasladado es la mitad del área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son $\mathbf{b} - \mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{c} - \mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, tenemos que el área del triángulo con vértices en $(1, 1)$, $(0, 2)$ y $(3, 2)$ es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2},$$

es decir, $3/2$.



Existe una interpretación de los determinantes de matrices 3×3 como volúmenes que es análoga a la interpretación de los determinantes de matrices 2×2 como áreas.

Geometría de los determinantes 3×3 El valor absoluto del determinante

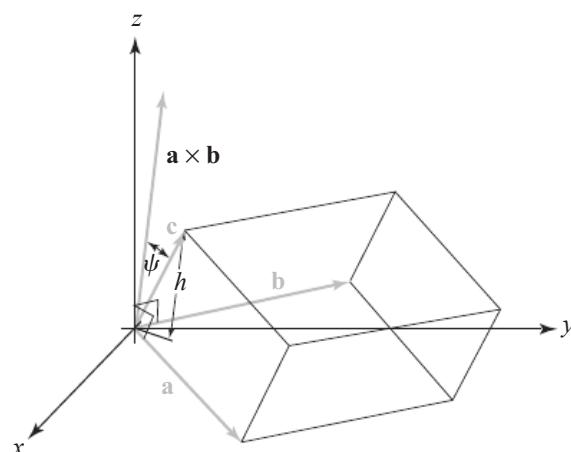
$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

es el volumen del paralelepípedo cuyos lados adyacentes son los vectores

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}.$$

Para probar la afirmación del recuadro anterior, vamos a fijarnos en la Figura 1.3.5. Así, vemos que la longitud del producto vectorial, a saber, $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$, es el área del paralelogramo con lados adyacentes \mathbf{a} y \mathbf{b} . Además, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\| \cos \psi$, donde ψ es el ángulo que forma \mathbf{c} con la normal al plano generado por \mathbf{a} y \mathbf{b} . Puesto que el volumen

Figura 1.3.5 El volumen del paralelepípedo generado por \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} es el valor absoluto del determinante de la matriz 3×3 cuyas filas son \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} .



del paralelepípedo cuyos lados adyacentes son \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} es el producto del área de la base $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ por la altura $\|\mathbf{c}\| |\cos \psi|$, se deduce que el volumen es $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$. Anteriormente, vimos que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = D$, por lo que el volumen es igual al valor absoluto de D .

Ejemplo 9

Solución

Determinar el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $5\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.

El volumen es el valor absoluto de

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Si desarrollamos este determinante por menores con respecto a la segunda columna, el único término distinto de cero es

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}(1) = -11,$$

de modo que el volumen es igual a 11. ▲

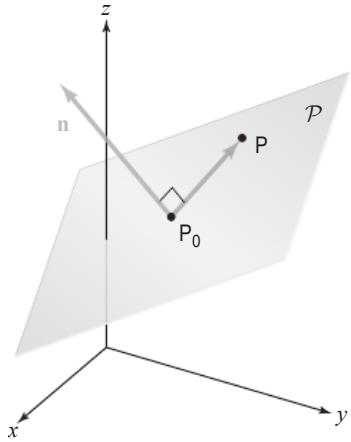


Figura 1.3.6 Los puntos P del plano que pasa por P_0 y es perpendicular a n satisfacen la ecuación $\overrightarrow{P_0P} \cdot n = 0$.

Ecuación de un plano

Sea \mathcal{P} un plano en el espacio, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto en dicho plano y supongamos que $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es un vector normal a dicho plano (véase la Figura 1.3.6). Sea $P = (x, y, z)$ un punto en \mathbb{R}^3 . Entonces P está en el plano \mathcal{P} si y solo si el vector $\overrightarrow{P_0P} = (x-x_0)\mathbf{i} + (y-y_0)\mathbf{j} + (z-z_0)\mathbf{k}$ es perpendicular a \mathbf{n} , es decir, $\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0$, o, lo que es equivalente a,

$$(A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) \cdot [(x-x_0)\mathbf{i} + (y-y_0)\mathbf{j} + (z-z_0)\mathbf{k}] = 0.$$

Por tanto,

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

Ecuación de un plano en el espacio La ecuación del plano \mathcal{P} que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y tiene por vector normal $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0;$$

es decir, $(x, y, z) \in \mathcal{P}$ si y solo si

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

donde $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Los cuatro números A, B, C y D no están determinados de forma unívoca por el plano \mathcal{P} . Para ver esto, observe que (x, y, z) satisface la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ si y solo si también satisface la relación

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y + (\lambda C)z + (\lambda D) = 0$$

para cualquier constante $\lambda \neq 0$. Además, si A, B, C, D y A', B', C', D' determinan el mismo plano \mathcal{P} , entonces $A = \lambda A', B = \lambda B', C = \lambda C', D = \lambda D'$ para un escalar λ . En consecuencia, A, B, C, D están **determinados por \mathcal{P} salvo un múltiplo escalar**.

Ejemplo 10

Determinar una ecuación para el plano que es perpendicular al vector $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y contiene el punto $(1, 0, 0)$.

Solución

Usando la forma general $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, el plano es $1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0$; esto es, $x + y + z = 1$. \blacktriangle

Ejemplo 11

Hallar una ecuación para el plano que contiene estos tres puntos: $(1, 1, 1)$, $(2, 0, 0)$ y $(1, 1, 0)$.

Solución

Método 1. Este es un método de “fuerza bruta” que se puede utilizar cuando se han olvidado los métodos vectoriales. La ecuación de cualquier plano es de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$. Como los puntos $(1, 1, 1)$, $(2, 0, 0)$ y $(1, 1, 0)$ están en el plano, tenemos que

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 0, \\ 2A &\quad + D = 0, \\ A + B &\quad + D = 0. \end{aligned}$$

Por eliminación, reducimos este sistema de ecuaciones a

$$\begin{aligned} 2A + D &= 0 \quad (\text{segunda ecuación}) \\ 2B + D &= 0 \quad (2 \times \text{tercera} - \text{segunda}), \\ C &= 0 \quad (\text{primera} - \text{tercera}). \end{aligned}$$

Puesto que los números A, B, C y D están determinados salvo por un múltiplo escalar, podemos fijar el valor de uno de ellos, por ejemplo, $A = 1$, y entonces los otros quedarán determinados de manera única. Obtenemos $A = 1$, $D = -2$, $B = 1$, $C = 0$. Así, una ecuación del plano que contiene a los puntos dados es $x + y - 2 = 0$.

Método 2. Sean $P = (1, 1, 1)$, $Q = (2, 0, 0)$, $R = (1, 1, 0)$. Cualquier vector normal al plano ha de ser ortogonal a los vectores \vec{QP} y \vec{RP} , que son paralelos al plano, ya que sus extremos se encuentran en el plano. Por tanto, $\mathbf{n} = \vec{QP} \times \vec{RP}$ es normal al plano. Calculando el producto vectorial, tenemos

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Como el punto $(2, 0, 0)$ está en el plano, concluimos que la ecuación viene dada por $(x - 2) + (y - 0) + 0 \cdot (z - 0) = 0$; es decir, $x + y - 2 = 0$. \blacktriangle

Dos planos se llaman **paralelos** cuando sus vectores normales son paralelos. Así, los planos $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z +$

$D_2 = 0$ son paralelos cuando $\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{i} + B_1\mathbf{j} + C_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + C_2\mathbf{k}$ son paralelos; es decir, $\mathbf{n}_1 = \sigma\mathbf{n}_2$ para una constante σ . Por ejemplo, los planos

$$x - 2y + z = 0 \quad \text{y} \quad -2x + 4y - 2z = 10$$

son paralelos, pero los planos

$$x - 2y + z = 0 \quad \text{y} \quad 2x - 2y + z = 10$$

no son paralelos.

Distancia de un punto a un plano

Ahora vamos a calcular la distancia de un punto $E = (x_1, y_1, z_1)$ al plano \mathcal{P} descrito por la ecuación $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = Ax + By + Cz + D = 0$. Para ello, consideramos el vector normal unitario

$$\mathbf{n} = \frac{A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

que es un vector normal al plano. Trazamos una perpendicular desde E al plano y construimos el triángulo REQ mostrado en la Figura 1.3.7. La distancia $d = \|\overrightarrow{EQ}\|$ es la longitud de la proyección de $\mathbf{v} = \overrightarrow{RE}$ (el vector de R a E) sobre \mathbf{n} ; por tanto,

$$\begin{aligned} \text{Distancia} &= |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| = |[(x_1 - x_0)\mathbf{i} + (y_1 - y_0)\mathbf{j} + (z_1 - z_0)\mathbf{k}] \cdot \mathbf{n}| \\ &= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

Si el plano viene dado de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$, entonces para cualquier punto (x_0, y_0, z_0) que esté en él, $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Sustituyendo en la fórmula anterior se tiene lo siguiente:

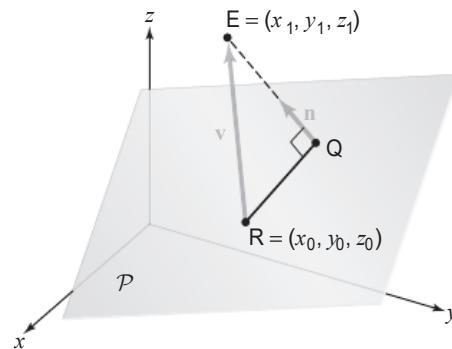


Figura 1.3.7 Geometría para determinar la distancia desde el punto E al plano \mathcal{P} .

Distancia de un punto a un plano La distancia desde (x_1, y_1, z_1) al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ es

$$\text{Distancia} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ejemplo 12

Hallar la distancia desde $Q = (2, 0, -1)$ al plano $3x - 2y + 8z + 1 = 0$.

Solución

Sustituimos en la fórmula del recuadro anterior los valores $x_1 = 2$, $y_1 = 0$, $z_1 = -1$ (el punto) y $A = 3$, $B = -2$, $C = 8$, $D = 1$ (el plano) para obtener

$$\text{Distancia} = \frac{|3 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 8(-1) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 8^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{77}} = \frac{1}{\sqrt{77}}.$$



Los orígenes de los productos escalar y vectorial

ECUACIONES CUADRÁTICAS, ECUACIONES CÚBICAS Y NÚMEROS IMAGINARIOS.

Sabemos por las tablillas de arcilla de los babilonios que esta extraordinaria civilización conocía la fórmula cuadrática, que les permitía resolver (verbalmente) las ecuaciones de segundo grado. Dado que el concepto de número negativo tuvo que esperar hasta el siglo XVI para ver la luz, los babilonios no tenían en cuenta soluciones negativas (o imaginarias).

Con el Renacimiento y el redescubrimiento de la ciencia antigua, los matemáticos italianos comenzaron a preguntarse acerca de las soluciones de las ecuaciones cúbicas, $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, donde a , b y c son números positivos.

Hacia el año 1500, Scipione del Ferro, profesor en Bolonia (la universidad europea más antigua), fue capaz de resolver ecuaciones cúbicas de la forma $x^3 + bx = c$, pero mantuvo su descubrimiento en secreto. Antes de morir, pasó su fórmula a su sucesor, Antonio Fior, quien durante un tiempo también la guardó para sí. Y continuó siendo un secreto hasta que un brillante y autodidacta matemático llamado Nicolo Fontana, también conocido como Tartaglia (el tartamudo), apareció en escena. Tartaglia proclamó que podía resolver la cónica y Fior se vio en la necesidad de proteger la primacía de del Ferro, por lo que en respuesta desafió a Tartaglia a una competición pública.

Tartaglia fue capaz de resolver las treintas ecuaciones cúbicas que Fior le planteó. Sorprendentemente, algunos estudiosos creen que Tartaglia descubrió la fórmula para las soluciones de $x^3 + cx = d$ solo unos días antes de que el concurso tuviera lugar.

El matemático más grande del siglo dieciséis, Gerolamo Cardano (1501–1576)—un sabio renacentista, matemático, físico y adivino—publicó la primera solución de la ecuación general de la cónica. Aunque de orígenes humildes, alcanzó gran fama (como Tartaglia) gracias al esfuerzo y a su talento natural. Cardano es el autor del primer libro sobre juegos de azar (marcando el comienzo de la moderna teoría de la probabilidad) y también del *Ars Magna* (el Gran Arte), que señala el comienzo del álgebra moderna. Fue en este libro donde Cardano publicó la solución *general* de la cónica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. ¿Cómo lo consiguió?

Nota histórica

Mientras trabajaba en su libro sobre álgebra y siendo consciente de que Tartaglia era capaz de resolver algunas formas de la cúbica, Cardano, en 1539, escribió a Tartaglia pidiéndole reunirse con él. Después de engatusarle, Tartaglia aceptó. Fue en esa reunión cuando a cambio de la promesa de mantenerla en secreto (y ya sabemos como suelen funcionar estas cosas), Tartaglia reveló su solución, a partir de la cual Cardano fue capaz de deducir una solución para la ecuación general, la cual apareció en el *Ars Magna*. Sintiéndose traicionado, Tartaglia dirigió un feroz ataque contra Cardano, que terminó en una pequeña comedia.

Pero ahora, lo importante para nosotros es que como consecuencia del método empleado en la solución, algo muy extraño ocurría. Consideremos la ecuación cúbica $x^3 - 15x = 4$. Su única raíz positiva es 4. Sin embargo, la fórmula de la solución de Tartaglia–Cardano da

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \quad (3)$$

como la raíz positiva. Por tanto, este número tiene que ser igual a 4. Pero esto es *absurdo*, porque dentro de la raíz cúbica estamos tomando la raíz cuadrada de un número negativo—algo que en aquella época era completamente imposible. Esto fue una verdadera sorpresa. Más de cien años después, en 1702, cuando Leibniz, codescubridor del cálculo, mostró al gran científico holandés Christian Huygens la fórmula

$$\sqrt{6} = \sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} \quad (4)$$

Huygens se quedó completamente estupefacto y comentó que esa igualdad “desafía todo el entendimiento humano.” [Pruébese a verificar informalmente las fórmulas (3) y (4).]

Absurdo o no, la fórmula de Tartaglia y Cardano forzó a los matemáticos a enfrentarse a las raíces cuadradas de números negativos (o, como los llamamos hoy día, *números imaginarios*).

EL DESARROLLO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS. Durante más de dos siglos, los números como $i = \sqrt{-1}$ fueron vistos con gran desconfianza. La raíz cuadrada de cualquier número negativo se puede escribir en términos de i ; por ejemplo, $\sqrt{-a} = \sqrt{(a)(-1)} = \sqrt{a}\sqrt{-1}$. A mediados del siglo dieciocho, el matemático suizo Leonhard Euler relacionó los números universales e y π con el número imaginario i . Sea i lo que quiera que sea o signifique, se tiene necesariamente que

$$e^{\pi i} = -1,$$

esto es, e “elevado a la potencia πi es igual a -1 .” Por tanto, reflejando quizás algún profundo misterio, estos números universales están conectados realmente entre sí mediante una fórmula muy simple.

A principios del siglo diecinueve, el matemático alemán Karl Friedrich Gauss fue capaz de probar el *teorema fundamental del álgebra*, que establece que cualquier polinomio de grado n tiene n raíces (algunas de las cuales o todas pueden ser imaginarias; es decir, las raíces tienen la forma $a + bi$, donde, como antes, $i = \sqrt{-1}$ y donde a y b son números reales).

A mediados del siglo diecinueve, el matemático francés Augustin-Louis Cauchy y el matemático alemán Bernhard Riemann desarrollaron el cálculo diferencial para funciones de una variable compleja. Un ejemplo de una función así es $F(z) = z^n$, donde $z = a + bi$. En este caso, la fórmula usual para la derivada, $F'(z) = nz^{n-1}$,

sigue siendo válida. Sin embargo, al introducir los números imaginarios, Cauchy fue capaz de evaluar “integrales reales” que antes no habían podido ser calculadas. Por ejemplo, se puede demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

y que

$$\int_0^\pi \log \sin x dx = -\pi \log 2.$$

Estos resultados fueron sorprendentes.

En resumen, la solución de la ecuación cúbica, el teorema fundamental del álgebra y el cálculo de integrales reales demostraron la importancia de considerar números imaginarios $a + bi$, incluso aunque no estaban (al menos todavía) en *tierra firme*. ¿Existían realmente o eran simplemente fantasmas de nuestra *imaginación* y por tanto verdaderamente *imaginarios*?



Figura 1.3.8 Sir William Rowan Hamilton (1805–1865).

DEFINICIÓN DE HAMILTON DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS. Muchos matemáticos después de Cardano realizaron importantes contribuciones a los números imaginarios (o complejos), entre los que se incluyen Argand, Wessel y Gauss—todos los cuales los representaron geométricamente. Sin embargo, la definición moderna e intelectualmente rigurosa de número complejo se debe al gran matemático irlandés William Rowan Hamilton (véase la Figura 1.3.8). Después de Newton, que creó el concepto de vector gracias a su invención de la idea de fuerza, Hamilton fue, sin ninguna duda, la figura más importante y singular en el desarrollo del cálculo vectorial. Fue Hamilton quien nos legó los términos *vector* y *magnitud escalar*.

William Rowan Hamilton nació en Dublín, Irlanda, la medianoche del 3 de agosto de 1805. En 1823, entró en el Trinity College de Dublín. Su carrera universitaria, bajo cualquier estándar, fue fenomenal. En su tercer curso, el Trinity le ofreció una plaza de profesor, la Cátedra Andrew de Astronomía, y el Estado le nombró Astrónomo Real de Irlanda. Estos honores le fueron otorgados por la predicción teórica (en 1824) de dos fenómenos ópticos inesperados, concretamente, la refracción cónica interna y externa.

Hacia 1827 se interesó por los números imaginarios. Escribió que “el símbolo $\sqrt{-1}$ es absurdo y denota una operación imposible ...” Se propuso situar la idea de número complejo sobre un firme fundamento lógico. Su solución consistió en definir un número complejo $a + bi$ como un punto (a, b) en el plano \mathbb{R}^2 , como hacemos hoy día. Así, el número imaginario bi para Hamilton era simplemente el punto $(0, b)$ sobre el eje y . La diferencia entre los números complejos y el plano cartesiano estaba en que Hamilton consideraba la multiplicación formal de números complejos:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

y definió una nueva multiplicación en el plano complejo:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Por tanto, $i = \sqrt{-1}$ simplemente desaparece al convertirse en el punto $(0, 1)$ y el misterio y la confusión acerca de los números complejos desaparecen también con él.

DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS A LOS CUATERNIONES. De acuerdo con la interpretación de Hamilton, *los números complejos no son más que la extensión de los números reales a dos dimensiones*. Sin embargo, Hamilton también llevó a cabo un trabajo fundamental en mecánica y sabía bien que dos dimensiones limitaban

demasiado el análisis espacial necesario para comprender la física del mundo tridimensional. Por ello, Hamilton emprendió la búsqueda de un sistema de ternas; es decir, una fórmula aceptable¹ de multiplicación para puntos (a, b, c) en \mathbb{R}^3 , o, como de hecho eran, para vectores $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

Hacia 1843, Hamilton se dió cuenta de que esta era una búsqueda sin esperanza. Pero entonces, el 16 de octubre de 1843, Hamilton descubrió que lo que no pudo lograr para \mathbb{R}^3 podía conseguirlo para \mathbb{R}^4 ; descubrió los *cuaterniones*, un sistema de números completamente nuevo.

Hamilton² se dio cuenta de que la multiplicación que había estado buscando podía definirse para las cuaternas (a, b, c, d), que había denotado mediante

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}.$$

La a se denominó *parte escalar* y $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ se denominó *parte vectorial*, lo que en realidad, al igual que con los números complejos, definía el punto (a, b, c, d) en \mathbb{R}^4 . La tabla de multiplicación que introdujo fue

$$\mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{k} = -\mathbf{j}\mathbf{i}$$

$$\mathbf{k}\mathbf{i} = \mathbf{j} = -\mathbf{i}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{j}\mathbf{k} = \mathbf{i} = -\mathbf{k}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -1.$$

Hamilton continuó creyendo *apasionadamente* en estos cuaterniones hasta el final de su vida. Lamentablemente, el desarrollo histórico fue en otra dirección.

El primer paso que se alejaba de los cuaterniones lo dio un firme creyente en la importancia de los mismos, concretamente, Peter Guthrie Tait, que nació en 1831 cerca de Edimburgo, Escocia. En 1860, Tait obtuvo la Cátedra de Filosofía Natural de la Universidad de Edimburgo, donde permaneció hasta su muerte en 1901. En 1867, escribió su *Elementary Treatises on Quaternions*, un texto orientado a las aplicaciones de la física. Su tercer capítulo fue el más significativo. Es aquí donde Tait consideró el producto cuaterniónico de dos vectores:

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = a'\mathbf{i} + b'\mathbf{j} + c'\mathbf{k}.$$

Entonces el producto \mathbf{vw} , según la definición de Hamilton, es:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})(a'\mathbf{i} + b'\mathbf{j} + c'\mathbf{k}) \\ = -(aa' + bb' + cc') + (b c' - c b')\mathbf{i} + (a c' - c a')\mathbf{j} + (a b' - b a')\mathbf{k} \end{aligned}$$

o, en forma moderna:

$$\mathbf{vw} = -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times \mathbf{w},$$

donde \cdot es el producto escalar de vectores y \times es el producto vectorial. Tait descubrió las fórmulas

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \theta \quad \text{y} \quad \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \sin \theta,$$

donde θ es el ángulo que forman \mathbf{v} y \mathbf{w} . Además, demostró que $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ era ortogonal a \mathbf{v} y \mathbf{w} , proporcionando así una interpretación *geométrica* del producto cuaterniónico de dos vectores.

¹Para él, “aceptable” significaba que la multiplicación satisfacía la ley asociativa.

²*North British Review*, 14 (1858), p. 57.

Este fue el principio del alejamiento del estudio de los cuaterniones y la vuelta a los vectores de Newton, con el producto cuaterniónico sustituido por dos productos distintos: el producto escalar y el producto vectorial.

Podemos preguntarnos por qué Hamilton no descubrió primero el producto vectorial, puesto que es un producto en \mathbb{R}^3 . La razón es que este no tenía la propiedad fundamental que él requería —concretamente, no era asociativo:³

$$\mathbf{0} = (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{k} \neq \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) = -\mathbf{k}.$$

Merece comentar que Euler descubrió el producto vectorial en forma de componentes en 1750, y que tres años antes que Hamilton, Olinde Rodrigues también descubrió una forma de multiplicación cuaterniónica.

EL ALEJAMIENTO DE LOS CUATERNIONES. Los científicos responsables en última instancia de la muerte de los cuaterniones fueron James Clerk Maxwell (véase la Figura 1.3.9), Oliver Heaviside y Josiah Willard Gibbs, uno de los fundadores de la mecánica estadística. En la década de 1860, Maxwell formuló sus monumentales ecuaciones de electricidad y magnetismo. No utilizó ninguna notación vectorial (no existía). En su lugar, Maxwell escribió sus ecuaciones en lo que ahora llamamos “forma de componentes”. Alrededor de 1870, Tait comenzó a mantener correspondencia con Maxwell, despertando su interés por los cuaterniones.

En 1873, Maxwell publicó su genial trabajo, *Treatise on Electricity and Magnetism*. Aquí (como veremos en el Capítulo 8), Maxwell formuló las ecuaciones del campo electromagnético utilizando cuaterniones, lo que motivó a otros físicos y matemáticos a fijarse más detenidamente en ellos. A causa de este trabajo, muchos han llegado a la conclusión de que Maxwell era un defensor del “enfoque cuaterniónico” de la física. Sin embargo, lo cierto es que Maxwell era bastante reacio a utilizar cuaterniones. De hecho, fue Maxwell quien inició el proceso de separar la parte *vectorial* del producto de dos cuaterniones (el producto vectorial) de la parte *escalar* (el producto escalar).

Es sabido que Maxwell estaba preocupado por el hecho de que la parte escalar del “cuadrado” de un vector ($\mathbf{v}\mathbf{v}$) era siempre negativa ($-\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$), lo que en el caso de un vector velocidad podría interpretarse como energía cinética negativa—¡Una idea inaceptable!

Fueron Heaviside y Gibbs los que dieron el empujón final en el alejamiento de los cuaterniones. Heaviside, un investigador independiente interesado en la electricidad y el magnetismo, y Gibbs, un profesor de física matemática en Yale, casi de forma simultánea —e independiente— crearon nuestro moderno sistema de análisis vectorial, que acabamos de empezar a estudiar.



Figura 1.3.9 James Clerk Maxwell (1831–1879).

³Curiosamente, si uno está dispuesto a vivir sin propiedad asociativa, existe un producto de vectores con la mayor parte de las propiedades del producto vectorial en \mathbb{R}^7 ; este implica otro sistema de números denominado *octoniones*, que existe en \mathbb{R}^8 . La no existencia de un producto vectorial en otras dimensiones es un resultado que queda fuera del ámbito de este texto. Para más información, consulte *American Mathematical Monthly*, **74** (1967), pp. 188–194, y **90** (1983), p. 697, así como J. Baez, “The Octonions”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **39** (2002), pp. 145–206. Se puede probar que sistemas como los cuaterniones y los octoniones solo se pueden dar en dimensión 1 (los reales \mathbb{R}), dimensión 2 (los números complejos), dimensión 4 (los cuaterniones) y dimensión 8 (los octoniones). Por otro lado, la forma “correcta” de extender el producto vectorial es introduciendo la noción de *forma diferencial*, la cual existe en *cualquier* dimensión. Estudiaremos su construcción en la Sección 8.5.

En 1879, Gibbs impartió un curso en Yale sobre análisis vectorial con aplicaciones a la electricidad y el magnetismo. Su contenido estaba claramente motivado por la aparición de las ecuaciones de Maxwell, que estudiaremos en el Capítulo 8. En 1884, publicó *Elements of Vector Analysis*, un libro en el que se desarrollaron completamente todas las propiedades de los productos escalar y vectorial. Sabiendo que mucho de lo que Gibbs escribió se debe en realidad a Tait, los contemporáneos de Gibbs no vieron este libro como excesivamente original. Sin embargo, es una de las fuentes gracias a la cual el moderno análisis vectorial ha llegado a existir.

Heaviside se vio enormemente motivado por el brillante trabajo de Maxwell. Su gran *Electromagnetic Theory* se publicó en tres volúmenes. El Volumen I (1893) contenía el primer tratamiento exhaustivo del análisis vectorial moderno.

También tenemos una gran deuda con el libro de E. B. Wilson de 1901 *Vector Analysis: A Textbook for the Use of Students of Mathematics and Physics Founded upon the Lectures of J. Willard Gibbs*. Wilson era reticente a seguir el curso de Gibbs, porque había terminado un curso de un año completo sobre cuaterniones en Harvard impartido por J. M. Pierce, un maestro de los métodos cuaterniónicos; pero fue obligado por un decano a añadir el curso a su programa y así lo hizo en 1899. Más tarde, el editor de Yale Bicentennial Series le pidió a Wilson que escribiera un libro basado en las lecciones de Gibbs. Véase la Nota histórica de la Sección 4.4, para ver una fotografía de Gibbs y algunos comentarios históricos adicionales sobre la divergencia y el rotacional.

Ejercicios

- 1.** Verificar que al intercambiar las primeras dos filas del determinante 3×3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

cambia el signo del determinante.

- 2.** Calcular los determinantes

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 36 & 18 & 17 \\ 45 & 24 & 20 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{vmatrix}$$

- 3.** Calcular $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, donde $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

- 4.** Calcular $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son como en el Ejercicio 3 y $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

- 5.** Hallar el área del paralelogramo cuyos lados son los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} dados en el Ejercicio 3.

- 6.** Un triángulo tiene vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ y $(0, -2, 3)$. Hallar su área.

- 7.** ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo con lados $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $5\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$?

- 8.** ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo con lados \mathbf{i} , $3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, and $4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$?

En los Ejercicios 9 a 12, describir todos los vectores unitarios ortogonales a los vectores dados.

- 9.** \mathbf{i}, \mathbf{j}

- 12.** $2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

- 10.** $-5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

- 13.** Calcular $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$, y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

- 11.** $-5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $\mathbf{0}$

14. Repetir el Ejercicio 13 para $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

15. Determinar una ecuación para el plano que

- (a) Es perpendicular a $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ y pasa por $(1, 0, 0)$.
- (b) Es perpendicular a $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ y pasa por $(1, 1, 1)$.
- (c) Es perpendicular a la recta $\mathbf{l}(t) = (5, 0, 2)t + (3, -1, 1)$ y pasa por $(5, -1, 0)$.
- (d) Es perpendicular a la recta $\mathbf{l}(t) = (-1, -2, 3)t + (0, 7, 1)$ y pasa por $(2, 4, -1)$.

16. Hallar una ecuación para el plano que pasa por

- (a) $(0, 0, 0), (2, 0, -1)$ y $(0, 4, -3)$.
- (b) $(1, 2, 0), (0, 1, -2)$ y $(4, 0, 1)$.
- (c) $(2, -1, 3), (0, 0, 5)$ y $(5, 7, -1)$.

17. Demostrar que los puntos $(0, -2, -1), (1, 4, 0)$, $(2, 10, 1)$ no determinan un único plano.

18. Sea P el plano definido por la ecuación $x+y+z=1$. ¿Cuáles de los siguientes puntos están contenidos en P ?

- | | |
|------------------|-------------------|
| (a) $(0, 0, 0)$ | (c) $(-3, 8, -4)$ |
| (b) $(1, 1, -1)$ | (d) $(1, 2, -3)$ |

19. (a) Demostrar que dos planos paralelos o bien son idénticos o bien nunca se intersecan.
 (b) ¿Cómo se intersecan dos planos no paralelos?

20. Hallar la intersección de los planos $x+2y+z=0$ y $x-3y-z=0$.

21. Hallar la intersección de los planos $x+(y-1)+z=0$ y $-x+(y+1)-z=0$.

22. Hallar la intersección de los planos dados por las ecuaciones $3(x-1)+2y+(z+1)=0$ y $(x-1)+4y-(z+1)=0$.

23. (a) Probar las dos identidades del triple producto vectorial

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$$

y

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

- (b) Probar que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ si y solo si $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- (c) Probar que (*identidad de Jacobi*).

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

24. (a) Demostrar, sin recurrir a la geometría, que

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\ &= -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \\ &= -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w}).\end{aligned}$$

(b) Utilizar el apartado (a) y el Ejercicio 23(a) para demostrar que

$$\begin{aligned}&(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}') - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}')(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' & \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' \\ \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

25. Verificar la regla de Cramer.

26. ¿Cuál es la relación geométrica entre los vectores \mathbf{v} y \mathbf{w} si $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$?

27. Sean $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ y $\mathbf{w} = (0, 2, -1)$. Utilizar las reglas algebraicas y la tabla de multiplicación de la página 39 para calcular $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ sin emplear determinantes.

28. Hallar una ecuación para el plano que pasa por el punto $(2, -1, 3)$ y es perpendicular a la recta $\mathbf{v} = (1, -2, 2) + t(3, -2, 4)$.

29. Hallar una ecuación para el plano que pasa por el punto $(1, 2, -3)$ y es perpendicular a la recta $\mathbf{v} = (0, -2, 1) + t(1, -2, 3)$.

30. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -2, -3)$ y es perpendicular al plano $3x - y - 2z + 4 = 0$.

31. Hallar una ecuación para el plano que contiene las dos rectas paralelas

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, -2) + t(2, 3, -1)$$

y

$$\mathbf{v}_2 = (2, -1, 0) + t(2, 3, -1).$$

32. Determinar una parametrización para la recta perpendicular a $(2, -1, 1)$, paralela al plano $2x + y - 4z = 1$ y que pasa por el punto $(1, 0, -3)$.

33. Hallar una ecuación para el plano que contiene el punto $(1, 0, 1)$ y la línea $\mathbf{l}(t) = (1, 2, -1) + t(1, 0, 5)$.

34. Hallar la distancia desde el punto $(2, 1, -1)$ al plano $x - 2y + 2z + 5 = 0$.

35. Hallar una ecuación para el plano que contiene la recta $\mathbf{v} = (-1, 1, 2) + t(3, 2, 4)$ y es perpendicular al plano $2x + y - 3z + 4 = 0$.

- 36.** Hallar una ecuación para el plano que pasa por $(3, 2, -1)$ y $(1, -1, 2)$ y es paralelo a la recta $\mathbf{v} = (1, -1, 0) + t(3, 2, -2)$.

- 37.** Repetir los Ejercicios 25 y 26 de la Sección 1.1 utilizando el producto escalar y los conocimientos sobre vectores normales a planos.

- 38.** Dados los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , ¿las ecuaciones $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|$ determinan un vector único \mathbf{x} ? Razone la respuesta geométrica y analíticamente.

- 39.** Determinar la distancia del plano $12x + 13y + 5z + 2 = 0$ al punto $(1, 1, -5)$.

- 40.** Hallar la distancia al punto $(6, 1, 0)$ del plano que pasa por el origen y es perpendicular a $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.)

- 41.** (a) En mecánica, el **momento M** de una fuerza \mathbf{F} con respecto a un punto O se define como la magnitud de \mathbf{F} multiplicada por la distancia perpendicular d desde O a la línea de acción de \mathbf{F} . El **vector Momento \mathbf{M}** es el vector de magnitud M cuya dirección es perpendicular al plano de O y \mathbf{F} , y cuyo sentido se determina aplicando la regla de la mano derecha. Demostrar que $\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$, donde \mathbf{R} es cualquier vector de O a la línea de acción de \mathbf{F} . (Véase la Figura 1.3.10.)

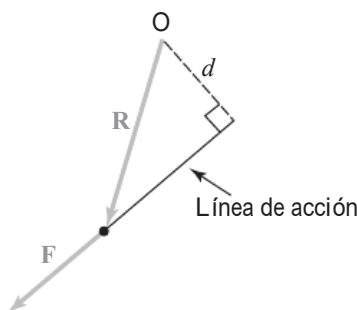


Figura 1.3.10 Momento de una fuerza.

- (b) Hallar el momento del vector fuerza $\mathbf{F} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ newtons con respecto al origen si la línea de acción es $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$.
- 42.** Demostrar que el plano que pasa por los tres puntos $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$ está formado por los puntos $P = (x, y, z)$ dados por

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 - y & a_3 - z \\ b_1 - x & b_2 - y & b_3 - z \\ c_1 - x & c_2 - y & c_3 - z \end{vmatrix} = 0.$$

(SUGERENCIA: escribir el determinante como un producto mixto.)

- 43.** Dos medios con índices de refracción n_1 y n_2 están separados por una superficie plana perpendicular al vector unitario \mathbf{N} . Sean \mathbf{a} y \mathbf{b} vectores unitarios a lo largo de los rayos incidente y refractado, respectivamente, con el mismo sentido que dichos rayos de luz. Demostrar que $n_1(\mathbf{N} \times \mathbf{a}) = n_2(\mathbf{N} \times \mathbf{b})$ utilizando la ley de Snell, $\sin \theta_1 / \sin \theta_2 = n_2/n_1$, donde θ_1 y θ_2 son los ángulos de incidencia y refracción, respectivamente. (Véase la Figura 1.3.11.)

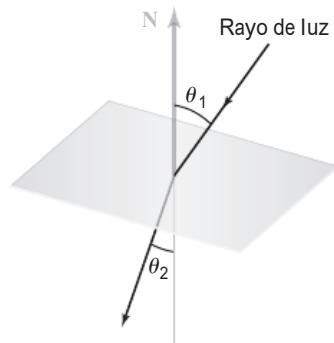


Figura 1.3.11 Ley de Snell.

- 44.** Justificar los pasos en los cálculos siguientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} = 33 - 36 = -3.$$

- 45.** Demostrar que sumar un múltiplo de la primera fila de una matriz a la segunda fila no cambia el determinante; es decir,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda b_1 & c_2 + \lambda c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

[De hecho, sumar un múltiplo de cualquier fila (columna) de una matriz a otra fila (columna) no cambia el determinante.]

- 46.** Suponer que $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ son vectores unitarios ortogonales. Sea $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Demostrar que $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$.

1.4 Coordenadas cilíndricas y esféricas

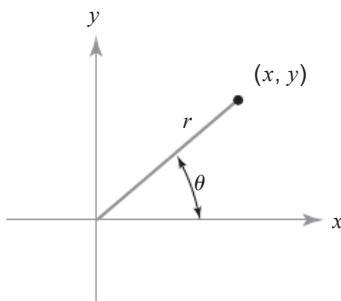


Figura 1.4.1 Las coordenadas polares de (x, y) son (r, θ) .

La forma habitual de representar un punto en el plano \mathbb{R}^2 es mediante coordenadas rectangulares (x, y) . Sin embargo, como ya probablemente se sabe por el cálculo elemental, las coordenadas polares en el plano pueden ser extremadamente útiles. Como se muestra en la Figura 1.4.1, las coordenadas (r, θ) están relacionadas con (x, y) mediante las fórmulas

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta,$$

donde normalmente tomamos $r \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

Si no se está familiarizado con las coordenadas polares, recomendamos estudiar la sección correspondiente en cualquier libro de texto de cálculo. Ahora vamos a explicar dos formas de representar puntos en el espacio distintas de las coordenadas cartesianas (x, y, z) . Estos sistemas de coordenadas alternativos se adaptan particularmente bien a ciertos tipos de problemas, tales como el cálculo de integrales usando un cambio de variables.

En 1671, Isaac Newton escribió un manuscrito titulado *The Method of Fluxions and Infinite Series*, que contiene muchos usos de la geometría de coordenadas para esbozar soluciones de ecuaciones. En particular, presenta el sistema de coordenadas polares, además de otros diversos sistemas de coordenadas.

En 1691, Jacob Bernoulli publicó un artículo que también contenía coordenadas polares. Dado que el manuscrito de Newton no fue publicado hasta después de su muerte en 1727, el mérito del descubrimiento de las coordenadas polares normalmente se atribuye a Bernoulli.

Nota histórica

Coordenadas cilíndricas

Definición Las *coordenadas cilíndricas* (r, θ, z) de un punto (x, y, z) están definidas por (véase la Figura 1.4.2)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z. \quad (1)$$

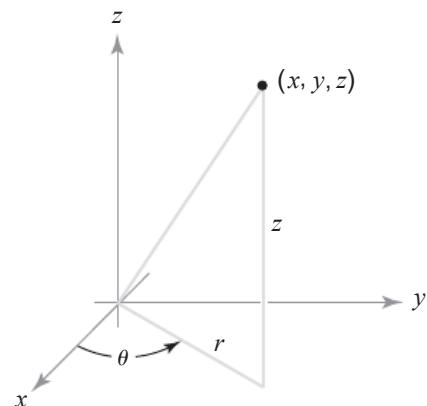


Figura 1.4.2 Representación de un punto (x, y, z) en función de sus coordenadas cilíndricas r, θ y z .

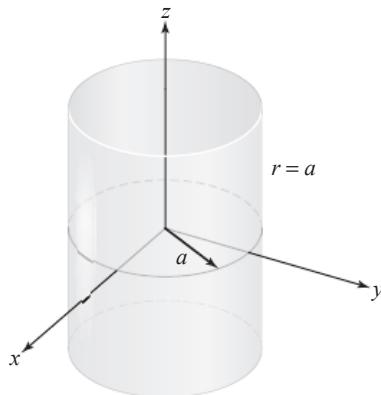


Figura 1.4.3 La gráfica de los puntos cuyas coordenadas cilíndricas satisfacen $r = a$ es un cilindro.

Para expresar r , θ y z en función de x , y y z , y para asegurar que θ está entre 0 y 2π , podemos escribir

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & \text{si } x > 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1}(y/x) & \text{si } x < 0 \\ 2\pi + \tan^{-1}(y/x) & \text{si } x > 0 \text{ y } y < 0, \end{cases} \quad z = z,$$

donde $\tan^{-1}(y/x)$ se toma entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. La condición $0 \leq \theta < 2\pi$ determina de manera única θ y $r \geq 0$ para cualquier x e y . Si $x = 0$, entonces $\theta = \pi/2$ para $y > 0$ y $3\pi/2$ para $y < 0$. Si $x = y = 0$, θ no está definido.

En otras palabras, para cualquier punto (x, y, z) , representamos su primera y segunda coordenadas en función de las coordenadas polares y dejamos la tercera coordenada sin cambiar. La fórmula (1) demuestra que, dado (r, θ, z) , la terna (x, y, z) está completamente determinada, y viceversa, si restringimos θ al intervalo $[0, 2\pi)$ (a veces es conveniente emplear el intervalo $(-\pi, \pi]$) y además $r > 0$.

Para ver por qué usamos el término *coordenadas cilíndricas*, obsérvese que si se cumplen las condiciones $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ y si $r = a$ es una constante positiva, entonces el lugar geométrico de estos puntos es un cilindro de radio a (véase la Figura 1.4.3).

Ejemplo 1

- (a) Determinar y dibujar las coordenadas cilíndricas de $(6, 6, 8)$. (b) Si un punto tiene las coordenadas cilíndricas $(8, 2\pi/3, -3)$, ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas? Dibujarlas.

Solución

Para el apartado (a), tenemos $r = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ y $\theta = \tan^{-1}(6/6) = \tan^{-1}(1) = \pi/4$. Por tanto, las coordenadas cilíndricas son $(6\sqrt{2}, \pi/4, 8)$. Este es el punto P de la Figura 1.4.4.

Para el apartado (b), obsérvese que $2\pi/3 = \pi/2 + \pi/6$ y entonces

$$x = r \cos \theta = 8 \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{8}{2} = -4$$

y

$$y = r \sin \theta = 8 \sin \frac{2\pi}{3} = 8 \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Por tanto, las coordenadas cartesianas son $(-4, 4\sqrt{3}, -3)$, es decir, el punto Q de la figura.

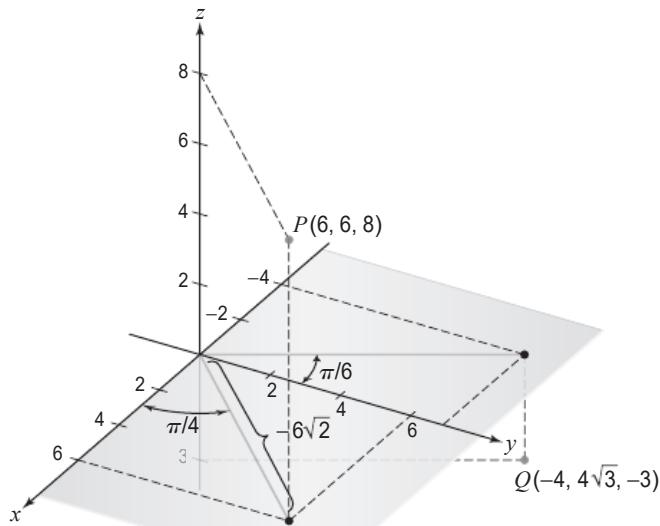


Figura 1.4.4 Ejemplos de conversión entre coordenadas cartesianas y cilíndricas. ▲

Coordenadas esféricas

Las coordenadas cilíndricas no son la única posible generalización a tres dimensiones de las coordenadas polares. Recordemos que, en dos dimensiones, la magnitud del vector $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ (es decir, $\sqrt{x^2 + y^2}$) es la r en el sistema de coordenadas polares. Con las coordenadas cilíndricas, la longitud del vector $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, concretamente,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

no es una de las coordenadas del sistema—en su lugar, utilizamos la magnitud $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, el ángulo θ y la “altura” z .

Vamos a modificar esto presentando el sistema de *coordenadas esféricas*, que *usa* ρ como coordenada. Las coordenadas esféricas suelen resultar útiles en problemas en los que hay simetría esférica (simetría relativa a un punto), mientras que las coordenadas cilíndricas pueden aplicarse cuando existe simetría cilíndrica (simetría relativa a una recta).

Dado un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, sea

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

y representamos x e y mediante coordenadas polares en el plano xy :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \tag{2}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y θ está determinado por la Fórmula (1) [véase la expresión para θ trás la Fórmula (1)]. La coordenada z viene dada por

$$z = \rho \cos \phi,$$

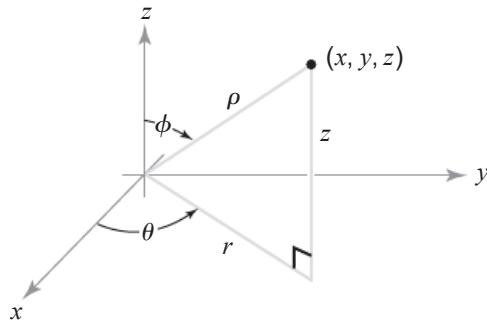


Figura 1.4.5 Coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) ; la gráfica de los puntos que satisfacen $\rho = a$ es una esfera.

donde ϕ es el ángulo (entre 0 y π , ambos inclusive) que forma el radio vector $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ con el eje positivo z , en el plano que contiene el \mathbf{v} y el eje z (véase la Figura 1.4.5). Utilizando el producto escalar, podemos expresar ϕ como sigue:

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \text{es decir,} \quad \phi = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{v}\|} \right).$$

Tomamos como coordenadas las cantidades ρ, θ, ϕ . Dado que $r = \rho \sin \phi$, podemos usar la Fórmula (2) para determinar x, y, z en función de las coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ .

Definición Las *coordenadas esféricas* de (x, y, z) en el espacio son las ternas (ρ, θ, ϕ) , y se definen como sigue:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi, \quad (3)$$

donde

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Nota histórica

En 1773, Joseph Louis Lagrange estaba trabajando en la teoría gravitatoria de Newton aplicada a los elipsoides de revolución. Al intentar calcular la atracción gravitatoria total de tales elipsoides, se encontró con una integral que era difícil de calcular. Motivado por este problema, introdujo las coordenadas esféricas, que le permitieron calcular la integral. Estudiaremos el método del cambio de coordenadas según se aplica a integrales múltiples en la Sección 6.2, y en sus aplicaciones a la gravitación en la Sección 6.3, donde veremos cómo la ley gravitatoria del inverso de los cuadrados permitió a Newton considerar las masas esféricas como masas puntuales.

Las coordenadas esféricas también están estrechamente ligadas a la navegación a través de la latitud y la longitud. Para ver esta relación, observamos en primer lugar que la esfera de radio a centrada en el origen se describe mediante una ecuación muy simple en coordenadas esféricas, a saber, $\rho = a$. Si fijamos el radio a , las coordenadas esféricas θ y ϕ son similares a las coordenadas geográficas de longitud y latitud si tomamos el eje de la tierra como eje z . Sin embargo, hay diferencias: la longitud geográfica es $|\theta|$ y se denomina longitud este u oeste, dependiendo de si θ es positivo o negativo medido desde el meridiano de Greenwich; la latitud geográfica es $|\pi/2 - \phi|$ y se denomina latitud norte o sur, dependiendo de si $\pi/2 - \phi$ es positivo o negativo.

Ejemplo 2

- (a) Calcular las coordenadas esféricas del punto cartesiano $(1, -1, 1)$ y dibujarlo.
- (b) Determinar las coordenadas cartesianas del punto con coordenadas esféricas $(3, \pi/6, \pi/4)$ y dibujarlo.
- (c) Sea el punto con coordenadas cartesianas $(2, -3, 6)$. Hallar sus coordenadas esféricas y dibujarlo.
- (d) Sea el punto con coordenadas esféricas $(1, -\pi/2, \pi/4)$. Determinar sus coordenadas cartesianas y dibujarlo.

Solución

$$(a) \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\theta = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0,955 \approx 54,74^\circ.$$

Véase la Figura 1.4.6(a) y la expresión para θ deducida a partir de la Fórmula (1).

$$(b) x = \rho \sin \phi \cos \theta = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}},$$

$$z = \rho \cos \phi = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Véase la Figura 1.4.6(b).

$$(c) \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$\theta = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{-3}{2}\right) \approx 5,3004 \text{ radianes} \approx 303,69^\circ,$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{6}{7}\right) \approx 0,541 \approx 31,0^\circ.$$

Véase la Figura 1.4.7(a).

$$(d) x = \rho \sin \phi \cos \theta = 1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 0 = 0,$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta = 1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z = \rho \cos \phi = 1 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Véase la Figura 1.4.7(b).

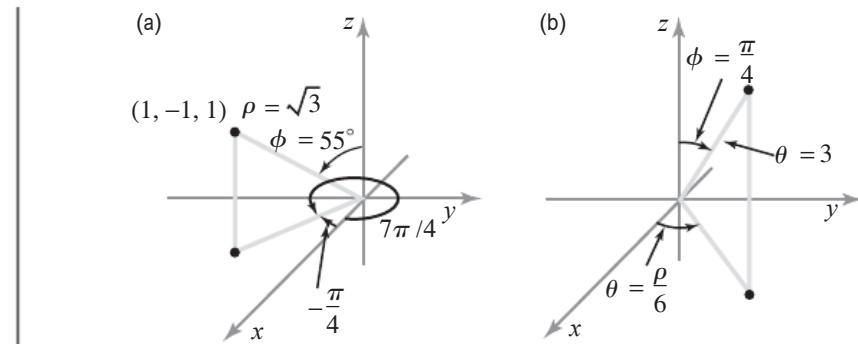


Figura 1.4.6 Cálculo de (a) las coordenadas esféricas del punto $(1, -1, 1)$, y de (b) las coordenadas cartesianas de $(3, \pi/6, \pi/4)$.

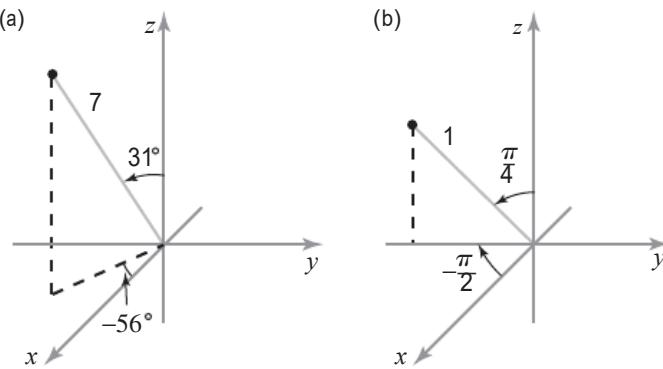


Figura 1.4.7 Cálculo de (a) las coordenadas esféricas del punto $(2, -3, 6)$, y de las (b) coordenadas cartesianas de $(1, -\pi/2, \pi/4)$. ▲

Ejemplo 3

Expresar (a) la superficie $xz = 1$ y (b) la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en coordenadas esféricas.

Solución

A partir de la Fórmula (3), $x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$ y $z = \rho \cos \phi$, y así la superficie $xz = 1$ de (a) está formada por los puntos (ρ, θ, ϕ) tales que

$$\rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta \cos \phi = 1, \quad \text{esto es,} \quad \rho^2 \operatorname{sen} 2\phi \cos \theta = 2.$$

En cuanto al apartado (b), podemos escribir

$$x^2 + y^2 - z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2z^2 = \rho^2 - 2\rho^2 \cos^2 \phi,$$

de modo que la superficie es $\rho^2(1 - 2 \cos^2 \phi) = 1$; esto es, $-\rho^2 \cos(2\phi) = 1$. ▲

Asociados a las coordenadas cilíndricas y esféricas están los vectores unitarios que se corresponden con **i**, **j** y **k** en las coordenadas rectangulares, que se muestran en la Figura 1.4.8. Por ejemplo, **e**_r es el vector unitario paralelo al plano *xy* que tiene dirección radial, de modo que $\mathbf{e}_r = (\operatorname{cos} \theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} \theta)\mathbf{j}$. De forma similar, en coordenadas esféricicas, **e**_φ es el vector unitario tangente a la curva parametrizada por la variable ϕ manteniendo fijas las variables ρ y θ . Utilizaremos estos vectores unita-

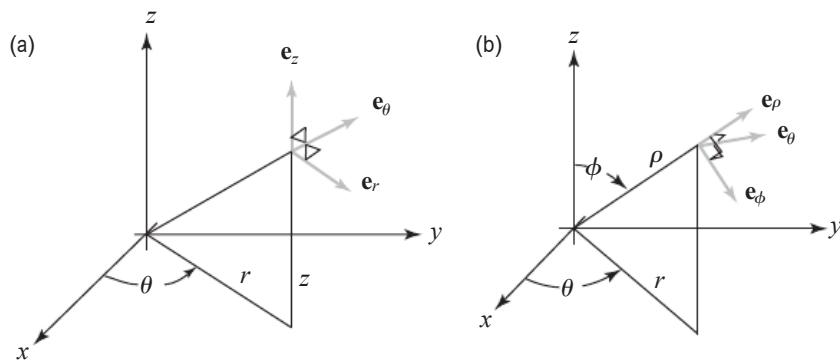


Figura 1.4.8 (a) Vectores ortonormales e_r , e_θ y e_z asociados con las coordenadas cilíndricas. El vector e_r es paralelo a la recta r . (b) Vectores ortonormales e_ρ , e_θ y e_ϕ asociados con las coordenadas esféricas.

rios más adelante cuando usemos coordenadas cilíndricas y esféricas en cálculos vectoriales.

Ejercicios

1. Hallar las coordenadas esféricas del punto cartesiano $(\sqrt{2}, -\sqrt{6}, -2\sqrt{2})$.
2. Hallar las coordenadas esféricas del punto cartesiano $(\sqrt{6}, -\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.
3. (a) Los siguientes puntos están dados en coordenadas cilíndricas; expresar cada uno de ellos en coordenadas rectangulares y coordenadas esféricas: $(1, 45^\circ, 1)$, $(2, \pi/2, -4)$, $(0, 45^\circ, 10)$, $(3, \pi/6, 4)$, $(1, \pi/6, 0)$ y $(2, 3\pi/4, -2)$.
 (b) Expresar cada uno de los puntos siguientes dados en coordenadas rectangulares en coordenadas esféricas y cilíndricas: $(2, 1, -2)$, $(0, 3, 4)$, $(\sqrt{2}, 1, 1)$, $(-2\sqrt{3}, -2, 3)$.
4. Describir el significado geométrico de las siguientes aplicaciones en coordenadas cilíndricas:
 - (a) $(r, \theta, z) \mapsto (r, \theta, -z)$
 - (b) $(r, \theta, z) \mapsto (r, \theta + \pi, -z)$
 - (c) $(r, \theta, z) \mapsto (-r, \theta - \pi/4, z)$
5. Describir el significado geométrico de las siguientes aplicaciones en coordenadas esféricas:
 - (a) $(\rho, \theta, \phi) \mapsto (\rho, \theta + \pi, \phi)$
 - (b) $(\rho, \theta, \phi) \mapsto (\rho, \theta, \pi - \phi)$
 - (c) $(\rho, \theta, \phi) \mapsto (2\rho, \theta + \pi/2, \phi)$
6. Dibujar los siguientes sólidos:
 - (a) $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, \pi]$, $z \in [-1, 1]$
 - (b) $r \in [0, 2]$, $\theta \in [0, \pi/2]$, $z \in [0, 4]$
 - (c) $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi/4]$
7. Dibujar las siguientes superficies:
 - (a) $z = r^2$
 - (b) $\rho = 4 \csc \phi \sec \theta$
 - (c) $r = 4 \sin \theta$
 - (d) $\rho \sin \phi = 2$
8. (a) Describir las superficies $r = \text{constante}$, $\theta = \text{constante}$ y $z = \text{constante}$ en el sistema de coordenadas cilíndricas.
 (b) Describir las superficies $\rho = \text{constante}$, $\theta = \text{constante}$ y $\phi = \text{constante}$ en el sistema de coordenadas esféricas.
9. Demostrar que para representar cualquier punto en \mathbb{R}^3 mediante coordenadas esféricas, basta con tomar valores de θ entre 0 y 2π , valores de ϕ entre 0 y π y valores de $\rho \geq 0$. ¿Son únicas estas coordenadas si admitimos que $\rho \leq 0$?
10. Describir los siguientes sólidos empleando desigualdades. Indicar el sistema de coordenadas utilizado.
 - (a) Un armazón cilíndrico de 8 unidades de longitud, un diámetro interno de 2 unidades y un diámetro externo de 3 unidades.
 - (b) Un armazón esférico con un radio interno de 4 unidades y un radio externo de 6 unidades.
 - (c) Una semiesfera con diámetro de 5 unidades.

- (d) Un cubo con una arista de longitud 2 unidades.
- 11.** Sea S la esfera de radio R centrada en el origen. Hallar la ecuación de S en coordenadas cilíndricas.
- 12.** Utilizando coordenadas cilíndricas y vectores ortonormales (ortogonales normalizados) $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ y \mathbf{e}_z (véase la Figura 1.4.8),
- Expresar cada uno de los vectores $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ y \mathbf{e}_z en función de $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ y (x, y, z) .
 - Calcular $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{j}$ analíticamente, usando el apartado (a), y geométricamente.
- 13.** Utilizando coordenadas esféricas y vectores ortonormales (ortogonales normalizados) $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta$ y \mathbf{e}_ϕ [véase la Figura 1.4.8(b)]
- Expresar cada uno de los vectores $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta$ y \mathbf{e}_ϕ en función de $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ y (x, y, z) .
 - Calcular $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{j}$ y $\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{j}$ analítica y geométricamente.
- 14.** Expresar el plano $z = x$ en (a) coordenadas cilíndricas y (b) coordenadas esféricas.
- 15.** Demostrar que en coordenadas esféricas:
- ρ es la longitud de $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
 - $\phi = \cos^{-1}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} / \|\mathbf{v}\|)$, donde $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
 - $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{i} / \|\mathbf{u}\|)$, donde $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.
- 16.** Dos superficies están descritas en coordenadas esféricas mediante las ecuaciones $\rho = f(\theta, \phi)$ y $\rho = -2f(\theta, \phi)$, donde $f(\theta, \phi)$ es una función de dos variables. ¿Cómo se obtiene geométricamente la segunda superficie a partir de la primera?
- 17.** Una membrana circular en el espacio descansa sobre la región $x^2 + y^2 \leq a^2$. La componente z máxima de los puntos de la membrana es b . Supongamos que (x, y, z) es un punto de la membrana. Demostrar que el punto correspondiente (r, θ, z) en coordenadas cilíndricas satisface las condiciones $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $|z| \leq b$.
- 18.** Un tanque con forma de cilindro circular recto de radio 3 m y altura 5 m está lleno hasta la mitad y reposa de lado. Describir el espacio vacío en el interior del tanque eligiendo un sistema adecuado de coordenadas cilíndricas.
- 19.** Se desea diseñar un vibrómetro que soporte los efectos del calentamiento de su cubierta esférica de diámetro d , el cual debe enterrarse a una profundidad de $d/3$ en la tierra y cuya parte superior será calentada por el sol (suponga que la superficie terrestre es plana). El análisis de la conducción del calor requiere una descripción de la parte enterrada de la cubierta en coordenadas esféricas. Hallar dicha descripción.
- 20.** Un cartucho de filtro de aceite es un cilindro circular recto poroso dentro del cual el aceite se difunde desde el eje hacia la superficie curvada exterior. Describir el cartucho en coordenadas cilíndricas, sabiendo que el diámetro del filtro es 11,4 cm, la altura es 14,2 cm y el centro del cartucho está taladrado (a lo largo) desde arriba para permitir la entrada de un perno de 1,6 cm de diámetro.
- 21.** Describir la superficie dada en coordenadas esféricas por $\rho = \cos 2\theta$.
- 22.** (a) Hallar todos los puntos $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ que se representan igual en coordenadas cartesianas que en coordenadas esféricas.
 (b) Hallar todos los puntos $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ que se representan igual en coordenadas cartesianas que en coordenadas cilíndricas.

1.5 Espacio euclídeo n -dimensional

Vectores en el espacio n -dimensional

En las Secciones 1.1 y 1.2 hemos estudiado los espacios $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ y \mathbb{R}^3 y hemos proporcionado sus interpretaciones geométricas. Por ejemplo, se puede pensar en un punto (x, y, z) en \mathbb{R}^3 como en un objeto geométrico, en concreto, el segmento dirigido o vector que parte del origen y termina en el punto (x, y, z) . Por tanto, podemos pensar en \mathbb{R}^3 de estas dos formas:

- (I) Algebraicamente, como un conjunto de ternas (x, y, z) , donde x, y y z son números reales.
- (II) Geométricamente, como un conjunto de segmentos rectos dirigidos.

Estas dos formas de ver \mathbb{R}^3 son equivalentes. Para hacer una generalización es más fácil utilizar la definición (I). Específicamente, podemos definir \mathbb{R}^n , donde n es un entero positivo (posiblemente mayor que 3), como el conjunto de todas las n -tuplas ordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) , donde los x_i son números reales. Por ejemplo, $(1, \sqrt{5}, 2, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^4$.

El conjunto \mathbb{R}^n así definido se conoce como **espacio euclídeo n -dimensional**, y sus elementos, que se denotan mediante $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y se llaman **vectores** o **vectores n -dimensionales**. Haciendo $n = 1, 2$ o 3 , obtenemos la recta, el plano y el espacio tridimensional, respectivamente.

Vamos a comenzar nuestro estudio del espacio euclídeo n -dimensional presentando varias operaciones algebraicas. Estas son análogas a las presentadas en la Sección 1.1 para \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 . Las dos primeras, suma y multiplicación por un escalar, se definen como sigue:

- (I) $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$;
y
- (II) para cualquier número real α ,

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

La importancia geométrica de estas operaciones para \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 ya la hemos visto en la Sección 1.1.

Los n vectores

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

se denominan **vectores de la base canónica** de \mathbb{R}^n y generalizan los tres vectores unitarios ortogonales $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ de \mathbb{R}^3 . El vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se puede escribir entonces como $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$.

Para dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ de \mathbb{R}^3 , definimos el **producto escalar** $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ como el número real $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Esta definición se generaliza fácilmente a \mathbb{R}^n ; específicamente, para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, definimos el **producto escalar** de \mathbf{x} e \mathbf{y} como $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$. En \mathbb{R}^n , se suele emplear la notación $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ en lugar de $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ para el producto escalar.

Continuando la analogía con \mathbb{R}^3 , definimos el concepto de **longitud** o **norma** de un vector \mathbf{x} mediante la fórmula

$$\text{Longitud de } \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Si \mathbf{x} e \mathbf{y} son dos vectores en el plano (\mathbb{R}^2) o en el espacio (\mathbb{R}^3), entonces sabemos que el ángulo θ que forman está dado por la fórmula

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}.$$

El lado derecho de esta ecuación se puede definir en \mathbb{R}^n , como se hace en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 . Sigue representando el coseno del ángulo entre \mathbf{x} e \mathbf{y} ; este ángulo está geométricamente bien definido, porque \mathbf{x} e \mathbf{y} están en un subespacio bidimensional de \mathbb{R}^n (el plano determinado por \mathbf{x} e \mathbf{y}) y nuestras ideas geométricas habituales son aplicables a tales planos.

Resultará útil disponer de algunas propiedades algebraicas del producto escalar. Estas se resumen en el siguiente teorema [compárense con las propiedades (I), (II), (III) y (IV) de la Sección 1.2].

Teorema 3 Para $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ y α, β , números reales, tenemos

- (I) $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}).$
- (II) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}.$
- (III) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0.$
- (IV) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}.$

Demostración Cada una de las cuatro afirmaciones se puede probar mediante un cálculo simple. Por ejemplo, para probar la propiedad (i), escribimos

$$\begin{aligned} (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} &= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots, \alpha x_n + \beta y_n) \cdot (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 + \dots + (\alpha x_n + \beta y_n)z_n \\ &= \alpha x_1 z_1 + \beta y_1 z_1 + \alpha x_2 z_2 + \beta y_2 z_2 + \dots + \alpha x_n z_n + \beta y_n z_n \\ &= \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}). \end{aligned}$$

Las restantes demostraciones son similares. ■

En la Sección 1.2, hemos probado una interesante propiedad del producto escalar: la desigualdad de Cauchy–Schwarz.⁴ Para \mathbb{R}^2 nuestra demostración requirió el uso de la ley de los cosenos. Para \mathbb{R}^n también podríamos utilizar este método, restringiendo nuestra atención a un plano en \mathbb{R}^n . Sin embargo, también podemos proporcionar una demostración directa completamente algebraica.

Teorema 4 Desigualdad de Cauchy–Schwarz en \mathbb{R}^n Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} vectores en \mathbb{R}^n . Entonces

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|.$$

⁴ En ocasiones denominada desigualdad de Cauchy–Bunyakovskii–Schwarz, o simplemente desigualdad CBS, porque fue descubierta independientemente en casos particulares por el matemático francés Cauchy, el matemático ruso Bunyakovskii y el matemático alemán Schwarz.

Demostración Sea $a = \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}$ y $b = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. Si $a = 0$, el teorema es claramente válido, porque entonces $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ y ambos lados de la desigualdad se reducen a 0. Por tanto, podemos suponer que $a \neq 0$. Por el Teorema 3 tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq (\mathbf{ax} + b\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{ax} + b\mathbf{y}) &= a^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 2ab \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + b^2 \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2. \end{aligned}$$

Dividiendo entre $\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}$ se obtiene $0 \leq (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2$, es decir, $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2$. Tomando raíces cuadradas en ambos lados de esta desigualdad se llega al resultado deseado. ■

La desigualdad de Cauchy–Schwarz posee una consecuencia muy útil en términos de longitudes. La desigualdad triangular en \mathbb{R}^3 es clara geométricamente y ya la hemos estudiado en la Sección 1.2. La demostración *analítica* de la desigualdad triangular que hemos proporcionado en la Sección 1.2 funciona exactamente igual en \mathbb{R}^n y prueba lo siguiente:

Corolario Desigualdad triangular en \mathbb{R}^n Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} vectores en \mathbb{R}^n . Entonces

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Si el Teorema 4 y su corolario se desarrollan algebraicamente, se convierten en las siguientes útiles desigualdades:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| &\leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}; \\ \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 \right)^{1/2} &\leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1 Sea $\mathbf{x} = (1, 2, 0, -1)$ e $\mathbf{y} = (-1, 1, 1, 0)$. Verificar el Teorema 4 y su corolario para este caso.

Solución

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \\ \|\mathbf{y}\| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{3} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= 1(-1) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1)0 = 1 \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (0, 3, 1, -1) \\ \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &= \sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}. \end{aligned}$$

Calculamos $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1 \leq 4,24 \approx \sqrt{6}\sqrt{3} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$, que verifica el Teorema 4. Del mismo modo, podemos comprobar su corolario:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &= \sqrt{11} \approx 3,32 \\ &\leq 4,18 = 2,45 + 1,73 \approx \sqrt{6} + \sqrt{3} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \end{aligned}$$

Por analogía con \mathbb{R}^3 , podemos definir la noción de distancia en \mathbb{R}^n ; a saber, si \mathbf{x} e \mathbf{y} son puntos de \mathbb{R}^n , la **distancia entre \mathbf{x} e \mathbf{y}** se define como $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, o la longitud del vector $\mathbf{x} - \mathbf{y}$. No vamos a intentar definir el producto vectorial en \mathbb{R}^n excepto para $n = 3$.

Matrices generales

Para generalizar matrices 2×2 y 3×3 (véase la Sección 1.3), podemos considerar matrices $m \times n$, que son ordenaciones de mn números:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

También escribiremos A como $[a_{ij}]$. Definimos la suma y la multiplicación por un escalar componente a componente, como hicimos con los vectores. Dadas dos matrices $m \times n$, A y B , podemos sumarlas para obtener una nueva matriz $m \times n$, $C = A + B$, cuyo ij -ésimo elemento c_{ij} es la suma de a_{ij} y b_{ij} . Está claro que $A + B = B + A$.

Ejemplo 2

- (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.
- (b) $[1 \ 2] + [0 \ -1] = [1 \ 1]$.
- (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.



Dado un escalar λ y una matriz $m \times n$, A , podemos multiplicar A por λ para obtener una nueva matriz $m \times n$, $\lambda A = C$, cuyo elemento ij -ésimo, c_{ij} , es el producto λa_{ij} .

Ejemplo 3

$$3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 15 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$



Vamos a ver ahora la multiplicación de matrices. Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices $n \times n$, entonces el producto $AB = C$ tiene elementos dados por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

que es el producto escalar de la fila i -ésima de A por la columna j -ésima de B :

columna j -ésima

$$\left[\begin{array}{c} \text{fila } i\text{-ésima} \\ \xrightarrow{\quad} \boxed{c_{ij}} \\ \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & \boxed{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} b_{11} \dots \boxed{b_{1j}} \dots b_{1n} \\ \vdots \\ b_{n1} \dots \boxed{b_{nj}} \dots b_{nn} \end{array} \right].$$

Ejemplo 4 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que $AB \neq BA$. ▲

De forma similar, podemos multiplicar una matriz $m \times n$ (m filas, n columnas) por una matriz $n \times p$ (n filas, p columnas) para obtener una matriz $m \times p$ (m filas, p columnas) mediante la misma regla. Observe que para que AB esté definido, el número de *columnas* de A tiene que ser igual al número de *filas* de B .

Ejemplo 5 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

y BA no está definido. ▲

Ejemplo 6 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = [2 \ 2 \ 1 \ 2].$$

Entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad BA = [13].$$
▲

Cualquier matriz $m \times n$, A , determina una aplicación de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m definida como sigue: sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; consideremos la matriz columna $n \times 1$ asociada a \mathbf{x} , que denotaremos *temporalmente* como \mathbf{x}^T

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

y multiplicamos A por \mathbf{x}^T (considerada como una matriz $n \times 1$) para obtener una nueva matriz $m \times 1$:

$$A\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \mathbf{y}^T,$$

que corresponde al vector $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$.⁵ Por tanto, aunque puede causar algo de confusión, escribiremos $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ como matrices columnas

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

cuando se trate de una multiplicación de matrices; es decir, *identificaremos* estas dos formas de escribir vectores. Por tanto, eliminaremos la T de \mathbf{x}^T y consideraremos iguales \mathbf{x}^T y \mathbf{x} .

Por tanto, $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ “realmente” significará lo siguiente: se escribe \mathbf{x} como una matriz columna, se multiplica por A y el vector \mathbf{y} tiene como componentes las de la matriz columna resultante. La regla $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ define por tanto una aplicación de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m . Esta aplicación es lineal; es decir, satisface

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= A\mathbf{x} + A\mathbf{y} \\ A(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha(A\mathbf{x}), \quad \alpha \text{ es un escalar,} \end{aligned}$$

como se puede comprobar fácilmente. En un curso de álgebra lineal se aprende que, recíprocamente, cualquier transformación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m se puede representar de esta forma mediante una matriz $m \times n$.

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz $m \times n$ y \mathbf{e}_j es el vector j -ésimo de la base canónica de \mathbb{R}^n , entonces $A\mathbf{e}_j$ es un vector de \mathbb{R}^m con componentes iguales a la j -ésima columna de A . Es decir, la i -ésima componente de $A\mathbf{e}_j$ es a_{ij} . Utilizando símbolos, $(A\mathbf{e}_j)_i = a_{ij}$.

⁵ Al usar una matriz A para obtener una aplicación de vectores $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ a vectores $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, de acuerdo con la ecuación $A\mathbf{x}^T = \mathbf{y}^T$, escribimos los vectores en forma de columna \mathbf{x}^T en lugar de en forma de fila (x_1, \dots, x_n) . Este repentino cambio de escribir \mathbf{x} en forma de columna es necesario debido a los convenios usuales sobre multiplicación de matrices.

Ejemplo 7 Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^4 es la aplicación definida por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 + 3x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$



Ejemplo 8

A continuación se ilustra lo que le ocurre a un punto específico cuando se le aplica una matriz 4×3 :

$$A\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{segunda columna de } A.$$



Propiedades de las matrices

En general, la multiplicación de matrices no es **conmutativa**: si A y B son matrices $n \times n$, entonces, como demuestran los Ejemplos 4, 5 y 6, generalmente

$$AB \neq BA.$$

Se dice que una matriz $n \times n$ es **invertible** si existe una matriz $n \times n$, B , tal que $AB = BA = I_n$, donde

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

es la matriz identidad $n \times n$: I_n tiene la propiedad de que $I_n C = C I_n = C$ para cualquier matriz $n \times n$ C . Denotamos B por A^{-1} y llamamos a A^{-1} la **inversa** de A . La inversa, cuando existe, es única.

Ejemplo 9 Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \quad A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ -6 & 12 & 4 \end{bmatrix},$$

ya que $AA^{-1} = I_3 = A^{-1}A$, como se puede comprobar mediante la multiplicación de matrices.



Los métodos para calcular inversas se estudian en álgebra lineal; en este libro no se requieren estos métodos. Si A es invertible, la ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ se puede resolver y despejar el vector \mathbf{x} multiplicando ambos lados por A^{-1} para obtener⁶ $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$.

En la Sección 1.3 hemos definido el determinante de una matriz 3×3 . Este se puede generalizar por inducción a determinantes $n \times n$. Mostramos aquí cómo escribir el determinante de una matriz 4×4 en función de los determinantes de matrices 3×3 :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

[Véase la fórmula (2) de la Sección 1.3; los signos se alternan $+, -, +, -$].

Las propiedades básicas de los determinantes 3×3 que se repasaron en la Sección 1.3 siguen siendo válidos para los determinantes de matrices $n \times n$. En particular, observemos que si A es una matriz $n \times n$ y B es la matriz formada al sumar un múltiplo escalar de una fila (o columna) de A a otra fila (o columna, respectivamente) de A , entonces el determinante de A es igual al determinante de B (véase el Ejemplo 10).

Un teorema básico del álgebra lineal establece que una matriz $n \times n$ A es invertible si y solo si el determinante de A es distinto de cero. Otra propiedad básica es que el determinante es multiplicativo: $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. En este texto, no vamos a emplear demasiada álgebra lineal, por lo que no vamos a demostrar estas afirmaciones.

Ejemplo 10

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hallar $\det A$. ¿Tiene A inversa?

Solución

Sumando $(-1) \times$ primera columna a la tercera columna, tenemos

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

⁶De hecho, la regla de Cramer de la Sección 1.3 proporciona un método para invertir matrices. Otros métodos más eficientes desde el punto de vista numérico, basados en métodos de eliminación, se estudian en álgebra lineal o ciencias de la computación.

Sumando $(-1) \times$ primera columna a la tercera columna de este determinante 3×3 obtenemos

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Por tanto, $\det A = -2 \neq 0$, por lo que A tiene inversa. ▲

Si tenemos tres matrices A, B y C tales que los productos AB y BC están definidos, entonces los productos $(AB)C$ y $A(BC)$ también están definidos y, de hecho, son iguales (es decir, la multiplicación de matrices es *asociativa*). Llamamos a esto *producto triple* de matrices y lo denotamos mediante ABC .

Ejemplo 11

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad B = [1 \ 1], \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$ABC = A(BC) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} [3] = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 12

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \blacktriangle$$

Nota histórica

El fundador de la geometría moderna (en coordenadas) fue René Descartes (véase la Figura 1.5.1), un gran físico, filósofo y matemático, además de fundador de la biología moderna.

Nació en Touraine, Francia, en 1596, Descartes tuvo una vida fascinante. Después de estudiar leyes, se asentó en París, donde desarrolló su interés por las matemáticas. En 1628, se trasladó a Holanda, donde escribió su único trabajo sobre matemáticas, *La Geometrie*, uno de los orígenes de la moderna geometría de coordenadas.

Descartes había sido muy crítico con las geometrías de los antiguos griegos, con todos sus conceptos sin definir y con demostraciones que requerían cada vez métodos más nuevos e ingeniosos. Para Descartes, esta geometría estaba tan ligada a las figuras geométricas “que puede ejercitarse el entendimiento solo a condición de fatigar enormemente la imaginación.” Se comprometió a explorar, en geometría, el uso del álgebra, lo que había sido desarrollado recientemente. El resultado fue *La Geometrie*, que hizo posible el uso de métodos analíticos y computacionales en geometría.

Recordemos que los griegos eran, como Descartes, filósofos además de matemáticos y físicos. Su respuesta a la cuestión del significado del espacio fue la “geometría euclídea”. Descartes tuvo éxito “algebrizando” el modelo griego del espacio.

Gottfried Wilhelm Leibniz, cofundador (con Isaac Newton) del cálculo, también estuvo interesado en el “análisis espacial”, pero no pensaba que el álgebra de Descartes llegara lo suficientemente lejos. Leibniz buscó un método directo de análisis espacial (*análisis situs*) que podría interpretarse como una llamada al desarrollo del análisis vectorial.



Figura 1.5.1 René Descartes (1596–1650).

El 8 de septiembre de 1679, Leibniz esbozaba estas ideas en una carta dirigida a Christian Huygens:

Sigo sin estar satisfecho con el álgebra, porque no proporciona ni los métodos más cortos ni las construcciones más bellas en geometría. Es por esto por lo que creo que, en lo que concierne a la geometría, necesitamos otro análisis que sea claramente geométrico o lineal y que exprese la localización (*situs*) directamente al igual que el álgebra expresa directamente la magnitud. Y creo que he encontrado la forma y que podemos representar figuras e incluso máquinas y movimientos mediante caracteres, al igual que el álgebra representa números o magnitudes. Te envío un ensayo que me parece que es importante.

En el ensayo, Leibniz describía sus ideas con gran detalle.

Ejercicios

1. Calcular el producto escalar de $\mathbf{x} = (1, -10, 2) \in \mathbb{R}^4$ e $\mathbf{y} = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$.
2. En \mathbb{R}^n demostrar que
 - (a) $2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ (Esto se conoce como la **ley del paralelogramo**.)
 - (b) $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$
 - (c) $4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ (Esto se llama **identidad de polarización**.)

Interpretar estos resultados geométricamente en términos del paralelogramo formado por \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Verificar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad triangular para los vectores de los Ejercicios 3 a 6.

3. $\mathbf{x} = (2, 0, -1)$, $\mathbf{y} = (4, 0, -2)$
4. $\mathbf{x} = (1, 0, 2, 6)$, $\mathbf{y} = (3, 8, 4, 1)$
5. $\mathbf{x} = (1, -1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{y} = (3, 0, 0, 0, 2)$
6. $\mathbf{x} = (1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{y} = (-1, 0, 0, 1)$
7. Sean $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Si $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\|$, demostrar que $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ y $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ son ortogonales.
8. Sea T un triángulo que se define colocando tres puntos en un círculo, dos de los cuales descansan sobre el diámetro del mismo. Utilizar el problema anterior para demostrar que T es un triángulo rectángulo.
9. Calcular AB , $\det A$, $\det B$, $\det(AB)$ y $\det(A + B)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$
10. Calcular AB , $\det A$, $\det B$, $\det(AB)$ y $\det(A + B)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
11. Determinar cuáles de las siguientes matrices son invertibles:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 19 \\ 2 & 3 & \pi \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
12. Para la matriz A del problema anterior, hallar un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ distinto de cero tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
13. Usar inducción en k para probar que si $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\|\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k\| \leq \|\mathbf{x}_1\| + \dots + \|\mathbf{x}_k\|.$$
14. Usando álgebra, demostrar que la **identidad de Lagrange**: para números reales x_1, \dots, x_n e y_1, \dots, y_n .

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - \sum_{i < j} (x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

Usar esto para proporcionar otra demostración de la desigualdad de Cauchy–Schwarz en \mathbb{R}^n ,

En los Ejercicios 16 a 18, A, B, y C denotan matrices $n \times n$.

- 16.** ¿Es cierto que $\det(A + B) = \det A + \det B$? Proporcionar una demostración o un contraejemplo.

- 17.** ¿Es cierto que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$?

- 18.** Suponiendo cierta la ley $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, demostrar que $\det(ABC) = (\det A)(\det B)(\det C)$.

- 19.** (Este ejercicio supone que se tienen conocimientos sobre la integración de funciones continuas de una variable.) Téngase en cuenta que la demostración de la desigualdad de Cauchy–Schwarz (Teorema 4) solo depende de las propiedades del producto escalar enumeradas en el Teorema 1. Utilizar esta observación para establecer la siguiente desigualdad para funciones continuas $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\left| \int_0^1 f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2 dx} \sqrt{\int_0^1 [g(x)]^2 dx}.$$

Para ello:

- (a) Comprobar que el espacio de las funciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{R} es un espacio vectorial; es decir, podemos pensar en las funciones f, g de forma abstracta como “vectores” que se pueden sumar entre sí y multiplicar por escalares.
(b) Introducir el producto escalar de funciones

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

- 15.** Probar que si A es una matriz $n \times n$, entonces

- (a) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$; y
(b) Si B es una matriz obtenida a partir de A multiplicando cualquier fila o columna por un escalar λ , entonces $\det B = \lambda \det A$.

y verificar que satisface las condiciones (I) a (IV) del Teorema 3.

- 20.** Se define la matriz traspuesta A^T de una matriz $n \times n$ A como sigue: el elemento ij -ésimo de A^T es a_{ji} donde a_{ij} es el elemento ij -ésimo de A . Demostrar que A^T se caracteriza por la siguiente propiedad: Para todo \mathbf{x}, \mathbf{y} en \mathbb{R}^n ,

$$(A^T \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}).$$

- 21.** Comprobar que la inversa de

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{es} \quad \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

- 22.** Utilizar la respuesta del Ejercicio 21 para demostrar que la solución del sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

- 23.** Suponiendo cierta la ley $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, comprobar que $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$ y concluir que si A tiene inversa, entonces $\det A \neq 0$.

- 24.** Determinar dos matrices 2×2 , A y B , tales que $AB = 0$ pero $BA \neq 0$.

Ejercicios de repaso del Capítulo 1

- 1.** Sean $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Calcular $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, $3\mathbf{v}$, $6\mathbf{v} + 8\mathbf{w}$, $-2\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Interpretar cada operación geométricamente dibujando los vectores.

- 2.** Repetir el Ejercicio 1 con $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

- 3.** (a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-1, 2, -1)$ en la dirección de \mathbf{j} .

- (b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(0, 2, -1)$ y $(-3, 1, 0)$.
(c) Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector $(-2, 1, 2)$ y que pasa por el punto $(-1, 1, 3)$.
- 4.** (a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(0, 1, 0)$ en la dirección de $3\mathbf{i} + \mathbf{k}$.
(b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(0, 1, 1)$ y $(0, 1, 0)$.
(c) Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector $(-1, 1, -1)$ y que pasa por el punto $(1, 1, 1)$.
- 5.** Hallar una ecuación para el plano que contiene los puntos $(2, 1, -1)$, $(3, 0, 2)$ y $(4, -3, 1)$.
- 6.** Hallar una ecuación para una recta que es paralela al plano $2x - 3y + 5z - 10 = 0$ y pasa por el punto $(-1, 7, 4)$. (Hay muchas soluciones posibles.)
- 7.** Calcular $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ para los siguientes conjuntos de vectores:
(a) $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{w} = \mathbf{k}$
(b) $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$; $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$
(c) $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
- 8.** Calcular $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ para los vectores del Ejercicio 7.
- 9.** Hallar el coseno del ángulo que forman los vectores del Ejercicio 7.
- 10.** Hallar el área del paralelogramo generado por los vectores del Ejercicio 7.
- 11.** Utilizar notación vectorial para describir el triángulo en el espacio cuyos vértices son el origen y los extremos de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} .
- 12.** Demostrar que los tres vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} están en el mismo plano que pasa por el origen si y solo si existen tres escalares α, β, γ , no todos cero, tales que $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$.
- 13.** Para los números reales $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, demostrar que

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$
- 14.** Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vectores unitarios ortogonales entre sí. Si $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$, demostrar que

$$\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}, \quad \beta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}, \quad \gamma = \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}.$$
- Interpretar el resultado geométricamente.
- 15.** Hallar los productos AB y BA donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$
- 16.** Hallar los productos AB y BA donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$
- 17.** Sean \mathbf{a}, \mathbf{b} dos vectores en el plano, $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$, y sea λ un número real. Demostrar que el área del paralelogramo determinado por \mathbf{a} y $\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a}$ es la misma que la del paralelogramo determinado por \mathbf{a} y \mathbf{b} . Hacer un esquema. Relacionar este resultado con una propiedad conocida de los determinantes.
- 18.** Hallar el volumen del paralelepípedo determinado por los vértices $(0, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 2, 0), (3, 1, 2)$.
- 19.** Dados los vectores distintos de cero \mathbf{a} y \mathbf{b} en \mathbb{R}^3 , demostrar que el vector $\mathbf{v} = \|\mathbf{a}\|\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|\mathbf{a}$ biseca el ángulo que forman \mathbf{a} y \mathbf{b} .
- 20.** Demostrar que los vectores $\|\mathbf{b}\|\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|\mathbf{b}$ y $\|\mathbf{b}\|\mathbf{a} - \|\mathbf{a}\|\mathbf{b}$ son ortogonales.
- 21.** Utilizar la desigualdad triangular para demostrar que $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \geq |\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{w}\||$.
- 22.** Usar métodos vectoriales para probar que la distancia desde el punto (x_1, y_1) a la recta $ax + by = c$ es

$$\frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$
- 23.** Comprobar que la dirección de $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ está dada por la regla de la mano derecha, seleccionando \mathbf{b}, \mathbf{c} entre los vectores \mathbf{i}, \mathbf{j} y \mathbf{k} .
- 24.** (a) Suponer que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}$ para todo \mathbf{b} . Demostrar que $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$.
(b) Suponer que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}$ para todo \mathbf{b} . ¿Es cierto que $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$?
- 25.** (a) Utilizando métodos vectoriales, demostrar que la distancia entre dos rectas no paralelas l_1 y l_2 está dada por

$$d = \frac{|\mathbf{(v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)|}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|},$$

donde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ son dos puntos cualesquiera de l_1 y l_2 , respectivamente, y \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 son las direcciones de l_1 y l_2 . [SUGERENCIA: Considere el plano que contiene a l_2 y que es paralelo a l_1 . Demuestre que el vector $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)/\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|$ es un vector unitario normal a este plano; y proyecte $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ sobre esta dirección normal.]

- (b) Hallar la distancia entre la recta l_1 determinada por los puntos $(-1, -1, 1)$ y $(0, 0, 0)$ y la recta l_2 determinada por los puntos $(0, -2, 0)$ y $(2, 0, 5)$.

- 26.** Demostrar que dos planos dados por las ecuaciones $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ son paralelos y que la distancia entre ellos es

$$\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

- 27.** (a) Demostrar que el área del triángulo en el plano con los vértices (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

- (b) Hallar el área del triángulo con vértices $(1, 2)$, $(0, 1)$, $(-1, 1)$.

- 28.** Transformar los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas y esféricas y dibujarlos:

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| (a) $(0, 3, 4)$ | (d) $(-1, 0, 1)$ |
| (b) $(-\sqrt{2}, 1, 0)$ | (e) $(-2\sqrt{3}, -2, 3)$ |
| (c) $(0, 0, 0)$ | |

- 29.** Transformar los siguientes puntos dados en coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas y esféricas y dibujarlos:

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| (a) $(1, \pi/4, 1)$ | (d) $(2, -\pi/2, 1)$ |
| (b) $(3, \pi/6, -4)$ | (e) $(-2, -\pi/2, 1)$ |
| (c) $(0, \pi/4, 1)$ | |

- 30.** Transformar los siguientes puntos dados en coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas y cilíndricas, y dibujarlos:

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| (a) $(1, \pi/2, \pi)$ | (d) $(2, -\pi/2, -\pi)$ |
| (b) $(2, -\pi/2, \pi/6)$ | (e) $(-1, \pi, \pi/6)$ |
| (c) $(0, \pi/8, \pi/35)$ | |

- 31.** Reescribir la ecuación $z = x^2 - y^2$ utilizando coordenadas cilíndricas y esféricas.

- 32.** Utilizando coordenadas esféricas, demostrar que

$$\phi = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{u}\|} \right),$$

donde $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Proporcionar una interpretación geométrica.

- 33.** Verificar la desigualdades de Cauchy–Schwarz y triangular para

$$\mathbf{x} = (3, 2, 1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = (1, 1, 1, 2).$$

- 34.** Multiplicar las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

¿Es cierto que $AB = BA$?

- 35.** (a) Demostrar que si A y B son matrices $n \times n$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}).$$

- (b) ¿Qué implica la igualdad del apartado (a) respecto a la relación entre la composición de las aplicaciones $\mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \mapsto Ay$, y la multiplicación de matrices?

- 36.** Hallar el volumen del paralelepípedo generado por los vectores

$$(1, 0, 1), \quad (1, 1, 1) \quad \text{y} \quad (-3, 2, 0).$$

- 37.** (Para estudiantes con conocimientos de álgebra lineal.) Comprobar que una aplicación lineal T de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n está determinada por una matriz $n \times n$.

- 38.** Hallar la ecuación del plano que contiene el punto $(3, -1, 2)$ y la recta de ecuación $\mathbf{v} = (2, -1, 0) + t(2, 3, 0)$.

- 39.** El trabajo W realizado al mover un objeto desde $(0, 0)$ a $(7, 2)$ sometido a una fuerza constante \mathbf{F} es $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$, donde \mathbf{r} es el vector con su extremo en $(7, 2)$ y su inicio en $(0, 0)$. Las unidades son metros y kilogramos.

- (a) Sea la fuerza $\mathbf{F} = 10 \cos \theta \mathbf{i} + 10 \sin \theta \mathbf{j}$. Hallar W en función de θ .

- (b) Si la fuerza \mathbf{F} tiene una magnitud de 6 kg y forma un ángulo de $\pi/6$ rad con la horizontal, apuntando hacia la derecha, hallar W en kg-metros.
- 40.** Si una partícula de masa m se mueve con velocidad \mathbf{v} , su *momento* es $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. En un juego de canicas, una canica con una masa de 2 gramos (g) se tira con una velocidad de 2 metros por segundo (m/s), choca con dos canicas de masa 1 g cada una y queda inmóvil. Una de las canicas sale con una velocidad de 3 m/s formando un ángulo de 45° con la dirección incidente de la canica grande, como se muestra en la Figura 1.R.1. Suponiendo que el momento total antes y después de la colisión es el mismo (de acuerdo con la ley de conservación del momento), ¿con qué ángulo y velocidad se ha movido la segunda canica?

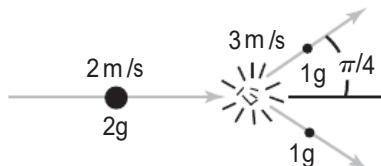


Figura 1.R.1 Momento y canicas.

- 41.** Demostrar que para todo x, y, z ,

$$\begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ z & y+1 & 10 \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y & x+2 & z \\ 1 & z-x-2 & 10-z \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

- 42.** Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

si x, y y z son distintos.

- 43.** Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 66 & 628 & 246 \\ 88 & 435 & 24 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 68 & 627 & 247 \\ 86 & 436 & 23 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Utilizar la siguiente definición para los Ejercicios 50 y 51: Sean $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ vectores en \mathbb{R}^3 desde 0 a las masas m_1, \dots, m_n . El *centro de masas* es el vector

$$\mathbf{c} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

- 44.** Demostrar que

$$\begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ n+3 & n+4 & n+5 \\ n+6 & n+7 & n+8 \end{vmatrix}$$

tiene el mismo valor independientemente del valor de n . ¿Cuál es ese valor?

- 45.** Indicar si las siguientes cantidades son vectores o escalares.

- (a) La población actual de Santa Cruz, California
- (b) El par que un ciclista ejerce sobre su bicicleta.
- (c) La velocidad del viento que mueve una veleta.
- (d) La temperatura de una pizza metida en un horno.

- 46.** Hallar una matriz 4×4 , C , tal que para toda matriz 4×4 , A , se cumpla que $CA = 3A$.

- 47.** Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Hallar A^{-1}, B^{-1} y $(AB)^{-1}$.

- (b) Demostrar que $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$ but $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

- 48.** Si se supone que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es invertible y sus elementos son enteros. ¿Qué condiciones se deben satisfacer para que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$ tenga elementos enteros?

- 49.** El volumen de un tetraedro con aristas concurrentes $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ está dado por $V = \frac{1}{6}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

- (a) Expresar el volumen como un determinante.
- (b) Evaluar V cuando $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

- 50.** Un tetraedro dado en coordenadas xyz tiene un vértice en $(0, 0, 0)$ y las tres aristas concurrentes en $(0, 0, 0)$ coinciden con los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} .

- (a) Dibujar una figura e indicar los extremos de los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} .
- (b) Hallar el centro de masas de cada una de las caras triangulares del tetraedro si se coloca una masa unidad en cada uno de los vértices.

En los Ejercicios 52 a 57, hallar un vector unitario que tenga la propiedad dada.

- 52.** Paralelo a la recta $x = 3t + 1$, $y = 16t - 2$, $z = -(t + 2)$.

- 53.** Ortogonal al plano $x - 6y + z = 12$.

- 54.** Paralelo a los planos $8x + y + z = 1$ y $x - y - z = 0$.

- 51.** Demostrar que para cualquier \mathbf{r} , el centro de masas de un sistema satisface

$$\sum_{i=1}^n m_i \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^2 = \sum_{i=1}^n m_i \|\mathbf{r}_i - \mathbf{c}\|^2 + m \|\mathbf{r} - \mathbf{c}\|^2,$$

donde $m = \sum_{i=1}^n m_i$ es la masa total del sistema.

- 55.** Ortogonal a $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y a \mathbf{k} .

- 56.** Ortogonal a la recta $x = 2t - 1$, $y = -t - 1$, $z = t + 2$, y al vector $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

- 57.** Formando un ángulo de 30° con \mathbf{i} y ángulos iguales con \mathbf{j} y \mathbf{k} .

2

Diferenciación

Me alejo con pánico y terror de las malditas funciones que no tienen derivadas.

—Charles Hermite

en una carta a Thomas Jan Stieltjes

Este capítulo extiende los principios del cálculo diferencial para funciones de una variable a funciones de varias variables. Comenzamos en la Sección 2.1 con la geometría de las funciones con valores reales y estudiamos las gráficas de estas funciones como ayuda para visualizarlas. En la Sección 2.2 proporcionamos algunas definiciones básicas relativas a los límites y la continuidad. Este tema se trata de forma breve, porque desarrollarlo completamente requiere tiempo y madurez matemática y, por tanto, es mejor dejarlo para un curso más avanzado. Afortunadamente, no es necesario conocer todas las sutilezas del concepto de límite para nuestros propósitos; el estudiante que tenga dificultades con esta sección debe tener esto en cuenta. Sin embargo, debemos añadir que la noción de límite es básica en la definición de derivada, pero no en el cálculo de la mayor parte de las derivadas en problemas específicos, como ya sabemos del cálculo de una variable. Las Secciones 2.3 y 2.5 abordan la definición de derivada y establecen algunas reglas básicas de cálculo: cómo diferenciar una suma, producto, cociente o composición. En la Sección 2.6, estudiaremos las derivadas direccionales y planos tangentes, relacionando estas ideas con las proporcionadas en la Sección 2.1.

Al generalizar el cálculo de una dimensión a varias, suele ser conveniente utilizar el lenguaje del álgebra de matrices. Todo lo que vamos a necesitar se ha resumido en la Sección 1.5.

2.1 Geometría de funciones con valores reales

Iniciamos nuestro estudio de las funciones con valores reales desarrollando métodos para visualizarlas. En particular, presentamos las nociones de gráfica, curva de nivel y superficie de nivel de tales funciones.

Funciones y aplicaciones

Sea f una función cuyo dominio es un subconjunto A de \mathbb{R}^n y que tiene un rango o recorrido contenido en \mathbb{R}^m . Con esto queremos decir que a cada $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in A$, f asigna un valor $f(\mathbf{x})$, una m -tuple de \mathbb{R}^m . Estas funciones f se denominan **funciones con valores vectoriales**¹ si $m > 1$ y **funciones con valores escalares** si $m = 1$. Por ejemplo, la función con valores escalares $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$ aplica el conjunto A de $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ de \mathbb{R}^3 ($n = 3$, en este caso) en \mathbb{R} ($m = 1$). En ocasiones, denotamos f como sigue

$$f: (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}.$$

Obsérvese que en \mathbb{R}^3 solemos emplear la notación (x, y, z) en lugar de (x_1, x_2, x_3) . En general, la notación $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$ resulta útil para indicar el valor al que se envía un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Escribimos $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ para indicar que A es el dominio de f (un subconjunto de \mathbb{R}^n) y que el recorrido está contenido en \mathbb{R}^m . También utilizamos la expresión f aplica A en \mathbb{R}^m . Estas funciones f se denominan **funciones de varias variables** si $A \subset \mathbb{R}^n, n > 1$.

Veamos otro ejemplo. Tomamos la función con valores vectoriales $g: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por la regla

$$g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6, \sqrt{x_1^2 + x_6^2} \right).$$

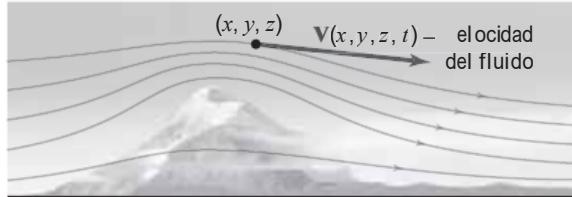
La primera coordenada del valor de g en \mathbf{x} es el producto de las coordenadas de \mathbf{x} .

Las funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m no son únicamente abstracciones matemáticas, aparecen de forma natural en problemas que se estudian en todas las ciencias. Por ejemplo, especificar la temperatura T en una región A del espacio requiere una función $T: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ($n = 3, m = 1$); es decir, $T(x, y, z)$ es la temperatura en el punto (x, y, z) . Especificar la velocidad de un fluido que se mueve en el espacio requiere una aplicación $\mathbf{V}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ es el vector velocidad del fluido en el

¹ Algunos matemáticos escriben esta f en negrita, utilizando la notación $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, ya que la función tiene valores vectoriales. Nosotros no lo hacemos así, ya que esto es una cuestión de gusto personal. Sin embargo, empleamos la negrita habitualmente para las aplicaciones que son campos vectoriales, definidos más adelante. El concepto de función se ha desarrollado a lo largo de varios siglos, abarcando su definición nuevos casos según aparecían. Por ejemplo, en 1667, James Gregory definió una función como “una cantidad obtenida a partir de otras cantidades por medio de una sucesión de operaciones algebraicas o por medio de cualquier otra operación imaginable.” En 1755, Euler proporcionó la siguiente definición: “Si unas cantidades dependen de otras de forma tal que varíen siempre que las últimas se hagan variar, entonces se dice que las primeras son funciones de las últimas.”

punto del espacio (x, y, z) en el instante t (véase la Figura 2.1.1). Especificar la velocidad de reacción de una solución que contiene seis productos químicos en reacción A, B, C, D, E, F en proporciones x, y, z, w, u, v requiere una aplicación $\sigma: U \subset \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\sigma(x, y, z, w, u, v)$ proporciona la velocidad cuando los productos químicos están en las proporciones indicadas. Para especificar el vector cardíaco (el vector que proporciona el módulo y la dirección de la corriente eléctrica en el corazón) en el instante de tiempo t se necesita una aplicación $\mathbf{c}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \mathbf{c}(t)$.

Figura 2.1.1 Un fluido en movimiento define un campo vectorial \mathbf{V} especificando la velocidad de las partículas del fluido en cada punto del espacio y en cada instante de tiempo.



Cuando $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que f es una **función de n variables con valores reales y dominio U** . La razón por la que decimos “ n variables” es simplemente porque consideramos las coordenadas de un punto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U$ como n variables, y $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ depende de estas variables. Decimos “valores reales” porque $f(x_1, \dots, x_n)$ es un número real. Una gran parte de nuestro trabajo se llevará a cabo usando funciones con valores reales, por lo que debemos prestarles una especial atención.

Gráficas de funciones

Si $f: U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($n = 1$), la **gráfica** de f es el subconjunto de \mathbb{R}^2 formado por todos los puntos $(x, f(x))$ del plano, para x perteneciente a U . Este subconjunto se puede interpretar como una curva en \mathbb{R}^2 . Simbólicamente, expresamos esto como sigue

$$\text{gráfica de } f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in U\},$$

donde las llaves significan “el conjunto de todos” y la barra vertical se lee como “tales que”. Dibujar la gráfica de una función de una variable es una herramienta útil que ayuda a visualizar cómo se comporta realmente la función (véase la Figura 2.1.2). Es útil generalizar la idea de gráfica a funciones de varias variables, lo que nos lleva a la siguiente definición:

Definición Gráfica de una función Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos la **gráfica** de f como el subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} formado por los puntos

$$(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$$

de \mathbb{R}^{n+1} en los que (x_1, \dots, x_n) es un punto de U . Simbólicamente, gráfica $f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \dots, x_n) \in U\}$.

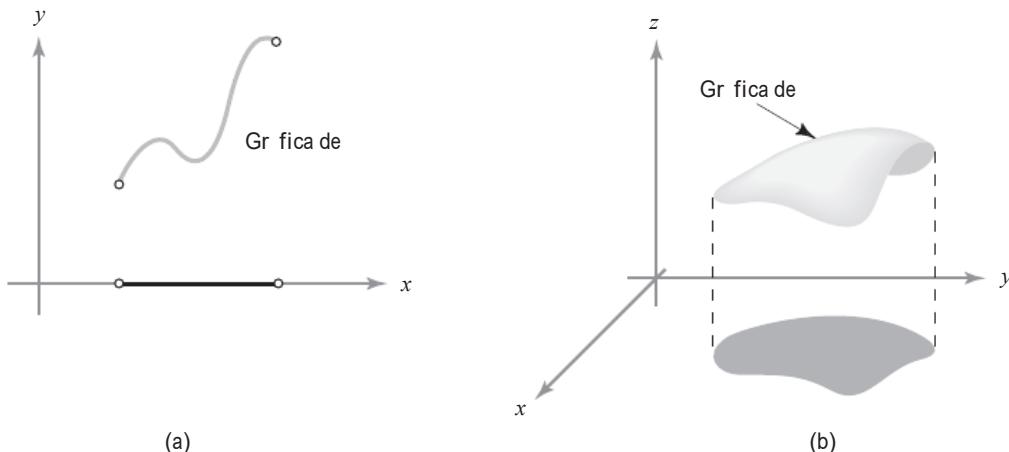


Figura 2.1.2 Gráficas de (a) una función de una variable y de (b) una función de dos variables.

Para el caso $n = 1$, la gráfica es una curva en \mathbb{R}^2 , mientras que para $n = 2$, es una superficie en \mathbb{R}^3 (véase la Figura 2.1.2). Para $n = 3$, es difícil visualizar la gráfica porque, puesto que los humanos vivimos en un mundo tridimensional, nos resulta difícil imaginar conjuntos en \mathbb{R}^4 . Con el fin de superar esta dificultad, introducimos la idea de conjunto de nivel.

Conjuntos, curvas y superficies de nivel

Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Un **conjunto de nivel** es un subconjunto de \mathbb{R}^3 en el que f es constante; por ejemplo, el conjunto en el que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es un conjunto de nivel para f . Esto sí podemos visualizarlo: es exactamente una esfera de radio 1 en \mathbb{R}^3 . Formalmente, un conjunto de nivel es el conjunto de (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = c$, donde c es una constante. El comportamiento o estructura de una función quedan determinados en parte por la forma de sus conjuntos de nivel; en consecuencia, comprender estos conjuntos nos ayuda a entender la función en cuestión. Los conjuntos de nivel también resultan útiles para entender las funciones de dos variables $f(x, y)$, en cuyo caso hablamos de **curvas de nivel**.

La idea es similar a la que se usa para elaborar mapas topográficos en los que se trazan líneas que representan altitudes constantes; caminar a lo largo de una de estas líneas significa caminar sobre un camino horizontal. En el caso de una colina que se eleva sobre el plano xy , una gráfica de todas las curvas de nivel nos proporciona una buena idea de la función $h(x, y)$, que representa la altura de la colina en cada punto (x, y) (véase la Figura 2.1.3).

Ejemplo 1

La función constante $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2$ —es decir, la función $f(x, y) = 2$ —tiene por gráfica el plano horizontal $z = 2$ en \mathbb{R}^3 . La curva de nivel del valor c es vacía si $c \neq 2$, y es todo el plano xy si $c = 2$. ▲

Ejemplo 2

La función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x + y + 2$, tiene por gráfica el plano inclinado $z = x + y + 2$. Este plano interseca al plano xy ($z = 0$)

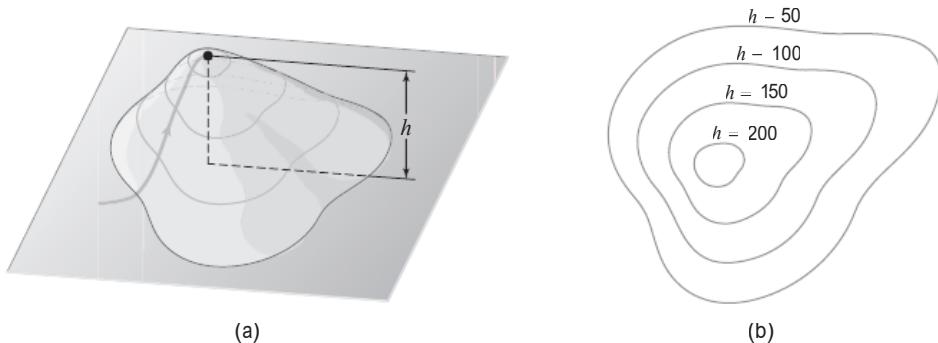


Figura 2.1.3 Las curvas de nivel de una función se definen de la misma forma que las curvas de nivel de un mapa topográfico.

en la recta $y = -x - 2$ y al eje z en el punto $(0, 0, 2)$. Para cualquier valor $c \in \mathbb{R}$, la curva de nivel del valor c es la recta $y = -x + (c - 2)$; o en símbolos, el conjunto

$$L_c = \{(x, y) \mid y = -x + (c - 2)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

En la Figura 2.1.4 indicamos algunas de las curvas de nivel de la función. Esto es un mapa topográfico de la función f .

A partir de las curvas de nivel etiquetadas con el valor o “altura” de la función, la forma de la gráfica se puede inferir mentalmente elevando cada curva de nivel a la altura apropiada, sin estirarla, inclinarla ni deslizarla. Si se visualiza este procedimiento para todas las curvas de nivel L_c —es decir, para todos los valores $c \in \mathbb{R}$, estas se ensamblarán para formar la gráfica completa de f , como indica el plano sombreado de la Figura 2.1.5. Si se visualiza la gráfica utilizando un número finito de curvas de nivel se construye un modelo topográfico. Si f es una función suave, su gráfica será una superficie suave y, por tanto, el modelo topográfico suavizado mentalmente proporciona una buena idea de la gráfica. ▲

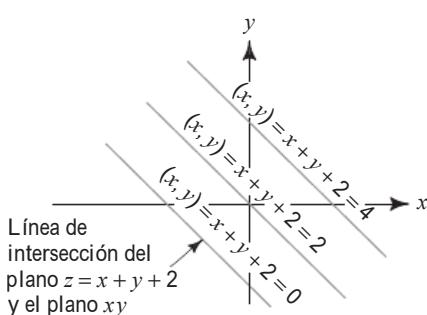


Figura 2.1.4 Las curvas de nivel de $f(x, y) = x + y + 2$ muestran los conjuntos sobre los que f toma un valor dado.

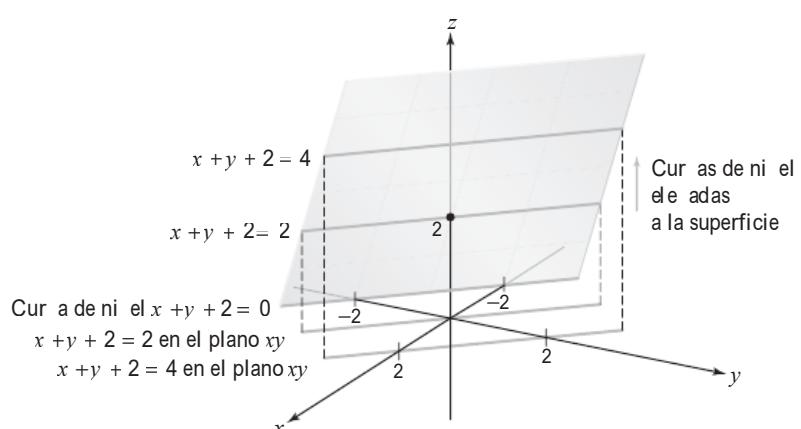


Figura 2.1.5 La relación de las curvas de nivel de la Figura 2.1.4 con la gráfica de la función $f(x, y) = x + y + 2$, que es el plano $z = x + y + 2$.

Definición Curvas y superficies de nivel Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces el **conjunto de nivel de valor c** se define como el conjunto de aquellos puntos $\mathbf{x} \in U$ en los que $f(\mathbf{x}) = c$. Si $n = 2$, hablamos de una **curva de nivel** (de valor c); y si $n = 3$, hablamos de una **superficie de nivel**. En símbolos, el conjunto de nivel de valor c se escribe:

$$\{\mathbf{x} \in U \mid f(\mathbf{x}) = c\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Obsérvese que el conjunto de nivel siempre está en el dominio de la función.

Ejemplo 3

Solución

Describir la gráfica de la función cuadrática $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

La gráfica es el **paraboloide de revolución** $z = x^2 + y^2$, orientado hacia arriba desde el origen, alrededor del eje z . La curva de nivel de valor c es vacía para $c < 0$; para $c > 0$, la curva de nivel de valor c es el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = c\}$, una circunferencia de radio \sqrt{c} centrada en el origen. Por tanto, elevado a una altura c por encima del plano xy , el conjunto de nivel es una circunferencia de radio \sqrt{c} , lo que indica una forma parabólica (véanse las Figuras 2.1.6 y 2.1.7). ▲

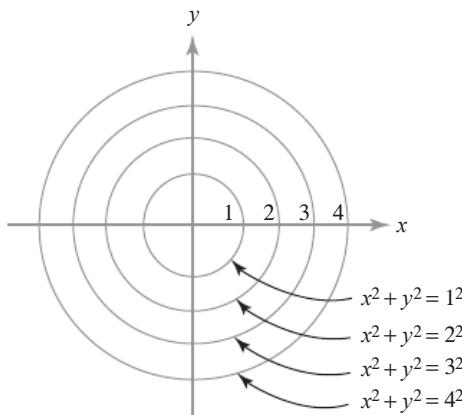


Figura 2.1.6 Algunas curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.

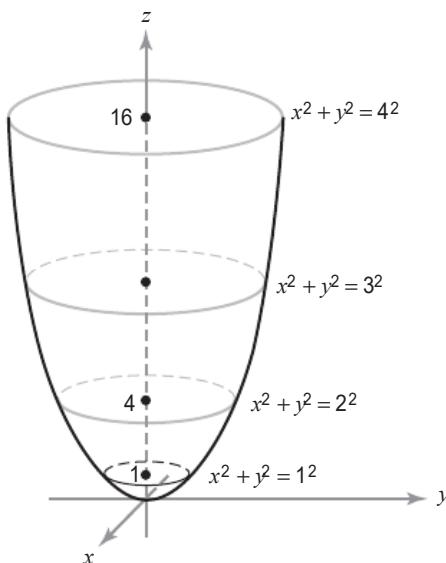


Figura 2.1.7 Curvas de nivel de la Figura 2.1.6 elevadas a la gráfica.

El método de las secciones

Por **sección** de la gráfica de f entendemos la intersección de la gráfica con un plano (vertical). Por ejemplo, si P_1 es el plano xz de \mathbb{R}^3 , definido por $y = 0$, entonces la sección de la función f del Ejemplo 3 es el conjunto

$$P_1 \cap \text{gráfica } f = \{(x, y, z) \mid y = 0, z = x^2\},$$

que es una parábola en el plano xz . De forma similar, si P_2 denota el plano yz , definido por $x = 0$, entonces la sección

$$P_2 \cap \text{gráfica } f = \{(x, y, z) \mid x = 0, z = y^2\}$$

es una parábola en el plano yz (véase la Figura 2.1.8). Suele ser conveniente calcular al menos una sección para complementar la información dada por los conjuntos de nivel.

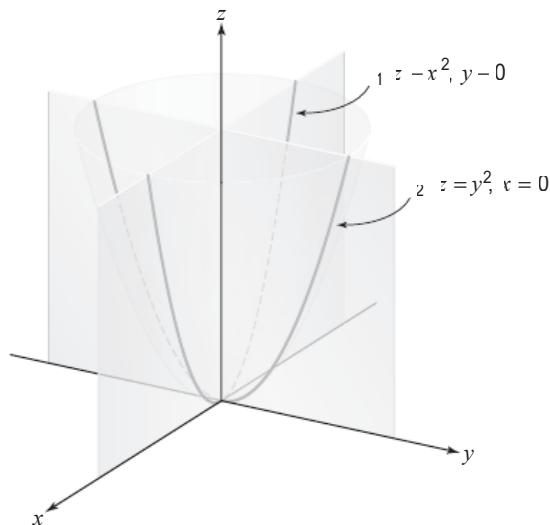


Figura 2.1.8 Dos secciones de la gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Ejemplo 4

La gráfica de la función cuadrática

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

es un **parabolóide hiperbólico**, o **silla de montar**, centrado en el origen. Dibujar su gráfica.

Solución

Para visualizar esta superficie, en primer lugar, dibujamos las curvas de nivel. Para determinar las curvas de nivel, resolvemos la ecuación $x^2 - y^2 = c$. Consideramos los valores $c = 0, \pm 1, \pm 4$. Para $c = 0$, tenemos $y^2 = x^2$, o $y = \pm x$, por lo que este conjunto de nivel consta de dos rectas que pasan por el origen. Para $c = 1$, la curva de nivel es $x^2 - y^2 = 1$, o $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$, que es una hipérbola que cruza verticalmente el eje x en los puntos $(\pm 1, 0)$ (véase la Figura 2.1.9). De forma similar, para $c = 4$, la curva de nivel está definida por $y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$, que es la hipérbola que cruza verticalmente el eje x en los puntos $(\pm 2, 0)$. Para $c = -1$, obtenemos la curva $x^2 - y^2 = -1$ —es decir, $x = \pm\sqrt{y^2 - 1}$ —la hipérbola que cruza horizontalmente el eje y en los puntos $(0, \pm 1)$. Y para $c = -4$, se obtiene la hipérbola que pasa por $(0, \pm 2)$. Estas curvas de nivel se muestran en la Figura 2.1.9. Dado que solo a partir de estos datos no es fácil visualizar la gráfica de f , vamos calcular dos secciones como en el ejemplo anterior. Para la sección en el plano xz , tenemos

$$P_1 \cap \text{gráfica } f = \{(x, y, z) \mid y = 0, z = x^2\},$$

que es una parábola abriéndose hacia arriba, y para el plano yz ,

$$P_2 \cap \text{gráfica } f = \{(x, y, z) \mid x = 0, z = -y^2\},$$

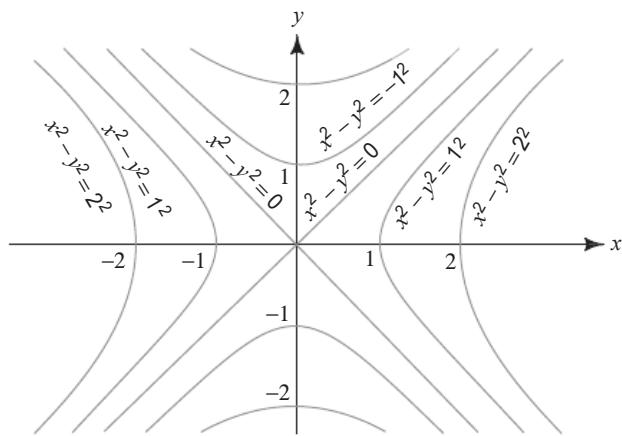


Figura 2.1.9 Curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$.

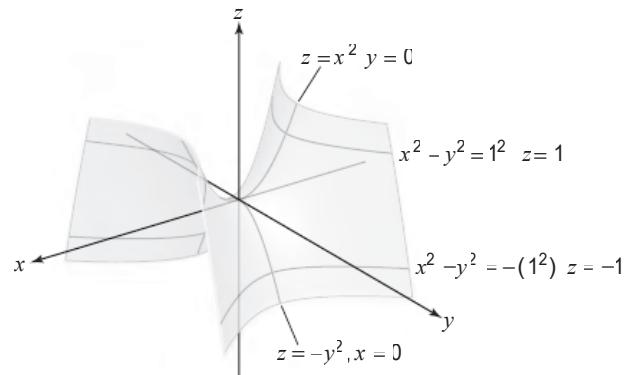


Figura 2.1.10 Algunas curvas de nivel sobre la gráfica de $f(x, y) = x^2 - y^2$.

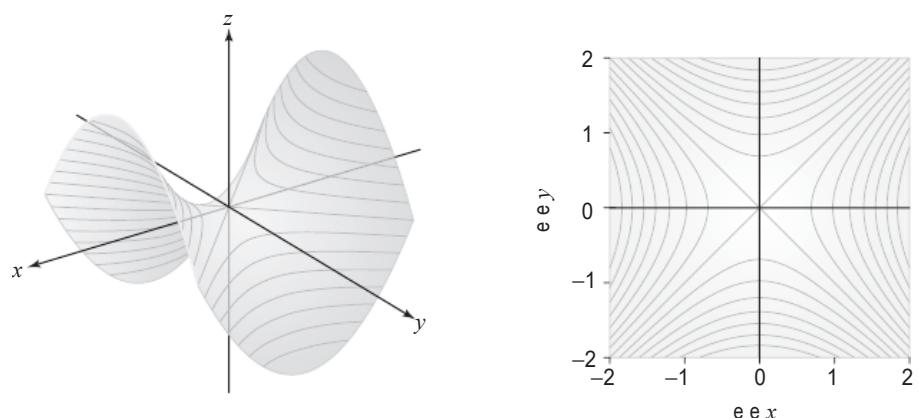


Figura 2.1.11 La gráfica de $z = x^2 - y^2$ y sus curvas de nivel.

que es una parábola abriéndose hacia abajo. Ahora la gráfica se puede visualizar elevando las curvas de nivel a las alturas apropiadas e imaginando una superficie suave que las contenga. El cálculo de las secciones parabólicas permite colocar las curvas de nivel de la forma adecuada. Este procedimiento genera la silla de montar hiperbólica indicada en la Figura 2.1.10. Compárese esta con las gráficas generadas por computadora de la Figura 2.1.11 (obsérvese que se ha cambiado la orientación de los ejes). ▲

Ejemplo 5

Describir los conjuntos de nivel de la función

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

Solución

Este es el análogo tridimensional del Ejemplo 3. En este contexto, los conjuntos de nivel son superficies en el dominio tridimensional \mathbb{R}^3 . La gráfica en \mathbb{R}^4 no se puede visualizar directamente, pero sus secciones se pueden calcular.

El conjunto de nivel de valor c es el conjunto

$$L_c = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = c\},$$

que es la esfera centrada en el origen con radio \sqrt{c} para $c > 0$, un único punto en el origen para $c = 0$ y es vacía para $c < 0$. Los conjuntos de nivel para $c = 0, 1, 4$ y 9 se indican en la Figura 2.1.12.

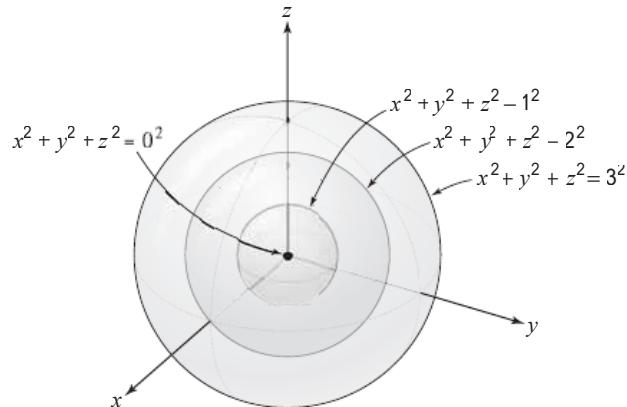


Figura 2.1.12 Algunas superficies de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. ▲

Ejemplo 6

Describir la gráfica de la función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, que es el análogo tridimensional del Ejemplo 4 y que también se denomina **silla de montar**.

Solución

Formalmente, la gráfica de f es un subconjunto del espacio de cuatro dimensiones. Si denotamos los puntos de este espacio por (x, y, z, t) , entonces la gráfica está dada por

$$\{(x, y, z, t) \mid t = x^2 + y^2 - z^2\}.$$

Las superficies de nivel de f se definen como

$$L_c = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = c\}.$$

Para $c = 0$, se obtiene el cono $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ centrado en el eje z . Para c negativo, por ejemplo, $c = -a^2$, obtenemos $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$, que es un hiperboloide de dos hojas alrededor del eje z , que corta al eje z en los puntos $(0, 0, \pm a)$. Para c positivo, por ejemplo, $c = b^2$, la superficie de nivel es el **hiperboloide de revolución de una hoja** alrededor del eje z definido por $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}$, que interseca el plano xy en la circunferencia de radio $|b|$. Estas superficies de nivel se muestran en la Figura 2.1.13.

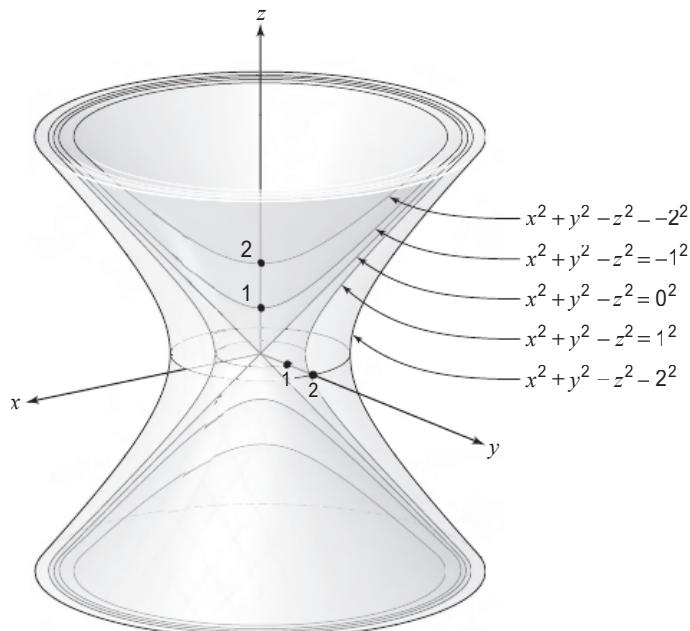


Figura 2.1.13 Superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

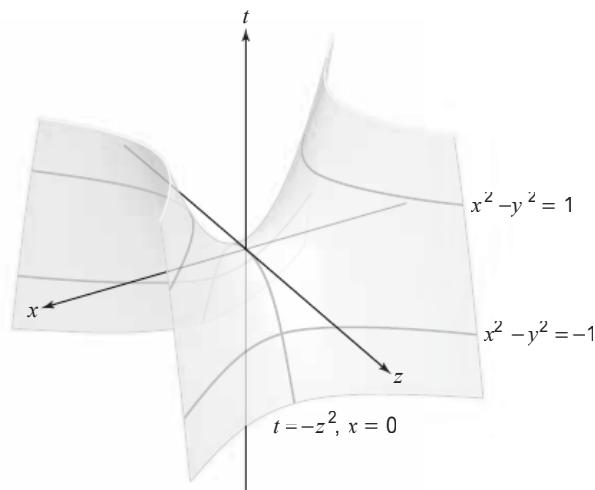


Figura 2.1.14 La sección $y = 0$ de la gráfica $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

Se puede obtener otra vista de la gráfica a partir de una sección. Por ejemplo, el subespacio $S_{y=0} = \{(x, y, z, t) \mid y = 0\}$ interseca la gráfica según la sección

$$S_{y=0} \cap \text{gráfica } f = \{(x, y, z, t) \mid y = 0, t = x^2 - z^2\},$$

es decir, el conjunto de puntos de la forma $(x, 0, z, x^2 - z^2)$, que se puede considerar como una superficie en el espacio xzt (véase la Figura 2.1.14). ▲

Hemos visto cómo los métodos de las secciones y de los conjuntos de nivel se pueden usar para entender el comportamiento de una función y su gráfica; estas técnicas pueden resultar bastante útiles a aquellos que deseen una visualización exhaustiva de datos complicados. Para hacer esto hay disponibles muchos programas informáticos. En la Figura 2.1.15. se muestra el resultado de uno de estos programas.

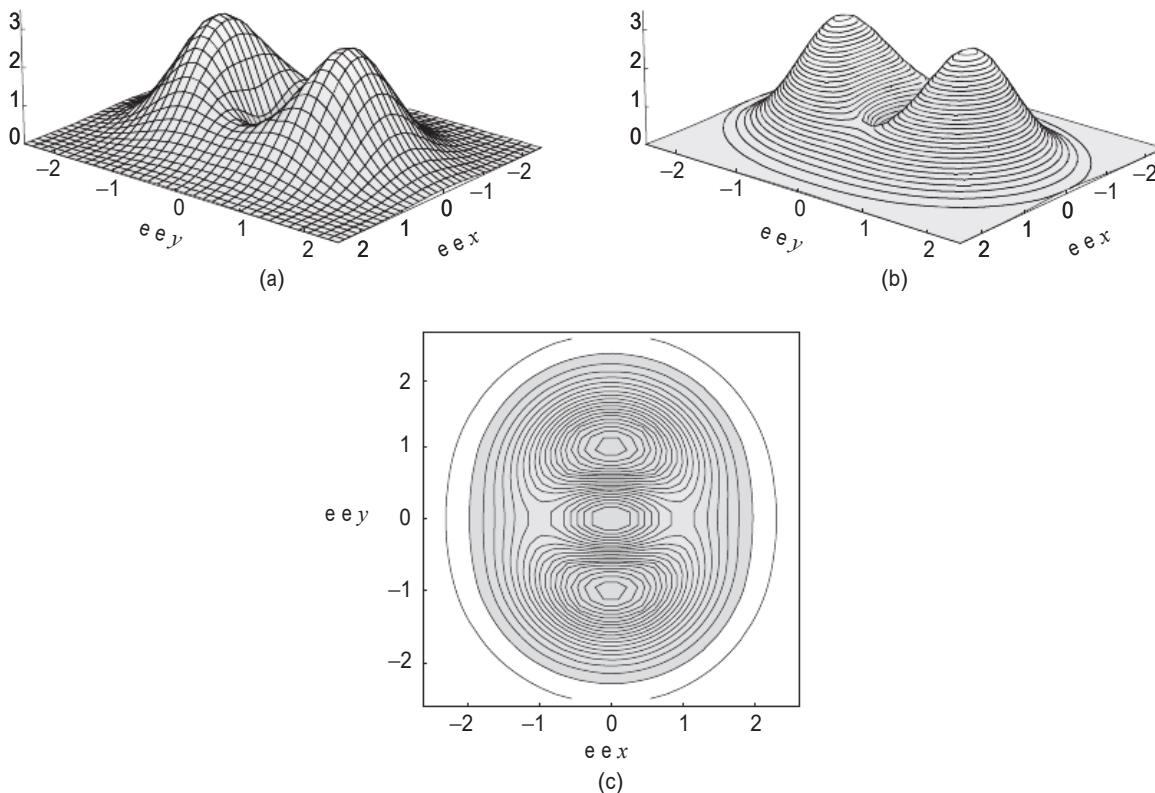


Figura 2.1.15 Gráfica generada por computadora de $z = (x^2 + 3y^2) \exp(1 - x^2 - y^2)$ representada de tres formas: (a) por secciones, (b) por curvas de nivel sobre la gráfica y (c) por curvas de nivel en el plano xy .

Ejercicios

- 1.** Indicar si las funciones siguientes son funciones con valores vectoriales o con valores escalares.
- $f(x, y, z) = e^x z^x \sin y$
 - $g(x, y) = (x^2 y^2, 2x - 1)$
 - $h(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t^2, t^3)$
- 2.** Indicar si las funciones siguientes son funciones con valores vectoriales o con valores escalares.
- $f(u, v, w) = (u^2 v, w e^u, 5v)$
 - $g(x) = \log \sqrt{x}$
 - $h(x, y) = x^5 y^{-3}$

En los Ejercicios 3 y 4, establecer la correspondencia entre las curvas de nivel dadas y sus descripciones visuales.
Véanse las Figuras 2.1.16 y 2.1.17.

3. (a) $f(x, y) = x^2 - y^2 = c$, $c = 0, 1, -1$
 (b) $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 = c$, $c = 6, 12$

4. (a) $f(x, y) = (x - y)^2 = c$, $c = 0, 1, 4$
 (b) $f(x, y) = (x + y)^2 = c$, $c = 0, 1, 4$

5. Dibujar las curvas de nivel para f de valores c .

(a) $f(x, y) = x^3 - y$, $c = -1, 0, 1$.
 (b) $f(x, y) = y - 2 \log x$, $c = -3, 0, 3$.
 (c) $f(x, y) = y \csc x$, $c = 0, 1, 2$.
 (d) $f(x, y) = x/(x^2 + y^2)$, $c = -2, 0, 4$.

6. Sea $f(x, y) = 9x^2 + y^2$. Dibujar:

(a) Las curvas de nivel para f de valores $c = 0, 1, 9$.

- (b) Las secciones de la gráfica de f en los planos $x = -1, x = 0, x = 1$.
 (c) Las secciones de la gráfica de f en los planos $y = -1, y = 0, y = 1$.
 (d) La gráfica de f .

7. Dibujar las curvas de nivel y las gráficas de las siguientes funciones:

(a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x - y + 2$
 (b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + 4y^2$
 (c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto -xy$

8. Dibujar los conjuntos de nivel de valores $c = 0, 1, 4, 9$ para $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. ¿En qué difieren las gráficas de f y g ? ¿En qué difieren sus secciones?

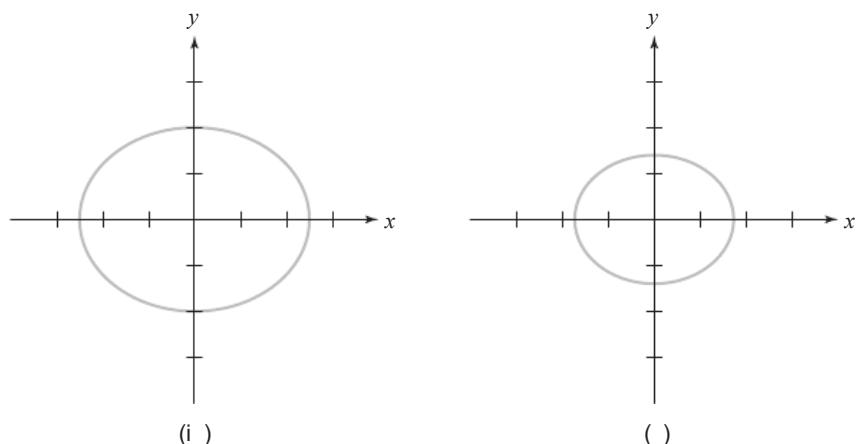
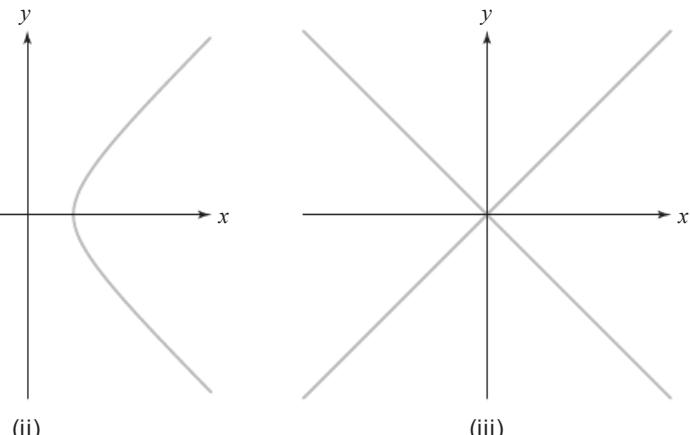
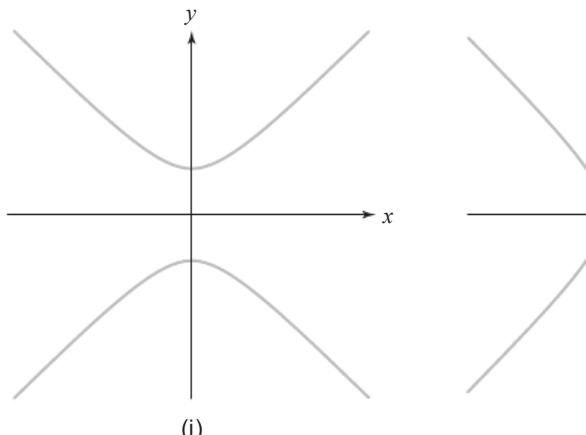


Figura 2.1.16 Ejercicio 3.

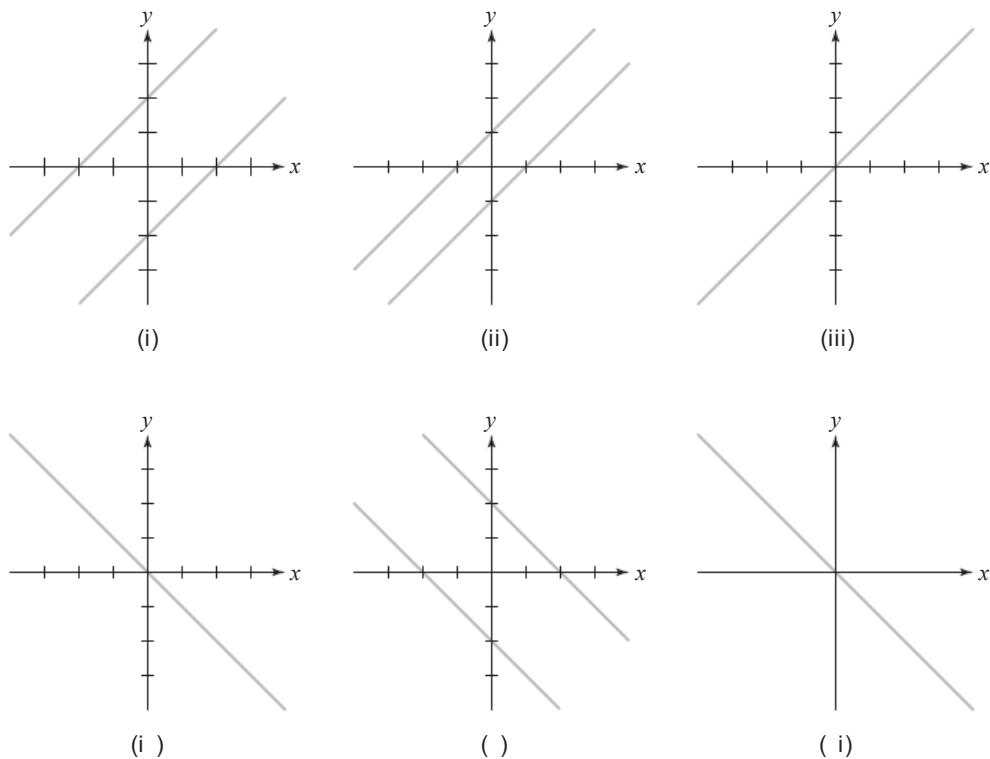


Figura 2.1.17 Ejercicio 4.

- 9.** Sea S la superficie en \mathbb{R}^3 definida por la ecuación $x^2y^6 - 2z = 3$.
- Determinar una función $f(x, y, z)$ de tres variables con valores reales y una constante c tal que S sea el conjunto de nivel de f de valor c .
 - Determinar una función $g(x, y)$ de dos variables con valores reales tal que S sea la gráfica de g .
- 10.** Describir el comportamiento, según varía c , de la curva de nivel $f(x, y) = c$ para cada una de las funciones siguientes:

En los Ejercicios 12 a 18, dibujar las curvas de nivel (en el plano xy) para la función f dada y los valores de c especificados. Dibujar la gráfica de $z = f(x, y)$.

- 12.** $f(x, y) = 4 - 3x + 2y, c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$
- 13.** $f(x, y) = (100 - x^2 - y^2)^{1/2}, c = 0, 2, 4, 6, 8, 10$
- 14.** $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}, c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$
- 15.** $f(x, y) = x^2 + y^2, c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$
- 16.** $f(x, y) = 3x - 7y, c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$
- 17.** $f(x, y) = x^2 + xy, c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$
- 18.** $f(x, y) = x/y, c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$

- $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$
- $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$
- $f(x, y) = x^3 - x$

- 11.** Para las funciones de los Ejemplos 2, 3 y 4, calcular la sección de la gráfica definida por el plano

$$S_\theta = \{(x, y, z) \mid y = x \tan \theta\}$$

para una constante dada θ . Para ello, expresar z como una función de r , donde $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. Determinar cuál de estas funciones f tiene la propiedad de que la forma de la sección $S_\theta \cap$ gráfica de f es independiente de θ .

En los Ejercicios del 19 al 21, dibujar o describir las superficies de nivel y una sección de la gráfica de cada función.

19. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto -x^2 - y^2 - z^2$

21. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2$

20. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 4x^2 + y^2 + 9z^2$

En los Ejercicios del 22 al 26, describir la gráfica de cada función calculando algunos de sus conjuntos de nivel y algunas de sus secciones.

22. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xy$

25. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto |y|$

23. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xy + yz$

26. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \max(|x|, |y|)$

24. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xy + z^2$

Dibujar o describir las superficies en \mathbb{R}^3 de las ecuaciones presentadas en los Ejercicios 27 a 39.

27. $4x^2 + y^2 = 16$

37. $4x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 0$

28. $x + 2z = 4$

38. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{9} = 1$

29. $z^2 = y^2 + 4$

39. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - by + 9z - b = 0$, donde b es una constante.

30. $x^2 + y^2 - 2x = 0$

40. Utilizando coordenadas polares, describir las curvas de nivel de la función definida por

31. $\frac{x}{4} = \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$

$$f(x, y) = 2xy/(x^2 + y^2) \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ y } f(0, 0) = 0.$$

32. $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 + \frac{x^2}{16}$

41. Sea $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada en coordenadas polares por $f(r, \theta) = (\cos 2\theta)/r^2$. Dibujar algunas curvas de nivel en el plano xy . Aquí, $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$.

33. $z = x^2$

42. Demostrar que en la Figura 2.1.15, la “curva” de nivel $z = 3$ consta de dos puntos.

34. $y^2 + z^2 = 4$

35. $z = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9}$

36. $y^2 = x^2 + z^2$

2.2 Límites y continuidad

En esta sección desarrollamos los conceptos de conjunto abierto, límites y continuidad; los conjuntos abiertos son necesarios para comprender los límites y, a su vez, los límites se necesitan para comprender la continuidad y la diferenciabilidad.

Como en el cálculo elemental, no es preciso dominar completamente el concepto de límite para resolver los problemas de diferenciación. Por esta razón, los profesores pueden tratar el material que proporcionamos

a continuación con distintos grados de rigor. Los estudiantes deberán consultar al profesor acerca del nivel de conocimientos requerido.

Conjuntos abiertos

Comenzamos definiendo disco abierto para formular el concepto de conjunto abierto. Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea r un número real positivo. El **disco abierto** (o **bola abierta**) de radio r y centro \mathbf{x}_0 se define como el conjunto de puntos \mathbf{x} tales que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$. Este conjunto se denota mediante $D_r(\mathbf{x}_0)$ y es el conjunto de puntos \mathbf{x} en \mathbb{R}^n cuya distancia a \mathbf{x}_0 es menor que r . Obsérvese que solo incluimos aquellos \mathbf{x} para los que se cumple la desigualdad *estricta*. El disco $D_r(\mathbf{x}_0)$ se ilustra en la Figura 2.2.1 para $n = 1, 2, 3$. En el caso $n = 1$ y $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}$, el disco abierto $D_r(\mathbf{x}_0)$ es el intervalo abierto $(x_0 - r, x_0 + r)$, formado por los números $x \in \mathbb{R}$ que están *estrictamente* entre $x_0 - r$ y $x_0 + r$. En el caso $n = 2$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, $D_r(\mathbf{x}_0)$ es el “interior” del disco de radio r centrado en \mathbf{x}_0 . En el caso $n = 3$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, $D_r(\mathbf{x}_0)$ es estrictamente la parte “interior” de la bola de radio r centrada en \mathbf{x}_0 .

Definición Conjuntos abiertos Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ (es decir, sea U un subconjunto de \mathbb{R}^n). Llamamos a U **conjunto abierto** si para todo punto \mathbf{x}_0 en U existe $r > 0$ tal que $D_r(\mathbf{x}_0)$ está contenido dentro de U ; simbólicamente, escribimos $D_r(\mathbf{x}_0) \subset U$ (véase la Figura 2.2.2).

El número $r > 0$ puede depender del punto \mathbf{x}_0 y, generalmente, r decrecerá cuando \mathbf{x}_0 se aproxime al “borde” de U . Intuitivamente, un conjunto U es abierto cuando los puntos de la “frontera” de U no pertenecen a U . En la Figura 2.2.2, la línea discontinua *no* está incluida en U .

Establecemos el convenio de que el conjunto vacío \emptyset (el conjunto que no tiene elementos) es abierto.

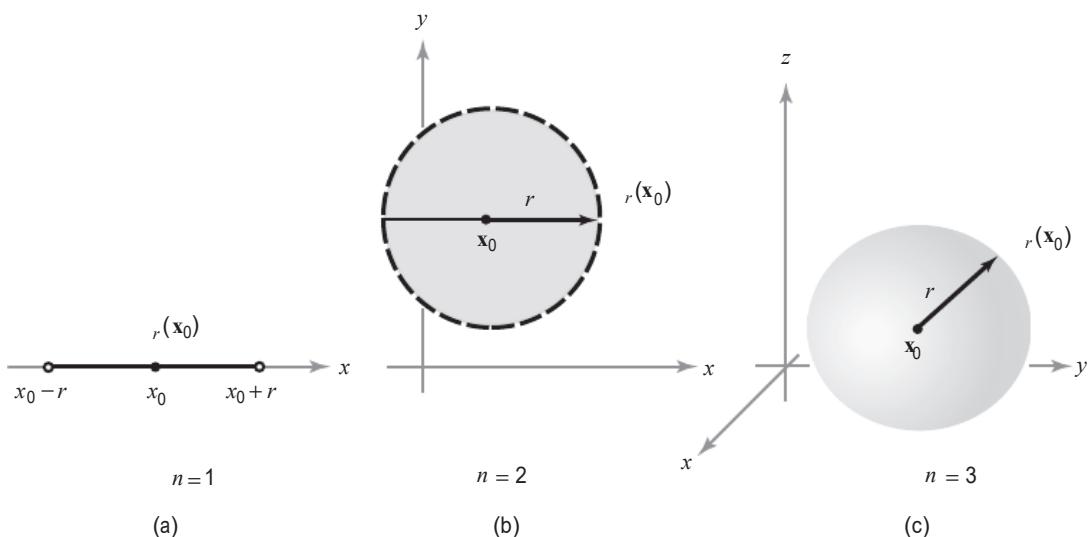


Figura 2.2.1 Los discos $D_r(\mathbf{x}_0)$ en (a) una, (b) dos y (c) tres dimensiones.

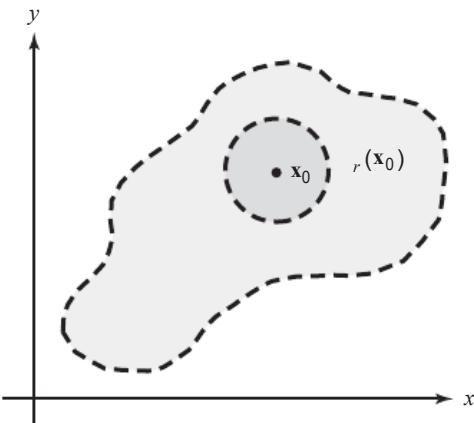


Figura 2.2.2 Un conjunto abierto U es aquel que contiene completamente algún disco $D_r(x_0)$ para cada uno de sus puntos x_0 .

Hemos definido disco abierto y conjunto abierto. Por la elección que hemos hecho de los términos parece que un disco abierto debería ser un conjunto abierto. Si pensamos un poco en ello vemos que este hecho requiere demostración. El siguiente teorema prueba esto.

Teorema 1 Para todo $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y para todo $r > 0$, $D_r(\mathbf{x}_0)$ es un conjunto abierto.

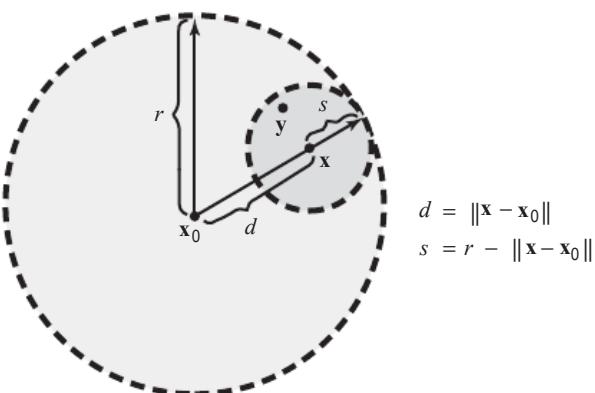
Demostración Sea $\mathbf{x} \in D_r(\mathbf{x}_0)$; es decir, sea $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$. Según la definición de conjunto abierto, debemos hallar un $s > 0$ tal que $D_s(\mathbf{x}) \subset D_r(\mathbf{x}_0)$. Si nos fijamos en la Figura 2.2.3, vemos que $s = r - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ es una elección razonable; nótese que $s > 0$, pero que s es tanto menor cuanto más cerca está \mathbf{x} del borde de $D_r(\mathbf{x}_0)$.

Para demostrar que $D_s(\mathbf{x}) \subset D_r(\mathbf{x}_0)$, sea $\mathbf{y} \in D_s(\mathbf{x})$; es decir, sea $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < s$. Queremos demostrar que también $\mathbf{y} \in D_r(\mathbf{x}_0)$. Demostrarlo, dada la definición de r -disco, es lo mismo que demostrar que $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < r$. Esto se hace utilizando la desigualdad triangular para vectores de \mathbb{R}^n :

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| = \|(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < s + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = r.$$

Así, $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < r$. ■

Figura 2.2.3 Geometría de la demostración de que un disco abierto es un conjunto abierto.



El siguiente ejemplo ilustra algunas técnicas que resultan útiles para determinar si un conjunto es abierto.

Ejemplo 1

Solución

Demostrar que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ es un conjunto abierto.

El conjunto está representado en la Figura 2.2.4.

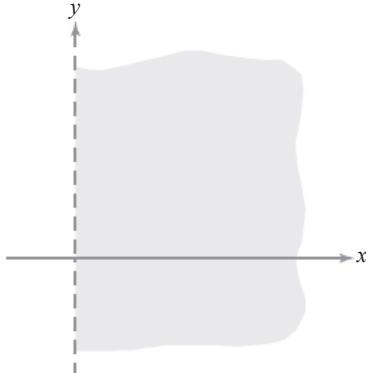


Figura 2.2.4 Demostrar que A es un conjunto abierto.

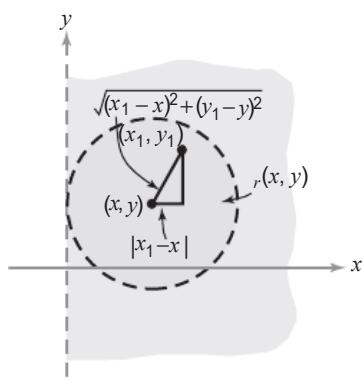


Figura 2.2.5 Construcción de un disco alrededor de un punto de A que está complementariamente contenido en A .

Intuitivamente, este conjunto es abierto, porque ninguno de los puntos de la “frontera”, $x = 0$, está contenido en el conjunto. Un argumento así suele bastar cuando uno se ha acostumbrado al concepto de conjunto abierto. Sin embargo, al principio deben proporcionarse más detalles. Para demostrar que A es un conjunto abierto, tenemos que demostrar que para todo punto $(x, y) \in A$ existe $r > 0$ tal que $D_r(x, y) \subset A$. Si $(x, y) \in A$, entonces $x > 0$. Se elige $r = x$. Si $(x_1, y_1) \in D_r(x, y)$, tenemos que

$$|x_1 - x| = \sqrt{(x_1 - x)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} < r = x,$$

y por tanto $x_1 - x < x$ y $x - x_1 < x$. La última desigualdad implica que $x_1 > 0$, es decir, $(x_1, y_1) \in A$. Por tanto, $D_r(x, y) \subset A$, y en consecuencia A es un conjunto abierto (véase la Figura 2.2.5). ▲

Es útil dar un nombre especial a un conjunto abierto que contiene un punto dado \mathbf{x} , ya que esta idea surge a menudo en el estudio de límites y continuidad. Así, por **entorno** de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se entiende un conjunto abierto U que contiene al punto \mathbf{x} . Por ejemplo, $D_r(\mathbf{x}_0)$ es un entorno de \mathbf{x}_0 para todo $r > 0$. El conjunto A del Ejemplo 1 es un entorno del punto $\mathbf{x}_0 = (3, -10)$.

Frontera

Presentamos ahora formalmente el concepto de punto frontera, al que hemos aludido en el Ejemplo 1.

Definición Puntos frontera Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se llama **punto frontera** de A si todo entorno de \mathbf{x} contiene al menos un punto de A y al menos un punto que no está en A .

En esta definición, el mismo \mathbf{x} puede estar o no estar en A ; si $\mathbf{x} \in A$, entonces \mathbf{x} es un punto frontera si todo entorno de \mathbf{x} contiene al menos un punto que *no* está en A (ya contiene un punto de A , concretamente, \mathbf{x}). De forma similar, si \mathbf{x} no está en A , este es un punto frontera si todo entorno de \mathbf{x} contiene al menos un punto de A .

Nos interesarán especialmente los puntos frontera de los conjuntos abiertos. De acuerdo con la definición de conjunto abierto, ningún punto de un conjunto abierto A puede ser un punto frontera de A . Por tanto, *un punto \mathbf{x} es un punto frontera de un conjunto abierto A si y solo si \mathbf{x} no es un punto de A y todo entorno de \mathbf{x} tiene intersección no vacía con A* .

Esto expresa en términos precisos la idea intuitiva de que un punto frontera de A es un punto que está en el “borde” de A . En muchos ejemplos está perfectamente claro cuáles son los puntos frontera.

Ejemplo 2

- (a) Sea $A = (a, b)$ en \mathbb{R} . Entonces los puntos frontera de A son los puntos a y b . La Figura 2.2.6 y la definición permiten ver esto con claridad. [En el Ejercicio 28(c) se le pide al lector que lleve a cabo la demostración.]

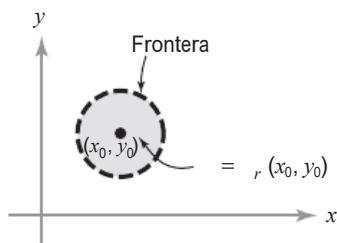


Figura 2.2.7 La frontera de A está formada por los puntos del borde de A .

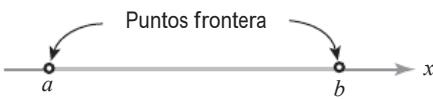


Figura 2.2.6 Puntos frontera del intervalo (a, b) .

- (b) Sea $A = D_r(x_0, y_0)$ un r -disco en el plano con centro en (x_0, y_0) . La frontera está formada por los puntos (x, y) tales que $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ (Figura 2.2.7).
- (c) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Entonces la frontera de A está formada por todos los puntos del eje y (dibujar una figura que describa esto).
- (d) Sea A el disco $D_r(\mathbf{x}_0)$ menos el punto \mathbf{x}_0 (un disco “perforado” con centro en \mathbf{x}_0). Entonces \mathbf{x}_0 es un punto frontera de A . ▲

Límites

Ahora vamos a centrarnos en el concepto de límite. *A lo largo de la siguiente exposición el dominio de definición de la función f será un conjunto abierto A .* Nos interesa hallar el límite de f cuando $\mathbf{x} \in A$ se approxima, bien a un punto de A , bien a un punto frontera de A .

Debe apreciarse el hecho de que el concepto de límite es una herramienta básica y útil para el análisis de funciones, que nos permite estudiar las derivadas, y por tanto los máximos y mínimos, las asíntotas, las integrales impropias y otras características importantes de las funciones, y además resulta útil en las series infinitas y las sucesiones. Vamos a presentar una teoría de límites de funciones de varias variables que incluye la teoría de funciones de una variable como un caso especial.

En el cálculo de una variable, se estudia el concepto de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ para una función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de un subconjunto A de los números reales en los números reales. Intuitivamente, esto significa que cuando x se acerca más y más a x_0 , los valores de $f(x)$ se acercan más y más a (el valor límite) l . Para fundamentar matemáticamente esta idea intuitiva normalmente se utiliza el “método de los épsilon (ε) y delta (δ)” o el “método de los entornos”. Esto mismo también se aplica para las funciones de varias variables. A continuación vamos a desarrollar el método de los entornos para definir los límites. El método épsilon-delta se deja como estudio opcional al final de la sección.

Definición Límite Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde A es un conjunto abierto. Sea \mathbf{x}_0 un punto de A o un punto frontera de A , y sea N un entorno de $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Decimos que f **finaliza en N cuando \mathbf{x} tiende a \mathbf{x}_0** si existe un entorno U de \mathbf{x}_0 tal que $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in U$ y $\mathbf{x} \in A$ implican $f(\mathbf{x}) \in N$. [El significado geométrico de esta definición se ilustra en la Figura 2.2.8; obsérvese que no es necesario que \mathbf{x}_0 pertenezca a A , de forma que $f(\mathbf{x}_0)$ no está necesariamente definido]. Decimos que $f(\mathbf{x})$ **tiende a \mathbf{b}** cuando \mathbf{x} tiende a \mathbf{x}_0 , o simbólicamente,

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad \text{o} \quad f(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{b} \quad \text{cuando } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0,$$

si, dado *cualquier* entorno N de \mathbf{b} , f finaliza en N cuando \mathbf{x} tiende a \mathbf{x}_0 [es decir, “ $f(\mathbf{x})$ está cerca de \mathbf{b} si \mathbf{x} está cerca de \mathbf{x}_0 ”]. Puede ocurrir que cuando \mathbf{x} tiende a \mathbf{x}_0 , los valores de $f(\mathbf{x})$ no se acercan a ningún valor concreto. En este caso, decimos que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ **no existe**.

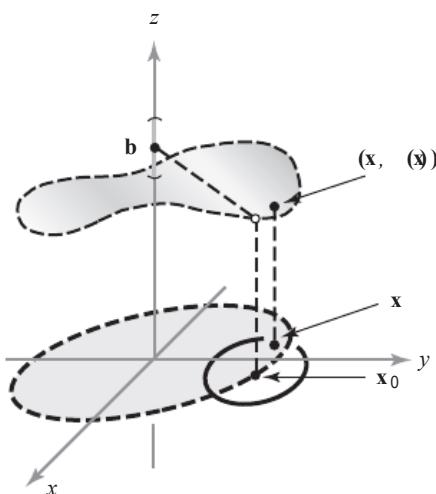


Figura 2.2.8 Límites en términos de entornos: si \mathbf{x} pertenece a U , entonces $f(\mathbf{x})$ pertenecerá a N . (El pequeño círculo blanco denota que el punto no está sobre la gráfica.) En la figura, $f: A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}$. (La línea discontinua no está en la gráfica de f .)

Por tanto, cuando consideremos el concepto de $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$, supondremos siempre que \mathbf{x}_0 bien pertenece a un conjunto abierto en el que está definida f o bien está en la frontera de ese conjunto.

Una razón por la que insistimos en que $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ en la definición de límite quedará clara si recordamos del cálculo de una variable que deseamos poder definir la derivada $f'(x_0)$ de una función f en el punto x_0 como

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

y esta expresión no está definida en $x = x_0$.

Ejemplo 3

- (a) Este ejemplo ilustra un límite que no existe. Consideremos la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

El $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe, ya que existen puntos x_1 tan cerca como se quiera de 0 para los que $f(x_1) = 1$ y también puntos x_2 tan cerca como se quiera de 0 para los que $f(x_2) = -1$; es decir, no hay un único número al que f se acerque cuando x se approxima a 0 (véase la Figura 2.2.9). Si f se restringe al dominio $(0, 1)$ o al dominio $(-1, 0)$, entonces el límite sí que existe. ¿Puede el lector decir por qué?

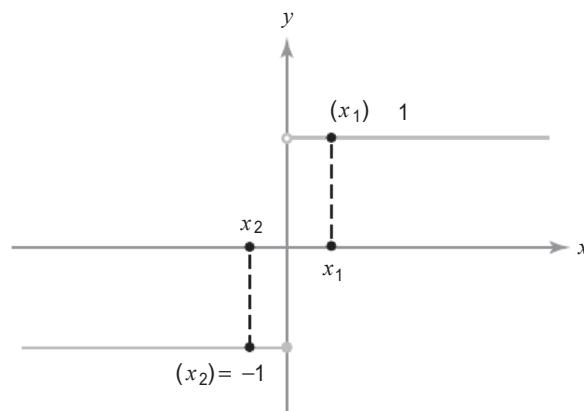


Figura 2.2.9 El límite de esta función cuando $x \rightarrow 0$ no existe.

- (b) Este ejemplo ilustra una función cuyo límite existe, pero cuyo valor límite no es igual al valor de la función en el punto en que se toma el límite. Definimos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Es cierto que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, ya que para todo entorno U de 0, $x \in U$ y $x \neq 0$ se tiene que $f(x) = 0$. En la Figura 2.2.10 vemos que f se aproxima a 0 cuando $x \rightarrow 0$; no nos importa que f tome un valor distinto de 0.

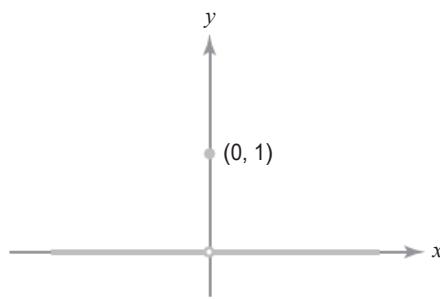


Figura 2.2.10 El límite de esta función cuando $x \rightarrow 0$ es cero.

Ejemplo 4

Usar la definición para verificar el “obvio” $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, donde \mathbf{x} y $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Solución

Sea f la función definida por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ y sea N un entorno cualquiera de \mathbf{x}_0 . Tenemos que demostrar que $f(\mathbf{x})$ finaliza en N cuando $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. De acuerdo con la definición, tenemos que hallar un entorno U de \mathbf{x}_0 con la propiedad de que si $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x} \in U$, entonces $f(\mathbf{x}) \in N$. Tomamos $U = N$. Si $\mathbf{x} \in U$, entonces $\mathbf{x} \in N$; dado que $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$, se sigue que $f(\mathbf{x}) \in N$. Por tanto, hemos demostrado que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. De igual forma tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0, \quad \text{etc.}$$

De aquí en adelante, podemos suponer, sin demostración, la validez de los límites del cálculo de una variable. Por ejemplo, se puede usar que $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$ y $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = \sin 0 = 0$.

Ejemplo 5

Este ejemplo demuestra otro caso en el que el límite no puede simplemente “leerse” de la función. Hallar $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ donde

$$g: x \mapsto \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}.$$

Solución

Representamos esta función en la Figura 2.2.11(a).

Vemos que $g(1)$ no está definido, ya que la división por cero no está definida. Sin embargo, si multiplicamos el numerador y el denominador de $g(x)$ por $\sqrt{x} + 1$, determinaremos que para todo x en el dominio de g se tiene que

$$g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1, \quad x \neq 1.$$

La expresión $g^*(x) = \sqrt{x} + 1$ está definida y toma el valor 2 en $x = 1$; del cálculo de una variable, $g^*(x) \rightarrow 2$ cuando $x \rightarrow 1$. Pero dado que $g^*(x) = g(x)$ para todo $x \geq 0, x \neq 1$, tenemos que forzosamente $g(x) \rightarrow 2$ cuando $x \rightarrow 1$.

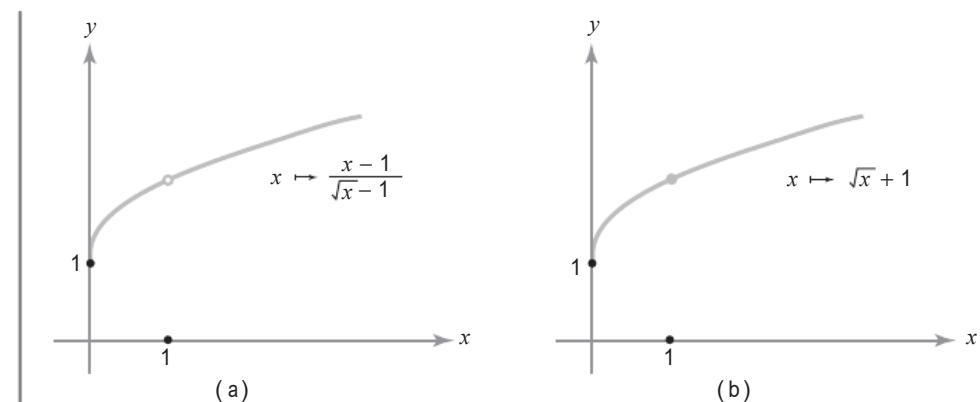


Figura 2.2.11 Estas dos gráficas son iguales excepto en que en la parte (a) g no está definida en $x = 1$, mientras que en la parte (b), g^* está definida para todo $x \geq 0$. ▲

Más adelante estudiaremos otros ejemplos de dos variables.

Propiedades de los límites

Para hablar con propiedad de *el límite*, deberíamos establecer que f puede tener *como máximo un límite* cuando $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. Intuitivamente esta propiedad es clara y ahora vamos a enunciarla formalmente.

Teorema 2 Unicidad del límite

Si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1$ y $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2$, entonces $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$.

Para llevar a cabo cálculos prácticos con límites, necesitamos algunas reglas para los límites, como, por ejemplo, que el límite de una suma es la suma de los límites. Estas reglas se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3 Propiedades de los límites Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, \mathbf{x}_0 un punto de A o un punto frontera de A , $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$; entonces

- (I) Si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, entonces $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} cf(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}$, donde $cf: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ se define mediante $\mathbf{x} \mapsto c(f(\mathbf{x}))$.
- (II) Si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1$ y $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2$, entonces $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (f+g)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, donde $(f+g): A \rightarrow \mathbb{R}^m$ se define mediante $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$.

Teorema 3 Propiedades de los límites (Cont.)

- (III) Si $m = 1$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b_1$, y $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = b_2$, entonces $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (fg)(\mathbf{x}) = b_1 b_2$, donde $(fg): A \rightarrow \mathbb{R}$ se define mediante $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$.
- (IV) Si $m = 1$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b \neq 0$, y $f(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in A$, entonces $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} 1/f(\mathbf{x}) = 1/b$, donde $1/f: A \rightarrow \mathbb{R}$ se define mediante $\mathbf{x} \mapsto 1/f(\mathbf{x})$.
- (V) Si $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$, donde $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, son las componentes de la función f , entonces $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ si y solo si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = b_i$ para cada $i = 1, \dots, m$.

Estos resultados debieran ser intuitivamente claros. Por ejemplo, la regla II dice que si $f(\mathbf{x})$ está cerca de \mathbf{b}_1 y $g(\mathbf{x})$ está cerca de \mathbf{b}_2 cuando \mathbf{x} está cerca de \mathbf{x}_0 , entonces $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ está cerca de $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ cuando \mathbf{x} está cerca de \mathbf{x}_0 . El siguiente ejemplo ilustra cómo se utiliza esto.

Ejemplo 6

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 2$. Calcular el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y).$$

Solución

Aquí f es la suma de las tres funciones $(x, y) \mapsto x^2$, $(x, y) \mapsto y^2$ y $(x, y) \mapsto 2$. El límite de una suma es la suma de los límites y el límite de un producto es el producto de los límites (Teorema 3). Por tanto, usando el hecho de que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0$ (Ejemplo 4), obtenemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x^2 = \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x \right) \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x \right) = x_0^2$$

y usando el mismo razonamiento, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} y^2 = y_0^2$. En consecuencia,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y) = 0^2 + 1^2 + 2 = 3.$$

Funciones continuas

En el cálculo de una variable aprendimos que la idea de función continua se basa en la noción intuitiva de una función cuya gráfica es una curva sin fracturas; es decir, una curva que no tiene *saltos*, o la curva que trazaría una partícula en movimiento o la punta de un lápiz deslizándose por el papel sin levantarse.

Para realizar un detallado análisis de las funciones, necesitamos conceptos más precisos que esta vaga noción. Un ejemplo puede clarificar

estas ideas. Consideremos la función concreta $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -1$ si $x \leq 0$ y $f(x) = 1$ si $x > 0$. La gráfica de f se muestra en la Figura 2.2.12(a). El pequeño círculo blanco denota el hecho de que el punto $(0, 1)$ no está en la gráfica de f . Claramente, la gráfica de f se interrumpe en $x = 0$. Consideremos también la función $g: x \mapsto x^2$. Esta función se muestra en la Figura 2.2.12(b). La gráfica de g no se interrumpe en ningún punto.

Si examinamos ejemplos de funciones como f , cuyas gráficas se interrumpen en algún punto x_0 y funciones como g , cuyas gráficas no se interrumpen, vemos que la principal diferencia entre ellas es que para una función como g , los valores de $g(x)$ se aproximan a $g(x_0)$ cuando x se acerca más y más a x_0 . La misma idea es aplicable a funciones de varias variables. Pero la noción de más y más cerca no es suficiente como definición matemática; por tanto, formularemos estos conceptos de forma precisa en términos de límites.

Ya que la condición $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$ significa que $f(\mathbf{x})$ está cerca de $f(\mathbf{x}_0)$ cuando \mathbf{x} está cerca de \mathbf{x}_0 , vemos que esta condición de límite coincide ciertamente con el requisito de la no interrupción de la gráfica

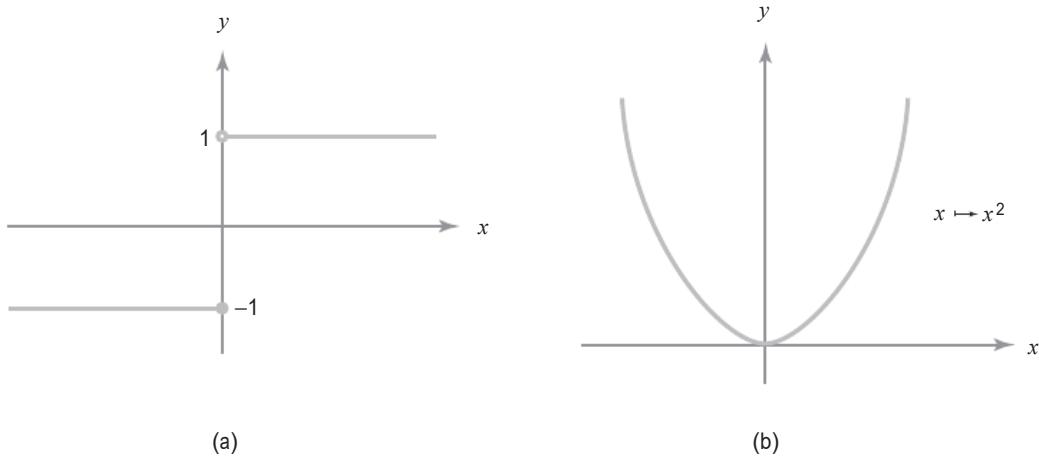


Figura 2.2.12 La función f de la parte (a) no es continua porque su valor salta cuando x cruza el punto 0, mientras que la función g de la parte (b) es continua.

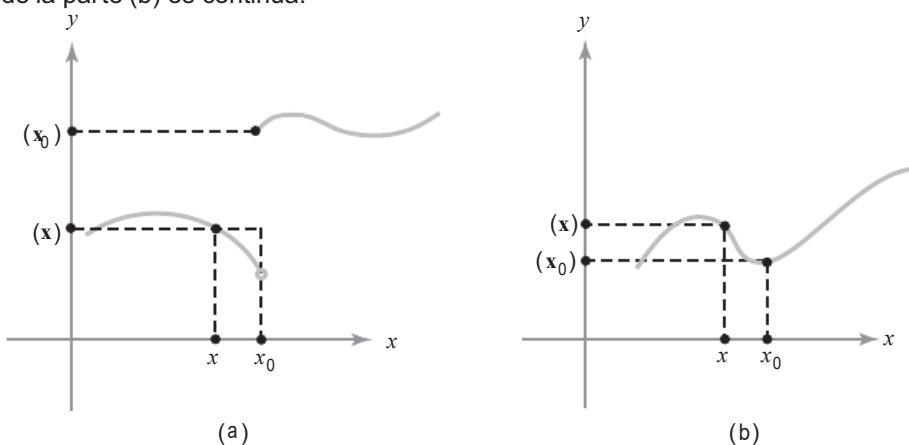


Figura 2.2.13 (a) Función discontinua en la que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ no existe. (b) Función continua en la que el límite existe y es igual a $f(x_0)$.

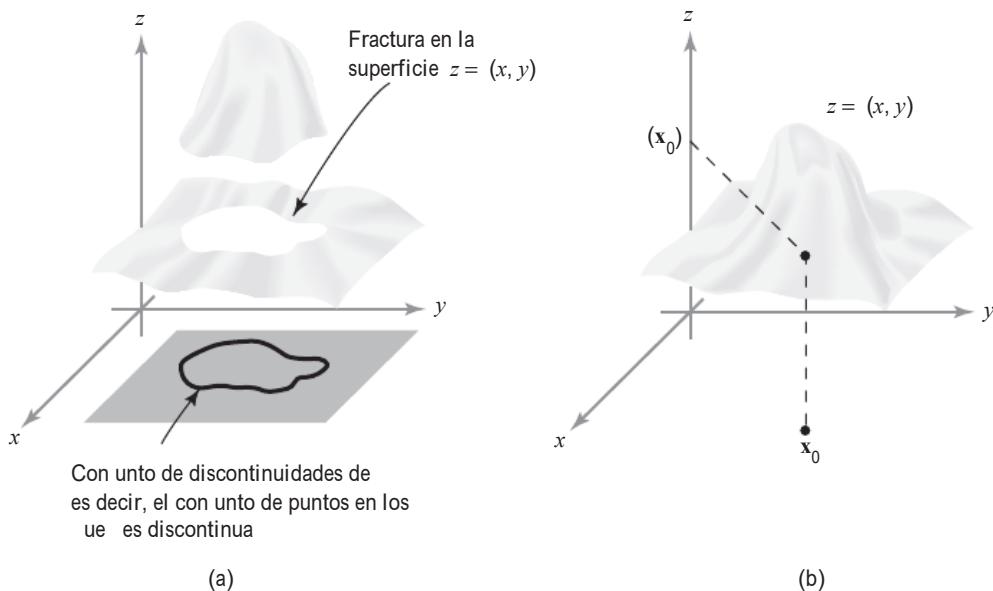


Figura 2.2.14 (a) Una función discontinua de dos variables. (b) Una función continua.

de f (véase la Figura 2.2.13, en la que se ilustra el caso $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). El caso de varias variables es más fácil de visualizar si tratamos con funciones de valores reales de la forma $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. En este caso, podemos visualizar f dibujando su gráfica, que consiste en todos los puntos (x, y, z) en \mathbb{R}^3 con $z = f(x, y)$. La continuidad de f significa, por tanto, que su gráfica no tiene “fracturas” (véase la Figura 2.2.14).

Definición Continuidad Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función dada con dominio A . Sea $\mathbf{x}_0 \in A$. Decimos que f es **continua** en \mathbf{x}_0 si y solo si

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Si decimos solamente que f es ***continua***, queremos decir que f es continua en cada punto x_0 de A . Si f no es continua en x_0 , decimos que f es ***discontinua*** en x_0 . Si f es discontinua en algún punto de su dominio, decimos que f es ***discontinua***.

Ejemplo 7

Cualquier polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ es continuo de \mathbb{R} en \mathbb{R} . De hecho, por el Teorema 3 y el Ejemplo 4,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) &= \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 + \lim_{x \rightarrow x_0} a_1 x + \cdots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_n x^n \\ &= a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n,\end{aligned}$$

ya que el límite de un producto es el producto de los límites, lo que da

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^n = x_0^n.$$

Ejemplo 8

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$. Entonces f es continua, ya que, por los teoremas de los límites y el Ejemplo 4,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} xy = \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x \right) \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} y \right) = x_0 y_0. \quad \blacktriangle$$

Podemos ver usando el mismo método que cualquier polinomio $p(x, y)$ [por ejemplo, $p(x, y) = 3x^2 - 6xy^2 + y^3$] en x e y es continuo.

Ejemplo 9

La función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \text{ o } y \leq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

no es continua en $(0, 0)$ ni en ningún punto del eje x positivo o del eje y positivo. De hecho, si $(x_0, y_0) = \mathbf{u}$ es uno de tales puntos (es decir, $x_0 = 0$ e $y_0 \geq 0$, o $y_0 = 0$ y $x_0 \geq 0$) y $\delta > 0$, existen puntos $(x, y) \in D_\delta(\mathbf{u})$, un entorno de \mathbf{u} , con $f(x, y) = 1$ y otros puntos $(x, y) \in D_\delta(\mathbf{u})$ con $f(x, y) = 0$. Por tanto, no es cierto que $f(x, y) \rightarrow f(x_0, y_0) = 1$ cuando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. \blacktriangle

Para demostrar que una función es continua, podemos utilizar los teoremas de los límites (véanse el Teorema 3 y el Ejemplo 7). Si transcribimos esos resultados en términos de continuidad, llegamos a lo siguiente:

Teorema 4 Propiedades de las funciones continuas Supóngase que $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y sea c un número real.

- (I) Si f es continua en \mathbf{x}_0 , también lo es cf , donde $(cf)(\mathbf{x}) = c[f(\mathbf{x})]$.
- (II) Si f y g son continuas en \mathbf{x}_0 , también lo es $f + g$, donde la suma de f y g se define como $(f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$.
- (III) Si f y g son continuas en \mathbf{x}_0 y $m = 1$, entonces la función producto fg definida por $(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ es continua en \mathbf{x}_0 .
- (IV) Si $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en \mathbf{x}_0 y no se anula en A , entonces el cociente $1/f$ es continuo en \mathbf{x}_0 , donde $(1/f)(\mathbf{x}) = 1/f(\mathbf{x})$.
- (V) Si $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$, entonces f es continua en \mathbf{x}_0 si y solo si cada una de las funciones con valores reales f_1, \dots, f_m es continua en \mathbf{x}_0 .

A menudo se emplea una variante de la propiedad (IV): si $f(\mathbf{x}_0) \neq 0$ y f es continua, entonces $f(\mathbf{x}) \neq 0$ en un entorno de \mathbf{x}_0 y, por tanto, $1/f$ está definida en dicho entorno y es continua en \mathbf{x}_0 .

Ejemplo 10

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2y, (y + x^3)/(1 + x^2))$. Demostrar que f es continua.

Solución

Para ver esto, basta con demostrar, mediante la propiedad (v) del Teorema 4, que cada componente es continua. Como hemos mencionado, cualquier polinomio de dos variables es continuo; por tanto, la aplicación $(x, y) \mapsto x^2y$ es continua. Dado que $1 + x^2$ es continua y distinta de cero, por la propiedad (IV), sabemos que $1/(1 + x^2)$ es continua; por lo que $(y + x^3)/(1 + x^2)$ es un producto de funciones continuas y por la propiedad (III) es continuo. ▲

Razonamientos similares se aplican a ejemplos como la función $\mathbf{c}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{c}(t) = (t^2, 1, t^3/(1 + t^2))$ para demostrar que también son funciones continuas.

Composición

A continuación vamos a estudiar la *composición*, otra operación básica que se puede realizar con funciones. Si g aplica A en B y f aplica B en C , la **composición de g con f** , o de f sobre g , que se denota por $f \circ g$, aplica A en C y lleva $\mathbf{x} \mapsto f(g(\mathbf{x}))$ (véase la Figura 2.2.15). Por ejemplo, $\operatorname{sen}(x^2)$ es la composición de $x \mapsto x^2$ con $y \mapsto \operatorname{sen} y$.

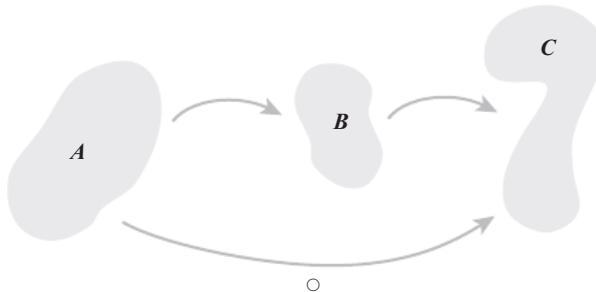


Figura 2.2.15 La composición de f sobre g .

Teorema 5 Continuidad de las composiciones Sea $g: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y sea $f: B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. Supongamos que $g(A) \subset B$, de modo que $f \circ g$ está definida en A . Si g es continua en $\mathbf{x}_0 \in A$ y f es continua en $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en \mathbf{x}_0 .

La intuición que hay tras esto es muy sencilla. Intuitivamente, debemos demostrar que cuando \mathbf{x} se acerca a \mathbf{x}_0 , $f(g(\mathbf{x}))$ se approxima a $f(g(\mathbf{x}_0))$. Pero cuando \mathbf{x} se acerca a \mathbf{x}_0 , $g(\mathbf{x})$ se approxima a $g(\mathbf{x}_0)$ (por la continuidad de g en \mathbf{x}_0); y al acercarse $g(\mathbf{x})$ a $g(\mathbf{x}_0)$, $f(g(\mathbf{x}))$ se acerca a $f(g(\mathbf{x}_0))$ (por la continuidad de f en $g(\mathbf{x}_0)$).

Ejemplo 11

Sea $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{30} + \operatorname{sen} z^3$. Demostrar que f es continua.

Solución

Podemos escribir f como la suma de las dos funciones $(x^2 + y^2 + z^2)^{30}$ y $\operatorname{sen} z^3$, por lo que bastará con demostrar que cada una de ellas es

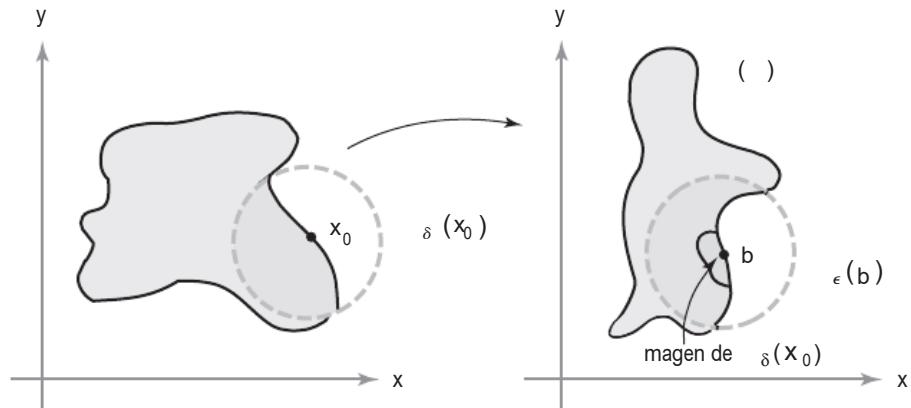
continua. La primera es la composición de $(x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2)$ con $u \mapsto u^{30}$, y la segunda es la composición de $(x, y, z) \mapsto z^3$ con $u \mapsto \operatorname{sen} u$, y por tanto, por el Teorema 5, tenemos continuidad. \blacktriangle

Límites en términos de ε y δ

Vamos a enunciar ahora un teorema que proporciona una formulación útil de la noción de límite en términos de épsilons y deltas, y que a menudo se toma como *definición* de límite. De hecho, esta es otra forma de precisar la formulación intuitiva de que “ $f(\mathbf{x})$ se acerca a \mathbf{b} cuando \mathbf{x} se acerca a \mathbf{x}_0 ”. Para entender esta formulación, el lector puede considerarla en cada uno de los ejemplos ya vistos.

Teorema 6 Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y sea \mathbf{x}_0 un punto de A o un punto frontera de A . Entonces $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $\mathbf{x} \in A$ que satisface $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ se tiene que $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$ (véase la Figura 2.2.16).

Figura 2.2.16 Geometría de la definición ε - δ de límite.



Para ilustrar la metodología de la técnica épsilon-delta del Teorema 6, vamos a considerar los siguientes ejemplos.

Ejemplo 12

Demostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$ usando el método ε - δ .

Solución

Observemos que si $\delta > 0$, $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ implica $|x - 0| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$. Por tanto, si $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$, entonces $|x - 0|$ también es menor que δ . Dado $\varepsilon > 0$, debemos hallar $\delta > 0$ (que generalmente depende de ε) con la propiedad de que $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ implique $|x - 0| < \varepsilon$. ¿Cómo elegiremos δ ? Del cálculo anterior, vemos que si elegimos $\delta = \varepsilon$, entonces $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$

implica que $|x - 0| < \varepsilon$. Esto demuestra que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, también podríamos haber tomado $\delta = \varepsilon/2$ o $\varepsilon/3$, pero es suficiente con hallar un solo δ que satisfaga los requisitos de la definición de límite. ▲

Ejemplo 13

Consideremos la función

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$

Aún cuando f no está definida en $(0, 0)$, determinar si $f(x, y)$ se approxima a algún número cuando (x, y) se aproxima a $(0, 0)$.

Solución

Del cálculo de una variable o por la regla de L'Hôpital, sabemos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

Por tanto, es razonable conjeturar que

$$\lim_{\mathbf{v} \rightarrow (0,0)} f(\mathbf{v}) = \lim_{\mathbf{v} \rightarrow (0,0)} \frac{\sin \|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} = 1.$$

De hecho, dado que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\sin \alpha)/\alpha = 1$, para $\varepsilon > 0$ podemos hallar $\delta > 0$, con $0 < \delta < 1$, tal que $0 < |\alpha| < \delta$ implica que $|(\sin \alpha)/\alpha - 1| < \varepsilon$. Si $0 < \|\mathbf{v}\| < \delta$, entonces $0 < \|\mathbf{v}\|^2 < \delta^2 < \delta$ y, por tanto,

$$|f(\mathbf{v}) - 1| = \left| \frac{\sin \|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Por tanto, $\lim_{\mathbf{v} \rightarrow (0,0)} f(\mathbf{v}) = 1$. Si representamos $[\sin(x^2 + y^2)]/(x^2 + y^2)$ en una computadora, obtenemos una gráfica que de hecho se comporta bien cerca de $(0, 0)$ (Figura 2.2.17).

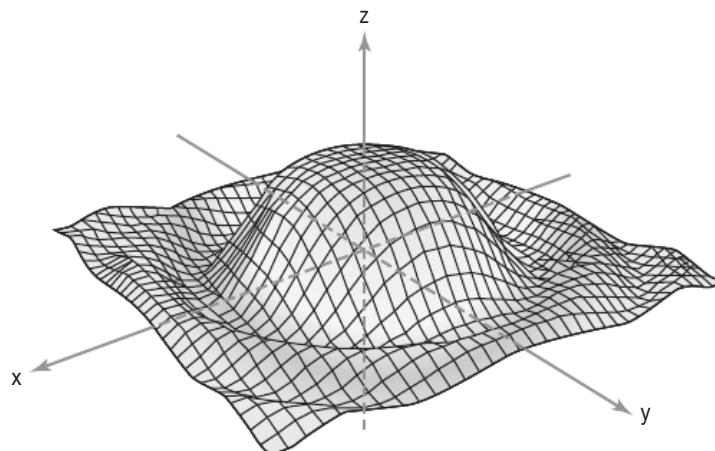


Figura 2.2.17 Gráfica de la función $f(x, y) = [\sin(x^2 + y^2)]/(x^2 + y^2)$. ▲

Ejemplo 14

Demostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Solución

Tenemos que demostrar que $x^2/\sqrt{x^2 + y^2}$ es pequeño cuando (x, y) está próximo al origen. Para ello, utilizamos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} &\leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{puesto que } y^2 \geq 0) \\ &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta = \varepsilon$. Entonces $\|(x, y) - (0, 0)\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, y por tanto $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ implica que

$$\left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta = \varepsilon.$$

Por tanto, se cumplen las condiciones del Teorema 6 y se comprueba el valor del límite. ▲

Ejemplo 15

(a) ¿Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2/(x^2 + y^2)$? (Véase la Figura 2.2.18(a).)

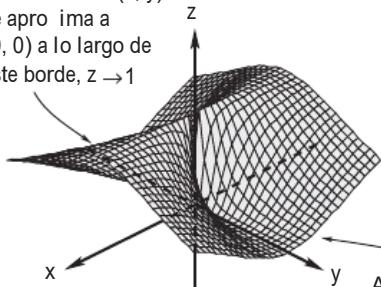
(b) Demostrar que (véase la Figura 2.2.18(b))

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Solución

(a) Si el límite existe, $x^2/(x^2 + y^2)$ debe aproximarse a un valor determinado, por ejemplo, a , cuando (x, y) se approxima a $(0, 0)$. En particular, si (x, y) se approxima al origen a lo largo de una trayectoria dada, entonces $x^2/(x^2 + y^2)$ debe aproximarse al valor límite a . Si (x, y) se approxima a $(0, 0)$ a lo largo de la recta $y = 0$, el valor límite es clara-

A medida que (x, y) se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de este borde, $z \rightarrow 1$



A medida que (x, y) se aproxima a $(0, 0)$ en este calle, $z \rightarrow 0$

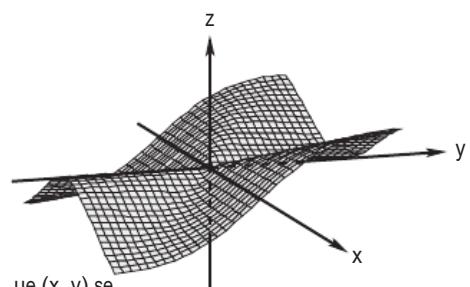


Figura 2.2.18 (a) La función $z = x^2/(x^2 + y^2)$ no tiene límite en $(0, 0)$. (b) La función $z = (2x^2y)/(x^2 + y^2)$ tiene límite 0 en $(0, 0)$.

mente 1 (si en la expresión anterior hacemos $y = 0$, obtenemos $x^2/x^2 = 1$). Si (x, y) se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de la recta $x = 0$, el valor límite es

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0^2}{0^2 + y^2} = 0 \neq 1.$$

Por tanto, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2/(x^2 + y^2)$ no existe.

(b) Observe que

$$\left| \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{2x^2y}{x^2} \right| = 2|y|.$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, se elige $\delta = \varepsilon/2$; entonces $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ implica que $|y| < \delta$, y por tanto

$$\left| \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < 2\delta = \varepsilon.$$



El uso de la notación ε - δ , nos lleva a la siguiente reformulación de la definición de continuidad .

Teorema 7 Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada. Entonces f es continua en $\mathbf{x}_0 \in A$ si y solo si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in A \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \quad \text{implica} \quad \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$

La demostración es casi inmediata. Obsérvese que en el Teorema 6 insistimos en que $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$; es decir, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Esta condición *no* se impone aquí; de hecho, la conclusión del Teorema 7 es ciertamente válida cuando $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, y por tanto no hay necesidad de excluir este caso. Aquí nos importa el valor de f en \mathbf{x}_0 ; queremos que en los puntos cercanos f se aproxime a *este* valor.

Ejercicios

En los siguientes ejercicios, el lector puede suponer que las funciones exponencial, seno y coseno son continuas y puede emplear libremente técnicas del cálculo de una variable, tales como la regla de L'Hôpital.

1. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} f(x, y) = 5$$

¿Qué podemos decir acerca del valor $f(1, 3)$?

2. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua y supóngase que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} f(x, y) = 5$$

¿Qué podemos decir acerca del valor $f(1, 3)$?

3. Calcular los límites siguientes:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} x^3 y$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

(c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$

4. Calcular los límites siguientes:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} e^x y$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

5. Calcular los límites siguientes:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3x + 5)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$

(c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

6. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Calcular el límite de f cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ a lo largo de la trayectoria $x = 0$.
- (b) Calcular el límite de f cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ a lo largo de la trayectoria $x = y^3$.
- (c) Demostrar que f no es continua en $(0, 0)$.

7. Sea $f(x, y, z) = \frac{e^{x+y}}{1+z^2}$.

Calcular $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, 2+h, 3) - f(1, 2, 3)}{h}$.

8. Calcular los siguientes límites, si existen:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{xy}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{y}$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$

9. Calcular los siguientes límites, si existen:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{y}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 y^2}$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + 2}$

10. Calcular los siguientes límites, si existen:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy}}{x+1}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos x - 1 - (x^2/2)}{x^4 + y^4}$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2 + y^2}$

11. Calcular los siguientes límites, si existen:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{xy}$

(b) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin(xyz)}{xyz}$

(c) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z),$
donde $f(x, y, z) = (x^2 + 3y^2)/(x + 1)$

12. Calcular los siguientes límites, si existen:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^3}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin 2x - 2x + y}{x^3 + y}$

(c) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{2x^2 y \cos z}{x^2 + y^2}$

13. Calcular $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$, si existe, para los casos siguientes:

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|, x_0 = 1$

(b) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|, \mathbf{x}_0$ arbitrario

(c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x^2, e^x), x_0 = 1$

(d) $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\sin(x-y), e^{x(y+1)} - x - 1)/\|(x, y)\|, \mathbf{x}_0 = (0, 0)$

14. Sea $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$. Describir geométricamente el conjunto en \mathbb{R}^3 donde f no es continua.

15. ¿Dónde es continua la función $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$?

16. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Considerando $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como una aplicación lineal, escribir explícitamente las funciones componentes de A .

(b) Demostrar que A es continua en todo \mathbb{R}^2 .

17. Hallar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (3x^2 + 3y^2) \log(x^2 + y^2)$.

(SUGERENCIA: utilizar coordenadas polares.)

Demostrar que los subconjuntos del plano de los Ejercicios 18–21 son abiertos:

18. $A = \{(x, y) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$

19. $B = \{(x, y) \mid y > 0\}$

20. $C = \{(x, y) \mid 2 < x^2 + y^2 < 4\}$

21. $D = \{(x, y) \mid x \neq 0 \text{ y } y \neq 0\}$

22. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ el disco unidad abierto $D_1(0, 0)$ con el punto $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$ añadido y sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$ la función constante $f(\mathbf{x}) = 1$. Demostrar que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 1$.

23. Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas, demostrar que las siguientes funciones son continuas

$$f^2 g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto [f(\mathbf{x})]^2 g(\mathbf{x})$$

y

$$f^2 + g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto [f(\mathbf{x})]^2 + g(\mathbf{x})$$

24. (a) Demostrar que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (1-x)^8 + \cos(1+x^3)$ es continua.

(b) Demostrar que la aplicación $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 e^x / (2 - \sin x)$ es continua.

25. (a) ¿Puede hacerse $[\sin(x+y)]/(x+y)$ continua definiéndola adecuadamente en $(0, 0)$?

(b) ¿Puede hacerse $xy/(x^2 + y^2)$ continua definiéndola adecuadamente en $(0, 0)$?

(c) Demostrar que $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto ye^x + \sin x + (xy)^4$ es continua.

26. Utilizando ε y δ o coordenadas esféricas, demostrar que

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$$

27. Utilizar la formulación ε - δ de los límites para demostrar que $x^2 \rightarrow 4$ cuando $x \rightarrow 2$. Realizar esta demostración usando el Teorema 3.

28. (a) Demostrar que para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $s < t, D_s(\mathbf{x}) \subset D_t(\mathbf{x})$.

(b) Demostrar que si U y V son entornos de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces también lo son $U \cap V$ y $U \cup V$.

(c) Demostrar que los puntos frontera de un intervalo abierto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ son los puntos a y b .

29. Suponer que \mathbf{x} e \mathbf{y} están en \mathbb{R}^n y que $\mathbf{x} \neq$

y. Demostrar que existe una función continua $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(\mathbf{x}) = 1, f(\mathbf{y}) = 0$ y $0 \leq f(\mathbf{z}) \leq 1$ para todo \mathbf{z} en \mathbb{R}^n .

30. Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y sea \mathbf{x}_0 un punto frontera de A . Decimos que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \infty$ si para todo $N > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ y $\mathbf{x} \in A$ implican que $f(\mathbf{x}) > N$.

(a) Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{-2} = \infty$.

(b) Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} 1/|x| = \infty$. ¿Es cierto que $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x = \infty$?

(c) Demostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1/(x^2 + y^2) = \infty$.

31. Sea $b \in \mathbb{R}$ y $f: \mathbb{R} \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Escribimos $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$ y decimos que L es el **límite por la izquierda** de f en b si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $x < b$ y $0 < |x - b| < \delta$ implican que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(a) Formular una definición de **límite por la derecha**, o $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x)$.

(b) Hallar $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/(1 + e^{1/x})$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/(1 + e^{1/x})$.

(c) Dibujar la gráfica de $1/(1 + e^{1/x})$.

32. Demostrar que f es continua en \mathbf{x}_0 si y solo si

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| = 0.$$

33. Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que, para constantes positivas K y α , satisface $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$ para todos \mathbf{x} e \mathbf{y} en A . Demostrar que f es continua. Las funciones que verifican la propiedad anterior se llaman **continuas Hölder** o, si $\alpha = 1$, **continuas Lipschitz**.)

34. Demostrar que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en todos los puntos si y solo si la imagen inversa de todo conjunto abierto es abierta. Es decir, si $U \subset \mathbb{R}^m$ es abierto, entonces $f^{-1}(U) = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \in U\}$ es abierto.

