Por lo tanto, $x_3 = x_1$, $x_2 = 2x_1$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, de manera que $E_3 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Observación. En éste y otros ejemplos existe un número infinito de formas de elegir el vector característico. Se seleccionó arbitrariamente un ejemplo sencillo haciendo una o más de las x_i igual a un número conveniente. En este caso, una de las x_i se hizo igual a 1. Otra selección común es escalar el vector característico para que sea unitario.

EJEMPLO 8.1.5 Una matriz de 2 × 2 con uno de sus valores característicos iguales a cero

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4)$. Así, los valores característicos son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 4$. El espacio característico correspondiente a cero es simplemente el espacio nulo de A. Se calcula $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de manera que $2x_1 = x_2$ y un vector característico es $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $E_0 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$. Al analizar lo que corresponde a $\lambda_2 = 4$ se tiene $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de manera que $E_4 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$.

EJEMPLO 8.1.6 Una matriz de 2 × 2 con valores característicos conjugados complejos

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ y

$$\lambda = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Así, $\lambda_1 = 1 + i$ y $\lambda_2 = 1 - i$. Se calcula

$$[A - (1+i)I]\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observe que las columnas de esta matriz son linealmente dependientes porque $\begin{pmatrix} -5 \\ -2-i \end{pmatrix} = (-2-i)\begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}$ y se obtiene $(2-i)x_1 - 5x_2 = 0$ y $x_1 + (-2-i)x_2 = 0$. Entonces $x_1 = (2+i)x_2$, lo que lleva al vector característico $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$ y $E_{1+i} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

De manera similar, $[A - (1-i)I]\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2+i & -5 \\ 1 & -2+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o $x_1 + (-2+i)x_2 = 0$, lo que lleva a $x_1 = (2-i)x_2$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}$ y $E_{1-i} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.