Demostración Aunque este resultado resulta claro geométricamente, es útil proporcionar una demostración utilizando la desigualdad de Cauchy–Schwarz, ya que la prueba se puede generalizar al caso de vectores n-dimensionales. Primero elevamos el lado izquierdo al cuadrado:

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2.$$

Usando la desigualdad de Cauchy–Schwarz, tenemos

$$\|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\|^2 = (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2.$$

Por tanto,

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 \leq (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2;$$

tomando la raíz cuadrada en ambos lados se obtiene el resultado. ■

Ejemplo 9

(a) Verificar la desigualdad triangular para $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

(b) Demostrar que $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}-\mathbf{w}\| + \|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|$ para cualesquiera vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Ilustrarlo con un dibujo en el que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tengan el mismo origen.

Solución

(a) Tenemos que $\mathbf{a}+\mathbf{b} = 3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, por lo que $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$. Por otro lado, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2}$ y $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{6}$, así que la desigualdad triangular asegura que $\sqrt{14} \leq \sqrt{2}+\sqrt{6}$. Los números confirman esta afirmación: $\sqrt{14} \approx 3{,}74$, mientras que $\sqrt{2}+\sqrt{6} \approx 1{,}41+2{,}45 = 3{,}86$.

(b) Sabemos que $\mathbf{u}-\mathbf{v} = (\mathbf{u}-\mathbf{w}) + (\mathbf{w}-\mathbf{v})$, por lo que el resultado se sigue de la desigualdad triangular al reemplazar $\mathbf{a}$ por $\mathbf{u}-\mathbf{w}$ y $\mathbf{b}$ por $\mathbf{w}-\mathbf{v}$. Geométricamente, estamos considerando el triángulo sombreado de la Figura 1.2.13. ▲

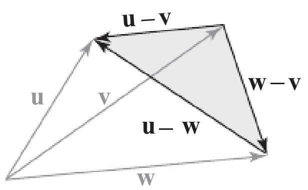

Figura 1.2.13 Ilustración de la desigualdad $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}-\mathbf{w}\| + \|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|$.

Aplicaciones de los vectores a la física

Un ejemplo sencillo de una magnitud física representada por un vector es un desplazamiento. Supongamos que en una parte de la superficie terrestre, suficientemente pequeña para poder considerarla plana, introducimos coordenadas de modo que el eje x apunte al este, el eje y apunte al norte y la unidad de longitud sea el kilómetro. Si nos encontramos en el punto P y deseamos ir al punto Q, el ***vector desplazamiento*** $\mathbf{d} = \overrightarrow{PQ}$ que une P con Q nos dice en qué sentido y qué distancia tenemos que recorrer. Si x e y son las componentes de este vector, el desplazamiento de P a Q es “x kilómetros al este, y kilómetros al norte.”

Ejemplo 10

Supongamos que dos navegantes que no pueden verse entre sí, pero sí pueden comunicarse por radio, desean determinar la posición relativa de sus barcos. Explicar cómo pueden hacerlo si cada uno de ellos es capaz de determinar su vector desplazamiento con respecto al mismo faro.

Solución

Sean P_1 y P_2 las posiciones de los barcos y sea Q la posición del faro. El desplazamiento del faro con respecto al barco i-ésimo es el vector $\mathbf{d}_i$