35. (a) Hallar un número específico $\delta > 0$ tal que si $|a| < \delta$, entonces $|a^3 + 3a^2 + a| < 1/100$.

(b) Hallar un número específico $\delta > 0$ tal que si $x^2 + y^2 < \delta^2$, entonces $|x^2 + y^2 + 3xy + 180xy^5| < 1/10.000$.

2.3 Diferenciación

En la Sección 2.1 hemos estudiado algunos métodos para dibujar la gráfica de una función. Con solo esos métodos puede ser imposible obtener la suficiente información como para captar incluso las características generales de una función complicada. Del cálculo elemental, sabemos que la idea de derivada nos puede ayudar mucho en esta tarea; por ejemplo, nos permite localizar máximos y mínimos y calcular tasas de cambio. La derivada tiene también muchas otras aplicaciones, como ya se habrá visto en cálculo de una variable.

Intuitivamente, en la Sección 2.2 hemos visto que una función continua es aquella que no tiene “fracturas” en su gráfica. Una función diferenciable de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} debería ser tal que no solamente no tuviera fracturas en su gráfica, sino que también tuviera un plano tangente bien definido a la gráfica en cada punto. Por tanto, tendrá que carecer de pliegues, esquinas o picos pronunciados en su gráfica (véase la Figura 2.3.1). En otras palabras, la gráfica tiene que ser *suave*.

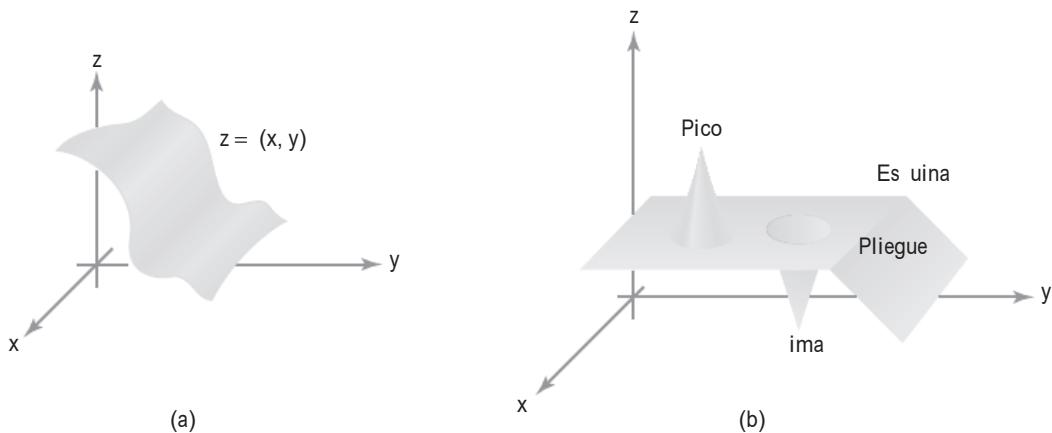


Figura 2.3.1 (a) Una gráfica suave y (b) una gráfica no suave.

Derivadas parciales

Para precisar estas ideas, necesitamos una definición de lo que queremos decir con la frase “ $f(x_1, \dots, x_n)$ es diferenciable en $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ”. De hecho, esta definición no es tan simple como puede parecer. Para llegar a esto, vamos a definir en primer lugar el concepto de *derivada parcial*. Este concepto se basa en nuestros conocimientos de cálculo de una variable (en este punto es recomendable hacer un rápido repaso de la definición de derivada en algún libro de texto sobre cálculo de una variable).

Definición Derivadas parciales Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y supongamos que $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función con valores reales. Entonces $\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n$, las **derivadas parciales** de f respecto de la primera, segunda, \dots , n -ésima variable, son las

Definición Derivadas parciales (Cont.)

funciones de n variables con valores reales, que en el punto $(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}$, se definen como

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}\end{aligned}$$

si los límites existen, donde $1 \leq j \leq n$ y \mathbf{e}_j es el vector j -ésimo de la base canónica definido por $\mathbf{e}_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, con 1 en la posición j -ésima (véase la Sección 1.5). El dominio de la función $\partial f / \partial x_j$ es el conjunto de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ para los que el límite existe.

En otras palabras, $\partial f / \partial x_j$ es la derivada de f respecto de la variable x_j , considerando fijas las restantes variables. Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, a menudo utilizaremos la notación $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z$ en vez de $\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \partial f / \partial x_3$. Si $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, entonces podemos escribir

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

de modo que podemos hablar de las derivadas parciales de cada componente; por ejemplo, $\partial f_m / \partial x_n$ es la derivada parcial de la componente m -ésima respecto de x_n , la variable n -ésima.

Ejemplo 1

Si $f(x, y) = x^2y + y^3$, hallar $\partial f / \partial x$ y $\partial f / \partial y$.

Solución

Para hallar $\partial f / \partial x$ hacemos y constante (considérese que es un número, por ejemplo, 1) y diferenciamos solo con respecto de x ; esto da

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(x^2y + y^3)}{\partial x} = 2xy.$$

De forma similar, para hallar $\partial f / \partial y$ hacemos x constante y diferenciamos solo con respecto de y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(x^2y + y^3)}{\partial y} = x^2 + 3y^2.$$



Para indicar que una derivada parcial debe evaluarse en un punto concreto, por ejemplo, en (x_0, y_0) , escribimos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{o} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0} \quad \text{o} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}.$$

Cuando escribimos $z = f(x, y)$ para la variable dependiente, en ocasiones escribiremos $\partial z / \partial x$ en vez de $\partial f / \partial x$. Estrictamente hablando, dado que z también representa una variable, esto es un abuso de notación, pero es una práctica común utilizar estas dos notaciones de forma indistinta.

Ejemplo 2

Si $z = \cos xy + x \cos y = f(x, y)$, hallar las dos derivadas parciales $(\partial z / \partial x)(x_0, y_0)$ y $(\partial z / \partial y)(x_0, y_0)$.

Solución

En primer lugar, fijamos y_0 y diferenciamos con respecto a x , para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) &= \left. \frac{\partial(\cos xy_0 + x \cos y_0)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \\ &= (-y_0 \operatorname{sen} xy_0 + \cos y_0)|_{x=x_0} \\ &= -y_0 \operatorname{sen} x_0 y_0 + \cos y_0.\end{aligned}$$

Del mismo modo, fijamos x_0 y diferenciamos con respecto a y para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) &= \left. \frac{\partial(\cos x_0 y + x_0 \cos y)}{\partial y} \right|_{y=y_0} \\ &= (-x_0 \operatorname{sen} x_0 y - x_0 \operatorname{sen} y)|_{y=y_0} \\ &= -x_0 \operatorname{sen} x_0 y_0 - x_0 \operatorname{sen} y_0.\end{aligned}$$

**Ejemplo 3**

Hallar $\partial f / \partial x$ si $f(x, y) = xy / \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución

Por la regla del cociente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y\sqrt{x^2 + y^2} - xy(x/\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{y(x^2 + y^2) - x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$



Una definición de diferenciabilidad que solo requiere la existencia de derivadas parciales resulta insuficiente. Muchos resultados típicos, como la regla de la cadena para funciones de varias variables, no se verificaría, como se demuestra en el Ejemplo 4. Más adelante veremos cómo rectificar esta situación.

Ejemplo 4

Sea $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$. Por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

y, de forma análoga, $(\partial f / \partial y)(0, 0) = 0$ (¡No hay formas indeterminadas!). Es necesario utilizar la definición original de derivada parcial porque las funciones $x^{1/3}$ e $y^{1/3}$ no son diferenciables en 0. Supongamos que restringimos f a la recta $y = x$ para obtener $f(x, x) = x^{2/3}$ (véase la Figura 2.3.2). Podemos considerar la sustitución $y = x$ como la composición $f \circ g$ de la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $g(x) = (x, x)$, y $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$.

Por tanto, la composición $f \circ g$ viene dada por $(f \circ g)(x) = x^{2/3}$. Cada componente de g es diferenciable en x y f tiene derivadas parciales en

$(0, 0)$, pero $f \circ g$ no es diferenciable en $x = 0$, en el sentido del cálculo de una variable. En otras palabras, la composición de f con g no es diferenciable en contraste con el cálculo de funciones de una variable, donde la composición de funciones diferenciables es diferenciable. Más adelante, proporcionaremos una definición de diferenciabilidad que tiene la agradable consecuencia de que la composición de funciones diferenciables es diferenciable.

Existe otra razón para no estar satisfecho con la mera existencia de derivadas parciales de $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$: no existe ningún plano tangente a la gráfica en $(0, 0)$. El plano xy es tangente a la gráfica a lo largo de los ejes x e y , ya que f tiene pendiente cero en $(0, 0)$ a lo largo de estos ejes; es decir, $\partial f / \partial x = 0$ y $\partial f / \partial y = 0$ en $(0, 0)$. Por tanto, si existe un plano tangente, tiene que ser el plano xy . Sin embargo, como es evidente en la Figura 2.3.2, el plano xy no es tangente a la gráfica en otras direcciones, ya que la gráfica tiene un pliegue muy acusado y, por tanto, no se puede decir que el plano xy sea tangente a la gráfica de f .

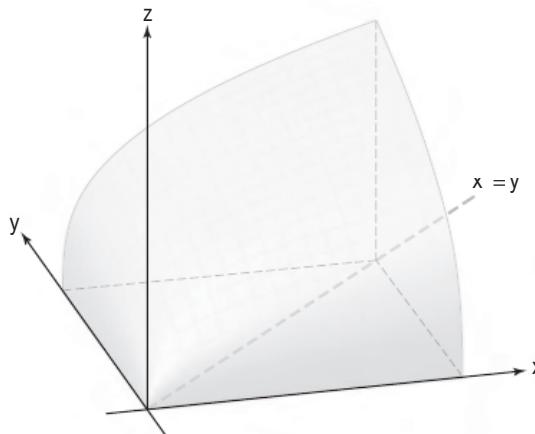


Figura 2.3.2 La parte de la gráfica de $x^{1/3}y^{1/3}$ en el primer cuadrante.

Aproximación lineal o afín

Para “motivar” nuestra definición de diferenciabilidad, vamos a calcular cuál tendría que ser la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ en (x_0, y_0) si f fuera suficientemente suave. En \mathbb{R}^3 , un plano no vertical tiene una ecuación de la forma

$$z = ax + by + c.$$

Si este fuera el plano tangente a la gráfica de f , las pendientes a lo largo de los ejes x e y tienen que ser iguales a $\partial f / \partial x$ y $\partial f / \partial y$, que son las variaciones de f con respecto a x e y . Por tanto, $a = \partial f / \partial x$, $b = \partial f / \partial y$ (evaluadas en (x_0, y_0)). Por último, podemos determinar la constante c a partir del hecho de que $z = f(x_0, y_0)$ cuando $x = x_0$, $y = y_0$. Así obtenemos la **aproximación lineal** (o, con mayor precisión, **aproximación afín**):

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0), \quad (1)$$

que debe ser la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en (x_0, y_0) , si f es “suficientemente suave” (véase la Figura 2.3.3).

Nuestra definición de diferenciabilidad significará que, en efecto, el plano definido por la aproximación lineal (1) es una “buena” aproximación de f cerca de (x_0, y_0) . Para hacerse una idea de lo que se debe entender por una buena aproximación, volvamos al cálculo de una variable. Si f es diferenciable en un punto x_0 , entonces sabemos que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Si $x = x_0 + \Delta x$ podemos escribir lo anterior como sigue

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Utilizando el límite trivial $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0) = f'(x_0)$, podemos escribir la ecuación anterior como

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0);$$

es decir,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0;$$

es decir,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Por tanto, la recta tangente l en $(x_0, f(x_0))$ con pendiente $f'(x_0)$ está cerca de f en el sentido de que la diferencia entre $f(x)$ y $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, la ecuación de la recta tangente, tiende a cero, *incluso* si dividimos entre $x - x_0$, cuando x tiende a x_0 . Este es el concepto de “buena aproximación” que adoptaremos para las funciones de varias variables, con la recta tangente reemplazada por el plano tangente (véase la Ecuación (1), dada anteriormente).

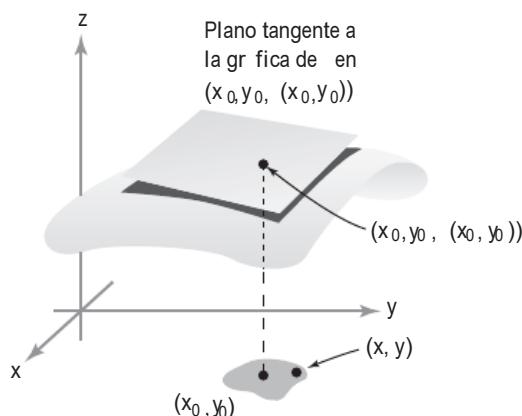


Figura 2.3.3 Para los puntos (x, y) próximos a (x_0, y_0) , la gráfica del plano tangente se acerca a la gráfica de f .

Diferenciabilidad de funciones de dos variables

Con el concepto de aproximación lineal claro estamos preparados para definir la diferenciabilidad.

Definición Diferenciabilidad: dos variables Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es **diferenciable** en (x_0, y_0) , si $\partial f / \partial x$ y $\partial f / \partial y$ existen en (x_0, y_0) y si

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} \rightarrow 0 \quad (2)$$

cuando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Esta ecuación especifica lo que queremos expresar cuando decimos que

$$f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0)$$

es una **buena aproximación** a la función f .

No siempre es fácil usar esta definición para ver si f es diferenciable, pero será fácil emplear otro criterio que proporcionaremos enseguida en el Teorema 9.

Plano tangente

Hemos usado la idea informal de plano tangente a la gráfica de una función para intuir nuestra definición de diferenciabilidad. Ahora ya estamos preparados para adoptar una definición formal de plano tangente.

Definición Plano tangente Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. El plano en \mathbb{R}^3 definido por la ecuación

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0)$$

se denomina **plano tangente** a la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Ejemplo 5

Calcular el plano tangente a la gráfica de $z = x^2 + y^4 + e^{xy}$ en el punto $(1, 0, 2)$.

Solución

Usamos la fórmula (1), con $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ y $z_0 = f(x_0, y_0) = 2$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + ye^{xy} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + xe^{xy}.$$

En $(1, 0, 2)$, estas derivadas parciales son 2 y 1, respectivamente. Por tanto, de acuerdo con la Ecuación (1), el plano tangente es

$$z = 2(x - 1) + 1(y - 0) + 2, \quad \text{es decir,} \quad z = 2x + y. \quad \blacktriangle$$

Escribimos $\mathbf{D}f(x_0, y_0)$ para denotar la matriz fila

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right],$$

de modo que la definición de diferenciabilidad afirma que

$$\begin{aligned} & f(x_0, y_0) + \mathbf{D}f(x_0, y_0) \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \\ &= f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0) \quad (3) \end{aligned}$$

es una buena aproximación de f cerca de (x_0, y_0) . Como anteriormente, “buena” se toma en el sentido de que la expresión (3) difiere de $f(x, y)$ en algo pequeño multiplicado por $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Decimos que la expresión (3) es la *mejor aproximación lineal* de f cerca de (x_0, y_0) .

Diferenciabilidad: caso general

Ahora ya estamos preparados para dar una definición de diferenciabilidad de funciones f de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m , basándonos en lo expuesto anteriormente. La derivada $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ de $f = (f_1, \dots, f_m)$ en un punto \mathbf{x}_0 es una matriz \mathbf{T} cuyos elementos son $t_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ evaluados en \mathbf{x}_0 .²

Definición Diferenciable, n variables, m funciones Sea U un conjunto abierto en \mathbb{R}^n y sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función dada. Decimos que f es *diferenciable* en $\mathbf{x}_0 \in U$ si las derivadas parciales de f existen en \mathbf{x}_0 y si

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0, \quad (4)$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ es la matriz $m \times n$ con elementos $\partial f_i / \partial x_j$ evaluadas en \mathbf{x}_0 y $\mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ es el producto de \mathbf{T} por $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ (visto como una matriz columna). Decimos que \mathbf{T} es la *derivada* de f en \mathbf{x}_0 .

²Resulta que solamente necesitamos postular la existencia de *alguna* matriz que proporcione la mejor aproximación lineal cerca de $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, ya que de hecho esta matriz es *necesariamente* la matriz cuyo elemento ij -ésimo es $\partial f_i / \partial x_j$.

Denotaremos siempre la derivada \mathbf{T} de f en \mathbf{x}_0 mediante $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$, aunque en algunos textos se expresa mediante $df(\mathbf{x}_0)$ y se denomina **diferencial** de f . En el caso de $m = 1$, la matriz \mathbf{T} es simplemente el vector fila

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \right].$$

(En ocasiones, cuando haya posibilidad de confusión, separaremos los elementos con comas). Además, si $n = 2$ e introducimos este resultado en la Ecuación (4), comprobamos que las condiciones (2) y (4) coinciden. Por tanto, si hacemos $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, una función con valores reales f de n variables es diferenciable en un punto \mathbf{x}_0 si

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \left| f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_j \right| = 0,$$

ya que

$$\mathbf{T}\mathbf{h} = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0).$$

Para el caso general en el que f está definida sobre un subconjunto de \mathbb{R}^n y tiene valores en \mathbb{R}^m , la derivada es la matriz $m \times n$ dada por

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

donde $\partial f_i / \partial x_j$ se evalúa en \mathbf{x}_0 . La matriz $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ se denomina, apropiadamente, **matriz de derivadas parciales de f en \mathbf{x}_0** .

Ejemplo 6

Calcular las matrices de derivadas parciales para las funciones.

(a) $f(x, y) = (e^{x+y} + y, y^2x)$

(b) $f(x, y) = (x^2 + \cos y, ye^x)$

(c) $f(x, y, z) = (ze^x, -ye^z)$

Solución

(a) Aquí $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se define mediante $f_1(x, y) = e^{x+y} + y$ y $f_2(x, y) = y^2x$. Por tanto, $\mathbf{D}f(x, y)$ es la matriz 2×2

$$\mathbf{D}f(x, y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} + 1 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}.$$

(b) Tenemos que

$$\mathbf{D}f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -\operatorname{sen} y \\ ye^x & e^x \end{bmatrix}.$$

(c) En este caso,

$$\mathbf{D}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} ze^x & 0 & e^x \\ 0 & -e^z & -ye^z \end{bmatrix}.$$



Gradientes

Para funciones con valores reales utilizamos una terminología especial para la derivada.

Definición Gradiente Consideremos el caso especial $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ es una matriz $1 \times n$:

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Podemos formar el vector correspondiente $(\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$, que es el **gradiente** de f y se denota mediante ∇f , o $\text{grad } f$.

A partir de la definición, vemos que para $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k},$$

mientras que para $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}.$$

En la Sección 2.6 veremos el significado geométrico del gradiente. En términos de productos escalares, podemos escribir la derivada de f como

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}.$$

Ejemplo 7 Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xe^y$. Entonces

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (e^y, xe^y, 0).$$



Ejemplo 8 Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $(x, y) \mapsto e^{xy} + \sin xy$, entonces

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (ye^{xy} + y \cos xy) \mathbf{i} + (xe^{xy} + x \cos xy) \mathbf{j} \\ &= (e^{xy} + \cos xy)(y\mathbf{i} + x\mathbf{j}). \end{aligned}$$



En el cálculo de una variable se demuestra que si f es diferenciable, entonces f es continua. En el Teorema 8 estableceremos que este resultado también es cierto para funciones diferenciables de varias variables.

Como ya sabemos, hay muchas funciones de una variable que son continuas pero no diferenciables, como $f(x) = |x|$. Antes de enunciar el resultado, veamos un ejemplo de una función de dos variables cuyas *derivadas parciales existen en un punto, pero que no es continua en dicho punto*.

Ejemplo 9

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ o si } y = 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Puesto que f es constante en los ejes x e y , sobre los que es igual a 1,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Pero f no es continua en $(0, 0)$, ya que no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$. ▲

Algunos teoremas básicos

El primero de estos teoremas básicos relaciona la diferenciabilidad y la continuidad.

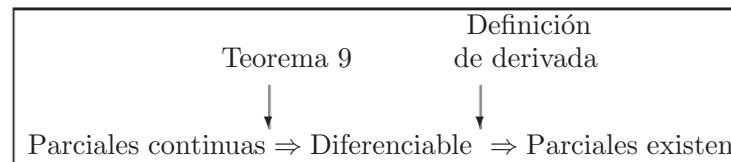
Teorema 8 Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$. Entonces f es continua en \mathbf{x}_0 .

Este resultado es muy razonable, ya que “diferenciabilidad” significa que hay suficiente suavidad como para tener un plano tangente, lo que es más fuerte que ser simplemente continua.

Como hemos visto, suele ser fácil establecer si las derivadas parciales de una función existen basándonos en lo que sabemos del cálculo de una variable. Sin embargo, la definición de diferenciabilidad parece algo complicada y la condición de aproximación requerida en la Ecuación (4) puede parecer, y a veces lo es, difícil de verificar. Afortunadamente, existe un criterio sencillo, dado en el siguiente teorema, que nos dice cuándo una función es diferenciable.

Teorema 9 Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Supongamos que todas las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_j$ de f existen y son continuas en un entorno de un punto $\mathbf{x} \in U$. Entonces f es diferenciable en \mathbf{x} .

Obsérvese que:



Cada uno de los enunciados recíprocos, obtenidos invirtiendo una implicación cualquiera, es falso (como contraejemplo al recíproco de la primera implicación, usamos $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, $f(0) = 0$; para la segunda, véase el Ejemplo 4 de esta sección.)

Se dice que una función cuyas derivadas parciales existen y son continuas es de **clase C^1** . Por tanto, el Teorema 9 establece que *toda función C^1 es diferenciable*.

Ejemplo 10

Sea

$$f(x, y) = \frac{\cos x + e^{xy}}{x^2 + y^2}.$$

Demostrar que f es diferenciable en todos los puntos $(x, y) \neq (0, 0)$.

Solución

Obsérvese que las derivadas parciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{(x^2 + y^2)(ye^{xy} - \operatorname{sen} x) - 2x(\cos x + e^{xy})}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{(x^2 + y^2)xe^{xy} - 2y(\cos x + e^{xy})}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

son continuas excepto cuando $x = 0$ e $y = 0$ (por los resultados de la Sección 2.2). Por tanto, f es diferenciable por el Teorema 9. ▲

Se puede demostrar que $f(x, y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$ [con $f(0, 0) = 0$] es continua, tiene derivadas parciales en $(0, 0)$ y aún así no es diferenciable en ese punto (véase la Figura 2.3.4). Por el Teorema 9, sus derivadas parciales no pueden ser continuas en $(0, 0)$.

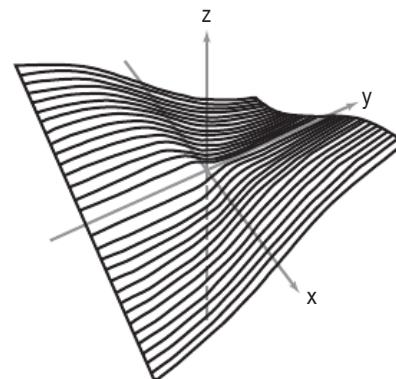


Figura 2.3.4 Esta función no es diferenciable en $(0, 0)$, porque est á “arrugada”.

Ejercicios

1. Hallar $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y$ si
 - (a) $f(x, y) = xy$
 - (b) $f(x, y) = e^{xy}$
 - (c) $f(x, y) = x \cos x \cos y$
 - (d) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \log(x^2 + y^2)$
2. Evaluar las derivadas parciales $\partial z / \partial x, \partial z / \partial y$ de las funciones dadas en los puntos indicados.
 - (a) $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}; (0, 0), (a/2, a/2)$
 - (b) $z = \log \sqrt{1 + xy}; (1, 2), (0, 0)$
 - (c) $z = e^{ax} \cos(bx + y); (2\pi/b, 0)$
3. En cada uno de los casos siguientes, hallar las derivadas parciales $\partial w / \partial x, \partial w / \partial y$.
 - (a) $w = xe^{x^2+y^2}$
 - (b) $w = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$
 - (c) $w = e^{xy} \log(x^2 + y^2)$
 - (d) $w = x/y$
 - (e) $w = \cos(ye^{xy}) \sen x$
4. Decidir cuál de las funciones siguientes son C^1 si $f(0, 0)$ está definida como 0.
 - (a) $f(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$
 - (b) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
 - (c) $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$
5. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^3$ en $(3, 1, 10)$.
6. Sea $f(x, y) = e^{x+y}$. Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(0, 0)$.
7. Sea $f(x, y) = e^{x-y}$. Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 1)$.
8. Para cada una de las funciones del Ejercicio 1, calcular el plano tangente a las gráficas en los puntos indicados.

(a) $(0, 0)$ (b) $(0, 1)$	(c) $(0, \pi)$ (d) $(0, 1)$
------------------------------	--------------------------------
9. Calcular la matriz de derivadas parciales de las siguientes funciones:
 - (a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x, y)$
 - (b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$
 - (c) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$
 - (d) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (xye^{xy}, x \sen y, 5xy^2)$
10. Calcular la matriz de derivadas parciales de
 - (a) $f(x, y) = (e^x, \sen xy)$
 - (b) $f(x, y, z) = (x - y, y + z)$
 - (c) $f(x, y) = (x + y, x - y, xy)$
 - (d) $f(x, y, z) = (x + z, y - 5z, x - y)$
11. Hallar la ecuación del plano tangente a $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ que tiene pendiente 2 en la dirección positiva del eje x y pendiente 4 en la dirección positiva del eje y .
12. Sea $f(x, y) = e^{(2x+3y)}$.
 - (a) Hallar el plano tangente a f en $(0, 0)$.
 - (b) Usar esto para aproximar $f(0, 1; 0)$ y $f(0; 0, 1)$.
 - (c) Haciendo uso de una calculadora, hallar los valores exactos de $f(0, 1; 0)$ y $f(0; 0, 1)$.
13. ¿Dónde corta al eje z el plano tangente a $z = e^{x-y}$ en $(1, 1, 1)$?
14. ¿Por qué las gráficas de $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ deben llamarse “tangentes” en $(0, 0)$?
15. Sea $f(x, y) = e^{xy}$. Demostrar que $x(\partial f / \partial x) = y(\partial f / \partial y)$.
16. Utilizar la aproximación lineal para aproximar una función adecuada $f(x, y)$ y a partir de ella estimar:
 - (a) $(0,99e^{0,02})^8$
 - (b) $(0,99)^3 + (2,01)^3 - 6(0,99)(2,01)$
 - (c) $\sqrt{(4,01)^2 + (3,98)^2 + (2,02)^2}$
17. Sea P el plano tangente a la gráfica de $g(x, y) = 8 - 2x^2 - 3y^2$ en el punto $(1, 2, -6)$. Sea $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$. Hallar el punto de la gráfica de f que tiene un plano tangente paralelo a P .

- 18.** Sea $f(x, y) = xe^{y^2} - ye^{x^2}$.
- Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $(1, 2)$.
 - ¿Qué punto de la superficie $z = x^2 - y^2$ tiene un plano tangente paralelo al plano determinado en el apartado (a)?
- 19.** Calcular los gradientes de las siguientes funciones:
- $f(x, y, z) = x \exp(-x^2 - y^2 - z^2)$ (Notación: $\exp u = e^u$.)
 - $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$
 - $f(x, y, z) = z^2 e^x \cos y$
- 20.** Calcular el plano tangente en $(1, 0, 1)$ para cada una de las funciones del Ejercicio 19.
- 21.** Hallar la ecuación del plano tangente de $z = x^2 + 2y^3$ en $(1, 1, 3)$.
- 22.** Sea
- $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^4}{x^4 + 6y^8} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
- 23.** Sea P el plano tangente a $f(x, y) = x^2 y^3$ en $(1, 2, 8)$. Sea l la recta contenida en P que pasa por el punto $(1, 3, 20)$ y directamente por encima de $(2, 1)$. Es decir, l contiene el punto $(1, 3, 20)$ y un punto de la forma $(2, 1, z)$. Hallar una parametrización para l .
- 24.** Calcular $\nabla h(1, 1, 1)$ si $h(x, y, z) = (x + z)e^{x-y}$.
- 25.** Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Calcular $\nabla f(0, 0, 1)$.
- 26.** Evaluar el gradiente de $f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2)$ en $(1, 0, 1)$.
- 27.** Describir todas las funciones continuas Hölder con $\alpha > 1$ (véase el Ejercicio 33 de la Sección 2.2). (SUGERENCIA: ¿cuál es la derivada de una función de ese tipo?)
- 28.** Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal. ¿Cuál es la derivada de f ?

2.4 Introducción a trayectorias y curvas

En esta sección vamos a presentar algunos de los métodos básicos de la geometría y el cálculo de trayectorias en el plano y en el espacio. Este será un ingrediente importante de la regla de la cadena que estudiaremos en la siguiente sección. En el Capítulo 4 veremos temas adicionales acerca de las trayectorias.

Trayectorias y curvas

Solemos pensar en una curva como en una línea trazada sobre un papel, por ejemplo, una recta, una circunferencia o una sinusoide. Es útil pensar matemáticamente en una curva C como en el conjunto de valores de una función que lleva un intervalo de números reales al plano o al espacio. Denominaremos a una función de este tipo **trayectoria**. Normalmente, denotaremos una trayectoria mediante \mathbf{c} . La imagen C de la trayectoria se corresponde entonces con la curva que vemos sobre el papel (véase la Figura 2.4.1). A menudo utilizamos t para designar la variable independiente y la interpretamos como si fuera el *tiempo*, de modo que $\mathbf{c}(t)$ es la posición en el instante t de una partícula en movimiento que **traza** una curva a medida que t varía. Decimos también que \mathbf{c} **parametriza a** C . Estrictamente hablando, debemos distinguir entre $\mathbf{c}(t)$ como *punto* del espacio y como *vector* con base en el origen.

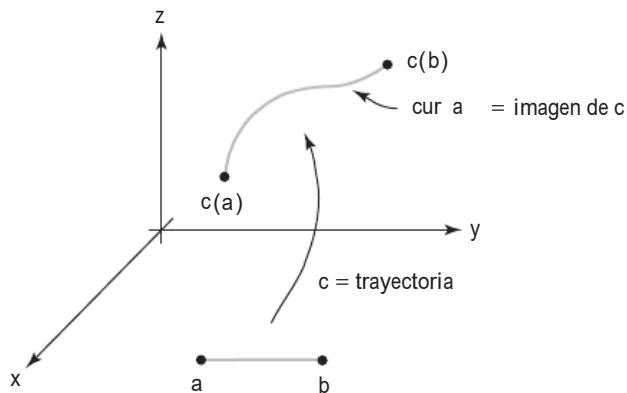


Figura 2.4.1 La aplicación c es la trayectoria; su imagen C es la curva que “vemos”.

Ejemplo 1

La recta L en \mathbb{R}^3 que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) con la dirección del vector \mathbf{v} es la imagen de la trayectoria

$$\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$$

con $t \in \mathbb{R}$ (véase la Figura 2.4.2). Por tanto, nuestro concepto de curva incluye las rectas como casos especiales.

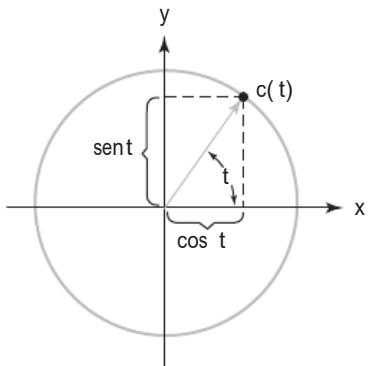


Figura 2.4.3 $c(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una trayectoria cuya imagen C es la circunferencia unidad.

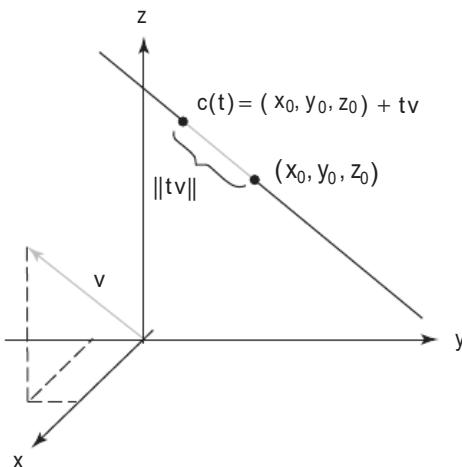


Figura 2.4.2 L es la recta en el espacio que pasa por (x_0, y_0, z_0) con dirección \mathbf{v} ; su ecuación es $\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$.

Ejemplo 2

La circunferencia unidad $C: x^2 + y^2 = 1$ en el plano es la imagen de la trayectoria

$$\mathbf{c}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(véase la Figura 2.4.3). La circunferencia unidad también es la imagen de la trayectoria $\tilde{\mathbf{c}}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$. Por tanto, trayectorias diferentes pueden parametrizar la misma curva. ▲

Trayectorias y curvas Una **trayectoria** en \mathbb{R}^n es una aplicación $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$; es una **trayectoria en el plano** si $n = 2$ y una **trayectoria en el espacio** si $n = 3$. La colección C de puntos $\mathbf{c}(t)$ cuando t varía en $[a, b]$ se llama **curva**, y $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(b)$ son sus **extremos**. Se dice que la trayectoria \mathbf{c} **parametriza** la curva C . También decimos que $\mathbf{c}(t)$ **traza** C cuando t varía.

Si \mathbf{c} es una trayectoria en \mathbb{R}^3 , podemos escribir $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y llamamos a $x(t), y(t)$ y $z(t)$ **funciones componentes** de \mathbf{c} . Las funciones componentes en \mathbb{R}^2 o, en general, en \mathbb{R}^n se forman de modo similar. También vamos a considerar las trayectorias cuyo dominio es la recta real completa, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3

La trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$ traza un arco de parábola. Esta curva coincide con la gráfica de $f(x) = x^2$ (véase la Figura 2.4.4).

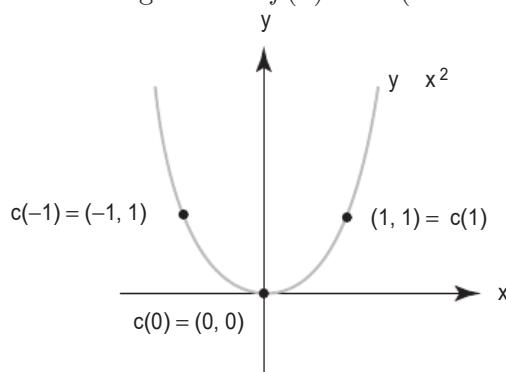


Figura 2.4.4 La imagen de $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$ es la parábola $y = x^2$.

Ejemplo 4

Un disco de radio R rueda hacia la derecha sobre una recta a velocidad v . Utilizar métodos vectoriales para hallar la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ de un punto del disco que inicialmente se encuentra a una distancia r debajo del centro.

Solución

Colocamos el disco en el plano xy con su centro inicialmente en $(0, R)$, de modo que la posición del centro en el instante t está dada por la trayectoria $\mathbf{C}(t) = (vt, R)$. (Véase la Figura 2.4.5.)

La posición del punto $\mathbf{c}(t)$ respecto del centro está dada por el vector $\mathbf{d}(t) = \mathbf{c}(t) - \mathbf{C}(t)$ que tiene el valor inicial $-r\mathbf{j}$ y gira en el sentido *horario*. La velocidad de rotación es tal que el disco da una vuelta completa cuando el centro se ha desplazado una distancia $2\pi R$ (igual a la longitud de la circunferencia del disco). Esto tarda un tiempo de $2\pi R/v$, de forma que la velocidad angular $d\theta/dt$ del disco es v/R . Puesto que la rotación es en el sentido horario, la función vectorial $\mathbf{d}(t)$ es de la forma

$$\mathbf{d}(t) = r \left(\cos \left[-\frac{v}{R} t + \theta \right] \mathbf{i} + \sin \left[-\frac{v}{R} t + \theta \right] \mathbf{j} \right)$$

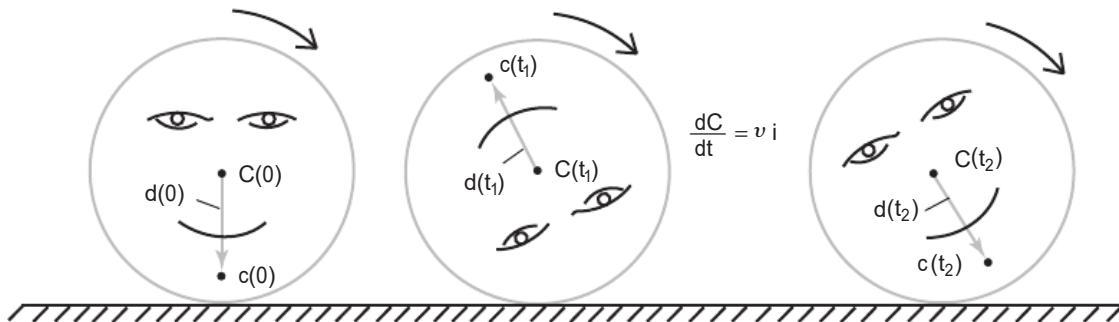


Figura 2.4.5 El vector $d(t)$ apunta desde el centro de la rueda, $C(t)$, a la posición $c(t)$ de un punto de la rueda y gira en el sentido horario mientras que la rueda se mueve hacia la derecha.

para un ángulo inicial θ . Dado que $\mathbf{d}(0) = -r\mathbf{j}$, tenemos que $\cos \theta = 0$ y $\sin \theta = -1$, por tanto $\theta = -\pi/2$, y entonces

$$\mathbf{d}(t) = r \left(\cos \left[-\frac{v}{R} t - \frac{\pi}{2} \right] \mathbf{i} + \sin \left[-\frac{v}{R} t - \frac{\pi}{2} \right] \mathbf{j} \right).$$

Utilizando $\cos(\varphi - \pi/2) = \sin \varphi$ y $\sin(\varphi - \pi/2) = -\cos \varphi$, junto con $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$ y $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$, obtenemos

$$\mathbf{d}(t) = r \left(-\sin \frac{vt}{R} \mathbf{i} - \cos \frac{vt}{R} \mathbf{j} \right).$$

Por último, la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ se obtiene sumando las componentes de la función vectorial $\mathbf{d}(t)$ a las coordenadas de la trayectoria $\mathbf{C}(t)$; el resultado es

$$\mathbf{c}(t) = \left(vt - r \sin \frac{vt}{R}, R - r \cos \frac{vt}{R} \right).$$

En el caso especial $v = R = r = 1$, obtenemos $\mathbf{c}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. La curva imagen C de esta trayectoria \mathbf{c} se muestra en la Figura 2.4.6 y se denomina **cicloide**.

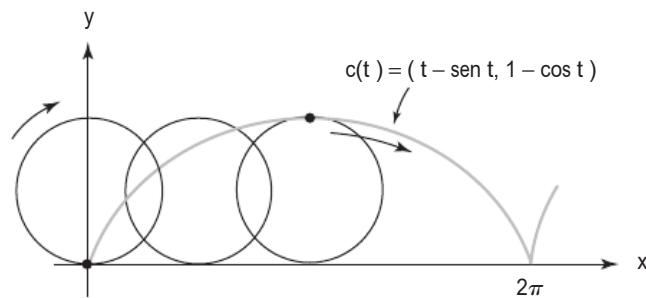


Figura 2.4.6 La curva trazada por un punto que se mueve por el borde de una circunferencia que rueda se llama **cicloide**.

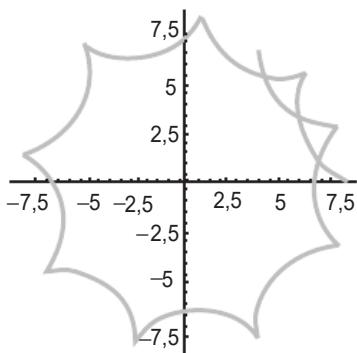


Figura 2.4.7 Ejemplo de una hipocicloide.

Nota histórica

El matemático francés Blaise Pascal estudió la cicloide en 1649 para distraerse mientras sufría una afección dental. Al desaparecer el dolor, pensó que era una señal de que a Dios no le desagradaban sus pensamientos. Los resultados de Pascal indujeron a otros matemáticos a investigar esta curva y, en consecuencia, se encontraron numerosas propiedades relevantes. El holandés Christian Huygens descubrió una de ellas y la empleó para construir un péndulo de reloj “perfecto”.

Velocidad y tangente a una trayectoria

Si pensamos en $\mathbf{c}(t)$ como en la curva trazada por una partícula siendo t el tiempo, es razonable definir el vector velocidad como sigue.

Definición Vector velocidad Si \mathbf{c} es una trayectoria y es diferenciable, decimos que \mathbf{c} es una *trayectoria diferenciable*. La **velocidad** de \mathbf{c} en el instante t se define como³

$$\mathbf{c}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{c}(t+h) - \mathbf{c}(t)}{h}.$$

Normalmente dibujamos el vector $\mathbf{c}'(t)$ con su origen en el punto $\mathbf{c}(t)$. La **rapidez** de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ es $s = \|\mathbf{c}'(t)\|$, la longitud del vector velocidad. Si $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ está en \mathbb{R}^2 , entonces

$$\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t)) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$$

y si $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ está en \mathbb{R}^3 , entonces

$$\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Aquí, $x'(t)$ es la derivada de una variable dx/dt . Si interpretamos los límites de vectores como límites componente a componente, las fórmulas

³Si t es el extremo de un intervalo, se deben tomar, como en el cálculo de una variable, límites por la derecha o por la izquierda.

para el vector velocidad se obtienen de la definición de derivada. Sin embargo, el límite se puede interpretar también en el sentido vectorial. En la Figura 2.4.8, vemos que $[\mathbf{c}(t+h) - \mathbf{c}(t)]/h$ aproxima la tangente a la trayectoria cuando $h \rightarrow 0$.

Vector tangente La velocidad $\mathbf{c}'(t)$ es un vector **tangente** a la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ en el instante t . Si C es la curva trazada por \mathbf{c} y si $\mathbf{c}'(t)$ no es igual a $\mathbf{0}$, entonces $\mathbf{c}'(t)$ es un vector tangente a la curva C en el punto $\mathbf{c}(t)$.

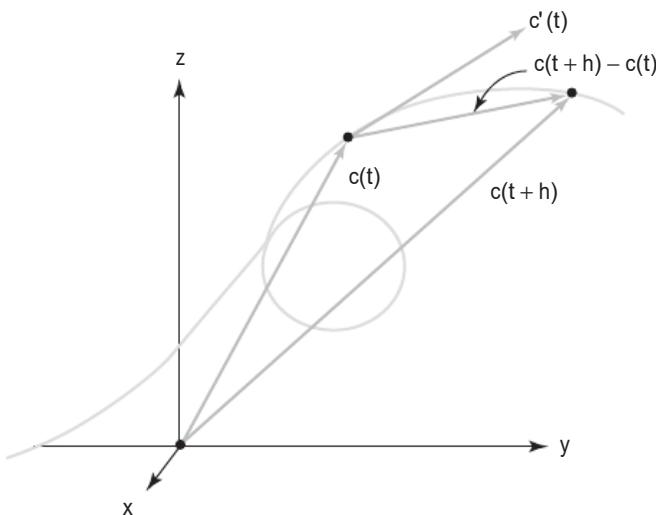


Figura 2.4.8 El vector $\mathbf{c}'(t)$ es tangente a la trayectoria $\mathbf{c}(t)$.

Si pensamos en la derivada $D\mathbf{c}(t)$ como en una matriz, esta será un vector columna con los elementos $x'(t)$, $y'(t)$ y $z'(t)$. Por tanto, la derivada aquí es coherente con nuestra noción anterior.

Ejemplo 5

Calcular el vector tangente a la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, e^t)$ en $t = 0$.

Solución

Aquí $\mathbf{c}'(t) = (1, 2t, e^t)$ y en $t = 0$ obtenemos el vector tangente $(1, 0, 1)$. ▲

Ejemplo 6

Describir la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$. Determinar el vector velocidad en el punto de la curva imagen cuando $t = \pi/2$.

Solución

Para un t dado, el punto $(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ está sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy . Por tanto, el punto $(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ está t unidades por encima del punto $(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ si t es positivo y $-t$ unidades por debajo $(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ si t es negativo. A medida que t crece, $(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ se enrolla alrededor del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con la coordenada z creciente. La curva que traza se llama **hélice** y se muestra en la Figura 2.4.9. En $t = \pi/2$, $\mathbf{c}'(\pi/2) = (-\operatorname{sen} \pi/2, \cos \pi/2, 1) = (-1, 0, 1) = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

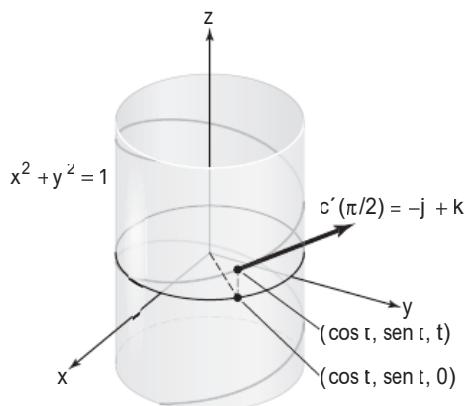


Figura 2.4.9 La hélice $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ se enrolla alrededor del cilindro $x^2 + y^2 = 1$. ▲

Ejemplo 7

La trayectoria cicloidal de una partícula en el borde de un disco de radio R que se mueve con velocidad v está definida por $\mathbf{c}(t) = (vt - R \operatorname{sen}(vt/R), R - R \cos(vt/R))$ (véase el Ejemplo 4). Hallar la velocidad $\mathbf{c}'(t)$ de la partícula como una función de t . ¿Cuándo es la velocidad igual a cero? ¿Es el vector velocidad vertical en algún momento?

Solución

Para hallar la velocidad derivamos:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}'(t) &= \left(\frac{d}{dt} \left(vt - R \operatorname{sen} \frac{vt}{R} \right), \frac{d}{dt} \left(R - R \cos \frac{vt}{R} \right) \right) \\ &= \left(v - v \cos \frac{vt}{R}, v \operatorname{sen} \frac{vt}{R} \right).\end{aligned}$$

En notación vectorial, $\mathbf{c}'(t) = (v - v \cos(vt/R))\mathbf{i} + (v \operatorname{sen}(vt/R))\mathbf{j}$. La componente en la dirección de \mathbf{i} es $v(1 - \cos(vt/R))$, que vale cero cuando vt/R es un múltiplo entero de 2π . Para dichos valores de t , $\operatorname{sen}(vt/R)$ también es cero, por tanto, los únicos instantes en los que la velocidad es cero son $t = 2\pi n R/v$ para cualquier entero n . En dichos instantes, $\mathbf{c}(t) = (2\pi n R, 0)$, de modo que el punto en movimiento está tocando el suelo. Estos instantes ocurren tras intervalos de tiempo de $2\pi R/v$ (más frecuentemente para discos pequeños, así como para aquellos que ruedan rápidamente).

El vector velocidad nunca es vertical, porque la componente horizontal solamente se anula cuando también lo hace la vertical. ▲

La Figura 2.4.10 muestra algunos vectores velocidad superpuestos sobre la trayectoria cicloidal de la Figura 2.4.6.

Recta tangente

La recta tangente a una trayectoria en un punto es la recta que pasa por el punto con la dirección del vector tangente. Utilizando la forma punto-vector de la ecuación de una recta, obtenemos la ecuación paramétrica de la recta tangente.

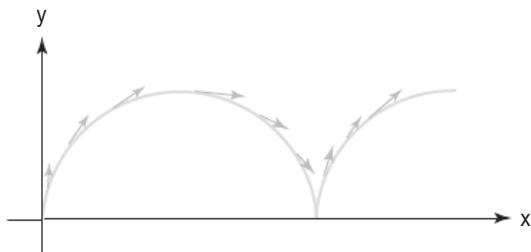


Figura 2.4.10 Vectores velocidad para la curva trazada por un punto en el borde de un disco que rueda.

Recta tangente a una trayectoria Si $\mathbf{c}(t)$ es una trayectoria y si $\mathbf{c}'(t_0) \neq \mathbf{0}$, la ecuación de su **recta tangente** en el punto $\mathbf{c}(t_0)$ es

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{c}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{c}'(t_0).$$

Si C es la curva que traza \mathbf{c} , entonces la línea que traza \mathbf{l} es la recta tangente a la curva C en $\mathbf{c}(t_0)$.

Obsérvese que hemos escrito la ecuación de tal forma que \mathbf{l} pasa por el punto $\mathbf{c}(t_0)$ en $t = t_0$ (en lugar de en $t = 0$). Véase la Figura 2.4.11.

Ejemplo 8

Una trayectoria en \mathbb{R}^3 pasa por el punto $(3, 6, 5)$ en $t = 0$ con vector tangente $\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Hallar la ecuación de la recta tangente.

Solución

La ecuación de la recta tangente es

$$\mathbf{l}(t) = (3, 6, 5) + t(\mathbf{i} - \mathbf{j}) = (3, 6, 5) + t(1, -1, 0) = (3 + t, 6 - t, 5).$$

En coordenadas (x, y, z) , la recta tangente es $x = 3 + t, y = 6 - t, z = 5$. ▲

Desde el punto de vista de la física, podemos interpretar el movimiento a lo largo de la recta tangente como la trayectoria que seguiría una partícula sobre la curva si se la liberase en un determinado instante.

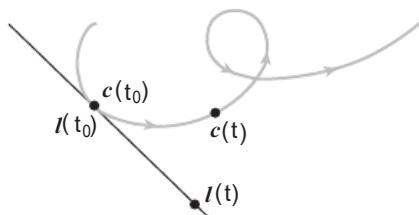


Figura 2.4.11 Recta tangente a una trayectoria.

Ejemplo 9

Supongamos que una partícula sigue la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ hasta que se sale por la tangente en el instante $t = 1$. ¿Dónde estará en el instante $t = 3$?

Solución

El vector velocidad es $(e^t, -e^{-t}, -\operatorname{sen} t)$ que, en $t = 1$, es el vector $(e, -1/e, -\operatorname{sen} 1)$. La partícula está en $(e, 1/e, \cos 1)$ en el instante $t = 1$. La ecuación de la recta tangente es $\mathbf{l}(t) = (e, 1/e, \cos 1) + (t-1)(e, -1/e, -\operatorname{sen} 1)$. En $t = 3$, la posición sobre esta recta es

$$\begin{aligned}\mathbf{l}(3) &= \left(e, \frac{1}{e}, \cos 1\right) + 2 \left(e, -\frac{1}{e}, -\operatorname{sen} 1\right) = \left(3e, -\frac{1}{e}, \cos 1 - 2 \operatorname{sen} 1\right) \\ &\cong (8, 155; -0, 368; -1, 143).\end{aligned}$$

**Ejercicios**

Dibujar las curvas que son las imágenes de las trayectorias de los Ejercicios 1 a 4.

1. $x = \operatorname{sen} t, y = 4 \cos t$, donde $0 \leq t \leq 2\pi$
2. $x = 2 \operatorname{sen} t, y = 4 \cos t$, donde $0 \leq t \leq 2\pi$
3. $\mathbf{c}(t) = (2t-1, t+2, t)$
4. $\mathbf{c}(t) = (-t, 2t, 1/t)$, donde $1 \leq t \leq 3$
5. Sea C la circunferencia de radio 2 y con centro en el origen.
 - (a) Hallar una parametrización de C que induzca una orientación en sentido antihorario y con origen en $(2, 0)$.
 - (b) Hallar una parametrización de C que induzca una orientación en sentido horario y con origen en $(0, 2)$.

En los Ejercicios 7 a 10, determinar el vector velocidad de la trayectoria dada.

7. $\mathbf{c}(t) = 6t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$
8. $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen} 3t)\mathbf{i} + (\cos 3t)\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}$

$$9. \mathbf{r}(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t)$$

$$10. \mathbf{r}(t) = (4e^t, 6t^4, \cos t)$$

En los Ejercicios 11 a 14, calcular los vectores tangente a la trayectoria dada.

11. $\mathbf{c}(t) = (e^t, \operatorname{cost})$
12. $\mathbf{c}(t) = (3t^2, t^3)$
13. $\mathbf{c}(t) = (t \operatorname{sen} t, 4t)$
14. $\mathbf{c}(t) = (t^2, e^2)$

15. ¿Cuándo es horizontal el vector velocidad de un punto que está en el borde de una rueda de radio R que gira a una velocidad v ? ¿Cuál es la velocidad en dicho punto?
16. Si la posición de una partícula en el espacio es $(6t, 3t^2, t^3)$ en el instante t , ¿cuál es su vector velocidad en $t = 0$?

En los Ejercicios 17 y 18, determinar la ecuación de la recta tangente a la trayectoria dada para el valor especificado de t .

17. $(\sin 3t, \cos 3t, 2t^{5/2}); t = 1$

18. $(\cos^2 t, 3t - t^3, t); t = 0$

En los Ejercicios 19 a 22, suponer que una partícula que sigue la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ se sale por la tangente en $t = t_0$. Calcular la posición de la partícula en el instante t_1 dado.

19. $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$, donde $t_0 = 2, t_1 = 3$

(c) Hallar una parametrización para la recta tangente a $\mathbf{c}(t)$ en $t_0 = 4\pi$.

20. $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$, donde $t_0 = 1, t_1 = 2$

(d) ¿Dónde interseca esta recta al plano xy ?

21. $\mathbf{c}(t) = (4e^t, 6t^4, \cos t)$, donde $t_0 = 0, t_1 = 1$

24. Considerar la espiral dada por $\mathbf{c}(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$. Demostrar que el ángulo entre \mathbf{c} y \mathbf{c}' es constante.

22. $\mathbf{c}(t) = (\sin e^t, t, 4 - t^3)$, donde $t_0 = 1, t_1 = 2$

25. Sean $\mathbf{c}(t) = (t^3, t^2, 2t)$ y $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, 2xy, z^2)$.

23. El vector posición para una partícula que se mueve sobre una hélice es $\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \sin(t), t^2)$.

(a) Hallar la velocidad de la partícula en el instante $t_0 = 4\pi$.

- (b) ¿Es $\mathbf{c}'(t)$ ortogonal a $\mathbf{c}(t)$?

(b) Hallar una parametrización para la recta tangente a la curva $f \circ \mathbf{c}$ en $t = 1$.

2.5 Propiedades de la derivada

En el cálculo elemental se aprende a derivar sumas, productos, cocientes y funciones compuestas. Aquí vamos a generalizar estas ideas a funciones de varias variables, prestando especial atención a la diferenciación de las funciones compuestas. La regla para derivar funciones compuestas, denominada *regla de la cadena*, adquiere para funciones de varias variables una forma más profunda que para las funciones de una variable.

Si f es una función con valores reales de una variable, escrita como $z = f(y)$ y y es una función de x , escrita como $y = g(x)$, entonces z será una función de x por sustitución, es decir, $z = f(g(x))$, y tendremos la familiar regla de la cadena:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x).$$

Si f es una función con valores reales de tres variables u, v y w , escrita de la forma $z = f(u, v, w)$, y las variables u, v, w son a su vez funciones de x , $u = g(x)$, $v = h(x)$ y $w = k(x)$, entonces sustituyendo u, v y w por $g(x), h(x)$ y $k(x)$, obtenemos z como una función de x : $z = f(g(x), h(x), k(x))$. La regla de la cadena en este caso se traduce en:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{dx}.$$

Uno de los objetivos de esta sección es explicar estas fórmulas en detalle.

Sumas, productos, cocientes

Estas reglas funcionan del mismo modo que en el cálculo de una variable.

Teorema 10 Sumas, productos, cocientes

- (I) **Regla de la multiplicación por una constante.** Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en \mathbf{x}_0 y sea c un número real. Entonces $h(\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ es diferenciable en \mathbf{x}_0 y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \quad (\text{igualdad de matrices}).$$

- (II) **Regla de la suma.** Sean $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciables en \mathbf{x}_0 . Entonces $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ es diferenciable en \mathbf{x}_0 y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) \quad (\text{suma de matrices}).$$

- (III) **Regla del producto.** Sean $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en \mathbf{x}_0 y sea $h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$. Entonces $h: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en \mathbf{x}_0 y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0).$$

(Obsérvese que cada lado de esta ecuación es una matriz $1 \times n$. En el Ejercicio 31 al final de esta sección se presenta una regla del producto más general.)

- (IV) **Regla del cociente.** Con las mismas hipótesis que en la regla (III), sea $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ y supongamos que g nunca se anula en U . Entonces h es diferenciable en \mathbf{x}_0 y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = \frac{g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)}{[g(\mathbf{x}_0)]^2}.$$

Demostración Las demostraciones de las reglas (I) a (IV) siguen casi exactamente las mismas líneas que en el caso de una variable, pero con una notación algo diferente. Demostraremos las reglas (I) y (II), y dejaremos las de las reglas (III) y (IV) para el Ejercicio 27.

- (I) Para demostrar que $\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$, tenemos que demostrar que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0,$$

es decir, que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|cf(\mathbf{x}) - cf(\mathbf{x}_0) - c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0,$$

(véase la Ecuación (4) de la Sección 2.3). Esto es obviamente cierto, ya que f es diferenciable y la constante c se puede sacar como factor común (véase el Teorema 3(i), Sección 2.2).

(II) Aplicando la desigualdad triangular, podemos escribir

$$\begin{aligned} & \frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &= \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &\leq \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} + \frac{\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}, \end{aligned}$$

y cada uno de los términos tiende a 0 cuando $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, de lo que se sigue la regla (II). ■

Ejemplo 1 Verificar la fórmula para $\mathbf{D}h$ en la regla (IV) del Teorema 10 para

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{y} \quad g(x, y, z) = x^2 + 1.$$

Solución

En este caso

$$h(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + 1},$$

de forma que derivando directamente

$$\begin{aligned} \mathbf{D}h(x, y, z) &= \left[\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right] \\ &= \left[\frac{(x^2 + 1)2x - (x^2 + y^2 + z^2)2x}{(x^2 + 1)^2}, \frac{2y}{x^2 + 1}, \frac{2z}{x^2 + 1} \right] \\ &= \left[\frac{2x(1 - y^2 - z^2)}{(x^2 + 1)^2}, \frac{2y}{x^2 + 1}, \frac{2z}{x^2 + 1} \right]. \end{aligned}$$

Por la regla (IV), obtenemos

$$\mathbf{D}h = \frac{g\mathbf{D}f - f\mathbf{D}g}{g^2} = \frac{(x^2 + 1)[2x, 2y, 2z] - (x^2 + y^2 + z^2)[2x, 0, 0]}{(x^2 + 1)^2},$$

que es igual a lo que hemos obtenido directamente. ▲

La regla de la cadena

Como hemos mencionado anteriormente, es en la derivación de las funciones compuestas donde nos encontramos con variaciones sustanciales de la fórmula del cálculo de una variable. Sin embargo, si usamos la notación \mathbf{D} , es decir, la notación matricial para las derivadas, la regla de la cadena para funciones de varias variables parece similar a la de la regla para una variable.

Teorema 11 Regla de la cadena Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos. Sean $g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $f: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ funciones tales que g lleva U en V , de modo que $f \circ g$ está definida. Suponemos que g es diferenciable en \mathbf{x}_0 y f es diferenciable en $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$. Entonces $f \circ g$ es diferenciable en \mathbf{x}_0 y

$$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0). \quad (1)$$

El miembro de la derecha es la matriz producto de $\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)$ y $\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$.

A continuación proporcionamos una demostración de la regla de la cadena *bajo la hipótesis adicional de que las derivadas parciales de f son continuas*. Demostramos el caso general desarrollando dos casos especiales que son importantes por sí mismos.

Primer caso especial de la regla de la cadena

Suponemos que $\mathbf{c}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una trayectoria diferenciable y que $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $h(t) = f(\mathbf{c}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$, donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Entonces

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (2)$$

Es decir,

$$\frac{dh}{dt} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t),$$

donde $\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Este es el caso especial del Teorema 11 en el que tomamos $\mathbf{c} = g$, f es una función con valores reales y $m = 3$. Obsérvese que

$$\nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))\mathbf{D}\mathbf{c}(t),$$

donde el producto del lado izquierdo es el producto escalar de vectores, mientras que el producto del lado derecho es una multiplicación de matrices en la que hemos tomado $\mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))$ como matriz *fila* y $\mathbf{D}\mathbf{c}(t)$ como matriz *columna*. Los vectores $\nabla f(\mathbf{c}(t))$ y $\mathbf{c}'(t)$ tienen las mismas componentes que sus equivalentes matriciales; el cambio en la notación indica el cambio de matrices a vectores.

Demostración de la ecuación (2) Por definición,

$$\frac{dh}{dt}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}.$$

Sumando y restando dos términos, escribimos

$$\begin{aligned}
\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} &= \frac{f(x(t), y(t), z(t)) - f(x(t_0), y(t_0), z(t_0))}{t - t_0} \\
&= \frac{f(x(t), y(t), z(t)) - f(x(t_0), y(t), z(t))}{t - t_0} \\
&\quad + \frac{f(x(t_0), y(t), z(t)) - f(x(t_0), y(t_0), z(t))}{t - t_0} \\
&\quad + \frac{f(x(t_0), y(t_0), z(t)) - f(x(t_0), y(t_0), z(t_0))}{t - t_0}.
\end{aligned}$$

Ahora aplicamos el *teorema del valor medio* del cálculo de una variable, que establece: *si $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) , entonces existe un punto c en (a, b) tal que $g(b) - g(a) = g'(c)(b - a)$.* Aplicando lo anterior a f como función de x , podemos afirmar que, para algún c entre x y x_0 ,

$$f(x, y, z) - f(x_0, y, z) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, y, z) \right] (x - x_0).$$

De la misma forma, calculamos

$$\begin{aligned}
\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, y(t), z(t)) \right] \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \\
&\quad + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), d, z(t)) \right] \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \\
&\quad + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x(t_0), y(t_0), e) \right] \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0},
\end{aligned}$$

donde c, d y e se encuentran entre $x(t)$ y $x(t_0)$, entre $y(t)$ e $y(t_0)$ y entre $z(t)$ y $z(t_0)$, respectivamente. Tomando el límite cuando $t \rightarrow t_0$, teniendo en cuenta la continuidad de las derivadas parciales $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z$, y el hecho de que c, d y e convergen a $x(t_0), y(t_0)$ y $z(t_0)$, respectivamente, obtenemos la Ecuación (2). ■

Segundo caso especial de la regla de la cadena

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Escribimos

$$g(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$$

y definimos $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)).$$

En este caso, la regla de la cadena establece que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

En este caso especial, para concretar hemos tomado $n = m = 3$ y $p = 1$, y con el fin de simplificar $U = \mathbb{R}^3$ y $V = \mathbb{R}^3$, y hemos escrito explícitamente el producto de matrices $[\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)][\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]$ (suprimiendo en las matrices los puntos \mathbf{x}_0 e \mathbf{y}_0).

Demostración—Segundo caso especial de la regla de la cadena
Por definición, $\partial h / \partial x$ se obtiene derivando h respecto de x , dejando y y z fijas. Entonces $(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ se puede considerar como una función vectorial de una única variable x . El primer caso especial se ajusta a esta situación y, tras renombrar las variables, proporciona

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (3')$$

De forma similar,

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3'')$$

y

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3''')$$

En los cálculos prácticos, en el último paso, se suele expresar $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ y $\frac{\partial f}{\partial w}$ en términos de x, y, z . Estas ecuaciones son exactamente las que se obtendrían multiplicando las matrices de la Ecuación (3). ■

Demostración del Teorema 11 El caso general de la Ecuación (1) se puede demostrar en dos pasos. Primero, la Ecuación (2) se generaliza a m variables; es decir, para $f(x_1, \dots, x_m)$ y $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$, tenemos

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt},$$

donde $h(t) = f(x_1(t), \dots, x_m(t))$. En segundo lugar, el resultado obtenido en el primer paso se usa para obtener la fórmula

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i},$$

donde $f = (f_1, \dots, f_p)$ es una función vectorial de variables y_1, \dots, y_m ; $g(x_1, \dots, x_n) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$ y $h_j(x_1, \dots, x_n) = f_j(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$ (el uso de la letra y tanto para las funciones como para las variables es un abuso de notación, pero resulta útil para recordar la fórmula). Esta fórmula es equivalente a la Ecuación (1) una vez que se han multiplicado las matrices. ■

El lector entenderá mejor el patrón de la regla de la cadena después de haber realizado algunos casos particulares. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(u(x, y), v(x, y), w(x, y), z(x, y)) = \\ \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x},\end{aligned}$$

con una fórmula similar para $\partial f / \partial y$.

La regla de la cadena nos puede ayudar a entender la relación entre la geometría de la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y la geometría de las curvas en \mathbb{R}^2 (se pueden hacer afirmaciones similares para \mathbb{R}^3 o, en general, para \mathbb{R}^n .) Si $\mathbf{c}(t)$ es una trayectoria en el plano, entonces, como hemos visto en la Sección 2.4, $\mathbf{c}'(t)$ representa el vector tangente (o el vector velocidad) a la trayectoria $\mathbf{c}(t)$. Sea $\mathbf{p}(t) = f(\mathbf{c}(t))$, donde $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. La trayectoria \mathbf{p} representa la imagen de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ mediante la aplicación f . El vector tangente a \mathbf{p} está dado por la regla de la cadena:

$$\mathbf{p}'(t) = \underbrace{\mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))}_{\text{matriz}} \underbrace{\mathbf{c}'(t)}_{\text{vector columna}}.$$

multiplicación de matrices

En otras palabras, la matriz derivada de f aplica el vector tangente (o vector velocidad) de una trayectoria \mathbf{c} al vector tangente (o vector velocidad) de la correspondiente trayectoria imagen \mathbf{p} (véase la Figura 2.5.1). Por tanto, la función f es una aplicación entre puntos, mientras que la derivada de f es una aplicación entre vectores tangentes a curvas, evaluada en cada punto del dominio de definición sobre el vector tangente en ese punto.

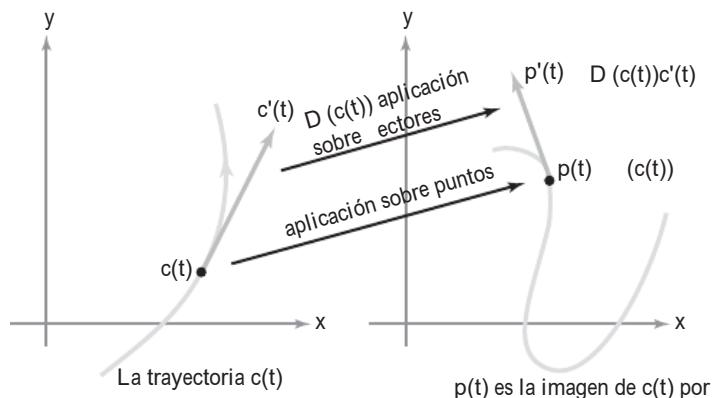


Figura 2.5.1 La matriz derivada es una aplicación sobre vectores tangentes.

Ejemplo 2

Verificar la regla de la cadena en la forma dada en la fórmula (3') para

$$f(u, v, w) = u^2 + v^2 - w,$$

donde

$$u(x, y, z) = x^2y, \quad v(x, y, z) = y^2, \quad w(x, y, z) = e^{-xz}.$$

Solución

Aquí

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) \\ &= (x^2y)^2 + y^4 - e^{-xz} = x^4y^2 + y^4 - e^{-xz}. \end{aligned}$$

Por tanto, derivando directamente,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x^3y^2 + ze^{-xz}.$$

Por otro lado, utilizando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = 2u(2xy) + 2v \cdot 0 + (-1)(-ze^{-xz}) \\ &= (2x^2y)(2xy) + ze^{-xz}, \end{aligned}$$

lo que es lo mismo que la ecuación anterior. ▲

Ejemplo 3

Dadas $g(x, y) = (x^2+1, y^2)$ y $f(u, v) = (u+v, u, v^2)$, calcular la derivada de $f \circ g$ en el punto $(x, y) = (1, 1)$ usando la regla de la cadena.

Solución

Las matrices de derivadas parciales son

$$\mathbf{D}f(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{D}g(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que cuando $(x, y) = (1, 1)$, $g(x, y) = (u, v) = (2, 1)$. Por tanto,

$$\mathbf{D}(f \circ g)(1, 1) = \mathbf{D}f(2, 1)\mathbf{D}g(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es la derivada pedida. ▲

Ejemplo 4

Dada $f(x, y)$ y el cambio de variables $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ (coordenadas polares), escribir una fórmula para $\partial f / \partial \theta$.

Solución

Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta},$$

es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 5

Sean $f(x, y) = (\cos y + x^2, e^{x+y})$ y $g(u, v) = (e^{u^2}, u - \sin v)$. (a) Escribir una fórmula para $f \circ g$. (b) Calcular $\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0)$ utilizando la regla de la cadena.

Solución

(a) Tenemos

$$\begin{aligned} (f \circ g)(u, v) &= f(e^{u^2}, u - \sin v) \\ &= (\cos(u - \sin v) + e^{2u^2}, e^{e^{u^2} + u - \sin v}). \end{aligned}$$

(b) Por la regla de la cadena,

$$\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0) = [\mathbf{D}f(g(0, 0))][\mathbf{D}g(0, 0)] = [\mathbf{D}f(1, 0)][\mathbf{D}g(0, 0)].$$

Ahora

$$\mathbf{D}g(0, 0) = \begin{bmatrix} 2ue^{u^2} & 0 \\ 1 & -\cos v \end{bmatrix}_{(u,v)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{D}f(1, 0) = \begin{bmatrix} 2x & -\sin y \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{bmatrix}_{(x,y)=(1,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{bmatrix}.$$

Recordemos que $\mathbf{D}f$ se evalúa en $g(0, 0)$, no en $(0, 0)$. Por tanto,

$$\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \end{bmatrix}. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 6

Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable, con $f = (f_1, \dots, f_m)$ y sea $g(\mathbf{x}) = \operatorname{sen}[f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})]$. Calcular $\mathbf{D}g(\mathbf{x})$.

Solución

Por la regla de la cadena, $\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = \cos[f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})] \mathbf{D}h(\mathbf{x})$, donde $h(\mathbf{x}) = [f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})] = f_1^2(\mathbf{x}) + \dots + f_m^2(\mathbf{x})$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{D}h(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + 2f_m \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & 2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \dots + 2f_m \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

lo que se puede escribir como $2f(\mathbf{x})\mathbf{D}f(\mathbf{x})$, donde consideramos que f es una matriz fila,

$$f = [f_1 \quad \cdots \quad f_m] \quad \text{y} \quad \mathbf{D}f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = 2[\cos(f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}))]f(\mathbf{x})\mathbf{D}f(\mathbf{x})$. ▲

Ejercicios

1. Si $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, demostrar que $\mathbf{x} \mapsto f^2(\mathbf{x}) + 2f(\mathbf{x})$ también es diferenciable y calcular su derivada en función de $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$.
2. Demostrar que las siguientes funciones son diferenciables y hallar sus derivadas en un punto arbitrario:
 - (a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2$
 - (b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$
 - (c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2 + x + y$
 - (d) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$
 - (e) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{xy}$
 - (f) $f: U \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, donde $U = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$
 - (g) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^4 - y^4$
3. Verificar el primer caso especial de la regla de la cadena para la composición $f \circ \mathbf{c}$ en cada uno de los casos siguientes:
 - (a) $f(x, y) = xy, \mathbf{c}(t) = (e^t, \cos t)$
 - (b) $f(x, y) = e^{xy}, \mathbf{c}(t) = (3t^2, t^3)$
 - (c) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \log \sqrt{x^2 + y^2}, \mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t})$
 - (d) $f(x, y) = x \exp(x^2 + y^2), \mathbf{c}(t) = (t, -t)$
4. ¿Cuál es el vector velocidad para cada una de las trayectorias $\mathbf{c}(t)$ del Ejercicio 3?
5. Sean $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables. Demostrar que $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.
6. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Haciendo el cambio de variables

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \phi, \quad z = \rho \cos \phi$$
 (coordenadas esféricas) en $f(x, y, z)$, calcular $\partial f / \partial \rho, \partial f / \partial \theta$ y $\partial f / \partial \phi$ en función de $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y$ y $\partial f / \partial z$.
7. Sean $f(u, v) = (\tan(u - 1) - e^v, u^2 - v^2)$ y $g(x, y) = (e^{x-y}, x - y)$. Calcular $f \circ g$ y $\mathbf{D}(f \circ g)(1, 1)$.
8. Sea $f(u, v, w) = (e^{u-w}, \cos(v+u) + \sin(u+v+w))$ y $g(x, y) = (e^x, \cos(y-x), e^{-y})$. Calcular $f \circ g$ y $\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0)$.
9. Hallar $(\partial/\partial s)(f \circ T)(1, 0)$, donde $f(u, v) = \cos u \sen v$ y $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se define como $T(s, t) = (\cos(t^2 s), \log \sqrt{1 + s^2})$.
10. Supóngase que la temperatura en el punto (x, y, z) del espacio es $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Una partícula sigue la hélice circular $\sigma(t) = (\cos t, \sen t, t)$ y sea $T(t)$ su temperatura en el instante t .
 - (a) Calcular $T'(t)$.
 - (b) Hallar un valor aproximado para la temperatura en $t = (\pi/2) + 0,01$.
11. Sea $f(x, y, z) = (3y + 2, x^2 + y^2, x + z^2)$. Sea $\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \sen(t), t)$.
 - (a) Hallar la trayectoria $\mathbf{p} = f \circ \mathbf{c}$ y el vector velocidad $\mathbf{p}'(\pi)$.
 - (b) Hallar $\mathbf{c}(\pi), \mathbf{c}'(\pi)$ y $\mathbf{D}f(-1, 0, \pi)$.
 - (c) Considerando $\mathbf{D}f(-1, 0, \pi)$ como una aplicación lineal, hallar $\mathbf{D}f(-1, 0, \pi)$ ($\mathbf{c}'(\pi)$).
12. Sean $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ y $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definidas como $h(x, y, z) = (xyz, e^{xz}, x \sen(y), \frac{-9}{x}, 17)$ y $g(u, v) = (v^2 + 2u, \pi, 2\sqrt{u})$. Hallar $\mathbf{D}(h \circ g)(1, 1)$.
13. Si que un pato está nadando sobre la circunferencia $x = \cos t, y = \sen t$ y la temperatura del agua está dada por la fórmula $T = x^2 e^y - xy^3$, hallar dT/dt , la variación de temperatura que el

- pato sentiría: (a) usando la regla de la cadena, (b) expresando T en función de t y derivando.
- 14.** Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal de modo que (por el Ejercicio 28 de la Sección 2.3) $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ es la matriz de f . Comprobar directamente la validez de la regla de la cadena para aplicaciones lineales.
- 15.** Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (e^{x+y}, e^{x-y})$. Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria con $\mathbf{c}(0) = (0, 0)$ y $\mathbf{c}'(0) = (1, 1)$. ¿Cuál es el vector tangente a la imagen de $\mathbf{c}(t)$ bajo f en $t = 0$?
- 16.** Sea $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$. Calcular $\nabla f(x, y)$.
- 17.** Escribir la regla de la cadena para cada una de las funciones siguientes y justificar la respuesta en cada caso utilizando el Teorema 11.
- $\partial h/\partial x$, donde $h(x, y) = f(x, u(x, y))$
 - dh/dx , donde $h(x) = f(x, u(x), v(x))$
 - $\partial h/\partial x$, donde $h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y), w(x))$
- 18.** Verificar la regla de la cadena para $\partial h/\partial x$, donde $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ y
- $$f(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2},$$
- $$u(x, y) = e^{-x-y}, \quad v(x, y) = e^{xy}.$$
- 19.** (a) Sea $y(x)$ la función definida implícitamente ($y(x)$ no está definida explícitamente como función de x) por $G(x, y(x)) = 0$, donde G es una función dada de dos variables. Demostrar que si $y(x)$ y G son diferenciables, entonces
- $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial G/\partial x}{\partial G/\partial y} \quad \text{si} \quad \frac{\partial G}{\partial y} \neq 0.$$
- (b) Obtener una fórmula análoga a la del apartado (a) si y_1, y_2 se definen implícitamente mediante
- $$G_1(x, y_1(x), y_2(x)) = 0,$$
- $$G_2(x, y_1(x), y_2(x)) = 0.$$
- 20.** Los textos sobre termodinámica⁴ utilizan la relación
- $$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right) = -1.$$
- Explicar el significado de esta ecuación y demostrar que es cierta. (SUGERENCIA: partir de una relación $F(x, y, z) = 0$ que define $x = f(y, z)$, $y = g(x, z)$ y $z = h(x, y)$ y derivar implícitamente.)
- 21.** La ecuación de estado de Dieterici para un gas es $P(V - b)e^{a/RVT} = RT$, donde a, b y R son constantes. Considerar el volumen V como una función de la temperatura T y de la presión P y demostrar que
- $$\frac{\partial V}{\partial T} = \left(R + \frac{a}{TV} \right) \Big/ \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right).$$
- 22.** Este ejercicio proporciona otro ejemplo del hecho de que la regla de la cadena no es aplicable si f no es diferenciable. Considérese la función
- $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
- Demostrar que
- $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ existen en $(0, 0)$.
 - Si $\mathbf{g}(t) = (at, bt)$ para constantes a y b , entonces $f \circ \mathbf{g}$ es diferenciable y $(f \circ \mathbf{g})'(0) = ab^2/(a^2 + b^2)$, pero $\nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{g}'(0) = 0$.
- 23.** Demostrar que si $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$, existe un entorno V de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ y una función $R_1: V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $\mathbf{h} \in V$, tenemos $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in U$,
- $$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h} + R_1(\mathbf{h})$$
- y
- $$\frac{R_1(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}.$$

⁴Véase S. M. Binder, "Mathematical Methods in Elementary Thermodynamics", *J. Chem. Educ.*, 43 (1966): 85–92. Un conocimiento adecuado de la derivación parcial puede resultar muy útil en algunas aplicaciones; por ejemplo, véase M. Feinberg, "Constitutive Equation for Ideal Gas Mixtures and Ideal Solutions as Consequences of Simple Postulates", *Chem. Eng. Sci.*, 32 (1977): 75–78.

- 24.** Suponer $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $0 \leq r_1 < r_2$. Demostrar que existe una función de clase C^1 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbf{x}) = 0$ para $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \geq r_2$; $0 < f(\mathbf{x}) < 1$ para $r_1 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r_2$; y $f(\mathbf{x}) = 1$ para $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r_1$. [SUGERENCIA: aplicar un polinomio cúbico que verifique $g(r_1^2) = 1$ y $g(r_2^2) = g'(r_2^2) = g''(r_2^2) = 0$ a $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ cuando $r_1 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r_2$.]

- 25.** Hallar una aplicación de clase C^1 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que transforme el vector $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ que parte del origen en el vector $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ con origen en $(1, 1, 0)$ y el vector \mathbf{k} que sale de $(1, 1, 0)$ en el vector $\mathbf{k} - \mathbf{i}$ que sale del origen.

- 26.** ¿Qué es incorrecto en el siguiente argumento? Supóngase que $w = f(x, y, z)$ y $z = g(x, y)$. Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Por tanto, $0 = (\partial w / \partial z)(\partial z / \partial x)$, y entonces $\partial w / \partial z = 0$ o $\partial z / \partial x = 0$, lo que, en general, es absurdo.

- 27.** Demostrar las reglas (III) y (IV) del Teorema 10. [SUGERENCIA: utilizar los mismos trucos de sumar y restar que en el caso de una variable y del Teorema 8.]

- 28.** Demostrar que $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable si y solo si cada una de las m componentes $h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable. SUGERENCIA: utilizar la función de proyección de coordenadas y la regla de la cadena para obtener una de las implicaciones y para obtener la otra tener en cuenta que

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}h(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right]^2 \\ &= \frac{\sum_{i=1}^m [h_i(\mathbf{x}) - h_i(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}h_i(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)]^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} \end{aligned}$$

- 29.** Utilizar la regla de la cadena y la derivación bajo el signo de integral, en concreto,

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy,$$

para demostrar que

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(x, y) dy = f(x, x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

- 30.** ¿Para qué enteros $p > 0$ es la función

$$f(x) = \begin{cases} x^p \operatorname{sen}(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

diferenciable? ¿Para qué valores de p es la derivada continua?

- 31.** Supóngase que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ son diferenciables. Demostrar que la función producto $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m es diferenciable y que si \mathbf{x}_0 e \mathbf{y} están en \mathbb{R}^n , entonces $[\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y} = f(\mathbf{x}_0)[\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y} + \{[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}\}g(\mathbf{x}_0)$.

- 32.** Sean $g(u, v) = (e^u, u + \operatorname{sen} v)$ y $f(x, y, z) = (xy, yz)$. Calcular $\mathbf{D}(g \circ f)$ en $(0, 1, 0)$ utilizando la regla de la cadena.

- 33.** Sean $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{c}(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$. Suponer que $\nabla f(1, 1, \pi, e^6) = (0, 1, 3, -7)$, $\mathbf{c}(\pi) = (1, 1, \pi, e^6)$, y que $\mathbf{c}'(\pi) = (19, 11, 0, 1)$. Hallar $\frac{d(f \circ \mathbf{c})}{dt}$ cuando $t = \pi$.

- 34.** Supóngase que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y que $g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$.

- (a) ¿Qué condición deben cumplir los números n, m, p y q para que $f \circ g$ tenga sentido?
- (b) ¿Qué condición deben cumplir los números n, m, p y q para que $g \circ f$ tenga sentido?
- (c) ¿Cuándo tiene sentido $f \circ f$?

- 35.** Si $z = f(x - y)$, utilizar la regla de la cadena para demostrar que $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

- 36.** Sean $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = uv$, $y = u \cos v$, $z = u \operatorname{sen} v$. Utilizar la regla de la cadena para hallar $\frac{\partial w}{\partial u}$ cuando $(u, v) = (1, 0)$.

2.6 Gradienes y derivadas direccionales

En la Sección 2.1 hemos estudiado las gráficas de las funciones con valores reales. Ahora vamos a retomar este estudio utilizando métodos de cálculo. Concretamente, emplearemos gradienes para obtener una fórmula del plano tangente a una superficie de nivel.

Gradienes en \mathbb{R}^3

Recordemos la definición.

Definición Gradiente Si $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, el **gradiente** de f en (x, y, z) es el vector del espacio dado por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Este vector también se denota por $\nabla f(x, y, z)$. Por tanto, ∇f es exactamente la matriz de la derivada Df , escrita como vector.

Ejemplo 1

Sea $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$ la distancia desde $\mathbf{0}$ a (x, y, z) . Entonces

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r},\end{aligned}$$

donde \mathbf{r} es el punto (x, y, z) . Por tanto, ∇f es el vector unitario en la dirección de (x, y, z) . ▲

Ejemplo 2

Si $f(x, y, z) = xy + z$, entonces

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (y, x, 1). \quad \blacktriangle$$

Supóngase que $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función con valores reales. Sean \mathbf{v} y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ vectores fijos y considérese la función de \mathbb{R} en \mathbb{R} definida por $t \mapsto f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$. El conjunto de puntos de la forma $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$, es la recta L que pasa por el punto \mathbf{x} y es paralela al vector \mathbf{v} (véase la Figura 2.6.1).

Derivadas direccionales

La función $t \mapsto f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ representa la restricción de f a la recta L . Por ejemplo, si un pájaro vuela siguiendo esta recta con velocidad \mathbf{v} , de modo que $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ es su posición en el instante t , y si f representa la temperatura como función de la posición, entonces $f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ es la temperatura en el instante t . Podemos preguntarnos: ¿con qué velocidad

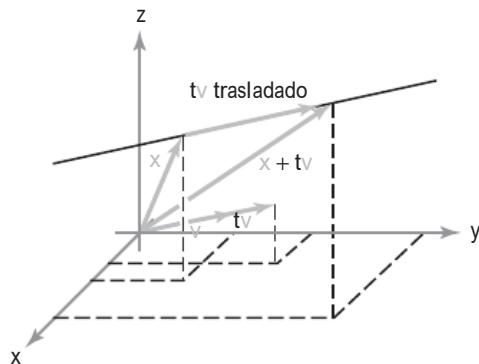


Figura 2.6.1 La ecuación de L es $\mathbf{l}(t) = \mathbf{x} + t \mathbf{v}$.

cambian los valores de f a lo largo de la recta L en el punto \mathbf{x} ? Dado que la variación de una función está dada por una derivada, podríamos decir que la respuesta a esta pregunta es el valor de la derivada de esta función de t en $t = 0$ (cuando $t = 0$, $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ se reduce a \mathbf{x}). Esta sería la derivada de f en el punto \mathbf{x} en la dirección de L ; es decir, de \mathbf{v} . Podemos formalizar este concepto como sigue.

Definición Derivadas direccionales Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, la **derivada direccional** de f en \mathbf{x} según el vector \mathbf{v} está dada por

$$\left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0}$$

si este valor existe.

En la definición de una derivada direccional, normalmente elegimos \mathbf{v} para que sea un vector *unitario*. En este caso, nos movemos en la dirección \mathbf{v} con velocidad uno y nos referimos a $\left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0}$ como la **derivada direccional de f en la dirección \mathbf{v}** .

Vamos a ver ahora por qué en la definición de derivada direccional se elige un *vector unitario*. Supóngase que f mide la temperatura en grados y que nos interesa saber cómo de rápido varía cuando nos movemos en una determinada dirección. Si medimos la distancia en metros, entonces la variación de la temperatura se medirá en grados por metro. Para simplificar, supongamos que la temperatura varía a velocidad constante —por ejemplo, dos grados por metro— a medida que nos movemos en una dirección dada \mathbf{v} comenzando en \mathbf{x} . Así, al desplazarnos hacia adelante un metro, la temperatura varía en dos grados. Es decir,

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}) = 2.$$

Una relación de este tipo se verificará únicamente cuando \mathbf{v} sea un vector unitario, reflejando el hecho de que nos desplazamos *un* metro hacia adelante. De forma más general, la definición de derivada direccional solo medirá realmente la variación de f con respecto de la distancia a lo largo de una recta en una dirección dada si \mathbf{v} es un vector unitario.

A partir de la definición, podemos ver que la derivada direccional también se puede definir mediante la fórmula

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h}.$$

Teorema 12 Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces todas las derivadas direccionales existen. La derivada direccional en \mathbf{x} en la dirección \mathbf{v} está dada por

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{v} = \text{grad } f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}) \right] v_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}) \right] v_2 + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}) \right] v_3,$$

donde $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Demostración Sea $\mathbf{c}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$, de forma que $f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) = f(\mathbf{c}(t))$. Por el primer caso especial de la regla de la cadena, $(d/dt)f(\mathbf{c}(t)) = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$. Sin embargo, $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}$ y $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$, y por tanto

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \Big|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v},$$

como se quería demostrar. ■

Obsérvese que no es necesario utilizar rectas al calcular la variación de f en una dirección determinada \mathbf{v} . De hecho, para una trayectoria general $\mathbf{c}(t)$ con $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}$ y $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$, por la regla de la cadena tenemos,

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t)) \Big|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) \Big|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}.$$

Ejemplo 3 Sea $f(x, y, z) = x^2 e^{-yz}$. Calcular la variación de f en la dirección del vector unitario

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{en el punto} \quad (1, 0, 0).$$

Solución

La variación requerida es, utilizando el Teorema 12,

$$\nabla f \cdot \mathbf{v} = (2xe^{-yz}, -x^2ze^{-yz}, -x^2ye^{-yz}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

que, en el punto $(1, 0, 0)$, es

$$(2, 0, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ejemplo 4

En el ejemplo anterior, hallar la variación de f en la dirección del vector $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$.

Solución

\mathbf{w} no es un vector unitario. Sustituyendo \mathbf{w} por

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

y procediendo como en el Ejemplo 3, obtenemos de nuevo, $2/\sqrt{3}$. ▲

Direcciones de máximo crecimiento

A partir del Teorema 12 también podemos obtener el significado geométrico del gradiente:

Teorema 13 Supongamos que $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. Entonces $\nabla f(\mathbf{x})$ apunta en la dirección en la que f crece más rápidamente.

Demostración Si \mathbf{n} es un vector unitario, la variación de f en la dirección \mathbf{n} está dada por $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos \theta$, donde θ es el ángulo entre \mathbf{n} y $\nabla f(\mathbf{x})$. El máximo se alcanza cuando $\theta = 0$; es decir, cuando \mathbf{n} y ∇f son paralelos (si $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, esta variación es 0 para todo \mathbf{n}). ■

En otras palabras, si deseamos movernos en una dirección en la que f se mueva más rápidamente, debemos hacerlo en la dirección $\nabla f(\mathbf{x})$. De forma análoga, si deseamos movernos en una dirección en la que f decrece más rápidamente, debemos hacerlo en la dirección $-\nabla f(\mathbf{x})$.

Ejemplo 5

¿En qué dirección, desde el punto $(0, 1)$, $f(x, y) = x^2 - y^2$ crece más rápidamente?

Solución

El gradiente es $\nabla f = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$, y, por tanto, en $(0, 1)$, es

$$\nabla f|_{(0,1)} = -2\mathbf{j}.$$

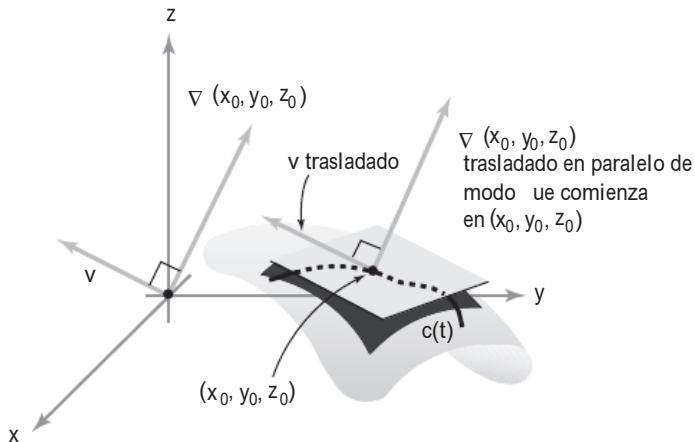
Por el Teorema 13, f crece lo más rápidamente en la dirección $-\mathbf{j}$. ¿Por qué esta respuesta es coherente con la Figura 2.1.9? ▲

Gradientes y planos tangentes a los conjuntos de nivel

Ahora vamos a hallar la relación entre el gradiente de una función f y sus superficies de nivel. El gradiente apunta en la dirección en la que los valores de f varían más rápidamente, mientras que una superficie de nivel descansa en las direcciones en las que no cambia en absoluto. Si f se comporta razonablemente bien, el gradiente y la superficie de nivel serán perpendiculares.

Teorema 14 El gradiente es normal a las superficies de nivel Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^1 y sea (x_0, y_0, z_0) un punto de la superficie de nivel S definida por $f(x, y, z) = k$, para una constante k . Entonces $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie de nivel en el sentido siguiente: si \mathbf{v} es el vector tangente en $t = 0$ de una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ en S con $\mathbf{c}(0) = (x_0, y_0, z_0)$, entonces $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{v} = 0$ (véase la Figura 2.6.2).

Figura 2.6.2 Significado geométrico del gradiente: ∇f es ortogonal a la superficie S sobre la que f es constante.



Demostración Sea $\mathbf{c}(t)$ un punto de S ; entonces $f(\mathbf{c}(t)) = k$. Sea \mathbf{v} como en la hipótesis; entonces $\mathbf{v} = \mathbf{c}'(0)$. Por tanto, el hecho de que $f(\mathbf{c}(t))$ sea constante en t y la regla de la cadena dan

$$0 = \frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t)) \Big|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{c}(0)) \cdot \mathbf{v}.$$

Si estudiamos la conclusión del Teorema 14, vemos que es razonable definir el plano tangente a S como el plano ortogonal al gradiente.

Definición Planos tangente a superficies de nivel Sea S la superficie que está formada por aquellos (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = k$ para k constante. El **plano tangente** a S en un punto (x_0, y_0, z_0) de S se define mediante la ecuación

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \quad (1)$$

si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Es decir, el plano tangente es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisface la Ecuación (1).

Esto extiende la definición de plano tangente a la gráfica de una función que proporcionamos anteriormente (véase el Ejercicio 15 al final de esta sección).

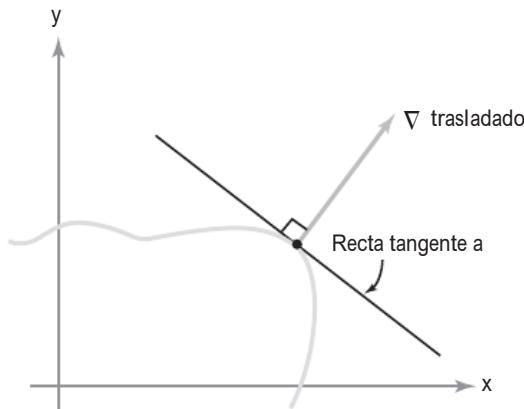


Figura 2.6.3 En el plano, el gradiente ∇f es ortogonal a la curva $f = \text{constante}$.

Ejemplo 6

Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $3xy + z^2 = 4$ en $(1, 1, 1)$.

Solución

Aquí $f(x, y, z) = 3xy + z^2$ y $\nabla f = (3y, 3x, 2z)$, que en el punto $(1, 1, 1)$ es el vector $(3, 3, 2)$. Por tanto, el plano tangente es

$$(3, 3, 2) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0;$$

es decir,

$$3x + 3y + 2z = 8.$$



En el Teorema 14 y en la definición posterior, podríamos haber trabajado tanto en dos dimensiones como en tres. Por tanto, si tenemos $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y consideramos una *curva de nivel*

$$C = \{(x, y) \mid f(x, y) = k\},$$

entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a C en cualquier punto (x_0, y_0) de C . Del mismo modo, la recta tangente a C en (x_0, y_0) se expresa mediante la ecuación

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0 \quad (2)$$

si $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$; es decir, la recta tangente es el conjunto de puntos (x, y) que satisface la Ecuación (2) (véase la Figura 2.6.3).

Campo vectorial gradiente

A menudo nos referimos a ∇f como un *campo vectorial gradiente*. La palabra “campo” significa que ∇f asigna un vector a cada punto en el dominio de f . En la Figura 2.6.4 describimos el gradiente ∇f no por medio de su gráfica que, si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, sería un subconjunto de \mathbb{R}^6 —es decir, el conjunto de pares $(\mathbf{x}, \nabla f(\mathbf{x}))$ —, sino representando $\nabla f(P)$, para cada punto P como un vector que parte del punto P , no del origen. Como en una gráfica, este método de representación de ∇f contiene el punto P y el valor $\nabla f(P)$ en la misma imagen.

El campo vectorial gradiente tiene un importante significado geométrico. Muestra la dirección en la que f crece más rápidamente y la dirección que es ortogonal a las superficies de nivel (o curvas en el plano) de f . Es posible mostrar ambas cosas al tiempo. Para ello, imagínese una montaña como la mostrada en la Figura 2.6.5(a). Sea h la función altitud, una función de dos variables. Si trazamos las curvas de nivel de h , estas son simplemente las curvas de nivel topográficas de la montaña. Podemos imaginarlas como trayectorias de nivel sobre la montaña [véase la Figura 2.6.5(b)]. Hay una cuestión obvia para cualquiera que haya hecho senderismo: para alcanzar la cima de la montaña lo más rápidamente posible debemos caminar perpendicularmente a las curvas de nivel.⁵ Esto es coherente con los Teoremas 13 y 14, que establecen que la dirección de máximo crecimiento (el gradiente) es orthogonal a las curvas de nivel.

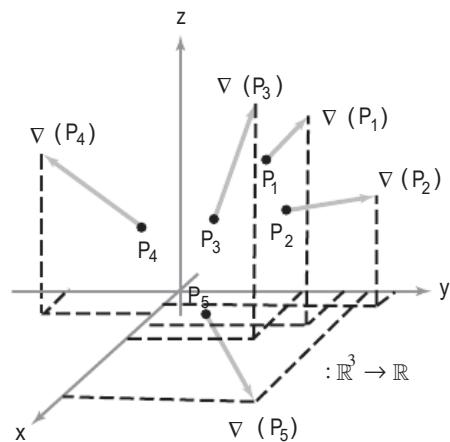


Figura 2.6.4 El gradiente ∇f de una función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo vectorial en \mathbb{R}^3 ; en cada punto P_i , $\nabla f(P_i)$ es un vector que parte de P_i .

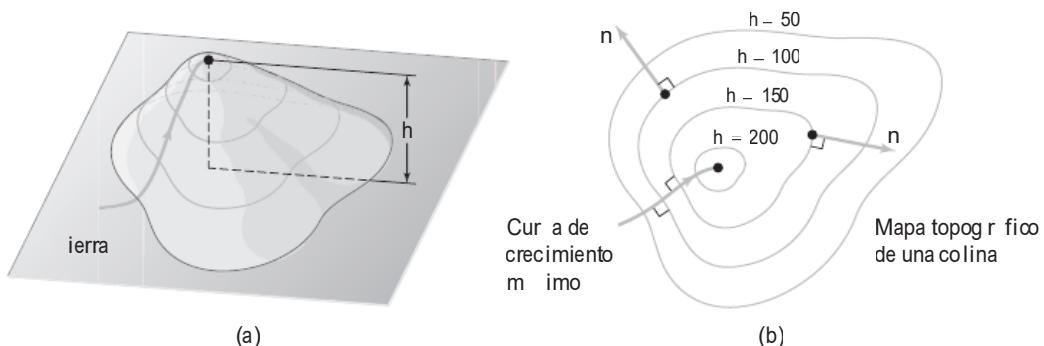


Figura 2.6.5 Ilustración física de los dos hechos (a) ∇f es la dirección de máximo crecimiento de f y (b) ∇f es ortogonal a las curvas de nivel.

⁵Esta exposición supone que se camina a la misma velocidad en todas las direcciones. Por supuesto, los montañeros saben que esto no es necesariamente realista.

Ejemplo 7

La fuerza gravitatoria sobre una masa unidad m situada en (x, y, z) producida por una masa M situada en el origen de \mathbb{R}^3 , de acuerdo con la ley de gravitación de Newton, está dada por

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{r^2}\mathbf{n},$$

donde G es una constante; $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, es la distancia de (x, y, z) al origen; y $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, el vector unitario en la dirección de $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, que es el vector de posición desde el origen a (x, y, z) .

Obsérvese que $\mathbf{F} = \nabla(GmM/r) = -\nabla V$; es decir, \mathbf{F} es el opuesto del gradiente del potencial gravitatorio $V = -GmM/r$. Esto se puede verificar como en el Ejemplo 1. Obsérvese que \mathbf{F} está orientado hacia el origen. Además, las superficies de nivel de V son esferas. El campo vectorial gradiente \mathbf{F} es normal a estas esferas, lo que confirma el resultado del Teorema 14. ▲

Ejemplo 8

Hallar un vector unitario normal a la superficie S dada por $z = x^2y^2 + y + 1$ en el punto $(0, 0, 1)$.

Solución

Sea $f(x, y, z) = x^2y^2 + y + 1 - z$ y consideremos la superficie de nivel definida por $f(x, y, z) = 0$. Dado que esto es el conjunto de puntos (x, y, z) que cumplen $z = x^2y^2 + y + 1$, vemos que este conjunto de nivel coincide con la superficie S . El gradiente es

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= 2xy^2\mathbf{i} + (2x^2y + 1)\mathbf{j} - \mathbf{k},\end{aligned}$$

y por tanto

$$\nabla f(0, 0, 1) = \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Este vector es perpendicular a S en $(0, 0, 1)$, por lo que para hallar un vector normal unitario \mathbf{n} dividimos este vector entre su longitud para obtener

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f(0, 0, 1)}{\|\nabla f(0, 0, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j} - \mathbf{k}).$$

Ejemplo 9

Consideremos dos conductores, uno cargado positivamente y el otro negativamente. Se establece un potencial eléctrico entre ellos. Este potencial es una función $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (un ejemplo de campo *escalar*). El campo eléctrico está dado por $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Por el Teorema 14 sabemos que \mathbf{E} es perpendicular a las superficies de nivel de ϕ . Estas superficies de nivel se denominan ***superficies equipotenciales***, porque el potencial es constante sobre ellas (véase la Figura 2.6.6).

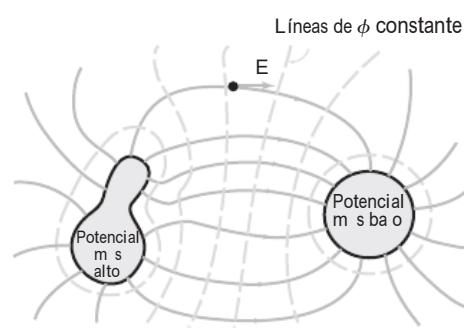


Figura 2.6.6 Las superficies equipotenciales (líneas de puntos) son ortogonales al campo eléctrico \mathbf{E} .

Ejercicios

1. Demostrar que la derivada direccional de $f(x, y, z) = z^2x + y^3$ en $(1, 1, 2)$ en la dirección $(1/\sqrt{5})\mathbf{i} + (2/\sqrt{5})\mathbf{j}$ es $2\sqrt{5}$.
2. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos y direcciones indicados:
 - (a) $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$,
 $\mathbf{v} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$
 - (b) $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$,
 $\mathbf{v} = (1/\sqrt{5})(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$
 - (c) $f(x, y) = e^x \cos(\pi y)$, $(x_0, y_0) = (0, -1)$,
 $\mathbf{v} = -(1/\sqrt{5})\mathbf{i} + (2/\sqrt{5})\mathbf{j}$
 - (d) $f(x, y) = xy^2 + x^3y$, $(x_0, y_0) = (4, -2)$,
 $\mathbf{v} = (1/\sqrt{10})\mathbf{i} + (3/\sqrt{10})\mathbf{j}$
3. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones a lo largo de los vectores unitarios en los puntos indicados en una dirección paralela al vector dado en cada caso:
 - (a) $f(x, y) = x^y$, $(x_0, y_0) = (e, e)$, $\mathbf{d} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$
 - (b) $f(x, y, z) = e^x + yz$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$,
 $\mathbf{d} = (1, -1, 1)$
 - (c) $f(x, y, z) = xyz$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$,
 $\mathbf{d} = (1, 0, -1)$
4. Un individuo camina sobre la gráfica de $f(x, y) = y \cos(\pi x) - x \cos(\pi y) + 10$, estando de pie en el punto $(2, 1, 13)$. Determinar la dirección x, y en la que debería caminar para permanecer en el mismo nivel.
5. (a) Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$. Si \mathbf{v} es un vector unitario en \mathbb{R}^3 , demostrar que el valor máximo de la derivada direccional de f en \mathbf{x}_0 a lo largo de \mathbf{v} es $\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$.

 (b) Sea $f(x, y, z) = x^3 - y^3 + z^3$. Hallar el valor máximo de la derivada direccional de f en el punto $(1, 2, 3)$.
6. Hallar un vector que sea normal a la curva $x^3 + xy + y^3 = 11$ en $(1, 2)$.
7. Hallar cómo varía $f(x, y, z) = xyz$ en la dirección normal a la superficie $yx^2 + xy^2 + yz^2 = 3$ en $(1, 1, 1)$.
8. Determinar los planos tangentes a las siguientes superficies en los puntos indicados:
 - (a) $x^2 + 2y^2 + 3xz = 10$, en el punto $(1, 2, \frac{1}{3})$
 - (b) $y^2 - x^2 = 3$, en el punto $(1, 2, 8)$
 - (c) $xyz = 1$, en el punto $(1, 1, 1)$
9. Hallar la ecuación para el plano tangente a cada superficie $z = f(x, y)$ en el punto indicado:
 - (a) $z = x^3 + y^3 - 6xy$, en el punto $(1, 2, -3)$
 - (b) $z = (\cos x)(\cos y)$, en el punto $(0, \pi/2, 0)$
 - (c) $z = (\cos x)(\sin y)$, en el punto $(0, \pi/2, 1)$
10. Calcular el gradiente ∇f para cada una de las siguientes funciones:
 - (a) $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 - (b) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$

(c) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

11. Para las funciones del Ejercicio 10, ¿cuál es la dirección de máximo crecimiento en $(1, 1, 1)$?
12. Demostrar que el vector normal unitario a la superficie $x^3y^3 + y - z + 2 = 0$ en $(0, 0, 2)$ está dado por $\mathbf{n} = (1/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$.
13. Hallar un vector normal unitario a la superficie $\cos(xy) = e^z - 2$ en $(1, \pi, 0)$.
14. Verificar los Teoremas 13 y 14 para $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
15. Demostrar que la definición que sigue al Teorema 14 da, como caso especial, la fórmula para el plano tangente a la gráfica de $f(x, y)$ si se considera la gráfica como una superficie de nivel de $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ (véase la Sección 2.3).
16. Sea $f(x, y) = -(1 - x^2 - y^2)^{1/2}$ para (x, y) tal que $x^2 + y^2 < 1$. Demostrar que el plano tangente a la gráfica de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es ortogonal al vector con componentes $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Interpretar esto geométricamente.
17. Para las siguientes funciones $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, hallar ∇f y \mathbf{g}' y evaluar $(f \circ \mathbf{g})'(1)$.
 - (a) $f(x, y, z) = xz + yz + xy$,
 $\mathbf{g}(t) = (e^t, \cos t, \operatorname{sen} t)$
 - (b) $f(x, y, z) = e^{xyz}$, $\mathbf{g}(t) = (6t, 3t^2, t^3)$
 - (c) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2) \log \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,
 $\mathbf{g}(t) = (e^t, e^{-t}, t)$
18. Calcular la derivada direccional de f en las direcciones dadas \mathbf{v} y en los puntos dados P .
 - (a) $f(x, y, z) = xy^2 + y^2 z^3 + z^3 x$,
 $P = (4, -2, -1)$, $\mathbf{v} = 1/\sqrt{14}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$
 - (b) $f(x, y, z) = x^{yz}$, $P = (e, e, 0)$,
 $\mathbf{v} = \frac{12}{13}\mathbf{i} + \frac{3}{13}\mathbf{j} + \frac{4}{13}\mathbf{k}$
19. Un individuo se encuentra de pie sobre la gráfica de $f(x, y) = 100 - 2x^2 - 3y^2$ en el punto $(2, 3, 65)$.
 - (a) ¿Cuáles son las coordenadas xy del punto más alto de la gráfica?
 - (b) Demostrar que el gradiente de f es el vector cero en el punto determinado en (a).

20. Determinar los dos puntos del hiperbolóide $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ en los que el plano tangente es paralelo al plano $2x + 2y + z = 5$.

21. Sea $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ y $r = \|\mathbf{r}\|$. Demostrar que

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

22. El capitán Ralph tiene problemas cerca de la cara iluminada de Mercurio. La temperatura del casco de su nave cuando se encuentra en (x, y, z) está dada por $T(x, y, z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$, donde x, y y z se miden en metros. En este momento está en la posición $(1, 1, 1)$.

- (a) ¿En qué dirección debe moverse para que la temperatura baje lo más rápidamente posible?
- (b) Si la nave viaja a e^8 metros por segundo, ¿a qué velocidad disminuirá la temperatura si se desplaza en esa dirección?
- (c) Lamentablemente, el metal del casco se romperá si se enfriá a una velocidad mayor que $\sqrt{14}e^2$ grados por segundo. Describir el conjunto de posibles direcciones en las que puede desplazarse para disminuir la temperatura a un ritmo menor que el límite permitido.

23. Se dice que una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es *independiente de la segunda variable* si existe una función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = g(x)$ para todo x en \mathbb{R} . En este caso, calcular ∇f en función de g' .

24. Sean f y g funciones de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R} . Suponer que f es diferenciable y $\nabla f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\mathbf{x}$. Demostrar que las esferas centradas en el origen están contenidas en los conjuntos de nivel de f ; es decir, f es constante en dichas esferas.

25. Una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una función *par* si $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ para todo \mathbf{x} de \mathbb{R}^n . Si f es diferenciable y par, hallar $\mathbf{D}f$ en el origen.

26. Suponer que una montaña tiene la forma del parabolóide elíptico $z = c - ax^2 - by^2$, donde a, b y c son constantes positivas, x e y son las coordenadas este-oeste y norte-sur y z es la altitud por encima del nivel del mar (x, y, z se miden en metros). En el punto $(1, 1)$, ¿en qué dirección crece la altitud más rápidamente? Si se suelta una canica en $(1, 1)$, ¿en qué dirección comenzaría a rodar?

- 27.** Un ingeniero desea construir un ferrocarril que suba la montaña del Ejercicio 26. Ascender directamente a la cima de la montaña supone una pendiente excesiva para la potencia de la máquina. En el punto $(1, 1)$, ¿en qué direcciones podría tenderse la vía de modo que ascendiera con una pendiente del 3%—es decir, un ángulo cuya tangente sea igual a 0.03? (hay dos posibilidades). Realizar un esquema de la situación indicando las dos posibles direcciones con una pendiente del 3% en $(1, 1)$.
- 28.** En electrostática, la fuerza \mathbf{P} de atracción entre dos partículas de carga opuesta está dada por $\mathbf{P} = k(\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3)$ (*Ley de Coulomb*), donde k es una constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Demostrar que \mathbf{P} es el gradiente de $f = -k/\|\mathbf{r}\|$.
- 29.** El potencial electrostático V generado por dos filamentos paralelos e infinitos con densidades lineales de carga λ y $-\lambda$ es $V = (\lambda/2\pi\varepsilon_0) \ln(r_2/r_1)$, donde $r_1^2 = (x-x_0)^2 + y^2$ y $r_2^2 = (x+x_0)^2 + y^2$. Suponemos que los filamen-
- tos están en la dirección z y que atraviesan el plano xy en $(-x_0, 0)$ y $(x_0, 0)$. Hallar $\nabla V(x, y)$.
- 30.** Para cada una de las siguientes funciones, hallar los valores máximo y mínimo que la función f alcanza a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$:
- $f(x, y) = xy; \mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t); 0 \leq t \leq 2\pi$
 - $f(x, y) = x^2 + y^2; \mathbf{c}(t) = (\cos t, 2\sin t); 0 \leq t \leq 2\pi$
- 31.** Suponer que una partícula sale despedida de la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ en el punto $(1, 1, \sqrt{3})$ según la normal a la superficie dirigida hacia el plano xy en el instante $t = 0$ y con una velocidad de 10 unidades por segundo. ¿Cuándo y dónde cruzará al plano xy ?
- 32.** Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y considérese $\mathbf{D}f(x, y, z)$ como una aplicación lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R} . Demostrar que el núcleo (es decir, el conjunto de vectores que se transforman en cero) de $\mathbf{D}f$ es el plano de \mathbb{R}^3 ortogonal a ∇f .

Ejercicios de repaso del Capítulo 2

- Describir las gráficas de:
 - $f(x, y) = 3x^2 + y^2$
 - $f(x, y) = xy + 3x$
- Describir algunas secciones y superficies de nivel apropiadas de las gráficas de:
 - $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$
 - $f(x, y, z) = x^2$
 - $f(x, y, z) = xyz$
- Calcular la derivada $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ de cada una de las funciones siguientes:
 - $f(x, y) = (x^2y, e^{-xy})$
 - $f(x) = (x, x)$
 - $f(x, y, z) = e^x + e^y + e^z$
 - $f(x, y, z) = (x, y, z)$
- Suponer que $f(x, y) = f(y, x)$ para todo (x, y) . Demostrar que

$$(\partial f/\partial x)(a, b) = (\partial f/\partial y)(b, a).$$
- Sean $f(u, v) = (\cos u, v + \sin u)$ y $g(x, y, z) = (x^2 + \pi y^2, xz)$. Calcular $D(f \circ g)$ en $(0, 1, 1)$ utilizando la regla de la cadena.
- Utilizar la regla de la cadena para determinar $D(f \circ g)(-2, 1)$ con $f(u, v, w) = (v^2 + uw, u^2 + w^2, u^2v - w^3)$ y $g(x, y) = (xy^3, x^2 - y^2, 3x + 5y)$.
- Utilizar la regla de la cadena para determinar $D(f \circ g)(-1, 2)$ con $f(u, v, w) = (v^2 + w^2, u^3 - vw, u^2v + w)$ y $g(x, y) = (3x + 2y, x^3y, y^2 - x^2)$.
- Sean $f(x, y) = (xy, \frac{x}{y}, x + y)$ y $g(w, s, t) = (we^s, se^{wt})$. Hallar $D(f \circ g)(3, 1, 0)$.
- Sea $\mathbf{r}(t) = (t \cos(\pi t), t \sin(\pi t), t)$ una trayectoria. ¿Dónde interseca la recta tangente a \mathbf{r} en $t = 5$ al plano xy ?
- Sea $f(x, y) = x^2e^{-xy}$.
 - Hallar un vector normal a la gráfica de f en $(1, 2)$.
 - Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $(1, 2)$.

- (c) ¿Qué punto de la superficie dada por $z = x^2 - y^2$ tiene un plano tangente paralelo al plano determinado en el apartado (b)?
- 11.** Sea $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$. Demostrar que el plano tangente a la gráfica de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es ortogonal al vector $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Proporcionar una interpretación geométrica.
- 12.** Sean $F(u, v)$ y $u = h(x, y, z)$, $v = k(x, y, z)$ funciones con valores reales dadas (diferenciables) y sea $f(x, y, z)$ definida por $f(x, y, z) = F(h(x, y, z), k(x, y, z))$. Escribir una fórmula para el gradiente de f en función de las derivadas parciales de F, h y k .
- 13.** Hallar una ecuación para el plano tangente de la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ para:
- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - y + 2, (x_0, y_0) = (1, 1)$
 - $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + 4y^2, (x_0, y_0) = (2, -1)$
 - $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy, (x_0, y_0) = (-1, -1)$
 - $f(x, y) = \log(x + y) + x \cos y + \arctan(x + y), (x_0, y_0) = (1, 0)$
 - $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, (x_0, y_0) = (1, 1)$
 - $f(x, y) = xy, (x_0, y_0) = (2, 1)$
- 14.** Calcular una ecuación para los planos tangente de las siguientes superficies en los puntos indicados.
- $x^2 + y^2 + z^2 = 3, (1, 1, 1)$
 - $x^3 - 2y^3 + z^3 = 0, (1, 1, 1)$
 - $(\cos x)(\cos y)e^z = 0, (\pi/2, 1, 0)$
 - $e^{xyz} = 1, (1, 1, 0)$
- 15.** Dibujar algunas curvas de nivel para las siguientes funciones:
- $f(x, y) = 1/xy$
 - $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$
- 16.** Considérese la función de temperatura $T(x, y) = x \operatorname{sen} y$. Dibujar algunas curvas de nivel. Calcular ∇T y explicar su significado.
- 17.** Hallar los siguientes límites si existen:
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos xy - 1}{x}$
 - $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{|(x+y)/(x-y)|}, x \neq y$
- 18.** Calcular la primera derivada parcial y el gradiente de las siguientes funciones:
- $f(x, y, z) = xe^z + y \cos x$
 - $f(x, y, z) = (x + y + z)^{10}$
 - $f(x, y, z) = (x^2 + y)/z$
- 19.** Calcular $\frac{\partial}{\partial x}[x \exp(1 + x^2 + y^2)]$.
- 20.** Sean $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ y $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ funciones dadas por $f(x, z) = (x^2 - y^2, 0, \operatorname{sen}(xy), 1)$ y $g(x, y) = (ye^{x^2}, xe^{y^2})$. Calcular $D(f \circ g)(1, 2)$.
- 21.** Sea $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2+10)}$. Hallar la tasa de variación de f en $(2, 1)$ según la dirección que apunta hacia el origen.
- 22.** Sea $y(x)$ una función diferenciable definida implícitamente por $F(x, y(x)) = 0$. Por el Ejercicio 19(a) de la Sección 2.5, sabemos que
- $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$
- Se considera la superficie $z = F(x, y)$ y se supone que F es creciente como función de x y como función de y ; es decir, $\partial F/\partial x > 0$ y $\partial F/\partial y > 0$. Considerando la gráfica y el plano $z = 0$, demostrar que fijado $z = 0$, y debe *decrecer* cuando x aumenta y x debe *decrecer* cuando y aumenta. ¿Concuerda esto con el signo menos de la fórmula para dy/dx ?
- 23.** (a) Considérese la gráfica de una función $f(x, y)$ [Figura 2.R.1(a)]. Sea (x_0, y_0) un punto sobre la curva de nivel C , de modo que $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a esta curva. Demostrar que el plano tangente de la gráfica es el plano que (i) contiene la recta perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0)$ y que descansa sobre el plano horizontal $z = f(x_0, y_0)$, y (ii) tiene pendiente $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ respecto del plano xy . (Por *pendiente* de un plano P respecto del plano xy entendemos la tangente del ángulo $\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$, entre \mathbf{p} , la normal a P hacia arriba y el vector unitario \mathbf{k} .)
- (b) Utilizar este método para demostrar que el plano tangente a la gráfica de $f(x, y) = (x + \cos y)x^2$ en $(1, 0, 2)$ es como el mostrado en la Figura 2.R.1(b).
- 24.** Hallar el plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, -2, 5)$. Para esta superficie, explicar el significado geométrico del gradiente de $f(x, y) = x^2 + y^2$ (véase el Ejercicio 23).

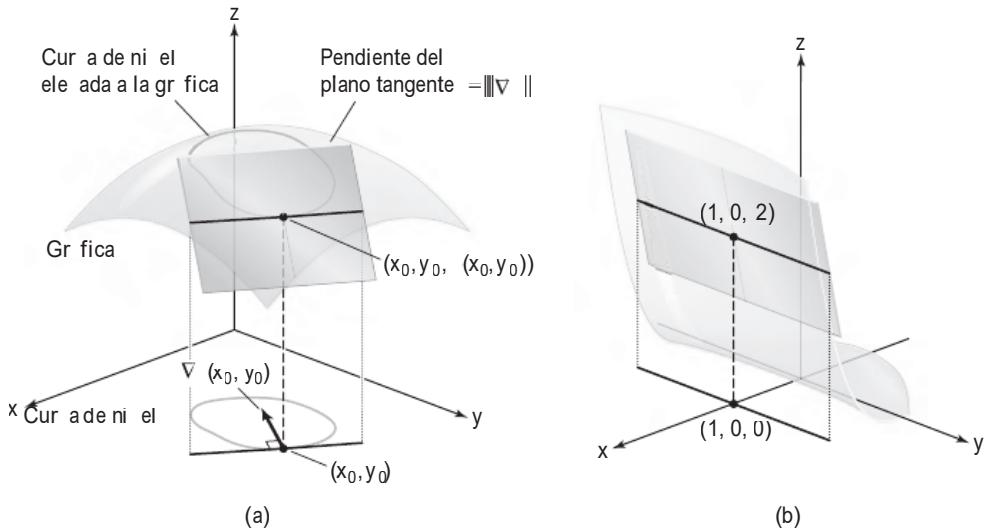


Figura 2.R.1 (a) La relación entre el gradiente de una función y el plano tangente a la gráfica [Ejercicio 23(a)]. (b) Ejemplo específico del plano tangente para el Ejercicio 23(b).

- 25.** ¿En qué dirección es igual a cero la derivada direccional de $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ en $(1, 1)$?
- 26.** Hallar la derivada direccional de la función dada en el punto dado y en la dirección del vector dado.
- $f(x, y, z) = e^x \cos(yz)$, $p_0 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$
 - $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, $p_0 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (10, -1, 2)$
- 27.** Hallar el plano tangente y la recta normal al hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 18$ en $(3, 5, -4)$.
- 28.** Sea $(x(t), y(t))$ una trayectoria en el plano, $0 \leq t \leq 1$ y sea $f(x, y)$ una función de clase C^1 de dos variables. Suponer que $(dx/dt)f_x + (dy/dt)f_y \leq 0$. Demostrar que $f(x(1), y(1)) \leq f(x(0), y(0))$.
- 29.** Un insecto se encuentra en un entorno tóxico. El nivel de toxicidad está dado por $T(x, y) = 2x^2 - 4y^2$. El insecto se encuentra en $(-1, 2)$. ¿En qué dirección debería moverse para reducir la toxicidad lo más rápidamente posible?
- 30.** Determinar la dirección en la que la función $w = x^2 + xy$ crece más rápidamente en el punto $(-1, 1)$. ¿Cuál es la magnitud de ∇w en este punto? Interpretar geométricamente esta magnitud.
- 31.** Sea f una función escalar definida en un conjunto abierto S en \mathbb{R}^n . Decimos que f es **homogénea de grado p** sobre S si $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x})$ para todo real λ y para todo \mathbf{x} en S para los que $\lambda\mathbf{x} \in S$.
- Si una función así es diferenciable en \mathbf{x} , demostrar que $\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x})$. Esto se conoce como **teorema de Euler** para funciones homogéneas. [SUGERENCIA: para \mathbf{x} fijo, definir $g(\lambda) = f(\lambda\mathbf{x})$ y calcular $g'(1)$.]
 - Hallar p y comprobar el teorema de Euler para la función $f(x, y, z) = x - 2y - \sqrt{xz}$, en la región en la que $xz > 0$.
- 32.** Si $z = [f(x - y)]/y$ (donde f es diferenciable e $y \neq 0$), demostrar que se cumple la identidad $z + y(\partial z/\partial x) + y(\partial z/\partial y) = 0$.
- 33.** Sea $z = f((x + y)/(x - y))$ donde f es una función de clase C^1 , demostrar que
- $$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$
- 34.** Sea f una función con derivadas parciales $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_i$, donde $i = 1, 2, \dots, n$, en cada punto \mathbf{x} de un conjunto abierto U de \mathbb{R}^n . Si f tiene un máximo local o un mínimo local en el punto \mathbf{x}_0 de U , demostrar que $\partial f(\mathbf{x}_0)/\partial x_i = 0$ para cada i .
- 35.** Considérense las funciones definidas en \mathbb{R}^2 por las siguientes fórmulas:

- (I) $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$
si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$
- (II) $f(x, y) = x^2y^2/(x^2 + y^4)$
si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$

- (a) En cada caso, demostrar que las derivadas parciales $\partial f(x, y)/\partial x$ y $\partial f(x, y)/\partial y$ existen para todo (x, y) de \mathbb{R}^2 , y evaluar esas derivadas explícitamente en función de x e y .
- (b) Explicar por qué las funciones descritas en (I) y (II) son o no son diferenciables en $(0, 0)$.

- 36.** Calcular el vector gradiente $\nabla f(x, y)$ en todos los puntos (x, y) de \mathbb{R}^2 para cada una de las funciones siguientes:

- (a) $f(x, y) = x^2y^2 \log(x^2 + y^2)$
si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$
- (b) $f(x, y) = xy \operatorname{sen}[1/(x^2 + y^2)]$
si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$

- 37.** Hallar las derivadas direccionales de las siguientes funciones en el punto $(1, 1)$ en la dirección $(\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$:

- (a) $f(x, y) = x \tan^{-1}(x/y)$
- (b) $f(x, y) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$
- (c) $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$

- 38.** (a) Sean $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Hallar: $\|\mathbf{u}\|$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, y un vector con la misma dirección que \mathbf{u} , pero de longitud unidad.
- (b) Hallar la tasa de variación de $e^{xy} \operatorname{sen}(xyz)$ en la dirección \mathbf{u} en el punto $(0, 1, 1)$.

- 39.** Denotamos mediante $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ la altura de una montaña sobre el punto (x, y) . ¿En qué dirección a partir de $(1, 0)$ deberíamos caminar para ascender lo más rápidamente posible?

- 40.** Calcular una ecuación para el plano tangente a la gráfica de

$$f(x, y) = \frac{e^x}{x^2 + y^2}$$

en $x = 1, y = 2$.

- 41.** (a) Dar una definición cuidadosa de la forma general de la regla de la cadena.
- (b) Sean $f(x, y) = x^2 + y$ y $\mathbf{h}(u) = (\operatorname{sen} 3u, \cos 8u)$. Sea $g(u) = f(\mathbf{h}(u))$. Calcular dg/du en $u = 0$ tanto de forma directa como empleando la regla de la cadena.

- 42.** (a) Dibujar las curvas de nivel de $f(x, y) = -x^2 - 9y^2$ para $c = 0, -1, -10$.

- (b) En el boceto, dibujar ∇f en $(1, 1)$. Comentarlo.

- 43.** En el instante $t = 0$, una partícula sale despedida de la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ en el punto $(1, 1, 1)$ en dirección normal a la superficie, a una velocidad de 10 unidades por segundo.

¿En qué instante de tiempo atravesará la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 103$?

- 44.** ¿En qué punto o puntos de la superficie del Ejercicio 43 es el vector normal paralelo a la recta $x = y = z$?

- 45.** Calcular $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ si

$$z = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}, \quad u = e^{-x-y}, \quad v = e^{xy}$$

- (a) Por sustitución y cálculo directo, y (b) por la regla de la cadena.

- 46.** Calcular las derivadas parciales como en el Ejercicio 45 si $z = uv$, $u = x + y$ y $v = x - y$.

- 47.** ¿Qué falla en el razonamiento siguiente? Suponer que $w = f(x, y)$ e $y = x^2$. Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + 2x \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Por tanto, $0 = 2x(\partial w/\partial y)$, y entonces $\partial w/\partial y = 0$. Buscar un ejemplo explícito que muestre que esto es realmente incorrecto.

- 48.** Un barco navega con rumbo nordeste a 20 km/h. Suponiendo que la temperatura descende a razón de $0,2^\circ\text{C}/\text{km}$ en dirección norte y $0,3^\circ\text{C}/\text{km}$ en dirección este, ¿cuál es la tasa de variación de la temperatura que se observa en el barco?

- 49.** Utilizar la regla de la cadena para hallar una fórmula para $(d/dt)\exp[f(t)g(t)]$.

- 50.** Utilizar la regla de la cadena para hallar una fórmula para $(d/dt)(f(t)^{g(t)})$.

- 51.** Verificar la regla de la cadena para la función $f(x, y, z) = [\ln(1 + x^2 + 2z^2)]/(1 + y^2)$ y la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t, 1 - t^2, \cos t)$.

- 52.** Verificar la regla de la cadena para la función $f(x, y) = x^2/(2 + \cos y)$ y la trayectoria $x = e^t$, $y = e^{-t}$.

- 53.** Suponer que $u(x, t)$ satisface la ecuación diferencial $u_t + uu_x = 0$ y que x , como función $x = f(t)$ de t , satisface $dx/dt = u(x, t)$. Demostrar que $u(f(t), t)$ es constante en t .

- 54.** El desplazamiento en el instante t y la posición horizontal sobre una recta x de una cuerda de violín está dada por $u = \sin(x-6t) + \sin(x+6t)$. Calcular la velocidad de la cuerda en $x = 1$ cuando $t = \frac{1}{3}$.

- 55.** La *ley de los gases perfectos* $PV = nRT$ relaciona una constante R , el número n de moles del gas, el volumen V , la temperatura Kelvin T y la presión P .

- (a) Demostrar que cada una de las variables n, P, T, V es función de las restantes variables y determinar explícitamente las ecuaciones que las definen.
 (b) Calcular $\partial V/\partial T, \partial T/\partial P, \partial P/\partial V$ y demostrar que su producto es igual a -1 .

- 56.** La *temperatura potencial* θ se define en función de la temperatura T y de la presión p mediante

$$\theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{0,286}.$$

La temperatura y la presión se pueden considerar como funciones de la posición (x, y, z) en la atmósfera y también del tiempo t .

- (a) Determinar fórmulas para $\partial\theta/\partial x, \partial\theta/\partial y, \partial\theta/\partial z, \partial\theta/\partial t$ en función de las derivadas parciales de T y p .
 (b) La condición $\partial\theta/\partial z < 0$ se considera como una atmósfera inestable, ya que lleva a grandes desplazamientos verticales de paquetes de aire a partir de un solo ímpetu hacia arriba o hacia abajo. Los meteorólogos utilizan la fórmula

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\theta}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{C_p} \right),$$

donde $g = 32,2$ y C_p es una constante positiva. ¿Cómo varía la temperatura en la dirección ascendente en una atmósfera inestable?

- 57.** El volumen específico V , la presión P y la temperatura T de un gas de van der Waals están relacionados por $P = RT/(V-\beta) - \alpha/V^2$, donde α, β y R son constantes.

- (a) Explicar por qué dos cualesquiera de V, P y T pueden considerarse variables independientes que determinan la tercera variable.
 (b) Hallar $\partial T/\partial P, \partial P/\partial V, \partial V/\partial T$. Identificar qué variables son constantes e interpretar físicamente cada derivada parcial.
 (c) Verificar que $(\partial T/\partial P)(\partial P/\partial V)(\partial V/\partial T) = -1$ (no $+1$!).

- 58.** La altura h del volcán hawaiano Mauna Loa se describe (de forma aproximada) mediante la función $h(x, y) = 2,59 - 0,00024y^2 - 0,00065x^2$, donde h es la altura por encima del nivel del mar en millas y x e y miden las distancias en millas este-oeste y norte-sur desde la cima de la montaña. En $(x, y) = (-2, -4)$:

- (a) ¿A qué velocidad crece la altitud en la dirección $(1, 1)$ (es decir, en la dirección noreste)? Exprese la respuesta en millas de altitud por milla de distancia horizontal recorrida.
 (b) ¿En qué dirección se encuentra el camino de máxima pendiente positiva?

- 59.** (a) ¿En qué dirección es la derivada direccional de $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ en $(1, 1)$ igual a cero?
 (b) ¿Y en un punto arbitrario (x_0, y_0) del primer cuadrante?
 (c) Describir las curvas de nivel de f . En particular, estudiarlas en función del resultado del apartado (b).

- 60.** (a) Demostrar que la curva $x^2 - y^2 = c$, para cualquier valor de c , satisface la ecuación diferencial $dy/dx = x/y$.
 (b) Dibujar algunas de las curvas $x^2 - y^2 = c$, por ejemplo para $c = \pm 1$. En varios puntos (x, y) a lo largo de estas curvas, dibujar un segmento corto de pendiente x/y ; comprobar que estos segmentos parecen ser tangentes a la curva. ¿Qué sucede cuando $y = 0$? ¿Qué sucede cuando $c = 0$?

- 61.** Supóngase que f es una función diferenciable de una variable y que la función $u = g(x, y)$ se define como

$$u = g(x, y) = xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right).$$

Demostrar que u satisface una ecuación diferencial (en derivadas parciales) de la forma:

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = G(x, y)u$$

y hallar la función $G(x, y)$.

- 62.** (a) Sea F una función de una variable y f una función de dos variables. Demostrar que el vector gradiente de $g(x, y) = F(f(x, y))$ es paralelo al vector gradiente de $f(x, y)$.
- (b) Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ funciones tales que $\nabla f = \lambda \nabla g$ para cierta función $\lambda(x, y)$. ¿Cuál es la relación entre las curvas de nivel de f y g ? Explicar por qué debe existir una función F tal que $g(x, y) = F(f(x, y))$.

Derivadas de orden superior: máximos y mínimos

Todo lo superfluo disgusta a Dios y a la Naturaleza.

Todo lo que disgusta a Dios y a la Naturaleza es perverso.

—Dante Alighieri, circa 1300

... a saber, puesto que la forma de todo el universo es la más perfecta, y, de hecho, está diseñada por el creador más sabio, nada ocurrirá en el mundo sin que salga a relucir, de alguna manera, una regla máxima o mínima.

—Leonhard Euler



Leonhard Euler
(por Emanuel Handman)
(1707–1783).

En el cálculo de una variable, para saber si una función $f(x)$ tiene un máximo o un mínimo local se suele emplear la segunda derivada. Buscamos puntos críticos x_0 —es decir, puntos x_0 para los que $f'(x_0) = 0$, y estudiamos el signo de la segunda derivada $f''(x_0)$ en dichos puntos. Si $f''(x_0) < 0$, $f(x_0)$ es un máximo local de f , si $f''(x_0) > 0$, $f(x_0)$ es un mínimo local de f , si $f''(x_0) = 0$, el criterio falla.

Este capítulo extiende estos métodos a las funciones con valores reales de varias variables. Comenzamos en la Sección 3.1 con el estudio de las derivadas parciales iteradas y de orden superior, y en la Sección 3.2 abordamos el teorema de Taylor para funciones de varias variables; esto lo utilizaremos en la Sección 3.3 para deducir criterios que permiten detectar máximos, mínimos y puntos de silla. Al igual que con las funciones de una variable, estos métodos ayudan a visualizar la forma de una gráfica.

En la Sección 3.4, estudiaremos el problema de maximizar una función de valores reales sometida a condiciones adicionales, también conocidas como restricciones. Por ejemplo, podríamos desear maximizar $f(x, y, z)$ entre aquellos (x, y, z) restringidos a la esfera unidad, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. En la Sección 3.5 presentamos un teorema técnico (el teorema de la función implícita) útil en el estudio de las restricciones. También resultará útil más adelante cuando abordemos el estudio de las superficies.

3.1 Derivadas parciales iteradas

En el capítulo anterior hemos proporcionado una considerable cantidad de información acerca de la derivada de una aplicación y hemos investigado la geometría asociada con la derivada de funciones con valores reales mediante el uso del gradiente. En esta sección, vamos a estudiar las derivadas de orden superior con el fin de probar la igualdad de las “derivadas parciales segundas cruzadas” de una función. Comenzamos definiendo la terminología necesaria.

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Recordemos que esto significa que $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y$ y $\partial f / \partial z$ existen y son continuas. Si estas derivadas, a su vez, tienen derivadas parciales continuas, decimos que f es de **clase C^2** , o que es ***dos veces diferenciable con continuidad***. Del mismo modo, si decimos que f es de clase C^3 , significa que f tiene derivadas parciales iteradas de tercer orden, y así sucesivamente. He aquí algunos ejemplos de cómo se escriben las derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \text{etc.}$$

Por supuesto, el proceso se puede repetir para las derivadas de tercer orden, y así sucesivamente. Si f es una función solo de x e y , y $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y$ son diferenciables con continuidad, entonces al tomar las derivadas parciales segundas obtenemos las cuatro funciones

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Todas ellas reciben el nombre de **derivadas parciales iteradas**, mientras que $\partial^2 f / \partial x \partial y$ y $\partial^2 f / \partial y \partial x$ se denominan **derivadas parciales cruzadas**.

Ejemplo 1

Hallar las derivadas parciales segundas de $f(x, y) = xy + (x + 2y)^2$.

Solución

Las primeras derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2(x + 2y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 4(x + 2y).$$

Ahora derivamos cada una de estas expresiones con respecto a x e y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 8 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 5, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 5.\end{aligned}$$



Ejemplo 2

Hallar las derivadas parciales segundas de $f(x, y) = \sin x \sen^2 y$.

Solución

Procedemos como en el Ejemplo 1:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos x \sen^2 y, & \frac{\partial f}{\partial y} &= 2 \sen x \sen y \cos y = \sen x \sen 2y; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\sen x \sen^2 y, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2 \sen x \cos 2y; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \cos x \sen 2y, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 2 \cos x \sen y \cos y = \cos x \sen 2y.\end{aligned}$$



Ejemplo 3

Sea $f(x, y, z) = e^{xy} + z \cos x$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= ye^{xy} - z \sen x, & \frac{\partial f}{\partial y} &= xe^{xy}, & \frac{\partial f}{\partial z} &= \cos x, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} &= -\sen x, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= -\sen x, & \text{etc.}\end{aligned}$$



Las derivadas parciales cruzadas son iguales

En todos estos ejemplos observamos que los pares de derivadas parciales cruzadas, como $\partial^2 f / \partial x \partial y$ y $\partial^2 f / \partial y \partial x$, o $\partial^2 f / \partial z \partial x$ y $\partial^2 f / \partial x \partial z$, son iguales. Este hecho es fundamental y quizás resulte sorprendente que *esto siempre es así para funciones C^2* . Lo demostramos en el siguiente teorema para funciones $f(x, y)$ de dos variables, aunque la demostración se puede ampliar fácilmente a funciones de n variables.

Teorema 1 Igualdad de las derivadas parciales cruzadas Si $f(x, y)$ es una función de clase C^2 (es dos veces diferenciable con continuidad), entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales; es decir,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Demostración Considérese la siguiente expresión (véase la Figura 3.1.1):

$$S(\Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$$

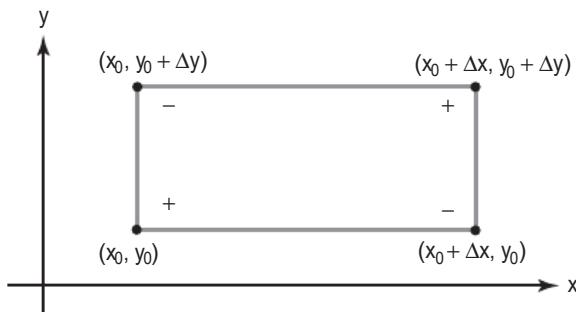


Figura 3.1.1 Álgebra que subyace a la igualdad de las derivadas parciales cruzadas: escribir la diferencia de diferencias de dos formas.

$$-f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0).$$

Manteniendo y_0 y Δy fijos, definimos

$$g(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0),$$

de modo que $S(\Delta x, \Delta y) = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$, lo que expresa S como una diferencia de diferencias. Por el teorema del valor medio para funciones de una variable, $g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$ es igual a $g'(\bar{x})\Delta x$ para algún \bar{x} entre x_0 y $x_0 + \Delta x$. Por tanto,

$$S(\Delta x, \Delta y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0) \right] \Delta x.$$

Aplicando el teorema del valor medio de nuevo, tenemos que existe un \bar{y} entre y_0 e $y_0 + \Delta y$ tal que

$$S(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \Delta x \Delta y.$$

Dado que $\partial^2 f / \partial y \partial x$ es continua, se sigue que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\Delta x \Delta y} [S(\Delta x, \Delta y)].$$

Si observamos que S es simétrica en Δx y Δy , podemos demostrar de forma similar que $\partial^2 f / \partial x \partial y$ está dada por la misma fórmula límite, lo que prueba el resultado. ■

La igualdad de las derivadas parciales cruzadas es uno de los resultados más importantes del cálculo de varias variables. Este resultado reaparecerá en diversas ocasiones más adelante en el libro cuando estudiemos las identidades vectoriales.

Nota histórica

En la siguiente nota histórica, veremos el papel de las derivadas parciales en la formulación de muchas de las ecuaciones básicas que gobiernan los fenómenos físicos. Uno de los gigantes de esta época fue Leonhard Euler (1707–1783), quien desarrolló las ecuaciones de la mecánica de fluidos que llevan su nombre—las ecuaciones de Euler. Fue en relación con las necesidades de este desarrollo cómo descubrió, aproximadamente en 1734, la igualdad de las derivadas parciales cruzadas. En esa época, Euler tenía unos 27 años.

En el Ejercicio 17 pedimos al lector que deduzca a partir del Teorema 1, que para una función C^3 de x, y y z ,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}, \quad \text{etc.}$$

En otras palabras, podemos calcular las derivadas parciales iteradas en el orden que deseemos.

Ejemplo 4

Verificar la igualdad de las derivadas parciales cruzadas de segundo orden para la función

$$f(x, y) = xe^y + yx^2.$$

Solución

Aquí

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^y + 2xy, & \frac{\partial f}{\partial y} &= xe^y + x^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= e^y + 2x, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= e^y + 2x,\end{aligned}$$

y por tanto tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$



En ocasiones se utiliza la notación f_x, f_y, f_z para las derivadas parciales: $f_x = \partial f / \partial x$, y así sucesivamente. Con esta notación, escribimos $f_{xy} = (f_x)_y$, de manera que la igualdad de las derivadas parciales cruzadas se denota por $f_{xy} = f_{yx}$. Obsérvese que $f_{xy} = \partial^2 f / \partial y \partial x$, de forma que el orden de x e y se invierte en las dos notaciones; afortunadamente, la igualdad de las derivadas parciales cruzadas hace que esta ambigüedad sea irrelevante. El siguiente ejemplo ilustra esta notación con subíndices.

Ejemplo 5

Sea

$$z = f(x, y) = e^x \sen xy$$

y escribimos $x = g(s, t), y = h(s, t)$ para ciertas funciones g y h . Sea

$$k(s, t) = f(g(s, t), h(s, t)).$$

Calcular k_{st} .

Solución

Por la regla de la cadena,

$$k_s = f_x g_s + f_y h_s = (e^x \sen xy + ye^x \cos xy)g_s + (xe^x \cos xy)h_s.$$

Derivando con respecto a t usando las reglas del producto, obtenemos

$$k_{st} = (f_x)_t g_s + f_x(g_s)_t + (f_y)_t h_s + f_y(h_s)_t.$$

Aplicando otra vez la regla de la cadena a $(f_x)_t$ y $(f_y)_t$ tenemos

$$(f_x)_t = f_{xx}g_t + f_{xy}h_t \quad \text{y} \quad (f_y)_t = f_{yx}g_t + f_{yy}h_t,$$

y por tanto k_{st} pasa a ser

$$\begin{aligned} k_{st} &= (f_{xx}g_t + f_{xy}h_t)g_s + f_x g_{st} + (f_{yx}g_t + f_{yy}h_t)h_s + f_y h_{st} \\ &= f_{xx}g_t g_s + f_{xy}(h_t g_s + h_s g_t) + f_{yy}h_t h_s + f_x g_{st} + f_y h_{st}. \end{aligned}$$

Obsérvese que esta última fórmula es simétrica en (s, t) , verificándose la igualdad $k_{st} = k_{ts}$. Calculando f_{xx} , f_{xy} y f_{yy} , obtenemos

$$\begin{aligned} k_{st} &= (e^x \operatorname{sen} xy + 2ye^x \cos xy - y^2 e^x \operatorname{sen} xy)g_t g_s \\ &\quad + (xe^x \cos xy + e^x \cos xy - xye^x \operatorname{sen} xy)(h_t g_s + h_s g_t) \\ &\quad - (x^2 e^x \operatorname{sen} xy)h_t h_s + (e^x \operatorname{sen} xy + ye^x \cos xy)g_{st} + (xe^x \cos xy)h_{st}, \end{aligned}$$

donde se entiende que $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$. ▲

Algunas ecuaciones en derivadas parciales

La Filosofía [Naturaleza] está escrita en este vasto libro que está siempre abierto ante nuestros ojos—me refiero al Universo—pero no lo podemos entender si antes no aprendemos el lenguaje y nos familiarizamos con los símbolos en que está escrito. El libro está escrito en lenguaje matemático y los símbolos son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin cuya ayuda es imposible comprender una sola palabra del mismo; sin los cuales vagabundreamos en vano por un oscuro laberinto.

—Galileo

Esta cita ilustra la creencia griega, también popular en tiempos de Galileo, de que la mayor parte de la naturaleza se podría describir mediante las matemáticas. A finales del siglo diecisiete este pensamiento se vio espectacularmente reforzado cuando Newton utilizó su ley de la gravitación para deducir las tres leyes de Kepler del movimiento celeste (véase la Sección 4.1) para explicar las mareas, y para mostrar que la Tierra estaba achatada por los polos. El impacto de esta filosofía sobre las matemáticas fue considerable y muchos matemáticos intentaron “matematizar” la naturaleza. Hasta qué punto impregnaron las matemáticas las ciencias físicas hoy día (y de forma creciente, la economía y las ciencias sociales y biológicas) es el testamento del éxito de dichos intentos. A su vez, los intentos de matematizar la naturaleza han llevado a menudo a nuevos descubrimientos matemáticos.

Muchas de las leyes de la naturaleza fueron descritas bien mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO, ecuaciones que implican las derivadas de funciones de una sola variable, tales como las leyes del movimiento de los planetas) o ecuaciones en derivadas parciales (EDP), es decir, ecuaciones que implican derivadas parciales de funciones. Con el fin de proporcionar una cierta perspectiva histórica y la necesaria motivación para estudiar las derivadas parciales, presentamos una breve descripción de tres de las más famosas ecuaciones en derivadas parciales: la ecuación del calor, la ecuación del potencial (o ecuación de Laplace) y la ecuación de ondas.

ECUACIÓN DEL CALOR. A principios del siglo diecinueve, el matemático francés Joseph Fourier (1768–1830) abordó el estudio del calor. El flujo de calor tiene aplica-

Nota histórica

ciones obvias tanto en problemas industriales como científicos: una mejor comprensión del fenómeno haría posible, por ejemplo, fundir los metales de forma más eficiente y permitiría a los científicos determinar la temperatura de un cuerpo conociendo la temperatura en su frontera, así como conocer de forma aproximada la temperatura del interior de la Tierra.

Sea $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo homogéneo (Figura 3.1.2) cuya representación es una cierta región del espacio tridimensional. Sea $T(x, y, z, t)$ la temperatura del cuerpo en el punto (x, y, z) en el instante t . Fourier demostró, basándose en principios físicos (descritos en la Sección 8.5), que T debe satisfacer la ecuación en derivadas parciales denominada *ecuación del calor*,

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

donde k es una constante cuyo valor depende de la conductividad del material que constituye el cuerpo. Esta ecuación describe cómo el flujo de calor se aleja de un punto cuya temperatura es más alta que la de los puntos más próximos.

Fourier utilizó esta ecuación para resolver problemas de conducción del calor. De hecho, sus investigaciones sobre las soluciones de la Ecuación (1) le condujeron al descubrimiento de las *series de Fourier*.

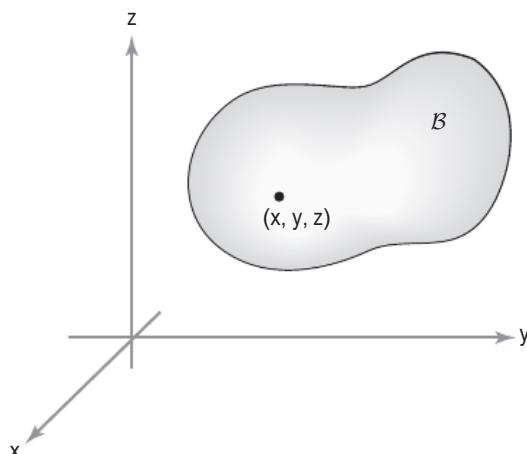


Figura 3.1.2 Un cuerpo homogéneo en el espacio.

ECUACIÓN DEL POTENCIAL. Consideremos el potencial gravitacional V (a menudo denominado potencial de Newton) de una masa m en un punto (x, y, z) debido a una masa puntual M situada en el origen. Este potencial está dado por $V = -GmM/r$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. El potencial V satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

en todas partes excepto en el origen, como probaremos en el siguiente capítulo (véase también el Ejercicio 25). Esta ecuación se conoce como *ecuación de Laplace*. Pierre-Simon de Laplace (1749–1827) trabajó en la atracción gravitatoria de masas no puntuales y fue el primero en considerar la Ecuación (2) en relación con la atracción gravitatoria. Proporcionó argumentos (que más tarde se vio que eran incorrectos) por los que la Ecuación (2) tenía que cumplirse para cualquier cuerpo y cualquier punto, tanto si estaba dentro como fuera de dicho cuerpo. Sin embargo, Laplace no fue la primera persona que escribió la Ecuación (2). La ecuación del potencial apareció por primera vez en uno de los principales trabajos de Euler, en 1752, “Principios de los movimientos de los fluidos”, en el que deducía la ecuación del potencial en relación

con el movimiento de los fluidos (incompresibles). Euler comentó que no tenía ni idea de cómo resolver la Ecuación (2). Más tarde, Poisson demostró que si (x, y, z) está en el interior del cuerpo que ejerce la atracción, entonces \mathbf{V} satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^2} = -4\pi\rho, \quad (3)$$

donde ρ es la densidad de masa del cuerpo atractor. La Ecuación (3) ahora se conoce como *ecuación de Poisson*. Poisson fue también el primero en apuntar la importancia de esta ecuación para problemas que implican campos eléctricos. Obsérvese que si la temperatura T es constante en el tiempo, entonces la ecuación del calor (1) se reduce a la ecuación de Laplace (2).

Las ecuaciones de Laplace y de Poisson son fundamentales en muchas áreas además de en la mecánica de fluidos, los campos gravitatorios y los campos electrostáticos. Por ejemplo, son útiles para estudiar películas de jabón y cristales líquidos (véase *The Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World* de S. Hildebrandt y A. Tromba, Springer-Verlag, Nueva York/Berlín, 1995).

ECUACIÓN DE ONDAS. La ecuación de ondas lineal en el espacio tiene la forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Aproximadamente en 1727, Johann Bernoulli II dedujo la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (4')$$

y algunos años después Jean Le Rond d'Alembert también la dedujo cuando estudiaba cómo determinar el movimiento de una cuerda vibrante (como la cuerda de un violín). La Ecuación (4) resultó ser útil tanto en el estudio de cuerpos en vibración como en la elasticidad. Como veremos al considerar las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo en la Sección 8.5, esta ecuación también surge en el estudio de la propagación de la radiación electromagnética y las ondas sonoras.

Ejemplo 6



Figura 3.1.3 Una varilla delgada.

Como ya hemos apuntado, la ecuación del calor, que apareció alrededor de 1800, es una de las ecuaciones en derivadas parciales más importante y clásica. Describe la conducción del calor en un cuerpo sólido. Por ejemplo, comprender cómo se disipa el calor es importante para la industria, así como para los científicos que tratan de entender las tensiones térmicas que sufre una cápsula durante su re-entrada en la atmósfera de la Tierra.

Consideraremos una varilla delgada de longitud l (Figura 3.1.3). Vamos a demostrar que

$$u(x, t) = \frac{1}{t^{1/2}} e^{-x^2/4t}$$

es una solución de la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Solución

Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{2t^{3/2}}e^{-x^2/4t} + \frac{1}{t^{1/2}}e^{-x^2/4t}\frac{d}{dt}\left(\frac{-x^2}{4t}\right) \\ &= -\frac{1}{2t^{3/2}}e^{-x^2/4t} + \frac{1}{t^{1/2}} \cdot \frac{x^2}{4t^2}e^{-x^2/4t} \\ &= \frac{1}{2t^{3/2}}\left(-1 + \frac{x^2}{2t}\right)e^{-x^2/4t},\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{x}{2t^{3/2}}e^{-x^2/4t} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2t^{3/2}}e^{-x^2/4t} + \frac{x^2}{4t^{(5/2)}}e^{-x^2/4t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}.\end{aligned}$$

Esta solución se denomina *solución fundamental* de la ecuación del calor. ▲

Ejercicios

En los Ejercicios 1 a 6, calcular las derivadas parciales segundas $\partial^2 f / \partial x^2, \partial^2 f / \partial x \partial y, \partial^2 f / \partial y \partial x, \partial^2 f / \partial y^2$ para cada una de las siguientes funciones. Verificar el Teorema 1 en cada uno de los casos.

1. $f(x, y) = 2xy/(x^2 + y^2)^2$, en la región donde $(x, y) \neq (0, 0)$
2. $f(x, y, z) = e^z + (1/x) + xe^{-y}$, en la región donde $x \neq 0$
3. $f(x, y) = \cos(xy^2)$
4. $f(x, y) = e^{-xy^2} + y^3x^4$
5. $f(x, y) = 1/(\cos^2 x + e^{-y})$
6. $f(x, y) = \log(x - y)$
7. Hallar todas las derivadas parciales segundas de las siguientes funciones en el punto \mathbf{x}_0 .
 - (a) $f(x, y) = \sin(xy); \mathbf{x}_0 = (\pi, 1)$
 - (b) $f(x, y) = xy^8 + x^2 + y^4; \mathbf{x}_0 = (2, -1)$
 - (c) $f(x, y, z) = e^{xyz}; \mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$
8. Hallar todas las derivadas parciales segundas de $f(x, y) = \sec^3(4y - 3x)$.
9. ¿Puede existir una función $C^2 f(x, y)$ con $f_x = 2x - 5y$ y $f_y = 4x + y$?
10. La ecuación de conducción del calor es $u_t = k u_{xx}$. Determinar si $u(x, t) = e^{-kt} \sin(x)$ es una solución.
11. Demostrar que las siguientes funciones satisfacen la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$
 - (a) $f(x, t) = \sin(x - ct)$
 - (b) $f(x, t) = \sin(x) \sin(ct)$
 - (c) $f(x, t) = (x - ct)^6 + (x + ct)^6$
12. (a) Demostrar que $T(x, t) = e^{-kt} \cos x$ satisface la ecuación del calor unidimensional

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}.$$
 - (b) Demostrar que $T(x, y, t) = e^{-kt}(\cos x + \cos y)$ satisface la ecuación del calor bidimensional

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

- (c) Demostrar que $T(x, y, z, t) = e^{-kt}(\cos x + \cos y + \cos z)$ satisface la ecuación del calor tridimensional

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

13. Hallar $\partial^2 z / \partial x^2, \partial^2 z / \partial x \partial y, \partial^2 z / \partial y \partial x$ y $\partial^2 z / \partial y^2$ para
- (a) $z = 3x^2 + 2y^2$
 - (b) $z = (2x^2 + 7x^2 y) / 3xy$, en la región donde $x \neq 0$ e $y \neq 0$

14. Hallar todas las derivadas parciales segundas de
- (a) $z = \sin(x^2 - 3xy)$
 - (b) $z = x^2 y^2 e^{2xy}$

15. Hallar f_{xy}, f_{yz}, f_{zx} y f_{xyz} para

$$f(x, y, z) = x^2 y + xy^2 + yz^2.$$

16. Sea $z = x^4 y^3 - x^8 + y^4$.

- (a) Calcular $\partial^3 z / \partial y \partial x \partial x, \partial^3 z / \partial x \partial y \partial x$ y $\partial^3 z / \partial x \partial x \partial y$ (también denotada por $\partial^3 z / \partial x^2 \partial y$).
- (b) Calcular $\partial^3 z / \partial x \partial y \partial y, \partial^3 z / \partial y \partial x \partial y$ y $\partial^3 z / \partial y \partial y \partial x$ (también denotada por $\partial^3 z / \partial y^2 \partial x$).

17. Utilizar el Teorema 1 para demostrar que si $f(x, y, z)$ es una función de clase C^3 , entonces

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}.$$

18. Verificar que

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$$

para $f(x, y, z) = ze^{xy} + yz^3 x^2$.

19. Verificar que $f_{xzw} = f_{zwx}$ para $f(x, y, z, w) = e^{xyz} \sin(xw)$.

20. Si $f(x, y, z, w)$ es de clase C^3 , demostrar que $f_{xzw} = f_{zwx}$.

21. Evaluar todas las derivadas parciales primeras y segundas de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = x \arctan(x/y)$

(b) $f(x, y) = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$

22. Sea $w = f(x, y)$ una función de dos variables y sean $x = u + v, y = u - v$. Demostrar que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

23. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y sea $\mathbf{c}(t)$ una curva C^2 en \mathbb{R}^2 . Escribir una fórmula para la segunda derivada $(d^2/dt^2)((f \circ \mathbf{c})(t))$ utilizando la regla de la cadena dos veces.

24. Sea $f(x, y, z) = e^{xz} \tan(yz)$ y sean $x = g(s, t), y = h(s, t), z = k(s, t)$. Definimos la función $m(s, t) = f(g(s, t), h(s, t), k(s, t))$. Hallar una fórmula para m_{st} utilizando la regla de la cadena y verificar que la solución obtenida es simétrica en s y t .

25. Una función $u = f(x, y)$ con derivadas parciales segundas continuas que satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se dice que es una **función armónica**. Demostrar que la función $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ es armónica.

26. ¿Cuáles de las siguientes funciones son armónicas? (véase el Ejercicio 25).

- (a) $f(x, y) = x^2 - y^2$
- (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$
- (c) $f(x, y) = xy$
- (d) $f(x, y) = y^3 + 3x^2 y$
- (e) $f(x, y) = \sin x \cosh y$
- (f) $f(x, y) = e^x \sin y$

27. (a) ¿Es armónica la función $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2$? ¿Y la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$?

- (b) La ecuación de Laplace para funciones de n variables es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

Hallar un ejemplo de una función de n variables que sea armónica y verificar que efectivamente es una función armónica.

- 28.** Demostrar que las siguientes funciones son armónicas:

(a) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

(b) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

- 29.** Sean f y g funciones de clase C^2 de una variable. Definimos $\phi = f(x - t) + g(x + t)$.

- (a) Demostrar que ϕ satisface la ecuación de ondas: $\partial^2\phi/\partial t^2 = \partial^2\phi/\partial x^2$.
- (b) Dibujar la gráfica de ϕ en función de t y x si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 0$.

- 30.** (a) Demostrar que la función $g(x, t) = 2 + e^{-t} \sin x$ satisface la ecuación del calor $g_t = g_{xx}$. [Aquí $g(x, t)$ representa la temperatura de una varilla de metal en la posición x y el instante t .]

- (b) Dibujar la gráfica de g para $t \geq 0$. (SUGERENCIA: considerar las secciones por los planos $t = 0, t = 1$ y $t = 2$.)
- (c) ¿Qué sucede con $g(x, t)$ cuando $t \rightarrow \infty$? Interpretar este límite en términos del comportamiento del calor en la varilla.

- 31.** Demostrar que el potencial de Newton $V = -GmM/r$ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \text{para } (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

- 32.** Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(véase la Figura 3.1.4).

- (a) Si $(x, y) \neq (0, 0)$, calcular $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.
- (b) Demostrar que $(\partial f/\partial x)(0, 0) = 0 = (\partial f/\partial y)(0, 0)$.
- (c) Demostrar que $(\partial^2 f/\partial x \partial y)(0, 0) = 1$, $(\partial^2 f/\partial y \partial x)(0, 0) = -1$.
- (d) ¿Qué es erróneo? ¿Por qué las derivadas parciales cruzadas no son iguales?

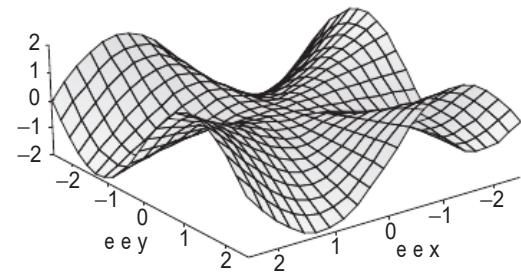


Figura 3.1.4 Gráfica de la función del Ejercicio 32.

3.2 Teorema de Taylor

Al presentar la derivada en el Capítulo 2, vimos que la *aproximación lineal* de una función desempeñaba un papel esencial tanto por una razón geométrica—determinar la ecuación de un plano tangente—como por una razón analítica—determinar los valores aproximados de las funciones. El teorema de Taylor se ocupa de la importante cuestión de hallar *aproximaciones cuadráticas y de orden superior*.

El teorema de Taylor es una herramienta fundamental para hallar aproximaciones numéricas precisas de funciones, por lo que desempeña un papel importante en muchas áreas de la matemática aplicada y computacional. En la siguiente sección lo utilizaremos para desarrollar el criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos de funciones de varias variables.

La estrategia utilizada para probar el teorema de Taylor es reducirlo al caso de una variable evaluando la función de muchas variables a lo largo de rectas de la forma $\mathbf{l}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}$ que parten de un punto \mathbf{x}_0 y apuntan en la dirección \mathbf{h} . Por tanto, será útil comenzar revisando el teorema de Taylor del cálculo de una variable.

Teorema de Taylor para una variable

Al recordar un teorema de un curso anterior, suele resultar útil plantearse las siguientes preguntas básicas: ¿Qué es lo más importante del teorema? ¿Cuáles son las ideas clave de la demostración? ¿Entiendo mejor el resultado esta segunda vez?

El punto más importante del teorema de Taylor para una variable es encontrar aproximaciones de una función cerca de un punto dado que sean precisas con un orden mayor que la aproximación lineal. La idea clave de la demostración es utilizar el *teorema fundamental del cálculo* seguido de una *integración por partes*. De hecho, simplemente recordando estas ideas básicas, podemos reconstruir la demostración completa. Razonar de esta forma nos ayudará a organizar todas las piezas que necesitamos para dominar las aproximaciones de Taylor de funciones de una o varias variables.

Para una función suave $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de una variable, el teorema de Taylor afirma que:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2} h^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + R_k(x_0, h), \quad (1)$$

donde

$$R_k(x_0, h) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0 + h - \tau)^k}{k!} f^{k+1}(\tau) d\tau$$

es el resto. Para h pequeño, este resto es pequeño de orden k , en el sentido de que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_k(x_0, h)}{h^k} = 0. \quad (2)$$

En otras palabras, $R_k(x_0, h)$ es pequeño comparado con la cantidad, ya de por sí pequeña, h^k .

Lo anterior es el enunciado formal del teorema de Taylor. ¿Qué podemos decir de la demostración? Como prometimos, comenzamos con el teorema fundamental del cálculo, escrito de la forma:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f'(\tau) d\tau.$$

A continuación, escribimos $d\tau = -d(x_0 + h - \tau)$ e integramos por partes¹ para obtener:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \int_{x_0}^{x_0+h} f''(\tau)(x_0 + h - \tau) d\tau,$$

¹Recuérdese que la integración por partes (la regla de derivación del producto leída al revés) dice que :

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

Aquí elegimos $u = f'(\tau)$ y $v = x_0 + h - \tau$.

que es la fórmula de Taylor de primer orden. Integrando por partes de nuevo:

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_0+h} f''(\tau)(x_0 + h - \tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+h} f''(\tau) d(x_0 + h - \tau)^2 \\ &= \frac{1}{2} f''(x_0)h^2 + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+h} f'''(\tau)(x_0 + h - \tau)^2 d\tau, \end{aligned}$$

lo que, una vez sustituido en la fórmula anterior, da la **fórmula de Taylor de segundo orden**:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) = & f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+h} f'''(\tau)(x_0 + h - \tau)^2 d\tau. \end{aligned}$$

Este es el teorema de Taylor para $k = 2$.

El teorema de Taylor para k general se obtiene por medio de sucesivas integraciones por partes. La Ecuación (2) que establece que $R_k(x_0, h)/h^k \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$ se puede interpretar como sigue. Para τ en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$, tenemos que $|x_0 + h - \tau| \leq |h|$ y $f^{k+1}(\tau)$, es continua y está acotada; supongamos que $|f^{k+1}(\tau)| \leq M$. Entonces

$$|R_k(x_0, h)| = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0 + h - \tau)^k}{k!} f^{k+1}(\tau) d\tau \right| \leq \frac{|h|^{k+1}}{k!} M$$

y, en particular, $|R_k(x_0, h)/h^k| \leq |h| M/k! \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

Teorema de Taylor para varias variables

Nuestro siguiente objetivo en esta sección es demostrar un teorema análogo que sea válido para funciones de varias variables. Ya conocemos una versión de primer orden; es decir, para $k = 1$. En efecto, si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en \mathbf{x}_0 y definimos

$$R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{h}),$$

de modo que

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{h}) + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

entonces, por la definición de diferenciabilidad,

$$\frac{|R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \mathbf{h} \rightarrow 0;$$

es decir, $R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$ se anula hasta primer orden en \mathbf{x}_0 . En resumen, tenemos:

Teorema 2 Fórmula de Taylor de primer orden Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$. Entonces

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

donde $R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})/\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$ cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ en \mathbb{R}^n .

La versión del teorema para segundo orden es como sigue:

Teorema 3 Fórmula de Taylor de segundo orden Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas de tercer orden.² Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= \\ f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) &+ R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}), \end{aligned}$$

donde $R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^2 \rightarrow 0$ cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ y la segunda suma es sobre todos los i y j comprendidos entre 1 y n (de modo que hay n^2 términos).

Obsérvese que este resultado se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{x}_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} [h_1, \dots, h_n] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}, \\ &+ R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}), \end{aligned}$$

donde las derivadas de f se evalúan en \mathbf{x}_0 .

²Para el enunciado del teorema tal como lo hemos dado aquí, basta con que f sea de clase C^2 , pero para tener una forma conveniente del resto, de aquí en adelante supondremos que f es de clase C^3 .

En el transcurso de la demostración del Teorema 3, obtendremos una útil fórmula explícita para el resto, como en el teorema de una única variable.

Demostración del Teorema 3 Sea $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ con \mathbf{x}_0 y \mathbf{h} fijos y t lo suficientemente pequeño como para que $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}$ esté en U para todo t perteneciente a $[0,1]$, g es una función C^3 de t . Ahora aplicamos el teorema de Taylor para una sola variable (1) a g , con $k = 2$, para obtener

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{g''(0)}{2!} + R_2,$$

donde

$$R_2 = \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2!} g'''(t) dt.$$

Por la regla de la cadena,

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i; \quad g''(t) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j,$$

y

$$g'''(t) = \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j h_k.$$

Escribiendo $R_2 = R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$, hemos probado por tanto:

$$\left. \begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}), \\ \text{donde } R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) &= \sum_{i,j,k=1}^n \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j h_k dt. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

El integrando es una función continua de t y, por tanto, está acotado por una constante positiva C en un pequeño entorno de \mathbf{x}_0 (ya que tiene que estar próximo a su valor en \mathbf{x}_0). Obsérvese también que $|h_i| \leq \|\mathbf{h}\|$, para $\|\mathbf{h}\|$ pequeño y, por tanto

$$|R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})| \leq \|\mathbf{h}\|^3 C. \quad (4)$$

En particular,

$$\frac{|R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|^2} \leq \|\mathbf{h}\| C \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0},$$

como se requería en el teorema.

La demostración del Teorema 2 se sigue de forma análoga de la fórmula de Taylor (1) con $k = 1$. Un argumento similar para R_1 demuestra que $|R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})|/\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$ cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, aunque esto también se obtiene directamente de la definición de diferenciabilidad. ■

Formas del resto En el Teorema 2,

$$\begin{aligned} R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i h_j dt \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{c}_{ij}) h_i h_j, \end{aligned} \quad (5)$$

donde \mathbf{c}_{ij} es un punto de la recta que une \mathbf{x}_0 con $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$.

En el Teorema 3,

$$\begin{aligned} R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) &= \sum_{i,j,k=1}^n \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i h_j h_k dt \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{c}_{ijk}) h_i h_j h_k, \end{aligned} \quad (5')$$

donde \mathbf{c}_{ijk} es un punto de la recta que une \mathbf{x}_0 con $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$.

Las fórmulas con \mathbf{c}_{ij} y \mathbf{c}_{ijk} (llamadas formas de Lagrange del resto) se obtienen haciendo uso del *segundo teorema del valor medio para integrales*. Este establece que

$$\int_a^b h(t)g(t) dt = h(c) \int_a^b g(t) dt,$$

siempre que h y g sean continuas y $g \geq 0$ en $[a, b]$; aquí c es un número entre a y b .³ Esto se aplica en la Fórmula (4) para la forma explícita del resto con $h(t) = (\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ y $g(t) = 1 - t$.

La fórmula de Taylor de tercer orden es

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^n h_i h_j h_k \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0) + R_3(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}), \end{aligned}$$

³ *Demostración* Si $g = 0$, el resultado está claro, por lo que podemos suponer $g \neq 0$; por tanto, podemos suponer que $\int_a^b g(t) dt > 0$. Sean M y m los valores máximo y mínimo de h , alcanzados en t_M y t_m , respectivamente. Puesto que $g(t) \geq 0$,

$$m \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b h(t)g(t) dt \leq M \int_a^b g(t) dt.$$

Luego, $(\int_a^b h(t)g(t) dt) / (\int_a^b g(t) dt)$ está entre $m = h(t_m)$ y $M = h(t_M)$ y, por tanto, por el teorema de los valores intermedios, es igual a $h(c)$ para algún punto c intermedio. ■

donde $R_3(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^3 \rightarrow 0$ cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, y así sucesivamente. La fórmula general se puede probar por inducción utilizando el método de demostración que acabamos de ver.

Ejemplo 1

Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden para la función $f(x, y) = \sin(x + 2y)$, alrededor del punto $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

Solución

Obsérvese que

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \cos(0 + 2 \cdot 0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 2 \cos(0 + 2 \cdot 0) = 2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) &= 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f(\mathbf{h}) = f(h_1, h_2) = h_1 + 2h_2 + R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h}),$$

donde

$$\frac{R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 2

Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden para la función $f(x, y) = e^x \cos y$ alrededor del punto $x_0 = 0, y_0 = 0$.

Solución

Aquí

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) &= 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0, \end{aligned}$$

y por tanto

$$f(\mathbf{h}) = f(h_1, h_2) = 1 + h_1 + \frac{1}{2}h_1^2 - \frac{1}{2}h_2^2 + R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h}),$$

donde

$$\frac{R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}. \quad \blacktriangle$$

En el caso de funciones de una variable, podemos desarrollar $f(x)$ en una serie infinita de potencias, denominada **serie de Taylor**:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)h^k}{k!} + \cdots,$$

siempre que podamos probar que $R_k(x_0, h) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. De forma similar, para funciones de varias variables, los términos anteriores se sustituyen por los correspondientes que implican derivadas parciales,

como hemos visto en el Teorema 3. De nuevo, podemos representar una función tal por su serie de Taylor siempre que podamos probar que $R_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Este punto se estudia en detalle en el Ejercicio 13.

Los polinomios de Taylor de primer, segundo y tercer orden también se denominan aproximaciones de Taylor de primer, segundo y tercer orden a f , ya que se supone que el resto es pequeño y se hace más pequeño a medida que el orden del polinomio de Taylor aumenta.

Ejemplo 3

Determinar las aproximaciones de Taylor de primer y segundo orden a $f(x, y) = \sin(xy)$ en el punto $(x_0, y_0) = (1, \pi/2)$.

Solución

Aquí

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= \sin(x_0 y_0) = \sin(\pi/2) = 1 \\ f_x(x_0, y_0) &= y_0 \cos(x_0 y_0) = \frac{\pi}{2} \cos(\pi/2) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) &= x_0 \cos(x_0 y_0) = \cos(\pi/2) = 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0) &= -y_0^2 \sin(x_0 y_0) = -\frac{\pi^2}{4} \sin(\pi/2) = -\frac{\pi^2}{4} \\ f_{xy}(x_0, y_0) &= \cos(x_0 y_0) - x_0 y_0 \sin(x_0 y_0) = -\frac{\pi}{2} \sin(\pi/2) = -\frac{\pi}{2} \\ f_{yy}(x_0, y_0) &= -x_0^2 \sin(x_0 y_0) = -\sin(\pi/2) = -1. \end{aligned}$$

Por tanto, la aproximación lineal (de primer orden) es

$$\begin{aligned} l(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= 1 + 0 + 0 = 1, \end{aligned}$$

y la aproximación de segundo orden (o cuadrática) es

$$\begin{aligned} g(x, y) &= 1 + 0 + 0 + \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi^2}{4} \right) (x - 1)^2 + \left(-\frac{\pi}{2} \right) (x - 1) \left(y - \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (-1) \left(y - \frac{\pi}{2} \right)^2 \\ &= 1 - \frac{\pi^2}{8} (x - 1)^2 - \frac{\pi}{2} (x - 1) \left(y - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(y - \frac{\pi}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Véase la Figura 3.2.1. ▲

Ejemplo 4

Hallar las aproximaciones lineal y cuadrática a la expresión $(3,98 - 1)^2 / (5,97 - 3)^2$. Comparar con el valor exacto.

Solución

Sea $f(x, y) = (x - 1)^2 / (y - 3)^2$. La expresión deseada está próxima a $f(4, 6) = 1$. Para hallar las aproximaciones, derivamos:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{2(x - 1)}{(y - 3)^2}, & f_y &= \frac{-2(x - 1)^2}{(y - 3)^3} \\ f_{xy} = f_{yx} &= \frac{-4(x - 1)}{(y - 3)^3}, & f_{xx} &= \frac{2}{(y - 3)^2}, & f_{yy} &= \frac{6(x - 1)^2}{(y - 3)^4}. \end{aligned}$$

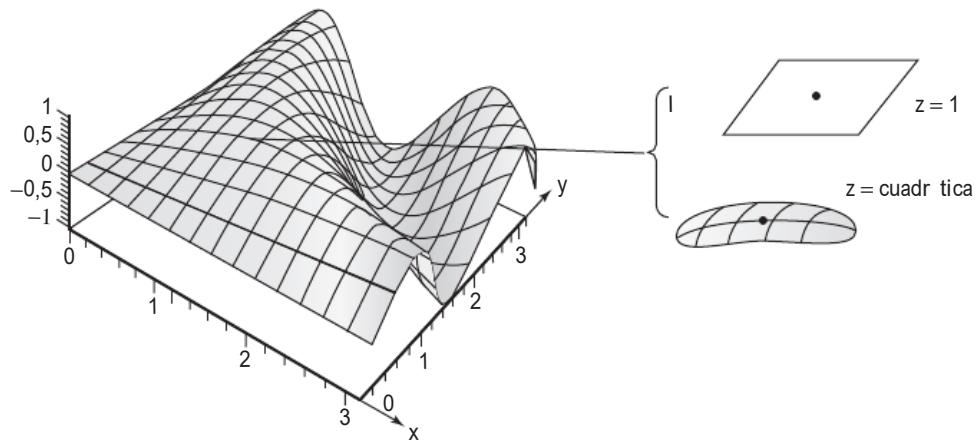


Figura 3.2.1 Aproximaciones lineal y cuadrática a $z = \sin(xy)$ cerca de $(1, \pi/2)$.

En el punto de aproximación, tenemos

$$f_x(4, 6) = \frac{2}{3}, \quad f_y = -\frac{2}{3}, \quad f_{xy} = f_{yx} = -\frac{4}{9}, \quad f_{xx} = \frac{2}{9}, \quad f_{yy} = \frac{2}{3}.$$

La aproximación lineal es entonces

$$1 + \frac{2}{3}(-0,02) - \frac{2}{3}(-0,03) = 1,00666.$$

La aproximación cuadrática es

$$1 + \frac{2}{3}(-0,02) - \frac{2}{3}(-0,03) + \frac{2}{9} \frac{(-0,02)^2}{2} - \frac{4}{9}(-0,02)(-0,03) + \frac{2}{3} \frac{(-0,03)^2}{2}$$

$$= 1,00674.$$

El valor “exacto” utilizando una calculadora es 1,00675. ▲

Ejercicios

1. Sea $f(x, z) = e^{x+y}$.
 - (a) Determinar la fórmula de Taylor de primer orden de f en $(0, 0)$.
 - (b) Determinar la fórmula de Taylor de segundo orden de f en $(0, 0)$.
2. Supóngase que $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal, por lo que L tiene la forma $L(x, y) = ax + by$.
 - (a) Determinar la aproximación de Taylor de primer orden para L .
 - (b) Determinar la aproximación de Taylor de segundo orden para L .
 - (c) ¿Cómo serán las aproximaciones de orden superior?

En los Ejercicios 3 a 8, determinar la fórmula de Taylor de segundo orden para la función dada alrededor del punto (x_0, y_0) .

3. $f(x, y) = (x + y)^2$, donde $x_0 = 0, y_0 = 0$
4. $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2 + 1)$, donde $x_0 = 0, y_0 = 0$
5. $f(x, y) = e^{x+y}$, donde $x_0 = 0, y_0 = 0$
6. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \cos(xy)$, donde $x_0 = 0, y_0 = 0$
7. $f(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy)$, donde $x_0 = 0, y_0 = 0$
8. $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos y$, donde $x_0 = 1, y_0 = 0$
9. Calcular la aproximación de Taylor de segundo orden de $f(x, y) = \cos x \sin y$ en el punto $(\pi, \pi/2)$.
10. Sea $f(x, y) = x \cos(\pi y) - y \sin(\pi x)$. Hallar la aproximación de Taylor de segundo orden para f en el punto $(1, 2)$.
11. Sea $g(x, y) = \sin(xy) - 3x^2 \log y + 1$. Hallar el polinomio de segundo grado que mejor aproxima g cerca del punto $(\pi/2, 1)$.
12. Para cada una de las funciones de los Ejercicios 3 a 7, utilizar la fórmula de Taylor de segundo

orden para aproximar $f(0,1; 0,1)$. Compare su aproximación de $f(x, y) = (x + y)^2$ con el valor exacto utilizando una calculadora.

13. (Difícil) Se dice que una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función *analítica* si

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \dots + \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k + \dots$$

es decir, la serie del lado derecho converge y es igual a $f(x+h)$.

- (a) Supóngase que f satisface la siguiente condición: en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$, existe una constante M tal que para todo $k = 1, 2, 3, \dots, |f^{(k)}(x)| \leq M^k$ para todo $x \in [a, b]$. Demostrar que f es una función analítica.

$$(b) \text{ Sea } f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Demostrar que f es una función C^∞ , pero f no es analítica.

- (c) Dar una definición de función analítica de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} . Generalizar la demostración del apartado (a) a esta clase de funciones.

- (d) Desarrollar $f(x, y) = e^{x+y}$ en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0, y_0 = 0$.

3.3 Extremos de funciones con valores reales

Nota histórica

Como hemos visto en la Introducción histórica del libro, los antiguos griegos intentaron matematizar la naturaleza y encontrar, como en el modelo geométrico ptolemaico del movimiento planetario, las leyes matemáticas que gobiernan el universo. Con la vuelta al estudio del saber griego durante el Renacimiento, se retomó este punto de vista y se volvió a la investigación de estas leyes. En particular, surgió la cuestión de si existía *una* ley, un principio matemático que gobernara y sustituyera a todos los demás, un principio que el Creador había empleado en Su Gran Diseño del Universo.

PRINCIPIO DE MAUPERTUIS En 1744, el científico francés Pierre-Louis de Maupertuis (véase la Figura 3.3.1) propuso su gran esquema del mundo. El “principio metafísico” de Maupertuis consiste en la suposición de que la naturaleza siempre funciona con la máxima economía posible. Es decir, las leyes físicas son una consecuencia de un principio de “economía de medios”; la naturaleza siempre actúa de tal forma que se minimiza una magnitud que Maupertuis denominó *acción*. La acción no es nada más que el gasto de energía a lo largo del tiempo, o la energía \times tiempo. En las aplicaciones, el tipo de energía cambia para cada caso. Por ejemplo, los sistemas físicos suelen intentar “reacomodarse” para tener una energía mínima—tal como una pelota que rueda desde la cima de una montaña hasta un valle, o la irregular Tierra primordial adoptando una forma casi esférica. Otro ejemplo sería la forma esférica de



Figura 3.3.1 Pierre-Louis de Maupertuis (1698–1759).

las pompas de jabón, lo que está relacionado con el hecho de que las esferas son las superficies de menor área que contienen un volumen fijo.

Enunciamos formalmente el principio de Maupertuis así: *la naturaleza siempre minimiza la acción*. Maupertuis vio en este principio una expresión de la sabiduría del Ser Supremo, de Dios, de acuerdo con el cual todo en la naturaleza ocurría de la forma más económica posible. Esto es lo que escribió:

Qué satisfacción para el espíritu humano que, al contemplar estas leyes que contienen el principio del movimiento y el reposo de todos los cuerpos del Universo, encuentra la prueba de la existencia de Aquel que gobierna el mundo.

Maupertuis creía que había descubierto la ley divina fundamental, el propio secreto de la Creación, pero realmente no fue el primero que planteó este principio.

En 1707, Leibniz escribió el principio de la mínima acción en una carta dirigida a Johann Bernoulli, la cual estuvo perdida hasta 1913, cuando fue descubierta en Alemania, en la biblioteca de Gotha. Para Leibniz, este principio era una consecuencia natural de su gran tratado filosófico *Ensayos de Teodicea*, en el que argumentaba que Dios puede pensar en todos los mundos posibles, pero solo desearía crear el mejor de entre ellos; y por tanto nuestro mundo es necesariamente el *mejor de todos los mundos posibles*.

La acción, tal y como la definió Leibniz, estaba motivada por el siguiente razonamiento, tal y como lo expuso en su carta. Pensemos en un caminante que pasea por un camino y consideremos cómo se describe esta acción. Si recorre dos kilómetros en una hora, diríamos que ha realizado el doble de acción que si hubiera recorrido dos kilómetros en dos horas. Sin embargo, también diríamos que ha realizado el doble de acción al recorrer dos kilómetros en dos horas que al recorrer un kilómetro en una hora. Teniendo todo esto en cuenta, nuestro caminante, al recorrer dos kilómetros en una hora, lleva a cabo cuatro veces más acción que si recorriera un kilómetro en una hora.

Usando esta idea intuitiva, Maupertuis definió la acción como el producto de la distancia, la velocidad y la masa:

$$\text{Acción} = \text{Masa} \times \text{Distancia} \times \text{Velocidad}.$$

La masa se incluye en esta definición para tener en cuenta la mochila del caminante. Además, de acuerdo con Leibniz, la energía cinética **E** está dada por la fórmula:

$$E = \frac{1}{2} \times \text{Masa} \times (\text{Velocidad})^2.$$

Por tanto, la acción tiene las misma dimensión física que

$$\text{Energía} \times \text{Tiempo},$$

ya que la velocidad es la distancia dividida entre el tiempo.

En los 250 años siguientes a que Maupertuis formulara su principio, este *principio de acción mínima* se convirtió en una “base teórica” para la ley de la gravedad de Newton, las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo, la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica y la ecuación del campo de Einstein de la relatividad general.

Se puede hablar mucho más sobre la historia del principio de mínima acción, lo que haremos en la Sección 4.1.

Máximos y mínimos de funciones de n -variables

Como muestran los comentarios anteriores, para Leibniz, Euler y Maupertuis, y también para gran parte de la ciencia moderna, todo en la naturaleza es una consecuencia de algún principio del máximo o del mínimo. Para elaborar tan magnos sistemas —así como algunos más terrenales— de forma efectiva, en primer lugar debemos aprender las técnicas de cómo hallar los máximos y mínimos de funciones de n variables.

Puntos de extremo

Entre las características geométricas básicas de la gráfica de una función están sus puntos de extremo, en los que la función alcanza sus valores máximo y mínimo. En esta sección, vamos a deducir un método para determinar estos puntos. De hecho, el método localiza también los puntos de extremo locales. Estos son puntos en los que la función alcanza un valor máximo o mínimo respecto a los puntos cercanos. Comenzamos definiendo algunos términos.

Definición Si $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar dada, se dice que un punto $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto de **mínimo local** de f si existe un entorno V de \mathbf{x}_0 tal que para todos los puntos \mathbf{x} de V , $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$. (Véase la Figura 3.3.2.) De forma similar, $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto de **máximo local** si existe un entorno V de \mathbf{x}_0 tal que $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in V$. Se dice que el punto $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto de **extremo local**, o **relativo**, si es un mínimo local o un máximo local. Un punto \mathbf{x}_0 es un **punto crítico** de f si bien f no es diferenciable en \mathbf{x}_0 , o bien $Df(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Un punto crítico que no es un extremo local se denomina **punto de silla**.⁴

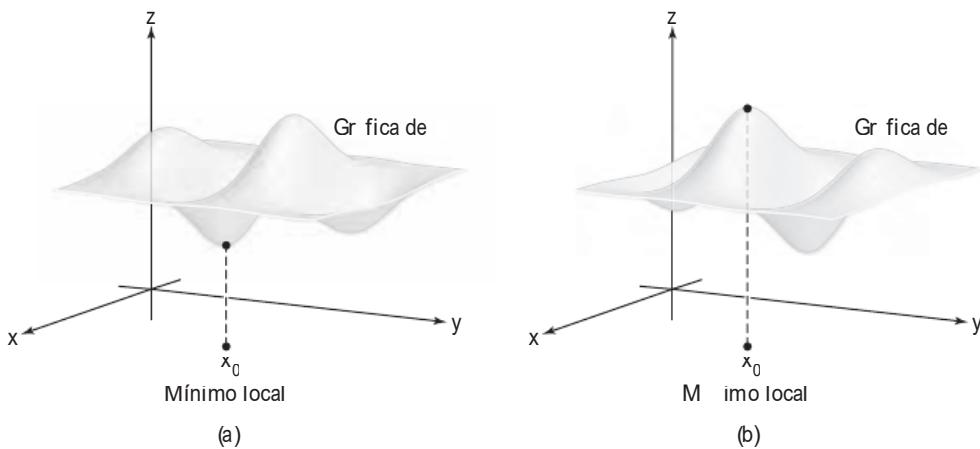


Figura 3.3.2 Puntos (a) mínimo local y (b) máximo local de una función de dos variables.

⁴El término “punto de silla” no siempre se usa de esta forma generalizada. Estudiaremos los puntos de silla más en detalle en el desarrollo posterior.

Condición de la primera derivada para puntos de extremo local

La localización de los puntos de extremo está basada en el siguiente hecho, con el que el lector debería estar familiarizado por el cálculo de una variable (caso $n = 1$): *todo punto de extremo es un punto crítico*.

Teorema 4 Condición de la primera derivada para puntos de extremo local Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, la función $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto de extremo local, entonces $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$; es decir, \mathbf{x}_0 es un punto crítico de f .

Demostración Supongamos que f alcanza un máximo local en \mathbf{x}_0 . Entonces para cualquier $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, la función $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ tiene un máximo local en $t = 0$. Por tanto, del cálculo de una variable sabemos que $g'(0) = 0$.⁵ Por otro lado, por la regla de la cadena,

$$g'(0) = [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h}.$$

Luego $[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h} = 0$ para todo \mathbf{h} y, por tanto, $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. El caso en que f alcanza un mínimo local en \mathbf{x}_0 es completamente análogo. ■

Si recordamos que $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ significa que todas las componentes de $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ son cero, podemos reformular el resultado del Teorema 4: si \mathbf{x}_0 es un punto de extremo local, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n;$$

es decir, cada derivada parcial es cero en \mathbf{x}_0 . En otras palabras, $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, donde ∇f es el gradiente de f .

Si queremos hallar los puntos de extremo o los puntos de extremo local de una función, entonces el Teorema 4 establece que deberíamos buscar entre los puntos críticos. En ocasiones, estos se pueden determinar por inspección, pero normalmente se emplean criterios (que desarrollamos más adelante) análogos al criterio de la derivada segunda del cálculo de una variable.

⁵ Recuérdese la demostración del cálculo de una variable: puesto que $g(0)$ es un máximo local, $g(t) \leq g(0)$ para $t > 0$ pequeño, de modo que $g(t) - g(0) \leq 0$ y, por tanto, $g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (g(t) - g(0))/t \leq 0$, donde $\lim_{t \rightarrow 0^+}$ denota el límite cuando $t \rightarrow 0$, $t > 0$. Para $t < 0$ pequeño, tenemos de forma similar $g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} (g(t) - g(0))/t \geq 0$. Por tanto, $g'(0) = 0$.

Ejemplo 1

Hallar los puntos de máximo y de mínimo de la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$. (Ignorar el hecho de que este ejemplo puede resolverse por inspección.)

Solución

En primer lugar identificamos los puntos críticos de f resolviendo las dos ecuaciones $\partial f / \partial x = 0$ y $\partial f / \partial y = 0$, para x e y . Pero

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,$$

por lo que el único punto crítico se encuentra en el origen $(0, 0)$, donde el valor de la función es cero. Puesto que $f(x, y) \geq 0$, este punto es un mínimo relativo—de hecho, un punto mínimo absoluto o global—de f . Dado que $(0, 0)$ es el único punto crítico, no existen puntos de máximo. ▲

Ejemplo 2

Considérese la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$. Ignorando por el momento que esta función tiene un punto de silla y ningún extremo, aplicamos el método del Teorema 4 para la localización de puntos de extremo.

Solución

Como en el Ejemplo 1, determinamos que f solo tiene un punto crítico en el origen y que el valor de f ahí es cero. Examinando los valores de f directamente para puntos próximos al origen, vemos que $f(x, 0) \geq f(0, 0)$ y $f(0, y) \leq f(0, 0)$, con desigualdades estrictas cuando $x \neq 0$ y $y \neq 0$. Dado que x o y pueden tomarse arbitrariamente pequeños, el origen no puede ser ni un punto de mínimo relativo ni un punto de máximo relativo (por tanto, es un punto de silla). Así, esta función no puede tener extremos relativos (véase la Figura 3.3.3).

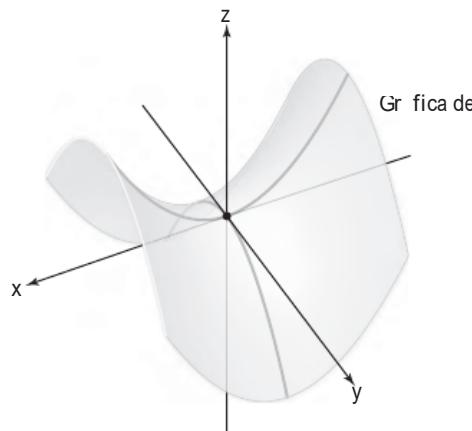


Figura 3.3.3 Una función de dos variables con un punto de silla.

Ejemplo 3

Determinar todos los puntos críticos de $z = x^2y + y^2x$.

Solución

Derivando obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + x^2.$$

Igualando las derivadas parciales a cero tenemos

$$2xy + y^2 = 0, \quad 2xy + x^2 = 0.$$

Restando obtenemos $x^2 = y^2$. Por tanto, $x = \pm y$. Sustituyendo $x = +y$ en la primera de las dos ecuaciones anteriores, encontramos que

$$2y^2 + y^2 = 3y^2 = 0,$$

luego $y = 0$ y, por tanto, $x = 0$. Si $x = -y$, entonces

$$-2y^2 + y^2 = -y^2 = 0,$$

por lo que $y = 0$ y por tanto $x = 0$. Luego el único punto crítico es $(0, 0)$. Para $x = y$, $z = 2x^3$, que es tanto positivo como negativo para x próximo a cero. Por tanto, $(0, 0)$ no es un punto de extremo relativo. ▲

Ejemplo 4

Dada la Figura 3.3.4, una gráfica dibujada por computadora de la función $z = 2(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$. ¿Dónde se encuentran los puntos críticos?

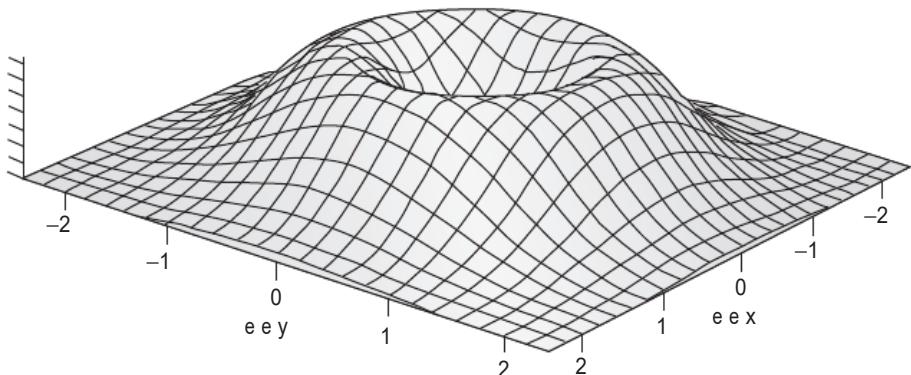


Figura 3.3.4 El volcán $z = 2(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$.

Solución

Dado que $z = 2(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 4x(e^{-x^2-y^2}) + 2(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}(-2x) \\ &= e^{-x^2-y^2}[4x - 4x(x^2 + y^2)] \\ &= 4x(e^{-x^2-y^2})(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y(e^{-x^2-y^2})(1 - x^2 - y^2).$$

Ambas se anulan cuando $x = y = 0$ o cuando $x^2 + y^2 = 1$. Esto es coherente con la figura: los puntos del borde del cráter son máximos y el origen es un mínimo. ▲

Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local

El resto de esta sección está dedicado a obtener un criterio, basado en la derivada segunda, para decidir si un punto crítico es un punto de extremo relativo. En el caso especial de $n = 1$, nuestro criterio se reducirá a la familiar condición del cálculo de una variable: $f''(x_0) > 0$ para un punto de mínimo y $f''(x_0) < 0$ para un punto de máximo. Pero, en el caso general, la derivada segunda es un objeto matemático bastante complicado. Para establecer nuestro criterio, vamos a presentar una versión de la derivada segunda llamada hessiana, la cual, a su vez, está relacionada con las formas cuadráticas. Las **formas cuadráticas** son funciones $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ del tipo

$$g(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j$$

donde $[a_{ij}]$ es una matriz $n \times n$. En términos de multiplicación de matrices, podemos escribir

$$g(h_1, \dots, h_n) = [h_1 \cdots h_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo, si $n = 3$,

$$g(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 - 2h_1 h_2 + h_3^2 = [h_1 \ h_2 \ h_3] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

es una forma cuadrática.

Si lo deseamos, podemos suponer que $[a_{ij}]$ es simétrica; de hecho, g no cambia si sustituimos $[a_{ij}]$ por la matriz simétrica $[b_{ij}]$, donde $b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$, ya que $h_i h_j = h_j h_i$ y la suma se hace sobre todo i y j . La naturaleza *cuadrática* de g se refleja en la identidad

$$g(\lambda h_1, \dots, \lambda h_n) = \lambda^2 g(h_1, \dots, h_n),$$

lo que se deduce de la definición.

Ahora estamos preparados para definir las funciones hessianas (llamadas así en honor de Ludwig Otto Hesse, que las introdujo en 1844).

Definición Supongamos que $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden $(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)(\mathbf{x}_0)$, para $i, j = 1, \dots, n$, en un punto $\mathbf{x}_0 \in U$. La **hessiana de f en \mathbf{x}_0** es la forma cuadrática definida por

Continúa

Definición Cont.

$$Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j$$

$$= \frac{1}{2} [h_1, \dots, h_n] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que, por la igualdad de las derivadas parciales cruzadas, la matriz de las derivadas segundas es simétrica.

Esta función se suele emplear en los puntos críticos $\mathbf{x}_0 \in U$. En este caso, $Df(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, de modo que la fórmula de Taylor (véase el Teorema 2, Sección 3.2) se puede escribir de la forma

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}).$$

Así, en un punto crítico, la hessiana es igual al primer término no constante de la serie de Taylor de f .

