Demostración

La ley de los cosenos (vea el problema 3.4.10) establece que en el triángulo de la figura 4.12

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

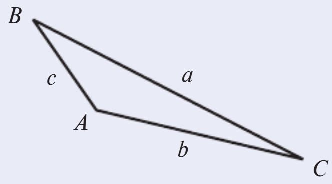

Figura 4.12

Triángulo con lados *a*, *b* y *c*.

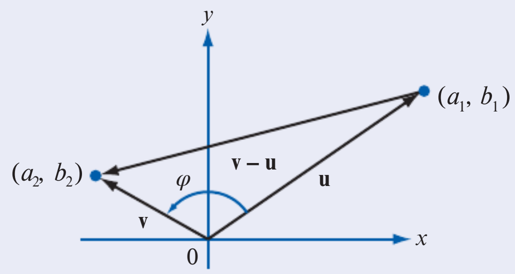

Figura 4.13

Triángulo con lados $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ y $|\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Ahora se colocan las representaciones de **u** y **v** con los puntos iniciales en el origen de manera que $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$ (vea la figura 4.13). Entonces de la ley de los cosenos, $|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2 - 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos \varphi$. Pero

$$\begin{aligned} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 &\overset{\text{de (4.2.2)}}{=} (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \overset{\text{teorema 2.2.1 iii)}}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &= |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + |\mathbf{u}|^2 \end{aligned}$$

Así, después de restar $|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2$ en ambos lados de la igualdad, se obtiene $-2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -2|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}| \cos \varphi$, y el teorema queda demostrado.

Observación. Haciendo uso de la ecuación 4.2.3 se puede definir el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ como

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}| \cos \varphi}$$

EJEMPLO 4.2.1 Cálculo del ángulo entre dos vectores

Encuentre el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

SOLUCIÓN ► $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -14 + 3 = -11$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50}$. Así,

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|} = \frac{-11}{\sqrt{13}\sqrt{50}} = \frac{-11}{\sqrt{650}} \simeq -0.431455497^{*}$$

de manera que

$$\varphi = \cos^{-1}(-0.431455497) \simeq 2.0169^{**} (\approx 115.6°)$$

Nota. Como $0 \le \varphi \le \pi$, $\cos^{-1}(\cos \varphi) = \varphi$.

* Estas cifras, al igual que otras en el libro, se obtuvieron con una calculadora.

** Al hacer este cálculo, asegúrese que su calculadora esté en modo de radianes.