44. Utilizar el criterio de la derivada segunda para demostrar que el punto crítico de f es un punto de mínimo.

45. Utilizar el método de los mínimos cuadrados para determinar la recta que mejor se ajusta a los puntos $(0,1), (1,3), (2,2), (3,4)$ y $(4,5)$. Dibujar los puntos y la recta.[16]

46. La ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

donde c es una constante, se usa en el estudio de la flexión de una viga degalda. Demostrar que

$$u(x,t) = \operatorname{sen}(\lambda \pi x)\cos(\lambda^2\pi^2 ct)$$

es una solución para cualquier elección del parámetro λ.

47. La ecuación de Kortweg–DeVries

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

surge en el modelado de las ondas superficiales en el agua (denominadas **solitones**). Demostrar que

$$u(x,t) = 12a^2 \operatorname{sech}^2(ax - 4a^3 t)$$

es una solución a la ecuación de Kortweg–DeVries.

48. La ecuación para la conducción de calor en dos dimensiones es

$$k(u_{xx} + u_{yy}) = u_t.$$

Suponiendo que $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$, hallar las ecuaciones diferenciales ordinarias satisfechas por $X(x), Y(y)$ y $T(t)$.

49. La ecuación para la conducción de calor en dos dimensiones se puede expresar en coordenadas polares como sigue

$$k\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right) = u_t.$$

Suponiendo que $u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, hallar las ecuaciones diferenciales ordinarias satisfechas por $R(r), \Theta(\theta)$ y $T(t)$.

[16] El método de los mínimos cuadrados se puede modificar y generalizar de varias formas. La idea básica se puede aplicar a las ecuaciones de curvas más complicadas que las rectas. Por ejemplo, esto se puede hacer para hallar la parábola que mejor se ajusta a un conjunto de datos dado. Estas ideas también formaron parte de los fundamentos del desarrollo de la cibernética por parte de Norbert Wiener. Otra versión del problema de aproximación por mínimos cuadrados es la siguiente: dada una función f definida e integrable en un intervalo $[a,b]$, hallar un polinomio P de grado $\leq n$ tal que el error cuadrático medio

$$\int_a^b |f(x) - P(x)|^2\, dx$$

sea lo más pequeño posible.