Se dice que una forma cuadrática $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es **definida positiva** si $g(\mathbf{h}) \geq 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ y $g(\mathbf{h}) = 0$ solo para $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. De manera análoga, g es **definida negativa** si $g(\mathbf{h}) \leq 0$ y $g(\mathbf{h}) = 0$ solo para $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Obsérvese que si $n = 1$, $Hf(x_0)(h) = \frac{1}{2}f''(x_0)h^2$, que es definida positiva si y solo si $f''(x_0) > 0$.

Teorema 5 Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local Si $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^3 , $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto crítico de f , y la hessiana $Hf(\mathbf{x}_0)$ es definida positiva, entonces \mathbf{x}_0 es un punto de mínimo relativo de f . Del mismo modo, si $Hf(\mathbf{x}_0)$ es definida negativa, entonces \mathbf{x}_0 es un punto de máximo relativo.

En realidad, probaremos que los extremos obtenidos mediante este criterio son *estRICTOS*. Un punto de máximo relativo \mathbf{x}_0 se dice que es **estRICTO** si $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$ en las proximidades de $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Un punto de mínimo relativo estricto se define de forma similar. Además, el teorema es válido incluso si f es solo de clase C^2 , aunque hemos supuesto que es de clase C^3 por simplicidad.

La demostración del Teorema 5 requiere el teorema de Taylor y el siguiente resultado del álgebra lineal.

Lema 1 Si $B = [b_{ij}]$ es una matriz $n \times n$ real y si la forma cuadrática asociada

$$H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (h_1, \dots, h_n) \mapsto \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} h_i h_j$$

es definida positiva, entonces existe una constante $M > 0$ tal que para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$;

$$H(\mathbf{h}) \geq M\|\mathbf{h}\|^2.$$

Demostración Para $\|\mathbf{h}\| = 1$, tomamos $g(\mathbf{h}) = H(\mathbf{h})$. Entonces g es una función continua de \mathbf{h} para $\|\mathbf{h}\| = 1$ y por tanto alcanza su valor mínimo, digamos, por ejemplo, M .⁶ Dado que H es cuadrática, tenemos

$$H(\mathbf{h}) = H\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\|\mathbf{h}\|\right) = H\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right)\|\mathbf{h}\|^2 = g\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right)\|\mathbf{h}\|^2 \geq M\|\mathbf{h}\|^2$$

para cualquier $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$. (Obviamente, el resultado es válido si $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.) ■

Obsérvese que la forma cuadrática asociada con la matriz simétrica $\frac{1}{2}(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)$ es exactamente la hessiana.

Demostración del Teorema 5 Recuérdese que si $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^3 y $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto crítico, el teorema de Taylor se puede expresar de la forma

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

donde $(R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}))/\|\mathbf{h}\|^2 \rightarrow 0$ cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$.

Dado que $Hf(\mathbf{x}_0)$ es definida positiva, el Lema 1 nos asegura que existe una constante $M > 0$ tal que para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$

$$Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) \geq M\|\mathbf{h}\|^2.$$

Como $R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^2 \rightarrow 0$ cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, existe un $\delta > 0$ tal que para $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$

$$|R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})| < M\|\mathbf{h}\|^2.$$

Por tanto, $0 < Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)$ para $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$, de modo que \mathbf{x}_0 es un punto de mínimo relativo; de hecho, es un punto de mínimo relativo estricto.

La demostración para el caso de que la función sea definida negativa es similar; también se puede obtener aplicando lo anterior a $-f$, lo que se deja como ejercicio. ■

⁶Aquí estamos usando, sin demostración, un teorema análogo a uno del cálculo que establece que toda función continua en un intervalo $[a, b]$ alcanza un máximo y un mínimo; véase el Teorema 7.

Ejemplo 5

Considérese de nuevo la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Puesto que $(0, 0)$ es un punto crítico y f ya está en la forma del teorema de Taylor:

$$f((0, 0) + (h_1, h_2)) = f(0, 0) + (h_1^2 + h_2^2) + 0.$$

Podemos ver directamente que la forma cuadrática hessiana en $(0, 0)$ es

$$Hf(\mathbf{0})(\mathbf{h}) = h_1^2 + h_2^2,$$

que es evidentemente definida positiva. Así, $(0, 0)$ es un punto de mínimo relativo. Por supuesto, este sencillo caso se puede resolver sin hacer ningún cálculo. Está claro que $f(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. ▲

Para funciones de dos variables $f(x, y)$, la forma cuadrática hessiana se puede escribir del siguiente modo:

$$Hf(x, y)(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}[h_1, h_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

Ahora vamos a proporcionar un criterio muy útil para saber cuando una forma cuadrática definida mediante una matriz 2×2 es definida positiva. Resultará útil junto con el Teorema 5.

Lema 2 Sea

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad H(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}[h_1, h_2]B \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

Entonces $H(\mathbf{h})$ es definida positiva si y solo si $a > 0$ y $\det B = ac - b^2 > 0$.

Demostración Tenemos

$$H(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}[h_1, h_2] \begin{bmatrix} ah_1 + bh_2 \\ bh_1 + ch_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2).$$

Completamos el cuadrado, escribiendo

$$H(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}a \left(h_1 + \frac{b}{a}h_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(c - \frac{b^2}{a} \right) h_2^2.$$

Supongamos que H es definida positiva. Haciendo $h_2 = 0$, vemos que $a > 0$. Haciendo $h_1 = -(b/a)h_2$, obtenemos $c - b^2/a > 0$ o $ac - b^2 > 0$. Inversamente, si $a > 0$ y $c - b^2/a > 0$, $H(\mathbf{h})$ es una suma de cuadrados, de modo que $H(\mathbf{h}) \geq 0$. Si $H(\mathbf{h}) = 0$, entonces cada cuadrado tiene que ser

cero. Esto implica que tanto h_1 como h_2 tienen que ser cero, de modo que $H(\mathbf{h})$ es definitiva positiva. ■

De la misma manera podemos ver que $H(\mathbf{h})$ es definida negativa si y solo si $a < 0$ y $ac - b^2 > 0$. Fíjese en que una formulación alternativa es que $H(\mathbf{h})$ es definida positiva si $a + c =$ traza $B > 0$ y $\det B > 0$. $H(\mathbf{h})$ es definida negativa si $a + c < 0$ y $\det B > 0$.

Criterio del determinante para ver si una forma cuadrática es definida positiva

Existen criterios similares para comprobar si una matriz simétrica $n \times n$ B es definida positiva (o negativa), proporcionando así un criterio para hallar los puntos de máximo y de mínimo de funciones de n variables. Consideremos las n submatrices cuadradas a lo largo de la diagonal (véase la Figura 3.3.5). B es definida positiva (es decir, la forma cuadrática asociada con B es definida positiva) si y solo si los determinantes de estas submatrices diagonales son todos ellos mayores que cero. Para B definida negativa, los signos deben ser alternativamente <0 y >0 . No vamos a demostrar aquí el caso general.⁷ Cuando los determinantes de las submatrices diagonales son todos distintos de cero, pero la matriz hessiana no es definida positiva ni negativa, el punto crítico es de **tipo silla**; en este caso, podemos demostrar que el punto no es de máximo ni de mínimo, como en el Ejemplo 2.

Figura 3.3.5 Las submatrices “diagonales” se usan en el criterio para ver si una forma cuadrática es definida positiva; todos los determinantes tienen que ser > 0 .

Criterio general de la derivada segunda (n variables)

Supóngase que $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto crítico para una función de clase C^2 $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, y U es un conjunto abierto que contiene \mathbf{x}_0 ; es decir, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Supóngase que la matriz hessiana $\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)\}$ es definida positiva; entonces \mathbf{x}_0 es un punto de mínimo local estricto para f . Si la matriz hessiana es definida negativa, \mathbf{x}_0 es un punto de máximo local estricto. Si la matriz hessiana no es ni definida positiva ni

⁷Esto se demuestra, por ejemplo, en el libro de K. Hoffman y R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961, pp. 249–251. Aquellos estudiantes con los conocimientos suficientes de álgebra lineal, se darán cuenta de que B es definida positiva cuando todos sus autovalores (que son necesariamente reales, porque B es simétrica) son positivos.

definida negativa, pero su determinante es distinto de cero, entonces es de **tipo silla** (ni un punto de máximo ni de mínimo). Si el determinante de la forma hessiana es cero, se dice que es de **tipo degenerado** y no se puede decir nada acerca de la naturaleza del punto crítico sin realizar un análisis en mayor profundidad. La Figura 3.3.5 ilustra un criterio simple para comprobar si una matriz simétrica es definida positiva. En el caso de dos variables, los criterios para los puntos de máximo y de mínimo se pueden simplificar de forma considerable.

Criterio de la derivada segunda (dos variables)

El Lema 2 y el Teorema 5 implican el siguiente resultado:

Teorema 6 Criterio de la segunda derivada para los puntos de máximo y de mínimo de funciones de dos variables Sea $f(x, y)$ de clase C^2 en un conjunto abierto U de \mathbb{R}^2 . Un punto (x_0, y_0) es un punto de mínimo local (estricto) de f si se cumplen las tres condiciones siguientes:

- (I) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$
- (II) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$
- (III) $D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ en (x_0, y_0)

(D es el **discriminante** de la forma cuadrática hessiana.) Si en (II) tenemos < 0 en lugar de > 0 y la condición de (III) no cambia, entonces tenemos un punto de máximo local (estricto).

Si $D < 0$ (por ejemplo, si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = 0$ o $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0$, pero $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq 0$), entonces (x_0, y_0) es de **tipo silla** (ni un punto de máximo ni de mínimo).

Ejemplo 6

Clasificar los puntos críticos de la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2$.

Solución

Como en el Ejemplo 5, tenemos que $f(0, 0) = 0$, el origen es el único punto crítico y la forma cuadrática hessiana es

$$Hf(\mathbf{0})(\mathbf{h}) = h_1^2 - 2h_1h_2 + 2h_2^2 = (h_1 - h_2)^2 + h_2^2,$$

la cual es claramente definida positiva. Por tanto, f tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$. Alternativamente, podemos aplicar el Teorema 6. En $(0, 0)$, $\partial^2 f / \partial x^2 = 2$, $\partial^2 f / \partial y^2 = 4$ y $\partial^2 f / \partial x \partial y = -2$. Las condiciones de (I), (II) y (III) se cumplen, por lo que f tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$. ▲

Si en el Teorema 6 se tiene $D < 0$, entonces tenemos un punto de silla. De hecho, podemos demostrar que $f(x, y)$ es mayor que $f(x_0, y_0)$ cuando nos alejamos de (x_0, y_0) en una cierta dirección y menor cuando nos alejamos en la dirección orthogonal (véase el Ejercicio 32). La apariencia general es similar a la figura mostrada en la Figura 3.3.3. Para determinar la apariencia de la gráfica cerca de (x_0, y_0) en el caso de $D = 0$ se precisa un análisis más profundo.

Resumamos ahora el procedimiento para tratar con funciones de dos variables: después de localizar todos los puntos críticos y calcular sus correspondientes formas cuadráticas hessianas, vemos que algunas de estas hessianas puede ser definidas positivas, indicando que se trata de un punto de mínimo relativo; otras pueden ser definidas negativas, indicando un punto de máximo relativo; y algunas tomarán valores positivos y negativos, indicando puntos de silla. La forma de la gráfica en un punto de silla donde $D < 0$ es como la mostrada en la Figura 3.3.3. Los puntos críticos en los que $D \neq 0$ se denominan **puntos críticos no degenerados**. Tales puntos son puntos de máximo, de mínimo o de silla. Los restantes puntos críticos, donde $D = 0$, se pueden examinar directamente mediante conjuntos de nivel, secciones o cualquier otro método. Tales puntos críticos se dice que son **degenerados**; los métodos desarrollados en este capítulo no nos proporcionan una idea del comportamiento de una función cerca de tales puntos, por lo que los examinaremos caso por caso.

Ejemplo 7

Localizar los puntos de máximo y de mínimo relativos y los puntos de silla de la función

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1).$$

Solución

En primer lugar tenemos que localizar los puntos críticos de esta función; según el Teorema 3, calculamos

$$\nabla f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \mathbf{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \mathbf{j}.$$

Así, $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ si y solo si $(x, y) = (0, 0)$, de modo que el único punto crítico de f es $(0, 0)$. Ahora tenemos que determinar si este es un punto de máximo, de mínimo o de silla. Las derivadas parciales segundas son

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - (2x)(2x)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - (2y)(2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2},\end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2x(2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0,$$

lo que nos lleva a

$$D = 2 \cdot 2 = 4 > 0.$$

Puesto que $(\partial^2 f / \partial x^2)(0, 0) > 0$, concluimos por el Teorema 6 que $(0, 0)$ es un punto de mínimo local. (¿Se puede demostrar esto solo a partir del hecho de que $\log t$ es una función creciente en $t > 0$?)

Ejemplo 8

La gráfica de la función $g(x, y) = 1/xy$ es una superficie S en \mathbb{R}^3 . Determinar los puntos en S que están más próximos al origen $(0, 0, 0)$. (Véase la Figura 3.3.6.)

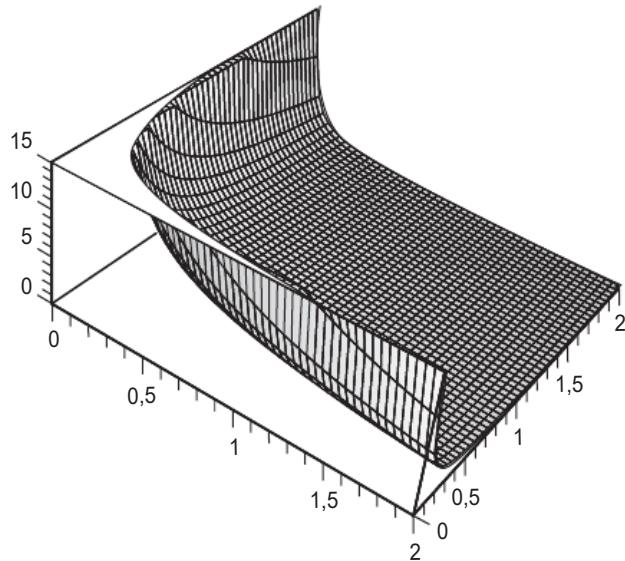


Figura 3.3.6 La superficie $z = 1/xy$ definida en el primer cuadrante del plano xy . (Las figuras en los otros cuadrantes son similares, pero tenga en cuenta que $z < 0$ en el segundo y cuarto cuadrantes.)

Solución

Cada punto en S es de la forma $(x, y, 1/xy)$. La distancia de este punto al origen es

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}}.$$

Es más fácil trabajar con el cuadrado de d , por lo que tomamos $f(x, y) = x^2 + y^2 + (1/x^2y^2)$, que tendrá el mismo punto de mínimo. Esto se deduce del hecho de que $d(x, y)^2 \geq d(x_0, y_0)^2$ si y solo si $d(x, y) \geq d(x_0, y_0)$. Obsérvese que $f(x, y)$ se hace muy grande cuando x e y se hacen cada vez mayores; $f(x, y)$ también se hace muy grande cuando (x, y) se approxima a los ejes x o y donde f no está definida, por lo que f debe alcanzar un mínimo en algún punto crítico. Los puntos críticos están determinados por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - \frac{2}{x^3y^2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y - \frac{2}{y^3x^2} = 0,\end{aligned}$$

es decir, $x^4y^2 - 1 = 0$ y $x^2y^4 - 1 = 0$. A partir de la primera ecuación obtenemos $y^2 = 1/x^4$, y sustituyendo esto en la segunda ecuación, obtenemos

$$\frac{x^2}{x^8} = 1 = \frac{1}{x^6}.$$

Luego, $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$, y por tanto se deduce que f tiene cuatro puntos críticos, a saber, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ y $(-1, -1)$. Obsérvese que f tiene el valor 3 para todos estos puntos, por lo que todos son mínimos. Por tanto, los puntos de la superficie más cercanos al punto $(0, 0, 0)$ son $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$ y $(-1, -1, 1)$, y la distancia mínima es $\sqrt{3}$. ¿Es esto coherente con la gráfica mostrada en la Figura 3.3.6? ▲

Ejemplo 9

Analizar el comportamiento de $z = x^5y + xy^5 + xy$ en sus puntos críticos.

Solución

Las derivadas parciales primeras son

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4y + y^5 + y = y(5x^4 + y^4 + 1)$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x(5y^4 + x^4 + 1).$$

Los términos $5x^4 + y^4 + 1$ y $5y^4 + x^4 + 1$ siempre son mayores o iguales que 1, y por tanto se deduce que el único punto crítico es $(0, 0)$.

Las derivadas parciales segundas son

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20x^3y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 20xy^3$$

y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 5x^4 + 5y^4 + 1.$$

Por tanto, en $(0, 0)$, $D = -1$, y por tanto $(0, 0)$ es un punto de silla no degenerado y la gráfica de z cerca de $(0, 0)$ es similar a la gráfica mostrada en la Figura 3.3.3. ▲

Veamos ahora un ejemplo para una función de tres variables.

Ejemplo 10

Consideremos la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$. Demostrar que $(0, 0, 0)$ y $(-1, 1, 1)$ son puntos críticos. Determinar si son puntos de mínimo local, de máximo local o de silla, o de ninguno de estos tipos.

Solución

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2yz$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2xz$ y $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2xy$, todas las cuales se desvanecen en $(0, 0, 0)$ y $(-1, 1, 1)$. Por tanto, estos son puntos críticos. La forma cuadrática hessiana de f en $(0, 0, 0)$ es

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Las submatrices diagonales son [2] y $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y la propia matriz hessiana, teniendo todas ellas determinantes positivos. Por tanto (Figura 3.3.5), $(0, 0, 0)$ es un punto de mínimo local estricto. Por otro lado, la matriz hessiana de f en $(-1, 1, 1)$ es

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

El determinante de la primera matriz diagonal es 2, el de la segunda matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

es cero y el determinante de la matriz hessiana es -16 . Por tanto, el punto crítico $(-1, 1, 1)$ es de tipo silla (es decir, no es ni un punto de máximo ni un punto de mínimo). \blacktriangle

Máximos y mínimos globales

Vamos a terminar esta sección con una exposición sobre la teoría de máximos y mínimos *absolutos* o *globales* de funciones de varias variables. Lamentablemente, la localización de los máximos y mínimos absolutos para funciones en \mathbb{R}^n es, en general, un problema más difícil que para funciones de una variable.

Definición Supongamos que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida en un conjunto A en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 . Se dice que un punto $\mathbf{x}_0 \in A$ es un **punto de máximo absoluto** (o un punto de **mínimo absoluto**) de f si $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ [o $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$] para todo $\mathbf{x} \in A$.

En el cálculo de una variable, aprendemos—aunque a menudo no lo probamos—que toda función continua en un intervalo cerrado I alcanza

su valor máximo (o mínimo) en algún punto \mathbf{x}_0 de I . Una generalización de este hecho teórico también se cumple en \mathbb{R}^n . Estos teoremas garantizan que el máximo o el mínimo que se está buscando realmente existe; por tanto, la búsqueda no será en vano.

Definición Se dice que un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ está **acotado** si existe un número $M > 0$ tal que $\|\mathbf{x}\| < M$ para todo $\mathbf{x} \in D$. Un conjunto es **cerrado** si contiene todos los puntos de su frontera.

Veamos un ejemplo importante. Obsérvese que los conjuntos de nivel $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) | f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c\}$ de una función continua f son siempre cerrados.

Así, un conjunto está acotado si está estrictamente contenido en alguna bola (grande). La generalización apropiada del teorema de una variable sobre máximos y mínimos es el siguiente, el cual enunciamos sin demostración.

Teorema 7 Teorema de existencia de máximos y mínimos globales Sea D cerrado y acotado en \mathbb{R}^n y sea $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces f alcanza sus valores de máximo y de mínimo absolutos en ciertos puntos \mathbf{x}_0 y \mathbf{x}_1 de D .

Enunciado de forma simple, \mathbf{x}_0 y \mathbf{x}_1 son puntos donde f alcanza sus valores mayor y menor. Como en el cálculo de una variable, estos puntos no tienen por qué ser únicos.

Supongamos que ahora $D = U \cup \partial U$, donde U es abierto y ∂U es su frontera. Si $D \subset \mathbb{R}^2$, suponemos que ∂U es una curva suave a trozos; es decir, D es una región acotada por una familia de curvas suaves—por ejemplo, un cuadrado o los conjuntos mostrados en la Figura 3.3.7.

Si \mathbf{x}_0 y \mathbf{x}_1 están en U , sabemos por el Teorema 4 que son puntos críticos de f . Si están en ∂U y ∂U es una curva suave (es decir, la imagen de una trayectoria suave \mathbf{c} con $\mathbf{c}' \neq 0$), entonces son puntos de máximo y de mínimo de f considerada como una función sobre ∂U . Estas

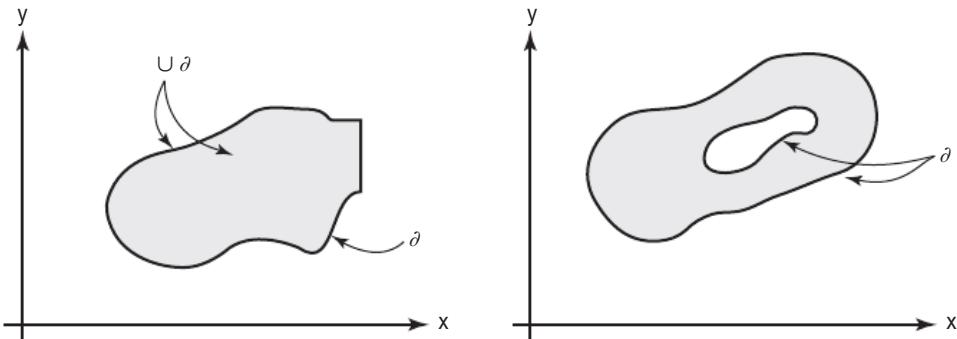


Figura 3.3.7 $D = U \cup \partial U$: dos ejemplos de regiones cuya frontera es una curva suave a trozos.

observaciones proporcionan un método para hallar los valores máximo y mínimo absolutos de f en una región D .

Estrategia para hallar los valores máximo y mínimo absolutos en una región con frontera Sea f una función continua de dos variables definida en una región cerrada y acotada D de \mathbb{R}^2 , que está limitada por una curva cerrada suave. Para hallar el máximo y el mínimo absolutos de f en D :

- (I) Localizar todos los puntos críticos de f en U .
- (II) Hallar todos los puntos críticos de f considerada como una función definida solo en ∂U .
- (III) Calcular el valor de f en todos estos puntos críticos.
- (IV) Comparar todos estos valores y seleccionar el más grande y el más pequeño.

Si D es una región limitada por una familia de curvas suaves (como un cuadrado), entonces se sigue un procedimiento similar, pero incluyendo en el paso (III) los puntos en los que se unen las curvas (en el caso del cuadrado, en las esquinas).

El lector ya debería estar familiarizado con todos estos pasos excepto el (II). Una forma de llevar a cabo este paso en el plano es determinando una parametrización suave de ∂U ; es decir, hallar una trayectoria $\mathbf{c}: I \rightarrow \partial U$, donde I es algún intervalo cuyo rango es ∂U . En segundo lugar, consideramos la función de una variable $t \mapsto f(\mathbf{c}(t))$, donde $t \in I$ y localizamos los puntos de máximo y de mínimo $t_0, t_1 \in I$ (¡no olvide comprobar los puntos extremos!). Entonces $\mathbf{c}(t_0), \mathbf{c}(t_1)$ serán *puntos* de máximo y de mínimo para f como función definida en ∂U . Otro método que permite abordar el paso (II) es el método de los multiplicadores de Lagrange, que presentamos en la siguiente sección.

Ejemplo 11

Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en el disco D definido por $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solución

- (I) Para hallar los puntos críticos hacemos $\partial f / \partial x = \partial f / \partial y = 0$. Así, $2x - 1 = 0$, $2y - 1 = 0$ y, por tanto, $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es el único punto crítico en el disco abierto $U = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.
- (II) La frontera ∂U se puede parametrizar mediante $\mathbf{c}(t) = (\sin t, \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Así,

$$f(\mathbf{c}(t)) = \sin^2 t + \cos^2 t - \sin t - \cos t + 1 = 2 - \sin t - \cos t = g(t).$$

Para hallar el máximo y el mínimo de f en ∂U , basta con localizar el máximo y el mínimo de g . Ahora bien, $g'(t) = 0$ solo cuando $\sin t = \cos t$; es decir, cuando $t = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$. Por tanto, los candidatos para el máximo y el mínimo de f en ∂U son los puntos $\mathbf{c}(\pi/4), \mathbf{c}(5\pi/4)$ y los extremos $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(2\pi)$.

(III) Los valores de f en los puntos críticos son: $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ del paso (I) y del paso (II),

$$f\left(\mathbf{c}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - \sqrt{2},$$

$$f\left(\mathbf{c}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \sqrt{2},$$

y

$$f(\mathbf{c}(0)) = f(\mathbf{c}(2\pi)) = f(0, 1) = 1.$$

(IV) Comparando todos los valores $\frac{1}{2}, 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 1$, está claro que el mínimo absoluto es $\frac{1}{2}$ y el máximo absoluto es $2 + \sqrt{2}$. \blacktriangle

En la Sección 3.4 vamos a considerar una generalización de la estrategia para determinar los puntos de máximo y de mínimo absolutos en regiones U en \mathbb{R}^n .

Ejercicios

En los Ejercicios 1 a 16 hallar los puntos críticos de la función dada y determinar después si se trata de puntos de máximo local, de mínimo local o de silla.

1. $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$

2. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$

3. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$

4. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$

5. $f(x, y) = e^{1+x^2-y^2}$

6. $f(x, y) = x^2 - 3xy + 5x - 2y + 6y^2 + 8$

7. $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$

8. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ [considerar únicamente el punto crítico $(0, 0)$]

9. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ [considerar únicamente los tres puntos críticos $(0, 0), (\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ y $(0, \sqrt{\pi})$]

10. $f(x, y) = y + x \operatorname{sen} y$

11. $f(x, y) = e^x \cos y$

12. $f(x, y) = (x - y)(xy - 1)$

13. $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

14. $f(x, y) = \log(2 + \operatorname{sen} xy)$

15. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$

16. $f(x, y) = (x + y)(xy + 1)$

17. Hallar todos los puntos de extremo local de $f(x, y) = 8y^3 + 12x^2 - 24xy$.

18. Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + kyz$.

(a) Verificar que $(0, 0, 0)$ es un punto crítico para f .

(b) Hallar todos los valores de k tales que f tiene un punto de mínimo local en $(0, 0, 0)$.

19. Determinar y clasificar todos los puntos críticos de $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}y^2 + 6y + 10$.

20. Supongamos que $(4, 2)$ es un punto crítico para la función $f(x, y)$ de clase C^2 . En cada caso, determinar si $(4, 2)$ es un punto de máximo local, de mínimo local o de silla.

- (a) $f_{xx}(4, 2) = 1, f_{xy}(4, 2) = 3, f_{yy} = 5$
 (b) $f_{xx}(4, 2) = 2, f_{yx}(4, 2) = -1, f_{yy} = 4$
 (c) $f_{xx}(4, 2) = -2, f_{xy}(4, 2) = 1, f_{yy} = 3$
- 21.** Hallar los puntos de máximo y mínimo locales para $z = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$. (Véase la Figura 2.1.15.)
- 22.** Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 + kxy$. Supóngase que la gráfica cambia cuando k se incrementa, ¿qué valores de k hacen que la forma de la gráfica cambie cualitativamente?
- 23.** Un examen de la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (y - 3x^2)(y - x^2)$ da una idea de la dificultad de determinar condiciones que garanticen que un punto crítico es un punto de extremo relativo cuando el Teorema 6 falla.⁸ Demostrar que
- El origen es un punto crítico de f .
 - f tiene un punto de mínimo relativo en $(0, 0)$ en cada recta que pasa por $(0, 0)$; es decir, si $g(t) = (at, bt)$, entonces $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un punto de mínimo relativo en 0, para cualquier elección de a y b .
 - El origen no es un punto de mínimo relativo de f .
- 24.** Sea $f(x, y) = Ax^2 + E$, donde A y E son constantes. ¿Cuáles son los puntos críticos de f ? ¿Son puntos de máximo local o de mínimo local?
- 25.** Sea $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$. En este caso, $D = 0$. Indicar si los puntos críticos son puntos de mínimo local, de máximo local o de silla.
- 26.** Sea $f(x, y) = ax^2 + by^2$, donde $a, b \neq 0$.
- Demostrar que $(0, 0)$ es el único punto crítico de f .
 - Determinar la naturaleza de este punto crítico en función de a y b .
- 27.** Supóngase que $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^2 y que \mathbf{x}_0 es un punto crítico de f . Supóngase que $Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + 4h_2h_3$. ¿Tiene f un punto de máximo local, de mínimo local o de silla en \mathbf{x}_0 ?
- 28.** Determinar el punto sobre el plano $2x - y + 2z = 20$ más próximo al origen.
- 29.** Demostrar que una caja rectangular con un volumen dado tiene un área superficial mínima cuando es un cubo.
- 30.** Demostrar que el paralelepípedo rectangular con una determinada área superficial y un volumen máximo es un cubo.
- 31.** Escribir el número 120 como suma de tres números, de modo que la suma de los productos tomados de dos en dos sea máxima.
- 32.** Demostrar que si (x_0, y_0) es un punto crítico de una función cuadrática $f(x, y)$ y $D < 0$, entonces existen puntos (x, y) próximos a (x_0, y_0) en los que $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ y, de forma similar, puntos para los que $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.
- 33.** Sean $f(x, y) = x^6 + x^2 + y^6$, $g(x, y) = -x^6 - x^2 - y^6$, $h(x, y) = x^6 - x^4 + y^6$.
- Demostrar que $(0, 0)$ es un punto crítico degenerado para f, g y h .
 - Demostrar que $(0, 0)$ es un punto de mínimo local de f , un punto máximo local de g y punto de silla de h .
- 34.** Sea $f(x, y) = 5ye^x - e^{5x} - y^5$.
- Demostrar que f tiene un único punto crítico y que dicho punto es un máximo local para f .
 - Demostrar que f no está acotada en el eje y y, por tanto, no tiene ningún máximo global. [Obsérvese que para una función $g(x)$ de una sola variable, un punto crítico único que es un punto de extremo local es necesariamente un extremo global. Este ejemplo muestra que esto no es así para funciones de varias variables.]
- 35.** Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función
- $$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy.$$
- 36.** Sea n un entero mayor que 2 y sea $f(x, y) = ax^n + cy^n$, donde $ac \neq 0$. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de f .
- 37.** Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y$.

⁸Este interesante fenómeno fue apuntado por primera vez por el famoso matemático Giuseppe Peano (1858–1932). Otra “patología” curiosa se proporciona en el Ejercicio 41.

- 38.** Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^4$$

en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$. (No tiene que utilizarse cálculo.)

- 39.** Repetir el Ejercicio 38 para la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

- 40.** Una curva C en el espacio está definida *implícitamente* en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ mediante la ecuación adicional $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$. Hallar el punto o puntos de C más próximos al origen.

- 41.** Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = \sin x + \cos y$ en el rectángulo R definido por $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$.

En los Ejercicios 46 a 50, D denota el disco unidad.

- 46.** Sea u una función de clase C^2 en D “estRICTAMENTE SUBARMÓNICA”; es decir, una función que cumple la siguiente desigualdad: $\nabla^2 u = (\partial^2 u / \partial x^2) + (\partial^2 u / \partial y^2) > 0$. Demostrar que u no puede tener un punto de máximo en $D \setminus \partial D$ (el conjunto de puntos que está en D , pero no en ∂D).

- 47.** Sea u una función armónica en D —es decir, $\nabla^2 u = 0$ on $D \setminus \partial D$ —y continua en D . Demostrar que si u alcanza su valor máximo en $D \setminus \partial D$, también lo alcanza en ∂D . Esto se denomina en ocasiones “principio del máximo débil” para funciones armónicas. [SUGERENCIA: considérese $\nabla^2(u + \varepsilon e^x)$, $\varepsilon > 0$. Se puede utilizar el siguiente hecho (el cual suele demostrarse en textos más avanzados): dada una secuencia $\{\mathbf{p}_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, de puntos en un conjunto cerrado y acotado A en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , existe un punto \mathbf{q} tal que todo entorno de \mathbf{q} contiene muchos miembros de $\{\mathbf{p}_n\}$.]

- 48.** Definir el concepto de función superarmónica estricta u en D imitando a la definición dada en el Ejercicio 46. Demuestre que u no puede tener un mínimo en $D \setminus \partial D$.

- 49.** Sea u armónica en D como en el Ejercicio 47. Demostrar que si u alcanza su valor mínimo en $D \setminus \partial D$, también lo alcanza en ∂D . Esto se deno-

- 42.** Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = xy$ en el rectángulo R definido por $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

- 43.** Sea $f(x, y) = 1 + xy - 2x + y$ y sea D una región triangular en \mathbb{R}^2 con vértices en $(-2, 1)$, $(-2, 5)$ y $(2, 1)$. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de f en D . Proporcionar todos los puntos en los que aparecen estos valores de extremo.

- 44.** Sea $f(x, y) = 1 + xy + x - 2y$ y sea D una región triangular en \mathbb{R}^2 con vértices en $(1, -2)$, $(5, -2)$ y $(1, 2)$. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de f en D . Proporcionar todos los puntos en los que aparecen estos valores de extremo.

- 45.** Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función $f(x, y) = xy + 1/x + 8/y$.

mina en ocasiones “principio del mínimo débil” para funciones armónicas.

- 50.** Sea $\phi: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sea T una solución en D de $\nabla^2 T = 0$, continua en D y $T = \phi$ en ∂D .

- (a) Utilizar los Ejercicios 46 to 49 para demostrar que una solución así, si existe, tiene que ser única.
(b) Supóngase que $T(x, y)$ representa una función de temperatura independiente del tiempo, siendo ϕ la temperatura en la frontera de una placa circular. Proporcionar una interpretación física del principio enunciado en el apartado (a).

- 51.** (a) Sea f una función de clase C^1 en la recta real \mathbb{R} . Supóngase que f tiene exactamente un punto crítico x_0 que es un punto de mínimo local estricto de f . Demostrar que x_0 es también un punto de mínimo absoluto de f ; es decir, $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x .

- (b) El siguiente ejemplo muestra que la conclusión del apartado (a) no se cumple para funciones de más de una variable. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2 \sqrt{e^x + e^{-x^2}}.$$

- (I.) Demostrar que $(0, 0)$ es el único punto crítico de f y que es un punto de mínimo local.
- (II.) Argumentar de manera informal que f no tiene mínimo absoluto.
- 52.** Supóngase que un pentágono está construido mediante un rectángulo y un triángulo isósceles colocado encima (véase la Figura 3.3.8). Si la longitud del perímetro es fija, determinar la máxima área posible.

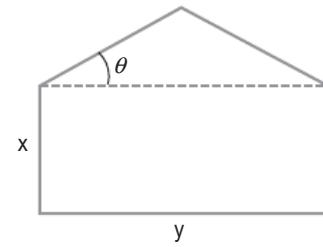


Figura 3.3.8 Maximizar el área para un perímetro dado.

3.4 Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange

A menudo se necesita maximizar o minimizar una función sujeta a ciertas *restricciones* o *condiciones adicionales*. Por ejemplo, podríamos necesitar maximizar $f(x, y)$ sujeta a la condición de que $x^2 + y^2 = 1$; es decir, que (x, y) esté en la circunferencia unidad. De forma más general, podríamos necesitar maximizar o minimizar $f(x, y)$ sujeta a la condición adicional de que (x, y) también satisfaga una ecuación $g(x, y) = c$, donde g es una función y c es una constante [en el ejemplo anterior, $g(x, y) = x^2 + y^2$ y $c = 1$]. El conjunto de dichos (x, y) es una curva de nivel de g .

El propósito de esta sección es desarrollar algunos métodos para abordar este tipo de problemas. En la Figura 3.4.1 mostramos la gráfica de una función $f(x, y)$. En ella, vemos que el máximo de f puede estar en $(0, 0)$. Sin embargo, supongamos que no estamos interesados en ese máximo, sino únicamente en el máximo de $f(x, y)$ cuando (x, y) pertenece a la circunferencia unidad; es decir, cuando $x^2 + y^2 = 1$. El cilindro sobre

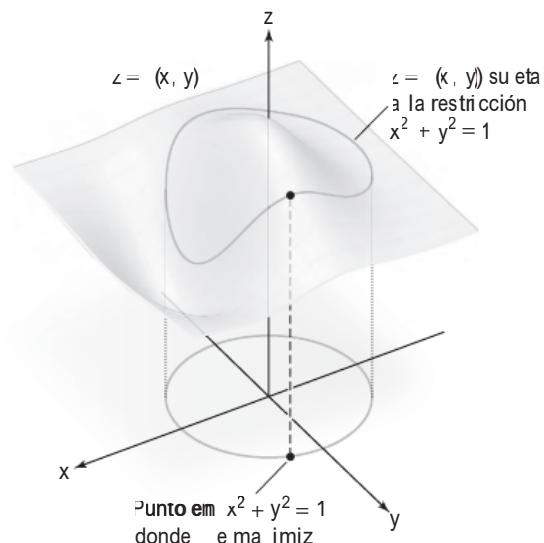


Figura 3.4.1 Significado geométrico de maximizar f sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

$x^2 + y^2 = 1$ interseca la gráfica de $z = f(x, y)$ en una curva que está contenida en esta gráfica. El problema de maximizar o minimizar $f(x, y)$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$ equivale a encontrar el punto en esta curva donde z es máximo o mínimo.

Método de los multiplicadores de Lagrange

En general, sean $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones C^1 dadas y sea S el conjunto de nivel de g con valor c [recuérdese que este es el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con $g(\mathbf{x}) = c$].

Cuando f se restringe a S , de nuevo tenemos el concepto de máximo local o mínimo local de f (extremos locales), y un máximo absoluto (el mayor valor) o un mínimo absoluto (el menor valor) tiene que ser un extremo local. El siguiente método proporciona una condición necesaria para un extremo condicionado:

Teorema 8 Método de los multiplicadores de Lagrange Sean $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones C^1 con valores reales. Sean $\mathbf{x}_0 \in U$ y $g(\mathbf{x}_0) = c$ y sea S el conjunto de nivel de g con valor c [recuérdese que este es el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que satisface $g(\mathbf{x}) = c$]. Suponemos que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$.

Si $f|S$, que denota “ f restringida a S ”, alcanza un máximo o mínimo local de S en \mathbf{x}_0 , entonces existe un número real λ (que puede ser cero) tal que

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0). \quad (1)$$

En general, un punto \mathbf{x}_0 en el que se cumple la Ecuación (1) se dice que es un **punto crítico** de $f|S$.

Demostración No hemos desarrollado suficientes técnicas como para poder proporcionar una demostración completa, pero podemos indicar los puntos esenciales. (Las técnicas adicionales necesarias se exponen en la Sección 3.5.)

En la Sección 2.6, hemos visto que para $n = 3$ el espacio tangente o plano tangente a S en \mathbf{x}_0 es el espacio ortogonal a $\nabla g(\mathbf{x}_0)$. Para n arbitrario, podemos dar la misma definición para el espacio tangente de S en \mathbf{x}_0 . Se puede motivar esta definición considerando tangentes a las trayectorias $\mathbf{c}(t)$ contenidas en S como sigue: si $\mathbf{c}(t)$ es una trayectoria en S y $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}_0$, entonces $\mathbf{c}'(0)$ es un vector tangente a S en \mathbf{x}_0 , pero

$$\frac{d}{dt}g(\mathbf{c}(t)) = \frac{d}{dt}c = 0,$$

y, por otro lado, por la regla de la cadena,

$$\left. \frac{d}{dt}g(\mathbf{c}(t)) \right|_{t=0} = \nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{c}'(0),$$

de modo que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{c}'(0) = 0$; es decir, $\mathbf{c}'(0)$ es ortogonal a $\nabla g(\mathbf{x}_0)$.

Si $f|S$ tiene un máximo en \mathbf{x}_0 , entonces $f(\mathbf{c}(t))$ tiene un máximo en $t = 0$. Como sabemos por el cálculo de una variable, $df(\mathbf{c}(t))/dt|_{t=0} = 0$. Así, por la regla de la cadena,

$$0 = \frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t)) \Big|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{c}'(0).$$

Por tanto, $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular a la tangente a cualquier curva en S y por tanto es perpendicular a todo el espacio tangente a S en \mathbf{x}_0 . Dado que el espacio perpendicular a este espacio tangente es una recta, $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ y $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ son paralelos. Puesto que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$, se deduce que $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es un múltiplo de $\nabla g(\mathbf{x}_0)$, que es la conclusión del teorema. ■

Extraigamos algo de geometría de esta demostración.

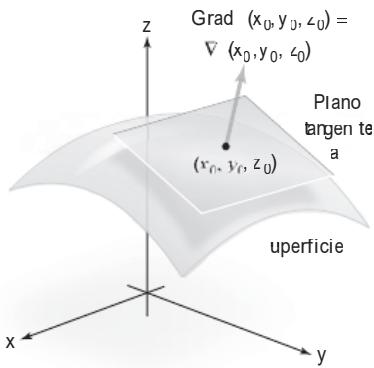


Figura 3.4.2 Geometría de los extremos condicionados.

Teorema 9 Si f , cuando se restringe a una superficie S , tiene un máximo o un mínimo en \mathbf{x}_0 , entonces $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular a S en \mathbf{x}_0 (véase la Figura 3.4.2).

Estos resultados nos dicen que, para determinar los extremos condicionados de f , tenemos que buscar entre aquellos puntos \mathbf{x}_0 que satisfacen las conclusiones de estos dos teoremas. Proporcionaremos varios ejemplos de cómo utilizar cada uno de ellos.

Cuando se usa el método del Teorema 8, debemos buscar un punto \mathbf{x}_0 y una constante λ , llamada **multiplicador de Lagrange**, tal que $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$. Este método es de naturaleza más analítica que el método geométrico del Teorema 9. Sorprendentemente, Euler introdujo estos multiplicadores en 1744, ¡unos 40 años antes que Lagrange!

La Ecuación (1) dice que las derivadas parciales de f son proporcionales a las de g . Determinar los puntos \mathbf{x}_0 en los que esto sucede significa resolver, para x_1, \dots, x_n y λ , las ecuaciones simultáneas

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \\ g(x_1, \dots, x_n) &= c \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Otra forma de considerar estas ecuaciones es la siguiente: pensamos en λ como en una variable adicional y formamos la función auxiliar

$$h(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda[g(x_1, \dots, x_n) - c].$$

El teorema de los multiplicadores de Lagrange dice que para hallar los extremos de $f|S$, debemos examinar los puntos críticos de h .

Estos se obtienen resolviendo las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ &\vdots \\ 0 &= \frac{\partial h}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ 0 &= \frac{\partial h}{\partial \lambda} = g(x_1, \dots, x_n) - c \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

que coinciden con las Ecuaciones (2) anteriores.

Más adelante en esta sección, en el Teorema 10, proporcionaremos los criterios que usan las derivadas parciales segundas para determinar si los puntos son de máximo o de mínimo, análogos a los vistos en la Sección 3.3. Sin embargo, en muchos problemas, es posible distinguir entre máximos y mínimos por observación directa o por medios geométricos. Dado que esto último suele ser más sencillo, vamos a ver en primer lugar algunos ejemplos de este tipo.

Ejemplo 1

Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por $(-1, 0)$ con una inclinación de 45° y sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Hallar los extremos de $f|S$.

Solución

Aquí $S = \{(x, y) \mid y - x - 1 = 0\}$, y por tanto hacemos $g(x, y) = y - x - 1$ y $c = 0$. Tenemos $\nabla g(x, y) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$. Los extremos relativos de $f|S$ deben encontrarse en puntos en los que ∇f es ortogonal a S ; es decir, en rectas con una inclinación de -45° . Pero $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$, que tiene la pendiente deseada solo cuando $x = -y$, o cuando (x, y) está en la recta L que pasa por el origen con una inclinación de -45° . Esto puede ocurrir en el conjunto S solo en el único punto en que L y S se intersecan (véase la Figura 3.4.3). Las curvas de nivel de f indican que este punto, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, es un punto de mínimo relativo de $f|S$ (pero no de f). Obsérvese que en este problema, f tiene un mínimo en S pero no un máximo.

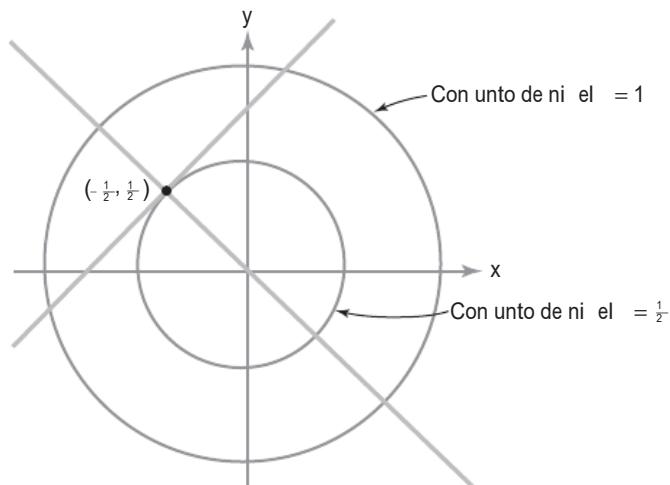


Figura 3.4.3 Geometría asociada con la determinación de los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ restringida a $S = \{(x, y) \mid y - x - 1 = 0\}$. ▲

Ejemplo 2

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ y sea S la circunferencia de radio unidad con centro en el origen. Determinar los extremos de $f|S$.

Solución

El conjunto S es la curva de nivel de g con valor 1, donde $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Como ya hemos estudiado ambas funciones en los ejemplos anteriores, conocemos sus curvas de nivel, las cuales se muestran en la Figura 3.4.4. En dos dimensiones, la condición de que $\nabla f = \lambda \nabla g$ en \mathbf{x}_0 —es decir, que ∇f y ∇g sean paralelos en \mathbf{x}_0 — es lo mismo que pedir que las curvas de nivel sean tangentes en \mathbf{x}_0 (¿por qué?). Por tanto, los puntos de extremo de $f|S$ son $(0, \pm 1)$ y $(\pm 1, 0)$. Evaluando f , encontramos que $(0, \pm 1)$ son puntos de mínimo y $(\pm 1, 0)$ son puntos de máximo.

Resolvemos este problema también analíticamente mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. Evidentemente,

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2x, -2y) \quad \text{y} \quad \nabla g(x, y) = (2x, 2y).$$

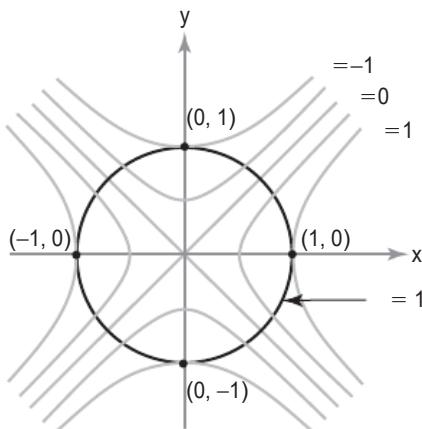


Figura 3.4.4 Geometría asociada con el problema de hallar los puntos de extremo de $x^2 - y^2$ en $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Obsérvese que $\nabla g(x, y) \neq \mathbf{0}$ if $x^2 + y^2 = 1$. Por tanto, de acuerdo con el teorema de los multiplicadores de Lagrange, tenemos que determinar un λ tal que

$$(2x, -2y) = \lambda(2x, 2y) \quad \text{y} \quad (x, y) \in S, \quad \text{es decir, } x^2 + y^2 = 1.$$

Estas condiciones nos llevan a tres ecuaciones que podemos resolver para las tres incógnitas x, y y λ . A partir de $2x = \lambda 2x$, concluimos que bien $x = 0$ o $\lambda = 1$. Si $x = 0$, entonces $y = \pm 1$ y $-2y = \lambda 2y$ implica $\lambda = -1$. Si $\lambda = 1$, entonces $y = 0$ y $x = \pm 1$. Así, obtenemos los puntos $(0, \pm 1)$ y $(\pm 1, 0)$, como antes. Como ya hemos mencionado, este método solo localiza los puntos de extremo potenciales; si son puntos de máximo, de mínimo, o nada debe determinarse por otros medios, como, por ejemplo, argumentos geométricos o el criterio de la derivada segunda que se proporciona más adelante.⁹

⁹En estos ejemplos, $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ en la superficie S , como exige el teorema de los multiplicadores de Lagrange. Si $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ fuera igual a cero para algún \mathbf{x}_0 en S , entonces habría que incluirlo entre los posibles puntos de extremo.

Ejemplo 3

Maximizar la función $f(x, y, z) = x + z$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solución

Por el Teorema 7 sabemos que la función f restringida a la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tiene un máximo (y también un mínimo). Para hallar el máximo utilizamos de nuevo el teorema de los multiplicadores de Lagrange. Buscamos λ y (x, y, z) tales que

$$1 = 2x\lambda, \quad 0 = 2y\lambda \quad y \quad 1 = 2z\lambda,$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

De la primera o de la tercera ecuación, vemos que $\lambda \neq 0$. Así, de la segunda ecuación, obtenemos que $y = 0$. De la primera y la tercera ecuaciones, $x = z$ y por tanto de la cuarta, $x = \pm 1/\sqrt{2} = z$. Por tanto, nuestros puntos son $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ y $(-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$. Comparando los valores de f en estos puntos, podemos ver que en el primer punto se alcanza el máximo de f (sometida a la restricción) y en el segundo el mínimo. ▲

Ejemplo 4

Supóngase que entre todas las cajas rectangulares con una superficie de 10 metros cuadrados hay una con el mayor volumen posible. Determinar sus dimensiones.

Solución

Si x, y y z son las longitudes de los lados, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, respectivamente, y el volumen es $f(x, y, z) = xyz$. La restricción es $2(xy + xz + yz) = 10$; es decir, $xy + xz + yz = 5$. Por tanto, las condiciones del multiplicador de Lagrange son

$$\begin{aligned} yz &= \lambda(y + z) \\ xz &= \lambda(x + z) \\ xy &= \lambda(y + x) \\ xy + xz + yz &= 5. \end{aligned}$$

En primer lugar, $x \neq 0$, ya que $x = 0$ implica $yz = 5$ y $0 = \lambda z$, de modo que $\lambda = 0$ y obtenemos la ecuación $yz = 0$ que contradice lo anterior. De forma similar, $y \neq 0, z \neq 0, x + y \neq 0$. Eliminando λ de las dos primeras ecuaciones se tiene $yz/(y + z) = xz/(x + z)$, lo que da $x = y$; de forma análoga, $y = z$. Sustituyendo estos valores en la última ecuación, obtenemos $3x^2 = 5$, o $x = \sqrt{5}/3$. Así, obtenemos la solución $x = y = z = \sqrt{5}/3$ y $xyz = (5/3)^{3/2}$. Esta forma (cúbica) debe por tanto maximizar el volumen, suponiendo que existe una caja de volumen máximo. ▲

Existencia de soluciones

Debemos resaltar que la solución del Ejemplo 4 *no* demuestra que el cubo sea la caja rectangular de mayor volumen con una superficie dada; prueba que el cubo es el único candidato posible para un máximo. Más adelante esbozaremos una demostración de que en realidad es el máximo.

La distinción entre mostrar que hay *solo una solución posible* al problema y que, de hecho, *existe una solución* es una sutileza que muchos (incluso grandes) matemáticos han pasado por alto.

La reina Dido (aproximadamente, 900 a.C.) se dio cuenta de que entre todas las regiones planas con un perímetro fijo, el disco es la región de área máxima. No es difícil demostrar este hecho bajo el supuesto de que existe una región de área máxima; sin embargo, probar que existe esa región de área máxima es otra cuestión (bastante difícil). No fue hasta la segunda mitad del siglo diecinueve que el matemático alemán Weierstrass proporcionó una demostración completa.

Consideremos una situación no matemática paralela. Pongámonos en el lugar de Lord Peter Wimsey, un famoso detective creado por Dorothy Sayers:

“Sin duda”, dijo Wimsey, “pero si piensas que esta identificación hará de tu vida una dulce y maravillosa canción estás equivocado.... Ya que hemos dedicado una gran cantidad de tiempo y pensamientos al caso, bajo la hipótesis de que era un asesinato, conviene saber que la hipótesis es correcta.”¹⁰

Wimsey ha encontrado el cuerpo de un hombre muerto y después de algún tiempo ha localizado diez sospechosos. Está seguro de que nadie aparte de los sospechosos puede ser el asesino. Al recopilar todas las pruebas y comprobar las coartadas, reduce el número de sospechosos hasta que finalmente solo queda el mayordomo; por tanto, ¡él es el asesino! Pero, un momento, Peter es un hombre cauteloso. Al comprobar todo una vez más, descubre que el hombre muerto se había suicidado; así que no se ha cometido ningún asesinato. Así, podemos concluir que: no basta con encontrar un claro y único sospechoso en un caso criminal en el que se supone que hubo un asesinato; hay que probar que realmente se cometió un asesinato.

Lo mismo vale para nuestro cubo; el hecho de que sea el único posible candidato para un máximo no prueba que sea un máximo. (Para obtener más información, véase *The Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World*, por S. Hildebrandt y A. Tromba, Springer-Verlag, Nueva York/Berlin, 1995.)

El principal obstáculo para demostrar que $f(x, y, z) = xyz$ tiene realmente un máximo está en el hecho de que f es una función continua que está definida en la superficie no acotada $S: xy + xz + yz = 5$, y no en un conjunto acotado, que incluye su frontera, en cuyo caso podríamos aplicar el Teorema 7 de la Sección 3.3. Ya hemos visto problemas de este tipo para funciones de una y dos variables.

La forma de demostrar que $f(x, y, z) = xyz \geq 0$ tiene un máximo en $xy + yz + xz = 5$ es demostrando que si x, y o z tienden a ∞ , entonces $f(x, y, z) \rightarrow 0$. Podemos entonces concluir que el máximo de f en S debe existir apelando al Teorema 7 (el lector debe completar los detalles). Así, supongamos que (x, y, z) está en S y $x \rightarrow \infty$; entonces $y \rightarrow 0$

¹⁰ Dorothy L. Sayers, *Have His Carcase*, Capítulo 31: The Evidence of the Haberdasher's Assistant, Nueva York, Avon Books, 1968, p. 312.

y $z \rightarrow 0$ (¿Por qué?). Multiplicando por z la ecuación que define S , obtenemos la ecuación $xyz + xz^2 + yz^2 = 5z \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. Como $x, y, z \geq 0$, $xyz = f(x, y, z) \rightarrow 0$. De forma similar, $f(x, y, z) \rightarrow 0$ si y o z tienden a ∞ . Por tanto, tiene que existir una caja de volumen máximo.

Algunas directrices de carácter general pueden resultar útiles para los problemas de máximos y mínimos con restricciones. En primer lugar, si la superficie S está acotada (como, por ejemplo, un elipsoide), entonces f debe tener un máximo y un mínimo en S . (Véase el Teorema 7 en la sección anterior.) En particular, si f solo tiene dos puntos que satisfacen las condiciones del teorema de los multiplicadores de Lagrange o el Teorema 9, entonces uno de ellos debe ser un punto de máximo y el otro un punto de mínimo. Evaluando f en cada punto veremos cuál es el máximo y cuál el mínimo. Sin embargo, si existen más de dos de estos puntos, algunos pueden ser puntos de silla. Asimismo, si S no está acotada (por ejemplo, si se trata de un hiperboloide), entonces f no tiene necesariamente máximos o mínimos.

Varias restricciones

Si una superficie S está definida por una serie de restricciones, en concreto,

$$\left. \begin{array}{l} g_1(x_1, \dots, x_n) = c_1 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) = c_2 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) = c_k \end{array} \right\}, \quad (4)$$

entonces el teorema de los multiplicadores de Lagrange se puede generalizar como sigue: *si f tiene un máximo o un mínimo en \mathbf{x}_0 sobre S , deben existir constantes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tales que*¹¹

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{x}_0). \quad (5)$$

Este caso se puede demostrar generalizando el método utilizado para probar el teorema de los multiplicadores de Lagrange. Vamos a ver un ejemplo de cómo se utiliza esta formulación más general.

Ejemplo 5

Hallar los extremos de $f(x, y, z) = x + y + z$ sujeta a estas dos condiciones: $x^2 + y^2 = 2$ y $x + z = 1$.

Solución

Aquí tenemos dos restricciones:

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad \text{y} \quad g_2(x, y, z) = x + z - 1 = 0.$$

¹¹Al igual que con la hipótesis $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ en el teorema de los multiplicadores de Lagrange, aquí tenemos que suponer que los vectores $\nabla g_1(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla g_k(\mathbf{x}_0)$ son linealmente independientes; es decir, ningún $\nabla g_i(\mathbf{x}_0)$ es una combinación lineal de los otros $\nabla g_j(\mathbf{x}_0), j \neq i$.

Por tanto, tenemos que encontrar x, y, z, λ_1 y λ_2 tales que

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z), \\ g_1(x, y, z) &= 0, \quad \text{y} \quad g_2(x, y, z) = 0.\end{aligned}$$

Calculando los gradientes e igualando las componentes, obtenemos

$$\begin{aligned}1 &= \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 \cdot 1, \\ 1 &= \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 \cdot 0, \\ 1 &= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1, \\ x^2 + y^2 &= 2, \quad \text{y} \quad x + z = 1.\end{aligned}$$

Estas son cinco ecuaciones para x, y, z, λ_1 y λ_2 . De la tercera ecuación, $\lambda_2 = 1$, y por tanto $2x\lambda_1 = 0, 2y\lambda_1 = 1$. Dado que la segunda implica $\lambda_1 \neq 0$, tenemos que $x = 0$. Por tanto, $y = \pm\sqrt{2}$ y $z = 1$. Así, los posibles puntos de extremo son $(0, \pm\sqrt{2}, 1)$. Por inspección, vemos que $(0, \sqrt{2}, 1)$ da un máximo relativo y $(0, -\sqrt{2}, 1)$ un mínimo relativo.

La condición $x^2 + y^2 = 2$ implica que x e y tienen que estar acotadas. La condición $x + z = 1$ implica que z también está acotada. Se deduce que el conjunto restringido S es cerrado y está acotado. Por el Teorema 7 se sigue que f tiene un máximo y un mínimo en S que se deben alcanzar por tanto en $(0, \sqrt{2}, 1)$ y $(0, -\sqrt{2}, 1)$, respectivamente. ▲

El método de los multiplicadores de Lagrange nos proporciona otra herramienta para localizar los máximos y mínimos absolutos de funciones diferenciables en regiones acotadas de \mathbb{R}^2 (véase la estrategia para determinar máximos y mínimos absolutos en la Sección 3.3).

Ejemplo 6

Determinar el máximo absoluto de $f(x, y) = xy$ en el disco unidad D , donde D es el conjunto de puntos (x, y) con $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solución

Por el Teorema 7 de la Sección 3.3, sabemos que existe el máximo absoluto. En primer lugar, hallamos todos los puntos críticos de f en U , el conjunto de puntos (x, y) con $x^2 + y^2 < 1$. Dado que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x,$$

$(0, 0)$ es el único punto crítico de f en U . Consideraremos ahora f en la circunferencia unidad, la curva de nivel $g(x, y) = 1$, donde $g(x, y) = x^2 + y^2$. Para localizar el máximo y el mínimo de f en C , escribimos las ecuaciones de los multiplicadores de Lagrange: $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) = \lambda(2x, 2y)$ y $x^2 + y^2 = 1$. Reescribiendo estas ecuaciones componente a componente, tenemos

$$\begin{aligned}y &= 2\lambda x, \\ x &= 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 &= 1.\end{aligned}$$

Luego,

$$y = 4\lambda^2 y,$$

o $\lambda = \pm 1/2$ e $y = \pm x$, lo que significa que $x^2 + x^2 = 2x^2 = 1$ o $x = \pm 1/\sqrt{2}$, $y = \pm 1/\sqrt{2}$. Hemos calculado que, en C , existen cuatro candidatos para los puntos de máximo y de mínimo, concretamente,

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

El valor de f tanto en $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ como en $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ es $1/2$. El valor de f en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ es $-1/2$, y el valor de f en $(0, 0)$ es 0 . Por tanto, el máximo absoluto de f es $1/2$ y el mínimo absoluto es $-1/2$, y ambos se alcanzan en C . En $(0, 0)$, $\partial^2 f / \partial x^2 = 0$, $\partial^2 f / \partial y^2 = 0$ y $\partial^2 f / \partial x \partial y = 1$, por lo que el discriminante es -1 y por tanto $(0, 0)$ es un punto de silla. \blacktriangle

Ejemplo 7

Hallar el máximo y el mínimo absolutos de $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ en la región elíptica D definida por $\frac{1}{2}x^2 + y^2 \leq 1$.

Solución

De nuevo, por el Teorema 7 de la Sección 3.3, el máximo absoluto existe. En primer lugar, localizamos los puntos críticos de f en U , el conjunto de puntos (x, y) con $\frac{1}{2}x^2 + y^2 < 1$. Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y,$$

el único punto crítico es el origen $(0, 0)$.

Ahora determinamos el máximo y el mínimo de f en C , la frontera de U , que es la curva de nivel $g(x, y) = 1$, donde $g(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$. Las ecuaciones de los multiplicadores de Lagrange son

$$\nabla f(x, y) = (x, y) = \lambda \nabla g(x, y) = \lambda(0, 2y)$$

y $(x^2/2) + y^2 = 1$. En otras palabras,

$$\begin{aligned} x &= \lambda x \\ y &= 2\lambda y \\ \frac{x^2}{2} + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Si $x = 0$, entonces $y = \pm 1$ y $\lambda = \frac{1}{2}$. Si $y = 0$, entonces $x = \pm\sqrt{2}$ y $\lambda = 1$. Si $x \neq 0$ e $y \neq 0$, tenemos que $\lambda = 1$ y $1/2$, lo que es imposible. Por tanto, los candidatos a puntos de máximo y de mínimo de f en C son $(0, \pm 1)$, $(\pm\sqrt{2}, 0)$ y para f dentro de D , el candidato es $(0, 0)$. El valor de f en $(0, \pm 1)$ es $1/2$, en $(\pm\sqrt{2}, 0)$ es 1 y en $(0, 0)$ es 0 . Luego el mínimo absoluto de f se alcanza en $(0, 0)$ y es 0 . El máximo absoluto de f en D es por tanto 1 y se alcanza en los puntos $(\pm\sqrt{2}, 0)$. \blacktriangle

Máximos y mínimos globales

El método de los multiplicadores de Lagrange mejora nuestras técnicas para hallar máximos y mínimos globales. En este sentido, resulta de utilidad lo siguiente.

Definición Sea U una región abierta en \mathbb{R}^n con frontera ∂U . Decimos que ∂U es *suave* si ∂U es el conjunto de nivel de una función suave g cuyo gradiente ∇g nunca se anula en ∂U (es decir, $\nabla g \neq \mathbf{0}$). Entonces podemos aplicar la siguiente estrategia.

Estrategia de los multiplicadores de Lagrange para hallar máximos y mínimos en regiones con frontera Sea f una función diferenciable en una región cerrada y acotada $D = U \cup \partial U$, U abierto en \mathbb{R}^n con frontera ∂U suave.

Para determinar el máximo y el mínimo absolutos de f en D , seguiremos estos pasos:

- (I) Localizar todos los puntos críticos de f en U .
- (II) Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para localizar todos los puntos críticos de $f|_{\partial U}$.
- (III) Calcular los valores de f en todos estos puntos críticos.
- (IV) Seleccionar los valores mayor y menor.

Ejemplo 8

Hallar el máximo y el mínimo de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - x + y$ en el conjunto $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Solución

Como en el ejemplo anterior, sabemos que existen máximo y mínimo absolutos. Ahora $D = U \cup \partial U$, donde

$$U = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

y

$$\partial U = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

$$\nabla f(x, y, z) = (2x - 1, 2y + 1, 2z).$$

Por tanto, $\nabla f = 0$ en $(1/2, -1/2, 0)$ que está en U , el interior de D .

Sea $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Entonces ∂U es el conjunto de nivel $g(x, y, z) = 1$. Por el método de los multiplicadores de Lagrange, el máximo y el mínimo se deben alcanzar en un punto crítico de $f|_{\partial U}$; es decir, en un punto \mathbf{x}_0 donde $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$ para algún escalar λ .

Luego,

$$(2x - 1, 2y + 1, 2z) = \lambda(2x, 2y, 2z)$$

es decir,

$$(I) \quad 2x - 1 = 2\lambda x$$

$$(II) \quad 2y + 1 = 2\lambda y$$

$$(III) \quad 2z = 2\lambda z$$

Si $\lambda = 1$, entonces tendríamos $2x - 1 = 2x$, o $-1 = 0$, lo que es imposible. Podemos suponer que $\lambda \neq 0$ ya que si $\lambda = 0$, solo obtenemos un punto interior como antes. Por tanto, (III) implica que $z = 0$ y

$$(IV) \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Resolviendo (I) y (II) para x e y obtenemos

$$(V) \quad x = 1/2(1 - \lambda)$$

$$(VI) \quad y = -1/2(1 - \lambda)$$

Aplicando (IV) podemos resolver para λ , concretamente $\lambda = 1 \pm (1/\sqrt{2})$. Así, a partir de (V) y (VI) tenemos que $x = \pm(1/\sqrt{2})$ e $y = \pm(1/\sqrt{2})$; es decir, tenemos cuatro puntos críticos en ∂U . Evaluando f en cada uno de estos puntos, vemos que el valor máximo para f en ∂U es $1 + 2/\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$ y el valor mínimo es $1 - \sqrt{2}$. El valor de f en $(1/2, -1/2)$ es $-1/2$. Comparando estos valores, observamos que $-1/2 < 1 - \sqrt{2}$, por lo que el mínimo absoluto es $-1/2$, que se alcanza en $(1/2, -1/2)$, y el máximo absoluto es $1 + \sqrt{2}$, que se alcanza en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. ▲

Dos aplicaciones adicionales

Ahora vamos a ver dos aplicaciones adicionales (a la geometría y la economía) de las técnicas matemáticas desarrolladas en esta sección. Comenzamos con un ejemplo geométrico.

Ejemplo 9

Se considera una curva definida por la ecuación

$$\phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1 = 0.$$

Hallar la máxima y la mínima distancia de la curva al origen. Estas son las longitudes de los *semiejes mayor* y *menor* de esta cuádrica.

Solución

El problema es equivalente a hallar los valores extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeta a la condición restrictiva $\phi(x, y) = 0$. Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$2x + \lambda(2Ax + 2By) = 0 \tag{6}$$

$$2y + \lambda(2Bx + 2Cy) = 0 \tag{7}$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1. \tag{8}$$

Sumando x veces la Ecuación (6) a y veces la Ecuación (7), obtenemos

$$2(x^2 + y^2) + 2\lambda(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) = 0.$$

De la Ecuación (8), se deduce que $x^2 + y^2 + \lambda = 0$. Sea $t = -1/\lambda = 1/(x^2 + y^2)$ [el caso de $\lambda = 0$ es imposible, porque $(0, 0)$ no está sobre la curva $\phi(x, y) = 0$]. Así, las ecuaciones (6) y (7) se pueden escribir como sigue:

$$\begin{aligned} 2(A-t)x + 2By &= 0 \\ 2Bx + 2(C-t)y &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Si estas dos ecuaciones tienen una solución no trivial [recuérdese que $(x, y) = (0, 0)$ no está sobre la curva y , por tanto, no es una solución], se sigue de un teorema de álgebra lineal que su determinante se anula:¹²

$$\begin{vmatrix} A-t & B \\ B & C-t \end{vmatrix} = 0.$$

Dado que esta ecuación es cuadrática en t , tiene dos soluciones, que denominaremos t_1 y t_2 . Como $-\lambda = x^2 + y^2$, tenemos $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{-\lambda}$. Sabemos que $\sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia desde el punto (x, y) al origen. Por tanto, si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) denotan las soluciones no triviales de la Ecuación (9) correspondientes a t_1 y t_2 , y si t_1 y t_2 son positivas, obtenemos $\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 1/\sqrt{t_2}$ y $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 1/\sqrt{t_1}$. En consecuencia, si $t_1 > t_2$, las longitudes de los semiejes mayor y menor son $1/\sqrt{t_1}$ y $1/\sqrt{t_2}$, respectivamente. Si la curva es una elipse, tanto t_1 como t_2 son, de hecho, reales y positivas. ¿Qué sucede con una hipérbola o una parábola? ▲

Por último, vamos a ver una aplicación a la economía.

Ejemplo 10

Solución

Supongamos que la producción de una fábrica es una cantidad Q de un determinado producto, donde Q es una función $f(K, L)$, siendo K el capital invertido en equipos (o inversión) y L es la mano de obra utilizada. Si el precio de la mano de obra es p , el precio de los equipos es q y la fábrica no puede gastar más de B euros, ¿cómo podemos determinar el capital y la mano de obra que maximizan la producción Q ?

Es de esperar que si el capital o la mano de obra aumentan, entonces la producción Q también debería aumentar; es decir,

$$\frac{\partial Q}{\partial K} \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial L} \geq 0.$$

También es de esperar que a medida que se incremente la mano de obra a una inversión en equipos dada, la producción adicional obtenida será menor; es decir,

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0.$$

De manera análoga,

¹²La matriz de coeficientes de las ecuaciones no puede tener inversa, porque esto implicaría que la solución es cero. Recuérdese que una matriz que no tiene inversa tiene determinante cero.

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0.$$

Con estas hipótesis para Q , es razonable esperar que las curvas de nivel de la producción (denominadas **isocuantas**) $Q(K, L) = c$ tengan un aspecto similar a las curvas de la Figura 3.4.5, con $c_1 < c_2 < c_3$.

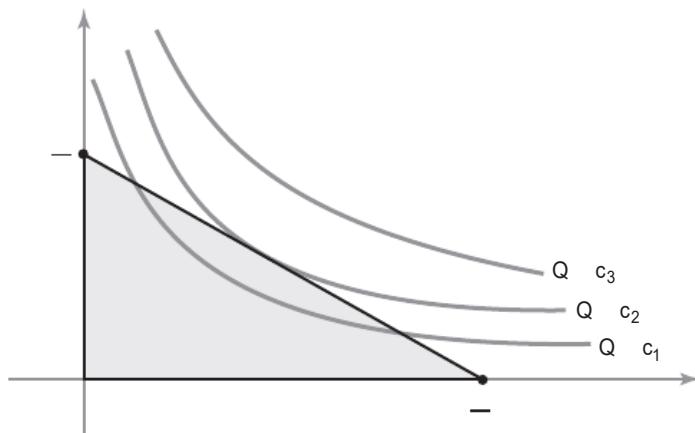


Figura 3.4.5 ¿Cuál es el valor mayor de Q en el triángulo sombreado?

Interpretamos la convexidad de las isocuantas como sigue: según nos movemos hacia la derecha a lo largo de una cierta isocuanta, se necesita cada vez más inversión para sustituir una unidad de mano de obra y seguir obteniendo la misma producción. La restricción del presupuesto B significa que hay que permanecer en el interior del triángulo acotado por los ejes y la recta $pL + qK = B$. Geométricamente, se ve que produciremos lo máximo posible gastando el dinero de tal forma que seleccionemos la isocuanta que justo toca, pero no cruza, la línea del presupuesto.

Dado que el punto de máximo está en la frontera de nuestro dominio, aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar el máximo. Para maximizar $Q = f(K, L)$ sujeta a la restricción $pL + qK = B$, buscamos los puntos críticos de la función auxiliar,

$$h(K, L, \lambda) = f(K, L) - \lambda(pL + qK - B).$$

Así, queremos que

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \lambda q, \quad \frac{\partial Q}{\partial L} = \lambda p \quad \text{y} \quad pL + qK = B.$$

Estas son las condiciones que tenemos que satisfacer para maximizar la producción (en el Ejercicio 36 se pide resolver un caso concreto). ▲

En el ejemplo anterior, λ representa algo interesante. Sea $k = qK$ y $l = pL$, de modo que k es el valor en euros de la inversión y l es el valor en euros de la mano de obra. Entonces, las dos primeras ecuaciones se pueden escribir como sigue

$$\frac{\partial Q}{\partial k} = \frac{1}{q} \frac{\partial Q}{\partial K} = \lambda = \frac{1}{p} \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial Q}{\partial l}.$$

Luego en el punto de producción óptima, el cambio marginal en la producción por cada euro de inversión adicional en equipos es igual al cambio marginal de producción por cada euro adicional de mano de obra, y λ es este valor común. En el punto óptimo, el intercambio de un euro de inversión en equipos por un euro de inversión en mano de obra no varía la producción. Lejos del punto óptimo las producciones marginales son diferentes y uno u otro cambio incrementará la producción.

Criterio de la derivada segunda para extremos condicionados

En la Sección 3.3 hemos desarrollado un criterio de la derivada segunda para determinar los extremos de funciones de varias variables examinando el término de segundo grado de la serie de Taylor de f . Si la matriz hessiana de las derivadas parciales segundas es definida positiva o definida negativa en un punto crítico de f , este punto es un punto de mínimo o de máximo relativo, respectivamente.

Naturalmente surge la pregunta de si hay un criterio de la derivada segunda para problemas de máximos y mínimos *sometidos a restricciones*. La respuesta es afirmativa y el criterio implica a una matriz llamada *hessiana orlada*. En primer lugar vamos a exponer el criterio y cómo se aplica al caso de una función $f(x, y)$ de dos variables sujeta a la restricción $g(x, y) = c$.

Teorema 10 Sean $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones suaves (al menos C^2). Sean $\mathbf{v}_0 \in U$, $g(\mathbf{v}_0) = c$ y S la curva de nivel para g con valor c . Supóngase que $\nabla g(\mathbf{v}_0) \neq \mathbf{0}$ y que existe un número real λ tal que $\nabla f(\mathbf{v}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{v}_0)$. Formamos la función auxiliar $h = f - \lambda g$ y el determinante de la matriz **hessiana orlada**

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix} \quad \text{evaluada en } \mathbf{v}_0.$$

- (I) Si $|\bar{H}| > 0$, entonces \mathbf{v}_0 es un punto de máximo local de $f|S$.
- (II) Si $|\bar{H}| < 0$, entonces \mathbf{v}_0 es un punto de mínimo local de $f|S$.
- (III) Si $|\bar{H}| = 0$, el criterio no es concluyente y \mathbf{v}_0 puede ser un punto de mínimo, de máximo, o ninguno de ellos.

Ejemplo 11

Hallar los extremos de $f(x, y) = (x - y)^n$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$, donde $n \geq 1$.

Solución

Igualamos a cero las derivadas primeras de la función auxiliar h definida por $h(x, y, \lambda) = (x - y)^n - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$:

$$\begin{aligned} n(x - y)^{n-1} - 2\lambda x &= 0 \\ -n(x - y)^{n-1} - 2\lambda y &= 0 \\ -(x^2 + y^2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones vemos que $\lambda(x + y) = 0$. Si $\lambda = 0$, entonces $x = y = \pm\sqrt{2}/2$. Si $\lambda \neq 0$, entonces $x = -y$. En la Figura 3.4.6 se representan los cuatro puntos críticos y los valores correspondientes de $f(x, y)$ se enumeran a continuación:

- | | | | |
|-----------------------|-------------------|---|---------------------------|
| (A) $x = \sqrt{2}/2$ | $y = \sqrt{2}/2$ | $\lambda = 0$ | $f(x, y) = 0$ |
| (B) $x = \sqrt{2}/2$ | $y = -\sqrt{2}/2$ | $\lambda = n(\sqrt{2})^{n-2}$ | $f(x, y) = (\sqrt{2})^n$ |
| (C) $x = -\sqrt{2}/2$ | $y = -\sqrt{2}/2$ | $\lambda = 0$ | $f(x, y) = 0$ |
| (D) $x = -\sqrt{2}/2$ | $y = \sqrt{2}/2$ | $\lambda = (-1)^{n-2}n(\sqrt{2})^{n-2}$ | $f(x, y) = (-\sqrt{2})^n$ |

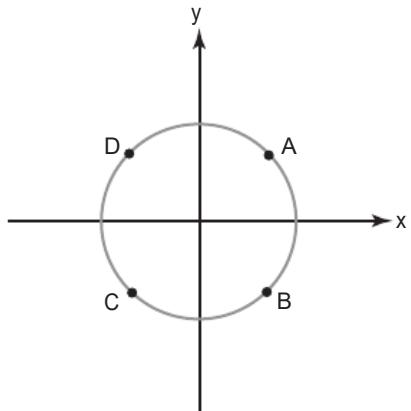


Figura 3.4.6 Los cuatro puntos críticos del Ejemplo 11.

Por inspección vemos que si n es par, entonces A y C son puntos de mínimo y B y D son puntos de máximo. Si n es impar, entonces B es punto de máximo, D es punto de mínimo y A y C no son ni una cosa ni la otra. Vamos a comprobar si el Teorema 10 es coherente con estas observaciones.

El determinante de la matriz hessiana orlada es

$$\begin{aligned} |\bar{H}| &= \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y \\ -2x & n(n-1)(x-y)^{n-2} - 2\lambda & -n(n-1)(x-y)^{n-2} \\ -2y & -n(n-1)(x-y)^{n-2} & n(n-1)(x-y)^{n-2} - 2\lambda \end{vmatrix} \\ &= -4n(n-1)(x-y)^{n-2}(x+y)^2 + 8\lambda(x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Si $n = 1$ o si $n \geq 3$, $|\bar{H}| = 0$ en A, B, C y D. Si $n = 2$, entonces $|\bar{H}| = 0$ en B y D, y -16 en A y C. Así, el criterio de la derivada segunda reconoce los puntos de mínimo en A y C, pero no concluye la existencia de puntos de máximo en B y D para $n = 2$. Tampoco es concluyente para los demás valores de n . ▲

Como en el caso sin restricciones, también existe un criterio de la derivada segunda para funciones de más de dos variables. Si buscamos los extremos de $f(x_1, \dots, x_n)$ sujeta a una única restricción $g(x_1, \dots, x_n) = c$, primero formamos la matriz hessiana orlada para la función auxiliar $h(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda(g(x_1, \dots, x_n) - c)$ como sigue:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x_1} & -\frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & -\frac{\partial g}{\partial x_n} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_n} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

En segundo lugar, examinamos los determinantes de las submatrices diagonales de orden ≥ 3 en los puntos críticos de h . Si todos son negativos, es decir, si

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x_1} & -\frac{\partial g}{\partial x_2} & -\frac{\partial g}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x_1} & -\frac{\partial g}{\partial x_2} & -\frac{\partial g}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} < 0, \dots,$$

entonces estamos en un punto de mínimo local de $f|S$. Si comienzan con un subdeterminante positivo 3×3 y alternan los signos (es decir, $>0, <0, >0, <0, \dots$), entonces estamos en un punto de máximo local. Si todos son distintos de cero y no encajan en ninguno de estos patrones, entonces el punto no es ni un máximo ni un mínimo (se dice que es un punto de tipo silla).¹³

¹³Para ver un estudio detallado, véase C. Caratheodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, Holden-Day, San Francisco, 1965; Y. Murata, *Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems*, Academic Press, Nueva York, 1977, pp. 263–271; o D. Spring, *Am. Math. Mon.* 92 (1985): 631–643.

Ejemplo 12

Estudiar los extremos locales de $f(x, y, z) = xyz$ en la superficie de la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ utilizando el criterio de la derivada segunda.

Solución

Igualando a cero las derivadas parciales de la función auxiliar $h(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ se obtiene

$$\begin{aligned}yz &= 2\lambda x \\xz &= 2\lambda y \\xy &= 2\lambda z \\x^2 + y^2 + z^2 &= 1.\end{aligned}$$

Por tanto, $3xyz = 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 2\lambda$. Si $\lambda = 0$, las soluciones son $(x, y, z, \lambda) = (\pm 1, 0, 0, 0), (0, \pm 1, 0, 0)$ y $(0, 0, \pm 1, 0)$. Si $\lambda \neq 0$, entonces tenemos $2\lambda = 3xyz = 6\lambda z^2$ y, por tanto, $z^2 = \frac{1}{3}$. De manera análoga, $x^2 = y^2 = \frac{1}{3}$. Por tanto, las soluciones están dadas por $\lambda = \frac{3}{2}xyz = \pm\sqrt{3}/6$. Los puntos críticos de h y los valores correspondientes de f se proporcionan en la Tabla 3.1. En ella vemos que los puntos E, F, G y K son puntos de mínimo. Los puntos D, H, I y J son puntos de máximo. Para ver si esto concuerda con el criterio de la segunda derivada, tenemos que considerar dos determinantes. Veamos en primer lugar este determinante:

$$\begin{aligned}|\bar{H}_2| &= \begin{vmatrix} 0 & -\partial g/\partial x & -\partial g/\partial y \\ -\partial g/\partial x & \partial^2 h/\partial x^2 & \partial^2/\partial x \partial y \\ -\partial g/\partial y & \partial^2 h/\partial x \partial y & \partial^2 h/\partial y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y \\ -2x & -2\lambda & z \\ -2y & z & -2\lambda \end{vmatrix} \\ &= 8\lambda x^2 + 8\lambda y^2 + 8xyz = 8\lambda(x^2 + y^2 + 2z^2).\end{aligned}$$

Obsérvese que signo ($|\bar{H}_2|$) = signo λ = signo (xyz), donde el signo de un número es 1 si dicho número es positivo, o es -1 si dicho número es negativo. En segundo lugar, consideramos

$$\begin{aligned}|\bar{H}_3| &= \begin{vmatrix} 0 & -\partial g/\partial x & -\partial g/\partial y & -\partial g/\partial z \\ -\partial g/\partial x & \partial^2 h/\partial x^2 & \partial^2 h/\partial x \partial y & \partial^2 h/\partial x \partial z \\ -\partial g/\partial y & \partial^2 h/\partial x \partial y & \partial^2 h/\partial y^2 & \partial^2 h/\partial y \partial z \\ -\partial g/\partial z & \partial^2 h/\partial x \partial z & \partial^2 h/\partial y \partial z & \partial^2 h/\partial z^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y & -2z \\ -2x & -2\lambda & z & y \\ -2y & z & -2\lambda & x \\ -2z & y & x & -2\lambda \end{vmatrix},\end{aligned}$$

que resulta ser $+4$ en los puntos $\pm A, \pm B$, y $\pm C$ y $-\frac{16}{3}$ en los otros ocho puntos. En E, F, G y K, tenemos $|\bar{H}_2| < 0$ y $|\bar{H}_3| < 0$, de modo que el criterio indica que son puntos de mínimo local. En D, H, I y J tenemos $|\bar{H}_2| > 0$ y $|\bar{H}_3| < 0$, y por tanto el criterio dice que se trata de puntos de máximo local. Por último, el criterio de la segunda derivada muestra que $\pm A, \pm B$ y $\pm C$ son puntos de silla. \blacktriangle

Tabla 3.1Los puntos críticos A, B, ..., J, K de h y los valores correspondientes de f .

	x	y	z	λ	$f(x, y, z)$
±A	±1	0	0	0	0
±B	0	±1	0	0	0
±C	0	0	±1	0	0
D	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
E	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$
F	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$
G	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$
H	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
I	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
J	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
K	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$

Ejercicios

1. Sea $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Hallar los valores máximo y mínimo de f sujeta a la restricción dada.
- $x^2 + y^2 = 1$
 - $x^2 + y^2 \leq 1$

En los Ejercicios 3 a 7, hallar los extremos de f sujeta a las restricciones enunciadas.

- $f(x, y, z) = x - y + z$, sujeta a $x^2 + y^2 + z^2 = 2$
- $f(x, y) = x - y$, sujeta a $x^2 - y^2 = 2$
- $f(x, y) = x$, sujeta a $x^2 + 2y^2 = 3$

En los Ejercicios 8 a 11, hallar los extremos relativos de $f|S$.

- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$, $S = \{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$, $S = \{(x, y) \mid y \geq 2\}$
- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$, $S = \{(x, \cos x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
- $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$, $S = \{(x, y, z) \mid z \geq 2 + x^2 + y^2\}$

12. Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en el

2. Considérense todos los rectángulos con un perímetro fijo p . Utilizando los multiplicadores de Lagrange demostrar que el rectángulo con el área máxima es un cuadrado.

- $f(x, y, z) = x + y + z$, sujeta a $x^2 - y^2 = 1$, $2x + z = 1$
- $f(x, y) = 3x + 2y$, sujeta a $2x^2 + 3y^2 = 3$

disco unidad (véase el Ejemplo 11 de la Sección 3.3).

- Considérese la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ definida en el disco unidad, a saber, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para localizar los puntos de máximo y de mínimo para f en la circunferencia unidad. Usar esto para determinar los valores máximo y mínimo para f en D .
- Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x, y, z) = 2x + y$, sujeta a la restricción $x + y + z = 1$.

- 15.** Hallar los extremos de $f(x, y) = 4x + 2y$, sujeta a la restricción $2x^2 + 3y^2 = 21$.
- 16.** Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar la distancia desde el punto $(2, 0, -1)$ al plano $3x - 2y + 8z + 1 = 0$. Comparar la respuesta con el Ejemplo 12 de la Sección 1.3.
- 17.** Hallar los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z) = xyz$ en la bola unidad $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
- 18.** Sea S la esfera de radio 1 con centro en $(1, 2, 3)$. Hallar la distancia desde S al plano $x + y + z = 0$. (SUGERENCIA: utilizar los multiplicadores de Lagrange para hallar la distancia desde el plano al centro de la esfera.)
- 19.** (a) Hallar los tres números cuyo producto es 27 y cuya suma es mínima.
(b) Hallar los tres números cuya suma es igual a 27 y cuyo producto es máximo.
- 20.** Una caja rectangular sin tapa tiene una superficie de 16 m^2 . Hallar las dimensiones que maximizan su volumen.
- 21.** Diseñar una lata cilíndrica (con tapa) que pueda contener 1 litro ($= 1000 \text{ cm}^3$) de agua, utilizando la mínima cantidad posible de metal.
- 22.** Demostrar que las soluciones de las Ecuaciones (4) y (5) se corresponden de forma biunívoca con los puntos críticos de
- $$\begin{aligned} h(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \\ = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1[g_1(x_1, \dots, x_n) - c_1] \\ - \dots - \lambda_k[g_k(x_1, \dots, x_n) - c_k]. \end{aligned}$$
- 23.** Hallar el máximo y el mínimo absolutos para la función $f(x, y, z) = x + y - z$ en la bola $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
- 24.** Repetir el Ejercicio 23 para $f(x, y, z) = x + yz$.
- 25.** Se quiere decorar el perímetro de un espejo rectangular cuya área es A centímetros cuadrados. Si los adornos que se van a colocar en los bordes horizontales cuestan p céntimos por centímetro y los adornos para los bordes verticales cuestan q céntimos por centímetro, hallar las dimensiones que minimizarán el coste total.
- 26.** Un canal de riego en Arizona tiene los laterales y su parte inferior de cemento, con una sec-

ción transversal trapezoidal de área $A = y(x + y \tan \theta)$ y perímetro húmedo $P = x + 2y/\cos \theta$, donde x = anchura del fondo, y = profundidad del agua y θ = inclinación de los laterales, medida desde la vertical. El mejor diseño para una inclinación fija θ se determina resolviendo $P =$ mínimo sujeto a la condición $A = \text{constante}$. Demostrar que $y^2 = (A \cos \theta)/(2 - \operatorname{sen} \theta)$.

- 27.** Aplicar el criterio de la derivada segunda para estudiar la naturaleza de los puntos críticos de los Ejercicios 3 y 7.
- 28.** Un rayo de luz viaja desde el punto A al punto B atravesando la frontera entre dos medios (véase la Figura 3.4.7). En el primer medio, su velocidad es v_1 y en el segundo es v_2 . Demostrar que el viaje se realiza en el mínimo tiempo posible cuando se cumple la *ley de Snell*:

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

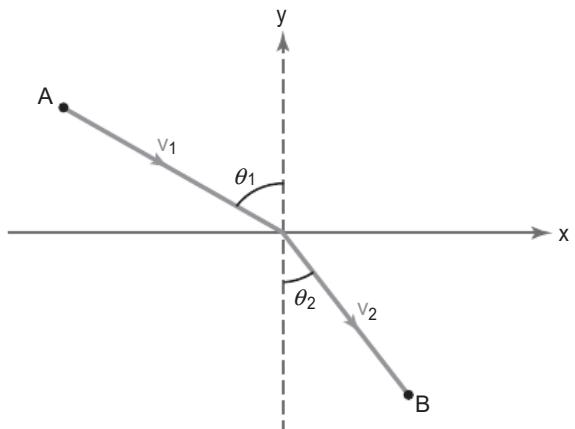


Figura 3.4.7 Ley de la refracción de Snell.

- 29.** Un servicio de mensajería requiere que las dimensiones de una caja rectangular sean tales que la longitud más dos veces la anchura más dos veces la altura no sea mayor que 275 centímetros: $(l + 2w + 2h \leq 275)$. ¿Cuál es el volumen de la caja con el mayor volumen que podrá transportar la empresa?
- 30.** Sea P un punto de una superficie S en \mathbb{R}^3 definida por la ecuación $f(x, y, z) = 1$, donde f es una función de clase C^1 . Supóngase que P es un punto en el que se maximiza la distancia desde el origen a S . Demostrar que el vector que sale del origen y termina en P es perpendicular a S .

- 31.** Sea A una matriz simétrica 3×3 distinta de cero. Por tanto, sus elementos satisfacen $a_{ij} = a_{ji}$. Considérese la función $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Ax}) \cdot \mathbf{x}$.
- Determinar ∇f .
 - Considérese la restricción de f a la superficie de la esfera unidad $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en \mathbb{R}^3 . Por el Teorema 7 sabemos que f tiene que tener un máximo y un mínimo en S . Demostrar que debe existir un $\mathbf{x} \in S$ y una $\lambda \neq 0$ tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. (El vector \mathbf{x} se denomina **autovector**, mientras que el escalar λ se denomina **autovalor**.)
 - ¿Cuáles son el máximo y el mínimo de f en $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$?
- 32.** Supóngase que A en la función f definida en el Ejercicio 31 no es necesariamente simétrica.
- Determinar ∇f .
 - ¿Podemos concluir la existencia de un autovector y autovalores como en el Ejercicio 31?
- 33.** (a) Hallar los puntos críticos de $x + y^2$, sujeta a la restricción $2x^2 + y^2 = 1$.
- (b) Utilizar la matriz hessiana orlada para clasificar los puntos críticos.
- 34.** Responder a la pregunta planteada en la última línea del Ejemplo 9.
- 35.** Intentar determinar los extremos de $xy + yz$ entre los puntos que satisfacen $xz = 1$.
- 36.** La función de producción de una empresa es $Q(x, y) = xy$. El coste de producción es $C(x, y) = 2x + 3y$. Si la empresa puede gastar $C(x, y) = 10$, ¿cuál es la cantidad máxima que puede producir?
- 37.** Hallar el punto sobre la curva $(\cos t, \sin t, \operatorname{sen}(t/2))$ que está más alejado del origen.
- 38.** Una empresa utiliza fibra de algodón y lana para fabricar telas. La cantidad de tela fabricada está dada por $Q(x, y) = xy - x - y + 1$, donde x es el número de kilos de lana, y es la cantidad de kilos de algodón, $x > 1$ e $y > 1$. Si el coste de la lana es p euros por kilo, el coste de algodón es q euros por kilo y la empresa tiene un presupuesto de B euros para materiales, ¿cuál será la proporción de algodón y lana para fabricar la máxima cantidad de tela?
- 39.** Llevar a cabo el análisis del Ejemplo 10 para la función de producción $Q(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$, donde A y α son constantes positivas y $0 < \alpha < 1$. Esta es la denominada **función de producción de Cobb-Douglas** y, en ocasiones, se utiliza como un modelo simple macroeconómico. Q es entonces la producción agregada de la economía para una cantidad dada de capital y mano de obra.

3.5 Teorema de la función implícita [opcional]

En esta sección vamos a enunciar dos versiones del *teorema de la función implícita*, quizás el teorema más importante de todo el análisis matemático. Toda la base teórica del concepto de superficie, así como el método de los multiplicadores de Lagrange dependen de él. Además, es la piedra angular de varios campos de las matemáticas, como la topología diferencial y la geometría.

Teorema de la función implícita de una variable

En el cálculo de una variable se estudia la importancia del proceso de inversión. Por ejemplo, $x = \ln y$ es la función inversa de $y = e^x$ y $x = \operatorname{sen}^{-1} y$ es la inversa de $y = \operatorname{sen} x$. El proceso de inversión también es importante para funciones de varias variables; por ejemplo, el cambio entre coordenadas cartesianas y polares en el plano implica invertir dos funciones de dos variables.

Recordemos del cálculo de una variable que si $y = f(x)$ es una función de clase C^1 y $f'(x_0) \neq 0$, entonces, en un entorno de x_0 podemos despejar localmente x para obtener la función inversa: $x = f^{-1}(y)$. Sabemos que $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$; es decir, $dx/dy = 1/(dy/dx)$. Es razonable entonces pensar que $y = f(x)$ se puede invertir porque $f'(x_0) \neq 0$ indica que la pendiente de $y = f(x)$ es distinta de cero, por lo que la gráfica está subiendo o bajando en las proximidades de x_0 . Así, si reflejamos la gráfica con respecto a la recta $y = x$, sigue siendo una gráfica *cerca de* (x_0, y_0) , donde $y_0 = f(x_0)$. Por ejemplo, en la Figura 3.5.1, podemos invertir $y = f(x)$ en el recuadro sombreado, de modo que $x = f^{-1}(y)$ está definida en este rango.

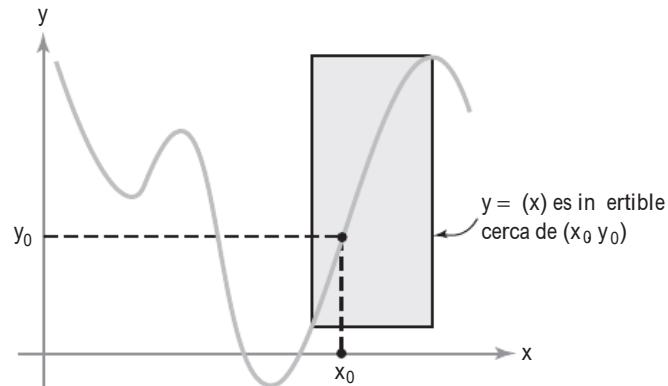


Figura 3.5.1 Si $f'(x_0) \neq 0$, entonces $y = f(x)$ es localmente invertible.

Un resultado particular

A continuación vamos a ver el caso de funciones con valores reales de las variables x_1, \dots, x_n y z .

Teorema 11 Caso particular del teorema de la función implícita Supóngase que $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales continuas. Denotamos los puntos en \mathbb{R}^{n+1} por (\mathbf{x}, z) , donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{R}$ y suponemos que (\mathbf{x}_0, z_0) satisface

$$F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, z_0) \neq 0.$$

Entonces existen una bola U que contiene \mathbf{x}_0 en \mathbb{R}^n y un entorno V de z_0 en \mathbb{R} tales que existe una única función $z = g(\mathbf{x})$ definida para \mathbf{x} en U y z en V que satisface

$$F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0.$$

Además, si \mathbf{x} en U y z en V satisfacen $F(\mathbf{x}, z) = 0$, entonces $z = g(\mathbf{x})$. Por último, $z = g(\mathbf{x})$ es continuamente diferenciable, con la derivada dada por

$$\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, z)} \left. \mathbf{D}_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, z) \right|_{z=g(\mathbf{x})},$$

Teorema 11 Cont.

donde $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F$ denota la derivada (parcial) de F con respecto a la variable \mathbf{x} —es decir, $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F = [\partial F/\partial x_1, \dots, \partial F/\partial x_n]$; en otras palabras,

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial z}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Una vez que sabemos que $z = g(\mathbf{x})$ existe y es diferenciable, se puede comprobar la fórmula (1) derivando implícitamente; para ello, basta observar que la regla de la cadena aplicada a $F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ da

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) + \left[\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \right] [\mathbf{D}g(\mathbf{x})] = 0,$$

que es equivalente a la Fórmula (1).

Ejemplo 1

En este caso particular del teorema de la función implícita, es importante reconocer la necesidad de tomar entornos suficientemente pequeños U y V . Por ejemplo, considérese la ecuación

$$x^2 + z^2 - 1 = 0;$$

es decir, $F(x, z) = x^2 + z^2 - 1$, con $n = 1$. Aquí $(\partial F/\partial z)(x, z) = 2z$, y entonces el caso particular del teorema de la función implícita se aplica a puntos (x_0, z_0) , que satisfagan $x_0^2 + z_0^2 - 1 = 0$ y $z_0 \neq 0$. Por tanto, cerca de dichos puntos, z es una función única de x . Esta función es $z = \sqrt{1-x^2}$ si $z_0 > 0$ y $z = -\sqrt{1-x^2}$ si $z_0 < 0$. Obsérvese que z está

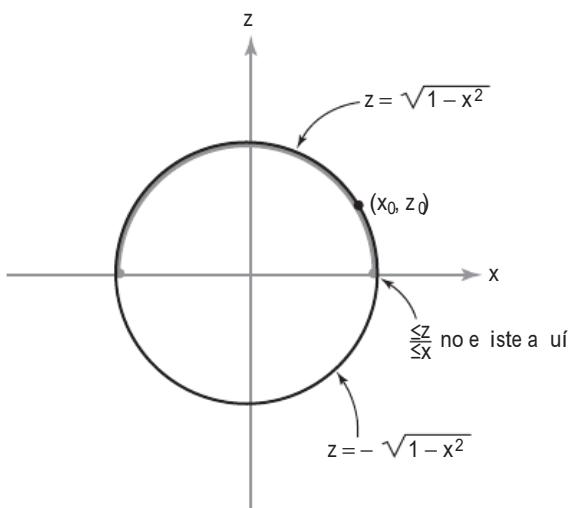


Figura 3.5.2 En el teorema de la función implícita es necesario tomar entornos pequeños.

definida para $|x| < 1$ (U no debe ser demasiado grande) y z es única solo si está cerca de z_0 (V no debe ser demasiado grande). Estos hechos y la no existencia de $\partial z / \partial x$ en $z_0 = 0$ son, por supuesto, claros partiendo del hecho de que $x^2 + z^2 = 1$ define una circunferencia en el plano xz (Figura 3.5.2). ▲

El teorema de la función implícita y las superficies

Vamos a aplicar el Teorema 11 al estudio de las superficies. Estamos interesados en el conjunto de nivel de una función $g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; es decir, en la superficie S formada por los puntos \mathbf{x} que satisfacen $g(\mathbf{x}) = c_0$, donde $c_0 = g(\mathbf{x}_0)$ y \mathbf{x}_0 está dado. Para concretar, tomamos $n = 3$. Por tanto, estamos tratando con la superficie de nivel de una función $g(x, y, z)$ que pasa por un punto dado (x_0, y_0, z_0) . Como en el teorema de los multiplicadores de Lagrange, suponemos que $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Esto significa que al menos una de las derivadas parciales de g es distinta de cero. Para ser específicos, supongamos que $(\partial g / \partial z)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Aplicando el Teorema 11 a la función $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z) - c_0$, sabemos que existe una única función $z = k(x, y)$ que satisface $g(x, y, k(x, y)) = c_0$ para (x, y) próximo a (x_0, y_0) y z próximo a z_0 . Por tanto, cerca de z_0 la superficie S es la gráfica de la función k . Dado que k es continuamente diferenciable, esta superficie tiene un plano tangente en (x_0, y_0, z_0) dado por

$$z = z_0 + \left[\frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) + \left[\frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0). \quad (2)$$

Pero, por la fórmula (1),

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la ecuación del plano tangente se obtiene esta descripción equivalente:

$$0 = (z - z_0) \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + (x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0);$$

es decir,

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \nabla g(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Por tanto, el plano tangente a la superficie de nivel de g es el complemento ortogonal a $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) . Esto concuerda con la caracterización de planos tangentes a conjuntos de nivel que vimos en el Capítulo 2.

Ahora estamos preparados para completar la demostración del teorema de los multiplicadores de Lagrange. Para ello, tenemos que demostrar que todo vector tangente a S en (x_0, y_0, z_0) es tangente a una curva en S . Por el Teorema 11, basta con demostrar esto para una gráfica de la

forma $z = k(x, y)$. No obstante, si $\mathbf{v} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ es tangente a la gráfica [es decir, si satisface la Ecuación (2)], entonces \mathbf{v} es tangente a la trayectoria en S dada por

$$\mathbf{c}(t) = (x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), k(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)))$$

en $t = 0$. Esto se puede comprobar utilizando la regla de la cadena. (Véase la Figura 3.5.3.)

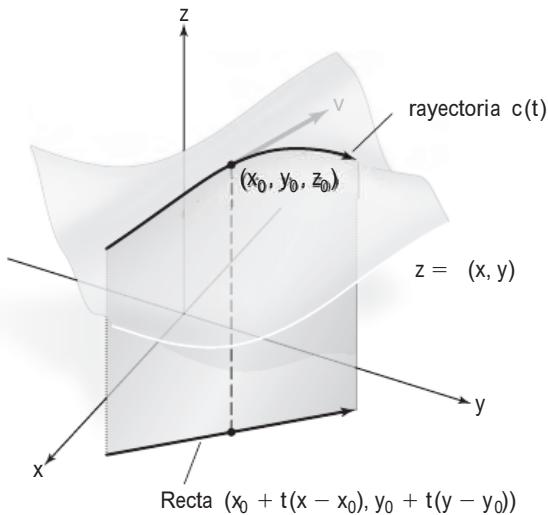


Figura 3.5.3 Construcción de una trayectoria $c(t)$ en la superficie S cuyo vector tangente es \mathbf{v} .

Ejemplo 2

¿Cerca de qué puntos se puede representar la superficie

$$x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3y = 1$$

como la gráfica de una función diferenciable $z = k(x, y)$?

Solución

Tomamos $F(x, y, z) = x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3y - 1$ e intentamos resolver $F(x, y, z) = 0$ para z como una función de (x, y) . Por el Teorema 11, esto se puede hacer cerca de un punto (x_0, y_0, z_0) si $(\partial F / \partial z)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, es decir, si

$$z_0(16x_0 - 9z_0y_0) \neq 0,$$

lo que significa, a su vez,

$$z_0 \neq 0 \quad \text{y} \quad 16x_0 \neq 9z_0y_0.$$

▲

Teorema general de la función implícita

A continuación vamos a enunciar, sin demostración, el *teorema general de la función implícita*.¹⁴ (véase la nota al pie en la página siguiente) En lugar de intentar despejar una variable de una ecuación, vamos a ver cómo despejar m variables z_1, \dots, z_m de m ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 F_1(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) &= 0 \\
 F_2(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) &= 0 \\
 &\vdots && \vdots && \vdots \\
 F_m(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

En el Teorema 11 teníamos la condición $\partial F / \partial z \neq 0$. La condición apropiada para el teorema general de la función implícita es que $\Delta \neq 0$,¹⁵ donde Δ es el determinante de la matriz $m \times m$

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{array} \right]$$

evaluada en el punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$; en un entorno de dicho punto, podemos resolver de manera única \mathbf{z} en función de \mathbf{x} .

Teorema 12 Teorema general de la función implícita Si $\Delta \neq 0$, entonces cerca del punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$, la Ecuación (3) define de manera única funciones (suaves)

$$z_i = k_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, m).$$

Sus derivadas se pueden calcular por derivación implícita.

¹⁴Pueden encontrarse tres demostraciones diferentes del caso general en:

- (a) E. Goursat, *A Course in Mathematical Analysis*, I, Dover, Nueva York, 1959, p. 45. (Esta demostración deduce el teorema general mediante aplicaciones sucesivas del Teorema 11.)
- (b) T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2^a ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.
- (c) J. E. Marsden y M. Hoffman, *Elementary Classical Analysis*, 2^a ed., Freeman, Nueva York, 1993.

De estas fuentes, las dos últimas utilizan ideas más sofisticadas que no se suelen abordar hasta un curso avanzado de análisis. No obstante, los lectores con conocimientos de álgebra lineal podrán comprender fácilmente la primera de ellas.

¹⁵Para los estudiantes que hayan cursado álgebra lineal: la condición $\Delta \neq 0$ tiene una interpretación simple en el caso en que F sea lineal; en concreto, $\Delta \neq 0$ es equivalente a que el rango de F sea igual a m , lo que a su vez es equivalente al hecho de que el espacio de soluciones de $F = 0$ es m -dimensional.

Ejemplo 3

Demostrar que en las proximidades del punto $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$, podemos resolver

$$\begin{aligned} xu + yvu^2 &= 2 \\ xu^3 + y^2v^4 &= 2 \end{aligned}$$

de forma única para obtener u y v como funciones de x e y . Calcular $\partial u / \partial x$ en el punto $(1, 1)$.

Solución

Para comprobar que se puede resolver, formamos las ecuaciones

$$\begin{aligned} F_1(x, y, u, v) &= xu + yvu^2 - 2 \\ F_2(x, y, u, v) &= xu^3 + y^2v^4 - 2 \end{aligned}$$

y el determinante

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{en } (1, 1, 1, 1) \\ &= \begin{vmatrix} x + 2yuv & yu^2 \\ 3u^2x & 4y^2v^3 \end{vmatrix} \quad \text{en } (1, 1, 1, 1) \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9. \end{aligned}$$

Dado que $\Delta \neq 0$, el teorema general de la función implícita nos asegura la resolvabilidad. Para hallar $\partial u / \partial x$, derivamos implícitamente las ecuaciones dadas en x utilizando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} x \frac{\partial u}{\partial x} + u + y \frac{\partial v}{\partial x} u^2 + 2yvu \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ 3xu^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u^3 + 4y^2v^3 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Haciendo $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ tenemos

$$\begin{aligned} 3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -1 \\ 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} &= -1. \end{aligned}$$

Despejamos $\partial u / \partial x$ multiplicando la primera ecuación por 4 y restando se tiene $\partial u / \partial x = -\frac{1}{3}$. ▲

Teorema de la función inversa

Un caso particular del teorema general de la función implícita es el *teorema de la función inversa*. Ahora vamos a intentar resolver las n ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= y_1 \\ &\dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= y_n \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

para x_1, \dots, x_n como funciones de y_1, \dots, y_n ; es decir, estamos intentando invertir las ecuaciones del sistema (4). Esto es análogo a formar las inversas de funciones como $\sin x = y$ y $e^x = y$, con las que el lector debería estar familiarizado por sus conocimientos de cálculo elemental. No obstante, ahora vamos a tratar con funciones de varias variables. La cuestión de la resolubilidad puede responderse mediante el teorema general de la función implícita aplicado a las funciones $y_i - f_i(x_1, \dots, x_n)$ con las incógnitas x_1, \dots, x_n (anteriormente denominadas z_1, \dots, z_n). La condición para poder resolver (despejar) en un entorno de un punto \mathbf{x}_0 es $\Delta \neq 0$, donde Δ es el determinante de la matriz $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ y $f = (f_1, \dots, f_n)$. La cantidad Δ se denota mediante $\partial(f_1, \dots, f_n)/\partial(x_1, \dots, x_n)$, o $\partial(y_1, \dots, y_n)/\partial(x_1, \dots, x_n)$ o $J(f)(\mathbf{x}_0)$ y se denomina **determinante jacobiano** de f . Explícitamente,

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = J(f)(\mathbf{x}_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Obsérvese que en el caso en que f es lineal—por ejemplo, $f(x) = Ax$, donde A es una matriz $n \times n$ —la condición $\Delta \neq 0$ es equivalente al hecho de que el determinante de A sea distinto de cero, $\det A \neq 0$, y de la Sección 1.5 sabemos que A , y por tanto f , tiene una inversa.

El determinante jacobiano desempeñará un papel importante en el tema de integración (véase el Capítulo 5). El siguiente teorema resume esta exposición:

Teorema 13 Teorema de la función inversa Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sean $f_1: U \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_n: U \rightarrow \mathbb{R}$ funciones con derivadas parciales continuas. Consideramos las ecuaciones de (4) cerca de una solución dada $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$. Si $J(f)(\mathbf{x}_0)$ [definido por la Ecuación (5)] es distinto de cero, entonces la Ecuación (4) se puede resolver de forma única como $\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$ para \mathbf{x} cerca de \mathbf{x}_0 y para \mathbf{y} cerca de \mathbf{y}_0 . Además, la función g tiene derivadas parciales continuas.

Ejemplo 4

Se consideran las ecuaciones

$$\frac{x^4 + y^4}{x} = u, \quad \sin x + \cos y = v.$$

¿Cerca de qué puntos (x, y) podemos despejar x, y en términos de u, v ?

Solución

Aquí las funciones son $u = f_1(x, y) = (x^4 + y^4)/x$ y $v = f_2(x, y) = \sin x + \cos y$. Queremos determinar los puntos cerca de los cuales podemos despejar x, y como funciones de u y v . Según el teorema de la

función inversa, en primer lugar tenemos que calcular el determinante jacobiano $\partial(f_1, f_2)/\partial(x, y)$. Como dominio de $f = (f_1, f_2)$ tomamos $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$. Ahora

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3x^4 - y^4}{x^2} & \frac{4y^3}{x} \\ \cos x & -\sin y \end{vmatrix} \\ &= \frac{\sin y}{x^2}(y^4 - 3x^4) - \frac{4y^3}{x} \cos x.\end{aligned}$$

Por tanto, en los puntos donde esto no se anula podemos despejar x, y en función de u y v . En otras palabras, podemos despejar x, y cerca de aquellos x, y para los que $x \neq 0$ y $(\sin y)(y^4 - 3x^4) \neq 4xy^3 \cos x$. Generalmente, tales condiciones no se pueden resolver explícitamente. Por ejemplo, si $x_0 = \pi/2$, $y_0 = \pi/2$, podemos despejar x, y cerca de (x_0, y_0) porque ahí $\partial(f_1, f_2)/\partial(x, y) \neq 0$. ▲

Ejercicios

1. Demostrar que la ecuación $x + y - z + \cos(xyz) = 0$ se puede resolver para $z = g(x, y)$ cerca del origen. Hallar $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$ en $(0, 0)$.
2. Demostrar que $xy + z + 3xz^5 = 4$ es resoluble para z como una función de (x, y) cerca de $(1, 0, 1)$. Calcular $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en $(1, 0)$.
3. (a) Hallar directamente (es decir, sin utilizar el Teorema 11) dónde se puede resolver la ecuación $F(x, y) = y^2 + y + 3x + 1 = 0$ para y en términos de x .
 (b) Comprobar que la respuesta al apartado (a) concuerda con la respuesta esperada proporcionada por el teorema de la función implícita. Calcular dy/dx .
4. Repetir el Ejercicio 3 con $F(x, y) = xy^2 - 2y + x^2 + 2 = 0$.
5. Sea $F(x, y) = 0$ una función de clase C^1 que define una curva en el plano xy que pasa por el punto (x_0, y_0) . Supóngase que $(\partial F/\partial y)(x_0, y_0) \neq 0$. Demostrar que esta curva se puede representar localmente mediante la gráfica de una función $y = g(x)$. Demostrar que (i) la recta ortogonal a $\nabla F(x_0, y_0)$ coincide con (ii) la recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$.
6. Considérese la superficie S dada por $3y^2z^2 - 3x = 0$.
 - (a) Utilizando el teorema de la función implícita, verificar que podemos despejar x como una función de y y z cerca de cualquier punto de S . Escribir explícitamente x como una función de y y z .
 - (b) Demostrar que cerca de $(1, 1, -1)$ podemos despejar bien y o bien z , y proporcionar expresiones explícitas para estas variables en función de las otras dos.
7. Demostrar que en $x^3z^2 - z^3yx = 0$ se puede despejar z como una función de (x, y) cerca de $(1, 1, 1)$, pero no cerca del origen. Calcular $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en $(1, 1)$.
8. Analizar la posibilidad de despejar u, v, w en función de x, y, z cerca de $x = y = z = 0, u = v = 0$ y $w = -2$ en el sistema

$$\begin{aligned}3x + 2y + z^2 + u + v^2 &= 0 \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 &= 0 \\ x + z + w + u^2 + 2 &= 0\end{aligned}$$
9. Analizar la posibilidad de despejar u, v en términos de x, y cerca de $x = y = u = v = 0$

$$\begin{aligned}y + x + uv &= 0 \\ uxy + v &= 0\end{aligned}$$

y comprobarlo directamente.

- 10.** Investigar si se puede o no despejar x, y, z en términos de u, v, w cerca de $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ en el sistema

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= x + xyz \\ v(x, y, z) &= y + xy \\ w(x, y, z) &= z + 2x + 3z^2 \end{aligned}$$

- 11.** Considérese $f(x, y) = ((x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), xy/(x^2 + y^2))$. ¿Tiene esta aplicación de $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ en \mathbb{R}^2 una inversa local cerca de $(x, y) = (0, 1)$?

- 12.** (a) Definimos $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $x(r, \theta) = r \cos \theta$ y definimos $y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $y(r, \theta) = r \sin \theta$. Demostrar que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \Big|_{(r_0, \theta_0)} = r_0.$$

- (b) ¿Cuándo se puede formar una función inversa suave $(r(x, y), \theta(x, y))$? Comprobarlo directamente y con el teorema de la función inversa.
(c) Considérense las siguientes transformaciones para coordenadas esféricas (véase la Sección 1.4):

$$\begin{aligned} x(\rho, \phi, \theta) &= \rho \sin \phi \cos \theta \\ x(\rho, \phi, \theta) &= \rho \sin \phi \sin \theta \\ z(\rho, \phi, \theta) &= \rho \cos \phi. \end{aligned}$$

Demostrar que el determinante jacobiano está dado por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \sin \phi.$$

- (d) ¿Cuándo se puede despejar (ρ, ϕ, θ) en términos de (x, y, z) ?

- 13.** Sea (x_0, y_0, z_0) un punto del lugar geométrico definido por $z^2 + xy - a = 0$, $z^2 + x^2 - y^2 - b = 0$, donde a y b son constantes.

- (a) ¿Bajo qué condiciones se puede representar la parte de este lugar geométrico que está cerca de (x_0, y_0, z_0) en la forma $x = f(z)$, $y = g(z)$?
(b) Calcular $f'(z)$ y $g'(z)$.

- 14.** Considérese la esfera unidad S dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. S interseca el eje x en dos puntos. ¿Qué variables se pueden despejar para estos puntos? ¿Qué ocurre con los puntos de intersección de S con los ejes y y z ?

- 15.** Sea $F(x, y) = x^3 - y^2$ y sea C la curva de nivel dada por $F(x, y) = 0$.

- (a) Sin utilizar el teorema de la función implícita, demostrar que C se puede describir como la gráfica de x como función de y cerca de cualquier punto.
(b) Demostrar que $F_x(0, 0) = 0$. ¿Contradice esto al teorema de la función implícita?

- 16.** Considérese el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^5 v^2 + 2y^3 u &= 3 \\ 3yu - xuv^3 &= 2. \end{aligned}$$

Demostrar que cerca del punto $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$, este sistema define u y v implícitamente como funciones de x e y . Para tales funciones locales u y v , definimos la función local f como $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Determinar $Df(1, 1)$.

- 17.** Considérense las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 &= 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 &= 0. \end{aligned}$$

- (a) Demostrar que estas ecuaciones determinan funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ cerca del punto $(x, y, u, v) = (2, -1, 2, 1)$.
(b) Calcular $\frac{\partial u}{\partial x}$ en $(x, y) = (2, -1)$.

- 18.** ¿Es posible despejar $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ en el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} xy^2 + xzu + yv^2 &= 3 \\ u^3yz + 2xv - u^2v^2 &= 2 \end{aligned}$$

cerca de $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, $(u, v) = (1, 1)$? Calcular $\partial v / \partial y$ en $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

- 19.** El problema de factorizar un polinomio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ en factores lineales es, en cierto sentido, un problema de “función inversa”. Los coeficientes a_i se pueden interpretar como funciones de las n raíces r_j . Deseamos expresar las raíces como funciones de los coeficientes en alguna región. Con $n = 3$, aplicar el teorema de la función inversa a este problema y establecer lo que dice sobre la posibilidad de hacer lo que estamos planteando.

Ejercicios de repaso del Capítulo 3

1. Sea f cualquier función diferenciable. Demostrar que $u = f(y - kx)$ es una solución de la ecuación en derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
2. Demostrar que si u y v tienen derivadas parciales segundas cruzadas continuas, y satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x},\end{aligned}$$

entonces u y v son armónicas.

3. Sea $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 5$. Hallar todos los puntos críticos de f y determinar si son puntos de mínimo local, de máximo local o de silla.
4. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + 5$ en el disco unidad $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
5. Hallar el polinomio de Taylor de segundo orden para $f(x, y) = y^2 e^{-x^2}$ en $(1, 1)$.
6. Sea $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$.
 - (a) Hallar $g(x, y)$, la aproximación de Taylor de segundo orden a f en $(0, 0)$.
 - (b) ¿Cuál es la relación entre g y f ?
 - (c) Demostrar que $R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = 0$ para todo $\mathbf{x}_0, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$. (SUGERENCIA: demostrar que f es igual a su aproximación de Taylor de segundo orden en todos los puntos.)
7. Analizar el comportamiento de las siguientes funciones en los puntos indicados. [La respuesta del apartado (b) puede depender de la constante C .]
 - (a) $z = x^2 - y^2 + 3xy, \quad (x, y) = (0, 0)$
 - (b) $z = x^2 - y^2 + Cxy, \quad (x, y) = (0, 0)$
8. Hallar y clasificar los valores extremos (si existen) de las funciones en \mathbb{R}^2 definidas por las siguientes expresiones:
 - (a) $y^2 - x^3$
 - (b) $(x - 1)^2 + (x - y)^2$
 - (c) $x^2 + xy^2 + y^4$

9. (a) Hallar la distancia mínima desde el origen en \mathbb{R}^3 a la superficie $z = \sqrt{x^2 - 1}$.
- (b) Repetir el apartado (a) para la superficie $z = 6xy + 7$.
10. Determinar los primeros términos del desarrollo de Taylor de $f(x, y) = e^{xy} \cos x$ alrededor de $x = 0, y = 0$.

11. Demostrar que

$$z = \frac{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18}{12(1 + 4y^2)}$$

tiene un máximo local, un mínimo local y un punto de silla. (La gráfica se muestra en la Figura 3.R.1.)

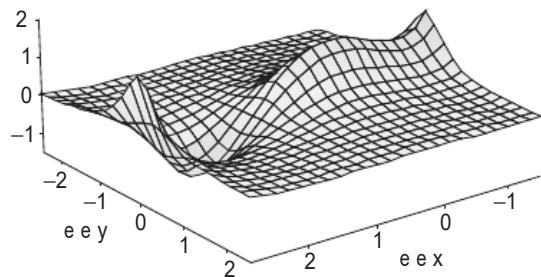


Figura 3.R.1 Gráfica de $z = (3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18)/12(1 + 4y^2)$.

12. Determinar los máximos, mínimos y puntos de silla de la función $z = (2 + \cos \pi x)(\sin \pi y)$, cuya gráfica se muestra en la Figura 3.R.2.

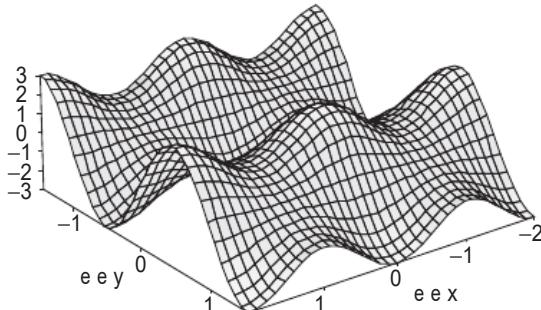


Figura 3.R.2 Gráfica de $z = (2 + \cos \pi x)(\sin \pi y)$.

13. Determinar y describir los puntos críticos de $f(x, y) = y \operatorname{sen}(\pi x)$. (Véase la Figura 3.R.3.)

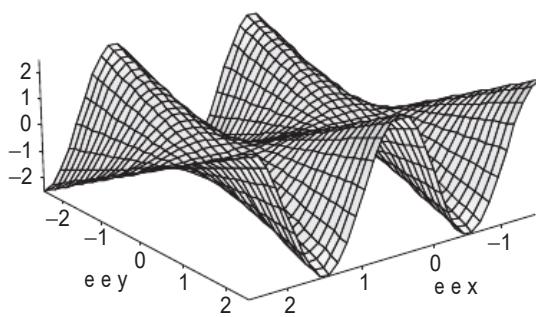


Figura 3.R.3 Gráfica de $z = y \operatorname{sen}(\pi x)$.

- 14.** En la Figura 3.R.4 se muestra una gráfica de la función $z = \operatorname{sen}(\pi x)/(1 + y^2)$. Verificar que es-

En los Ejercicios 15 a 20, hallar los extremos de las funciones dadas sujetas a las restricciones indicadas.

15. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$, sujeta a $x^2 + y^2 = 1$

16. $f(x, y) = xy - y^2$, sujeta a $x^2 + y^2 = 1$

17. $f(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$, sujeta a $x^2 + y^2 = 1$

18. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, sujeta a $x + y = 1$

19. $z = xy$, sujeta a la condición $x + y = 1$

20. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, sujeta a la condición $x + y = \pi/4$

21. Determinar los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ más próximos al origen.

- 22.** Utilizar el teorema de la función implícita para calcular dy/dx para

(a) $x/y = 10$

(b) $x^3 - \operatorname{sen} y + y^4 = 4$

(c) $e^{x+y^2} + y^3 = 0$

- 23.** Hallar la distancia más corta desde el punto $(0, b)$ a la parábola $x^2 - 4y = 0$. Resolver este problema utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange y también sin emplear el método de Lagrange.

- 24.** Determinar todos los valores de k para los que la función $g(x, y, z) = x^2 + kxy + kxz + ky^2 + kz^2$ tiene un mínimo local en $(0, 0, 0)$.

- 25.** Hallar y clasificar todos los puntos críticos de la función $g(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + y^3 + 3x^2 - \frac{3}{2}y^2 + 20$.

ta función tiene máximos y mínimos alternados sobre el eje x y ningún otro punto crítico.

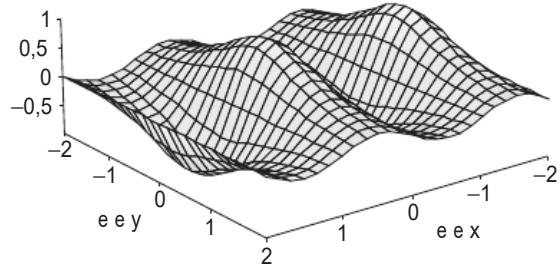


Figura 3.R.4 Gráfica de $z = \operatorname{sen}(\pi x)/(1 + y^2)$.

- 26.** Resolver los siguientes problemas geométricos usando el método de Lagrange.

- (a) Hallar la distancia más corta desde el punto (a_1, a_2, a_3) en \mathbb{R}^3 al plano cuya ecuación está dada por $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$, donde $(b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$.
- (b) Hallar el punto más próximo al origen que está sobre la recta intersección de los dos planos $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ y $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$.
- (c) Demostrar que el volumen del paralelepípedo rectangular más grande que se puede inscribir en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

es $8abc/3\sqrt{3}$.

- 27.** Una partícula se mueve en un potencial $V(x, y) = x^3 - y^2 + x^2 + 3xy$. Determinar si $(0, 0)$ es un punto de equilibrio estable; es decir, si $(0, 0)$ es o no es un punto de mínimo local estricto de V .

- 28.** Estudiar la naturaleza de la función $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ cerca de $(0, 0)$. Demostrar que el punto $(0, 0)$ es un punto crítico degenerado; es decir, $D = 0$. Esta superficie se denomina *silla de mono*.

- 29.** Determinar el máximo de $f(x, y) = xy$ sobre la curva $(x + 1)^2 + y^2 = 1$.

- 30.** Hallar el máximo y el mínimo de $f(x, y) = xy - y + x - 1$ en el conjunto $x^2 + y^2 \leq 2$.

- 31.** La planta International Widget Co., Inc. en Baraboo, Wisconsin, utiliza aluminio, hierro y magnesio para producir dispositivos de alta calidad. La cantidad de dispositivos que puede producir empleando x toneladas de aluminio, y toneladas de hierro y z toneladas de magnesio es $Q(x, y, z) = xyz$. El coste de las materias primas es: el aluminio 6 euros por tonelada; el hierro 4 euros por tonelada y el magnesio 8 euros por tonelada. ¿Cuántas toneladas de aluminio, hierro y magnesio deben utilizarse para producir 1000 dispositivos al menor coste posible? (SUGERENCIA: hallar un extremo, ¿de qué función sujeta a qué restricción?)

- 32.** Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y sea

$$\begin{aligned} u &= f(x) \\ v &= -y + xf(x). \end{aligned}$$

Si $f'(x_0) \neq 0$, demostrar que esta transformación de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 es invertible cerca de (x_0, y_0) y su inversa está dada por

$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(u) \\ y &= -v + uf^{-1}(u). \end{aligned}$$

- 33.** Demostrar que el par de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 &= 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 &= 0 \end{aligned}$$

determinan funciones $u(x, y)$ e $v(x, y)$ definidas para (x, y) cerca de $x = 2$ e $y = -1$, tales que $u(2, -1) = 2$ and $v(2, -1) = 1$. Calcular $\partial u / \partial x$ en $(2, -1)$.

- 34.** Demostrar que existen números positivos p y q , y funciones únicas u y v del intervalo $(-1-p, -1+p)$ en el intervalo $(1-q, 1+q)$ que satisfacen

$$xe^{u(x)} + u(x)e^{v(x)} = 0 = xe^{v(x)} + v(x)e^{u(x)}$$

para todo x en el intervalo $(-1-p, -1+p)$ con $u(-1) = 1 = v(-1)$.

- 35.** Para realizar este ejercicio es necesario estar familiarizado con la técnica de diagonalización de matrices 2×2 . Sean $a(x)$, $b(x)$ y $c(x)$ tres funciones continuas definidas en $U \cup \partial U$, donde U es un conjunto abierto y ∂U denota su conjunto de puntos frontera (véase la Sección 2.2). Utilizamos la notación del Lema 2 de la Sección 3.3 y suponemos que para cada $x \in U \cup \partial U$ la forma cuadrática definida por la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

es definida positiva. Para una función v de clase C^2 en $U \cup \partial U$, definimos un operador diferencial L mediante

$$Lv = a(\partial^2 v / \partial x^2) + 2b(\partial^2 v / \partial x \partial y) + c(\partial^2 v / \partial y^2).$$

Con la condición de función definida positiva, tal operador se dice que es *elíptico*. Una función v se dice que es *estRICTAMENTE SUBARMÓNICA* respecto a L si $Lv > 0$. Demostrar que una función estrictamente subarmónica no puede tener un máximo en U .

- 36.** Se dice que una función v está en el *núcleo* del operador L descrito en el Ejercicio 35 si $Lv = 0$ en $U \cup \partial U$. Argumentando como en el Ejercicio 47 de la Sección 3.3, demostrar que si v alcanza su máximo en U , también lo alcanza en ∂U . Este es el principio del máximo débil para operadores elípticos.

- 37.** Sea L un operador diferencial elíptico como el de los Ejercicios 35 y 36.

- Definir el concepto de función estrictamente superarmónica.
- Demostrar que tales funciones no pueden alcanzar un mínimo en U .
- Si v es como en el Ejercicio 36, demostrar que si v alcanza su mínimo en U , también lo alcanza en ∂U .

- 38.** Considérese la superficie S dada por $x^2z + x \operatorname{sen} y + ye^{z-1} = 1$.

- Hallar la ecuación del plano tangente de S en el punto $(1, 0, 1)$.
- ¿Es posible resolver la ecuación que define S para la variable y como función de las variables x y z cerca de $(1, 0, 1)$? Por qué?
- Hallar $\frac{\partial y}{\partial x}$ en $(1, 0, 1)$.

- 39.** Considérese el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2xu^3v - yv &= 1 \\ y^3v + x^5u^2 &= 2 \end{aligned}$$

Demostrar que cerca del punto $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$, este sistema define u y v implícitamente como funciones de x e y . Para dichas funciones locales u y v , definir la función local f como $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Hallar $Df(1, 1)$.

El siguiente método de los mínimos cuadrados debe aplicarse en los Ejercicios 40 a 45.

En ocasiones, ocurre que la teoría que hay detrás de un experimento indica que los datos experimentales deberían disponerse aproximadamente a lo largo de una recta de la forma $y = mx + b$. Por supuesto, los resultados reales nunca se corresponden exactamente con la teoría. Entonces estamos frente al problema de determinar la recta que *mejor se ajusta* a un determinado conjunto de datos experimentales $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, como se muestra en la Figura 3.R.5. Si suponemos que la recta $y = mx + b$ se ajusta a los datos, cada punto se desviará verticalmente de la recta en una cantidad $d_i = y_i - (mx_i + b)$.

Nos gustaría elegir m y b de tal modo que el efecto total de estas desviaciones sea lo más pequeño posible. Sin embargo, dado que algunos son negativos y otros son positivos, tendríamos muchas cancelaciones y por tanto un ajuste muy malo. Esto nos lleva a sospechar que una mejor medida del error total podría ser la suma de los *cuadrados* de estas desviaciones. Así llegamos al problema de hallar m y b tales que minimicen la función

$$s = f(m, b) = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2,$$

donde x_1, \dots, x_n e y_1, \dots, y_n son los datos dados.

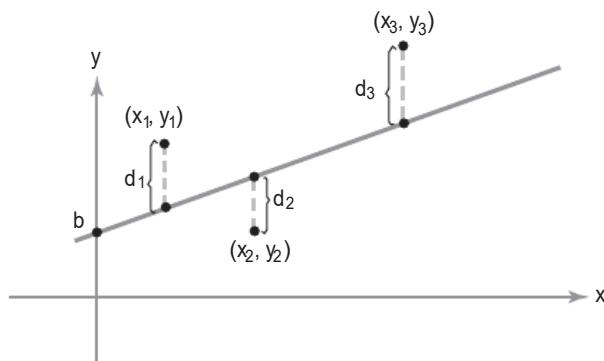


Figura 3.R.5 El método de los mínimos cuadrados trata de hallar la recta que aproxima mejor un conjunto de datos.

- 40.** Para cada conjunto de tres puntos de datos, dibujar los puntos, escribir la función $f(m, b)$ a partir de la ecuación anterior, determinar los valores de m y b que proporcionan el mejor ajuste de acuerdo con el método de los mínimos cuadrados y dibujar la recta.

- (a) $(x_1, y_1) = (1, 1)$
 $(x_2, y_2) = (2, 3)$
 $(x_3, y_3) = (4, 3)$
- (b) $(x_1, y_1) = (0, 0)$
 $(x_2, y_2) = (1, 2)$
 $(x_3, y_3) = (2, 3)$

- 41.** Demostrar que si solo se dan dos puntos de datos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , este método da como resultado la recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) .
- 42.** Demostrar que las ecuaciones para un punto crítico, $\partial s / \partial b = 0$ y $\partial s / \partial m = 0$, son equivalentes a

lentes a

$$m \left(\sum x_i \right) + nb = \left(\sum y_i \right)$$

y

$$m \left(\sum x_i^2 \right) + b \left(\sum x_i \right) = \left(\sum x_i y_i \right),$$

donde todas las sumas van de $i = 1$ a $i = n$.

- 43.** Si $y = mx + b$ es la recta que mejor se ajusta a los puntos de datos $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ según el método de los mínimos cuadrados, demostrar que

$$\sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b) = 0;$$

es decir, las desviaciones positivas y negativas se cancelan (véase el Ejercicio 42).

- 44.** Utilizar el criterio de la derivada segunda para demostrar que el punto crítico de f es un punto de mínimo.
- 45.** Utilizar el método de los mínimos cuadrados para determinar la recta que mejor se ajusta a los puntos $(0, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 4)$ y $(4, 5)$. Dibujar los puntos y la recta.¹⁶
- 46.** La ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

donde c es una constante, se usa en el estudio de la flexión de una viga degalda. Demostrar que

$$u(x, t) = \sin(\lambda\pi x) \cos(\lambda^2\pi^2 ct)$$

es una solución para cualquier elección del parámetro λ .

- 47.** La ecuación de Kortweg–DeVries

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

surge en el modelado de las ondas superficiales

en el agua (denominadas **solitones**). Demostrar que

$$u(x, t) = 12a^2 \operatorname{sech}^2(ax - 4a^3t)$$

es una solución a la ecuación de Kortweg–DeVries.

- 48.** La ecuación para la conducción de calor en dos dimensiones es

$$k(u_{xx} + u_{yy}) = u_t.$$

Suponiendo que $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, hallar las ecuaciones diferenciales ordinarias satisfechas por $X(x), Y(y)$ y $T(t)$.

- 49.** La ecuación para la conducción de calor en dos dimensiones se puede expresar en coordenadas polares como sigue

$$k \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right) = u_t.$$

Suponiendo que $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, hallar las ecuaciones diferenciales ordinarias satisfechas por $R(r), \Theta(\theta)$ y $T(t)$.

¹⁶ El método de los mínimos cuadrados se puede modificar y generalizar de varias formas. La idea básica se puede aplicar a las ecuaciones de curvas más complicadas que las rectas. Por ejemplo, esto se puede hacer para hallar la parábola que mejor se ajusta a un conjunto de datos dado. Estas ideas también formaron parte de los fundamentos del desarrollo de la cibernética por parte de Norbert Wiener. Otra versión del problema de aproximación por mínimos cuadrados es la siguiente: dada una función f definida e integrable en un intervalo $[a, b]$, hallar un polinomio P de grado $\leq n$ tal que el error cuadrático medio

$$\int_a^b |f(x) - P(x)|^2 dx$$

sea lo más pequeño posible.

4

Funciones con valores vectoriales

... quien con vigor mental casi divino, fue el primero en demostrar los movimientos y formas de los planetas, las trayectorias de los cometas y el flujo de las mareas. —Epitafio de Newton

Los Capítulos 2 y 3 se han centrado en las funciones con valores *reales*. Este capítulo se dedica principalmente al estudio de las funciones con valores *vectoriales*. Comenzamos en la primera sección de este capítulo con una continuación de nuestro estudio de las trayectorias, añadiendo aplicaciones de la segunda ley de Newton. Luego, estudiaremos la longitud de arco de las trayectorias. A continuación, definiremos la divergencia y el rotacional de un campo vectorial que, junto con el gradiente, son los operadores básicos del cálculo *diferencial* vectorial. Por último, veremos los aspectos geométricos y propiedades analíticas de la divergencia y el rotacional. El cálculo *integral* asociado se verá más adelante, en el Capítulo 8.

4.1 La aceleración y la segunda ley de Newton

En la Sección 2.4 estudiamos la geometría básica de las trayectorias, aprendiendo a esbozar curvas (las imágenes de las trayectorias) y a calcular rectas tangentes. También aprendimos a interpretar una trayectoria, como su nombre sugiere, en términos del movimiento de una partícula y a ver la derivada de una trayectoria como su vector velocidad. En esta sección continuamos nuestro estudio de las trayectorias, incluyendo algunos aspectos adicionales, en particular el concepto de aceleración y la segunda ley de Newton.

Diferenciación de trayectorias

Recordemos que una trayectoria en \mathbb{R}^n es una aplicación \mathbf{c} de \mathbb{R} o un intervalo de \mathbb{R} con valores en \mathbb{R}^n . Si la trayectoria es diferenciable, su

derivada en cada instante t es una matriz $n \times 1$. Más concretamente, si las componentes del vector \mathbf{c} son $x_1(t), \dots, x_n(t)$, la matriz derivada es

$$\mathbf{c}'(t) = \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ \vdots \\ dx_n/dt \end{bmatrix},$$

que también puede escribirse en forma de vector como

$$(dx_1/dt, \dots, dx_n/dt) \quad \text{o como} \quad (x'_1(t), \dots, x'_n(t)).$$

Recordemos de la Sección 2.4 que $\mathbf{c}'(t)$ es el *vector tangente* a la trayectoria en el punto $\mathbf{c}(t)$. Recordemos también que si \mathbf{c} representa la trayectoria de una partícula en movimiento, entonces su *vector velocidad* es

$$\mathbf{v} = \mathbf{c}'(t),$$

y su *rapidez* es $s = \|\mathbf{v}\|$.

El cálculo práctico de derivadas de trayectorias se simplifica si tenemos en cuenta las siguientes reglas.

Reglas de derivación Sean $\mathbf{b}(t)$ y $\mathbf{c}(t)$ trayectorias diferenciables en \mathbb{R}^3 y sean $p(t)$ y $q(t)$ funciones escalares diferenciables:

$$\text{Regla de la suma: } \frac{d}{dt}[\mathbf{b}(t) + \mathbf{c}(t)] = \mathbf{b}'(t) + \mathbf{c}'(t)$$

$$\text{Regla de la multiplicación por una función escalar: } \frac{d}{dt}[p(t)\mathbf{c}(t)] = p'(t)\mathbf{c}(t) + p(t)\mathbf{c}'(t)$$

$$\text{Regla del producto escalar: } \frac{d}{dt}[\mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{c}(t)] = \mathbf{b}'(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{c}'(t)$$

$$\text{Regla del producto vectorial: } \frac{d}{dt}[\mathbf{b}(t) \times \mathbf{c}(t)] = \mathbf{b}'(t) \times \mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t) \times \mathbf{c}'(t)$$

$$\text{Regla de la cadena: } \frac{d}{dt}[\mathbf{c}(q(t))] = q'(t)\mathbf{c}'(q(t))$$

Estas reglas se deducen inmediatamente aplicando componente a componente las fórmulas usuales de derivación de funciones escalares.

Ejemplo 1

Demostrar que si $\mathbf{c}(t)$ es una función vectorial tal que $\|\mathbf{c}(t)\|$ es constante, entonces $\mathbf{c}'(t)$ es perpendicular a $\mathbf{c}(t)$ para todo t .

Solución

Puesto que $\|\mathbf{c}(t)\|$ es constante, también lo será su cuadrado $\|\mathbf{c}(t)\|^2 = \mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}(t)$. La derivada de dicha constante es cero, de modo que aplicando la regla de la derivada del producto escalar de dos funciones vectoriales,

$$0 = \frac{d}{dt}[\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}(t)] = \mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}'(t) = 2\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}'(t);$$

por tanto, $\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}'(t) = 0$; es decir, $\mathbf{c}'(t)$ es perpendicular a $\mathbf{c}(t)$. ▲

Para una trayectoria que describe un movimiento rectilíneo y uniforme, el vector velocidad es constante. En general, el vector velocidad es una función vectorial $\mathbf{v} = \mathbf{c}'(t)$ que depende de t . Su derivada $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = \mathbf{c}''(t)$ se denomina **aceleración** de la curva. Si la curva es $(x(t), y(t), z(t))$, entonces la aceleración en el instante t viene dada por

$$\mathbf{a}(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k}$$

Ejemplo 2

Una partícula se mueve de manera que su aceleración es igual al vector constante $-\mathbf{k}$. Si en el instante $t = 0$ se encuentra en el punto $(0, 0, 1)$ y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cae la partícula por debajo del plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula (suponiendo $t \geq 0$).

Solución

Sea $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ la trayectoria descrita por la partícula, de modo que el vector velocidad es $\mathbf{c}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$. La aceleración $\mathbf{c}''(t)$ es igual a $-\mathbf{k}$, de manera que $x''(t) = 0$, $y''(t) = 0$ y $z''(t) = -1$. Se sigue que $x'(t)$ y $y'(t)$ son funciones constantes y $z'(t)$ es una función lineal, con pendiente -1 . Puesto que $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, obtenemos $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - t\mathbf{k}$. Integrando de nuevo, y sabiendo que la partícula parte inicialmente del punto $(0, 0, 1)$, obtenemos que $(x(t), y(t), z(t)) = (t, t, 1 - \frac{1}{2}t^2)$. La partícula cruza el plano $z = 0$ cuando $1 - \frac{1}{2}t^2 = 0$; es decir, $t = \sqrt{2}$ (porque $t \geq 0$). En ese instante su posición es $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$. La trayectoria descrita por la partícula es una parábola en el plano $y = x$ (véase la Figura 4.1.1), puesto que en ese plano la ecuación viene descrita por $z = 1 - \frac{1}{2}x^2$.

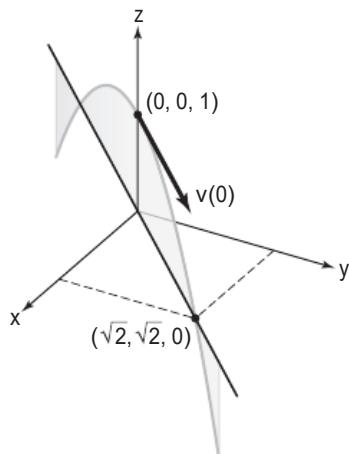


Figura 4.1.1 La trayectoria de la partícula con posición inicial $(0, 0, 1)$, velocidad inicial $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y aceleración constante $-\mathbf{k}$ es una parábola en el plano $y = x$.

La imagen de una trayectoria C^1 no es necesariamente “muy suave”; en efecto, puede mostrar ángulos o bruscos cambios de dirección. Por ejemplo, como puede verse en la Figura 2.4.6, la cicloide $\mathbf{c}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ presenta picos en todos los puntos donde \mathbf{c} toca al eje x (es decir, cuando $1 - \cos t = 0$, lo que sucede cuando $t = 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \dots$). Otro ejemplo es la **hipocicloide de cuatro puntas**, $\mathbf{c}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$, que tiene picos o cúspides en cuatro puntos (véase la Figura 4.1.2). En tales puntos, sin embargo, $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{0}$ y la recta tangente

no está bien definida. Evidentemente, la dirección de la velocidad $\mathbf{c}'(t)$ puede cambiar abruptamente en los puntos en los que la partícula se detiene.

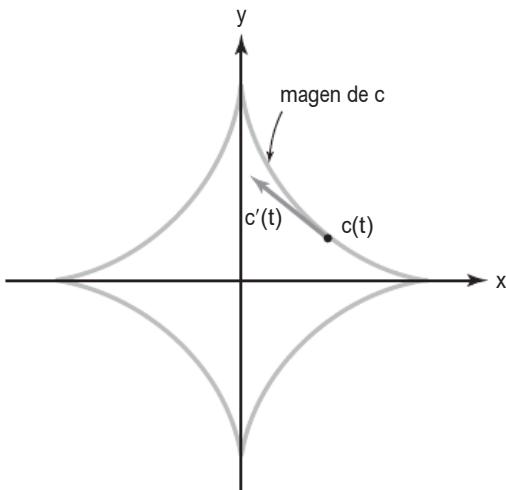


Figura 4.1.2 La imagen de la trayectoria suave $\mathbf{c}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, una hipocicloide, no tiene un “aspecto suave”.

Diremos que una trayectoria diferenciable \mathbf{c} es **regular** en $t = t_0$ si $\mathbf{c}'(t_0) \neq \mathbf{0}$. Si se verifica que $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t , diremos que c es una trayectoria regular. En este caso, la curva imagen tiene un aspecto suave.

Ejemplo 3

Una partícula se mueve sobre una hipocicloide, según las ecuaciones

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad a \leq t \leq b.$$

¿Cuáles son la velocidad y la rapidez de la partícula?

Solución

El vector velocidad de la partícula es

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = -(3 \sin t \cos^2 t)\mathbf{i} + (3 \cos t \sin^2 t)\mathbf{j},$$

y su rapidez es

$$s = \|\mathbf{v}\| = (9 \sin^2 t \cos^4 t + 9 \cos^2 t \sin^4 t)^{1/2} = 3 |\sin t| |\cos t|. \quad \blacktriangle$$

La segunda ley de Newton

Si una partícula de masa m se mueve en \mathbb{R}^3 , la fuerza \mathbf{F} que actúa sobre ella en el punto $\mathbf{c}(t)$ está relacionada con la aceleración $\mathbf{a}(t)$ mediante la **segunda ley de Newton**:¹

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = m\mathbf{a}(t).$$

En particular, en caso de que no actúe ninguna fuerza sobre la partícula, entonces $\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$, de modo que $\mathbf{c}'(t)$ será constante y la partícula seguirá una línea recta.

¹Muchos científicos consideran que $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ es la ecuación más importante en ciencia e ingeniería.

La aceleración y la segunda ley de Newton La *aceleración* de una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ es

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{c}''(t).$$

Si \mathbf{F} es la fuerza actuante y m es la masa de la partícula, entonces

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

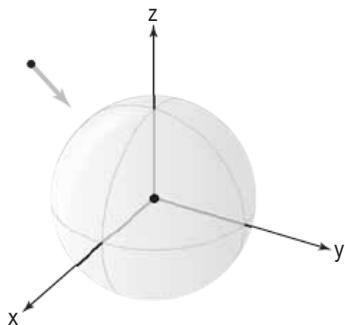


Figura 4.1.3 Una masa M atrae a una masa m con una fuerza \mathbf{F} dada por la ley de Newton de la gravitación: $\mathbf{F} = -GmMr/r^3$.

En el problema de determinar la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ de una partícula bajo la influencia de un campo de fuerzas dado, \mathbf{F} , la ley de Newton se convierte en una ecuación diferencial (es decir, una ecuación que involucra derivadas) para $\mathbf{c}(t)$.

Por ejemplo, el movimiento de un planeta que sigue una trayectoria $\mathbf{r}(t)$ alrededor del Sol (que consideramos situado en el origen de coordenadas de \mathbb{R}^3) obedece a la ley

$$m\mathbf{r}'' = -\frac{GmM}{r^3}\mathbf{r},$$

donde M es la masa del Sol, m la del planeta, $r = \|\mathbf{r}\|$ y G es la constante gravitacional. La relación usada para determinar la fuerza, $\mathbf{F} = -GmMr/r^3$, se denomina **ley de Newton de la gravitación** (véase la Figura 4.1.3). No haremos en este libro un estudio general de tales ecuaciones, sino que nos restringiremos al caso especial de las órbitas circulares.

Órbitas circulares

Consideremos una partícula de masa m que se mueve con rapidez constante s siguiendo una trayectoria circular de radio r_0 . Si suponemos que se mueve en el plano xy , podemos suprimir la tercera componente y escribir su posición como

$$\mathbf{r}(t) = \left(r_0 \cos \frac{st}{r_0}, r_0 \sin \frac{st}{r_0} \right).$$

Nótese que esto es la ecuación de una circunferencia de radio r_0 y que su rapidez está dada por $\|\mathbf{r}'(t)\| = s$. La magnitud s/r_0 se denomina **frecuencia** y se denota mediante ω . Por tanto,

$$\mathbf{r}(t) = (r_0 \cos \omega t, r_0 \sin \omega t).$$

La aceleración viene dada por

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \left(-\frac{s^2}{r_0} \cos \frac{st}{r_0}, -\frac{s^2}{r_0} \sin \frac{st}{r_0} \right) = -\frac{s^2}{r_0^2}\mathbf{r}(t) = -\omega^2\mathbf{r}(t).$$

Es decir, la aceleración tiene la dirección opuesta a $\mathbf{r}(t)$; es decir, apunta hacia el centro de la circunferencia (véase la Figura 4.1.4). Esta aceleración, multiplicada por la masa de la partícula, se denomina **fuerza centrípeta**. Aún cuando la rapidez es constante, la dirección de la ve-

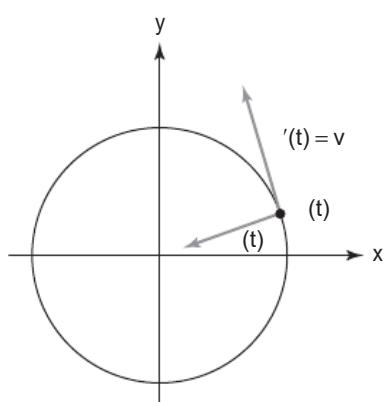


Figura 4.1.4 La posición, velocidad y aceleración de una partícula en movimiento circular.

locidad está cambiando continuamente, por lo que la aceleración (que mide la tasa de variación de la rapidez, de la dirección o de ambas) es distinta de cero.

La ley de Newton nos ayuda a descubrir una relación entre el radio de la órbita de un cuerpo con movimiento circular y su periodo, es decir, el tiempo que dicho cuerpo tarda en dar una vuelta completa. Consideremos un satélite de masa m que se mueve con rapidez s alrededor de un cuerpo central de masa M , siguiendo una órbita *circular* de radio r_0 (distancia desde el *centro* del cuerpo esférico central). Por la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, obtenemos

$$-\frac{s^2m}{r_0^2}\mathbf{r}(t) = -\frac{GmM}{r_0^3}\mathbf{r}(t).$$

Las longitudes de los vectores de ambos lados de esta ecuación deben ser iguales. Por tanto,

$$s^2 = \frac{GM}{r_0}.$$

Si T denota el periodo, entonces $s = 2\pi r_0/T$; sustituyendo este valor de s en la ecuación precedente y despejando T , obtenemos lo siguiente:

Ley de Kepler

$$T^2 = r_0^3 \frac{(2\pi)^2}{GM}.$$

Por tanto, *el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del radio*.

Hemos definido dos conceptos básicos asociados con una trayectoria: su velocidad y su aceleración. Ambos requieren del cálculo *diferencial*. El concepto básico de la longitud de una trayectoria, que requiere del cálculo *integral*, será considerado en la siguiente sección.

Ejemplo 4

Supongamos que un satélite debe seguir una órbita circular en torno a la Tierra, de modo que permanezca fijo en el cielo sobre un punto del ecuador. ¿Cuál será el radio de dicha órbita *geoestacionaria*? (La masa de la Tierra es de $5,98 \times 10^{24}$ kilogramos y $G = 6,67 \times 10^{-11}$ en el sistema unidades metro-kilogramo-segundo [kgs].)

Solución

El periodo del satélite debe ser de 1 día, por lo que $T = 60 \times 60 \times 24 = 86.400$ segundos. A partir de la fórmula $T^2 = r_0^3(2\pi)^2/GM$, obtenemos $r_0^3 = T^2 GM / (2\pi)^2$, de modo que

$$\begin{aligned} r_0^3 &= \frac{T^2 GM}{(2\pi)^2} = \frac{(86.400)^2 \times (6,67 \times 10^{-11}) \times (5,98 \times 10^{24})}{(2\pi)^2} \\ &\approx 7,54 \times 10^{22} \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Por tanto, $r_0 = 4,23 \times 10^7 \text{ m} = 42.300 \text{ km}$



Suplemento a la Sección 4.1: Órbitas planetarias, principio de Hamilton y trayectorias de naves espaciales

En esta sección hemos estudiado trayectorias en el espacio y la segunda ley de Newton. Confiamos en que el lector se percate de que estas ideas se aplican al mundo real —el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, por ejemplo, está gobernado por estas leyes. Pero la historia no termina aquí, como intentaremos mostrar a continuación.

Kepler, Newton, Hamilton, Feynman y Planck

Como ya dijimos en la introducción histórica, la ley del movimiento planetario que afirma que el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del radio de una órbita es una de las tres leyes que Kepler observó antes de que Newton formulase sus leyes del movimiento, más generalmente conocidas como mecánica newtoniana. Esta mecánica nos permite calcular el periodo de un satélite alrededor de la Tierra o de un planeta alrededor del Sol (cuando el radio de su órbita es conocido) y también, como veremos enseguida, las trayectorias de las misiones espaciales.

Kepler descubrió y usó resultados como este no sólo para órbitas circulares, sino para órbitas más generales de tipo elíptico. Newton consiguió deducir las tres leyes celestes de Kepler a partir de su propia ley de la gravitación. El simple y claro orden matemático del universo proporcionado por estas leyes tuvo un gran impacto en el pensamiento del siglo XVIII.

Newton nunca escribió sus leyes de la mecánica en forma de ecuaciones diferenciales. Esto fue hecho por primera vez por Euler alrededor de 1730. Newton hizo muchas de sus deducciones (al menos las publicadas) por métodos geométricos. Euler también demostró cómo las leyes de Newton podían deducirse a partir del principio de acción de Maupertuis. La versión más clara de este principio de la mecánica, actualmente conocido con el nombre de *principio de Hamilton*, fue elaborada alrededor de 1830 por William Rowan Hamilton, quien, como a estas alturas ya deberíamos saber, es también el padre del cálculo vectorial. La versión de Hamilton del principio de Maupertuis fue presentada de una forma muy elegante por Richard Feynman, como veremos a continuación.

FEYNMAN Y EL PRINCIPIO DE HAMILTON. En sus legendarias *Lecciones de Física* del Caltech, el premio Nobel de Física Richard Phillips Feynman (véanse las Figuras 4.1.5 y 4.1.6) incluyó lo que denominó una “Lección especial” sobre un tema muy querido para él, que escuchó por primera vez a su profesor de secundaria en Nueva York, Mr. Bader. Dicho profesor contó a su (aparentemente aburrido) estudiante Feynman cómo aplicar principios de máximo y mínimo a las trayectorias de objetos en movimiento y, en particular, cómo se aplica el principio de acción Maupertuis, Leibniz y Hamilton (del que hablaremos en la Sección 3.3) a la mecánica newtoniana, gobernada por $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

El profesor Feynman, al final de su lección, señala que “un físico, un estudiante de Mr. Bader, demostró en 1942 cómo este principio de acción era también aplicable a la mecánica cuántica.” Este estudiante fue el propio Feynman, que recibió el premio Nobel por sus aportaciones, que también incluyen el descubrimiento de las *integrales de Feynman*. La moraleja de esta historia es: *Presta atención a tus profesores—especialmente a los mejores!*

Nota histórica



Figura 4.1.5 Richard P. Feynman (1918–1988).



Figura 4.1.6 Feynman impartiendo una clase en Caltech.

A continuación incluimos la primera parte de la conferencia de Feynman; puede encontrar el texto completo en la Lección 19 del Volumen II de las *Lecciones de Física de Feynman*.

El principio de mínima acción, por Richard Feynman

Cuando era un estudiante de secundaria, mi profesor de Física —cuyo nombre era Mr. Bader— me llamó un día después de su clase y me dijo: “Pareces aburrido; voy a contarte algo interesante.” Entonces me explicó algo que me pareció fascinante y que, desde entonces, siempre me ha fascinado. Cada vez que surge el tema, trabajo sobre él. De hecho, cuando comencé a preparar esta conferencia, me descubrí a mí mismo haciendo más análisis sobre el tema. En lugar de preocuparme de la charla, me vi envuelto en la investigación de un nuevo problema. El tema es este: el principio de mínima acción.

Mr. Bader me contó lo siguiente: supongamos que tenemos una partícula (en un campo gravitatorio, por ejemplo) que parte de algún lugar y se mueve libremente hasta otro punto —la lanzamos y entonces sube y después baja [véase la Figura 4.1.7].

La partícula va de la posición inicial a la posición final en un cierto intervalo de tiempo. Ahora, intentemos un movimiento diferente. Supongamos que, para ir de un punto al otro, lo hacemos de esta forma [véase la Figura 4.1.8], pero hacemos el recorrido justo en el mismo intervalo de tiempo.

Entonces me dijo: “Si calculas la energía cinética de la trayectoria en cada instante, le restas la energía potencial e integras el resultado a lo largo del tiempo que dura el recorrido, verás que obtienes un número más grande que el obtenido para el movimiento real.”

En otras palabras, las leyes de Newton pueden enunciarse no en la forma $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, sino en la forma: la energía cinética media menos la energía potencial media es tan pequeña como sea posible para la trayectoria de un objeto que va de un punto a otro.

Déjenme ilustrar un poco mejor qué significa esto. Si tomamos el caso del campo gravitatorio, entonces si la partícula sigue la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ (por el momento, tomemos simplemente el caso unidimensional; imaginemos una trayectoria que sube y baja, sin desviaciones laterales), donde x es la altura sobre el suelo, la energía cinética es $\frac{1}{2}m(\mathbf{dx}/dt)^2$ y la energía potencial en cualquier instante es mgh . Ahora, tomamos la energía cinética menos la potencial en cada instante a lo largo de la trayectoria e integramos esto con respecto al tiempo desde el instante inicial

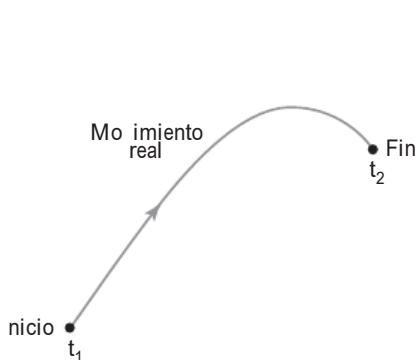


Figura 4.1.7

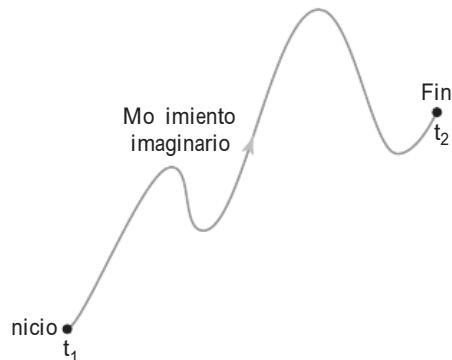


Figura 4.1.8

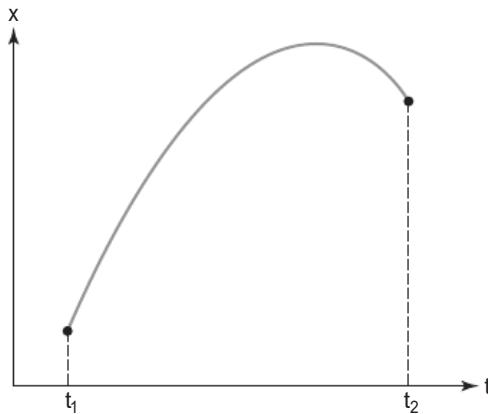


Figura 4.1.9

hasta el instante final. Supongamos que en el instante inicial t_1 partimos de cierta altura y que en el instante final t_2 terminamos en algún otro lugar [véase la Figura 4.1.9].

Entonces la integral es

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - mgx \right] dt.$$

El movimiento real es algún tipo de curva —es una parábola si lo dibujamos como función del tiempo— y nos da un cierto valor para la integral. Pero podemos *imaginar* algún otro movimiento que suba muy alto y después baje y suba de algún modo peculiar [véase la Figura 4.1.10].

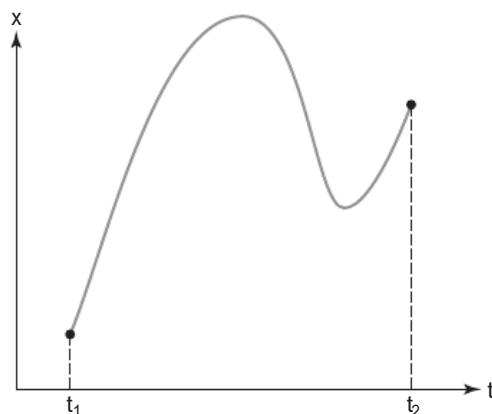


Figura 4.1.10

Podemos calcular la energía cinética menos la energía potencial e integrar para dicha trayectoria... o para cualquier otra trayectoria que queramos. El milagro es que la trayectoria real es aquella para la que dicha integral es mínima.

MAX PLANCK Y EL PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN. Max Planck (véase la Figura 4.1.11), uno de los más grandes científicos de la era moderna y el descubridor de la “cuantización” de la Naturaleza, creía también profundamente en el diseño matemático del Universo y, en particular, en el principio de mínima acción. Sostenía que la universalidad de este principio demostraba la existencia de un creador divino y que la estructura del Universo era el resultado de una mente divina. El 29 de junio de 1922, durante el “Día de Leibniz” celebrado en Berlín, Alemania, pocos años después de la



Figura 4.1.11 Max Planck (1858–1947).

Primera Guerra Mundial, con su terrible carnicería, Planck dio una conferencia en honor de este gran científico y de su descubrimiento del principio de mínima acción.

En los siguientes párrafos se resumen algunas de las frases de Planck.

La ciencia moderna, en particular bajo la influencia del desarrollo de la noción de causalidad, se ha alejado del punto de vista teleológico de Leibniz. La ciencia ha abandonado la suposición de que existe una razón especial, providencialista, y considera que cada suceso del mundo natural y espiritual es, al menos en principio, reducible a estados anteriores. Pero, a pesar de ello, seguimos observando un hecho, particularmente en la más exacta de las ciencias, que, al menos en este contexto, resulta de lo más sorprendente. La física actual, en lo que respecta a su organización teórica, está completamente gobernada por un sistema de ecuaciones diferenciales espaciotemporales que afirman que todo proceso natural está completamente determinado por los sucesos que tienen lugar en su vecindad inmediata temporal y espacial.

Todo este rico sistema de ecuaciones diferenciales, aunque diferentes en los detalles, porque hacen referencia a procesos mecánicos, eléctricos, magnéticos y térmicos, está ahora completamente contenido en una única máxima —*el principio de mínima acción*. Resumiendo, esta máxima afirma que, de todos los posibles procesos, los únicos que tienen lugar en realidad son aquellos que implican una cantidad mínima de acción. Como podemos ver, solo hace falta un pequeño paso para reconocer, en esa preferencia por la cantidad mínima de acción, el imperio de la razón divina, y por tanto para descubrir una parte de la ordenación teleológica del Universo postulada por Leibniz.²

En la física actual, el principio de mínima acción juega un papel relativamente menor. No encaja bien en el marco de las actuales teorías. Por supuesto, está claro que es una máxima correcta, a pesar de lo cual no suele servir como base de la teoría, sino como un apéndice cierto, pero prescindible, porque la física teórica actual está completamente enfocada en el principio de los efectos locales infinitesimales, y ve la extensión a espacios y tiempos de mayor tamaño como una complicación innecesaria y poco práctica del método de tratamiento. Por ello, la Física se inclina a considerar el principio de mínima acción más como una curiosidad formal y accidental, que como un pilar del conocimiento físico.

Trayectorias en la vida real

En nuestro propio sistema solar aparecen interesantes trayectorias en \mathbb{R}^3 que obedecen a la segunda ley de Newton y que son usadas por la NASA para planear misiones espaciales. Una de esas misiones, la *Genesis* Discovery Mission, lanzada desde la Tierra el 8 de agosto de 2001, tiene una trayectoria particularmente interesante, como puede verse en la Figura 4.1.12. Más información acerca de esta trayectoria y de los objetivos de esta misión puede verse en <http://genesismission.jpl.nasa.gov/>.

Los puntos denotados por L_1 y L_2 en esta figura son puntos de equilibrio (descubiertos por Euler) entre la Tierra y el Sol. Una nave espacial estacionaria colocada en uno de esos puntos permanecería allí indefinidamente. Hay órbitas periódicas alrededor de esos puntos que hemos

²Para obtener más información y datos históricos, véase S. Hildebrandt y A. J. Tromba, *The Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World*, Springer-Verlag, Nueva York/Berlin, 1995.

denominado (libremente) *órbitas halo*. La dinámica básica de la nave espacial está gobernada por las atracciones que la Tierra y el Sol (y en muy pequeña medida, la Luna) ejercen sobre la nave. Por tanto, esto forma parte del famoso *problema de los tres cuerpos*, estudiado y popularizado por Poincaré alrededor de 1890.³

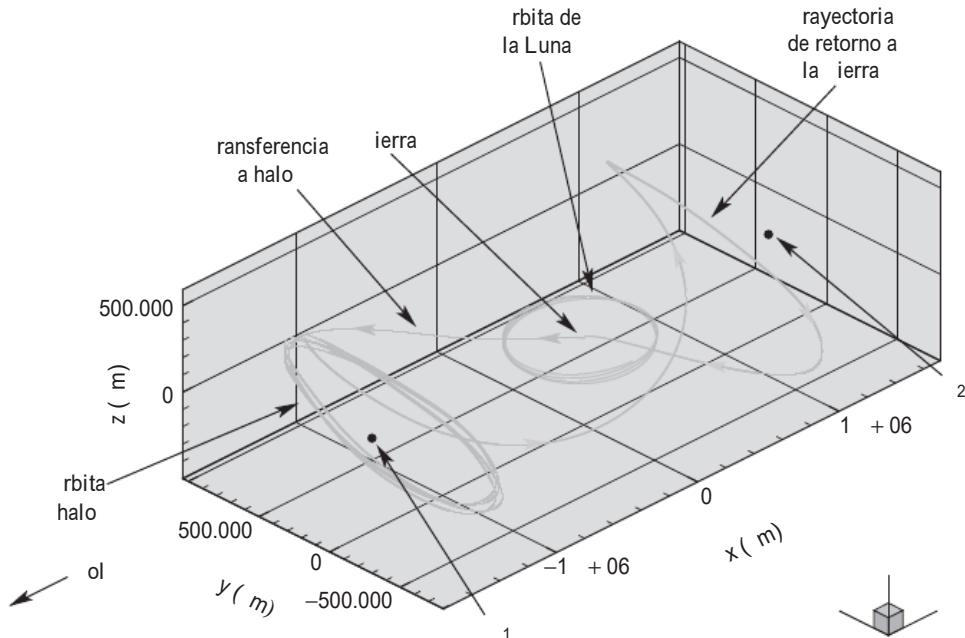


Figura 4.1.12 Trayectoria de la nave espacial *Genesis* desde la Tierra hasta una órbita periódica situada aproximadamente a un millón y medio de kilómetros de la Tierra y la interesante trayectoria de retorno a la Tierra.

Ejercicios

En los Ejercicios 1 a 4, y para el valor de t indicado, calcular los vectores de velocidad y aceleración y la ecuación de la recta tangente para cada una de las siguientes curvas:

$$1. \mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j}, \text{ en } t = 0$$

$$3. \mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}, \text{ en } t = 0$$

$$2. \mathbf{c}(t) = (t \sin t, t \cos t, \sqrt{3}t), \text{ en } t = 0$$

$$4. \mathbf{c}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^{3/2}\mathbf{k}, \text{ en } t = 9$$

En los Ejercicios 5 a 8, sean $\mathbf{c}_1(t) = e^t\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ y $\mathbf{c}_2(t) = e^{-t}\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} - 2t^3\mathbf{k}$. Hallar cada una de las derivadas indicadas de dos maneras diferentes, para comprobar las reglas de derivación enunciadas en el recuadro situado antes del Ejemplo 1.

$$5. \frac{d}{dt}[\mathbf{c}_1(t) + \mathbf{c}_2(t)].$$

$$6. \frac{d}{dt}[\mathbf{c}_1(t) \cdot \mathbf{c}_2(t)].$$

³Para obtener más información acerca de Poincaré, véase F. Diacu y P. Holmes, *Celestial Encounters. The Origins of Chaos and Stability*, Princeton University Press: Princeton, NJ, 1996.

7. $\frac{d}{dt}[\mathbf{c}_1(t) \times \mathbf{c}_2(t)].$

8. $\frac{d}{dt}\{\mathbf{c}_1(t) \cdot [2\mathbf{c}_2(t) + \mathbf{c}_1(t)]\}.$

9. Consideremos la hélice dada por $\mathbf{c}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$. Demostrar que el vector aceleración es siempre paralelo al plano xy .

10. Demostrar la regla del producto escalar.

11. Determinar cuáles de las siguientes trayectorias son regulares:

(a) $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

(b) $\mathbf{c}(t) = (t^3, t^5, \cos t)$.

(c) $\mathbf{c}(t) = (t^2, e^t, 3t + 1)$.

12. Sean \mathbf{v} y \mathbf{a} los vectores de velocidad y aceleración de una partícula que se mueve según una trayectoria \mathbf{c} . Suponer que la posición inicial de la partícula es $\mathbf{c}(0) = (3, 4, 0)$, la velocidad inicial es $\mathbf{v}(0) = (1, 1, -2)$ y la función de aceleración es $\mathbf{a}(t) = (0, 0, 6)$. Determinar $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{c}(t)$.

13. La aceleración, la velocidad inicial y la posición inicial de una partícula que se mueve por el espacio están dadas por

$$\mathbf{a}(t) = (2, -6, -4),$$

$$\mathbf{v}(0) = (-5, 1, 3),$$

$$\mathbf{r}(0) = (6, -2, 1).$$

La trayectoria de la partícula interseca con el plano yz exactamente dos veces. Determinar esos dos puntos de intersección.

14. La aceleración, la velocidad inicial y la posición inicial de una partícula que se mueve por el espacio están dadas por:

$$\mathbf{a}(t) = (-6, 2, 4),$$

$$\mathbf{v}(0) = (2, -5, 1),$$

$$\mathbf{r}(0) = (-3, 6, 2).$$

La trayectoria de la partícula interseca con el plano xz exactamente dos veces. Determinar esos dos puntos de intersección.

15. Si $\mathbf{r}(t) = 6t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, ¿qué fuerza actúa sobre una partícula de masa m que se mueve a lo largo de \mathbf{r} en el instante $t = 0$?

16. Supongamos que una partícula de masa 1 gramo (g) sigue la trayectoria del Ejercicio 1, con

unidades en segundos y centímetros. ¿Qué fuerza actúa sobre ella en el instante $t = 0$? (La respuesta debe incluir las unidades correspondientes.)

17. Un cuerpo de masa 2 kilogramos se mueve a lo largo de una circunferencia de 3 metros de radio, completando una revolución cada 5 segundos. Hallar la fuerza centrípeta que actúa sobre el cuerpo.

18. Hallar la fuerza centrípeta que actúa sobre un cuerpo de masa 4 kilogramos (kg), que se mueve a lo largo de una circunferencia de 10 metros (m) de radio con una frecuencia de 2 revoluciones por segundo (rps).

19. Demostrar que si la aceleración de un objeto es siempre perpendicular a la velocidad, entonces la rapidez del objeto es constante. (SUGERENCIA: véase el Ejemplo 1.)

20. Demostrar que, en un máximo o mínimo local de $\|\mathbf{r}(t)\|$, el vector $\mathbf{r}'(t)$ es perpendicular a $\mathbf{r}(t)$.

21. Un satélite está en una órbita circular 500 millas por encima de la superficie de la Tierra. ¿Cuál es el periodo de la órbita? (Como valor del radio de la Tierra podemos tomar 4000 millas, es decir, $6,436 \times 10^6$ metros.)

22. ¿Cuál es la aceleración del satélite del Ejercicio 21? ¿Y la fuerza centrípeta?

23. Hallar la trayectoria \mathbf{c} tal que $\mathbf{c}(0) = (0, -5, 1)$ y $\mathbf{c}'(t) = (t, e^t, t^2)$.

24. Sea \mathbf{c} una trayectoria en \mathbb{R}^3 con aceleración cero. Demostrar que \mathbf{c} es una línea recta o un punto.

25. Hallar trayectorias $\mathbf{c}(t)$ cuyas imágenes sean las siguientes curvas.

(a) $\{(x, y) \mid y = e^x\}$.

(b) $\{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 = 1\}$.

(c) Una línea recta en \mathbb{R}^3 que pasa a través del origen y del punto (a, b, c) .

(d) $\{(x, y) \mid 9x^2 + 16y^2 = 4\}$.

26. Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria, $\mathbf{v}(t)$ su velocidad y $\mathbf{a}(t)$ la aceleración. Supongamos que \mathbf{F} es una aplicación C^1 de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 , $m > 0$ y $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = m\mathbf{a}(t)$ (segunda ley de Newton). Demostrar que

$$\frac{d}{dt}[m\mathbf{c}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{c}(t) \times \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$$

(es decir, “razón del cambio del momento angular = momento de la fuerza”). ¿Qué podemos concluir si $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$ es paralelo a $\mathbf{c}(t)$? ¿Es este el caso del movimiento planetario?

- 27.** Continuar las investigaciones del Ejercicio 26 para demostrar la ley de Kepler que afirma que la trayectoria de un planeta que se mueve alrededor del Sol bajo la influencia de la gravedad está contenida en un plano fijo.

4.2 Longitud de arco

Definición de longitud de arco

¿Cuál es la longitud de una trayectoria $\mathbf{c}(t)$? Puesto que la rapidez $\|\mathbf{c}'(t)\|$ es la tasa de cambio de la distancia recorrida con respecto al tiempo, la distancia recorrida por un punto que se mueve a lo largo de la curva debe ser igual a la integral de la rapidez con respecto al tiempo sobre el intervalo $[t_0, t_1]$ que dura el trayecto; es decir, la longitud de la trayectoria, también llamada su **longitud de arco**, es

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

Se plantea la pregunta de si esta fórmula efectivamente corresponde a la verdadera longitud de arco. Por ejemplo, supóngase que tomamos una curva en el espacio y pegamos ajustadamente sobre ella una cinta, cortando el sobrante de manera que la cinta se superponga exactamente sobre la curva. Si después despegamos la cinta, la enderezamos y la medimos con una regla, es claro que obtendremos exactamente la longitud de la curva. En el suplemento incluido al final de esta sección se justifica que nuestra fórmula para la longitud de arco coincide con el resultado obtenido por este procedimiento.

Longitud de arco La longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ para $t_0 \leq t \leq t_1$ es

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Ejemplo 1

La longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (r \cos t, r \sen t)$, para t contenido en el intervalo $[0, 2\pi]$, es decir, para $0 \leq t \leq 2\pi$, es

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sen t)^2 + (r \cos t)^2} dt = 2\pi r,$$

que es la longitud de una circunferencia de radio r . Si hubiéramos tomado $0 \leq t \leq 4\pi$, habríamos obtenido $4\pi r$, puesto que en ese caso la trayectoria recorre *dos veces* la misma circunferencia (Figura 4.2.1).

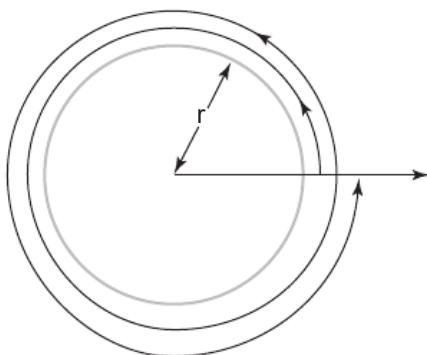


Figura 4.2.1 La longitud de arco de una circunferencia recorrida dos veces es $4\pi r$.

Para curvas planas, se omite el término $z'(t)$, como en el Ejemplo 1.

Ejemplo 2

Consideremos el punto con función de posición

$$\mathbf{c}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t),$$

que describe la cicloide analizada en la Sección 2.4 (véase la Figura 2.4.6). Calcular la velocidad, la rapidez y la longitud de un arco.

Solución

El vector velocidad es $\mathbf{c}'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$, por lo que la rapidez del punto $\mathbf{c}(t)$ será

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2 \cos t}.$$

Por tanto, $\mathbf{c}(t)$ se desplaza con rapidez variable, a pesar de que el círculo gira con rapidez constante. Además, la rapidez de $\mathbf{c}(t)$ es cero cuando t es un múltiplo entero de 2π . Para dichos valores de t , la coordenada y del punto $\mathbf{c}(t)$ es cero, por lo que el punto descansa sobre el eje x . La longitud de arco de un ciclo es

$$\begin{aligned} L(\mathbf{c}) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt \left(\text{porque } 1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2} \text{ y } \sin \frac{t}{2} \geq 0 \text{ en } [0, 2\pi] \right) \\ &= 4 \left(-\cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 8. \end{aligned}$$

Si una curva está formada por un número finito de trozos, cada uno de los cuales es C^1 (con derivada acotada), calculamos su longitud de arco sumando las longitudes de todos los trozos. Tales curvas se denominan **C^1 a trozos**. A veces diremos simplemente “suaves a trozos”.

Ejemplo 3

Una bola rodando en una mesa de billar sigue la trayectoria $\mathbf{c}: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t)) = (|t|, |t - \frac{1}{2}|)$. Hallar la distancia recorrida por la bola.

Solución

Esta trayectoria no es suave, porque $x(t) = |t|$ no es diferenciable en $t = 0$, como tampoco $y(t) = |t - \frac{1}{2}|$ es diferenciable en $t = \frac{1}{2}$. Sin embargo, si dividimos el intervalo $[-1, 1]$ en los trozos $[-1, 0]$, $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$, vemos que $x(t)$ e $y(t)$ tienen derivadas continuas en cada uno de los intervalos $[-1, 0]$, $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$. (Véase la Figura 4.2.2.)

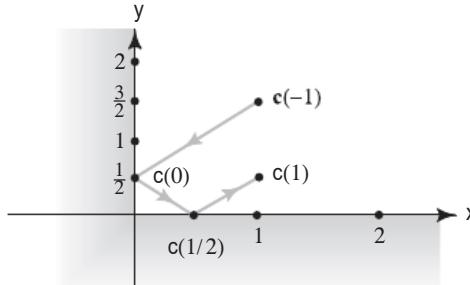


Figura 4.2.2 Una trayectoria suave a trozos.

En el intervalo $[-1, 0]$, $x(t) = -t$, $y(t) = -t + \frac{1}{2}$, de modo que $\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{2}$. Por tanto, la longitud de arco de \mathbf{c} entre -1 y 0 es $\int_{-1}^0 \sqrt{2} dt = \sqrt{2}$. Análogamente, en $[0, \frac{1}{2}]$, $x(t) = t$, $y(t) = -t + \frac{1}{2}$, y de nuevo $\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{2}$, de manera que la longitud de arco de \mathbf{c} entre 0 y $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Finalmente, en $[\frac{1}{2}, 1]$ tenemos $x(t) = t$, $y(t) = t - \frac{1}{2}$, y la longitud de arco de \mathbf{c} entre $\frac{1}{2}$ y 1 es $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Por tanto, la longitud de arco total de \mathbf{c} es $2\sqrt{2}$. Por supuesto, también podríamos haber calculado la respuesta como la suma de las distancias desde $\mathbf{c}(-1)$ a $\mathbf{c}(0)$, desde $\mathbf{c}(0)$ a $\mathbf{c}(\frac{1}{2})$ y desde $\mathbf{c}(\frac{1}{2})$ a $\mathbf{c}(1)$. ▲

Ejemplo 4

Hallar la longitud de arco de $(\cos t, \operatorname{sen} t, t^2)$, $0 \leq t \leq \pi$.

Solución

La trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t^2)$ tiene como vector velocidad $\mathbf{v} = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2t)$. Puesto que

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 4t^2} = \sqrt{1 + 4t^2} = 2\sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2},$$

la longitud de arco es

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^\pi 2\sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} dt.$$

Esta integral puede evaluarse usando la siguiente fórmula de la tabla de integrales:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})] + C.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{c}) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \left[t\sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \log\left(t + \sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) \right] \Big|_{t=0}^\pi \\ &= \pi\sqrt{\pi^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \log\left(\pi + \sqrt{\pi^2 + \frac{1}{4}}\right) - \frac{1}{4} \log\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{4} \log(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}) \approx 10,63.$$

Como comprobación de este resultado, podemos observar que la trayectoria \mathbf{c} conecta los puntos $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, \pi^2)$. La distancia entre estos puntos es $\sqrt{4 + \pi^2} \approx 3,72$, que es menor que 10,63, como debía ser. ▲

Diferencial de la longitud de arco

La fórmula de la longitud de arco sugiere la introducción de la siguiente notación, que será útil en el Capítulo 7, en nuestro estudio sobre integrales de línea.

Diferencial de la longitud de arco Un *desplazamiento infinitesimal* de una partícula que sigue una trayectoria $\mathbf{c}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ es

$$ds = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right) dt,$$

y su longitud

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

es la *diferencial de la longitud de arco*. Véase la Figura 4.2.3.

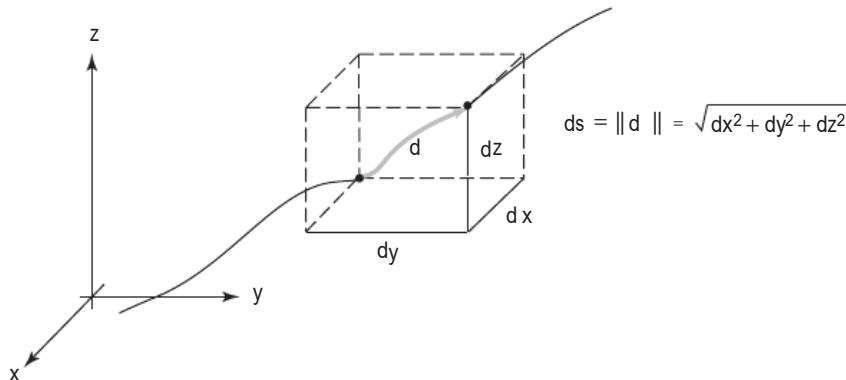


Figura 4.2.3 Diferencial de la longitud de arco.

Estas fórmulas ayudan a recordar la fórmula de la longitud de arco como

$$\text{Longitud de arco} = \int_{t_0}^{t_1} ds.$$

Al igual que hicimos antes con otros conceptos geométricos como la longitud y el ángulo, podemos extender la noción de longitud de arco a trayectorias en el espacio n -dimensional.

Longitud de arco en \mathbb{R}^n Sea $\mathbf{c}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una trayectoria C^1 a trozos. Su **longitud** se define como

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

El integrando es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes del vector $\mathbf{c}'(t)$. Si

$$\mathbf{c}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),$$

entonces

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2 + \dots + (x'_n(t))^2} dt.$$

Ejemplo 5

Calcular la longitud de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$ en \mathbb{R}^4 , definida en el intervalo de 0 a π .

Solución

Tenemos $\mathbf{c}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, -2 \operatorname{sen} 2t, 2 \cos 2t)$, y por tanto

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 4 \operatorname{sen}^2 2t + 4 \cos^2 2t} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5},$$

es constante, de manera que la longitud de la trayectoria es

$$\int_0^\pi \sqrt{5} dt = \sqrt{5}\pi.$$



Es una práctica habitual introducir la **función longitud de arco** $s(t)$ asociada a una trayectoria $\mathbf{c}(t)$, mediante la fórmula siguiente:

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{c}'(u)\| du,$$

de modo que (por el teorema fundamental del cálculo)

$$s'(t) = \|\mathbf{c}'(t)\|$$

y

$$\int_a^b s'(t) dt = s(b) - s(a) = s(b).$$

Ejemplo 6

Consideremos la gráfica de una función de una variable $y = f(x)$ para x en el intervalo $[a, b]$. Podemos considerarla como una curva parametrizada por $t = x$, es decir, $\mathbf{c}(x) = (x, f(x))$ para x entre a y b . La fórmula de la longitud de arco nos da

$$L(\mathbf{c}) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

lo que está de acuerdo con la fórmula de la longitud de una gráfica obtenida mediante el cálculo de una variable.



Justificación de la fórmula de la longitud de arco

En la siguiente exposición se supone el conocimiento de la integral definida en función de las sumas de Riemann. Si los conocimientos del lector en este tema necesitan un refuerzo, puede ver este tema después de estudiar el Capítulo 5.

En \mathbb{R}^3 hay otra forma de justificar la fórmula de la longitud de arco basada en aproximaciones poligonales. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en N subintervalos de la misma longitud:

$$\begin{aligned} a = t_0 &< t_1 < \cdots < t_N = b; \\ t_{i+1} - t_i &= \frac{b-a}{N} \quad \text{para } 0 \leq i \leq N-1. \end{aligned}$$

Consideramos entonces la línea poligonal obtenida uniendo los pares de puntos sucesivos $\mathbf{c}(t_i), \mathbf{c}(t_{i+1})$ para $0 \leq i \leq N-1$. Esto nos da una aproximación poligonal a \mathbf{c} , como se muestra en la Figura 4.2.4. Por la fórmula de la distancia en \mathbb{R}^3 , se obtiene que el segmento de recta de $\mathbf{c}(t_i)$ a $\mathbf{c}(t_{i+1})$ tiene una longitud igual a

$$\|\mathbf{c}(t_{i+1}) - \mathbf{c}(t_i)\| = \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2 + [z(t_{i+1}) - z(t_i)]^2},$$

donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Aplicando el teorema del valor medio a $x(t), y(t)$ y $z(t)$ en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, obtenemos tres puntos t_i^*, t_i^{**} y t_i^{***} tales que

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) - x(t_i) &= x'(t_i^*)(t_{i+1} - t_i), \\ y(t_{i+1}) - y(t_i) &= y'(t_i^{**})(t_{i+1} - t_i), \end{aligned}$$

y

$$z(t_{i+1}) - z(t_i) = z'(t_i^{***})(t_{i+1} - t_i).$$

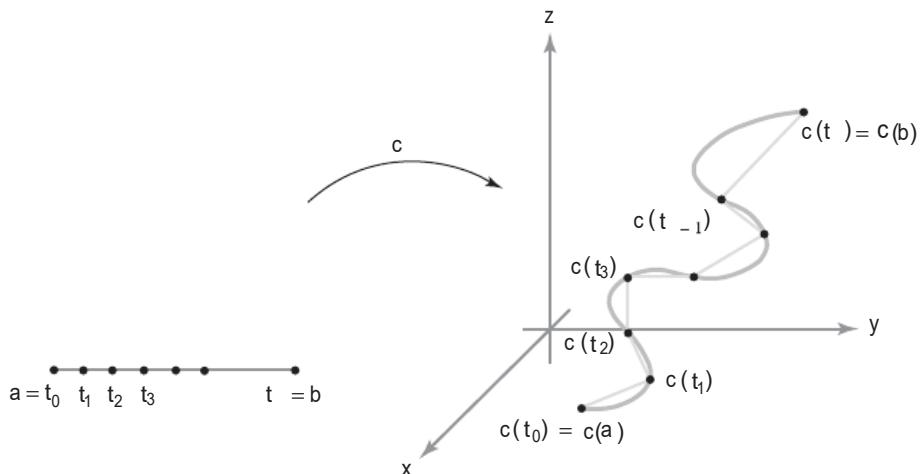


Figura 4.2.4 Una trayectoria \mathbf{c} se puede aproximar mediante una trayectoria poligonal obtenida uniendo cada $\mathbf{c}(t_i)$ con $\mathbf{c}(t_{i+1})$ mediante un segmento recto.

Por tanto, el segmento rectilíneo que va de $\mathbf{c}(t_i)$ a $\mathbf{c}(t_{i+1})$ tiene longitud

$$\sqrt{[x'(t_i^*)]^2 + [y'(t_i^{**})]^2 + [z'(t_i^{***})]^2} (t_{i+1} - t_i).$$

Así, la longitud de la aproximación poligonal es

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{[x'(t_i^*)]^2 + [y'(t_i^{**})]^2 + [z'(t_i^{***})]^2} (t_{i+1} - t_i).$$

Cuando $N \rightarrow \infty$, esta línea poligonal se aproxima cada vez más a la imagen de \mathbf{c} . Por tanto, definimos la longitud de arco de \mathbf{c} como el límite, si existe, de la sucesión S_N cuando $N \rightarrow \infty$. Puesto que suponemos que las derivadas x' , y' y z' son continuas en $[a, b]$, podemos concluir que, de hecho, el límite existe y está dado por

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

(La teoría de integración relaciona la integral como límites de sumas mediante la fórmula

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i^*)(t_{i+1} - t_i),$$

donde t_0, \dots, t_N es una partición de $[a, b]$, $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$ es arbitrario y f es una función continua. Aquí, tenemos *puntos posiblemente diferentes* t_i^* , t_i^{**} y t_i^{***} , por lo que se necesita una extensión adecuada de esta fórmula.)

Ejercicios

En los Ejercicios 1 a 6, calcular la longitud de arco de la curva dada en el intervalo especificado.⁴

- | | |
|---|--|
| 1. $(2 \cos t, 2 \sen t, t)$, para $0 \leq t \leq 2\pi$. | 5. (t, t, t^2) , para $1 \leq t \leq 2$. |
| 2. $(1, 3t^2, t^3)$, para $0 \leq t \leq 1$. | 6. $(t, t \sen t, t \cos t)$, para $0 \leq t \leq \pi$. |
| 3. $(\sen 3t, \cos 3t, 2t^{3/2})$, para $0 \leq t \leq 1$. | 7. Hallar la longitud de arco de $\mathbf{c}(t) = (t, t)$ para $-1 \leq t \leq 1$. |
| 4. $\left(t+1, \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2} + 7, \frac{1}{2}t^2 \right)$, para $1 \leq t \leq 2$. | |

⁴En algunos de estos problemas habrá que emplear la siguiente fórmula

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \left[x \sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \right] + C$$

disponible en la tabla de integrales al final del libro.

- 8.** Recordemos de la Sección 2.4 que una circunferencia rodante de radio R describe una cicloide, la cual se puede parametrizar mediante $\mathbf{c}(t) = (Rt - R \sin t, R - R \cos t)$. Un arco de la cicloide se completa de $t = 0$ a $t = 2\pi$. Demostar que este arco siempre es 4 veces el diámetro de la circunferencia rodante.
- 9.** Sea C el segmento rectilíneo que conecta el punto $\mathbf{p} = (1, 2, 0)$ con el punto $\mathbf{q} = (0, 1, -1)$.
- Determinar la curva $\mathbf{c}(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ que describe C .
 - Hallar la longitud de arco de $\mathbf{c}(t)$.
 - Hallar $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$.
- 10.** Calcular la longitud de la curva $\mathbf{c}(t) = (\log(\sqrt{t}), \sqrt{3}t, \frac{3}{2}t^2)$ para $1 \leq t \leq 2$.
- 11.** Hallar la longitud de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$, definida por $\mathbf{c}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, t)$, si $0 \leq t \leq 2\pi$ y $\mathbf{c}(t) = (2, t - 2\pi, t)$, si $2\pi \leq t \leq 4\pi$.
- 12.** Sea \mathbf{c} la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t, t \sin t, t \cos t)$. Hallar la longitud de arco de \mathbf{c} entre los puntos $(0, 0, 0)$ y $(\pi, 0, -\pi)$.
- 13.** Sea \mathbf{c} la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (2t, t^2, \log t)$, definida para $t > 0$. Hallar la longitud de arco de \mathbf{c} entre los puntos $(2, 1, 0)$ y $(4, 4, \log 2)$.

En los Ejercicios 16, 17 y 20–23 se desarrollan algunos aspectos de la geometría diferencial clásica de curvas.

- 16.** Sea $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una trayectoria infinitamente diferenciable (existen derivadas de todos los órdenes). Suponemos que $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t . El vector $\mathbf{c}'(t)/\|\mathbf{c}'(t)\| = \mathbf{T}(t)$ es tangente a \mathbf{c} en $\mathbf{c}(t)$, y puesto que $\|\mathbf{T}(t)\| = 1$, \mathbf{T} se denomina la **tangente unitaria** a \mathbf{c} .
- Demostrar que $\mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0$. [SUGERENCIA: derivar $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 1$.]
 - Escribir una fórmula para $\mathbf{T}'(t)$ en términos de \mathbf{c} .
- 17.** (a) Se dice que una trayectoria $\mathbf{c}(s)$ está **parametrizada por la longitud de arco** o, lo que es lo mismo, se dice que tiene **rapidez unitaria** si $\|\mathbf{c}'(s)\| = 1$. Para una curva parametrizada por la longitud de arco en $[a, b]$, demostrar que $l(\mathbf{c}) = b - a$.
- (b) La **curvatura** en un punto $\mathbf{c}(s)$ de una trayectoria se define por $k = \|\mathbf{T}'(s)\|$ cuando

- 14.** La función longitud de arco $s(t)$ para una trayectoria dada $\mathbf{c}(t)$, definida por $s(t) = \int_a^t \|\mathbf{c}'(\tau)\| d\tau$, representa la distancia recorrida por una partícula que viaja a lo largo de la trayectoria de \mathbf{c} durante un tiempo t , habiendo empezado a moverse en el instante a ; es decir, proporciona la longitud de \mathbf{c} entre $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(t)$. Hallar las funciones longitud de arco para las curvas $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ y $\beta(t) = (\cos t, \sin t, t)$, con $a = 0$.

- 15.** Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria dada, $a \leq t \leq b$. Sea $s = \alpha(t)$ una nueva variable, donde α es una función C^1 estrictamente creciente en $[a, b]$. Para cada s en $[\alpha(a), \alpha(b)]$ existe un t único tal que $\alpha(t) = s$. Definir la función $\mathbf{d}: [\alpha(a), \alpha(b)] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mediante $\mathbf{d}(s) = \mathbf{c}(t)$.
- Razonar que las curvas \mathbf{c} y \mathbf{d} tienen la misma imagen.
 - Demostrar que \mathbf{c} y \mathbf{d} tienen la misma longitud de arco.
 - Sea $s = \alpha(t) = \int_a^t \|\mathbf{c}'(\tau)\| d\tau$. Definir \mathbf{d} como antes $\mathbf{d}(s) = \mathbf{c}(t)$. Demostrar que

$$\left\| \frac{d}{ds} \mathbf{d}(s) \right\| = 1.$$

Se dice que la trayectoria $s \mapsto \mathbf{d}(s)$ es una **reparametrización de \mathbf{c} por la longitud de arco** (véase también el Ejercicio 17).

- la trayectoria está parametrizada por la longitud de arco. Demostrar que $k = \|\mathbf{c}''(s)\|$.
- Si \mathbf{c} está dada en términos de algún otro parámetro t y $\mathbf{c}'(t)$ nunca es $\mathbf{0}$, demostrar que $k = \|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|/\|\mathbf{c}'(t)\|^3$.
 - Calcular la curvatura de la hélice $\mathbf{c}(t) = (1/\sqrt{2})(\cos t, \sin t, t)$. (Esta curva \mathbf{c} es un múltiplo escalar de la hélice circular recta.)
- 18.** Demostrar que cualquier recta $\mathbf{l}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$, donde \mathbf{v} es un vector unitario, tiene curvatura cero.
- 19.** Consideremos la parametrización de la circunferencia unidad dada por $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$.
- Comprobar que \mathbf{c} está parametrizada por la longitud de arco.
 - Demostrar que la curvatura k de \mathbf{c} es constante.

- 20.** Si $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$, del Ejercicio 16 se deduce que $\mathbf{N}(t) = \mathbf{T}'(t)/\|\mathbf{T}'(t)\|$ es normal (es decir, perpendicular) a $\mathbf{T}(t)$; \mathbf{N} es el **vector normal principal**. Definimos un tercer vector unitario que es perpendicular tanto a \mathbf{T} como a \mathbf{N} mediante $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$; \mathbf{B} se denomina **vector binormal**. Los tres juntos, \mathbf{T} , \mathbf{N} y \mathbf{B} forman un sistema de vectores ortogonal orientado positivamente que podemos interpretar en movimiento a lo largo de la trayectoria (Figura 4.2.5). Demostrar que

- $\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{B} = 0$.
- $\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{T} = 0$.
- $d\mathbf{B}/dt$ es un múltiplo escalar de \mathbf{N} .

- 21.** Si $\mathbf{c}(s)$ está parametrizada por la longitud de arco, utilizamos el resultado del Ejercicio 20(c) para definir una función con valores escalares τ , denominada **torsión**, mediante

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau \mathbf{N}.$$

- (a) Demostrar que

$$\tau = \frac{[\mathbf{c}'(s) \times \mathbf{c}''(s)] \cdot \mathbf{c}'''(s)}{\|\mathbf{c}''(s)\|^2}$$

- (b) Demostrar que si \mathbf{c} está dada en términos de algún otro parámetro t ,

$$\tau = \frac{[\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)] \cdot \mathbf{c}'''(t)}{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|^2}.$$

Compárese con el Ejercicio 17(c).

- (c) Calcular la torsión de la hélice $\mathbf{c}(t) = (1/\sqrt{2})(\cos t, \sin t, t)$.

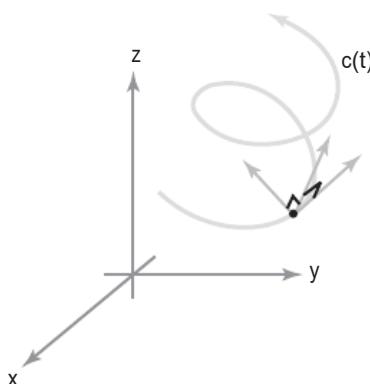


Figura 4.2.5 Tangente \mathbf{T} , normal principal \mathbf{N} y binormal \mathbf{B} .

- 22.** Demostrar que si una trayectoria está contenida en un plano, entonces la torsión es cero. Para ello, demostrar que \mathbf{B} es constante y es un vector normal al plano en el que \mathbf{c} está contenida. (Si la torsión es distinta de cero, entonces proporciona una medida de lo rápido que la curva se despega del plano formado por \mathbf{T} y \mathbf{N} .)

- 23.** (a) Utilizar los resultados de los Ejercicios 17, 20 y 21 para probar las siguientes **fórmulas de Frenet** para una curva de rapidez unitaria:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}; \quad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}; \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}.$$

- (b) Reescribir los resultados del apartado (a) como

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

para un vector $\boldsymbol{\omega}$ apropiado.

- 24.** En relatividad especial, el tiempo propio de una trayectoria $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^4$ con componentes dadas por $\mathbf{c}(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), t(\lambda))$ se define como sigue

$$\int_a^b \sqrt{-[x'(\lambda)]^2 - [y'(\lambda)]^2 - [z'(\lambda)]^2 + c^2[t'(\lambda)]^2} d\lambda,$$

donde c es la velocidad de la luz, una constante. En la Figura 4.2.6, utilizando una notación clara, demostrar que se cumple la “paradoja de los gemelos”:

tiempo propio (AB) + tiempo propio (BC) < tiempo propio (AC).

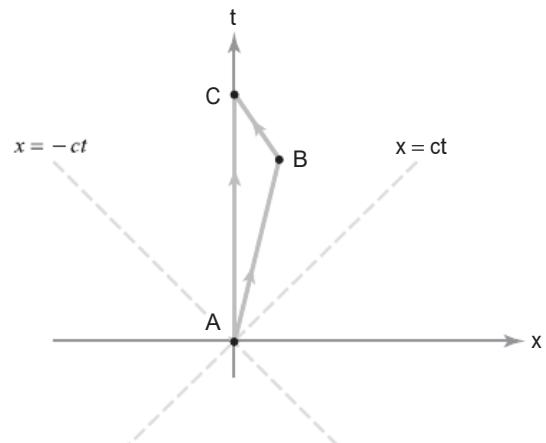


Figura 4.2.6 Desigualdad triangular relativista.

- 25.** Los antiguos griegos sabían que una línea recta era el camino más corto entre dos puntos. Euclides, en su libro *Óptica*, enunció el “principio de reflexión de la luz”—es decir, la luz que viaja en un plano lo hace en línea recta y cuando se refleja en un espejo, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

Los griegos no tenían una demostración de que la línea recta es el camino más corto entre dos puntos porque, en primer lugar, no tenían una definición para la longitud de una trayecto-

ria. Pensaban que esta propiedad de las líneas rectas era más o menos “obvia”.

Utilizando la justificación de la longitud de arco de esta sección y la desigualdad triangular de la Sección 1.5, justificar que si \mathbf{c}_0 es la recta $\mathbf{c}_0(t) = tP + (1-t)Q$ entre P y Q en \mathbb{R}^3 , entonces

$$L(\mathbf{c}_0) \leq L(\mathbf{c})$$

para cualquier otra trayectoria \mathbf{c} que une P y Q.

4.3 Campos vectoriales

Concepto de campo vectorial

En el Capítulo 2 hemos presentado un tipo particular de campo vectorial, el gradiente. En esta sección vamos a estudiar los campos vectoriales *generales*, abordando su importancia geométrica y física.

Campos vectoriales Un *campo vectorial* en \mathbb{R}^n es una aplicación $\mathbf{F}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que asigna a cada punto \mathbf{x} de su dominio A un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Si $n = 2$, \mathbf{F} es un *campo vectorial en el plano* y si $n = 3$, \mathbf{F} es un *campo vectorial en el espacio*.

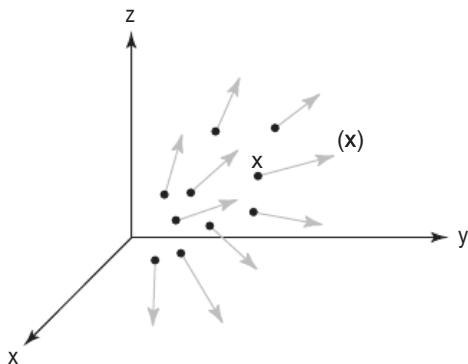


Figura 4.3.1 Un campo vectorial \mathbf{F} asigna un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ a cada punto \mathbf{x} de su dominio.

Representamos \mathbf{F} mediante una *flecha* conectada a cada punto (Figura 4.3.1). Por otro lado, una aplicación $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna un *número* a cada punto es un *campo escalar*. Un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ en \mathbb{R}^3 tiene tres *componentes* F_1, F_2 y F_3 , que son *campos escalares*, de modo que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)).$$

De forma similar, un campo vectorial en \mathbb{R}^n tiene n componentes F_1, \dots, F_n . Si cada componente es una función C^k , decimos que el campo vectorial \mathbf{F} es de *clase* C^k . Vamos a suponer que los campos vectoriales sean al menos de clase C^1 , salvo que se indique lo contrario. En mu-

chas aplicaciones, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ representa una magnitud vectorial física (fuerza, velocidad, etc.) asociada con la posición \mathbf{x} , como podemos ver en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

El caudal de agua a través de una tubería se dice que es *estacionario* si, en cada punto del interior de la tubería, la velocidad del fluido que pasa a través de dicho punto no varía con el tiempo (obsérvese que esto es bastante distinto a decir que el agua que hay en la tubería no se mueve.) Asociando a cada punto la velocidad del fluido en el mismo, obtenemos el **campo de velocidades** \mathbf{V} del fluido (véase la Figura 4.3.2). Obsérvese que la longitud de las flechas (la velocidad), así como la dirección del flujo, pueden cambiar de un punto a otro.

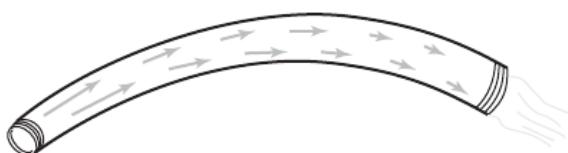


Figura 4.3.2 Un campo vectorial que describe la velocidad del flujo en una tubería.

Ejemplo 2

Algunas formas de movimiento rotatorio (como, por ejemplo, el movimiento de las partículas en un plato giratorio) pueden describirse mediante el campo vectorial

$$\mathbf{V}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Véase la Figura 4.3.3, en la que hemos mostrado en lugar de \mathbf{V} el campo vectorial más corto $\frac{1}{4}\mathbf{V}$, con el fin de que las flechas no se solapen. Este es un convenio habitual cuando se dibujan campos vectoriales.

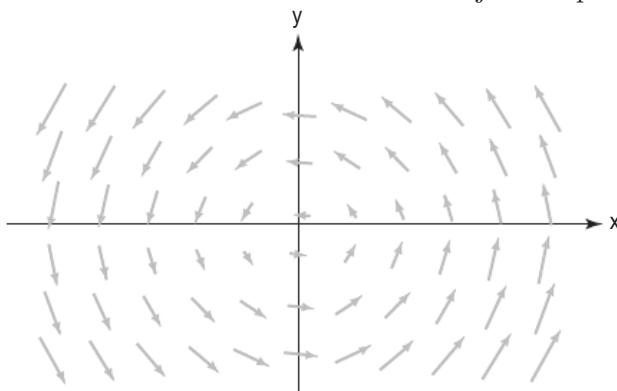


Figura 4.3.3
Campo vectorial rotatorio.

Ejemplo 3

En el plano \mathbb{R}^2 , se define el campo vectorial \mathbf{V} como

$$\mathbf{V}(x, y) = \frac{y\mathbf{i}}{x^2 + y^2} - \frac{x\mathbf{j}}{x^2 + y^2} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

(excepto en el origen, donde \mathbf{V} no está definido). Este campo vectorial es una buena aproximación a la parte plana de la velocidad del agua que fluye hacia un agujero que se encuentra en la parte inferior de la cuba (Figura 4.3.4). Obsérvese que la velocidad *aumenta* a medida que nos aproximamos al agujero.

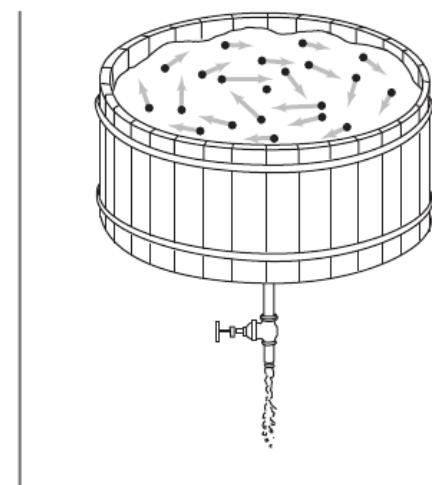


Figura 4.3.4 Campo vectorial que describe un flujo circular en una cuba.

Campo vectorial gradiente

En la Sección 2.6 hemos definido el gradiente de una función como

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Ahora vamos a pensar en él como en un ejemplo de campo vectorial—asigna un vector a cada punto (x, y, z) . Por tanto, nos referiremos a ∇f como **campo vectorial gradiente**. Los campos gradiente aparecen en una amplia variedad de situaciones, como podemos ver en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 4

Un trozo de un material se calienta por un lado y se enfriá por el otro. La temperatura en cada punto del interior del cuerpo se describe en un instante determinado mediante un campo escalar $T(x, y, z)$. El flujo de calor se puede representar mediante un campo vectorial en el que las flechas indican la dirección y la magnitud del flujo (Figura 4.3.5). Este **campo vectorial de flujo de calor o de energía** está definido por $\mathbf{J} = -k\nabla T$, donde $k > 0$ es una constante denominada **conductividad** y ∇T es el gradiente de la función con valores reales T . Los conjuntos de nivel de T se llaman **isotermas**. Está claro que el calor fluye de las regiones calientes hacia las frías, ya que $-\nabla T$ apunta en la dirección en que T disminuye.

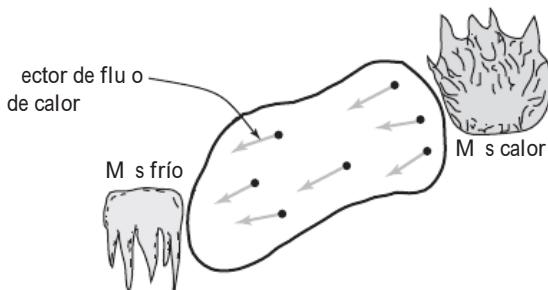


Figura 4.3.5 Un campo vectorial que describe la dirección y magnitud del flujo de calor.

Ejemplo 5

La fuerza de atracción de la Tierra sobre una masa m se puede describir mediante un campo vectorial denominado **campo gravitatorio**. Colocamos el origen de un sistema de coordenadas en el centro de la Tierra (que suponemos esférica). De acuerdo con la ley de la gravitación de Newton, este campo está dado por

$$\mathbf{F} = -\frac{mMG}{r^3}\mathbf{r},$$

donde $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ y $r = \|\mathbf{r}\|$ (véase la Figura 4.3.6). El dominio de este campo vectorial consta de aquellos \mathbf{r} para los que $\|\mathbf{r}\|$ es mayor que el radio de la Tierra. Como hemos visto en el Ejemplo 6 de la Sección 2.6, \mathbf{F} es un campo gradiente, $\mathbf{F} = -\nabla V$, donde

$$V = -\frac{mMG}{r}$$

es el **potencial gravitatorio**. Obsérvese de nuevo que \mathbf{F} apunta en la dirección de V decreciente. Expresando \mathbf{F} en función de sus componentes, vemos que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-mMG}{r^3}x, \frac{-mMG}{r^3}y, \frac{-mMG}{r^3}z \right).$$

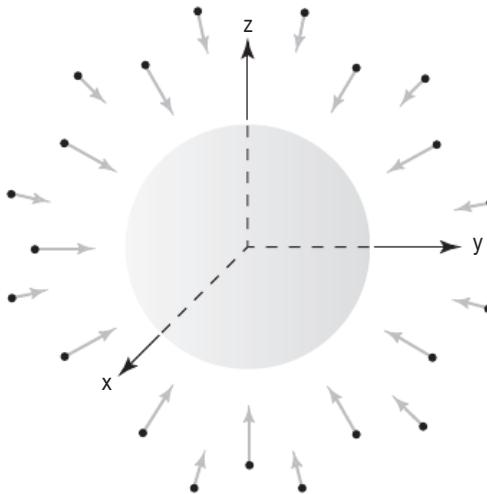


Figura 4.3.6 Campo vectorial \mathbf{F} dado por la ley de la gravedad de Newton.

Ejemplo 6

De acuerdo con la **ley de Coulomb**, la fuerza que actúa sobre una carga e que se encuentra en la posición \mathbf{r} debida a una carga Q situada en el origen es

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon Q e}{r^3}\mathbf{r} = -\nabla V,$$

donde $V = \varepsilon Q e / r$ y ε es una constante que depende de las unidades utilizadas. Para $Qe > 0$ (cargas del mismo signo) la fuerza es repulsiva [Figura 4.3.7(a)] y para $Qe < 0$ (cargas de distinto signo) la fuerza es de atracción [Figura 4.3.7(b)]. Puesto que el potencial V es constante en las superficies de nivel de V , estas se denominan **superficies equipotenciales**. Obsérvese que la fuerza es ortogonal a las superficies

equipotenciales (la fuerza es radial y las superficies equipotenciales son esferas concéntricas).

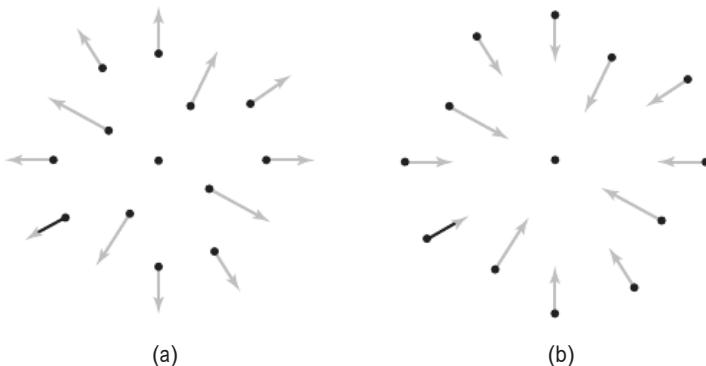


Figura 4.3.7 Los campos vectoriales asociados con (a) cargas del mismo signo ($Qe > 0$) y (b) cargas de distinto signo ($Qe < 0$). ▲

El siguiente ejemplo muestra que no todo campo vectorial es un gradiente.

Ejemplo 7

Demostrar que el campo vectorial \mathbf{V} en \mathbb{R}^2 definido por $\mathbf{V}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ no es un campo gradiente; es decir, no existe ninguna función f de clase C^1 tal que

$$\mathbf{V}(x, y) = \nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}.$$

Solución

Supongamos que existe una f así. Entonces $\partial f / \partial x = y$ y $\partial f / \partial y = -x$. Puesto que son funciones de clase C^1 , f tiene derivadas parciales de primer orden y de segundo orden. Pero, $\partial^2 f / \partial x \partial y = -1$ y $\partial^2 f / \partial y \partial x = 1$, lo que incumple la igualdad de las derivadas cruzadas. Por tanto, \mathbf{V} no puede ser un campo vectorial gradiente. ▲

Conservación de la energía y escape del campo gravitatorio terrestre

Considérese una partícula de masa m que se mueve dentro de un campo de fuerzas \mathbf{F} que es un campo potencial. Es decir, suponemos $\mathbf{F} = -\nabla V$ para una función real V y que la partícula se mueve según la ley $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Por tanto, si la trayectoria es $\mathbf{r}(t)$, entonces

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\nabla V(\mathbf{r}(t)). \quad (1)$$

Una cuestión básica acerca de dicho movimiento es la *conservación de la energía*. La energía E de la partícula se define como la suma de las energías potencial y cinética

$$E = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 + V(\mathbf{r}(t)). \quad (2)$$

El principio de la *conservación de la energía* establece que si se cumple la segunda ley de Newton, entonces E es independiente del tiempo; es

dicir, $dE/dt = 0$. La demostración de este hecho es un cálculo simple; utilizamos la Ecuación (2), la regla de la cadena y la Ecuación (1):

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + (\nabla V) \cdot \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \cdot (-\nabla V + \nabla V) = 0.$$

Velocidad de escape

Como aplicación del principio de conservación de la energía, vamos a calcular la velocidad que debe alcanzar un cohete para escapar de la influencia gravitacional de la Tierra. Supongamos que el cohete tiene una masa m y se encuentra a una distancia R_0 del centro de la Tierra (o de otro planeta) cuando alcanza su velocidad de escape v_e y a partir de ahí viaja en punto muerto. La energía en ese instante es

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{mMG}{R_0}. \quad (3)$$

Por el principio de la conservación de la energía, E_0 es igual a la energía en un instante posterior, lo que podemos expresar como

$$E_0 = E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{R}, \quad (4)$$

donde v es la velocidad y R es la distancia desde el centro de la Tierra (o el otro planeta). Lo que designamos mediante el término *velocidad de escape* es la velocidad v_e elegida de tal forma que el cohete alcance grandes distancias, pero entonces apenas se mueva. Es decir, v se aproxima a cero y R es muy grande. Por tanto, a partir de la Ecuación (4), vemos que $E = 0$ y, por tanto, $E_0 = 0$; resolviendo $E_0 = 0$ para obtener v_e en la Ecuación (3) tenemos:

$$v_e = \sqrt{\frac{2MG}{R_0}}.$$

Ahora, GM/R_0^2 es exactamente g , la aceleración debida a la gravedad a la distancia R_0 del centro del planeta. Por tanto, podemos escribir:

$$v_e = \sqrt{2gR_0}.$$

En el caso de la Tierra, si la velocidad de escape se alcanzara en la superficie de la misma (por supuesto, esto no es muy realista), obtendríamos

$$v_e = \sqrt{2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 6\,371\,000 \text{ m}} = 11.127 \text{ m/s.}$$

Sin embargo, esta es una buena aproximación de la velocidad que un satélite situado en una órbita baja alrededor de la Tierra necesita para escapar del campo gravitatorio terrestre.

Líneas de flujo

Un concepto importante relacionado con los campos vectoriales generales (no necesariamente campos gradiente) es el de línea de flujo, que se define como sigue.

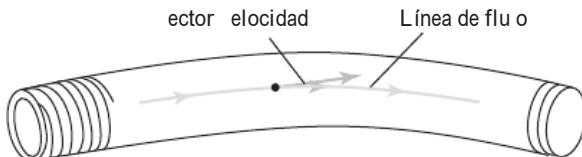


Figura 4.3.8 El vector velocidad de un fluido es tangente a las líneas de flujo.

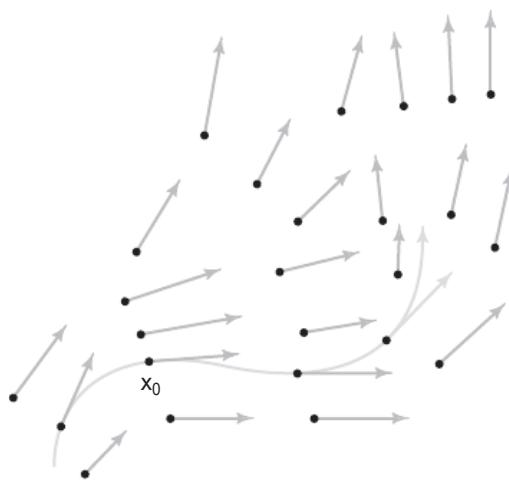


Figura 4.3.9 Una línea de flujo a través de un campo vectorial en el plano.

Líneas de flujo Si \mathbf{F} es un campo vectorial, una *línea de flujo* para \mathbf{F} es una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ tal que

$$\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)).$$

En el contexto del Ejemplo 1, una línea de flujo es la trayectoria seguida por una partícula pequeña suspendida en el fluido (Figura 4.3.8). Las líneas de flujo también se denominan apropiadamente *líneas de corriente* o *curvas integrales*.

Geométricamente, una línea de flujo para un campo vectorial dado \mathbf{F} es una curva que describe su trayectoria a través del dominio del campo vectorial de tal forma que el vector tangente a la curva coincide con el campo vectorial, como se muestra en la Figura 4.3.9.

Una línea de flujo puede interpretarse como una solución a un sistema de ecuaciones diferenciales. En efecto, podemos escribir la definición $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$ como

$$x'(t) = P(x(t), y(t), z(t)),$$

$$y'(t) = Q(x(t), y(t), z(t)),$$

$$z'(t) = R(x(t), y(t), z(t)),$$

donde $\mathbf{c}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, y donde

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}.$$

Estos sistemas se estudian en cursos sobre ecuaciones diferenciales, y suponemos que el lector aún no ha asistido a ninguno de estos cursos.

Ejemplo 8

Demostrar que la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una línea de flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. ¿Es posible determinar otras líneas de flujo?

Solución

Tenemos que comprobar que $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$. El lado izquierdo es $(-\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$, mientras que el lado derecho es $\mathbf{F}(\cos t, \operatorname{sen} t) = (-\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$, por lo que tenemos una línea de flujo. Como sugiere la Figura 4.3.3, las restantes líneas de flujo también son circunferencias y tienen la forma

$$\mathbf{c}(t) = (r \cos(t - t_0), r \operatorname{sen}(t - t_0))$$

para r y t_0 constantes.

En muchos casos, no es posible obtener las fórmulas explícitas para las líneas de flujo, por lo que es necesario recurrir a métodos numéricos. La Figura 4.3.10 muestra la gráfica obtenida mediante un programa que calcula numéricamente las líneas de flujo y las muestra en pantalla.

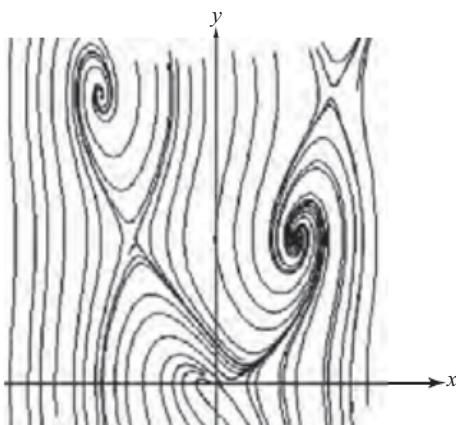


Figura 4.3.10 Curvas integrales generadas por computadora del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (\operatorname{sen} y)\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$. Esta imagen se ha creado con 3D-XplorMath, disponible en el sitio web de Richard Palais en <http://3D-XplorMath.org>.

Concepto de campo

El concepto de “campo”, entendido como campo vectorial, ha tenido un enorme impacto sobre el desarrollo de las bases conceptuales para la física y la ingeniería. Esta es realmente una de las ideas que supusieron un gran avance en la historia del pensamiento humano. Se trata de un concepto que nos permite describir, de una forma sistemática, las influencias sobre objetos y entre objetos espacialmente separados.

La idea de campo comenzó con el concepto de campo gravitatorio de Newton. En este caso, el campo gravitatorio describe la atracción de un grupo de cuerpos entre sí. De forma similar, el campo eléctrico generado por un objeto o grupo de objetos cargado crea, de acuerdo con la ley de Coulomb, una fuerza sobre otro objeto cargado. El uso de campos vectoriales para describir estas fuerzas ha conducido a una mejor compresión de las fuerzas de atracción y repulsión existentes en la naturaleza.

Sin embargo, fue el monumental descubrimiento de las ecuaciones de Maxwell, que describen la propagación de la energía electromagnética, lo que cimentó el concepto de “campo” en el pensamiento científico. Este ejemplo es particularmente interesante porque estos campos se pueden *propagar*. El contraste entre el campo electromagnético que se puede propagar y el campo gravitatorio que implica una *acción instantánea a distancia* originó un gran interés entre los filósofos de la ciencia.

La idea de Einstein es que la gravitación se puede describir en términos de las propiedades métricas del espacio–tiempo y que en esta teoría los campos asociados

Nota histórica

también se pueden propagar, al igual que el campo electromagnético, proporcionando entonces una profunda prueba filosófica de que la versión de Einstein de la gravitación debería ser correcta. Estas ideas también han guiado los recientes esfuerzos para detectar ondas gravitatorias. En la Sección 7.7 se proporciona una explicación más detallada del trabajo de Einstein.

La idea de campo también se emplea en ingeniería para describir sistemas elásticos e interesantes propiedades microestructurales de los materiales. En la física teórica moderna, el concepto de campo se emplea para describir las partículas elementales y es una herramienta fundamental en los esfuerzos de los físicos teóricos modernos para unificar la gravedad con la mecánica cuántica de las partículas elementales. Es imposible imaginar un marco teórico moderno que no incorpore algún tipo de concepto de campo como principal ingrediente.

Ejercicios

En los Ejercicios 1 a 8, dibujar el campo vectorial dado o un pequeño múltiplo del mismo.

1. $\mathbf{F}(x, y) = (2, 2)$.

2. $\mathbf{F}(x, y) = (4, 0)$.

3. $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$.

4. $\mathbf{F}(x, y) = (-x, y)$.

5. $\mathbf{F}(x, y) = (2y, x)$.

6. $\mathbf{F}(x, y) = (y, -2x)$.

7. $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$.

8. $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$.

En los dos ejercicios siguientes, establecer la correspondencia entre el campo vectorial dado y su descripción pictórica (véanse las Figuras 4.3.11 y 4.3.12).

9. (a) $\mathbf{V}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{V}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

10. (a) $\mathbf{V}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{V}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}$

¿Dónde *no* están definidos estos campos vectoriales? ¿Cómo se relacionan con los del Problema 9?

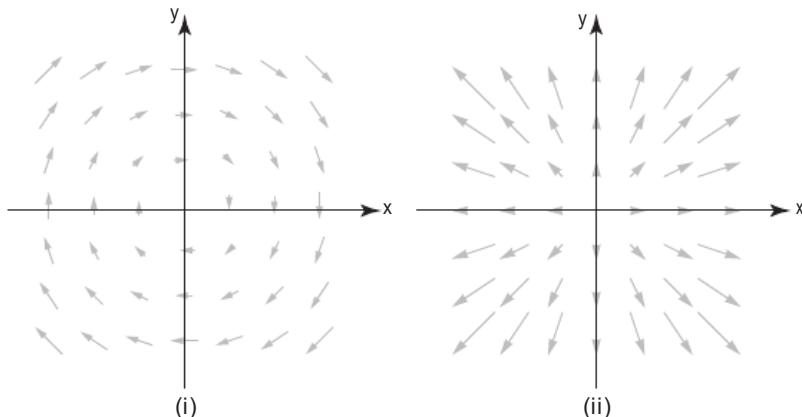


Figura 4.3.11 Ejercicio 9.

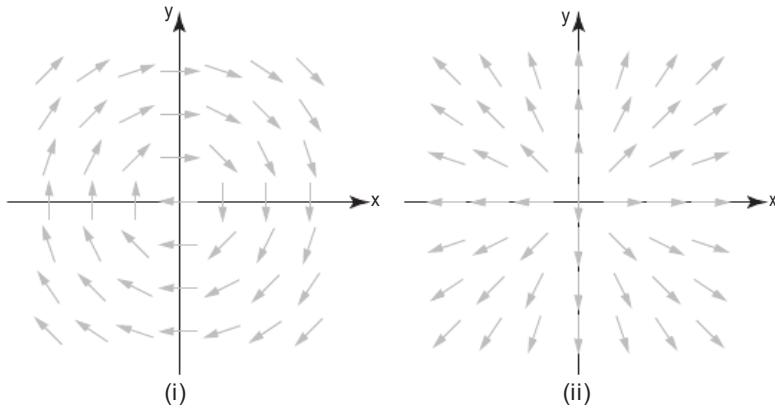


Figura 4.3.12 Ejercicio 10.

En los Ejercicios 11 a 14, dibujar algunas líneas de flujo del campo vectorial dado.

11. $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$

12. $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$

13. $\mathbf{F}(x, y) = (x, x^2)$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, 0)$

En los Ejercicios 15 a 18, demostrar que la curva dada $\mathbf{c}(t)$ es una línea de flujo del campo vectorial de velocidades dado $\mathbf{F}(x, y, z)$.

15. $\mathbf{c}(t) = (e^{2t}, \log |t|, 1/t)$, $t \neq 0$; $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, z, -z^2)$

16. $\mathbf{c}(t) = (t^2, 2t - 1, \sqrt{t})$, $t > 0$; $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + 1, 2, 1/2z)$

17. $\mathbf{c}(t) = (\sin t, \cos t, e^t)$; $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, z)$

18. $\mathbf{c}(t) = (\frac{1}{t^3}, e^t, \frac{1}{t})$; $\mathbf{F}(x, y, z) = (-3z^4, y, -z^2)$

19. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, yx^2, z + zx)$ y $\mathbf{c}(t) = (\frac{1}{1-t}, 0, \frac{e^t}{1-t})$. Demostrar que $\mathbf{c}(t)$ es una línea de flujo para \mathbf{F} .

20. Demostrar que $\mathbf{c}(t) = (a \cos t - b \sin t, a \sin t + b \cos t)$ es una línea de flujo para $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ para todos los valores reales de a y b .

21. (a) Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$. Determinar una función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

(b) Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Determinar una función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

22. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$. Dibujar el campo vectorial gradiente ∇f junto con algunos conjuntos de nivel de f . ¿Cómo se relacionan?

23. Demostrar que se necesita la mitad de energía para poner un satélite en una órbita justo encima de la Tierra que para hacerlo escapar de la órbita de la Tierra (ignorar el movimiento de rotación de la Tierra).

24. Sea $\mathbf{c}(t)$ una línea de flujo de un campo gradiente $\mathbf{F} = -\nabla V$. Demostrar que $V(\mathbf{c}(t))$ es una función decreciente de t .

25. Suponiendo que todas las isotermas de una región son esferas concéntricas centradas en el origen, demostrar que el campo vectorial que representa el flujo de energía apunta bien hacia el origen, bien saliendo de él.

26. Dibujar el campo gradiente $-\nabla V$ para $V(x, y) = (x + y)/(x^2 + y^2)$ y la superficie equipotencial $V = 1$.

27. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (xe^y, y^2z^2, xyz)$ y sea $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una línea de flujo para \mathbf{F} . Hallar el sistema de ecuaciones diferenciales que las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ deben satisfacer.

4.4 Divergencia y rotacional

Para las operaciones de divergencia y rotacional, vamos a utilizar el *operador nabla*, definido como

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

En el espacio de n dimensiones

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Para funciones de una variable, el cálculo de una derivada se puede interpretar como una operación o proceso; es decir, dada una función $y = f(x)$, su derivada es el resultado de *operar* sobre y mediante el *operador* derivada d/dx . Del mismo modo, para funciones de dos variables, podemos escribir el gradiente como

$$\nabla f = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y}$$

y para funciones de tres variables como

$$\nabla f = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z}$$

En términos operacionales, el gradiente de f se obtiene tomando el operador ∇ y aplicándolo a f .

Definición de divergencia

Definimos la divergencia de un campo vectorial \mathbf{F} tomando el *producto escalar* de ∇ con \mathbf{F} .

Divergencia Si $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$, la *divergencia* de \mathbf{F} es el campo escalar

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

De forma similar, si $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ es un campo vectorial en \mathbb{R}^n , su divergencia es

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Ejemplo 1

Calcular la divergencia de

$$\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}.$$

Solución

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = 2xy + 0 + xy = 3xy \quad \blacktriangle$$

Interpretación

La divergencia tiene una importante interpretación física. Si imaginamos que \mathbf{F} es el campo de velocidades de un gas (o de un fluido), entonces $\operatorname{div} \mathbf{F}$ representa la tasa de expansión por unidad de volumen bajo el flujo del gas (o fluido). Si $\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$, el gas (o fluido) se está comprimiendo. Para un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ en el plano, la *divergencia*

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

mide la tasa de expansión del área.

Esta interpretación se explica gráficamente como sigue. Elegimos una pequeña región W alrededor de un punto \mathbf{x}_0 . Para cada punto \mathbf{x} de W , sea $\mathbf{x}(t)$ la línea de flujo que sale de \mathbf{x} . El conjunto de puntos $\mathbf{x}(t)$ describe cómo fluye el conjunto W después de un tiempo t (véase la Figura 4.4.1).

Denotamos $W(t)$ a la región resultante después de transcurrido un tiempo t y sea $\mathcal{V}(t)$ su volumen (o su área en dos dimensiones). Entonces la tasa relativa de variación del volumen es la divergencia; de forma más precisa,

$$\frac{1}{\mathcal{V}(0)} \frac{d}{dt} \mathcal{V}(t) \Big|_{t=0} \approx \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0),$$

donde la aproximación se hace más exacta cuando W se contrae a \mathbf{x}_0 . Una demostración de esta propiedad se proporciona en el Capítulo 8 dando un argumento más natural, en el contexto de los teoremas sobre integrales del cálculo vectorial.

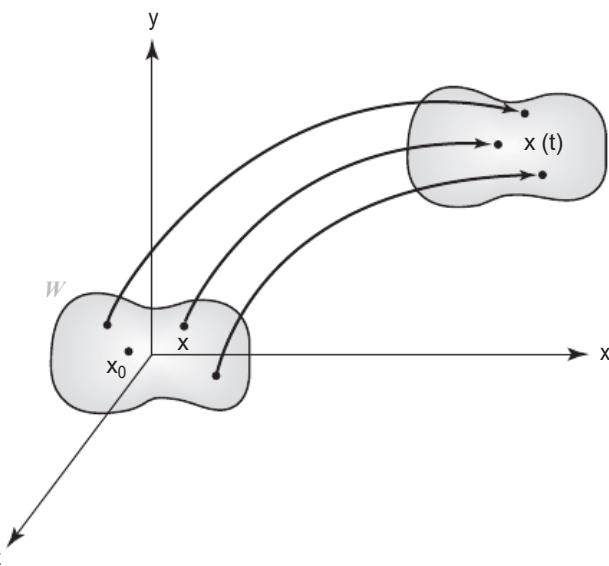


Figura 4.4.1 Cómo fluye una región W a lo largo de las líneas de flujo de un campo vectorial.

Ejemplo 2

Consideremos el campo vectorial en el plano dado por $\mathbf{V}(x, y) = x\mathbf{i}$. Relacionar el signo de la convergencia de \mathbf{V} con la tasa de cambio de las áreas bajo el flujo.

Solución

Interpretamos \mathbf{V} como el campo de velocidades de un fluido en el plano. El campo vectorial \mathbf{V} apunta hacia la derecha para $x > 0$ y hacia la izquierda si $x < 0$, como podemos ver en la Figura 4.4.2. La longitud de \mathbf{V} es más corta al acercarse al origen. Cuando el fluido se mueve, se expande (el área del rectángulo sombreado aumenta), por lo que es de esperar que $\operatorname{div} \mathbf{V} > 0$. En efecto, $\operatorname{div} \mathbf{V} = 1$.

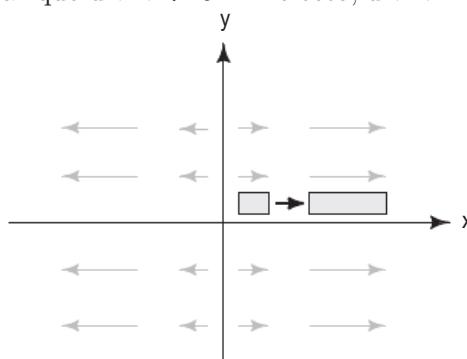


Figura 4.4.2 El fluido se está expandiendo.

Ejemplo 3

Las líneas de flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ son líneas rectas que salen del origen (Figura 4.4.3).

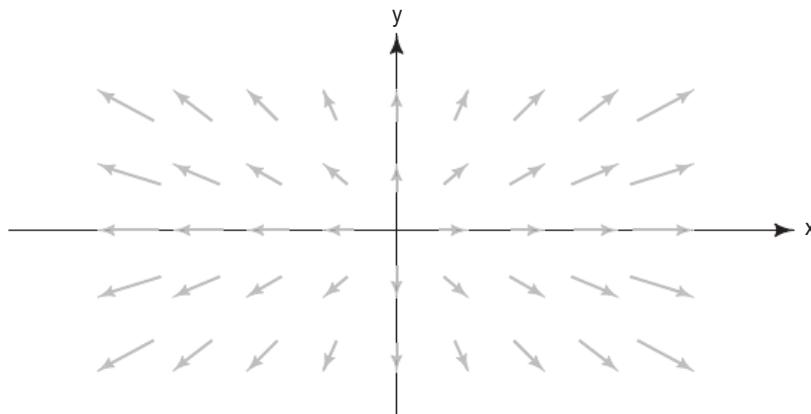


Figura 4.4.3 El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

Si estas líneas de flujo corresponden a las de un fluido, quiere decir que el fluido se está expandiendo a medida que se aleja del origen, por lo que $\operatorname{div} \mathbf{F}$ debe ser positiva. De hecho,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y = 2 > 0.$$

Ejemplo 4

Consideremos el campo vectorial $\mathbf{F} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$. En este caso, las líneas de flujo apuntan hacia el origen en lugar de partir del mismo (véase la Figura 4.4.4). Por tanto, el fluido se está comprimiendo, por lo que es de esperar que $(\operatorname{div} \mathbf{F}) < 0$. Realizando los cálculos, vemos que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-x) + \frac{\partial}{\partial y}(-y) = -1 - 1 = -2 < 0.$$

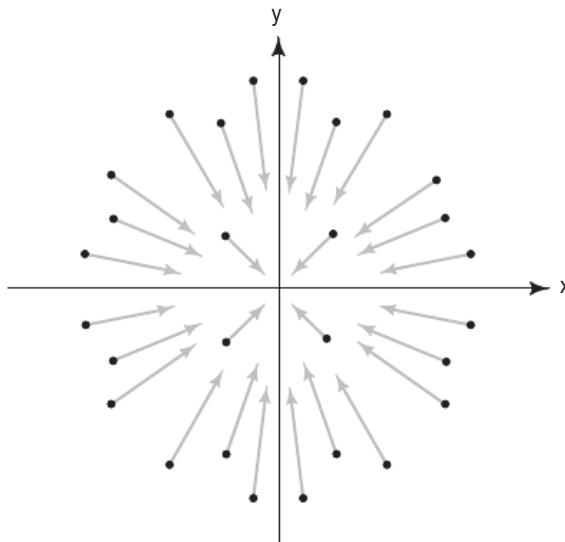


Figura 4.4.4 El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = -x \mathbf{i} - y \mathbf{j}$.

Ejemplo 5

Como hemos visto en la última sección, las líneas de flujo de $\mathbf{F} = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j}$ son circunferencias concéntricas alrededor del origen, que se mueven en sentido antihorario (véase la Figura 4.4.5). De acuerdo con la figura, parece que el fluido ni se comprime ni se expande. Esto lo podemos confirmar calculando

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0 + 0 = 0.$$

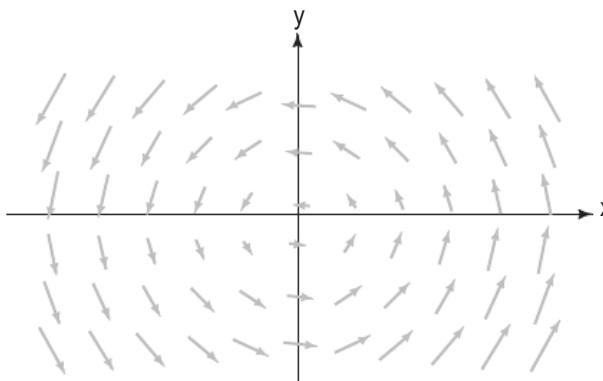


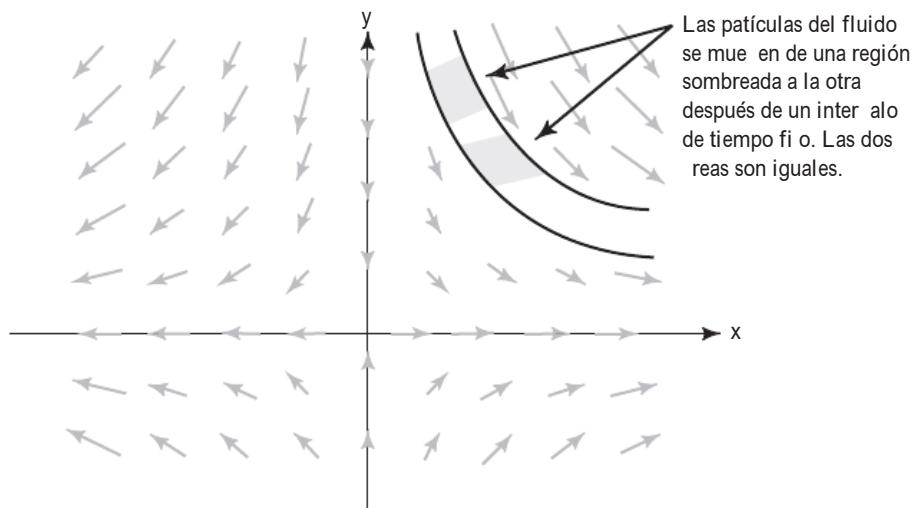
Figura 4.4.5
La divergencia del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j}$ es cero.

Ejemplo 6

En la Figura 4.4.6 se muestran algunas líneas de flujo de $\mathbf{F} = x \mathbf{i} - y \mathbf{j}$. En este caso, nuestra intuición acerca de la expansión o compresión no es tan clara. Sin embargo, es cierto que las regiones sombreadas tienen la misma área y podemos calcular

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}(-y) = 1 + (-1) = 0.$$

Figura 4.4.6 Campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.



Rotacional

Para calcular el rotacional, la segunda operación básica para campos vectoriales, tomamos el *producto vectorial* de ∇ con \mathbf{F} .

Rotacional de un campo vectorial Si $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, el *rotacional* de \mathbf{F} es el *campo vectorial*

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Si escribimos $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, que es una notación alternativa, la misma fórmula para el rotacional sería

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Ejemplo 7

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Hallar $\nabla \times \mathbf{F}$.

Solución

Utilizamos la fórmula anterior:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & xy & 1 \end{vmatrix} = (0 - 0)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + (y - 0)\mathbf{k}.$$

Luego, $\nabla \times \mathbf{F} = y\mathbf{k}$.



Ejemplo 8

Hallar el rotacional de $xy\mathbf{i} - \sin z\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución

Sea $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - \sin z\mathbf{j} + \mathbf{k}$,

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -\sin z & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\sin z & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ xy & -\sin z \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= \cos z\mathbf{i} - x\mathbf{k}. \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

A diferencia de la divergencia, que se puede definir en \mathbb{R}^n para cualquier n , definimos el rotacional solo en el espacio tridimensional (o para campos vectoriales en el plano, suponiendo que su tercera componente es cero).

Rotacional y rotaciones

El significado físico del rotacional se verá en el Capítulo 8, al estudiar el teorema de Stokes. No obstante, ahora vamos a abordar una situación concreta en la que el rotacional está asociado con rotaciones.

Ejemplo 9

Consideremos un sólido rígido B que gira alrededor de un eje L . El movimiento de rotación del cuerpo se puede describir mediante un vector $\boldsymbol{\omega}$ a lo largo del eje de rotación, eligiéndose la dirección de manera que el cuerpo gire alrededor de $\boldsymbol{\omega}$, como se muestra en la Figura 4.4.7. Denominamos $\boldsymbol{\omega}$ al *vector velocidad angular*. La longitud $\omega = \|\boldsymbol{\omega}\|$ se toma para que sea la velocidad angular del cuerpo B ; es decir, la velocidad de cualquier punto de B dividida entre su distancia al eje L de rotación. El movimiento de los puntos del cuerpo giratorio lo describe el campo vectorial \mathbf{v} cuyo valor en cada punto es la velocidad en dicho punto. Para hallar \mathbf{v} , sea Q un punto cualquiera en B y sea α la distancia entre Q y L .

La Figura 4.4.7 muestra que $\alpha = \|\mathbf{r}\| \sin \theta$, donde \mathbf{r} es el vector cuyo extremo inicial está en el origen y cuyo extremo final está en el punto Q y θ es el ángulo formado entre \mathbf{r} y el eje de rotación L . La velocidad tangencial \mathbf{v} de Q se dirige en sentido antihorario a lo largo de la tangente a una circunferencia paralela al plano xy de radio α y magnitud

$$\|\mathbf{v}\| = \omega \alpha = \omega \|\mathbf{r}\| \sin \theta = \|\boldsymbol{\omega}\| \|\mathbf{r}\| \sin \theta.$$

La dirección y la magnitud de \mathbf{v} implican que $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Seleccionando un sistema de coordenadas en el que L sea el eje z , podemos escribir $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$ y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Entonces,

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j},$$

y por tanto

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\omega}.$$

Así, para la rotación de un cuerpo rígido, el rotacional del campo vectorial de velocidades es un campo vectorial cuyo valor es el mismo en todos los puntos. Su dirección es la del eje de rotación y su magnitud es el *doble* de la velocidad angular.

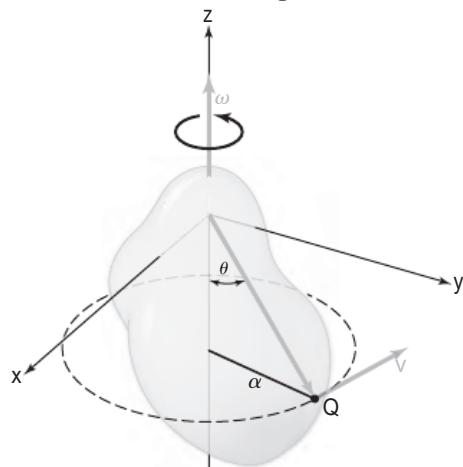


Figura 4.4.7 La velocidad \mathbf{v} y la velocidad angular ω de un cuerpo girando están relacionadas por $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

El rotacional y rotaciones en un flujo

Si un campo vectorial representa el flujo de un *fluído*, entonces el valor de $\nabla \times \mathbf{F}$ en un punto es dos veces el vector velocidad angular de un cuerpo *rígido* que gira como lo hace el fluido cerca de dicho punto. En particular, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en un punto P significa que el fluido está libre de rotaciones rígidas en P ; es decir, no tiene remolinos. Otra justificación de esta idea depende del teorema de Stokes que se estudia en el Capítulo 8. No obstante, informalmente, podemos decir que $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ quiere decir que si una rueda rígida *pequeña* con paletas se coloca en el fluido, esta se moverá con el fluido pero no rotará alrededor de su propio eje. Un campo vectorial así se dice que es *irrotacional*. Por ejemplo, se ha determinado a partir de experimentos que el movimiento de un fluido contenido en una cuba, al vaciarse esta, normalmente es irrotacional, excepto en el centro, aunque el fluido esté “girando” alrededor del desagüe (véase la

Figura 4.4.8 Vista superior de una rueda con paletas en un fluido en movimiento. El campo de velocidades $\mathbf{V}(x, y, z) = (y\mathbf{i} - x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$ es irrotacional; la rueda con paletas no gira alrededor de su eje ω .

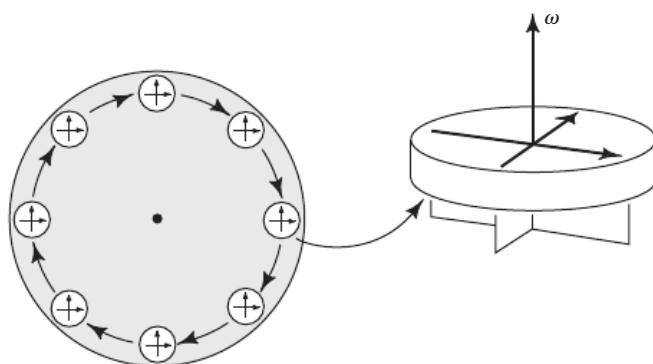


Figura 4.4.8). En el Ejemplo 10, las líneas de flujo del campo vectorial \mathbf{V} son circunferencias centradas en el origen, a pesar de lo cual vamos a demostrar que el flujo es irrotacional. No obstante, el lector debe estar prevenido ante la posible confusión a la que puede dar lugar el término “irrotacional”.

Ejemplo 10

Comprobar que el campo vectorial

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \frac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

es irrotacional si $(x, y) \neq (0, 0)$ (es decir, excepto donde \mathbf{V} no está definido).

Solución

El rotacional es

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{V} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{-x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right] \mathbf{k} \\ &= \left[\frac{-(x^2 + y^2) + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

Los gradientes son irrotacionales

La siguiente identidad es una relación básica entre el gradiente y el rotacional, que se debería comparar con el hecho de que para cualquier vector \mathbf{v} , tenemos que $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Teorema 1 Rotacional de un gradiente Para cualquier función f de clase C^2

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}.$$

Es decir, el rotacional de cualquier gradiente es el vector cero.

Demostración Puesto que $\nabla f = (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z)$, por definición, tenemos

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k}.$$

Cada una de las componentes es cero por la igualdad de las derivadas parciales cruzadas. ■

En el Capítulo 8 veremos el recíproco de este teorema (bajo unas hipótesis adecuadas, un campo vectorial con rotacional cero es un gradiente).

Ejemplo 11

Solución

Sea $\mathbf{V}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$. Demostrar que \mathbf{V} no es un campo gradiente.

Si \mathbf{V} fuera un campo gradiente, entonces según el Teorema 1 debería satisfacer que $\text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{0}$. Pero

$$\text{rot } \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{k} \neq \mathbf{0},$$

por lo que \mathbf{V} no puede ser un gradiente. ▲

Rotacional escalar

Existe una operación sobre campos vectoriales en el plano que está estrechamente relacionada con el rotacional. Si $\mathbf{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial en el plano, también se puede interpretar como un campo vectorial en el espacio para el que la componente \mathbf{k} es cero y las otras dos componentes son independientes de z . El rotacional de \mathbf{F} se reduce entonces a

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

y siempre apunta en la dirección \mathbf{k} . La función

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

de x e y es el *rotacional escalar* de \mathbf{F} .

Ejemplo 12

Solución

Hallar el rotacional escalar de $\mathbf{V}(x, y) = -y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

El rotacional es

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & 0 \end{vmatrix} = (1 + 2y) \mathbf{k},$$

por lo que el rotacional escalar, que es el coeficiente de \mathbf{k} es $1 + 2y$. ▲

Los rotacionales tienen divergencia cero

Una relación básica entre las operaciones de divergencia y rotacional es la siguiente.

Teorema 2 Divergencia de un rotacional Para cualquier campo vectorial \mathbf{F} de clase C^2

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

Es decir, la divergencia de cualquier rotacional es cero.

Como en el caso del rotacional de un gradiente, la demostración se basa en la igualdad de las derivadas parciales cruzadas. El lector debería escribir los detalles. En el Capítulo 8 veremos el resultado recíproco.

Ejemplo 13

Demostrar que el campo vectorial $\mathbf{V}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ no puede ser el rotacional de ningún campo vectorial \mathbf{F} ; es decir, no existe ningún \mathbf{F} tal que $\mathbf{V} = \operatorname{rot} \mathbf{F}$.

Solución

Si existiera tal \mathbf{F} , entonces $\operatorname{div} \mathbf{V}$ sería igual a cero por el Teorema 2. Pero

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \neq 0,$$

por lo que \mathbf{V} no puede ser $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ para ningún \mathbf{F} . ▲

El laplaciano

El *operador de Laplace* ∇^2 , que actúa sobre funciones f , se define como la divergencia del gradiente:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Este operador desempeña un papel importante en muchas leyes de la física, como ya hemos mencionado en la Sección 3.1.

El siguiente ejemplo es importante en la física matemática.

Ejemplo 14

Demostrar que $\nabla^2 f = 0$ para

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{r} \quad y \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0),$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $r = \|\mathbf{r}\|$.

Solución

Las derivadas primeras son

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, & \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Calculando las derivadas segundas, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = 0. \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

Identidades vectoriales

Ahora tenemos a nuestra disposición las siguientes operaciones básicas: gradiente, divergencia, rotacional y el operador de Laplace. En el siguiente recuadro proporcionamos fórmulas generales básicas que son útiles a la hora de realizar cálculos con campos vectoriales.

Identidades básicas del análisis vectorial

1. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
2. $\nabla(cf) = c\nabla f$, para c constante
3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
4. $\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$, en los puntos \mathbf{x} en los que $g(\mathbf{x}) \neq 0$
5. $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{G}$
6. $\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{rot} \mathbf{G}$
7. $\operatorname{div}(f \mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$
8. $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$

Identidades básicas del análisis vectorial (Cont.)

9. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$
10. $\operatorname{rot}(f \mathbf{F}) = f \operatorname{rot} \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$
11. $\operatorname{rot} \nabla f = \mathbf{0}$
12. $\nabla^2(fg) = f \nabla^2 g + g \nabla^2 f + 2(\nabla f \cdot \nabla g)$
13. $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$
14. $\operatorname{div}(f \nabla g - g \nabla f) = f \nabla^2 g - g \nabla^2 f$

Ejemplo 15

Solución

Probar la identidad 7 del recuadro anterior.

El campo vectorial $f \mathbf{F}$ tiene componentes $f F_i$, para $i = 1, 2, 3$, y por tanto

$$\operatorname{div}(f \mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(f F_1) + \frac{\partial}{\partial y}(f F_2) + \frac{\partial}{\partial z}(f F_3).$$

Sin embargo, $(\partial/\partial x)(f F_1) = f \partial F_1 / \partial x + F_1 \partial f / \partial x$ por la regla del producto, con expresiones similares para los restantes términos. Por tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f \mathbf{F}) &= f \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) + F_1 \frac{\partial f}{\partial x} + F_2 \frac{\partial f}{\partial y} + F_3 \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla f. \end{aligned}$$



Vamos a utilizar estas identidades para volver a hacer el Ejemplo 14.

Ejemplo 16

Demostrar que para $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, $\nabla^2(1/r) = 0$.

Solución

Como en el caso del potencial gravitatorio, $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$. En general, $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ (véase el Ejercicio 38). Por la identidad $\nabla \cdot (f \mathbf{F}) = f \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla f \cdot \mathbf{F}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) &= \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \\ &= \frac{3}{r^3} + \mathbf{r} \cdot \left(\frac{-3\mathbf{r}}{r^5} \right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0. \end{aligned}$$



Divergencia y rotacional

William Rowan Hamilton, en su investigación de los cuaterniones (explicada en la Sección 1.3), presentó el *operador nabla*, definido formalmente como

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Nota histórica

Hamilton creía firmemente en la importancia de este operador. Si $f(x, y, z)$ es una función escalar en \mathbb{R}^3 , entonces la “multiplicación” por ∇ proporciona el gradiente de f :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k},$$

que, por supuesto, nos da la dirección de ascenso más rápido (véase la Sección 2.6). Si

$$\mathbf{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\mathbf{i} + V_2(x, y, z)\mathbf{j} + V_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

es un campo vectorial, entonces la “multiplicación cuaterniónica” de ∇ por \mathbf{V} da

$$\nabla \mathbf{V} = -\operatorname{div} \mathbf{V} + \operatorname{rot} \mathbf{V}.$$

Por tanto, lo que ahora llamamos divergencia de \mathbf{V} es la parte escalar de este producto cambiada de signo y rotacional \mathbf{V} es la parte vectorial (véase la exposición sobre los cuaterniones de la Sección 1.3).

Hasta donde sabemos, Hamilton nunca proporcionó una interpretación física de la divergencia y el rotacional, pero como consecuencia de su fe en ellos, seguramente creía que tenían una importante interpretación física. Su fe en su formalismo matemático estaba justificado, pero una explicación física de la divergencia y del rotacional tendría que esperar al tratado *Treatise on Electricity and Magnetism* de James Clerk Maxwell. En este texto, Maxwell utilizó tanto la divergencia como el rotacional en sus ecuaciones para la interacción de los campos eléctrico y magnético (las ecuaciones de Maxwell se verán en el Capítulo 8).

Curiosamente, Maxwell denomina *convergencia* a la divergencia y *rotación* (*rotation*) al rotacional (*curl*), un término que se sigue empleando en el campo científico. Fue Josiah Gibbs (Figura 4.4.9) quien renombró los términos convergencia y rotación con los más familiares—divergencia y rotacional—que utilizamos actualmente.

Maxwell proporcionó una interpretación física de la divergencia utilizando el teorema de la divergencia de Gauss, como veremos en la Sección 8.4. Su interpretación física del rotacional como una rotación era bastante breve. Gibbs proporcionó una interpretación más elemental de la divergencia, como hemos hecho en esta sección. En el espíritu de Leibniz (que creía en el significado de dx, dy, dz como magnitudes infinitesimales), Gibbs imaginó un pequeño cubo de dimensiones dx por dy por dz en un fluido. Las caras de este cubo tienen áreas $dx dy$, $dy dz$ y $dx dz$.

En este punto, es posible que el lector esté interesado en escuchar a Gibbs a través de las palabras de su discípulo E. B. Wilson:

Consideremos la cantidad de fluido que pasa a través de las caras del cubo que son paralelas al plano yz , es decir, perpendiculares al eje x [véase la Figura 4.4.10].

La normal a la cara cuya coordenada x es menor, es decir, la normal a la cara izquierda del cubo es $-\mathbf{i}$. El flujo de sustancia a través de esta cara es

$$-\mathbf{i} \cdot \mathbf{V}(x, y, z) dy dz.$$

La normal a la cara opuesta, aquella cuya coordenada x es mayor en un incremento dx , es $+\mathbf{i}$, y el flujo a través de ella es por tanto

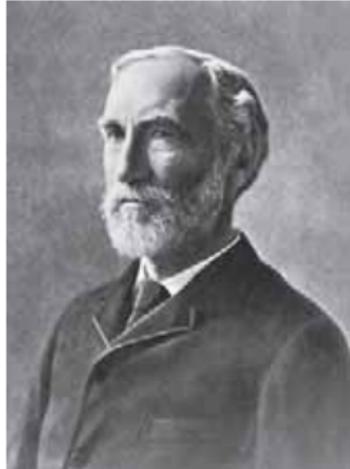


Figura 4.4.9 Josiah Willard Gibbs (1839–1903).

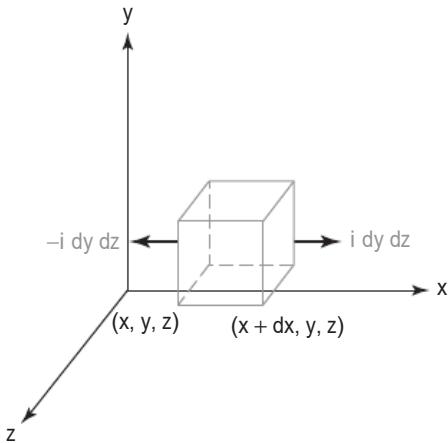


Figura 4.4.10 Un cubo con caras paralelas al plano yz .

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{V}(x + dx, y, z) dy dz &= \mathbf{i} \cdot \left[\mathbf{V}(x, y, z) + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} dx \right] dy dz \\ &= \mathbf{i} \cdot \mathbf{V}(x, y, z) dy dz + \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} dx dy dz. \end{aligned}$$

El flujo total saliente a través de estas dos caras es por tanto la suma algebraica de ambas cantidades. Esto es simplemente

$$\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial V_1}{\partial x} dx dy dz.$$

Del mismo modo, los flujos a través de los otros pares de caras del cubo son

$$\mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} dx dy dz \quad \text{y} \quad \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} dx dy dz.$$

El flujo total que sale del cubo es entonces

$$\left(\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Esta es la cantidad neta de fluido que sale del cubo por unidad de tiempo. El cociente de esta cantidad dividida entre el volumen $dx dy dz$ del cubo da la tasa de disminución de la densidad. Esto es

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}.$$

Puesto que $\nabla \cdot \mathbf{V}$ representa la disminución de la densidad o la tasa en la que la materia está abandonando un punto por unidad de volumen y por unidad de tiempo, se denomina *divergencia*. Maxwell empleó el término *convergencia* para designar la tasa a la que el fluido se approxima a un punto por unidad de volumen y por unidad de tiempo. Esto es el negativo de la divergencia. En el caso en el que el fluido es *incompresible*, tiene que salir del cubo tanta materia como entra. La variación total del contenido tiene que ser por tanto cero. Por esta razón, la ecuación característica diferencial que cualquier fluido incompresible debe satisfacer es

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$

donde \mathbf{V} es la velocidad del fluido. Esta ecuación se conoce como la *ecuación hidrodinámica*. Cualquier flujo de agua la satisface, ya que el agua es

prácticamente incompresible. La gran importancia de esta ecuación para el estudio de la electricidad se debe al hecho de que de acuerdo con las hipótesis de Maxwell, el desplazamiento eléctrico obedece las mismas leyes que un fluido incompresible. Entonces, si \mathbf{D} es el desplazamiento eléctrico,

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = 0.$$

La interpretación de Gibbs del rotacional era muy similar a la que hemos dado en el Ejemplo 9 para la rotación de un cuerpo rígido. Wilson comenta que un análisis del significado del rotacional para el movimiento de un fluido era “bastante difícil”. Incluso actualmente, sigue siendo un concepto algo esquivo, como puede verse en la exposición que sigue al Ejemplo 9. En el Capítulo 8 proporcionamos otra interpretación.

Ejercicios

En los Ejercicios 1 a 4, hallar la divergencia de los campos vectoriales.

1. $\mathbf{V}(x, y, z) = e^{xy}\mathbf{i} - e^{xy}\mathbf{j} + e^{yz}\mathbf{k}$

2. $\mathbf{V}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

3. $\mathbf{V}(x, y, z) = x\mathbf{i} + (y + \cos x)\mathbf{j} + (z + e^{xy})\mathbf{k}$

4. $\mathbf{V}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + (x + y)^2\mathbf{j} + (x + y + z)^2\mathbf{k}$

5. La Figura 4.4.11 muestra algunas líneas de flujo y el movimiento de algunas regiones para un fluido que se mueve en el plano según un campo de velocidades \mathbf{V} . ¿Dónde se cumple que $\operatorname{div} \mathbf{V} > 0$ y dónde se cumple que $\operatorname{div} \mathbf{V} < 0$?

6. Sea $V(x, y, z) = x\mathbf{i}$ el campo vectorial de un fluido en el espacio. Relacionar el signo de la divergencia con la tasa de variación del volumen por el flujo.

7. Dibujar unas cuantas líneas de flujo para $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i}$. Calcular $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y explicar por qué la respuesta dada es coherente con el dibujo.

8. Dibujar unas cuantas líneas de flujo para $\mathbf{F}(x, y) = -3x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$. Calcular $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y explicar por qué su respuesta es coherente con el dibujo.

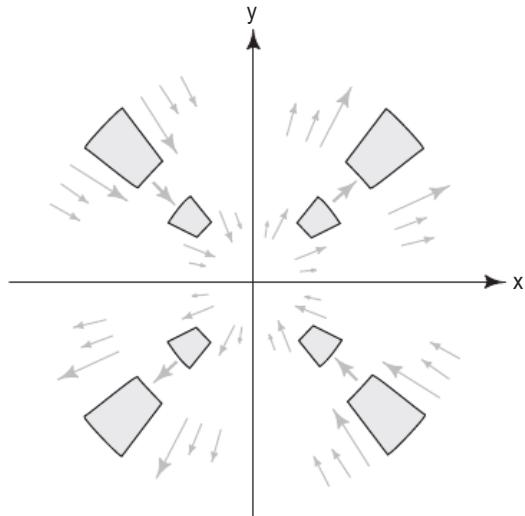


Figura 4.4.11 Las líneas de flujo de un fluido que se mueve en el plano.

En los Ejercicios 9 a 12, calcular la divergencia de los campos vectoriales.

9. $\mathbf{F}(x, y) = x^3\mathbf{i} - x \operatorname{sen}(xy)\mathbf{j}$

11. $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen}(xy)\mathbf{i} - \cos(x^2y)\mathbf{j}$

10. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

12. $\mathbf{F}(x, y) = xe^y\mathbf{i} - [y/(x + y)]\mathbf{j}$

En los Ejercicios 13 a 16, calcular el rotacional, $\nabla \times \mathbf{F}$ de los campos vectoriales.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$

En los Ejercicios 17 a 20, calcular el rotacional escalar de cada uno de los campos vectoriales.

17. $\mathbf{F}(x, y) = \sin x\mathbf{i} + \cos x\mathbf{j}$

18. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

19. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j}$

20. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

21. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, x^2y, z + zx)$.

(a) Verificar que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.

(b) ¿Puede existir una función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$? Explicar la respuesta.

22. (a) ¿Cuáles de los campos vectoriales de los Ejercicios 13–16 podrían ser campos gradiente?

(b) ¿Cuáles de los campos vectoriales de los Ejercicios 9–12 podrían ser el rotacional de algún campo vectorial $\mathbf{V}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$?

23. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{xz}, \sin(xy), x^5y^3z^2)$.

(a) Hallar la divergencia de \mathbf{F} .

(b) Hallar el rotacional de \mathbf{F} .

24. Supongamos que $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar de clase C^2 . ¿Cuáles de las siguientes expresiones tienen sentido y cuáles no lo tienen? Para aquellas que tengan sentido, indicar si la

expresión define una función escalar o un campo vectorial.

(a) $\text{rot}(\text{grad } f)$ (d) $\text{grad}(\text{div } f)$

(b) $\text{grad}(\text{rot } f)$ (e) $\text{rot}(\text{div } f)$

(c) $\text{div}(\text{grad } f)$ (f) $\text{div}(\text{rot } f)$

25. Supongamos que $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase C^2 . ¿Cuáles de las siguientes expresiones tienen sentido y cuáles no lo tienen? Para aquellas que tengan sentido, indicar si la expresión define una función escalar o un campo vectorial.

(a) $\text{rot}(\text{grad } \mathbf{F})$ (d) $\text{grad}(\text{div } \mathbf{F})$

(b) $\text{grad}(\text{rot } \mathbf{F})$ (e) $\text{rot}(\text{div } \mathbf{F})$

(c) $\text{div}(\text{grad } \mathbf{F})$ (f) $\text{div}(\text{rot } \mathbf{F})$

26. Supongamos que $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables. Demostrar que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (f(x), g(y), h(z))$ es irrotacional.

27. Supongamos que $f, g, h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables. Demostrar que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (f(y, z), g(x, z), h(x, y))$ tiene divergencia cero.

28. Demostrar la identidad 13 de la lista de identidades vectoriales.

En los Ejercicios 29 a 32 verificar que $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$ para las funciones dadas.

29. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

30. $f(x, y, z) = xy + yz + xz$

31. $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2)$

32. $f(x, y, z) = x^2y^2 + y^2z^2$

33. Demostrar que $\mathbf{F} = y(\cos x)\mathbf{i} + x(\sin y)\mathbf{j}$ no es un campo vectorial gradiente.

34. Demostrar que $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}$ no es un campo gradiente.

35. Demostrar la identidad 10 de la lista de identidades del análisis vectorial.

36. Supongamos que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$. ¿Cuál de las siguientes tiene necesariamente divergencia igual a cero?

(a) $\mathbf{F} + \mathbf{G}$ (b) $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$

37. Sean $\mathbf{F} = 2xz^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + y^3zx\mathbf{k}$ y $f = x^2y$. Calcular las siguientes cantidades.

(a) ∇f (c) $\mathbf{F} \times \nabla f$

(b) $\nabla \times \mathbf{F}$ (d) $\mathbf{F} \cdot (\nabla f)$

38. Sean $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|\mathbf{r}\|$. Demostrar las siguientes identidades.

- (a) $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3, r \neq 0$; y, en general, $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ y $\nabla(\log r) = \mathbf{r}/r^2$.
- (b) $\nabla^2(1/r) = 0, r \neq 0$; y, en general, $\nabla^2r^n = n(n+1)r^{n-2}$.
- (c) $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$; y, en general, $\nabla \cdot (r^n\mathbf{r}) = (n+3)r^n$.
- (d) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$; y, en general, $\nabla \times (r^n\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

39. ¿Son perpendiculares $\nabla \times \mathbf{F}$ y \mathbf{F} ?

40. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2y\mathbf{i} + (x^3 + y^3)\mathbf{j}$.

- (a) Verificar que $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$.
- (b) Determinar una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$

(en el Capítulo 8 se proporcionan técnicas para construir f en general. En este problema debe bastar el método de prueba y error.)

41. Demostrar que las partes real e imaginaria de cada una de las siguientes funciones complejas forman las componentes de un campo vectorial irrotacional e incompresible en el plano; aquí $i = \sqrt{-1}$.

- (a) $(x - iy)^2$
- (b) $(x - iy)^3$
- (c) $e^{x-iy} = e^x(\cos y - i \sin y)$

Ejercicios de repaso del Capítulo 4

Para los Ejercicios 1 a 4, calcular el vector velocidad, el vector aceleración, la rapidez y la ecuación de la recta tangente en el punto indicado.

1. $\mathbf{c}(t) = (t^3 + 1, e^{-t}, \cos(\pi t/2))$, en $t = 1$

2. $\mathbf{c}(t) = (t^2 - 1, \cos(t^2), t^4)$, en $t = \sqrt{\pi}$

3. $\mathbf{c}(t) = (e^t, \sin t, \cos t)$, en $t = 0$

4. $\mathbf{c}(t) = \frac{t^2}{1+t^2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, en $t = 2$

5. Calcular los vectores tangente y aceleración para la hélice $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ en $t = \pi/4$.

6. Calcular los vectores tangente y aceleración para la cicloide $\mathbf{c}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ en $t = \pi/4$ y dibujarlos.

7. Sea una partícula de masa m que se mueve sobre la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t^2, \sin t, \cos t)$. Calcular la fuerza que actúa sobre la partícula en $t = 0$.

8. (a) Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria con $\|\mathbf{c}(t)\| = \text{constante}$; es decir, la curva está en una esfera. Demostrar que $\mathbf{c}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{c}(t)$.

(b) Sea \mathbf{c} una trayectoria cuya rapidez nunca es igual a cero. Demostrar que \mathbf{c} tiene una rapidez constante si y solo si el vector aceleración \mathbf{c}'' es siempre perpendicular al vector velocidad \mathbf{c}' .

9. Sea $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sqrt{3}t)$ una trayectoria en \mathbb{R}^3 .

- (a) Hallar la velocidad y la aceleración de esta trayectoria.
- (b) Hallar una parametrización para la línea tangente a esta trayectoria en $t = 0$.
- (c) Hallar la longitud de arco de esta trayectoria para $t \in [0, 2\pi]$.

10. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin(xz), e^{xy}, x^2y^3z^5)$.

- (a) Hallar la divergencia de \mathbf{F} .
- (b) Hallar el rotacional de \mathbf{F} .

11. Comprobar que el campo de la fuerza gravitacional $\mathbf{F}(x, y, z) = -A \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, donde A es constante, es irrotacional fuera del origen.

12. Demostrar que el campo vectorial $\mathbf{V}(x, y, z) = 2xi - 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$ no es el rotacional de ningún campo vectorial.

13. Expresar la longitud de arco de la curva $x^2 = y^3 = z^5$ entre $x = 1$ y $x = 4$ como una integral, utilizando una parametrización adecuada.

14. Hallar la longitud de arco de $\mathbf{c}(t) = ti + (\log t)\mathbf{j} + 2\sqrt{2t}\mathbf{k}$ para $1 \leq t \leq 2$.

- 15.** Una partícula está restringida a moverse alrededor de la circunferencia unidad en el plano xy de acuerdo con la fórmula $(x, y, z) = (\cos(t^2), \sin(t^2), 0)$, $t \geq 0$.
- ¿Cuáles son el vector velocidad y la rapidez de la partícula como funciones de t ?
 - En qué punto de la circunferencia debe liberarse la partícula para alcanzar un objetivo que se halla en $(2, 0, 0)$? (observar especialmente la dirección en la que se mueve la partícula alrededor de la circunferencia).
 - En qué instante t debería liberarse la partícula? (utilizar el $t > 0$ más pequeño que cumpla lo anterior.)
 - ¿Cuáles son la velocidad y la rapidez en el instante de la liberación?
 - En qué instante se alcanza el objetivo?
- 16.** Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de una fuerza $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, donde k es una constante y $\mathbf{r}(t)$ es la posición de la partícula en el instante t .

En los Ejercicios 21 a 24, calcular $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y $\nabla \times \mathbf{F}$.

21. $\mathbf{F} = 2xi + 3yj + 4zk$

22. $\mathbf{F} = x^2i + y^2j + z^2k$

En los Ejercicios 25 y 26, calcular en los puntos indicados la divergencia y el rotacional de los campos vectoriales.

25. $\mathbf{F}(x, y, z) = yi + zj + xk$, en el punto $(1, 1, 1)$.

23. $\mathbf{F} = (x + y)i + (y + z)j + (z + x)k$

24. $\mathbf{F} = xi + 3xyj + zk$

En los Ejercicios 27 a 30, calcular los gradientes de las funciones y verificar que $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$.

27. $f(x, y) = e^{xy} + \cos(xy)$

28. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

29. $f(x, y) = e^{x^2} - \cos(xy^2)$

30. $f(x, y) = \tan^{-1}(x^2 + y^2)$

31. (a) Sea $f(x, y, z) = xyz^2$; calcular ∇f .

(b) Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = xyi + yzj + zyk$; calcular $\nabla \times \mathbf{F}$.

(c) Calcular $\nabla \times (f\mathbf{F})$ utilizando la identidad 10 de la lista de identidades del análisis vectorial. Compárese con el cálculo directo.

32. (a) Sea $\mathbf{F} = 2xye^z i + e^z x^2 j + (x^2 ye^z + z^2) k$. Calcular $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y $\nabla \times \mathbf{F}$.

(b) Hallar una función $f(x, y, z)$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

33. Sea $\mathbf{F}(x, y) = f(x^2 + y^2)[-yi + xj]$, como en el Ejercicio 20. Calcular $\operatorname{div} \mathbf{F}$ y $\operatorname{rot} \mathbf{F}$, y analizar sus respuestas teniendo en cuenta los resultados del Ejercicio 20.

34. Sea una partícula de masa m que se mueve siguiendo la hélice elíptica $\mathbf{c}(t) = (4 \cos t, \sin t, t)$.

(a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la hélice en $t = \pi/4$.

- (b) Hallar la fuerza que actúa sobre la partícula en el instante $t = \pi/4$.
- (c) Escribir una expresión (en términos de una integral) para la longitud de arco de la curva $\mathbf{c}(t)$ entre $t = 0$ y $t = \pi/4$.
- 35.** (a) Sea $g(x, y, z) = x^3 + 5yz + z^2$ y sea $h(u)$ una función de una variable tal que $h'(1) = 1/2$. Sea $f = h \circ g$. Partiendo del punto $(1, 0, 0)$, ¿en qué direcciones está cambiando f al 50 % de su tasa máxima de variación?
- (b) Para $g(x, y, z) = x^3 + 5yz + z^2$, calcular $\mathbf{F} = \nabla g$, el gradiente de g , y comprobar directamente que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ en cada punto (x, y, z) .
- 36.** (a) Escribir en forma paramétrica la curva que es la intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e $y = 1$.
- (b) Hallar la ecuación de la recta tangente a esta curva en $(1, 1, 1)$.
- (c) Escribir una expresión integral para la longitud de arco de esta curva. ¿Cuál es el valor de esta integral?
- 37.** En meteorología, el *gradiente negativo de presiones* \mathbf{G} es una magnitud vectorial que apunta desde las regiones de alta presión hacia las regiones de baja presión, normal a las líneas de presión constante (*isobaras*).
- (a) En un sistema de coordenadas xy ,
- $$\mathbf{G} = -\frac{\partial P}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{j}.$$
- Escribir una fórmula para la magnitud del gradiente negativo de presiones.
- (b) Si el gradiente horizontal de presión fuera la única fuerza horizontal que actúa sobre el aire, el viento debería soplar directamente a través de las isobaras en la dirección de \mathbf{G} , y para una determinada masa de aire, con aceleración proporcional a la magnitud de \mathbf{G} . Explicar esto usando la segunda ley de Newton.
- (c) A causa de la rotación de la Tierra, el viento no soplará en la dirección sugerida en el apartado (b). En su lugar, obedece la *ley de Buys-Ballot*, que dice: "Si en el hemisferio norte, estamos de pie de espaldas al viento, las altas presiones se encuentran a nuestra derecha y las bajas presiones se encuentran a la izquierda." Dibujar una figura e introducir las coordenadas xy de modo que \mathbf{G} apunte en la dirección apropiada.
- (d) Enunciar e ilustrar gráficamente la ley de Buys-Ballot para el hemisferio sur, en el que la orientación de las altas y bajas presiones se invierte.
- 38.** Una esfera de masa m , radio a y densidad uniforme tiene un potencial u y una fuerza gravitatoria \mathbf{F} a una distancia r del centro $(0, 0, 0)$, dados por
- $$u = \frac{3m}{2a} - \frac{mr^2}{2a^3}, \quad \mathbf{F} = -\frac{m}{a^3}\mathbf{r} \quad (r \leq a);$$
- $$u = \frac{m}{r}, \quad \mathbf{F} = -\frac{m}{r^3}\mathbf{r} \quad (r > a).$$
- donde $r = \|\mathbf{r}\|$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
- (a) Verificar que $\mathbf{F} = \nabla u$ en el interior y el exterior de la esfera.
- (b) Comprobar que u satisface la ecuación de Poisson: $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + \partial^2 u / \partial z^2 =$ constante dentro de la esfera.
- (c) Demostrar que u satisface la ecuación de Laplace: $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + \partial^2 u / \partial z^2 = 0$ fuera de la esfera.
- 39.** Una hélice circular que está sobre el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ con un desplazamiento vertical ρ se puede describir paramétricamente mediante
- $$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad z = \rho\theta, \quad \theta \geq 0.$$
- Una partícula se desliza bajo la acción de la gravedad (que actúa paralela al eje z) sin rozamiento a lo largo de la hélice. Si la partícula parte de una altura $z_0 > 0$, entonces cuando alcanza la altura z a lo largo de la hélice, su rapidez está dada por
- $$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(z_0 - z)2g},$$
- donde s es la longitud de arco a lo largo de la hélice, g es la constante de la gravedad, t es el tiempo y $0 \leq z \leq z_0$.
- (a) Hallar la longitud de la parte de la hélice que se encuentra entre los planos $z = z_0$ y $z = z_1$, $0 \leq z_1 < z_0$.
- (b) Calcular el tiempo T_0 que tarda la partícula en alcanzar el plano $z = 0$.
- 40.** Una esfera de radio igual a 10 centímetros (cm) con centro en $(0, 0, 0)$ gira alrededor del eje z

con una velocidad angular de 4 y sentido tal que la rotación se ve en sentido antihorario desde el eje z positivo.

- (a) Hallar el vector de rotación ω (véase el Ejemplo 9 de la Sección 4.4).
- (b) Hallar la velocidad $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ cuando $\mathbf{r} = 5\sqrt{2}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ está sobre el “ecuador”.
- (c) Hallar la velocidad del punto $(0, 5\sqrt{3}, 5)$ en la esfera.

- 41.** Hallar la velocidad de los estudiantes que se encuentran en un aula localizada a una latitud de 49°N debido a la rotación de la Tierra, (ignorar el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, el movimiento del Sol en la galaxia, etc.; el radio de la Tierra es de 6 378 kilómetros).

5

Integrales dobles y triples

Es al propio Arquímedes (ca. 225 a.C.) a quien debemos la aproximación más cercana a la integración real que podemos encontrar entre los griegos. Su primer avance notable en esta dirección tiene que ver con su demostración de que el área de un segmento parabólico es cuatro tercios la del triángulo que tiene la misma base y el mismo vértice, o dos tercios la del paralelogramo circunscrito.

—D. E. Smith,
History of Mathematics

En este capítulo y en el siguiente estudiaremos la integración de funciones reales de varias variables; en este capítulo se abordan las integrales de funciones de dos y tres variables, o *integrales dobles y triples*. La integral doble tiene una interpretación geométrica básica como volumen, y se puede definir rigurosamente como límite de sumas aproximantes. Vamos a presentar varias técnicas para evaluar las integrales dobles y triples y también consideraremos algunas aplicaciones.

5.1 Introducción

En esta sección abordaremos algunos aspectos geométricos de la integral doble, aplazando hasta la Sección 5.2 una exposición más rigurosa en términos de sumas de Riemann.

Integrales dobles como volúmenes

Consideremos una función continua de dos variables $f: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo dominio R es un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados. El rectángulo R se puede describir en términos de dos intervalos cerrados $[a, b]$ y $[c, d]$, que representan los lados de R a lo largo de los ejes x e y , respectivamente, como en la Figura 5.1.1. En este caso, decimos que R es el **producto cartesiano** de $[a, b]$ y $[c, d]$ y escribimos $R = [a, b] \times [c, d]$.

Supongamos que $f(x, y) \geq 0$ en R , de modo que la gráfica de $z = f(x, y)$ es una superficie que queda por encima del rectángulo R . Esta

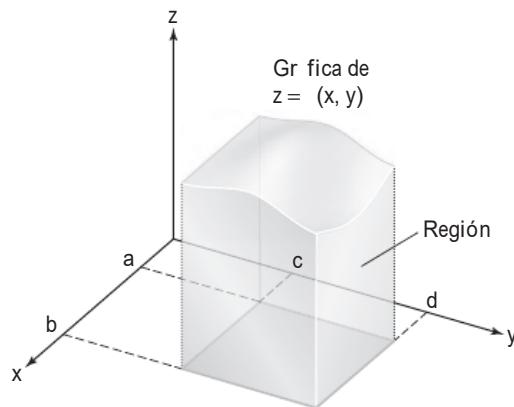


Figura 5.1.1 La región V en el espacio está acotada por la gráfica de f , el rectángulo R y las cuatro caras verticales indicadas.

superficie, el rectángulo R , y los cuatro planos $x = a, x = b, y = c$ e $y = d$ forman la frontera de una región V en el espacio (véase la Figura 5.1.1).

Hay que abordar el problema de cómo definir de manera rigurosa el volumen de V . Esto lo resolveremos en la Sección 5.2 mediante el método clásico de exhaución, o dicho en términos más modernos, el método de las sumas de Riemann. Para adquirir una compresión intuitiva de la integral doble, suponemos provisionalmente que el volumen de una región ya ha sido definido.

Integrales dobles El volumen de la región que está por encima de R y por debajo de la gráfica de una función no negativa f se denomina **integral (doble)** de f sobre R y se denota mediante

$$\iint_R f(x, y) \, dA \quad \text{o} \quad \iint_R f(x, y) \, dx \, dy.$$

Ejemplo 1

- (a) Si f está definida por $f(x, y) = k$, donde k es una constante positiva, entonces

$$\iint_R f(x, y) \, dA = k(b - a)(d - c),$$

ya que la integral es igual al volumen de una caja rectangular con base R y altura k .

- (b) Si $f(x, y) = 1 - x$ y $R = [0, 1] \times [0, 1]$, entonces

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \frac{1}{2},$$

dado que la integral es igual al volumen del sólido triangular mostrado en la Figura 5.1.2. ▲

Ejemplo 2

Supongamos que $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ y $R = [-1, 1] \times [0, 1]$. Entonces la integral $\iint_R (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ es igual al volumen del sólido mostrado en la Figura 5.1.3. Calcularemos esta integral en el Ejemplo 3. ▲

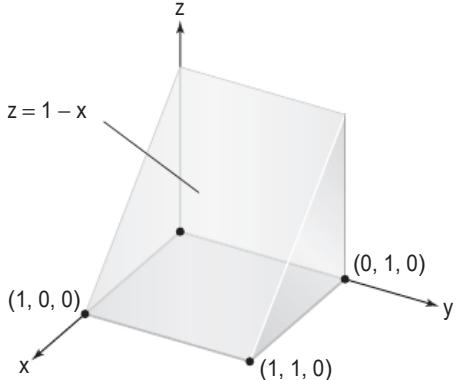


Figura 5.1.2 Volumen bajo la gráfica $z = 1 - x$ y sobre $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

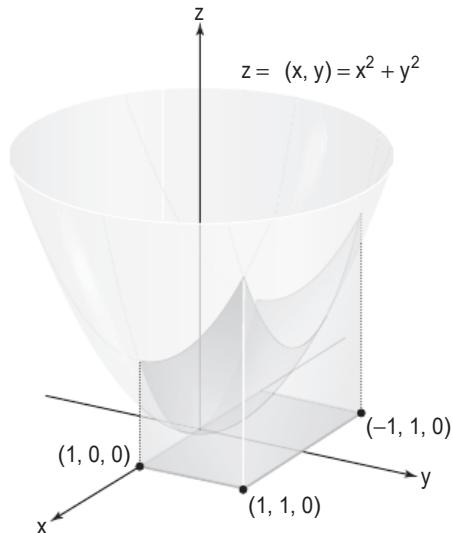


Figura 5.1.3 Volumen bajo $z = x^2 + y^2$ y sobre $R = [-1, 1] \times [0, 1]$.

Estas ideas son similares a las de la integral simple $\int_a^b f(x) dx$, que representa el área bajo la gráfica de f si $f \geq 0$; véase la Figura 5.1.4.¹

Las integrales simples $\int_a^b f(x) dx$ se pueden definir de forma rigurosa, sin recurrir al concepto de área, como el límite de sumas de Riemann. La idea es aproximar $\int_a^b f(x) dx$ eligiendo una partición $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$, seleccionando puntos $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ y escribiendo la suma de Riemann

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \approx \int_a^b f(x) dx$$

(véase la Figura 5.1.5). Vamos a examinar el proceso análogo para integrales dobles en la siguiente sección.

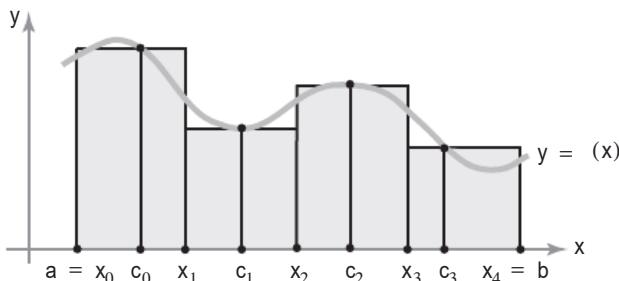


Figura 5.1.4 El área bajo la gráfica de una función continua no negativa f desde $x = a$ a $x = b$ es $\int_a^b f(x) dx$.

¹Los lectores que no estén familiarizados con esta idea deberían repasar las secciones apropiadas de su libro de introducción al cálculo.

Principio de Cavalieri

Existe un método útil para el cálculo de volúmenes, conocido como *principio de Cavalieri*. Supongamos que tenemos un cuerpo sólido y sea $A(x)$ el área de la sección transversal en un plano P_x que está a una distancia x de un plano de referencia (Figura 5.1.6).

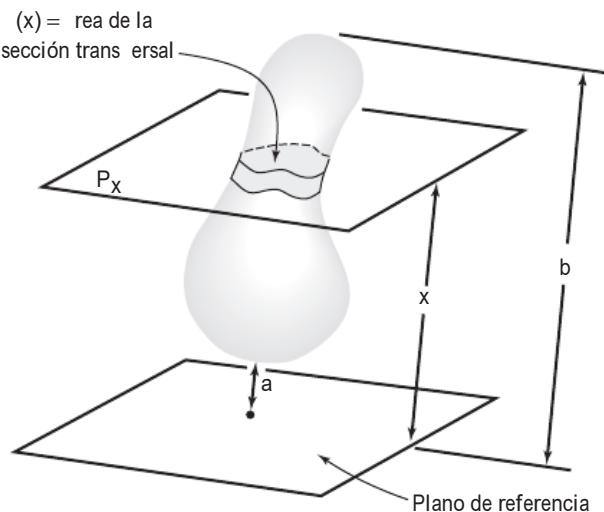


Figura 5.1.6 Un cuerpo sólido con área de sección transversal $A(x)$ a distancia x de un plano de referencia.

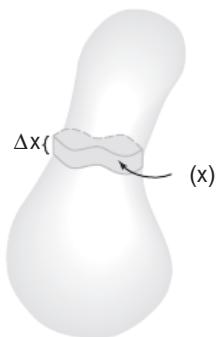


Figura 5.1.7 El volumen de una placa con un área de sección transversal $A(x)$ y espesor Δx es igual a $A(x)\Delta x$. El volumen total del cuerpo es $\int_a^b A(x) dx$.

Según el principio de Cavalieri, el volumen del cuerpo está dado por

$$\text{volumen} = \int_a^b A(x) dx,$$

donde a y b son las distancias mínima y máxima al plano de referencia. Esto se puede entender de forma intuitiva. Si dividimos $[a, b]$ en n partes iguales haciendo $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, entonces si $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ una suma de Riemann aproximante para la integral anterior es

$$\sum_{i=0}^{n-1} A(c_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} A(c_i)\Delta x.$$

Pero esta suma también approxima el volumen del cuerpo, porque $A(x)\Delta x$ es el volumen de una placa con un área de la sección transversal $A(x)$ y espesor Δx (Figura 5.1.7). Por tanto, es razonable aceptar la fórmula anterior para el volumen.

Bonaventura Cavalieri (1598–1647) fue discípulo de Galileo y profesor en Bolonia. Sus investigaciones sobre el área y el volumen fueron importantes en la construcción de las bases del cálculo. Aunque sus métodos fueron criticados por sus contemporáneos, Arquímedes había utilizado ideas similares en la antigüedad y fueron retomadas después por los “padres” del cálculo, Newton y Leibniz.

Nota histórica

Método de las secciones—principio de Cavalieri Sea S un sólido y sea P_x , para x que satisface $a \leq x \leq b$, una familia de planos paralelos tales que:

1. S está entre P_a y P_b ;
2. El área de la sección de S cortada por P_x es $A(x)$.

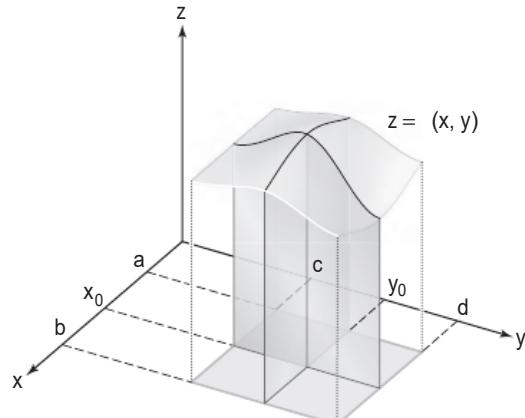
Entonces el volumen de S es igual a

$$\int_a^b A(x) dx.$$

Reducción a integrales iteradas

Ahora vamos a utilizar el principio de Cavalieri para evaluar integrales dobles. Consideremos la región sólida bajo la gráfica $z = f(x, y)$ y definida en la región $[a, b] \times [c, d]$, donde f es continua y mayor que cero. Hay dos funciones naturales para el área de sección transversal: una obtenida utilizando planos de corte perpendiculares al eje x y la otra obtenida mediante planos de corte perpendiculares al eje y . La sección transversal del primer tipo determinada por un plano de corte $x = x_0$ es la región plana bajo la gráfica de $z = f(x_0, y)$ entre $y = c$ e $y = d$ (Figura 5.1.8).

Figura 5.1.8 Dos secciones transversales diferentes que barren el volumen bajo $z = f(x, y)$.



Si fijamos $x = x_0$, obtenemos la función $y \mapsto f(x_0, y)$, que es continua en $[c, d]$. El área de sección transversal $A(x_0)$ es, por tanto, igual a la integral $\int_c^d f(x_0, y) dy$. Luego la función de área de la sección transversal A tiene dominio $[a, b]$ y está dada por la fórmula $A: x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$. Por el principio de Cavalieri, el volumen V de la región bajo $z = f(x, y)$ tiene que ser igual a

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

La integral $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$ se conoce como **integral iterada** ya que se obtiene integrando con respecto a y e integrando después el resul-

tado con respecto a x . Dado que $\iint_R f(x, y) dA$ es igual al volumen V , obtenemos el siguiente resultado.

Integrales dobles e iteradas

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (1)$$

Si utilizamos planos de corte perpendiculares al eje y , obtenemos

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (2)$$

La expresión de la derecha de la Ecuación (2) es la integral iterada obtenida integrando con respecto a x e integrando después el resultado con respecto a y .

Por tanto, si nuestra intuición acerca de los volúmenes es correcta, las Ecuaciones (1) y (2) tienen que ser válidas. Este resultado es cierto y, de hecho, cuando los conceptos que estamos exponiendo se definen de forma rigurosa, este resultado se conoce como *teorema de Fubini*. En la siguiente sección proporcionamos una demostración de este teorema.

Como ilustran los siguientes ejemplos, el concepto de integral iterada y las Ecuaciones (1) y (2) proporcionan un excelente método para *calcular* la integral doble de una función de dos variables.

Ejemplo 3

Evaluar la integral

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy,$$

donde $R = [-1, 1] \times [0, 1]$.

Solución

Según la Ecuación (2),

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left[\int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx \right] dy.$$

Para hallar $\int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx$, tratamos y como una constante e integramos respecto a x . Puesto que $x^3/3 + y^2x$ es una primitiva de $x^2 + y^2$ con respecto a x , podemos integrar usando el teorema fundamental del cálculo para obtener

$$\int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + y^2x \right]_{x=-1}^1 = \frac{2}{3} + 2y^2.$$

A continuación, integramos $\frac{2}{3} + 2y^2$ con respecto a y entre 0 y 1 obteniendo

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{3} + 2y^2 \right) dy = \left[\frac{2}{3}y + \frac{2}{3}y^3 \right]_{y=0}^1 = \frac{4}{3}.$$

Luego el volumen del sólido mostrado en la Figura 5.1.3 es $4/3$.

Ahora calculamos $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$ utilizando la Ecuación (1)—esto es, integrando primero con respecto a y y después con respecto a x , tenemos

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 \left[\int_0^1 (x^2 + y^2) dy \right] dx.$$

Tratando x como una constante en la integración con respecto a y , obtenemos

$$\int_0^1 (x^2 + y^2) dy = \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^1 = x^2 + \frac{1}{3}.$$

A continuación, calculamos $\int_{-1}^1 (x^2 + \frac{1}{3}) dx$ para obtener

$$\int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right]_{x=-1}^1 = \frac{4}{3},$$

que concuerda con la respuesta anterior. ▲

Ejemplo 4

Calcular la integral doble $\iint_S \cos x \sen y dx dy$, donde S es el cuadrado $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ (véase la Figura 5.1.9).

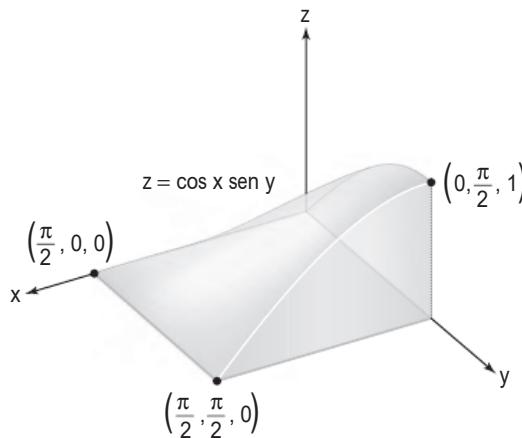


Figura 5.1.9 Volumen bajo $z = \cos x \sen y$ y sobre el rectángulo $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

Solución

De acuerdo con la Ecuación (2),

$$\begin{aligned} \iint_S \cos x \sen y dx dy &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\pi/2} \cos x \sen y dx \right] dy \\ &= \int_0^{\pi/2} \sen y \left[\int_0^{\pi/2} \cos x dx \right] dy \\ &= \int_0^{\pi/2} \sen y dy = 1. \end{aligned}$$



En la siguiente sección utilizaremos las sumas de Riemann para definir de forma rigurosa la integral doble para una clase más amplia de funciones de dos variables sin recurrir a la noción de volumen. Aunque eliminaremos el requisito de que $f(x, y) \geq 0$, las Ecuaciones (1) y (2) seguirán siendo válidas. Por tanto, la integral iterada proporcionará de nuevo la clave para calcular la integral doble. En la Sección 5.3, nos ocuparemos de las integrales dobles sobre regiones más generales que los rectángulos.

Por último, debemos comentar que se suelen eliminar los corchetes en la integrales iteradas como las descritas en las Ecuaciones (1) y (2), y se escriben

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \quad \text{en lugar de} \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

y

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \quad \text{en lugar de} \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Ejercicios

- 1.** Calcular las siguientes integrales iteradas:

(a) $\int_0^1 \int_0^1 (1 - x^3 + xy) dx dy$

(b) $\int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \sin y dx dy$

(c) $\int_1^2 \int_2^4 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dx dy$

(d) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 y dx dy$

- 2.** Calcular las integrales del Ejercicio 1 integrando primero respecto de y y luego respecto de x .

- 3.** Calcular las siguientes integrales iteradas:

(a) $\int_{-1}^1 \int_0^1 (x^4 y + y^2) dy dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (y \cos x + 2) dy dx$

(c) $\int_0^1 \int_0^1 (x y e^{x+y}) dy dx$

(d) $\int_{-1}^0 \int_1^2 (-x \log y) dy dx$

- 4.** Calcular las integrales del Ejercicio 3 integrando con respecto a x y luego con respecto a y .

- 5.** Utilizar el principio de Cavalieri para demostrar que los volúmenes de dos cilindros con la misma base y la misma altura son iguales (véase la Figura 5.1.10).

- 6.** Utilizando el principio de Cavalieri, calcular el volumen de la estructura mostrada en la Figura 5.1.11; cada una de las secciones transversales es un rectángulo de longitud 5 y anchura 3.

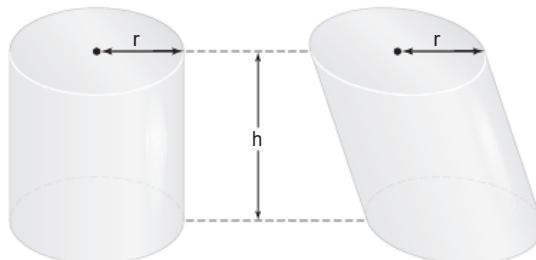


Figura 5.1.10 Dos cilindros con la misma base y la misma altura tienen el mismo volumen.

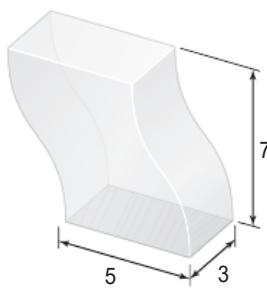


Figura 5.1.11 Calcular este volumen.

7. Un leñador corta una pieza W en forma de cuña de un árbol cilíndrico de radio r haciendo dos cortes de sierra hacia el centro del árbol, uno horizontalmente y el otro formando un ángulo θ . Calcular el volumen de W usando el principio de Cavalieri (véase la Figura 5.1.12.)
8. (a) Demostrar que el volumen del sólido de revolución mostrado en la Figura 5.1.13(a) es

$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

- (b) Demostrar que el volumen de la región obtenida girando la región bajo la gráfica de la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$, $-1 \leq x \leq 3$, alrededor del eje x es $512\pi/15$ [véase la Figura 5.1.13(b)].

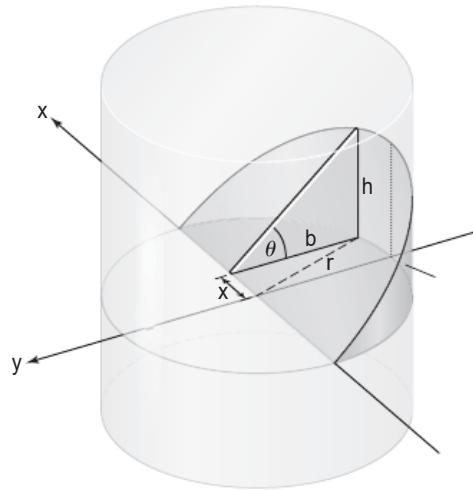


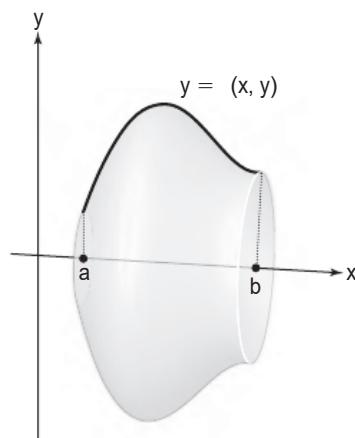
Figura 5.1.12 Determinar el volumen de W .

Calcular las integrales dobles de los Ejercicios 9 a 11, donde R es el rectángulo $[0, 2] \times [-1, 0]$.

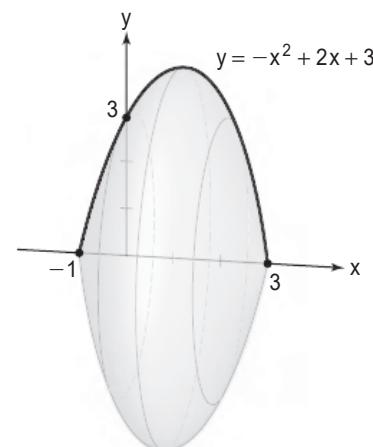
$$9. \iint_R (x^2y^2 + x) dy dx$$

$$11. \iint_R \left(-xe^x \sin \frac{1}{2}\pi y \right) dy dx$$

$$10. \iint_R \left(|y| \cos \frac{1}{4}\pi x \right) dy dx$$



(a)



(b)

Figura 5.1.13 El sólido de revolución (a) tiene un volumen de $\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$. La parte (b) muestra el sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje x la región entre la gráfica de $y = -x^2 + 2x + 3$ y el eje x .

12. Calcular la integral iterada:

$$\int_1^3 \int_1^2 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy.$$

13. Calcular la integral iterada:

$$\int_0^1 \int_0^1 (3x + 2y)^7 dx dy.$$

14. Hallar el volumen acotado por la gráfica de $f(x, y) = 1 + 2x + 3y$, el rectángulo $[1, 2] \times [0, 1]$ y los cuatro lados verticales del rectángulo R , como en la Figura 5.1.1.

15. Repetir el Ejercicio 14 para la función $f(x, y) = x^4 + y^2$ y el rectángulo $[-1, 1] \times [-3, -2]$.

5.2 La integral doble sobre un rectángulo

Ya estamos preparados para dar una definición rigurosa de la integral doble como el límite de una secuencia de sumas. La emplearemos luego para *definir* el volumen de la región bajo la gráfica de una función $f(x, y)$. No será necesario que $f(x, y) \geq 0$; pero si $f(x, y)$ toma valores negativos, interpretaremos la integral como un volumen con signo, como se hace con el área bajo la gráfica de una función de una variable. Además, veremos algunas de las propiedades algebraicas fundamentales de la integral doble y probaremos el teorema de Fubini, el cual establece que la integral doble se puede calcular como una integral iterada. Para empezar, vamos a establecer la notación para las particiones y sumas.

Definición de integral

Consideremos un rectángulo cerrado $R \subset \mathbb{R}^2$; es decir, R es un producto cartesiano de dos intervalos: $R = [a, b] \times [c, d]$. Por una **partición regular** de R de orden n entendemos dos colecciones ordenadas de $n+1$ puntos igualmente espaciados $\{x_j\}_{j=0}^n$ y $\{y_k\}_{k=0}^n$; es decir, los puntos que satisfacen

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

y

$$x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}, \quad y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n}$$

(véase la Figura 5.2.1).

Se dice que una función $f(x, y)$ está **acotada** si existe un número $M > 0$ tal que $-M \leq f(x, y) \leq M$ para todo (x, y) en el dominio de f . Una función continua en un rectángulo *cerrado* está siempre acotada pero, por ejemplo, $f(x, y) = 1/x$ sobre $(0, 1] \times [0, 1]$ es continua pero no acotada, ya que $1/x$ se hace arbitrariamente grande para x próximo a 0. El rectángulo $(0, 1] \times [0, 1]$ no es cerrado, porque el punto 0 falta en el primer factor.

Sea R_{jk} el rectángulo $[x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ y sea \mathbf{c}_{jk} cualquier punto de R_{jk} . Supongamos que $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real acotada. Consideremos la suma

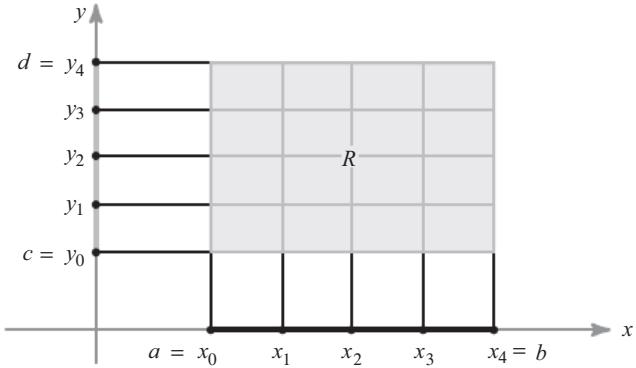


Figura 5.2.1 Una partición regular de un rectángulo R , con $n = 4$.

$$S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x \Delta y = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta A, \quad (1)$$

donde

$$\Delta x = x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta y = y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n},$$

y

$$\Delta A = \Delta x \Delta y.$$

En esta suma, tanto j como k toman todos los valores entre 0 y $n - 1$, por lo que hay n^2 términos. Una suma de este tipo es una **suma de Riemann** para f .

Definición Integral doble Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \rightarrow \infty$ y si el límite S es el mismo para cualquier elección de puntos \mathbf{c}_{jk} en los rectángulos R_{jk} , entonces decimos que f es **integrable** sobre R y escribimos

$$\iint_R f(x, y) dA, \quad \iint_R f(x, y) dx dy \quad \text{o} \quad \iint_R f dx dy$$

para designar el límite S .

Así, podemos escribir de nuevo la integrabilidad de la forma siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x \Delta y = \iint_R f dx dy$$

para cualquier elección de $\mathbf{c}_{jk} \in R_{jk}$.

Propiedades de la integral

Teorema 1 Cualquier función continua definida en un rectángulo cerrado R es integrable.

Si $f(x, y) \geq 0$, la existencia de $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ tiene un significado geométrico directo. Consideremos la gráfica de $z = f(x, y)$ como la tapa de un sólido cuya base es el rectángulo R . Si tomamos cada c_{jk} como un punto en el que $f(x, y)$ tiene su valor mínimo² en R_{jk} , entonces $f(c_{jk}) \Delta x \Delta y$ representa el volumen de una caja rectangular con base R_{jk} . La suma $\sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x \Delta y$ es igual al volumen de un sólido inscrito, parte del cual se muestra en la Figura 5.2.2.

De forma similar, si c_{jk} es el punto donde $f(x, y)$ alcanza su máximo sobre R_{jk} , entonces la suma $\sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x \Delta y$ es igual al volumen de un sólido circunscrito (véase la Figura 5.2.3).

Por tanto, si el $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe y es independiente de $c_{jk} \in R_{jk}$, se deduce que los volúmenes de los sólidos inscrito y circunscrito se aproximen al mismo límite cuando $n \rightarrow \infty$. Es razonable decir entonces que este límite es el volumen exacto del sólido bajo la gráfica de f . Luego el método de las sumas de Riemann sirve de base a los conceptos presentados de forma intuitiva en la Sección 5.1.

Hay un teorema que garantiza la existencia de la integral de ciertas funciones discontinuas. Necesitaremos este resultado en la siguiente

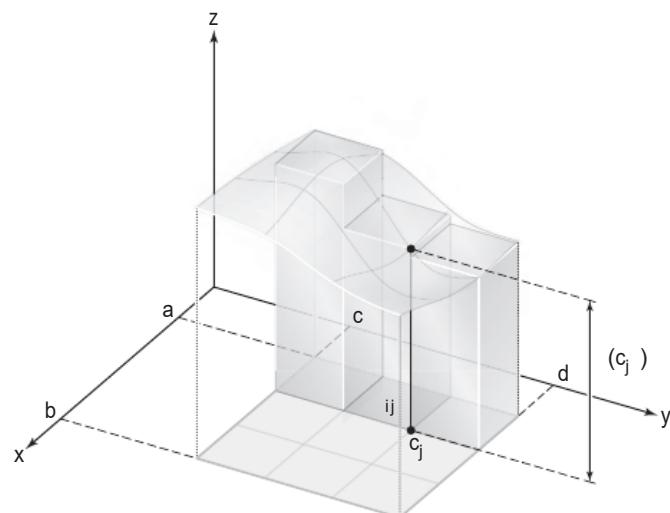


Figura 5.2.2 La suma de las cajas inscritas aproxima el volumen bajo la gráfica de $z = f(x, y)$.

²Tal c_{jk} existe en virtud de la continuidad de f en R ; véase el Teorema 7 en la Sección 3.3.

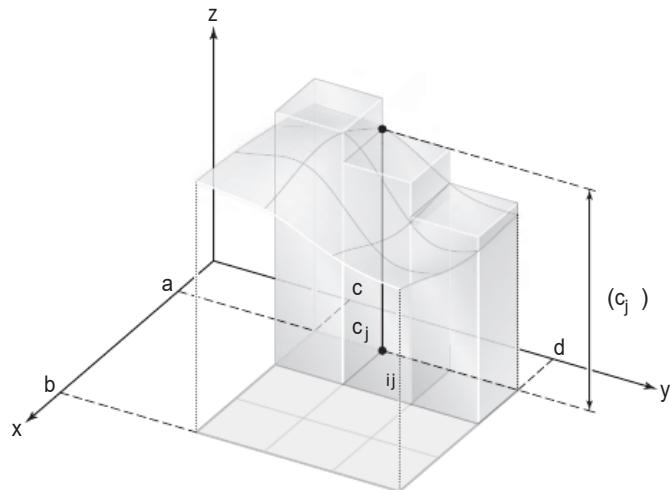


Figura 5.2.3 El volumen de las cajas circunscritas también approxima el volumen bajo $z = f(x, y)$.

sección para estudiar las integrales de funciones sobre regiones más generales que los rectángulos. Específicamente, estamos interesados en funciones cuyas discontinuidades se encuentran en curvas del plano xy . La Figura 5.2.4 muestra dos funciones definidas en un rectángulo R cuyas discontinuidades están sobre curvas. En otras palabras, f es continua en cada punto de R , salvo quizás sobre la curva.

Las curvas útiles son gráficas de funciones tales como $y = \phi(x)$, $a \leq x \leq b$, o $x = \psi(y)$, $c \leq y \leq d$, o uniones finitas de tales gráficas. En la Figura 5.2.5 se muestran algunos ejemplos.

El siguiente teorema proporciona un importante criterio para determinar si una función es integrable.

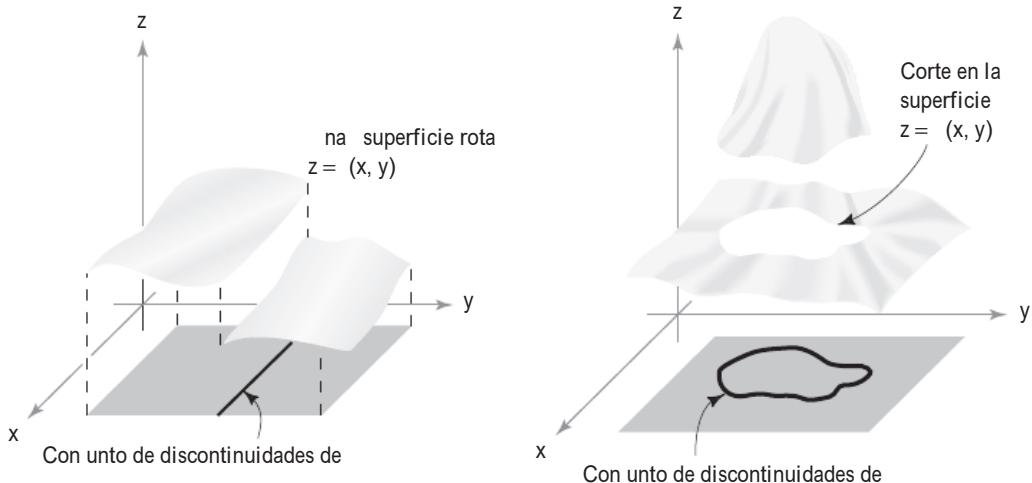


Figura 5.2.4 Apariencia de las gráficas de funciones discontinuas de dos variables.

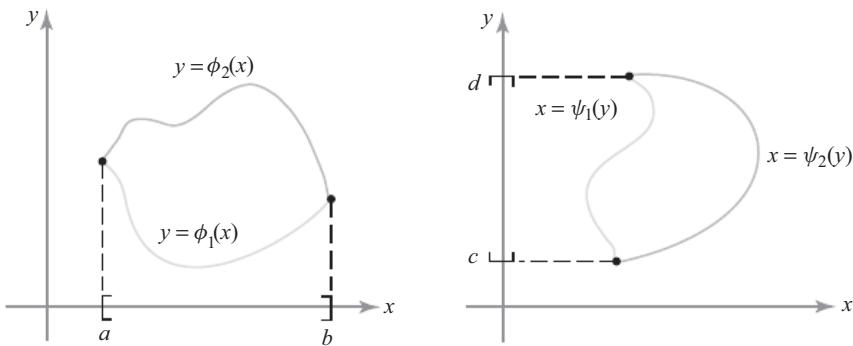


Figura 5.2.5 Curvas en el plano representadas como gráficas.

Teorema 2 Integrabilidad de funciones acotadas Sea $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ una función real acotada en el rectángulo R y supongamos que el conjunto de puntos donde f es discontinua está contenido en una unión finita de gráficas de funciones continuas. Entonces f es integrable en R .

Utilizando el Teorema 2 y las observaciones anteriores, vemos que las funciones dibujadas en la Figura 5.2.4 son integrables sobre R , ya que estas funciones están acotadas y son continuas excepto en gráficas de funciones continuas.

A partir de la definición de integral como límite de sumas y de los teoremas sobre límites, podemos deducir algunas propiedades fundamentales de la integral $\iint_R f(x, y) dA$; estas propiedades son básicamente las mismas que las de la integral de una función real de una única variable.

Sean f y g funciones integrables sobre el rectángulo R y sea c una constante. Entonces $f + g$ y cf son integrables y

(I) Linealidad

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA.$$

(II) Homogeneidad

$$\iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA.$$

(III) Monotonía Si $f(x, y) \geq g(x, y)$, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA.$$

(IV) Aditividad Si $R_i, i = 1, \dots, m$ son rectángulos con interiores disjuntos tales que f está acotada y es integrable sobre cada R_i y si $Q = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_m$ es un rectángulo, entonces $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre Q y

$$\iint_Q f(x, y) dA = \sum_{i=1}^m \iint_{R_i} f(x, y) dA.$$

Las propiedades (I) y (II) son una consecuencia de la definición de integral como límite de una suma y de los siguientes hechos acerca de dos sucesiones convergentes $\{S_n\}$ y $\{T_n\}$, que se demuestran de la misma forma que los teoremas de los límites del Capítulo 2:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n + S_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (cS_n) &= c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.\end{aligned}$$

Para demostrar la monotonía, en primer lugar observamos que si $h(x, y) \geq 0$ y $\{S_n\}$ es una sucesión de sumas de Riemann que converge a $\iint_R h(x, y) dA$, entonces $S_n \geq 0$ para todo n , de modo que $\iint_R h(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq 0$. Si $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in R$, entonces $(f - g)(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) y usando las propiedades (I) y (II), tenemos

$$\iint_R f(x, y) dA - \iint_R g(x, y) dA = \iint_R [f(x, y) - g(x, y)] dA \geq 0.$$

Esto prueba la propiedad (III). La demostración de la propiedad (IV) es más técnica. Esta propiedad debería ser obvia de forma intuitiva.

Otro resultado importante es la desigualdad

$$\left| \iint_R f dA \right| \leq \iint_R |f| dA. \quad (2)$$

Para ver por qué la Ecuación (2) es cierta, obsérvese que por la definición de valor absoluto,

$$-|f| \leq f \leq |f|;$$

y por las propiedades de la monotonía y la homogeneidad de la integración (con $c = -1$),

$$-\iint_R |f| dA \leq \iint_R f dA \leq \iint_R |f| dA,$$

que es equivalente a la Ecuación (2).

Teorema de Fubini

Aunque hemos visto la integrabilidad de una serie de funciones, aún no hemos establecido de forma rigurosa un método general para el cálculo de integrales. En el caso de una variable, evitamos calcular $\int_a^b f(x) dx$ a partir de su definición como límite de una suma utilizando el *teorema fundamental del cálculo integral*. Este importante teorema nos dice que *si f es continua, entonces*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

donde F es una primitiva de f ; es decir, $F' = f$.

Esta técnica no funciona tal como se ha enunciado para funciones $f(x, y)$ de dos variables. Sin embargo, como indicamos en la Sección 5.1, normalmente podemos reducir una integral doble sobre un rectángulo a integrales simples iteradas; el teorema fundamental se puede aplicar entonces a cada una de estas integrales simples. El teorema de Fubini, que hemos mencionado en la última sección, establece rigurosamente esta reducción a integrales iteradas utilizando las sumas de Riemann. Como hemos visto en la Sección 5.1, la reducción,

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy,$$

es una consecuencia del principio de Cavalieri, al menos cuando $f(x, y) \geq 0$. En términos de sumas de Riemann, esto se corresponde con la siguiente igualdad:

$$\sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x \Delta y = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta y \right) \Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x \right) \Delta y,$$

que se puede probar de forma más general de la forma siguiente: sea $[a_{jk}]$ una matriz $n \times n$, donde $0 \leq j \leq n-1$ y $0 \leq k \leq n-1$. Sea $\sum_{j,k=0}^{n-1} a_{jk}$ la suma de los n^2 elementos de la matriz. Entonces

$$\sum_{j,k=0}^{n-1} a_{jk} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{jk} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{jk} \right). \quad (3)$$

En la primera igualdad, el lado derecho representa la suma de los elementos de la matriz primero por filas y después sumando los resultados:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & \overline{a_{0k}} & \cdots & \overrightarrow{a_{0(n-1)}} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{j0} & a_{j1} & & \cdots & \overline{a_{jk}} & \cdots & \overrightarrow{a_{j(n-1)}} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & & \cdots & \overline{a_{(n-1)k}} & \cdots & \overrightarrow{a_{(n-1)(n-1)}} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{n-1} a_{0k} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} a_{(n-1)k} \\ \hline \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{jk} \right) \end{array}$$

Evidentemente, esto es igual a $\sum_{j,k=0}^{n-1} a_{jk}$; es decir, la suma de todos los a_{jk} . De forma similar, la suma $\sum_{k=0}^{n-1} (\sum_{j=0}^{n-1} a_{jk})$ representa una suma de los elementos de la matriz por columnas. Esto prueba la Ecuación (3) y hace más plausible la reducción a integrales iteradas si recordamos que

las integrales se pueden aproximar mediante las correspondientes sumas de Riemann. La demostración del teorema de Fubini emplea esta idea.

Teorema 3 Teorema de Fubini Sea f una función continua con un dominio rectangular $R = [a, b] \times [c, d]$. Entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) dA. \quad (4)$$

Demostración En primer lugar vamos a demostrar que

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \iint_R f(x, y) dA.$$

Sea $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ una partición de $[c, d]$ en n partes iguales. Definimos

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Entonces

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y) dy.$$

Utilizando la versión integral del teorema del valor medio,³ para cada x fijo y para cada k , tenemos

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y) dy = f(x, Y_k(x))(y_{k+1} - y_k)$$

(véase la Figura 5.2.6), donde el punto $Y_k(x)$ pertenece a $[y_k, y_{k+1}]$ y puede depender de x, k y n .

Por tanto, hemos demostrado que

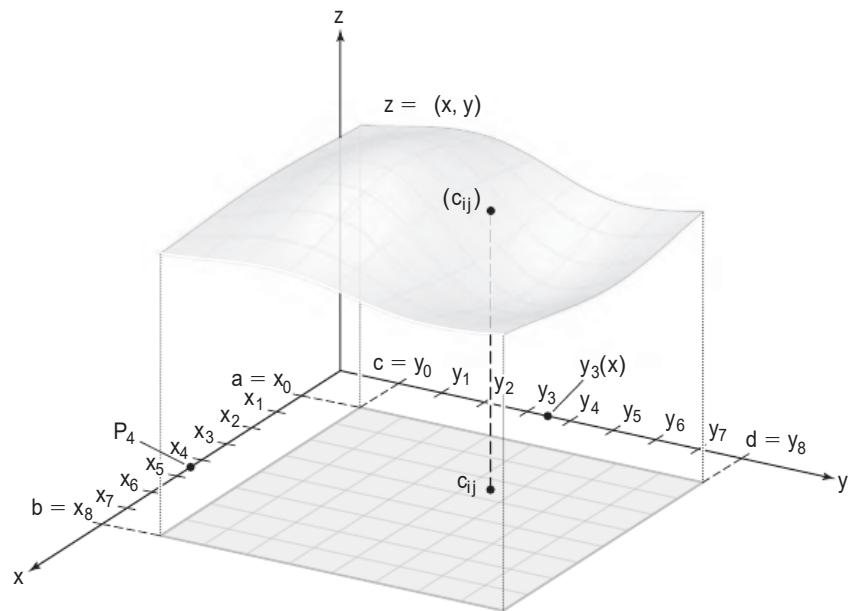
$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x, Y_k(x))(y_{k+1} - y_k). \quad (5)$$

Por la definición de integral de una variable como límite de las sumas de Riemann,

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j)(x_{j+1} - x_j),$$

³Este establece que si $g(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces $\int_a^b g(x) dx = g(c)(b-a)$ para algún punto $c \in [a, b]$. El segundo teorema del valor medio, más general, se demostró en la Sección 3.2.

Figura 5.2.6 Notación necesaria en la demostración del teorema de Fubini: $n = 8$.



donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ es una partición del intervalo $[a, b]$ en n partes iguales y p_j es cualquier punto de $[x_j, x_{j+1}]$. Con $\mathbf{c}_{jk} = (p_j, Y_k(p_j)) \in R_{jk}$, tenemos [sustituyendo p_j por x en la Ecuación (5)]

$$F(p_j) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})(y_{k+1} - y_k).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx &= \int_a^b F(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j)(x_{j+1} - x_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})(y_{k+1} - y_k)(x_{j+1} - x_j) \\ &= \iint_R f(x, y) dA. \end{aligned}$$

Luego hemos probado que

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \iint_R f(x, y) dA.$$

Utilizando el mismo razonamiento, podemos demostrar que

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) dA.$$

Estas dos conclusiones son exactamente lo que queríamos probar. ■

El teorema de Fubini se puede generalizar al caso en que f no sea necesariamente continua. Aunque no vamos a presentar una demostración, vamos a enunciar aquí una versión más general.

Teorema 3' Teorema de Fubini Sea f una función acotada con dominio en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, y supongamos que las discontinuidades de f se encuentran en una unión finita de gráficas de funciones continuas. Si la integral $\int_c^d f(x, y) dy$ existe para cada $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

existe y

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \iint_R f(x, y) dA.$$

Del mismo modo, si $\int_a^b f(x, y) dx$ existe para cada $y \in [c, d]$, entonces

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

existe y

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) dA.$$

Por tanto, si todas estas condiciones se cumplen simultáneamente,

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) dA.$$

Las hipótesis para esta versión del teorema de Fubini son más complicadas que las hechas para el Teorema 3. Son necesarias porque si, por ejemplo, f no es continua en todo el dominio, no hay garantía de que exista $\int_c^d f(x, y) dy$ para cada x .

Ejemplo 1

Calcular $\iint_R (x^2 + y) dA$, donde R es el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

Solución

Por el teorema de Fubini,

$$\iint_R (x^2 + y) dA = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2 + y) dx \right] dy.$$

Por el teorema fundamental del cálculo, podemos integrar con respecto a x :

$$\int_0^1 (x^2 + y) dx = \left[\frac{x^3}{3} + yx \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{3} + y.$$

Por tanto,

$$\iint_R (x^2 + y) \, dA = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + xy \right] dy = \left[\frac{1}{3}y + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$

Lo que hemos hecho es mantener fijo y , integrar con respecto a x y luego evaluar el resultado entre los límites dados para la variable x . A continuación, hemos integrado la función resultante (que solo depende de y) con respecto a y para obtener la respuesta final. ▲

Ejemplo 2

Una consecuencia del teorema de Fubini es que el intercambio del orden de integración en las integrales iteradas no cambia el resultado. Verificar esto para el Ejemplo 1.

Solución

Realizamos la integración en el otro orden:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y) \, dy \, dx &= \int_0^1 \left[x^2y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^1 \, dx = \int_0^1 \left[x^2 + \frac{1}{2} \right] \, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Hemos visto que cuando $f(x, y) \geq 0$ sobre $R = [a, b] \times [c, d]$, la integral $\iint_R f(x, y) \, dA$ se puede interpretar como un volumen. Si la función también toma valores negativos, entonces se puede pensar en la integral doble como en la suma de todos los volúmenes que están entre la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $z = 0$, acotada por los planos $x = a, x = b, y = c$ e $y = d$; aquí los volúmenes por encima de $z = 0$ se cuentan como positivos y los que están por debajo como negativos. Sin embargo, el teorema de Fubini tal como está enunciado sigue siendo válido en el caso en que $f(x, y)$ sea negativa o cambie de signo en R ; es decir, no hay restricción sobre el signo de f en las hipótesis del teorema.

Ejemplo 3

Sea R el rectángulo $[-2, 1] \times [0, 1]$ y sea f definida por $f(x, y) = y(x^3 - 12x)$; $f(x, y)$ toma valores positivos y negativos en R . Calcular la integral $\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \iint_R y(x^3 - 12x) \, dx \, dy$.

Solución

Por el teorema de Fubini, podemos escribir

$$\begin{aligned} \iint_R y(x^3 - 12x) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left[\int_{-2}^1 y(x^3 - 12x) \, dx \right] dy \\ &= \frac{57}{4} \int_0^1 y \, dy = \frac{57}{8}. \end{aligned}$$

Alternativamente, integrando primero con respecto a y , tenemos

$$\iint_R y(x^3 - 12x) \, dy \, dx = \int_{-2}^1 \left[\int_0^1 (x^3 - 12x)y \, dy \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^1 (x^3 - 12x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - 6x^2 \right]_{-2}^1 = \frac{57}{8}.$$

Nota histórica

La integral de Riemann

La primera vez que la mayoría de los estudiantes de matemáticas se encuentran con el nombre de Bernhard Riemann es en los cursos de cálculo, donde estudian la integral de Riemann. Leibniz había entendido la integral de una función de una variable como una suma infinita (el signo \int indica una suma) de áreas infinitesimales $f(x) dx$, donde dx es una “anchura infinitesimal” y $f(x)$ es la altura del correspondiente rectángulo “infinitesimalmente delgado”. Este método intuitivo solía bastar la mayoría de las veces porque el teorema fundamental

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

permitía calcular esta integral (nebulosamente definida) cuando uno conocía la primitiva F de f .

Sin embargo, Riemann estaba interesado en aplicar la integración a funciones de una variable cuya primitiva no era conocida, a funciones en la teoría de números y, en general, a aquellas funciones que “uno no encuentra en la naturaleza”.

Cauchy ya sabía que todas las funciones continuas se podían integrar y que el teorema fundamental era válido—es decir, que toda función continua tenía una primitiva. Sin embargo, sus demostraciones no eran del todo rigurosas. Para aplicaciones a la teoría de números y a ciertas series (llamadas *series de Fourier*), Riemann precisaba una definición clara y precisa de integral, la cual presentó en un artículo en 1854. En dicho artículo, se define la integral y se proporcionan las condiciones suficientes y necesarias para que una función acotada f sea integrable en un intervalo $[a, b]$.

En 1876, el matemático alemán Karl J. Thomae generalizó la integral de Riemann a funciones de varias variables, como hemos visto en este capítulo.

En la primera mitad del siglo diecinueve, Cauchy observó que para funciones continuas de dos variables, se cumplía el teorema de Fubini. Pero Cauchy también proporcionó un ejemplo de una función no acotada de dos variables cuyas integrales iteradas no eran iguales. En 1878, Thomae proporcionó el primer ejemplo de función acotada de dos variables para la que existe una integral iterada pero la otra no. En estos ejemplos, las funciones no eran funciones “integrables Riemann” en el sentido descrito en esta sección. Los ejemplos de Cauchy y Thomae demostraron que hay que actuar con cautela y no suponer necesariamente que las integrales iteradas son siempre iguales.

En 1902, el matemático francés Henri Lebesgue desarrolló una generalización realmente drástica de la integral de Riemann. La teoría de Lebesgue permitió la integración de muchísimas más funciones que las que permitía el método de Riemann. Quizá, sin que Lebesgue fuera consciente de ello, su teoría iba a tener un profundo impacto en el desarrollo de muchas áreas de las matemáticas a lo largo del siglo veinte—en particular, en la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales y en la teoría de la probabilidad. Los estudiantes de matemáticas estudian en mayor profundidad la integral de Lebesgue en cursos más avanzados.

En 1907, el matemático italiano Guido Fubini utilizó la integral de Lebesgue para enunciar en su forma más general el teorema de la igualdad de las integrales iteradas, la forma que se estudia actualmente y que emplean matemáticos y científicos en sus investigaciones.

Ejercicios

- 1.** Calcular cada una de las siguientes integrales si $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

$$\begin{aligned} (a) & \iint_R (x^3 + y^2) \, dA \\ (b) & \iint_R ye^{xy} \, dA \\ (c) & \iint_R (xy)^2 \cos x^3 \, dA \\ (d) & \iint_R \ln [(x+1)(y+1)] \, dA \end{aligned}$$

- 2.** Calcular cada una de las siguientes integrales si $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

$$\begin{aligned} (a) & \iint_R (x^m y^n) \, dx \, dy, \text{ donde } m, n > 0 \\ (b) & \iint_R (ax + by + c) \, dx \, dy \\ (c) & \iint_R \operatorname{sen}(x+y) \, dx \, dy \\ (d) & \iint_R (x^2 + 2xy + y\sqrt{x}) \, dx \, dy \end{aligned}$$

- 3.** Calcular sobre la región R :

$$\iint_R \frac{yx^3}{y^2 + 2} \, dy \, dx, \quad R: [0, 2] \times [-1, 1].$$

- 4.** Calcular sobre la región R :

$$\iint_R \frac{y}{1+x^2} \, dx \, dy, \quad R: [0, 1] \times [-2, 2].$$

- 5.** Dibujar el sólido cuyo volumen está dado por:

$$\int_0^1 \int_0^1 (5 - x - y) \, dy \, dx.$$

- 6.** Dibujar el sólido cuyo volumen está dado por:

$$\int_0^3 \int_0^2 (9 + x^2 + y^2) \, dx \, dy.$$

- 7.** Calcular el volumen de la región que se encuentra sobre el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ y bajo la gráfica de $z = xy$.

- 8.** Calcular el volumen del sólido acotado por el plano xz , el plano yz , el plano xy , los planos $x = 1$ e $y = 1$, y la superficie $z = x^2 + y^4$.

- 9.** Sea f continua en $[a, b]$ y sea g continua en $[c, d]$. Demostrar que

$$\iint_R [f(x)g(y)] \, dx \, dy = \left[\int_a^b f(x) \, dx \right] \left[\int_c^d g(y) \, dy \right],$$

donde $R = [a, b] \times [c, d]$.

- 10.** Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z = \operatorname{sen} y$, los planos $x = 1, x = 0, y = 0$ e $y = \pi/2$, y el plano xy .

- 11.** Calcular el volumen del sólido acotado por la gráfica $z = x^2 + y$, el rectángulo $R = [0, 1] \times [1, 2]$ y las “caras verticales” de R .

- 12.** Sea f continua en $R = [a, b] \times [c, d]$; para $a < x < b, c < y < d$, definimos

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(u, v) \, dv \, du.$$

Demostrar que $\partial^2 F / \partial x \partial y = \partial^2 F / \partial y \partial x = f(x, y)$. Utilizar este ejemplo para explicar la relación entre el teorema de Fubini y la igualdad de las derivadas parciales mixtas.

- 13.** Considérese la integral del Ejercicio 2(a) como una función de m y n ; es decir,

$$f(m, n) := \iint_R x^m y^n \, dx \, dy.$$

Calcular $\lim_{m, n \rightarrow \infty} f(m, n)$.

14. Sea

$$f(m, n) := \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin my \, dx \, dy.$$

Demostrar que $\lim_{m, n \rightarrow \infty} f(m, n) = 0$.

15. Sea $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \text{ racional} \\ 2y & x \text{ irracional.} \end{cases}$$

Demostrar que $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) \, dy \right] dx$ existe pero que f no es integrable.

16. Expresar $\iint_R \cosh xy \, dx \, dy$ como una sucesión convergente, donde $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

17. Aunque el teorema de Fubini se cumple para la mayoría de las funciones que podemos encontrar

en la práctica, debe aplicarse con cautela. Este ejercicio proporciona una función para la que el teorema falla. Utilizando un cambio de variable que implique a la función tangente, demostrar que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy \, dx = \frac{\pi}{4},$$

mientras que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy = -\frac{\pi}{4}.$$

¿Por qué esto no contradice los teoremas 3 y 3'?

18. Sea f una función continua, $f \geq 0$, en el rectángulo R . Si $\iint_R f \, dA = 0$, demostrar que $f = 0$ en R .

5.3 La integral doble sobre regiones más generales

Nuestro objetivo en esta sección es doble: en primer lugar, deseamos definir la integral doble de una función $f(x, y)$ sobre regiones D más generales que los rectángulos; en segundo lugar, queremos desarrollar una técnica para calcular este tipo de integral. Para ello, definiremos tres tipos especiales de subconjuntos del plano xy y luego extenderemos el concepto de integral doble a los mismos.

Regiones elementales

Supongamos que tenemos dos funciones reales continuas $\phi_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $\phi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Sea D el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $x \in [a, b]$ y $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$. Esta región D se denomina ***y-simple***. La Figura 5.3.1 muestra varios ejemplos de regiones *y-simples*. Las curvas y los segmentos de recta que acotan la región constituyen la ***frontera*** de D , que se denota mediante ∂D . Empleamos la denominación “*y-simple*” porque la región se describe de forma relativamente sencilla, expresando y como una función de x .

Decimos que una región D es ***x-simple*** si existen funciones continuas ψ_1 y ψ_2 definidas en $[c, d]$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$y \in [c, d] \quad \text{y} \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),$$

donde $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$. De nuevo, las curvas que delimitan la región D constituyen su frontera ∂D . Algunos ejemplos de regiones *x-simples* se muestran en la Figura 5.3.2. En este caso, x

es la variable distinguida, dada como una función de y . Por tanto, la denominación x -simple es apropiada.

Por último, una región **simple** es aquella que es a la vez x -simple e y -simple; es decir, una región simple se puede describir como una región x -simple y una región y -simple. Un ejemplo de una región simple es un disco unidad (véase la Figura 5.3.3).

En ocasiones, nos referiremos a cualquiera de estas regiones como **regiones elementales**. Observe que la frontera ∂D de una región elemental es el tipo de conjunto de discontinuidades de una función permitido en el Teorema 2.

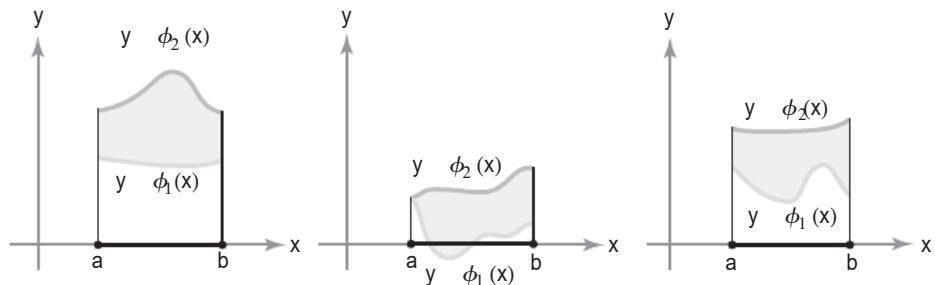


Figura 5.3.1 Algunas regiones y -simples.

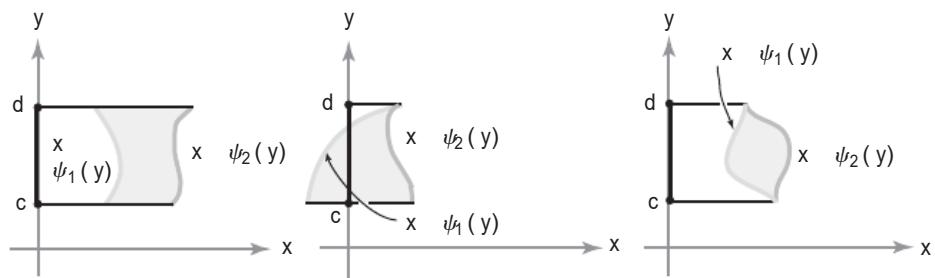


Figura 5.3.2 Algunas regiones x -simples.

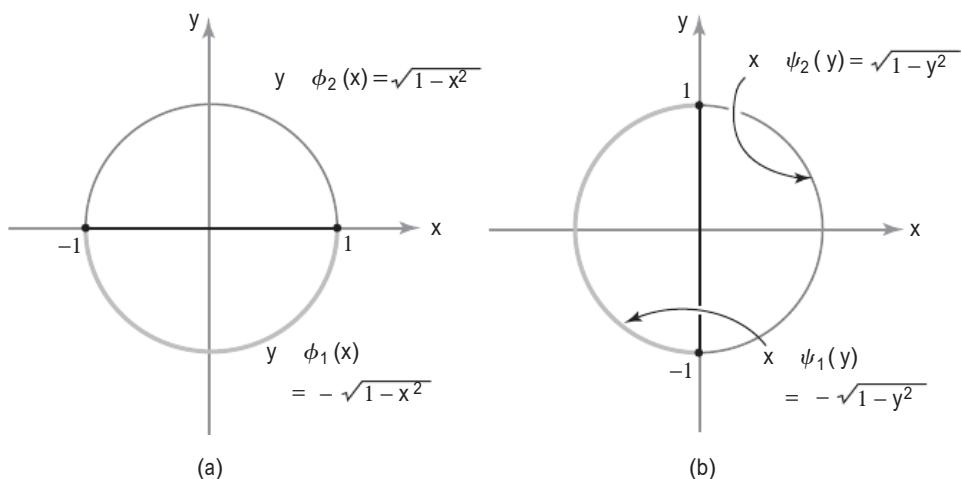


Figura 5.3.3 El disco unidad es una región simple: (a) como una regiÓN y -simple y (b) como una regiÓN x -simple.

La integral sobre una región elemental

Ahora podemos utilizar un “truco” interesante para ampliar la definición de integral de rectángulos a regiones elementales.

Definición Integral sobre una región elemental Si D es una región elemental en el plano, elegimos un rectángulo R que contenga a D . Dada $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, donde f es una función continua (y por tanto acotada), definimos $\iint_D f(x, y) dA$, la **integral de f sobre el conjunto D** , como sigue: extendemos f a una función f^* definida sobre todo R como

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D \text{ y } (x, y) \in R. \end{cases}$$

Obsérvese que f^* está acotada (ya que f lo está) y es continua excepto posiblemente en la frontera de D (véase la Figura 5.3.4). La frontera de D está formada por gráficas de funciones continuas, por lo que f^* es integrable sobre R por el Teorema 2, Sección 5.2. Por tanto, podemos definir

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R f^*(x, y) dA.$$

Cuando $f(x, y) \geq 0$ sobre D , podemos interpretar la integral $\iint_D f(x, y) dA$ como el volumen de la región tridimensional que está entre la gráfica de f y D , como es evidente en la Figura 5.3.4.

Hemos definido $\iint_D f(x, y) dx dy$ eligiendo un rectángulo R que contiene a D . Intuitivamente, debería estar claro que el valor de $\iint_D f(x, y) dx dy$ no depende del rectángulo R seleccionado; demostraremos este hecho al final de la sección.

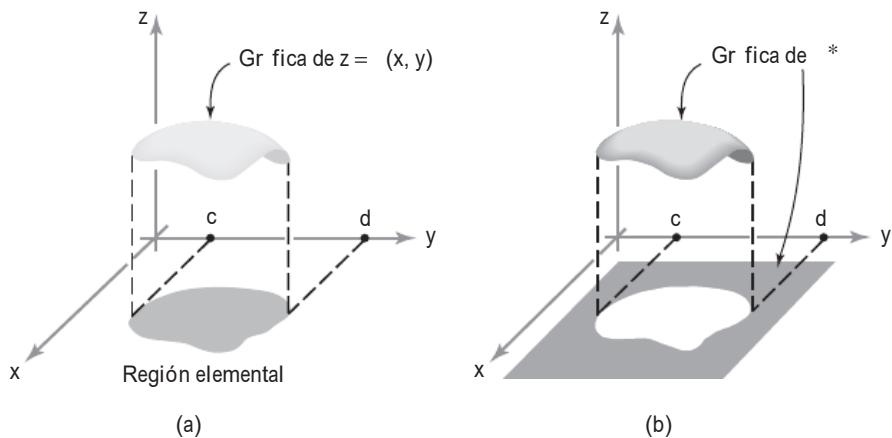


Figura 5.3.4 (a) Gráfica de $z = f(x, y)$ sobre una región elemental D . (b) La región sombreada muestra la gráfica de $z = f^*(x, y)$ en un rectángulo R que contiene a D . En esta imagen vemos que los puntos de frontera de D pueden ser puntos de discontinuidad de f^* , ya que la gráfica de $z = f^*(x, y)$ puede estar rota en estos puntos.

Reducción a integrales iteradas

Si $R = [a, b] \times [c, d]$ es un rectángulo que contiene a D , podemos usar los resultados en las integrales iteradas de la Sección 5.2 para obtener

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) \, dA &= \iint_R f^*(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f^*(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_c^d \int_a^b f^*(x, y) \, dx \, dy,\end{aligned}$$

donde f^* es igual a f en D y cero fuera de D , como antes. Suponemos que D es una región y -simple determinada por las funciones $\phi_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $\phi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Consideremos las integrales iteradas

$$\int_a^b \int_c^d f^*(x, y) \, dy \, dx$$

y, en particular, la integral interior $\int_c^d f^*(x, y) \, dy$ para x fijo (Figura 5.3.5). Por definición, $f^*(x, y) = 0$ si $y < \phi_1(x)$ o $y > \phi_2(x)$, así obtenemos

$$\int_c^d f^*(x, y) \, dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f^*(x, y) \, dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \, dy.$$

A continuación resumimos lo que hemos obtenido.

Teorema 4 Reducción a integrales iteradas Si D es una región y -simple, como se muestra en la Figura 5.3.5, entonces

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx. \quad (1)$$

En el caso de $f(x, y) = 1$ para todo $(x, y) \in D$, $\iint_D f(x, y) \, dA$ es el área de D . Por otro lado, en este caso, el lado derecho de la fórmula (1) se convierte en:

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx = \int_a^b [\phi_2(x) - \phi_1(x)] \, dx = A(D),$$

que es la fórmula para el área de D estudiada en el cálculo de una variable. Por tanto, la fórmula (1) se confirma en este caso.

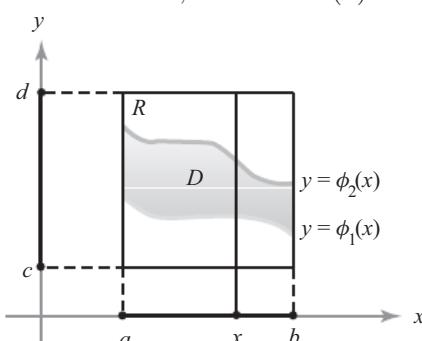
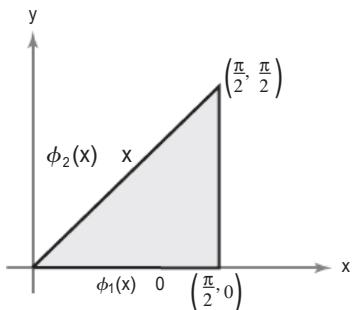


Figura 5.3.5 Esta región entre dos gráficas es una región y -simple.

Ejemplo 1**Solución**

Hallar $\iint_T (x^3y + \cos x) dA$, donde T es el triángulo formado por todos los puntos (x, y) tales que $0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2 - x$.

De acuerdo con la Figura 5.3.6 y la fórmula (1), tenemos

$$\begin{aligned} \iint_T (x^3y + \cos x) dA &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{x} (x^3y + \cos x) dy dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{x^3y^2}{2} + y \cos x \right]_{y=0}^x dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{x^5}{2} + x \cos x \right) dx \\ &= \left[\frac{x^6}{12} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (x \cos x) dx = \frac{\pi^6}{(12)(64)} + [x \sin x + \cos x]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$



Figura 5.3.6 El triángulo T representado como una región y -simple.

En el siguiente ejemplo utilizamos la fórmula (1) para determinar el volumen de un sólido cuya base es una región no rectangular D .

Ejemplo 2

Hallar el volumen del tetraedro delimitado por los planos $y = 0, z = 0, x = 0$ e $y - x + z = 1$ (Figura 5.3.7).

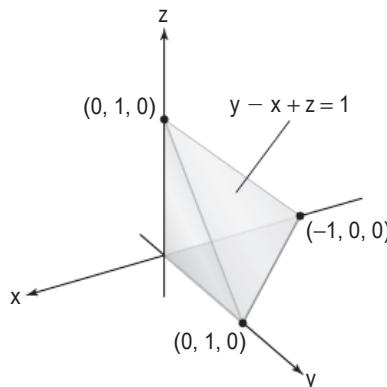


Figura 5.3.7 Un tetraedro delimitado por los planos $y = 0, z = 0, x = 0$ e $y - x + z = 1$.

Solución

En primer lugar, observe que el tetraedro dado tiene una base triangular D cuyos puntos (x, y) satisfacen $-1 \leq x \leq 0$ y $0 \leq y \leq 1 + x$; por tanto, D es una región y -simple. De hecho, D es una región simple (véase la Figura 5.3.8).

Para cualquier punto (x, y) en D , la altura de la superficie z sobre (x, y) es $1 - y + x$. Por tanto, el volumen que buscamos está dado por la integral

$$\iint_D (1 - y + x) dA.$$

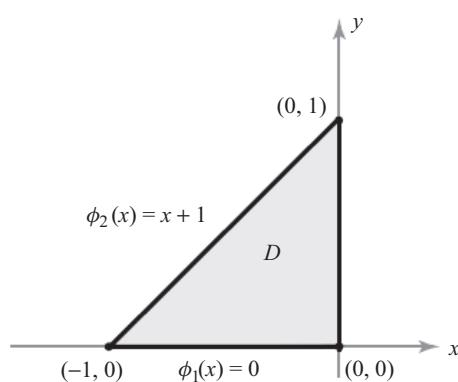


Figura 5.3.8 La base del tetraedro de la Figura 5.3.7 representada como una región y -simple.

Utilizando la fórmula (1) con $\phi_1(x) = 0$ y $\phi_2(x) = x + 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \iint_D (1 - y + x) dA &= \int_{-1}^0 \int_0^{1+x} (1 - y + x) dy dx \\ &= \int_{-1}^0 \left[(1+x)y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{1+x} dx \\ &= \int_{-1}^0 \left[\frac{(1+x)^2}{2} \right] dx = \left[\frac{(1+x)^3}{6} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{6}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Sea D una región y -simple. Describir su área $A(D)$ como límite de las sumas de Riemann.

Solución

Si recordamos la definición, $A(D) = \iint_D dx dy$ es la integral sobre un rectángulo contenedor R de la función $f^* = 1$. Una suma de Riemann S_n para esta integral se obtiene dividiendo R en subrectángulos y haciendo la suma $S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f^*(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x \Delta y$, como en la fórmula (1) de la Sección 5.2. Ahora $f^*(\mathbf{c}_{jk})$ es 1 o 0, dependiendo de si \mathbf{c}_{jk} está o no en D . Consideramos aquellos subrectángulos R_{jk} que tienen intersección no vacía con D y seleccionamos \mathbf{c}_{jk} en $D \cap R_{jk}$. Así, S_n es la suma de las áreas de los subrectángulos que intersecan D y $A(D)$ es el límite de estas sumas cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto, $A(D)$ es el límite de las áreas de los rectángulos que “circunscriben” a D . Recomendamos hacer un dibujo que acompañe a esta exposición. \blacktriangle

Los métodos para tratar las regiones x -simples son completamente análogos a estos. Específicamente, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4' Integrales iteradas para regiones x -simples

Supongamos que D es el conjunto de puntos (x, y) tales que $y \in [c, d]$ y $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$. Si f es continua en D , entonces

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy. \quad (2)$$

Para hallar el área de D , sustituimos $f = 1$ en la fórmula (2); esto da

$$\iint_D dA = \int_c^d (\psi_2(y) - \psi_1(y)) dy.$$

De nuevo, este resultado para el área coincide con los resultados del cálculo de una variable para el área de una región entre dos curvas.

Tanto el método para regiones y -simples como el método para regiones x -simples se pueden utilizar para integrales sobre regiones simples.

De las fórmulas (1) y (2) se deduce que $\iint_D f dA$ es independiente de la elección del rectángulo R que contiene a D utilizado en la definición de $\iint_D f dA$, porque, si hubiéramos elegido otro rectángulo que contuviera a D , habríamos llegado a la misma fórmula (1).

Ejercicios

- 1.** En los apartados (a) hasta (d), cada integral iterada es una integral sobre una región D . Establecer la correspondencia de cada integral con la región de integración correcta (véase la figura de la página siguiente).

(a) $\int_1^2 \int_{\ln x}^{e^x} dy dx$

(b) $\int_0^2 \int_{(1/8)x}^{x^{1/3}} dy dx$

(c) $\int_0^2 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^0 dx dy$

(d) $\int_0^3 \int_{\arccos y/3}^0 dx dy$

- 2.** Dibujar la región D en \mathbb{R}^2 que representa la región de integración:

(a) $\int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} (4-x) dx dy$

(b) $\int_0^3 \int_{-x}^x (6+y-2x) dy dx$

- 3.** Evaluar las siguientes integrales iteradas y dibujar las regiones D determinadas por los límites. Establecer si las regiones son x -simples, y -simples o simples.

(a) $\int_0^1 \int_0^{x^2} dy dx$

(b) $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy dx$

(c) $\int_0^1 \int_1^{e^x} (x+y) dy dx$

- (d) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y dy dx$
- 4.** Calcular las siguientes integrales y dibujar las regiones correspondientes.

(a) $\int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2 + y) dx dy$

(b) $\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy dx$

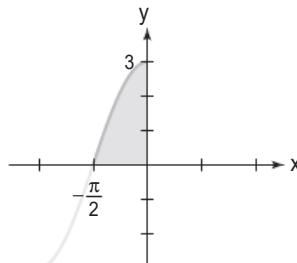
(c) $\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dy dx$

(d) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \sin x dy dx$

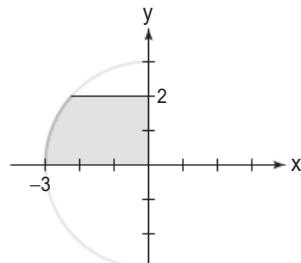
(e) $\int_0^1 \int_{y^2}^y (x^n + y^m) dx dy, \quad m, n > 0$

(f) $\int_{-1}^0 \int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x dy dx$

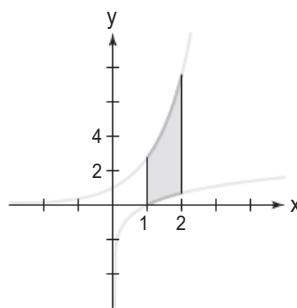
- 5.** Utilizar integrales dobles para calcular el área de un círculo de radio r .
- 6.** Utilizando integrales dobles, determinar el área de una elipse con semiejes de longitudes a y b .
- 7.** ¿Cuál es el volumen de un granero que tiene una base rectangular de 6 metros por 12 metros y paredes de 9 metros de altura en el frente (que suponemos que está en el lado de 6 metros) y de 12 metros en la parte posterior? El granero tiene un techo plano. Utilice integrales dobles para calcular el volumen.



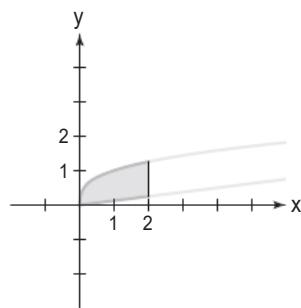
(i)



(ii)



(iii)



(i)

8. Sea D la región limitada por los ejes x e y positivos y la recta $3x + 4y = 10$. Calcular

$$\iint_D (x^2 + y^2) \, dA.$$

9. Sea D la región limitada por el eje y y la parábola $x = -4y^2 + 3$. Calcular

$$\iint_D x^3 y \, dx \, dy.$$

10. Calcular $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + xy - y^2) \, dy \, dx$. Describir esta integral iterada como una integral sobre una cierta región D en el plano xy .

11. Sea D la región dada como el conjunto de (x, y) , donde $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ y $y \geq 0$. ¿Es D una región elemental? Calcular $\iint_D f(x, y) \, dA$, donde $f(x, y) = 1 + xy$.

12. Calcular la siguiente integral doble:

$$\iint_D \cos y \, dx \, dy,$$

donde la región D está limitada por $y = 2x$, $y = x$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

13. Calcular la siguiente integral doble:

$$\iint_D xy \, dA,$$

donde la región D es la región triangular cuyos vértices son $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$.

14. Utilizar la fórmula $A(D) = \iint_D dx \, dy$ para hallar el área encerrada por un período de una función $\sin x$, para $0 \leq x \leq 2\pi$ el eje x .

15. Hallar el volumen de la región interior a la superficie $z = x^2 + y^2$ y que está entre $z = 0$ y $z = 10$.

16. Escribir la integral que permite calcular el volumen de un cono de altura h y cuya base tiene un radio r .

17. Calcular $\iint_D y \, dA$, donde D es el conjunto de puntos (x, y) tales que $0 \leq 2x/\pi \leq y, y \leq \sin x$.

18. Del Ejercicio 9 de la Sección 5.2 sabemos que

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_c^d f(x)g(y) \, dy \, dx \\ &= \left(\int_a^b f(x) \, dx \right) \left(\int_c^d g(y) \, dy \right) \end{aligned}$$

¿Es cierto que

$$\begin{aligned} & \iint_D f(x)g(y) \, dx \, dy \\ &= \left(\int_a^b f(x) \, dx \right) \left(\int_{\phi_1(a)}^{\phi_2(b)} g(y) \, dy \right) \end{aligned}$$

para regiones y -simples?

- 19.** Sea D una región formada por el conjunto de puntos (x, y) tales que $-\phi(x) \leq y \leq \phi(x)$ y $a \leq x \leq b$, donde ϕ es una función conti-

nua no negativa sobre el intervalo $[a, b]$. Sea $f(x, y)$ una función sobre D tal que $f(x, y) = -f(x, -y)$ para todo $(x, y) \in D$. Demostrar que $\iint_D f(x, y) \, dA = 0$.

- 20.** Utilizando los métodos vistos en esta sección demostrar que el área del paralelogramo D determinado por los dos vectores planos \mathbf{a} y \mathbf{b} es $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$, donde $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j}$.

- 21.** Describir el área $A(D)$ de una región como límite de áreas de rectángulos inscritos, como en el Ejemplo 3.

5.4 Cambio del orden de integración

Supongamos que D es una región simple —es decir, es tanto una región x -simple como y -simple. Por tanto, podemos expresarla como el conjunto de puntos (x, y) tales que

$$a \leq x \leq b, \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x),$$

y también como el conjunto de puntos (x, y) tales que

$$c \leq y \leq d, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y).$$

Así, tenemos las fórmulas

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Si se nos requiere calcular una de las integrales iteradas anteriores, podemos hacerlo calculando la otra integral iterada; esta técnica se denomina *cambio del orden de integración*. Puede resultar útil realizar tal cambio al evaluar integrales iteradas, porque una de ellas puede ser más difícil de calcular que la otra.

Ejemplo 1

Cambiando el orden de integración, calcular

$$\int_0^a \int_0^{(a^2-x^2)^{1/2}} (a^2 - y^2)^{1/2} \, dy \, dx.$$

Solución

Obsérvese que x varía entre 0 y a , y para cada x fijo, tenemos $0 \leq y \leq (a^2 - x^2)^{1/2}$. Por tanto, la integral iterada es equivalente a la integral doble

$$\iint_D (a^2 - y^2)^{1/2} \, dy \, dx,$$

donde D es el conjunto de puntos (x, y) tales que $0 \leq x \leq a$ y $0 \leq y \leq (a^2 - x^2)^{1/2}$. Esta es la representación de un cuarto (el cuadrante positivo) del disco de radio a ; por tanto, D también se puede describir como el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$0 \leq y \leq a, \quad 0 \leq x \leq (a^2 - y^2)^{1/2}$$

(véase la Figura 5.4.1). Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{(a^2-x^2)^{1/2}} (a^2 - y^2)^{1/2} dy dx &= \int_0^a \left[\int_0^{(a^2-y^2)^{1/2}} (a^2 - y^2)^{1/2} dx \right] dy \\ &= \int_0^a [x(a^2 - y^2)^{1/2}]_{x=0}^{(a^2-y^2)^{1/2}} dy \\ &= \int_0^a (a^2 - y^2) dy = \left[a^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^a = \frac{2a^3}{3}. \end{aligned}$$

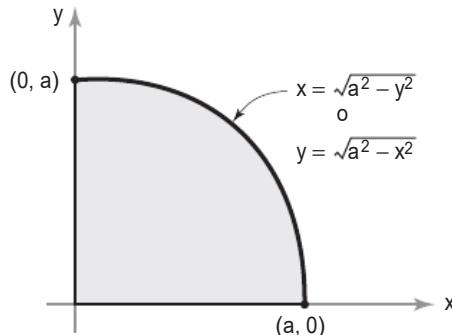


Figura 5.4.1 La parte del cuadrante positivo de un disco de radio a . ▲

Podríamos haber calculado directamente la integral iterada inicial, pero, como podemos verificar fácilmente, cambiar el orden de integración hace el problema mucho más simple. El siguiente ejemplo muestra que puede no ser obvio cómo calcular una integral iterada, y no obstante ser relativamente sencillo calcular la integral iterada obtenida cambiando el orden de integración.

Ejemplo 2

Calcular

$$\int_1^2 \int_0^{\log x} (x-1) \sqrt{1+e^{2y}} dy dx.$$

Solución

Cambiar primero el orden de integración simplificará las cosas. Téngase en cuenta que la integral es igual a $\iint_D (x-1) \sqrt{1+e^{2y}} dA$, donde D es el conjunto de puntos (x, y) tales que

$$1 \leq x \leq 2 \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq \log x.$$

La región D es simple (véase la Figura 5.4.2) y también se puede describir mediante

$$0 \leq y \leq \log 2 \quad \text{y} \quad e^y \leq x \leq 2.$$

Por tanto, la integral iterada dada es igual a

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\log 2} \int_{e^y}^2 (x-1) \sqrt{1+e^{2y}} \, dx \, dy &= \int_0^{\log 2} \sqrt{1+e^{2y}} \left[\int_{e^y}^2 (x-1) \, dx \right] \, dy \\
 &= \int_0^{\log 2} \sqrt{1+e^{2y}} \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_{e^y}^2 \, dy \\
 &= - \int_0^{\log 2} \left(\frac{e^{2y}}{2} - e^y \right) \sqrt{1+e^{2y}} \, dy \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{\log 2} e^{2y} \sqrt{1+e^{2y}} \, dy + \int_0^{\log 2} e^y \sqrt{1+e^{2y}} \, dy. \tag{1}
 \end{aligned}$$

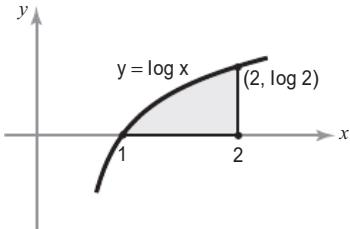


Figura 5.4.2 D es la región de integración para el Ejemplo 2.

En la primera integral de la expresión (1), sustituimos $u = e^{2y}$ y en la segunda, $v = e^y$. De este modo, obtenemos

$$-\frac{1}{4} \int_1^4 \sqrt{1+u} \, du + \int_1^2 \sqrt{1+v^2} \, dv. \tag{2}$$

Ambas integrales de la expresión (2) pueden calcularse fácilmente mediante las técnicas del cálculo de una variable (o consultando la tabla de integrales que se proporciona al final del libro). Para la primera integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \int_1^4 \sqrt{1+u} \, du &= \left[\frac{1}{6}(1+u)^{3/2} \right]_1^4 = \frac{1}{6}[(1+4)^{3/2} - 2^{3/2}] \tag{3} \\
 &= \frac{1}{6}[5^{3/2} - 2^{3/2}].
 \end{aligned}$$

La segunda integral es

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 \sqrt{1+v^2} \, dv &= \frac{1}{2} \left[v \sqrt{1+v^2} + \log(\sqrt{1+v^2} + v) \right]_1^2 \\
 &= \frac{1}{2} [2\sqrt{5} + \log(\sqrt{5} + 2)] - \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \log(\sqrt{2} + 1)] \tag{4}
 \end{aligned}$$

(véase la fórmula 43 en la tabla de integrales disponible al final del libro). Por último, restamos la Ecuación (3) de la Ecuación (4) para obtener el resultado

$$\frac{1}{2} \left(2\sqrt{5} - \sqrt{2} + \log \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{2} + 1} \right) - \frac{1}{6}[5^{3/2} - 2^{3/2}].$$

▲

Desigualdad del valor medio

Terminamos esta sección con una desigualdad que nos ayudará a estimar integrales. Supongamos que m y M son números tales que para todo $(x, y) \in D$ y $m \leq f(x, y) \leq M$. Entonces integrando sobre D , obtenemos

$$m \cdot A(D) \leq \iint_D f(x, y) \, dA \leq M \cdot A(D), \tag{5}$$

donde $A(D)$ es el área de la región D . Incluso aunque esta desigualdad es obvia, puede ayudarnos a *estimar* las integrales que no se pueden calcular fácilmente *de forma exacta*.

Ejemplo 3

Consideremos la integral

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^6+y^8}} dx dy,$$

donde D es el cuadrado unidad $[0, 1] \times [0, 1]$. Puesto que el integrando satisface, para x e y entre 0 y 1,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^6+y^8}} \leq 1,$$

y dado que el cuadrado tiene área igual a 1, obtenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^6+y^8}} dx dy \leq 1.$$



Igualdad del valor medio

La desigualdad del valor medio puede convertirse en una igualdad cuando f es continua. He aquí el enunciado formal.

Teorema 5 Teorema del valor medio para integrales dobles

Supongamos que $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y que D es una región elemental. Entonces, para algún punto (x_0, y_0) en D , tenemos

$$\iint_D f(x, y) dA = f(x_0, y_0)A(D),$$

donde $A(D)$ denota el área de D .

Demostración No podemos probar este teorema de forma rigurosa, ya que requiere algunos conceptos acerca de las funciones continuas que no se demuestran en este curso; no obstante, podemos esbozar las principales ideas que subyacen a la demostración.

Puesto que f es continua en D , tiene un valor máximo M y un valor mínimo m . Por tanto, $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in D$. Además, $f(x_1, y_1) = m$ y $f(x_2, y_2) = M$ para algún (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en D .

Dividiendo entre $A(D)$ la desigualdad (5), tenemos

$$m \leq \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x, y) dA \leq M. \quad (6)$$

Como una función continua en D toma todos los valores comprendidos entre sus valores máximo y mínimo (este es el *teorema de los valores intermedios* de dos variables que se demuestra en cálculo avanzado; véase también el Ejercicio de repaso 32) y como por la desigualdad (6) el

número $[1/A(D)] \iint_D f(x, y) dA$ se encuentra entre estos valores, debe existir un punto $(x_0, y_0) \in D$ tal que

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x, y) dA,$$

que es precisamente la conclusión del Teorema 5. ■

Ejercicios

- 1.** Cambiar el orden de integración de las siguientes integrales, pero no calcularlas:

(a) $\int_0^8 \int_{1/2y}^4 dx dy$

(b) $\int_0^9 \int_0^{\sqrt{y}} dx dy$

(c) $\int_0^4 \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} dx dy$

(d) $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\sin x} dy dx$

- 2.** Cambiar el orden de integración y calcular:

$$\int_0^1 \int_y^1 \sin(x^2) dx dy.$$

- 3.** En las siguientes integrales, cambiar el orden de integración, dibujar las regiones correspondientes y calcular la integral de las dos formas.

(a) $\int_0^1 \int_x^1 xy dy dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \cos \theta dr d\theta$

(c) $\int_0^1 \int_1^{2-y} (x+y)^2 dx dy$

(d) $\int_a^b \int_a^y f(x, y) dx dy$

(Expresar las respuestas en términos de primitives).

- 4.** Hallar

(a) $\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2 dx dy$

(b) $\int_{-3}^1 \int_{-\sqrt{(9-y^2)}}^{\sqrt{(9-y^2)}} x^2 dx dy$

(c) $\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2} dx dy$

(d) $\int_0^1 \int_{\tan^{-1} y}^{\pi/4} (\sec^5 x) dx dy$

- 5.** Cambiar el orden de integración y calcular:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dx dy.$$

- 6.** Considerando el hecho intuitivo de que si una región D en \mathbb{R}^2 se puede dividir en una unión disjunta de subconjuntos $D = D_1 \cup D_2$, entonces una integral doble sobre D también se puede dividir en una suma de dos integrales:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dA &= \\ &= \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA. \end{aligned}$$

(Véase la Sección 5.2 para un enunciado análogo sobre una caja rectangular.) ¿Son verdaderos o falsos los intentos siguientes de cambiar el orden de integración?

(a) $\int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} dy dx =$
 $\int_0^{\sqrt{2}/2} \int_0^{\arcsin y} dx dy + \int_{\sqrt{2}/2}^2 \int_0^{\arccos y} dx dy$

(b) $\int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} dy dx = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} dx dy$

(c) $\int_0^2 \int_0^{(1/2)x} dy dx + \int_2^5 \int_{(1/3)x-(2/3)}^1 dy dx =$
 $\int_0^1 \int_{2y}^{3y+2} dx dy$

$$(d) \quad \int_0^1 \int_1^{e^x} dy dx = \int_1^e \int_{\ln y}^1 dx dy$$

7. Si $f(x, y) = e^{\operatorname{sen}(x+y)}$ y $D = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$, demostrar que

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \iint_D f(x, y) dA \leq e.$$

8. Demostrar que

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 1) \leq \iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + (xy)^4} dx dy \leq 1.$$

9. Si $D = [-1, 1] \times [-1, 2]$, demostrar que

$$1 \leq \iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1} \leq 6.$$

10. Utilizando la desigualdad del valor medio, demostrar que

$$\frac{1}{6} \leq \iint_D \frac{dA}{y - x + 3} \leq \frac{1}{4},$$

donde D es el triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(1, 0)$.

11. Calcular el volumen de un elipsoide con semiejes a, b y c . (SUGERENCIA: utilizar simetría y calcular en primer lugar el volumen de medio elipsoide.)

12. Calcular $\iint_D f(x, y) dA$, donde $f(x, y) = y^2 \sqrt{x}$ y D es el conjunto de puntos (x, y) , donde $x > 0$, $y > x^2$ e $y < 10 - x^2$.

13. Hallar el volumen de la región determinada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10, z \geq 2$. Utilizar el método del disco del cálculo de una variable y explicar cómo el método está relacionado con el principio de Cavalieri.

14. Calcular $\iint_D e^{x-y} dx dy$, donde D es el interior del triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(1, 3)$ y $(2, 2)$.

15. Calcular $\iint_D y^3 (x^2 + y^2)^{-3/2} dx dy$, donde D es la región determinada por las condiciones $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ y $x^2 + y^2 \leq 1$.

16. Sabiendo que la integral doble $\iint_D f(x, y) dx dy$ de una función continua positiva f es igual a la integral iterada $\int_0^1 \left[\int_{x^2}^x f(x, y) dy \right] dx$, dibujar la región D y cambiar el orden de integración.

17. Sabiendo que la integral doble $\iint_D f(x, y) dx dy$ de una función continua positiva f es igual a la integral iterada $\int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx \right] dy$, dibujar la región D y cambiar el orden de integración.

18. Demostrar que

$$2 \int_a^b \int_x^b f(x) f(y) dy dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2$$

SUGERENCIA: téngase en cuenta que

$$\left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 = \iint_{[a,b] \times [a,b]} f(x) f(y) dx dy$$

19. Demostrar que (véase la Sección 2.5, Ejercicio 29)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_a^x \int_c^d f(x, y, z) dz dy &= \\ \int_c^d f(x, y, z) dz + \int_a^x \int_c^d f_x(x, y, z) dz dy. & \end{aligned}$$

5.5 La integral triple

Las integrales triples son necesarias en muchos problemas de física. Por ejemplo, si la temperatura interior de un horno no es uniforme, determinar la temperatura media implica “sumar” los valores de la función de temperatura en todos los puntos de la región sólida delimitada por las paredes del horno y después dividir el resultado entre el volumen del mismo. Tal suma se expresa matemáticamente como una integral triple.

Definición de integral triple

Nuestro objetivo ahora es definir la integral triple de una función $f(x, y, z)$ en una caja (paralelepípedo rectangular) $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$. Procediendo como en las integrales dobles, dividimos los tres lados de B en n partes iguales y formamos la suma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{ijk}) \Delta V,$$

donde \mathbf{c}_{ijk} es un punto de B_{ijk} , el ijk -ésimo paralelepípedo rectangular (o caja) en la partición de B y ΔV es el volumen de B_{ijk} (véase la Figura 5.5.1).

Definición Integral triple Sea f una función acotada de tres variables definida en B . Si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ existe y es independiente de la elección de \mathbf{c}_{ijk} , decimos que f es **integrable** y llamamos a S su **integral triple** (o simplemente la integral) de f sobre B y la denotamos mediante

$$\iiint_B f \, dV, \quad \iiint_B f(x, y, z) \, dV \quad \text{o} \quad \iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Propiedades de las integrales triples

Como antes, podemos demostrar que las funciones continuas definidas en B son integrables. Además, las funciones acotadas cuyas discontinuidades están contenidas en gráficas de funciones continuas [tales como

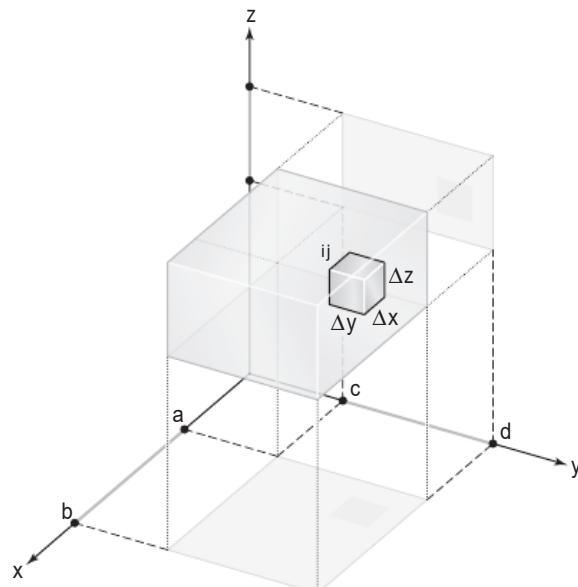


Figura 5.5.1 Partición de una caja B en n^3 subcajas B_{ijk} .

$x = \alpha(y, z), y = \beta(x, z)$ o $z = \gamma(x, y)$] son integrables. Las otras propiedades básicas (tales como el hecho de que la integral de una suma es la suma de las integrales) para integrales dobles también se cumplen para las integrales triples. Especialmente importante es la reducción a integrales iteradas:

Reducción a integrales iteradas Sea $f(x, y, z)$ una función integrable en la caja $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$. Entonces cualquier integral iterada, si existe, es igual a la integral triple; es decir,

$$\begin{aligned}\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz &= \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_p^q \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) dy dx dz \\ &= \int_a^b \int_p^q \int_c^d f(x, y, z) dy dz dx,\end{aligned}$$

y así sucesivamente (existen seis posibles órdenes de integración.)

Ejemplo 1

- (a) Sea B la caja $[0, 1] \times [-\frac{1}{2}, 0] \times [0, \frac{1}{3}]$. Calcular

$$\iiint_B (x + 2y + 3z)^2 dx dy dz.$$

- (b) Verificar que se obtiene la misma respuesta si la integración se hace primero con respecto a y , después con respecto a z y luego con respecto a x .

Solución

- (a) De acuerdo con el principio de reducción a integrales iteradas, esta integral se puede calcular como sigue

$$\begin{aligned}&\int_0^{1/3} \int_{-1/2}^0 \int_0^1 (x + 2y + 3z)^2 dx dy dz \\ &= \int_0^{1/3} \int_{-1/2}^0 \left[\frac{(x + 2y + 3z)^3}{3} \Big|_{x=0}^1 \right] dy dz \\ &= \int_0^{1/3} \int_{-1/2}^0 \frac{1}{3} [(1 + 2y + 3z)^3 - (2y + 3z)^3] dy dz \\ &= \int_0^{1/3} \frac{1}{24} [(1 + 2y + 3z)^4 - (2y + 3z)^4] \Big|_{y=-1/2}^0 dz \\ &= \int_0^{1/3} \frac{1}{24} [(3z + 1)^4 - 2(3z)^4 + (3z - 1)^4] dz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{24 \cdot 15} \left[(3z+1)^5 - 2(3z)^5 + (3z-1)^5 \right] \Big|_{z=0}^{1/3} \\
 &= \frac{1}{24 \cdot 15} (2^5 - 2) = \frac{1}{12}.
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 &\iiint_B (x+2y+3z)^2 dy dz dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1/3} \int_{-1/2}^0 (x+2y+3z)^2 dy dz dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1/3} \left[\frac{(x+2y+3z)^3}{6} \Big|_{y=-1/2}^0 \right] dz dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1/3} \frac{1}{6} [(x+3z)^3 - (x+3z-1)^3] dz dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{6} \left\{ \left[\frac{(x+3z)^4}{12} - \frac{(x+3z-1)^4}{12} \right] \Big|_{z=0}^{1/3} \right\} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{72} [(x+1)^4 + (x-1)^4 - 2x^4] dx \\
 &= \frac{1}{72} \frac{1}{5} [(x+1)^5 + (x-1)^5 - 2x^5] \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{12}. \quad \blacktriangle
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2Integrar e^{x+y+z} en la caja $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.**Solución**

Realizamos las integraciones en el orden habitual:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y+z} dx dy dz = \int_0^1 \int_0^1 (e^{x+y+z} \Big|_{x=0}^1) dy dz \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 (e^{1+y+z} - e^{y+z}) dy dz = \int_0^1 \left[e^{1+y+z} - e^{y+z} \right]_{y=0}^1 dz \\
 &= \int_0^1 \left[e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^z \right] dz = \left[e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^z \right]_0^1 \\
 &= e^3 - 3e^2 + 3e - 1 = (e-1)^3. \quad \blacktriangle
 \end{aligned}$$

Como en el caso de dos variables, definimos la integral de una función f en una región acotada W definiendo una nueva función f^* , que es igual a f en W y cero fuera de W , y definiendo después

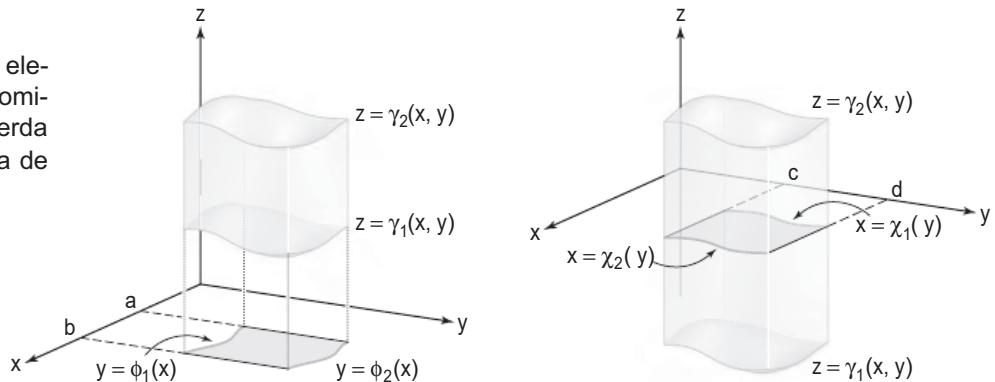
$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f^*(x, y, z) dx dy dz,$$

donde B es cualquier caja que contenga a la región W .

Regiones elementales

Como antes, restringimos nuestra atención a regiones particularmente sencillas. Una **región elemental** en el espacio tridimensional es aquella que se define restringiendo una de las variables a estar entre dos funciones de las restantes variables, siendo el dominio de estas funciones una región elemental (es decir, x -simple o y -simple) en el plano. Por ejemplo, si D es una región elemental en el plano xy y si $\gamma_1(x, y)$ y $\gamma_2(x, y)$ son dos funciones tales que $\gamma_2(x, y) \geq \gamma_1(x, y)$, una región elemental formada por todos los puntos (x, y, z) tales que (x, y) están en D y $\gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)$. En la Figura 5.5.2 se muestran dos regiones elementales.

Figura 5.5.2 Dos regiones elementales en el espacio. El dominio D en la figura de la izquierda es y -simple, mientras que la de la derecha es x -simple.



Ejemplo 3

Describir la bola unidad $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ como una región elemental.

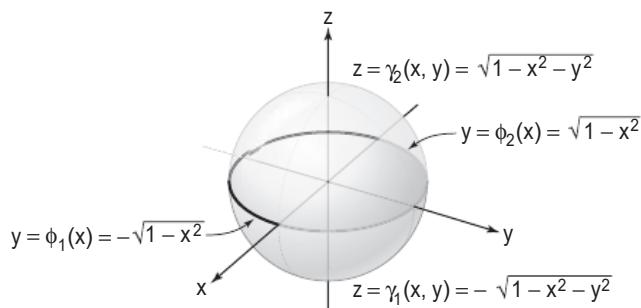
Solución

Esto se puede hacer de varias formas. Una de ellas, en la que D es una región y -simple, es:

$$\begin{aligned} -1 &\leq x \leq 1, \\ -\sqrt{1-x^2} &\leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ -\sqrt{1-x^2-y^2} &\leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

Al hacer esto, en primer lugar escribimos los hemisferios superior e inferior como $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ y $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$, respectivamente, donde x e y se mueven dentro del disco unidad (es decir, $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ y x varía entre -1 y 1). (Véase la Figura 5.5.3.) Podemos describir la región de otras formas intercambiando los papeles de x , y y z en las desigualdades. ▲

Figura 5.5.3 La bola unidad como una región elemental en el espacio.



Integrales sobre regiones elementales

Como en el caso de las integrales en el plano, cualquier función de tres variables que sea continua en una región elemental es integrable en dicha región. Un argumento como el utilizado para las integrales dobles demuestra que una integral triple sobre una región elemental se puede expresar como una integral iterada en la que los límites de integración son funciones. En el siguiente recuadro se proporcionan las fórmulas para dichas integrales iteradas.

Integrales triples mediante integración iterada Supongamos que W es una región elemental en la que z se mueve entre dos funciones de x e y . Entonces, o bien

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

[véase la Figura 5.5.2 (izquierda)] o bien

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z) dz dx dy$$

[véase la Figura 5.5.2 (derecha)].

Si $f = 1$, obtenemos la integral $\iiint_W dx dy dz$, que es el **volumen** de la región W .

Ejemplo 4

Comprobar la fórmula del volumen para la bola de radio 1:

$$\iiint_W dx dy dz = \frac{4}{3}\pi,$$

donde W es el conjunto de los (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Solución

Utilizamos la descripción de la bola unidad del Ejemplo 3. De acuerdo con la primera fórmula del recuadro anterior, la integral es

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dy dx.$$

Manteniendo y y x fijas e integrando con respecto a z , obtenemos

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[z \Big|_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right] dy dx = 2 \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)^{1/2} dy \right] dx.$$

Como x es fijo en la integral con respecto a y , esta se puede expresar como $\int_{-a}^a (a^2 - y^2)^{1/2} dy$, donde $a = (1-x^2)^{1/2}$. Esta integral es el área de una región semicircular de radio a , de modo que

$$\int_{-a}^a (a^2 - y^2)^{1/2} dy = \frac{a^2}{2}\pi.$$

(También podríamos haber empleado un cambio de variable trigonométrico o una tabla de integrales.) Por tanto,

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)^{1/2} dy = \frac{1-x^2}{2}\pi,$$

de modo que

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)^{1/2} dy dx &= 2 \int_{-1}^1 \pi \frac{1-x^2}{2} dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=-1}^1 = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$



En la Figura 5.5.4 se muestran otros tipos de regiones elementales. Por ejemplo, en la segunda región, (y, z) está en la región elemental del plano yz y x se mueve entre dos gráficas:

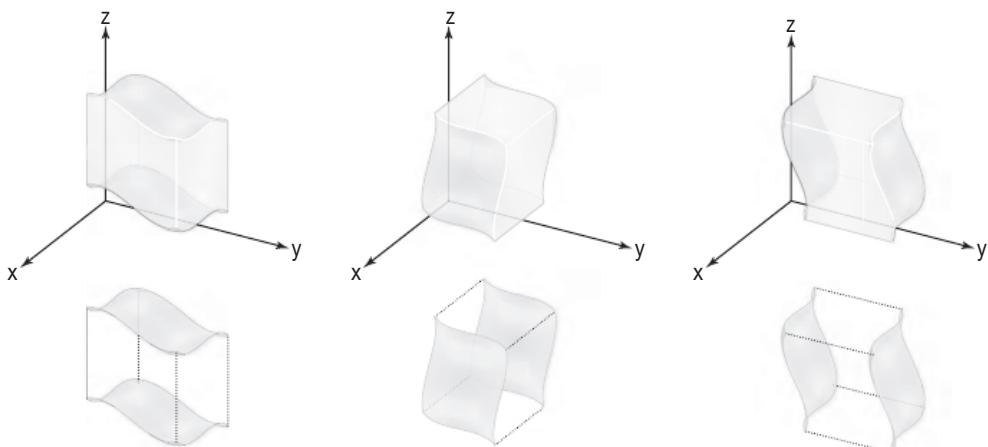
$$\rho_1(y, z) \leq x \leq \rho_2(y, z).$$

Como se muestra en la Figura 5.5.5, algunas regiones elementales se pueden describir de tres maneras. Estas regiones se denominan **regiones elementales simétricas**.

A cada descripción de una región como una región elemental le corresponde una fórmula de integración. Por ejemplo, si W se expresa como el conjunto de todos los (x, y, z) tales que

$$c \leq y \leq d, \quad \psi_1(y) \leq z \leq \psi_2(y), \quad \rho_1(y, z) \leq x \leq \rho_2(y, z),$$

entonces



Las partes superior e inferior
son superficies $z = \gamma(x, y)$

Las partes frontal y posterior
son superficies $x = \rho(y, z)$

Los lados izquierdo y derecho
son superficies $y = \delta(x, z)$

Figura 5.5.4 Tipos de regiones elementales en el espacio.

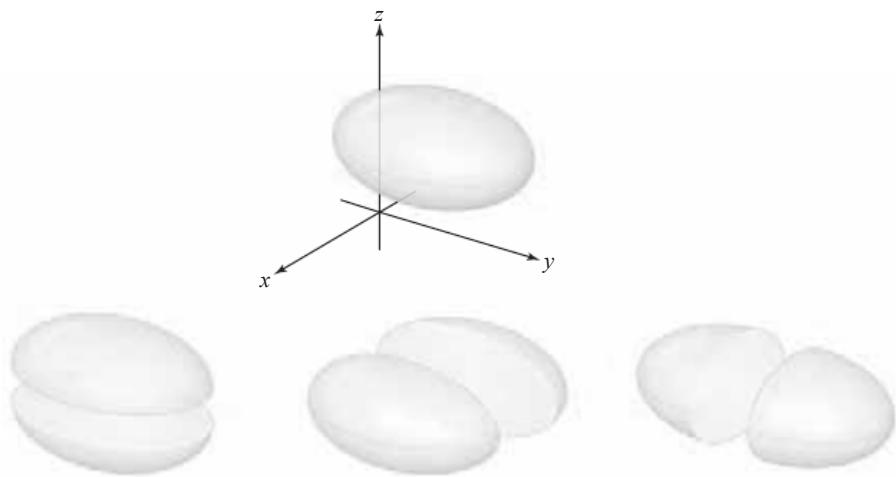


Figura 5.5.5 Una región elemental simétrica se puede describir de tres maneras.

$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\rho_1(y, z)}^{\rho_2(y, z)} f(x, y, z) \, dx \, dz \, dy.$$

Ejemplo 5

Sea W la región limitada por los planos $x = 0, y = 0$ y $z = 2$, y la superficie $z = x^2 + y^2$ y que está en el cuadrante $x \geq 0, y \geq 0$. Calcular $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$ y dibujar la región.

Solución

Método 1. La región W se ha dibujado en la Figura 5.5.6. Como se indica en la misma, podemos describir esta región mediante las desigualdades

$$0 \leq x \leq \sqrt{2}, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}, \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 2.$$

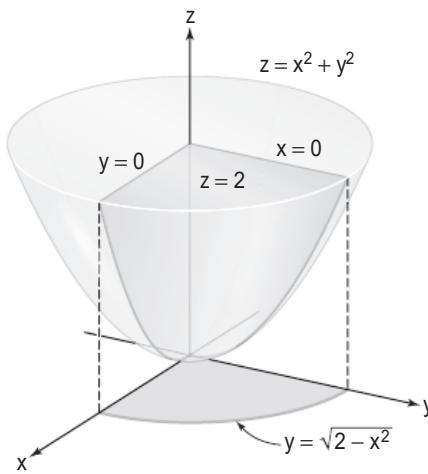


Figura 5.5.6 W es la región que está bajo el plano $z = 2$, por encima del parabolóide $z = x^2 + y^2$ y en los lados positivos de los planos $x = 0, y = 0$.

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \iiint_W x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \left(\int_{x^2+y^2}^2 x \, dz \right) dy \right] dx \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2-x^2-y^2) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} x \left[(2-x^2)^{3/2} - \frac{(2-x^2)^{3/2}}{3} \right] dx \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x}{3} (2-x^2)^{3/2} \, dx = \frac{-2(2-x^2)^{5/2}}{15} \Big|_0^{\sqrt{2}} \\
 &= 2 \cdot \frac{2^{5/2}}{15} = \frac{8\sqrt{2}}{15}.
 \end{aligned}$$

Método 2. También podemos establecer primero los límites para x y describir W mediante $0 \leq x \leq (z-y^2)^{1/2}$ y (y, z) en D , donde D es el subconjunto del plano yz tal que $0 \leq z \leq 2$ y $0 \leq y \leq z^{1/2}$ (véase la Figura 5.5.7).

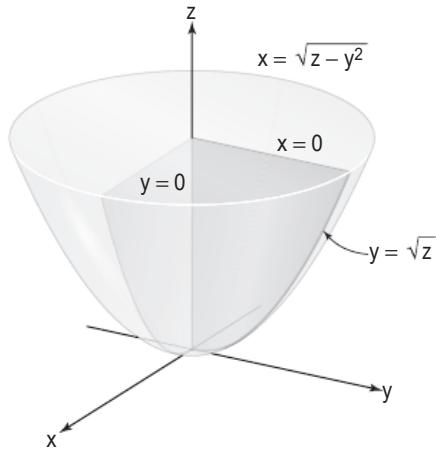


Figura 5.5.7 Una descripción diferente de la región del Ejemplo 5.

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \iiint_W x \, dx \, dy \, dz &= \iint_D \left(\int_0^{(z-y^2)^{1/2}} x \, dx \right) dy \, dz \\
 &= \int_0^2 \left[\int_0^{z^{1/2}} \left(\int_0^{(z-y^2)^{1/2}} x \, dx \right) dy \right] dz \\
 &= \int_0^2 \int_0^{z^{1/2}} \left(\frac{z-y^2}{2} \right) dy \, dz \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(z^{3/2} - \frac{z^{3/2}}{3} \right) dz = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2}{3} z^{3/2} \, dz \\
 &= \left[\frac{2}{15} z^{5/2} \right]_0^2 = \frac{2}{15} 2^{5/2} = \frac{8\sqrt{2}}{15},
 \end{aligned}$$

que coincide con la respuesta anterior. ▲

Ejemplo 6

Calcular

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx.$$

Dibujar la región de integración W e interpretar la integral.**Solución**

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz dy dx &= \int_0^1 \int_0^x (2 - x^2 - y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left(2x - x^3 - \frac{x^3}{3} \right) dx = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Esta integral es el volumen de la región dibujada en la Figura 5.5.8.

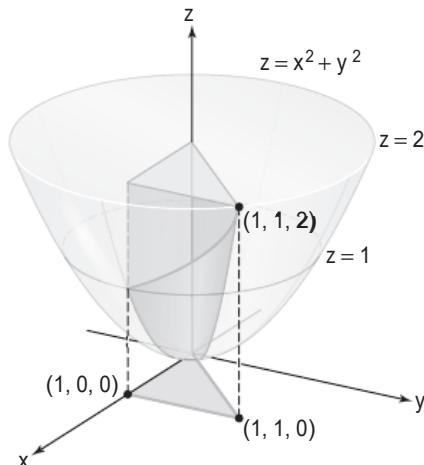
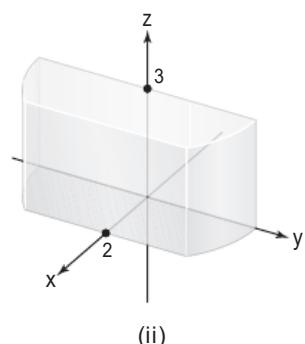
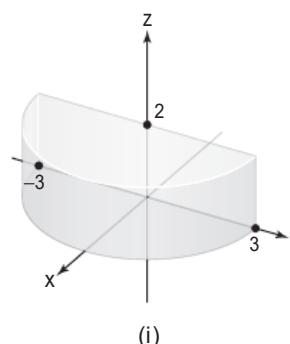


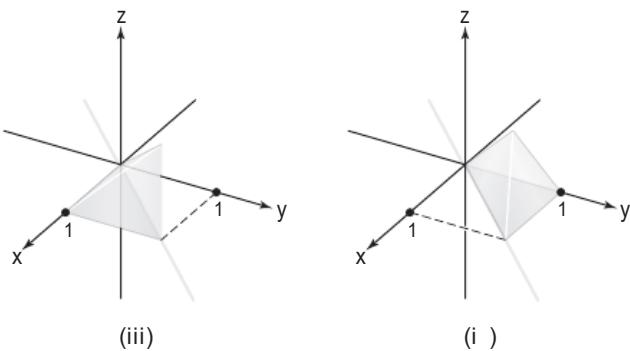
Figura 5.5.8 La región W está entre el parabolóide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2$, y por encima de la región D . ▲

Ejercicios

1. En los apartados (a) hasta (d), cada integral iterada es una integral sobre una región D . Asociar cada integral con la región de integración correcta (dos de las figuras están en la página siguiente).

- (a) $\int_0^2 \int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy dz dx$
 (b) $\int_0^2 \int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy dx dz$
 (c) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y dz dy dx$
 (d) $\int_0^1 \int_0^y \int_0^x dz dx dy$





2. Calcular la siguiente integral triple:

$$\iiint_W \sin x \, dx \, dy \, dz,$$

donde W es el sólido dado por $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$ y $0 \leq z \leq x$.

En los Ejercicios 3 a 6, realizar la integración indicada en la caja dada.

3. $\iiint_B x^2 \, dx \, dy \, dz, B = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

4. $\iiint_B e^{-xy} y \, dx \, dy \, dz, B = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

5. $\iiint_B (2x + 3y + z) \, dx \, dy \, dz,$
 $B = [0, 2] \times [-1, 1] \times [0, 1]$

6. $\iiint_B ze^{x+y} \, dx \, dy \, dz, B = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

En los Ejercicios 7 a 10, describir la región dada como una región elemental.

7. La región entre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el parabolóide $z = x^2 + y^2$.

9. La región dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y por encima del plano $z = 0$

8. La región cortada por el cilindro $2x^2 + z^2 = 1$ en la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$; es decir, la región dentro del cilindro y la bola.

10. La región acotada por los planos $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 4$ y $x = z - y - 1$

En los Ejercicios 11 a 14, hallar el volumen de la región.

11. La región limitada por $z = x^2 + y^2$ y $z = 10 - x^2 - 2y^2$.

13. El sólido limitado por $x = y, z = 0, y = 0, x = 1$, y $x + y + z = 0$.

12. El sólido limitado por $x^2 + 2y^2 = 2, z = 0$ y $x + y + 2z = 2$.

14. La región común a la intersección de los cilindros $x^2 + y^2 \leq a^2$ y $x^2 + z^2 \leq a^2$.

En los Ejercicios 15 a 23, calcular las integrales.

15. $\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 \cos[\pi(x + y + z)] \, dx \, dy \, dz$

18. $\iiint_W z \, dx \, dy \, dz;$

W es la región limitada por los planos $x = 0, y = 0, z = 0, z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con $x \geq 0, y \geq 0$.

16. $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y (y + xz) \, dz \, dy \, dx$

19. $\iiint_W x^2 \cos z \, dx \, dy \, dz;$

17. $\iiint_W (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz;$

W es la región limitada por $z = 0, z = \pi, y = 0, y = 1, x = 0$ y $x + y = 1$.

W es la región limitada por $x + y + z = a$ (donde $a > 0$), $x = 0, y = 0$ y $z = 0$.

20. $\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} dz dy dx$

21. $\iiint_W (1 - z^2) dx dy dz;$

W es la pirámide con el vértice superior en $(0, 0, 1)$ y con los vértices de la base en $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, 0)$.

22. $\iiint_W (x^2 + y^2) dx dy dz;$

Para las regiones de los Ejercicios 25 a 28, hallar los límites de integración apropiados $\phi_1(x), \phi_2(x), \gamma_1(x, y)$ y $\gamma_2(x, y)$, y escribir la integral triple en la región W como una integral iterada de la forma

$$\iiint_W f dV = \int_a^b \left\{ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left[\int_{\gamma_1(x, y)}^{\gamma_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx.$$

25. $W = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$

26. $W = \{(x, y, z) \mid \frac{1}{2} \leq z \leq 1 \text{ y } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

27. $W = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0 \text{ y } x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

28. $W = \{(x, y, z) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, z \geq 0 \text{ y } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

29. Demostrar que la fórmula que utiliza integrales triples para el volumen bajo la gráfica de una función positiva $f(x, y)$, definida en una región elemental D en el plano se reduce a la integral doble de f sobre D .

W es la misma pirámide que en el Ejercicio 21.

23. $\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x+y} dz dy dx.$

- 24.** (a) Dibujar la región de integración de la integral $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx$.
 (b) Escribir la integral con el orden de integración $dx dy dz$.

30. Sea W la región limitada por los planos $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 1$ y $z = x + y$.

- (a) Calcular el volumen de W .
 (b) Calcular $\iiint_W x dx dy dz$.
 (c) Calcular $\iiint_W y dx dy dz$.

31. Sea f continua y sea B_ε la bola de radio ε centrada en el punto (x_0, y_0, z_0) . Sea $\text{vol}(B_\varepsilon)$ el volumen de B_ε . Demostrar que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}(B_\varepsilon)} \iiint_{B_\varepsilon} f(x, y, z) dV = f(x_0, y_0, z_0).$$

Ejercicios de repaso del Capítulo 5

En los Ejercicios 1 a 4, calcular las integrales.

1. $\int_0^3 \int_{-x^2+1}^{x^2+1} xy dy dx.$

2. $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 (x + y)^2 dy dx.$

3. $\int_0^1 \int_{e^x}^{e^{2x}} x \ln y dy dx.$

4. $\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 \cos[\pi(x + y + z)] dx dy dz.$

Invertir el orden de integración de las integrales de los Ejercicios 5 a 8 y calcularlas.

5. La integral del Ejercicio 1.
6. La integral del Ejercicio 2.
7. La integral del Ejercicio 3.
8. La integral del Ejercicio 4.
9. Calcular la integral $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y (y + xz) dz dy dx$.
10. Calcular $\int_0^1 \int_y^{y^2} e^{x/y} dx dy$.

11. Calcular $\int_0^1 \int_0^{(\arcsen y)/y} y \cos xy dx dy$.

12. Cambiar el orden de integración y calcular

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 (x + y)^2 dx dy.$$

13. Demostrar que el cálculo de $\iint_D dx dy$, donde D es una región y -simple, reproduce la fórmula del cálculo de una variable para el área entre dos curvas.

Calcular las integrales en los Ejercicios 17 a 24. Dibujar e identificar el tipo de región (el que corresponde a la forma en que está escrita la integral).

17. $\int_0^\pi \int_{\sin x}^{3 \sin x} x(1+y) dy dx$.

18. $\int_0^1 \int_{x-1}^{x \cos(\pi x/2)} (x^2 + xy + 1) dy dx$.

19. $\int_{-1}^1 \int_{y^{2/3}}^{(2-y)^2} \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - 2y \right) dx dy$.

20. $\int_0^2 \int_{-3(\sqrt{4-x^2})/2}^{3(\sqrt{4-x^2})/2} \left(\frac{5}{\sqrt{2+x}} + y^3 \right) dy dx$.

14. Cambiar el orden de integración y calcular

$$\int_0^1 \int_{y^{1/2}}^1 (x^2 + y^3 x) dx dy.$$

15. Sea D la región en el plano xy dentro del círculo unidad $x^2 + y^2 = 1$. Calcular $\iint_D f(x, y) dx dy$ en cada uno de los siguientes casos:

- $f(x, y) = xy$
- $f(x, y) = x^2 y^2$
- $f(x, y) = x^3 y^3$

16. Hallar $\iint_D y[1 - \cos(\pi x/4)] dx dy$, donde D es la región de la Figura 5.R.1.

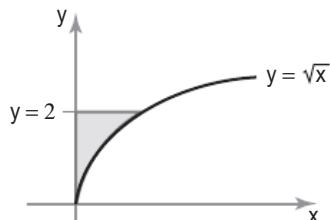


Figura 5.R.1 Región de integración para el Ejercicio 16.

21. $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + xy - y^2) dy dx$.

22. $\int_2^4 \int_{y^2-1}^{y^3} 3 dx dy$.

23. $\int_0^1 \int_{x^2}^x (x+y)^2 dy dx$.

24. $\int_0^1 \int_0^{3y} e^{x+y} dx dy$.

En los Ejercicios 25 a 27, integrar la función dada f sobre la región D .

25. $f(x, y) = x - y$; D es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(2, 1)$.

26. $f(x, y) = x^3 y + \cos x$; D es el triángulo definido por $0 \leq x \leq \pi/2$, $0 \leq y \leq x$.

27. $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + 2$; D es la región limitada por la gráfica de $y = -x^2 + x$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

En los Ejercicios 28 y 29, dibujar la región de integración, cambiar el orden de integración y calcular la integral.

28. $\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) dy dx.$

29. $\int_0^1 \int_{1-y}^1 (x + y^2) dx dy.$

30. Demostrar que

$$4e^5 \leq \iint_{[1,3] \times [2,4]} e^{x^2+y^2} dA \leq 4e^{25}.$$

31. Demostrar que

$$4\pi \leq \iint_D (x^2 + y^2 + 1) dx dy \leq 20\pi,$$

donde D es el disco de radio 2 centrado en el origen.

En los Ejercicios 34 a 36 calcular las integrales.

34. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^y xy^2 z^3 dx dy dz.$

35. $\int_0^1 \int_0^y \int_0^{x/\sqrt{3}} \frac{x}{x^2 + z^2} dz dx dy.$

32. Supongamos que W es una **región conexa por arcos**, es decir, dados dos puntos cualesquiera de W existe una trayectoria continua que los une. Si f es una función continua en W , utilizar el teorema del valor medio para demostrar que existe al menos un punto en W en el que el valor de f es igual al promedio de f sobre W ; es decir, la integral de f sobre W dividido entre el volumen de W . Comparar esto con el teorema del valor medio para integrales dobles. ¿Qué sucede si W no es conexa?

33. Demostrar que

$$\int_0^x \left[\int_0^t F(u) du \right] dt = \int_0^x (x-u)F(u) du.$$

36. $\int_1^2 \int_1^z \int_{1/y}^2 yz^2 dx dy dz.$

37. Escribir la integral iterada $\int_0^1 \int_{1-x}^1 \int_x^1 f(x, y, z) dz dy dx$ como una integral sobre una región de \mathbb{R}^3 y volver a escribirla después en los otros cinco órdenes de integración.

6

Fórmula del cambio de variables y aplicaciones de la integración

Si se atasca en un problema de cálculo y no sabe qué hacer, intente integrar por partes o hacer un cambio de variables.

---Jerry Kazdan

Dios no se preocupa por nuestras dificultades matemáticas. Él integra empíricamente.

---Albert Einstein

La fórmula del cambio de variables es uno de los métodos de integración más potentes del cálculo de una variable; permite calcular integrales tales como

$$\int_0^1 xe^{x^2} dx$$

mediante la sustitución o *cambio de variables* $u = x^2$, que reduce el problema a la fácil tarea de integrar e^u con respecto a u . En este capítulo, desarrollamos la *fórmula multidimensional del cambio de variables*, que es especialmente importante y útil para calcular integrales múltiples en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

Uno de los ingredientes clave en la fórmula del cambio de variables es cómo cambiar variables en varias dimensiones. Esto implica el concepto de aplicación, el cual aparece en varias situaciones interesantes. Por ejemplo, consideremos un objeto que se deforma, como un pez nadando. Al cambiar su forma, podemos imaginar la correspondencia instantánea entre los puntos del pez en estado de reposo y en su forma actual. Este tipo de correspondencia es, de hecho, la idea principal que hay detrás de un cambio de variables, en este caso, de una región

tridimensional (el pez en estado de reposo) a otra (el pez en su forma actual).

En la primera sección del capítulo describimos los conceptos clave en las aplicaciones entre regiones del plano. También desarrollaremos la técnica del cambio de variables para las integrales dobles y triples. El capítulo también incluye algunas de las aplicaciones físicas importantes de la integral.

6.1 Geometría de las aplicaciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2

En esta sección, vamos a ocuparnos de aplicaciones de subconjuntos de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 . La comprensión geométrica resultará útil en la siguiente sección, al estudiar la fórmula del cambio de variables para integrales múltiples.

Aplicaciones de una región en otra

Sea D^* un subconjunto de \mathbb{R}^2 ; supóngase que consideramos una aplicación continuamente diferenciable $T: D^* \rightarrow \mathbb{R}^2$, de modo que T lleva puntos de D^* a puntos de \mathbb{R}^2 . Denotamos el conjunto de puntos de la imagen mediante D o mediante $T(D^*)$; por tanto, $D = T(D^*)$ es el conjunto de todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$(x, y) = T(x^*, y^*) \quad \text{para algún } (x^*, y^*) \in D^*.$$

Una forma de comprender la geometría de una aplicación T es ver cómo *deforma* o cambia D^* . Por ejemplo, la Figura 6.1.1 ilustra una aplicación T que transforma una región ligeramente retorcida en un disco.

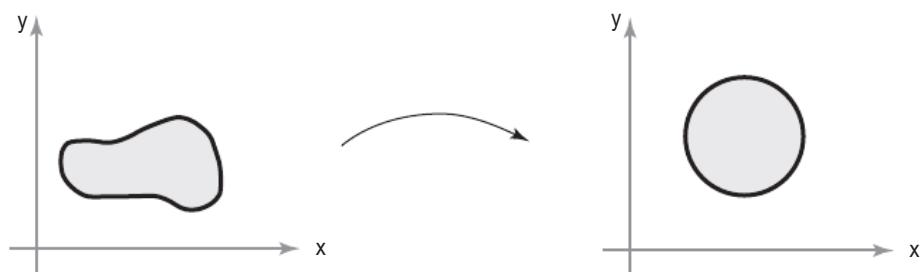


Figura 6.1.1 Una función T de una región D^* en un disco D .

Ejemplo 1

Sea $D^* \subset \mathbb{R}^2$ el rectángulo $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Entonces todos los puntos de D^* son de la forma (r, θ) , donde $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Sea T el “cambio de variables” a coordenadas polares definido por $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Hallar el conjunto imagen de D .

Solución

Sea $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Por la identidad $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 \leq 1$, vemos que el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $(x, y) \in D$ tienen la propiedad de que $x^2 + y^2 \leq 1$, y por tanto D está contenido en el disco unidad. Además, cualquier punto (x, y) del disco unidad se puede expresar como $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ para ciertos $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Por tanto, D es el disco unidad (véase la Figura 6.1.2).

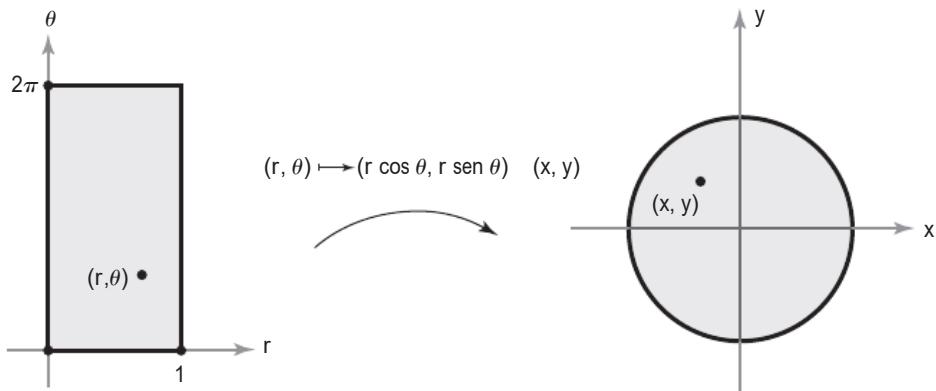


Figura 6.1.2 T proporciona un cambio de variables entre coordenadas euclídeas y polares. El círculo unidad es la imagen de un rectángulo. ▲

Ejemplo 2

Sea T la aplicación definida como $T(x, y) = ((x+y)/2, (x-y)/2)$ y sea $D^* = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ un cuadrado cuya longitud del lado es 2 y está centrado en el origen. Determinar la imagen D obtenida al aplicar T a D^* .

Solución

En primer lugar, determinamos el efecto de T sobre la recta $\mathbf{c}_1(t) = (t, 1)$, donde $-1 \leq t \leq 1$ (véase la Figure 6.1.3). Tenemos que $T(\mathbf{c}_1(t)) = ((t+1)/2, (t-1)/2)$. La aplicación $t \mapsto T(\mathbf{c}_1(t))$ es una parametrización de la recta $y = x - 1$, $0 \leq x \leq 1$, ya que $(t-1)/2 = (t+1)/2 - 1$. Este es el segmento de recta que une $(1, 0)$ y $(0, -1)$.

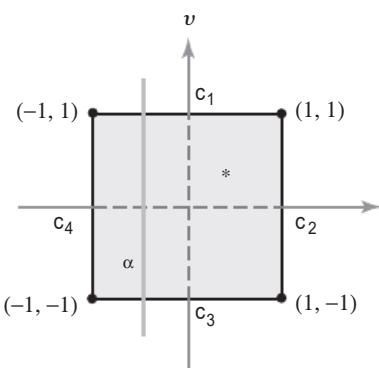


Figura 6.1.3 Dominio de la transformación T del Ejemplo 2.

Sean

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_2(t) &= (1, t), & -1 \leq t \leq 1 \\ \mathbf{c}_3(t) &= (t, -1), & -1 \leq t \leq 1 \\ \mathbf{c}_4(t) &= (-1, t), & -1 \leq t \leq 1\end{aligned}$$

parametrizaciones de los restantes lados del cuadrado D^* . Utilizando el mismo argumento que antes, vemos que $T \circ \mathbf{c}_2$ es una parametrización de la recta $y = 1 - x, 0 \leq x \leq 1$ [el segmento de recta que une $(0, 1)$ y $(1, 0)$]; $T \circ \mathbf{c}_3$ es la recta $y = x + 1, -1 \leq x \leq 0$ que une $(0, 1)$ y $(-1, 0)$; y $T \circ \mathbf{c}_4$ es la recta $y = -x - 1, -1 \leq x \leq 0$ que une $(-1, 0)$ y $(0, -1)$. Así, parece razonable pensar que T “inclina” el cuadrado D^* y lo lleva al cuadrado D cuyos vértices son $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ (Figura 6.1.4).

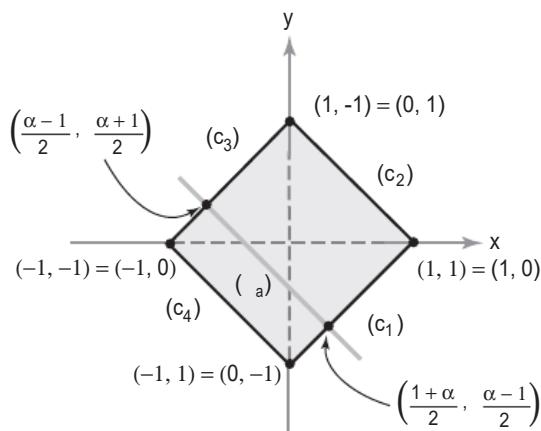


Figura 6.1.4 El efecto de T sobre la región D^* .

Para demostrar que efectivamente este es el caso, sea $-1 \leq \alpha \leq 1$ y sea L_α (Figura 6.1.3) una recta fija parametrizada mediante $\mathbf{c}(t) = (\alpha, t), -1 \leq t \leq 1$; entonces $T(\mathbf{c}(t)) = ((\alpha + t)/2, (\alpha - t)/2)$ es una parametrización de la recta $y = -x + \alpha, (\alpha - 1)/2 \leq x \leq (\alpha + 1)/2$. Esta recta comienza, para $t = -1$, en el punto $((\alpha - 1)/2, (1 + \alpha)/2)$ y termina en el punto $((1 + \alpha)/2, (\alpha - 1)/2)$; como se puede comprobar fácilmente, estos puntos están sobre las rectas $T \circ \mathbf{c}_3$ y $T \circ \mathbf{c}_1$, respectivamente. Por tanto, cuando α varía entre -1 y 1 , L_α barre el cuadrado D^* mientras que $T(L_\alpha)$ barre el cuadrado D definido por los vértices $(-1, 0), (0, 1), (1, 0)$ y $(0, -1)$. ▲

Imágenes de aplicaciones

El siguiente teorema es una forma útil de describir la imagen $T(D^*)$.

Teorema 1 Sea A una matriz 2×2 con $\det A \neq 0$ y sea T una aplicación lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , dada por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ (multiplicación de matrices). Entonces T transforma paralelogramos en paralelogramos y vértices en vértices. Además, si $T(D^*)$ es un paralelogramo, D^* tiene que ser un paralelogramo.

La demostración del Teorema 1 se deja para los Ejercicios 14 y 16 enunciados al final de esta sección. Este teorema simplifica el resultado del Ejemplo 2, ya que solo necesitamos hallar los vértices de $T(D^*)$ y luego conectarlos mediante líneas rectas.

Aplicaciones inyectivas

Aunque no podemos visualizar la gráfica de una función $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, resulta de ayuda considerar cómo la función deforma subconjuntos. Sin embargo, simplemente observar estas deformaciones no nos proporciona una imagen completa del comportamiento de T . Podemos caracterizar T con más detalle utilizando el concepto de aplicación inyectiva.

Definición Una aplicación T es **inyectiva** en D^* si para (u, v) y $(u', v') \in D^*$, $T(u, v) = T(u', v')$ implica que $u = u'$ y $v = v'$.

Este enunciado significa que T no aplica *dos puntos diferentes de D^* sobre el mismo punto de D* . Por ejemplo, la función $T(x, y) = (x^2 + y^2, y^4)$ no es inyectiva porque $T(1, -1) = (2, 1) = T(1, 1)$, y sin embargo, $(1, -1) \neq (1, 1)$.

Ejemplo 3

Consideraremos la función de cambio a coordenadas polares $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ descrita en el Ejemplo 1, definida por $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Demostrar que T no es inyectiva si su dominio es todo \mathbb{R}^2 .

Solución

Si $\theta_1 \neq \theta_2$, entonces $T(0, \theta_1) = T(0, \theta_2)$, y por tanto T no puede ser inyectiva. Esta observación implica que si L es el lado del rectángulo $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $r = 0$ (Figura 6.1.5), entonces T transforma todo L en un único punto, el centro del disco unidad D . Sin embargo, si consideramos el conjunto $S^* = (0, 1] \times [0, 2\pi)$, entonces $T: S^* \rightarrow S$ es inyectiva (véase el Ejercicio 5). Evidentemente, para determinar si una función es inyectiva debe considerarse cuidadosamente el dominio elegido.

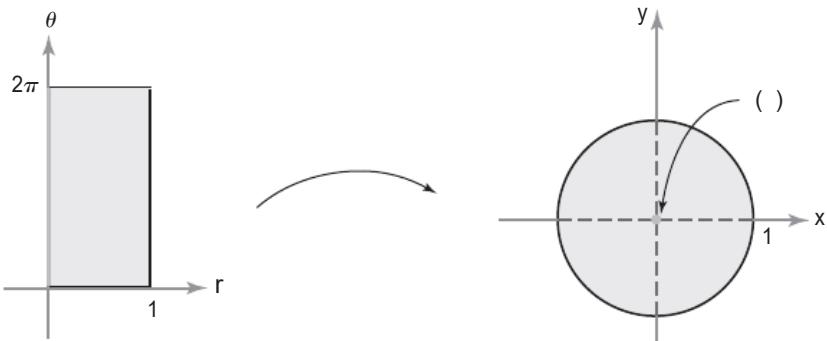


Figura 6.1.5 La transformación a coordenadas polares T transforma la recta L en el punto $(0, 0)$.

Ejemplo 4

Demostrar que la función $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ del Ejemplo 2 es inyectiva.

Solución

Supongamos que $T(x, y) = T(x', y')$; entonces

$$\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right) = \left(\frac{x'+y'}{2}, \frac{x'-y'}{2} \right)$$

y tenemos que

$$\begin{aligned}x + y &= x' + y', \\x - y &= x' - y'.\end{aligned}$$

Sumando, tenemos

$$2x = 2x'.$$

Por tanto, $x = x'$, y, de forma similar, restando tenemos que $y = y'$, lo que demuestra que T es inyectiva (en todo el dominio de \mathbb{R}^2). Realmente, puesto que T es lineal y $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz 2×2 , habría sido suficiente ver que $\det A \neq 0$ (véase el Ejercicio 12). \blacktriangle

Aplicaciones sobreyectivas

En los Ejemplos 1 y 2, hemos determinado la imagen $D = T(D^*)$ de una región D^* según una aplicación T . Lo que nos interesa en la siguiente sección es, en parte, el problema inverso: a saber, dada D y una aplicación inyectiva T de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , hallar D^* tal que $T(D^*) = D$.

Antes de examinar esta cuestión más detalladamente, vamos a presentar el concepto de aplicación “sobreyectiva”.

Definición La aplicación T es **sobreyectiva** sobre D si para todo punto $(x, y) \in D$ existe al menos un punto (u, v) en el dominio de T tal que $T(u, v) = (x, y)$.

Por tanto, si T es sobreyectiva, *podemos resolver* la ecuación $T(u, v) = (x, y)$ para (u, v) , dado $(x, y) \in D$. Además, si T es inyectiva, esta *solución es única*.

Para aplicaciones *lineales* T de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 (o de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n) resulta que inyectivo y sobreyectivo son conceptos equivalentes (véanse los Ejercicios 12 y 13).

Si disponemos de una región D y una aplicación T , la determinación de una región D^* tal que $T(D^*) = D$ solo será posible cuando para cada $(x, y) \in D$ existe un (u, v) en el dominio de T tal que $T(u, v) = (x, y)$ (es decir, T debe ser sobreyectiva sobre D). El siguiente ejemplo muestra que esto no siempre puede hacerse.

Ejemplo 5

Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación dada por $T(u, v) = (u, 0)$. Sea D el cuadrado, $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Dado que T aplica todo \mathbb{R}^2 en un eje, es imposible hallar un D^* tal que $T(D^*) = D$. \blacktriangle

Veamos de nuevo el Ejemplo 2 utilizando estos métodos.

Ejemplo 6

Sea T la aplicación definida como en el Ejemplo 2 y sea D el cuadrado cuyos vértices son $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$. Hallar D^* tal que $T(D^*) = D$.

Solución

Puesto que T es lineal y $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz 2×2 que satisface que $\det A \neq 0$, sabemos que $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es sobreyectiva (véanse los Ejercicios 12 y 13), y por tanto se puede determinar D^* . Por el Teorema 1, D^* tiene que ser un paralelogramo. Para hallar D^* , basta con determinar los cuatro puntos que se corresponden con los vértices de D ; después, conectando estos puntos, habremos determinado D^* . Para el vértice $(1, 0)$ de D , tenemos que calcular $T(x, y) = (1, 0) = ((x+y)/2, (x-y)/2)$, de modo que $(x+y)/2 = 1, (x-y)/2 = 0$. Por tanto, $(x, y) = (1, 1)$ es un vértice de D^* . Resolviendo para los restantes vértices, tenemos que $D^* = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Esto concuerda con lo que hemos hallado de forma más laboriosa en el Ejemplo 2. ▲

Ejemplo 7

Sea D la región del primer cuadrante que está entre los arcos de las circunferencias $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + y^2 = b^2, 0 < a < b$ (véase la Figura 6.1.6). En coordenadas polares, las ecuaciones de estas circunferencias son $r = a$ y $r = b$. Sea T la transformación a coordenadas polares dada por $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$. Hallar D^* tal que $T(D^*) = D$.

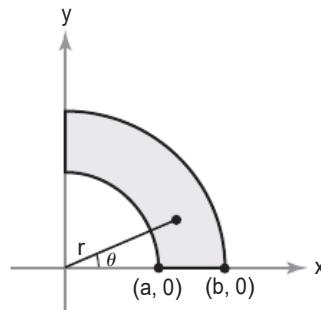


Figura 6.1.6 Buscamos una región D^* en el plano θr cuya imagen bajo la aplicación de coordenadas polares es D .

Solución

En la región D , $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$; y puesto que $r^2 = x^2 + y^2$, vemos que $a \leq r \leq b$. Evidentemente, para esta región, θ varía entre $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Luego si $D^* = [a, b] \times [0, \pi/2]$, tenemos que $T(D^*) = D$ y T es inyectiva. ▲

Nota El teorema de la función inversa presentado en la Sección 3.5 es relevante para el material que estamos tratando aquí. Establece que si el determinante de $\mathbf{DT}(u_0, v_0)$ [que es la matriz de derivadas parciales de T evaluada en (u_0, v_0)] es distinto de cero, entonces para (u, v) próximo a (u_0, v_0) y (x, y) próximo a $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$, la ecuación $T(u, v) = (x, y)$ puede calcularse *de forma única* para (u, v) como funciones de (x, y) . En particular, por la unicidad, T es inyectiva cerca de (u_0, v_0) ; además, T es sobreyectiva sobre un entorno de (x_0, y_0) , porque $T(u, v) = (x, y)$ es resoluble para (u, v) si (x, y) está cerca de (x_0, y_0) .

Sin embargo, incluso si T es inyectiva cerca de cada punto y también es sobreyectiva, T no necesita ser *globalmente* inyectiva. Por tanto, debemos tener cuidado (véase el Ejercicio 17).

Sorprendentemente, si D^* y D son regiones elementales y $T: D^* \rightarrow D$ satisface la propiedad de que el determinante de $\mathbf{DT}(u, v)$ es distinto de

cero para cualquier (u, v) en D^* , y si T aplica la frontera de D^* de forma inyectiva y sobreyectiva en la frontera de D , entonces T es inyectiva y sobreyectiva entre D^* y D . (Esta demostración queda fuera del ámbito de este texto.)

En resumen, tenemos:

Aplicaciones inyectivas y sobreyectivas Una aplicación $T: D^* \rightarrow D$ es **inyectiva** si aplica puntos distintos a puntos distintos. Es **sobreyectiva** si la imagen de D^* bajo T es todo de D .

Una transformación *lineal* de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n dada por la multiplicación por una matriz A es inyectiva y sobreyectiva si y solo si $\det A \neq 0$.

Ejercicios

1. Determinar si las siguientes funciones $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ son inyectivas y/o sobreyectivas.

- (a) $T(x, y) = (2x, y)$.
- (b) $T(x, y) = (x^2, y)$.
- (c) $T(x, y) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$.
- (d) $T(x, y) = (\sin x, \cos y)$.

2. Determinar si las siguientes funciones $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ son inyectivas y/o sobreyectivas.

- (a) $T(x, y, z) = (2x + y + 3z, 3y - 4z, 5x)$.
- (b) $T(x, y, z) = (y \sin x, z \cos y, xy)$.
- (c) $T(x, y, z) = (xy, yz, xz)$.
- (d) $T(x, y, z) = (e^x, e^y, e^z)$.

3. Sea D un cuadrado de vértices $(0, 0), (1, 1), (2, 0), (1, -1)$ y sea D^* un paralelogramo con vértices $(0, 0), (1, 2), (2, 1), (1, -1)$. Hallar una aplicación lineal T que aplique D^* sobre D .

4. Sea D un paralelogramo cuyos vértices son $(0, 0), (-1, 3), (-2, 0), (-1, -3)$. Sea $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$. Hallar una aplicación lineal T tal que $T(D^*) = D$.

5. Sea $S^* = (0, 1] \times [0, 2\pi)$ y sea $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Determinar la imagen S . Demostrar que T es inyectiva en S^* .

6. Sea

$$T(x^*, y^*) = \left(\frac{x^* - y^*}{\sqrt{2}}, \frac{x^* + y^*}{\sqrt{2}} \right).$$

Demostrar que T rota el cuadrado unidad, $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$.

7. Sea $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ y sea T definida en D^* mediante $T(u, v) = (-u^2 + 4u, v)$. Hallar la imagen D . ¿Es T inyectiva?

8. Sea D^* el paralelogramo limitado por las rectas $y = 3x - 4, y = 3x, y = \frac{1}{2}x$ e $y = \frac{1}{2}(x + 4)$. Sea $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Hallar una aplicación T tal que D es la imagen de D^* bajo T .

9. Sea $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ y defíñase T en D^* como $T(x^*, y^*) = (x^* y^*, x^*)$. Determinar la imagen D . ¿Es T inyectiva? Si no lo es, ¿podemos eliminar algún subconjunto de D^* de modo que el resto de T sea inyectiva?

10. Sea D^* el paralelogramo con vértices en $(-1, 3), (0, 0), (2, -1)$ y $(1, 2)$, y D el rectángulo $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Hallar una aplicación T tal que D sea la imagen de D^* .

11. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el cambio a coordenadas esféricas definido por $(\rho, \phi, \theta) \mapsto (x, y, z)$, donde

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

Sea D^* el conjunto de puntos (ρ, ϕ, θ) tales que $\phi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi], \rho \in [0, 1]$. Hallar $D = T(D^*)$. ¿Es T inyectiva? Si no lo es, ¿podemos eliminar algún subconjunto de D^* , de modo que en lo que quede T sea inyectiva?

En los Ejercicios 12 y 13, sea $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz 2×2 .

12. Demostrar que T es inyectiva si y solo si el determinante de A es distinto de cero.
13. Demostrar que $\det A \neq 0$ si y solo si T es sobreinyectiva.
14. Supongamos que $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es lineal y está dada por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz 2×2 . Demostrar que si $\det A \neq 0$, entonces T transforma paralelogramos en paralelogramos. [SUGERENCIA: el paralelogramo general de \mathbb{R}^2 se puede describir como el conjunto de puntos $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$ para $\lambda, \mu \in (0, 1)$ donde $\mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ son vectores de \mathbb{R}^2 tales que \mathbf{v} no es un múltiplo escalar de \mathbf{w} .]
15. Una aplicación $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se denomina **afín** si $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$, donde A es una matriz 2×2 y \mathbf{v} es un vector fijo en \mathbb{R}^2 . Demostrar que esto es así para T en los Ejercicios 12, 13 y 14.
16. Supongamos que $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es como la del Ejercicio 14 y que $T(P^*) = P$ es un paralelogramo. Demostrar que P^* es un paralelogramo.
17. Considérese la aplicación $T: D \rightarrow D$, donde D es el disco unidad en el plano, dada por

$$T(r \cos \theta, r \sin \theta) = (r^2 \cos 2\theta, r^2 \sin 2\theta).$$

Utilizando notación compleja, $z = x + iy$, la aplicación T se puede escribir como $T(z) = z^2$. Demostrar que el determinante jacobiano de T se anula solo en el origen. Por tanto, fuera del origen, T es localmente inyectiva. Demostrar sin embargo que T no es globalmente inyectiva.

6.2 Teorema del cambio de variables

Dadas dos regiones D y D^* de \mathbb{R}^2 , una aplicación diferenciable T de D^* con imagen D —es decir, $T(D^*) = D$ —y una función real integrable $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, deseamos expresar $\iint_D f(x, y) dA$ como una integral sobre D^* de la función compuesta $f \circ T$. En esta sección vamos a ver cómo hacer esto.

Supongamos que D^* es una región del plano uv y que D es una región en el plano xy . La aplicación T se define mediante las dos funciones de coordenadas:

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \quad \text{para} \quad (u, v) \in D^*.$$

En primer lugar, podríamos conjeturar que

$$\iint_D f(x, y) dx dy \stackrel{?}{=} \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) du dv, \quad (1)$$

donde $f \circ T(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ es una función compuesta definida sobre D^* . Sin embargo, si consideramos la función $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ donde $f(x, y) = 1$, entonces la Ecuación (1) implicaría

$$A(D) = \iint_D dx dy \stackrel{?}{=} \iint_{D^*} du dv = A(D^*). \quad (2)$$

Pero la Ecuación (2) solo se cumple en unos pocos casos especiales y no para una aplicación T cualquiera. Por ejemplo, definimos T como $T(u, v) = (-u^2 + 4u, v)$. Restringimos T al cuadrado unidad; es decir,

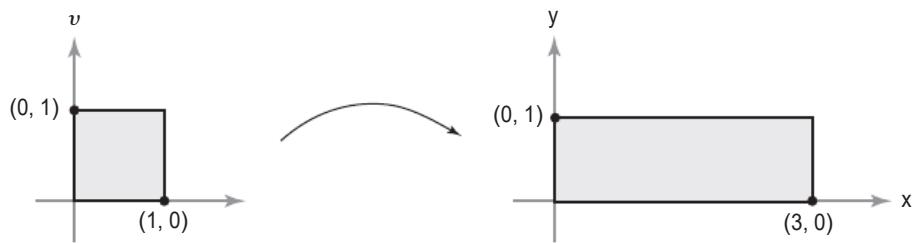


Figura 6.2.1 La aplicación $T: (u, v) \mapsto (-u^2 + 4u, v)$ transforma el cuadrado D^* en el rectángulo D .

a la región $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ en el plano uv (véase la Figura 6.2.1). Entonces, como en el Ejercicio 3 de la Sección 6.1, T transforma D^* en $D = [0, 3] \times [0, 1]$. Claramente, $A(D) \neq A(D^*)$ y, por tanto, la Ecuación (2) no es válida.

Determinantes jacobianos

Para corregir la fórmula incorrecta (1), tenemos que medir cómo una transformación $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ distorsiona el área de una región. Esto se obtiene mediante el *determinante jacobiano*, que se define como sigue.

Definición Determinante jacobiano Sea $T: D^* \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación de clase C^1 dada por $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$. El **determinante jacobiano** de T , que se escribe $\partial(x, y)/\partial(u, v)$, es el determinante de la matriz derivada $\mathbf{DT}(u, v)$ de T :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Ejemplo 1

La función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 que transforma coordenadas polares en coordenadas cartesianas está dada por

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

y su determinante jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$



Bajo restricciones adecuadas de la función T , deduciremos más adelante que el área de $D = T(D^*)$ se obtiene integrando el valor absoluto del jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ en D^* ; es decir, tenemos la ecuación

$$A(D) = \iint_D dx dy = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \quad (3)$$

Ilustremos esto. En el Ejemplo 1 de la Sección 6.1, $T: D^* \rightarrow D$, donde $D = T(D^*)$ es el conjunto de (x, y) tal que $x^2 + y^2 \leq 1$ y $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$, y $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. De acuerdo con la Ecuación (3),

$$A(D) = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta = \iint_{D^*} r dr d\theta \quad (4)$$

(Aquí r y θ desempeñan el papel de u y v). Del cálculo anterior se deduce que

$$\iint_{D^*} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi$$

es el área del disco unidad D , lo que en este caso confirma la fórmula (3). De hecho, podemos recordar del cálculo de una variable que la Ecuación (4) es la fórmula correcta para el área de una región en coordenadas polares.

No es tan fácil demostrar rigurosamente la afirmación de (3). Sin embargo, si se mira de la forma apropiada, resulta bastante plausible. Recuerde que $A(D) = \iint_D dx dy$ se ha obtenido dividiendo D en rectángulos pequeños, sumando sus áreas y tomando luego el límite de esta suma cuando el tamaño de los subrectángulos tiende a cero. El problema es que T puede transformar rectángulos en regiones cuya área no es tan fácil de calcular. La solución consiste en aproximar estas imágenes mediante regiones más simples cuya área podamos calcular. Una herramienta útil para hacer esto es la derivada de T , que como sabemos (del Capítulo 2) nos da la mejor aproximación lineal a T .

Consideremos un rectángulo pequeño D^* en el plano uv , como el mostrado en la Figura 6.2.2. Sea T' la derivada de T calculada en (u_0, v_0) , por lo que T' es una matriz 2×2 . Del Capítulo 2 sabemos que una buena aproximación a $T(u, v)$ está dada por

$$T(u_0, v_0) + T' \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix},$$

donde $\Delta u = u - u_0$ y $\Delta v = v - v_0$. Esta aplicación T' transforma D^* en un paralelogramo con vértice en $T(u_0, v_0)$ y con lados adyacentes dados por los vectores

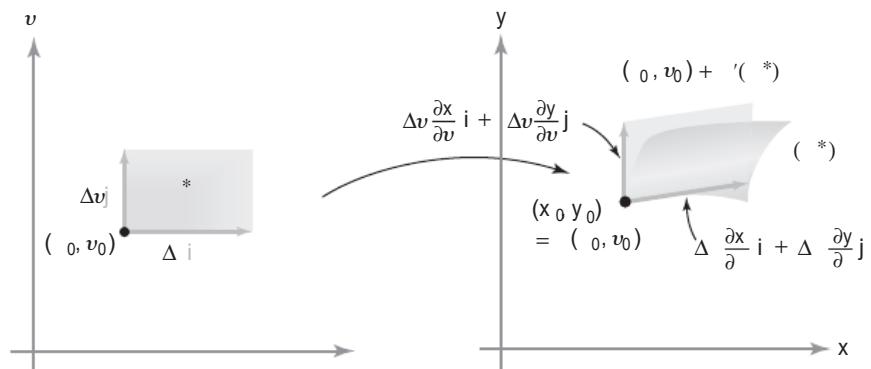


Figura 6.2.2 Efecto de la transformación T sobre un rectángulo pequeño D^* .

$$T'(\Delta u \mathbf{i}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ 0 \end{bmatrix} = \Delta u \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \Delta u \mathbf{T}_u$$

y

$$T'(\Delta v \mathbf{j}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta v \end{bmatrix} = \Delta v \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \Delta v \mathbf{T}_v,$$

donde

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j}$$

se calculan en (u_0, v_0) .

Recuérdese de la Sección 1.3 que el área del paralelogramo con lados iguales a los vectores $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ y $c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$ es igual al valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Por tanto, el área de $T(D^*)$ es aproximadamente igual al *valor absoluto* de

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v \\ \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Delta u \Delta v$$

evaluado en (u_0, v_0) .

Este hecho y un razonamiento empleando una partición deben hacer plausible la fórmula (3). De hecho, si particionamos D^* en rectángulos pequeños con lados de longitud Δu y Δv , las imágenes de estos rectángulos se aproximan a paralelogramos con lados de longitud $\mathbf{T}_u \Delta u$ y $\mathbf{T}_v \Delta v$ y, por tanto, con área $|\partial(x, y)/\partial(u, v)| \Delta u \Delta v$. Así, el área de D^* es aproximadamente $\sum \Delta u \Delta v$, donde la suma se extiende a todos los rectángulos R que están dentro de D^* (véase la Figura 6.2.3). Por tanto, el área de $T(D^*)$ es aproximadamente la suma $\sum |\partial(x, y)/\partial(u, v)| \Delta u \Delta v$. En el límite, esta suma será

$$\iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Vamos a hacer otro razonamiento informal para el caso especial (4) de la fórmula (3); es decir, el caso de las coordenadas polares. Consideremos una región D en el plano xy y una malla correspondiente a una partición de las variables r y θ (Figura 6.2.4). El área de la región sombreada es aproximadamente $(\Delta r)(r_{jk} \Delta\theta)$, porque la longitud del arco de una circunferencia de radio r y ángulo ϕ es $r\phi$. El área total es entonces el límite de $\sum r_{jk} \Delta r \Delta\theta$; es decir, $\iint_{D^*} r dr d\theta$. La idea clave es por tanto que el

jk-ésimo “rectángulo polar” de la malla tiene un área aproximadamente igual a $r_{jk} \Delta r \Delta\theta$ (para n grande, el *jk*-ésimo rectángulo polar parecerá un rectángulo con lados de longitudes $r_{jk} \Delta\theta$ y Δr .) Esto debería darnos una pista de por qué decimos *el “elemento de área dx dy ” se transforma en el “elemento de área rdr dθ.”*

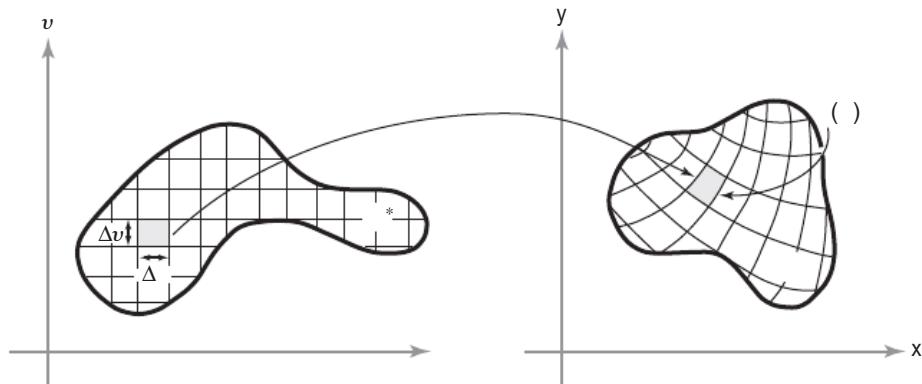


Figura 6.2.3 El área del rectángulo pequeño R es $\Delta u \Delta v$. El área de $T(R)$ es aproximadamente $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|\Delta u \Delta v$.

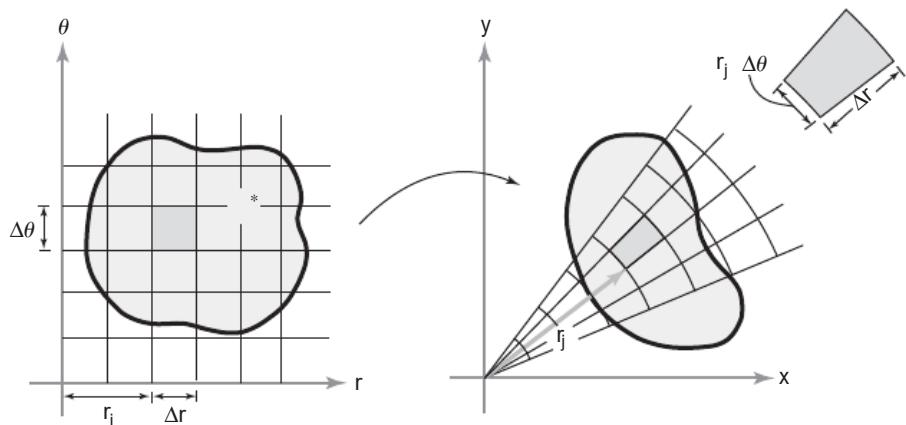


Figura 6.2.4 D^* se transforma en D por la aplicación de cambio a coordenadas polares T .

Ejemplo 2

Sea D la región elemental en el plano xy acotada por la gráfica de la ecuación en coordenadas polares $r = f(\theta)$, donde $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ y $f(\theta) \geq 0$ (véase la Figura 6.2.5). En el plano $r\theta$ consideraremos la región r -simple D^* , donde $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ y $0 \leq r \leq f(\theta)$. La transformación $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ lleva la región D^* sobre la región D . Utilizar la Ecuación (4) para calcular el área de D .

Solución

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D dx dy = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta \\ &= \iint_{D^*} r dr d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left[\int_0^{f(\theta)} r dr \right] d\theta \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{f(\theta)} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{[f(\theta)]^2}{2} d\theta \end{aligned}$$

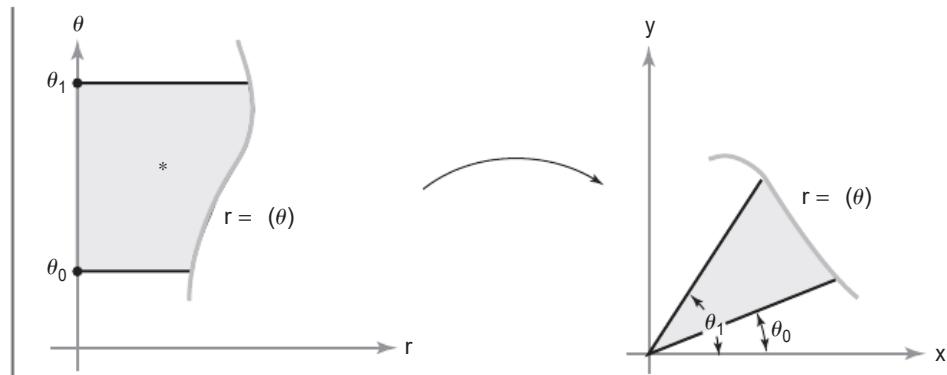


Figura 6.2.5 El efecto sobre la región D^* de la aplicación de cambio a coordenadas polares.

Esta fórmula para $A(D)$ le resultará familiar del cálculo de una variable. ▲

Fórmula del cambio de variables

Antes de enunciar la fórmula del cambio de variables para dos variables, que es el objetivo de esta explicación, recordemos el teorema correspondiente del cálculo de una variable que a veces se denomina *método de sustitución*:

$$\int_a^b f(x(u)) \frac{dx}{du} du = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx, \quad (5)$$

donde f es continua y $u \mapsto x(u)$ es continuamente diferenciable en $[a, b]$.

Demostración Sea F una primitiva de f ; es decir, $F' = f$, cuya existencia garantiza el teorema fundamental del cálculo. El lado derecho de la Ecuación (5) se convierte en

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx = F(x(b)) - F(x(a)).$$

Para calcular el lado izquierdo de la Ecuación (5), hacemos $G(u) = F(x(u))$. Por la regla de la cadena, $G'(u) = F'(x(u))x'(u) = f(x(u))x'(u)$. De nuevo por el teorema fundamental,

$$\int_a^b f(x(u))x'(u) du = \int_a^b G'(u) du = G(b) - G(a) = F(x(b)) - F(x(a)),$$

como se quería. ■

Supongamos ahora que tenemos una función C^1 , $u \mapsto x(u)$ que es inyectiva en $[a, b]$. Por tanto, debe ser $dx/du \geq 0$ en $[a, b]$ o $dx/du \leq 0$ en $[a, b]$.¹ Sea I^* el intervalo $[a, b]$ y sea I el intervalo cerrado con puntos

¹Si dx/du es positiva y luego negativa, la función $x = x(u)$ primero sube y después desciende, por lo que no es inyectiva; lo mismo se aplica si dx/du es negativa y luego positiva.

extremos $x(a)$ y $x(b)$. Por tanto, $I = [x(a), x(b)]$ si $u \mapsto x(u)$ es creciente e $I = [x(b), x(a)]$ si $u \mapsto x(u)$ es decreciente. Teniendo en cuenta estas convenciones, podemos reescribir la Ecuación (5) como sigue

$$\int_{I^*} f(x(u)) \left| \frac{dx}{du} \right| du = \int_I f(x) dx.$$

Esta fórmula se generaliza a integrales dobles, como ya se ha visto informalmente en la fórmula (3): I^* se convierte en D^* , I se convierte en D y $|dx/du|$ se reemplaza por $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$. Enunciamos ahora el resultado formalmente (la demostración técnica se omite).

Teorema 2 Cambio de variables: integrales dobles Sean D y D^* regiones elementales en el plano y sea $T: D^* \rightarrow D$ de clase C^1 ; supongamos que T es inyectiva en D^* . Supongamos también que $D = T(D^*)$. Entonces para cualquier función integrable $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, tenemos

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \quad (6)$$

Uno de los propósitos del teorema del cambio de variables es proporcionar un método que permita simplificar algunas integrales dobles. Podemos encontrarnos con una integral $\iint_D f dA$ para la que el integrando f o la región D es complicado y para los que el cálculo directo es difícil. Por tanto, se elige una aplicación T de modo que la integral sea más fácil de calcular con el nuevo integrando $f \circ T$ y con la nueva región D^* [definida por $T(D^*) = D$]. Lamentablemente, el problema puede complicarse más si T no se elige cuidadosamente.

Ejemplo 3

Sea P el paralelogramo limitado por $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ e $y = x + 1$ (véase la Figura 6.2.6). Calcular $\iint_P xy dx dy$ haciendo el cambio de variables

$$x = u - v, \quad y = 2u - v,$$

es decir, $T(u, v) = (u - v, 2u - v)$.

Solución

La transformación T tiene determinante distinto de cero y por tanto es inyectiva (véase el Ejercicio 12, Sección 6.1). Está diseñada de modo que transforme el rectángulo P^* limitado por $v = 0$, $v = -2$, $u = 0$, $u = 1$ en P . El uso de T simplifica la región de integración de P a P^* . Además,

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right| = 1.$$

Por tanto, por la fórmula del cambio de variables,

$$\begin{aligned}
 \iint_P xy \, dx \, dy &= \iint_{P^*} (u-v)(2u-v) \, du \, dv = \int_{-2}^0 \int_0^1 (2u^2 - 3vu + v^2) \, du \, dv \\
 &= \int_{-2}^0 \left[\frac{2}{3}u^3 - \frac{3u^2v}{2} + v^2u \right]_0^1 \, dv = \int_{-2}^0 \left[\frac{2}{3} - \frac{3}{2}v + v^2 \right] \, dv \\
 &= \left[\frac{2}{3}v - \frac{3}{4}v^2 + \frac{v^3}{3} \right]_{-2}^0 = -\left[\frac{2}{3}(-2) - 3 - \frac{8}{3} \right] \\
 &= -\left[-\frac{12}{3} - 3 \right] = 7.
 \end{aligned}$$

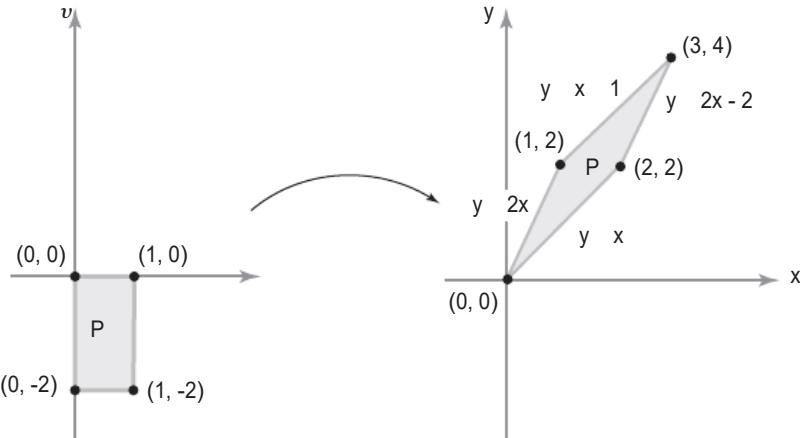


Figura 6.2.6 El efecto de $T(u, v) = (u - v, 2u - v)$ sobre el rectángulo P^* . ▲

Integrales en coordenadas polares

Consideremos el rectángulo D^* definido por $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a$ en el plano $r\theta$. La transformación T dada por $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ transforma D^* en el disco D de ecuación $x^2 + y^2 \leq a^2$ en el plano xy . Esta transformación representa el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Sin embargo, T no satisface los requisitos del teorema del cambio de variables, porque no es inyectiva en D^* : en particular, T transforma todos los puntos con $r = 0$ en $(0,0)$ (véase la Figura 6.2.7 y el Ejemplo 3 de la Sección 6.1). No obstante, el teorema del cambio de variables es válido en este caso. Básicamente, la razón de esto es que el conjunto de puntos donde T no es inyectiva está en uno de los lados de D^* , que es la gráfica de una curva suave y, por tanto, es irrelevante para la integración. En resumen, la fórmula es válida cuando T transforma D^* en D de forma inyectiva, excepto posiblemente en los puntos de la frontera de D^* .

Cambio de variables, coordenadas polares

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \quad (7)$$

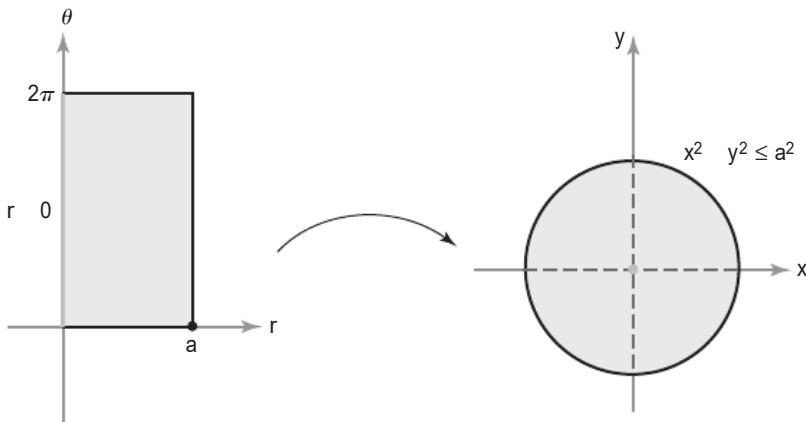


Figura 6.2.7 La imagen del rectángulo D^* después de la transformación a coordenadas polares es el disco D .

Ejemplo 4

Calcular $\iint_D \log(x^2 + y^2) dx dy$, donde D es la región en el primer cuadrante comprendida entre los arcos de las circunferencias $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 = b^2$, donde $0 < a < b$ (Figura 6.2.8).

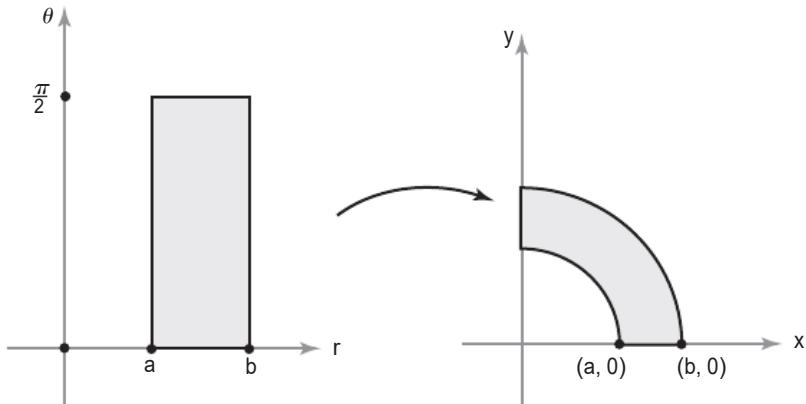


Figura 6.2.8 La aplicación de cambio a coordenadas polares transforma un rectángulo D^* en una parte de un anillo D .

Solución

Estas circunferencias tienen las siguientes ecuaciones en coordenadas polares $r = a$ y $r = b$. Además, en el integrando aparece $r^2 = x^2 + y^2$. Por tanto, un cambio a coordenadas polares simplificará tanto el integrando como la región de integración. De acuerdo con el Ejemplo 7 de la Sección 6.1, la transformación a coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

transforma el rectángulo D^* , dado por $a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ en la región D . Esta transformación es inyectiva en D^* y, por tanto, por la fórmula (7), tenemos

$$\begin{aligned} \iint_D \log(x^2 + y^2) dx dy &= \int_a^b \int_0^{\pi/2} r \log r^2 d\theta dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_a^b r \log r^2 dr = \frac{\pi}{2} \int_a^b 2r \log r dr. \end{aligned}$$

Aplicando integración por partes, o utilizando la fórmula

$$\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}$$

de la tabla de integrales disponible al final del libro, obtenemos

$$\frac{\pi}{2} \int_a^b 2r \log r \, dr = \frac{\pi}{2} \left[b^2 \log b - a^2 \log a - \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \right].$$



Ejemplo 5

La integral gaussiana Una de las aplicaciones de mayor belleza de la fórmula del cambio de variables a coordenadas polares y la reducción a integrales iteradas es su uso en la fórmula siguiente, conocida como *integral gaussiana*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

No sólo es esta fórmula muy elegante en sí misma, sino que además es útil en áreas como la estadística. Ilustra además la unidad que existe entre los números trascendentales e y π casi tan bien como lo hace la fórmula clásica $e^{i\pi} = -1$.

Para llevar a cabo la integración de la integral gaussiana,² calculamos primero la integral doble

$$\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy,$$

donde D_a es el disco $x^2 + y^2 \leq a^2$. Dado que $r^2 = x^2 + y^2$ y $dx \, dy = r \, dr \, d\theta$, la fórmula del cambio de variables nos da

$$\begin{aligned} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-r^2} r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^a \, d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e^{-a^2} - 1) \, d\theta = \pi(1 - e^{-a^2}). \end{aligned}$$

Si hacemos $a \rightarrow \infty$ en esta expresión, damos sentido a la integral impropias y obtenemos

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \pi.$$

²El método que sigue no es en forma alguna directo, sino que requiere un truco. El truco consiste en comenzar con la fórmula deseada y elevar al cuadrado ambos miembros. Se observará entonces que el primer miembro parece una integral iterada. Hay otras formas de calcular la integral gaussiana, pero todas ellas requieren métodos que no son obvios. Para ver cómo se calcula usando métodos de variable compleja, consultese, por ejemplo, J. Marsden y M. Hoffman, *Basic Complex Analysis*, 3^a ed., W. H. Freeman, Nueva York, 1998.

Si suponemos que también podemos evaluar esta integral impropia como el límite de las integrales sobre los rectángulos $R_a = [-a, a] \times [-a, a]$ cuando $a \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{R_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi.$$

Por reducción a integrales iteradas, podemos escribir esto como

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left[\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \int_{-a}^a e^{-y^2} dy \right] = \left[\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right]^2 = \pi.$$

Es decir,

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 = \pi.$$

Así, tomando raíces cuadradas, llegamos al resultado deseado.

He aquí una variante de la integral gaussiana: evaluar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} dx.$$

Para hacerlo, hay que utilizar la fórmula de cambio de variables $y = \sqrt{2}x$ a fin de reducir el problema a la integral gaussiana recién calculada:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{-2x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a} e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

▲

Fórmula del cambio de variables para integrales triples

Para enunciar esta fórmula, definimos primero el jacobiano de una transformación de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 —es una extensión fácil del caso de dos variables.

Definición Sea $T: W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función C^1 definida por las ecuaciones $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$. Entonces el **jacobiano** de T , que se denota por $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$, es el determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

El valor absoluto de este determinante es igual al volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_u &= \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k}, \\ \mathbf{T}_v &= \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}, \\ \mathbf{T}_w &= \frac{\partial x}{\partial w} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial w} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial w} \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Igual que en el caso de dos variables, el jacobiano mide cómo la transformación T distorsiona el volumen de su dominio. Por tanto, para las integrales de volumen (triples), la fórmula del cambio de variables toma la forma siguiente:

Fórmula de cambio de variables: integrales triples

$$\begin{aligned}&\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{W^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw,\end{aligned}\tag{8}$$

donde W^* es una región elemental en el espacio uvw que se corresponde con W en el espacio xyz por una aplicación T : $(u, v, w) \mapsto (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$, supuesto que T es de clase C^1 y que es inyectiva, excepto posiblemente en un conjunto que es unión de gráficas de funciones de dos variables.

Coordenadas cilíndricas

Vamos a aplicar la Fórmula (8) primero a coordenadas cilíndricas y después a coordenadas esféricas. Primero calculamos el jacobiano de la aplicación que define el cambio a coordenadas cilíndricas. Dado que

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

tenemos

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Por tanto, obtenemos la fórmula

Cambio de variables—Coordinadas cilíndricas

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{W^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.\tag{9}$$

Coordenadas esféricas

A continuación vamos a considerar el sistema de coordenadas esféricas. Recuérdese que se define por

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

Por tanto, tenemos

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por la última fila, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} &= \cos \phi \begin{vmatrix} -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \end{vmatrix} \\ &\quad - \rho \sin \phi \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= -\rho^2 \cos^2 \phi \sin \phi \sin^2 \theta - \rho^2 \cos^2 \phi \sin \phi \cos^2 \theta \\ &\quad - \rho^2 \sin^3 \phi \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^3 \phi \sin^2 \theta \\ &= -\rho^2 \cos^2 \phi \sin \phi - \rho^2 \sin^3 \phi = -\rho^2 \sin \phi. \end{aligned}$$

Y llegamos así a la fórmula:

Cambio de variables—Coordinadas esféricas

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{W^*} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi. \quad (10)$$

Para demostrar la Fórmula (10), se debe probar que la transformación S en el conjunto W^* es inyectiva, excepto en un conjunto que es una unión finita de gráficas de funciones continuas. Dejamos esta verificación como Ejercicio 38.

Ejemplo 6

Calcular

$$\iiint_W \exp(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dV,$$

donde W es la bola unidad de \mathbb{R}^3 .

Solución

En primer lugar vemos que no podemos integrar *fácilmente* esta función usando integrales iteradas (inténtese!). Por ello (empleando la estrategia de la cita que abre este capítulo), vamos a intentar un cambio de variables. La transformación a coordenadas esféricas parece apropiada,

ya que entonces la expresión completa $x^2 + y^2 + z^2$ se puede sustituir por una variable: ρ^2 . Si W^* es la región tal que

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi,$$

podemos aplicar la Fórmula (10) y escribir

$$\iiint_W \exp(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dV = \iiint_{W^*} \rho^2 e^{\rho^3} \sin \phi d\rho d\theta d\phi.$$

Esta integral es igual a la integral iterada

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{\rho^3} \rho^2 \sin \phi d\theta d\phi d\rho &= 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi e^{\rho^3} \rho^2 \sin \phi d\phi d\rho \\ &= -2\pi \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} [\cos \phi]_0^\pi d\rho \\ &= 4\pi \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 d\rho = \frac{4}{3}\pi \int_0^1 e^{\rho^3} (3\rho^2) d\rho \\ &= \left[\frac{4}{3}\pi e^{\rho^3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi(e - 1). \end{aligned}$$



Ejemplo 7

Sea W la bola de radio R y centro $(0, 0, 0)$ en \mathbb{R}^3 . Hallar el volumen de W .

Solución

El volumen de W es $\iiint_W dx dy dz$. Esta integral se puede calcular reduciéndola a integrales iteradas o considerando W como un volumen de revolución, pero vamos a evaluarla aquí por medio de coordenadas esféricas. Obtenemos

$$\begin{aligned} \iiint_W dx dy dz &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi = \frac{R^3}{3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \phi d\theta d\phi \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} \int_0^\pi \sin \phi d\phi = \frac{2\pi R^3}{3} \{-[\cos(\pi) - \cos(0)]\} = \frac{4\pi R^3}{3}, \end{aligned}$$

que es la fórmula usual del volumen de una esfera.



Ejercicios

1. Sugerir una sustitución/transformación que permita simplificar los siguientes integrandos y determinar sus jacobianos.

(a) $\iint_R (3x + 2y) \sin(x - y) dA$

(b) $\iint_R e^{(-4x+7y)} \cos(7x - 2y) dA$

2. Sugerir una sustitución/transformación que permita simplificar los siguientes integrandos y determinar sus jacobianos.

(a) $\iint_R (5x + y)^3 (x + 9y)^4 dA$

(b) $\iint_R x \sin(6x + 7y) - 3y \sin(6x + 7y) dA$

- 3.** Sea D el disco unidad: $x^2 + y^2 \leq 1$. Calcular

$$\iint_D \exp(x^2 + y^2) dx dy$$

por medio de un cambio de variables a coordenadas polares.

- 4.** Sea D la región $0 \leq y \leq x$ y $0 \leq x \leq 1$. Calcular

$$\iint_D (x + y) dx dy$$

por medio del cambio de variables $x = u + v$, $y = u - v$. Comprobar el resultado calculando directamente la integral por medio de una integral iterada.

- 5.** Sea $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ la aplicación definida por $T(u, v) = (4u, 2u + 3v)$. Sea D^* el rectángulo $[0, 1] \times [1, 2]$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular

(a) $\iint_D xy dx dy$

(b) $\iint_D (x - y) dx dy$

por medio de un cambio de variables que las calcule como integrales sobre D^* .

- 6.** Repetir el Ejercicio 5 para $T(u, v) = (u, v(1 + u))$.

- 7.** Calcular

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1+x+2y}},$$

donde $D = [0, 1] \times [0, 1]$, haciendo $T(u, v) = (u, v/2)$ y calculando una integral sobre D^* , donde $T(D^*) = D$.

- 8.** Definir $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Sea D^* el conjunto de (u, v) con $u^2 + v^2 \leq 1$, $u \geq 0$, $v \geq 0$. Hallar $T(D^*) = D$. Calcular $\iint_D dx dy$.

- 9.** Sea $T(u, v)$ como en el Ejercicio 8. Por medio de un cambio de variables, calcular “formalmente” la integral “impropia”

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

[NOTA: Esta integral (y la del ejercicio siguiente) es *impropia*, ya que el integrando $1/\sqrt{x^2 + y^2}$ no es ni continuo ni acotado en el dominio de integración. (La teoría de integrales impropias se estudiará en la Sección 6.4).]

- 10.** Calcular $\iint_R \frac{1}{x+y} dy dx$, donde R es la región acotada por $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $x + y = 4$, utilizando la aplicación $T(u, v) = (u - uv, uv)$.

- 11.** Calcular $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy$, donde D es el disco $x^2 + y^2 \leq 4$.

- 12.** Sea D^* una región v -simple en el plano uv acotada por $v = g(u)$ y $v = h(u) \leq g(u)$ con $a \leq u \leq b$. Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación dada por $x = u$ e $y = \psi(u, v)$, donde ψ es de clase C^1 y $\partial\psi/\partial v$ nunca se anula. Suponer que $T(D^*) = D$ es una región y -simple; demostrar que si $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(u, \psi(u, v)) \left| \frac{\partial\psi}{\partial v} \right| du dv.$$

- 13.** Usar integrales dobles para hallar el área encerrada por la curva $r = 1 + \sin\theta$.

- 14.** (a) Expresar $\int_0^1 \int_0^{x^2} xy dy dx$ como una integral sobre el triángulo D^* , que es el conjunto de puntos (u, v) que cumplen $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq u$. (SUGERENCIA: hallar una aplicación biyectiva T de D^* en la región de integración dada.)

- (b) Calcular directamente esta integral como una integral sobre D^* .

- 15.** Integrar $ze^{x^2+y^2}$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$, $2 \leq z \leq 3$.

- 16.** Sea D el disco unidad. Expresar $\iint_D (1 + x^2 + y^2)^{3/2} dx dy$ como una integral sobre $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ y calcularla.

- 17.** Utilizando coordenadas polares, hallar el área acotada por la *lemniscata* $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

- 18.** Resolver de nuevo el Ejercicio 15 de la Sección 5.3 por medio de un cambio de variables y comparar los esfuerzos requeridos por cada método.

- 19.** Calcular $\iint_R (x+y)^2 e^{x-y} dx dy$, donde R es la región acotada por $x + y = 1$, $x + y = 4$, $x - y = -1$ y $x - y = 1$.

- 20.** Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación definida por $T(u, v, w) = (u \cos v \cos w, u \sin v \cos w, u \sin w)$.

- (a) Demostrar que T es sobreyectiva sobre la esfera unidad; es decir, todo (x, y, z) con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ se puede escribir como $(x, y, z) = T(u, v, w)$ para algún (u, v, w) .
 (b) Demostrar que T no es inyectiva.

21. Integrar $x^2 + y^2 + z^2$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 \leq 2, -2 \leq z \leq 3$.

22. Calcular $\int_0^\infty e^{-4x^2} dx$.

23. Sea B la bola unidad. Calcular

$$\iiint_B \frac{dx dy dz}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}}$$

por medio de un cambio de variables apropiado.

24. Calcular $\iint_A [1/(x^2 + y^2)^2] dx dy$, donde A está determinado por las condiciones $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x + y \geq 1$.

25. Calcular $\iiint_W \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, donde W es el sólido acotado por las dos esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, donde $0 < b < a$.

26. Utilizar coordenadas esféricas para calcular:

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+[x^2+y^2+z^2]^2} dz dy dx$$

27. Sea D un triángulo en el plano (x, y) con vértices $(0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, 0)$. Calcular:

$$\iint_D \cos \pi \left(\frac{x-y}{x+y} \right) dx dy$$

efectuando el apropiado cambio de variables.

28. Calcular $\iint_D x^2 dx dy$, donde D está determinado por las dos condiciones $0 \leq x \leq y$ y $x^2 + y^2 \leq 1$.

29. Integrar $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ sobre la región descrita en el Ejercicio 25.

30. Calcular las siguientes integrales usando coordenadas cilíndricas.

- (a) $\iiint_B z dx dy dz$, donde B es la región dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ por encima

del plano xy y por debajo del cono $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$

- (b) $\iiint_W (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dx dy dz$, donde W es la región determinada por las condiciones $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

31. Calcular $\iint_B (x + y) dx dy$, donde B es el rectángulo del plano xy con vértices en $(0, 1), (1, 0), (3, 4)$ y $(4, 3)$.

32. Calcular $\iint_D (x+y) dx dy$, donde D es el cuadrado con vértices en $(0, 0), (1, 2), (3, 1)$ y $(2, -1)$.

33. Sea E el elipsoide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1$, donde a, b y c son positivos.

- (a) Hallar el volumen de E .

- (b) Calcular $\iiint_E [(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)] dx dy dz$. (SUGERENCIA: Efectuar un cambio de variables y después utilizar coordenadas esféricas.)

34. Utilizando coordenadas esféricas, calcular la integral de $f(\rho, \phi, \theta) = 1/\rho$ sobre la región del primer octante de \mathbb{R}^3 , que está acotada por los conos $\phi = \pi/4$, $\phi = \arctan 2$ y la esfera $\rho = \sqrt{6}$.

35. La aplicación $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ transforma el rectángulo $1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 3$ del plano uv en una región R del plano xy .

- (a) Demostrar que T es inyectiva.

- (b) Hallar el área de R utilizando la fórmula de cambio de variables.

36. Sea R la región interior a $x^2 + y^2 = 1$ y exterior a $x^2 + y^2 = 2y$ con $x \geq 0, y \geq 0$.

- (a) Dibujar dicha región.

- (b) Sea $u = x^2 + y^2, v = x^2 + y^2 - 2y$. Dibujar la región D del plano uv que se corresponde con R bajo este cambio de coordenadas.

- (c) Calcular $\iint_R xe^y dx dy$ usando este cambio de coordenadas.

37. Sea D la región acotada por $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$, para $x \geq 0, y \geq 0$, y los ejes coordenados $x = 0, y = 0$. Expresar $\iint_D f(x, y) dx dy$ co-

mo una integral sobre el triángulo D^* , que es el conjunto de puntos $0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq a - u$. (No intentar calcularla.)

- 38.** Demostrar que $S(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$, la aplicación de cambio a coordenadas esféricas, es inyectiva salvo en un conjunto que es unión finita de gráficas de funciones continuas.

6.3 Aplicaciones

En esta sección vamos a analizar las siguientes aplicaciones: medias, centros de masa, momentos de inercia y potencial gravitatorio.

Medias

Si x_1, \dots, x_n son n números, su **media** se define como

$$[x_i]_m = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Obsérvese que si todos los x_i tienen el mismo valor c , entonces su media es también, por supuesto, igual a c .

Este concepto nos lleva a definir los valores medios de las funciones como sigue.

Valores medios El **valor medio** de una función de una variable en el intervalo $[a, b]$ se define como

$$[f]_m = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}.$$

De igual forma, para funciones de dos variables, el cociente entre la integral y el área de D ,

$$[f]_m = \frac{\iint_D f(x, y) dx dy}{\iint_D dx dy}, \quad (1)$$

se denomina **valor medio** de f sobre D . Análogamente, el **valor medio** de una función f en una región W del espacio de tres dimensiones se define como

$$[f]_m = \frac{\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_W dx dy dz}.$$

De nuevo, obsérvese que el denominador se ha elegido de forma que si f es una constante, por ejemplo c , entonces $[f]_m = c$.

Ejemplo 1

Hallar el valor medio de $f(x, y) = x \operatorname{sen}^2(xy)$ en la región $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

Solución

En primer lugar, calculamos

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^\pi \int_0^\pi x \operatorname{sen}^2(xy) dx dy \\ &= \int_0^\pi \left[\int_0^\pi \frac{1 - \cos(2xy)}{2} x dy \right] dx \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{y}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2xy)}{4x} \right] x \Big|_{y=0}^\pi dx \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{\pi x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi x)}{4} \right] dx = \left[\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\cos(2\pi x)}{8\pi} \right] \Big|_0^\pi \\ &= \frac{\pi^3}{4} + \frac{\cos(2\pi^2) - 1}{8\pi}.\end{aligned}$$

Por tanto, el valor medio de f , por la Fórmula (1), es

$$\frac{\pi^3/4 + [\cos(2\pi^2) - 1]/8\pi}{\pi^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\cos(2\pi^2) - 1}{8\pi^3} \approx 0,7839. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 2

La temperatura en los puntos del cubo $W = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ es proporcional al cuadrado de la distancia al origen.

(a) ¿Cuál es la temperatura media?

(b) ¿En qué puntos del cubo es la temperatura igual a la temperatura media?

Solución

(a) Sea c la constante de proporcionalidad, de forma que $T = c(x^2 + y^2 + z^2)$ y la temperatura media es $[T]_m = \frac{1}{8} \iiint_W T dx dy dz$, ya que el volumen del cubo es 8. Por tanto,

$$[T]_m = \frac{c}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

La integral triple es la suma de las integrales de x^2 , de y^2 y de z^2 . Dado que el papel de x, y, z en la descripción del cubo es simétrico, las tres integrales serán iguales, de modo que

$$[T]_m = \frac{3c}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 z^2 dx dy dz = \frac{3c}{8} \int_{-1}^1 z^2 \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy \right) dz.$$

La integral interior es igual al área del cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$. El área de dicho cuadrado es 4, luego

$$[T]_m = \frac{3c}{8} \int_{-1}^1 4z^2 dz = \frac{3c}{2} \left(\frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = c.$$

(b) La temperatura coincide con la temperatura media en todos los puntos que satisfacen $c(x^2 + y^2 + z^2) = c$ —es decir, en todos los puntos que están en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. ▲

Centros de masa

Si se sitúan masas m_1, \dots, m_n en los puntos x_1, \dots, x_n del eje x , su **centro de masa** se define como

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}. \quad (2)$$

Esta definición surge de la siguiente observación: si se equilibran varias masas sobre una palanca (Figure 6.3.1), el punto de equilibrio \bar{x} es el punto en el que el momento total (masa por distancia al punto de equilibrio) es cero; es decir, el punto en el que $\sum m_i(x_i - \bar{x}) = 0$. Un principio físico que se remonta a Arquímedes y, en su forma general, a Newton, establece que esta condición implica que la palanca no tiene tendencia a rotar.

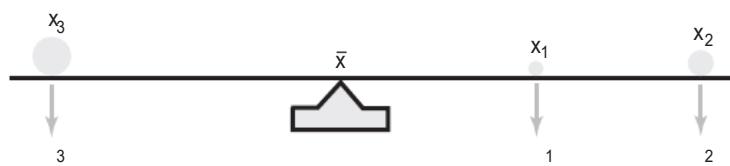


Figura 6.3.1 La palanca está equilibrada si $\sum (x_i - \bar{x}) m_i = 0$.

Para una densidad de masa continua $\delta(x)$ a lo largo de la palanca (medida, por ejemplo, en gramos/cm), la análoga de la Fórmula (2) sería

$$\bar{x} = \frac{\int x \delta(x) dx}{\int \delta(x) dx}. \quad (3)$$

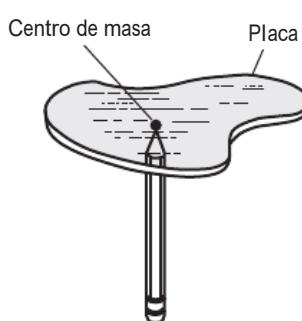


Figura 6.3.2 La placa está en equilibrio cuando está apoyada en su centro de masa.

Para superficies bidimensionales, esto se generaliza a:

Centro de masa de una superficie plana

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \delta(x, y) dx dy}{\iint_D \delta(x, y) dx dy} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \delta(x, y) dx dy}{\iint_D \delta(x, y) dx dy}, \quad (4)$$

donde, de nuevo, $\delta(x, y)$ es la densidad de masa (véase la Figura 6.3.2).

Ejemplo 3

Hallar el centro de masa del rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ si la densidad de masa es e^{x+y} .

Solución

Primero calculamos la masa total:

$$\begin{aligned}
 \iint_D e^{x+y} dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y} dx dy \\
 &= \int_0^1 (e^{x+y} \Big|_{x=0}^1) dy = \int_0^1 (e^{1+y} - e^y) dy \\
 &= (e^{1+y} - e^y) \Big|_{y=0}^1 = e^2 - e - (e - 1) = e^2 - 2e + 1.
 \end{aligned}$$

El numerador de \bar{x} en la Fórmula (4) es

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^1 xe^{x+y} dx dy &= \int_0^1 (xe^{x+y} - e^{x+y}) \Big|_{x=0}^1 dy \\
 &= \int_0^1 [e^{1+y} - e^{1+y} - (0e^y - e^y)] dy = \int_0^1 e^y dy = e^y \Big|_{y=0}^1 = e - 1,
 \end{aligned}$$

por tanto

$$\bar{x} = \frac{e - 1}{e^2 - 2e + 1} = \frac{e - 1}{(e - 1)^2} = \frac{1}{e - 1} \approx 0,582.$$

Los papeles de x e y pueden intercambiarse en estos cálculos, por lo que también $\bar{y} = 1/(e - 1) \approx 0,582$. \blacktriangle

Para una región W en el espacio con densidad de masa $\delta(x, y, z)$, sabemos que

$$\text{volumen} = \iiint_W dx dy dz, \quad (5)$$

$$\text{masa} = \iiint_W \delta(x, y, z) dx dy dz. \quad (6)$$

Si las coordenadas del centro de masa se denotan mediante $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, entonces las fórmulas del recuadro precedente se generalizan como sigue.

Coordenadas del centro de masa de regiones tridimensionales

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{\iiint_W x \delta(x, y, z) dx dy dz}{\text{masa}} \\
 \bar{y} &= \frac{\iiint_W y \delta(x, y, z) dx dy dz}{\text{masa}} \\
 \bar{z} &= \frac{\iiint_W z \delta(x, y, z) dx dy dz}{\text{masa}}
 \end{aligned} \quad (7)$$

Ejemplo 4

El cubo $[1, 2] \times [1, 2] \times [1, 2]$ tiene una densidad de masa dada por $\delta(x, y, z) = (1 + x)e^z y$. Calcular su masa total.

Solución

La masa del cubo es, por la Fórmula (6),

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 (1+x)e^z y \, dx \, dy \, dz &= \int_1^2 \int_1^2 \left[\left(x + \frac{x^2}{2} \right) e^z y \right]_{x=1}^{x=2} \, dy \, dz \\ &= \int_1^2 \int_1^2 \frac{5}{2} e^z y \, dy \, dz = \int_1^2 \frac{15}{4} e^z dz = \left[\frac{15}{4} e^z \right]_{z=1}^{z=2} = \frac{15}{4}(e^2 - e). \end{aligned}$$



Si tanto una región como su densidad de masa son simétricas respecto a un plano, el centro de masa caerá en ese plano. Por ejemplo, en la Fórmula (7) para \bar{x} , si la región y la densidad de masa son ambas simétricas respecto al plano yz , entonces el integrando es impar en x y, por tanto, $\bar{x} = 0$. Esta forma de usar la simetría se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 5

Hallar el centro de masa de la región hemisférica W definida por las desigualdades $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$. (Se supone que la densidad es igual a 1).

Solución

Por simetría, el centro de masa debe caer en el eje z , por lo que $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Para hallar \bar{z} , debemos calcular, por la Fórmula (7), el numerador $I = \iiint_W z \, dx \, dy \, dz$. La semiesfera es una región elemental, por lo que la integral es

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} z \, dx \, dy \, dz.$$

Dado que z es constante en las integraciones respecto de x e y , podemos extraerla de los dos primeros signos de integración, obteniendo

$$I = \int_0^1 z \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} dx \, dy \right) dz.$$

En vez de calcular explícitamente las dos integrales interiores, nos fijamos en que son iguales a la integral doble $\iint_D dx \, dy$ sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 1 - z^2$, considerado como región x -simple del plano. El área de este disco es $\pi(1 - z^2)$, por lo que

$$I = \pi \int_0^1 z(1 - z^2) \, dz = \pi \int_0^1 (z - z^3) \, dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

El volumen de la semiesfera es $\frac{2}{3}\pi$, de modo que $\bar{z} = (\pi/4)/(\frac{2}{3}\pi) = \frac{3}{8}$.



Nota histórica

Es bien sabido que fue Arquímedes quien descubrió el principio de la palanca. Tal vez lo sea menos que también se deben a él los conceptos de centro de masa y centro de gravedad. Solo han llegado hasta nosotros dos de sus trabajos sobre mecánica: *Sobre los cuerpos flotantes* y *Sobre el equilibrio y los centros de masa de las figuras planas*. Ambos fueron traducidos al latín por Niccolo Tartaglia, alrededor de 1543.

En *Sobre el equilibrio...*, Arquímedes dio los primeros pasos en el campo de las matemáticas aplicadas, haciendo para la mecánica lo que Euclides había logrado para la geometría. En este tratado, describe los principios en los que se basan todas las máquinas de la antigüedad, incluyendo la palanca, el plano inclinado y los sistemas de poleas.

Sorprendentemente, Arquímedes nunca definió con precisión el centro de masa; la primera definición propiamente dicha la dio Pappus de Alejandría en 340 d.C. El concepto de equilibrio iba a tener una notable influencia en el desarrollo de la ingeniería mecánica (mediante la introducción de engranajes), la arquitectura, y el arte, al permitir la construcción de máquinas complejas, edificios de grandes dimensiones y esculturas. La Figura 6.3.3 muestra esbozos de Leonardo da Vinci que ilustran posiciones de equilibrio del cuerpo humano.

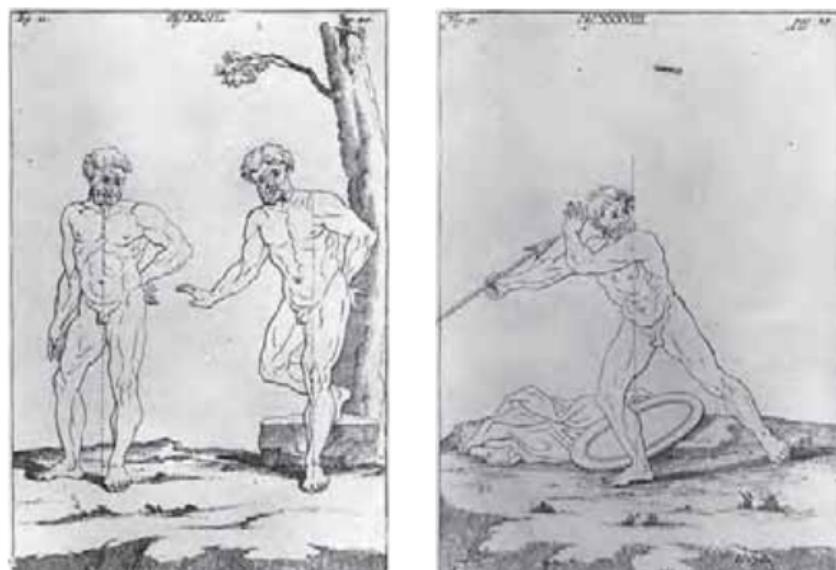


Figura 6.3.3 Posiciones de equilibrio del cuerpo humano que debe respetar el pintor. La proyección del centro de masa ha de caer en la base de apoyo a fin de mantener el equilibrio.

Momentos de inercia

Otro concepto importante en mecánica, necesario para estudiar la dinámica de un cuerpo rígido en rotación, es el de *momento de inercia*. Si el sólido W tiene densidad uniforme δ , los **momentos de inercia** I_x , I_y e I_z respecto a los ejes x , y y z , respectivamente, se definen como se indica en el recuadro de la página siguiente.

El momento de inercia mide la respuesta de un cuerpo a los esfuerzos para someterlo a rotaciones, como por ejemplo cuando tratamos de hacer girar un tiovivo. El momento de inercia es análogo a la masa de un cuerpo, que mide la respuesta de ese cuerpo a los esfuerzos para someterlo

Momentos de inercia respecto de los ejes coordenados

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_W (y^2 + z^2) \delta \, dx \, dy \, dz, & I_y &= \iiint_W (x^2 + z^2) \delta \, dx \, dy \, dz, \\ I_z &= \iiint_W (x^2 + y^2) \delta \, dx \, dy \, dz. \end{aligned} \quad (8)$$

a traslaciones. Sin embargo, a diferencia del movimiento de translación, los momentos de inercia *dependen de la forma y no solo de la masa total*. Es más difícil hacer girar una placa grande que una bola compacta de la misma masa.

Por ejemplo, I_x mide la respuesta del cuerpo a las fuerzas que intentan hacerlo rotar alrededor del eje x . El factor $y^2 + z^2$, que es el cuadrado de la distancia al eje x , pondera más las masas más alejadas del eje de rotación, lo que coincide con la idea intuitiva que acabamos de exponer.

Ejemplo 6

Solución

Calcular el momento de inercia I_z del sólido situado por encima del plano xy y acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, suponiendo que a y la densidad de masa son constantes.

El paraboloide y el cilindro se intersecan en el plano $z = a^2$. Utilizando coordenadas cilíndricas hallamos, a partir de la Ecuación (8), que

$$I_z = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} \delta r^2 \cdot r dz d\theta dr = \delta \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} r^3 dz d\theta dr = \frac{\pi \delta a^6}{3}. \quad \blacktriangle$$

Campos gravitatorios de cuerpos sólidos

Otra aplicación física interesante de la integración triple es la determinación de los campos gravitatorios de cuerpos sólidos. El Ejemplo 7 de la Sección 2.6 mostraba que el campo de fuerzas gravitatorias $\mathbf{F}(x, y, z)$ de una partícula es el gradiente cambiado de signo de una función $V(x, y, z)$ denominada **potencial gravitatorio**. Si hay una masa puntual M en el punto (x, y, z) , entonces el potencial gravitatorio debido a esa masa que actúa sobre otra masa m situada en el punto (x_1, y_1, z_1) es $-GmM[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{-1/2}$, donde G es la constante de gravitación universal.

Si el objeto atractor ocupa un dominio W con densidad de masa $\delta(x, y, z)$, podemos imaginarlo como constituido por regiones cúbicas infinitesimales con masas $dM = \delta(x, y, z) dx dy dz$ y situadas en cada punto (x, y, z) . El potencial gravitatorio total V de W se obtiene entonces “sumando” los potenciales debidos a las masas infinitesimales. De esta forma se llega a la integral triple (véase la Figura 6.3.4):

$$V(x_1, y_1, z_1) = -Gm \iiint_W \frac{\delta(x, y, z) dx dy dz}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}. \quad (9)$$

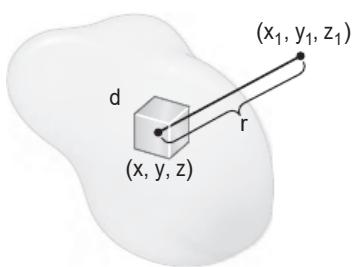


Figura 6.3.4 El potencial gravitatorio que produce una fuerza que actúa sobre una masa m situada en (x_1, y_1, z_1) , generada por la masa $dM = \delta(x, y, z) dx dy dz$ situada en el punto (x, y, z) , es $-[Gm\delta(x, y, z) dx dy dz]/r$.

Nota histórica

La teoría de los campos de fuerza y los potenciales gravitatorios fue desarrollada por Sir Isaac Newton (1642–1727). Newton demoró la publicación de sus teorías gravitatorias durante mucho tiempo. El resultado de que un planeta esférico tiene el mismo campo gravitatorio que tendría si toda su masa estuviera concentrada en su centro apareció por primera vez en su famosa obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, cuya primera edición se publicó en 1687. Resolveremos aquí el problema de Newton usando integrales múltiples y coordenadas esféricas; merece la pena resaltar que la solución que Newton publicó solo utilizaba geometría euclídea.

Ejemplo 7

Sea W una región con densidad constante y con masa total M . Demostrar que el potencial gravitatorio está dado por

$$V(x_1, y_1, z_1) = -\left[\frac{1}{r}\right]_m GMm,$$

donde $[1/r]_m$ es la media sobre W de

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}.$$

Solución

De acuerdo con la Fórmula (9),

$$\begin{aligned} -V(x_1, y_1, z_1) &= Gm \iiint_W \frac{\delta dx dy dz}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}} \\ &= Gm\delta \iiint_W \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}} \\ &= Gm[\delta \text{ volumen}(W)] \frac{\iiint_W \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}}{\text{volumen}(W)} \\ &= GmM \left[\frac{1}{r}\right]_m \end{aligned}$$

como se pedía. ▲

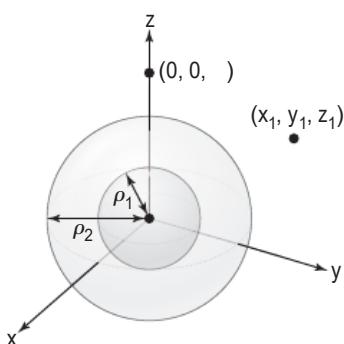


Figura 6.3.5 El potencial gravitatorio en (x_1, y_1, z_1) es el mismo que en $(0, 0, R)$, donde $R = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Usemos ahora la Fórmula (9) y coordenadas esféricas para hallar el potencial gravitatorio $V(x_1, y_1, z_1)$ de una región W con densidad constante entre las esferas concéntricas $\rho = \rho_1$ y $\rho = \rho_2$. Antes de evaluar la integral de la Fórmula (9), vamos a hacer varias observaciones que simplificarán los cálculos. Dado que G, m y la densidad son constantes, podemos en principio ignorarlas. Dado que el cuerpo atractivo, W , es simétrico respecto de las rotaciones con centro en el origen, el potencial $V(x_1, y_1, z_1)$ también debe ser simétrico, por lo que $V(x_1, y_1, z_1)$ solo dependerá de la distancia al origen, $R = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. Nuestro cálculo será lo más simple posible si lo efectuamos para el punto $(0, 0, R)$, situado sobre el eje z (véase la Figura 6.3.5). Por tanto, tenemos que calcular la integral

$$V(0, 0, R) = -\iiint_W \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-R)^2}}.$$

En coordenadas esféricas, W está definida por las desigualdades $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$, de modo que

$$-V(0, 0, R) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \sin \phi d\theta d\phi d\rho}{\sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + (\rho \cos \phi - R)^2}}.$$

Sustituyendo $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$ por 1, de forma que el integrando ya no dependa de θ , podemos integrar en θ y obtener

$$\begin{aligned} -V(0, 0, R) &= 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_0^\pi \frac{\rho^2 \sin \phi d\phi d\rho}{\sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi + (\rho \cos \phi - R)^2}} \\ &= 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 \left(\int_0^\pi \frac{\sin \phi d\phi}{\sqrt{\rho^2 - 2R\rho \cos \phi + R^2}} \right) d\rho. \end{aligned}$$

La integral interior en ϕ puede evaluarse por medio del cambio $u = -2R\rho \cos \phi$. Obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2R\rho} \int_{-2R\rho}^{2R\rho} (\rho^2 + u + R^2)^{-1/2} du &= \frac{2}{2R\rho} (\rho^2 + u + R^2)^{1/2} \Big|_{-2R\rho}^{2R\rho} \\ &= \frac{1}{R\rho} [(\rho^2 + 2R\rho + R^2)^{1/2} - (\rho^2 - 2R\rho + R^2)^{1/2}] \\ &= \frac{1}{R\rho} \{[(\rho + R)^2]^{1/2} - [(\rho - R)^2]^{1/2}\} \\ &= \frac{1}{R\rho} (\rho + R - |\rho - R|). \end{aligned}$$

La expresión $\rho + R$ siempre es positiva, pero $\rho - R$ puede no serlo, por lo que debemos mantener el signo de valor absoluto. Sustituyendo en la fórmula de V , obtenemos

$$-V(0, 0, R) = 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho^2}{R\rho} (\rho + R - |\rho - R|) d\rho = \frac{2\pi}{R} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho (\rho + R - |\rho - R|) d\rho.$$

Consideramos para R dos posibilidades, que corresponden al potencial gravitatorio de objetos *en el exterior o en el interior* de la bola hueca W .

Caso 1. Si $R \geq \rho_2$ [es decir, si (x_1, y_1, z_1) está fuera de W], entonces $|\rho - R| = R - \rho$ para todo ρ en el intervalo $[\rho_1, \rho_2]$, de forma que

$$-V(0, 0, R) = \frac{2\pi}{R} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho [\rho + R - (R - \rho)] d\rho = \frac{4\pi}{R} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 d\rho = \frac{1}{R} \frac{4\pi}{3} (\rho_2^3 - \rho_1^3).$$

El factor $(4\pi/3)(\rho_2^3 - \rho_1^3)$ es igual al volumen de W . Teniendo ahora en cuenta las constantes G, m y la densidad de masa, llegamos a que *el potencial gravitatorio es $-GmM/R$, donde M es la masa de W . Por tanto, V es exactamente igual a lo que sería si toda la masa de W estuviera concentrada en el punto central.*

Caso 2. Si $R \leq \rho_1$ [es decir, si (x_1, y_1, z_1) está dentro del hueco], entonces $|\rho - R| = \rho - R$ para ρ en $[\rho_1, \rho_2]$ y por tanto

$$\begin{aligned}-V(0, 0, R) &= (Gm) \frac{2\pi}{R} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho [\rho + R - (\rho - R)] d\rho = (Gm) 4\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho \\ &= (Gm) 2\pi (\rho_2^2 - \rho_1^2).\end{aligned}$$

El resultado es independiente de R y, por tanto, el potencial V es *constante* dentro del hueco. Dado que la fuerza gravitatoria es el gradiente de V cambiado de signo, concluimos que *no hay fuerza gravitatoria en el interior de un planeta hueco uniforme!*

Dejamos al lector el cálculo de $V(0, 0, R)$ para el caso de $\rho_1 < R < \rho_2$.

Un razonamiento similar muestra que el potencial gravitatorio en el exterior de cualquier cuerpo de masa M con *simetría esférica* (incluso si la densidad es variable) es $V = GMm/R$, donde R es la distancia a su centro (que es su centro de masa).

Ejemplo 8

Hallar el potencial gravitatorio producido por una estrella esférica de masa $M = 3,02 \times 10^{30}$ kg que actúa sobre una unidad de masa situada a una distancia $2,25 \times 10^{11}$ m de su centro ($G = 6,67 \times 10^{-11}$ N · m²/kg²).

Solución

El potencial negativo es

$$-V = \frac{GM}{R} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 3,02 \times 10^{30}}{2,25 \times 10^{11}} = 8,95 \times 10^8 \text{ m}^2/\text{s}^2. \quad \blacktriangle$$

Ejercicios

1. Hallar las coordenadas del centro de masa de un triángulo isósceles de densidad uniforme, acotado por el eje x , $y = ax$ e $y = -ax + 2a$.
2. Suponiendo una densidad uniforme, hallar las coordenadas del centro de masa del semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, con $y \geq 0$.
3. Hallar la media de $f(x, y) = y \operatorname{sen} xy$ sobre $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$.
4. Hallar la media de $f(x, y) = e^{x+y}$ sobre el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.
5. Hallar el centro de masa de la región comprendida entre $y = x^2$ e $y = x$ si la densidad es $x + y$.
6. Hallar el centro de masa de la región comprendida entre $y = 0$ e $y = x^2$, donde $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.
7. Una placa de oro labrada D está definida por $0 \leq x \leq 2\pi$ y $0 \leq y \leq \pi$ (centímetros) y tiene una densidad de masa $\delta(x, y) = y^2 \operatorname{sen}^2 4x + 2$ (gramos por centímetro cuadrado). Si el oro se vende a 7 dólares por gramo, ¿cuánto vale el oro de la placa?
8. En el Ejercicio 7, ¿cuál es la densidad de masa media, en gramos por centímetro cuadrado?
9. (a) Hallar la masa del paralelepípedo $[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1] \times [0, 2]$, suponiendo que la densidad es uniforme.
(b) Hallar lo mismo que en (a), pero con una densidad de masa $\delta(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z + 1$.
10. Hallar la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y por el cono $z^2 = x^2 + y^2$, si la densidad es $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- 11.** Hallar la masa de la esfera sólida de radio 5 cuya densidad está dada por

$$\delta(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1$$

y suponiendo que el centro de la esfera se encuentra en el origen.

- 12.** Un disco sólido de radio 9 y altura 2 se coloca en el origen, de modo que puede expresarse mediante $x^2 + y^2 = 81$ y $0 \leq z \leq 2$. Si la densidad del disco está dada por

$$\delta(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1,$$

calcular su masa.

- 13.** Hallar el centro de masa de la región acotada por $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, suponiendo que la densidad es uniforme.

- 14.** Hallar el centro de masa del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, $1 \leq z \leq 2$ si la densidad es $\delta = (x^2 + y^2)z^2$.

- 15.** Hallar el valor medio de $\sin^2 \pi z \cos^2 \pi x$ sobre el cubo $[0, 2] \times [0, 4] \times [0, 6]$.

- 16.** Hallar el valor medio de e^{-z} sobre la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

- 17.** Un sólido con densidad constante está acotado superiormente por el plano $z = a$ e inferiormente por el cono descrito en coordenadas esféricas por la ecuación $\phi = k$, donde k es una constante $0 < k < \pi/2$. Expresar por medio de una integral su momento de inercia respecto del eje z .

- 18.** Hallar el momento de inercia respecto del eje y de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ si la densidad de masa es un constante δ .

- 19.** Hallar el potencial gravitatorio producido por un planeta esférico de masa $M = 3 \times 10^{26}$ kg sobre una masa m situada a una distancia 2×10^8 m de su centro.

- 20.** En Ejercicio 19, hallar la fuerza gravitatoria ejercida sobre un objeto de 70 kg en la misma posición.

- 21.** Se dice que un cuerpo W en coordenadas xyz es *simétrico respecto a un plano determinado* si por cada partícula a un lado de dicho plano existe otra partícula de igual masa situada en la imagen especular de la primera respecto del plano.

- (a) Discutir los planos de simetría de la carrocería de un automóvil.

- (b) Sea xy el plano de simetría y sean W^+ y W^- las partes de W por encima y por debajo del plano, respectivamente. Por hipótesis, la densidad de masa $\delta(x, y, z)$ satisface $\delta(x, y, -z) = \delta(x, y, z)$. Justificar los pasos indicados al final del enunciado.

- (c) Explicar por qué la parte (b) demuestra que si un cuerpo es simétrico respecto de un plano, entonces su centro de masa cae sobre ese plano.

- (d) Deducir la siguiente ley de la mecánica: *Si un cuerpo es simétrico respecto de dos planos, entonces su centro de masa cae en la recta de intersección.*

$$\begin{aligned} \bar{z} \cdot \iiint_W \delta(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_W z\delta(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{W^+} z\delta(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{W^-} z\delta(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{W^+} z\delta(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{W^+} -w\delta(u, v, -w) du dv dw \\ &= 0. \end{aligned}$$

- 22.** Una placa rectangular uniforme de acero de lados a y b rota alrededor de su centro de masa con velocidad angular constante ω .

- (a) La energía cinética es igual a $\frac{1}{2}(\text{masa})(\text{velocidad})^2$. Justificar que la energía cinética de un elemento de masa $\delta dx dy$ (δ = constante) es igual a $\delta(\omega^2/2)(x^2 + y^2) dx dy$, siempre que el origen $(0, 0)$ esté situado en el centro de masa de la placa.

- (b) Justificar la fórmula de la energía cinética:

$$\text{K.E.} = \iint_{\text{placa}} \delta \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) dx dy.$$

- (c) Calcular la integral, suponiendo que la placa está definida por las desigualdades $-a/2 \leq x \leq a/2$, $-b/2 \leq y \leq b/2$.

- 23.** Como es bien sabido, la densidad de un planeta típico no es uniforme. Supóngase que el planeta C.M.W. tiene radio 5×10^8 cm y una densidad de masa (en gramos por centímetro cúbico):

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \frac{3 \times 10^4}{r}, & r \geq 10^4 \text{ cm}, \\ 3, & r \leq 10^4 \text{ cm}, \end{cases}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Hallar la fórmula del potencial gravitatorio en el exterior de C.M.W.

- 24.** Sea D una región situada en la parte del plano

xy con $x > 0$. Suponer que D tiene densidad uniforme, área $A(D)$ y centro de masa (\bar{x}, \bar{y}) . Sea W el sólido que se obtiene al rotar D en torno al eje y . Demostrar que el volumen de W está dado por

$$\text{vol}(W) = 2\pi\bar{x}A(D).$$

- 25.** Utilizar el ejercicio anterior para demostrar que si se obtiene un toro al rotar el círculo $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ en torno al eje y , el volumen del toro estará dado por $2\pi^2 ar^2$.

6.4 Integrales impropias [Opcional]

En esta sección estudiaremos las integrales impropias—es decir integrales en las que puede no estar acotada la función o la región de integración. Recordaremos en primer lugar lo que sucede para funciones de una variable.

Integrales impropias de una variable

En el estudio de las integrales de funciones de una variable, nos encontramos con varios tipos de integrales “improperas”; es decir, integrales de funciones no acotadas definidas sobre intervalos o integrales de funciones sobre intervalos no acotados. Por ejemplo,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{y} \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

son integrales impropias. Se evalúan por un procedimiento de paso al límite; por ejemplo,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \left(2\sqrt{x} \Big|_a^1 \right) = \lim_{a \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{a}) = 2$$

y

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1.$$

Si en estos procesos de paso al límite este no existe (o es infinito), decimos que la integral no existe (o que la integral diverge).

Integrales impropias en el plano

A continuación vamos a describir tres tipos de integrales impropias de dos variables sobre una región D . Los dos primeros tipos se describen en

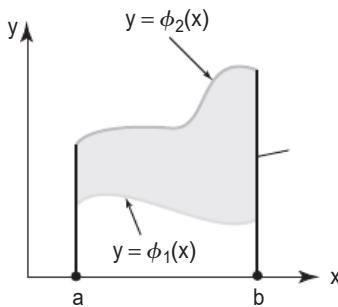


Figura 6.4.1 Un dominio y -simple.

el texto que sigue, mientras que el tercer tipo (integrales sobre regiones no acotadas) se deja para los ejercicios. Evaluaremos todas las integrales por medio de un proceso de paso al límite, como en el caso de una variable.

Para simplificar la exposición, nos limitaremos primero a funciones no negativas f [es decir, $f(x, y) \geq 0$ para todos los puntos $(x, y) \in D$] y a regiones y -simples descritas como el conjunto de puntos (x, y) tales que

$$a \leq x \leq b, \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x),$$

como en la Figura 6.4.1.

En el primer caso que queremos tratar, vamos a suponer que $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ es continua excepto en puntos de la frontera de D . Consideraremos, por ejemplo,

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

donde D es el disco unidad $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Claramente, f no está definida en la frontera de D , donde $x^2 + y^2 = 1$; a pesar de ello, será de interés práctico calcular $\iint_D f(x, y) dA$, ya que esta integral representa el área de la semiesfera superior de la esfera de radio unidad en el espacio de tres dimensiones.

Regiones exhaustivas

La idea básica es la de integrar dicha función f sobre una región más pequeña D' , donde sepamos que la integral existe, y después hacer “tender” D' hacia D ; es decir, “agotamos” D y vemos si $\iint_{D'} f dA$ tiende hacia algún límite. Con esta idea en mente, elegimos una clase especial de D' , de la forma siguiente.

Sea $\eta > 0$ lo suficientemente pequeño como para que $a + \eta < b - \eta$. Sea $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño como para que $\phi_1(x) + \delta < \phi_2(x) - \delta$ para todo $x, a \leq x \leq b$ (véase la Figura 6.4.2). Si $\phi_2(x) = \phi_1(x)$ para algún x , no existirá tal δ , pero de este detalle mínimo nos ocuparemos cuando surja en nuestros ejemplos posteriores. Entonces la región

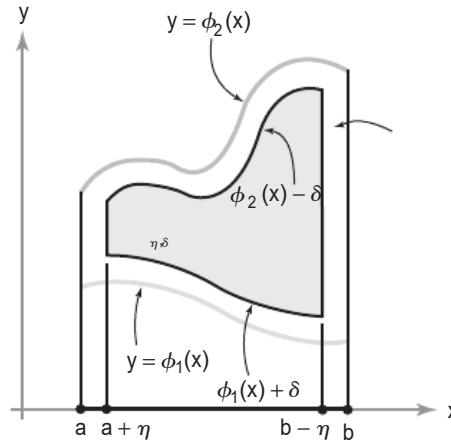


Figura 6.4.2 Un dominio reducido $D_{\eta,\delta}$ para integrales impropias.

$$D_{\eta,\delta} = \{(x,y) | a + \eta \leq x \leq b - \eta \text{ and } \phi_1(x) + \delta \leq y \leq \phi_2(x) - \delta\}$$

es un subconjunto de D , y cuando $(\eta, \delta) \rightarrow 0$, $D_{\eta,\delta}$ tiende a D .

Las integrales impropias como límites

Como f es continua y acotada en $D_{\eta,\delta}$, la integral $\iint D_{\eta,\delta} f dA$ existe. Ahora podemos preguntarnos qué sucede cuando la región $D_{\eta,\delta}$ se expande hasta llenar la región D —es decir, cuando $(\eta, \delta) \rightarrow (0, 0)$. Si

$$\lim_{(\eta,\delta) \rightarrow (0,0)} \iint_{D_{\eta,\delta}} f \, dA$$

existe, decimos que la integral de f sobre D es **convergente** o que f es **integrable** sobre D , y definimos $\iint_D f dx dy$ como este límite.

Ejemplo 1

Calcular

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt[3]{xy}} \, dA,$$

donde D es el cuadrado unidad $[0, 1] \times [0, 1]$.

Solución

D es, claramente, una región y -simple. Elegimos $\eta > 0$ y $\delta > 0$ de forma que $D_{\eta,\delta} \subset D$, como en la Figura 6.4.3. Entonces, por el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} \iint_{D_{\eta,\delta}} \frac{1}{\sqrt[3]{xy}} \, dA &= \int_{\eta}^{1-\eta} \int_{\delta}^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt[3]{xy}} \, dy \, dx \\ &= \int_{\eta}^{1-\eta} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx \int_{\delta}^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \, dy \\ &= \frac{3}{2} \left((1-\eta)^{2/3} - \eta^{2/3} \right) \cdot \frac{3}{2} \left((1-\delta)^{2/3} - \delta^{2/3} \right). \end{aligned}$$

Si hacemos $(\eta, \delta) \rightarrow (0, 0)$, vemos que

$$\lim_{(\eta,\delta) \rightarrow (0,0)} \iint_{D_{\eta,\delta}} \frac{1}{\sqrt[3]{xy}} \, dy \, dx = \frac{3}{2} \frac{3}{2} = \frac{9}{4}.$$

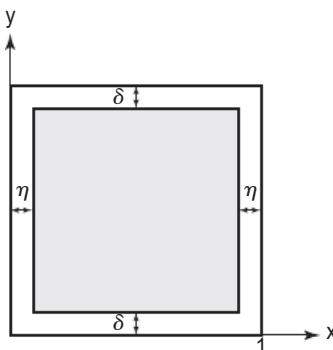


Figura 6.4.3 El cuadrado unidad ligeramente reducido.

Desafortunadamente, no siempre es posible evaluar estos límites de forma tan directa y sencilla. Eso es lo que suele suceder en los ejemplos más interesantes, como ocurría con la superficie de la semiesfera, mencionada anteriormente. ¡Parece que el “mundo real” siempre presentará los mayores retos al matemático! Por ello, vamos a ampliar un poco nuestro análisis teórico.

Las integrales impropias como límites de integrales iteradas

Supongamos que f es integrable sobre $D_{\eta,\delta}$. Podemos entonces aplicar el teorema de Fubini y obtener

$$\iint_{D_{\eta,\delta}} f \, dA = \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x, y) \, dy \, dx.$$

Por tanto, si f es integrable sobre D ,

$$\iint_D f \, dA = \lim_{(\eta,\delta) \rightarrow (0,0)} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x, y) \, dy \, dx. \quad (1)$$

Ahora, la función $F(\eta, \delta) = \iint_{D_{\eta,\delta}} f \, dA$ es una función de dos variables, η y δ , ya que al cambiar η y δ obtenemos valores diferentes. Ahora bien, si f es integrable, entonces

$$\lim_{(\eta,\delta) \rightarrow 0} F(\eta, \delta) = L$$

existe. De aquí se sigue que los límites iterados

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} F(\eta, \delta) \quad \text{y} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow 0} F(\eta, \delta)$$

también existen y son ambos iguales a L , que en nuestro caso es $\iint_D f \, dA$. Por tanto, el límite iterado

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_1(x)-\delta} f(x, y) \, dy \, dx$$

también existe. A la inversa, si el límite iterado existe, eso no implica generalmente que el límite $\lim_{(\eta,\delta) \rightarrow (0,0)} F(\eta, \delta)$ exista.

Por ejemplo, si resultara de alguna manera que $F(\eta, \delta) = \eta\delta/(\eta^2 + \delta^2)$, entonces $\lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} F(\eta, \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow 0} F(\eta, \delta) = 0$; y, sin embargo, $\lim_{(\eta,\delta) \rightarrow 0} F(\eta, \delta)$ no existe, porque $F(\eta, \eta) = 1/2$ (véase la Sección 2.2).

En vista de lo anterior, consideremos de nuevo la expresión (1). Si f es integrable, entonces

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dA &= \lim_{(\eta,\delta) \rightarrow (0,0)} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x, y) \, dy \, dx \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x, y) \, dy \, dx. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que para cada x ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x, y) dy$$

existe. Denótese por $\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$. Supongamos además que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$$

también existe. Denotamos este límite por $\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy dx$. Entonces, si todos los límites existen, *todos los límites deben ser iguales*. Por tanto, si f es integrable y la integral impropia iterada existe, se deduce necesariamente que

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

En este punto podemos plantearnos: ¿es posible que la existencia de *solo* las integrales iteradas *implique* la integrabilidad de f ? A continuación vamos a analizar esta importante cuestión.

Teorema de Fubini para integrales impropias

Con las *integrales*, sucede algo realmente *notable*. A diferencia del caso de los límites iterados (como en el contraejemplo que hemos considerado anteriormente), la existencia de los límites iterados *sí que implica* la integrabilidad de f , siempre que $f \geq 0$. Por tanto, si $f \geq 0$ y si $\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy dx$ existe como límite iterado, entonces f es integrable y

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

Si D es una región x -simple con la coordenada x entre dos funciones ψ_1 y ψ_2 , y si

$$\int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy$$

existe como integral impropia, de nuevo se deduce que f es integrable y

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

Todos estos resultados, que son los análogos *improperios* de los Teoremas 4 y 4' de la Sección 5.3, se conocen como *teorema de Fubini* para integrales impropias, que a continuación enunciamos formalmente.

Teorema 3 Teorema de Fubini Sea D una región elemental del plano y sea $f \geq 0$ una función continua, excepto quizás para puntos situados en la frontera de D . Si cualquiera de las integrales

$$\begin{aligned} & \iint_D f(x, y) \, dA, \\ & \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx, \quad \text{para regiones } y\text{-simples} \\ & \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy \quad \text{para regiones } x\text{-simples} \end{aligned}$$

existe como integral impropia, f es integrable y todas esas integrales son iguales.

La demostración requiere conceptos avanzados de análisis y por tanto la omitiremos. Este resultado puede ser muy útil en los cálculos, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2

Sea $f(x, y) = 1/\sqrt{1-x^2-y^2}$. Demostrar que f es integrable y que $\iint_D f(x, y) \, dA = 2\pi$, la mitad del área de la superficie de una esfera de radio unidad.

Solución

Para $-1 < x < 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\sqrt{1-x^2}+\delta}^{\sqrt{1-x^2}-\delta} \frac{dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right]_{-\sqrt{1-x^2}+\delta}^{\sqrt{1-x^2}-\delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \operatorname{sen}^{-1} \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{1-x^2}} \right) - \operatorname{sen}^{-1} \left(-1 + \frac{\delta}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right\} \\ &= \operatorname{sen}^{-1}(1) - \operatorname{sen}^{-1}(-1) = \frac{\pi}{2} - \frac{(-\pi)}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Claramente,

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-1+\eta}^{1-\eta} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy \, dx}{\sqrt{1-x^2-y^2}} &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-1+\eta}^{1-\eta} \pi \, dx \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \pi(2 - 2\eta) = 2\pi. \end{aligned}$$

Por tanto, f es integrable. Para ver por qué es tan útil este teorema, trátese de demostrar directamente a partir de la definición que f es integrable. ¡No resulta sencillo! ▲

Ejemplo 3

Sea $f(x, y) = 1/(x - y)$ y sea D el conjunto de (x, y) que satisfacen $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq x$. Demostrar que f no es integrable en D .

Solución

Como el denominador de f es cero en la recta $y = x$, f no está acotada sobre parte de la frontera de D . Sean $0 < \eta < 1$ y $0 < \delta < \eta$, y sea $D_{\eta, \delta}$ el conjunto de (x, y) para los que $\eta \leq x \leq 1 - \eta$ y $\delta \leq y \leq x - \delta$ (Figura 6.4.4).

En este caso, la región D es y -simple con $\phi_1(x) = 0$, $\phi_2(x) = x$ y $\phi_1(0) = \phi_2(0)$. Para asegurar que $D_{\eta, \delta} \subset D$, como muestra la figura, debemos elegir δ con un poco más de cuidado. Un sencillo razonamiento geométrico nos muestra que debemos elegir $2\delta \leq \eta$. Entonces

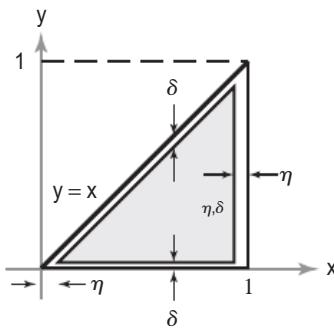


Figura 6.4.4 Dominio contraído $D_{\eta, \delta}$ para un dominio triangular D .

$$\begin{aligned}\iint_{D_{\eta, \delta}} f dA &= \int_{\eta}^{1-\eta} \int_{\delta}^{x-\delta} \frac{1}{x-y} dy dx \\ &= \int_{\eta}^{1-\eta} [-\log(x-y)]|_{y=\delta}^{x-\delta} dx \\ &= \int_{\eta}^{1-\eta} [-\log(\delta) + \log(x-\delta)] dx \\ &= [-\log \delta] \int_{\eta}^{1-\eta} dx + \int_{\eta}^{1-\eta} \log(x-\delta) dx \\ &= -(1-2\eta) \log \delta + [(x-\delta) \log(x-\delta) - (x-\delta)]|_{\eta}^{1-\eta}.\end{aligned}$$

En el último paso, hemos usado el hecho de que $\int \log u du = u \log u - u$. Si continuamos la anterior sucesión de igualdades, obtenemos

$$\begin{aligned}\iint_{D_{\eta, \delta}} f dA &= -(1-2\eta) \log \delta + (1-\eta-\delta) \log(1-\eta-\delta) \\ &\quad - 1(1-\eta-\delta) - (\eta-\delta) \log(\eta-\delta) + (\eta-\delta).\end{aligned}$$

Cuando $(\eta, \delta) \rightarrow (0, 0)$, el segundo término converge a $1 \log 1 = 0$, mientras que el tercero y el quinto términos convergen a -1 y 0 , respectivamente. Sea $v = \eta - \delta$. Dado que $v \log v \rightarrow 0$ cuando $v \rightarrow 0$ (límite que se calcula utilizando la regla de L'Hôpital que se estudia en cálculo³), vemos que el cuarto término tiende a cero cuando $(\eta, \delta) \rightarrow (0, 0)$. Es el primer término el que nos va a dar problemas. Tendremos:

$$-(1-2\eta) \log \delta = -\log \delta + 2\eta \log \delta, \tag{2}$$

y resulta fácil ver que esta expresión no converge cuando $(\eta, \delta) \rightarrow (0, 0)$. Por ejemplo, sea $\eta = 2\delta$; entonces la expresión (2) es igual a $-\log \delta + 4\delta \log \delta$. Como anteriormente, $4\delta \log \delta \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$, pero $-\log \delta \rightarrow +\infty$ cuando $\delta \rightarrow 0$, lo que muestra que la expresión (2) no converge. Por tanto, $\lim_{(\eta, \delta) \rightarrow (0, 0)} \iint_{D_{\eta, \delta}} f dA$ no existe, por lo que f no es integrable



³La regla de L'Hôpital fue descubierta por Bernoulli y se publicó en el libro de texto de L'Hôpital.

Funciones no acotadas en puntos aislados

Vamos a considerar ahora las funciones no negativas f que se hacen “infinito” o no están definidas en puntos aislados de una región D que sea x -simple o y -simple. Por ejemplo, consideremos la función $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ en el disco unidad $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$. De nuevo, $f \geq 0$, pero f no está acotada ni definida en el origen.

Sea (x_0, y_0) un punto de una región general D en el que una función no negativa f no está definida. Sea, además, $D_\delta = D_\delta(x_0, y_0)$ el disco de radio δ con centro en (x_0, y_0) y sea $D \setminus D_\delta$ la región D a la que se le ha quitado D_δ . Supongamos que f es continua en todos los puntos de D excepto en (x_0, y_0) . Entonces $\iint_{D \setminus D_\delta} f \, dA$ está definida. Decimos que $\iint_D f \, dA$ es **convergente**, o que f es **integrable** en D , si existe

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{D \setminus D_\delta} f \, dA$$

Ejemplo 4

Demostrar que $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ es integrable en el disco unidad D y calcular $\iint_D f \, dA$.

Solución

Sea D_δ el disco de radio δ con centro en el origen. Entonces f es continua en todo D excepto en $(0, 0)$. Por tanto, $\iint_{D \setminus D_\delta} f \, dA$ existe. Para calcular esta integral, cambiamos las variables a coordenadas polares, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Entonces $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = 1/r$, y

$$\iint_{D \setminus D_\delta} f \, dA = \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r \, d\theta \, dr = \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} d\theta \, dr = 2\pi(1 - \delta).$$

Por tanto,

$$\iint_D f \, dA = \lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{D \setminus D_\delta} f \, dA = 2\pi.$$

En términos más generales, podemos de forma análoga definir la integral de funciones no negativas f que sean continuas salvo en un número finito de puntos de D . También pueden combinarse ambos tipo de integrales impropias; es decir, podemos considerar funciones que sean continuas excepto en un número finito de puntos de D o en puntos de la frontera de D , y definir $\iint_D f \, dA$ apropiadamente.

Si f toma valores tanto positivos como negativos, podemos utilizar una teoría de integración más avanzada, denominada *integral de Lebesgue*, para generalizar la noción de integral convergente $\iint_D f \, dA$. Usando esta teoría, se puede demostrar que si $\iint_D f \, dA$ existe, entonces se puede evaluar como una integral iterada. Este último hecho se conoce también con el nombre de teorema de Fubini.

Regiones no acotadas

Como hemos dicho anteriormente, dejaremos el estudio de las regiones no acotadas para la sección de ejercicios. Sin embargo, debemos señalar que ya hemos apuntado la idea central en el Ejemplo 5 de la Sección 6.2

sobre la integral gaussiana. En dicho ejemplo, integramos $\exp(-x^2 - y^2)$ sobre todo \mathbb{R}^2 integrando primero sobre un disco de radio a y después tomando el límite cuando $a \rightarrow \infty$.

Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, calcular las siguientes integrales, si existen (explicar cómo se podría definir la integral si ésta no se define en el texto).

1. $\iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}} dA$, donde $D = [0, 1] \times [0, 1]$

(b) Calcular $\iint_D xye^{-(x^2+y^2)} dx dy$ si $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 1$.

2. $\iint_D \frac{1}{\sqrt{|x-y|}} dx dy$, donde $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, y \leq x\}$

3. $\iint_D (y/x) dx dy$, donde D está acotada por $x = 1, x = y$ y $x = 2y$

4. $\int_0^1 \int_0^{e^x} \log x dx dy$

5. Sea $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Sea $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$. Calcular:

$$\iint_D \frac{dx dy}{x^\alpha y^\beta}.$$

6. Sea $D = [1, \infty) \times [1, \infty)$. Sea $1 < \gamma$ y $1 < \rho$. Calcular:

$$\iint_D \frac{dx dy}{x^\gamma y^\rho}.$$

7. (a) Calcular

$$\iint_D \frac{dA}{(x^2 + y^2)^{2/3}},$$

donde D es el disco unidad en \mathbb{R}^2 .

(b) Determinar los números reales λ para los que la integral

$$\iint_D \frac{dA}{(x^2 + y^2)^\lambda}$$

es convergente, donde, de nuevo, D es el disco unidad.

8. (a) Explicar cómo se podría definir $\iint_D f dA$ si D fuera una región no acotada—por ejemplo, el conjunto de (x, y) tales que $a \leq x < \infty$ y $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$, dadas $\phi_1 \leq \phi_2$ (Figura 6.4.5).

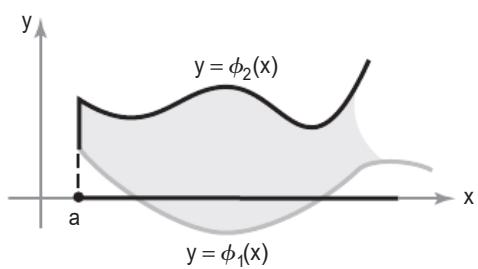


Figura 6.4.5 Una región no acotada D .

9. Usando el Ejercicio 8, integrar e^{-xy} para $x \geq 0, 1 \leq y \leq 2$ de dos formas distintas. Suponiendo que se pueda usar el teorema de Fubini, demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \log 2.$$

10. Demostrar que la siguiente integral existe y calcularla.

$$\int_0^1 \int_0^a (x/\sqrt{a^2 - y^2}) dy dx$$

11. Discutir si existe la integral

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2 + 2xy + y^2} dx dy$$

donde $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Si existe, calcular su valor.

12. También se pueden considerar integrales impropias de funciones que sean discontinuas en una curva contenida en una región D . Por ejemplo, dividiendo $D = [0, 1] \times [0, 1]$ en dos regiones, definir y después discutir la convergencia de la integral

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{|x-y|}} dx dy.$$

13. Sea W el primer octante de la bola $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$, donde $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Calcular la integral impropia

$$\iiint_W \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/4}}{\sqrt{z+(x^2+y^2+z^2)^2}} dx dy dz$$

por medio de un cambio de variables.

14. Sea f una función no negativa que puede ser no acotada y discontinua en la frontera de una región elemental D . Sea g una función similar tal que $f(x, y) \leq g(x, y)$ siempre que ambas estén definidas. Supongamos que $\iint_D g(x, y) dA$ existe. Razonar informalmente que esto implica la existencia de $\iint_D f(x, y) dA$.

15. Utilizar el Ejercicio 14 para demostrar que

$$\iint_D \frac{\sin^2(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy dx$$

existe, donde D es el disco unidad $x^2+y^2 \leq 1$.

16. Sea f como en el Ejercicio 14 y sea g una función tal que $0 \leq g(x, y) \leq f(x, y)$ siempre que ambas estén definidas. Supongamos que $\iint_D g(x, y) dA$ no existe. Razonar informalmente por qué $\iint_D f(x, y) dA$ no puede existir.

17. Utilizar el Ejercicio 16 para demostrar que

$$\iint_D \frac{e^{x^2+y^2}}{x-y} dy dx$$

no existe, siendo D el conjunto de puntos (x, y) tales que $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq x$.

18. Sea D la región no acotada definida como el conjunto de puntos (x, y, z) con $x^2+y^2+z^2 \geq 1$. Por medio de un cambio de variables, calcular la integral impropia

$$\iiint_D \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

19. Calcular

$$\int_0^1 \int_0^y \frac{x}{y} dx dy \quad \text{y} \quad \int_0^1 \int_x^1 \frac{x}{y} dy dx.$$

¿Se puede aplicar el teorema de Fubini?

20. En el Ejercicio 17 de la Sección 5.2 demostramos que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy dx \neq \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx dy.$$

Por tanto, el teorema de Fubini no se verifica en este caso, a pesar de que existen ambas integrales impropias iteradas. ¿Qué es lo que falla?

21. Si $0 \leq f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in D$, y si existe la integral impropia de g

$$\iint_D g(x, y) dx dy,$$

entonces $\iint_D f(x, y) dx dy$ también existe. Utilizar este hecho y los Ejercicios 5 y 6 para demostrar que si $0 < \alpha, \beta < 1$ y $1 < \gamma, \rho$, entonces existe

$$\iint_D \frac{dx dy}{x^\alpha y^\beta + x^\gamma y^\rho}$$

donde $D = [0, \infty) \times [0, \infty)$. [SUGERENCIA: escribir $D = D_1 \cup D_2$ y aplicar el Ejercicio 14 por separado a cada D_i .]

Ejercicios de repaso del Capítulo 6

1. (a) Hallar una transformación lineal que transforme el cuadrado $S = [0, 1] \times [0, 1]$ en el paralelogramo P con vértices $(0, 0), (2, 0), (1, 2), (3, 2)$.
 (b) Dar una fórmula de cambio de variables

apropiada para la transformación hallada en el apartado (a).

2. (a) Hallar la imagen del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ por la transformación $T(x, y) = (2x, x+3y)$.

- (b) Dar una fórmula de cambio de variables apropiada para la transformación y la región halladas en el apartado (a).
3. Sea B la región del primer cuadrante acotada por las curvas $xy = 1$, $xy = 3$, $x^2 - y^2 = 1$ y $x^2 - y^2 = 4$. Calcular $\iint_B (x^2 + y^2) dx dy$ usando el cambio de variables $u = x^2 - y^2$, $v = xy$.
4. En los apartados (a) a (d), realizar el cambio de variables indicado. (No calcular la integral.)
- $\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2)^{1/2} dx dy dz$, coordenadas cilíndricas.
 - $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} xyz dz dx dy$, coordenadas cilíndricas.
 - $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{(2-y^2)}}^{\sqrt{(2-y^2)}} \int_{\sqrt{(x^2+y^2)}}^{\sqrt{(4-x^2-y^2)}} z^2 dz dx dy$, coordenadas esféricas.
 - $\int_0^1 \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin 2\phi d\theta d\phi d\rho$, coordenadas cartesianas.
5. Hallar el volumen encerrado por las superficies $x^2 + y^2 = z$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
6. Hallar el volumen encerrado por el cono $x^2 + y^2 = z^2$ y el plano $2z - y - 2 = 0$.
7. Se perfora un orificio cilíndrico de diámetro 1 en una esfera de radio 2. Suponiendo que el eje del cilindro pasa por el centro de la esfera, hallar el volumen del sólido resultante.
8. Sean C_1 y C_2 dos cilindros de longitud infinita y diámetro 2, y cuyos ejes son los ejes coordenados x e y , respectivamente. Hallar el volumen de su intersección, $C_1 \cap C_2$.
9. Hallar el volumen acotado por $x/a + y/b + z/c = 1$ y por los planos coordenados.
10. Hallar el volumen determinado por $z \leq 6 - x^2 - y^2$ y $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.
11. El tetraedro definido por $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1$ se corta en n secciones del mis-

mo volumen mediante planos paralelos al plano $x + y + z = 1$. ¿Dónde deben darse los cortes?

12. Sea E el elipsoide sólido $E = \{(x, y, z) \mid (x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1\}$, donde $a > 0, b > 0$ y $c > 0$. Calcular
- $$\iiint xyz dx dy dz$$
- sobre todo el elipsoide y
 - sobre la parte del mismo que cae en el primer cuadrante:
- $$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$
13. Hallar el volumen del “cucurcho de helado” definido por las desigualdades $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{5}z^2$ y $0 \leq z \leq 5 + \sqrt{5 - x^2 - y^2}$.
14. Sean ρ, θ, ϕ coordenadas esféricas en \mathbb{R}^3 y supongamos que una superficie que encierra el origen está descrita por una función continua y positiva $\rho = f(\theta, \phi)$. Demostrar que el volumen encerrado por la superficie es
- $$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [f(\theta, \phi)]^3 \sin \phi d\phi d\theta.$$
15. Usando un cambio de variables apropiado, calcular
- $$\iint_B \exp[(y - x)/(y + x)] dx dy,$$
- siendo B el interior del triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.
16. Supóngase que la densidad de una bola de radio R está dada por $(1 + d^3)^{-1}$, donde d es la distancia al centro de la bola. Hallar la masa total de la bola.
17. La densidad del material de un casco esférico cuyo radio interior es de 1 m y cuyo radio exterior es de 2 m es $0.4d^2$ g/cm³, donde d es la distancia en metros al centro de la esfera. Hallar la masa total del casco esférico.
18. Si se echase el casco del Ejercicio 17 en una gran balsa de agua pura, ¿flotaría? ¿Y si el casco hiciera agua? (Se supone que la densidad del agua es exactamente de 1 g/cm³.)
19. La temperatura en cada punto del cubo $C = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$ es $32d^2$, donde d es la distancia al origen.

- (a) ¿Cuál es la temperatura media?
 (b) En qué puntos del cubo es la temperatura igual a la temperatura media?
- 20.** Utilizar coordenadas cilíndricas para hallar el centro de masa de la región definida por

$$y^2 + z^2 \leq \frac{1}{4}, \quad (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad x \geq 1.$$

- 21.** Hallar el centro de masa del hemisferio sólido

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \text{ y } z \geq 0\},$$

si la densidad es constante.

- 22.** Calcular $\iint_B e^{-x^2-y^2} dx dy$, donde B está formado por los puntos (x, y) que satisfacen $x^2 + y^2 \leq 1$ e $y \leq 0$.

- 23.** Calcular

$$\iiint_S \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

donde S es el sólido acotado por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, siendo $a > b > 0$.

- 24.** Calcular $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)xyz dx dy dz$ sobre cada una de las siguientes regiones:

- (a) La esfera $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$
 (b) La semiesfera $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ y } z \geq 0\}$
 (c) El octante $D = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ y } x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$

- 25.** Sea C la región cónica $\{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ en \mathbb{R}^3 . Calcular la integral $\iiint_C (1 + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$.

- 26.** Hallar $\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz$, siendo $f(x, y, z) = \exp[-(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}]$.

- 27.** La *rigidez flexural* EI de una viga uniforme es el producto de su módulo de elasticidad de Young E y del momento de inercia I de la sección transversal de la viga con respecto a una línea horizontal l que pase por el centro de gravedad de esa sección. En este caso

$$I = \iint_R [d(x, y)]^2 dx dy,$$

donde $d(x, y) =$ distancia de (x, y) a l y $R =$ sección transversal de la viga que estamos considerando.

- (a) Supóngase que la sección transversal R es el rectángulo $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2$ y que l es la recta $y = 1/2$. Hallar I .

- (b) Supóngase que la sección transversal R es un círculo de radio 4 y que l es el eje x . Hallar I usando coordenadas polares.

- 28.** Hallar $\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz$, donde

$$f(x, y, z) = \frac{1}{[1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}]^{3/2}}.$$

- 29.** Supóngase que D es la región no acotada de \mathbb{R}^2 dada por el conjunto de puntos (x, y) tales que $0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq x$. Sea $f(x, y) = x^{-3/2} e^{y-x}$. ¿Existe la integral impropia $\iint_D f(x, y) dx dy$?

- 30.** Si el mundo fuese bidimensional, las leyes de la física predecirían que el potencial gravitatorio de una masa puntual sería proporcional al logaritmo de la distancia al punto. Utilizando coordenadas polares, escribir una integral que exprese el potencial gravitatorio de un disco con densidad constante.

- 31.** (a) Calcular la integral impropia

$$\int_0^\infty \int_0^y x e^{-y^3} dx dy.$$

- (b) Calcular

$$\iint_B (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) dx dy,$$

siendo B la porción que hay en el primer cuadrante del disco de radio 2 centrado en $(0, 0)$.

- 32.** Sea f una función no negativa definida sobre una región x -simple o y -simple $D \subset \mathbb{R}^2$ y supóngase que la función es continua, salvo en puntos de la frontera de D y, a lo sumo, en un conjunto finito de puntos interiores de D . Dar una definición adecuada de $\iint_D f dA$.

- 33.** Calcular $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$, siendo $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2)^{3/2}$. (SUGERENCIA: se puede suponer que un cambio de variables y el teorema de Fubini son ambos válidos para integrales impropias.)

Integrales sobre trayectorias y superficies

Mantengo como cierto que: (1) las partes pequeñas del espacio son de naturaleza análoga a pequeñas colinas en una superficie que en promedio es plana, (2) esta propiedad de estar curvado o distorsionado se transmite continuamente de una parte del espacio a otra como si fuera una onda, (3) esta variación de la curvatura del espacio es realmente lo que ocurre en dicho fenómeno que llamamos movimiento de la materia ya sea ponderable o etérea, (4) en este mundo físico no ocurre sino esta variación, sujeta, posiblemente, a la ley de la continuidad.

—W. K. Clifford (1870)

Todo el que esté seriamente implicado en la búsqueda de la ciencia llega a convencerse de que hay un espíritu que se manifiesta en las leyes del Universo, uno inmensamente superior al espíritu humano.

—Albert Einstein

En el Capítulo 5 hemos estudiado la integración sobre regiones de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 . En este capítulo vamos a estudiar la integración sobre trayectorias y superficies. Esto será fundamental para entender el Capítulo 8, en el que expondremos la relación básica entre el cálculo diferencial vectorial (Capítulo 4) y el cálculo integral vectorial (este capítulo), una relación que generaliza el teorema fundamental del cálculo a varias variables. Esta generalización se resume en los teoremas de Green, Gauss y Stokes.

7.1 Integral a lo largo de una trayectoria

En esta sección se presenta el concepto de integral sobre una trayectoria; esta es una de las diversas formas en las que se puede generalizar la integral de funciones de una variable a funciones de varias variables.

Además de las vistas en el Capítulo 5, existen otras generalizaciones que veremos en las siguientes secciones.

Supongamos que tenemos una función escalar $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que f envía puntos de \mathbb{R}^3 a números reales. Será útil definir la integral de dicha función f a lo largo de una trayectoria $\mathbf{c}: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Para relacionar este concepto con algo tangible, supongamos que la imagen de \mathbf{c} representa un alambre. Hacemos que $f(x, y, z)$ denote la densidad de masa en (x, y, z) y la integral de f será la masa total del alambre. Si $f(x, y, z)$ indica la temperatura, también podemos utilizar la integral para determinar la temperatura media a lo largo del alambre. En primer lugar, proporcionamos la definición formal de la integral a lo largo de una trayectoria y luego, después del ejemplo, la motivaremos algo más.

Definición Integral a lo largo de una trayectoria La *integral a lo largo de una trayectoria* o la *integral de $f(x, y, z)$ a lo largo de la trayectoria \mathbf{c}* está definida cuando $\mathbf{c}: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es de clase C^1 y cuando la función compuesta $t \mapsto f(x(t), y(t), z(t))$ es continua en I . Definimos esta integral mediante la ecuación

$$\int_{\mathbf{c}} f \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| \, dt.$$

En ocasiones, $\int_{\mathbf{c}} f \, ds$ se denota

$$\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z) \, ds$$

o

$$\int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| \, dt.$$

Si $\mathbf{c}(t)$ solo es a trozos C^1 o $f(\mathbf{c}(t))$ es continua a trozos, definimos $\int_{\mathbf{c}} f \, ds$ dividiendo $[a, b]$ en segmentos sobre los que $f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\|$ es continua y sumando las integrales sobre los segmentos.

Cuando $f = 1$, recuperamos la definición de la longitud de arco de \mathbf{c} . Obsérvese también que para que la definición anterior tenga sentido basta con que f esté definida en la curva imagen C de \mathbf{c} y no necesariamente en todo el espacio.

Ejemplo 1

Sea \mathbf{c} la hélice $\mathbf{c}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ (veáse la Figura 2.4.9) y sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcular la integral $\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z) \, ds$.

Solución

En primer lugar calculamos $\|\mathbf{c}'(t)\|$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{c}'(t)\| &= \sqrt{\left[\frac{d(\cos t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{d(\sin t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dt}{dt}\right]^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

A continuación, sustituimos x, y y z en términos de t y obtenemos

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2$$

a lo largo de \mathbf{c} . Insertando esta información en la definición de la integral a lo largo de la trayectoria se obtiene

$$\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z) ds = \int_0^{2\pi} (1 + t^2) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} (3 + 4\pi^2). \blacksquare$$

Para motivar la definición de la integral a lo largo de una trayectoria, consideremos sumas de “tipo Riemann” S_N de la misma forma que cuando definimos la longitud de arco en la Sección 4.2. Con el fin de simplificar, sea \mathbf{c} de clase C^1 en I . Subdividimos el intervalo $I = [a, b]$ mediante una partición

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b.$$

Esto nos lleva a una descomposición de \mathbf{c} en trayectorias \mathbf{c}_i (Figura 7.1.1) definidas en $[t_i, t_{i+1}]$ para $0 \leq i \leq N - 1$. Denotamos la longitud de arco de \mathbf{c}_i por Δs_i ; entonces,

$$\Delta s_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

Cuando N es grande, la longitud de arco Δs_i es pequeña y $f(x, y, z)$ es aproximadamente constante para puntos en \mathbf{c}_i . Consideremos las sumas

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i,$$

donde $(x_i, y_i, z_i) = \mathbf{c}(t)$ para algún $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Por el teorema del valor medio sabemos que $\Delta s_i = \|\mathbf{c}'(t_i^*)\| \Delta t_i$, donde $t_i \leq t_i^* \leq t_{i+1}$ y

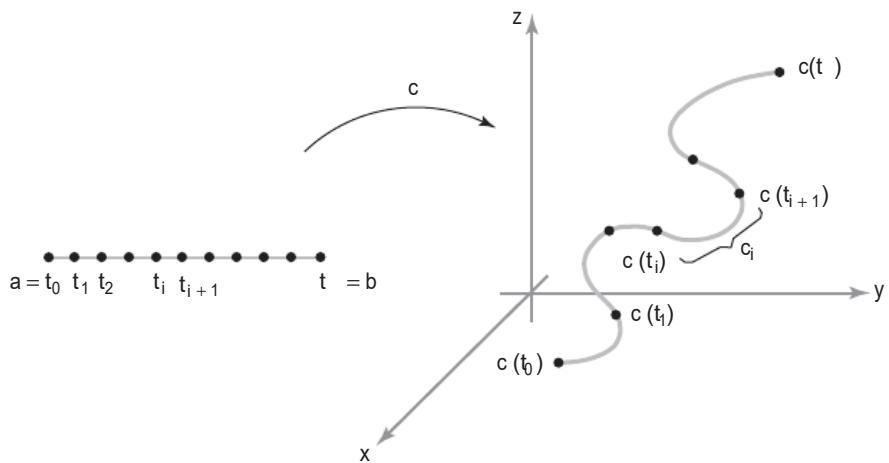


Figura 7.1.1 Descomposición de \mathbf{c} en trayectorias \mathbf{c}_i más pequeñas.

$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. A partir de la teoría de las sumas de Riemann, podemos demostrar que

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} S_N &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i, y_i, z_i) \|\mathbf{c}'(t_i^*)\| \Delta t_i \\ &= \int_I f(x(t), y(t), z(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{\mathbf{c}} f(x, y, z) ds.\end{aligned}$$

Integral a lo largo de una trayectoria para curvas planas

Un caso especial importante de la integral a lo largo de una trayectoria se produce cuando la trayectoria \mathbf{c} describe una curva plana. Supongamos que todos los puntos $\mathbf{c}(t)$ están en el plano xy y que f es una función con valores reales de dos variables. La integral de f a lo largo de la trayectoria \mathbf{c} es

$$\int_{\mathbf{c}} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Si $f(x, y) \geq 0$, esta integral tiene una interpretación geométrica como el “área de una valla”. Podemos construir una “valla” cuya base sea la imagen de \mathbf{c} y cuya altura sea $f(x, y)$ en (x, y) (Figura 7.1.2). Si \mathbf{c} se mueve solo una vez a lo largo de la imagen de \mathbf{c} , la integral $\int_{\mathbf{c}} f(x, y) ds$ representa el área de un lado de esta valla. Los lectores deben intentar justificar esta interpretación por sí mismos, utilizando un argumento similar al empleado para justificar la fórmula de la longitud de arco.

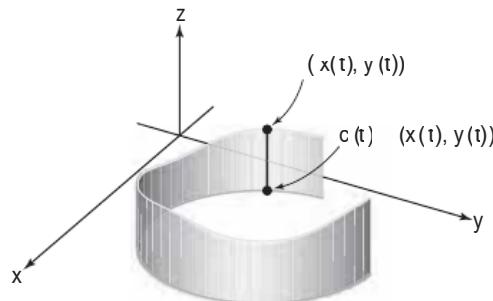


Figura 7.1.2 La integral a lo largo de una trayectoria como el área de una valla.

Ejemplo 2

La tía de Tom Sawyer le pide a su sobrino que pinte ambos lados de la vieja valla mostrada en la Figura 7.1.3. Tom estima que por cada 25 pies² que deje que alguien pinte en su lugar, la víctima voluntaria le pagará 5 centavos. ¿Cuánto espera ganar Tom, suponiendo que su tía le proporciona gratis la pintura?

Solución

En la Figura 7.1.3, vemos que la base de la valla que está en el primer cuadrante es la trayectoria $\mathbf{c}: [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (30 \cos^3 t, 30 \sin^3 t)$, y la altura de la valla en (x, y) es $f(x, y) = 1 + y/3$. El área de un lado de la mitad de la valla es igual a la integral $\int_{\mathbf{c}} f(x, y) ds = \int_{\mathbf{c}} (1 + y/3) ds$. Puesto que $\mathbf{c}'(t) = (-90 \cos^2 t \sin t, 90 \sin^2 t \cos t)$, tenemos $\|\mathbf{c}'(t)\| = 90 \sin t \cos t$. Por tanto, la integral es

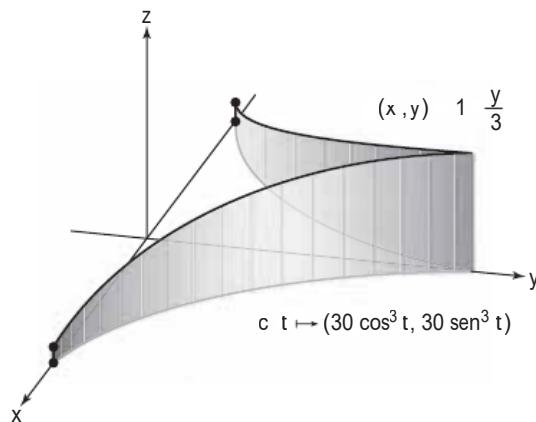


Figura 7.1.3 La valla de Tom Sawyer.

$$\begin{aligned} \int_C \left(1 + \frac{y}{3}\right) ds &= \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{30 \sin^3 t}{3}\right) 90 \sin t \cos t dt \\ &= 90 \int_0^{\pi/2} (\sin t + 10 \sin^4 t) \cos t dt \\ &= 90 \left[\frac{\sin^2 t}{2} + 2 \sin^5 t \right]_0^{\pi/2} = 90 \left(\frac{1}{2} + 2 \right) = 225, \end{aligned}$$

que es el área en el primer cuadrante. Luego el área de un lado de la valla es 450 pies². Como hay que pintar ambos lados de la valla, tenemos que multiplicar por 2 para obtener el área total, que es igual a 900 pies². Dividiendo entre 25 y multiplicando después por 5, determinamos que Tom puede ganar hasta 1,80 dólares por el trabajo. ▲

Con esto terminamos nuestro estudio sobre integración de funciones *escalares* sobre trayectorias. En la siguiente sección vamos a centrarnos en la integración de *campos vectoriales* sobre trayectorias y en el Capítulo 8 veremos muchas más aplicaciones de la integral a lo largo de una trayectoria, cuando estudiemos el análisis vectorial.

Suplemento de la Sección 7.1: Curvatura total de una curva

Los Ejercicios 16, 17 y 20–23 de la Sección 4.2 describen los conceptos de curvatura κ y torsión τ de una curva suave C en el espacio. Si $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow C \subset \mathbb{R}^3$ es una parametrización de C con rapidez unidad, de modo que $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$, entonces la **curvatura** $\kappa(p)$ en $p \in C$ se define como $\kappa(p) = \|\mathbf{c}''(t)\|$, donde $p = \mathbf{c}(t)$. Un resultado de la geometría diferencial dice que si dos curvas tienen rapidez unidad y tienen la misma curvatura y torsión, entonces una se puede obtener a partir de la otra mediante una rotación rígida, traslación o reflexión.

La curvatura $\kappa: C \rightarrow \mathbb{R}$ es una función con valores reales sobre el conjunto C , de modo que definimos la **curvatura total** como su integral a lo largo de C : $\int_C \kappa ds$. Los matemáticos han conseguido probar algunos hechos sorprendentes acerca de la curvatura total. Por ejemplo, si C es una curva plana cerrada [es decir, $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$], entonces

$$\int_C \kappa \, ds \geq 2\pi$$

y es igual a 2π solo si C es una curva convexa. Si C es una curva cerrada en el espacio con

$$\int_C \kappa \, ds \leq 4\pi,$$

entonces C “no tiene nudos”; es decir, C se puede deformar de manera continua (sin cortarse nunca a sí misma) en una circunferencia plana. Por tanto, para las curvas con nudos,

$$\int_C \kappa \, ds > 4\pi.$$

Véase la Figura 7.1.4.

El enunciado formal de este hecho se conoce como teorema de *Fary–Milnor*. Cuenta la leyenda que John Milnor, contemporáneo de John Nash¹ en la Universidad de Princeton, estaba dormido en una clase de matemáticas mientras el profesor escribía en la pizarra tres problemas de la teoría de nudos *no resueltos*. Al terminar la clase, Milnor (todavía estudiante) se despertó y pensó que los problemas escritos en la pizarra eran ejercicios para casa y los anotó rápidamente. A la semana siguiente volvió con la solución de los tres problemas—¡uno de ellos era una demostración del teorema de Fary–Milnor! Algunos años después, consiguió una plaza de profesor en Princeton y en 1962 recibió (aunque por otro trabajo) la Medalla Fields, el mayor reconocimiento en matemáticas, considerado generalmente como el Premio Nobel de matemáticas.

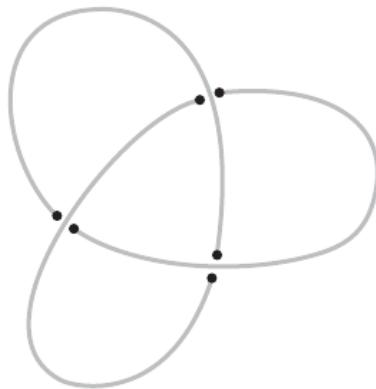


Figura 7.1.4 Una curva con nudos en \mathbb{R}^3 .

Ejercicios

En los Ejercicios 1 a 4, hallar una parametrización apropiada para el segmento de curva suave a trozos en \mathbb{R}^2 dado, que implique la orientación.

1. La curva C , que recorre la circunferencia de radio 3, desde el punto $(3, 0)$ al punto $(-3, 0)$, y luego sigue en línea recta a lo largo del eje x para volver al punto $(3, 0)$
2. La curva C , que va a lo largo de $y = x^2$ desde el punto $(0, 0)$ al punto $(2, 4)$, luego sigue en línea recta desde $(2, 4)$ a $(0, 4)$, y luego sigue por el eje y para volver al punto $(0, 0)$
3. La curva C , que recorre $y = \operatorname{sen} x$ desde el punto $(0, 0)$ al punto $(\pi, 0)$, y luego sigue a lo largo del eje x para volver a $(0, 0)$
4. La curva cerrada C descrita por la elipse

$$\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y - 3)^2}{9} = 1$$

orientada en sentido antihorario.

En los Ejercicios 5 a 8, determinar una parametrización apropiada para la curva suave a trozos en \mathbb{R}^3 especificada.

¹John Nash es el protagonista de la biografía best-seller *Una mente maravillosa*, de Sylvia Nasar. En 2001 se llevó al cine una versión adaptada de la misma.

5. La intersección del plano $z = 3$ con el cilindro elíptico

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

6. El triángulo formado por el recorrido que se describe al ir desde el punto $(1, 2, 3)$ a $(0, -2, 1)$, después hasta $(6, 4, 2)$ y de vuelta a $(1, 2, 3)$
7. La intersección de las superficies $y = x$ y $z = x^3$, desde el punto $(-3, -3, -27)$ hasta el punto $(2, 2, 8)$

8. La intersección del cilindro $y^2 + z^2 = 1$ y el plano $z = x$

9. Sean $f(x, y, z) = y$ y $\mathbf{c}(t) = (0, 0, t)$, $0 \leq t \leq 1$. Demostrar que $\int_{\mathbf{c}} f \, ds = 0$.

10. Calcular las siguientes integrales a lo largo de trayectorias $\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z) \, ds$, donde
- (a) $f(x, y, z) = x + y + z$ y $\mathbf{c}: t \mapsto (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$
- (b) $f(x, y, z) = \cos z$, \mathbf{c} como en el apartado (a).

11. Calcular las siguientes integrales a lo largo de trayectorias $\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z) \, ds$, donde
- (a) $f(x, y, z) = \exp \sqrt{z}$, y $\mathbf{c}: t \mapsto (1, 2, t^2)$, $t \in [0, 1]$
- (b) $f(x, y, z) = yz$ y $\mathbf{c}: t \mapsto (t, 3t, 2t)$, $t \in [1, 3]$

Los Ejercicios 16 a 19 se ocupan de la aplicación de la integral a lo largo de una trayectoria al problema de definir el valor medio de una función escalar a lo largo de una trayectoria. Definimos el número

$$\frac{\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z) \, ds}{l(\mathbf{c})}$$

*como el **valor medio** de f a lo largo de \mathbf{c} . Aquí $l(\mathbf{c})$ es la longitud de la trayectoria:*

$$l(\mathbf{c}) = \int_{\mathbf{c}} \|\mathbf{c}'(t)\| \, dt.$$

(Esto es análogo al valor medio de una función sobre una región definido en la Sección 6.3.)

16. (a) Justificar la fórmula $[\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z) \, ds]/l(\mathbf{c})$ para el valor medio de f a lo largo de \mathbf{c} usando las sumas de Riemann.
- (b) Demostrar que el valor medio de f a lo largo de \mathbf{c} en el Ejemplo 1 es $(1 + \frac{4}{3}\pi^2)$.
- (c) En los Ejercicios 10(a) y (b), hallar el valor medio de f sobre las curvas dadas.

12. Calcular la integral de $f(x, y, z)$ a lo largo de la trayectoria \mathbf{c} , donde

- (a) $f(x, y, z) = x \cos z$, $\mathbf{c}: t \mapsto t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $t \in [0, 1]$
- (b) $f(x, y, z) = (x + y)/(y + z)$ y $\mathbf{c}: t \mapsto \left(t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t\right)$, $t \in [1, 2]$

13. Sea $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{ \text{plano } xz \} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = 1/y^3$. Calcular $\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z) \, ds$, donde $\mathbf{c}: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}^3$ está dada por $\mathbf{c}(t) = (\log t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

14. (a) Demostrar que la integral de $f(x, y)$ a lo largo de la trayectoria dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \, d\theta.$$

- (b) Calcular la longitud de arco de la trayectoria $r = 1 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

15. Sea $f(x, y) = 2x - y$ y consideremos la trayectoria $x = t^4$, $y = t^4$, $-1 \leq t \leq 1$.

- (a) Calcular la integral de f a lo largo de esta trayectoria e interpretar geométricamente la respuesta.

- (b) Calcular la función de longitud de arco $s(t)$ y repetir el apartado (a) en términos de s (véase el Ejercicio 2 de la Sección 4.2).

- (a) ¿Cuál es la masa total del alambre?
 (b) ¿Dónde está el centro de masa del alambre?
 (Véase la Sección 6.3.)
- 19.** Sea \mathbf{c} la trayectoria dada por $\mathbf{c}(t) = (t^2, t, 3)$ para $t \in [0, 1]$.
 (a) Hallar $l(\mathbf{c})$, la longitud de la trayectoria.
 (b) Hallar el valor medio de la coordenada y a lo largo de la trayectoria \mathbf{c} .
- 20.** Demostrar que la integral de una función $f(x, y)$ a lo largo de una trayectoria C dada por la gráfica de $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$ queda determinada por:
- $$\int_C f \, ds = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + [g'(x)]^2} \, dx$$
- Concluir que si $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable a trozos, entonces la longitud de la gráfica de g sobre $[a, b]$ está dada por:
- $$\int_C f \, ds = \int_a^b \sqrt{1 + g'(x)^2} \, dx.$$
- 21.** Si $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable a trozos, definimos la *longitud de la gráfica* de g sobre $[a, b]$ como la longitud de la trayectoria $t \mapsto (t, g(t))$ para $t \in [a, b]$. Demostrar que la longitud de la gráfica de g sobre $[a, b]$ es
- $$\int_a^b \sqrt{1 + [g'(x)]^2} \, dx.$$
- 22.** Utilizar el Ejercicio 21 para determinar la longitud de la gráfica de $y = \log x$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$.
- 23.** Utilizar el Ejercicio 20 para calcular la integral de $f(x, y) = y$ a lo largo de la gráfica de la semicircunferencia $y = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$.
- 24.** Calcular la integral de $f(x, y) = y^2$ sobre la gráfica $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$.
- 25.** Calcular la integral de $f(x, y, z) = xyz$ a lo largo de la trayectoria $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
- 26.** Hallar la masa de un alambre formado por la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 0$ si la densidad en (x, y, z) está dada por $\rho(x, y, z) = x^2$ gramos por unidad de longitud del alambre.
- 27.** Calcular $\int_{\mathbf{c}} f \, ds$, donde $f(x, y, z) = z$ y $\mathbf{c}(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$ para $0 \leq t \leq t_0$.
- 28.** Escribir el siguiente límite como una integral de $f(x, y, z) = xy$ a lo largo de cierta trayectoria \mathbf{c} en $[0, 1]$ y calcularlo:
- $$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} t_i^2 (t_{i+1}^2 - t_i^2),$$
- donde t_1, \dots, t_N es una partición de $[0, 1]$.
- 29.** Considérense las trayectorias que conectan los puntos $A = (0, 1)$ y $B = (1, 0)$ en el plano xy , como se muestra en la Figura 7.1.5.

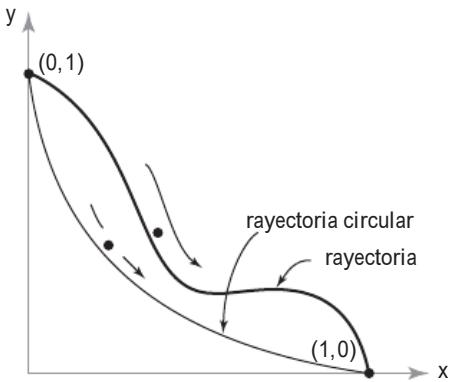


Figura 7.1.5 Curva que une los puntos A y B .

Galileo se planteó la siguiente pregunta: si una cuenta de collar cayera bajo la influencia de la gravedad desde un punto A hasta un punto B a lo largo de una curva en el *menor tiempo posible*, ¿sería dicha curva un arco de circunferencia? Para cualquier trayectoria dada, el tiempo de tránsito T es la integral a lo largo de la misma

$$T = \int \frac{dt}{v},$$

donde la velocidad de la cuenta es $v = \sqrt{2gy}$, siendo g la constante gravitatoria. En 1697, Johann Bernoulli retó al mundo matemático a encontrar la trayectoria a lo largo de la cual la cuenta de deslizaría desde A hasta B en el menor tiempo posible. Esta solución determinaría si las consideraciones de Galileo habían sido correctas.

- (a) Calcular T para la trayectoria recta $y = 1 - x$.
 (b) Escribir una fórmula para T para el caso de la trayectoria circular de Galileo, dada por $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Por casualidad, Newton fue el primero en enviar la solución [que resultó ser una cicloide—la misma curva (invertida) que hemos estudiado en el Ejemplo 4 de la Sección 2.4], pero lo hizo de manera anónima. Sin embargo, no engañó a Bernoulli. Cuando este recibió la solución, inme-

diatamente supo quién era su autor y exclamó “Reconozco al león por sus garras”. Aunque la solución de este problema es un cicloide, se la conoce en la literatura como la *braquistocrona*. Este fue el principio del importante campo conocido como *cálculo de variaciones*.²

7.2 Integral de línea

Vamos a considerar ahora el problema de integrar un a lo largo de una trayectoria. Comenzaremos estudiando el concepto de *trabajo* con el fin de motivar la definición general.

Trabajo ejercido por un campo de fuerza

Si \mathbf{F} es un campo de fuerza en el espacio, entonces una partícula de prueba (por ejemplo, una pequeña carga unidad en un campo eléctrico o una masa unitaria en un campo gravitatorio) experimentará una fuerza \mathbf{F} . Supongamos que la partícula se mueve a lo largo de la imagen de una trayectoria \mathbf{c} mientras \mathbf{F} actúa sobre ella. Un concepto fundamental es el de *trabajo realizado* por \mathbf{F} sobre la partícula a medida que recorre la trayectoria \mathbf{c} . Si \mathbf{c} es un desplazamiento rectilíneo dado por el vector \mathbf{d} y si \mathbf{F} es una fuerza constante, entonces el trabajo realizado por \mathbf{F} para mover la partícula a lo largo de la trayectoria es el producto escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = (\text{magnitud de la fuerza}) \times (\text{desplazamiento en la dirección de la fuerza}).$$

Si la trayectoria es curva, podemos imaginar que está formada por una sucesión de desplazamientos rectilíneos infinitesimales o que se puede *aproximar* mediante un número finito de desplazamientos rectilíneos. Entonces (como en la deducción de las fórmulas para la integral a lo largo de una trayectoria de la sección anterior) llegamos a la siguiente fórmula para el trabajo realizado por el campo de fuerza \mathbf{F} sobre una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria \mathbf{c} : $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\text{Trabajo realizado por } \mathbf{F} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt.$$

Podemos probar esta deducción como sigue. Segundo t varía en el pequeño intervalo de t a $t + \Delta t$, la partícula se mueve de $\mathbf{c}(t)$ a $\mathbf{c}(t + \Delta t)$, que corresponde a un vector de desplazamiento $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{c}(t + \Delta t) - \mathbf{c}(t)$ (véase la Figura 7.2.1).

A partir de la definición de derivada obtenemos la aproximación $\Delta \mathbf{s} \approx \mathbf{c}'(t)\Delta t$. Por tanto, el trabajo realizado al ir de $\mathbf{c}(t)$ a $\mathbf{c}(t + \Delta t)$ es aproximadamente

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \Delta \mathbf{s} \approx \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) \Delta t.$$

²Gracias a Tanya Leise por sugerir este ejercicio.

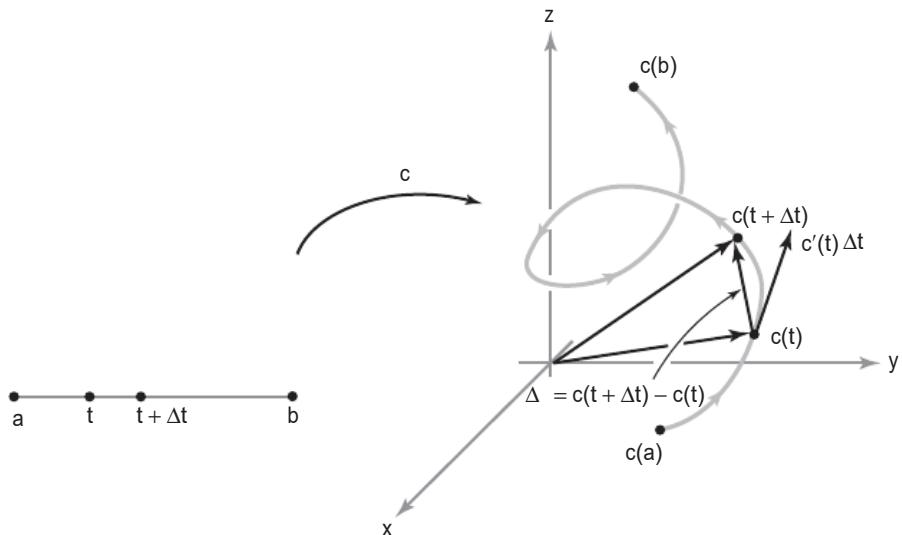


Figura 7.2.1 Para Δt pequeño, $\Delta s = \mathbf{c}(t + \Delta t) - \mathbf{c}(t) \approx \mathbf{c}'(t) \Delta t$.

Si subdividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, con $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, entonces el trabajo realizado por \mathbf{F} es aproximadamente

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{F}(\mathbf{c}(t_i)) \cdot \Delta s \approx \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{F}(\mathbf{c}(t_i)) \cdot \mathbf{c}'(t_i) \Delta t.$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, esta aproximación cada vez es mejor, por lo que es razonable definir el trabajo como el límite de la suma anterior cuando $n \rightarrow \infty$. Este límite está dado por la integral

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt.$$

Definición de integral de línea

La exposición anterior sobre el trabajo nos lleva a la siguiente definición.

Definición Integral de línea Sea \mathbf{F} un campo vectorial en \mathbb{R}^3 que es continuo sobre la trayectoria $C^1 \mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Definimos $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, la **integral de línea** de \mathbf{F} a lo largo de \mathbf{c} mediante la fórmula

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt;$$

es decir, integramos el producto escalar de \mathbf{F} por \mathbf{c}' sobre el intervalo $[a, b]$.

Como en el caso de las funciones escalares, también podemos definir $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ si $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$ es solo continua a trozos.

Para trayectorias \mathbf{c} que satisfacen $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$, existe otra útil fórmula para la integral de línea: concretamente, si $\mathbf{T}(t) = \mathbf{c}'(t)/\|\mathbf{c}'(t)\|$ denota al vector tangente unitario, tenemos

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt && \text{(por definición)} \\
 &= \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} \right] \|\mathbf{c}'(t)\| dt && \text{(cancelando } \|\mathbf{c}'(t)\| \text{)} \quad (1) \\
 &= \int_a^b [\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)] \|\mathbf{c}'(t)\| dt.
 \end{aligned}$$

Esta fórmula dice que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es igual a algo que es similar a la integral de la componente tangencial $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)$ de \mathbf{F} a lo largo de \mathbf{c} . De hecho, la última parte de la fórmula (1) es análoga a la integral de una función escalar f a lo largo de la trayectoria \mathbf{c} .³

Para calcular una integral de línea en un caso particular, bien podemos utilizar la definición original o bien integrar la componente tangencial de \mathbf{F} a lo largo de \mathbf{c} , como establece la fórmula (1), dependiendo de que sea más fácil o más apropiado.

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{c}(t) = (\sin t, \cos t, t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. Sea el campo vectorial \mathbf{F} definido por $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

Solución

Aquí, $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{F}(\sin t, \cos t, t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, y $\mathbf{c}'(t) = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Por tanto,

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \sin t \cos t - \cos t \sin t + t = t,$$

y por tanto

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2.$$



Otra forma común de escribir las integrales de línea es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz,$$

donde F_1, F_2 y F_3 son las componentes del campo vectorial \mathbf{F} . Decimos que la expresión $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ es una *forma diferencial*.⁴ Por *definición*, la integral de una forma diferencial a lo largo de una trayectoria \mathbf{c} , donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, es

³Si \mathbf{c} no se corta a sí misma [es decir, si $\mathbf{c}(t_1) = \mathbf{c}(t_2)$ implica que $t_1 = t_2$], entonces cada punto P sobre C (la curva imagen de \mathbf{c}) se puede escribir de forma única como $\mathbf{c}(t)$ para algún t . Si definimos $f(P) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{T}(t)$, f es una función sobre C ; por definición, su integral a lo largo de \mathbf{c} está dada por la fórmula (1) y no existe ninguna dificultad en interpretar literalmente $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ como una integral a lo largo de una trayectoria. Si \mathbf{c} se corta a sí misma, no podemos definir f como una función sobre C como antes (¿por qué?); sin embargo, en este caso sigue siendo útil pensar en el lado derecho de la fórmula (1) como en una integral a lo largo de una trayectoria.

⁴En la Sección 8.5 se proporciona una breve exposición sobre la teoría general de las formas diferenciales.

$$\int_{\mathbf{c}} F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Obsérvese que podemos pensar en $d\mathbf{s}$ como en la forma diferencial $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$. Luego la forma diferencial $F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz$ se puede expresar como el producto escalar $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

Ejemplo 2 Calcular la integral de línea

$$\int_{\mathbf{c}} x^2 \, dx + xy \, dy + dz,$$

donde $\mathbf{c}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ está dada por $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, 1) = (x(t), y(t), z(t))$.

Solución

Calculamos $dx/dt = 1$, $dy/dt = 2t$, $dz/dt = 0$; por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} x^2 \, dx + xy \, dy + dz &= \int_0^1 \left([x(t)]^2 \frac{dx}{dt} + [x(t)y(t)] \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + 2t^4) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 \right]_0^1 = \frac{11}{15}. \end{aligned} \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 3 Calcular la integral de línea

$$\int_{\mathbf{c}} \cos z \, dx + e^x \, dy + e^y \, dz,$$

donde la trayectoria \mathbf{c} se define mediante $\mathbf{c}(t) = (1, t, e^t)$ y $0 \leq t \leq 2$.

Solución

Calculamos $dx/dt = 0$, $dy/dt = 1$, $dz/dt = e^t$, y por tanto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \cos z \, dx + e^x \, dy + e^y \, dz &= \int_0^2 (0 + e + e^{2t}) dt \\ &= \left[et + \frac{1}{2}e^{2t} \right]_0^2 = 2e + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 4 Sea \mathbf{c} la trayectoria

$$x = \cos^3 \theta, \quad y = \sin^3 \theta, \quad z = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{7\pi}{2}$$

(véase la Figura 7.2.2). Calcular la integral

$$\int_{\mathbf{c}} (\sin z \, dx + \cos z \, dy - (xy)^{1/3} \, dz)$$

Solución

En este caso, tenemos

$$\frac{dx}{d\theta} = -3 \cos^2 \theta \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 3 \sin^2 \theta \cos \theta, \quad \frac{dz}{d\theta} = 1,$$

por lo que la integral es

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{c}} \sin z \, dx + \cos z \, dy - (xy)^{1/3} \, dz \\ &= \int_0^{7\pi/2} (-3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta) \, d\theta. \end{aligned}$$

Los dos primeros términos se cancelan, y por tanto tenemos

$$-\int_0^{7\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = -\left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta\right]_0^{7\pi/2} = -\frac{1}{2}.$$

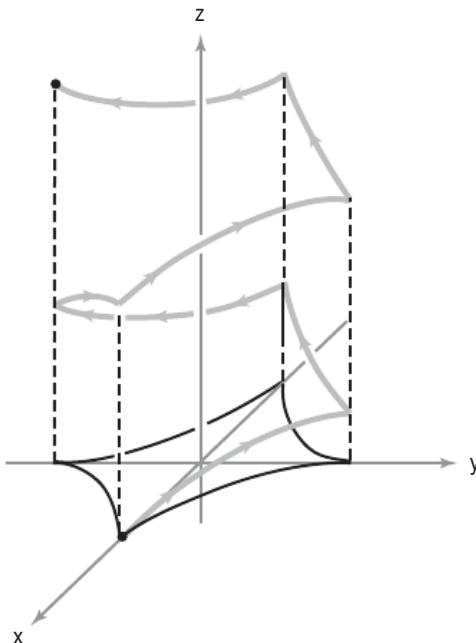


Figura 7.2.2 Imagen de la trayectoria $x = \cos^3 \theta$, $y = \sin^3 \theta$, $z = \theta$; $0 \leq \theta \leq 7\pi/2$.

Ejemplo 5

Supongamos que \mathbf{F} es el campo vectorial de fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3 \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$. Parametrizar la circunferencia de radio a en el plano yz haciendo que $\mathbf{c}(\theta)$ tenga componentes

$$x = 0, \quad y = a \cos \theta, \quad z = a \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Como $\mathbf{F}(\mathbf{c}(\theta)) \cdot \mathbf{c}'(\theta) = 0$, el campo de fuerza \mathbf{F} es normal a la circunferencia en todo punto de la misma, por lo que \mathbf{F} no realizará ningún trabajo sobre una partícula en movimiento a lo largo de la circunferencia (Figura 7.2.3). Podemos verificar mediante un cálculo directo que el trabajo realizado por \mathbf{F} es cero:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} x^3 \, dx + y \, dy + z \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} (0 - a^2 \cos \theta \sin \theta + a^2 \cos \theta \sin \theta) \, d\theta = 0. \end{aligned}$$

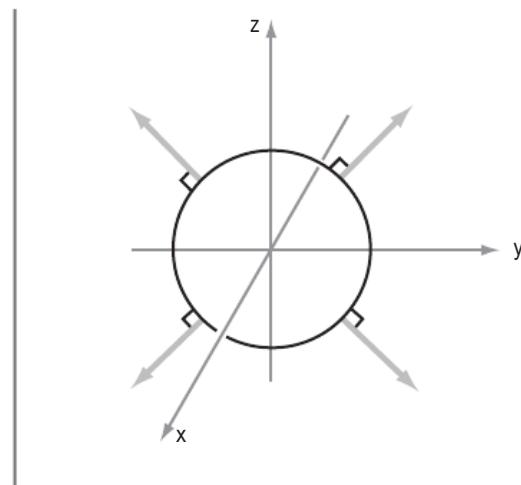


Figura 7.2.3 Campo vectorial \mathbf{F} normal a una circunferencia en el plano yz .

Ejemplo 6

Si consideramos el campo y la curva del Ejemplo 4, vemos que el trabajo realizado por el campo es $-\frac{1}{2}$, una cantidad negativa. Esto quiere decir que el campo se opone al movimiento a lo largo de la trayectoria. ▲

Reparametrizaciones

La integral de línea $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ no solo depende del campo \mathbf{F} sino también de la trayectoria $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. En general, si \mathbf{c}_1 y \mathbf{c}_2 son dos trayectorias diferentes en \mathbb{R}^3 , $\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. Por otro lado, veremos que se cumple que $\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \pm \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ para todo campo vectorial \mathbf{F} si \mathbf{c}_1 es lo que denominamos una **reparametrización** de \mathbf{c}_2 ; en otras palabras, esto significa que \mathbf{c}_1 y \mathbf{c}_2 son descripciones diferentes de la misma curva geométrica.

Definición Sea $h: I \rightarrow I_1$ una función de valores reales de clase C^1 que es una aplicación inyectiva de un intervalo $I = [a, b]$ en otro intervalo $I_1 = [a_1, b_1]$. Sea $\mathbf{c}: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una trayectoria a trozos C^1 . Diremos entonces que la composición

$$\mathbf{p} = \mathbf{c} \circ h: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

es una **reparametrización** de \mathbf{c} .

Esto significa que $\mathbf{p}(t) = \mathbf{c}(h(t))$, de modo que h cambia la variable; alternativamente, podemos pensar que h cambia la rapidez con la que se mueve un punto a lo largo de la trayectoria. En efecto, observe que $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{c}'(h(t))h'(t)$, de manera que el vector velocidad para \mathbf{p} es igual que para \mathbf{c} pero multiplicado por el factor escalar $h'(t)$.

Está implícito en la definición que h debe enviar los puntos extremos a puntos extremos; es decir, bien $h(a) = a_1$ y $h(b) = b_1$, o bien $h(a) = b_1$ y $h(b) = a_1$. Distinguimos entonces dos tipos de reparametrización. Si $\mathbf{c} \circ h$ es una reparametrización de \mathbf{c} , entonces o bien

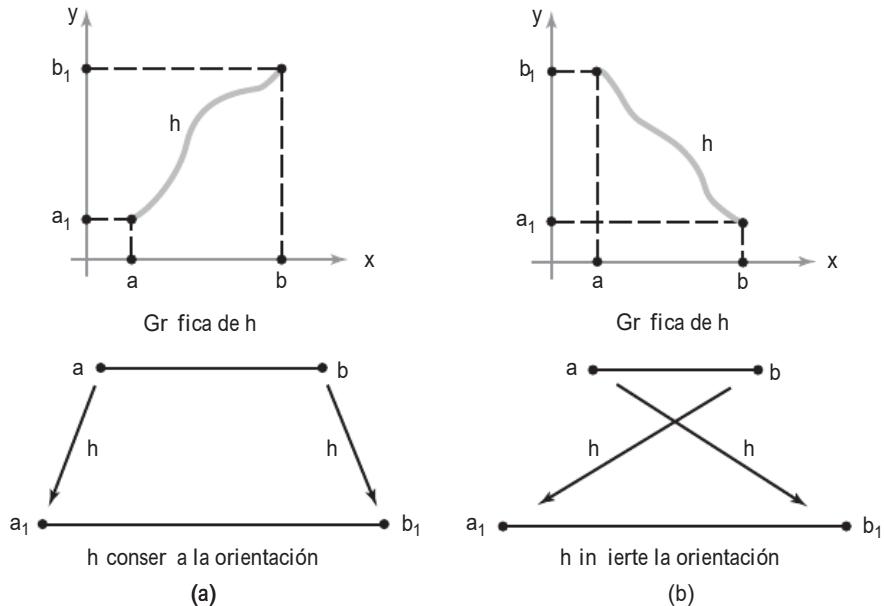
$$(\mathbf{c} \circ h)(a) = \mathbf{c}(a_1) \quad \text{y} \quad (\mathbf{c} \circ h)(b) = \mathbf{c}(b_1)$$

o

$$(\mathbf{c} \circ h)(a) = \mathbf{c}(b_1) \quad \text{y} \quad (\mathbf{c} \circ h)(b) = \mathbf{c}(a_1).$$

En el primer caso, se dice que la reparametrización **conserva la orientación**, y una partícula que recorre la trayectoria $\mathbf{c} \circ h$ se mueve en el *mismo sentido* que una partícula que recorre \mathbf{c} . En el segundo caso, se dice que la reparametrización **invierte la orientación**, y una partícula que recorre la trayectoria $\mathbf{c} \circ h$ se mueve en *sentido opuesto* al de la una partícula que recorre la trayectoria \mathbf{c} (Figura 7.2.4).

Por ejemplo, si C es la imagen de una trayectoria \mathbf{c} , como se muestra en la Figura 7.2.5—es decir, $C = \mathbf{c}([a_1, b_1])$ —y si h conserva la orientación, entonces $\mathbf{c} \circ h(t)$ irá de $\mathbf{c}(a_1)$ a $\mathbf{c}(b_1)$ cuando t va de a a b ; y si h invierte la orientación, $\mathbf{c} \circ h(t)$ irá de $\mathbf{c}(b_1)$ a $\mathbf{c}(a_1)$ cuando t vaya de a hasta b .



Ejemplo 7

Sea $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una trayectoria a trozos C^1 . Entonces:

- La trayectoria $\mathbf{c}_{op}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \mathbf{c}(a + b - t)$ es una reparametrización de \mathbf{c} que corresponde a la aplicación $h: [a, b] \rightarrow [a, b], t \mapsto a + b - t$; denominamos a \mathbf{c}_{op} **trayectoria opuesta** a \mathbf{c} . Esta reparametrización invierte la orientación.
- La trayectoria $\mathbf{p}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \mathbf{c}(a + (b - a)t)$ es una reparametrización que conserva la orientación de \mathbf{c} que corresponde al cambio de coordenadas $h: [0, 1] \rightarrow [a, b], t \mapsto a + (b - a)t$. ▲

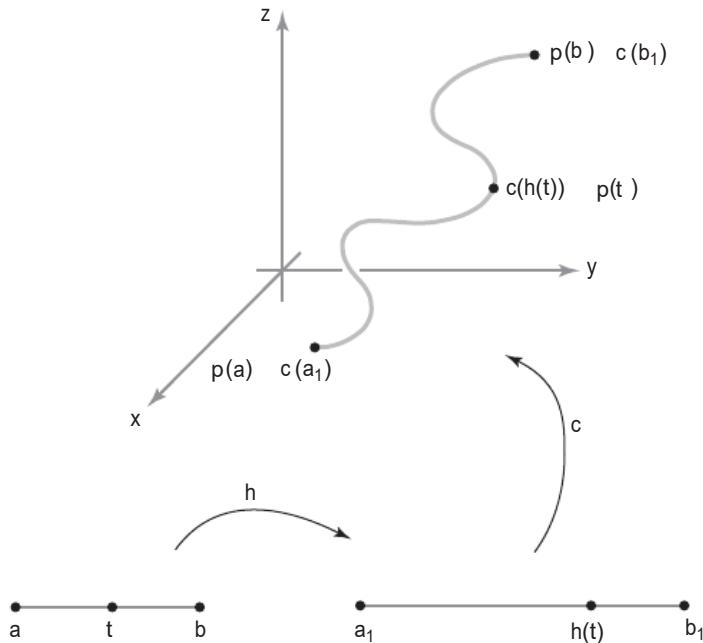


Figura 7.2.5 La trayectoria $\mathbf{p} = \mathbf{c} \circ h$ es una reparametrización de \mathbf{c} .

Teorema 1 Cambio de reparametrización para integrales de línea Sea \mathbf{F} un campo vectorial continuo sobre la trayectoria C^1 $\mathbf{c}: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ y sea $\mathbf{p}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una reparametrización de \mathbf{c} . Si \mathbf{p} conserva la orientación, entonces

$$\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

y si \mathbf{p} invierte la orientación, entonces

$$\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Demostración Por hipótesis, tenemos una aplicación h tal que $\mathbf{p} = \mathbf{c} \circ h$. Por la regla de la cadena, $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{c}'(h(t))h'(t)$, y por tanto

$$\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [\mathbf{F}(\mathbf{c}(h(t))) \cdot \mathbf{c}'(h(t))]h'(t) dt.$$

Haciendo el cambio de variable $s = h(t)$, obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{h(a)}^{h(b)} \mathbf{F}(\mathbf{c}(s)) \cdot \mathbf{c}'(s) ds \\ &= \begin{cases} \int_{a_1}^{b_1} \mathbf{F}(\mathbf{c}(s)) \cdot \mathbf{c}'(s) ds = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} & \text{si } \mathbf{p} \text{ conserva la orientación} \\ \int_{b_1}^{a_1} \mathbf{F}(\mathbf{c}(s)) \cdot \mathbf{c}'(s) ds = - \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} & \text{si } \mathbf{p} \text{ invierte la orientación.} \end{cases} \end{aligned}$$

■

El Teorema 1 también se cumple para trayectorias a trozos C^1 , como podemos comprobar dividiendo los intervalos en segmentos, en los que las trayectorias son de clase C^1 , y sumando las integrales sobre cada uno de los distintos intervalos.

Por tanto, si es conveniente reparametrizar una trayectoria al evaluar una integral, el Teorema 1 nos garantiza que el valor de la integral no se verá afectado, excepto posiblemente por el signo, dependiendo de la orientación.

Ejemplo 8

Sean $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ y $\mathbf{c}: [-5, 10] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $t \mapsto (t, t^2, t^3)$. Calcular $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ y $\int_{\mathbf{c}_{\text{op}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

Solución

Para la trayectoria \mathbf{c} , tenemos $dx/dt = 1$, $dy/dt = 2t$, $dz/dt = 3t^2$, y $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = t^5\mathbf{i} + t^4\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{-5}^{10} \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_{-5}^{10} (t^5 + 2t^5 + 3t^5) dt = [t^6]_{-5}^{10} = 984375.\end{aligned}$$

Por otro lado, para

$$\mathbf{c}_{\text{op}}: [-5, 10] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \mathbf{c}(5-t) = (5-t, (5-t)^2, (5-t)^3),$$

tenemos $dx/dt = -1$, $dy/dt = -10 + 2t = -2(5-t)$, $dz/dt = -75 + 30t - 3t^2 = -3(5-t)^2$ y $\mathbf{F}(\mathbf{c}_{\text{op}}(t)) = (5-t)^5\mathbf{i} + (5-t)^4\mathbf{j} + (5-t)^3\mathbf{k}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}_{\text{op}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{-5}^{10} [-(5-t)^5 - 2(5-t)^5 - 3(5-t)^5] dt \\ &= [(5-t)^6]_{-5}^{10} = -984375.\end{aligned}$$



Estamos interesados en las reparametrizaciones porque si la imagen de una trayectoria \mathbf{c} particular se puede representar de muchas maneras, queremos estar seguros de que las integrales sobre trayectorias y de línea solo dependen de la curva imagen y no de la parametrización concreta. Por ejemplo, para algunos problemas puede resultar conveniente representar la circunferencia unidad por medio de la aplicación \mathbf{p} dada por

$$x(t) = \cos 2t, \quad y(t) = \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

El Teorema 1 garantiza que cualquier integral calculada para esta representación será igual que cuando representamos la circunferencia mediante la aplicación \mathbf{c} dada por

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

puesto que $\mathbf{p} = \mathbf{c} \circ h$, donde $h(t) = 2t$, y por tanto \mathbf{p} es una reparametrización que conserva la orientación de \mathbf{c} . Sin embargo, obsérvese que la aplicación γ dada por

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

no es una reparametrización de \mathbf{c} . Aunque recorre la misma imagen (la circunferencia), lo hace dos veces. ¿Por qué esto implica que γ no es una reparametrización de \mathbf{c} ?

La integral de línea es una *integral orientada*, en la se produce un cambio de signo (como hemos visto en el Teorema 1) si la orientación de la curva se invierte. La *integral a lo largo de una trayectoria* no tiene esta propiedad. Esto se deduce del hecho de que cambiando t por $-t$ (orientación inversa) solo cambia el signo de $\mathbf{c}'(t)$, no su longitud. Esta es una de las diferencias entre las integrales de línea y las integrales a lo largo de trayectorias. El siguiente teorema, que se demuestra siguiendo el mismo método que en el Teorema 1, prueba que las integrales a lo largo de trayectorias no cambian bajo reparametrizaciones—incluso con aquellas que invierten la orientación.

Teorema 2 Cambio de parametrización para integrales a lo largo de trayectorias Sea \mathbf{c} una curva C^1 a trozos, sea f una función continua (con valores reales) definida sobre la imagen de \mathbf{c} y sea \mathbf{p} cualquier reparametrización de \mathbf{c} . Entonces

$$\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z) ds = \int_{\mathbf{p}} f(x, y, z) ds. \quad (2)$$

Integrales de línea de campos gradiente

A continuación vamos a considerar una útil técnica para evaluar ciertos tipos de integrales de línea. Recordemos que un campo vectorial \mathbf{F} es un *campo vectorial gradiente* si $\mathbf{F} = \nabla f$ para una cierta función con valores reales f . Así,

$$\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Supongamos que g y G son funciones continuas con valores reales definidas en un intervalo cerrado $[a, b]$, que G es diferenciable en (a, b) y que $G' = g$. Entonces, por el teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a).$$

Así, el valor de la integral de g depende solo del valor de G en los puntos extremos del intervalo $[a, b]$. Dado que ∇f representa la derivada de f , podemos preguntarnos si $\int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s}$ está determinada completamente por el valor de f en los extremos $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(b)$. La respuesta está contenida en la siguiente *generalización del teorema fundamental del cálculo*.

Teorema 3 Integrales de línea de campos vectoriales

gradiente Supongamos que $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 y que $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una trayectoria a trozos C^1 . Entonces

$$\int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\mathbf{c}(b)) - f(\mathbf{c}(a)).$$

Demostración Aplicamos la regla de la cadena a la siguiente función compuesta

$$F: t \mapsto f(\mathbf{c}(t))$$

y obtenemos

$$F'(t) = (f \circ \mathbf{c})'(t) = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t).$$

La función F es una función con valores reales de la variable t y, por tanto, por el teorema fundamental del cálculo de una variable,

$$\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a) = f(\mathbf{c}(b)) - f(\mathbf{c}(a)).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt = \int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a) \\ &= f(\mathbf{c}(b)) - f(\mathbf{c}(a)). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 9 Sea \mathbf{c} la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t^4/4, \operatorname{sen}^3(t\pi/2), 0)$, $t \in [0, 1]$. Calcular

$$\int_{\mathbf{c}} y dx + x dy$$

(lo que significa $\int_{\mathbf{c}} y dx + x dy + 0 dz$).

Solución Reconocemos $y dx + x dy$, o, lo que es equivalente, el campo vectorial $y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, como el gradiente de la función $f(x, y, z) = xy$. Luego,

$$\int_{\mathbf{c}} y dx + x dy = f(\mathbf{c}(1)) - f(\mathbf{c}(0)) = \frac{1}{4} \cdot 1 - 0 = \frac{1}{4}. \quad \blacktriangle$$

Obviamente, si podemos reconocer el integrando como un gradiente, entonces la evaluación de la integral será mucho más fácil. Por ejemplo, intentemos obtener la integral del Ejemplo 9 directamente. En el cálculo de una variable, toda integral, en principio, se puede obtener hallando una primitiva. Sin embargo, para campos vectoriales esto no siempre es cierto, ya que un campo vectorial dado no es necesariamente un gradiente. Veremos este punto en detalle en la Sección 8.3, donde obtendremos una prueba para determinar si un campo vectorial \mathbf{F} es un gradiente; es decir, si $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna f .

Integrales de línea sobre curvas geométricas

Hemos visto cómo definir integrales a lo largo de trayectorias (integrales de funciones escalares) e integrales de línea (integrales de funciones vectoriales) sobre curvas parametrizadas. También hemos visto que nuestro trabajo se simplifica si elegimos adecuadamente la parametrización. Dado que estas integrales son independientes de la parametrización (excepto posiblemente por el signo), parece natural expresar la teoría en una forma que sea independiente de la misma y que sea por tanto más “geométrica”. En la siguiente exposiciónaremos esto brevemente y de manera informal.

Figura 7.2.6 A la izquierda se muestra una curva simple que no se corta a sí misma. A la derecha se muestra una curva que sí se corta a sí misma y que no es tan simple.

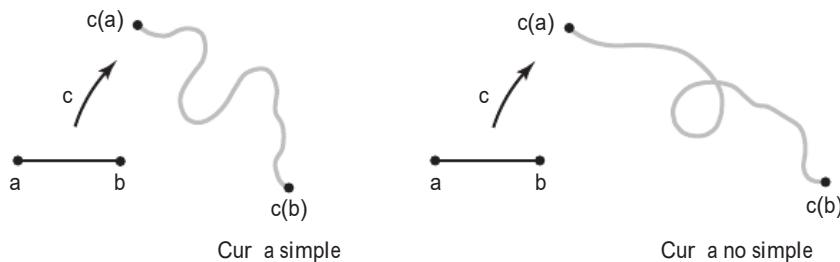


Figura 7.2.7 En una curva que une P y Q existen dos posibles sentidos de una misma dirección.

Definición Definimos una *curva simple* C como la imagen de una aplicación C^1 a trozos $\mathbf{c}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ que es inyectiva en un intervalo I ; \mathbf{c} se dice que es una *parametrización* de C . Por tanto, una curva simple es aquella que no se corta a sí misma (Figura 7.2.6). Si $I = [a, b]$, llamamos a $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(b)$ *extremos* de la curva.

Toda curva simple C tiene dos orientaciones o sentidos asociados. Si P y Q son los extremos de la curva, entonces podemos considerar a C como dirigida bien desde P a Q , o bien desde Q a P . La curva simple C junto con una de estas orientaciones es una *curva simple orientada* o *curva simple dirigida* (Figura 7.2.7).

Definición Curvas cerradas simples Por *curva cerrada simple* entendemos la imagen de una aplicación C^1 a trozos $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ que es inyectiva en $[a, b]$ y satisface la igualdad $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ (Figura 7.2.8). Si \mathbf{c} satisface la condición $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$, pero no necesariamente es inyectiva en $[a, b]$, diremos que su imagen es una *curva cerrada*. Las curvas cerradas simples tienen dos orientaciones, que corresponden a los dos posibles sentidos de movimiento a lo largo de la curva (Figura 7.2.9).

Si C es una curva simple orientada o una curva cerrada simple orientada, podemos definir a lo largo de ella, sin ninguna ambigüedad, integrales de línea.

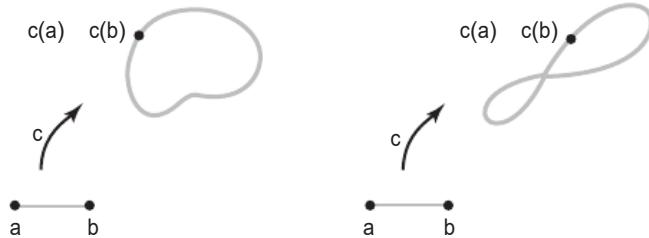


Figura 7.2.8 Una curva cerrada simple (izquierda) y una curva cerrada que no es simple (derecha).



Figura 7.2.9 Dos posibles orientaciones para una curva cerrada simple C .

Integrales de línea e integrales a lo largo de trayectorias sobre curvas simples orientadas y sobre curvas cerradas simples C :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{y} \quad \int_C f ds = \int_{\mathbf{c}} f ds, \quad (3)$$

donde \mathbf{c} es cualquier parametrización que conserva la orientación de C .

En virtud de los Teoremas 1 y 2, estas integrales no dependen de la elección de \mathbf{c} siempre y cuando \mathbf{c} sea inyectiva (excepto posiblemente en los extremos).⁵ Lo que queremos destacar aquí es que, *aunque una curva tiene que parametrizarse para poder integrarla a lo largo de la misma, no es necesario incluir la parametrización en la notación de la integral*.

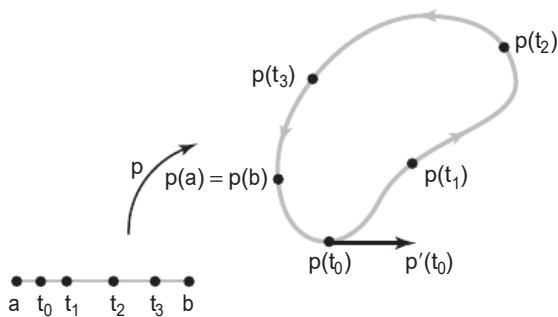
Ejemplo 10

Si $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado en el eje x , entonces I , como curva, tiene dos orientaciones: una que corresponde al movimiento desde a hasta b (de izquierda a derecha) y otra que corresponde al movimiento desde b hasta a (de derecha a izquierda). Si f es una función continua con valores reales en I , denotando I con la primera orientación mediante I^+ e I con la segunda orientación mediante I^- , tenemos

$$\int_{I^+} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx = - \int_{I^-} f(x) dx. \quad \blacktriangle$$

⁵No hemos probado que cualesquiera dos trayectorias inyectivas \mathbf{c} y \mathbf{p} con la misma imagen deben ser reparametrizaciones una de la otra, aunque omitiremos este detalle técnico.

Figura 7.2.10 A medida que t varía de a a b , $\mathbf{p}(t)$ se mueve alrededor de la curva C en algún sentido fijo.



Una cierta curva cerrada simple se puede parametrizar de muchas formas diferentes. La Figura 7.2.10 muestra C representada como la imagen de una aplicación \mathbf{p} , con $\mathbf{p}(t)$ avanzando en una dirección prescrita alrededor de una curva orientada C cuando t varía entre a y b . Obsérvese que $\mathbf{p}'(t)$ apunta también en ese sentido. La rapidez con la que recorremos C puede variar de una parametrización a otra, pero siempre y cuando se conserve la orientación, la integral no cambia, de acuerdo con los Teoremas 1 y 2.

Debe tenerse en cuenta la siguiente precaución en relación a estos comentarios. Es posible tener dos funciones \mathbf{c} y \mathbf{p} con la misma imagen que induzcan la misma orientación en la imagen, tal que

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq \int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Por ejemplo, sean $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ y $\mathbf{p}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, con $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, 0, 0)$. Entonces $F_1(x, y, z) = y$, $F_2(x, y, z) = 0$ y $F_3(x, y, z) = 0$, de modo que

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} F_1(\mathbf{c}(t)) \frac{dx}{dt} dt = - \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t dt = -\pi.$$

Sin embargo, $\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 2t dt = -2\pi$. Evidentemente, \mathbf{c} y \mathbf{p} tienen la misma imagen, a saber, la circunferencia unidad en el plano xy . Además, ambas recorren la circunferencia unidad en el mismo sentido; no obstante, $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq \int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. La razón de esto es que \mathbf{c} es inyectiva, pero \mathbf{p} no lo es (\mathbf{p} recorre la circunferencia unidad *dos veces* en sentido antihorario); por tanto, \mathbf{p} no es una parametrización de la circunferencia unidad considerada como una curva cerrada simple.

Como consecuencia del Teorema 1 y generalizando la notación del Ejemplo 10, establecemos el siguiente convenio:

Integrales de línea sobre curvas con orientaciones opuestas Sea C^- la misma curva que C , pero con la orientación opuesta. Entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

También tenemos:

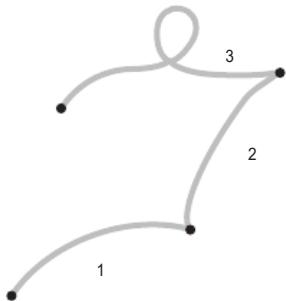


Figura 7.2.11 Una curva puede estar formada por varias componentes.

Integrales de línea sobre curvas que constan de varias componentes Sea C una curva orientada que está formada por varias curvas componentes orientadas $C_i, i = 1, \dots, k$, como se muestra en la Figura 7.2.11. Entonces escribiremos $C = C_1 + C_2 + \dots + C_k$. Puesto que podemos parametrizar C parametrizando las componentes C_1, \dots, C_k por separado, podemos probar que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \dots + \int_{C_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4)$$

Una razón para escribir una curva como una suma de componentes es que puede ser más fácil parametrizar las componentes C_i individualmente que parametrizar C como un todo. Si este es el caso, la Ecuación (4) proporciona una forma adecuada de calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

Notación $d\mathbf{r}$ para las integrales de línea

En ocasiones, la integral de línea se escribe usando la siguiente notación, como haremos más adelante de forma ocasional,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

La razón es que podemos describir una trayectoria C^1 , \mathbf{c} , en función de un *vector de posición* en movimiento que parte del origen y termina en el punto $\mathbf{c}(t)$ en el instante t . Los vectores de posición se suelen denotar mediante $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y por tanto la curva se describe usando la notación $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ en lugar de $\mathbf{c}(t)$. Por definición, la integral de línea está dada por

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt.$$

Cancelando formalmente los dt y usando la independencia de la parametrización para sustituir los límites de integración por la curva geométrica C , llegamos a la notación $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Ejemplo 11

Consideremos C , el perímetro del cuadrado unidad en \mathbb{R}^2 , orientado en el sentido antihorario (véase la Figura 7.2.12). Calcular la integral de línea

$$\int_C x^2 dx + xy dy.$$

Solución

Calculamos la integral utilizando una parametrización adecuada de C que induzca la orientación dada. Por ejemplo:

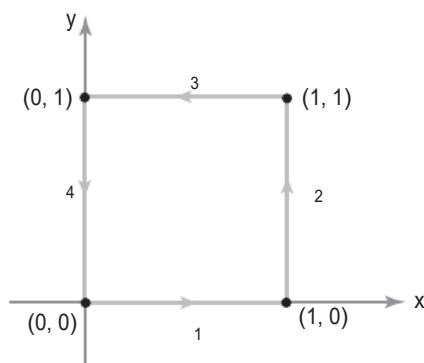


Figura 7.2.12 El perímetro del cuadrado unidad parametrizado en cuatro tramos.

$$\mathbf{c}: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} (t, 0) & 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t - 1) & 1 \leq t \leq 2 \\ (3 - t, 1) & 2 \leq t \leq 3 \\ (0, 4 - t) & 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_C x^2 dx + xy dy &= \int_0^1 (t^2 + 0) dt + \int_1^2 [0 + (t - 1)] dt \\ &\quad + \int_2^3 [-(3 - t)^2 + 0] dt + \int_3^4 (0 + 0) dt \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) + 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ahora calculamos de nuevo esta integral de línea, usando la fórmula (4) y parametrizando las C_i por separado. Obsérvese que $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, donde las C_i son las curvas orientadas mostradas en la Figura 7.2.12. Estas se pueden parametrizar como sigue:

$$\begin{aligned} C_1: \mathbf{c}_1(t) &= (t, 0), 0 \leq t \leq 1 \\ C_2: \mathbf{c}_2(t) &= (1, t), 0 \leq t \leq 1 \\ C_3: \mathbf{c}_3(t) &= (1 - t, 1), 0 \leq t \leq 1 \\ C_4: \mathbf{c}_4(t) &= (0, 1 - t), 0 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int_{C_1} x^2 dx + xy dy &= \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \\ \int_{C_2} x^2 dx + xy dy &= \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \\ \int_{C_3} x^2 dx + xy dy &= \int_0^1 -(1 - t)^2 dt = -\frac{1}{3} \\ \int_{C_4} x^2 dx + xy dy &= \int_0^1 0 dt = 0. \end{aligned}$$

Así, de nuevo,

$$\int_C x^2 dx + xy dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 12

Una aplicación interesante de la integral de línea es la formulación matemática de la ley de Ampère, que relaciona las corrientes eléctricas con sus efectos magnéticos.⁶ Supongamos que \mathbf{H} denota un campo magnético en \mathbb{R}^3 y sea C una curva cerrada orientada en \mathbb{R}^3 . Con las unidades físicas apropiadas, la ley de Ampère establece que

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I,$$

donde I es la corriente neta que atraviesa cualquier superficie acotada por C (véase la Figura 7.2.13).

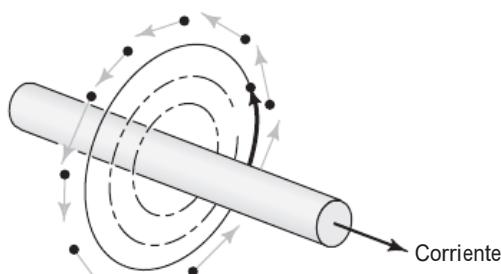


Figura 7.2.13 El campo magnético \mathbf{H} que rodea a un cable por el que circula una corriente I satisface la ley de Ampère: $\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I$.

Por último, debemos comentar que la integral de línea tiene otro significado físico importante, concretamente, la interpretación de $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ como *circulación*, donde \mathbf{V} es el campo de velocidades de un fluido, el cual estudiaremos en la Sección 8.2. Por tanto, con la ayuda de las integrales de línea es posible analizar una amplia variedad de conceptos físicos, desde la noción de trabajo hasta los campos electromagnéticos y los movimientos de los fluidos.

Ejercicios

1. Calcular la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

donde $\mathbf{F}(x, y) = y^2 \mathbf{i} - xy \mathbf{j}$ y C es la parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que empieza en $(1, 0)$ y termina en $(0, 1)$, orientada en sentido antihorario.

2. Repetir el Problema 1 para $\mathbf{F} = y^2 \mathbf{i} + 2xy \mathbf{j}$, donde C es la circunferencia unidad completa $x^2 + y^2 = 1$.

3. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular la integral de \mathbf{F} a lo largo de cada una de las siguientes trayectorias:

- (a) $\mathbf{c}(t) = (t, t, t), \quad 0 \leq t \leq 1$
- (b) $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
- (c) $\mathbf{c}(t) = (\sin t, 0, \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
- (d) $\mathbf{c}(t) = (t^2, 3t, 2t^3), \quad -1 \leq t \leq 2$

4. Calcular las siguientes integrales de línea:

- (a) $\int_C x \, dy - y \, dx, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

⁶Alrededor de 1820, Hans Christian Oersted descubrió que las corrientes eléctricas producen efectos magnéticos. Véase cualquier texto de física elemental para ver una exposición sobre los fundamentos físicos de estas ideas.

- (b) $\int_C x \, dx + y \, dy$, $\mathbf{c}(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$, $0 \leq t \leq 2$
- (c) $\int_C yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz$, donde \mathbf{c} consta de los segmentos de línea recta que unen $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$ y a $(0, 0, 1)$
- (d) $\int_C x^2 \, dx - xy \, dy + dz$, donde \mathbf{c} es la parábola $z = x^2$, $y = 0$ desde $(-1, 0, 1)$ hasta $(1, 0, 1)$.
5. Considérese el campo de fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2$, $z = 0$, desde $x = -1$ a $x = 2$.

6. Sea \mathbf{c} una trayectoria suave.

- (a) Supongamos que \mathbf{F} es perpendicular a $\mathbf{c}'(t)$ en el punto $\mathbf{c}(t)$. Demostrar que

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

- (b) Si \mathbf{F} es paralela a $\mathbf{c}'(t)$ en $\mathbf{c}(t)$, demostrar que

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \|\mathbf{F}\| \, ds.$$

[Por paralela a $\mathbf{c}'(t)$ queremos decir que $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = \lambda(t)\mathbf{c}'(t)$, donde $\lambda(t) > 0$.]

7. Supongamos que la trayectoria \mathbf{c} tiene una longitud l y que $\|\mathbf{F}\| \leq M$. Probar que

$$\left| \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right| \leq Ml.$$

8. Calcular $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ y la trayectoria \mathbf{c} está definida por $\mathbf{c}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

9. Calcular

$$\int_{\mathbf{c}} y \, dx + (3y^3 - x) \, dy + z \, dz$$

para cada una de las trayectorias $\mathbf{c}(t) = (t, t^n, 0)$, $0 \leq t \leq 1$, donde $n = 1, 2, 3, \dots$

10. Este ejercicio hace referencia al Ejemplo 12. Sea L un cable muy largo. En la Figura 7.2.14 se muestra una sección transversal del mismo (en el plano perpendicular al cable). Supongamos que este plano es el plano xy . Los experimentos demuestran que \mathbf{H} es tangente a

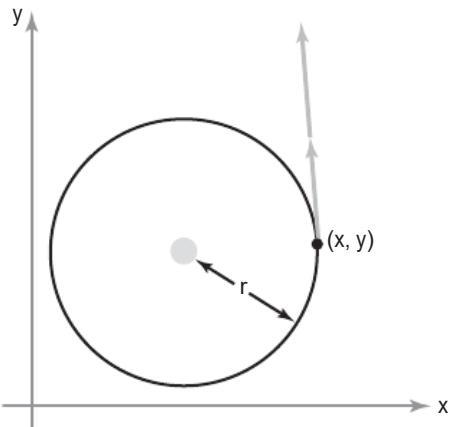


Figura 7.2.14 Una sección transversal de un cable largo y una curva C alrededor del mismo.

toda circunferencia del plano xy cuyo centro se encuentre en el eje de L y que la magnitud de \mathbf{H} es constante en todas esas circunferencias C . Por tanto, $\mathbf{H} = H\mathbf{T}$, donde \mathbf{T} es un vector tangente unitario a C y H es algún escalar. Utilizando esta información, demostrar que $H = I/2\pi r$, donde r es el radio de la circunferencia C e I es la corriente que circula por el cable.

11. La imagen de la trayectoria $t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ en el plano se muestra en la Figura 7.2.15. Calcular la integral del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ alrededor de esta curva.

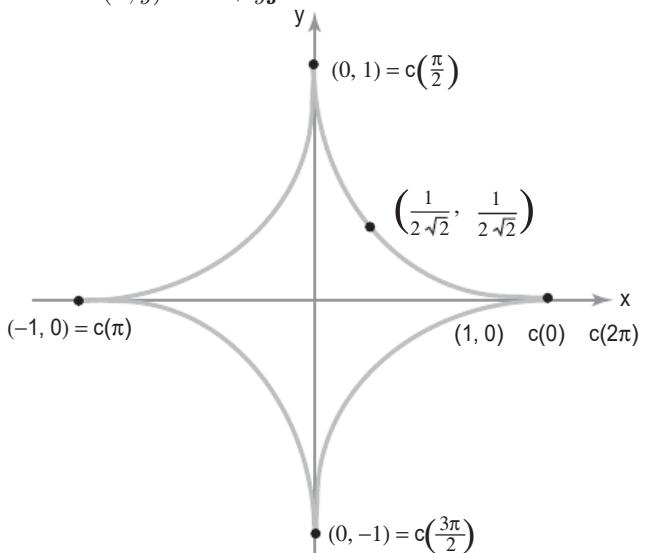


Figura 7.2.15 La hipocicloide $\mathbf{c}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ (Ejercicio 11).

12. Supongamos que \mathbf{c}_1 y \mathbf{c}_2 son dos trayectorias con los mismos extremos y que \mathbf{F} es un campo

vectorial. Demostrar que $\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es equivalente a $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$, donde C es la curva cerrada obtenida al moverse primero a lo largo de \mathbf{c}_1 y luego a lo largo de \mathbf{c}_2 en el sentido opuesto.

- 13.** Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria y \mathbf{T} el vector tangente unitario. ¿Qué es $\int_C \mathbf{T} \cdot d\mathbf{s}$?

- 14.** Sea $\mathbf{F} = (z^3 + 2xy)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$. Demostrar que la integral de \mathbf{F} alrededor del perímetro del cuadrado unidad con vértices en $(\pm 1, \pm 1)$ es cero.

- 15.** Usando la trayectoria del Ejercicio 11, obsérvese que una aplicación $C^1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ puede tener una imagen que no “parece suave”. ¿Podría suceder esto si $\mathbf{c}'(t)$ siempre fuera distinto de cero?

- 16.** ¿Cuál es el valor de la integral de un campo gradiente alrededor de una curva cerrada C ?

- 17.** Calcular la integral de línea

$$\int_C 2xyz \, dx + x^2 z \, dy + x^2 y \, dz,$$

donde C es una curva simple orientada que conecta $(1, 1, 1)$ a $(1, 2, 4)$.

- 18.** Supongamos que $\nabla f(x, y, z) = 2xyze^{x^2}\mathbf{i} + ze^{x^2}\mathbf{j} + ye^{x^2}\mathbf{k}$. Si $f(0, 0, 0) = 5$, hallar $f(1, 1, 2)$.

- 19.** Considérese el campo de fuerzas gravitatorio (con $G = m = M = 1$) definido para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Demostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando una partícula se mueve desde (x_1, y_1, z_1) hasta (x_2, y_2, z_2) a lo largo de cualquier trayectoria depende solo de los radios $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

- 20.** Un ciclista sube una montaña siguiendo la trayectoria mostrada en la Figura 7.2.16. Da una vuelta completa alrededor de la montaña hasta alcanzar la cima, siendo su pendiente de subida constante. Durante el trayecto ejerce una fuerza descrita por el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

¿Cuál es el trabajo realizado por el ciclista al viajar desde A hasta B? ¿Qué es poco realista en este modelo de ciclista?

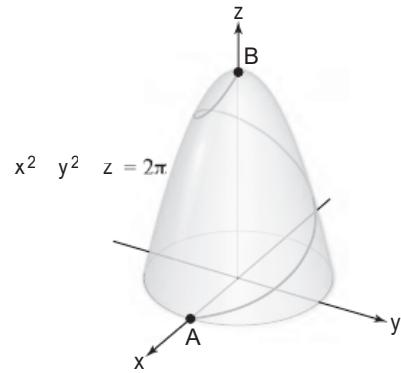


Figura 7.2.16 ¿Cuál es el trabajo realizado al subir esta montaña en bicicleta?

- 21.** Sea $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una trayectoria tal que $\mathbf{c}'(t) \neq 0$. Recordemos de la Sección 4.1 que cuando se cumple esta condición, se dice que \mathbf{c} es *regular*. La función f está definida mediante la fórmula $f(x) = \int_a^x \|\mathbf{c}'(t)\| dt$.

- (a) ¿Qué es df/dx ?
(b) Utilizando la respuesta al apartado (a), demostrar que $f: [a, b] \rightarrow [0, L]$, donde L es la longitud de \mathbf{c} , tiene una inversa diferenciable $g: [0, L] \rightarrow [a, b]$ que satisface $f \circ g(s) = s$, $g \circ f(x) = x$ (se puede usar el teorema de la función inversa de una variable enunciado al principio de la Sección 3.5.)
(c) Calcular dg/ds .
(d) Recuérdese que se dice que una trayectoria $s \mapsto \mathbf{b}(s)$ tiene rapidez unidad o que está parametrizada por longitud de arco, si $\|\mathbf{b}'(s)\| = 1$. Demostrar que la reparametrización de \mathbf{c} dada por $\mathbf{b}(s) = \mathbf{c} \circ g(s)$ tiene rapidez unidad. Concluir que cualquier trayectoria regular se puede parametrizar mediante la longitud de arco. (Así, por ejemplo, las fórmulas de Frenet del Ejercicio 23 de la Sección 4.2 se pueden aplicar a la reparametrización \mathbf{b} .)

- 22.** A lo largo de una “trayectoria termodinámica” C en el espacio (V, T, P) :

- (i) El calor ganado es $\int_C \Lambda_V dV + K_V dT$, donde Λ_V, K_V son funciones de (V, T, P) , dependiendo del sistema físico concreto.
(ii) El trabajo realizado es $\int_C P dV$.

Para un gas de van der Waals, tenemos

$$P(V, T) = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}, \quad J\Lambda_V = \frac{RT}{V - b},$$

y $K_V = \text{constante}$,

donde R, b, a y J son constantes conocidas. Inicialmente, el gas está a una temperatura T_0 y tiene un volumen V_0 .

- (a) Un proceso **adiabático** es un movimiento termodinámico $(V(t), T(t), P(t))$ para el que

$$\frac{dT}{dV} = \frac{dT/dt}{dV/dt} = -\frac{\Lambda_V}{K_V}.$$

Si el gas de van der Waals se somete a un proceso adiabático en el que el volumen se duplica a $2V_0$, calcular

- (1) El calor ganado.
- (2) El trabajo realizado.
- (3) El volumen, la temperatura y la presión finales.

- (b) Despues del proceso indicado en el apartado (a), el gas se enfria (o se calienta) a volumen constante hasta alcanzar la temperatura T_0 . Calcular
 - (1) El calor ganado.
 - (2) El trabajo realizado.
 - (3) El volumen, la temperatura y la presión finales.
- (c) Despues del proceso indicado en el apartado (b), el gas se comprime hasta que vuelve a tener su volumen original V_0 . La temperatura se mantiene constante a lo largo del proceso. Calcular
 - (1) El calor ganado.
 - (2) El trabajo realizado.
 - (3) El volumen, la temperatura y la presión finales.
- (d) Para el proceso cíclico descrito en los apartados (a), (b) y (c), calcular
 - (1) El calor ganado total.
 - (2) El trabajo realizado total.

7.3 Superficies parametrizadas

En las Secciones 7.1 y 7.2, hemos estudiado las integrales de funciones escalares y vectoriales a lo largo de curvas. Ahora vamos a ocuparnos de las integrales sobre superficies y comenzaremos estudiando la geometría de las propias superficies.

Las gráficas son muy restrictivas

Ya hemos empleado un tipo de superficie, concretamente, la gráfica de una función $f(x, y)$. En el Capítulo 2 se han estudiado las gráficas de forma exhaustiva y ya sabemos cómo calcular sus planos tangentes. Sin embargo, nos estaríamos limitando indebidamente si nos restringiésemos a este caso. Por ejemplo, muchas superficies surgen como superficies de nivel de funciones. Supongamos que nuestra superficie S es el conjunto de puntos (x, y, z) , donde $x - z + z^3 = 0$. Aquí S es una hoja que se dobla (respecto al plano xy) sobre sí misma (véase la Figura 7.3.1). Obviamente, podemos llamar superficie a S , porque es solo un plano con un pliegue. Sin embargo, S no es la gráfica de una función $z = f(x, y)$, porque esto significa que para cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tiene que existir un z_0 tal que $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Como se muestra en la Figura 7.3.1, esta condición se viola.

Otro ejemplo sería el toro, una superficie como un dónut, la cual se muestra en la Figura 7.3.2. Todo el mundo diría que un toro es una superficie; pero, razonando como antes, un toro no puede ser la

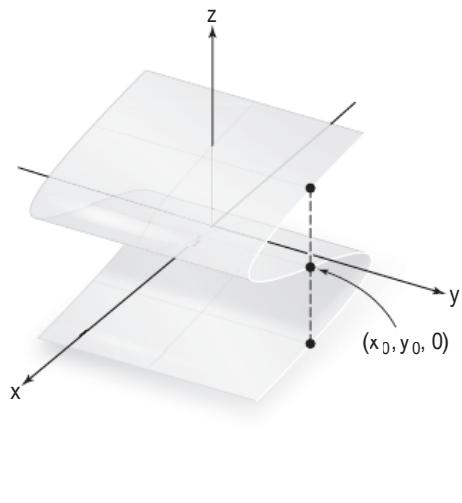


Figura 7.3.1 Una superficie que no es la gráfica de una función $z = f(x, y)$.

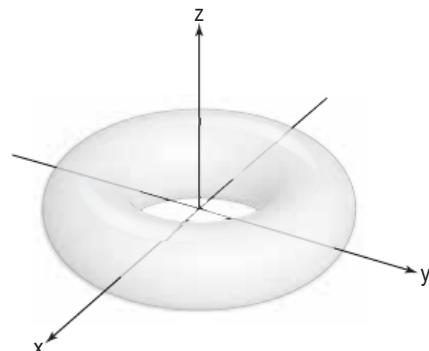


Figura 7.3.2 El toro no es la gráfica de una función de la forma $z = f(x, y)$.

gráfica de una función diferenciable de dos variables. Estas observaciones nos animan a extender nuestra definición de superficie.

La motivación de la siguiente definición ampliada es, en parte, que se puede pensar en una superficie como en algo que se obtiene a partir del plano “enrollando”, “doblando” y “empujando”. Por ejemplo, para obtener un toro, tomamos una parte del plano y lo enrollamos (véase la Figura 7.3.3), luego tomamos los dos “extremos” y los acercamos hasta juntarlos (Figura 7.3.4).

Superficies parametrizadas como aplicaciones

En nuestro estudio del cálculo diferencial tratamos aplicaciones $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Cuando $n = 2$ y $m = 3$ estamos ante el caso de una superficie bidimensional en el espacio tridimensional. Con las superficies, al igual que con las curvas, deseamos distinguir una aplicación (una parametrización) de su imagen (un objeto geométrico). Esto nos lleva a la siguiente definición.

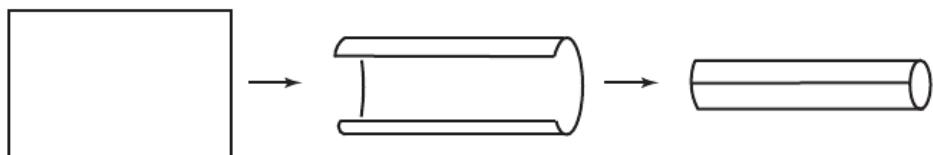


Figura 7.3.3 El primer paso para obtener un toro a partir de un rectángulo es formar un cilindro.



Figura 7.3.4 Doblando el cilindro y pegando los extremos se obtiene un toro.

Definición Superficies parametrizadas Una *parametrización de una superficie* es una función $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde D es algún dominio en \mathbb{R}^2 . La *superficie* S correspondiente a la función Φ es su imagen: $S = \Phi(D)$. Podemos escribir

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Si Φ es diferenciable o es de clase C^1 [que es lo mismo que decir que $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ son diferenciables o funciones C^1 de (u, v)], llamamos a S *superficie diferenciable o C^1* .

Podemos pensar que Φ tuerce o dobla la región D del plano para producir la superficie S (véase la Figura 7.3.5). Por tanto, cada punto (u, v) de D se convierte en una etiqueta para un punto $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ de S .

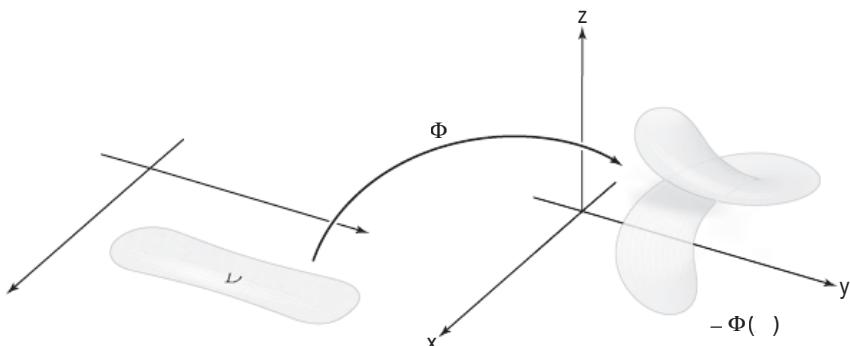


Figura 7.3.5 Φ “tuerce” y “dobra” D produciendo una superficie $S = \Phi(D)$.

Por supuesto, las superficies no tienen por qué doblarse o retorcerse en absoluto. De hecho, los planos son superficies, como se muestra en nuestro primer, y más simple, ejemplo.

Ejemplo 1

En la Sección 1.3 hemos estudiado la ecuación de un plano P . Lo hicimos en términos de gráficas y de conjuntos de nivel. Ahora vamos a examinar el mismo concepto utilizando una parametrización.

Sea P un plano que es paralelo a dos vectores α y β y que pasa por el extremo de otro vector γ , como se muestra en la Figura 7.3.6.

Nuestro objetivo en este ejemplo es determinar una parametrización de este plano. Téngase en cuenta que el vector $\alpha \times \beta = \mathbf{N}$, que también se puede escribir como $A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, es normal a P . Si el extremo de γ es el punto (x_0, y_0, z_0) , entonces la ecuación de P como un conjunto de nivel (como se ha explicado en la Sección 1.3) está dada por:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Sin embargo, el conjunto de todos los puntos del plano P también se puede describir mediante el conjunto de todos vectores que son γ más una combinación lineal de α y β . Utilizando nuestra elección preferida de parámetros reales u y v , llegamos a la *ecuación paramétrica del plano P*:

$$\Phi(u, v) = \alpha u + \beta v + \gamma.$$

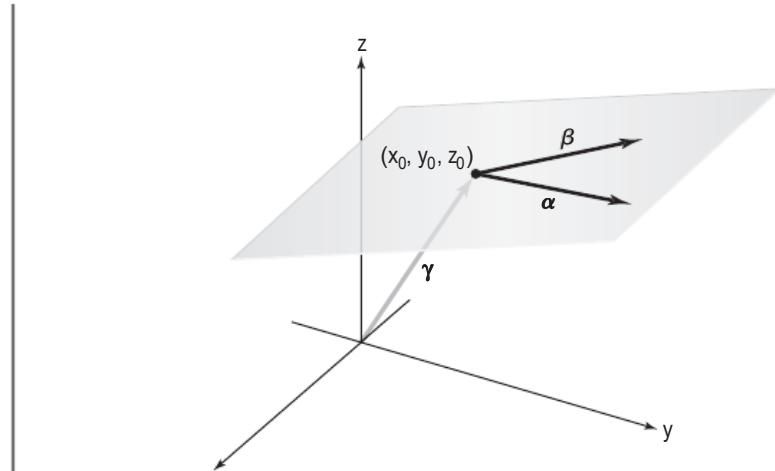


Figura 7.3.6 Descripción paramétrica de un plano.

Vectores tangentes a superficies parametrizadas

Supongamos que Φ es una superficie parametrizada que es diferenciable en $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Fijando u en u_0 , obtenemos una aplicación $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $t \mapsto \Phi(u_0, t)$, cuya imagen es una curva sobre la superficie (Figura 7.3.7). De los Capítulos 2 y 4 sabemos que el vector tangente a esta curva en el punto $\Phi(u_0, v_0)$, que denotamos mediante \mathbf{T}_v , está dado por

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k}.$$

De forma similar, si fijamos v y consideramos la curvas $t \mapsto \Phi(t, v_0)$, obtenemos el vector tangente a esta curva en $\Phi(u_0, v_0)$, dado por

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}.$$

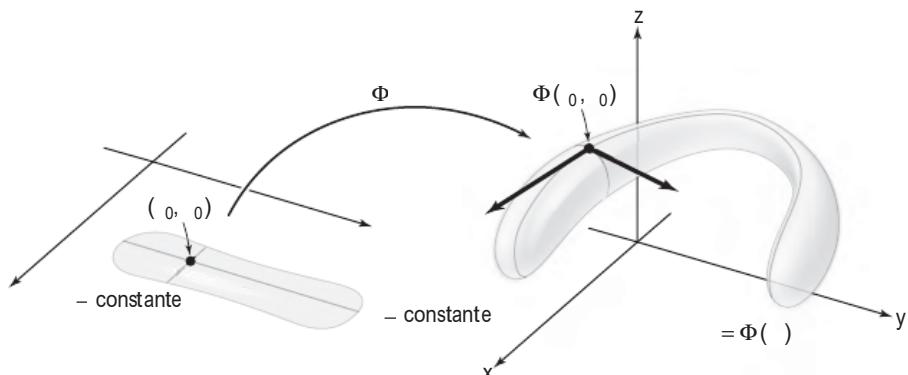


Figura 7.3.7 Los vectores tangentes \mathbf{T}_u y \mathbf{T}_v son tangentes a una curva sobre la superficie S , y por tanto son tangentes a S .

Superficies regulares

Dado que los vectores \mathbf{T}_u y \mathbf{T}_v son tangentes a las dos curvas sobre la superficie en un punto dado, el vector $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ debería ser normal a la superficie en dicho punto.

Decimos que la superficie S es *regular* o *suave*⁷ en $\Phi(u_0, v_0)$, si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ en (u_0, v_0) . Se dice que la superficie es *regular* si es regular en todos los puntos $\Phi(u_0, v_0) \in S$. El vector no nulo $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es *normal* a S (recordemos que el producto vectorial de \mathbf{T}_u y \mathbf{T}_v es perpendicular al plano generado por \mathbf{T}_u y \mathbf{T}_v); el hecho de que no sea nulo garantiza que habrá un plano tangente. Intuitivamente, una superficie suave no tiene “esquinas”.⁸

Ejemplo 2

Considérese la superficie dada por las ecuaciones

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u, \quad u \geq 0.$$

¿Es esta superficie diferenciable? ¿Es regular?

Solución

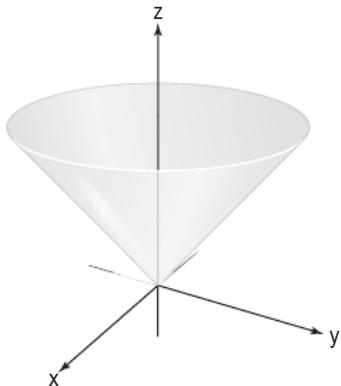


Figura 7.3.8 La superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ es un cono. No es regular en su vértice.

Estas ecuaciones describen la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (para comprobarlo, elevamos al cuadrado las ecuaciones para x , y y z), que se muestra en la Figura 7.3.8. Esta superficie es un cono con “vértice” en $(0, 0, 0)$; es una superficie diferenciable dado que cada función componente es diferenciable como una función de u y v . Sin embargo, la superficie no es regular en $(0, 0, 0)$. Para ver esto, calculamos \mathbf{T}_u y \mathbf{T}_v en $(0, 0)$ en \mathbb{R}^2 :

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}(0, 0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(0, 0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(0, 0)\mathbf{k} = (\cos 0)\mathbf{i} + (\sin 0)\mathbf{j} + \mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{k},$$

y de forma similar,

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0(-\sin 0)\mathbf{i} + 0(\cos 0)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Por tanto, $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \mathbf{0}$ y, por definición, la superficie no es regular en $(0, 0, 0)$. ▲

Plano tangente a una superficie parametrizada

Podemos usar el hecho de que $\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es normal a la superficie tanto para definir formalmente el plano tangente como para calcularlo.

⁷Hablando estrictamente, la regularidad depende de la parametrización Φ y no solo de su imagen S . Por tanto, esta terminología en ocasiones resulta imprecisa; sin embargo, es descriptiva y no debería causar confusión. (Véase el Ejercicio 21.)

⁸En la Sección 3.5 demostramos que las superficies de nivel $f(x, y, z) = 0$ eran de hecho gráficas de funciones de dos variables en algún entorno de un punto (x_0, y_0, z_0) que satisface $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Esto unificaba dos conceptos de superficie—gráficas y conjuntos de nivel. De nuevo, usando el teorema de la función implícita, es posible demostrar que la imagen de una superficie parametrizada Φ en el entorno de un punto (u_0, v_0) donde $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ es también la gráfica de una función de dos variables. Así, todas las definiciones de superficie son coherentes. (Véase el Ejercicio 24.)

Definición Plano tangente a una superficie Si una superficie parametrizada $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es regular en $\Phi(u_0, v_0)$ —es decir, si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ en (u_0, v_0) —definimos el **plano tangente** de la superficie en $\Phi(u_0, v_0)$ para que sea el plano determinado por los vectores \mathbf{T}_u y \mathbf{T}_v . Así, $\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es un vector normal y una ecuación del plano tangente en (x_0, y_0, z_0) a la superficie está dado por

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (1)$$

donde \mathbf{n} está evaluado en (u_0, v_0) ; es decir, el plano tangente es el conjunto de (x, y, z) que satisfacen (1). Si $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$, entonces la fórmula (1) se convierte en

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0. \quad (1')$$

Ejemplo 3

Sea $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u^2 + v^2.$$

¿Dónde existe un plano tangente? Determinar el plano tangente en $\Phi(1, 0)$.

Solución

Calculamos

$$\mathbf{T}_u = (\cos v)\mathbf{i} + (\sin v)\mathbf{j} + 2u\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_v = -u(\sin v)\mathbf{i} + u(\cos v)\mathbf{j} + 2v\mathbf{k},$$

de modo que el plano tangente en el punto $\Phi(u_0, v_0)$ es el conjunto de vectores que pasan por $\Phi(u_0, v_0)$ perpendiculares a

$$(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)(u_0, v_0) = (-2u_0^2 \cos v_0 + 2v_0 \sin v_0, -2u_0^2 \sin v_0 - 2v_0 \cos v_0, u_0)$$

si este vector es distinto de cero. Dado que $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es igual a $\mathbf{0}$ en $(u_0, v_0) = (0, 0)$, no podemos hallar un plano tangente en $\Phi(0, 0) = (0, 0, 0)$. Sin embargo, podemos determinar una ecuación del plano tangente en todos los demás puntos, en los que $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$. En el punto $\Phi(1, 0) = (1, 0, 1)$,

$$\mathbf{n} = (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)(1, 0) = (-2, 0, 1) = -2\mathbf{i} + \mathbf{k}.$$

Puesto que tenemos el vector \mathbf{n} normal a la superficie y un punto $(1, 0, 1)$ en la superficie, podemos usar la fórmula (1') para obtener una ecuación del plano tangente:

$$-2(x - 1) + (z - 1) = 0; \text{ es decir, } z = 2x - 1. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 4

Supongamos que una superficie S es la gráfica de una función diferenciable $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Escribir S en forma paramétrica y demostrar que la superficie es suave en todos los puntos $(u_0, v_0, g(u_0, v_0)) \in \mathbb{R}^3$.

Solución

Escribimos S en forma paramétrica como sigue:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v),$$

que es lo mismo que $z = g(x, y)$. Entonces, en el punto (u_0, v_0) ,

$$\mathbf{T}_u = \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_v = \mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k},$$

y para $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = -\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \mathbf{k} \neq \mathbf{0}. \quad (2)$$

Es distinto de cero ya que el coeficiente de \mathbf{k} es 1; en consecuencia, la parametrización $(u, v) \mapsto (u, v, g(u, v))$ es regular en todos los puntos. Además, el plano tangente en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (u_0, v_0, g(u_0, v_0))$ está dado por la fórmula (1), como

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial u}, -\frac{\partial g}{\partial v}, 1 \right) = 0,$$

donde las derivadas parciales están calculadas en (u_0, v_0) . Recordemos que $x = u$ e $y = v$, de modo que podemos escribir esto como

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)(x - x_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)(y - y_0), \quad (3)$$

donde $\partial g / \partial x$ y $\partial g / \partial y$ están calculadas en (x_0, y_0) . ▲

Este ejemplo también demuestra que la definición de plano tangente para superficies parametrizadas coincide con una de las dadas para superficies obtenidas como gráficas, ya que la Ecuación (3) es la misma fórmula que hemos obtenido en el Capítulo 2 para el plano tangente a S en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

También resulta útil considerar las superficies suaves a tramos, es decir, las superficies formadas por un determinado número de imágenes de superficies suaves parametrizadas. Por ejemplo, la superficie de un cubo en \mathbb{R}^3 es una superficie de este tipo. Veremos estas superficies en la Sección 7.4.

Ejemplo 5

Hallar una parametrización para el hiperboloide de una hoja:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Solución

Dado que x e y aparecen en la combinación $x^2 + y^2$, la superficie es invariante bajo rotaciones alrededor del eje z , y por tanto es natural escribir

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Entonces $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ se convierte en $r^2 - z^2 = 1$. Podemos parametrizar esto de forma apropiada como sigue⁹

$$r = \cosh u, \quad z = \operatorname{senh} u.$$

Por tanto, una parametrización es

$$x = (\cosh u)(\cos \theta), \quad y = (\cosh u)(\sin \theta), \quad z = \operatorname{senh} u,$$

donde $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < u < \infty$. ▲

Ejercicios

En los Ejercicios 1 a 3, hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

1. $x = 2u, y = u^2 + v, z = v^2$, en $(0, 1, 1)$.

2. $x = u^2 - v^2, y = u + v, z = u^2 + 4v$, en $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2)$.

3. $x = u^2, y = u \operatorname{sen} e^v, z = \frac{1}{3}u \cos e^v$, en $(13, -2, 1)$.

4. ¿En qué puntos son regulares las superficies de los Ejercicios 1 y 2?

En los Ejercicios 5 y 6, determinar todos los puntos (u_0, v_0) , donde $S = \Phi(u_0, v_0)$ no es suave (regular).

5. $\Phi(u, v) = (u^2 - v^2, u^2 + v^2, v)$

6. $\Phi(u, v) = (u - v, u + v, 2uv)$

7. Establecer la correspondencia entre las siguientes parametrizaciones y las superficies mostradas en la figura.

(a) $\Phi(u, v) = ((2\sqrt{1+u^2}) \cos v, (2\sqrt{1+u^2}) \operatorname{sen} v, u)$

(b) $\Phi(u, v) = (3 \cos u \operatorname{sen} v, 2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v)$

(c) $\Phi(u, v) = (u, v, u^2)$

(d) $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, u)$

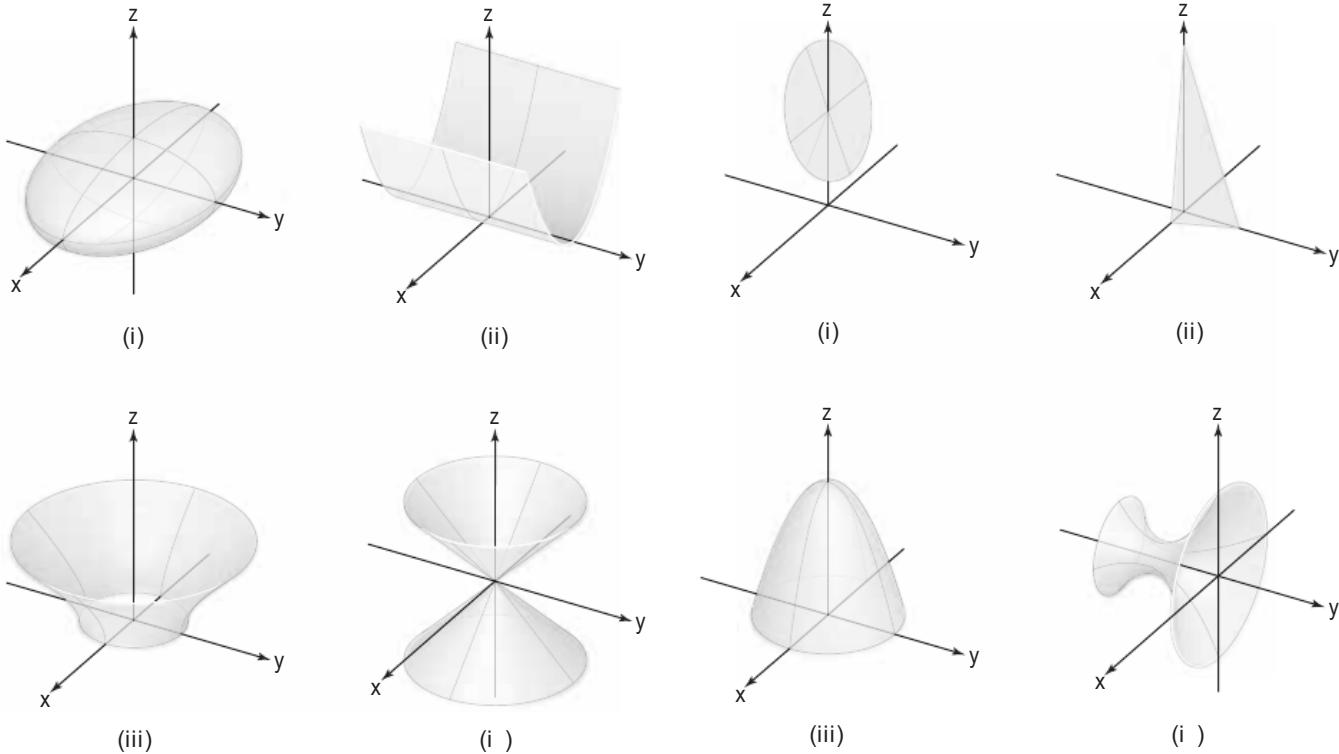
8. Establecer la correspondencia entre las siguientes parametrizaciones y las superficies mostradas en la figura.

(a) $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, 4 - u \cos v - u \operatorname{sen} v); u \in [0, 1], v \in [0, 2\pi]$

(b) $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, 4 - u^2)$

(c) $\Phi(u, v) = (u, v, \frac{1}{3}(12 - 8u - 3v))$

(d) $\Phi(u, v) = ((u^2 + 6u + 11) \cos v, u, (u^2 + 6u + 11) \operatorname{sen} v)$



⁹Sabemos del cálculo de una variable que $\cosh u = (e^u + e^{-u})/2$ y $\operatorname{senh} u = (e^u - e^{-u})/2$. A partir de estas definiciones podemos verificar fácilmente que $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$.

- 9.** Hallar una expresión para un vector unitario normal a la superficie

$$x = \cos v \sin u, \quad y = \sin v \sin u, \quad z = \cos u$$

en la imagen de un punto (u, v) para u en $[0, \pi]$ y v en $[0, 2\pi]$. Identificar esta superficie.

- 10.** Repetir el Ejercicio 9 para la superficie $x = 3 \cos \theta \sin \phi$, $y = 2 \sin \theta \sin \phi$, $z = \cos \phi$ para $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\phi \in [0, \pi]$.

- 11.** Repetir el Ejercicio 9 para la superficie $x = \sin v$, $y = u$, $z = \cos v$ para $0 \leq v \leq 2\pi$ y $-1 \leq u \leq 3$.

- 12.** Repetir el Ejercicio 9 para la superficie $x = (2 - \cos v) \cos u$, $y = (2 - \cos v) \sin u$, $z = \sin v$ para $-\pi \leq u \leq \pi$, $-\pi \leq v \leq \pi$. ¿Es una superficie regular?

- 13.** (a) Desarrollar una fórmula para el plano tangente a la superficie $x = h(y, z)$.
(b) Obtener una fórmula similar para $y = k(x, z)$.

- 14.** Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u^2 + v^2$ en el punto $u = 1$, $v = 1$.

- 15.** Hallar una parametrización de la superficie $z = 3x^2 + 8xy$ y utilizarla para determinar el plano tangente en $x = 1$, $y = 0$, $z = 3$. Comparar la respuesta con la que se obtiene usando gráficas.

- 16.** Hallar una parametrización de la superficie $x^3 + 3xy + z^2 = 2$, $z > 0$, y utilizarla para determinar el plano tangente en el punto $x = 1$, $y = 1/3$, $z = 0$. Comparar la respuesta con la que se obtiene usando conjuntos de nivel.

- 17.** Considérese la superficie en \mathbb{R}^3 parametrizada por

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta), \quad 0 \leq r \leq 1 \\ y \quad 0 \leq \theta \leq 4\pi.$$

- (a) Dibujar y describir la superficie.
(b) Hallar una expresión para una normal unitaria a la superficie.
(c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) .
(d) Si (x_0, y_0, z_0) es un punto de la superficie, demostrar que el segmento de línea horizont-

tal de longitud unidad desde el eje z que pasa por (x_0, y_0, z_0) está contenido en la superficie y en el plano tangente a la superficie en (x_0, y_0, z_0) .

- 18.** Dada una esfera de radio 2 centrada en el origen, hallar la ecuación del plano tangente a ella en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$ considerando la esfera como:

- (a) Una superficie parametrizada por $\Phi(\theta, \phi) = (2 \cos \theta \sin \phi, 2 \sin \theta \sin \phi, 2 \cos \phi)$.
(b) Una superficie de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
(c) La gráfica de $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

- 19.** (a) Hallar una parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$.
(b) Hallar una expresión para una normal unitaria a esta superficie.
(c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en $(x_0, y_0, 0)$, donde $x_0^2 + y_0^2 = 25$.
(d) Demostrar que las líneas $(x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0, 5)$ y $(x_0, y_0, 0) + t(y_0, -x_0, 5)$ están en la superficie y también en el plano tangente determinado en el apartado (c).

- 20.** Una superficie parametrizada se describe mediante una función diferenciable $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Como vimos en el Capítulo 2, la derivada proporciona una aproximación lineal que da una representación del plano tangente. Este ejercicio demuestra que, en efecto, esto es así.

- (a) Suponiendo que $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$, demostrar que la imagen de la transformación lineal $D\Phi(u_0, v_0)$ es el plano generado por \mathbf{T}_u y \mathbf{T}_v . [Aquí \mathbf{T}_u y \mathbf{T}_v están evaluados en (u_0, v_0) .]
(b) Demostrar que $\mathbf{w} \perp (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)$ si y solo si \mathbf{w} está en la imagen de $D\Phi(u_0, v_0)$.
(c) Demostrar que el plano tangente tal y como se ha definido en esta sección es lo mismo que el “plano parametrizado”

$$(u, v) \mapsto \Phi(u_0, v_0) + D\Phi(u_0, v_0) \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix}.$$

- 21.** Considérense las superficies $\Phi_1(u, v) = (u, v, 0)$ y $\Phi_2(u, v) = (u^3, v^3, 0)$.
(a) Demostrar que la imagen de Φ_1 y de Φ_2 es el plano xy .
(b) Demostrar que Φ_1 describe una superficie regular, pero Φ_2 no. Concluir que la noción

de regularidad de una superficie S depende de la existencia de al menos una parametrización regular para S .

- (c) Demostrar que el plano tangente de S está bien definido independientemente de la parametrización regular (inyectiva) (se precisa utilizar el teorema de la función inversa de la Sección 3.5).
- (d) Tras estas observaciones, ¿es posible determinar una parametrización regular del cono de la Figura 7.3.8?

22. La imagen de la parametrización

$$\begin{aligned}\Phi(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ &= (a \sen u \cos v, b \sen u \sen v, c \cos u)\end{aligned}$$

con $b < a$, $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$ parametriza un elipsoide.

- (a) Demostrar que todos los puntos de la imagen de Φ satisfacen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(ecuación cartesiana de un elipsoide).

- (b) Demostrar que la superficie imagen es regular en todos los puntos.

23. La imagen de la parametrización

$$\begin{aligned}\Phi(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ &= ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sen v, r \sen u)\end{aligned}$$

donde $0 \leq u, v \leq 2\pi$, $0 < r < 1$ parametriza un toro (o dónut) S .

- (a) Demostrar que todos los puntos de la imagen (x, y, z) satisfacen:

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2.$$

- (b) Demostrar que la superficie imagen es regular en todos los puntos.

24. Sea Φ una superficie regular en (u_0, v_0) ; es decir, Φ es de clase C^1 y $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ en (u_0, v_0) .

- (a) Utilizar el teorema de la función implícita (Sección 3.5) para demostrar que la imagen de Φ cerca de (u_0, v_0) es la gráfica de una función C^1 de dos variables. Si la componente z de $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es distinta de cero, podemos escribirla como $z = f(x, y)$.
- (c) Demostrar que el plano tangente en $\Phi(u_0, v_0)$ definido por el plano generado por \mathbf{T}_u y \mathbf{T}_v coincide con el plano tangente de la gráfica de $z = f(x, y)$ en ese punto.

7.4 Área de una superficie

Antes de pasar a las integrales de superficie generales, vamos a considerar el problema de calcular el área de una superficie, igual que consideramos el problema de hallar la longitud de arco de una curva antes de estudiar las integrales a lo largo de trayectorias.

Definición de área de una superficie

En la Sección 7.3 hemos definido una superficie parametrizada S como la *imagen* de una función $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, escrita como $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Hemos dicho que la aplicación Φ es la parametrización de S y que S era regular en $\Phi(u, v) \in S$ si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$, donde

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\mathbf{k}.$$

Recordemos que una superficie regular (hablando de manera informal) es aquella que no presenta esquinas ni rupturas.

En el resto de este capítulo y en el siguiente, consideraremos solo superficies regulares a trozos que son uniones de imágenes de superficies parametrizadas $\Phi_i: D_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ para las que:

- (I) D_i es una región elemental en el plano;
- (II) Φ_i es de clase C^1 e inyectiva, excepto posiblemente en la frontera de D_i y
- (III) S_i , la imagen de Φ_i , es regular, excepto posiblemente en un número finito de puntos.

Definición Área de una superficie parametrizada Definimos el **área**¹⁰ $A(S)$ de una superficie parametrizada mediante

$$A(S) = \iint_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| du dv, \quad (1)$$

donde $\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|$ es la norma de $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$. Si S es una unión de superficies S_i , su área es la suma de las áreas de las S_i .

Como podemos verificar fácilmente,

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right]^2}, \quad (2)$$

donde

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

y así sucesivamente. Por tanto, la Ecuación (1) se convierte en

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right]^2} du dv. \quad (3)$$

Justificación de la fórmula del área

Podemos justificar la definición del área de una superficie analizando la integral $\iint_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| du dv$ en términos de sumas de Riemann. Con el fin de simplificar, supongamos que D es un rectángulo; considera-

¹⁰Como aún no hemos hablado de la independencia de la parametrización, puede parecer que $A(S)$ depende de la parametrización Φ . En la Sección 7.6 estudiaremos la independencia de la parametrización; el uso de esta notación aquí no debe producir confusión.

mos entonces la n -ésima partición regular de D y sea R_{ij} el ij -ésimo rectángulo de la partición, con vértices $(u_i, v_j), (u_{i+1}, v_j), (u_i, v_{j+1})$ y $(u_{i+1}, v_{j+1}), 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq n-1$. Denotamos los valores de \mathbf{T}_u y \mathbf{T}_v en (u_i, v_j) mediante \mathbf{T}_{u_i} y \mathbf{T}_{v_j} . Podemos interpretar los vectores $\Delta u \mathbf{T}_{u_i}$ y $\Delta v \mathbf{T}_{v_j}$ como tangentes a la superficie en $\Phi(u_i, v_j) = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$, donde $\Delta u = u_{i+1} - u_i, \Delta v = v_{j+1} - v_j$. Estos vectores forman entonces un paralelogramo P_{ij} que está en el plano tangente a la superficie en (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) (véase la Figura 7.4.1). Tenemos así una aproximación (una “colcha de patchwork”) de la superficie por los P_{ij} . Para n grande, el área de los P_{ij} es una buena aproximación al área de $\Phi(R_{ij})$. Dado que el área del paralelogramo generado por dos vectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 es $\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|$ (véase el Capítulo 1), vemos que

$$A(P_{ij}) = \|\Delta u \mathbf{T}_{u_i} \times \Delta v \mathbf{T}_{v_j}\| = \|\mathbf{T}_{u_i} \times \mathbf{T}_{v_j}\| \Delta u \Delta v.$$

Por tanto, el área de la aproximación es

$$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} A(P_{ij}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \|\mathbf{T}_{u_i} \times \mathbf{T}_{v_j}\| \Delta u \Delta v.$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, las sumas A_n convergen a la integral

$$\iint_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| du dv.$$

Puesto que A_n debería aproximarse al área de la superficie cada vez más cuando $n \rightarrow \infty$, llegamos a la fórmula (1) como una definición razonable de $A(S)$.

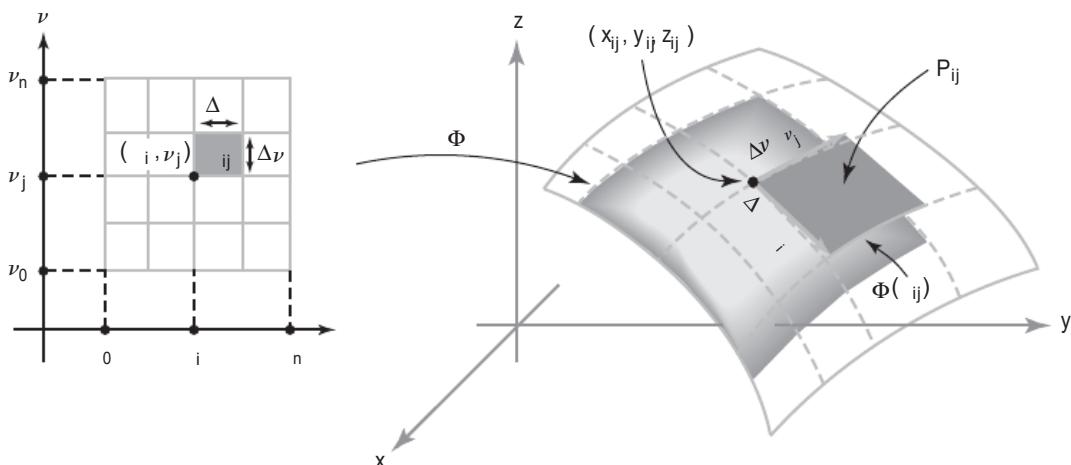


Figura 7.4.1 $\|\mathbf{T}_{u_i} \times \mathbf{T}_{v_j}\| \Delta u \Delta v$ es igual al paralelogramo que aproxima el área de un trozo de la superficie $S = \Phi(D)$.

Ejemplo 1

Sea D la región determinada por $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$ y sea la función $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida como

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = r,$$

una parametrización de un cono S (véase la Figura 7.3.8). Hallar el área de su superficie.

Solución

En la fórmula (3),

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r,$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin \theta & r \cos \theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -r \cos \theta,$$

y

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = r \sin \theta,$$

por lo que el integrando del área es

$$\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| = \sqrt{r^2 + r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = r\sqrt{2}.$$

Evidentemente, $\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\|$ se anula para $r = 0$, pero $\Phi(0, \theta) = (0, 0, 0)$ para cualquier θ . Por tanto, $(0, 0, 0)$ es el único punto en el que la superficie no es regular. Tenemos

$$\iint_D \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2}r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sqrt{2} d\theta = \sqrt{2}\pi.$$

Para confirmar que esta es el área de $\Phi(D)$, tenemos que comprobar que Φ es inyectiva (para puntos que no están en la frontera de D). Sea D^0 el conjunto de (r, θ) con $0 < r < 1$ y $0 < \theta < 2\pi$. Por tanto, D^0 es D sin su frontera. Para ver que $\Phi: D^0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva, supongamos que $\Phi(r, \theta) = \Phi(r', \theta')$ para (r, θ) y $(r', \theta') \in D^0$. Entonces

$$r \cos \theta = r' \cos \theta', \quad r \sin \theta = r' \sin \theta', \quad r = r'.$$

A partir de estas ecuaciones se deduce que $\cos \theta = \cos \theta'$ y $\sin \theta = \sin \theta'$. Luego, o bien $\theta = \theta'$ o $\theta = \theta' + 2\pi n$. Pero el segundo caso es imposible para n entero distinto de cero, ya que tanto θ como θ' pertenecen al intervalo abierto $(0, 2\pi)$ y por tanto no pueden distar más de 2π radianes. Esto prueba que fuera de la frontera, Φ es inyectiva ($\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$?). En los próximos ejemplos, normalmente no comprobaremos que la parametrización es inyectiva cuando intuitivamente esté claro que es así. ▲

Ejemplo 2

Un *helicoide* se define por $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = \theta$$

y D es la región en la que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq 1$ (Figura 7.4.2). Hallar su área.

Solución

Calculamos $\partial(x, y)/\partial(r, \theta) = r$ como en el Ejemplo 1, y

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin \theta & r \cos \theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin \theta,$$

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos \theta.$$

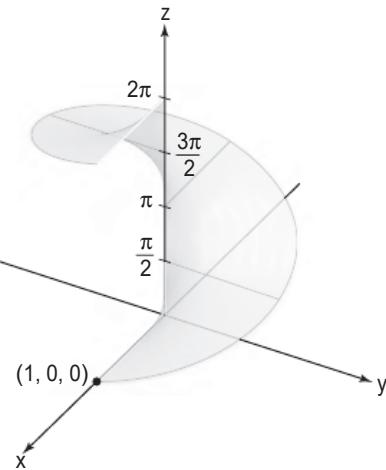


Figura 7.4.2 El helicoide
 $x = r \cos \theta, y = r \sen \theta, z = \theta.$

El integrando del área es por tanto $\sqrt{r^2 + 1}$, que nunca se anula, por tanto, la superficie es regular. El área del helicoide es

$$\iint_D \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} dr d\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} dr.$$

Después de unos pocos cálculos (usando la tabla de integrales), determinamos que esta integral es igual a

$$\pi[\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})].$$



Área de la superficie de una gráfica

Una superficie S dada en la forma $z = g(x, y)$, donde $(x, y) \in D$, admite la parametrización

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v)$$

para $(u, v) \in D$. Cuando g es de clase C^1 , esta parametrización es suave y la fórmula para el área de la superficie se reduce a

$$A(S) = \iint_D \left(\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 + 1} \right) dA, \quad (4)$$

después de aplicar las fórmulas

$$\mathbf{T}_u = \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u} \mathbf{k}, \quad \mathbf{T}_v = \mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial v} \mathbf{k},$$

y

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = -\frac{\partial g}{\partial u} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial v} \mathbf{j} + \mathbf{k} = -\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

como vimos en el Ejemplo 4 de la Sección 7.3.

Superficies de revolución

En la mayor parte de los libros dedicados al cálculo de una variable, se demuestra que el área de la superficie lateral generada al girar la gráfica de una función $y = f(x)$ alrededor del eje x está dada por

$$A = 2\pi \int_a^b (|f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}) dx. \quad (5)$$

Si la gráfica gira alrededor del eje y , el área de la superficie es

$$A = 2\pi \int_a^b (|x| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}) dx. \quad (6)$$

Deduciremos la fórmula (5) utilizando los métodos que acabamos de desarrollar; la fórmula (6) podemos obtenerla de forma similar (Ejercicio 10).

Para deducir la fórmula (5) a partir de la fórmula (3), debemos proporcionar una parametrización de S . Definimos la parametrización como

$$x = u, \quad y = f(u) \cos v, \quad z = f(u) \sin v$$

sobre la región D dada por

$$a \leq u \leq b, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Esto es de hecho una parametrización de S , ya que para u fija, el punto

$$(u, f(u) \cos v, f(u) \sin v)$$

describe una circunferencia de radio $|f(u)|$ con centro en $(u, 0, 0)$ (Figura 7.4.3). Calculamos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -f(u) \sen v, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = f(u) f'(u), \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = f(u) \cos v,$$

y por tanto, por la fórmula (3)

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right]^2} du dv \\ &= \iint_D \sqrt{[f(u)]^2 \sen^2 v + [f(u)]^2 [f'(u)]^2 + [f(u)]^2 \cos^2 v} du dv \\ &= \iint_D |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2} du dv \\ &= \int_a^b \int_0^{2\pi} |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2} dv du \\ &= 2\pi \int_a^b |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2} du, \end{aligned}$$

que es la fórmula (5).

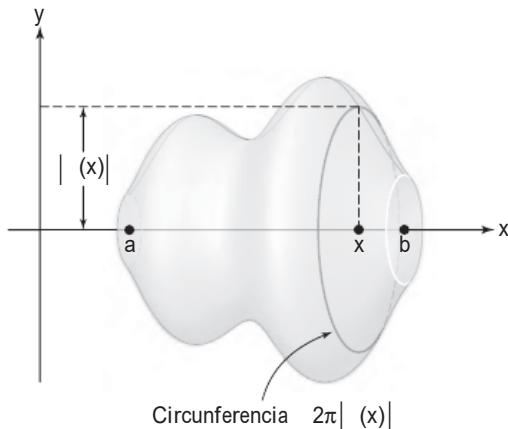


Figura 7.4.3 La curva $y = f(x)$ girada alrededor del eje x .

Si S es la superficie de revolución, entonces $2\pi|f(x)|$ es la circunferencia de la sección vertical a S en el punto x (Figura 7.4.3). Entonces podemos escribir

$$2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_c^c 2\pi|f(x)| ds,$$

donde la expresión de la derecha es la integral de $2\pi|f(x)|$ a lo largo de la trayectoria dada por $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$. Por tanto, *la superficie lateral de un sólido de revolución se obtiene integrando las longitudes de las circunferencias que limitan las secciones a lo largo de la trayectoria que es la gráfica de la función dada*.

Nota histórica

El matemático más famoso de la antigüedad fue Arquímedes. Además de ser un matemático extraordinariamente dotado, era también un genio de la ingeniería a un nivel nunca visto antes y fue enormemente admirado por sus contemporáneos y por los escritores posteriores a causa de su perspicacia para la mecánica. Fueron esas habilidades las que ayudaron a las gentes de la ciudad de Siracusa en el año 214 a.C. a defender su ciudad frente al ataque de las legiones romanas comandadas por Marcelo.

Cuando los romanos sitiaron la ciudad, se encontraron con un enemigo al que Arquímedes había suministrado—de forma totalmente inesperada—poderosas armas, incluyendo artillería y espejos, que, según la leyenda, sirvieron para incendiar la flota romana.

El sitio de Siracusa duró dos años y la ciudad finalmente cayó como resultado de una traición. Durante el asalto, el anciano científico fue asesinado por un soldado romano, a pesar de que el comandante había pedido a sus hombres que respetaran la vida de Arquímedes. Según cuenta la historia, Arquímedes estaba sentado delante de su casa estudiando algunas figuras geométricas que había dibujado en la arena. Cuando un soldado romano se aproximó, Arquímedes le gritó, “¡No estropie mis figuras!”. El rufián, al sentirse insultado, mató a Arquímedes.

En honor a este gran hombre, Marcelo erigió una tumba para Arquímedes en la que, de acuerdo con los deseos de Arquímedes, se dibujaron un cono, una esfera y un cilindro (Figura 7.4.4).



Figura 7.4.4 Teorema de Arquímedes: las proporciones de los volúmenes de un cono, una semiesfera y un cilindro, todos ellos con la misma altura y el mismo radio, son 1:2:3.

Arquímedes estaba increíblemente orgulloso de su cálculo del volumen y el área de la superficie de la esfera, lo que de forma totalmente justificada se consideró un gran logro en la época. En su trabajo sobre los centros de gravedad, para los que no proporcionó una definición clara, Arquímedes fue capaz de calcular el área de la superficie de la esfera sin disponer de una definición clara de qué era de forma precisa. Sin embargo, como con muchos trabajos matemáticos, se conoce la respuesta mucho antes de que pueda tener una demostración o incluso la definición correcta.

El problema de definir de forma apropiada el área de una superficie es difícil. Diremos en descargo de Arquímedes que hasta el siglo XX no se consiguió establecer una teoría rigurosa sobre las áreas de superficies, después de un largo desarrollo que comenzó en el siglo XVII con el descubrimiento del cálculo.

Christiaan Huygens (1629–1695) fue la primera persona desde Arquímedes en dar resultados sobre las áreas de superficies especiales distintas de la esfera y obtuvo las áreas de porciones de superficies de revolución, tales como el paraboloide y el hiperboloide.

El brillante y prolífico matemático Leonhard Euler (1707–1783) presentó el primer trabajo fundamental sobre la teoría de superficies, en 1760, en su obra *Recherches sur la courbure des surfaces*. Sin embargo, fue en 1728, en un artículo sobre trayectorias más cortas sobre superficies, que Euler definió una superficie como una gráfica $z = f(x,y)$. Euler estaba interesado en estudiar la curvatura de las superficies y, en 1771, presentó el concepto de las superficies parametrizadas que se describen en esta sección.

Tras el rápido desarrollo del cálculo a principios del siglo XVIII, se desarrollaron las fórmulas para las longitudes de curvas y áreas de superficies. Aunque no sabemos cuándo aparecieron por primera vez todas las fórmulas para el cálculo de áreas presentadas en esta sección, estamos seguros de que se conocían a finales del siglo XVIII. Los conceptos subyacentes de longitud de una curva y del área de una superficie se comprendían intuitivamente antes de esta época y el uso de fórmulas de cálculo para hallar áreas fue considerado un gran avance.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) fue el primero en dar el paso de definir los conceptos de longitud y área de una superficie mediante integrales como hemos hecho en este libro. La cuestión de definir el área de una superficie sin usar integrales se abordó algo más tarde, pero esto planteó muchos problemas complicados que no fueron apropiadamente resueltos hasta el siglo XX.

Las esferas de Arquímedes se pueden encontrar en la naturaleza, desde las formas de las estrellas y los planetas hasta las pompas de jabón. La Figura 7.4.5 muestra a un muchacho haciendo una pompa de jabón.

Hacer pompas de jabón es un antiguo pasatiempo. Incluso en el Louvre hay un jarrón etrusco en el que aparecen retratados unos niños haciendo pompas. ¿Se ha preguntado el lector por qué las pompas de jabón son esféricas y no cúbicas?

Figura 7.4.5 Un muchacho haciendo una pompa de jabón. Pintura del artista francés Jean Baptiste Siméon Chardin (1699–1779), The Metropolitan Museum of Art, Nueva York.



Análogamente, ¿por qué los planetas y el Sol son redondos? ¿Qué es lo que determina realmente la forma de nuestro universo?

Las respuestas a estas preguntas implican conceptos fundamentales abordados en este libro; en concreto, problemas de máximos y mínimos, y el caso de los problemas de determinación del área y el volumen de las pompas de jabón. Las pompas de jabón son redondas por su naturaleza más económica. La forma esférica es la superficie de mínima área posible que contiene un determinado volumen (que en el caso de una pompa es el aire).

Los problemas matemáticos de esta clase se clasifican dentro del cálculo de variaciones, un área casi tan antigua como el propio cálculo.

Para obtener más información, véase el libro *The Parsimonious Universe* de Hildebrandt y Tromba (Springer-Verlag, 1995).

Ejercicios

1. Hallar el área de la superficie de la esfera unidad S representada paramétricamente por $\Phi: D \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, donde D es el rectángulo $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$ y Φ está dada por las ecuaciones

$$x = \cos \theta \operatorname{sen} \phi, \quad y = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad z = \cos \phi.$$

Obsérvese que podemos representar la esfera completa de forma paramétrica, pero no podemos representarla en la forma $z = f(x, y)$.

2. En el Ejercicio 1, ¿qué ocurre si permitimos que ϕ varíe desde $-\pi/2$ a $\pi/2$? ¿Y si varía entre 0 y 2π ? ¿Por qué obtenemos respuestas diferentes?
3. Hallar el área del helicoide del Ejemplo 2 si el dominio D es $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 3\pi$.
4. El toro T se puede representar paramétricamente mediante la función $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde Φ está dada por las funciones coordenadas

$x = (R + \cos \phi) \cos \theta, \quad y = (R + \cos \phi) \operatorname{sen} \theta, \quad z = \operatorname{sen} \phi;$ D es el rectángulo $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, es decir, $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$; y $R > 1$ es fijo (véase la Figura 7.4.6). Demostrar que $A(T) = (2\pi)^2 R$, primero usando la fórmula (3) y luego usando la fórmula (6).

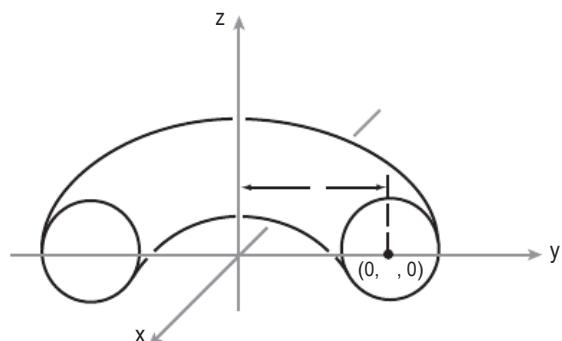


Figura 7.4.6 Sección transversal de un toro.

5. Sea $\Phi(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, v)$ una aplicación de $D = [0, 1] \times [0, \pi]$ en el plano uv sobre una superficie S en el espacio xyz .
- Hallar $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$.
 - Hallar la ecuación del plano tangente a S cuando $(u, v) = (0, \frac{\pi}{2})$.
 - Hallar el área de $\Phi(D)$.
6. Hallar el área de la superficie definida por $z = xy$ y $x^2 + y^2 \leq 2$.
7. Utilizar una integral de superficie para determinar el área del triángulo T en \mathbb{R}^3 con vértices en $(1, 1, 0)$, $(2, 1, 2)$ y $(2, 3, 3)$. Comprobar la respuesta determinando las longitudes de los lados y usando la geometría clásica. [SUGERENCIA: expresar el triángulo como la gráfica $z = g(x, y)$ sobre un triángulo T^* en el plano xy .]
8. Utilizar una integral sobre una superficie para determinar el área del cuadrilátero D in \mathbb{R}^3 de vértices en $(-1, 1, 2)$, $(1, 1, 2)$, $(0, 3, 5)$ y $(5, 3, 5)$. Comprobar la respuesta determinando las longitudes de los lados y usando la geometría clásica (véase la sugerencia del problema anterior).
9. Sea $\Phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$ y sea D el disco unidad en el plano uv . Hallar el área de $\Phi(D)$.
10. Hallar el área de la porción de la esfera unidad contenida en el cono $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ (véase el Ejercicio 1).
11. Demostrar que la superficie $x = 1/\sqrt{y^2 + z^2}$, donde $1 \leq x < \infty$, ¡se puede llenar pero no se puede pintar!
12. Hallar una parametrización de la superficie $x^2 - y^2 = 1$, donde $x > 0$, $-1 \leq y \leq 1$ y $0 \leq z \leq 1$. Utilizar la respuesta para expresar el área de la superficie como una integral.
13. Representar el elipsoide E :
- $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
- paramétricamente y escribir la integral que da el área de su superficie $A(E)$. (No calcular la integral).
14. Hacemos girar la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ alrededor del eje y . Demostrar que el área de la superficie barrida está dada por la Ecuación (6); es decir,

$$A = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Interpretar la fórmula geométricamente utilizando la longitud de arco y la distancia al eje de rotación.

15. Hallar el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ alrededor del eje y .
16. Utilizar la fórmula (4) para calcular el área de la superficie del cono del Ejemplo 1.
17. Hallar el área de la superficie definida por $x + y + z = 1$, $x^2 + 2y^2 \leq 1$.
18. Demostrar que para los vectores \mathbf{T}_u y \mathbf{T}_v , se tiene la fórmula
- $$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right]^2}.$$
19. Dibujar y calcular el área de la superficie dada por
- $$x = r \cos \theta, \quad y = 2r \cos \theta, \quad z = \theta, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$
20. Demostrar el *teorema de Pappus*: Sea $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una trayectoria C^1 cuya imagen se encuentra en el semiplano derecho y es una curva cerrada simple. El área de la superficie lateral generada al rotar la imagen de \mathbf{c} alrededor del eje y es igual a $2\pi \bar{x}l(\mathbf{c})$, donde \bar{x} es el valor medio de las coordenadas x de puntos sobre \mathbf{c} y $l(\mathbf{c})$ es la longitud de \mathbf{c} . (Véanse los Ejercicios 16 a 19 de la Sección 7.1 para ver una exposición acerca de los valores medios.)
21. El cilindro $x^2 + y^2 = x$ divide la esfera unidad S en dos regiones S_1 y S_2 , donde S_1 corresponde al interior del cilindro y S_2 al exterior. Hallar la relación de las áreas $A(S_2)/A(S_1)$.
22. Supongamos que una superficie S que es la gráfica de una función $z = f(x, y)$, donde $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ se puede describir también como el conjunto de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ con $F(x, y, z) = 0$ (una superficie de nivel). Deducir una fórmula para $A(S)$ que solo implique a F .
23. Calcular el área del cono truncado mostrado en la Figura 7.4.7 utilizando (a) solo geometría y después (b) una fórmula para el área de la superficie.

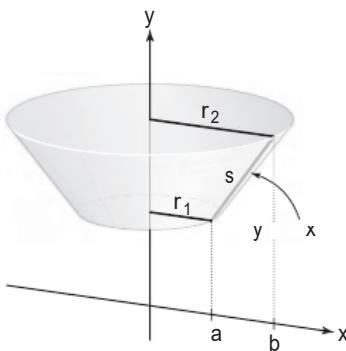


Figura 7.4.7 La revolución de un segmento de recta alrededor del eje y genera un tronco de cono.

24. Se realiza un agujero cilíndrico de radio 1 en una bola sólida de radio 2 para formar una junta anular como la mostrada en la Figura 7.4.8. Hallar el volumen y el área de la superficie exterior de esta junta.
25. Hallar el área de la gráfica de la función $f(x, y) = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$ que se encuentra sobre el dominio $[0, 1] \times [0, 1]$.
26. Expresar el área de la superficie de las gráficas siguientes sobre la región indicada D como una integral doble. No calcularlas.

- (a) $(x + 2y)^2; D = [-1, 2] \times [0, 2]$
- (b) $xy + x/(y + 1); D = [1, 4] \times [1, 2]$
- (c) $xy^3 e^{x^2 y^2}; D = \text{círculo unidad centrado en el origen.}$
- (d) $y^3 \cos^2 x; D = \text{triángulo con vértices en } (-1, 1), (0, 2) \text{ y } (1, 1).$

27. Demostrar que el área de la superficie de la semiesfera superior de radio R , $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, se puede calcular mediante la fórmula (4), evaluada como una integral impropia.

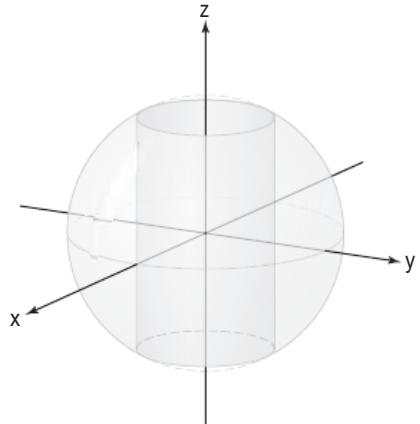


Figura 7.4.8 Hallar el área de la superficie exterior y el volumen de la región sombreada.

7.5 Integrales de funciones escalares sobre superficies

Ahora ya estamos preparados para definir la integral de una función *escalar* f sobre una superficie S . Este concepto es una generalización natural del área de una superficie, que corresponde a la integral sobre S de la función escalar $f(x, y, z) = 1$. Esto es parecido a considerar la integral a lo largo de una trayectoria como una generalización de la longitud de arco. En la siguiente sección nos ocuparemos de la integral de una función *vectorial* \mathbf{F} sobre una superficie. Estos conceptos desempeñarán un papel crucial en el análisis vectorial que se trata en el capítulo final.

Comenzamos con una superficie S parametrizada por una aplicación $\Phi: D \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, donde D es una región elemental, que expresamos como $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

Definición Integral de una función escalar sobre una superficie Si $f(x, y, z)$ es una función continua con valores reales definida sobre una superficie parametrizada S , definimos la **integral de f sobre S** como

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_S f dS = \iint_D f(\Phi(u, v)) \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| du dv. \quad (1)$$

Desarrollando la Ecuación 1, tenemos

$$\iint_S f \, dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right]^2} \, du \, dv. \quad (2)$$

Por tanto, si f es idénticamente 1, recuperamos la fórmula del área (3) de la Sección 7.4. Al igual que el área de una superficie, la integral de superficie es independiente de la parametrización concreta utilizada. Veremos esto en la Sección 7.6.

Podemos adquirir cierto conocimiento intuitivo acerca de esta integral considerándola como un límite de sumas. Sea D un rectángulo dividido en n^2 rectángulos R_{ij} con áreas $\Delta u \Delta v$. Sea $S_{ij} = \Phi(R_{ij})$ la porción de la superficie $\Phi(D)$ correspondiente a R_{ij} (véase la Figura 7.5.1), y sea $A(S_{ij})$ el área de esta porción de la superficie. Para n grande, f será aproximadamente constante en S_{ij} , y formamos la suma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\Phi(u_i, v_j)) A(S_{ij}), \quad (3)$$

donde $(u_i, v_j) \in R_{ij}$. De la Sección 7.4 tenemos una fórmula para $A(S_{ij})$:

$$A(S_{ij}) = \iint_{R_{ij}} \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, du \, dv,$$

que, por el teorema del valor medio para integrales, es igual a $\|\mathbf{T}_{u_i^*} \times \mathbf{T}_{v_j^*}\| \Delta u \Delta v$ para algún punto (u_i^*, v_j^*) en R_{ij} . Por tanto, nuestra suma se convierte en

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\Phi(u_i, v_j)) \|\mathbf{T}_{u_i^*} \times \mathbf{T}_{v_j^*}\| \Delta u \Delta v,$$

que es una suma que se aproxima a la última integral de la fórmula (1). Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iint_S f \, dS.$$

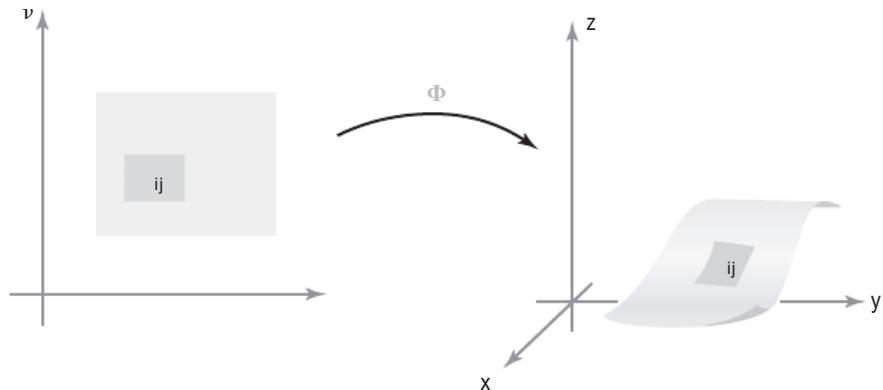


Figura 7.5.1 Φ envía una porción R_{ij} de D a una porción de S .

Obsérvese que cada término en la suma de la fórmula (3) es el valor de f en algún punto $\Phi(u_i, v_j)$ multiplicado por el área de S_{ij} . Compárese esto con la interpretación en función de las sumas de Riemann de la integral a lo largo de una trayectoria que vimos en la Sección 7.1.

Si S es una unión de superficies parametrizadas S_i , $i = 1, \dots, N$, que no se cortan excepto posiblemente a lo largo de las curvas que definen sus fronteras, entonces la integral de f sobre S se define mediante

$$\iint_S f dS = \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} f dS,$$

como era de esperar. Por ejemplo, la integral sobre la superficie de un cubo se puede expresar como la suma de las integrales sobre las seis caras.

Ejemplo 1

Supongamos que un helicoide se describe como en el Ejemplo 2 de la Sección 7.4, y sea f una función dada por $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. Hallar $\iint_S f dS$.

Solución

Como en el Ejemplo 2 de la Sección 7.4,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \operatorname{sen} \theta, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(r, \theta)} = \cos \theta.$$

Además, $f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, \theta) = \sqrt{r^2 + 1}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \iint_D f(\Phi(r, \theta)) \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} \sqrt{r^2 + 1} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{4}{3} d\theta = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

Integrales de superficie sobre gráficas

Supongamos que S es la gráfica de una función C^1 $z = g(x, y)$. Recorremos de la Sección 7.4 que podemos parametrizar S por

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v),$$

y que en este caso

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2},$$

de modo que

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (4)$$

Ejemplo 2

Sea S la superficie definida por $z = x^2 + y$, donde D es la región $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. Calcular $\iint_S x \, dS$.

Solución

Si hacemos $z = g(x, y) = x^2 + y$, la fórmula (4) da

$$\begin{aligned}\iint_S x \, dS &= \iint_D x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2 + 1} \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \left[\int_0^1 (2 + 4x^2)^{1/2} (8x \, dx) \right] dy \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \int_{-1}^1 [(2 + 4x^2)^{3/2}]|_0^1 dy \\ &= \frac{1}{12} \int_{-1}^1 (6^{3/2} - 2^{3/2}) \, dy = \frac{1}{6} (6^{3/2} - 2^{3/2}) \\ &= \sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} \right).\end{aligned}$$

**Ejemplo 3**

Calcular $\iint_S z^2 \, dS$, donde S es la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solución

Para este problema es conveniente utilizar coordenadas esféricas y representar la esfera paramétricamente mediante la ecuación $x = \cos \theta \sin \phi$, $y = \sin \theta \sin \phi$, $z = \cos \phi$, sobre la región D en el plano $\theta\phi$ dado por las desigualdades $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. A partir de la Ecuación (1) obtenemos

$$\iint_S z^2 \, dS = \iint_D (\cos \phi)^2 \|\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi\| \, d\theta \, d\phi.$$

Un pequeño cálculo [usando la fórmula (2) de la Sección 7.4; véase el Ejercicio 12] demuestra que

$$\|\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi\| = \sin \phi.$$

(Téngase en cuenta que para $0 \leq \phi \leq \pi$, tenemos $\sin \phi \geq 0$). Por tanto,

$$\begin{aligned}\iint_S z^2 \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \phi \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} [-\cos^3 \phi]|_0^\pi \, d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$



Este ejemplo también demuestra que sobre una esfera de radio R ,

$$\iint_S f \, ds = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\phi, \theta) R^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta,$$

o, de forma resumida, el *elemento de área sobre la esfera* está dado por

$$dS = R^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta.$$

Integrales sobre gráficas

Vamos a desarrollar ahora otra fórmula para las integrales de superficie cuando la superficie se puede representar como una gráfica. Para ello, sea S la gráfica de $z = g(x, y)$ y consideremos la fórmula (4). Decimos que

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D \frac{f(x, y, g(x, y))}{\cos \theta} \, dx \, dy, \quad (5)$$

donde θ es el ángulo que forma la normal a la superficie con el vector unitario \mathbf{k} en el punto $(x, y, g(x, y))$ (véase la Figura 7.5.2). Si se describe la superficie mediante la ecuación $\phi(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$, un vector normal \mathbf{N} es $\nabla\phi$; es decir,

$$\mathbf{N} = -\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad (6)$$

[Véase el Ejemplo 4 de la Sección 7.3 o recuérdese que la normal a una superficie con ecuación $g(x, y, z) = \text{constante}$ está dada por ∇g]. Luego,

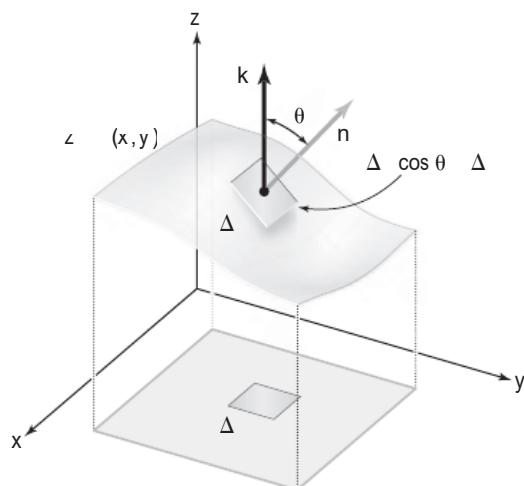
$$\cos \theta = \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{(\partial g / \partial x)^2 + (\partial g / \partial y)^2 + 1}}.$$

Sustituyendo esta fórmula en la Ecuación (4), obtenemos la Ecuación (5). Obsérvese que $\cos \theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$, donde $\mathbf{n} = \mathbf{N} / \|\mathbf{N}\|$ es la normal unitaria. Por tanto, podemos escribir

$$dS = \frac{dx \, dy}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}.$$

El resultado es, de hecho, geométricamente obvio, ya que si un pequeño rectángulo en el plano xy tiene área ΔA , entonces el área de la porción

Figura 7.5.2 El área ΔS sobre la porción de área ΔA es $\Delta S = \Delta A / \cos \theta$, donde θ es el ángulo que la normal unitaria \mathbf{n} forma con \mathbf{k} .



que está por encima de la superficie es $\Delta S = \Delta A / \cos \theta$ (Figura 7.5.2). Este enfoque intuitivo nos puede ayudar a recordar la fórmula (5) y a aplicarla a problemas.

Ejemplo 4

Calcular $\iint_S x \, dS$, donde S es el triángulo con vértices en $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ (véase la Figura 7.5.3).

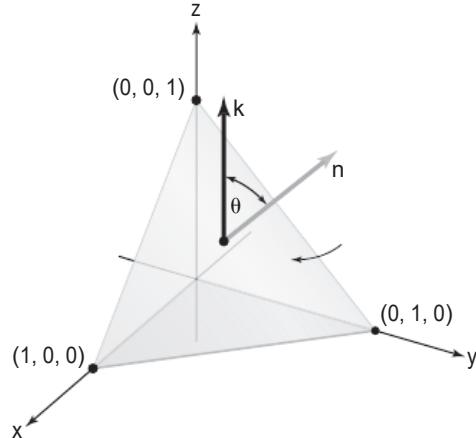


Figura 7.5.3 Al calcular una integral de superficie específica, determinamos una fórmula para la normal unitaria n y calculamos el ángulo θ como parte de la preparación de la fórmula (5).

Solución

Esta superficie es el plano descrito por la ecuación $x + y + z = 1$. Puesto que la superficie es un plano, el ángulo θ es constante y un vector unitario normal es $\mathbf{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Por tanto, $\cos \theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 1/\sqrt{3}$, y por la Ecuación (5),

$$\iint_S x \, dS = \sqrt{3} \iint_D x \, dx \, dy,$$

donde D es el dominio en el plano xy . Pero

$$\sqrt{3} \iint_D x \, dx \, dy = \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} x \, dy \, dx = \sqrt{3} \int_0^1 x(1-x) \, dx = \frac{\sqrt{3}}{6}. \quad \blacktriangle$$

Las integrales de funciones sobre superficies resultan útiles para calcular la masa de una superficie cuando la función de densidad de masa m es conocida. La masa total de una superficie con densidad de masa (por unidad de área) m está dada por

$$M(S) = \iint_S m(x, y, z) \, dS. \quad (7)$$

Ejemplo 5

Sea $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización del helicoide $S = \Phi(D)$ del Ejemplo 2 de la Sección 7.4. Recuérdese que $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$, donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq 1$. Supongamos que S tiene una densidad de masa en $(x, y, z) \in S$ igual a dos veces la distancia de (x, y, z) al eje central (véase la Figura 7.4.2), es decir, $m(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$, en el sistema de coordenadas cilíndricas. Hallar la masa total de la superficie.

Solución

Aplicando la fórmula (7),

$$M(S) = \iint_S 2\sqrt{x^2 + y^2} dS = \iint_D 2r dS = \iint_D 2r \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| dr d\theta.$$

A partir del Ejemplo 2 de la Sección 7.4, vemos que $\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| = \sqrt{1 + r^2}$. Luego,

$$\begin{aligned} M(S) &= \iint_D 2r \sqrt{1 + r^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r \sqrt{1 + r^2} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3}(1 + r^2)^{3/2} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} (2^{3/2} - 1) d\theta = \frac{4\pi}{3} (2^{3/2} - 1). \end{aligned}$$



Ejercicios

- 1.** Calcular la integral de la función $f(x, y, z) = x + y$ sobre la superficie S dada por:

$$\Phi(u, v) = (2u \cos v, 2u \sin v, u), \quad u \in [0, 4], v \in [0, \pi]$$

- 2.** Calcular la integral de la función $f(x, y, z) = z + 6$ sobre la superficie S dada por:

$$\Phi(u, v) = (u, \frac{v}{3}, v), \quad u \in [0, 2], v \in [0, 3].$$

- 3.** Calcular la integral

$$\iint_S (3x - 2y + z) dS,$$

donde S es la porción del plano $2x + 3y + z = 6$ que está en el primer octante.

- 4.** Calcular la integral

$$\iint_S (x + z) dS,$$

donde S es la parte del cilindro $y^2 + z^2 = 4$ con $x \in [0, 5]$.

- 5.** Sea S la superficie definida por

$$\Phi(u, v) = (u + v, u - v, uv).$$

- (a) Demostrar que la imagen de S se encuentra en la gráfica de la superficie $4z = x^2 - y^2$.

- (b) Calcular $\iint_S x dS$ para todos los puntos de la gráfica S en $x^2 + y^2 \leq 1$.

- 6.** Calcular la integral

$$\iint_S (x^2 z + y^2 z) dS,$$

donde S es la parte del plano $z = 4 + x + y$ que se encuentra en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

- 7.** Calcular $\iint_S xy dS$, donde S es la superficie del tetraedro de caras $z = 0, y = 0, x + z = 1$ y $x = y$.

- 8.** Calcular $\iint_S xyz dS$, donde S es el triángulo de vértices en $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 1, 1)$.

- 9.** Calcular $\iint_S z dS$, donde S es la semiesfera superior de radio a , es decir, el conjunto de los (x, y, z) con $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

- 10.** Calcular $\iint_S (x + y + z) dS$, donde S es la frontera de la bola unidad B ; es decir, S es el conjunto de los (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (SUGERENCIA: utilizar la simetría del problema).

- 11.** (a) Calcular el área de la porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ con $z \geq 0$ que está en el interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, donde R es una constante positiva.

- (b) ¿Cuál es el área de la porción de esfera que está en el interior del cono?

- 12.** Verificar que en coordenadas esféricas sobre una esfera de radio R ,

$$\|\mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_\theta\| d\phi d\theta = R^2 \sin \phi d\phi d\theta.$$

13. Calcular

$$\iint_S z \, dS$$

donde S es la superficie $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

14. Calcular la integral de superficie $\iint_S z^2 \, dS$, donde S es la frontera del cubo $C = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. (SUGERENCIA: hacer cada cara por separado y sumar los resultados).

15. Hallar la masa de una superficie esférica S de radio R tal que en cada punto $(x, y, z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia de (x, y, z) a algún punto fijo $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

16. Una superficie metálica S tiene la forma de una semiesfera $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, donde (x, y) satisface $0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$. La densidad de masa en $(x, y, z) \in S$ esta dada por $m(x, y, z) = x^2 + y^2$. Hallar la masa total de S .

17. Sea S la esfera de radio R .

- (a) Razonar por simetría que

$$\iint_S x^2 \, dS = \iint_S y^2 \, dS = \iint_S z^2 \, dS.$$

- (b) Utilizar este hecho y algún razonamiento inteligente para calcular, realizando muy pocos cálculos, la integral

$$\iint_S x^2 \, dS.$$

- (c) ¿Resulta esto de ayuda en el Ejercicio 16?

18. (a) Utilizar las sumas de Riemann para justificar la fórmula

$$\frac{1}{A(S)} \iint_S f(x, y, z) \, dS$$

para el *valor medio* de f sobre la superficie S .

- (b) En el Ejemplo 3 de esta sección, demostrar que el promedio de $f(x, y, z) = z^2$ sobre la esfera es $1/3$.
- (c) Definimos el **centro de gravedad** $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de una superficie S tal que \bar{x}, \bar{y} y \bar{z} sean los valores promedios de las coordenadas x, y y z sobre S . Demostrar que el centro de gravedad del triángulo del Ejemplo 4 de esta sección es $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

19. Hallar el valor medio de $f(x, y, z) = x + z^2$ sobre el cono truncado $z^2 = x^2 + y^2$, con $1 \leq z \leq 4$.

20. Calcular la integral

$$\iint_S (1 - z) \, dS,$$

donde S es la gráfica de $z = 1 - x^2 - y^2$, con $x^2 + y^2 \leq 1$.

21. Hallar las coordenadas x, y y z del centro de gravedad del octante de la esfera sólida de radio R y con centro en el origen determinada por $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. (SUGERENCIA: expresar este octante como una superficie parametrizada—véase el Ejemplo 3 de esta sección y el Ejercicio 18).

22. Hallar la coordenada z del centro de gravedad (el promedio de la coordenada z) de la superficie de una semiesfera ($z \leq 0$) con radio r (véase el Ejercicio 18). Razonar por simetría que los promedios de las coordenadas x e y son ambos cero.

23. Sea $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie S definida por

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

- (a) Sean

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad y$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

es decir, $\partial \Phi / \partial u = \mathbf{T}_u$ y $\partial \Phi / \partial v = \mathbf{T}_v$, y sean

$$E = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\|^2, \quad F = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \quad G = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|^2.$$

Demostrar que

$$\sqrt{EG - F^2} = \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|,$$

y que el área de la superficie de S es

$$A(S) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

Con esta notación, ¿cómo podemos expresar $\iint_S f \, dS$ para una función f general?

- (b) ¿En qué se convierte la fórmula para $A(S)$ si los vectores $\partial\Phi/\partial u$ y $\partial\Phi/\partial v$ son ortogonales?
- (c) Utilizar los apartados (a) y (b) para calcular el área de la superficie de una esfera de radio a .
- 24.** El *funcional de Dirichlet* para una superficie parametrizada $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ se define por¹¹
- $$J(\Phi) = \frac{1}{2} \iint_D \left(\left\| \frac{\partial\Phi}{\partial u} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right\|^2 \right) du dv.$$
- Utilícese el Ejercicio 23 para razonar que el área $A(\Phi) \leq J(\Phi)$ y que la igualdad se satisface si
- (a) $\left\| \frac{\partial\Phi}{\partial u} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right\|^2$ y (b) $\frac{\partial\Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0$.
- Comparar estas ecuaciones con el Ejercicio 23 y las observaciones hechas al final de la Sección 7.4. Una parametrización Φ que satisface las condiciones (a) y (b) se dice que es *conforme*.
- 25.** Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función suave $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ que satisface las condiciones (a) y (b) del Ejercicio 24 y supongamos que

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} > 0.$$

Demostrar que x e y satisfacen las *ecuacio-*

nes de Cauchy-Riemann $\partial x/\partial u = \partial y/\partial v$, $\partial x/\partial v = -\partial y/\partial u$. Concluir que $\nabla^2\Phi = 0$ (es decir, cada componente de Φ es armónica).

- 26.** Sea S una esfera de radio r y sea \mathbf{p} un punto interior o exterior de la esfera (pero no sobre ella). Demostrar que

$$\iint_S \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} dS = \begin{cases} 4\pi r & \text{si } \mathbf{p} \text{ está dentro de } S \\ 4\pi r^2/d & \text{si } \mathbf{p} \text{ está fuera de } S, \end{cases}$$

donde d es la distancia desde \mathbf{p} hasta el centro de la esfera y la integración es sobre la esfera. [SUGERENCIA: suponer que \mathbf{p} está sobre el eje z . Luego hacer un cambio de variables y realizar los cálculos. ¿Por qué está justificada esta hipótesis acerca de \mathbf{p} ?].

- 27.** Hallar el área de la superficie de aquella parte del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$ y también en el octante positivo ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$). Suponer que $a > 0$.
- 28.** Sea una superficie S definida implícitamente por $F(x, y, z) = 0$ para (x, y) en un dominio D de \mathbb{R}^2 . Demostrar que

$$\begin{aligned} & \iint_S \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right| dS \\ &= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2} dx dy. \end{aligned}$$

Comparar con el Ejercicio 22 de la Sección 7.4.

7.6 Integrales de campos vectoriales sobre superficies

El objetivo de esta sección es desarrollar el concepto de integral de un campo vectorial sobre una superficie. Recordemos que la definición de integral de línea estaba motivada por el concepto físico fundamental de *trabajo*. De forma similar, existe un concepto físico básico de *flujo* que motiva la definición de integral de un campo vectorial sobre una superficie.

¹¹El funcional de Dirichlet desempeñó un importante papel en las matemáticas del siglo diecinueve. El matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) lo utilizó para desarrollar su teoría de funciones complejas y para proporcionar una demostración del famoso teorema de la aplicación de Riemann. Actualmente sigue empleándose ampliamente como herramienta en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales.

Por ejemplo, si el campo vectorial es el campo de velocidades de un fluido (quizá el campo de velocidades de un río) y colocamos una superficie matemática imaginaria en el fluido, podemos plantearnos esta pregunta: “¿Cuál es la tasa con la que el fluido atraviesa la superficie dada (medida, por ejemplo, en metros cúbicos por segundo)?”. La respuesta viene dada por la integral de superficie del campo vectorial de velocidades del fluido sobre la superficie.

Volveremos sobre la interpretación física enseñada y la explicaremos en función de la definición formal que proporcionamos en primer lugar.

Definición de integral de superficie

Definimos ahora la integral de un campo vectorial, denotado por \mathbf{F} , sobre una superficie S . En primer lugar, proporcionaremos la definición y después su interpretación física. Podemos usar esta como una *motivación* para la definición si así lo deseamos. Comenzaremos con una superficie parametrizada Φ y más tarde estudiaremos la independencia de la parametrización.

Definición Integral de superficie de un campo vectorial Sea \mathbf{F} un campo vectorial definido sobre S , la imagen de una superficie parametrizada Φ . La *integral de superficie* de \mathbf{F} sobre Φ , denotada por

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

se define mediante (véase la Figura 7.6.1)

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) du dv.$$

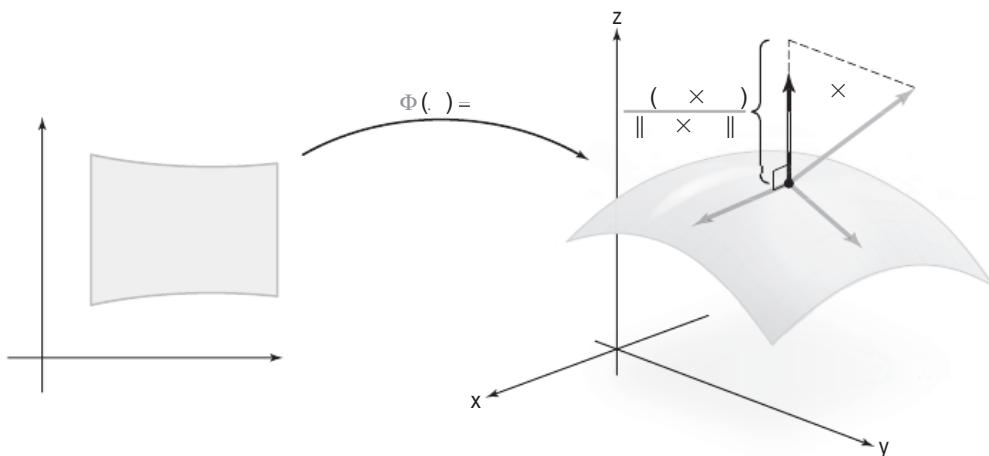


Figura 7.6.1 Significado geométrico de $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)$.

Ejemplo 1

Sea D el rectángulo en el plano $\theta\phi$ definido por

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi,$$

y sea S la superficie definida por la parametrización $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = \cos \theta \sin \phi, \quad y = \sin \theta \sin \phi, \quad z = \cos \phi.$$

(θ y ϕ son los ángulos de las coordenadas esféricas y S es la esfera unidad parametrizada por Φ .) Sea \mathbf{r} el vector posición $\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular $\iint_{\Phi} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$.

Solución

En primer lugar calculamos

$$\mathbf{T}_\theta = (-\sin \phi \sin \theta)\mathbf{i} + (\sin \phi \cos \theta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{T}_\phi = (\cos \theta \cos \phi)\mathbf{i} + (\sin \theta \cos \phi)\mathbf{j} - (\sin \phi)\mathbf{k},$$

y por tanto

$$\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi = (-\sin^2 \phi \cos \theta)\mathbf{i} - (\sin^2 \phi \sin \theta)\mathbf{j} - (\sin \phi \cos \phi)\mathbf{k}.$$

A continuación evaluamos

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi) &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi) \\ &= [(\cos \theta \sin \phi)\mathbf{i} + (\sin \theta \sin \phi)\mathbf{j} + (\cos \phi)\mathbf{k}] \\ &\quad \cdot (-\sin \phi)[(\sin \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \phi \sin \theta)\mathbf{j} + (\cos \phi)\mathbf{k}] \\ &= (-\sin \phi)(\sin^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \cos^2 \phi) = -\sin \phi. \end{aligned}$$

Luego,

$$\iint_{\Phi} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D -\sin \phi \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} (-2) \, d\theta = -4\pi.$$

**Orientación**

Podemos establecer una analogía entre la integral de superficie $\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ y la integral de línea $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. Recordemos que la integral de línea es una integral orientada. La noción de orientación de una curva era necesaria para ampliar la definición de $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ a integrales de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ sobre curvas orientadas. Ampliamos la definición de $\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ a *superficies orientadas* de forma similar; es decir, dada una superficie S parametrizada por una aplicación Φ , queremos definir $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ y demostrar que es independiente de la parametrización, excepto posiblemente por el signo. Para conseguir esto, necesitamos la noción de orientación de una superficie.

Definición Superficies orientadas Una *superficie orientada* es una superficie con dos caras en la que se especifica una de ellas como la *cara exterior* o *positiva* y la otra como *cara interior*

Continúa

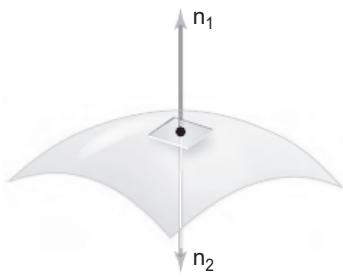


Figura 7.6.2 Las dos normales unitarias posibles a una superficie en un punto.

Definición Superficies orientadas Cont. o *negativa*.¹² En cada punto $(x, y, z) \in S$ existen dos vectores unitarios normales, \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 , donde $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ (véase la Figura 7.6.2). Cada uno de ellos se puede asociar con una de las caras de la superficie. Por tanto, para especificar una cara de una superficie S , en cada punto elegimos un vector unitario normal \mathbf{n} que apunta hacia fuera desde la cara positiva de S en dicho punto.

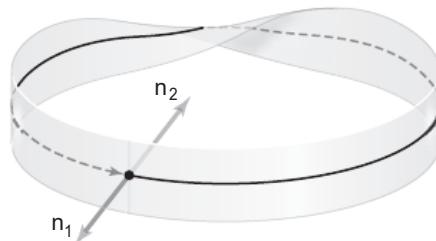
Esta definición asume que nuestra superficie tiene dos caras. De hecho, esto es necesario, porque ¡hay ejemplos de superficies con una sola cara! El primer ejemplo conocido de una superficie así fue la banda de Möbius (llamada así por el matemático y astrónomo alemán A. F. Möbius, quien, junto con el matemático J. B. Listing, la descubrió en 1858). En las Figuras 7.6.3 y 7.6.4 se proporcionan imágenes de dicha superficie. En cada punto de M , hay dos normales unitarias, \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 . Sin embargo, \mathbf{n}_1 no determina una única cara de M y \mathbf{n}_2 tampoco. Para ver esto de forma intuitiva, podemos deslizar \mathbf{n}_2 alrededor de la curva cerrada C (Figura 7.6.3). Cuando \mathbf{n}_2 vuelve a un punto fijo p de C coincidirá con \mathbf{n}_1 , lo que demuestra que tanto \mathbf{n}_1 como \mathbf{n}_2 apuntan hacia fuera de la misma cara de M y, en consecuencia, M solo tiene una cara.

La Figura 7.6.4 es una banda de Möbius tal y como fue dibujada por el conocido matemático y artista del siglo XX M. C. Escher. Ilustra unas hormigas arrastrándose a lo largo de una banda de Möbius. Después de una vuelta alrededor de la banda (sin cruzar el borde) terminan en la “cara opuesta” de la superficie.

Sea $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie orientada S y supongamos que S es regular en $\Phi(u_0, v_0), (u_0, v_0) \in D$; definimos entonces el vector $(\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0})/\|\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}\|$. Si $\mathbf{n}(\Phi(u_0, v_0))$ denota la normal unitaria a S en $\Phi(u_0, v_0)$, se sigue que

$$(\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0})/\|\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}\| = \pm \mathbf{n}(\Phi(u_0, v_0)).$$

Figura 7.6.3 La banda de Möbius: deslizamos \mathbf{n}_2 alrededor de C una vez; cuando \mathbf{n}_2 vuelva a su punto inicial, coincidirá con $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$.



¹²Utilizamos el término “cara” en un sentido intuitivo. Este concepto puede desarrollarse de forma rigurosa, aunque no lo vamos a hacer aquí. También, la elección de la cara que se va a denominar “exterior” suele venir dictada por la propia superficie, como, por ejemplo, en el caso de la esfera. En otros casos, la denominación es algo arbitraria (por ejemplo, véase la superficie mostrada en la Figura 7.6.2).

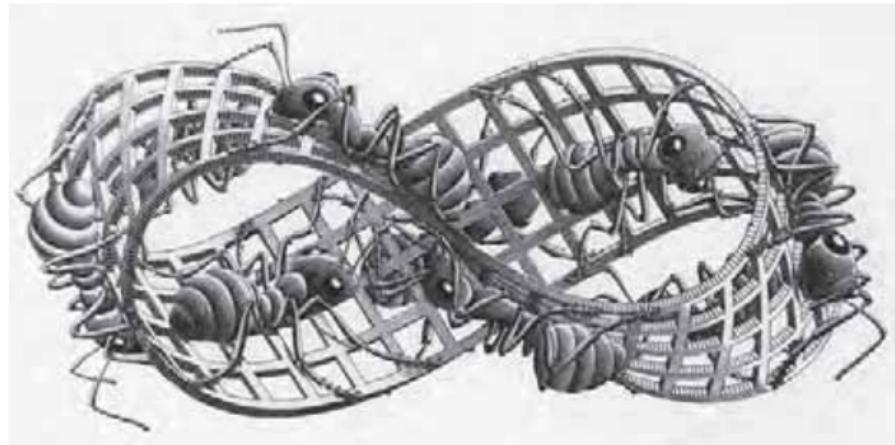


Figura 7.6.4 Hormigas caminando por una banda de M öbius.

Se dice que la parametrización Φ *conserva la orientación* si tenemos el signo +; es decir, si $(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)/\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \mathbf{n}(\Phi(u, v))$ en todo $(u, v) \in D$ para el que S es suave en $\Phi(u, v)$. En otras palabras, Φ conserva la orientación si el vector $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ apunta hacia fuera de la superficie. Si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ apunta hacia el interior de la superficie en todos los puntos $(u, v) \in D$ para los que S es regular en $\Phi(u, v)$, entonces se dice que Φ *invierte la orientación*. Utilizando la notación anterior, esta condición corresponde a la elección $(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)/\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = -\mathbf{n}(\Phi(u, v))$.

De esta exposición se sigue que la banda de Möbius M no se puede parametrizar mediante una única parametrización para la que $\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ y \mathbf{n} es continua sobre toda la superficie¹³ (si existiera tal parametrización, entonces M tendría dos caras, una determinada por \mathbf{n} y otra determinada por $-\mathbf{n}$). La esfera del Ejemplo 1 se puede parametrizar mediante una única parametrización, pero no mediante una que sea inyectiva en todas partes—véase la explicación al principio de la Sección 7.4.

Por tanto, cualquier superficie parametrizada de forma inyectiva para la que $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ nunca se anule se puede considerar una superficie orientada con una cara positiva determinada por la dirección de $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$.

Ejemplo 2

Podemos proporcionar una orientación a la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en \mathbb{R}^3 (Figura 7.6.5) seleccionando un vector unitario $\mathbf{n}(x, y, z) = \mathbf{r}$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, que apunta hacia el exterior de la superficie. Esta elección corresponde a nuestra idea intuitiva del exterior de la esfera.

Ahora que la esfera S es una superficie orientada, consideremos la parametrización Φ de S dada en el Ejemplo 1. El producto vectorial de los vectores tangente \mathbf{T}_θ y \mathbf{T}_ϕ —es decir, una normal a S —está dado por

$$(-\sin \phi)[(\cos \theta \sin \phi)\mathbf{i} + (\sin \theta \sin \phi)\mathbf{j} + (\cos \phi)\mathbf{k}] = -\mathbf{r} \sin \phi.$$

¹³Existe una parametrización única que se obtiene cortando una tira de papel, retorciéndola y pegando los extremos, pero da lugar a una \mathbf{n} discontinua sobre la superficie.

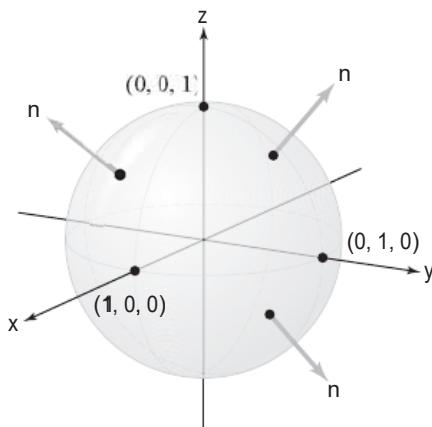


Figura 7.6.5 La esfera unidad orientada por su normal exterior \mathbf{n} .

Puesto que $-\sin \phi \leq 0$ para $0 \leq \phi \leq \pi$, este vector normal apunta hacia el interior de la esfera. Por tanto, la parametrización dada **Φ invierte la orientación**. Intercambiando el orden de θ y ϕ , obtendríamos una parametrización que conserva la orientación. ▲

Orientación y elemento vectorial de superficie de una esfera

Consideramos la esfera de radio R , concretamente, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Es habitual orientar la esfera con la *normal unitaria exterior*. En términos del vector de posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, la normal unitaria exterior está dada por

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R}.$$

El orden de las coordenadas esféricas que concuerda con esta orientación, como es evidente por el Ejemplo 2, está dado por el orden (ϕ, θ) . El cálculo del Ejemplo 2 muestra que el elemento de superficie está dado entonces por

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_\theta) d\phi d\theta = \mathbf{r} R \sin \phi d\phi d\theta = \mathbf{n} R^2 \sin \phi d\phi d\theta.$$

Orientación de gráficas

En el siguiente ejemplo se exponen los convenios de orientación para las gráficas. Más adelante en esta sección calcularemos el elemento de área para gráficas.

Ejemplo 3

Sea S una superficie descrita por $z = g(x, y)$. Como en la Ecuación (6) de la Sección 7.5, existen dos vectores unitarios normales a S en $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$, concretamente, $\pm \mathbf{n}$, donde

$$\mathbf{n} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left[\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\right]^2 + \left[\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\right]^2 + 1}}.$$

Podemos orientar todas las superficies de este tipo tomando como cara positiva de S la cara de la que se aleja \mathbf{n} (Figura 7.6.6). De este modo, la cara positiva de una superficie así queda determinada por la normal unitaria \mathbf{n} con componente k positiva—es decir, *apuntando hacia arriba*. Si parametrizamos esta superficie mediante $\Phi(u, v) = (u, v, g(u, v))$, entonces Φ conservará la orientación.

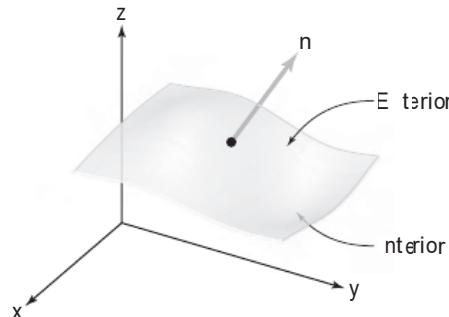


Figura 7.6.6 \mathbf{n} se aleja de la cara exterior de la superficie.

Independencia de la parametrización

Ahora vamos a enunciar sin demostrar un teorema que establece que la integral sobre una superficie orientada es independiente de la parametrización. La demostración de este teorema es análoga a la del Teorema 1 (Sección 7.2); de nuevo, el núcleo de esta demostración es la fórmula del cambio de variables—esta vez aplicada a las integrales dobles.

Teorema 4 Independencia de la parametrización de las integrales de superficie Sea S una superficie orientada y sean Φ_1 y Φ_2 dos parametrizaciones regulares que conservan la orientación, y sea \mathbf{F} un campo vectorial continuo definido en S . Entonces

$$\iint_{\Phi_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Phi_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Si Φ_1 conserva la orientación y Φ_2 invierte la orientación, entonces

$$\iint_{\Phi_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{\Phi_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Si f es una función continua con valores reales definida en S , y si Φ_1 y Φ_2 son parametrizaciones de S , entonces

$$\iint_{\Phi_1} f dS = \iint_{\Phi_2} f dS.$$

Obsérvese que si $f = 1$, obtenemos

$$A(S) = \iint_{\Phi_1} dS = \iint_{\Phi_2} dS,$$

lo que demuestra que el área es independiente de la parametrización.

Por tanto, podemos utilizar sin ninguna ambigüedad la siguiente notación

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

(o una suma de tales integrales, si S es una unión de superficies parametrizadas que solo se intersecan a lo largo de sus curvas de frontera), donde Φ es una parametrización que conserva la orientación. El Teorema 4 garantiza que el valor de la integral no depende de la elección de Φ .

Relación con las integrales escalares

Recordemos de la fórmula (1) de la Sección 7.2 que una integral de línea $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ se puede interpretar como la integral a lo largo de una trayectoria de la componente tangencial de \mathbf{F} a lo largo de c (aunque para el caso en que c se corta a sí misma, la integral obtenida no es técnicamente una integral a lo largo de una trayectoria). Una situación similar se da para las integrales de superficie, puesto que estamos suponiendo que las aplicaciones Φ que definen la superficie S son inyectivas, excepto quizás sobre la frontera de D , lo que se puede ignorar para los propósitos de integración. Luego, al definir integrales sobre superficies, suponemos en este texto que las superficies no se cortan a sí mismas.

Para una superficie orientada suave S y una parametrización que conserva la orientación Φ de S , podemos expresar $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ como una integral de una función con valores reales f sobre la superficie. Sea $\mathbf{n} = (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) / \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|$ la normal unitaria que apunta hacia el exterior de S . Entonces

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) du dv \\ &= \iint_D \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} \right) \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| du dv \\ &= \iint_D (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| du dv = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = \iint_S f dS, \end{aligned}$$

donde $f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. Por tanto, hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 5 $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, la integral de superficie de \mathbf{F} sobre S , es igual a la integral de la componente normal de \mathbf{F} sobre la superficie. En resumen,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

La observación del Teorema 5 suele ahorrar esfuerzos de cálculo, como así se demuestra en el Ejemplo 4.

Interpretación física de las integrales de superficie

El significado geométrico y físico de la integral de superficie se puede comprender expresándola como un límite de sumas de Riemann. Con el fin de simplificar, suponemos que D es un rectángulo. Fijamos una parametrización Φ de S que conserva la orientación y dividimos la región D en n^2 trozos D_{ij} , $0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq n-1$. Denotamos por Δu a la longitud del lado horizontal de D_{ij} y por Δv a la longitud del lado vertical de D_{ij} . Sea (u, v) un punto de D_{ij} y sea $(x, y, z) = \Phi(u, v)$ el punto correspondiente sobre la superficie. Consideramos el paralelogramo de lados $\Delta u \mathbf{T}_u$ y $\Delta v \mathbf{T}_v$ que se encuentra en el plano tangente a S en (x, y, z) y el paralelepípedo formado por \mathbf{F} , $\Delta u \mathbf{T}_u$ y $\Delta v \mathbf{T}_v$. El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto

$$\mathbf{F} \cdot (\Delta u \mathbf{T}_u \times \Delta v \mathbf{T}_v) = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) \Delta u \Delta v.$$

El vector $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es normal a la superficie en (x, y, z) y apunta hacia fuera desde el exterior de la superficie. Por tanto, el número $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)$ es positivo cuando el paralelepípedo está en el exterior de la superficie (Figura 7.6.7).

En general, el paralelepípedo está en la cara de la superficie de la que se aleja \mathbf{F} . Si pensamos en \mathbf{F} como en el campo de velocidades de un fluido, $\mathbf{F}(x, y, z)$ apunta en la dirección en la que el fluido se mueve a través de la superficie cerca de (x, y, z) . Además, el número

$$|\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \Delta u \times \mathbf{T}_v \Delta v)|$$

mide la cantidad de fluido que atraviesa el paralelogramo tangente por unidad de tiempo. Puesto que el signo de $\mathbf{F} \cdot (\Delta u \mathbf{T}_u \times \Delta v \mathbf{T}_v)$ es positivo si el vector \mathbf{F} apunta hacia fuera en (x, y, z) y negativo si \mathbf{F} apunta hacia dentro, $\sum_{i,j} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) \Delta u \Delta v$ es una medida aproximada de la cantidad neta de fluido que fluye a través de la superficie por unidad de tiempo. (Recordemos que hacia “fuera” o “dentro” depende de nuestra elección de la parametrización. La Figura 7.6.8 ilustra a \mathbf{F} dirigido hacia fuera o hacia dentro, dados \mathbf{T}_u y \mathbf{T}_v). Por tanto, la integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ es la cantidad neta de fluido que fluye a través de la superficie por unidad

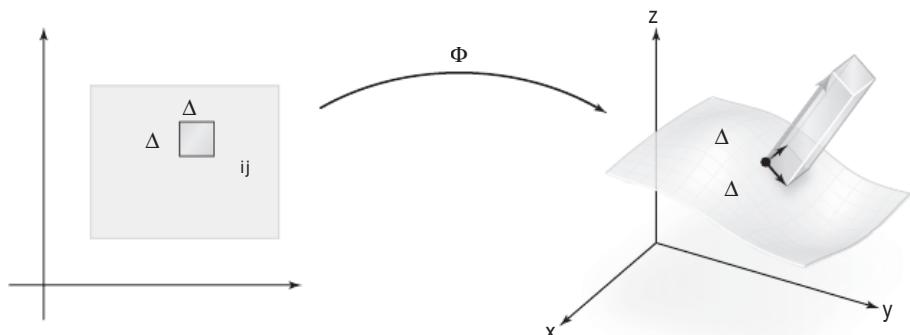


Figura 7.6.7 $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) > 0$ cuando el paralelepípedo formado por $\Delta v \mathbf{T}_v$, $\Delta u \mathbf{T}_u$ y \mathbf{F} está en la parte “exterior” de la superficie S .

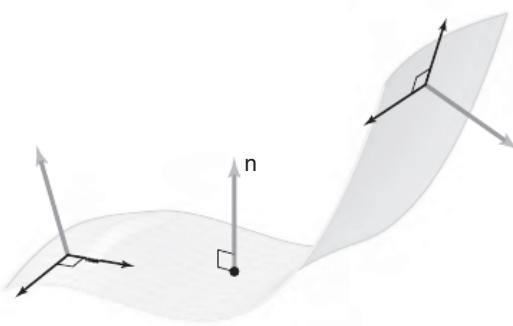


Figura 7.6.8 Cuando $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) > 0$ (izquierda), \mathbf{F} apunta hacia el exterior; cuando $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) < 0$ (derecha), \mathbf{F} apunta hacia el interior.

de tiempo; es decir, la tasa del flujo. Esta integral también se denomina **flujo** de \mathbf{F} a través de la superficie.

En el caso en que \mathbf{F} representa un campo eléctrico o magnético, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ también se denomina comúnmente flujo. Es posible que el lector esté familiarizado con las leyes de la física (como la *ley de Faraday*) que relaciona el flujo de un campo vectorial con la circulación (o corriente) a lo largo de la curva que la limita. Esta es la base histórica y física del teorema de Stokes, que veremos en la Sección 8.2. El principio correspondiente en mecánica de fluidos se conoce como *teorema de la circulación de Kelvin*.

Las integrales de superficie también se aplican al estudio del flujo de calor. Sea $T(x, y, z)$ la temperatura en un punto $(x, y, z) \in W \subset \mathbb{R}^3$, donde W es alguna región y T es una función C^1 . Luego

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k}$$

representa el gradiente de temperatura y el calor “fluye” con el campo vectorial $-k \nabla T = \mathbf{F}$, donde k es una constante positiva. Por tanto, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ es la tasa total de flujo de calor a través de la superficie S .

Ejemplo 4

Supongamos que una función de temperatura en \mathbb{R}^3 está dada por la fórmula $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, y sea S la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada según la normal exterior (véase el Ejemplo 2). Hallar el flujo de calor a través de la superficie S si $k = 1$.

Solución

Tenemos que

$$\mathbf{F} = -\nabla T(x, y, z) = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}.$$

En S , el vector $\mathbf{n}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es la normal unitaria “exterior” a S en (x, y, z) , y $f(x, y, z) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2x^2 - 2y^2 - 2z^2 = -2$ es la componente normal de \mathbf{F} . A partir del Teorema 5 podemos ver que la integral de superficie de \mathbf{F} es igual a la integral de su componente normal $f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ sobre S . Luego,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S f dS = -2 \iint_S dS = -2A(S) = -2(4\pi) = -8\pi.$$

El flujo de calor está dirigido hacia el centro de la esfera (¿por qué hacia dentro?). Claramente, nuestra observación de que $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S f dS$ nos ha ahorrado un considerable tiempo de cálculo.

En este ejemplo, $\mathbf{F}(x, y, z) = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ también podría representar un campo eléctrico, en el que $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -8\pi$ sería el flujo eléctrico a través de S . ▲

Ejemplo 5

Ley de Gauss Existe una ley física importante, que se debe a la gran matemático y físico K. F. Gauss, que relaciona el flujo de un campo eléctrico \mathbf{E} sobre una superficie “cerrada” S (como por ejemplo, una esfera o un elipsoide) con la carga neta Q encerrada por la superficie, concretamente (en las unidades adecuadas),

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (1)$$

(véase la Figura 7.6.9). La ley de Gauss se verá en detalle en el Capítulo 8. Esta ley es análoga a la ley de Ampère (véase el Ejemplo 12 de la Sección 7.2).

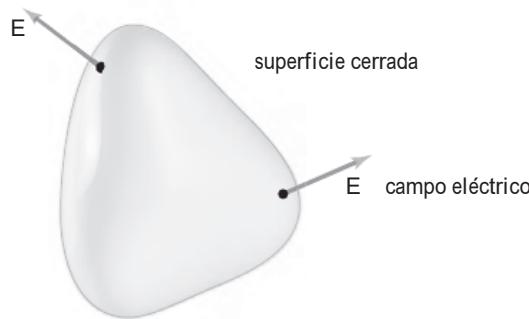


Figura 7.6.9 Ley de Gauss: $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q$, donde Q es la carga neta en el interior de S .

Supongamos que $\mathbf{E} = E\mathbf{n}$; es decir, \mathbf{E} es un múltiplo escalar constante de la normal unitaria a S . Entonces la ley de Gauss, Ecuación 1 del Ejemplo 5, se puede expresar como

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S E dS = E \iint_S dS = Q$$

ya que $E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$. Por tanto,

$$E = \frac{Q}{A(S)}. \quad (2)$$

En el caso en el que S es la esfera de radio R , la Ecuación (2) se convierte en (véase la Figura 7.6.10).

$$E = \frac{Q}{4\pi R^2} \quad (3)$$

Supongamos ahora que \mathbf{E} se genera a partir de una carga puntual aislada, Q . Por simetría, es razonable que $\mathbf{E} = E\mathbf{n}$, donde \mathbf{n} es la normal unitaria a cualquier esfera centrada en Q . Por tanto, se satisface la Ecuación (3). Consideremos una segunda carga puntual, Q_0 , localizada

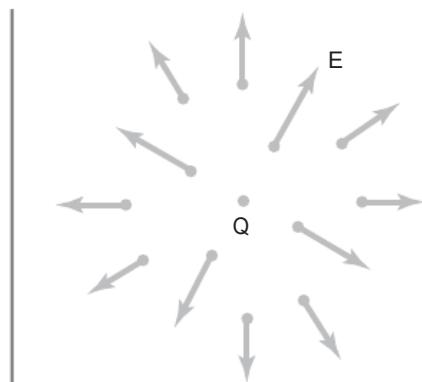


Figura 7.6.10 El campo \mathbf{E} debido a una carga puntual Q es $\mathbf{E} = Q \mathbf{n}/4\pi R^2$.

a una distancia R de Q . La fuerza \mathbf{F} que actúa sobre esta segunda carga, Q_0 , está dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}Q_0 = EQ_0\mathbf{n} = \frac{QQ_0}{4\pi R^2}\mathbf{n}.$$

Si F es la magnitud de \mathbf{F} , tenemos

$$F = \frac{QQ_0}{4\pi R^2},$$

que es la **ley de Coulomb** para la fuerza entre dos cargas puntuales.¹⁴



Integrales de superficie sobre gráficas

Por último, vamos a deducir las fórmulas de las integrales de superficie para campos vectoriales \mathbf{F} sobre superficies S que son gráficas de funciones. Consideremos la superficie S descrita por $z = g(x, y)$, donde $(x, y) \in D$, y S está orientada con la normal unitaria que apunta hacia arriba:

$$\mathbf{n} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Hemos visto que podemos parametrizar S por $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $\Phi(x, y) = (x, y, g(x, y))$. En este caso, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ se puede escribir de una forma particularmente simple. Tenemos:

$$\mathbf{T}_x = \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{k}, \quad \mathbf{T}_y = \mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{k}.$$

¹⁴En ocasiones, se usa la fórmula $F = (1/4\pi\varepsilon_0)QQ_0/R^2$. La constante adicional ε_0 aparece cuando se utilizan las unidades MKS para medir la carga. Estamos utilizando unidades CGS o gaussianas.

Luego, $\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = -(\partial g / \partial x)\mathbf{i} - (\partial g / \partial y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Si $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ es un campo vectorial continuo, entonces obtenemos

Integral de superficie de un campo vectorial sobre una gráfica S

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y) dx dy \\ &= \iint_D \left[F_1 \left(-\frac{\partial g}{\partial x} \right) + F_2 \left(-\frac{\partial g}{\partial y} \right) + F_3 \right] dx dy.\end{aligned}\tag{4}$$

Ejemplo 6

Las ecuaciones

$$z = 12, \quad x^2 + y^2 \leq 25$$

describen un disco de radio 5 que está en el plano $z = 12$. Supongamos que \mathbf{r} es el campo vectorial

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Calcular $\iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$.

Solución

Vamos a resolver esto de tres maneras. En primer lugar, tenemos $\partial z / \partial x = \partial z / \partial y = 0$, ya que $z = 12$ es constante en el disco, de modo que

$$\mathbf{r}(x, y, z) \cdot (\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y) = \mathbf{r}(x, y, z) \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{r}(x, y, z) \cdot \mathbf{k} = z.$$

Utilizando la definición original del principio de esta sección, la integral se convierte en

$$\iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D z dx dy = \iint_D 12 dx dy = 12(\text{área de } D) = 300\pi.$$

Veamos una segunda solución. Puesto que el disco es paralelo al plano xy , la normal unitaria exterior es \mathbf{k} . Por tanto, $\mathbf{n}(x, y, z) = \mathbf{k}$ y $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = z$. Sin embargo, $\|\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y\| = \|\mathbf{k}\| = 1$, y por tanto sabemos por la exposición anterior al Teorema 5 que

$$\iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S z dS = \iint_D 12 dx dy = 300\pi.$$

La tercera forma de resolver este problema es usando directamente la Ecuación (4), con $g(x, y) = 12$ y D el disco $x^2 + y^2 \leq 25$:

$$\iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (x \cdot 0 + y \cdot 0 + 12) dx dy = 12(\text{área de } D) = 300\pi.$$

Resumen: fórmulas para integrales de superficie

1. Superficie parametrizada: $\Phi(u, v)$

- a. Integral de una función escalar f :

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\Phi(u, v)) \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| du dv$$

- b. Elemento de superficie escalar:

$$dS = \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| du dv$$

- c. Integral de un campo vectorial \mathbf{F} :

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) du dv$$

- d. Elemento de superficie vectorial:

$$d\mathbf{S} = (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) du dv = \mathbf{n} dS$$

2. Gráfica: $z = g(x, y)$

- a. Integral de una función escalar f :

$$\iint_S f dS = \iint_D \frac{f(x, y, g(x, y))}{\cos \theta} dx dy$$

- b. Elemento de superficie escalar:

$$dS = \frac{dx dy}{\cos \theta} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy,$$

donde $\cos \theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$, y \mathbf{n} es un vector normal unitario a la superficie.

- c. Integral de un campo vectorial \mathbf{F} :

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-F_1 \frac{\partial g}{\partial x} - F_2 \frac{\partial g}{\partial y} + F_3 \right) dx dy$$

- d. Elemento de superficie vectorial:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot dS = \left(-\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dx dy$$

3. Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

- a. Elemento de superficie escalar:

$$dS = R^2 \sin \phi d\phi d\theta$$

- b. Elemento de superficie vectorial:

$$d\mathbf{S} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) R \sin \phi d\phi d\theta = \mathbf{r} R \sin \phi d\phi d\theta = \mathbf{n} R^2 \sin \phi d\phi d\theta$$

Ejercicios

- 1.** Considérese la superficie cerrada S formada por la gráfica $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$ y el disco unidad en el plano xy . Asignar a esta superficie una normal exterior. Calcular:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, 2y, z)$.

- 2.** Calcular la integral de superficie

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ y S es la superficie parametrizada por $\Phi(u, v) = (2 \sin u, 3 \cos u, v)$, con $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 1$.

- 3.** Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

donde S es:

- (a) La semiesfera superior de radio 3 centrada en el origen.
- (b) La esfera completa de radio 3 centrada en el origen.

- 4.** Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. Calcular

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

donde S es el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con $z \in [0, 1]$.

- 5.** La temperatura de un punto en \mathbb{R}^3 está dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. Calcular el flujo de calor a través de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, si $k = 1$.

- 6.** Calcular el flujo de calor a través de la esfera unidad S si $T(x, y, z) = x$. ¿Es posible interpretar la respuesta físicamente?

- 7.** Sea S la superficie cerrada formada por la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ y la base $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$. Sea \mathbf{E} el campo eléctrico definido por $\mathbf{E}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$. Hallar

el flujo eléctrico a través de S . (SUGERENCIA: descomponer S en dos trozos S_1 y S_2 y calcular $\iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ y $\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ por separado).

- 8.** El campo de velocidades de un fluido está descrito por $\mathbf{F} = \sqrt{y}\mathbf{i}$ (medido en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo atraviesan la superficie $x^2 + z^2 = 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$.

- 9.** Calcular $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la superficie $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, $z \leq 0$ y \mathbf{F} es el campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + zx^3y^2\mathbf{k}$. (La normal unitaria \mathbf{n} apunta hacia arriba).

- 10.** Calcular $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$ y S es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$. (La normal unitaria \mathbf{n} apunta hacia arriba).

- 11.** Calcular la integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde S es toda la superficie de la semiesfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$ y $\mathbf{F} = (x + 3y^5)\mathbf{i} + (y + 10xz)\mathbf{j} + (z - xy)\mathbf{k}$. (S está orientada por la normal que apunta hacia el exterior).

- 12.** * Se está construyendo un restaurante en la ladera de una montaña. En la Figura 7.6.11 se muestran los planos del arquitecto.

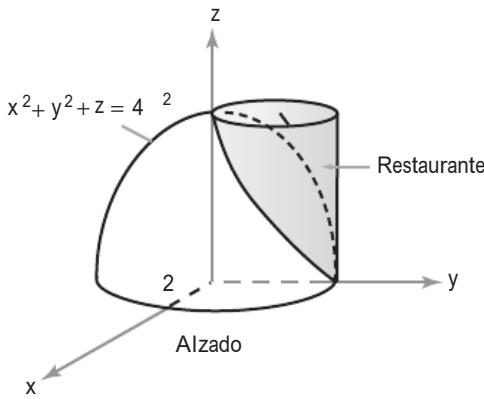
- (a) La pared curvada vertical del restaurante se va a construir de cristal. ¿Cuál es el área de la superficie de esta pared?
- (b) El ingeniero consultor informa al desarrollador que el volumen del interior tiene que exceder $\pi R^4/2$, para que sea rentable. ¿Para qué R satisfará la estructura propuesta este requisito?
- (c) Durante un día típico de verano, los alrededores del restaurante están sometidos a un campo de temperaturas dado por

$$T(x, y, z) = 3x^2 + (y - R)^2 + 16z^2.$$

Una densidad de flujo de calor $\mathbf{V} = -k \nabla T$ (k es una constante que depende del grado de aislamiento que se vaya a utilizar) a través de toda la superficie del restaurante

* La resolución de este problema puede llevar bastante tiempo.

(incluyendo el techo y la zona que está en contacto con la colina) produce un flujo de



calor. ¿Cuál es el flujo de calor total? (La respuesta dependerá de R y k .)

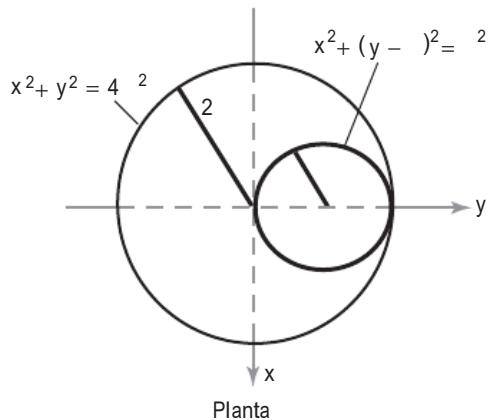


Figura 7.6.11 Planos del restaurante.

13. Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{V}(x, y, z) = 3xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ que sale de la esfera unidad.
14. Calcular la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z(x^2 + y^2)^2\mathbf{k}$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.
15. Sea S la superficie de la esfera unidad. Sea \mathbf{F} un campo vectorial y F_r su componente radial. Probar que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} F_r \sin \phi \, d\phi \, d\theta.$$

¿Cuál es la fórmula correspondiente para funciones f con valores reales?

16. Probar el siguiente teorema del valor medio para integrales de superficie: si \mathbf{F} es un campo vectorial continuo, entonces

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = [\mathbf{F}(Q) \cdot \mathbf{n}(Q)] A(S)$$

para algún punto $Q \in S$, donde $A(S)$ es el área de S . [SUGERENCIA: probarlo primero para funciones reales, reduciendo el problema a una integral doble. Demostrar que si $g \geq 0$, entonces

$$\iint_D fg \, dA = f(Q) \iint_D g \, dA$$

para algún $Q \in D$ (hacer esto considerando $(\iint_D fg \, dA)/(\iint_D g \, dA)$ y utilizando el teorema del valor intermedio).]

17. Obtener una fórmula como la del Ejercicio 15 para la integración sobre la superficie de un cilindro.
18. Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 que realmente es un subconjunto D del plano xy . Demostrar que la integral de una función escalar $f(x, y, z)$ sobre S se reduce a la integral doble de $f(x, y, z)$ sobre D . ¿En qué se convierte la integral de superficie de un campo vectorial sobre S ? (La respuesta debe ser compatible con el Ejemplo 6.)
19. El campo de velocidades de un fluido está descrito por $\mathbf{F} = \mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (medido en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo atraviesan la superficie descrita por $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.
20. (a) Un fluido uniforme que fluye verticalmente hacia abajo (lluvia fuerte) se describe mediante el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, -1)$. Hallar el flujo total a través del cono $z = (x^2 + y^2)^{1/2}, x^2 + y^2 \leq 1$.
(b) Un fuerte viento desvía lateralmente la lluvia, de modo que ésta cae formando un ángulo de 45° y queda descrita por $\mathbf{F}(x, y, z) = -(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$. ¿Cuál es ahora el flujo a través del cono?
21. Para $a > 0, b > 0, c > 0$, sea S la mitad superior del elipsoide

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0 \right\},$$

con la orientación determinada por la normal hacia arriba. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, 0, 0)$.

- 22.** Si S es la semiesfera superior $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ orientada según la normal que apunta hacia fuera de la esfera, calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para los apartados (a) y (b).

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

(c) Para cada uno de estos campos vectoriales, calcular $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde C es la circunferencia unidad en el plano xy recorrida en sentido antihorario (vista desde el eje z positivo). (Obsérvese que C es la frontera de S . El fenómeno ilustrado aquí se estudiará más detalladamente en el siguiente capítulo, usando el teorema de Stokes).

7.7 Aplicaciones a la geometría diferencial, la física y las formas de la vida*

En la primera mitad del siglo XIX, el gran matemático alemán Karl Friedrich Gauss desarrolló una teoría de las superficies curvadas en \mathbb{R}^3 . Más de un siglo antes, Isaac Newton había definido una medida de la curvatura de una curva en el espacio y Gauss fue capaz de hallar extensiones a esta idea de curvatura que aplicaría a las superficies. En este proceso, Gauss hizo varios descubrimientos destacables.

Curvatura de superficies

Para trayectorias $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ que tienen rapidez unidad—es decir, $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$ —la curvatura κ de la curva imagen $\kappa(\mathbf{c}(t))$ en el punto $\mathbf{c}(t)$ se define como la longitud del vector aceleración. Es decir, $\|\mathbf{c}''(t)\| = \kappa(\mathbf{c}(t))$. Para trayectorias \mathbf{c} en el espacio, la curvatura es realmente una medida de la curvatura de la curva imagen geométrica C . Como hemos visto al final de la Sección 7.1, la “curvatura total” $\int \kappa ds$ sobre C tiene implicaciones “topológicas”. Lo mismo, e incluso más, se cumple para la definición de Gauss de la curvatura total de una superficie. Comencemos viendo algunas definiciones.

Sea $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie suave parametrizada. Entonces, como ya sabemos,

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

son vectores tangentes a la superficie imagen $S = \Phi(D)$ en el punto $\Phi(u, v)$. También vamos a suponer que existe un vector normal bien definido; es decir, suponemos que la superficie es regular: $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$.

*Esta sección se puede saltar en una primera lectura sin pérdida de continuidad.

Sean

$$E = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\|^2, \quad F = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \quad G = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|^2.$$

En el Ejercicio 23 de la Sección 7.5, vimos que

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|^2 = EG - F^2.$$

Por cuestiones de notación, denominamos W a $EG - F^2$. Además, denotaremos mediante

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} = \frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\sqrt{W}}$$

al vector normal *unitario* a la superficie imagen en $p = \Phi(u, v)$. A continuación vamos a definir dos nuevas medidas de la curvatura de una superficie en p —la “curvatura de Gauss” $K(p)$ y la “curvatura media” $H(p)$. Ambas medidas tienen profundas conexiones con la curvatura de las curvas en el espacio, lo que esclarece el significado de sus definiciones, aunque aquí no vamos a profundizar en ello.

Para definir estas dos curvaturas, en primer lugar definimos tres nuevas funciones ℓ, m, n sobre S como sigue:

$$\begin{aligned} \ell(p) &= \mathbf{N}(u, v) \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} = \mathbf{N}(u, v) \cdot \Phi_{uu} \\ m(p) &= \mathbf{N}(u, v) \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = \mathbf{N}(u, v) \cdot \Phi_{uv} \\ n(p) &= \mathbf{N}(u, v) \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = \mathbf{N}(u, v) \cdot \Phi_{vv}. \end{aligned} \tag{1}$$

La *curvatura de Gauss* $K(p)$ de S en p está dada por

$$K(p) = \frac{\ell n - m^2}{W}, \tag{2}$$

y la *curvatura media* $H(p)$ de S en p se define como¹⁵

$$H(p) = \frac{G\ell + E n - 2Fm}{2W}, \tag{3}$$

donde el lado derecho de ambas expresiones está calculado en el punto $p = \Phi(u, v)$.

¹⁵Técnicamente hablando, $K(p)$ y $H(p)$, en principio, podrían depender de la parametrización Φ de S , pero podemos demostrar que, de hecho, son independientes de Φ .

Ejemplo 1

Los planos tienen curvatura cero Sea $\Phi(u, v) = \alpha u + \beta v + \gamma$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, donde α, β, γ son vectores en \mathbb{R}^3 . Según el Ejemplo 1 de la Sección 7.3, esto determina un plano parametrizado en \mathbb{R}^3 . Demostrar que, en todos los puntos, tanto la curvatura de Gauss como la curvatura media son iguales a cero y que por tanto K y H son idénticamente nulas.

Solución

Puesto que $\Phi_{uu} = \Phi_{uv} = \Phi_{vv} \equiv 0$, las funciones ℓ, m, n se anulan en todos los puntos, por lo que ocurre lo mismo con H y K . Por tanto, un plano tiene curvatura “cero”. Luego, al menos en este ejemplo, deberíamos estar convencidos de que H y K realmente miden lo *llano* que es el plano. Inversamente, podemos demostrar que si H y K son idénticamente nulas, entonces S es parte de un plano (véase el Ejercicio 12). \blacktriangle

Ejemplo 2

Curvatura de una semiesfera Sea $\Phi(u, v) = (u, v, g(u, v))$, donde $g(u, v) = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$ es una parametrización de la “semiesfera superior” de radio R . Demostrar que la curvatura de Gauss en cualquier punto es $1/R^2$ y que la curvatura media es $1/R$.

Solución

En primer lugar, calculamos las siguientes cantidades:

$$\mathbf{T}_u, \mathbf{T}_v, \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v, \Phi_{uu}, \Phi_{vv}, \Phi_{uv}, E, G, F, \ell, m, n.$$

Antes de nada, tenemos

$$\begin{aligned}\Phi_u &= \mathbf{T}_u = \mathbf{i} - \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \mathbf{k} \\ \Phi_v &= \mathbf{T}_v = \mathbf{j} - \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \mathbf{k}.\end{aligned}$$

De la fórmula (2) de la Sección 7.3, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v &= -\frac{\partial g}{\partial u} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial v} \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ &= \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \mathbf{i} + \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \mathbf{j} + \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}E &= \|\Phi_u\|^2 = 1 + \frac{u^2}{R^2 - u^2 - v^2} = \frac{R^2 - v^2}{R^2 - u^2 - v^2} \\ G &= \|\Phi_v\|^2 = \frac{R^2 - u^2}{R^2 - u^2 - v^2} \\ F &= \Phi_u \cdot \Phi_v = \frac{uv}{R^2 - u^2 - v^2}.\end{aligned}$$

Por el Ejercicio 23 de la Sección 7.5, sabemos que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|^2 &= EG - F^2 = \frac{(R^2 - v^2)(R^2 - u^2) - u^2 v^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^2} \\ &= \frac{R^4 - R^2 u^2 - R^2 v^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^2} = \frac{R^2}{(R^2 - u^2 - v^2)} = W.\end{aligned}$$

Ahora un cálculo directo demuestra que

$$\begin{aligned}\Phi_{uu} &= \frac{R^2 - v^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^{3/2}} \mathbf{k} \\ \Phi_{vv} &= \frac{R^2 - u^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^{3/2}} \mathbf{k} \\ \Phi_{uv} &= \frac{uv}{(R^2 - u^2 - v^2)^{3/2}} \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} = \frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\sqrt{W}} \\ &= \frac{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}{R} \cdot \left(\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \mathbf{i} + \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \\ &= \frac{1}{R} (u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \mathbf{k}).\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\ell &= \mathbf{N} \cdot \Phi_{uv} = \frac{1}{R} \left(\frac{R^2 - v^2}{R^2 - u^2 - v^2} \right) \\ n &= \mathbf{N} \cdot \Phi_{vv} = \frac{1}{R} \left(\frac{R^2 - u^2}{R^2 - u^2 - v^2} \right) \\ m &= \mathbf{N} \cdot \Phi_{uv} = \frac{1}{R} \left(\frac{uv}{R^2 - u^2 - v^2} \right).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\ell n - m^2 = \frac{1}{R^2} \left(\frac{(R^2 - v^2)(R^2 - u^2) - u^2 v^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^2} \right) = \frac{1}{R^2 - u^2 - v^2}.$$

Dividiendo esto entre W obtenemos $K = 1/R^2$. Por tanto, la curvatura de Gauss no varía de un punto a otro de la semiesfera; es decir, es constante. Esto confirma nuestra intuición de que la esfera es perfectamente simétrica y que su curvatura es la misma en todos los puntos. Por tanto, la curvatura media también debería ser constante. Esto se comprueba como sigue

$$\begin{aligned}H &= \frac{G\ell + En - 2Fm}{2W} \\ &= \frac{1}{2W} \left\{ \left(\frac{R^2 - u^2}{R^2 - u^2 - v^2} \right) \frac{1}{R} \left(\frac{R^2 - v^2}{R^2 - u^2 - v^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{R^2 - v^2}{R^2 - u^2 - v^2} \right) \frac{1}{R} \left(\frac{R^2 - u^2}{R^2 - u^2 - v^2} \right) - 2 \frac{u^2 v^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{W} \left\{ \frac{R}{R^2 - u^2 - v^2} \right\} = \frac{1}{R}.\end{aligned}$$



Superficies de curvatura constante

Las superficies con curvatura de Gauss y curvatura media constantes tienen un gran interés para los matemáticos. En el siglo XIX se sabía que las únicas superficies suaves cerradas y acotadas “sin frontera” y con curvatura de Gauss constante eran las esferas. En el siglo XX, el matemático ruso Alexandrov demostró que las únicas superficies suaves cerradas y acotadas sin frontera que no se cortan consigo mismas y que tienen curvatura media constante también debían ser esferas. Los matemáticos pensaban que el resultado de Alexandrov debía ser cierto incluso si se permitían autointersecciones de la superficie, pero nadie encontró una prueba. En 1984, el profesor Henry Wente (Toledo, Ohio) sorprendió al mundo al hallar un toro con auto-intersecciones y curvatura media constante.

Las superficies de curvatura media constante son importantes en la física y se encuentran en la Naturaleza. Las pompas de jabón tienen curvatura media constante distinta de cero (véase la Figura 7.7.1) y las películas de jabón (que no contienen aire) tienen curvatura media constante igual a cero (véanse las Figuras 7.7.2 y 7.7.3).

A principios del siglo XIX, el matemático francés Delaunay descubrió todas las superficies de revolución que tienen curvatura media constante: el cilindro, la esfera, la catenoide, la unduloide y la nodoide. La catenoide se puede formar mediante una película de jabón extendida entre dos contornos circulares.



Figura 7.7.1 Pompas de jabón; $H = \text{constante}$.



Figura 7.7.2
Un helicoide, $H = 0$.

Formas óptimas en la Naturaleza

En todas las épocas, la humanidad ha especulado acerca del por qué las cosas tienen la forma que tienen. ¿Por qué la Tierra y las estrellas son “redondas” y no cúbicas? ¿Por qué los seres vivos tienen la forma que tienen?

En 1917, el filósofo naturalista británico D’Arcy Thompson publicó un provocativo trabajo titulado *Sobre el crecimiento y la forma*, en el que investigaba las fuerzas que hay detrás de la creación de las formas vivas en la Naturaleza. Escribió:

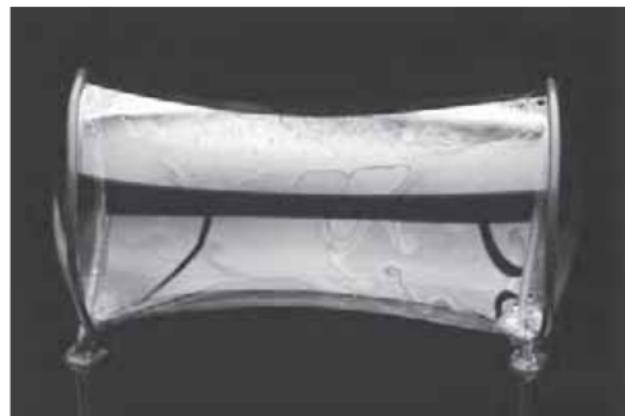


Figura 7.7.3 Una película de jabón, $H = 0$, extendida entre dos alambres circulares; es la catenoide.

En un organismo, grande o pequeño, no es simplemente la naturaleza de los movimientos de la sustancia viva lo que tenemos que interpretar en términos de fuerza (de acuerdo con la cinética), sino también la configuración del propio organismo, cuya permanencia o equilibrio se explica mediante la interacción o equilibrio de las fuerzas, como describe la estática.

Sorprendentemente, Thompson descubrió *todas* las superficies de Delaunay en las formas de los organismos unicelulares (véase la Figura 7.7.4). La curvatura media constante de estos organismos se puede explicar mediante principios del mínimo similares a los descritos en la Nota histórica de la Sección 3.3. En 1952, Watson y Crick determinaron que la estructura del ADN es una doble hélice, un descubrimiento que estableció las bases de la revolución genética. Observando películas de jabón, como las mostradas en la Figura 7.7.2, vemos que a la naturaleza le gustan las formas helicoidales y también tiende a repetir patrones. Una mejor comprensión de los principios científicos que subyacen a la vida puede, en última instancia, ayudar a los matemáticos a desempeñar un papel destacado en esta área de la biología teórica.

Curvatura y Física

La teoría de las superficies curvadas, iniciada por Gauss, ha tenido un profundo efecto sobre la Física. Gauss se dio cuenta de que la curvatura gaussiana K de una superficie dependía solo de la medida de la distancia *sobre la propia superficie*; es decir, la curvatura era *intrínseca a la superficie*. Esto no es cierto para la curvatura media H . Por tanto, los seres “que viven” sobre una superficie deberían ser capaces de decir que la superficie está curvada, sin hacer ninguna referencia a un mundo “exterior”. El propio Gauss encontró tan asombroso este resultado matemático que lo llamó *teorema egregio* or “teorema extraordinario”. El estudiante de Gauss, Bernhard Riemann, generalizó la teoría de Gauss a superficies n -dimensionales para las que es posible describir una noción de curvatura.

Recordemos que Newton creó la idea de fuerza gravitatoria que actúa a través de vastas distancias galácticas, haciendo que las galaxias se atraigan y se repelan (véase la Figura 7.7.5). A principios del siglo xx, Albert Einstein utilizó las ideas de Riemann para desarrollar la *teoría general de la relatividad*, una teoría de la gravitación que eliminaba la

Figura 7.7.4 Superficies de revolución de curvatura media constante como organismos unicelulares.

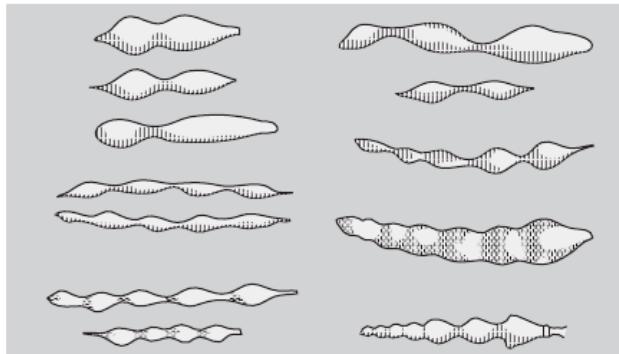




Figura 7.7.5 La galaxia Andrómeda. Colisionará con la Vía Láctea en unos 2.000 millones de años.

necesidad de considerar las fuerzas (como hizo Newton) que actúan a grandes distancias. La teoría de Einstein explicó la curvatura de la luz debida al Sol, los agujeros negros, la expansión del Universo, la formación de galaxias y el propio Big Bang. Para la mayoría de las aplicaciones, incluyendo la dinámica de nuestro sistema solar, la teoría de Newton es suficiente y actualmente la NASA la utiliza para planificar misiones espaciales, como hemos visto en la Sección 4.1. Pero, para aplicaciones cosmológicas a grandes escalas, la teoría de Einstein sustituyó a la de Isaac Newton, publicada en sus *Principia* en 1687.

Como un testamento de su genio, y a pesar del increíble éxito de esta teoría, Newton se preocupaba por cuestiones acerca de *cómo* actuaba esta fuerza gravitatoria. No pudo proporcionar ninguna otra explicación que decir, “No he sido capaz de deducir a partir de estos fenómenos la razón para estas propiedades de la gravitación y yo no invento hipótesis; puesto que cualquier cosa que no pueda ser deducida a partir de los fenómenos debería llamarse hipótesis.” Además, en una carta a su amigo Richard Bentley, Newton escribió:

Que la gravedad debe ser innata, inherente y esencial a la materia, de modo que un cuerpo puede actuar sobre otro a una distancia, a través de la cual su acción puede ser dirigida de uno a otro, es para mi un absurdo tan grande que creo que ningún hombre, que tenga una facultad competente para pensar en temas filosóficos, pueda ni siquiera caer en él.

Newton acuñó el término *acción a distancia* (que significa “fuerza actuando a distancia”) para describir el misterioso efecto de la gravedad a grandes distancias. Este efecto sigue siendo tan difícil de entender actualmente como lo era en la época de Newton.

Johann Bernoulli encontraba difícil entender el concepto de una fuerza que actuaba a través del espacio vacío a distancias de incluso cientos de millones de kilómetros. Interpretaba esta fuerza como un concepto repulsivo para las mentes acostumbradas a no aceptar cualquier principio de la Física, salvo aquellos que eran incontestables y evidentes. Además,



Figura 7.7.6 Albert Einstein (1879– 1955) en su despacho de la oficina de patentes de Berlín, 1905.

Leibniz consideró la gravitación como un poder incorpóreo e inexplicable, filosóficamente vacío.

Quizá la mayor inspiración de Albert Einstein (véase la Figura 7.7.6) fue sustituir el modelo de la gravitación de Newton por un modelo que habría encantado a los antiguos griegos—*un modelo geométrico de la gravedad*. En la teoría de Einstein, el concepto de una fuerza que actúa a través de grandes distancias se sustituye por la *curvatura* de un mundo espacio-temporal.¹⁶ Como ilustra la cita incluida al principio del capítulo, W. K. Clifford tuvo una premonición de los acontecimientos que estaban por venir. Para aclarar el esquema de Einstein, vamos a presentar un modelo extremadamente simplificado que transmite algunas de sus ideas básicas.

Representamos el espacio mediante una superficie que imaginamos como una cama elástica originalmente plana (el estado correspondiente al vacío), la cual se deforma fuertemente en cierto punto por medio del peso de una gigantesca bola de acero (el Sol). Una pequeña bola de acero que rueda sobre la cama es nuestro planeta Tierra (véase la Figura 7.7.7)

Si hacemos rodar a la bola pequeña por la cama, esta viajará siguiendo una trayectoria recta. Sin embargo, si ahora colocamos la gigantesca bola de acero en el centro, la cama elástica se doblará, o “curvará” incluso “muy lejos” de la bola grande. Si entonces empujamos nuestra bola pequeña, ya no se moverá siguiendo una trayectoria rectilínea sino una trayectoria curva. La bola grande afecta a la trayectoria de la bola pequeña curvando el espacio de su alrededor. Con un empujón preciso, la bola pequeña podrá incluso orbitar alrededor de la grande durante un tiempo. Este modelo de la cama elástica explica cómo un cuerpo grande podría, curvando el espacio, influir sobre un cuerpo pequeño a gran distancia.

Einstein estableció que el espacio-tiempo está curvado por la materia y la energía. En este espacio-tiempo curvado, incluso los rayos de luz se *comban* cuando pasan cerca de objetos masivos como nuestro Sol. Gracias a Gauss y Riemann, la curvatura del espacio-tiempo no requiere ningún “universo” externo en el que curvarse. Además, en el mundo curvado de Einstein, la luz viaja a lo largo de trayectorias mínimas dentro del espacio-tiempo, denominadas *geodésicas*. Normalmente es imposible

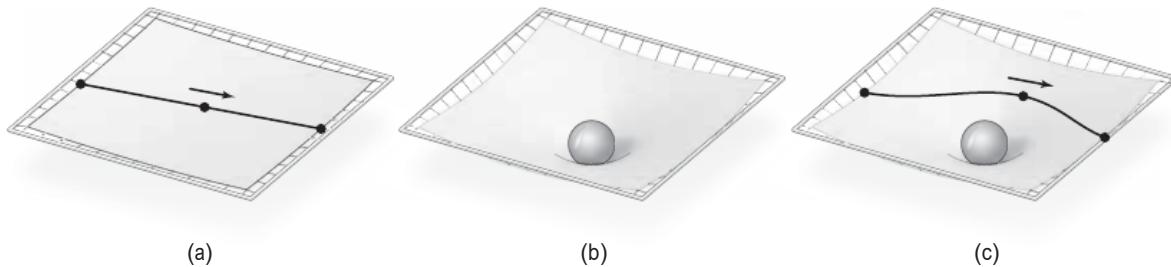


Figura 7.7.7 (a) Una partícula sobre una cama elástica se mueve en línea recta. (b) Una bola de acero pesada distorsiona la cama elástica. (c) Una partícula sobre la cama elástica distorsionada sigue una trayectoria curva.

¹⁶El espacio-tiempo es localmente como \mathbb{R}^4 con tres coordenadas espaciales y una coordenada temporal.

observar los rayos de luz en las proximidades de nuestro brillante Sol, pero un eclipse solar proporciona una oportunidad maravillosa para realizar ese tipo de medidas. Dos expediciones británicas a Nueva Guinea (dirigidas por Eddington y Cottingham) y a Sobral en el norte de Brasil, utilizaron el eclipse solar del 29 de mayo de 1919 para verificar si se combaban los rayos de luz procedentes de las estrellas y que pasaban cerca del Sol. Ambas expediciones pudieron confirmar la predicción de Einstein y Eddington escribiría posteriormente,

Dejad que los sabios recopilen nuestras medidas;
Al menos hay algo cierto: la LUZ tiene PESO.
Una cosa es cierta y el resto debatible:
Los rayos de luz al pasar cerca del Sol, NO VIAJAN EN LÍNEA RECTA.

Las ecuaciones que nos dicen cuánto están curvados el espacio y el tiempo a causa de la materia y la energía se conocen como *las ecuaciones de campo de Einstein*. Una descripción de ellas queda fuera del ámbito de este libro, pero no así el núcleo matemático del que surgen; este núcleo está basado en otro resultado destacable de las investigaciones de Gauss y Bonnet.

Teorema de Gauss–Bonnet

En el Ejemplo 2, hemos calculado la curvatura de Gauss K de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ de radio R y hemos determinado que es la constante $1/R^2$. La curvatura de Gauss K es una función con valores escalares sobre la superficie y como tal podemos integrarla sobre la misma. Queremos considerar una constante multiplicada por esta integral de superficie, concretamente,

$$\frac{1}{2\pi} \iint_S K \, dA.$$

Para la esfera de radio R , esta cantidad es

$$\frac{1}{2\pi R^2} \iint_S dA = \frac{4\pi R^2}{2\pi R^2} = 2.$$

Lo que Gauss y Bonnet descubrieron fue que si S es *cualquier* superficie cerrada “similar a la esfera” (cerrada y acotada, pero sin frontera, como en la Figura 7.7.8), entonces

$$\frac{1}{2\pi} \iint_S K \, dA = 2$$

sigue siendo cierto.¹⁷

¹⁷Hablando de manera informal, esto quiere decir que S se puede obtener a partir de la esfera haciendo dobleces y estiramientos (como con un globo) pero sin romperse (¡el globo explotaría!).

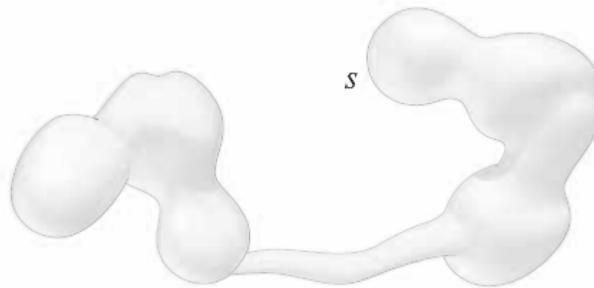


Figura 7.7.8 Una esfera deformada. $\frac{1}{2\pi} \iint_S K dA = 2$.

Por tanto, la integral

$$\frac{1}{2\pi} \iint_S K dA$$

siempre es igual al entero 2, y por tanto es un *invariante topológico* de la superficie. El que la integral de la curvatura debería ser una cantidad interesante debería estar ya claro, después de la exposición al final de la Sección 7.1.

Ahora vamos a considerar un toro, o dónut. El toro se puede considerar como una esfera a la que se le cortan dos discos y se le pega un asa (véase la Figura 7.7.9).

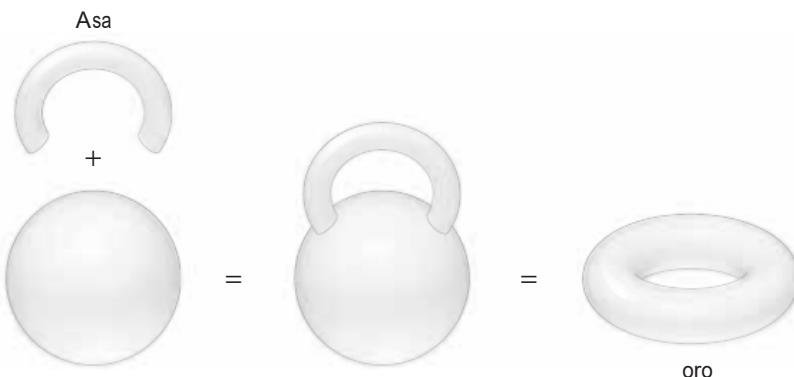


Figura 7.7.9 Pegando un asa a una esfera obtenemos un toro.

Además, podemos continuar este proceso añadiendo 1, 2, 3, ..., g asas a la esfera. Si se pegan g asas, diremos que la superficie resultante tiene género g , como la mostrada en la Figura 7.7.10. Obsérvese que el toro tiene género 1.

Si dos superficies tienen un género diferente, son topológicamente distintas, y no se puede por tanto obtener una a partir de otra mediante dobleces y estiramientos. Dos superficies con el mismo género se pueden colocar en el espacio de formas muy diferentes y complejas, como en la Figura 7.7.11. Sorprendentemente, incluso aunque la integral (o curvatura total) dada por $(1/2\pi) \iint_S K dA$ dependa del género, no depende de cómo la superficie se sitúa en el espacio (y por tanto no depende de K).

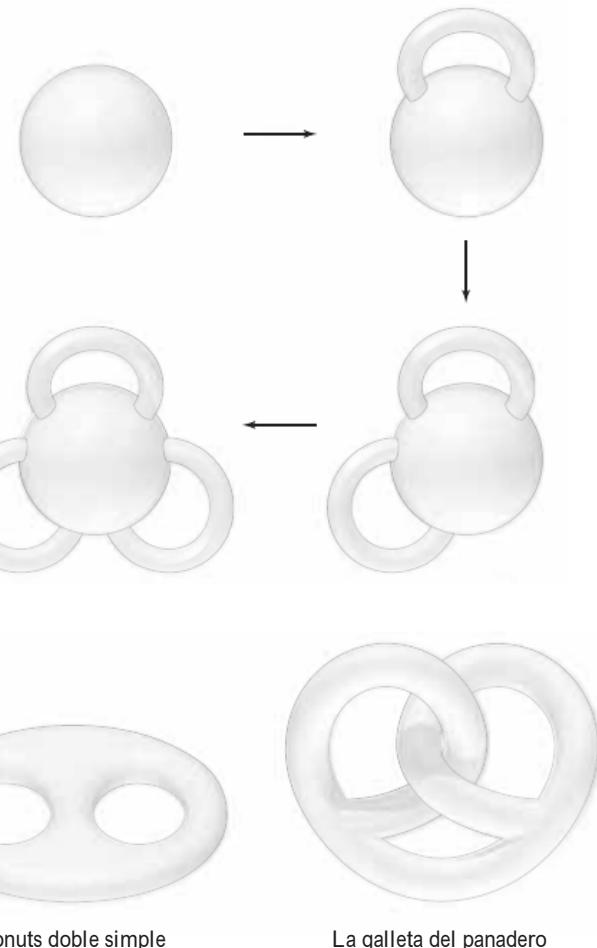


Figura 7.7.10 Una esfera con 0, 1, 2 y 3 asas pegadas.

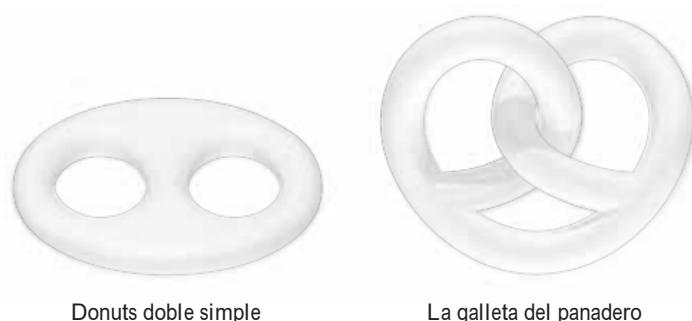


Figura 7.7.11 Dos manifestaciones de una superficie S en \mathbb{R}^3 de género 2.

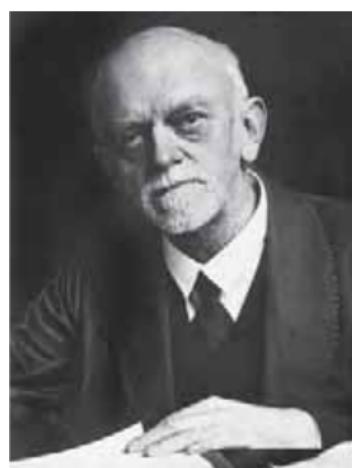


Figura 7.7.12 David Hilbert (1862–1943) fue un matemático destacado en su época.

Gauss y Bonnet demostraron que

$$\frac{1}{2\pi} \iint_S K \, dA = 2 - 2g.$$

Por tanto, para la esfera ($g = 0$), siempre es igual a 2 (como ya lo hemos verificado); para el toro, siempre es 0 (véase el Ejercicio 10).

Hay algo incluso más destacable relacionado con el teorema de Gauss–Bonnet, que el gran matemático alemán David Hilbert observó (Figura 7.7.12).

Hilbert observó que el teorema de Gauss–Bonnet es, en efecto, una versión bidimensional de las ecuaciones de campo de Einstein. En la literatura sobre Física, este hecho se conoce como el *principio de acción de Hilbert* de la relatividad general.¹⁸ No es sorprendente que investigadores actuales empleen ideas geométricas similares en su esfuerzo por unificar la gravedad y la mecánica cuántica—para “cuantizar” la gravedad, por así decirlo.

¹⁸Véase C. Misner, K. Thorne y A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, Nueva York, 1972.

Ejercicios

1. El helicoide se puede describir mediante

$$\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv), \text{ donde } b \neq 0.$$

Demostrar que $H = 0$ y que $K = -b^2/(b^2+u^2)^2$. En las Figuras 7.7.1 y 7.7.5, vemos que el helicoide es realmente una superficie formada por una película de jabón. Las superficies en las que $H = 0$ se denominan *superficies mínimas*.

2. Considérese la superficie con forma de silla de montar $z = xy$. Demostrar que

$$K = \frac{-1}{(1+x^2+y^2)^2},$$

y que

$$H = \frac{-xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

3. Demostrar que $\Phi(u, v) = (u, v, \log \cos v - \log \cos u)$ tiene curvatura media igual a cero (y es por tanto una superficie mínima; véase el Ejercicio 1).

4. Hallar la curvatura de Gauss del paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

5. Hallar la curvatura de Gauss del paraboloide hiperbólico

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

6. Hallar la curvatura de Gauss del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

7. Después de determinar K en el Ejercicio 6, integrar K para demostrar que:

$$\frac{1}{2\pi} \iint_S K dA = 2.$$

8. Hallar la curvatura K de:

- (a) El cilindro $\Phi(u, v) = (2 \cos v, 2 \sin v, u)$.
 (b) La superficie $\Phi(u, v) = (u, v, u^2)$.

9. Demostrar que la superficie de Enneper

$$\Phi(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2 \right)$$

es una superficie mínima ($H = 0$).

10. Considérese el toro T dado en el Ejercicio 4 de la Sección 7.4. Calcular su curvatura de Gauss y verificar el teorema de Gauss-Bonnet. [SUGERENCIA: Demostrar que $\|T_\theta \times T_\phi\|^2 = (R + \cos \phi)^2$ y $K = \cos \phi/(R + \cos \phi)$].

11. Sea $\Phi(u, v) = (u, h(u) \cos v, h(u) \sin v)$, $h > 0$, una superficie de revolución. Demostrar que $K = -h''/h\{1 + (h')^2\}^2$.

12. Decimos que una parametrización Φ de una superficie S es *conforme* (véase la Sección 7.4), si $E = G$, $F = 0$. Supongamos que Φ parametriza de manera conforme a S .¹⁹ Demostrar que si H y K son idénticamente nulas, entonces S debe ser una parte de un plano en \mathbb{R}^3 .

Ejercicios de repaso del Capítulo 7

1. Integrar $f(x, y, z) = xyz$ a lo largo de las siguientes trayectorias:

(a) $\mathbf{c}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, 3)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

- (b) $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
 (c) $\mathbf{c}(t) = \frac{3}{2}t^2 \mathbf{i} + 2t^2 \mathbf{j} + t \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$
 (d) $\mathbf{c}(t) = t \mathbf{i} + (1/\sqrt{2})t^2 \mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3 \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$

¹⁹ Gauss probó que siempre existe una parametrización conforme de una superficie. El resultado de este ejercicio sigue siendo válido incluso si Φ no es conforme, pero la demostración es más difícil.

- 2.** Calcular la integral de f a lo largo de la trayectoria \mathbf{c} en cada uno de los casos siguientes:
- $f(x, y, z) = x + y + yz; \mathbf{c}(t) = (\sin t, \cos t, t), 0 \leq t \leq 2\pi$
 - $f(x, y, z) = x + \cos^2 z; \mathbf{c}(t) = (\sin t, \cos t, t), 0 \leq t \leq 2\pi$
 - $f(x, y, z) = x + y + z; \mathbf{c}(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3), 0 \leq t \leq 1$
- 3.** Calcular las siguientes integrales de línea:
- $\int_C (\sin \pi x) dy - (\cos \pi y) dz$, donde C es el triángulo cuyos vértices son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, en dicho orden.
 - $\int_C (\sin z) dx + (\cos z) dy - (xy)^{1/3} dz$, donde C es la trayectoria $\mathbf{c}(\theta) = (\cos^3 \theta, \sin^3 \theta, \theta)$, $0 \leq \theta \leq 7\pi/2$
- 4.** Si $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es ortogonal a $\mathbf{c}'(t)$ en cada punto de la curva $\mathbf{x} = \mathbf{c}(t)$, ¿qué podemos decir acerca de $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$?
- 5.** Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ al mover una partícula en sentido antihorario alrededor del cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a) , $(0, a)$, $a > 0$.
- 6.** Un anillo con la forma de la curva $x^2 + y^2 = a^2$ se construye con un fino alambre que pesa $|x| + |y|$ gramos por unidad de longitud en (x, y) . Hallar la masa del anillo.
- 7.** Hallar una parametrización para cada una de las siguientes superficies:
- $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y = 12$
 - $2x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 1$
 - $4x^2 + 9y^2 - 2z^2 = 8$
- 8.** Hallar el área de la superficie definida por $\Phi: (u, v) \mapsto (x, y, z)$, donde
- $$x = h(u, v) = u + v, y = g(u, v) = u,$$
- $$z = f(u, v) = v;$$
- $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$. Dibujarla.
- 9.** Escribir una fórmula para el área de la superficie de $\Phi: (r, \theta) \mapsto (x, y, z)$, donde
- $$x = r \cos \theta, \quad y = 2r \sin \theta, \quad z = r;$$
- $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Describir la superficie.
- 10.** Supongamos $z = f(x, y)$ y $(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2 = c, c > 0$. Demostrar que el área de la gráfica de f sobre una región D en el plano xy es $\sqrt{1+c}$ por el área de D .
- 11.** Calcular la integral de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre la superficie del Ejercicio de repaso 8.
- 12.** Calcular $\iint_S f dS$ en cada uno de los casos siguientes:
- $f(x, y, z) = x; S$ es la porción del plano $x + y + z = 1$ en el octante positivo definido por $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.
 - $f(x, y, z) = x^2; S$ es la porción del plano $x = z$ contenida dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$
 - $f(x, y, z) = x; S$ es la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ con $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$
- 13.** Calcular la integral de $f(x, y, z) = xyz$ sobre el rectángulo cuyos vértices son $(1, 0, 1)$, $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ y $(2, 1, 0)$.
- 14.** Calcular la integral de $x + y$ sobre la superficie de la esfera unidad.
- 15.** Calcular la integral de superficie de x sobre el triángulo cuyos vértices son $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$ y $(2, 0, 3)$.
- 16.** Un parabolóide de revolución S está parametrizado por $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$, $0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi$.
- Hallar una ecuación en x, y y z que describa la superficie.
 - ¿Cuál es el significado geométrico de los parámetros u y v ?
 - Hallar un vector unitario ortogonal a la superficie en $\Phi(u, v)$.
 - Hallar la ecuación para el plano tangente en $\Phi(u_0, v_0) = (1, 1, 2)$ y expresar la respuesta de las dos formas siguientes:
 - Parametrizado en términos de u y v .
 - En función de x, y y z .
 - Hallar el área de S .
- 17.** Sea $f(x, y, z) = xe^y \cos \pi z$.
- Calcular $\mathbf{F} = \nabla f$.
 - Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{c}(t) = (3 \cos^4 t, 5 \sin^7 t, 0)$, $0 \leq t \leq \pi$.
- 18.** Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la semiesfera superior de la esfera

unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

- 19.** Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{c}(t) = (e^t, t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.

- 20.** Sea $\mathbf{F} = \nabla f$ para una función escalar dada. Sea $\mathbf{c}(t)$ una curva cerrada, es decir, $\mathbf{c}(b) = \mathbf{c}(a)$. Demostrar que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$.

- 21.** Consideramos la superficie $\Phi(u, v) = (u^2 \cos v, u^2 \sin v, u)$. Calcular la normal unitaria en $u = 1, v = 0$. Calcular la ecuación del plano tangente en este punto.

- 22.** Sea S la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con z entre 1 y 2 orientada según la normal que apunta hacia fuera del cono. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

- 23.** Sea $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ un campo de velocidades de un fluido (la velocidad se mide en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano xy a través del cuadrado $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

- 24.** Demostrar que el área de la superficie del trozo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ situado encima del rectángulo $[-a, a] \times [-a, a]$, donde $2a^2 < 1$, en el plano xy es

$$A = 2 \int_{-a}^a \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{a}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$$

- 25.** Sea S una superficie y C una curva cerrada que limita a S . Verificar la igualdad

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

si \mathbf{F} es un campo de gradiente (utilizar el Ejercicio de repaso 20).

- 26.** Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -y)$ y S es la superficie cilíndrica definida por $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$, con la normal apuntando

hacia fuera del cilindro.

- 27.** Sea S la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ entre los planos $z = 0$ y $z = x + 3$. Calcular lo siguiente:

- (a) $\iint_S x^2 dS$
 (b) $\iint_S y^2 dS$
 (c) $\iint_S z^2 dS$

- 28.** Sea Γ la curva de intersección del plano $z = ax + by$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Hallar todos los valores de los números reales a y b tales que $a^2 + b^2 = 1$ y

$$\int_{\Gamma} y \, dx + (z - x) \, dy - y \, dz = 0.$$

- 29.** Una hélice circular contenida en el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ con pendiente p se puede describir de forma paramétrica mediante

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad z = p\theta, \quad \theta \geq 0.$$

Una partícula se desliza bajo la acción de la gravedad (que actúa en paralelo al eje z) sin rozamiento a lo largo de la hélice. Si la partícula parte de la altura $z_0 > 0$, entonces cuando alcanza la altura z , $0 \leq z < z_0$, a lo largo de la hélice, su rapidez está dada por

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(z_0 - z)2g},$$

donde s es la longitud de arco a lo largo de la hélice, g es la constante gravitatoria y t es el tiempo.

- (a) Hallar la longitud de la porción de la hélice que está entre los planos $z = z_0$ y $z = z_1$, $0 \leq z_1 < z_0$.
 (b) Calcular el tiempo T_0 que tarda la partícula en alcanzar el plano $z = 0$.

Teoremas de integración del análisis vectorial

Desde una perspectiva a largo plazo de la historia de Humanidad—viendo las cosas, por ejemplo, desde dentro de diez mil años— caben pocas dudas de que se considerará el descubrimiento por parte de Maxwell de las leyes de la electrodinámica como el acontecimiento más significativo del siglo xix. La Guerra Civil Americana será vista como de una insignificancia provinciana en comparación con este importante suceso científico de la misma década.

—Richard Feynman

La teoría especial de la relatividad tiene su origen en las ecuaciones de Maxwell...

—Albert Einstein

Ahora ya estamos preparados para relacionar el cálculo diferencial vectorial con el cálculo integral vectorial. Lo haremos mediante los importantes teoremas de Green, Gauss y Stokes. También destacaremos algunas de las aplicaciones físicas de estos teoremas para el estudio de la gravitación, la electricidad, y el magnetismo.

Los teoremas integrales básicos del análisis vectorial tienen su origen en las aplicaciones. Por ejemplo, el teorema de Green, descubierto hacia 1828, surgió en conexión con la teoría del potencial (que incluye los potenciales gravitatorios y eléctricos). El teorema de Gauss—el teorema de la divergencia—apareció en relación con el estudio de la capilaridad (este teorema debería ser atribuido conjuntamente al matemático ruso Ostrogradsky, que descubrió el teorema aproximadamente al mismo tiempo que Gauss). El teorema de Stokes fue sugerido por primera vez en una carta enviada a Stokes por el físico Lord Kelvin en

1850 y fue utilizado por Stokes en los exámenes para el Premio Smith en 1854.

8.1 Teorema de Green

El teorema de Green relaciona una integral de línea a lo largo de una curva cerrada C en el plano \mathbb{R}^2 con una integral doble en la región encerrada por C . Este importante resultado se generalizará en las secciones siguientes a curvas y superficies en \mathbb{R}^3 . Nos referiremos a integrales de línea a lo largo de curvas que son la frontera de regiones elementales (véase la Sección 5.3). Para entender las ideas de esta sección, puede ser necesario remitirse a la Sección 7.2.

Regiones simples y elementales, y sus fronteras

Una curva cerrada simple C que es la frontera de una región elemental tiene dos orientaciones —en sentido contrario a las agujas del reloj (positiva o antihoraria) y en el sentido de las agujas del reloj (negativa u horaria). Denotaremos C con la orientación antihoraria como C^+ , mientras que si la orientación es horaria la denotaremos mediante C^- (Figura 8.1.1).

La frontera C de una región y -simple se puede descomponer en sus partes inferior y superior, C_1 y C_2 , y (en su caso) en segmentos verticales a izquierda y derecha, B_1 y B_2 . De acuerdo con la Figura 8.1.2, escribimos

$$C^+ = C_1^+ + B_2^+ + C_2^- + B_1^-,$$

donde el superíndice “+” indica que las curvas están orientadas de izquierda a derecha o de abajo a arriba, mientras que el superíndice “-” indica que las curvas están orientadas de derecha a izquierda o de arriba a abajo.

Podemos hacer una descomposición semejante de la frontera de una región x -simple en trozos izquierdo y derecho y (en su caso) segmentos horizontales superior e inferior (Figura 8.1.3).

Análogamente, la frontera de una región simple tiene *dos* descomposiciones: una en sendas mitades superior e inferior y otra en sendas mitades izquierda y derecha.

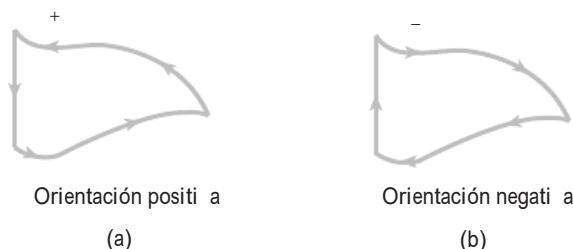


Figura 8.1.1 (a) Orientación positiva de C y (b) Orientación negativa de C .

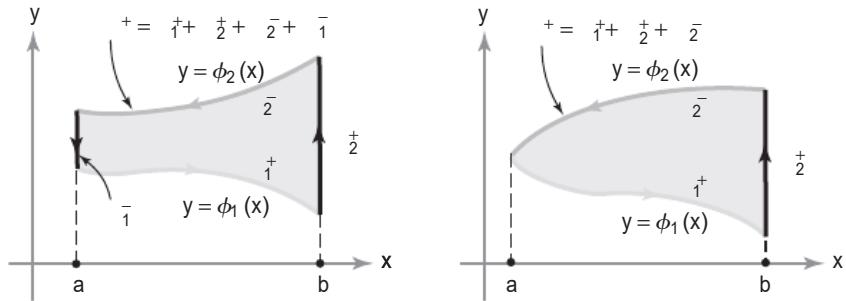


Figura 8.1.2 Dos ejemplos que muestran cómo descomponer la frontera positivamente orientada de una región y -simple D en varias componentes orientadas.

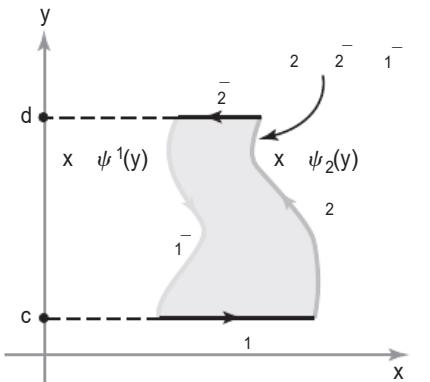


Figura 8.1.3 Un ejemplo que muestra cómo descomponer la frontera positivamente orientada de una región x -simple D en componentes orientadas.

Teorema de Green

Ahora vamos a demostrar dos lemas como preparación para el teorema de Green.

Lema 1 Sea D una región y -simple y sea C su frontera. Supongamos que $P: D \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 . Entonces

$$\int_{C^+} P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

(El término de la izquierda denota la integral de línea $\int_{C^+} P dx + Q dy$, donde $Q = 0$).

Demostración Supongamos que la región D está descrita por

$$a \leq x \leq b \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x).$$

Descomponemos C^+ escribiendo $C^+ = C_1^+ + B_2^+ + C_2^- + B_1^-$ (véase la Figura 8.1.2). Por el teorema de Fubini, podemos calcular la integral doble como una integral iterada y usar a continuación el teorema fundamental del cálculo:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx$$

$$= \int_a^b [P(x, \phi_2(x)) - P(x, \phi_1(x))] dx.$$

Por otra parte, como C_1^+ puede parametrizarse mediante $x \mapsto (x, \phi_1(x))$, $a \leq x \leq b$ y C_2^+ puede parametrizarse mediante $x \mapsto (x, \phi_2(x))$, $a \leq x \leq b$, tenemos

$$\int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx = \int_{C_1^+} P(x, y) dx$$

y

$$\int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx = \int_{C_2^+} P(x, y) dx.$$

Entonces, invirtiendo las orientaciones,

$$-\int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx = \int_{C_2^-} P(x, y) dx.$$

Por tanto,

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{C_1^+} P dx - \int_{C_2^-} P dx.$$

Como x es constante en B_2^+ y B_1^- , tenemos

$$\int_{B_2^+} P dx = 0 = \int_{B_1^-} P dx,$$

de modo que

$$\int_{C^+} P dx = \int_{C_1^+} P dx + \int_{B_2^+} P dx + \int_{C_2^-} P dx + \int_{B_1^-} P dx = \int_{C_1^+} P dx + \int_{C_2^-} P dx.$$

Por tanto,

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{C_1^+} P dx - \int_{C_2^-} P dx = - \int_{C^+} P dx. \quad \blacksquare$$

A continuación demostramos un lema análogo intercambiando los papeles de x e y .

Lema 2 Sea D una región x -simple con frontera C . Entonces, si $Q: D \rightarrow \mathbb{R}$ es C^1 ,

$$\int_{C^+} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

El signo negativo no aparece aquí, porque intercambiar los papeles de x e y se corresponde con un cambio de orientación en el plano.

Demostración Supongamos que D está dada por

$$\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \quad c \leq y \leq d.$$

Utilizando la notación de la Figura 8.1.3 y observando que y es constante en B_1^+ y B_2^- , tenemos

$$\int_{C^+} Q dy = \int_{C_1^- + B_1^+ + C_2^+ + B_2^-} Q dy = \int_{C_2^+} Q dy + \int_{C_1^-} Q dy,$$

donde C_2^+ es la curva parametrizada por $y \mapsto (\psi_2(y), y)$, $c \leq y \leq d$, y C_1^- es la curva $y \mapsto (\psi_1(y), y)$, $c \leq y \leq d$. Aplicando el teorema de Fubini y el teorema fundamental del cálculo, obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d [Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)] dy \\ &= \int_{C_2^+} Q dy - \int_{C_1^-} Q dy = \int_{C_2^+} Q dy + \int_{C_1^-} Q dy = \int_{C^+} Q dy. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Sumando los resultados de los Lemas 1 y 2, se prueba el siguiente importante teorema.

Teorema 1 Teorema de Green Sea D una región simple y sea C su frontera. Supongamos que $P: D \rightarrow \mathbb{R}$ y $Q: D \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^1 . Entonces

$$\int_{C^+} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

La orientación correcta (positiva) para la curva de frontera de la región D se puede recordar usando el siguiente truco: *si caminamos a lo largo de la curva C con la orientación correcta, la región D debe quedar a nuestra izquierda* (véase la Figura 8.1.4).

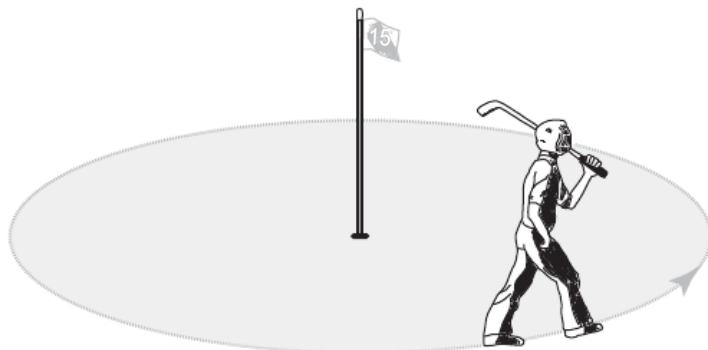


Figura 8.1.4 La orientación correcta para la frontera de una región D .

Nota histórica

George Green

George Green nació en Nottingham, Inglaterra, en 1793 y murió en 1841. No existe ningún retrato conocido de él. Es poco lo que se sabe sobre su vida anterior a los 30 años, excepto que era un autodidacta que desarrolló una pasión por las matemáticas a una temprana edad. En 1833, cuando tenía 40 años, Green se matriculó como estudiante en Cambridge. Sorprendentemente, cinco años antes había publicado (a sus propias expensas) su primera y más famosa obra, “Un ensayo sobre la aplicación del análisis matemático a las teorías de la electricidad y el magnetismo”. En ella, demostraba un teorema similar al teorema de Green presentado en esta sección e introducía también otros conceptos matemáticos de gran importancia, como las funciones de Green, que ahora son ubicuas en el análisis matemático. Fue la primera persona en desarrollar una teoría de la electricidad y el magnetismo, teoría que posteriormente formaría la base de los trabajos de Maxwell y otros.

Generalización del teorema de Green

El teorema de Green se aplica, en la práctica, a cualquier región “decente” en \mathbb{R}^2 . Por ejemplo, el teorema de Green para regiones que no sean simples, pero que puedan descomponerse en varios trozos, cada uno de los cuales sea simple. Se muestra un ejemplo en la Figura 8.1.5. La región D es un anillo; su frontera consiste en dos curvas $C = C_1 + C_2$ con las orientaciones indicadas. (Obsérvese que, para la región interna, la orientación correcta para asegurar la validez del teorema de Green es *en el sentido de las agujas del reloj*; ¡el truco de la Figura 8.1.4 continúa sirviendo para recordar la orientación!) Si se aplica el Teorema 1 a cada una de las regiones D_1, D_2, D_3, D_4 y se suman los resultados, se obtiene la identidad dada por el teorema de Green para D y su curva frontera C . El resultado es válido porque las integrales a lo largo de las líneas interiores que tienen direcciones opuestas se cancelan entre sí. Este truco, de hecho, muestra que el teorema de Green es cierto para prácticamente todas las regiones con fronteras razonables que uno puede esperar encontrarse (véase el Ejercicio 16).

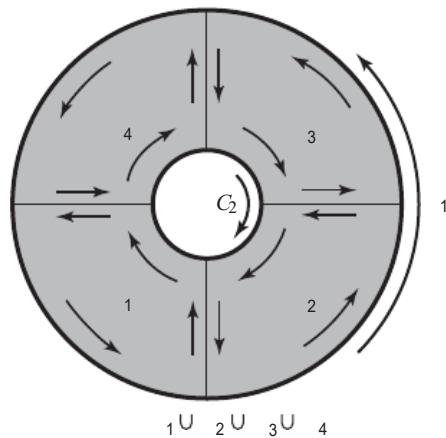


Figura 8.1.5 El teorema de Green es válido en $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$.

Utilicemos la notación ∂D para la curva orientada C^+ , es decir, la curva frontera de D orientada en el sentido descrito por la regla ilustrada en la Figura 8.1.4. Entonces podemos escribir el teorema de Green como

$$\int_{\partial D} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

El teorema de Green es muy útil porque relaciona una integral de línea a lo largo de la frontera de una región con una integral de área sobre el interior de la región, y en muchos casos resulta más fácil evaluar la integral de línea que la integral de área, o viceversa. Por ejemplo, si sabemos que P se anula en la frontera, podemos concluir inmediatamente que $\iint_D (\partial P / \partial y) dx \, dy = 0$ incluso aunque $\partial P / \partial y$ no se anule en el interior. (¿Puede el lector construir una tal P en el cuadrado unidad?)

Ejemplo 1

Verificar el teorema de Green para $P(x, y) = x$ y $Q(x, y) = xy$, donde D es el círculo unidad $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solución

Haremos la comprobación evaluando directamente ambos lados del teorema de Green. La frontera de D es la circunferencia unidad parametrizada por $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$, y por tanto

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} P \, dx + Q \, dy &= \int_0^{2\pi} [(\cos t)(-\sin t) + \cos t \sin t \cos t] dt \\ &= \left[\frac{\cos^2 t}{2} \right]_0^{2\pi} + \left[-\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = \iint_D y \, dx \, dy,$$

que también es cero, por simetría. Por tanto, el teorema de Green se verifica en este caso. ▲

Áreas

Podemos usar el teorema de Green para obtener una fórmula para el área de una región acotada por una curva cerrada simple.

Teorema 2 Área de una región Si C es una curva cerrada simple que acota una región en la cual es aplicable el teorema de Green, entonces el área de la región D acotada por $C = \partial D$ es

$$A = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x \, dy - y \, dx.$$

Demostración Sea $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$; entonces por el teorema de Green tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx &= \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D [1 + 1] dx dy = \iint_D dx dy = A.\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Sea $a > 0$. Calcular el área (véase la Figura 8.1.6) de la región encerrada por la hipocicloide definida por $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, usando la parametrización $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

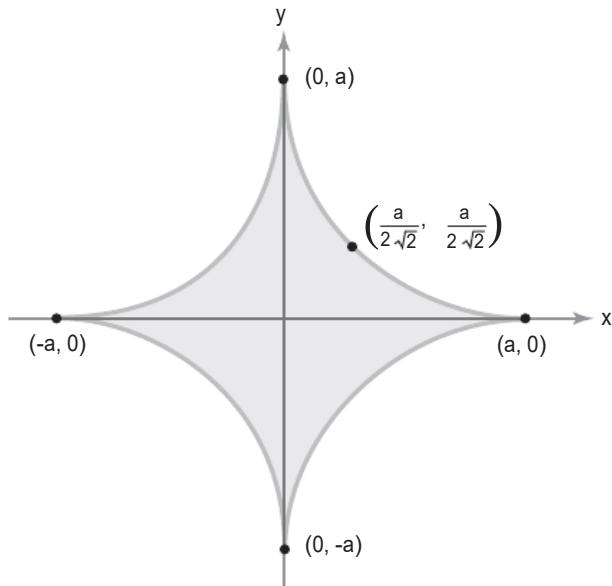


Figura 8.1.6 La hipocicloide $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Solución

Según el teorema anterior, y usando las identidades trigonométricas $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ y $\sin^2 \phi = (1 - \cos 2\phi)/2$, obtenemos

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos^3 \theta)(3a \sin^2 \theta \cos \theta) - (a \sin^3 \theta)(-3a \cos^2 \theta \sin \theta)] d\theta \\ &= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta \cos^4 \theta + \cos^2 \theta \sin^4 \theta) d\theta = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{3}{8} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{3}{8} a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{3}{16} a^2 \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{3}{16} a^2 \int_0^{2\pi} \cos 4\theta d\theta = \frac{3}{8} \pi a^2.\end{aligned}$$

Forma vectorial utilizando el rotacional

El enunciado del teorema de Green admite una expresión particularmente simple utilizando el lenguaje de los campos vectoriales. Como veremos, esta expresión indica el camino para una posible generalización del teorema a \mathbb{R}^3 .

Teorema 3 Forma vectorial del teorema de Green Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región en la cual es aplicable el teorema de Green, sea ∂D su frontera (con orientación positiva) y sea $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ un campo vectorial C^1 definido sobre D . Entonces

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA$$

(véase la Figura 8.1.7).

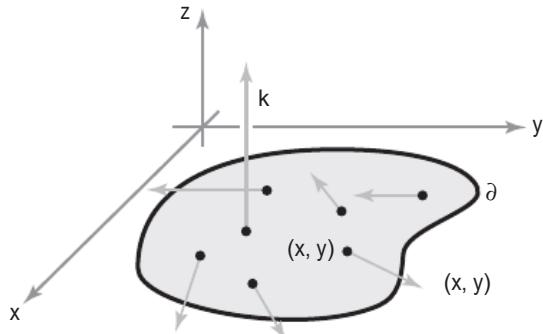


Figura 8.1.7 La forma vectorial del teorema de Green.

Este resultado se sigue del Teorema 1 y del hecho de que $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \partial Q / \partial x - \partial P / \partial y$. En el Ejercicio 22 pediremos al lector que complete los detalles.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{F} = (xy^2, y + x)$. Integrar $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}$ en la región del primer cuadrante acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = x$.

Solución

Método 1. Calculamos primero el rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = (1 - 2xy)\mathbf{k}.$$

Por tanto, $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = 1 - 2xy$. Esta función puede integrarse sobre la región dada D (véase la Figura 8.1.8) utilizando una integral iterada del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_{x^2}^x (1 - 2xy) \, dy \, dx = \int_0^1 [y - xy^2] \Big|_{x^2}^x \, dx \\ &= \int_0^1 [x - x^3 - x^2 + x^5] \, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

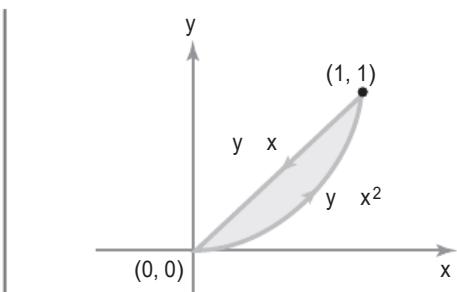


Figura 8.1.8 La región acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = x$.

Método 2. Utilizamos el Teorema 3 para obtener:

$$\iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

La integral de línea de \mathbf{F} a lo largo de la curva $y = x$ de izquierda a derecha es

$$\int_0^1 F_1 \, dx + F_2 \, dy = \int_0^1 (x^3 + 2x) \, dx = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$

A lo largo de la curva $y = x^2$ obtenemos

$$\int_0^1 F_1 \, dx + F_2 \, dy = \int_0^1 x^5 \, dx + (x + x^2)(2x \, dx) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}.$$

Por tanto, recordando que la integral a lo largo de $y = x$ ha de tomarse de derecha a izquierda, como en la Figura 8.1.8,

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4}{3} - \frac{5}{4} = \frac{1}{12}. \quad \blacktriangle$$

Forma vectorial usando la divergencia

Hay otra versión del teorema de Green que se puede generalizar a \mathbb{R}^3 .

Teorema 4 Teorema de la divergencia en el plano Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región en la que sea válido el teorema de Green y sea ∂D su frontera. Sea \mathbf{n} la normal unitaria exterior a ∂D . Si $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización orientada positivamente de ∂D , \mathbf{n} viene dada por

$$\mathbf{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}$$

(véase la Figura 8.1.9). Sea $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ un campo vectorial C^1 sobre D . Entonces

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA.$$

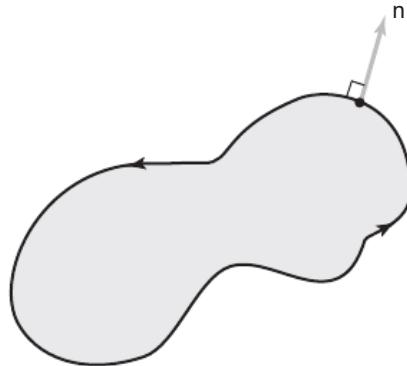


Figura 8.1.9 \mathbf{n} es la normal unitaria exterior a ∂D .

Demostración Recordemos que $\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t))$ es tangente a ∂D , y observemos que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}' = 0$. Por tanto, \mathbf{n} es normal a la frontera. El signo de \mathbf{n} se elige de manera que corresponda a la dirección *hacia el exterior* de la región (en lugar de hacia el interior). Por la definición de integral de línea (véase la Sección 7.2),

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_a^b \frac{P(x(t), y(t))y'(t) - Q(x(t), y(t))x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t))y'(t) - Q(x(t), y(t))x'(t)] \, dt \\ &= \int_{\partial D} P \, dy - Q \, dx.\end{aligned}$$

Por el teorema de Green, esto es igual a

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \, dx \, dy = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA.$$

Ejemplo 4

Sea $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^5\mathbf{j}$. Calcular la integral de la componente normal del campo \mathbf{F} a lo largo del cuadrado unidad.

Solución

Esto puede resolverse usando el teorema de la divergencia. En efecto,

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA.$$

Pero $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, y por tanto la integral es nula. ▲

Ejercicios

1. Sea D el triángulo en el plano xy con vértices en $(-1, 1)$, $(1, 0)$ y $(3, 2)$. Describir la frontera ∂D como una curva suave a trozos, orientada en sentido antihorario.
2. Sea D la región del plano xy comprendida entre las curvas $y = x^2 + 4$ and $y = 2x^2$. Describir la frontera ∂D como una curva suave a trozos, orientada en sentido antihorario.

En los Ejercicios 3 a 6, verificar el teorema de Green para la región D indicada, con frontera ∂D , y para las funciones P y Q .

3. $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$, $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$.
4. $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$, $P(x, y) = x$, $Q(x, y) = y$.
5. $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$, $P(x, y) = x - y$, $Q(x, y) = x + y$ [SUGERENCIA: Utilizar 3 y 4].
6. $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, $P(x, y) = \sin x$, $Q(x, y) = \cos y$.
7. Sea C la curva suave a trozos cerrada que se forma al viajar en línea recta entre los puntos $(-2, 1)$, $(-2, -3)$, $(1, -1)$, $(1, 5)$ y otra vez de vuelta a $(-2, 1)$, en ese orden. Utilizar el teorema de Green para calcular la integral:
$$\int_C (2xy) dx + (xy^2) dy.$$
8. Una partícula viaja a través de una superficie plana, moviéndose hacia el este una distancia de 3 m, luego hacia el norte una distancia de 4 m y luego volviendo al punto de partida. Sobre la partícula actúa un campo de fuerza, dado por $\mathbf{F}(x, y) = (3x + 4y^2)\mathbf{i} + (10xy)\mathbf{j}$. (Aquí suponemos que \mathbf{j} apunta hacia el norte). Utilizar el teorema de Green para calcular el trabajo realizado por \mathbf{F} sobre la partícula.
9. Usando el teorema de Green, evaluar $\int_C y dx - x dy$, donde C es la frontera del cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$, orientada en sentido antihorario.
10. Hallar el área del círculo D de radio R usando el teorema de Green.
11. Comprobar el teorema de Green para el círculo D de centro $(0, 0)$ y radio R y las funciones:
 - (a) $P(x, y) = xy^2$, $Q(x, y) = -yx^2$.
 - (b) $P(x, y) = x + y$, $Q(x, y) = y$.
 - (c) $P(x, y) = xy = Q(x, y)$.
 - (d) $P(x, y) = 2y$, $Q(x, y) = x$.
12. Utilizando el teorema de la divergencia, demostrar que $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = 0$, donde $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ y D es el círculo unidad. Comprobarlo además directamente.
13. Hallar el área limitada por el eje x y un arco de la cicloide $x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, donde $a > 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (usar el teorema de Green).

14. Bajo las condiciones del teorema de Green, demostrar

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \quad \int_{\partial D} PQ dx + PQ dy = \\
 & \quad = \iint_D \left[Q \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) + P \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right] dx dy. \\
 & \text{(b)} \quad \int_{\partial D} \left(Q \frac{\partial P}{\partial x} - P \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx + \left(P \frac{\partial Q}{\partial y} - Q \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy \\
 & \quad = 2 \iint_D \left(P \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - Q \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) dx dy.
 \end{aligned}$$

15. Evaluar la integral de línea

$$\int_C (2x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy,$$

donde C es la circunferencia unidad, y comprobar el teorema de Green para este caso.

16. Demostrar la siguiente generalización del teorema de Green: Sea D una región en el plano xy cuya frontera está formada por un número finito de curvas orientadas simples y cerradas. Supongamos que, utilizando un número finito de segmentos paralelos a los ejes coordenados, D puede descomponerse en un número finito de regiones simples D_i , con la frontera de cada D_i orientada en sentido antihorario (véase la Figura 8.1.5). Entonces, si P y Q son de clase C^1 en D ,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy,$$

donde ∂D es la frontera orientada de D . (INDICACIÓN: Aplicar el teorema de Green a cada D_i .)

17. Comprobar el teorema de Green para el integrando del Ejercicio 15 (es decir, con $P = 2x^3 - y^3$ y $Q = x^3 + y^3$) y la región anular D descrita por $a \leq x^2 + y^2 \leq b$, con la frontera orientada como en la Figura 8.1.5.

18. Sea D una región en la cual es válido el teorema de Green. Supongamos que f es armónica; es decir,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

en D . Demostrar que

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0.$$

- 19.** (a) Comprobar el teorema de la divergencia para $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ y D el círculo unidad $x^2 + y^2 \leq 1$.
(b) Evaluar la integral de la componente normal de $2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$ a lo largo de la elipse definida por $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
- 20.** Sean $P(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$ y $Q(x, y) = x/(x^2 + y^2)$. Suponiendo que D es el círculo unidad, analizar por qué no se cumple el teorema de Green para estas P y Q en dicha región.
- 21.** Utilizar el teorema de Green para evaluar $\int_{C^+} (y^2 + x^3) dx + x^4 dy$, donde C^+ es el perímetro del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, recorrido en dirección antihoraria.
- 22.** Comprobar el Teorema 3 demostrando que $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \partial Q / \partial x - \partial P / \partial y$.
- 23.** Usar el Teorema 2 para calcular el área encerrada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
- 24.** Usar el Teorema 2 para obtener la fórmula del área de una región expresada en coordenadas polares, $A = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 d\theta$.
- 25.** Esbozar la prueba del teorema de Green para la región mostrada en la Figura 8.1.10.



Figura 8.1.10 Demostrar el teorema de Green para esta región.

- 26.** Demostrar la identidad

$$\int_{\partial D} \phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D (\phi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \phi) dA.$$

- 27.** Utilizar el teorema de Green para hallar el área de un lazo de la rosa de cuatro pétalos $r = 3 \sin 2\theta$. (SUGERENCIA: $x dy - y dx = r^2 d\theta$).

- 28.** Demostrar que si C es una curva cerrada simple que acota una región en la cual es aplicable el teorema de Green, entonces el área de la región D encerrada por C es

$$A = \int_{\partial D} x dy = - \int_{\partial D} y dx.$$

Demostrar que de esto se deduce el Teorema 2.

Los Ejercicios 29 a 37 ilustran la aplicación del teorema de Green a las ecuaciones en derivadas parciales. Se centran principalmente en las soluciones de la ecuación de Laplace, es decir, funciones armónicas. Para estos ejercicios, sea D una región abierta en \mathbb{R}^2 con frontera ∂D . Sea $u: D \cup \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua de clase C^2 en D . Supongamos que $\mathbf{p} \in D$ es un punto de D y que la bola cerrada $B_\rho = B_\rho(\mathbf{p})$ de radio ρ y centrada en \mathbf{p} está contenida en D para $0 < \rho \leq R$. Definimos $I(\rho)$ mediante

$$I(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho} u \, ds.$$

- 29.** Demostrar que $\lim_{\rho \rightarrow 0} I(\rho) = 2\pi u(\mathbf{p})$.
30. Sea \mathbf{n} la normal unitaria exterior a ∂B_ρ y $\partial u / \partial n = \nabla u \cdot \mathbf{n}$. Demostrar que
- $$\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \iint_{B_\rho} \nabla^2 u \, dA.$$
- 31.** Usando el Ejercicio 30, demostrar que $I'(\rho) = (1/\rho) \iint_{B_\rho} \nabla^2 u \, dA$.
32. Supongamos que u satisface la ecuación de Laplace: $\nabla^2 u = 0$ on D . Usar los ejercicios anteriores para demostrar que

$$u(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} u \, ds.$$

(Esto expresa el hecho de que el valor de una función armónica en un punto es la media de sus valores a lo largo de cualquier circunferencia centrada en él).

- 33.** Utilizar el Ejercicio 32 para demostrar que si u es armónica (es decir, si $\nabla^2 u = 0$), entonces $u(\mathbf{p})$ puede expresarse como una integral de área:

$$u(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{B_R} u \, dA.$$

- 34.** Supongamos que u es una función armónica definida en D (es decir, $\nabla^2 u = 0$ en D) y que u tiene un máximo (o mínimo) local en un punto \mathbf{p} de D .

- (a) Demostrar que u debe ser constante en algún disco centrado en \mathbf{p} . (SUGERENCIA: Utilizar los resultados del Ejercicio 25).
- (b) Supongamos que D es conexo por arcos [es decir, dados dos puntos cualesquiera \mathbf{p} y \mathbf{q} contenidos en D , existe un camino continuo $\mathbf{c}: [0, 1] \rightarrow D$ tal que $\mathbf{c}(0) = \mathbf{p}$ y $\mathbf{c}(1) = \mathbf{q}$] y que para algún \mathbf{p} el máximo o mínimo en \mathbf{p} es absoluto; entonces, $u(\mathbf{q}) \leq u(\mathbf{p})$ o $u(\mathbf{q}) \geq u(\mathbf{p})$ para todo \mathbf{q} en D . Demostrar que u debe ser constante en D .

(El resultado de este ejercicio se llama *principio del máximo fuerte (o del mínimo fuerte)* para funciones armónicas. Compárese esto con los ejercicios 46 a 50 de la Sección 3.3.)

- 35.** Se dice que una función es *subarmónica* en D si $\nabla^2 u \geq 0$ para todos los puntos de D . Se dice que es *superarmónica* si $\nabla^2 u \leq 0$.

- (a) Deducir un principio del máximo fuerte para funciones subarmónicas.
- (b) Deducir un principio del mínimo fuerte para funciones superarmónicas.

- 36.** Supongamos que D es el círculo $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ y que C es la circunferencia $\{(x, y) \mid$

$x^2 + y^2 = 1\}$. Se puede demostrar que si f es una función continua con valores reales en C , entonces existe una función continua u definida en $D \cup C$ que coincide con f sobre C y es armónica en D . Es decir, f tiene una extensión armónica al círculo. Suponiendo cierto este resultado, demostrar lo siguiente:

- (a) Si q es una función continua no constante en $D \cup C$ que es subarmónica (pero no armónica) en D , entonces existe una función continua u definida en $D \cup C$ que es armónica en D y tal que u coincide con q sobre C y $q < u$ en todos los puntos de D .
- (b) El mismo resultado sigue siendo válido si “subarmónica” se sustituye por “superarmónica” y “ $q < u$ ” por “ $q > u$.”

- 37.** Sea D como en el Ejercicio 36. Sea $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que hay una única solución de la ecuación $\nabla^2 u = 0$ que satisfaga $u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \partial D$.

- 38.** Usar el teorema de Green para demostrar la fórmula del cambio de variables en el siguiente caso particular:

$$\iint_D dx dy = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

para una transformación $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$.

8.2 El teorema de Stokes

El teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva simple cerrada C en \mathbb{R}^3 con una integral sobre una superficie S cuya frontera es C . En este sentido, es muy similar al teorema de Green.

El teorema de Stokes para gráficas

Comencemos por recordar algunos hechos expuestos en el Capítulo 7. Consideraremos una superficie S que es la gráfica de una función $f(x, y)$, de manera que S puede parametrizarse por

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

para (u, v) en algún dominio D del plano. La integral de una función vectorial \mathbf{F} sobre S fue desarrollada en la Sección 7.6 como

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left[F_1 \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + F_2 \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + F_3 \right] dx dy, \quad (1)$$

donde $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$.

En la Sección 8.1, comenzamos por suponer que considerábamos regiones D simples; aunque esta hipótesis se usaba en la prueba del teorema de Green, ya resaltamos entonces que en realidad el teorema es válido para una clase más amplia de regiones. En esta sección supondremos que D es una región cuya frontera es una curva cerrada simple, y en la cual el teorema de Green es aplicable. El teorema de Green exige elegir una orientación de la frontera de D , como se explicó en la Sección 8.1. La elección de la orientación coherente con el teorema de Green se llamará **positiva**. Recuérdese que si D es simple, entonces la orientación positiva es la opuesta al sentido de las agujas del reloj (antihoraria).

Supongamos que $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización de ∂D en la dirección positiva. Entonces definimos la **curva frontera** ∂S como la curva orientada cerrada y simple que es la imagen de la aplicación $\mathbf{p}: t \mapsto (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ con la orientación inducida por \mathbf{p} (Figura 8.2.1).

Para recordar esta orientación (es decir, la dirección positiva) sobre ∂S , podemos imaginar que somos un “observador” que camina a lo largo de la frontera de la superficie de manera que el vector normal señala hacia arriba; entonces la dirección de movimiento será positiva si la superficie está a la izquierda. Esta orientación de ∂S se llama frecuentemente **orientación inducida por una normal hacia arriba \mathbf{n}** .

Teorema 5 Teorema de Stokes para gráficas Sea S una superficie orientada definida por una función C^2 , $z = f(x, y)$, donde $(x, y) \in D$, que es una región en la cual es válido el teorema de Green, y sea \mathbf{F} un campo vectorial C^1 sobre S . Entonces, si ∂S denota la frontera de S , orientada como acabamos de definir, se tiene

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Recuérdese que $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es la integral a lo largo de ∂S de la componente tangencial de \mathbf{F} , mientras que $\iint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}$ es la integral sobre S de $\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}$, la componente normal de \mathbf{G} (véanse las Secciones 7.2 y 7.6). Por tanto, el teorema de Stokes dice que la integral de la *componente normal del rotacional de un campo vectorial \mathbf{F} sobre una superficie S es igual a la integral de la componente tangencial de \mathbf{F} a lo largo de la frontera ∂S* .

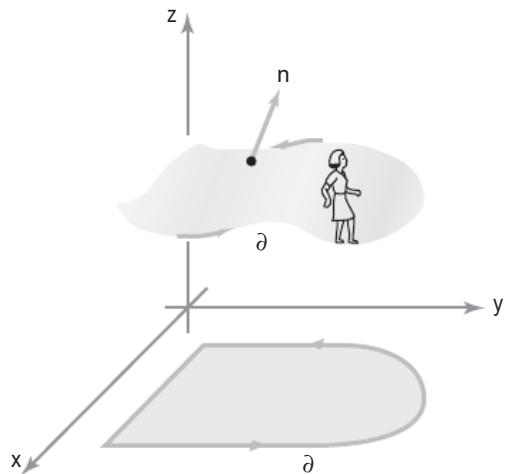


Figura 8.2.1 La orientación inducida en ∂S : cuando se camina a lo largo de la frontera, la superficie debe estar a la izquierda.

Demostración Si $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, entonces

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Por tanto, usamos la fórmula (1) para escribir

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right] dA. \end{aligned} \quad (2)$$

Por otro lado,

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{P}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{P}} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz,$$

donde $\mathbf{p}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ es una parametrización que preserva la orientación de la curva orientada cerrada y simple ∂S discutida anteriormente. Por tanto,

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt. \quad (3)$$

Por la regla de la cadena,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Sustituyendo esta expresión en la Ecuación (3), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \left[\left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right] dt \\ &= \int_{\mathbf{C}} \left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \\ &= \int_{\partial D} \left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy. \end{aligned} \quad (4)$$

Aplicando el teorema de Green a la Ecuación (4) resulta (estamos suponiendo que el teorema de Green es válido en D)

$$\iint_D \left[\frac{\partial(F_2 + F_3 \partial z / \partial y)}{\partial x} - \frac{\partial(F_1 + F_3 \partial z / \partial x)}{\partial y} \right] dA.$$

Ahora, usamos la regla de la cadena, recordando que F_1, F_2 y F_3 son funciones de x, y, z y que z es una función de x e y , de modo que

$$\begin{aligned} & \iint_D \left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + F_3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + F_3 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) \right] dA. \end{aligned}$$

Puesto que las derivadas cruzadas coinciden, los dos últimos términos de cada paréntesis se cancelan entre sí, y podemos reordenar los términos restantes para obtener la integral de la Ecuación (2), lo que concluye la prueba. ■

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{F} = ye^z \mathbf{i} + xe^z \mathbf{j} + xye^z \mathbf{k}$. Demostrar que la integral de \mathbf{F} a lo largo de una curva orientada cerrada y simple C que es la frontera de una superficie S vale 0. (Supóngase que S es la gráfica de una función, como en el Teorema 5).

Solución

En efecto, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, por el teorema de Stokes. Pero, calculando el rotacional,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^z & xe^z & xye^z \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

y por tanto $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$. Alternativamente, también podemos observar que $\mathbf{F} = \nabla(xye^z)$, de manera que su integral a lo largo de una curva cerrada es cero. ▲

Ejemplo 2

Usar el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea

$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz,$$

donde C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$, y la orientación de C corresponde a un movimiento antihorario en el plano xy .

Solución

La curva C limita la superficie S definida por la ecuación $z = 1 - x - y = f(x, y)$ para (x, y) en el conjunto $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ (Figura

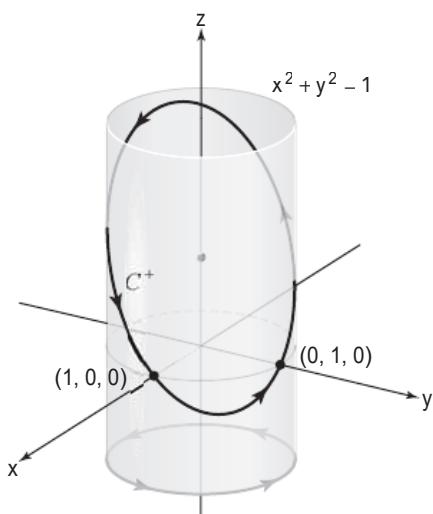


Figura 8.2.2 La curva C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y del plano $x + y + z = 1$.

8.2.2). Consideramos el campo $\mathbf{F} = -y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} - z^3\mathbf{k}$, cuyo rotacional es $\nabla \times \mathbf{F} = (3x^2 + 3y^2)\mathbf{k}$. Entonces, por el teorema de Stokes, la integral de línea es igual a la integral de superficie

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Pero $\nabla \times \mathbf{F}$ solo tiene componente \mathbf{k} . Por tanto, según la fórmula (1), tenemos

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (3x^2 + 3y^2) dx dy.$$

Esta integral puede evaluarse cambiando a coordenadas polares. Haciendo esto, obtenemos:

$$3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r d\theta dr = 6\pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}.$$

Comprobemos *directamente* este resultado evaluando la integral de línea

$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz.$$

Podemos parametrizar la curva ∂D mediante las ecuaciones $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Por tanto, la curva C estará parametrizada por

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 1 - \sin t - \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz &= \int_0^{2\pi} [(-\sin^3 t)(-\sin t) + (\cos^3 t)(\cos t) \\ &\quad - (1 - \sin t - \cos t)^3(-\cos t + \sin t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) dt - \int_0^{2\pi} (1 - \sin t - \cos t)^3(-\cos t + \sin t) dt. \end{aligned}$$

El segundo integrando es de la forma $u^3 du$, donde $u = 1 - \sin t - \cos t$, y por tanto la integral es igual a

$$\frac{1}{4}[(1 - \sin t - \cos t)^4]_0^{2\pi} = 0.$$

De ese modo, solo nos queda calcular

$$\int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) dt.$$

Esta integral puede evaluarse usando las Fórmulas (18) y (19) de la tabla de integrales. También podríamos usar el procedimiento siguiente: utilizando las identidades trigonométricas

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2},$$

sustituyendo y elevando al cuadrado estas expresiones, la integral anterior se reduce a

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 2t) dt = \pi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 2t dt.$$

Usando nuevamente la identidad $\cos^2 2t = (1 + \cos 4t)/2$, resulta

$$\begin{aligned} \pi + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 4t) dt &= \pi + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos 4t dt \\ &= \pi + \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$
▲

El teorema de Stokes para superficies parametrizadas

Para simplificar la prueba del teorema de Stokes que dimos anteriormente, supusimos que la superficie S podía describirse como la gráfica de una función $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, donde D es una región en la cual es aplicable el teorema de Green. Sin embargo, sin mucho más esfuerzo podemos conseguir un *teorema más general* para superficies parametrizadas orientadas S . La complicación principal es la definición de ∂S .

Supongamos que $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de una superficie S y $\mathbf{c}(t) = (u(t), v(t))$ es una parametrización de ∂D . Podríamos tener la tentación de definir ∂S como la curva parametrizada por $t \mapsto \mathbf{p}(t) = \Phi(u(t), v(t))$. Sin embargo, con esta definición, ∂S podría no ser la frontera de S en ningún sentido geométrico razonable.

Por ejemplo, podríamos concluir que la frontera de la esfera unidad S parametrizada usando coordenadas esféricas en \mathbb{R}^3 es la mitad del círculo máximo de S contenido en el plano xz , pero claramente, en un sentido geométrico, S es una superficie suave (sin picos o cúspides) que no tiene ni frontera ni borde en modo alguno (véanse la Figura 8.2.3 y el Ejercicio 20). Por tanto, ese círculo máximo es, en cierto sentido, la frontera “incorrecta” de S .

Podemos resolver esta dificultad suponiendo que Φ es inyectiva sobre todo D . Entonces, la imagen de ∂D bajo Φ , es decir, $\Phi(\partial D)$, será la

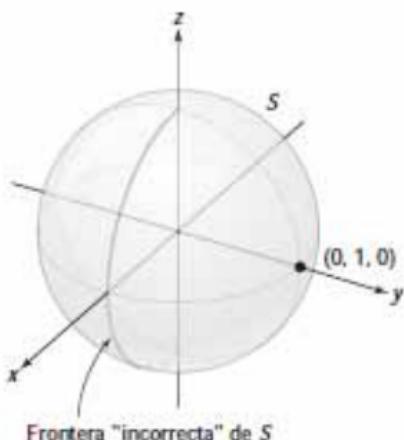


Figura 8.2.3 La superficie S es una esfera.

frontera geométrica de $S = \Phi(D)$. Si $\mathbf{c}(t) = (u(t), v(t))$ es una parametrización de ∂D en la dirección positiva, definimos ∂S como la curva orientada cerrada y simple que es la imagen de la aplicación $\mathbf{p}: t \mapsto \Phi(u(t), v(t))$, con la orientación de ∂S inducida por \mathbf{p} (véase la Figura 8.2.1).

Teorema 6 Teorema de Stokes: superficies parametrizadas

Sea S una superficie orientada definida mediante una parametrización inyectiva $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, donde D es una región en la cual es aplicable el teorema de Green. Sea ∂S la frontera orientada de S y sea \mathbf{F} un campo vectorial C^1 definido sobre S . Entonces

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Si S no tiene frontera, y esto incluye superficies como la esfera, entonces la integral de la izquierda es cero (véase el Ejercicio 25).

Este teorema se prueba del mismo modo que el Teorema 5.

Ejemplo 3

Sea S la superficie mostrada en la Figura 8.2.4, con la orientación indicada. Sea $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + e^{xz}\mathbf{k}$. Evaluar $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$.

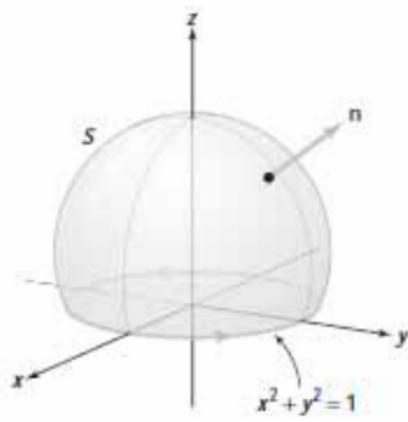


Figura 8.2.4 Esta superficie S es una porción de una esfera colocada sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$. No incluye el círculo $x^2 + y^2 < 1$ contenido en el plano xy .

Solución

Esta superficie se puede parametrizar utilizando coordenadas esféricas basadas en el centro de la esfera. Sin embargo, no necesitamos hallar Φ explícitamente para resolver este problema. Por el Teorema 6, $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, y por tanto, si parametrizamos ∂S mediante $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} dt = -2\pi\end{aligned}$$

de modo que $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = -2\pi$. ▲

El rotacional como circulación por unidad de área

A continuación vamos a usar el teorema de Stokes para justificar la interpretación física de $\nabla \times \mathbf{F}$ en términos de una rueda con palas que se propuso en el Capítulo 4. Parafraseando el Teorema 6, tenemos

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial S} F_T ds,$$

donde F_T es la componente tangencial de \mathbf{F} . Esto dice que la integral de la componente normal del rotacional de un campo vectorial sobre una superficie orientada S es igual a la integral de línea de \mathbf{F} a lo largo de ∂S , que a su vez es igual a la integral de trayectoria de la componente tangencial de \mathbf{F} sobre ∂S .

Supongamos que \mathbf{V} representa el campo vectorial de velocidades de un fluido. Consideremos un punto P y un vector unitario \mathbf{n} . Sea S_ρ el círculo de radio ρ y centro P que es perpendicular a \mathbf{n} . Por el teorema de Stokes,

$$\iint_{S_\rho} \text{rot } \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_\rho} \text{rot } \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial S_\rho} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s},$$

donde ∂S_ρ tiene la orientación inducida por \mathbf{n} (véase la Figura 8.2.5).

Por el teorema del valor medio para integrales (Ejercicio 16, Sección 7.6), existe un punto Q en S_ρ tal que

$$\iint_{S_\rho} \text{rot } \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = [\text{rot } \mathbf{V}(Q) \cdot \mathbf{n}] A(S_\rho),$$

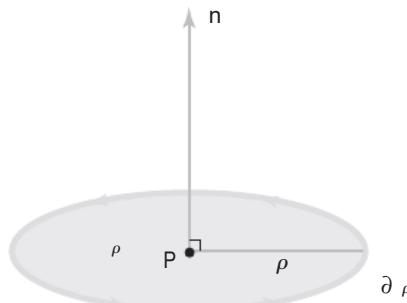


Figura 8.2.5 Un vector normal \mathbf{n} induce una orientación en la frontera ∂S_ρ del círculo S_ρ .

donde $A(S_\rho) = \pi\rho^2$ es el área de S_ρ y $\text{rot } \mathbf{V}(Q)$ es el valor de $\text{rot } \mathbf{V}$ en Q . Entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \int_{\partial S_\rho} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \iint_{S_\rho} (\text{rot } \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \text{rot } \mathbf{V}(Q) \cdot \mathbf{n} = \text{rot } \mathbf{V}(P) \cdot \mathbf{n}.\end{aligned}$$

Por tanto,¹

$$\text{rot } \mathbf{V}(P) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \int_{\partial S_\rho} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}. \quad (5)$$

Detengámonos a considerar el significado físico de $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ cuando \mathbf{V} es el campo de velocidades de un fluido. Supongamos, por ejemplo, que \mathbf{V} apunta en la dirección tangente a la curva orientada C (Figura 8.2.6). Entonces, claramente, $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} > 0$, y las partículas de C tenderán a girar en sentido contrario a las agujas del reloj. Si \mathbf{V} apunta en la dirección opuesta, entonces $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} < 0$ y las partículas tenderán a rotar en el sentido de las agujas del reloj. Si \mathbf{V} es perpendicular a C , entonces las partículas no rotan sobre C en modo alguno y $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = 0$. En general, $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$, que es la integral de la componente tangencial de \mathbf{V} , representa la cantidad neta de giro del fluido en sentido antihorario a lo largo de C . Por esta razón, $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ se denomina **circulación** del campo \mathbf{V} alrededor de C (véase la Figura 8.2.7).

Estos resultados nos permiten ver el significado preciso de $\text{rot } \mathbf{V}$ respecto del movimiento de un fluido. La circulación $\int_{\partial S_\rho} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ es la velocidad neta del fluido alrededor de ∂S_ρ , de modo que $(\text{rot } \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}$ representa el efecto de giro o rotación del fluido alrededor del eje \mathbf{n} .

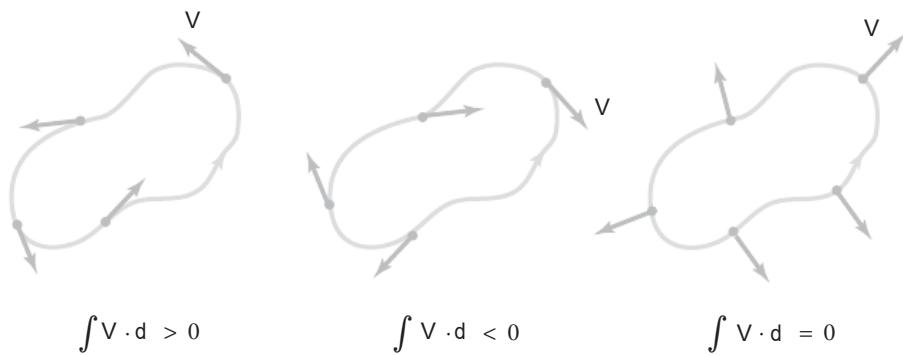


Figura 8.2.6 El significado intuitivo de los posibles signos de $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$.

¹ Algunos textos informales adoptan la Ecuación (5) como *definición* del rotacional, y la usan para “demostrar” el teorema de Stokes. Sin embargo, este método aumenta el riesgo de caer en un razonamiento circular, puesto que para demostrar que la Ecuación (5) define realmente un vector “ $\text{rot } \mathbf{V}(P)$ ” hace falta usar el teorema de Stokes, o algún argumento similar.

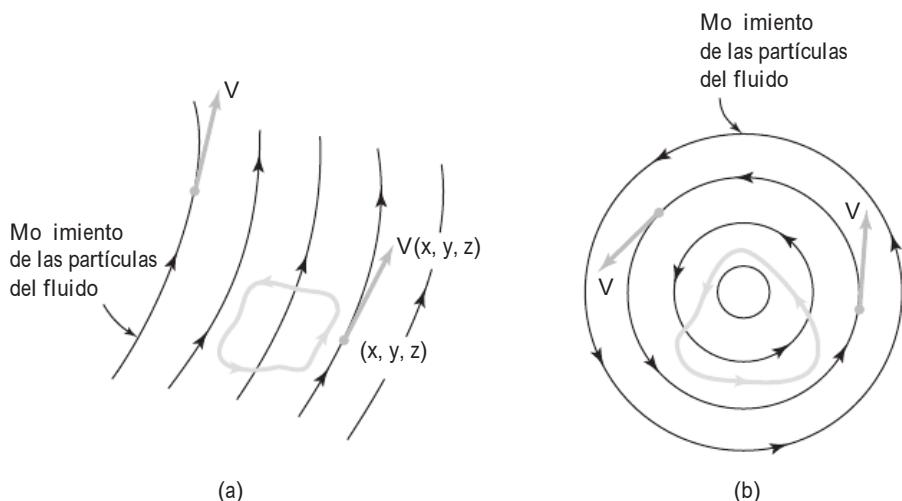


Figura 8.2.7 Circulación de un campo vectorial (campo de velocidades de un fluido): (a) la circulación alrededor de C es cero; (b) circulación no nula alrededor de C (“remolino”).

Circulación y rotacional El producto escalar de $\text{rot } \mathbf{V}(P)$ por un vector unitario \mathbf{n} , es decir, $\text{rot } \mathbf{V}(P) \cdot \mathbf{n}$, es igual a la circulación de \mathbf{V} por unidad de área en P sobre una superficie perpendicular a \mathbf{n} .

Obsérvese que la magnitud de $\text{rot } \mathbf{V}(P) \cdot \mathbf{n}$ se maximiza cuando $\mathbf{n} = \text{rot } \mathbf{V}/\|\text{rot } \mathbf{V}\|$ (evaluado en P). Por tanto, el efecto de rotación en P es mayor alrededor del eje que es paralelo a $\text{rot } \mathbf{V}/\|\text{rot } \mathbf{V}\|$. Por esto, $\text{rot } \mathbf{V}$ es adecuadamente denominado **vector vorticidad**.

Podemos utilizar estas ideas para calcular el rotacional en coordenadas cilíndricas. .

Ejemplo 4

Sean $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ los vectores unitarios asociados a las coordenadas cilíndricas, como se muestra en la Figura 8.2.8. Sea $\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta + F_z \mathbf{e}_z$. (Los subíndices en este caso denotan componentes de \mathbf{F} , no derivadas parciales.) Hallar una fórmula para la componente \mathbf{e}_r de $\nabla \times \mathbf{F}$ en coordenadas cilíndricas.

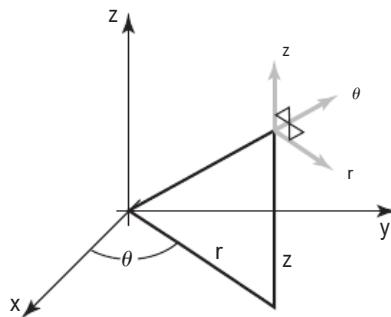


Figura 8.2.8 Vectores ortonormales $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ y \mathbf{e}_z asociados a las coordenadas cilíndricas. El vector \mathbf{e}_r es paralelo a la línea etiquetada con r .

Solución

Sea S la superficie mostrada en la Figura 8.2.9. El área de S es $r d\theta dz$ y la normal unitaria es \mathbf{e}_r . La integral de \mathbf{F} alrededor de los bordes de S es aproximadamente

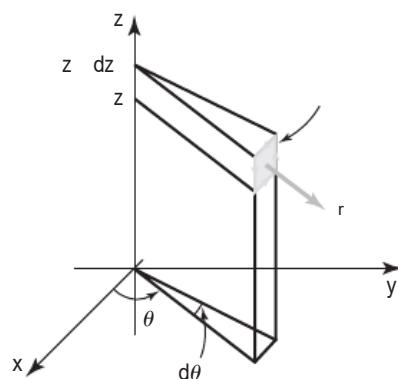


Figura 8.2.9 Un elemento de superficie en coordenadas cilíndricas.

$$\begin{aligned} & [F_\theta(r, \theta, z) - F_\theta(r, \theta, z + dz)]r d\theta + [F_z(r, \theta + d\theta, z) - F_z(r, \theta, z)] dz \\ & \approx -\frac{\partial F_\theta}{\partial z} dz r d\theta + \frac{\partial F_z}{\partial \theta} d\theta dz. \end{aligned}$$

Por tanto, la circulación por unidad de área es esta expresión dividida entre $r d\theta dz$, concretamente,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}.$$

De acuerdo con el recuadro anterior, esto debe ser la componente \mathbf{e}_r del rotacional. ▲

Gradiente, divergencia y rotacional en coordenadas cilíndricas y esféricas

Por argumentos similares a los del Ejemplo 4, encontramos que el rotacional en coordenadas cilíndricas está dado por

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}.$$

Podemos determinar otras importantes cantidades vectoriales expresadas en diferentes sistemas de coordenadas. Por ejemplo, la regla de la cadena muestra que el gradiente en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z,$$

y en la Sección 8.4 estableceremos técnicas relacionadas que dan la fórmula siguiente para la divergencia en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rF_r) + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} (rF_z) \right].$$

Las fórmulas correspondientes para el gradiente, la divergencia y el rotacional en coordenadas esféricas son:

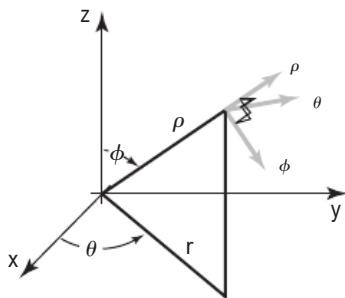


Figura 8.2.10 Vectores ortonormales \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_ϕ y \mathbf{e}_θ asociados con las coordenadas esféricas.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\operatorname{sen} \phi F_\phi) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$$

y

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left[\frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\operatorname{sen} \phi F_\theta) - \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial F_\phi}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\rho$$

$$+ \left[\frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\theta) \right] \mathbf{e}_\phi + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{e}_\theta,$$

donde \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_ϕ , \mathbf{e}_θ son vectores unitarios como los mostrados en la Figura 8.2.10 y donde $\mathbf{F} = F_\rho \mathbf{e}_\rho + F_\phi \mathbf{e}_\phi + F_\theta \mathbf{e}_\theta$.

Ley de Faraday

El cálculo vectorial desempeña un papel esencial en la teoría del electromagnetismo. El siguiente ejemplo muestra cómo se aplica el teorema de Stokes.

Ejemplo 5

Sean \mathbf{E} y \mathbf{H} campos eléctrico y magnético, respectivamente, dependientes del tiempo, en el espacio. Sea S una superficie con frontera C . Definimos

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \text{circulación del campo eléctrico a lo largo de } C,$$

$$\iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \text{flujo magnético a través de } S.$$

La **ley de Faraday** (véase la Figura 8.2.11) establece que la *circulación del campo eléctrico a lo largo de C es igual a la tasa de cambio del flujo magnético a través de S* . Demostrar que la ley de Faraday se sigue de la siguiente ecuación diferencial (una de las ecuaciones de Maxwell):

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

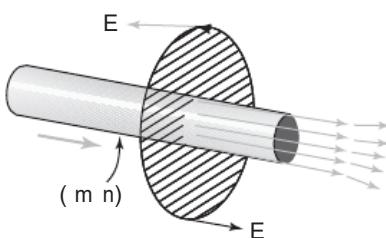


Figura 8.2.11 Ley de Faraday.

Solución

Suponemos que $-\partial\mathbf{H}/\partial t = \nabla \times \mathbf{E}$. Por el teorema de Stokes,

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Suponiendo que podemos pasar $\partial/\partial t$ dentro del signo de integral, obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S},$$

que es la ley de Faraday. ▲

La caída de los gatos y el teorema de Stokes

Figura 8.2.12 Un gato es capaz de ponerse derecho durante una caída retorciendo partes de su cuerpo.

Todos nos hemos preguntado en alguna ocasión cómo es posible que los gatos caigan siempre de pie. Si soltamos un gato desde una posición de reposo en la que sus patas están por encima de su cabeza, el gato es capaz de hacer un giro de 180° y reorientarse y caer sobre sus patas. Este conocido fenómeno ha fascinado a la gente durante muchos años —especialmente en ciudades como Nueva York, donde se sabe que hay gatos que han sobrevivido a caídas de 8 a 30 pisos!

Se han dado muchas explicaciones incorrectas a la capacidad de los gatos para enderezarse en el aire, incluyendo la idea de que tenía que ver con el modo en que el gato gira su cola. Esto no puede ser cierto porque hay gatos que no tienen cola (los gatos de raza Manx) y, sin embargo, también pueden realizar estas hazañas.

Podemos observar, como se puede ver en la Figura 8.2.12, que el gato consigue cambiar su orientación retorciendo el cuerpo, creando *cambios en su forma interna o configuración*. Visto esto de forma superficial, da lugar a una aparente contradicción; dado que se deja caer al gato desde una posición de reposo, tiene un momento angular igual a cero al inicio de la caída y, por tanto, de acuerdo con la ley básica de la física conocida como ley de *conservación del momento angular*, el gato tiene momento angular cero a lo largo de toda la caída.² Sorprendentemente, el gato cambia efectivamente su posición angular, ¡mientras que mantiene el momento angular nulo!

El proceso exacto por el que esto ocurre es sutil; el razonamiento intuitivo puede llevarnos por caminos erróneos y, como ya hemos indicado, se han ofrecido muchas explicaciones falsas a lo largo de la historia con

²Hemos visto un ejemplo de la ley de la conservación del momento angular en el Ejercicio 26 de la Sección 4.1

el fin de intentar resolver este misterio.³ Recientemente, se han descubierto nuevas e interesantes ideas utilizando métodos geométricos que, en efecto, están relacionados con la curvatura (véase la Sección 7.7).⁴

La forma en que la curvatura y la geometría están relacionadas con el fenómeno de la caída de los gatos no es fácil de explicar de forma detallada, pero podemos explicar un fenómeno similar que es fácil de comprender. Diremos que es interesante el que el *teorema de Stokes es la clave para entender este tipo de fenómenos*.

Ejercicios

- 1.** Sea S la parte del plano $2x + 3y + z = 5$ que está entre los puntos $(-1, 1, 4)$, $(2, 1, -2)$, $(2, 3, -8)$ y $(-1, 3, -2)$. Hallar parametrizaciones tanto para la superficie S como para su frontera ∂S . Asegurarse de que sus respectivas orientaciones son compatibles con el teorema de Stokes.
- 2.** Sea S la porción de la superficie $z = x^2 + y^2$ que está entre los puntos $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 4)$, $(0, 2, 4)$ y $(2, 2, 8)$. Hallar parametrizaciones tanto para la superficie S como para su frontera ∂S . Asegurarse de que sus respectivas orientaciones son compatibles con el teorema de Stokes.

En los Ejercicios 3 a 6, verificar el teorema de Stokes para las superficies S , las fronteras ∂S y los campos vectoriales \mathbf{F} dados.

3. $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$
(orientada como una gráfica)

$$\partial S = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

4. S como en el Ejercicio 1 y $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

5. $S = \{(x, y, z) : z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$
(orientada como una gráfica)

$$\partial S = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + (2zx + 2xy)\mathbf{k}.$$

6. S como en el Ejercicio 3 y $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$.

7. Sea C la curva suave a trozos cerrada que se forma al moverse por las rectas entre los puntos $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 4)$, $(3, 2, 6)$, $(1, 2, 2)$ y vuelta al

³Otro popular argumento falaz, que demuestra que un gato *no puede* girar sobre sí mismo durante la caída es el siguiente: “Aceptamos de la física que el momento angular es el momento de inercia por la velocidad angular [en la Sección 6.3 hemos estudiado los momentos de inercia]. Pero el momento angular del gato es cero, por lo que la velocidad también tiene que ser igual a cero. Dado que la velocidad angular es la tasa de variación de la posición angular, la posición angular es constante. Por tanto, el gato no puede girar sobre sí mismo.” ¿Qué es erróneo en este razonamiento? Este argumento ignora el hecho de que el gato cambia su *forma* y por tanto su momento de inercia durante la caída.

⁴Véase T. R. Kane y M. Scher, “A Dynamical Explanation of the Falling Cat Phenomenon”, *Int. J. Solids Struct.*, 5 (1969): 663–670. Véase también R. Montgomery, “Isoholonomic Problems and Some Applications”, *Commun. Math. Phys.*, 128 (1990): 565–592; R. Montgomery, “How Much Does a Rigid Body Rotate? A Berry’s Phase from the 18th Century,” *Am. J. Phys.*, 59 (1991b): 394–398. Véase también J. E. Marsden y J. Ostrowski, “Symmetries in Motion: Geometric Foundations of Motion Control”, *Nonlinear Science Today* (1998), <http://link.springer.com>; R. Batterman, “Falling Cats, Parallel Parking, and Polarized Light”, *Philos. Soc. Arch.* (2002); <http://philsci-archive.pitt.edu/documents/disk0/00/00/05/83>, http://www.its.caltech.edu/~mleok/falling_cats.htm, and references therein.

origen, en dicho orden (así la superficie S que descansa en el interior de C está contenida en el plano $z = 2x$). Utilizar el teorema de Stokes para calcular la integral:

$$\int_C (z \cos x) dx + (x^2 yz) dy + (yz) dz$$

- 8.** Sea C la curva suave a trozos cerrada que se forma al moverse por las rectas entre los puntos $(0, 0, 0)$, $(2, 1, 5)$, $(1, 1, 3)$, y vuelta al origen, en dicho orden. Utilizar el teorema de Stokes para calcular la integral:

$$\int_C (xyz) dx + (xy) dy + (x) dz$$

- 9.** Rehacer el Ejercicio 9 de la Sección 7.6 utilizando el teorema de Stokes.
- 10.** Rehacer el Ejercicio 10 de la Sección 7.6 utilizando el teorema de Stokes.
- 11.** Verificar el teorema de Stokes para la semiesfera superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z \geq 0$ y el campo vectorial radial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
- 12.** Sea S una superficie con frontera ∂S y supongamos que \mathbf{E} es un campo eléctrico perpendicular a ∂S . Demostrar que el flujo magnético inducido a través de S es constante en el tiempo. (SUGERENCIA: utilizar la ley de Faraday).
- 13.** Sea S la superficie cilíndrica con tapa mostrada en la Figura 8.2.13. S es la unión de dos superficies, S_1 y S_2 , donde S_1 es el conjunto de puntos (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, y S_2 es el conjunto de puntos (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, $z \geq 1$. Set $\mathbf{F}(x, y, z) = (zx + z^2y + x)\mathbf{i} + (z^3yx + y)\mathbf{j} + z^4x^2\mathbf{k}$. Calcular $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$. (SUGERENCIA: el teorema de Stokes se cumple para esta superficie).
- 14.** Sea c la trayectoria formada por las rectas que unen los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, y sea S el triángulo con estos vértices. Verificar el teorema de Stokes directamente con $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.
- 15.** Calcular la integral $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la porción de la superficie de una esfera definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x + y + z \geq 1$, y donde $\mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\mathbf{r} = xi + yj + zk$.

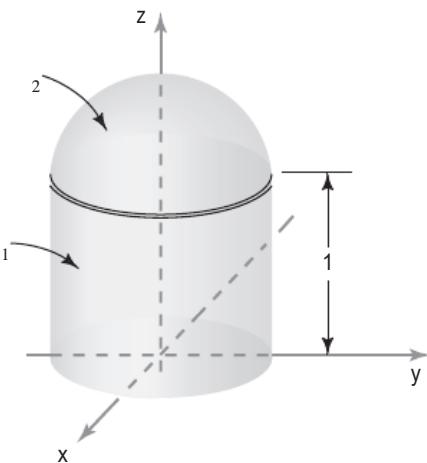


Figura 8.2.13 El cilindro con tapa es la unión de S_1 y S_2 .

- 16.** Demostrar que el cálculo del Ejercicio 15 se puede simplificar observando que $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial \Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para cualquier otra superficie Σ . Eligiendo Σ de forma apropiada, $\iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ puede calcularse fácilmente. Demostrar que este es el caso si tomamos Σ como la porción del plano $x + y + z = 1$ acotado por la circunferencia ∂S .
- 17.** Calcular la integral de superficie $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, y $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} - y^3\mathbf{j}$.
- 18.** Hallar $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ y \mathbf{F} es el campo vectorial $\mathbf{F} = (\operatorname{sen} xy)\mathbf{i} + e^x\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$.
- 19.** Sea $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + zx^3y^2\mathbf{k}$. Calcular $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA$, donde S es la superficie definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leq 0$.



Figura 8.2.14 Globo de aire caliente.

- 20.** Un globo de aire caliente tiene forma de esfera truncada, como se muestra en la Figura 8.2.14. Los gases calientes se escapan a través de la superficie porosa del globo según un campo vectorial de velocidades

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \nabla \times \Phi(x, y, z)$$

donde $\Phi(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

Si $R = 5$, calcular el flujo de los gases a través de la superficie.

- 21.** Demostrar que la ley de Faraday implica que $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{H}/\partial t$.

- 22.** Sea S una superficie y sea \mathbf{F} perpendicular a la tangente a la frontera de S . Demostrar que

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

¿Cuál es el significado físico si \mathbf{F} es un campo eléctrico?

- 23.** Considérense dos superficies S_1 y S_2 con la misma frontera ∂S . Describir mediante un dibujo cómo deben orientarse S_1 y S_2 para garantizar que

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

- 24.** Para una superficie S y un vector fijo \mathbf{v} , demostrar que

$$2 \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial S} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s},$$

donde $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$.

- 25.** Razonar de manera informal que si S es una superficie cerrada, entonces

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(véase el Ejercicio 23). (Una *superficie cerrada* es aquella que forma la frontera de una región en el espacio; por ejemplo, una esfera es una superficie cerrada).

- 26.** Si C es una curva cerrada que es la frontera de una superficie S y f y g son funciones C^2 , demostrar que

$$(a) \int_C f \nabla g \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\mathbf{S}$$

$$(b) \int_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{s} = 0$$

- 27.** (a) Si C es una curva cerrada que es la frontera de una superficie S y \mathbf{v} es un vector constante, demostrar que

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

- (b) Demostrar que esto es cierto incluso si C no es la frontera de una superficie S .

- 28.** Demostrar que $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3, D = [0, \pi] \times [0, 2\pi], \Phi(\phi, \theta) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi)$, que parametriza la esfera unidad, lleva la frontera de D a la mitad de un círculo máximo en S .

- 29.** Verificar el Teorema 6 para el helicóide $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta), (r, \theta) \in [0, 1] \times [0, \pi/2]$ y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, x, y)$.

- 30.** Demostrar el Teorema 6.

- 31.** Sea $\mathbf{F} = x^2 \mathbf{i} + (2xy + x)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Sea C la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y S el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ en el plano $z = 0$.

- (a) Determinar el flujo de \mathbf{F} hacia el exterior de S .
(b) Determinar la circulación de \mathbf{F} a lo largo de C .
(c) Hallar el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$. Verificar el teorema de Stokes directamente en este caso.

- 32.** Sea S una superficie con frontera ∂S y supóngase que \mathbf{E} es un campo eléctrico que es perpendicular a ∂S . Utilizar la ley de Faraday para demostrar que el flujo magnético inducido a través de S es constante en el tiempo.

- 33.** Integrar $\nabla \times \mathbf{F}, \mathbf{F} = (3y, -xz, -yz^2)$ sobre la porción de la superficie $2z = x^2 + y^2$ que se encuentra debajo del plano $z = 2$ directamente y utilizando el teorema de Stokes.

- 34.** La *ley de Ampère* establece que si la densidad de corriente eléctrica se describe mediante un campo vectorial \mathbf{J} y el campo magnético inducido es \mathbf{H} , entonces la circulación de \mathbf{H} a lo largo de la frontera C de una superficie S es igual a la integral de \mathbf{J} sobre S (es decir, a la corriente total que atraviesa S). Véase la Figura 8.2.15. Demostrar que la *ecuación de Maxwell* estacionaria $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ implica esto.

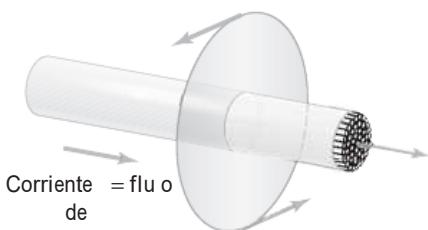


Figura 8.2.15 Ley de Ampère.

35. La ley de Faraday relaciona la integral de línea del campo eléctrico a lo largo de una espira C con la integral de superficie de la tasa de variación del campo magnético sobre una superficie S con frontera C . Tomando la ecuación

$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{H} / \partial t$ como ecuación básica, la ley de Faraday es una consecuencia del teorema de Stokes, como hemos visto en el Ejemplo 4.

Supongamos que tenemos campos eléctrico y magnético dados en el espacio que satisfacen $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{H} / \partial t$. Supongamos que C es la frontera de la banda de Möbius mostrada en las Figuras 7.6.3 y 7.6.4. Dado que la banda de Möbius no se puede orientar, el teorema de Stokes no es aplicable. ¿En qué se transforma la ley de Faraday? ¿A qué es igual $\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$?

36. (a) Si escribimos en coordenadas esféricas $\mathbf{e}_r = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}$, hallar α , β , y γ .
 (b) Hallar fórmulas similares para \mathbf{e}_ϕ y \mathbf{e}_θ .

8.3 Campos conservativos

En la Sección 7.2 hemos visto que para un campo de fuerza gradiente $\mathbf{F} = \nabla f$, las integrales de línea de \mathbf{F} se evaluaban como sigue:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(\mathbf{c}(b)) - f(\mathbf{c}(a)).$$

El valor de la integral solo depende de los puntos extremos $\mathbf{c}(b)$ y $\mathbf{c}(a)$ de la trayectoria. En otras palabras, si usáramos otra trayectoria con los mismos extremos, obtendríamos la misma respuesta. Esto nos lleva a decir que la integral es *independiente de la trayectoria*.

Los campos gradientes son importantes en muchos problemas de la física. Por ejemplo, si $V = -f$ representa una energía potencial (gravitatoria, eléctrica, etc.), entonces \mathbf{F} representa una fuerza.⁵ Consideremos el ejemplo de una partícula de masa m en el campo gravitatorio de la Tierra; en este caso, f viene dada por GmM/r o $V = -GmM/r$, donde G es la constante gravitatoria, M es la masa de la Tierra y r es la distancia desde el centro de la Tierra. La fuerza correspondiente es $\mathbf{F} = -(GmM/r^3)\mathbf{r} = -(GmM/r^2)\mathbf{n}$, donde \mathbf{n} es el vector unitario radial. Obsérvese que \mathbf{F} no está definida en el punto $r = 0$.

¿Cuándo son gradientes los campos vectoriales?

Deseamos caracterizar aquellos campos vectoriales que se pueden escribir como un gradiente. El teorema de Stokes simplifica considerablemente esta tarea.

⁵Si se utiliza el signo menos, entonces V es *decreciente* en la dirección de \mathbf{F} .

Teorema 7 Campos conservativos Sea \mathbf{F} un campo vectorial C^1 definido en \mathbb{R}^3 , excepto posiblemente para un número finito de puntos. Las siguientes condiciones sobre \mathbf{F} son equivalentes:

- (I) Para cualquier curva cerrada simple orientada C , $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$.
- (II) Para dos curvas simples orientadas C_1 y C_2 que tienen los mismos extremos,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

- (III) \mathbf{F} es el gradiente de alguna función f ; es decir, $\mathbf{F} = \nabla f$ (y si \mathbf{F} tiene uno o más puntos singulares donde no está definido, entonces f tampoco estará definida allí).
- (IV) $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Un campo vectorial que satisface una (y, por tanto, todas) de las condiciones (I)–(IV) se denomina **campo vectorial conservativo**.⁶

Demostración Vamos a establecer la siguiente cadena de implicaciones, la cual demostrará el teorema:

$$(I) \Rightarrow (II) \Rightarrow (III) \Rightarrow (IV) \Rightarrow (I).$$

Primero demostraremos que la condición (I) implica la condición (II). Supongamos que \mathbf{c}_1 y \mathbf{c}_2 son parametrizaciones que representan C_1 y C_2 , con los mismos puntos extremos. Construimos la curva cerrada \mathbf{c} obtenida recorriendo primero \mathbf{c}_1 y luego $-\mathbf{c}_2$ (Figura 8.3.1), o, simbólicamente, la curva $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$. Suponiendo que \mathbf{c} es simple, la condición (I) da

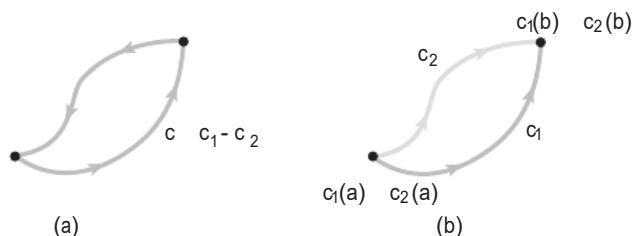
$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

y por tanto se satisface la condición (II). (Si \mathbf{c} no es simple, se necesita un argumento adicional, que aquí se ha omitido).

A continuación, demostramos que la condición (II) implica la condición (III). Sea C cualquier curva simple orientada que une un punto cualquiera, como por ejemplo $(0, 0, 0)$, al punto (x, y, z) , y supongamos que C está representada por la parametrización \mathbf{c} [si $(0, 0, 0)$ es el punto singular de \mathbf{F} , podemos elegir un punto de inicio diferente para \mathbf{c} sin que el argumento se vea afectado]. Definimos $f(x, y, z)$ como $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. Por la

⁶En el plano \mathbb{R}^2 , no se permiten puntos singulares (véase el Ejercicio 16). El Teorema 7 se puede demostrar del mismo modo si \mathbf{F} está definido y es de clase C^1 solo en un conjunto abierto y convexo en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 . (Un conjunto D es convexo si $P, Q \in D$ implica que el segmento que une P y Q también pertenece a D).

Figura 8.3.1 Construcción de (a) una curva cerrada simple orientada $\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$ (b) a partir de dos curvas simples orientadas.



hipótesis (II), $f(x, y, z)$ es independiente de C . Vamos a demostrar que $\mathbf{F} = \text{grad } f$. En efecto, elegimos \mathbf{c} para que sea la trayectoria mostrada en la Figura 8.3.2, de modo que

$$f(x, y, z) = \int_0^x F_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) dt + \int_0^z F_3(x, y, t) dt,$$

donde $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

Se sigue del teorema fundamental del cálculo que $\partial f / \partial z = F_3$. Podemos repetir este proceso usando otras dos trayectorias de $(0, 0, 0)$ a (x, y, z) [por ejemplo, trazando los segmentos que unen $(0, 0, 0)$ a $(0, y, 0)$, luego a $(x, y, 0)$ y hasta (x, y, z)], y podemos demostrar de forma similar que $\partial f / \partial x = F_1$ y $\partial f / \partial y = F_2$ (véase el Ejercicio 26). Por tanto, $\nabla f = \mathbf{F}$.

En tercer lugar, la condición (III) implica la condición (IV), ya que, como se ha probado en la Sección 4.4,

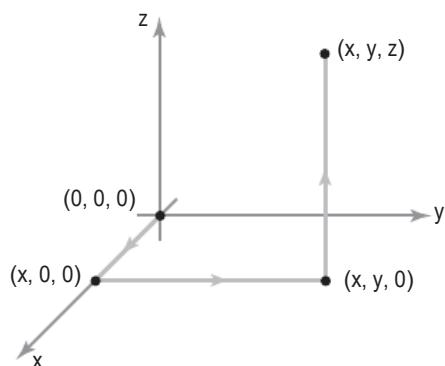
$$\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}.$$

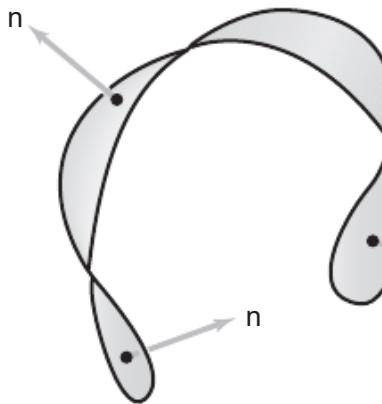
Finalmente, sea \mathbf{c} una representación de una curva cerrada C y sea S cualquier superficie cuya frontera es \mathbf{c} (si \mathbf{F} tiene puntos singulares, seleccionamos S para evitarlos). La Figura 8.3.3 indica que probablemente siempre podremos encontrar tal superficie; sin embargo, una demostración formal de esto requiere el desarrollo de ideas matemáticas más sofisticadas de las que aquí podemos presentar. Por el teorema de Stokes,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Puesto que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, esta integral es nula, por lo que la condición (IV) \Rightarrow condición (I). ■

Figura 8.3.2 Una trayectoria que une $(0, 0, 0)$ a (x, y, z) .





Interpretaciones físicas

Ya hemos visto que una interpretación física de el trabajo realizado por \mathbf{F} en la recta es la segunda interpretación es la final de la última sección. Considerando \mathbf{F} como el campo de velocidad de un fluido en el espacio, \mathbf{F} asigna el vector velocidad a cada punto de la sección, denotamos \mathbf{F} a una pequeña cuerda dirigida en la dirección tangencial a la sección. La componente tangencial $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es la componente del trabajo realizado por el campo de velocidad en la recta. Una rueda con paletas colocadas en la recta, si se coloca un punto en el que \mathbf{F} se aplica, el trabajo realizado por el campo de velocidad es $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ para pequeñas distancias.

Existe una interpretación física de la integral de una función que representa un campo eléctrico.

Solución

Calculamos $\nabla \times \mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x + z \cos yz & y \cos yz \end{vmatrix} \\ &= (\cos yz - yz \sen yz - \cos yz + yz \sen yz)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (1 - 1)\mathbf{k} \\ &= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0},\end{aligned}$$

por lo que \mathbf{F} es irrotacional. Entonces, según el Teorema 7, existe un potencial, que podemos hallar de varias formas.

Método 1. Mediante la técnica utilizada para demostrar que la condición (II) implica la condición (III) en el Teorema 7, podemos establecer que

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= \int_0^x F_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) dt + \int_0^z F_3(x, y, t) dt \\ &= \int_0^x 0 dt + \int_0^y x dt + \int_0^z y \cos yt dt \\ &= 0 + xy + \sen yz = xy + \sen yz.\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que $\nabla f = \mathbf{F}$, como queríamos:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = y\mathbf{i} + (x + z \cos yz)\mathbf{j} + (y \cos yz)\mathbf{k}.$$

Método 2. Puesto que sabemos que f existe, sabemos que podemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z \cos yz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y \cos yz,$$

para $f(x, y, z)$. Este sistema es equivalente a las ecuaciones

- (a) $f(x, y, z) = xy + h_1(y, z)$
- (b) $f(x, y, z) = \sen yz + xy + h_2(x, z)$
- (c) $f(x, y, z) = \sen yz + h_3(x, y)$

para funciones h_1, h_2 y h_3 independientes de x, y y z (respectivamente). Cuando $h_1(y, z) = \sen yz$, $h_2(x, z) = 0$ y $h_3(x, y) = xy$, las tres ecuaciones coinciden y nos dan un potencial para \mathbf{F} . Sin embargo, solo hemos intuido los valores de h_1, h_2 y h_3 . Para deducir la fórmula para f de forma más sistemática, observamos que como $f(x, y, z) = xy + h_1(y, z)$ y $\partial f / \partial z = y \cos yz$, tenemos que

$$\frac{\partial h_1(y, z)}{\partial z} = y \cos yz$$

o

$$h_1(y, z) = \int y \cos yz dz + g(y) = \sin yz + g(y).$$

Así, sustituyendo esta expresión en la ecuación (a), obtenemos

$$f(x, y, z) = xy + \sin yz + g(y);$$

pero por la ecuación (b),

$$g(y) = h_2(x, z).$$

Puesto que el lado derecho de esta ecuación es una función de x y z y el lado izquierdo es una función de solo y , podemos concluir que deben ser iguales a alguna constante C . Por tanto,

$$f(x, y, z) = xy + \sin yz + C$$

con lo que hemos determinado f salvo una constante. ▲

Ejemplo 2

Una masa M situada en el origen de \mathbb{R}^3 ejerce una fuerza de magnitud GmM/r^2 y dirigida hacia el origen sobre una masa m localizada en $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Aquí, G es la constante gravitatoria, la cual depende de las unidades de medida, y $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Si recordamos que $-\mathbf{r}/r$ es un vector unitario dirigido hacia el origen, entonces podemos expresar el campo de fuerzas como sigue

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{GmM\mathbf{r}}{r^3}.$$

Demostrar que \mathbf{F} es irrotacional y hallar un potencial escalar para \mathbf{F} . (Obsérvese que \mathbf{F} no está definido en el origen, pero el Teorema 7 sigue siendo aplicable, ya que permite un punto excepcional.)

Solución

En primer lugar comprobamos que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Usando la Fórmula 10 de la tabla de identidades vectoriales de la Sección 4.4, obtenemos

$$\nabla \times \mathbf{F} = -GmM \left[\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \times \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \times \mathbf{r} \right].$$

Pero $\nabla(1/r^3) = -3\mathbf{r}/r^5$ (véase el Ejercicio 38 de la Sección 4.4), y por tanto el primer término se anula, ya que $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$. El segundo término se anula porque

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ (para $\mathbf{r} \neq 0$). Si recordamos la fórmula $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ (véase de nuevo el Ejercicio 38 de la Sección 4.4), entonces podemos deducir un potencial escalar para \mathbf{F} por inspección. Tenemos $\mathbf{F} = -\nabla V$, donde $V(x, y, z) = -GmM/r$ es la **energía potencial gravitatoria**.

Observemos también que por el Teorema 3 de la Sección 7.2, el trabajo realizado por \mathbf{F} al mover una partícula de masa m de un punto P_1 a un punto P_2 está dado por

$$V(P_1) - V(P_2) = GmM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

donde r_1 es la distancia radial de P_1 desde el origen y r_2 se define de forma similar. ▲

El caso plano

Con la misma demostración, el Teorema 7 también es válido para campos vectoriales \mathbf{F} de clase C^1 en \mathbb{R}^2 . En este caso, necesitamos que \mathbf{F} no tenga puntos excepcionales; es decir, \mathbf{F} tiene que ser suave en todos los puntos (véase el Ejercicio 16). Obsérvese, no obstante, que la conclusión *puede* seguir siendo válida aunque existan puntos excepcionales, como por ejemplo en el caso del campo $(xi + yj)/(x^2 + y^2)^{3/2}$. Un ejemplo en el que la conclusión *no* se cumple es $(-yi + xj)/(x^2 + y^2)$, como se demuestra en el Ejercicio 16.

Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, entonces

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

En ocasiones, $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ se denomina *rotacional escalar* de \mathbf{F} . Por tanto, la condición $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ se reduce a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Así, tenemos:

Corolario 1 \mathbf{F} es un campo vectorial de clase C^1 en \mathbb{R}^2 de la forma $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ que satisface $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, entonces $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función f en \mathbb{R}^2 .

Insistimos de nuevo en que este corolario puede ser falso si \mathbf{F} no es de clase C^1 incluso en un único punto (en el Ejercicio 16 se proporciona un ejemplo). Sin embargo, como ya hemos dicho, en \mathbb{R}^3 se permiten excepciones en puntos aislados (véase el Teorema 7).

Ejemplo 3

- (a) Determinar si el campo vectorial

$$\mathbf{F} = e^{xy}\mathbf{i} + e^{x+y}\mathbf{j}$$

es un campo gradiente.

- (b) Repetir el apartado (a) para

$$\mathbf{F} = (2x \cos y)\mathbf{i} - (x^2 \sin y)\mathbf{j}.$$

Solución (a) En este caso $P(x, y) = e^{xy}$ y $Q(x, y) = e^{x+y}$, y calculamos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = xe^{xy}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{x+y}.$$

Estas dos cantidades no son iguales y por tanto \mathbf{F} no puede tener una función potencial.

(b) En este caso, hallamos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x \operatorname{sen} y = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

y por tanto \mathbf{F} tiene una función potencial f . Para calcular f resolvemos las ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \operatorname{sen} y.$$

Por tanto, $f(x, y) = x^2 \cos y + h_1(y)$ y $f(x, y) = x^2 \cos y + h_2(x)$. Si h_1 y h_2 son la misma constante, entonces se satisfacen ambas ecuaciones, y por tanto $f(x, y) = x^2 \cos y$ es una función potencial para \mathbf{F} . ▲

Ejemplo 4

Sea $\mathbf{c}: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $x = e^{t-1}$, $y = \operatorname{sen}(\pi/t)$. Calcular la integral

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} 2x \cos y \, dx - x^2 \operatorname{sen} y \, dy,$$

donde $\mathbf{F} = (2x \cos y)\mathbf{i} - (x^2 \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$.

Solución

Los extremos son $\mathbf{c}(1) = (1, 0)$ y $\mathbf{c}(2) = (e, 1)$. Dado que $\partial(2x \cos y)/\partial y = \partial(-x^2 \operatorname{sen} y)/\partial x$, \mathbf{F} es irrotacional y por tanto un campo vectorial gradiente (como hemos visto en el Ejemplo 3). Entonces, por el Teorema 7, podemos sustituir \mathbf{c} por cualquier curva a trozos C^1 que tenga los mismos puntos extremos, en particular, por la trayectoria poligonal que va de $(1, 0)$ a $(e, 0)$ y luego a $(e, 1)$. Por tanto, la integral de línea tiene que ser igual a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_1^e 2t \cos 0 \, dt + \int_0^1 -e^2 \operatorname{sen} t \, dt = (e^2 - 1) + e^2(\cos 1 - 1) \\ &= e^2 \cos 1 - 1. \end{aligned}$$

Alternativamente, utilizando el Teorema 3 de la Sección 7.2, tenemos

$$\int_{\mathbf{c}} 2x \cos y \, dx - x^2 \operatorname{sen} y \, dy = \int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\mathbf{c}(2)) - f(\mathbf{c}(1)) = e^2 \cos 1 - 1,$$

ya que $f(x, y) = x^2 \cos y$ es una función potencial para \mathbf{F} . Evidentemente, esta técnica es más simple que calcular directamente la integral. ▲

Concluimos esta sección con un teorema que es bastante similar, en esencia, al Teorema 7. El Teorema 7 estaba motivado en parte como un recíproco del resultado que establece que $\operatorname{rot} \nabla f = \mathbf{0}$ para cualquier función C^1 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ —o, si $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{F} = \nabla f$. También

sabemos [por la fórmula (9) de la tabla de identidades vectoriales de la Sección 4.4] que $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{G}) = 0$ para cualquier campo vectorial \mathbf{G} de clase C^2 . Podemos plantearnos el enunciado recíproco: si $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, ¿es \mathbf{F} el rotacional de un campo vectorial \mathbf{G} ? El siguiente teorema responde de forma afirmativa a esta pregunta.

Teorema 8 Si \mathbf{F} es un campo vectorial de clase C^1 en todo \mathbb{R}^3 tal que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, entonces existe un campo vectorial \mathbf{G} de clase C^1 tal que $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$.

En el Ejercicio 20 se esboza la demostración. Una advertencia: al contrario que en el Teorema 7, el campo vectorial \mathbf{F} del Teorema 8 no permite tener un punto excepcional. Por ejemplo, el campo de fuerza gravitatoria $\mathbf{F} = -(GmMr/r^3)$ tiene la propiedad de que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, y no existe ningún \mathbf{G} para el que $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$ (véase el Ejercicio 29). El Teorema 8 no es aplicable, porque el campo de la fuerza gravitatoria \mathbf{F} no está definido en $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$.

Ejercicios

1. Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales \mathbf{F} en el plano es el gradiente de una función escalar f . Si existe una función f así, calcularla.
 - (a) $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
 - (b) $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$
 - (c) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$
2. Repetir el Ejercicio 1 para los siguientes campos vectoriales:
 - (a) $\mathbf{F}(x, y) = (\cos xy - xy \operatorname{sen} xy)\mathbf{i} - (x^2 \operatorname{sen} xy)\mathbf{j}$
 - (b) $\mathbf{F}(x, y) = (x\sqrt{x^2y^2 + 1})\mathbf{i} + (y\sqrt{x^2y^2 + 1})\mathbf{j}$
 - (c) $\mathbf{F}(x, y) = (2x \operatorname{cos} y + \operatorname{cos} y)\mathbf{i} - (x^2 \operatorname{sen} y + x \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$
3. Para cada uno de los siguientes campos vectoriales \mathbf{F} , determinar (i) si existe una función g tal que $\nabla g = \mathbf{F}$ y (ii) si existe un campo vectorial \mathbf{G} tal que $\operatorname{rot} \mathbf{G} = \mathbf{F}$. (No es necesario determinar g ni \mathbf{G}).
 - (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xz - x, -4yz, z - 2y)$
 - (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \operatorname{cos} y, z^2)$
 - (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (\log(z^2 + 1) + y^2, 2xy, \frac{2xz}{z^2 + 1})$
 - (d) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + x \operatorname{sen} z, y \operatorname{cos} z - 2xy, \operatorname{cos} z + \operatorname{sen} z)$
4. Para cada uno de los siguientes campos vectoriales \mathbf{F} , determinar (i) si existe una función g tal que $\nabla g = \mathbf{F}$ y (ii) si existe un campo vectorial \mathbf{G} tal que $\operatorname{rot} \mathbf{G} = \mathbf{F}$. (No es necesario determinar g ni \mathbf{G}).
 - (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \cos y, -e^x \operatorname{sen} y, \pi)$
 - (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{y}{z^2 + 4}, \frac{x}{z^2 + 4}, \frac{-2xyz}{z^4 + 8z^2 + 16} \right)$
 - (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 y^2 z^2, y e^x, x y \operatorname{cos} z)$
 - (d) $\mathbf{F}(x, y, z) = (6z^5 y^5, 9x^8 z^2, 4x^3 y^3)$
5. Demostrar que cualesquiera dos funciones potenciales para un campo vectorial en \mathbb{R}^3 difieren como máximo en una constante.
6. (a) Sea $\mathbf{F}(x, y) = (xy, y^2)$ y sea \mathbf{c} la trayectoria $y = 2x^2$ que une $(0, 0)$ a $(1, 2)$ en \mathbb{R}^2 . Evaluar $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

 (b) ¿Depende la integral del apartado (a) de la trayectoria que une $(0, 0)$ a $(1, 2)$?
7. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz + \operatorname{sen} x)\mathbf{i} + x^2 z\mathbf{j} + x^2 y\mathbf{k}$. Hallar una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.
8. Calcular $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{c}(t) = (\cos^5 t, \operatorname{sen}^3 t, t^4)$, $0 \leq t \leq \pi$, y \mathbf{F} es como en el Ejercicio 7.

- 9.** Si $f(x)$ es una función suave de una variable, ¿será $\mathbf{F}(x, y) = f(x)\mathbf{i} + f(y)\mathbf{j}$ un gradiente?
- 10.** (a) Demostrar que $\mathbf{F} = -\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$ es el gradiente de $f(x, y, z) = 1/r$.
 (b) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = -\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$ al mover una partícula de un punto $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ “hasta ∞ ”, donde $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$?
- 11.** Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. ¿Puede existir una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$?
- 12.** Sea $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ y supóngase que cada componente F_k satisface la condición de homogeneidad

$$F_k(tx, ty, tz) = tF_k(x, y, z), \quad k = 1, 2, 3.$$

Supongamos también $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Demostrar que $\mathbf{F} = \nabla f$, donde

$$\begin{aligned} 2f(x, y, z) &= \\ xF_1(x, y, z) + yF_2(x, y, z) + zF_3(x, y, z). \end{aligned}$$

[SUGERENCIA: utilizar el Ejercicio de repaso 31 del Capítulo 2].

- 13.** Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{i} + (e^x \cos y)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{c}(t) = (\sqrt{t}, t^3, \exp \sqrt{t})$, $0 \leq t \leq 1$.
- 14.** Sea un fluido con campo de velocidades $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$. ¿Cuál es la circulación a lo largo de la circunferencia unidad en el plano xy ? Interpretar la respuesta.
- 15.** La masa de la Tierra es aproximadamente 6×10^{27} g y la del Sol es 330,000 veces mayor. La constante gravitatoria es $6,7 \times 10^{-8}$ cm³/s²·g. La distancia de la Tierra al Sol es aproximadamente $1,5 \times 10^{12}$ cm. Calcular de manera aproximada el trabajo necesario para incrementar la distancia de la Tierra al Sol en 1 cm.
- 16.** (a) Demostrar que $\int_C (x dy - y dx)/(x^2 + y^2) = 2\pi$, donde C es la circunferencia unidad.
 (b) Concluir que el campo vectorial asociado $[-y/(x^2 + y^2)]\mathbf{i} + [x/(x^2 + y^2)]\mathbf{j}$ no es un campo conservativo.
 (c) Demostrar no obstante que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. ¿Contradice esto al corolario del Teorema 7? Si no es así, explicar por qué.
- 17.** Determinar si los siguientes campos vectoriales \mathbf{F} son campos gradientes. Si existe una función f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$, hallar f .

- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$.
 (b) $\mathbf{F}(x, y) = (x \cos y, x \operatorname{sen} y)$.
 (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2e^y, xyz, e^z)$.
 (d) $\mathbf{F}(x, y) = (2x \cos y, -x^2 \operatorname{sen} y)$.
- 18.** Determinar si los siguientes campos vectoriales \mathbf{F} son campos gradientes. Si existe una función f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$, hallar f .
- (a) $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y^2 - y \operatorname{sen} x, 2xyz + \cos x)$
 (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (6x^2z^2, 5x^2y^2, 4y^2z^2)$
 (c) $\mathbf{F}(x, y) = (y^3 + 1, 3xy^2 + 1)$
 (d) $\mathbf{F}(x, y) = (xe^{(x^2+y^2)} + 2xy, ye^{(x^2+y^2)} + 4y^3z, y^4)$
- 19.** Demostrar que los siguientes campos vectoriales son conservativos. Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ para la curva dada.
- (a) $\mathbf{F} = (xy^2 + 3x^2y)\mathbf{i} + (x + y)x^2\mathbf{j}$; C es la curva formada por los segmentos de $(1, 1)$ a $(0, 2)$ y de este a $(3, 0)$.
 (b) $\mathbf{F} = \frac{2x}{y^2 + 1}\mathbf{i} - \frac{2y(x^2 + 1)}{(y^2 + 1)^2}\mathbf{j}$; C está parametrizada por $x = t^3 - 1$, $y = t^6 - t$, $0 \leq t \leq 1$.
 (c) $\mathbf{F} = [\cos(xy^2) - xy^2 \operatorname{sen}(xy^2)]\mathbf{i} - 2x^2y \operatorname{sen}(xy^2)\mathbf{j}$; C es la curva (e^t, e^{t+1}) , $-1 \leq t \leq 0$.
- 20.** Probar el Teorema 8. [SUGERENCIA: definir $\mathbf{G} = G_1\mathbf{i} + G_2\mathbf{j} + G_3\mathbf{k}$ mediante
- $$\begin{aligned} G_1(x, y, z) &= \int_0^z F_2(x, y, t) dt \\ G_2(x, y, z) &= -\int_0^z F_1(x, y, t) dt \end{aligned}$$
- y $G_3(x, y, z) = 0$].
- 21.** Indicar si cada uno de los siguientes campos vectoriales es el rotacional de algún otro campo vectorial. En caso afirmativo, hallar el campo vectorial.
- (a) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
 (b) $\mathbf{F} = (x^2 + 1)\mathbf{i} + (z - 2xy)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$.
- 22.** Sea $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + y\mathbf{k}$. Verificar que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Hallar un \mathbf{G} tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$.
- 23.** Repetir el Ejercicio 22 para $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$.
- 24.** Sea $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} - (x \cos z)\mathbf{j} - ze^y\mathbf{k}$. Hallar \mathbf{G} tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$.

- 25.** Sea $\mathbf{F} = (x \cos y)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} y)\mathbf{j} + (\operatorname{sen} x)\mathbf{k}$. Hallar un campo \mathbf{G} tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$.
- 26.** Utilizando diferentes trayectorias de $(0, 0, 0)$ a (x, y, z) , demostrar que la función f definida en la demostración del Teorema 7 para la “condición (II) implica la condición (III)” satisface $\partial f / \partial x = F_1$ y $\partial f / \partial y = F_2$.
- 27.** Sea \mathbf{F} el campo vectorial en \mathbb{R}^3 dado por $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.
- Demostrar que \mathbf{F} es rotacional, es decir, que \mathbf{F} no es irrotacional.
 - Supongamos que \mathbf{F} representa el campo de velocidades de un fluido. Demostrar que si colocamos un corcho en este fluido, girará en un plano paralelo al plano xy , siguiendo una trayectoria circular alrededor del eje z .
 - ¿En qué sentido girará el corcho?
- 28.** Sea \mathbf{G} el campo vectorial en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}$ definido por
- $$\mathbf{G} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}.$$
- Demostrar que \mathbf{G} es irrotacional.
 - Demostrar que el resultado del Ejercicio 27(b) se cumple también para \mathbf{G} .
 - ¿Cómo podemos explicar el hecho de que las trayectorias de \mathbf{F} y \mathbf{G} sean iguales (circular alrededor del eje z) aunque \mathbf{F} sea rotacional y \mathbf{G} no lo sea? [SUGERENCIA: la propiedad de ser rotacional es una condición local, es decir, una propiedad del fluido en las proximidades de un punto].
- 29.** Sea $\mathbf{F} = -(GmMr/r^3)$ el campo de fuerza gravitatoria definido en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.
- Demostrar que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$.
 - Demostrar que $\mathbf{F} \neq \operatorname{rot} \mathbf{G}$ para cualquier campo vectorial \mathbf{G} de clase C^1 en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

8.4 Teorema de Gauss

El teorema de Gauss establece que el flujo de un campo vectorial hacia el exterior de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de dicho campo vectorial sobre el volumen encerrado por la superficie. Es un resultado paralelo a los teoremas de Stokes y de Green en el sentido de que relaciona una integral sobre un objeto geométrico cerrado (curva o superficie) con una integral sobre la región contenida (superficie o volumen).

Regiones elementales y sus fronteras

Comenzamos pidiendo al lector que repase las distintas regiones elementales en el espacio que hemos presentado al hablar de la integral de volumen; estas regiones se ilustran en las Figuras 5.5.2 y 5.5.4. Como indican estas figuras, la frontera de una región elemental en \mathbb{R}^3 es una superficie formada por un número finito (como máximo seis y como mínimo dos) de superficies que se pueden describir como gráficas de funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} . Esta clase de superficie se denomina *superficie cerrada*. Las superficies S_1, S_2, \dots, S_N que componen tal superficie cerrada son sus *caras*.

Ejemplo 1

El cubo de la Figura 8.4.1(a) es una región elemental y, de hecho, es una región elemental simétrica, con seis rectángulos que definen sus fronteras. La esfera de la Figura 8.4.1(b) es la frontera de una bola sólida, que también es una región elemental simétrica.

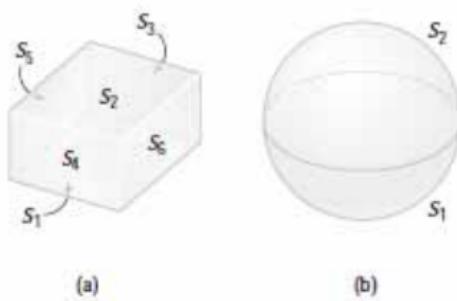


Figura 8.4.1 (a) Regiones elementales simétricas y (b) las superficies S_i que componen sus fronteras.

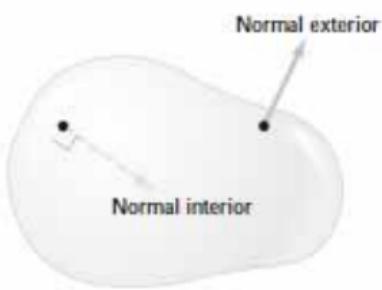


Figura 8.4.2 Dos posibles orientaciones para una superficie cerrada.

Las superficies cerradas se pueden orientar de dos formas. La orientación exterior corresponde a la normal que apunta hacia el espacio exterior y la orientación interior corresponde a la normal que apunta hacia la región acotada (Figura 8.4.2).

Supongamos que S es una superficie cerrada orientada en una de esas dos formas y \mathbf{F} es un campo vectorial en S . Entonces, como hemos definido en la Sección 7.6,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Si damos a S la orientación exterior, la integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ mide el flujo total de \mathbf{F} que sale a través de S . Es decir, si pensamos en \mathbf{F} como en el campo de velocidades de un fluido, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ indica la cantidad de fluido que sale de la región acotada por S por unidad de tiempo. Si damos a S la orientación interior, la integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ mide el flujo total de \mathbf{F} que atraviesa S hacia el interior.

Recordemos otra forma común de escribir estas integrales de superficie, una forma que especifica explícitamente la orientación de S . Supongamos que la orientación de S está dada por un vector unitario normal $\mathbf{n}(x, y, z)$ en cada punto de S . Entonces tenemos la integral orientada

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS,$$

es decir, la integral de la componente normal de \mathbf{F} sobre S . En el resto de esta sección, si S es una superficie cerrada que encierra una región W , adoptaremos el convenio por defecto de que $S = \partial W$ tiene asignada la orientación exterior, con normal unitaria exterior $\mathbf{n}(x, y, z)$ en cada punto $(x, y, z) \in S$. Además, denotaremos la superficie con la orientación opuesta (interior) mediante ∂W_{op} . Entonces la dirección normal unitaria asociada a esta orientación será $-\mathbf{n}$. Por tanto,

$$\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = - \iint_S [\mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n})] dS = - \iint_{\partial W_{op}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Ejemplo 2

El cubo unidad W dado por

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

es una región elemental simétrica en el espacio (véanse las Figuras 8.4.3 y 5.5.5).

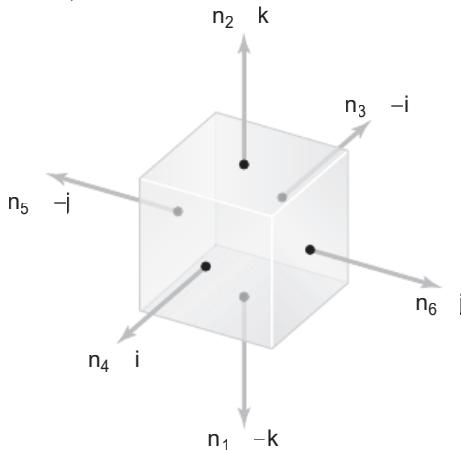


Figura 8.4.3 La orientación exterior en el cubo.

Expresamos las caras como sigue

$$\begin{aligned} S_1: z &= 0, & 0 \leq x \leq 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ S_2: z &= 1, & 0 \leq x \leq 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ S_3: x &= 0, & 0 \leq y \leq 1, & 0 \leq z \leq 1 \\ S_4: x &= 1, & 0 \leq y \leq 1, & 0 \leq z \leq 1 \\ S_5: y &= 0, & 0 \leq x \leq 1, & 0 \leq z \leq 1 \\ S_6: y &= 1, & 0 \leq x \leq 1, & 0 \leq z \leq 1. \end{aligned}$$

A partir de la Figura 8.4.3, vemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_2 &= \mathbf{k} = -\mathbf{n}_1, \\ \mathbf{n}_4 &= \mathbf{i} = -\mathbf{n}_3, \\ \mathbf{n}_6 &= \mathbf{j} = -\mathbf{n}_5, \end{aligned}$$

y por tanto para un campo vectorial continuo $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$,

$$\begin{aligned} \iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = - \iint_{S_1} F_3 dS + \iint_{S_2} F_3 dS - \iint_{S_3} F_1 dS \\ &\quad + \iint_{S_4} F_1 dS - \iint_{S_5} F_2 dS + \iint_{S_6} F_2 dS. \end{aligned}$$

Teorema de Gauss

Hemos llegado al último de los tres teoremas centrales de este capítulo. Este teorema relaciona las integrales de superficie con las integrales de volumen; en otras palabras, el teorema establece que si W es una región en \mathbb{R}^3 , entonces el flujo de un campo vectorial \mathbf{F} que sale a través de la superficie cerrada ∂W es igual a la integral de $\operatorname{div} \mathbf{F}$ sobre W . Comenzamos suponiendo que W es una región elemental simétrica (Figura 5.5.5).

Teorema 9 Teorema de la divergencia de Gauss Sea W una región elemental simétrica en el espacio. Denotamos mediante ∂W la superficie cerrada orientada que limita W . Sea \mathbf{F} un campo vectorial suave definido en W . Entonces

$$\iiint_W (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

o, alternativamente,

$$\iiint_W (\operatorname{div} \mathbf{F}) dV = \iint_{\partial W} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Demostración Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, entonces, por definición, la divergencia de \mathbf{F} está dada por $\operatorname{div} \mathbf{F} = \partial P / \partial x + \partial Q / \partial y + \partial R / \partial z$, de modo que podemos escribir (utilizando la aditividad de la integral de volumen)

$$\iiint_W \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iiint_W \frac{\partial P}{\partial x} dV + \iiint_W \frac{\partial Q}{\partial y} dV + \iiint_W \frac{\partial R}{\partial z} dV.$$

Por otro lado, la integral de superficie en cuestión es

$$\begin{aligned} \iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\partial W} (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_{\partial W} P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{\partial W} Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{\partial W} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned}$$

El teorema quedará demostrado si probamos las tres igualdades siguientes

$$\iint_{\partial W} P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_W \frac{\partial P}{\partial x} dV, \quad (1)$$

$$\iint_{\partial W} Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_W \frac{\partial Q}{\partial y} dV, \quad (2)$$

y

$$\iint_{\partial W} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_W \frac{\partial R}{\partial z} dV. \quad (3)$$

Probaremos la Ecuación (3); las otras dos igualdades se pueden probar de forma análoga.

Dado que W es una región elemental simétrica, existe una pareja de funciones

$$z = g_1(x, y), \quad z = g_2(x, y),$$

cuyo dominio común es una región elemental D en el plano xy , tal que W es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) que satisfacen

$$g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Por reducción a integrales iteradas, tenemos

$$\iiint_W \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_D \left(\int_{z=g_1(x,y)}^{z=g_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx dy,$$

y por tanto, por el teorema fundamental del cálculo,

$$\iiint_W \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_D [R(x, y, g_2(x, y)) - R(x, y, g_1(x, y))] dx dy. \quad (4)$$

La frontera de W es una superficie cerrada cuya parte superior S_2 es la gráfica de $z = g_2(x, y)$, donde $(x, y) \in D$, y cuya parte inferior S_1 es la gráfica de $z = g_1(x, y)$, $(x, y) \in D$. Las otras cuatro caras de ∂W son las superficies S_3, S_4, S_5 y S_6 , cuyas normales son siempre perpendiculares al eje z (véase la Figura 8.4.4). Obsérvese que alguna de las otras cuatro caras puede faltar; por ejemplo, si W es una bola sólida y ∂W es una esfera). Por definición,

$$\iint_{\partial W} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_1} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \iint_{S_2} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_2 dS + \sum_{i=3}^6 \iint_{S_i} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_i dS.$$

Dado que la normal \mathbf{n}_i es perpendicular a \mathbf{k} en cada una de las superficies S_3, S_4, S_5, S_6 , tenemos que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$ en estas caras, y por tanto la integral se reduce a

$$\iint_{\partial W} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_{S_1} R \mathbf{k} \cdot d\mathbf{S}_1 + \iint_{S_2} R \mathbf{k} \cdot d\mathbf{S}_2. \quad (5)$$

La superficie S_1 está definida por $z = g_1(x, y)$, y

$$d\mathbf{S}_1 = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k} \right) dx dy$$

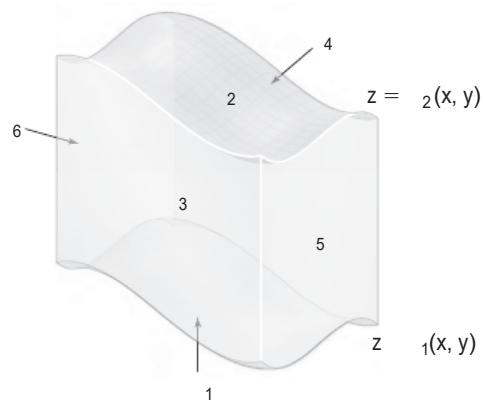


Figura 8.4.4 Una región simétrica elemental W para la que $\iint_{\partial W} R \mathbf{k} \cdot dS = \iiint_W (\partial R / \partial z) dV$. Las cuatro caras de ∂W , que son S_3, S_4, S_5, S_6 tienen normales perpendiculares al eje z .

(la fórmula general cambiada de signo de $d\mathbf{S}$ para gráficas de la Sección 7.6, dado que la normal apunta hacia abajo). Por tanto,

$$\iint_{S_1} R \mathbf{k} \cdot d\mathbf{S}_1 = - \iint_D R(x, y, g_1(x, y)) \, dx \, dy. \quad (6)$$

De forma similar, para la cara superior S_2 ,

$$d\mathbf{S}_2 = \left(-\frac{\partial g_2}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g_2}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dx \, dy.$$

Por tanto,

$$\iint_{S_2} R \mathbf{k} \cdot d\mathbf{S}_2 = \iint_D R(x, y, g_2(x, y)) \, dx \, dy. \quad (7)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (6) y (7) en la Ecuación (5) y comparando con la Ecuación (4), obtenemos

$$\iiint_W \frac{\partial R}{\partial z} \, dV = \iint_{\partial W} R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) \, dS.$$

Las restantes igualdades, (1) y (2), se pueden establecer del mismo modo con el fin de completar la demostración. ■

Generalización del teorema de Gauss

El lector debería observar que la demostración del teorema de Gauss es similar a la del teorema de Green. Por el procedimiento utilizado en el Ejercicio 16 de la Sección 8.1, podemos extender el teorema de Gauss a cualquier región que se pueda dividir en regiones elementales simétricas. Esto incluye todas las regiones que son de nuestro interés. Un ejemplo de una región a la que se aplica el teorema de Gauss es la región comprendida entre dos superficies cerradas, una dentro de la otra. La superficie de esta región consta de dos trozos orientados como se muestra en la Figura 8.4.5. Aplicaremos el teorema de la divergencia a una región así cuando probemos la ley de Gauss en el Teorema 10.



Figura 8.4.5 Una región más general en la que se puede aplicar el teorema de Gauss.

Ejemplo 3

Considérese $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. Sea S la esfera unidad definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$.

Solución

Por el teorema de Gauss,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_W (\operatorname{div} \mathbf{F}) dV,$$

donde W es la bola acotada por la esfera. La integral de la derecha es

$$2 \iiint_W (1 + y + z) dV = 2 \iiint_W dV + 2 \iiint_W y dV + 2 \iiint_W z dV.$$

Por simetría, podemos razonar que $\iiint_W y dV = \iiint_W z dV = 0$ (véase el Ejercicio 21 de la Sección 6.3). Por tanto, puesto que una esfera de radio R tiene un volumen de $4\pi R^3/3$,

$$2 \iiint_W (1 + y + z) dV = 2 \iiint_W dV = \frac{8\pi}{3}.$$

El lector puede comprobar por sí mismo que el cálculo directo de $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ es inmanejable. ▲

Ejemplo 4

Utilizar el teorema de la divergencia para calcular

$$\iint_{\partial W} (x^2 + y + z) dS,$$

donde W es la bola sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Solución

Para aplicar el teorema de la divergencia de Gauss, hallamos un campo vectorial $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ sobre W tal que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = x^2 + y + z$. En cualquier punto $(x, y, z) \in \partial W$, la normal unitaria exterior \mathbf{n} a ∂W es

$$\mathbf{n} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

ya que sobre ∂W , $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el radio vector $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es normal a la esfera ∂W (Figura 8.4.6).

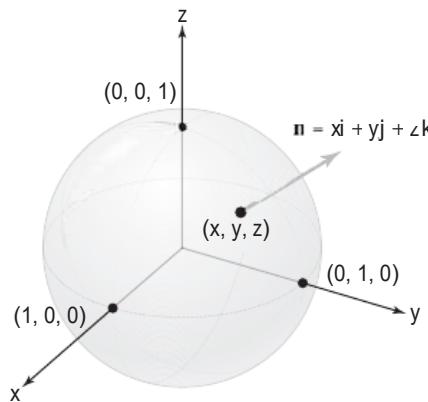


Figura 8.4.6 \mathbf{n} es la normal unitaria a ∂W , la frontera de la bola W .

Por tanto, si \mathbf{F} es el campo vectorial deseado, entonces

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = F_1 x + F_2 y + F_3 z.$$

Establecemos

$$F_1 x = x^2, \quad F_2 y = y, \quad F_3 z = z$$

y despejamos F_1, F_2 y F_3 para determinar que $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Calculando $\operatorname{div} \mathbf{F}$, obtenemos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Por tanto, por el teorema de la divergencia de Gauss,

$$\iint_{\partial W} (x^2 + y + z) dS = \iiint_W dV = \text{volumen } (W) = \frac{4}{3}\pi.$$



La divergencia como el flujo por unidad de volumen

El significado físico de la divergencia es que, en un punto P , $\operatorname{div} \mathbf{F}(P)$ es la tasa de flujo neto hacia el exterior por unidad de volumen. Esto se sigue del teorema de Gauss y del teorema de valor medio para integrales: si W_ρ es una bola en \mathbb{R}^3 de radio ρ centrada en P , entonces existe un punto $Q \in W_\rho$ tal que

$$\iint_{\partial W_\rho} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{W_\rho} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \operatorname{div} \mathbf{F}(Q) \cdot \text{volumen } (W_\rho)$$

y por tanto

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \operatorname{div} \mathbf{F}(Q) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{V(W_\rho)} \iint_{\partial W_\rho} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Esto es análogo a la formulación del rotacional en términos de un límite que se proporciona al final de la Sección 8.2. Por tanto, si $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) > 0$, consideramos P como una **fuent**e, porque hay un flujo neto hacia el exterior en un entorno de P . Si $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) < 0$, P se denomina **sumidero** para \mathbf{F} .

Un campo vectorial \mathbf{F} de clase C^1 definido en \mathbb{R}^3 se dice que es **libre de divergencia** si $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. Si \mathbf{F} es libre de divergencia, entonces tenemos $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$ para todas las superficies cerradas S . El recíproco también se puede demostrar fácilmente utilizando el teorema de Gauss: si $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$ para todas las superficies cerradas S , entonces \mathbf{F} es libre de divergencia. Si \mathbf{F} es libre de divergencia, entonces vemos que el flujo de \mathbf{F} a través de cualquier superficie cerrada S es 0, de modo que si \mathbf{F} es el campo de velocidades de un fluido, la cantidad neta de fluido que fluye hacia fuera de cualquier región debe ser 0. Por tanto, en la región debe entrar exactamente la misma cantidad de fluido que sale (por unidad de tiempo). Un fluido con esta propiedad se describe entonces como **incompresible**.

Ejemplo 5

Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acotada por los planos $z = 1$ y $z = -1$, e incluyendo los trozos $x^2 + y^2 \leq 1$ cuando $z = \pm 1$.

Solución

Podemos calcular esta integral directamente, aunque es más fácil utilizar el teorema de la divergencia.

Ahora S es la frontera de la región W dada por $x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1$. Por tanto, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W (\operatorname{div} \mathbf{F}) dV$. Además,

$$\begin{aligned}\iiint_W (\operatorname{div} \mathbf{F}) dV &= \iiint_W (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \int_{-1}^1 \left(\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy \right) dz \\ &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy.\end{aligned}$$

Antes de calcular la integral doble, observamos que la integral de superficie satisface

$$\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy > 0.$$

Esto significa que $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, el flujo neto de \mathbf{F} hacia el exterior del cilindro, es positivo.

Para calcular la integral doble, pasamos a coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Entonces, tenemos $\partial(x, y)/\partial(r, \theta) = r$ y $x^2 + y^2 = r^2$. Así,

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^3 dr \right) d\theta = \frac{1}{2}\pi.$$

Por tanto,

$$\iiint_W \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \pi$$

**Ley de Gauss**

Como hemos comentado anteriormente, el teorema de la divergencia de Gauss se puede aplicar a regiones en el espacio más generales que las regiones elementales simétricas. Para concluir esta sección, vamos a emplear esta observación *en la demostración* de los siguientes importantes resultados.

Teorema 10 Ley de Gauss Sea M una región elemental simétrica en \mathbb{R}^3 . Entonces si $(0, 0, 0) \notin \partial M$, tenemos

$$\iint_{\partial M} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \begin{cases} 4\pi & \text{si } (0, 0, 0) \in M \\ 0 & \text{si } (0, 0, 0) \notin M, \end{cases}$$

donde

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

y

$$r(x, y, z) = \|\mathbf{r}(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Demostración de la ley de Gauss En primer lugar, suponemos que $(0, 0, 0) \notin M$. Entonces \mathbf{r}/r^3 es un campo vectorial de clase C^1 sobre M y ∂M , y por tanto por el teorema de la divergencia,

$$\iint_{\partial M} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \iiint_M \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dV.$$

Pero $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$ si $r \neq 0$, como podemos verificar fácilmente (véase el Ejercicio 38 de la Sección 4.4). Por tanto,

$$\iint_{\partial M} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = 0.$$

Supongamos ahora que $(0, 0, 0) \in M$. Ya no podemos emplear el método anterior porque \mathbf{r}/r^3 no es suave en M , ya que el denominador es cero en $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$. Puesto que $(0, 0, 0) \in M$ y $(0, 0, 0) \notin \partial M$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que la bola N de radio ε centrada en $(0, 0, 0)$ está completamente contenida dentro de M . Sea W la región entre M y N . Entonces W tiene como frontera $\partial N \cup \partial M = S$. Pero la orientación sobre ∂N inducida por la normal *exterior* sobre W es la opuesta a la obtenida a partir de N (véase la Figura 8.4.7).

Ahora $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$ sobre W , y por tanto, por el teorema de la divergencia aplicado a la región (no elemental) W ,

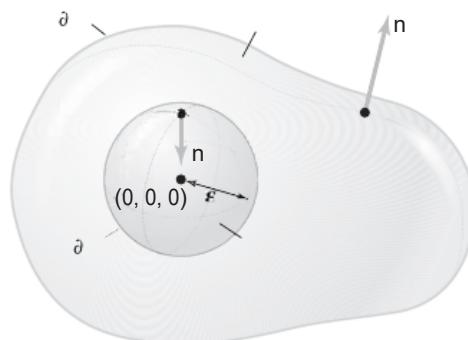


Figura 8.4.7 Orientación exterior inducida sobre S ; W es M menos la bola N .

$$\iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \iiint_W \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dV = 0.$$

Dado que

$$\iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \iint_{\partial M} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS + \iint_{\partial N} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS,$$

donde \mathbf{n} es la normal exterior a S , tenemos

$$\iint_{\partial M} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = - \iint_{\partial N} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS.$$

Sin embargo, sobre ∂N , $\mathbf{n} = -\mathbf{r}/r$ y $r = \varepsilon$, puesto que ∂N es una esfera de radio ε , de modo que

$$-\iint_{\partial N} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \iint_{\partial N} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4} dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\partial N} dS.$$

Pero $\iint_{\partial N} dS = 4\pi\varepsilon^2$, el área de la superficie de la esfera de radio ε . Esto prueba el resultado. ■

Ejemplo 6

La ley de Gauss tiene la siguiente interpretación física. El potencial debido a una carga puntual Q en $(0, 0, 0)$ está dado por

$$\phi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi r} = \frac{Q}{4\pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

y el campo eléctrico correspondiente es

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right).$$

Por tanto, el Teorema 10 establece que el flujo eléctrico total $\iint_{\partial M} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ (es decir, el flujo de \mathbf{E} hacia el exterior de una superficie cerrada ∂M) es igual a Q si la carga está dentro de M y cero en cualquier otro caso. Obsérvese que incluso si $(0, 0, 0) \notin M$, \mathbf{E} será *distinto de cero* sobre M .

Para una distribución de carga continua descrita por una densidad de carga ρ en una región W , el campo \mathbf{E} está relacionado con la densidad ρ por

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho.$$

Entonces, por el teorema de Gauss,

$$\iint_{\partial W} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W \rho dV = Q;$$

es decir, el flujo que sale de la superficie es igual a la carga total en el interior. ▲

Divergencia en coordenadas esféricas

A continuación vamos a utilizar el teorema de Gauss para deducir la fórmula

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\operatorname{sen} \phi F_\phi) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \quad (8)$$

para la divergencia de un campo vectorial \mathbf{F} en coordenadas esféricas, que fue enunciada en la Sección 8.2. (De nuevo, en este caso, los subíndices denotan las *componentes*, *no* derivadas parciales.) El método consiste en usar la fórmula

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{W \rightarrow P} \frac{1}{V(W)} \iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (9)$$

donde W es una región con volumen $V(W)$, que se contrae a un punto \mathbf{P} (anteriormente hemos utilizado una bola, pero podemos emplear regiones con cualquier forma). Sea W la región sombreada de la Figura 8.4.8.

Para las dos caras ortogonales a la dirección radial, la integral de superficie de la Ecuación (9) es, aproximadamente,

$$\begin{aligned} & F_\rho(\rho + d\rho, \phi, \theta) \times (\text{área de la cara externa}) \\ & -F_\rho(\rho, \phi, \theta) \times (\text{área de la cara interna}) \\ & \approx F_\rho(\rho + d\rho, \phi, \theta)(\rho + d\rho)^2 \operatorname{sen} \phi d\phi d\theta - F_\rho(\rho, \phi, \theta)\rho^2 \operatorname{sen} \phi d\phi d\theta \\ & \approx \frac{\partial}{\partial \rho} (F_\rho \rho^2 \operatorname{sen} \phi) d\rho d\phi d\theta \end{aligned} \quad (10)$$

por el teorema de valor medio para funciones de una variable. Dividiendo entre el volumen de la región W , es decir, $\rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta$, vemos que la contribución al lado derecho de la Ecuación (9) es

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 F_\rho) \quad (11)$$

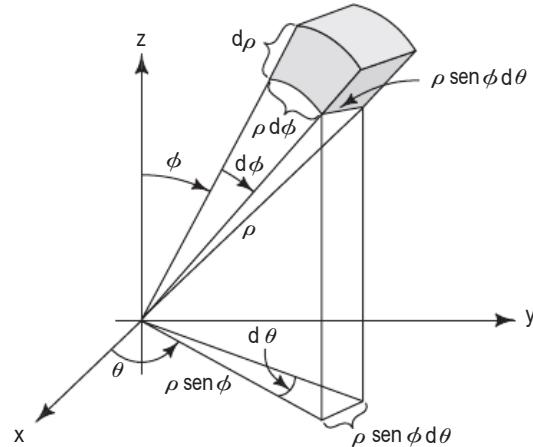


Figura 8.4.8 Volumen infinitesimal determinado por $d\rho, d\theta, d\phi$ en (ρ, θ, ϕ) .

para estas caras. Del mismo modo, la contribución de las caras ortogonales a la dirección ϕ es

$$\frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\operatorname{sen} \phi F_\phi), \quad \text{y para la dirección } \theta, \quad \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}.$$

Sustituyendo (11) y estas expresiones en la Ecuación (9) y tomando el límite se obtiene la Ecuación (8).

Ecuaciones de Maxwell y la predicción de las ondas de radio: el inicio de la revolución en las comunicaciones

Ahora vamos a abordar las *ecuaciones de Maxwell*, que gobiernan la propagación de los campos electromagnéticos. La forma de estas ecuaciones depende de las unidades físicas que se estén empleando y el cambio de unidades introduce factores como 4π y la velocidad de la luz. Elegiremos el sistema en el que las ecuaciones de Maxwell son más sencillas.

Sean \mathbf{E} y \mathbf{H} funciones de clase C^1 de (t, x, y, z) que son campos vectoriales para cada t . Por definición, satisfacen la **ecuación de Maxwell con densidad de carga** $\rho(t, x, y, z)$ y **densidad de corriente** $\mathbf{J}(t, x, y, z)$ cuando se cumplen las siguientes condiciones:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \text{ (ley de Gauss),} \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \text{ (sin fuentes negativas),} \quad (13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0} \text{ (ley de Faraday),} \quad (14)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \text{ (ley de Ampère).} \quad (15)$$

En las Secciones 8.2 y 8.4 hemos descrito en forma integral las Ecuaciones (4) y (6) de estas leyes; históricamente, surgen en estas formas como leyes observadas físicamente. Hemos mencionado la ley de Ampère como un caso especial en la Sección 7.2, Ejemplo 12.

Físicamente, interpretamos \mathbf{E} como el **campo eléctrico** y \mathbf{H} como el **campo magnético**. De acuerdo con las ecuaciones anteriores, a medida que transcurre el tiempo t , estos campos interactúan entre sí y con cualesquiera cargas y corrientes que estén presentes. Por ejemplo, la propagación de las ondas electromagnéticas (señales de TV, ondas de radio, la luz procedente del Sol, etc.) en el vacío está gobernada por estas ecuaciones con $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ y $\rho = 0$.

Dado que $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, podemos aplicar el Teorema 8 (de la Sección 8.3) para concluir que $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ para algún campo vectorial \mathbf{A} . (Estamos suponiendo que \mathbf{H} está definido en todo \mathbb{R}^3 para cada instante t). El campo vectorial \mathbf{A} no es único y podemos emplear $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$ igualmente para cualquier función de $f(t, x, y, z)$, dado que $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$. (Esta libertad de elección de \mathbf{A} se denomina *libertad de recalibración, gauge freedom*). Para cualquier elección de \mathbf{A} , tenemos, por la Ecuación (6),

$$\mathbf{0} = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\
&= \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right).
\end{aligned}$$

Aplicando el Teorema 7 de la Sección 8.3, existe una función con valores reales ϕ en \mathbb{R}^3 tal que

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi.$$

Sustituyendo esta ecuación y $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ en la Ecuación (7) y usando la identidad vectorial (cuya demostración dejamos como ejercicio)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \right) \\
&= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \phi).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{J} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \phi).$$

Es decir,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{J} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \quad (16)$$

De nuevo, utilizando la ecuación $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t = -\nabla \phi$ y la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$, obtenemos

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \phi - \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t}.$$

Esto es,

$$\nabla^2 \phi = -\rho - \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t}. \quad (17)$$

Ahora explotemos la libertad de nuestra elección de \mathbf{A} . Imponemos la “condición”

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (18)$$

Debemos asegurarnos de que podemos hacer esto. Suponiendo que tenemos un \mathbf{A}_0 dado y el correspondiente ϕ_0 , ¿podemos elegir un nuevo $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla f$ y luego un nuevo ϕ tal que $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial \phi / \partial t = 0$? Con este

nuevo \mathbf{A} , el nuevo ϕ es $\phi_0 - \partial f / \partial t$; dejamos la verificación como ejercicio para el lector. La condición (10) sobre f se convierte entonces en

$$0 = \nabla \cdot (\mathbf{A}_0 + \nabla f) + \frac{\partial(\phi_0 - \partial f / \partial t)}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \nabla^2 f + \frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

o

$$\nabla^2 f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = - \left(\nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \frac{\partial \phi_0}{\partial t} \right). \quad (19)$$

Entonces, para poder elegir \mathbf{A} y ϕ que satisfagan $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial \phi / \partial t = 0$, debemos poder resolver la Ecuación (19) para f . En efecto, podemos hacerlo bajo condiciones generales, aunque aquí no lo vamos a probar. La Ecuación (19) se conoce como **ecuación de ondas no homogénea**.

Si aceptamos que \mathbf{A} y ϕ se pueden elegir para satisfacer $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial \phi / \partial t = 0$, entonces las ecuaciones (16) y (17) para \mathbf{A} y ϕ se convierten en

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{J}; \quad (16')$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho. \quad (17')$$

Recíprocamente, si \mathbf{A} y ϕ satisfacen la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial \phi / \partial t = 0$, $\nabla^2 \phi - \partial^2 \phi / \partial t^2 = -\rho$ y $\nabla^2 \mathbf{A} - \partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2 = -\mathbf{J}$, entonces $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$ y $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ satisfacen las ecuaciones de Maxwell. *Este procedimiento entonces “reduce” las ecuaciones de Maxwell a un estudio de la ecuación de ondas.*⁷

Desde el siglo XVIII, se han estudiado soluciones a la ecuación de ondas (estas se estudian en la mayor parte de los cursos sobre ecuaciones diferenciales). Para indicar la naturaleza ondulatoria de las soluciones, observemos por ejemplo que para cualquier función f ,

$$\phi(t, x, y, z) = f(x - t)$$

se resuelve la ecuación de ondas $\nabla^2 \phi - (\partial^2 \phi / \partial t^2) = 0$. Esta solución solo propaga la gráfica de f como una onda; entonces, podemos conjeturar que las soluciones de las ecuaciones de Maxwell tienen naturaleza ondulatoria. Históricamente, todo esto fue el enorme logro de Maxwell, lo que llevó enseguida a Hertz a descubrir las ondas de radio.

Una vez más, las matemáticas muestran su peculiar capacidad no solo para *describir* los fenómenos naturales sino también para *predecirlos*.

⁷Existen algunas variantes de este procedimiento. Para conocer más detalles, véase por ejemplo, *Differential Equations of Applied Mathematics* de G. F. D. Duff y D. Naylor, Wiley, Nueva York, 1966, o cualquier libro sobre teoría electromagnética, tal como *Classical Electrodynamics* de J. D. Jackson, Wiley, Nueva York, 1962.

Ejercicios

En los Ejercicios 1 a 4, verificar el teorema de la divergencia para la región W , la frontera ∂W orientada hacia el exterior y el campo vectorial \mathbf{F} dados.

1. $W = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ y $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
2. W como en el Ejercicio 1 y $\mathbf{F} = zy\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.
3. $W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ (la bola unidad) y $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
4. W como en el Ejercicio 3 y $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
5. Utilizar el teorema de la divergencia para calcular el flujo de $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$ hacia el exterior de la esfera unidad.
6. Sea $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$. Calcular la integral de superficie de \mathbf{F} sobre la esfera unidad.
7. Calcular $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y W es el cubo unidad (en el primer octante). Realizar el cálculo directamente y comprobarlo utilizando el teorema de la divergencia.
8. Repetir el Ejercicio 7 para
 - (a) $\mathbf{F} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
 - (b) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
9. Sea $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$. Calcular $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para cada una de las siguientes regiones W :
 - (a) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.
 - (b) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ y $x \geq 0$.
 - (c) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ y $x \leq 0$.
10. Repetir el Ejercicio 9 para $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$.
11. Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = (x - y^2)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$ hacia el exterior del sólido rectangular $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$.
12. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = 3xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ y S es la superficie de la esfera unidad.
13. Sea W la pirámide con el vértice superior $(0, 0, 1)$ y cuya base tiene vértices en $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, 0)$. Sea S la superficie cerrada bidimensional que limita a W , orienta-

da hacia el exterior de W . Utilizar el teorema de Gauss para calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2y, 3y^2z, 9z^2x).$$

14. Sea W el sólido tridimensional delimitado por las superficies $x = y^2$, $x = 9$, $z = 0$ y $x = z$. Sea S la frontera de W . Utilizar el teorema de Gauss para determinar el flujo de $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x - 5y)\mathbf{i} + (4z - 2y)\mathbf{j} + (8yz)\mathbf{k}$ a través de S : $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.
15. Calcular $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ y W es el cubo unidad en el primer octante. Realizar el cálculo directamente y comprobarlo utilizando el teorema de la divergencia.
16. Calcular la integral de superficie $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z(x^2 + y^2)^2\mathbf{k}$ y ∂W es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.
17. Demostrar que

$$\iiint_W (\nabla f) \cdot \mathbf{F} dx dy dz = \iint_{\partial W} f \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \iiint_W f \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy dz.$$
18. Demostrar la identidad

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}).$$
19. Demostrar que $\iiint_W (1/r^2) dx dy dz = \iint_{\partial W} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}/r^2) dS$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
20. Dados los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^3$ y los números (“cargas”) q_1, \dots, q_k . Definimos la función ϕ by $\phi(x, y, z) = \sum_{i=1}^k q_i/(4\pi \|\mathbf{r} - \mathbf{v}_i\|)$, donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Demostrar que para una superficie cerrada S y $\mathbf{E} = -\nabla\phi$,

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q,$$
 donde Q es la carga total en el interior de S . (Suponer que se aplica la ley de Gauss del Teorema 10 y que ninguna de la cargas está situada en S .)

21. Probar las *identidades de Green*

$$\iint_{\partial W} f \nabla g \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_W (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV$$

y

$$\iint_{\partial W} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_W (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV.$$

22. Supongamos que \mathbf{F} satisface $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ y $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en todo \mathbb{R}^3 . Demostrar que podemos escribir $\mathbf{F} = \nabla f$, donde $\nabla^2 f = 0$.

23. Sea ρ una función continua en \mathbb{R}^3 tal que $\rho(\mathbf{q}) = 0$ excepto para \mathbf{q} en alguna región W . Sea $\mathbf{q} \in W$ denotada por $\mathbf{q} = (x, y, z)$. El *potencial* de ρ se define como la función

$$\phi(\mathbf{p}) = \iiint_W \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|} dV(\mathbf{q}),$$

donde $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$ es la distancia entre \mathbf{p} y \mathbf{q} .

- (a) Utilizando el método del Teorema 10, demostrar que

$$\iint_{\partial W} \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS = - \iiint_W \rho dV$$

para aquellas regiones W que puedan ser divididas en una unión finita de regiones elementales simétricas.

- (b) Demostrar que ϕ satisface la *ecuación de Poisson*

$$\nabla^2 \phi = -\rho.$$

[SUGERENCIA: utilizar el apartado (a)]. (Obsérvese que si ρ es una densidad de carga, entonces la integral que define ϕ puede interpretarse como la suma de los potenciales en \mathbf{p} debidos a las cargas puntuales distribuidas sobre W según la densidad ρ).

24. Supóngase que \mathbf{F} es tangente a la superficie cerrada $S = \partial W$ de una región W . Demostrar que

$$\iiint_W (\operatorname{div} \mathbf{F}) dV = 0.$$

25. Usar la ley de Gauss y la simetría para probar que el campo eléctrico debido a una carga Q distribuida uniformemente sobre la superficie de una esfera es el mismo en el exterior de la superficie que el campo producido por una carga puntual Q situada en el centro de la esfera. ¿Cuál es el campo en el interior de la esfera?

26. Reformular el Ejercicio 25 en términos de campos gravitatorios.

27. Mostrar cómo se puede usar la ley de Gauss para resolver el apartado (b) del Ejercicio 29 de la Sección 8.3.

28. Sea S una superficie cerrada. Utilizar el teorema de Gauss para demostrar que si \mathbf{F} es un campo vectorial de clase C^2 , entonces tenemos $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$.

29. Sea S la superficie de la región W . Demostrar que

$$\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS = 3 \text{ volumen } (W).$$

Explicar esto geométricamente.

30. Para una distribución de carga estacionaria y una distribución de corriente de divergencia cero, los campos eléctrico y magnético $\mathbf{E}(x, y, z)$ y $\mathbf{H}(x, y, z)$ satisfacen

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0}, & \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho & \text{y} & & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}. \end{aligned}$$

Aquí, suponemos que $\rho = \rho(x, y, z)$ y $\mathbf{J}(x, y, z)$ son conocidos. La radiación que los campos producen a través de la superficie S está determinada por un campo vectorial de densidad del flujo de radiación, denominado campo vectorial de *Poynting*,

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

- (a) Si S es una superficie *cerrada*, demostrar que el flujo de radiación —es decir, el flujo de \mathbf{P} a través de S — está dado por

$$\iint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = - \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV,$$

donde V es la región encerrada por S .

- (b) Ejemplos de tales campos son $\mathbf{E}(x, y, z) = z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ y $\mathbf{H}(x, y, z) = -xy\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$. En este caso, hallar el flujo del vector de Poynting a través de la superficie semiesférica mostrada en la Figura 8.4.9. (Obsérvese que se trata de una superficie *abierta*).

- (c) Los campos del apartado (b) producen un vector de Poynting que pasa a través de la superficie toroidal mostrada en la Figura 8.4.10. ¿Cuál es el flujo a través de este toro?

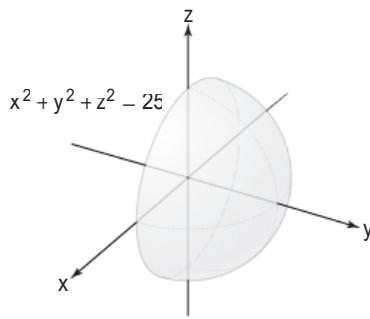


Figura 8.4.9 La superficie del Ejercicio 30(b).

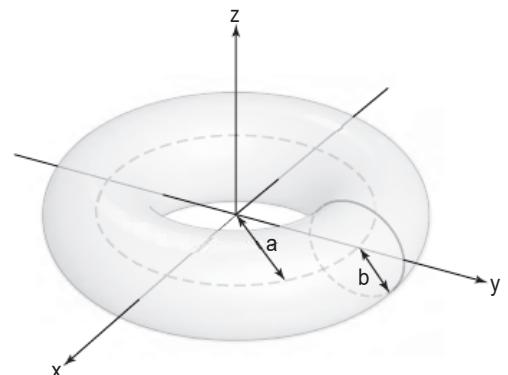


Figura 8.4.10 La superficie del Ejercicio 30(c).

8.5 Formas diferenciales

La teoría de las formas diferenciales proporciona una forma elegante de formular los teoremas de Green, Stokes y Gauss como un resultado, el **teorema fundamental del cálculo**. El nacimiento del concepto de una forma diferencial es otro claro ejemplo de cómo las matemáticas hablan a los matemáticos y dirigen su propio desarrollo. Estos tres teoremas son, en realidad, generalizaciones del teorema fundamental del cálculo de Newton y Leibniz para funciones de una variable,

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a)$$

a dos y tres dimensiones.

Recordemos que Bernhard Riemann creó el concepto de espacios n -dimensionales. Si el teorema fundamental del cálculo fuera realmente *fundamental*, entonces debería poder generalizarse a dimensiones arbitrarias. Pero, ¡un momento! El producto vectorial y, por tanto, el rotacional, no se extienden a dimensiones superiores, como hemos comentado en la nota a pie de página 3 en la Sección 1.3. Por tanto, necesitamos alguna idea nueva.

Recordemos también que Hamilton estuvo buscando durante casi 15 años sus cuaterniones, que finalmente le condujeron al descubrimiento del producto vectorial. ¿Qué es lo que nos está diciendo la no existencia de un producto vectorial en dimensiones superiores? Si el teorema fundamental del cálculo es el concepto clave, esto sugiere la existencia de un lenguaje matemático en el que pueda ser formulado para n -dimensiones. Con el fin de conseguir esto, los matemáticos se dieron cuenta de que estaban forzados a alejarse de los vectores y avanzar hacia el descubrimiento del espacio *dual* y de un objeto matemático completamente nuevo, las *formas diferenciales*. En este nuevo lenguaje, los teoremas de Green, Stokes y Gauss tienen la misma forma extraordinariamente simple y elegante.

Enunciado de forma simple y muy breve, una expresión del tipo $P dx + Q dy$ es una 1-forma, o una *1-forma diferencial* en una región del plano xy y $F dx dy$ es una 2-forma. Análogamente, podemos definir la noción de n -forma. Existe una operación d , que lleva n -formas a $n+1$ -formas. Es similar a un rotacional generalizado y tiene la propiedad de que para $\omega = P dx + Q dy$, tenemos

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

y por tanto, con esta notación, el teorema de Green se convierte en

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega,$$

que, curiosamente, solo cambia el operador de frontera ∂ por el operador d . Sin embargo, las formas diferenciales son algo más que una notación. Dan lugar a una bella teoría que puede generalizarse a n -dimensiones.

En general, si M es una superficie orientada de n dimensiones con una frontera $(n-1)$ -dimensional ∂M y si ω es una $(n-1)$ -forma sobre M , entonces el teorema fundamental del cálculo (denominado también *teorema de Stokes generalizado*) dice que

$$\boxed{\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.}$$

Algo que resulta de utilidad en este punto es considerar el sentido en el que el teorema fundamental del cálculo se convierte en un caso especial de este resultado.

En esta sección vamos a hacer una exposición muy elemental de la teoría de formas. Puesto que nuestro principal objetivo es demostrar que los teoremas de Green, Stokes y Gauss se pueden unificar bajo un único teorema, nos daremos por satisfechos con una versión de estos teoremas que no es la más general posible. Además, vamos a presentar las formas diferenciales de una manera puramente axiomática y no constructiva, evitando así el tremendo número de preliminares algebraicos formales que normalmente se necesitan para su construcción. Para los puristas, este enfoque quedará lejos de ser completo, pero será comprensible para los estudiantes. Esperamos que esto sea una motivación para algunos estudiantes y les lleve a profundizar en la teoría de las formas diferenciales. Empezamos presentando la noción de 0-forma.

0-formas

Sea K un conjunto abierto en \mathbb{R}^3 . Una **0-forma** sobre K es una función con valores reales $f: K \rightarrow \mathbb{R}$. Cuando derivemos f una vez, supondremos que es de clase C^1 y cuando la derivemos dos veces, supondremos que es de clase C^2 .

Dadas dos 0-formas f_1 y f_2 sobre K , podemos sumarlas de la manera usual para obtener una nueva 0-forma $f_1 + f_2$ o multiplicarlas para obtener una 0-forma $f_1 f_2$.

Ejemplo 1 Sean $f_1(x, y, z) = xy + yz$ y $f_2(x, y, z) = y \operatorname{sen} xz$ son 0-formas sobre \mathbb{R}^3 :

$$(f_1 + f_2)(x, y, z) = xy + yz + y \operatorname{sen} xz$$

y

$$(f_1 f_2)(x, y, z) = y^2 x \operatorname{sen} xz + y^2 z \operatorname{sen} xz.$$



1-Formas

Las 1-*formas básicas* son las expresiones dx , dy y dz . Por el momento, las consideraremos solo como símbolos formales. Una 1-*forma* ω sobre un conjunto abierto K es una combinación lineal formal

$$\omega = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

o simplemente

$$\omega = P dx + Q dy + R dz,$$

donde P, Q y R son funciones con valores reales sobre K . Por la expresión $P dx$ denotaremos la 1-forma $P dx + 0 \cdot dy + 0 \cdot dz$ y de forma similar para $Q dy$ y $R dz$. Además, el orden de $P dx, Q dy$ y $R dz$ es indiferente, de modo que

$$P dx + Q dy + R dz = R dz + P dx + Q dy, \text{ etc.}$$

Dadas dos 1-formas $\omega_1 = P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz$ y $\omega_2 = P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz$, podemos sumarlas para obtener una nueva 1-forma $\omega_1 + \omega_2$ definida por

$$\omega_1 + \omega_2 = (P_1 + P_2) dx + (Q_1 + Q_2) dy + (R_1 + R_2) dz,$$

y dada una 0-forma f , podemos construir la 1-forma $f\omega_1$ definida por

$$f\omega_1 = (fP_1) dx + (fQ_1) dy + (fR_1) dz.$$

Ejemplo 2

Sean $\omega_1 = (x + y^2) dx + (zy) dy + (e^{xyz}) dz$ y $\omega_2 = \operatorname{sen} y dx + \operatorname{sen} x dy$ 1-formas. Entonces

$$\omega_1 + \omega_2 = (x + y^2 + \operatorname{sen} y) dx + (zy + \operatorname{sen} x) dy + (e^{xyz}) dz.$$

Si $f(x, y, z) = x$, entonces

$$f\omega_2 = x \operatorname{sen} y dx + x \operatorname{sen} x dy.$$



2-Formas

Las 2-*formas básicas* son las expresiones formales $dx dy$, $dy dz$, y $dz dx$. Estas expresiones deben interpretarse como productos de dx con dy , dy con dz y dz con dx .

Una **2-forma** η sobre K es una expresión formal

$$\eta = F \, dx \, dy + G \, dy \, dz + H \, dz \, dx,$$

donde F, G y H son funciones con valores reales sobre K . El orden de $F \, dx \, dy, G \, dy \, dz$ y $H \, dz \, dx$ es indiferente; por ejemplo,

$$F \, dx \, dy + G \, dy \, dz + H \, dz \, dx = H \, dz \, dx + F \, dx \, dy + G \, dy \, dz, \text{ etc.}$$

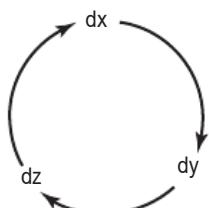


Figura 8.5.1 El orden cíclico de dx, dy y dz .

En este punto resulta útil observar que en una 2-forma las 1-formas básicas dx, dy y dz aparecen siempre en pares cíclicos (véase la Figura 8.5.1), es decir, $dx \, dy, dy \, dz$ y $dz \, dx$.

Por analogía con las 0-formas y 1-formas, podemos sumas dos 2-formas

$$\eta_i = F_i \, dx \, dy + G_i \, dy \, dz + H_i \, dz \, dx,$$

$i = 1$ y 2 , para obtener una nueva 2-forma,

$$\eta_1 + \eta_2 = (F_1 + F_2) \, dx \, dy + (G_1 + G_2) \, dy \, dz + (H_1 + H_2) \, dz \, dx.$$

De manera similar, si f es una 0-forma y η es una 2-forma, podemos tomar el producto

$$f\eta = (fF) \, dx \, dy + (fG) \, dy \, dz + (fH) \, dz \, dx.$$

Finalmente, con la expresión $F \, dx \, dy$ denotaremos la 2-forma $F \, dx \, dy + 0 \cdot dy \, dz + 0 \cdot dz \, dx$.

Ejemplo 3

Las expresiones

$$\eta_1 = x^2 \, dx \, dy + y^3 x \, dy \, dz + \sin zy \, dz \, dx$$

y

$$\eta_2 = y \, dy \, dz$$

son 2-formas. Su suma es

$$\eta_1 + \eta_2 = x^2 \, dx \, dy + (y^3 x + y) \, dy \, dz + \sin zy \, dz \, dx.$$

Si $f(x, y, z) = xy$, entonces

$$f\eta_2 = xy^2 \, dy \, dz.$$



3-Formas

Una **3-forma básica** es una expresión formal $dx \, dy \, dz$ (en este orden cíclico específico, como en la Figura 8.5.1). Una **3-forma** ν sobre un conjunto abierto $K \subset \mathbb{R}^3$ es una expresión de la forma $\nu = f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$, donde f es una función con valores reales sobre K .

Podemos sumar dos 3-formas y podemos multiplicarlas por 0-formas de la manera obvia. Aparentemente, hay poca diferencia entre una 0-forma y una 3-forma, porque ambas implican una única función con

valores reales. Pero las distinguiremos con un propósito que se verá claramente cuando multipliquemos y derivemos formas diferenciales.

Ejemplo 4 Sea $\nu_1 = y \, dx \, dy \, dz$, $\nu_2 = e^{x^2} \, dx \, dy \, dz$ y $f(x, y, z) = xyz$. Entonces $\nu_1 + \nu_2 = (y + e^{x^2}) \, dx \, dy \, dz$ y $f\nu_1 = y^2xz \, dx \, dy \, dz$. ▲

Aunque podemos sumar dos 0-formas, dos 1-formas, dos 2-formas o dos 3-formas, no necesitaremos sumar una k -forma y una j -forma si $k \neq j$. Por ejemplo, no necesitaremos escribir

$$f(x, y, z) \, dx \, dy + g(x, y, z) \, dz.$$

Ahora que hemos definido estos objetos formales (formas), podemos preguntarnos legítimamente para qué valen, cómo se usan y quizás más importante, qué significan. La respuesta a la primera pregunta estará clara a medida que avancemos, aunque podemos describir de forma inmediata cómo se usan y cómo se interpretan.

Una función con valores reales sobre un dominio K en \mathbb{R}^3 es una regla que asigna un número real a cada punto de K . En cierto sentido, las formas diferenciales son generalizaciones de las funciones con valores reales que hemos estudiado en el cálculo diferencial. En efecto, las 0-formas sobre un conjunto abierto K son solo funciones sobre K . Así, una 0-forma f lleva puntos de K a números reales.

Nos gustaría interpretar las k -formas diferenciales (para $k \geq 1$) no como funciones sobre puntos de K , sino como funciones sobre objetos geométricos tales como curvas y superficies. Muchos de los antiguos geómetras griegos interpretaban las rectas y curvas como si estuvieran formadas por una cantidad infinita de puntos, y los planos y superficies estaban formados por infinitas curvas. En consecuencia, hay al menos una justificación histórica para aplicar esta jerarquía geométrica a la interpretación de las formas diferenciales.

Dado un subconjunto abierto $K \subset \mathbb{R}^3$, distinguiremos cuatro tipos de subconjuntos de K (véase la Figura 8.5.2):

- (I) Puntos en K .
- (II) Curvas orientadas simples y curvas orientadas cerradas simples. C en K .
- (III) Superficies orientadas, $S \subset K$.
- (IV) Subregiones elementales, $R \subset K$.

Integrales de 1-formas sobre curvas

Vamos a comenzar con las 1-formas. Sea

$$\omega = P(x, y, z) \, dx + Q(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz$$

una 1-forma sobre K y sea C una curva orientada simple como la de la Figura 8.5.2. El número real que ω asigna a C está dado por la fórmula

$$\int_C \omega = \int_C P(x, y, z) \, dx + Q(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz. \quad (1)$$

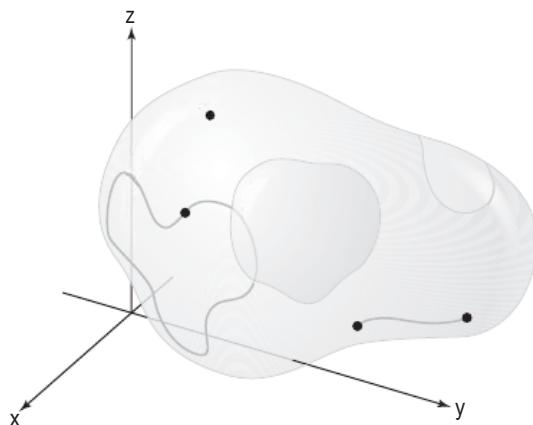


Figura 8.5.2 Los cuatro tipos geométricos de subconjuntos de un conjunto abierto $K \subset \mathbb{R}^3$ a los que se aplica la teoría de las formas diferenciales.

Recordemos (véase la Sección 7.2) que esta integral se calcula como sigue. Supongamos que $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow K$, $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una parametrización que conserva la orientación de C . Entonces

$$\int_C \omega = \int_{\mathbf{c}} \omega = \int_a^b \left[P(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dy}{dt} + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dz}{dt} \right] dt.$$

El Teorema 1 de la Sección 7.2 garantiza que $\int_C \omega$ no depende de la elección de la parametrización \mathbf{c} .

Podemos por tanto interpretar una 1-forma ω sobre K como una regla que asigna un número real a cada curva orientada $C \subset K$; de forma similar, una 2-forma η se puede interpretar como una regla que asigna un número real a cada superficie orientada $S \subset K$; y una 3-forma ν será una regla que asigna un número real a cada subregión elemental de K . Las reglas para asociar números reales con curvas, superficies y regiones están completamente contenidas en las expresiones formales que hemos definido.

Ejemplo 5

Sea $\omega = xy \, dx + y^2 \, dy + dz$ una 1-forma sobre \mathbb{R}^3 y sea C la curva orientada simple en \mathbb{R}^3 descrita por la parametrización $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3, 1)$, $0 \leq t \leq 1$. C está orientada eligiendo la dirección positiva de C para que sea la dirección en la que $\mathbf{c}(t)$ recorre C según t va de 0 a 1. Entonces, según la fórmula (1),

$$\begin{aligned} \int_C \omega &= \int_0^1 [t^5(2t) + t^6(3t^2) + 0] \, dt \\ &= \int_0^1 (2t^6 + 3t^8) \, dt = \frac{13}{21}. \end{aligned}$$

Por tanto, esta 1-forma ω asigna a cada curva orientada simple y a cada curva orientada cerrada simple C en \mathbb{R}^3 el número $\int_C \omega$. ▲

Integrales de 2-formas sobre superficies

De manera similar, una 2-forma η sobre un conjunto abierto $K \subset \mathbb{R}^3$ puede ser interpretada como una función que asocia un número real a cada superficie orientada $S \subset K$. Esto se consigue mediante la noción de integración de 2-formas sobre superficies. Sea

$$\eta = F(x, y, z) dx dy + G(x, y, z) dy dz + H(x, y, z) dz dx$$

una 2-forma sobre K y sea $S \subset K$ una superficie orientada parametrizada por una función $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ (véase la Sección 7.3).

Definición Si S es tal superficie y η es una 2-forma sobre K , definimos $\iint_S \eta$ mediante la fórmula

$$\begin{aligned} \iint_S \eta &= \iint_S F dx dy + G dy dz + H dz dx \\ &= \iint_D \left[F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right. \\ &\quad + G(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \\ &\quad \left. + H(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right] du dv, \end{aligned} \tag{2}$$

donde

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Si S está formada por varios trozos S_i , $i = 1, \dots, k$, como en la Figura 8.4.4, cada uno de ellos con su propia parametrización Φ_i , definimos

$$\iint_S \eta = \sum_{i=1}^k \iint_{S_i} \eta.$$

Debemos verificar que $\iint_S \eta$ no depende de la elección de la parametrización Φ . Este resultado está básicamente (aunque no obviamente) contenido en el Teorema 4 de la Sección 7.6.

Ejemplo 6

Sea $\eta = z^2 dx dy$ una 2-forma sobre \mathbb{R}^3 y sea S la semiesfera unidad superior en \mathbb{R}^3 . Hallar $\iint_S \eta$.

Solución

Parametrizamos S mediante $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$, donde $(u, v) \in D = [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$. Por la fórmula (2),

$$\iint_S \eta = \iint_D \cos^2 u \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv,$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix} \\ &= \sin u \cos u \cos^2 v + \cos u \sin u \sin^2 v = \sin u \cos u. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \iint_S \eta &= \iint_D \cos^2 u \cos u \sin u du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^3 u \sin u du dv = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos^4 u}{4} \right]_0^{\pi/2} dv = \frac{\pi}{2}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ejemplo 7

Calcular $\iint_S x dy dz + y dx dy$, donde S es la superficie orientada descrita por la parametrización $x = u + v, y = u^2 - v^2, z = uv$, donde $(u, v) \in D = [0, 1] \times [0, 1]$.

Solución

Por definición, tenemos

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix} = 2(u^2 + v^2);$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & -2v \end{vmatrix} = -2(u + v).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \iint_S x dy dz + y dx dy &= \iint_D [(u + v)(2)(u^2 + v^2) + (u^2 - v^2)(-2)(u + v)] du dv \\ &= 4 \iint_D (v^3 + uv^2) du dv = 4 \int_0^1 \int_0^1 (v^3 + uv^2) du dv \\ &= 4 \int_0^1 \left[uv^3 + \frac{u^2 v^2}{2} \right]_0^1 dv = 4 \int_0^1 \left(v^3 + \frac{v^2}{2} \right) dv \\ &= \left[v^4 + \frac{2v^3}{3} \right]_0^1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Integrales de 3-formas sobre regiones

Finalmente, debemos interpretar las 3-formas como funciones sobre las subregiones elementales de K . Sea $v = f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ una 3-forma y sea $R \subset K$ una subregión elemental de K . Entonces a cada subregión $R \subset K$ le asignamos el número

$$\iiint_R v = \iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad (3)$$

que es simplemente la integral triple ordinaria de f sobre R , como hemos descrito en la Sección 5.5.

Ejemplo 8

Supongamos que $v = (x + z) \, dx \, dy \, dz$ y que $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Calcular $\iiint_R v$.

Solución

Calculamos:

$$\begin{aligned} \iiint_R v &= \iiint_R (x + z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + zx \right]_0^1 \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + z \right) \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + z \right) \, dz = \left[\frac{z}{2} + \frac{z^2}{2} \right]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

▲

Álgebra de las formas diferenciales

Ahora vamos a ver el álgebra (o reglas de multiplicación) de las formas diferenciales que, junto con la derivación de las mismas, nos va a permitir enunciar los teoremas de Green, Stokes y Gauss en términos de las formas diferenciales.

Si ω es una k -forma y η es una l -forma sobre K , $0 \leq k + l \leq 3$, existe un producto denominado **producto exterior** $\omega \wedge \eta$ de ω y η que es una $k + l$ forma sobre K . El producto exterior satisface las siguientes leyes:

- (i) Para cada k existe una k -forma nula con la propiedad de que $0 + \omega = \omega$ para toda k -forma ω y $0 \wedge \eta = 0$ para toda l -forma η si $0 \leq k + l \leq 3$.
- (ii) (*Distributiva*) Si f es una 0-forma, entonces

$$(f\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = f(\omega_1 \wedge \eta) + (\omega_2 \wedge \eta).$$

- (III) (*Anticomutativa*) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}(\eta \wedge \omega)$.

- (IV) (*Asociativa*) Si $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ son k_1, k_2, k_3 formas, respectivamente, con $k_1 + k_2 + k_3 \leq 3$, entonces

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3.$$

- (V) (*Homogeneidad con respecto a las funciones*) Si f es una 0-forma, entonces

$$\omega \wedge (f\eta) = (f\omega) \wedge \eta = f(\omega \wedge \eta).$$

Obsérvese que las reglas (II) y (III) implican la regla (V).

(VI) Se cumplen las siguientes reglas para la multiplicación de 1-formas:

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= dx dy \\ dy \wedge dx &= -dx dy = (-1)(dx \wedge dy) \\ dy \wedge dz &= dy dz = (-1)(dz \wedge dy) \\ dz \wedge dx &= dz dx = (-1)(dx \wedge dz) \\ dx \wedge dx &= 0, \quad dy \wedge dy = 0, \quad dz \wedge dz = 0 \\ dx \wedge (dy \wedge dz) &= (dx \wedge dy) \wedge dz = dx dy dz. \end{aligned}$$

(VII) Si f es una 0-forma y ω es cualquier k -forma, entonces $f \wedge \omega = f\omega$.

Utilizando las leyes (I) a (VII), ahora podemos hallar un producto único de cualquier l -forma η y cualquier k -forma ω , si $0 \leq k + l \leq 3$.

Ejemplo 9

Demostrar que $dx \wedge dy dz = dx dy dz$.

Solución

Por la regla (VI), $dy dz = dy \wedge dz$. Por tanto,

$$dx \wedge dy dz = dx \wedge (dy \wedge dz) = dx dy dz.$$



Ejemplo 10

Si $\omega = x dx + y dy$ y $\eta = zy dx + xz dy + xy dz$, hallar $\omega \wedge \eta$.

Solución

Calculando $\omega \wedge \eta$, obtenemos

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= (x dx + y dy) \wedge (zy dx + xz dy + xy dz) \\ &= [(x dx + y dy) \wedge (zy dx)] + [(x dx + y dy) \wedge (xz dy)] \\ &\quad + [(x dx + y dy) \wedge (xy dz)] \\ &= xyz(dx \wedge dx) + zy^2(dy \wedge dx) + x^2 z(dx \wedge dy) + xyz(dy \wedge dy) \\ &\quad + x^2 y(dx \wedge dz) + xy^2(dy \wedge dz) \\ &= -zy^2 dx dy + x^2 z dx dy - x^2 y dz dx + xy^2 dy dz \\ &= (x^2 z - y^2 z) dx dy - x^2 y dz dx + xy^2 dy dz. \end{aligned}$$



Ejemplo 11

Si $\omega = x dx - y dy$ y $\eta = x dy dz + z dx dy$, hallar $\omega \wedge \eta$.

Solución

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= (x dx - y dy) \wedge (x dy dz + z dx dy) \\ &= [(x dx - y dy) \wedge (x dy dz)] + [(x dx - y dy) \wedge (z dx dy)] \\ &= (x^2 dx \wedge dy dz) - (xy dy \wedge dy dz) + (xz dx \wedge dx dy) \\ &\quad - (yz dy \wedge dx dy) \\ &= [x^2 dx \wedge (dy \wedge dz)] - [xy dy \wedge (dy \wedge dz)] + [xz dx \wedge (dx \wedge dy)] \\ &\quad - [yz dy \wedge (dx \wedge dy)] \\ &= x^2 dx dy dz - [xy(dy \wedge dy) \wedge dz] + [xz(dx \wedge dx) \wedge dy] \\ &\quad - [yz(dy \wedge dx) \wedge dy] \\ &= x^2 dx dy dz - xy(0 \wedge dz) + xz(0 \wedge dy) + [yz(dy \wedge dy) \wedge dx] \\ &= x^2 dx dy dz. \end{aligned}$$



El último paso importante en el desarrollo de esta teoría es mostrar cómo se derivan las formas. La derivada de una k -forma es una forma $(k+1)$ -forma si $k < 3$, y la derivada de una 3-forma siempre es igual a cero. Si ω es una k -forma, denotaremos la derivada de ω por $d\omega$. La operación d tiene las siguientes propiedades:

- (1) Si $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ es una 0-forma, entonces

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

- (2) (*Linealidad*) Si ω_1 y ω_2 son k -formas, entonces

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2.$$

- (3) Si ω es una k -forma y η es una l -forma,

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega \wedge \eta) + (-1)^k (\omega \wedge d\eta).$$

- (4) $d(d\omega) = 0$ y $d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$ o, simplemente, $d^2 = 0$.

Las propiedades (1) a (4) proporcionan información suficiente como para permitirnos derivar cualquier forma de manera única.

Ejemplo 12

Sea $\omega = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy$ una 1-forma sobre algún conjunto abierto $K \subset \mathbb{R}^3$. Hallar $d\omega$.

Solución

$$\begin{aligned} d[P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy] &= d[P(x, y, z) \wedge dx] + d[Q(x, y, z) \wedge dy] && \text{(usando 2)} \\ &= (dP \wedge dx) + [P \wedge d(dx)] + (dQ \wedge dy) + [Q \wedge d(dy)] && \text{(usando 3)} \\ &= (dP \wedge dx) + (dQ \wedge dy) && \text{(usando 4)} \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy && \text{(usando 1)} \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy \right) \\ &= - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz. \end{aligned}$$



Ejemplo 13

Sea f una 0-forma. Utilizando únicamente las reglas de derivación (1) a (3) y el hecho de que $d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$, demostrar que $d(df) = 0$.

Solución

Por la regla (1),

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

y por tanto

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y} dy\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz\right).$$

Trabajando solo con el primer término y utilizando la regla (3), obtenemos

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx\right) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x} \wedge dx\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial x} \wedge d(dx) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz\right) \wedge dx + 0 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \wedge dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz \wedge dx \\ &= -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz dx. \end{aligned}$$

De forma similar, determinamos que

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} dy dz$$

y

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dz dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy dz.$$

Sumando, obtenemos $d(df) = 0$ por la igualdad de las derivadas parciales cruzadas. ▲

Ejemplo 14

Demostrar que $d(dx dy)$, $d(dy dz)$ y $d(dz dx)$ son cero.

Solución

Para probar el primer caso, usamos la propiedad (3):

$$d(dx dy) = d(dx \wedge dy) = [d(dx) \wedge dy - dx \wedge d(dy)] = 0.$$

Los otros casos son similares. ▲

Ejemplo 15

Si $\eta = F(x, y, z) dx dy + G(x, y, z) dy dz + H(x, y, z) dz dx$, hallar $d\eta$.

Solución

Por la propiedad (2),

$$d\eta = d(F dx dy) + d(G dy dz) + d(H dz dx).$$

Vamos a calcular $d(F dx dy)$. Utilizando de nuevo la propiedad (3), obtenemos

$$d(F dx dy) = d(F \wedge dx dy) = dF \wedge (dx dy) + F \wedge d(dx dy).$$

Por el Ejemplo 14, $d(dx dy) = 0$, de modo que nos queda

$$\begin{aligned} dF \wedge (dx dy) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \right) \wedge (dx \wedge dy) \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial x} dx \wedge (dx \wedge dy) \right] + \left[\frac{\partial F}{\partial y} dy \wedge (dx \wedge dy) \right] \\ &\quad + \left[\frac{\partial F}{\partial z} dz \wedge (dx \wedge dy) \right]. \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} dx \wedge (dx \wedge dy) &= (dx \wedge dx) \wedge dy = 0 \wedge dy = 0, \\ dy \wedge (dx \wedge dy) &= -dy \wedge (dy \wedge dx) \\ &= -(dy \wedge dy) \wedge dx = 0 \wedge dx = 0, \end{aligned}$$

y

$$dz \wedge (dx \wedge dy) = (-1)^2 (dx \wedge dy) \wedge dz = dx dy dz.$$

En consecuencia,

$$d(F dx dy) = \frac{\partial F}{\partial z} dx dy dz.$$

Análogamente, tenemos

$$d(G dy dz) = \frac{\partial G}{\partial x} dx dy dz \quad \text{y} \quad d(H dz dx) = \frac{\partial H}{\partial y} dx dy dz.$$

Por tanto,

$$d\eta = \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \right) dx dy dz. \quad \blacktriangle$$

Ya hemos desarrollado todos los conceptos necesarios para reformular los teoremas de Green, Stokes y Gauss en el lenguaje de las formas diferenciales.

Teorema 11 Teorema de Green Sea D una región elemental en el plano xy con ∂D orientada en sentido antihorario. Supongamos que $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ es una 1-forma sobre algún conjunto abierto K en \mathbb{R}^3 que contiene a D . Entonces

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega.$$

Aquí $d\omega$ es una 2-forma sobre K y D es una superficie en \mathbb{R}^3 parametrizada por $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(x, y) = (x, y, 0)$. Dado que P y Q no son explícitamente funciones de z , entonces $\partial P / \partial z$ y $\partial Q / \partial z = 0$, y por el Ejemplo 12, $d\omega = (\partial Q / \partial x - \partial P / \partial y) dx dy$. En consecuencia, el Teorema 13 no quiere decir más que

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

que es precisamente el teorema de Green. Por tanto, el Teorema 13 se cumple. Del mismo modo, tenemos los siguientes teoremas.

Teorema 12 Teorema de Stokes Sea S una superficie orientada en \mathbb{R}^3 , cuya frontera está formada por una curva cerrada simple ∂S (Figura 8.5.3) orientada como la frontera de S (véase la Figura 8.2.1). Supongamos que ω es una 1-forma sobre algún conjunto abierto K que contiene a S . Entonces

$$\int_{\partial S} \omega = \iint_S d\omega.$$

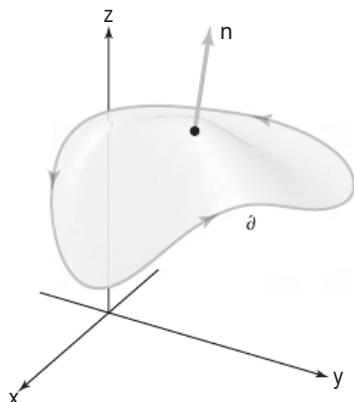


Figura 8.5.3 Una superficie orientada sobre la que se aplica el teorema de Stokes.

Teorema 13 Teorema de Gauss Sea $W \subset \mathbb{R}^3$ una región elemental con ∂W con orientación exterior (véase la Sección 8.4). Si η es una 2-forma sobre alguna región K que contiene W , entonces

$$\iint_{\partial W} \eta = \iiint_W d\eta.$$

Es probable que el lector haya reparado en la gran similitud entre los enunciados de estos teoremas. En las formulaciones basadas en campos vectoriales, hemos utilizado la divergencia para regiones en \mathbb{R}^3 (teorema de Gauss) y el rotacional para superficies en \mathbb{R}^3 (teorema de Stokes) y regiones en \mathbb{R}^2 (teorema de Green). Aquí simplemente utilizamos el concepto unificado de derivada de una forma diferencial para los tres teoremas; y, de hecho, podemos enunciar todos los teoremas como uno solo si proporcionamos algo más de terminología.

Por una **2-variedad orientada con frontera** en \mathbb{R}^3 entendemos una superficie en \mathbb{R}^3 cuya frontera es una curva cerrada simple con una orientación como la que se ha descrito en la Sección 8.2. Por una **3-variedad orientada** en \mathbb{R}^3 entendemos una región elemental en \mathbb{R}^3 (y suponemos que su frontera, que es una superficie, está orientada según la orientación exterior estudiada en la Sección 8.4). Llamaremos al siguiente teorema unificado “teorema de Stokes”, de acuerdo con los convenios actuales.

Teorema 14 Teorema general de Stokes Sea M una k -variedad orientada en \mathbb{R}^3 ($k = 2$ o 3) contenida en algún conjunto abierto K . Supongamos que ω es una $(k-1)$ -forma sobre K . Entonces

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

Aquí la integral se interpreta como una integral simple, doble o triple, según sea apropiado. De hecho, esta es la forma del teorema de Stokes que generaliza a espacios de dimensión arbitraria.

Ejercicios

1. Calcular $\omega \wedge \eta$ si

$$(a) \quad \begin{aligned} \omega &= 2x \, dx + y \, dy \\ \eta &= x^3 \, dx + y^2 \, dy. \end{aligned}$$

$$(b) \quad \begin{aligned} \omega &= x \, dx - y \, dy \\ \eta &= y \, dx + x \, dy. \end{aligned}$$

$$(c) \quad \begin{aligned} \omega &= x \, dx + y \, dy + z \, dz \\ \eta &= z \, dx \, dy + x \, dy \, dz + y \, dz \, dx. \end{aligned}$$

$$(d) \quad \begin{aligned} \omega &= xy \, dy \, dz + x^2 \, dx \, dy \\ \eta &= dx + dz. \end{aligned}$$

$$(e) \quad \begin{aligned} \omega &= e^{xyz} \, dx \, dy \\ \eta &= e^{-xyz} \, dz. \end{aligned}$$

2. Probar que

$$\begin{aligned} (a_1 \, dx + a_2 \, dy + a_3 \, dz) \wedge (b_1 \, dy \, dz + b_2 \, dz \, dx \\ + b_3 \, dx \, dy) \\ = \left(\sum_{i=1}^3 a_i b_i \right) dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

3. Hallar $d\omega$ en los siguientes ejemplos:

$$(a) \quad \omega = x^2 y + y^3.$$

$$(b) \quad \omega = y^2 \cos x \, dy + xy \, dx + dz.$$

$$(c) \quad \omega = xy \, dy + (x+y)^2 \, dx.$$

$$(d) \quad \omega = x \, dx \, dy + z \, dy \, dz + y \, dz \, dx.$$

$$(e) \quad \omega = (x^2 + y^2) \, dy \, dz.$$

$$(f) \quad \omega = (x^2 + y^2 + z^2) \, dz.$$

$$(g) \quad \omega = \frac{-x}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{y}{x^2 + y^2} \, dy.$$

$$(h) \quad \omega = x^2 y \, dy \, dz.$$

4. Sea C el segmento de recta desde el punto $(-2, 0, 1)$ a $(3, 6, 9)$. Sean $\omega_1 = y \, dx + x \, dy + xy \, dz$, $\omega_2 = z \, dx + y \, dy + 2x \, dz$ y $f(x, y, z) = xy$. Calcular lo siguiente:

$$(a) \int_C f \omega_1. \quad (b) \int_C f \omega_2. \quad (c) \int_C \omega_1 + \omega_2.$$

5. Sea C parametrizada por $c(t) = (t^2 + 4t, t + 1), t \in [0, \pi]$. Sean $\omega_1 = y \, dx + x \, dy$, $\omega_2 = y^2 \, dx + x^2 \, dy$ y $f(x, y) = x$. Calcular lo siguiente:

$$(a) \int_C f \omega_1. \quad (b) \int_C f \omega_2. \quad (c) \int_C \omega_1 + \omega_2.$$

6. Sea $\mathbf{V}: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial definido por $\mathbf{V}(x, y, z) = G(x, y, z)\mathbf{i} + H(x, y, z)\mathbf{j} + F(x, y, z)\mathbf{k}$ y sea η la 2-forma sobre K dada por

$$\eta = F \, dx \, dy + G \, dy \, dz + H \, dz \, dx.$$

Demostrar que $d\eta = (\operatorname{div} \mathbf{V}) \, dx \, dy \, dz$.

7. Si $\mathbf{V} = A(x, y, z)\mathbf{i} + B(x, y, z)\mathbf{j} + C(x, y, z)\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre $K \subset \mathbb{R}^3$, definimos la operación Forma_2 : campos vectoriales \rightarrow 2-formas mediante

$$\operatorname{Forma}_2(\mathbf{V}) = A \, dy \, dz + B \, dz \, dx + C \, dx \, dy.$$

(a) Demostrar que $\operatorname{Forma}_2(\alpha \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \alpha \operatorname{Forma}_2(\mathbf{V}_1) + \operatorname{Forma}_2(\mathbf{V}_2)$, donde α es un número real.

(b) Demostrar que $\operatorname{Forma}_2(\operatorname{rot} \mathbf{V}) = d\omega$, donde $\omega = A \, dx + B \, dy + C \, dz$.

- 8.** Utilizando la versión para formas diferenciales del teorema de Stokes, probar la versión para campos vectoriales de la Sección 8.2. Repetir esto mismo para el teorema de Gauss.

- 9.** Interpretar el Teorema 16 para el caso de $k = 1$.

- 10.** Sea $\omega = (x + y) dz + (y + z) dx + (x + z) dy$ y sea S la parte superior de la esfera unidad; es decir, S es el conjunto de puntos (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $z \geq 0$. ∂S es la circunferencia unidad en el plano xy . Calcular $\int_{\partial S} \omega$ directamente y por el teorema de Stokes.

- 11.** Sea T el sólido triangular acotado por el plano xy , el plano xz , el plano yz y el plano $2x + 3y + 6z = 12$. Calcular

$$\iint_{\partial T} F_1 dx dy + F_2 dy dz + F_3 dz dx$$

directamente y por el teorema de Gauss, si

- (a) $F_1 = 3y$, $F_2 = 18z$, $F_3 = -12$;
(b) $F_1 = z$, $F_2 = x^2$, $F_3 = y$.

- 12.** Calcular $\iint_S \omega$, donde $\omega = z dx dy + x dy dz + y dz dx$ y S es la esfera unidad, directamente y mediante el teorema de Gauss.

- 13.** Sea R una región elemental en \mathbb{R}^3 . Demostrar que el volumen de R está dado por la fórmula

$$v(R) = \frac{1}{3} \iint_{\partial R} x dy dz + y dz dx + z dx dy.$$

- 14.** En la Sección 4.2, hemos visto que la longitud $l(\mathbf{c})$ de una curva $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$, está dada por la fórmula

$$l(\mathbf{c}) = \int ds = \int_a^b \left(\frac{ds}{dt} \right) dt$$

donde, informalmente, $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$, es decir,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2}.$$

Supongamos ahora que una superficie S está dada en forma parametrizada por $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, donde $(u, v) \in D$. Demostrar que el área de S se puede expresar como

$$A(S) = \iint_D dS,$$

donde formalmente $(dS)^2 = (dx \wedge dy)^2 + (dy \wedge dz)^2 + (dz \wedge dx)^2$, una fórmula que precisa una interpretación. [SUGERENCIA:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

y análogamente para dy y dz . Utilizar las leyes de las formas diferenciales para las 1-formas básicas du y dv . Entonces dS resulta ser una función multiplicada por la 2-forma básica $du dv$, la cual podemos integrar sobre D].

Ejercicios de repaso del Capítulo 8

- 1.** Sea $\mathbf{F} = 2yz\mathbf{i} + (-x + 3y + 2)\mathbf{j} + (x^2 + z)\mathbf{k}$. Calcular $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq 1$ (sin la tapa superior ni la inferior). ¿Qué ocurre si incluimos ambas tapas?

- 2.** Sea W una región en \mathbb{R}^3 con frontera ∂W . Probar la identidad

$$\begin{aligned} &\iint_{\partial W} [\mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G})] \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iiint_W (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) dV \\ &- \iint_W \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{G}) dV. \end{aligned}$$

- 3.** Sea $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + z^8\mathbf{j} - 2xyz\mathbf{k}$. Calcular la integral de \mathbf{F} sobre la superficie del cubo unidad.

- 4.** Verificar el teorema de Green para la integral de línea

$$\int_C x^2 y \, dx + y \, dy,$$

cuando C es la frontera de la región entre las curvas $y = x$ e $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$.

- 5.** (a) Demostrar que $\mathbf{F} = (x^3 - 2xy^3)\mathbf{i} - 3x^2y^2\mathbf{j}$ es un campo vectorial gradiente.

- (b) Calcular la integral de \mathbf{F} a lo largo de la trayectoria $x = \cos^3 \theta$, $y = \sin^3 \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

- 6.** ¿Es posible deducir el teorema de Green en el plano partiendo del teorema de Gauss?
- 7.** (a) Demostrar que $\mathbf{F} = 6xy(\cos z)\mathbf{i} + 3x^2(\cos z)\mathbf{j} - 3x^2y(\sin z)\mathbf{k}$ es conservativo (véase la Sección 8.3).
 (b) Hallar f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.
 (c) Calcular la integral de \mathbf{F} a lo largo de la curva $x = \cos^3\theta$, $y = \sin^3\theta$, $z = 0$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.
- 8.** Sea $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$, $r = \|\mathbf{r}\|$. Demostrar que $\nabla^2(\log r) = 1/r^2$ y $\nabla^2(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$.
- 9.** La velocidad de un fluido queda descrita por $\mathbf{F} = 6xz\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$. Calcular la tasa con la que el fluido sale del cubo unidad.
- 10.** Sea $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + (x^2y - 2xy)\mathbf{j} - x^2z\mathbf{k}$. ¿Existe un \mathbf{G} tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$?
- 11.** Sea \mathbf{a} un vector constante y $\mathbf{F} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ [como es habitual, $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$]. ¿Es \mathbf{F} conservativo? En caso afirmativo, hallar un potencial.
- 12.** Demostrar que los campos \mathbf{F} de los apartados (a) y (b) son conservativos y determinar una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.
 (a) $\mathbf{F} = (y^2 e^{xy^2})\mathbf{i} + (2y e^{xy^2})\mathbf{j}$.
 (b) $\mathbf{F} = (\sin y)\mathbf{i} + (x \cos y)\mathbf{i} + (e^z)\mathbf{k}$.
- 13.** (a) Sea $f(x, y, z) = 3xye^{z^2}$. Calcular ∇f .
 (b) Sea $\mathbf{c}(t) = (3 \cos^3 t, \sin^2 t, e^t)$, $0 \leq t \leq \pi$. Calcular

$$\int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s}.$$
- (c) Verificar directamente el teorema de Stokes para campos vectoriales gradiente $\mathbf{F} = \nabla f$.
- 14.** Utilizando el teorema de Green, o cualquier otro, calcular $\int_C x^3 dy - y^3 dx$, donde C es la circunferencia unidad ($x^2 + y^2 = 1$).
- 15.** Calcular la integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y donde S es la superficie de la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- 16.** (a) Enunciar el teorema de Stokes para superficies en \mathbb{R}^3 .
 (b) Sea \mathbf{F} un campo vectorial en \mathbb{R}^3 que satisface $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Utilizar el teorema de Stokes para demostrar que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ donde C es una curva cerrada.
- 17.** Utilizar el teorema de Green para hallar el área de un lazo de la curva $x = a \sen \theta \cos \theta$, $y = a \sen^2 \theta$, para $a > 0$ y $0 \leq \theta \leq \pi$.
- 18.** Calcular $\int_C yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz$, donde C es la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y la superficie $z = y^2$.
- 19.** Calcular $\int_C (x+y) \, dx + (2x-z) \, dy + (y+z) \, dz$, donde C es el perímetro del triángulo que conecta los puntos $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 6)$, en este orden.
- 20.** ¿Cuáles de los siguientes son campos conservativos en \mathbb{R}^3 ? Para aquellos que lo sean, hallar una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.
 (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2y\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.
 (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x+z)\mathbf{i} - (y+z)\mathbf{j} + (x-y)\mathbf{k}$.
 (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k}$.
- 21.** Considérense los dos campos vectoriales siguientes en \mathbb{R}^3 :
 (I) $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$.
 (II) $\mathbf{G}(x, y, z) = (x^3 - 3xy^2)\mathbf{i} + (y^3 - 3x^2y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
 (a) ¿Cuál de estos campos es conservativo en \mathbb{R}^3 (si es que alguno lo es)? (Es decir, ¿cuál es un campo gradiente?) Razonar la respuesta.
 (b) Hallar un potencial para los campos que sean conservativos.
 (c) Sea α la trayectoria que va desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ siguiendo las aristas del cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ yendo desde $(0, 0, 0)$ a $(0, 0, 1)$, luego a $(0, 1, 1)$ y después a $(1, 1, 1)$. Sea β la trayectoria directa desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ siguiendo la diagonal del cubo. Hallar los valores de las integrales de línea

$$\int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad \int_{\alpha} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s},$$

$$\int_{\beta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad \int_{\beta} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}.$$
- 22.** Considérese el campo vectorial constante $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ en \mathbb{R}^3 .

- (a) Hallar un campo escalar $\phi(x, y, z)$ en \mathbb{R}^3 tal que $\nabla\phi = \mathbf{F}$ en \mathbb{R}^3 y $\phi(0, 0, 0) = 0$.
- (b) En la esfera Σ de radio 2 alrededor del origen, hallar todos los puntos en los que
- ϕ es máximo.
 - ϕ es mínimo.
- (c) Calcular los valores máximo y mínimo de ϕ sobre Σ .
- 23.** Sea \mathbf{F} un campo vectorial de clase C^1 y supóngase que $\nabla \cdot \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) > 0$. Demostrar que para una esfera lo suficientemente pequeña S centrada en (x_0, y_0, z_0) , el flujo de \mathbf{F} hacia el exterior de S es positivo.
- 24.** Sea $B \subset \mathbb{R}^3$ una región plana y sea $O \in \mathbb{R}^3$ un punto. Si conectamos todos los puntos de B a O , obtenemos un cono, por ejemplo, C , con vértices en O y base B . Demostrar que

$$\text{Volumen } (C) = \frac{1}{3} \text{ área } (B) h,$$

donde h es la distancia de O desde el plano de B , utilizando los pasos siguientes.

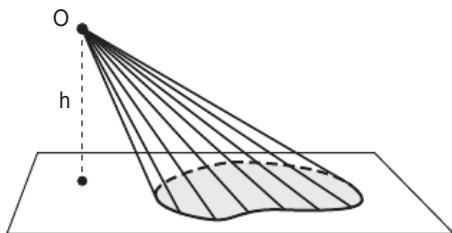


Figura 8.R.1

1. Sea O el origen del sistema de coordenadas. Definimos $\mathbf{r}(x, y, z) := (x, y, z)$. Calcular el flujo de \mathbf{r} a través de la frontera de C , es decir, $\iint_{\partial C} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dA$, donde \mathbf{n} es la normal unitaria exterior a ∂C .
2. Calcular la divergencia total $\iiint_C \nabla \cdot \mathbf{r} dV$.
3. Utilizar el teorema de Gauss, que establece que la divergencia total de un campo vectorial dentro de una región encerrada por una superficie es igual al flujo de dicho campo vectorial a través de la superficie:

$$\iiint_C \nabla \cdot \mathbf{r} dV = \iint_{\partial C} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dA.$$

Respuestas a los ejercicios impares

Las soluciones que requieren demostración pueden estar incompletas o haber sido omitidas.

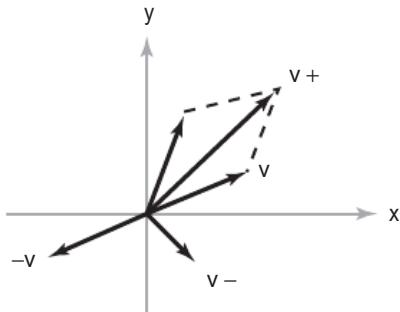
Capítulo 1

Sección 1.1

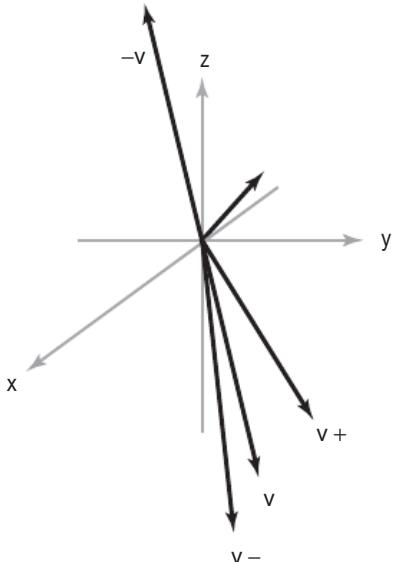
1. 4; 17.

3. $(-104 + 16a, -24 - 4b, -22 + 26c)$.

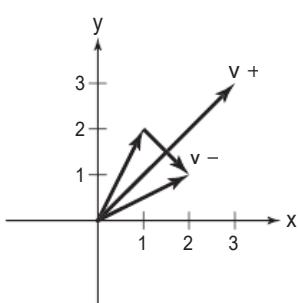
5.



7.



9.



11. $x = 0, z = 0, y \in \mathbb{R}; x = 0, y = 0, z \in \mathbb{R}; y = 0, x, z \in \mathbb{R}; x = 0, y, z \in \mathbb{R}$.

13. $\{(2s, 7s + 2t, 7t) \mid s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$.

15. $\mathbf{l}(t) = -\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

17. $\mathbf{l}(t) = (2t - 1)\mathbf{i} - \mathbf{j} + (3t - 1)\mathbf{k}$.

19. $\{s\mathbf{i} + 3s\mathbf{k} - 2t\mathbf{j} \mid 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$.

21. Sí.

23. 0.

25. Si (x, y, z) descansa sobre la recta, entonces $x = 2 + t, y = -2 + t$ y $z = -1 + t$. Por tanto, $2x - 3y + z - 2 = 4 + 2t + 6 - 3t - 1 + t - 2 = 7$, que es distinto de cero. Luego ningún (x, y, z) satisface ambas condiciones.

27. Sí.

29. El conjunto de vectores de la forma $\mathbf{v} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b} + r\mathbf{c}$, donde $0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1$ y $0 \leq r \leq 1$.

31. Todos los puntos de la forma $(x_0 + t(x_1 - x_0) + s(x_2 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0) + s(y_2 - y_0), z_0 + t(z_1 - z_0) + s(z_2 - z_0))$ donde t y s son números reales.

33. Si un vértice se coloca en el origen y los dos lados adyacentes son \mathbf{u} y \mathbf{v} , el nuevo triángulo tiene lados $b\mathbf{u}$, $b\mathbf{v}$ y $b(\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

35. $(1, 0, 1) + (0, 2, 1) = (0, 2, 0) + (1, 0, 2)$.

37. Dos de estas rectas (hay muchas otras) son $x = 1, y = t, z = t$ y $x = 1, y = t, z = -t$.

Sección 1.2

1. 6.

3. 99° .

5. No, es 75,7; sería cero solo si los vectores fueran paralelos.

7. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -3$.

9. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{11}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{62}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -14$.

11. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{14}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{26}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -17$.

13. $b = 5/4$, $c = -5/2$.

15. Apuntan en direcciones opuestas.

17. En el Ejercicio 9, $\cos^{-1}(-14/\sqrt{11}\sqrt{62})$; en el Ejercicio 10, $\pi/2$; y en el Ejercicio 11, $\cos^{-1}(-17/\sqrt{14}\sqrt{26})$.

19. $x = 3, 7$.

21. $-4(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/3$.

23. $1/2$.

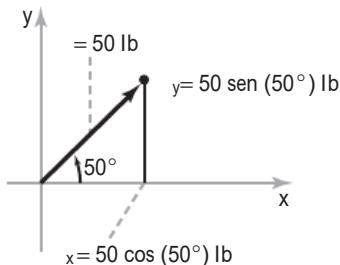
25. Cualquier (x, y, z) con $x+y+z=0$; por ejemplo, $(1, -1, 0)$ y $(0, 1, -1)$.

27. Dibujar un triángulo rectángulo. Etiquetar los dos catetos \mathbf{v} y \mathbf{w} , de modo que la hipotenusa sea $\mathbf{v}-\mathbf{w}$. Por hipótesis, tenemos $\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \|\mathbf{w}\|^2$. Esto implica que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$, de modo que \mathbf{v} y \mathbf{w} son ortogonales.

29. $\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\theta \approx 0,24$ radianes hacia el este a partir del norte.

31. (a) 12:03 P.M. (b) 4,95 km.

33.



35. $(4,9; 4,9; 4,9)$ y $(-4,9; -4,9; 4,9)$ N.

37. (a) $\mathbf{F} = (3\sqrt{2}\mathbf{i} + 3\sqrt{2}\mathbf{j})$.

(b) $\approx 0,322$ radianes o 18.4° .

(c) $18\sqrt{2}$.

39. Dibujar un rectángulo. Etiquetar dos de los lados no paralelos como \mathbf{v} y \mathbf{w} , por lo que las dos

diagonales son $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ y $\mathbf{v} - \mathbf{w}$. Entonces estas diagonales son perpendiculares si y solo si $0 = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2$, lo que se cumple si y solo si $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\|$.

Sección 1.3

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8$, $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$

3. $-3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

5. $\sqrt{35}$.

7. 10.

9. $\pm\mathbf{k}$.

11. $\pm(113\mathbf{i} + 17\mathbf{j} - 103\mathbf{k})/\sqrt{23\,667}$.

13. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 6$; $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{6}$; $\|\mathbf{v}\| = 3$; $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$.

15. (a) $x + y + z - 1 = 0$.

(b) $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

(c) $5x + 2z = 25$.

(d) $x + 2y - 3z = 13$.

17. Demostrar que $(0, -2, -1) - (1, 4, 0)$ es paralelo a $(1, 4, 0) - (2, 10, 1)$, de modo que los tres puntos descansan sobre una recta.

19. (a) Los planos paralelos $Ax + By + Cz + D = 0$ y $\sigma Ax + \sigma By + \sigma Cz + D' = 0$ son idénticos cuando $D' = \sigma D$ y en otro caso nunca intersecan.

(b) En una recta.

21. La recta $x = t, y = 0, z = 1 - t$.

23. (a) Hacer el primero manipulando cada lado en coordenadas y luego utilizar $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a}$ para obtener el segundo.

(b) Utilizar las identidades del apartado (a) para escribir las cantidades en términos de productos escalares.

(c) Utilizar las identidades del apartado (a) y simplificar.

25. Calcular los resultados con la regla de Cramer y comprobar que satisfacen la ecuación.

27. $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) - \mathbf{i} \times \mathbf{k} + 2(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) - \mathbf{j} \times \mathbf{k} = (-1, 1, 2)$.

29. $x - 2y + 3z + 12 = 0$.

31. $4x - 6y - 10z = 14$.

33. $10x - 2y - 2z = 8$.

35. $10x - 17y + z + 25 = 0$.

37. Por el Ejercicio 25, obsérvese que $(2, -3, 1) \cdot (1, 1, 1) = 0$, por tanto, la recta y el plano son paralelos y $(2, -2, -1)$ no está en el plano. Por el Ejercicio 26, la recta y el plano son paralelos y $(1, -1, 2)$ está en el plano.

39. $\sqrt{2}/13$.

41. (a) Demostrar que \mathbf{M} satisface las propiedades geométricas de $\mathbf{R} \times \mathbf{F}$.

(b) $2\sqrt{3}$.

43. Demostrar que $n_1(\mathbf{N} \times \mathbf{a})$ y $n_2(\mathbf{N} \times \mathbf{b})$ tienen la misma magnitud y dirección.

45. Un método consiste en escribir todos los términos en el lado izquierdo y observar que todos los términos que contienen λ se cancelan. Otro método es observar primero que el determinante es lineal por filas y por columnas y que si una fila o columna se repite, la respuesta es cero. Entonces

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda b_1 & c_2 + \lambda c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right| \\ &= \left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right| + \lambda \left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right|. \end{aligned}$$

Sección 1.4

1. $(\rho, \theta, \phi) = (4, 5\pi/3, 3\pi/4)$.

3. (a)

Cilíndricas

r	θ	z
1	45°	1
2	$\pi/2$	-4
0	45°	10
3	$\pi/6$	4
1	$\pi/6$	0
2	$3\pi/4$	-2

Rectangulares

x	y	z
$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
0	2	-4
0	0	10
$3\sqrt{3}/2$	$3/2$	4
$\sqrt{3}/2$	$\frac{1}{2}$	0
$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-2

Esféricas

ρ	θ	ϕ
$\sqrt{2}$	45°	45°
$2\sqrt{5}$	$\pi/2$	$\pi - \arccos(2\sqrt{5}/5)$
10	45°	0
5	$\pi/6$	$\arccos \frac{4}{5}$
1	$\pi/6$	$\pi/2$
$2\sqrt{2}$	$3\pi/4$	$3\pi/4$

(b)

Rectangulares

x	y	z
2	1	-2
0	3	4
$\sqrt{2}$	1	1
$-2\sqrt{3}$	-2	3

Esféricas

ρ	θ	ϕ
3	$\arctan \frac{1}{2}$	$\pi - \arccos(2/3)$
5	$\pi/2$	$\arccos(4/5)$
2	$\arctan(\sqrt{2}/2)$	$\pi/3$
5	$7\pi/6$	$\arccos \frac{3}{5}$

Cilíndricas

r	θ	z
$\sqrt{5}$	$\arctan \frac{1}{2}$	-2
3	$\pi/2$	4
$\sqrt{3}$	$\arctan(\sqrt{2}/2)$	1
4	$7\pi/6$	3

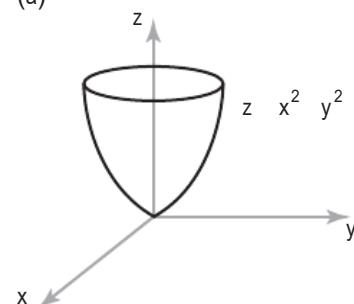
5. (a) Rotación de π alrededor del eje z .

(b) Simetría con respecto al plano xy con una expansión radial por un factor de 2.

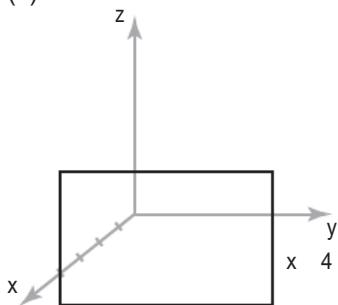
(c) Rotación de $\pi/2$ alrededor del eje z .

7.

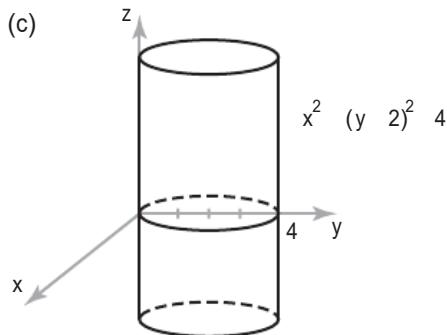
(a)



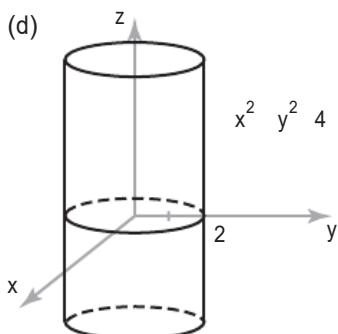
(b)



(c)



(d)



9. No; (ρ, θ, ϕ) y $(-\rho, \theta + \pi, \pi - \phi)$ representan el mismo punto.

11. $r^2 + z^2 = R^2$.

13. (a) $\mathbf{e}_\rho = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 $= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/\rho$
 $\mathbf{e}_\theta = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/\sqrt{x^2 + y^2} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/r$
 $\mathbf{e}_\phi = (xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - (x^2 + y^2)\mathbf{k})/r\rho$.

(b) $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{j} = -y\mathbf{k}/\sqrt{x^2 + y^2}, \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{j} = (xz/r\rho)\mathbf{k} + (r/\rho)\mathbf{i}$.

15. (a) La longitud de $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \rho$.
(b) $\cos \phi = z/(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.
(c) $\cos \theta = x/(x^2 + y^2)^{1/2}$.

17. $0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ significa que (r, θ, z) está dentro del cilindro de radio a centrado en el eje

z , y $|z| \leq b$ significa que la distancia al plano xy es como máximo b .

19. $-d/(6 \cos \phi) \leq \rho \leq d/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, y $\pi - \cos^{-1}(\frac{1}{3}) \leq \phi \leq \pi$.

21. Esta es una superficie cuya sección transversal con cada superficie $z = c$ es una rosa de cuatro pétalos. Los pétalos se contraen hacia cero cuando $|c|$ varía de 0 a 1.

Sección 1.5

1. 7.

3. $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = 10 = \sqrt{5}\sqrt{20} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$, luego $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ es cierto.
 $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = 3\sqrt{5} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, luego $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ es cierto.

5. $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = 5 < \sqrt{65} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$, luego $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ es cierto.
 $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \sqrt{28} < \sqrt{5} + \sqrt{13} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, luego $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ es cierto.

7. Suponemos que $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\|$. Entonces $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{w}\|^2$, so $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2 = 0$.

9. $AB = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 11 & 3 \\ -6 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \det A = -5,$
 $\det B = -24,$
 $\det AB = 120 (= \det A \det B), \det (A + B) = -61 (\neq \det A + \det B)$.

11. B.

13. SUGERENCIA: para $k = 2$ utilizar la desigualdad triangular para demostrar que $\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\| \leq \|\mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_2\|$; entonces para $k = i + 1$ observar que $\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_{i+1}\| \leq \|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x}_{i+1}\|$.

15. (a) Comprobar directamente $n = 1$ y $n = 2$. A continuación, reducir un determinante $n \times n$ a una suma de $(n - 1) \times (n - 1)$ determinantes y usar inducción.
(b) El argumento es similar al del apartado (a). Suponemos que la primera fila está multiplicada por λ . El primer término de la suma será λa_{11} veces un determinante $(n - 1) \times (n - 1)$ sin factores de λ . Los otros términos obtenidos (al desarrollar por la primera fila) son similares.

17. No necesariamente. Probar con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- 19.** (a) La suma de dos funciones continuas y un múltiplo escalar de una función continua son continuas.
 (b) (I) $(\alpha f + \beta g) \cdot h$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (\alpha f + \beta g)(x)h(x) dx \\ &= \alpha \int_0^1 f(x)h(x) dx + \beta \int_0^1 g(x)h(x) dx \\ &= \alpha f \cdot h + \beta g \cdot h. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad f \cdot g &= \int_0^1 f(x)g(x) dx \\ &= \int_0^1 g(x)f(x) dx = g \cdot f. \end{aligned}$$

Para las condiciones (III) y (IV), el integrando es un cuadrado perfecto. Por tanto, la integral es no negativa y solo puede ser 0 si el integrando es 0 en todos los puntos. Si $f(x) \neq 0$ para algún x , entonces sería positiva en un entorno de x por la continuidad y la integral sería positiva.

- 21.** Calcular los productos de matrices de las dos formas y comprobar que se obtiene la identidad.

23. $(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$.

Ejercicios de repaso del Capítulo 1

1. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}; 3\mathbf{v} = 9\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 15\mathbf{k};$
 $6\mathbf{v} + 8\mathbf{w} = 26\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 38\mathbf{k}; -2\mathbf{v} = -6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 10\mathbf{k};$
 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 4; \mathbf{v} \times \mathbf{w} = 9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$.

El dibujo debe mostrar $\mathbf{v}, \mathbf{w}, 3\mathbf{v}, 6\mathbf{v}, 8\mathbf{w}, 6\mathbf{v} + 8\mathbf{w}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ como la proyección de \mathbf{v} a lo largo de \mathbf{w} y $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ como un vector perpendicular tanto a \mathbf{v} como \mathbf{w} .

3. (a) $\mathbf{l}(t) = -\mathbf{i} + (2+t)\mathbf{j} - \mathbf{k}$.
 (b) $\mathbf{l}(t) = (3t-3)\mathbf{i} + (t+1)\mathbf{j} - t\mathbf{k}$.
 (c) $-2x + y + 2z = 9$.

5. $10x + 4y - 2z = 26$.

- 7.** (a) 0.
 (b) 5.
 (c) -10.

- 9.** (a) $\pi/2$.
 (b) $5/(2\sqrt{15})$.
 (c) $-10/(\sqrt{6}\sqrt{17})$.

11. $\{st\mathbf{a} + s(1-t)\mathbf{b} \mid 0 \leq t \leq 1 \text{ y } 0 \leq s \leq 1\}$.

- 13.** Sean $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{w} = (b_1, b_2, b_3)$, y aplicar la desigualdad CBS.

15. $AB = \begin{bmatrix} 11 & 23 & 3 \\ 8 & 18 & 3 \\ 6 & 8 & 3 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 6 \\ 1 & 11 & 11 \\ 3 & 18 & 18 \end{bmatrix}$

- 17.** El área es el valor absoluto de

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda a_2 \end{vmatrix}.$$

(Un múltiplo de una fila de un determinante se puede añadir a otra fila sin que cambie su valor). El dibujo debe mostrar dos paralelogramos con la misma base y la misma altura.

- 19.** Los cosenos de las dos partes del ángulo son iguales, porque

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} / \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{v}\| &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|) / \|\mathbf{v}\| \\ &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} / \|\mathbf{b}\| \|\mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

- 21.** La desigualdad triangular da $\|\mathbf{v}\| = \|(\mathbf{v} - \mathbf{w}) + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{w}\|$, lo que implica que $\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$. Un argumento similar proporciona $\|\mathbf{w}\| - \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$.

23. $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}$; etc.

- 25.** (a) SUGERENCIA: la longitud de la proyección del vector que conecta cualquier pareja de puntos, uno de cada recta, sobre $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) / \|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|$ es d .

(b) $\sqrt{2}$.

- 27.** (a) Observar que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(b) $\frac{1}{2}$.

29. (Se omite el dibujo).

Rectangular

- (a) $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$.
- (b) $(3\sqrt{3}/2, 3/2, -4)$.
- (c) $(0, 0, 1)$.
- (d) $(0, -2, 1)$.
- (e) $(0, 2, 1)$.

Esférica

- (a) $(\sqrt{2}, \pi/4, \pi/4)$.
- (b) $(5, \pi/6, \arccos(-4/5))$.
- (c) $(1, \pi/4, 0)$.
- (d) $(\sqrt{5}, 3\pi/2, \arccos(\sqrt{5}/5))$.
- (e) $(\sqrt{5}, \pi/2, \arccos(\sqrt{5}/5))$.

31. $z = r^2 \cos 2\theta; \cos \phi = \rho \sin^2 \phi \cos 2\theta$.

33. $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = 6 < \sqrt{98} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$; $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \sqrt{33} < \sqrt{14} + \sqrt{7} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

35. (a) La ley asociativa para la multiplicación de matrices se puede comprobar como sigue:

$$\begin{aligned} [(AB)C]_{ij} &= \sum_{k=1}^n (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n A_{il} B_{lk} C_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^n A_i (BC)_{lj} = [A(BC)]_{ij}. \end{aligned}$$

Utilizar este resultado con C siendo un vector columna.

(b) La matriz para la composición es la matriz producto.

37. \mathbb{R}^n está generado por los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$T\mathbf{v} = T \left[\sum_{i=1}^n (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \right] = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) T\mathbf{e}_i.$$

Sea $a_{ij} = (T\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i)$, de modo que

$$T\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{e}_i.$$

Entonces

$$T\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) a_{ki}.$$

Es decir, si

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \text{ entonces } T\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

como se quería.

39. (a) $70 \cos \theta + 20 \sin \theta$.

$$(b) (21\sqrt{3} + 6) \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

41. Cada lado es igual a $2xy - 7yz + 5z^2 - 48x + 54y - 5z - 96$. (O cambiar las dos primeras columnas y luego restar la primera fila de la segunda).

43. Sumar la última fila a la primera y restarla de la segunda.

45. (a) Escalar.

(c) Vector.

(b) Vector.

(d) Escalar.

$$\text{(a)} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{(b)} \quad A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \neq (AB)^{-1},$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = (AB)^{-1}.$$

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$\text{(b)} \quad 1/3.$$

51. Utilizar el hecho de que $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, expandir ambos lados y usar la definición de \mathbf{c} .

$$\text{53. } (1/\sqrt{38})\mathbf{i} - (6/\sqrt{38})\mathbf{j} + (1/\sqrt{38})\mathbf{k}.$$

$$\text{55. } (2/\sqrt{5})\mathbf{i} - (1/\sqrt{5})\mathbf{j}.$$

$$\text{57. } (\sqrt{3}/2)\mathbf{i} + (1/2\sqrt{2})\mathbf{j} + (1/2\sqrt{2})\mathbf{k}.$$

Capítulo 2

Sección 2.1

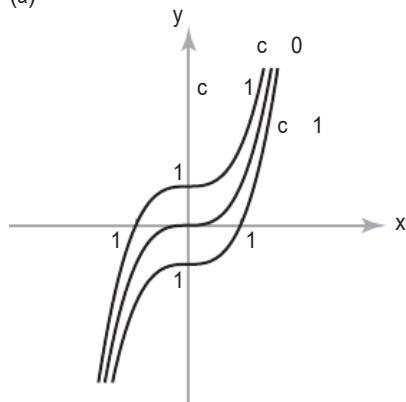
1. (a) Valores escalares.

(b) Valores vectoriales.

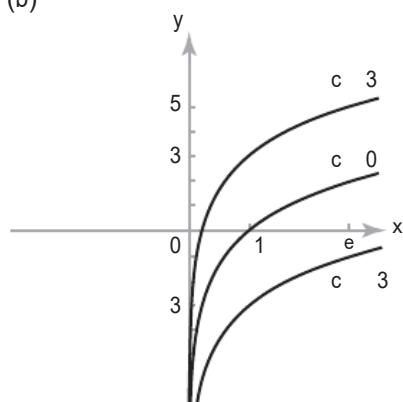
(c) Valores vectoriales.

3. (a) $c = 0$ corresponde a (III)
 $c = 1$ corresponde a (II)
 $c = -1$ corresponde a (I).
- (b) $c = 12$ corresponde a (IV)
 $c = 6$ corresponde a (V).

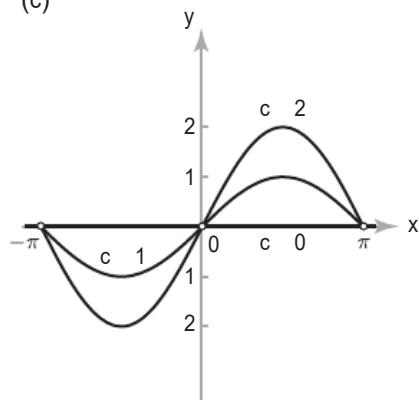
5. (a)



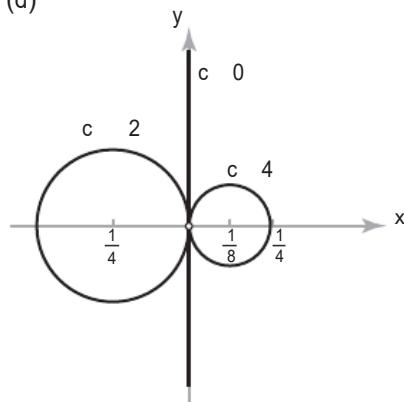
(b)



(c)

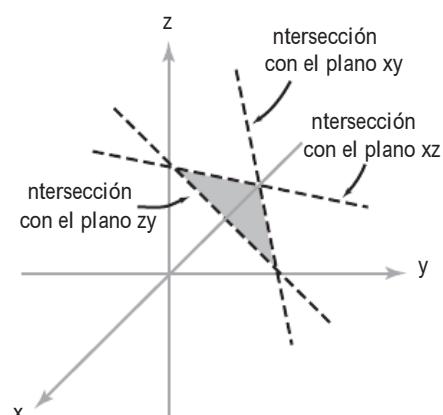
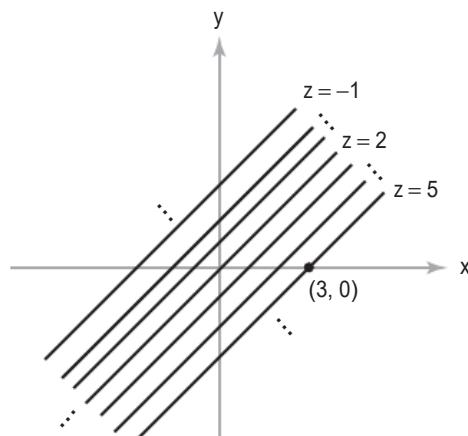


(d)

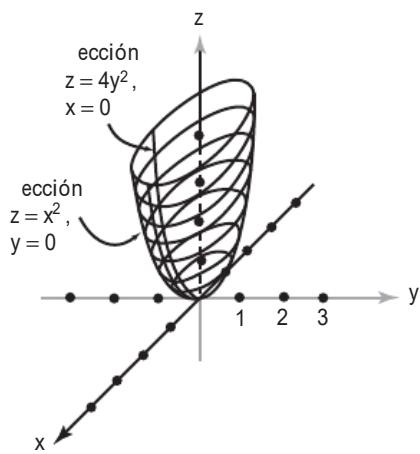
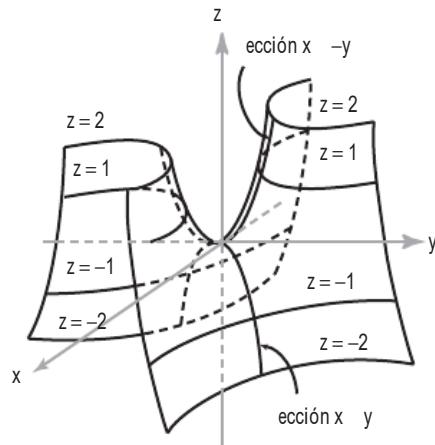
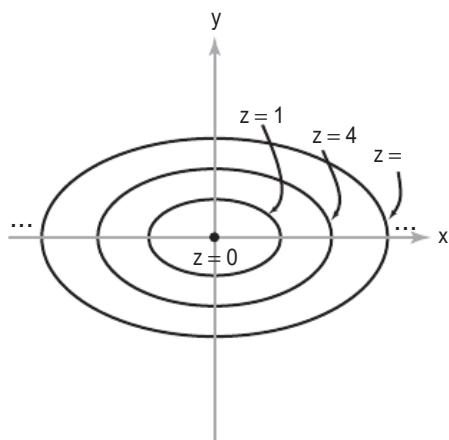
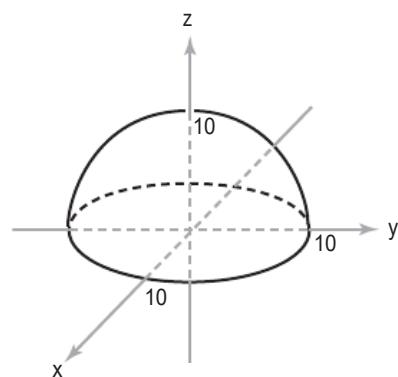
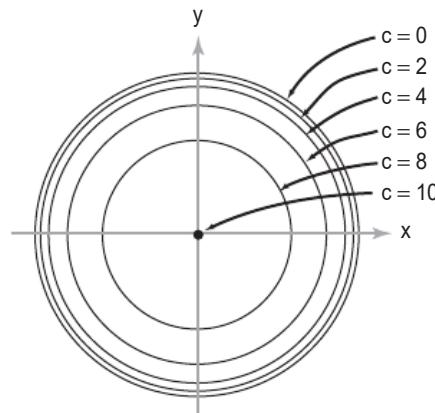
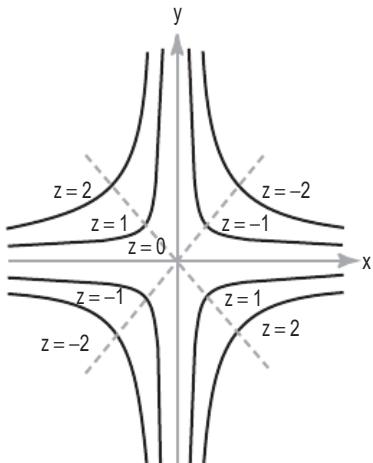


7. Las curvas de nivel y la gráficas se dibujan a continuación. La gráfica del apartado (c) es un paraboloide hiperbólico como el del Ejemplo 4, pero girado 45° y comprimido verticalmente por un factor de $1/4$. Para ver esto, utilizar las variables $u = x + y$ y $v = x - y$. Entonces $z = (v^2 - u^2)/4$.

(a)



(b)

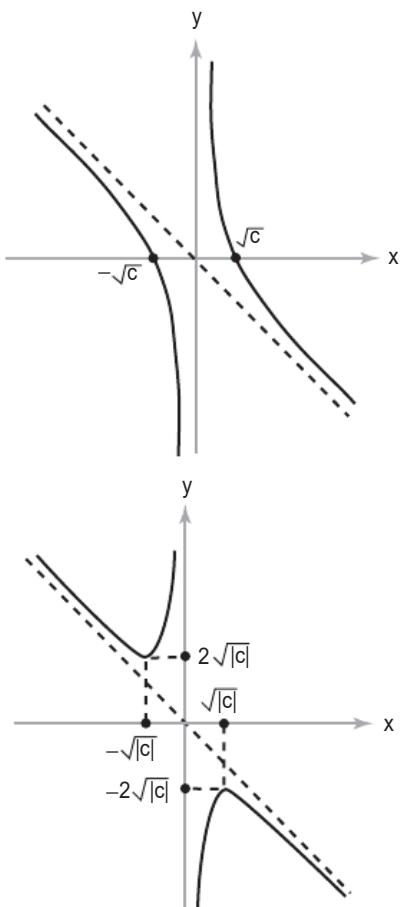
(c) $z = -xy$ 

- 9.** (a) $f(x, y, z) = x^2y^6 - 2z$, $c = 3$
 (b) $g(x, y) = (x^2y^6 - 3)/2$

- 11.** Para el Ejemplo 2, $z = r(\cos \theta + \sin \theta) + 2$, la forma depende de θ ; para el Ejemplo 3, $z = r^2$, la forma es independiente de θ ; para el Ejemplo 4, $z = r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$, la forma depende de θ .

- 13.** Las curvas de nivel son circunferencias $x^2 + y^2 = 100 - c^2$ cuando $c \leq 10$. La gráfica es la semiesfera superior de $x^2 + y^2 + z^2 = 100$.

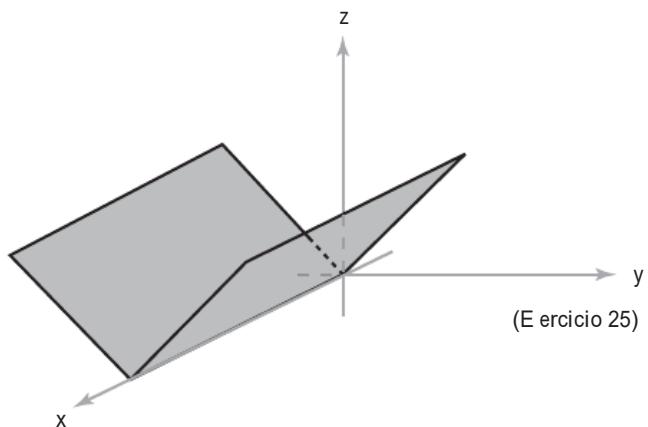
- 15.** Las curvas de nivel son circunferencias y la gráfica es un paraboloide de revolución. Véase el Ejemplo 3 de esta sección.
- 17.** Si $c = 0$, la curva de nivel es la recta $y = -x$ junto con la recta $x = 0$. Si $c \neq 0$, entonces $y = -x + (c/x)$. La curva de nivel es una hipérbola con el eje y y la recta $y = -x$ como asíntotas. La gráfica es un paraboloide hiperbólico. Las secciones a lo largo de la recta $y = ax$ son las paráolas $z = (1 + a)x^2$.
- 19.** Si $c > 0$, la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ es vacía. Si $c = 0$, la superficie de nivel es el punto $(0, 0, 0)$. Si $c < 0$, la superficie de nivel es la esfera de radio $\sqrt{-c}$ centrada en $(0, 0, 0)$. Una sección de la gráfica determinada por $z = a$ está dada por $t = -x^2 - y^2 - a^2$, que es un paraboloide de revolución abierto hacia abajo en el espacio xyt .



- 21.** Si $c < 0$, la superficie de nivel es vacía. Si $c = 0$, la superficie de nivel es el eje z . Si $c > 0$, es el cilindro circular recto $x^2 + y^2 = c$ de radio \sqrt{c} , cuyo eje es el eje z . Una sección de la gráfica

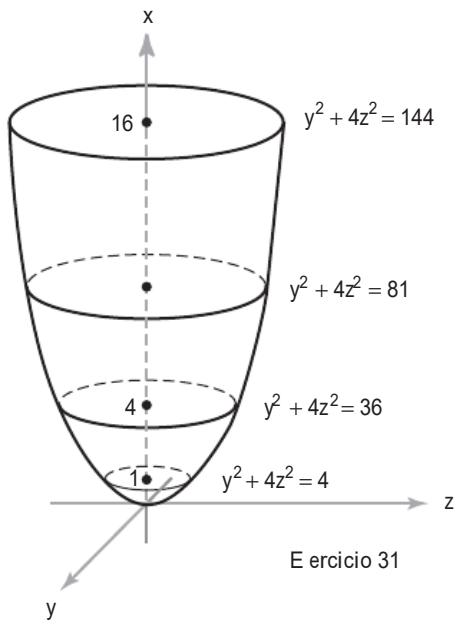
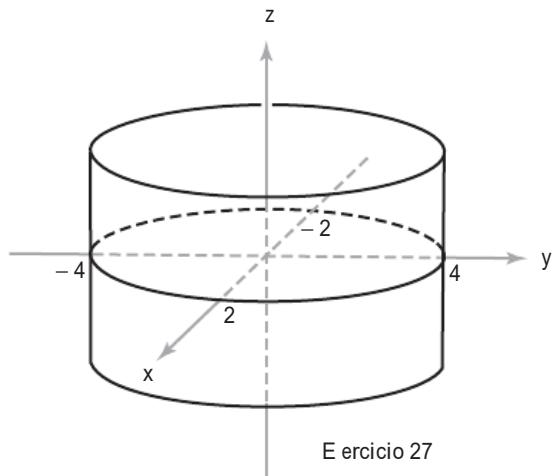
determinada por $z = a$ es el paraboloide de revolución $t = x^2 + y^2$. Una sección determinada por $x = b$ es una “depresión” con sección transversal parabólica $t(y, z) = y^2 + b^2$.

- 23.** Haciendo $u = (x - z)/\sqrt{2}$ e $v = (x + z)/\sqrt{2}$ obtenemos los ejes u y v rotando 45° alrededor del eje y los ejes x y z . Puesto que $f = vy\sqrt{2}$, las superficies de nivel $f = c$ son “cilindros” perpendiculares al plano vy ($z = -x$) cuyas secciones transversales son las hipérbolas $vy = c/\sqrt{2}$, por lo que la sección $S_{x=a} \cap$ gráfica de f es el paraboloide hiperbólico $t = (z + a)y$ en el espacio yzt [véase el Ejercicio 7(c)]. La sección $S_{y=b} \cap$ gráfica de f es el plano $t = bx + bz$ en el espacio xzt . La sección $S_{z=b} \cap$ gráfica de f es el paraboloide hiperbólico $t = y(x + b)$ en el espacio xyt .
- 25.** Si $c < 0$, la curva de nivel está vacía. Si $c = 0$, la curva de nivel es el eje x . Si $c > 0$, es el par de rectas paralelas $|y| = c$. Las secciones de la gráfica con x constante son las curvas en forma de $z = |y|$ en el espacio yz . La gráfica se muestra a continuación.

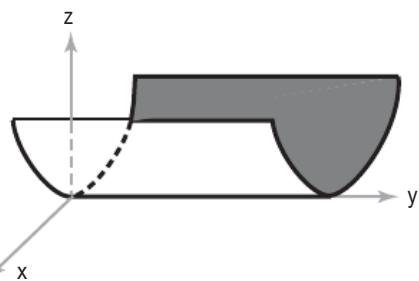


(Ejercicio 25)

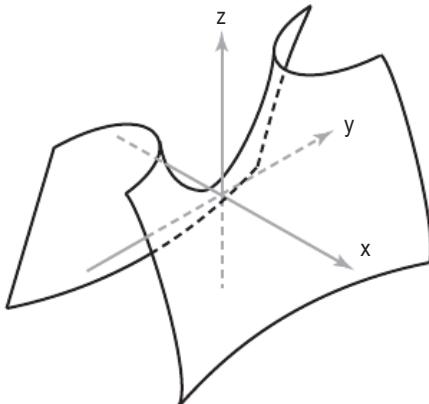
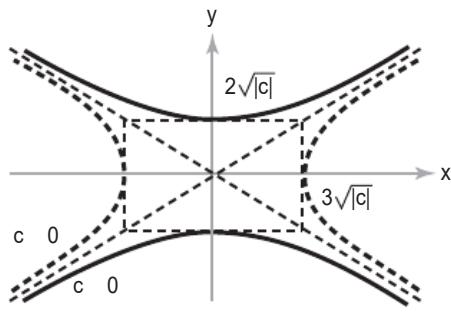
- 27.** El valor de z no importa, por lo que tenemos un “cilindro” de sección transversal elíptica paralelo al eje z y que corta al plano xy en la elipse $4x^2 + y^2 = 16$. (Véase la figura en la página siguiente).
- 29.** El valor de x no importa, por lo que tenemos un “cilindro” paralelo al eje x de sección transversal hiperbólica que corta al eje yz en la hipérbola $z^2 - y^2 = 4$.
- 31.** Un paraboloide elíptico con eje a lo largo del eje x . (Véase la figura en la página siguiente).



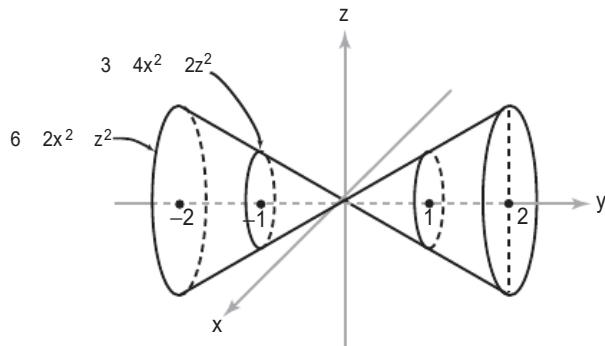
- 33.** El valor de y no importa, por lo que tenemos un “cilindro” de sección transversal parabólica.



- 35.** Es una superficie con forma de silla de montar similar a la del Ejemplo 4, pero las hipérbolas, que son curvas de nivel, ya no tienen asíntotas perpendiculares.

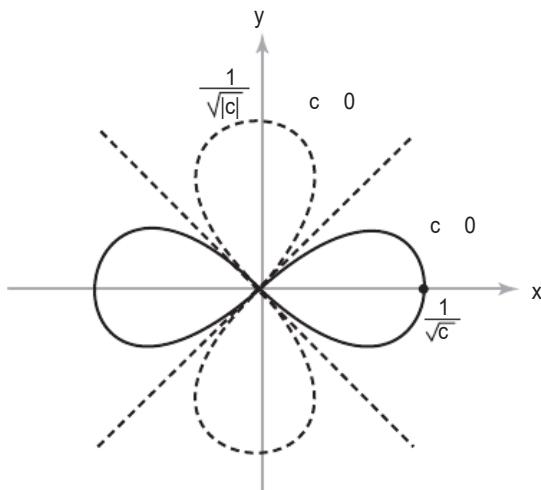


- 37.** Un doble cono con eje a lo largo del eje y y secciones transversales elípticas.



- 39.** Completar el cuadrado para obtener $(x+2)^2 + (y-b/2)^2 + (z+\frac{9}{2})^2 = (b^2 + 4b + 97)/4$. Es un elipsoide con centro en $(-2, b/2, -\frac{9}{2})$ y ejes paralelos a los ejes coordenados.

- 41.** Las curvas de nivel se describen mediante $\cos 2\theta = cr^2$. Si $c > 0$, entonces $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$ o $3\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4$. Si $c < 0$, entonces $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$ o $5\pi/4 \leq \theta \leq 7\pi/4$. En cualquier caso, se obtiene una figura con forma de ocho, denominada *lemniscata*, a través del origen. (Jacques Bernoulli fue el primero en estudiar estas formas, por lo que en ocasiones se denominan lemniscatas de Bernoulli.)



Sección 2.2

1. Nada.
3. (a) 0. (b) $-1/2$. (c) 1.
5. (a) 5. (b) 0. (c) $2x$.
7. $e^3/10$.
9. (a) 0. (b) $-1/2$. (c) 0.
11. (a) Componer $f(x, y) = xy$ con $g(t) = (\sin t)/t$ para $t \neq 0$ y $g(0) = 1$.
(b) El límite no existe.
(c) 0
13. (a) 1.
(b) $\|\mathbf{x}_0\|$.
(c) $(1, e)$.
(d) El límite no existe (calcular los límites para $x = 0$ e $y = 0$ por separado).
15. En todas partes excepto en $(0, 0)$.
17. 0.
19. Si $(x_0, y_0) \in A$, entonces $|x_0| < 1$ y $|y_0| < 1$. Sea $r = \min(1 - |x_0|, 1 - |y_0|)$. Demostrar que $D_r(x_0, y_0) \subset A$ bien de forma analítica bien mediante una figura.
21. Tómese $r = \min(2 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - \sqrt{2})$.
23. Utilizar los apartados (ii) y (iii) del Teorema 4.

- 25.** (a) Hacer que el valor de la función sea igual a 1 en $(0, 0)$.

(b) No.

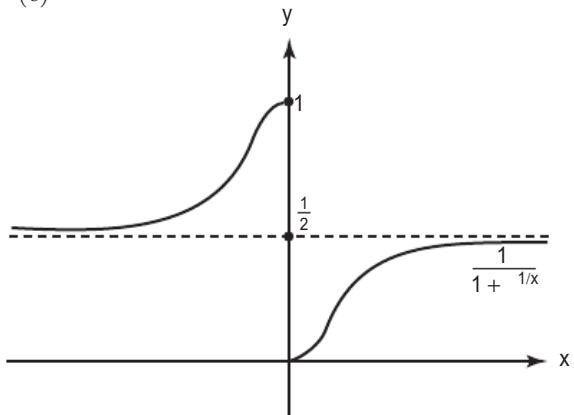
- 27.** Para $|x - 2| < \delta = \sqrt{\varepsilon + 4} - 2$, tenemos $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < \delta(\delta + 4) = \varepsilon$. Por el Teorema 3(III), $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = (\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 = 2^2 = 4$.

- 29.** Sea $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/2$. Si $\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \leq r$, sea $f(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|/r$. Si $\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| > r$, sea $f(\mathbf{z}) = 1$.

- 31.** (a) $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $x > b$ y $0 < x - b < \delta$ implica que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1/x) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$, y por tanto $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$. Luego $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/(1 + e^{1/x}) = 1$. El otro límite es 0.

(c)



- 33.** Para $\varepsilon > 0$ y \mathbf{x}_0 , sea $\delta = (\varepsilon/K)^{1/\alpha}$. Entonces $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < K\delta^\alpha = \varepsilon$ cuando $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$. Obsérvese que la elección de δ no depende de \mathbf{x}_0 . Esto significa que f es *uniformemente continua*.

- 35.** (a) Elegir $\delta < 1/500$.
(b) Elegir $\delta < 0,002$.

Sección 2.3

1. (a) $\partial f / \partial x = y; \partial f / \partial y = x$.
(b) $\partial f / \partial x = ye^{xy}; \partial f / \partial y = xe^{xy}$.
(c) $\partial f / \partial x = \cos x \cos y - x \sin x \cos y; \partial f / \partial y = -x \cos x \sin y$.
(d) $\partial f / \partial x = 2x[1 + \log(x^2 + y^2)]; \partial f / \partial y = 2y[1 + \log(x^2 + y^2)]; (x, y) \neq (0, 0)$.
3. (a) $\partial w / \partial x = (1 + 2x^2) \exp(x^2 + y^2); \partial w / \partial y = 2xy \exp(x^2 + y^2)$.

- (b) $\frac{\partial w}{\partial x} = -4xy^2/(x^2 - y^2)^2$;
 $\frac{\partial w}{\partial y} = 4yx^2/(x^2 - y^2)^2$.
- (c) $\frac{\partial w}{\partial x} = ye^{xy} \log(x^2 + y^2)$
 $+ 2xe^{xy}/(x^2 + y^2)$;
 $\frac{\partial w}{\partial y} = xe^{xy} \log(x^2 + y^2)$
 $+ 2ye^{xy}/(x^2 + y^2)$.
- (d) $\frac{\partial w}{\partial x} = 1/y$; $\frac{\partial w}{\partial y} = -x/y^2$.
- (e) $\frac{\partial w}{\partial x} = -y^2 e^{xy} \sin ye^{xy} \sin x +$
 $\cos ye^{xy} \cos x$;
 $\frac{\partial w}{\partial y} = (xye^{xy} + e^{xy})(-\sin ye^{xy} \sin x)$.

5. $z = 6x + 3y - 11$.

7. $z = x - y + 1$.

9. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} e^y & xe^y - \sin y \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & e^z \\ 2xy & x^2 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} (y+xy^2)e^{xy} & (x+x^2y)e^{xy} \\ \sin y & x \cos y \\ 5y^2 & 10xy \end{bmatrix}$.

11. $z = 2(x - 4) + 4(y - 3) + 10$.

13. En $z = 1$.

15. Ambos son xye^{xy} .

17. $(2, 6, -36)$.

19. (a) $\nabla f = (e^{-x^2-y^2-z^2}(-2x^2+1),$
 $-2xye^{-x^2-y^2-z^2}, -2xze^{-x^2-y^2-z^2})$.

(b) $\nabla f = (x^2 + y^2 + z^2)^{-2}(yz(y^2 + z^2 - x^2),$
 $xz(x^2 + z^2 - y^2), xy(x^2 + y^2 - z^2))$.

(c) $\nabla f = (z^2 e^x \cos y, -z^2 e^x \sin y, 2ze^x \cos y)$.

21. $2x + 6y - z = 5$.

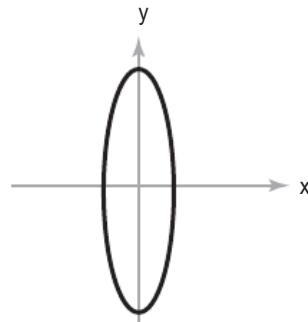
23. $\mathbf{l}(t) = (1, 3, 20) + t(-1, 2, 8)$.

25. $-2\mathbf{k}$.

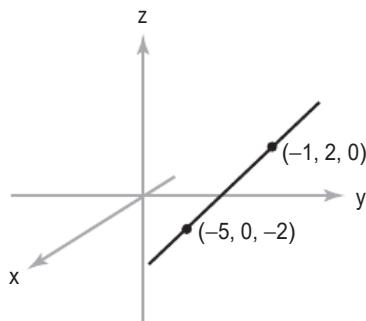
27. Son constantes. Demostrar que la derivada es la matriz cero.

Sección 2.4

1. Esta curva es la elipse $(y^2/16) + x^2 = 1$:



3. Esta curva es la recta que pasa por $(-1, 2, 0)$ con dirección $(2, 1, 1)$:



5. (a) $\mathbf{c}(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
(b) $\mathbf{c}(t) = (2 \sin(t), 2 \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
(c) $\mathbf{c}(t) = (2 \cos(t) + 4, 2 \sin(t) + 7)$, $t \in [0, 2\pi]$.

7. $6\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$.

9. $(-2 \cos t \sin t, 3 - 3t^2, 1)$.

11. $\mathbf{c}'(t) = (e^t, -\sin t)$.

13. $\mathbf{c}'(t) = (t \cos t + \sin t, 4)$.

15. Horizontal cuando $t = (R/v)n\pi$, siendo n un entero; la rapidez es cero si n es par; la rapidez es $2v$ si n es impar.

17. $(\sin 3, \cos 3, 2) + (3 \cos 3, -3 \sin 3, 5)(t - 1)$.

19. $(8, 8, 0)$.

21. $(8, 0, 1)$.

23. (a) $\sqrt{1 + 64\pi^2}$.

(b) Sí, cuando $t = 0$.

(c) $\mathbf{l}(t) = (1, 0, 16\pi^2) + t(0, 1, 8\pi)$.

(d) $(1, -2\pi, 0)$.

25. (a) $(f \circ \mathbf{c})(t) = (t^6 - t^4, 2t^5, 4t^2)$.

(b) $\mathbf{l}(t) = (0, 2, 4) + t(2, 10, 8)$.

Sección 2.5

1. Utilizar la partes (I), (II) y (III) del Teorema 10.
La derivada en \mathbf{x} es $2(f(\mathbf{x}) + 1)\mathbf{D}f(\mathbf{x})$.
3. Calcular cada una de ellas de dos formas; las respuestas son
 - (a) $(f \circ \mathbf{c})'(t) = e^t(\cos t - \sin t)$.
 - (b) $(f \circ \mathbf{c})'(t) = 15t^4 \exp(3t^5)$.
 - (c) $(f \circ \mathbf{c})'(t) = (e^{2t} - e^{-2t})[1 + \log(e^{2t} + e^{-2t})]$.
 - (d) $(f \circ \mathbf{c})'(t) = (1 + 4t^2) \exp(2t^2)$.
5. Utilizar el Teorema 10(III) y sustituir las matrices por vectores.

7. $(f \circ g)(x, y) =$
 $(\tan(e^{x-y} - 1) - e^{x-y}, e^{2(x-y)} - (x-y)^2)$

y $\mathbf{D}(f \circ g)(1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

9. $\frac{1}{2} \cos(1) \cos(\log \sqrt{2})$.

11. (a) $\mathbf{p}(t) = (3 \sin(t) + 2, 1, \cos(t) + t^2)$,
 $\mathbf{p}'(\pi) = (-3, 0, 2\pi)$.

(b) $\mathbf{c}(\pi) = (-1, 0, \pi)$, $\mathbf{c}'(\pi) = (0, -1, 1)$,

$$\mathbf{D}f(-1, 0, \pi) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2\pi \end{bmatrix}.$$

(c) $(-3, 0, 2\pi)$.

13. $-2 \cos t \sin t e^{\sin t} + \sin^4 t + \cos^3 t e^{\sin t} - 3 \cos^2 t \sin^2 t$ para (a) y (b).

15. $(2, 0)$.

17. (a) $h(x, y) = f(x, u(x, y)) = f(p(x), u(x, y))$. Aquí utilizamos p solo como notación: $p(x) = x$. Desarrollando:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

puesto que

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

JUSTIFICACIÓN: Sean (p, u) las variables de f . Para usar la regla de la cadena debemos expresar h como una composición de funciones; es decir, primero determinamos g tal que $h(x, y) = f(g(x, y))$. Sea $g(x, y) = (p(x), u(x, y))$. Por tanto, $\mathbf{D}h = (\mathbf{D}f)(\mathbf{D}g)$. Luego

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

y por tanto $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$.

También puede darse $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$ como una solución. Esto requiere una cuidadosa interpretación a causa de la posible ambigüedad del significado de $\partial f / \partial x$, razón por la que hemos utilizado el nombre de p .

(b) $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dx}$.

(c) $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$.

19. (a) $G(x, y(x)) = 0$ y por tanto $\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$.

(b) $\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \frac{\partial G_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial G_2}{\partial y_1} & \frac{\partial G_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} \end{bmatrix}$

donde $^{-1}$ indica la matriz inversa.

La primera componente de esta ecuación es

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{-\frac{\partial G_1}{\partial x} \frac{\partial G_2}{\partial y_2} + \frac{\partial G_2}{\partial x} \frac{\partial G_1}{\partial y_2}}{\frac{\partial G_1}{\partial y_1} \frac{\partial G_2}{\partial y_2} - \frac{\partial G_2}{\partial y_1} \frac{\partial G_1}{\partial y_2}}.$$

(c) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{3y^2 + e^y}$.

21. Aplicar la regla de la cadena a $\partial G / \partial T$, donde $G(t(T, P), p(T, P), V(T, P)) = P(V - b)e^{a/RVT} - RT$ es idénticamente a 0; $t(T, P) = T$; y $p(T, P) = P$.

23. Definir $R_1(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h}$.

25. Sean g_1 y g_2 funciones C^1 de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R} tal que $g_1(\mathbf{x}) = 1$ para $\|\mathbf{x}\| < \sqrt{2}/3$; $g_1(\mathbf{x}) = 0$ para

$\|\mathbf{x}\| > 2\sqrt{2}/3$; $g_2(\mathbf{x}) = 1$ para $\|\mathbf{x} - (1, 1, 0)\| < \sqrt{2}/3$; y $g_2(\mathbf{x}) = 0$ para $\|\mathbf{x} - (1, 1, 0)\| > 2\sqrt{2}/3$. (Véase el Ejercicio 24). Sean

$$h_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{y } h_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

tómese $f(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x})h_1(\mathbf{x}) + g_2(\mathbf{x})h_2(\mathbf{x})$.

27. La demostración de la regla (III) es la siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - [f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ & \leq |f(\mathbf{x}_0)| \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ & \quad + |g(\mathbf{x}_0)| \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ & \quad + \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|. \end{aligned}$$

Cuando $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, los dos primeros términos tienden a 0 debido a la diferenciabilidad de f y g . El tercero también tiende a cero porque $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ y $|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)|/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ están acotados por una constante, por ejemplo, M , en alguna bola $D_r(\mathbf{x}_0)$. Para ver esto, elegimos r lo suficientemente pequeño como para que $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ esté a una distancia inferior a 1 de $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$. Entonces, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} & \leq 1 + \frac{|\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ & = 1 + \frac{|\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ & \leq 1 + \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \end{aligned}$$

La demostración de la regla (IV) se deduce de la regla (III) y el caso especial de la regla del cociente, con f idénticamente igual a 1; es decir, $\mathbf{D}(1/g)(\mathbf{x}_0) = [-1/g(\mathbf{x}_0)^2]\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$. Para obtener esta respuesta, obsérvese que en alguna bola pequeña $D_r(\mathbf{x}_0)$, $g(\mathbf{x}) > m > 0$. Utilizar la desigualdad triangular y la desigualdad de Schwarz para demostrar que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{g(\mathbf{x})} - \frac{1}{g(\mathbf{x}_0)} + \frac{1}{g(\mathbf{x}_0)^2} \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right| \\ & \leq \frac{1}{|g(\mathbf{x})|} \frac{1}{|g(\mathbf{x}_0)|} \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ & \quad + \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)|}{|g(\mathbf{x})| |g(\mathbf{x}_0)|^2} \frac{|\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ & \leq \frac{1}{m^2} \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ & \quad + \frac{\|\nabla g(\mathbf{x}_0)\|}{m^3} |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)|. \end{aligned}$$

Los dos últimos términos tienden a 0, porque g es diferenciable y continua.

29. En primer lugar se calcula la fórmula para $(d/dx)(F(x, x))$ usando la regla de la cadena. Se toma $F(x, z) = \int_0^x f(z, y) dy$ y se emplea el teorema fundamental del cálculo.

31. Por el Ejercicio 28 y el Teorema 10(III) (Ejercicio 27), cada componente de k es diferenciable y $\mathbf{D}k_i(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) + g_i(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$. Dado que $[\mathbf{D}g_i(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}$ es la componente i -ésima de $[\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}$ y $[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}$ es el número $\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{y}$, tenemos $[\mathbf{D}k(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y} = f(\mathbf{x}_0)[\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y} + [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}[g(\mathbf{x}_0)] = f(x_0)[\mathbf{D}g(x_0)]\mathbf{y} + [\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{y}]g(\mathbf{x}_0)$.

33. 4.

35. Sea $g(x, y) = x - y$, de modo que $z = f \circ g$. Entonces la regla de la cadena implica

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial g}.$$

Sección 2.6

1. $\nabla f(1, 1, 2) \cdot \mathbf{v} = (4, 3, 4) \cdot (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0) = 2\sqrt{5}$.

3. (a) $17e^e/13$. (c) 0.
(b) $e/\sqrt{3}$.

5. (a) Puesto que $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ apunta en la dirección de crecimiento más rápido (Teorema 13), el valor máximo de la derivada direccional es

$$\begin{aligned} \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} &= \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} \\ &= \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|. \end{aligned}$$

(b) $21\sqrt{2}$.

7. $9/\sqrt{29}$.

9. (a) $z + 9x = 6y - 6$.

(b) $z + y = \pi/2$.

(c) $z = 1$.

11. (a) $-\frac{1}{3\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$.

(b) $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

(c) $-\frac{2}{9}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$.

13. k.

15. La gráfica de f es la superficie de nivel $0 = F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Por tanto, el plano tangente está dado por

$$0 = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$$

$$\cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Puesto que $z_0 = f(x_0, y_0)$, esto es

$$z = f(x_0, y_0) + (\partial f / \partial x)(x_0, y_0)(x - x_0) + (\partial f / \partial y)(x_0, y_0)(y - y_0).$$

17. (a) $\nabla f = (z + y, z + x, x + y)$,

$$\mathbf{g}'(t) = (e^t, -\sin t, \cos t),$$

$$(f \circ \mathbf{g})'(1) = 2e \cos 1 + \cos^2 1 - \sin^2 1.$$

(b) $\nabla f = (yz e^{xyz}, xze^{xyz}, xy e^{xyz})$,

$$\mathbf{g}'(t) = (6, 6t, 3t^2), (f \circ \mathbf{g})'(1) = 108e^{18}.$$

(c) $\nabla f = [1 + \log(x^2 + y^2 + z^2)](x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}), \mathbf{g}' = (e^t, -e^{-t}, 1), (f \circ \mathbf{g})'(1) = [1 + \log(e^2 + e^{-2} + 1)](e^2 - e^{-2} + 1)$.

19. (a) $(0, 0)$.

(b) $\nabla f(0, 0) = (-4x, -6y)|_{(0,0)} = (0, 0)$.

21. Sea $f(x, y, z) = 1/r = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$; $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Entonces calculamos

$$\nabla f = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x, y, z) = -(1/r^3)\mathbf{r}.$$

23. $\nabla f = (g'(x), 0)$.

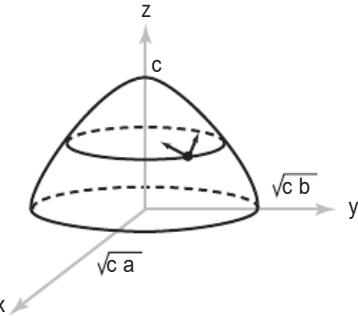
25. $\mathbf{D}f(0, 0, \dots, 0) = [0, \dots, 0]$.

27. $\mathbf{d}_1 = [-(0,03 + 2by_1)/2a]\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$,

$$\mathbf{d}_2 = [-(0,03 + 2by_2)/2a]\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$$
,

donde y_1 e y_2 son las soluciones de

$$(a^2 + b^2)y^2 + 0,03by + \left(\frac{0,03^2}{4} - a^2\right) = 0.$$



29. $\nabla V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}$

$$\left[\left(\frac{x+x_0}{r_2^2} - \frac{x-x_0}{r_1^2} \right) \mathbf{i} + 2y \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \mathbf{j} \right].$$

31. Se cruza en el punto $(2, 2, 0), \sqrt{5}/10$ segundos después.

Ejercicios de repaso del Capítulo 2

1. (a) Parabolóide elíptico.

(b) Sea $y' = y + 3$ y escribir $z = xy'$. Es un parabolóide hiperbólico (desplazado).

3. (a) $\mathbf{D}f(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ -ye^{-xy} & -xe^{-xy} \end{bmatrix}$.

(b) $\mathbf{D}f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathbf{D}f(x, y, z) = [e^x \quad e^y \quad e^z]$.

(d) $\mathbf{D}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2\pi & 0 \end{bmatrix}$.

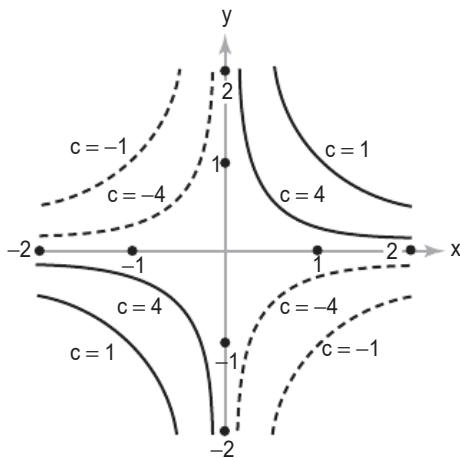
7. $\begin{bmatrix} -12 & 28 \\ -5 & 17 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$.

9. $(0, 25\pi, 0)$.

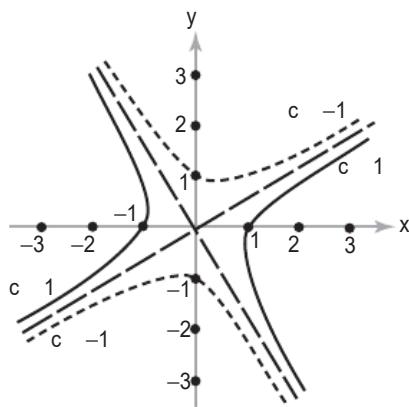
11. El plano tangente a una esfera en (x_0, y_0, z_0) es normal a la recta que pasa por el centro y por (x_0, y_0, z_0) .

- 13.** (a) $z = x - y + 2$.
 (b) $z = 4x - 8y - 8$.
 (c) $x + y + z = -1$.
 (d) $10x + 6y - 4z = 6 - \pi$.
 (e) $2z = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$.
 (f) $x + 2y - z = 2$.

- 15.** (a) Las curvas de nivel son hipérbolas $xy = 1/c$:



(b) $c = x^2 - xy - y^2$
 $= \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}y \right) \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}y \right)$



- 17.** (a) 0 (b) El límite no existe.

19. $(1+2x^2)\exp(1+x^2+y^2)$.

21. $\frac{40}{\sqrt{5}}e^{-15}$.

- 23.** (a) La recta $\mathbf{L}(t) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t(a, b, c)$ está en el plano $z = f(x_0, y_0)$ si $c = 0$ y es perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0)$ si $a(\partial f/\partial x)(x_0, y_0) + b(\partial f/\partial y)(x_0, y_0) = 0$.

En \mathbf{L} tenemos

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) \\ + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0) \\ = f(x_0, y_0) + at \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] + bt \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] \\ = f(x_0, y_0) = z. \end{aligned}$$

Por tanto, \mathbf{L} está en el plano tangente. Una normal unitaria hacia arriba al plano tangente es

$$\mathbf{p} = (1 + \|\nabla f\|^{-1/2}(-(\partial f/\partial x)(x_0, y_0), -(\partial f/\partial y)(x_0, y_0), 1)).$$

Por tanto, $\cos \theta = \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = (1 + \|\nabla f\|^2)^{-1/2}$ y $\tan \theta = \text{sen } \theta / \cos \theta = \{\|\nabla f\|^2 / (1 + \|\nabla f\|^2)\}^{1/2} / (1 + \|\nabla f\|^2)^{-1/2} = \|\nabla f\|$ que es lo queríamos.

- (b) El plano tangente contiene la recta horizontal que pasa por $(1, 0, 2)$ perpendicular a $\nabla f(1, 0) = (5, 0)$, es decir, paralela al eje y . Forma un ángulo de $\arctan(\|\nabla f(1, 0)\|) = \arctan 5 \approx 78,7^\circ$ con respecto al plano xy .

25. $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ o $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

- 27.** Una normal unitaria es $(\sqrt{2}/10)(3, 5, 4)$. El plano tangente es $3x + 5y + 4z = 18$.

29. $4\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$.

- 31.** (a) Dado que g es la composición $\lambda \mapsto \lambda x \mapsto f(\lambda x)$, la regla de la cadena da

$$g'(\lambda) = \mathbf{D}f(\lambda \mathbf{x}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$g'(1) = \mathbf{D}f(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}.$$

Pero también $g(\lambda) = \lambda^p f(\mathbf{x})$, luego $g'(\lambda) = p\lambda^{p-1}f(\mathbf{x})$ y $g'(1) = pf(\mathbf{x})$.

(b) $p = 1$.

- 33.** Diferenciar directamente usando la regla de la cadena o utilizar el Ejercicio 31(a) con $p = 0$.

35. (a) Si $(x, y) \neq (0, 0)$, entonces calculamos para (I) que $\partial f/\partial x = (y^3 - yx^2)/(x^2 + y^2)^2$ y $\partial f/\partial y = (x^3 - xy^2)/(x^2 + y^2)^2$. Si $x = y = 0$, utilizamos directamente la definición para determinar que ambas derivadas parciales son 0. Para (II), si $(x, y) \neq (0, 0)$, entonces $\partial f/\partial x = 2xy^6/(x^2 + y^4)^2$ y $\partial f/\partial y = (2x^4y - 2x^2y^5)/(x^2 + y^4)^2$. Las parciales en el origen son cero.

(b) La función (I) no es continua en $(0, 0)$; la función (II) es diferenciable, pero la derivada no es continua.

37. (a) $\sqrt{2}\pi/8$ (c) $-2\sqrt{2}e^{-2}$
(b) $-\sin\sqrt{2}$

39. $(-4e^{-1}, 0)$

41. (a) Véase el Teorema 11.

(b)

$$\begin{aligned} g(u) &= (\operatorname{sen} 3u)^2 + \cos 8u \\ g'(u) &= 6 \operatorname{sen} 3u \cos 3u - 8 \operatorname{sen} 8u \\ g'(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla f &= (2x, 1) \\ \nabla f(\mathbf{h}(0)) &= \nabla f(0, 1) = (0, 1) \\ \mathbf{h}'(u) &= (3 \cos 3u, -8 \operatorname{sen} 8u) \\ g'(0) &= \nabla f(\mathbf{h}(0)) \cdot \mathbf{h}'(0) \end{aligned}$$

43. $t = \sqrt{14}(-3 + \sqrt{359})/70 = (-3 + \sqrt{359})/5\sqrt{14}$

45.

$$\begin{aligned} \partial z / \partial x &= 4(e^{-2x-2y+2xy})(1+y)/(e^{-2x-2y}-e^{2xy})^2 \\ \partial z / \partial y &= 4(e^{-2y-2x+2xy})(1+x)/(e^{-2x-2y}-e^{2xy})^2 \end{aligned}$$

47. Observar que $y = x^2$, de modo que si y es constante, x no puede ser una variable.

49. $[f'(t)g(t) + f(t)g'(t)] \exp[f(t)g(t)]$

51. $d[f(\mathbf{c}(t))]/dt = 2t/[(1+t^2+2\cos^2 t)(2-2t^2+t^4)]$
 $-4t(t^2-1) \ln(1+t^2+2\cos^2 t)/(2-2t^2+t^4)^2$
 $-4 \cos t \operatorname{sen} t/[(1+t^2+2\cos^2 t)(2-2t^2+t^4)]$

53. Sean $x = f(t)$, $y = t$; utilizar la regla de la cadena para diferenciar $u(x, y)$ con respecto a t .

55. (a) $n = PV/RT$; $P = nRT/V$;
 $T = PV/nR$; $V = nRT/P$.

(b) $\partial V/\partial T = nR/P$; $\partial T/\partial P = V/nR$;
 $\partial P/\partial V = -nRT/V^2$.

Multiplicar, recordando que $PV = nRT$.

57. (a) Se puede resolver para cualquiera de las variables en función de las otras dos.

(b) $\partial T/\partial P = (V - \beta)/R$;
 $\partial P/\partial V = -RT/(V - \beta)^2 + 2\alpha/V^3$;
 $\partial V/\partial T = R/[(V - \beta)(RT/(V - \beta)^2 - 2\alpha/V^3)]$

(c) Multiplicar y cancelar factores.

59. (a) $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

(b) La derivada direccional es 0 en la dirección

$$(x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j})/\sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

(c) La curva de nivel que pasa por (x_0, y_0) tiene que ser tangente a la recta que pasa por $(0, 0)$ y (x_0, y_0) . Las curvas de nivel son rectas o semirrectas que parten del origen.

61. $G(x, y) = x - y$.

Capítulo 3

Sección 3.1

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24 \frac{x^3 y - xy^3}{(x^2 + y^2)^4}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24 \frac{-x^3 y + xy^3}{(x^2 + y^2)^4}$,
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-6x^4 + 36x^2y^2 - 6y^4}{(x^2 + y^2)^4}$.

3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^4 \cos(xy^2)$,
 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x \operatorname{sen}(xy^2) - 4x^2 y^2 \cos(xy^2)$,
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2y \operatorname{sen}(xy^2)$
 $-2xy^3 \cos(xy^2)$.

5. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(\cos^2 x + e^{-y}) \cos 2x + 2 \operatorname{sen}^2 2x}{(\cos^2 x + e^{-y})^3}$,
 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{e^{-y} - \cos^2 x}{e^y (\cos^2 x + e^{-y})^3}$,
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2 \operatorname{sen} 2x}{e^y (\cos^2 x + e^{-y})^3}$.

- 7.** (a) $f_x = -1$, $f_y = -\pi$, $f_{xx} = 0$, $f_{yy} = 0$,
 $f_{xy} = f_{yx} = -1$.
(b) $f_x = 5$, $f_y = -18$, $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 42$,
 $f_{xy} = f_{yx} = -8$.
(c) Todas las derivadas parciales segundas son cero.

9. No.

11. (a) $c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -c^2 \operatorname{sen}(x - ct) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$.

(b) $c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -c^2 \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(ct) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$.

(c) $c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 30c^2(x - ct)^4 + 30c^2(x + ct)^4 = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$.

13. (a) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4, .$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$$

(b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x/3y^3, .$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2/3y^2$$

15. $f_{xy} = 2x + 2y, f_{yz} = 2z, f_{zx} = 0, f_{xyz} = 0$.

17. Dado que f y $\partial f/\partial z$ son ambas de clase C^2 , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}. \end{aligned}$$

19. $f_{xzw} = f_{zwx} = e^{xyz}[2xy \operatorname{cos}(xw) + x^2 y^2 z \operatorname{cos}(xw) - x^2 yw \operatorname{sen}(xw)]$.

21. (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \arctan \frac{x}{y} + \frac{xy}{x^2 + y^2},$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^2}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x \operatorname{sen} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}},$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y \operatorname{sen} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{x^2 \operatorname{sen} \sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{x^2 \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \\ &\quad - \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y^2 \operatorname{sen} \sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{y^2 \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$$

$$- \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$= xy \left[\frac{\operatorname{sen} \sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \right].$$

(c) $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \exp(-x^2 - y^2),$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \exp(-x^2 - y^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (4x^2 - 2) \exp(-x^2 - y^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (4y^2 - 2) \exp(-x^2 - y^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy \exp(-x^2 - y^2).$$

23.
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \\ + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2 y}{dt^2}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$.

25. Calcular las derivadas $\partial^2 u/\partial x^2$ y $\partial^2 u/\partial y^2$ y sumar.

27. (a) La primera función es armónica, la segunda no lo es.

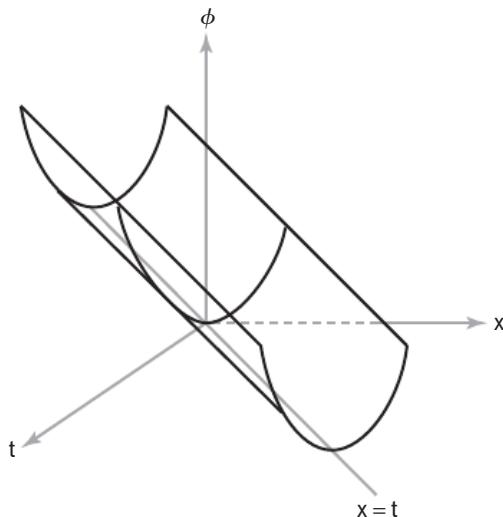
(b) Cualquier polinomio de grado 1 o 0 es armónico.

29. (a) Calcular las derivadas y comparar.

(b) Véase la figura de la página siguiente.

31. $V = -GmM/r = -GmM(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$. Comprobar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= GmM(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \\ [3 - 3(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}] &= 0. \end{aligned}$$



Sección 3.2

1. (a) $f(h_1, h_2) = 1 + h_1 + h_2 + R_1(\mathbf{0}, \mathbf{h})$.
- (b) $f(h_1, h_2) = 1 + h_1 + h_2 + \frac{1}{2}h_1^2 + h_1h_2 + \frac{1}{2}h_2^2 + R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h})$.
3. $f(h_1, h_2) = h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2$ [R₂(0, h) = 0, en este caso].
5. $f(h_1, h_2) = 1 + h_1 + h_2 + \frac{h_1^2}{2} + h_1h_2 + \frac{h_2^2}{2} + R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h})$.
7. $f(h_1, h_2) = 1 + h_1h_2 + R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h})$.
9. $g(x, y) = -1 + \frac{1}{2}(x - \pi)^2 + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2$.
11. $p(x, y) = 2 - \frac{3\pi^2}{4}(y - 1) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4}(y - 1)^2 - \frac{7\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(y - 1)$.
13. (a) Demostrar que $|R_k(x, a)| \leq AB^{k+1}/(k+1)!$ para A, B constantes y x en el intervalo fijo [a, b]. Probar que $R_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. (Usar la convergencia de la serie $\sum c^k/k! = e^c$ y el teorema de Taylor).
- (b) El único problema posible es en $x = 0$. Utilizar la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)e^t = \infty$$

para todo polinomio $p(t)$. Utilizando esto, establecer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} p(x)e^{-1/x} = 0$ para

toda función racional $p(x)$ y concluir que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k .

- (c) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es analítica en \mathbf{x}_0 si la serie

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + \dots \\ + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\mathbf{x}_0) + \dots \end{aligned}$$

converge a $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})$ para todo $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ en algún disco lo suficientemente pequeño $\|\mathbf{h}\| < \varepsilon$. La función f es analítica si para todo $R > 0$ existe una constante M tal que $|(\partial^k f / \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k})(\mathbf{x})| < M^k$ para todas las derivadas de orden k en todo x que satisface $\|\mathbf{x}\| \leq R$.

- (d) $f(x, y) = 1 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \dots$
- $+ \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^j y^{k-j} + \dots$

Sección 3.3

1. (0, 0); punto de silla.
3. Los puntos críticos están en la recta $y = -x$; son puntos de mínimo local, porque $f(x, y) = (x+y)^2 \geq 0$, y se hace igual a cero solo cuando $x = -y$.
5. (0, 0); punto de silla.
7. $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$; punto de mínimo local.
9. (0, 0); punto de máximo local. (Las pruebas fallan, pero se puede utilizar el hecho de que $\cos z \leq 1$).
- $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$, mínimo local
- $(0, \sqrt{\pi})$, mínimo local.
11. No hay puntos críticos.
13. (1, 1) es un mínimo local.
15. (0, $n\pi$); puntos críticos, no tiene puntos de máximo ni de mínimo.

- 17.** Mínimo local en $(1, 1)$.
- 19.** Máximo local en $(0, 2)$, mínimo local en $(1, 3)$, punto de silla en $(0, 3)$.
- 21.** Mínimo en $(0, 0)$ y máximo en $(0, \pm 1)$ [y puntos de silla en $(\pm 1, 0)$].
- 23.** (a) $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ se anulan en $(0, 0)$.
(b) Demostrar que $f(g(t)) = 0$ en $t = 0$ y que $f(g(t)) \geq 0$ si $|t| < |b|/3a^2$.
(c) f es negativa en la parábola $y = 2x^2$.
- 25.** Los puntos críticos están en la recta $y = x$ y son puntos de mínimo local (véase el Ejercicio 1).
- 27.** Punto de silla.
- 29.** Minimizar $S = 2xy + 2yz + 2xz$ con $z = V/xy$, donde V el volumen constante.
- 31.** $40, 40, 40$
- 33.** (a) $\nabla f(0, 0) = (6x^5 + 2x, 6y^5)|_{(0,0)} = (0, 0)$, luego f tiene un punto crítico en $(0, 0)$. La matriz hessiana de f en $(0, 0)$ es
- $$\begin{bmatrix} 30x^4 + 2 & 0 \\ 0 & 30y \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
- que tiene determinante igual a cero. Lo mismo para g y h .
(b) f tiene un punto de mínimo local en $(0, 0)$ puesto que $f(0, 0) = 0$ y $f(x, y) > 0$ para todos los demás (x, y) . g tiene un máximo local en $(0, 0)$ ya que $g(0, 0) = 0$ y $g(x, y) < 0$ para todos los demás (x, y) . h tiene un punto de silla en $(0, 0)$ dado que $h(0, y) \geq 0$, pero $h(x, 0) < 0$ para x cerca de cero. Esto demuestra que existen puntos arbitrariamente próximos al origen en los que h toma tanto valores positivos como negativos.
- 35.** El único punto crítico es $(0, 0, 0)$. Es un punto de mínimo porque
- $$f(x, y, z) \geq \frac{x^2 + y^2}{2} + z^2 + xy = \frac{1}{2}(x+y)^2 + z^2 \geq 0.$$
- 37.** $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ es un punto de silla; $\left(5, \frac{27}{2}\right)$ es un punto de mínimo local.
- 39.** $\frac{3}{2}$ es el máximo absoluto y 0 es el mínimo absoluto.
- 41.** -2 es el mínimo absoluto; 2 es el máximo absoluto.
- 43.** Máximo absoluto de 4 en $(-1, 2)$, mínimo absoluto de 0 en $(-2, 5)$ y $(2, 1)$.
- 45.** $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ es un mínimo local.
- 47.** Si $u_n(x, y) = u(x, y) + (1/n)e^x$, entonces $\nabla^2 u_n = (1/n)e^x > 0$. Así, u_n es estrictamente subarmónica y puede tener su máximo solo en ∂D , por ejemplo, en $\mathbf{p}_n = (x_n, y_n)$. Si $(x_0, y_0) \in D$, comprobamos que esto implica que $u(x_n, y_n) > u(x_0, y_0) - e/n$. Por tanto, tiene que existir un punto $\mathbf{q} = (x_\infty, y_\infty)$ en ∂D tal que arbitrariamente tan cerca de \mathbf{q} como deseemos podamos encontrar un (x_n, y_n) para n grande. Concluir a partir de la continuidad de u que $u(x_\infty, y_\infty) \geq u(x_0, y_0)$.
- 49.** Seguir los métodos indicados en el Ejercicio 47.
- 51.** (a) Si existiera un x_1 con $f(x_1) < f(x_0)$, entonces el máximo de f en el intervalo entre x_0 y x sería otro punto crítico.
(b) Verificar (i) usando el criterio de la segunda derivada; para (ii), f tiende a $-\infty$ cuando $y \rightarrow \infty$ y $x = -y$.

Sección 3.4

- 1.** (a) Máximo de 3, mínimo de 1.
(b) Máximo de 3, mínimo de 0.
- 3.** Máximo en $\sqrt{\frac{2}{3}}(1, -1, 1)$, mínimo en $\sqrt{\frac{2}{3}}(-1, 1, -1)$.
- 5.** Máximo en $(\sqrt{3}, 0)$, mínimo en $(-\sqrt{3}, 0)$.
- 7.** Máximo en $\left(\frac{9}{\sqrt{70}}, \frac{4}{\sqrt{70}}\right)$, mínimo en $\left(-\frac{9}{\sqrt{70}}, -\frac{4}{\sqrt{70}}\right)$.
- 9.** El valor mínimo de 4 se alcanza en $(0, 2)$. Utilizar una imagen geométrica en lugar de los multiplicadores de Lagrange.
- 11.** $(0, 0, 2)$ es un mínimo de f .
- 13.** $\frac{3}{2}$ es el máximo absoluto y 0 es el mínimo absoluto.
- 15.** (a) Punto de silla en $(0, 0)$.

- (b) Máximo de 14 en $(3, 1)$, mínimo de -14 en $(-3, -1)$.

17. Máximo de $1/3\sqrt{3}$, mínimo de $-1/3\sqrt{3}$.

- 19.** (a) 3, 3, 3.
(b) 9, 9, 9.

21. El diámetro debería ser igual a la altura, $20/\sqrt[3]{2\pi}$ cm.

23. Valor máximo $\sqrt{3}$ en $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ y valor mínimo $-\sqrt{3}$ en $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

25. La longitud horizontal es $\sqrt{qA/p}$, la longitud vertical es $\sqrt{pA/q}$.

27. Para el Ejercicio 3, los hessianos orlados que se necesitan son

$$|\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda(x^2 + y^2),$$

$$|\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y & 2z \\ 2x & -2\lambda & 0 & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda & 0 \\ 2z & 0 & 0 & -2\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -16\lambda(x^2 + y^2 + z^2).$$

En $\sqrt{\frac{2}{3}}(1, -1, 1)$ el multiplicador de Lagrange es $\lambda = \sqrt{6}/4 > 0$, lo que indica un máximo en $\sqrt{\frac{2}{3}}(1, -1, 1)$, y $\lambda = -\sqrt{6}/4 < 0$ indica un mínimo en $\sqrt{\frac{2}{3}}(-1, 1, -1)$. En el Ejercicio 7, $|\bar{H}| = 24\lambda(4x^2 + 6y^2)$, y por tanto $\lambda = \sqrt{70}/12 > 0$ indica un máximo en $(9/\sqrt{70}, 4/\sqrt{70})$ y $\lambda = -\sqrt{70}/12 < 0$ indica un mínimo en $(-9/\sqrt{70}, -4/\sqrt{70})$.

29. $0,19 \text{ m}^3$

31. (a) $\nabla f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

- (b) S está definida por la función de restricción $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$. Dado que $\nabla g(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$ no es $\mathbf{0}$, se aplica el Teorema 9. En un \mathbf{x} donde f tiene un extremo, existe una $\lambda/2$ tal que $\nabla f(\mathbf{x}) = (\lambda/2)/\nabla g(\mathbf{x})$. Es decir, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

33. El mínimo se alcanza en $(-1/\sqrt{2}, 0)$, el máximo se alcanza en $(\frac{1}{4}, \pm\sqrt{7}/8)$, hay un mínimo local en $(1/\sqrt{2}, 0)$.

35. No hay puntos críticos; no hay máximo ni mínimo.

37. $(-1, 0, 1)$.

39. El punto $(K, L) = (\alpha B/q, (1 - \alpha)B/p)$ optimiza el beneficio.

Sección 3.5

1. Sea $F(x, y, z) = x + y - z + \cos(xyz)$. Entonces $(\partial F/\partial z)(0, 0, 0) = -1 \neq 0$. Entonces según el teorema de la función implícita podemos resolver para $z = g(x, y)$. $(\partial g/\partial x)(0, 0) = (\partial g/\partial y)(0, 0) = 1$.

3. (a) Si $x < -\frac{1}{4}$, podemos resolver para y en términos de x utilizando la fórmula cuadrática.

(b) $\partial F/\partial y = 2y + 1$ no es cero para $\{y \mid y < -\frac{1}{2}\}$ y $\{y \mid y > -\frac{1}{2}\}$. Estas regiones corresponden a las mitades superior e inferior de una parábola horizontal con vértice en $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ y a la elección del signo en la fórmula cuadrática. La derivada $dy/dx = -3/(2y + 1)$ es negativa en la mitad superior de la parábola y positiva en la mitad inferior.

5. Utilizar el teorema de la función implícita con $n = 1$. (Véase el Ejemplo 1). La recta (I) está dada por $0 = (x - x_0, y - y_0) \cdot \nabla F(x_0, y_0) = (x - x_0)(\partial F/\partial x)(x_0, y_0) + (y - y_0)(\partial F/\partial y)(x_0, y_0)$. Para la recta (II), el Teorema 11 da $dy/dx = -(\partial F/\partial x)/(\partial F/\partial y)$ y por tanto las rectas coinciden y están dadas por

$$y = y_0 - \frac{(\partial F/\partial x)(x_0, y_0)}{(\partial F/\partial y)(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

7. Sea $F(x, y, z) = x^3z^2 - z^3yx$; $\partial F/\partial z = 2x^3z - 3z^2yx \neq 0$ at $(1, 1, 1)$. Cerca del origen, con $x = y \neq 0$, obtenemos las soluciones $z = 0$ y $z = x$, y por tanto no existe una solución única. En $(1, 1)$, $\partial z/\partial x = 2$ y $\partial z/\partial y = -1$.

9. Con $F_1 = y + x + uv$ y $F_2 = uxy + v$, el determinante en el teorema general de la función implícita es

$$\begin{vmatrix} \partial F_1/\partial u & \partial F_1/\partial v \\ \partial F_2/\partial u & \partial F_2/\partial v \end{vmatrix} = v - uxy,$$

que es 0 en $(0, 0, 0, 0)$. Por tanto, el teorema de la función implícita no se aplica. Si lo intentamos directamente, hallamos que $v = -uxy$, de modo que $x + y = u^2xy$. Para una elección particular de (x, y) cerca de $(0, 0)$, o no existe ninguna solución para (u, v) o existen dos.

- 11.** No. $f(x, y) = (-1, 0)$ tiene infinitas soluciones, concretamente, $(x, y) = (0, y)$ para todo y .
- 13.** (a) $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$.
 (b) $f'(z) = -z(x+2y)/(x^2+y^2)$;
 $g'(z) = z(y-2x)/(x^2+y^2)$.
- 15.** (a) Resolver la ecuación $x^3 - y^2 = 0$ para x . Entonces C es la gráfica de $f(y) = y^{2/3}$.
 (b) $F_x(0, 0) = 3x^2|_{0,0} = 0$. No; se contradice el inverso del teorema de la función implícita.
- 17.** (a) Sea $F_1 = x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4, F_2 = 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8$. Calcular $(\partial F_1 / \partial u)(2, -1, 2, 1) = -12, (\partial F_1 / \partial v)(2, -1, 2, 1) = 2, (\partial F_2 / \partial u)(2, -1, 2, 1) = -8, (\partial F_2 / \partial v)(2, -1, 2, 1) = 12$. Entonces $\Delta = -128 \neq 0$, por lo que según el teorema de la función implícita podemos resolver para u y v como funciones de x e y cerca de $(2, -1, 2, 1)$.
 (b) $\frac{13}{32}$.
- 19.** Multiplicar y igualar los coeficientes para obtener a_0, a_1 y a_2 como funciones de r_1, r_2 y r_3 . A continuación calculamos el determinante jacobiano $\partial(a_0, a_1, a_2)/\partial(r_1, r_2, r_3) = (r_3 - r_2)(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)$, que es distinto de cero si las raíces son distintas. Por tanto, el teorema de la función inversa demuestra que se pueden determinar las raíces como funciones de los coeficientes en un entorno de cualquier punto en el que las raíces son distintas. Es decir, si las raíces r_1, r_2, r_3 de $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ son todas diferentes, entonces existen entornos V de (r_1, r_2, r_3) y W de (a_0, a_1, a_2) tales que las raíces en V son funciones suaves de los coeficientes en W .

Ejercicios de repaso del Capítulo 3

- 1.** Sea $g(x, y) = y - kx$, de modo que $u = f \circ g$. Entonces $(\partial u / \partial x) = (\partial f / \partial g)(\partial g / \partial x) = (\partial f / \partial g)(-k)$ y $(\partial u / \partial y) = (\partial f / \partial g)(\partial g / \partial y) = (\partial f / \partial g)$.
- 3.** Punto de silla en $(0, 0)$.
- 5.** $p(x, y) = e^{-1} - 2e^{-1}(x-1) + 2e^{-1}(y-1) + e^{-1}(x-1)^2 - 4e^{-1}(x-1)(y-1) + e^{-1}(y-1)^2$.
- 7.** (a) Punto de silla.
 (b) Punto de silla para cualquier C .

- 9.** (a) 1.
 (b) $\sqrt{83}/6$.
- 11.** Utilizar el criterio de la segunda derivada; $(0, 0)$ es un punto de máximo local; $(-1, 0)$ es un punto de silla; $(2, 0)$ es un punto de mínimo local.
- 13.** Puntos de silla en $(n, 0)$, para $n = \text{entero}$.
- 15.** Máximo $\approx 2,618$; mínimo $\approx 0,382$.
- 17.** Máximo 1, mínimo $\cos 1$.
- 19.** $z = 1/4$.
- 21.** $(0, 0, \pm 1)$.
- 23.** Si $b \geq 2$, la distancia mínima es $2\sqrt{b-1}$; si $b \leq 2$, la distancia mínima es $|b|$.
- 25.** Máximo local en $(2, 0)$, mínimo local en $(0, 1)$ y $(3, 1)$, puntos de silla en $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(2, 1)$.
- 27.** No estable.
- 29.** $f(-\frac{3}{2}, -\sqrt{3}/2) = 3\sqrt{3}/4$.
- 31.** $x = (20/3)\sqrt[3]{3}; y = 10\sqrt[3]{3}; z = 5\sqrt[3]{3}$.
- 33.** El determinante requerido en el teorema general de la función implícita no es cero, por lo que podemos resolver para u y v ; $(\partial u / \partial x)(2, -1) = 13/32$.
- 35.** Se puede encontrar una nueva base ortonormal con respecto a la cual la forma cuadrática dada por la matriz
- $$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$
- tiene forma diagonal. Este cambio de base define nuevas variables ξ y η , que son funciones lineales de x e y . Manipulaciones de álgebra lineal y la regla de la cadena demuestran que $Lv = \lambda(\partial^2 v / \partial \xi^2) + \mu(\partial^2 v / \partial \eta^2)$. Los números λ y μ son los autovalores de A y son positivos, porque la forma cuadrática es definida positiva. En un máximo, $\partial v / \partial \xi = \partial v / \partial \eta = 0$. Además, $\partial^2 v / \partial \xi^2 \leq 0$ y $\partial^2 v / \partial \eta^2 \leq 0$, puesto que si uno de ellos fuera mayor que 0, la sección transversal de la gráfica en dicha dirección tendría un mínimo. Entonces $Lv \leq 0$, y se tiene una contradicción con la subarmonidad estricta.
- 37.** Invertir las desigualdades de los Ejercicios 35 y 36.

- 39.** Sea $F_1 = 2xu^3v - yv - 1$, $F_2 = y^3v + x^5u^2 - 2$. Calcular $(\partial F_1 / \partial u)(1, 1, 1, 1) = 6$, $(\partial F_1 / \partial v)(1, 1, 1, 1) = 1$, $(\partial F_2 / \partial u)(1, 1, 1, 1) = 2$, $(\partial F_2 / \partial v)(1, 1, 1, 1) = 1$. Luego $\Delta = 4 \neq 0$, luego por el teorema de la función implícita podemos resolver para u y v como funciones de x e y cerca de $(1, 1, 1, 1)$.

$$Df(1, 1) = \begin{bmatrix} -7/4 & 1 \\ 17/2 & -5 \end{bmatrix}.$$

- 41.** Las ecuaciones para un punto crítico, $\partial s / \partial m = \partial s / \partial b = 0$ resueltas dan para m y b $m = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2)$ y $b = (y_2 x_1 - y_1 x_2)/(x_1 - x_2)$. La recta $y = mx + b$ pasa entonces por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) .

- 43.** En un punto de mínimo de s , tenemos $0 = \partial s / \partial b = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)$.

45. $y = \frac{9}{10}x + \frac{6}{5}$.

- 47.** Sea $\alpha = (ax - 4a^3t)$. Calcular $u_t = 8a^3 \tanh \alpha$ y $u_x = -2au \tanh \alpha$ de modo que $u_t + 4a^2u_x = 0$. Después calcular $u_{xx} = 4a^2u - u^2/2$. Luego $u_{xxx} = 4a^2u_x - uu_x$, así obtenemos $u_t + u_{xxx} + uu_x = u_t + 4a^2u_x = 0$.

- 49.** $T' + kc_1T = 0$, $\Theta'' + c_2\Theta = 0$, $r^2R'' + rR' - c_3R = 0$ para las constantes c_1, c_2 y c_3 .

Capítulo 4

Sección 4.1

- 1.** $\mathbf{r}'(t) = -(\sin t)\mathbf{i} + 2(\cos 2t)\mathbf{j}$, $\mathbf{r}'(0) = 2\mathbf{j}$, $\mathbf{a}(t) = -(\cos t)\mathbf{i} - 4(\sin 2t)\mathbf{j}$, $\mathbf{a}(0) = -\mathbf{i}$, $\mathbf{l}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$.
- 3.** $\mathbf{r}'(t) = \sqrt{2}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$, $\mathbf{r}'(0) = \sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{a}(t) = e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{l}(t) = \sqrt{2}\mathbf{i} + (1+t)\mathbf{j} + (1-t)\mathbf{k}$.
- 5.** $(e^t - e^{-t}, \cos t - \sin t, -3t^2)$.
- 7.** $[-3t^2(2 \sin t + \cos t) - t^3(2 \cos t - \sin t)]\mathbf{i} + [3t^2(2e^t + e^{-t}) + t^3(2e^t - e^{-t})]\mathbf{j} + [e^t(\cos t - \sin t) - e^{-t}(-\sin t + \cos t)]\mathbf{k}$.
- 9.** Calcular $\mathbf{v} = (-a \sin t, a \cos t, b)$, luego $\mathbf{a} = (-a \cos t, -a \sin t, 0)$. Puesto que la componente z de \mathbf{a} es idénticamente cero, \mathbf{a} siempre es paralelo al plano xy .
- 11.** Las trayectorias en (a) y (c) son regulares, mientras que la trayectoria de (b) no lo es.

- 13.** $(0, -12, -1)$ y $(0, -26, -8)$.

- 15.** $m(0, 6, 0)$.

- 17.** $-24\pi^2(\cos(2\pi t/5), \sin(2\pi t/5))/25$.

- 19.** $\frac{d}{dt}(\|\mathbf{v}\|^2) = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$.

- 21.** 6 129 segundos.

- 23.** $\mathbf{c}(t) = \left(\frac{t^2}{2}, e^t - 6, \frac{t^3}{3} + 1 \right)$.

- 25.** (a) $\mathbf{c}(t) = (t, e^t)$, $-\infty < t < \infty$. La imagen de esta trayectoria es la gráfica $y = e^x$.
 (b) $\mathbf{c}(t) = (\frac{1}{2} \cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, una ellipse.
 (c) $\mathbf{c}(t) = (at, bt, ct)$.
 (d) $\mathbf{c}(t) = (\frac{2}{3} \cos t, \frac{1}{2} \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, una ellipse.

- 27.** $\mathbf{c}(t) \times \mathbf{c}'(t)$ es normal al plano de la órbita en el instante t . Como en el Ejercicio 26, su derivada es 0 y por tanto el plano orbital es constante.

Sección 4.2

- 1.** $2\sqrt{5}\pi$.
- 3.** $2(2\sqrt{2} - 1)$.

- 5.** $\frac{6 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \log \left[\frac{2\sqrt{2} + 3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \right]$.

- 7.** $2\sqrt{2}$.

- 9.** (a) $\mathbf{c}(t) = (1 - t, 2 - t, -t)$, $t \in [0, 1]$.
 (b) $\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{3}$.

- 11.** $2\pi(\sqrt{5} + \sqrt{2})$.

- 13.** $3 + \log 2$.

- 15.** (a) Dado que α es estrictamente creciente, es biyectiva de $[a, b]$ en $[\alpha(a), \alpha(b)]$. Por definición, \mathbf{v} es la imagen de \mathbf{c} si y solo si existe un t en $[a, b]$ tal que $\mathbf{c}(t) = \mathbf{v}$. Existe un punto s en $[\alpha(a), \alpha(b)]$ tal que $s = \alpha(t)$, de modo que $\mathbf{d}(s) = \mathbf{c}(t) = \mathbf{v}$. Por tanto, la imagen de \mathbf{c} está contenida en la imagen de \mathbf{d} . Utilizar α^{-1} de forma similar para la probar la inclusión contraria.

$$\begin{aligned}
 (b) \quad l_{\mathbf{d}} &= \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \|\mathbf{d}'(s)\| ds \\
 &= \int_{s=\alpha(a)}^{s=\alpha(b)} \|\mathbf{d}'(\alpha(t))\|\alpha'(t) dt \\
 &= \int_{t=a}^{t=b} \|\mathbf{d}'(\alpha(t))\|\alpha'(t) dt \\
 &= \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\| dt = l_{\mathbf{c}}.
 \end{aligned}$$

(c) Diferenciar \mathbf{d} usando la regla de la cadena.

17. (a) $l_{\mathbf{c}} = \int_a^b \|\mathbf{c}'(s)\| ds = \int_a^b ds = b - a$.
 (b) $\mathbf{T}(s) = \mathbf{c}'(s)/\|\mathbf{c}'(s)\| = \mathbf{c}'(s)$, de modo que $\mathbf{T}'(s) = \mathbf{c}''(s)$. Entonces $k = \|\mathbf{T}'\| = \|\mathbf{c}''(s)\|$.
 (c) Demostrar que si \mathbf{v} y \mathbf{w} están en \mathbb{R}^3 , $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{w} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}/\|\mathbf{v}\|^2)\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$. Utilizar esto para probar que si $\rho(t) = (x(t), y(t), z(t))$ nunca es $(0, 0, 0)$ y $\mathbf{f}(t) = \rho(t)/\|\rho(t)\|$, entonces

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{1}{\|\rho(t)\|} \left[\rho'(t) - \frac{\rho(t) \cdot \rho'(t)}{\|\rho(t)\|^2} \rho(t) \right]$$

y

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{\|\rho(t) \times \rho'(t)\|}{\|\rho(t)\|^2}.$$

Con $\rho(t) = \mathbf{c}'(t)$, esto da

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}'(t) &= \frac{\mathbf{c}''(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} - \frac{\mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}''(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3} \mathbf{c}'(t) \\
 \text{y } \|\mathbf{T}'(t)\| &= \frac{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|}{\|\mathbf{c}'(t)\|^2}.
 \end{aligned}$$

Si s es la longitud de arco de \mathbf{c} , $ds/dt = \|\mathbf{c}'(t)\|$, y por tanto

$$\left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} \right\| = k \|\mathbf{c}'(t)\|.$$

Por tanto,

$$k = \frac{1}{\|\mathbf{c}'(t)\|} \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}.$$

(Este resultado es útil en el Ejercicio 21).

(d) $1/\sqrt{2}$.

19. (a) $\|\mathbf{c}'(t)\| = \|(-\sin t, \cos t)\| = 1$.
 (b) $k = \|\mathbf{T}'(t)\| = \|(-\cos t, -\sin t)\| = 1$.

21. (a) Dado que \mathbf{c} está parametrizada mediante la longitud de arco, $\mathbf{T}(s) = \mathbf{c}'(s)$ y $\mathbf{N}(s) = \mathbf{c}''(s)/\|\mathbf{c}''(s)\|$. Utilizar el Ejercicio 17 para demostrar que

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{B}}{ds} &= \left(\mathbf{c}'' \times \frac{\mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}''\|} \right) + \mathbf{c}' \times \left(\frac{\mathbf{c}'''}{\|\mathbf{c}''\|} - \frac{\mathbf{c}'' \cdot \mathbf{c}'''}{\|\mathbf{c}''\|^3} \mathbf{c}'' \right) \\
 \text{y} \\
 \tau &= -\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N} = -\frac{(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''') \cdot \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}''\|^2} = \frac{(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'') \cdot \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}''\|^2}.
 \end{aligned}$$

- (b) Obtener $\mathbf{T}'(t)$ y $\|\mathbf{T}'(t)\|$ como en el Ejercicio 17. \mathbf{B} es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{c}' \times \mathbf{T}' = (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')/\|\mathbf{c}'\|$, de modo que $\mathbf{B} = (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')/\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|$. Utilizar la solución del Ejercicio 17 con $\rho = \mathbf{c}' \times \mathbf{c}''$ para obtener

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{B}/dt &= (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''')/\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\| \\
 -\{[(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'') \cdot (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''')]/\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|^3\}(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''),
 \end{aligned}$$

y los valores de \mathbf{T}' y $\|\mathbf{T}'\|$ para obtener

$$\mathbf{N} = (\|\mathbf{c}'\|/\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|)(\mathbf{c}'' - (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')/\|\mathbf{c}'\|^2).$$

Por último, utilizar la regla de la cadena y el producto escalar de estos para obtener

$$\begin{aligned}
 \tau &= -\left[\frac{d\mathbf{B}}{ds}(s(t)) \right] \cdot \mathbf{N}(s(t)) \\
 &= -\frac{1}{|ds/dt|} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{N} = \frac{(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'') \cdot \mathbf{c}'''}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|^2}.
 \end{aligned}$$

(c) $\sqrt{2}/2$.

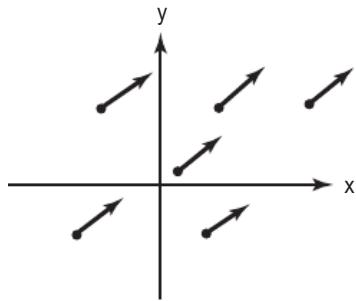
23. (a) \mathbf{N} está definido como $\mathbf{T}'/\|\mathbf{T}'\|$, de modo que $\mathbf{T}' = \|\mathbf{T}'\|\mathbf{N} = k\mathbf{N}$. Puesto que $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}' = 0$, \mathbf{T}, \mathbf{N} y \mathbf{B} forman una base ortonormal para \mathbb{R}^3 . Diferenciando $\mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{B}(s) = 1$ y $\mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 0$ se obtiene $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{B} = 0$ y $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{T} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}' = 0$. Pero $\mathbf{T}' \cdot \mathbf{B} = \|\mathbf{T}'\|\mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = 0$, de modo que también $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{T} = 0$. Luego, $\mathbf{B}' = (\mathbf{B}' \cdot \mathbf{T})\mathbf{T} + (\mathbf{B}' \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} + (\mathbf{B}' \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} = (\mathbf{B}' \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} = -\tau\mathbf{N}$. También, $\mathbf{N}' \cdot \mathbf{N} = 0$, dado que $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$. Luego, $\mathbf{N}' = (\mathbf{N}' \cdot \mathbf{T})\mathbf{T} + (\mathbf{N}' \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}$. Diferenciando $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0$ y $\mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = 0$ da $\mathbf{N}' \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}' = -k$ y $\mathbf{N}' \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{B}' = \tau$, de donde se deduce la ecuación central.

- (b) $\omega = \tau\mathbf{T} + k\mathbf{B}$.

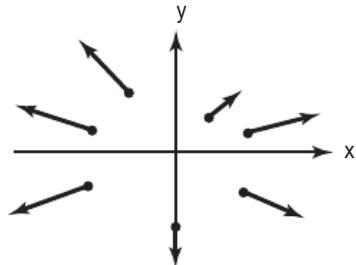
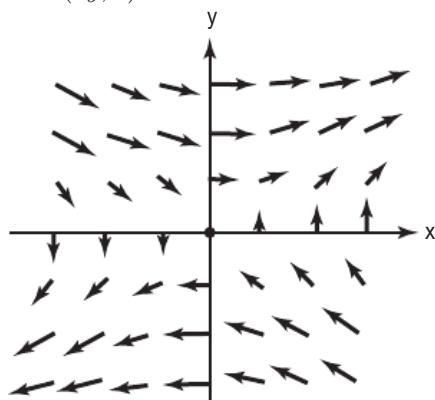
25. Seguir la sugerencia del texto.

Sección 4.3

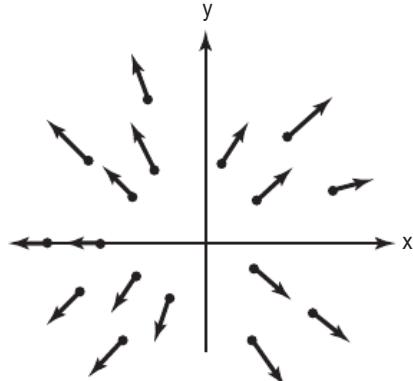
1.



3.

5. $\mathbf{F} = (2y, x)$:

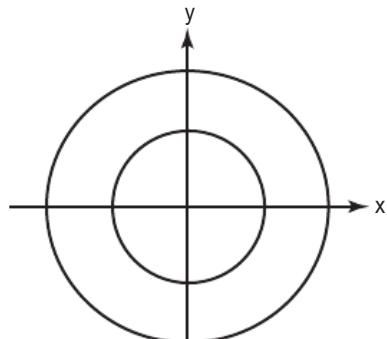
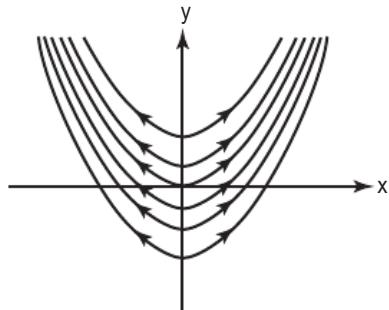
7.



9. (a) Corresponde a (II).

(b) Corresponde a (I).

11. Las líneas de flujo son circunferencias concéntricas:

13. Las líneas de flujo para $t > 0$:15. $\mathbf{c}'(t) = (2e^{2t}, 1/t, -1/t^2) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$.17. $\mathbf{c}'(t) = (\cos t, -\sin t, e^t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$.19. $(\mathbf{F} \circ \mathbf{c})(t) = \left(\frac{1}{(1-t)^2}, 0, \frac{e^t}{1-t} + \frac{e^t}{(1-t)^2} \right) = \mathbf{c}'(t)$.21. (a) $f(x, y, z) = xyz$.(b) $f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$.23. Comparar $\frac{1}{2}mv^2$ para la velocidad de escape $v_e = \sqrt{2gR_0}$ y la velocidad en una órbita de radio R_0 dada en la Sección 4.1. (Ignorar la rotación de la Tierra).25. Utilizar el hecho de que $-\nabla T$ es perpendicular a la superficie $T = \text{constante}$.27. $x'(t) = x(t)e^{y(t)}$, $y'(t) = (y(t))^2(z(t))^2$, $z'(t) = x(t)y(t)z(t)$.

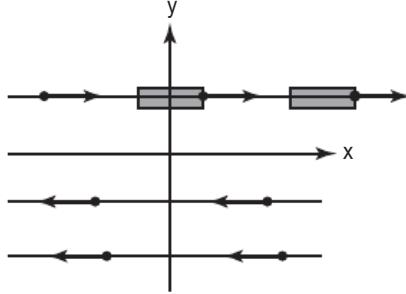
Sección 4.4

1. $ye^{xy} - xe^{xy} + ye^{yz}$.

3. 3.

5. $\operatorname{div} \mathbf{V} > 0$ en el primer y el tercer cuadrantes,
 $\operatorname{div} \mathbf{V} < 0$ en el segundo y cuarto cuadrantes.

7. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$; si \mathbf{F} representa un fluido, no se produce ni expansión ni compresión; el área de un rectángulo pequeño sigue siendo la misma.



9. $3x^2 - x^2 \cos(xy)$.

11. $y \cos(xy) + x^2 \sin(x^2y)$.

13. 0.

15. $(10y - 8z)\mathbf{i} + (6z - 10x)\mathbf{j} + (8x - 6y)\mathbf{k}$.

17. $-\sin x$.

19. x .

21. (a) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla \cdot (0, -z, 2xy) = 0$.

(b) No, puesto que $\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$.

23. (a) $ze^{xz} + x \cos(xy) + 2x^5y^3z$.

(b) $(3x^5y^2z^2, xe^{xz} - 5x^4y^3z^2, y \cos(xy))$.

- 25.** (a) No tiene sentido. (b) No tiene sentido.
(c) No tiene sentido. (d) Campo vectorial.
(e) No tiene sentido. (d) Función escalar.

27. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0$ dado que f, g y h no dependen de x, y y z , respectivamente.

29. $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$.

31. $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$.

33. $\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$.

35. Sea $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, calcular ambos lados de la identidad.

37. (a) $2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$.

(b) $(3y^2xz, 4xz - y^3z, 0)$.

(c) $(-y^3zx^3, 2x^2y^4z, 2x^3z^2 - 2xy)$.

(d) $4x^2yz^2 + x^2$.

39. No.

41. Separar cada expresión en sus partes real e imaginaria y después tratar la cantidad resultante como un campo vectorial en \mathbb{R}^2 . Calcular directamente su rotacional y divergencia. En (a), $\mathbf{F} = (x^2 - y^2)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}$; en (b), $\mathbf{F} = (x^3 - 3xy^2)\mathbf{i} + (y^3 - 3x^2y)\mathbf{j}$; y en (c), $\mathbf{F} = (e^x \cos y)\mathbf{i} - (e^x \sin y)\mathbf{j}$. Demostrar que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ en cada caso.

Ejercicios de repaso del Capítulo 4

1. $\mathbf{v}(1) = (3, -e^{-1}, -\pi/2)$; $\mathbf{a}(1) = (6, e^{-1}, 0)$;

$$s(1) = \sqrt{9 + e^{-2} + \frac{\pi^2}{4}}; \mathbf{l}(t) \\ = (2, e^{-1}, 0) + (t-1)(3, -e^{-1}, -\pi/2).$$

3. $\mathbf{v}(0) = (1, 1, 0)$; $\mathbf{a}(0) = (1, 0, -1)$;

$$s = \sqrt{2}; \mathbf{l}(t) = (1, 0, 1) + t(1, 1, 0).$$

5. Vector tangente: $\mathbf{v} = -(1/\sqrt{2})\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Vector aceleración: $\mathbf{a} = -(1/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

7. $m(2, 0, -1)$.

9. (a) $\mathbf{v} = (-\sin t, \cos t, \sqrt{3})$,
 $\mathbf{a} = (-\cos t, -\sin t, 0)$.

(b) $\mathbf{l}(t) = (1, 0, 0) + t(0, 1, \sqrt{3})$. (c) 4π .

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} = & \left(\frac{4Ayz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{4Ayz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \right. \\ & \frac{4Axz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{4Axz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ & \left. \frac{4Axy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{4Axy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

13. $\int_1^4 \sqrt{1 + \frac{4}{9}t^{-2/3} + \frac{4}{25}t^{-6/5}} dt$.

15. (a) $\mathbf{v} = (-2t \sin(t^2), 2t \cos(t^2), 0)$; $s = 2t$.

(b) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

(c) $\sqrt{5\pi/3}$.

(d) $\mathbf{v} = 2\sqrt{5\pi/3}(\sqrt{3}/2, 1/2, 0); s = 2\sqrt{5\pi/3}$.

(e) $\left(\frac{3}{2} + \frac{5\pi}{\sqrt{3}}\right) / \sqrt{5\pi}$.

17. $x = 1 + t, y = -\frac{1}{2} + \frac{t}{2}, z = -\frac{2}{3} + \frac{t}{3}$.

19. Calcular $\mathbf{c}'(t)$ y comprobar que es igual a $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$.

21. 9; 0.

23. 3; $-\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

25. 0; $-\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

27. $\nabla f = (ye^{xy} - y \operatorname{sen} xy, xe^{xy} - x \operatorname{sen} xy, 0)$; verificar que $\nabla \times \nabla f = 0$ en este caso.

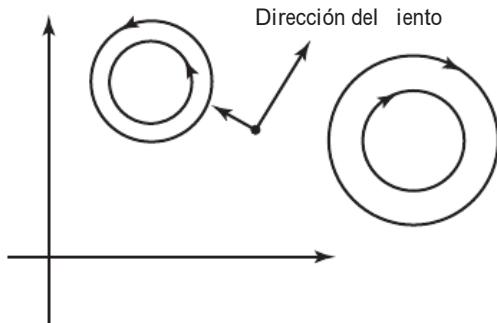
29. $\nabla f = (2xe^{x^2} + y^2 \operatorname{sen} xy^2, 2xy \operatorname{sen} xy^2, 0)$; comprobar que $\nabla \times \nabla f = 0$ a partir de esto.

31. (a) $(yz^2, xz^2, 2xyz)$;
 (b) $(z - y, 0, -x)$;
 (c) $(2xyz^3 - 3xy^2z^2, 2x^2y^2z - y^2z^3, y^2z^3 - 2x^2yz^2)$.

33. $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$; $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (0, 0, 2(x^2 + y^2)f'(x^2 + y^2) + 2f(x^2 + y^2))$.

35. (a) Un cono alrededor de \mathbf{i}' formando un ángulo de $\pi/3$ con \mathbf{i}' .
 (b) $\nabla g = (3x^2, 5z, 5y + 2z)$.

37. (a) $[\partial P/\partial x]^2 + [\partial P/\partial y]^2]^{1/2}$.
 (b) Un pequeño paquete de aire obedecerá a $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.
 (c) Véase la figura de la izquierda en la parte inferior de la página.



(d) Véase la figura de la derecha en la parte inferior de la página.

39. (a) $\frac{\sqrt{R^2 + \rho^2}}{\rho}(z_0 - z_1)$.

(b) $\sqrt{\frac{2(R^2 + \rho^2)z_0}{g\rho^2}}$.

41. 680 millas por hora.

Capítulo 5

Sección 5.1

1. (a) 1.

(b) 2.

(c) $\frac{15}{2} \log 2$.

(d) $\frac{1}{2} \log 2 = \log \sqrt{2}$.

3. (a) $\frac{13}{15}$. (b) $\pi + \frac{1}{2}$.

(c) 1. (d) $\log 2 - \frac{1}{2}$.

5. Para demostrar que los volúmenes de los dos cilindros son iguales, hay que probar que sus funciones de área son iguales.

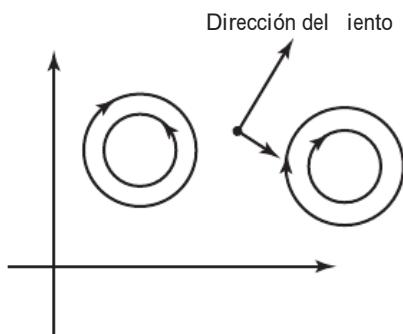
7. $2r^3 (\tan \theta)/3$.

9. $\frac{26}{9}$.

11. $(2/\pi)(e^2 + 1)$.

13. $\frac{35795}{8}$.

15. $\frac{196}{15}$.



Sección 5.2

1. (a) $\frac{7}{12}$. (b) $e - 2$.
 (c) $\frac{1}{9} \sin 1$. (d) $2 \ln 4 - 2$.
3. 0.
- 5.



7. $1/4$.
9. Utilizar el teorema de Fubini para escribir

$$\iint_R [f(x)g(y)] dx dy = \int_c^d g(y) \left[\int_a^b f(x) dx \right] dy,$$

y observar que $\int_a^b f(x) dx$ es una constante, por lo que se puede sacar de la integral.

11. $11/6$.
13. Por el Ejercicio 2(a), tenemos:

$$f(m, n) = \iint_R x^m y^n dx dy = \left(\frac{1}{m+1} \right) \left(\frac{1}{n+1} \right).$$

Entonces, cuando $m, n \rightarrow \infty$, vemos que $\lim f(m, n) = 0$.

15. Dado que $\int_0^1 dy = \int_0^1 2y dy = 1$, tenemos que $\int_0^1 [\int_0^1 f(x, y) dy] dx = 1$. En cualquier partición de $R = [0, 1] \times [0, 1]$, cada rectángulo R_{jk} contiene puntos $\mathbf{c}_{jk}^{(1)}$ con x racional y $\mathbf{c}_{jk}^{(2)}$ con x irracional. Si en la partición regular de orden n , seleccionamos $\mathbf{c}_{jk} = \mathbf{c}_{jk}^{(1)}$ en aquellos rectángulos

los con $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ y $\mathbf{c}_{jk} = \mathbf{c}_{jk}^{(2)}$ cuando $y > \frac{1}{2}$, las sumas de aproximación son las mismas que para

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 2y & \frac{1}{2} < y < 1. \end{cases}$$

Puesto que g es integrable, las sumas de aproximación tienen que converger a $\int_R g dA = 7/8$. Sin embargo, si hemos elegido todos los $\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{c}_{ij}^{(1)}$, todas las sumas de aproximación tendrán el valor 1.

17. El teorema de Fubini no se aplica porque el integrando no es continuo ni está acotado en $(0, 0)$.

Sección 5.3

1. (a) (III) (b) (IV)
 (c) (II) (d) (I)
3. (a) $1/3$, ambos. (b) $5/2$, ambos.
 (c) $(e^2 - 1)/4$, ambos. (d) $1/35$, ambos.
5. $A = \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = r^2[\arcsen 1 - \arcsen(-1)] = \pi r^2$.
7. 756 m^3 .
9. 0.
11. y -simple; $\pi/2$.
13. $\frac{2}{3}$.
15. 50π .
17. $\pi/24$.
19. Calcular la integral primero con respecto a y . Dividir esta integral en dos integrales sobre $[-\phi(x), 0]$ y $[0, \phi(x)]$ y hacer un cambio de variables en la primera, o utilizar simetría.
21. Sea $\{R_{ij}\}$ una partición de un rectángulo R que contiene D y sea f igual a 1 en D . Luego, f^* es 1 en D y 0 en $R \setminus D$. Sea $\mathbf{c}_{jk} \in R \setminus D$ si R_{ij} no está completamente contenido en D . La suma de aproximación de Riemann es la suma de las áreas de aquellos rectángulos de la partición que están contenidos en D .

Sección 5.4

1. (a) $\int_0^4 \int_0^{2x} dy dx.$

(b) $\int_0^3 \int_{y^2}^9 dy dx.$

(c) $\int_{-4}^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} dy dx.$

(d) $\int_0^1 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y} dx dy.$

3. (a) $1/8.$ (b) $\pi/4.$ (c) $17/12.$

(d) $G(b) - G(a)$, donde $dG/dy = F(y, y) - F(a, y)$ y $\partial F/\partial x = f(x, y).$

5. $\frac{1}{3}(e-1).$

7. Observar que el valor máximo de f en D es e y el valor mínimo de f en D es $1/e$. Utilizar las ideas de la demostración del Teorema 4 para demostrar que

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \iint_D f(x, y) dA \leq e.$$

9. El menor valor de $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2 + 1)$ en D es $\frac{1}{6}$, en $(1, 2)$, y por tanto

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq \frac{1}{6} \cdot \text{área } D = 1.$$

El mayor valor es 1 en $(0, 0)$, y por tanto

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq 1 \cdot \text{área } D = 6.$$

11. $\frac{4}{3}\pi abc.$

13. $\pi(20\sqrt{10} - 52)/3.$

15. $\sqrt{3}/4.$

17. D se parece a un trozo de tarta.

$$\int_0^1 \left[\int_0^x f(x, y) dy \right] dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy \right] dx.$$

19. Utilizar la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo.

Sección 5.5

1. (a) (II). (b) (I). (c) (III). (d) (IV).

3. $1/3.$

5. 10.

7. $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2},$
 $-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, -1 \leq y \leq 1.$

9. $0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2},$
 $-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, -1 \leq y \leq 1.$

11. $50\pi/\sqrt{6}.$

13. $1/2.$

15. 0.

17. $a^5/20.$

19. 0.

21. $3/10.$

23. $1/6.$

25. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz dy dx.$

27. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz dy dx.$

29. $\iint_D \int_0^{f(x,y)} dz dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$

31. Sean M_ϵ y m_ϵ el máximo y el mínimo de f en B_ϵ . Tenemos entonces la desigualdad $m_\epsilon \text{ vol}(B_\epsilon) \leq \iiint_{B_\epsilon} f dV \leq M_\epsilon \text{ vol}(B_\epsilon)$. Dividir entre $\text{vol}(B_\epsilon)$, hacer $\epsilon \rightarrow 0$ y utilizar la continuidad de f .

Ejercicios de repaso del Capítulo 5

1. $81/2.$

3. $\frac{1}{4}e^2 - e + \frac{9}{4}.$

5. $81/2.$

7. $\frac{1}{4}e^2 - e + \frac{9}{4}.$

9. $7/60.$

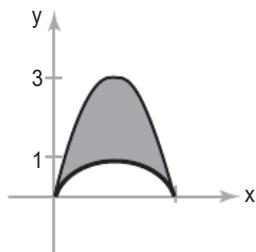
11. $1/2.$

- 13.** Usando la notación de la Figura 5.3.1,

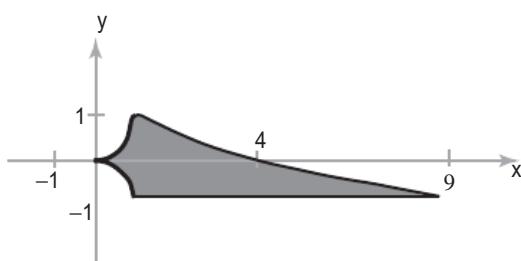
$$\iint_D dx dy = \int_a^b [\phi_2(x) - \phi_1(x)] dx.$$

- 15.** (a) 0. (b) $\pi/24$. (c) 0.

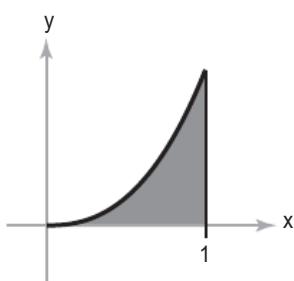
- 17.** y -simple; $2\pi + \pi^2$.



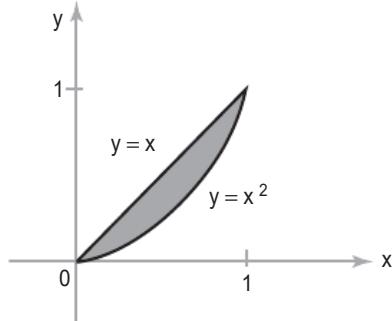
- 19.** x -simple; $73/3$.



- 21.** y -simple; $33/140$.



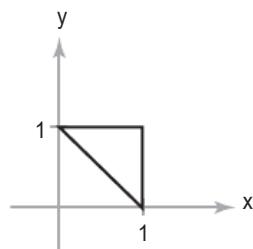
- 23.** y -simple; $71/420$.



- 25.** $1/3$.

- 27.** $19/3$.

- 29.** $7/12$.



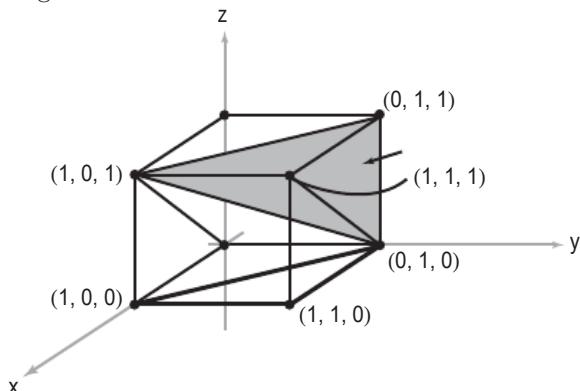
- 31.** La función $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ está entre 1 y $2^2 + 1 = 5$ en D , y por tanto la integral está entre estos valores multiplicados por 4π , el área de D .

- 33.** Intercambiar el orden de integración (el lector debe realizar un dibujo en el plano (u, t)):

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^t F(u) du dt &= \int_0^x \int_u^x F(u) dt du \\ &= \int_0^x (x-u)F(u) du. \end{aligned}$$

- 35.** $\pi/12$.

- 37.** La región es la zona sombreada W de la figura siguiente.



Por ejemplo, la integral en el orden $dy dx dz$ es

$$\int_0^1 \int_z^1 \int_{1-x}^1 f(x, y, z) dy dx dz.$$

Capítulo 6

Sección 6.1

- 1.** (a) Inyectiva, sobreyectiva.
 (b) Ninguna de las dos.
 (c) Inyectiva, sobreyectiva.
 (d) Ninguna de las dos.

- 3.** Una función lineal apropiada T está dada por $T(x, y) = \left(x, -\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} \right)$, o en forma matricial, como:

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \mathbf{v}.$$

- 5.** $S =$ el disco unidad menos su centro.
- 7.** $D = [0, 3] \times [0, 1]$; sí.
- 9.** La imagen es el triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$. T no es inyectiva, pero lo es si eliminamos la porción $x^* = 0$.
- 11.** D es el conjunto de los (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ (la bola unidad). T no es inyectiva, pero sí lo es en $(0, 1] \times (0, \pi) \times (0, 2\pi]$.
- 13.** Demostrar que T es sobreyectiva es equivalente en el caso 2×2 a demostrar que el sistema $ax + by = e$, $cx + dy = f$ siempre se puede resolver para x e y , donde

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Si se hace esto por eliminación o por la regla de Cramer, la cantidad por la que debemos dividir es $\det A$. Por tanto, si $\det A \neq 0$, las ecuaciones siempre se pueden resolver.

- 15.** Supongamos que $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y})$. Entonces

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} + \mathbf{v} &= A\mathbf{y} + \mathbf{v} \\ A\mathbf{x} &= A\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Por el Ejercicio 12, esto implica que $x = y$ si y solo si $\det A \neq 0$.

Demostrar que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ es equivalente a demostrar que

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{y}$$

o

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{v}$$

tiene una solución para cualquier elección de $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Por el Ejercicio 13, esto ocurre si y solo si $\det A \neq 0$. Por último, exactamente como en el Ejercicio 14, verificar que T aplica paralelogramos a paralelogramos, simplemente aplicando T a ambos lados de la ecuación dada y simplificando.

- 17.** El determinante jacobiano de T es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} 2r \cos 2\theta & -2r^2 \sin 2\theta \\ 2r \sin 2\theta & -2r^2 \cos 2\theta \end{vmatrix} = 4r^3$$

que solamente se anula para $r = 0$. Para ver que T no es inyectiva es suficiente encontrar dos puntos que tengan la misma imagen, por ejemplo, $(-\frac{1}{2}, 0)$ y $(\frac{1}{2}, 0)$.

Sección 6.2

- 1.** Una buena sustitución sería $u = 3x + 2y$, $v = x - y$, cuyo jacobiano es $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{5}$.

- 3.** $\pi(e - 1)$.

- 5.** D es la región $0 \leq x \leq 4$, $\frac{1}{2}x + 3 \leq y \leq \frac{1}{2}x + 6$.
(a) 140 (b) -42

- 7.** D^* es la región $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2$;
 $\frac{2}{3}(9 - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$.

- 9.** Como

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 4u^2 + 4v^2$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \iint_{D^*} \frac{4u^2 + 4v^2}{\sqrt{(u^2 + v^2)^2}} dudv \\ &= \iint_{D^*} 4dudv. \end{aligned}$$

- 11.** $\frac{64\pi}{5}$.

- 13.** $3\pi/2$.

- 15.** $\frac{5\pi}{2}(e^4 - 1)$.

- 17.** $2a^2$.

- 19.** $\frac{21}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right)$.

- 21.** $\frac{100\pi}{3}$.

- 23.** $4\pi[\sqrt{3}/2 - \log(1 + \sqrt{3}) + \log\sqrt{2}]$.

- 25.** $4\pi \log(a/b)$.

- 27.** 0.

- 29.** $2\pi[(b^2 + 1)e^{-b^2} - (a^2 + 1)e^{-a^2}]$.

- 31.** 24.

33. (a) $\frac{4}{3}\pi abc$. (b) $\frac{4}{5}\pi abc$.

35. (a) Comprobar que si $T(u_1, v_1) = T(u_2, v_2)$, entonces $u_1 = u_2$ y $v_1 = v_2$.

(b) $160/3$.

37. $\frac{4}{9}a^{2/3} \iint_{D^*} [f((au^2)^{1/3}, (av^2)^{1/3})u^{-1/3}v^{-1/3}] du dv$.

Sección 6.3

1. $\left(1, \frac{1}{3}a\right)$.

3. $[\pi^2 - \operatorname{sen}(\pi^2)]/\pi^3$.

5. $\left(\frac{11}{18}, \frac{65}{126}\right)$.

7. \$503,64.

9. (a) δ , donde δ es la densidad de masa (constante). (b) $37/12$.

11. $500\pi \left(10 - \frac{1}{3}\right)$.

13. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

15. $1/4$.

17. Siendo δ la densidad, el momento de inercia es

$$\delta \int_0^k \int_0^{2\pi} \int_0^{a \sec \phi} (\rho^4 \operatorname{sen}^3 \phi) d\rho d\theta d\phi.$$

19. $(1,00 \times 10^8)\text{m}$.

21. (a) El único plano de simetría de la carrocería de un automóvil es el que divide los lados izquierdo y derecho del coche.

(b) $\bar{z} \cdot \iiint_W \delta(x, y, z) dx dy dz$ es la coordenada z del centro de masa multiplicada por la masa de W . Una reordenación de la fórmula para \bar{z} proporciona la primera línea de la ecuación. El siguiente paso se justifica por la propiedad de la aditividad de las integrales. Por simetría, podemos sustituir z por $-z$ e integrar en la región por encima del plano xy . Finalmente, podemos sacar el

signo menos fuera de la segunda integral, y puesto que $\delta(x, y, z) = \delta(u, v, -w)$, estamos restando la segunda integral de sí misma. Por tanto, la respuesta es 0.

- (c) En el apartado (b), hemos demostrado que \bar{z} multiplicado por la masa de W es 0. Puesto que la masa tiene que ser positiva, \bar{z} tiene que ser 0.
- (d) Por el apartado (c), el centro de masas debe estar en ambos planos.

23. $V = -(4,71 \times 10^{19})Gm/R \approx -(3,04 \times 10^9)m/R$, donde m es la masa de una partícula a la distancia R del centro del planeta.

25. En el plano x, y , el círculo D dado por $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ con centro (y centro de masas) en $(a, 0)$. Además, el área del círculo es $A(D) = \pi r^2$. Por tanto, por el Ejercicio 24, tenemos:

$$\operatorname{Vol}(W) = 2\pi(a)(\pi r^2).$$

Sección 6.4

1. 4.

3. 3/16.

5. $\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)}$.

7. (a) 3π . (b) $\lambda < 1$.

9. La integración de $\iint e^{-xy} dx dy$ con respecto a x primero y después con respecto a y da $\log 2$. Invirtiendo el orden se obtiene la integral del lado izquierdo de la igualdad dada en el ejercicio.

11. Integrar sobre $[\varepsilon, 1] \times [\varepsilon, 1]$ y hacer $\varepsilon \rightarrow 0$ para demostrar que la integral impropia existe y es igual a $2 \log 2$.

13. $\frac{2\pi}{9}[(1+a^3)^{3/2} - a^{9/2} - 1]$.

15. Utilizar el hecho de que

$$\frac{\operatorname{sen}^2(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

17. Utilizar el hecho de que $e^{x^2+y^2}/(x-y) \geq 1/(x-y)$ en la región dada.

19. Cada una de las integrales es igual a $1/4$ y se puede aplicar el Teorema 3 (teorema de Fubini).

- 21.** Aquí, hacemos $D_1 = [0, 1] \times [0, 1]$ y $D_2 = [1, \infty] \times [1, \infty]$, como indica la sugerencia. En D_1 , sean $g(x, y) = \frac{1}{x^\alpha y^\beta}$ y $f(x, y) = \frac{1}{x^\alpha y^\beta + x^\gamma y^\rho}$. Puesto que $x, y \geq 0$, está claro que $0 \leq f(x, y) \leq g(x, y)$ para todos los puntos de D_1 . Por tanto, ya que $\iint_{D_1} g(x, y) dx dy$ existe por el Ejercicio 5, sabemos que $\iint_{D_1} f(x, y) dx dy$ también tiene que existir.

Se puede usar un argumento similar para la región D_2 eligiendo una $g(x, y)$ diferente y aplicando el resultado del Ejercicio 6. Si $\iint f(x, y) dx dy$ existe en las regiones D_1 y D_2 , también existirá en su unión, $D = D_1 \cup D_2$.

Ejercicios de repaso del Capítulo 6

- 1.** (a) $T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u+v \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
(b) $\iint_P f(x, y) dx dy = 4 \iint_S f(2u + v, 2v) du dv$.
- 3.** 3 (Utilizar el cambio de variables $u = x^2 - y^2, v = xy$).
- 5.** $\frac{1}{3}\pi(4\sqrt{2} - \frac{7}{2})$.
- 7.** $(5\pi/2)\sqrt{15}$.
- 9.** $abc/6$.
- 11.** Cortar con los planos $x + y + z = \sqrt[3]{k/n}, 1 \leq k \leq n - 1, k$ entero.
- 13.** $(25 + 10\sqrt{5})\pi/3$.
- 15.** $(e - e^{-1})/4$ (Utilizar el cambio de variables $u = y - x, v = y + x$).
- 17.** $(9,92 \times 10^6)\pi$ gramos.
- 19.** (a) 32.
(b) Esto ocurre en el punto de la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ inscrita en el cubo.
- 21.** $(0, 0, 3a^{4/8})$.
- 23.** $4\pi \ln(a/b)$.
- 25.** $\pi/2$.
- 27.** (a) 9/2. (b) 64π .
- 29.** Calcular la integral con respecto a y primero en la región $D_{\varepsilon, L} = \{(x, y) | \varepsilon \leq x \leq L, 0 \leq y \leq x\}$ para obtener $I_{\varepsilon, L} = \iint_{D_{\varepsilon, L}} f dx dy = \int_{\varepsilon}^L x^{-3/2} (1 - e^{-x}) dx$. El integrando es positivo y por tanto $I_{\varepsilon, L}$ crece cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y $L \rightarrow \infty$. Acotar $1 - e^{-x}$ por arriba por x cuando $0 < x < 1$ y por 1 cuando $1 < x < \infty$ para ver que $I_{\varepsilon, L}$ permanece acotada y por tanto debe converger. La integral impropia existe.
- 31.** (a) 1/6. (b) $16\pi/3$.
- 33.** 2π .

Capítulo 7

Sección 7.1

- 1.** $\gamma(t) = \begin{cases} (3 \cos \pi t, 3 \sin \pi t), & t \in [0, 1] \\ (6t - 9, 0), & t \in [1, 2] \end{cases}$
- 3.** $\gamma(t) = \begin{cases} (t, \sin \pi t), & t \in [0, 1] \\ (2\pi - \pi t, 0), & t \in [1, 2] \end{cases}$
- 5.** $\gamma(t) = (3 \cos 2\pi t, 4 \sin 2\pi t, 3), \quad t \in [0, 1]$.
- 7.** $\gamma(t) = (t, t, t^3), \quad t \in [-3, 2]$, o
 $\gamma(t) = (5t - 3, 5t - 3, (5t - 3)^3), \quad t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \mathbf{9.} \quad \int_{\mathbf{c}} f(x, y, z) ds &= \int_I f(x(t), y(t), z(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 0 \cdot 1 dt = 0. \end{aligned}$$

- 11.** (a) 2. (b) $52\sqrt{14}$.

$$\mathbf{13.} \quad -\frac{1}{3}(1 + 1/e^2)^{3/2} + \frac{1}{3}(2^{3/2}).$$

- 15.** (a) La trayectoria sigue la recta que va de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ y vuelve a $(0, 0)$ en el plano xy . Sobre la trayectoria, la gráfica de f es una recta que va de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$. La integral es dos veces el área del triángulo resultante y es igual a $\sqrt{2}$.

(b)

$$s(t) = \begin{cases} \sqrt{2}(1 - t^4) & \text{cuando } -1 \leq t \leq 0 \\ \sqrt{2}(1 + t^4) & \text{cuando } 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

La trayectoria es

$$\mathbf{c}(s) = \begin{cases} (1 - s/\sqrt{2})(1, 1) & \text{cuando } 0 \leq s \leq \sqrt{2} \\ (s/(\sqrt{2} - 1))(1, 1) & \text{cuando } \sqrt{2} \leq s \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$$

y $\int_{\mathbf{c}} f \, ds = \sqrt{2}$.

17. $2a/\pi$.

- 19.** (a) $[2\sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5})]/4$.
 (b) $(5\sqrt{5} - 1)/[6\sqrt{5} + 3\log(2 + \sqrt{5})]$.

- 21.** Puesto que la gráfica g está parametrizada por $\gamma(t) = (t, g(t))$, tenemos $\gamma'(t) = (1, g'(t))$, y por tanto: $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + (g'(t))^2}$.

23. 2.

25. $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

27. $\frac{\sqrt{2}}{3}t_0^3$.

29. (a) $\sqrt{\frac{2}{g}}$.

(b) Resolviendo para y , tenemos:

$$y = -\sqrt{2x - x^2} + 1.$$

(Obsérvese que la raíz cuadrada negativa se ha elegido para y). Por tanto, nuestra fórmula se convierte en:

$$\int_0^1 \frac{1}{-2g(\sqrt{2x - x^2} + 1)} \, dx.$$

Sección 7.2

1. -1 .

3. (a) $3/2$. (b) 0 . (c) 0 . (d) 147 .

5. 9.

- 7.** Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)| \leq \|\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\| \|\mathbf{c}'(t)\|$ para todo t . Por tanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right| &= \left| \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) \, dt \right| \\ &\leq \int_a^b |\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)| \, dt \\ &\leq \int_a^b \|\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\| \|\mathbf{c}'(t)\| \, dt \\ &\leq M \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\| \, dt = Ml. \end{aligned}$$

9. $\frac{3}{4} - (n-1)/(n+1)$.

11. 0.

13. La longitud de \mathbf{c} .

- 15.** Si $\mathbf{c}'(t)$ nunca es 0, entonces el vector unitario $\mathbf{T}(t) = \mathbf{c}'(t)/\|\mathbf{c}'(t)\|$ es una función continua de t y por lo tanto es una tangente que se mueve suavemente pro la curva. La respuesta es no.

17. 7.

- 19.** Usar el hecho de que \mathbf{F} es un gradiente para demostrar que el trabajo realizado es $\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}$, independientemente de la trayectoria.

21. (a) $\|\mathbf{c}'(x)\|$.

- (b) f tiene derivada positiva; es inyectiva y sobreyectiva sobre $[0, L]$ por los teoremas del valor medio y del valor intermedio. Tiene una inversa diferenciable por el teorema de la función inversa.
 (c) $g'(s) = 1/\|\mathbf{c}'(x)\|$, donde $s = f(x)$.
 (d) Por la regla de la cadena, $\mathbf{b}'(s) = \mathbf{c}'(x) \cdot g'(s)$, que tiene longitud unidad por el apartado (c).

Sección 7.3

1. $z = 2(y-1) + 1$.

3. $18(z-1) - 4(y+2) - (x-13) = 0$
 $o \quad 18z - 4y - x - 13 = 0$.

5. No es regular cuando $u = 0$.

7. (a) (III) (b) (I) (c) (II) (d) (IV).

- 9.** El vector $\mathbf{n} = (\cos v \sin u, \sin v \sin u, \cos u) = (x, y, z)$. La superficie es la esfera unidad centrada en el origen.

- 11.** $\mathbf{n} = -(\sin v)\mathbf{i} - (\cos v)\mathbf{k}$; la superficie es un cilindro.

- 13.** (a) $x = x_0 + (y - y_0)(\partial h/\partial y)(y_0, z_0) + (z - z_0)(\partial h/\partial z)(y_0, z_0)$ describe el plano tangente a $x = h(y, z)$ en (x_0, y_0, z_0) , $x_0 = h(y_0, z_0)$.
 (b) $y = y_0 + (x - x_0)(\partial k/\partial x)(x_0, z_0) + (z - z_0)(\partial k/\partial z)(x_0, z_0)$.

15. $z - 6x - 8y + 3 = 0$.

- 17.** (a) La superficie es un helicoide. Es similar a una rampa espiral arrollada alrededor del

eje z . Véase la Figura 7.4.2. Da dos vueltas, ya que θ va hasta 4π .

- (b) $\mathbf{n} = \pm(1/\sqrt{1+r^2})(\sin \theta, -\cos \theta, r)$.
- (c) $y_0x - x_0y + (x_0^2 + y_0^2)z = (x_0^2 + y_0^2)z_0$.
- (d) Si $(x_0, y_0, z_0) = (r_0, \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0, \theta_0)$, representando el segmento de recta de la forma $\{(r \cos \theta_0, r \sin \theta_0, \theta_0) | 0 \leq r \leq 1\}$ se demuestra que la recta está en la superficie. Representando la recta como $\{(x_0, ty_0, z_0) | 0 \leq t \leq 1/(x_0^2 + y_0^2)\}$ y sustituyendo en los resultados del apartado (c) se demuestra que está en el plano tangente a (x_0, y_0, z_0) .

- 19.** (a) El uso de coordenadas cilíndricas nos lleva a la parametrización

$$\Phi(z, \theta) = (\sqrt{25+z^2} \cos \theta, \sqrt{25+z^2} \sin \theta, z), \\ -\infty < z < \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

como una posible solución.

- (b) $\mathbf{n} = (\sqrt{25+z^2} \cos \theta, \sqrt{25+z^2} \sin \theta, -z)/\sqrt{25+2z^2}$.
- (c) $x_0x + y_0y = 25$.
- (d) Sustituir las coordenadas de las rectas en la ecuación que define la superficie y en el resultado del apartado (c).

- 21.** (a) $u \mapsto u, v \mapsto v, u \mapsto u^3$ y $v \mapsto v^3$ aplican \mathbb{R} en \mathbb{R} .

- (b) $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = (0, 0, 1)$ para Φ_1 , que nunca es $\mathbf{0}$. Para la superficie Φ_2 , $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = 9u^2v^2(0, 0, 1)$, y esto es $\mathbf{0}$ a lo largo de los ejes u y v .
- (c) Queremos demostrar que cualesquiera dos parametrizaciones suaves de una superficie cerca de un punto darán el mismo plano tangente. Por tanto, supongamos que $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\Psi: B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ son superficies parametrizadas tales que

$$\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0) = \Psi(s_0, t_0) \quad (I)$$

y

$$(\mathbf{T}_u^\Phi \times \mathbf{T}_v^\Phi)|_{(u_0, v_0)} \neq \mathbf{0}$$

$$\text{y } (\mathbf{T}_s^\Psi \times \mathbf{T}_t^\Psi)|_{(s_0, t_0)} \neq \mathbf{0}, \quad (II)$$

de modo que Φ y Ψ son suaves e inyectivas en las proximidades de (u_0, v_0) y (s_0, t_0) , que podemos suponer que están en D y B . Suponemos además que “describen la misma superficie”, es decir, $\Phi(D) = \Psi(B)$. Pa-

ra comprobar que dan el mismo plano tangente en (x_0, y_0, z_0) , demostramos que tienen vectores normales paralelos. Para ello, demostramos que existe un conjunto abierto C con $(u_0, v_0) \in C \subset D$ y una aplicación diferenciable $f: C \rightarrow B$ tal que $\Phi(u, v) = \Psi(f(u, v))$ para $(u, v) \in C$. Una vez hecho esto, un cálculo demuestra que los vectores normales están relacionados por $\mathbf{T}_u^\Phi \times \mathbf{T}_v^\Phi = [\partial(s, t)/\partial(u, v)]\mathbf{T}_s^\Psi \times \mathbf{T}_t^\Psi$.

Para demostrar que existe tal f , obsérvese que puesto que $\mathbf{T}_s^\Psi \times \mathbf{T}_t^\Psi \neq \mathbf{0}$, al menos uno de los determinantes 2×2 del producto vectorial no es cero. Suponemos, por ejemplo, que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ahora utilizamos el teorema de la función inversa para expresar (s, t) como una función diferenciable de (x, y) en algún entorno de (x_0, y_0) .

- (d) No.

- 23.** (a) Introducimos la parametrización en el lado izquierdo de la ecuación y simplificamos:

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2}{((R + r \cos u) \cos v)^2 + ((R + r \cos u) \sin v)^2} \\ &= \frac{-R^2 + (r \sin u)^2}{(R + r \cos u)^2 - R^2 + r^2 \sin^2 u} \\ &= \frac{(R + r \cos u - R)^2 + r^2 \sin^2 u}{(r \cos u)^2 + r^2 \sin^2 u} \\ &= (r \cos u)^2 + r^2 \sin^2 u = r^2. \end{aligned}$$

- (b) Calculamos el elemento normal asociado

$$\begin{aligned} T_u \times T_v &= (-r \cos u \cos v(R + r \cos u), \\ &\quad -r \cos u \sin v(R + r \cos u), \\ &\quad -r \sin u(R + r \cos u)) \end{aligned}$$

y determinamos que es distinto del vector cero para cualquier elección de (u, v) .

Sección 7.4

1. 4π .
3. $\frac{3}{2}\pi[\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})]$.
5. (a) $(e^u \sin v, -e^u \cos v, e^{2u})$.
(b) $x + z = \frac{\pi}{2}$.

(c) $\frac{\pi}{2} \left[e\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} \right] + \frac{\pi}{2} \log \left[\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}} \right].$

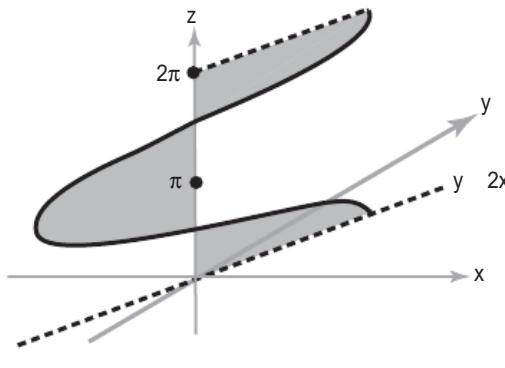
7. $\frac{\sqrt{21}}{2}.$

13. $A(E) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{a^2 b^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi + b^2 c^2 \sin^4 \phi \cos^2 \theta + a^2 c^2 \sin^4 \phi \sin^2 \theta} d\phi d\theta.$

15. $(\pi/6)(5\sqrt{5} - 1).$

17. $(\pi/2)\sqrt{6}.$

19. $4\sqrt{5}$; para θ fijo, (x, y, z) se mueve a lo largo del segmento de recta horizontal $y = 2x, z = \theta$ desde el eje z hasta un radio de $\sqrt{5}|\cos \theta|$ pasando por el primer cuadrante si $\cos \theta > 0$ y por el tercer cuadrante si $\cos \theta < 0$.



21. $(\pi + 2)/(\pi - 2).$

23. $\pi(a+b)\sqrt{1+m^2}(b-a).$

25. $\frac{4}{15}(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1).$

27. Con $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, (4) se convierte en

$$\begin{aligned} A(S') &= \iint_D \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2} + 1} dx dy \\ &= \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy, \end{aligned}$$

donde D es el disco de radio R . Utilizar coordenadas polares, observando que la integral es impropia en la frontera, para obtener $2\pi R^2$.

Sección 7.5

1. $\frac{512}{3}\sqrt{5}.$

9. $\frac{1}{3}\pi(6\sqrt{6} - 8).$

11. La integral para el volumen converge, mientras que para el área diverge.

3. $11\sqrt{14}.$

5. (a) Para esta superficie parametrizada por Φ , tenemos:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (u+v)^2 - (u-v)^2 \\ &= (u^2 + 2uv + v^2) - (u^2 - 2uv + v^2) \\ &= 4uv = 4z. \end{aligned}$$

(b) 0.

7. $\frac{3 + 5\sqrt{2}}{24}.$

9. $\pi a^3.$

11. (a) $\sqrt{2}\pi R^2.$ (b) $2\pi R^2.$

13. $\frac{\pi}{4} \left(\frac{5\sqrt{5}}{3} + \frac{1}{15} \right).$

15. $16\pi R^3/3.$

17. (a) La esfera parece la misma desde los tres ejes, por lo que estas tres integrales deben ser iguales con diferentes etiquetas en los ejes.
 (b) $4\pi R^4/3.$
 (c) $4\pi R^4/3.$

19. 8.

21. $(R/2, R/2, R/2).$

23. (a) Calcular directamente el producto vectorial $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ y después calcular su longitud y comparar la respuesta con el lado izquierdo.
 (b) En este caso, $F = 0$, de modo que $A(s) = \iint_D \sqrt{EG} du dv.$
 (c) $4\pi a^2.$

25. Sean $a = \partial x/\partial u, b = \partial y/\partial u, c = \partial x/\partial v$ y $d = \partial y/\partial v$. Las condiciones (a) y (b) del Ejerci-

cio 16 son entonces $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ y $ac + bd = 0$. Demostrar que $a \neq 0$ y, por un argumento de normalización, demostrar que podemos suponer que $a = 1$. Realizar el resto de cálculos.

27. $2a^2$.

Sección 7.6

1. $\frac{5\pi}{2}$.

3. (a) 54π . (b) 108π .

5. $\pm 48\pi$ (el signo depende de la orientación).

7. 4π .

9. 2π (o -2π , si se elige una orientación diferente).

11. 2π .

13. $12\pi/5$.

15. Con la parametrización en coordenadas esféricas habitual, $\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi = -\sin \phi \mathbf{r}$ (véase el Ejemplo 1). Entonces,

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_\theta) d\phi d\theta \\ &= \iint (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}) \sin \phi d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_r \sin \phi d\phi d\theta \end{aligned}$$

y

$$\iint_S f dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f \sin \phi d\phi d\theta.$$

17. Para un cilindro de radio $R=1$ y una componente normal F_r ,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_a^b \int_0^{2\pi} F_r d\theta dz.$$

19. $2\pi/3$.

21. $\frac{2}{5}a^3bc\pi$.

Sección 7.7

1. Aplicar la fórmula (3) de esta sección y simplificar; $H = 0$ y $K = -b^2/(u^2 + b^2)^2$.

3. Aplicar la fórmula (3) de esta sección y simplificar.

5. $K = \frac{-4a^6b^6}{(a^4b^4 + 4b^4u^2 + 4a^4v^2)^2}$.

7. Utilizando la parametrización estándar del elipsoide $\Phi(u, v) = (a \cos u \sen v, a \sen u \sen v, c \cos v)$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi]$ del Ejercicio 6 determinar que la curvatura de Gauss del elipsoide es:

$$\begin{aligned} K &= \frac{a^4c^2}{(a^4 \cos^2 v + a^2c^2 \cos^2 u \sen^2 v + a^2c^2 \sen^2 u \sen^2 v)^2} \\ &= \frac{a^4c^2}{(a^4 \cos^2 v + a^2c^2 \sen^2 v)^2}. \end{aligned}$$

Entonces, el elemento de área para el elipsoide está dado por:

$$T_u \times T_v = \sen v \sqrt{a^4 \cos^2 v + a^2c^2 \sen^2 v}.$$

Esto lleva a la integral:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{a^4c^2 \sen v}{(a^4 \cos^2 v + a^2c^2 \sen^2 v)^{\frac{3}{2}}} du dv.$$

Para calcular esta integral, la expresamos en una de las formas estándar disponibles en las tablas de este texto:

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{a^4c^2 \sen v}{(a^4 \cos^2 v + a^2c^2 \sen^2 v)^{\frac{3}{2}}} du dv \\ &= 2\pi \int_0^\pi \frac{a^4c^2 \sen v}{a^3(a^2 \cos^2 v + c^2 \sen^2 v)^{\frac{3}{2}}} dv \\ &= 2\pi ac^2 \int_0^\pi \frac{\sen v}{(a^2 \cos^2 v + c^2(1 - \cos^2 v)^{\frac{3}{2}})} dv \\ &= 2\pi ac^2 \int_0^\pi \frac{\sen v}{((a^2 - c^2) \cos^2 v + c^2)^{\frac{3}{2}}} dv \\ &= \frac{2\pi ac^2}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\pi \frac{\sen v}{\left(\cos^2 v + \frac{c^2}{a^2 - c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} dv. \end{aligned}$$

Ahora, aplicamos la siguiente sustitución $w = \cos v$:

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi ac^2}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\pi \frac{\sen v}{\left(\cos^2 v + \frac{c^2}{a^2 - c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} dv \\ &= \frac{2\pi ac^2}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\left((w)^2 + \left(\sqrt{\frac{c^2}{a^2 - c^2}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} dw. \end{aligned}$$

Por último, usamos la sustitución trigonométrica $w = \sqrt{\frac{c^2}{a^2 - c^2}} \tan \theta$ para terminar la integración. La solución final se simplifica a 4π , verificándose así el teorema de Gauss-Bonnet.

- 9.** Aplicar la fórmula (3) de esta sección y simplificar.
- 11.** Aplicar la fórmula (2) de esta sección y simplificar; $K = -h''/[(1 + (h')^2)^2 h]$.

Ejercicios de repaso del Capítulo 7

- 1.** (a) $3\sqrt{2}(1 - e^{6\pi})/13$.
 (b) $-\pi\sqrt{2}/2$.
 (c) $(236158\sqrt{26} - 8)/35 \cdot (25)^3$.
 (d) $8\sqrt{2}/189$.
- 3.** (a) $\frac{2}{\pi} + 1$.
 (b) $-1/2$.
- 5.** $2a^3$.
- 7.** (a) Una esfera de radio 5 centrada en $(2, 3, 0)$; $\Phi(\theta, \phi) = (2 + 5 \cos \theta \sin \phi, 3 + 5 \sin \theta \sin \phi, 5 \cos \phi)$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$; $0 \leq \phi \leq \pi$.
 (b) Un elipsoide con centro en $(2, 0, 0)$ y con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$.
- $\Phi(\theta, \phi) = (2 + (1/\sqrt{2})3 \cos \theta \sin \phi, 3 \sin \theta \sin \phi, 3 \cos \phi)$.
- 9.** $A(\Phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 5} d\theta$; Φ describe la parte superior de un cono con secciones transversales horizontales elípticas.

11. $11\sqrt{3}/6$.

13. $\sqrt{2}/3$.

15. $5\sqrt{5}/6$.

- 17.** (a) $(e^y \cos \pi z, xe^y \cos \pi z, -\pi x e^y \sin \pi z)$.
 (b) 0.

19. $\frac{1}{2}(\epsilon^2 + 1)$.

21. $\mathbf{n} = (1/\sqrt{5})(-1, 0, 2)$, $2z - x = 1$.

23. 0.

- 25.** Si $\mathbf{F} = \nabla\phi$, entonces $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ (al menos si ϕ es de clase C^2 ; véase el Teorema 1 de la Sección 4.4). El Teorema 3 de la Sección 7.2 demuestra que $\int_{\mathbf{c}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{s} = 0$ porque \mathbf{c} es una curva cerrada.

27. (a) 24π .
 (b) 24π .
 (c) 60π .

- 29.** (a) $[\sqrt{R^2 + p^2}(z_0 - z_1)]/p$.
 (b) $\sqrt{2z_0(R^2 + p^2)/p^2 g}$.

Capítulo 8

Sección 8.1

- 1.** $\gamma(t) = \begin{cases} (2t - 1, -t + 1), & t \in [0, 1] \\ (2t - 1, 2t - 2), & t \in [1, 2] \\ (-4t + 11, -t + 4), & t \in [2, 3] \end{cases}$
- 3.** 8.
- 5.** 8.
- 7.** 61.
- 9.** -8.
- 11.** (a) 0.
 (b) $-\pi R^2$.
 (c) 0.
 (d) $-\pi R^2$.
- 13.** $3\pi a^2$.
- 15.** $3\pi/2$.
- 17.** $3\pi(b^2 - a^2)/2$.
- 19.** (a) Ambos lados son 2π .
 (b) 0.
- 21.** 0.
- 23.** πab .
- 25.** Un segmento horizontal divide la región en tres regiones a las que se puede aplicar el teorema de Green; emplear el Ejercicio 16 o la técnica de la Figura 8.1.5.
- 27.** $9\pi/8$
- 29.** Si $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|u(\mathbf{q}) - u(\mathbf{p})| < \varepsilon$ cuando $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = \rho < \delta$. Parametrizar $\partial B_\rho(\mathbf{p})$ por $\mathbf{q}(\theta) = \mathbf{p} + \rho(\cos \theta, \sin \theta)$. Entonces

$$|I(\rho) - 2\pi u(\mathbf{p})| \leq \int_0^{2\pi} |u(\mathbf{q}(\theta)) - u(\mathbf{p})| d\theta \leq 2\pi.$$

- 31.** Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, parametrizar $\partial B_\rho(\mathbf{p})$ por $\rho \mapsto (p_1 + \rho \cos \theta, p_2 + \rho \sin \theta)$, entonces $I(\rho) = \int_0^{2\pi} u(p_1 + \rho \cos \theta, p_2 + \rho \sin \theta) d\theta$. Diferenciando bajo el signo de integral se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\rho} &= \int_0^{2\pi} \nabla u \cdot (\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \nabla u \cdot \mathbf{n} d\theta \\ &= \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = \frac{1}{\rho} \iint_{B_\rho} \nabla^2 u dA \end{aligned}$$

(la última igualdad utiliza el Ejercicio 30).

- 33.** Usando el Ejercicio 32,

$$\begin{aligned} \iint_{B_R} u dA &= \int_0^R \int_0^{2\pi} u[\mathbf{p} + \rho(\cos \theta, \sin \theta)] \rho d\theta d\rho \\ &= \int_0^R \left(\int_{\partial B_\rho} u ds \right) d\rho \\ &= \int_0^R 2\pi \rho u(\mathbf{p}) d\rho = \pi R^2 u(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

- 35.** Supongamos que u es subarmónica. Enunciamos las afirmaciones correspondientes al Ejercicio 34(a) y (b). El argumento para las funciones superarmónicas es similar, con las desigualdades invertidas.

Supongamos que $\nabla^2 u \geq 0$ y $u(\mathbf{p}) \geq u(\mathbf{q})$ para todo \mathbf{q} en $B_R(\mathbf{p})$. Por el Ejercicio 31, $I'(\rho) \geq 0$ para $0 < \rho \leq R$, y el Ejercicio 32 demuestra que $2\pi u(\mathbf{p}) \leq I(\rho) \leq I(R)$ para $0 < \rho \leq R$. Si $u(\mathbf{q}) < u(\mathbf{p})$ para algún $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \rho(\cos \theta_0, \sin \theta_0) \in B_R(\mathbf{p})$, entonces, por continuidad, existe un arco $[\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$ en $\partial B_\rho(\mathbf{p})$ donde $u < u(\mathbf{p}) - d$ para algún $d > 0$. Esto quiere decir que

$$\begin{aligned} 2\pi u(\mathbf{p}) &\leq I(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} u[\mathbf{p} + \rho(\cos \theta, \sin \theta)] \rho d\theta \\ &\leq (2\pi - 2\delta)u(\mathbf{p}) + 2\delta[u(\mathbf{p}) - d] \\ &\leq 2\pi u(\mathbf{p}) - 2\delta d. \end{aligned}$$

Esta contradicción demuestra que debemos tener $u(\mathbf{q}) = u(\mathbf{p})$ para todo \mathbf{q} en $B_R(\mathbf{p})$.

Si el máximo en \mathbf{p} es absoluto para D , el último párrafo demuestra que $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{p})$ para todo \mathbf{x} en algún disco alrededor de \mathbf{p} . Si $\mathbf{c}: [0, 1] \rightarrow D$ es una trayectoria desde \mathbf{p} hasta \mathbf{q} , entonces $u(\mathbf{c}(t)) = u(\mathbf{p})$ para todo t en algún intervalo $[0, b)$. Sea b_0 el mayor $b \in [0, 1]$ tal que

$u(\mathbf{c}(t)) = u(\mathbf{p})$ para todo $t \in [0, b)$. (Estrictamente hablando, esto requiere la noción de supremo disponible en un buen texto sobre cálculo). Dado que u es continua, $u(\mathbf{c}(b_0)) = u(\mathbf{p})$. Si $b_0 \neq 1$, entonces el último párrafo se aplicaría en $\mathbf{c}(b_0)$ y u es constante e igual a $u(\mathbf{p})$ en un disco alrededor de $\mathbf{c}(b_0)$. En particular, existe un $\delta > 0$ tal que $u(\mathbf{c}(t)) = u(\mathbf{c}(b_0)) = u(\mathbf{p})$ en $[0, b_0 + \delta)$. Esto contradice que b_0 sea el máximo, de modo que tenemos que $b_0 = 1$. Es decir, $\mathbf{c}(\mathbf{q}) = \mathbf{c}(\mathbf{p})$. Dado que \mathbf{q} era un punto arbitrario en D , u es constante en D .

- 37.** Suponemos que $\nabla^2 u_1 = 0$ y $\nabla^2 u_2 = 0$ son dos soluciones. Sea $\phi = u_1 - u_2$. Entonces $\nabla^2 \phi = 0$ y $\phi(x) = 0$ para todo $x \in \partial D$. Consideraremos la integral $\iint_D \phi \nabla^2 \phi dA = -\iint_D \nabla \phi \cdot \nabla \phi dA$. Por tanto, $\iint_D \nabla \phi \cdot \nabla \phi dA = 0$, que implica que $\nabla \phi = \mathbf{0}$, y por tanto ϕ es una función constante y tiene que ser idénticamente cero.

Sección 8.2

$$1. \quad \gamma(t) = \begin{cases} (3t-1, 1, -6t+4), & t \in [0, 1] \\ (2, 2t-1, -6t+4), & t \in [1, 2] \\ (-3t+8, 3, 10t-28), & t \in [2, 3] \\ (-1, -2t+9, 2t-4), & t \in [3, 4] \end{cases}$$

$$\Phi(u, v) = (u, v, 5-2u-3v), u \in [-1, 2], v \in [1, 3].$$

- 3.** 0 (Nota: \mathbf{F} es un campo gradiente).

- 5.** π .

- 7.** 52.

- 9.** -2π .

- 11.** Cada una de las integrales en el teorema de Stokes es cero.

- 13.** 0.

- 15.** $-4\pi/\sqrt{3}$.

- 17.** 0.

- 19.** $\pm 2\pi$.

- 21.** Utilizando la ley de Faraday, $\iint_S [\nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{H}/\partial t] \cdot d\mathbf{S} = 0$ para cualquier superficie S . Si el integrando fuera un vector no nulo en algún punto, entonces por continuidad, la integral sobre algún disco pequeño centrado en dicho punto y perpendicular a dicho vector sería distinta de cero.

- 23.** La orientación de $\partial S_1 = \partial S_2$ debe coincidir.
- 25.** Suponemos que C es una curva cerrada sobre la superficie dibujada, de modo que divide la superficie en dos partes, S_1 y S_2 . Para la superficie de un dónut (toro) debemos usar dos curvas cerradas, ¿por qué? Entonces C acota a S_1 y S_2 , pero con orientación positiva con respecto a una y negativa con respecto a la otra. Por tanto,

$$\begin{aligned} & \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0. \end{aligned}$$

- 27.** (a) Si $C = \partial S$, $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{S} = 0$.
(b) $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{v} \cdot \mathbf{c}'(t) dt = \mathbf{v} \cdot \int_a^b \mathbf{c}'(t) dt = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{c}(b) - \mathbf{c}(a))$, donde $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de C . (La integral vectorial es el vector cuyas componentes son integrales de las funciones componentes). Si C es cerrada, la última expresión es 0.

- 29.** Ambas integrales dan $\pi/4$.

- 31.** (a) 0. (b) π . (c) π .

- 33.** -20π (o 20π si se utiliza la orientación contraria).

- 35.** Una posible respuesta es: la curva de Möbius C también es la frontera de una superficie *orientada* \tilde{S} ; la ecuación de la ley de Faraday es válida para esta nueva superficie.

Sección 8.3

- 1.** (a) $f = x^2/2 + y^2/2 + C$.
(b) \mathbf{F} no es un campo vectorial gradiente.
(c) $f = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + C$.
- 3.** (a) Existe tal \mathbf{G} , pero no g .
(b) Existe tal g , pero no \mathbf{G} .
(c) Existe tal g , pero no \mathbf{G} .
(d) No existe ninguna función.
- 5.** Si $\mathbf{F} = \nabla f = \nabla g$ y C es una curva de \mathbf{v} a \mathbf{w} , entonces $(f - g)(\mathbf{w}) - (f - g)(\mathbf{v}) = \int_C \nabla(f - g) \cdot d\mathbf{s} = 0$ y por tanto $f - g$ es constante.

- 7.** $x^2yz - \cos x + C$.
- 9.** Sí, es el gradiente de $g(x, y) = F(x) + F(y)$, donde $F'(x) = f(x)$.
- 11.** No; $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, -x) \neq \mathbf{0}$.
- 13.** $e \sin 1 + \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}$.
- 15.** $3,5 \times 10^{29}$ ergios.
- 17.** (a) $f(x, y, z) = x^2yz$.
(b) No es un campo gradiente.
(c) No es un campo gradiente.
(d) $f(x, y, z) = x^2 \cos y$.
- 19.** Utilizar el Teorema 7 en cada uno de los casos.
(a) $-3/2$. (b) -1 .
(c) $\cos(e^2) - \cos(1/e)/e$.
- 21.** (a) No.
(b) $\left(\frac{1}{2}z^2, xy - z, x^2y\right)$ o
 $\left(\frac{1}{2}z^2 - 2xyz - \frac{1}{2}y^2, -x^2z - z, 0\right)$.
- 23.** $\frac{1}{3}(z^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + y^3\mathbf{k})$.
- 25.** $(-z \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x, xz \cos y, 0)$ (Son posibles otras respuestas).
- 27.** (a) $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 2) \neq \mathbf{0}$.
(b) Sea $\mathbf{c}(t)$ la trayectoria de un objeto en el fluido. Entonces $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{c}'(t)$. Sea $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Entonces $x' = -y$, $y' = x$ y $z' = 0$, y por tanto z es constante y el movimiento es paralelo al plano xy . Además, $x'' + x = 0$, $y'' + y = 0$. Por tanto, $x = A \cos t + B \operatorname{sen} t$ y $y = C \cos t + D \operatorname{sen} t$. Sustituyendo estos valores en $x' = -y$, $y' = x$, obtenemos $C = -B$, $D = A$, de modo que $x^2 + y^2 = A^2 + B^2$ y tenemos un círculo.
(c) Sentido antihorario.
- 29.** (a) $\mathbf{F} = -\frac{GmM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$;
 $\nabla \cdot \mathbf{F} = -GmM \left[\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right] = 0$.

- (b) Sea S la esfera unidad, S_1 la semiesfera superior, S_2 la semiesfera inferior y C la circunferencia unidad. Si $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$, entonces

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_C \mathbf{G} \cdot ds - \int_C \mathbf{G} \cdot ds = 0.\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= -GmM \iint_S (\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= -4\pi GmM\end{aligned}$$

dado que $\|\mathbf{r}\| = 1$ y $\mathbf{r} = \mathbf{n}$ en S . Por tanto, $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$ es imposible. Esto no contradice el Teorema 8 porque \mathbf{F} no es suave en el origen.

Sección 8.4

1. 3.
3. 4π , ya que $r = 1$.
5. 4π .
7. 3.
9. (a) 0. (c) $-4/15$.
(b) $4/15$.

11. 6.

13. $\frac{7}{10}$.

15. 1.

17. Aplicar el teorema de la divergencia a $f\mathbf{F}$ utilizando $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f\nabla \cdot \mathbf{F}$.

19. Si $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^2$, entonces $\nabla \cdot \mathbf{F} = 1/r^2$. Si $(0, 0, 0) \notin \Omega$, el resultado se sigue del teorema de Gauss. Si $(0, 0, 0) \in \Omega$, calculamos la integral eliminando una pequeña bola $B_\varepsilon = \{(x, y, z) | (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} < \varepsilon\}$ alrededor del origen y haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \frac{1}{r^2} dV &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \frac{1}{r^2} dV \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon)} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} dS\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\iint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} dS - \iint_{\partial B_\varepsilon} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} dS \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\iint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} dS - 4\pi\varepsilon \right) \\ &= \iint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} dS.\end{aligned}$$

La integral sobre ∂B_ε se obtiene del Teorema 10 (ley de Gauss), ya que $r = \varepsilon$ en B_ε .

21. Usar la identidad vectorial para $\operatorname{div}(f\mathbf{F})$ y el teorema de la divergencia para el apartado (a). Utilizar la identidad vectorial $\nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$ para el apartado (b).
23. (a) Si $\phi(\mathbf{p}) = \iiint_W \rho(\mathbf{q})/(4\pi\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|) dV(\mathbf{q})$, entonces

$$\begin{aligned}\nabla\phi(\mathbf{p}) &= \iiint_W [\rho(\mathbf{q})/4\pi] \nabla_{\mathbf{p}} (1/\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|) dV(\mathbf{q}) \\ &= - \iiint_W [\rho(\mathbf{q})/4\pi] [(\mathbf{p} - \mathbf{q})/\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^3] dV(\mathbf{q}),\end{aligned}$$

donde $\nabla_{\mathbf{p}}$ indica el gradiente con respecto a las coordenadas de \mathbf{p} y la integral es el vector cuyas componentes son las tres integrales componentes. Si \mathbf{p} varía en $V \cup \partial V$ y \mathbf{n} es la normal unitaria exterior a ∂V , podemos calcular el producto escalar usando estas componentes y uniendo los trozos para obtener

$$\nabla\phi(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = - \iiint_W \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^3} (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} dV(\mathbf{q}).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\iint_{\partial V} \nabla\phi(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} dV(\mathbf{p}) &= - \iint_{\partial V} \left(\iiint_W \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^3} (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{q} \right) dV(\mathbf{p}).\end{aligned}$$

Hay esencialmente cinco variables en esta integración, tres porque \mathbf{q} está en W y dos porque \mathbf{p} está en ∂V . Utilizamos el teorema de Fubini para obtener

$$\begin{aligned}\iint_{\partial V} \nabla\phi \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} &= - \iiint_W \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi} \left[\iint_{\partial V} \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^3} dS(\mathbf{p}) \right] dV(\mathbf{q}).\end{aligned}$$

Si V es una región elemental simétrica, el Teorema 10 establece que la integral interna es 4π si $\mathbf{q} \in V$ y 0 si $\mathbf{q} \notin V$. Entonces,

$$\iint_{\partial V} \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS = - \iiint_{W \cap V} \rho(\mathbf{q}) dV(\mathbf{q}).$$

Puesto que $\rho = 0$ fuera de W ,

$$\iint_{\partial V} \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS = - \iiint_V \rho(\mathbf{q}) dV(\mathbf{q}).$$

Si V no es una región elemental simétrica, la subdividimos en una suma de regiones que sí lo sean. La ecuación se cumple para cada trozo y, sumándolos todos, las integrales de frontera apropiadamente orientadas se cancelan, obteniendo el resultado deseado.

- (b) Por el Teorema 9, $\iint_{\partial V} \nabla \phi \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla^2 \phi dV$, y por tanto $\iiint_V \nabla^2 \phi dV = - \iiint_V \rho dV$. Dado que tanto ρ como $\nabla^2 \phi$ son continuos y esto se cumple para regiones arbitrariamente pequeñas, debemos tener $\nabla^2 \phi = -\rho$.

25. Si la carga Q se distribuye uniformemente sobre la esfera S de radio R centrada en el origen, la densidad de carga por unidad de área debe ser $Q/4\pi R^2$. Si \mathbf{p} es un punto que no está en S y $\mathbf{q} \in S$, entonces la contribución al campo eléctrico en \mathbf{p} debido a la carga próxima a \mathbf{q} se dirige a lo largo del vector $\mathbf{p} - \mathbf{q}$. Dado que la carga se distribuye uniformemente, la componente tangencial de esta contribución se cancelará con la contribución de un punto simétrico situado en el otro lado de la esfera a la misma distancia de \mathbf{p} (realizar un dibujo). El campo total resultante será radial. Puesto que S parece lo mismo desde cualquier punto a una distancia $\|\mathbf{p}\|$ del origen, el campo solo dependerá del radio y será de la forma $\mathbf{E} = f(r)\mathbf{r}$.

Si miramos a la esfera Σ de radio $\|\mathbf{p}\|$, tenemos que

$$\begin{aligned} (\text{Carga dentro de } \Sigma) &= \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_{\Sigma} f(\|\mathbf{p}\|) \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= f(\|\mathbf{p}\|) \|\mathbf{p}\| \text{ área } \Sigma \end{aligned}$$

$$= 4\pi \|\mathbf{p}\|^3 f(\|\mathbf{p}\|).$$

Si $\|\mathbf{p}\| < R$, no hay carga dentro de Σ ; si $\|\mathbf{p}\| > R$, la carga dentro de Σ es Q , y por tanto

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{\|\mathbf{p}\|^3} \mathbf{p} & \text{si } \|\mathbf{p}\| > R \\ 0 & \text{si } \|\mathbf{p}\| < R. \end{cases}$$

27. Por el Teorema 10, $\iint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi$ para cualquier superficie que contiene el origen. Pero si \mathbf{F} fuera el rotacional de algún campo, entonces la integral sobre dicha superficie cerrada tendría que ser 0.

29. Si $S = \partial W$, entonces $\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_W \nabla \cdot \mathbf{r} dV = \iiint_W 3 dV = 3$ volumen (W). Para la explicación geométrica, supongamos que $(0, 0, 0) \in W$ y consideremos el cono inclinado con su vértice en $(0, 0, 0)$ con base ΔS y altura $\|\mathbf{r}\|$. Su volumen es $\frac{1}{3}(\Delta S)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})$.

Sección 8.5

1. (a) $(2xy^2 - yx^3) dx dy$.
 (b) $(x^2 + y^2) dx dy$.
 (c) $(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$.
 (d) $(xy + x^2) dx dy dz$.
 (e) $dx dy dz$.
3. (a) $2xy dx + (x^2 + 3y^2) dy$.
 (b) $-(x + y^2 \operatorname{sen} x) dx dy$.
 (c) $-(2x + y) dx dy$.
 (d) $dx dy dz$.
 (e) $2x dx dy dz$.
 (f) $2y dy dz - 2x dz dx$.
 (g) $-\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$.
 (h) $2xy dx dy dz$.

5. (a) $8\pi^2 + \frac{44\pi^3}{3} + \frac{11\pi^4}{2} + \frac{3\pi^5}{5}$.
 (b) $8\pi^2 + \frac{44\pi^3}{3} + \frac{53\pi^4}{2} + \frac{64\pi^5}{5} + \frac{7\pi^6}{3} + \frac{\pi^7}{7}$.
 (c) $8\pi + 10\pi^2 + 9\pi^3 + \frac{5\pi^4}{2} + \frac{\pi^5}{5}$.

7. (a) $\text{Forma}_2(\alpha \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \text{Forma}_2(\alpha A_1 + A_2, \alpha B_1 + B_2, \alpha C_1 + C_2)$
 $= (\alpha A_1 + A_2) dy dz + (\alpha B_1 + B_2) dz dx + (\alpha C_1 + C_2) dx dy$
 $= \alpha(A_1 dy dz + B_1 dz dx + C_1 dx dy) + (A_2 dy dz + B_2 dz dx + C_2 dx dy)$
 $= \alpha \text{Forma}_2(\mathbf{V}_1) + \text{Forma}_2(\mathbf{V}_2).$

(b) $d\omega = \left(\frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) \wedge dx + A(dx)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy + \frac{\partial B}{\partial z} dz \right) \wedge dy + B(dy)^2$
 $+ \left(\frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz \right) \wedge dz + C(dz)^2$

Pero $(dx)^2 = (dy)^2 = (dz)^2 = dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$, $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$, $dz \wedge dy = -dy \wedge dz$, y $dx \wedge dz = -dz \wedge dx$. Por tanto,

$$d\omega = \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) dz dx + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \text{Forma}_2(\text{rot } \mathbf{V}).$$

9. Una variedad de dimensión 1 orientada es una curva. Su frontera es un par de puntos que puede considerarse como una variedad de dimensión 0. Por tanto, ω es una 0-forma o función, y $\int_{\partial M} d\omega = \omega(b) - \omega(a)$ si la curva M va de a a b . Además, $d\omega$ es una 1-forma $(\partial\omega/\partial x) dx + (\partial\omega/\partial y) dy$. Por tanto, $\int_M d\omega$ es la integral de línea $\int_M (\partial\omega/\partial x) dx + (\partial\omega/\partial y) dy = \int_M \nabla\omega \cdot d\mathbf{s}$. Entonces, obtenemos el Teorema 3 de la Sección 7.2, $\int_M \nabla\omega \cdot d\mathbf{s} = \omega(b) - \omega(a)$.
11. Poner $\omega = F_1 dx dy + F_2 dy dz + F_3 dz dx$. La integral se convierte en

$$\begin{aligned} \iint_{\partial T} \omega &= \iiint_T d\omega \\ &= \iiint_T \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial y} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

- (a) 0.
(b) 40.

13. Consideremos $\omega = x dy dz + y dz dx + z dx dy$. Calcular $d\omega = 3 dx dy dz$, de modo que $\frac{1}{3} \iint_{\partial R} \omega = \frac{1}{3} \iiint_R d\omega = \iiint_R dx dy dz = v(R)$.

Ejercicios de repaso del Capítulo 8

1. (a) $2\pi a^2$.
(b) 0.
3. 0.

5. (a) $f = x^4/4 - x^2y^3$.

(b) $-1/4$.

7. (a) Comprobar que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

(b) $f = 3x^2y \cos z + C$.

(c) 0.

9. 23/6.

11. No: $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$.

13. (a) $\nabla f = 3ye^{z^2} \mathbf{i} + 3xe^{z^2} \mathbf{j} + 6xyze^{z^2} \mathbf{k}$.

(b) 0.

(c) Ambos lados son 0.

15. $8\pi/3$.

17. $\pi a^2/4$.

19. 21.

21. (a) \mathbf{G} es conservativo; \mathbf{F} no lo es.

(b) $\mathbf{G} = \nabla\phi$ si $\phi = (x^4/4) + (y^4/4) - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}z^2 + C$, donde C es cualquier constante.

(c) $\int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$; $\int_{\alpha} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{2}$;

$\int_{\beta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{3}$; $\int_{\beta} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{2}$.

23. Utilizar de la Sección 2.4

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{V(\Omega_\rho)} \iint_{\partial\Omega_\rho} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Índice alfabético

- 0-forma, 526
1-forma, 527
 básica, 527
2-forma, 527
2-variedad orientada con frontera, 538
3-forma, 528
3-variedad orientada, 538
- aceleración, 235, 239
aceleración gravitatoria, 246
aditividad, 300
álgebra de formas, 533
Ampère, ley de, 409, 498
ángulo entre dos vectores, 23
aplicación
 a coordenadas polares, 350
 lineal, 340
 sobreyectiva, 344
aplicaciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , 338
aplicaciones de las integrales dobles y triples, 361
aplicaciones de los vectores a la física, 28
aproximación afín, 113
aproximación lineal, 113, 177
arco
 de parábola, 124
 sumas de Riemann y, 252
área
 bajo una gráfica, 289
 de una valla, 388
 de sección transversal, 290
 de un triángulo, 74
 de una región, 475
 en coordenadas polares, 350
armónica, 480
Arquímedes, 287, 363
asociativa, 70
atmósfera inestable, 157
autovalor, 219
autovector, 219
- Bernoulli, John, 166
bidimensional, 18
bola
 volumen, 358
bola abierta, 91
buena aproximación, 115
- Buys-Ballot, ley de, 284
calor, ecuación, 165
cambio de variables, 338
 coordenadas cilíndricas, 356
 coordenadas esféricas, 357
 fórmula, 350
cambio del orden de integración, 306, 317
campo conservativo, 498, 499
campo de fuerzas gravitatorias, 367
campo de velocidades, 257
 circulación, 491
campo eléctrico, 151, 448, 449
campo escalar, 256
campo gravitatorio, 259
campo magnético, 409, 448
campo vectorial, 149, 256–265
 C^1 , 256
 de Poynting, 524
 divergencia, 266
 en el espacio, 256
 gradiente, 148, 258, 402
 irrotacional, 501
 rotacional, 270
Cardano, Gerolamo, 46
carga neta, 449
Cauchy, Augustin Louis, 36, 428
Cauchy-Riemann, ecuaciones, 439
Cavalieri, Bonaventura, 290
Cavalieri, principio de, 290, 291, 302
centro de gravedad, 438
centro de masa, 75, 363, 364
 de regiones tridimensionales, 364
 de una superficie plana, 363
cicloide, 125, 237
circulación, 448, 490, 491, 501
circulación por unidad de área, 491
circunferencia unidad, 123
circunferencias concéntricas, 269
clase 2 , 160
clase C^1 , 120
columna, 34
componente
 normal, 483
 tangencial, 483
componentes, 4
composición, 103, 113

- condición de la primera derivada, 181
 conductividad, 258
 conjunto
 abierto, 91
 acotado, 194
 cerrado, 194
 de nivel, 80, 81
 frontera, 93
 vacío, 91
 conmutativa, propiedad, 68
 constante gravitacional, 239
 continuas Hölder, 109
 continuas Lipschitz, 109
 continuidad, 101
 formulación $\epsilon\delta$, 107
 continuidad de las composiciones, 103
 coordenada x , 1
 coordenada y , 1
 coordenadas, 4
 coordenadas cartesianas, 1
 coordenadas cilíndricas, 54, 492
 cambio de variables, 356
 rotacional en, 491
 coordenadas esféricas, 56, 140, 228, 493, 519
 cambio de variables, 357
 coordenadas polares, 54, 338, 348, 516
 área de una región en, 347
 integral a lo largo de una trayectoria, 391
 corriente, 448
 corriente eléctrica, 409
 Coulomb, ley de, 259, 450
 Cramer, 36
 Cramer, regla de, 36
 criterio de la derivada segunda, 185
 cuádrica, 210
 cuerpo atractor, 166, 368
 cuerpo central, 240
 cuerpo con simetría esférica, 370
 cuerpo homogéneo, 165
 cuerpo sólido, 290
 curva
 cerrada simple, 404
 circulación alrededor de, 501
 extremos, 404
 frontera, 483
 orientación opuesta, 406
 orientada cerrada y simple, 484
 orientada simple, 529
 reparametrización, 398
 simple, 404
 simple dirigida, 404
 simple orientada, 404
 suave a trozos, 248
 curvas
 de nivel, 80, 81
 de nivel topográficas, 149
 integrales, 262
 planas, 248
 curvatura, 254
 de Gauss, 456
 de la esfera, 457
 de superficies, 455, 459
 del plano, 457
 media, 456
 definición de continuidad, 107
 densidad de flujo de calor, 454
 densidad de masa, 166, 363, 386
 derivada, 96, 116
 de orden superior, 160
 de segundo orden, 160
 de una k -forma, 535
 de una trayectoria, 236
 direccional, 144
 operador, 266
 parcial, 110
 parcial iterada, 160
 propiedades, 131
 desigualdad, 301
 Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz, 63
 Cauchy-Schwarz, 24
 Cauchy-Schwarz en \mathbb{R}^n , 63
 CBS, 63
 triangular, 27
 triangular en \mathbb{R}^n , 64
 desplazamiento
 infinitesimal, 250
 vector, 28, 393
 velocidad y, 29
 determinante, 226
 de la matriz hessiana orlada, 214
 jacobiano, 226, 346
 determinantes, 33, 69
 3×3 , 34
 geometría, 41
 propiedades, 34
 Dido, reina, 205
 Dieterici, ecuación de, 141
 diferencia de diferencias, 162
 diferenciabilidad

- composición, 113
- de funciones C^1 , 120
- diferenciable, 115, 116
- diferenciación, 110
- diferencial, 117
- diferencial de la longitud de arco, 250
- Dirichlet, funcional de, 439
- disco, 91, 128
- disco abierto, 91
- discontinua, 101
- distancia, 23, 191
 - de un punto a un plano, 45
 - entre \mathbf{x} e \mathbf{y} , 65
- divergencia, 266
 - en coordenadas cilíndricas, 492
 - en coordenadas esféricas, 493
 - rotacional y, 275
- dominio, 78, 79
- ecuación
 - de Laplace, 164, 165, 284, 481
 - de ondas, 165, 166
 - de ondas unidimensional, 166
 - de Poisson, 166
 - de un plano, 43
 - de una recta, 12
 - de una recta que pasa por dos puntos, 16
 - del calor, 164, 165
 - del potencial, 165
 - diferencial, 239
 - paramétrica de una recta, 13
 - química, 4
- ecuaciones de Maxwell, 166
- ecuaciones diferenciales, 262
- ecuaciones en derivadas parciales, 164, 481
- Einstein, Albert, 263, 469
- eje x , 1
- eje y , 1
- eje z , 1
- elasticidad, 383
- electromagnetismo, 166
- electrostática, 153
- elemento cero, 3
- elemento de volumen
 - en coordenadas esféricas, 519
- elipsoide, 230, 382
- elipsoide sólido, 382
- elíptico, 231
- energía cinética, 371
- energía potencial gravitatoria, 503
- entorno, 93
- esfera
 - orientación, 443
 - volumen, 358
- espacio euclídeo n -dimensional, 61, 62
- espacio tridimensional, 2
- espesor, 290
- estrella esférica, 370
- Euler, 78, 165
- extremos, 124
 - condicionados, 199
 - relativos, 180
- factorizar un polinomio, 228
- Faraday, ley de, 493, 496
- fila, 34
- fluido, 79, 272
 - circulación, 490
- fluido incompresible, 515
- flujo de calor, 164, 258, 448
- forma cuadrática
 - definida negativa, 185
 - definida positiva, 185
- forma diferencial, 395
- forma vectorial del teorema de Green, 477
- formas
 - álgebra de, 533
 - derivada de, 535
 - integral de, 531
 - producto de, 528, 533
 - reglas de multiplicación, 534
 - suma de, 528
 - teorema de Stokes para, 539
- formas de Lagrange del resto, 174
- fórmula de cambio de variables para integrales triples, 355, 356
- fórmula de Taylor de tercer orden, 174
- Fourier, series, 165
- Fourier, Joseph, 164
- fracturas, 110
- Frenet, fórmulas, 255, 411
- frontera, 309, 470
 - incorrecta, 487
- Fubini, teorema, 303, 305
- fuerza entre dos cargas puntuales, 450
- fuerza centrípeta, 240, 246
- fuerza gravitatoria, 150
- función
 - analítica, 178
 - armónica, 168, 198, 481

- auxiliar, 213
- compuesta, 345
- continua, 298
- de producción de Cobb-Douglas, 219
- de temperatura, 448
- dos veces diferenciable con continuidad, 160
- estrictamente subarmónica, 198, 231
- integrable, 297
- longitud de arco, 251, 254
- potencial, 501
- sobreyectiva, 344
- subarmónica, 231, 482
- superarmónica, 231, 482
- valor medio, 361
- funciones
 - C^1 , 120
 - componentes, 124
 - con valores escalares, 78
 - con valores reales, 78
 - con valores vectoriales, 78, 235
 - constantes, 80
 - continua Hölder, 122
 - continuas, 99, 101
 - continuas, propiedades, 102
 - cuadrática, 82
 - de n variables con valores reales, 79
 - de varias variables, 78
 - función par, 152
 - gradiente, 142
 - gradiente de, 118
 - gráficas, 79
 - homogéneas, 155
- Galileo, 290
- gas, 141
- gas de van der Waals, 157
- Gauss, curvatura de, 456
- Gauss, K. F., 449
- Gauss, Karl Friedrich, 469
- Gauss, ley de, 449, 517
- generalización del teorema de Green, 480
- geometría de funciones con valores reales, 78
- geometría de los determinantes, 41
- geometría de los extremos condicionados, 201
- geometría diferencial de curvas, 254
- geometría plana, 12
- gradiente, 118, 143, 260, 266
 - en coordenadas cilíndricas, 492
 - en coordenadas esféricas, 493
- integral de línea de, 402
- negativo de presiones, 284
- superficies de nivel y, 146
- y derivadas direccionales, 143
- gráfica, 79, 412
 - de una función, 450
 - integrales de superficie para gráficas, 450
 - orientación, 444
 - teorema de Stokes, 482, 483
- Green, George, 469, 474
- Green, identidades de, 524
- Gregory, James, 78
- hélice, 127, 128, 254
- Hermite, Charles, 77
- Hesse, Ludwig Otto, 184
- hessiana, 184
- Hildebrandt, 166
- hiperbolóide, 86, 206
- hipocicloide, 476
- hipocicloide de cuatro puntas, 237
- homogeneidad, 300
- Huygens, Christian, 126
- identidad de Jacobi, 52
- identidad de Lagrange, 71
- identidad de polarización, 71
- identidades de Green, 524
- identidades del análisis vectorial, 276, 277
- imagen, 414
- independencia de la parametrización, 445
 - integrales de superficie, 445
- inercia, momento de, 366
- integrabilidad de funciones acotadas, 300
- integrable, 297
- integración
 - aplicación, 361
 - de funciones escalares sobre trayectorias, 389
- integral
 - triple mediante integración iterada, 327
 - a lo largo de una trayectoria, 385, 386
 - de una forma, 531
 - de una forma diferencial, 395
 - doble, 288
 - doble e iterada, 292
 - iterada, 291, 296, 312
 - orientada, 402
 - propiedades, 300
 - reducción a integrales iteradas, 312

- integral de área, 475
- integral de línea, 393, 394, 475
 - cambio de parametrización, 402
 - cambio de reparametrización, 400
 - campo vectorial gradiente, 403
 - sobre curvas geométricas, 404
- integral de superficie
 - de campos vectoriales, 439
 - de un campo vectorial sobre una gráfica, 451
 - de una función escalar, 431
 - definición, 440
 - interpretación física, 447
 - para gráficas, 450
- integral doble
 - aplicaciones, 361
 - definición, 297
 - sobre regiones más generales, 309
 - sobre un rectángulo, 296
 - sobre una región elemental, 311
- integral impropia, 372
 - teorema de Fubini, 376
- integral triple, 322
 - aplicaciones, 361
 - cambio de variables en, 356
 - definición, 323
 - fórmula del cambio de variables, 355
- inversa, 68
- inyectiva, aplicación, 341
- irrotacional, 272, 273
- isobaras, 284
- isocuantas, 212
- isotermas, 258
- Jacobi, 36
- jacobiano, determinante, 346
- Jean Le Rond d'Alembert, 166
- k*-forma, 529
- Kepler, xxi, 164, 241
- Lagrange, 36
- Lagrange, multiplicadores, 199
- Laplace, ecuación de, 284
- Laplace, operador de, 275
- Laplace, Pierre-Simon de, 36
- Leibniz, 36, 290
- lemniscata, 359
- ley de Coulomb, 153, 450
- ley de Gauss, 449
- ley de Kepler, 240
- ley de los gases perfectos, 157
- ley de Newton de la gravitación, 239
- ley de Snell, 218
- ley del paralelogramo, 71
- libre de divergencia, 515
- límite, 95
 - definición, 96, 104
 - en términos de ε y δ , 104
 - por la derecha, 109
 - por la izquierda, 109
 - propiedades, 98
 - unicidad, 98
- línea poligonal, 252
- linealidad, 300, 535
- líneas de corriente, 262
- líneas de flujo, 262, 269
- Listing, J. B., 442
- localización de puntos de extremo, 181
- localmente invertible, 220
- longitud, 21, 62, 251
 - longitud de arco, 247–256, 386
 - longitud de arco en \mathbb{R}^n , 251
 - longitud de una gráfica, 392
- Möbius, banda de, 442, 498
- Möbius. A. F., 442
- Maclaurin, 36
- mapa topográfico, 81
- mareas, 164
- masa, 364
 - centro de, 363
 - de la Tierra, 240
- matematizar la naturaleza, 164
- matrices
 - 2×2 , 33
 - 3×3 , 33
 - $m \times n$, 65
 - inversas, 68
 - multiplicación de, 65
- matriz, 32
 - columna, 134
 - de derivadas parciales, 117
 - derivada, 137
 - fila, 134
 - identidad, 68
 - invertible, 68
 - simétrica, 188
- máximo
 - absoluto, 193, 209
 - absoluto, determinación, 195

- local, 180
- Maxwell, ecuaciones de, 493, 520
- mecánica de fluidos, 166
- media, 361
- mejor aproximación lineal, 116
- Mercurio, 152
- meteorólogos, 157
- método de exhaución, 288
- método de las secciones, 291
- método de los multiplicadores de Lagrange, 200, 207
- métodos numéricos, 263
- mínimo
 - absoluto, 193, 209
 - relativo estricto, 185
- mínimos cuadrados, 232
- módulo de Young, 383
- momento, 75, 363
 - momento de inercia, 366, 367
- monotonía, 300
- movimiento de los planetas, 164
- movimiento rotatorio, 257
- movimientos de los fluidos, 165
- Muir, T., 37
- multiplicación de matrices, 65, 340
- multiplicación por un escalar, 2, 3, 65
 - geometría, 7
- multiplicadores de Lagrange, 200, 201
- Newton, segunda ley de, 235, 290
- Newton, Isaac, xxi, 235, 363, 368
- Newton, ley de, 259
- Newton, ley de gravitación, 150
- norma, 21, 62
- normal
 - a una superficie, 442
 - hacia arriba, 483
- normalizar, 22
- núcleo, 231
- órbita circular, 240, 246
- órbita geoestacionaria, 240
- Oersted, Hans Christian, 409
- operador de Laplace, 275
- operador diferencial, 231
- operador nabla, 266
- opuesto, 3
- orden de integración, 306, 317
- orientación, 470
 - antihoraria, 470
 - correcta, 473
 - de una gráfica, 444
 - exterior, 509
 - horaria, 470
 - inducida, 483
 - interior, 509
 - inversa, 402
 - para una superficie cerrada, 509
 - positiva, 483
- origen, 1
- ortogonal, 25
- ortonormal, 25
- paraboloides, 329, 367
- paraboloides de revolución, 82
- paraboloides hiperbólico, 83
- paradoja de los gemelos, 255
- paralelepípedo, 43
- paralelogramo, 12, 17, 340
- paralelogramo circunscrito, 287
- parametrización, 404, 405
 - independencia de, 445
 - orientada positivamente, 478
 - que conserva la orientación, 405
- pares ordenados, 1, 2
- partición, 297, 323
- partición regular, 296
- partícula, 237
- Pascal, Blaise, 126
- películas de jabón, 166
- permutación cíclica, 38
- perpendicular, 25
- planeta hueco, 370
- plano
 - ecuación, 43
 - en el espacio, 43
 - fijo, 247
 - tangente, 155
 - tangente a superficies de nivel, 147
- plano tangente, 113, 115, 155, 222
 - a una superficie, 417
- planos de simetría, 371
- Poisson, ecuación de, 524
- polinomio, 101
 - factorización, 228
- potencial, ecuación, 165
- potencial de Newton, 165
- potencial eléctrico, 150
- potencial escalar, 502
- potencial gravitatorio, 150, 259, 367–369, 470

- potenciales eléctricos, 470
Poynting, campo vectorial, 524
presión, 157
primitiva, 302
Principia Mathematica, 368
principio de Cavalieri, 290
principio del máximo, 482
principio del máximo débil, 198
principio del máximo fuerte, 482
principio del mínimo, 482
principio del mínimo débil, 198
principio del mínimo fuerte, 482
proceso adiabático, 412
proceso de inversión, 219
producto
 cartesiano, 287
 cruz, 37
 de formas diferenciales, 533
 escalar, 20, 62, 118, 266
 exterior, 533
 interno, 20
 mixto, 38
 triple de matrices, 70
 vectorial, 32, 39
propiedades
 de la derivada, 131
 de la integral, 300
 de las funciones continuas, 102
 de los determinantes, 34
 de los límites, 98
 derivada de una forma, 535
 formas diferenciales, 533
proyección ortogonal, 26
punto, 122
 crítico, 180, 200
 crítico no degenerado, 190
 de máximo absoluto, 193
 de máximo local, 180
 de mínimo absoluto, 193
 de mínimo local, 180
 de silla, 180
 excepcional, 503
 frontera, 93
 óptimo, 213
 singular, 499, 500
R. Kunze, 188
raíces, 228
rango, 78
rapidez, 126, 236
rapidez constante, 239
rapidez unidad, 411
razón del cambio del momento angular = momento de la fuerza, 247
recta, 123
 de los números reales, 2
 ecuaciones de, 12
 tangente, 129
reducción a integrales iteradas, 312, 324
región conexa por arcos, 335
región de tipo 1, 309
región elemental, 310, 326
región entre esferas concéntricas, 368
región exhaustiva, 373
región no acotada, 380
región tipo 2, 309
regiones elementales, 470
 en el espacio, 328
 simétrica, 508, 513
 simétricas, 327
regla de la cadena, 131, 134, 135, 236, 485
 fallo de la, 141
 geometría, 137
regla de la multiplicación por una constante, 132
regla de la multiplicación por una función escalar, 236
regla de la suma, 132, 236
regla del cociente, 132
regla del producto, 132
regla del producto escalar, 236
regla del producto vectorial, 236
reglas de derivación, 236
relación algebraica de pares ordenados, 4
reparametrización, 254, 398, 411
resta de vectores, 7
resto, 174
Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 439
Riemann, suma, 297
Riemann, sumas de, 252, 287, 289, 314, 447
rigidez flexural, 383
rotacional, 266, 270, 491
 de un gradiente, 273
 divergencia y, 275
 en coordenadas cilíndricas, 491
 en coordenadas esféricas, 493
 escalar, 274, 504
 interpretación, 267
 rotaciones en un flujo y, 272
 rotaciones y, 271

- saltos, 99
 Sayers, Dorothy, 205
 sección, 82
 segmento de recta, 17
 segunda ley, 239
 segunda ley de Newton, 238
 segundo teorema del valor medio, 174
 semieje mayor, 210
 semieje menor, 210
 serie de potencias, 178
 serie de Taylor, 175
 silla de mono, 230
 silla de montar, 83
 simetría cilíndrica, 56
 simetría esférica, 56
 Simon de Laplace, 165
 Snell, ley de, 53
 sólido rígido, 271
 suave, 237
 submatrices diagonales, 188
 subregión elemental, 529
 suma de vectores, 2, 4
 sumas de tipo Riemann, 387
 superficie, 222
 - cerrada, 497, 508, 515
 - de curvatura constante, 459
 - de revolución, 426
 superficie orientada, 441, 445, 529
 - cara negativa, 441
 - cara positiva, 441
 superficie plana, 363
 superficies de nivel, 82, 146
 - planos tangente, 147
 superficies equipotenciales, 150, 259
 superficies parametrizadas, 412, 414, 422
 - orientadas, 487
 - teorema de Stokes, 488
 tangente unitaria, 254
 Taylor
 - fórmula de tercer orden, 174
 - serie de, 175
 - teorema de, 169
 técnica epsilon-delta, 104
 teorema
 - de Fubini, 303, 305
 - de la función inversa, 226
 - máximos y mínimos, 194
 teorema de cambio de variables
 - para integrales dobles, 351
 teorema de Euler, 155
 teorema de Fubini, 376, 377, 473
 teorema de Gauss, 508, 510, 513, 515, 538
 teorema de Green, 470, 473, 513, 537
 - forma vectorial, 477
 - generalización, 480
 teorema de la circulación de Kelvin, 448
 teorema de la divergencia, 469, 510
 teorema de la divergencia de Gauss, 511, 514
 teorema de la divergencia en el plano, 478
 teorema de la función implícita, 421
 - caso particular, 220
 teorema de los multiplicadores de Lagrange, 206
 - demonstración, 222
 teorema de Pappus, 430
 teorema de Pitágoras, 21
 teorema de Stokes, 482, 500, 538, 539
 - para superficies parametrizadas, 488
 teorema de Stokes para gráficas, 483
 teorema de Taylor, 169
 teorema del cambio de variables, 345
 - en coordenadas polares, 352
 teorema del valor medio, 135, 162, 252, 303
 - integrales dobles, 320
 teorema del valor medio para integrales, 489
 teorema del valor medio para integrales de superficie, 454
 teorema fundamental del cálculo, 402, 473, 500
 teorema fundamental del cálculo integral, 301
 teorema general de la función implícita, 223
 teorema general de Stokes, 538
 teorema, divergencia en el plano, 478
 teoremas de geometría con métodos vectoriales, 12
 teoremas de integración del análisis vectorial, 469
 teoría del potencial, 470
 teoría electromagnética, 501
 termodinámica, 141
 ternas ordenadas, 2
 tiempo, 122
 Tierra, 240
 toro, 413
 torsión, 255
 trabajo realizado, 501
 trabajo realizado por una fuerza, 393
 transformación
 - inyectiva, 341

- lineal, 344
- sobreyectiva, 344
- trayectoria, 122, 124, 235
 - cicloidal, 128
 - circular, 239
 - componentes, 124
 - derivada de una, 236
 - diferenciable, 126
 - en el espacio, 124
 - en el plano, 124
 - rapidez, 126
 - recta tangente, 128
 - termodinámica, 411
- Tromba, A., 166
- unidimensional, 18
- valor medio, 438
 - a lo largo de una trayectoria, 391
 - de una función, 361
- van der Waals, gas, 412
- Vandermonde, 36
- vector
 - aceleración de una curva, 237
 - binormal, 255
 - desplazamiento, 28
 - longitud, 21
 - normal principal, 255
 - que une dos puntos, 10
 - unitario normal, 509
 - velocidad, 29, 126, 236
 - velocidad angular, 271
- vorticidad, 491
- vector tangente, 127, 415
 - a una trayectoria, 236
 - unitario, 394
- vectores, 62
 - n -dimensionales, 62
 - ángulo entre, 23
 - aplicaciones a la física, 28
 - base canónica, 9
 - columna, 67
 - de la base canónica de \mathbb{R}^n , 62
 - definición, 4
 - fijos, 7
 - fila, 67
 - libres, 7
 - producto vectorial, 37
 - suma de, 4
 - unitarios, 22
- velocidad, vector, 29, 126
- velocidad de escape, 261
- volcán Mauna Loa, 157
- volumen, 230, 311, 364
 - volumen bajo una gráfica, 289
 - volumen de una bola, 358
 - volumen de una esfera, 358
 - volumen del paralelepípedo, 43
 - volumen específico, 157
- Weierstrass, 205
- Wessel, 48
- Wilson, E. B., 51
- Wimsey, Peter, 205

Créditos de las fotografías

Retrato del autor: EAS Communications Office.

Introducción Fig. 3: Erich Lessing/Art Resource, NY.

Introducción Fig. 4: Georg von Peuerbach, *Theoricae novae planetarum* (Venice: Erhard Ratdolt, 1482).

Introducción Fig. 5: Royal Astronomical Society/Science Source.

Introducción Fig. 6: J. L. Charmet/Science Source.

Introducción Fig. 7: Codex Conciliorum Albeldensis seu Vigilanus.

Introducción Fig. 8: Michael Pasdzior/The Image Bank/Getty Images.

Introducción Fig. 9: © Bettmann/CORBIS.

Introducción Fig. 10: © Bettmann/CORBIS.

Introducción Fig. 11: Kepler, Johannes (1571–1630) *Astronomia nova seu, Physica coelestis, tradita commentariis De motibus stellae martis, ex observationibus G.V. Tychonis Brahe*. Praga 1609.

Introducción Fig. 13: © Bettmann/CORBIS.

Introducción Fig. 14: National Portrait Gallery, London, UK/The Bridgeman Art Library.

Introducción Fig. 15: *Philosophiae naturalis principia mathematica* de Isaac Newton publicado en 1687.

Fig. 1.3.8: © Hulton-Deutsch Collection/CORBIS.

Fig. 1.3.9: Hulton Archive/Getty Images.

Fig. 1.5.1: © Bettmann/CORBIS.

Capítulo 3 imagen de apertura: Science Photo Library/Science Source.

Fig. 3.3.1: Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759).

Fig. 4.1.5: © Shelley Gazin/CORBIS.

Fig. 4.1.6: CERN/Science Source.

Fig. 4.1.11: American Institute of Physics/Science Photo Library/Science Source.

Fig. 4.4.9: © Bettmann/CORBIS.

Fig. 6.3.3: Del *Tratado de la Pintura* de Leonardo da Vinci.

Fig. 7.4.5: Erich Lessing/Art Resource, NY.

Fig. 7.6.4: Moebius Strip II, 1963, de MC Escher. Escher Foundation, Haags Gemeentemuseum, The Hague.

Fig. 7.7.1: Sinclair Stammers/Science Photo Library/Science Source.

Fig. 7.7.2: Ted Kinsman/Science Source.

Fig. 7.7.3: © 1997 Michael Dalton/Fundamental Photographs.

Fig. 7.7.5: © UC Regents/Lick Observatory.

Fig. 7.7.6: Science Photo Library/Science Source.

Fig. 7.7.12: © Baldwin H. Ward & Kathryn C. Ward/CORBIS.

DERIVADAS

1.
$$\frac{dau}{dx} = a \frac{du}{dx}$$

2.
$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

3.
$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

4.
$$\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$$

5.
$$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

6.
$$\frac{d(u^v)}{dx} = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v (\log u) \frac{dv}{dx}$$

7.
$$\frac{d(e^u)}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

8.
$$\frac{d(e^{au})}{dx} = ae^{au} \frac{du}{dx}$$

9.
$$\frac{da^u}{dx} = a^u (\log a) \frac{du}{dx}$$

10.
$$\frac{d(\log u)}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

11.
$$\frac{d(\log_a u)}{dx} = \frac{1}{u(\log a)} \frac{du}{dx}$$

12.
$$\frac{d \sin u}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

13.
$$\frac{d \cos u}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}$$

14.
$$\frac{d \tan u}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

15.
$$\frac{d \cot u}{dx} = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

16.
$$\frac{d \sec u}{dx} = \tan u \sec u \frac{du}{dx}$$

17.
$$\frac{d \csc u}{dx} = -(\cot u)(\csc u) \frac{du}{dx}$$

18.
$$\frac{d \arcsen u}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

19.
$$\frac{d \arccos u}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

20.
$$\frac{d \arctan u}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

21.
$$\frac{d \arccot u}{dx} = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

22.
$$\frac{d \operatorname{arcsec} u}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

23.
$$\frac{d \operatorname{arccsc} u}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

24.
$$\frac{d \operatorname{senh} u}{dx} = \cosh u \frac{du}{dx}$$

25.
$$\frac{d \cosh u}{dx} = \operatorname{senh} u \frac{du}{dx}$$

26.
$$\frac{d \tanh u}{dx} = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$$

27.
$$\frac{d \coth u}{dx} = -(\operatorname{csch}^2 u) \frac{du}{dx}$$

28.
$$\frac{d \operatorname{sech} u}{dx} = -(\operatorname{sech} u)(\tanh u) \frac{du}{dx}$$

29.
$$\frac{d \operatorname{csch} u}{dx} = -(\operatorname{csch} u)(\coth u) \frac{du}{dx}$$

30.
$$\frac{d \operatorname{senh}^{-1} u}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}$$

31.
$$\frac{d \cosh^{-1} u}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

32.
$$\frac{d \tanh^{-1} u}{dx} = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}$$

33.
$$\frac{d \coth^{-1} u}{dx} = \frac{1}{u^2-1} \frac{du}{dx}$$

34.
$$\frac{d \operatorname{sech}^{-1} u}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

35.
$$\frac{d \operatorname{csch}^{-1} u}{dx} = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}$$

INTEGRALES (Se puede añadir una constante arbitraria a cada integral.)

1. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad (n \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$
3. $\int e^x dx = e^x$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$
5. $\int \sin x dx = -\cos x$
6. $\int \cos x dx = \sin x$
7. $\int \tan x dx = -\log|\cos x|$
8. $\int \cot x dx = \log|\sin x|$
9. $\int \sec x dx = \log|\sec x + \tan x| = \log \left| \tan \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi \right) \right|$
10. $\int \csc x dx = \log|\csc x - \cot x| = \log \left| \tan \frac{1}{2}x \right|$
11. $\int \arcsen \frac{x}{a} dx = x \arcsen \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$
12. $\int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$
13. $\int \arctan \frac{x}{a} dx = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \log(a^2 + x^2) \quad (a > 0)$
14. $\int \sin^2 mx dx = \frac{1}{2m}(mx - \sin mx \cos mx)$
15. $\int \cos^2 mx dx = \frac{1}{2m}(mx + \sin mx \cos mx)$
16. $\int \sec^2 x dx = \tan x$
17. $\int \csc^2 x dx = -\cot x$
18. $\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$
19. $\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$
20. $\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx \quad (n \neq 1)$
21. $\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x dx \quad (n \neq 1)$
22. $\int \sec^n x dx = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx \quad (n \neq 1)$
23. $\int \csc^n x dx = -\frac{\cot x \csc^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx \quad (n \neq 1)$

$$24. \int \operatorname{senh} x dx = \cosh x$$

$$25. \int \cosh x dx = \operatorname{senh} x$$

$$26. \int \tanh x dx = \log |\cosh x|$$

$$27. \int \coth x dx = \log |\operatorname{senh} x|$$

$$28. \int \operatorname{sech} x dx = \arctan (\operatorname{senh} x)$$

$$29. \int \operatorname{csch} x dx = \log \left| \tanh \frac{x}{2} \right| = -\frac{1}{2} \log \frac{\cosh x + 1}{\cosh x - 1}$$

$$30. \int \operatorname{senh}^2 x dx = \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2x - \frac{1}{2} x$$

$$31. \int \cosh^2 x dx = \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2x + \frac{1}{2} x$$

$$32. \int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x$$

$$33. \int \operatorname{senh}^{-1} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{senh}^{-1} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$$

$$34. \int \cosh^{-1} \frac{x}{a} dx = \begin{cases} x \cosh^{-1} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 - a^2} & [\cosh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) > 0, a > 0] \\ x \cosh^{-1} \frac{x}{a} + \sqrt{x^2 - a^2} & [\cosh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) < 0, a > 0] \end{cases}$$

$$35. \int \tanh^{-1} \frac{x}{a} dx = x \tanh^{-1} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \log |a^2 - x^2|$$

$$36. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \log (x + \sqrt{a^2 + x^2}) = \operatorname{senh}^{-1} \frac{x}{a} \quad (a > 0)$$

$$37. \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad (a > 0)$$

$$38. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc sen} \frac{x}{a} \quad (a > 0)$$

$$39. \int (a^2 - x^2)^{3/2} dx = \frac{x}{8} (5a^2 - 2x^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{8} \operatorname{arc sen} \frac{x}{a} \quad (a > 0)$$

$$40. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arc sen} \frac{x}{a} \quad (a > 0)$$

$$41. \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$$

$$42. \int \frac{1}{(a^2 - x^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$43. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \log |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$$

$$44. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| = \cosh^{-1} \frac{x}{a} \quad (a > 0)$$

$$45. \int \frac{1}{x(a+bx)} dx = \frac{1}{a} \log \left| \frac{x}{a+bx} \right|$$

$$46. \int x \sqrt{a+bx} dx = \frac{2(3bx-2a)(a+bx)^{3/2}}{15b^2}$$

47. $\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x} dx = 2\sqrt{a+bx} + a \int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}} dx$

48. $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}} dx = \frac{2(bx-2a)\sqrt{a+bx}}{3b^2}$

49. $\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}} dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left| \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}} \right| & (a > 0) \\ \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \left| \sqrt{\frac{a+bx}{-a}} \right| & (a < 0) \end{cases}$

50. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2-x^2} - a \log \left| \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} \right|$

51. $\int x\sqrt{a^2-x^2} dx = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}$

52. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8} \arcsen \frac{x}{a} \quad (a > 0)$

53. $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\frac{1}{a} \log \left| \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} \right|$

54. $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\sqrt{a^2-x^2}$

55. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a} \quad (a > 0)$

56. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2+a^2} - a \log \left| \frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x} \right|$

57. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2-a^2} - a \arccos \frac{a}{|x|} \quad (a > 0)$

58. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \log \left(x + \sqrt{x^2+a^2} \right)$

59. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}} dx = \frac{1}{a} \log \left| \frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}} \right|$

60. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{|x|} \quad (a > 0)$

61. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \mp \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x}$

62. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| \frac{1}{a} \sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{x}{a} \right|$

63. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \log \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| & (b^2 > 4ac) \\ \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} & (b^2 < 4ac) \end{cases}$

64. $\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \log |ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$

65. $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \log |2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| & (a > 0) \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsen \frac{-2ax-b}{\sqrt{b^2-4ac}} & (a < 0) \end{cases}$

$$66. \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8a} \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

$$67. \int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

$$68. \int \frac{1}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{c}} \log \left| \frac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2 + bx + c} + bx + 2c}{x} \right| & (c > 0) \\ \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsen \frac{bx + 2c}{|x|\sqrt{b^2 - 4ac}} & (c < 0) \end{cases}$$

$$69. \int x^3 \sqrt{x^2 + a^2} dx = \left(\frac{1}{5} x^2 - \frac{2}{15} a^2 \right) \sqrt{(a^2 + x^2)^3}$$

$$70. \int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^4} dx = \frac{\mp \sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}}{3a^2 x^3}$$

$$71. \int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} \quad (a^2 \neq b^2)$$

$$72. \int \operatorname{sen} ax \cos bx dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} \quad (a^2 \neq b^2)$$

$$73. \int \cos ax \cos bx dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} \quad (a^2 \neq b^2)$$

$$74. \int \sec x \tan x dx = \sec x$$

$$75. \int \csc x \cot x dx = -\csc x$$

$$76. \int \cos^m x \operatorname{sen}^n x dx = \frac{\cos^{m-1} x \operatorname{sen}^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \cos^{m-2} x \operatorname{sen}^n x dx \\ = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \cos^m x \operatorname{sen}^{n-2} x dx$$

$$77. \int x^n \operatorname{sen} ax dx = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax dx$$

$$78. \int x^n \cos ax dx = \frac{1}{a} x^n \operatorname{sen} ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \operatorname{sen} ax dx$$

$$79. \int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$$

$$80. \int x^n \log ax dx = x^{n+1} \left[\frac{\log ax}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right]$$

$$81. \int x^n (\log ax)^m dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\log ax)^m - \frac{m}{n+1} \int x^n (\log ax)^{m-1} dx$$

$$82. \int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx = \frac{e^{ax} (a \operatorname{sen} bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

$$83. \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} (b \operatorname{sen} bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

$$84. \int \operatorname{sech} x \tanh x dx = -\operatorname{sech} x$$

$$85. \int \operatorname{csch} x \coth x dx = -\operatorname{csch} x$$

SÍMBOLOS

Los símbolos se enumeran según su orden de aparición en el texto

SÍMBOLO	NOMBRE
\mathbb{R}	Números reales
$[a, b]$	Intervalo cerrado $\{x \mid a \leq x \leq b\}$
(a, b)	Intervalo abierto $\{x \mid a < x < b\}$
$[a, b)$	Intervalo semiabierto $\{x \mid a \leq x < b\}$
$(a, b]$	Intervalo semiabierto $\{x \mid a < x \leq b\}$
$ a $	Valor absoluto de a
\mathbb{Q}	Números racionales
\mathbb{R}^n	Espacio n -dimensional
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	Vectores de la base canónica en \mathbb{R}^3
$\ a\ $	Norma de un vector \mathbf{a}
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Producto escalar de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b}
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	Producto vectorial de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b}
(r, θ, z)	Coordenadas cilíndricas
(ρ, θ, ϕ)	Coordenadas esféricas
$D_r(\mathbf{x}_0)$	Disco de radio r alrededor de \mathbf{x}_0
$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0}$	Límite cuando \mathbf{x} tiende a \mathbf{x}_0
$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow b^- \\ \partial f}} \frac{f}{\partial x}$	Límite por la izquierda; $x \rightarrow b$ por la izquierda
$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$	Derivada parcial de f con respecto a \mathbf{x}
∇f	Derivada de f en el punto \mathbf{x}_0
C^1	grad f , gradiente de la función f
\mathbf{c}	Diferenciable con continuidad
C^2	Una trayectoria
$Hf(x_0)$	Diferenciable con continuidad dos veces
∇	Hessiano de f en el punto \mathbf{x}_0
$\nabla \cdot \mathbf{F}$	del o nabla
$\nabla \times \mathbf{F}$	div \mathbf{F} , divergencia de \mathbf{F}
∇^2	rot \mathbf{F} , rotacional de \mathbf{F}
$\iint_D f \, dA = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$	Laplaciano
$\iiint_W f \, dV = \iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$	Integral doble
$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$	Integral triple
\mathbf{c}_{op}	Jacobiano
$\int_C f \, ds$	Trayectoria opuesta
$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$	Integral sobre una superficie
$\iint_S f \, dS$	Integral de línea
$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$	Integral escalar sobre una superficie
	Integral vectorial sobre una superficie
