(a) $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3, r \neq 0$; y, en general, $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ y $\nabla(\log r) = \mathbf{r}/r^2$.

(b) $\nabla^2(1/r) = 0, r \neq 0$; y, en general, $\nabla^2 r^n = n(n+1)\, r^{n-2}$.

(c) $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$; y, en general, $\nabla \cdot (r^n \mathbf{r}) = (n+3)\, r^n$.

(d) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$; y, en general, $\nabla \times (r^n\, \mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

39. ¿Son perpendiculares $\nabla \times \mathbf{F}$ y $\mathbf{F}$?

40. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2 y\mathbf{i} + (x^3 + y^3)\mathbf{j}$.

(a) Verificar que rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

(b) Determinar una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ (en el Capítulo 8 se proporcionan técnicas para construir f en general. En este problema debe bastar el método de prueba y error.)

41. Demostrar que las partes real e imaginaria de cada una de las siguientes funciones complejas forman las componentes de un campo vectorial irrotacional e incompresible en el plano; aquí $i = \sqrt{-1}$.

(a) $(x - iy)^2$

(b) $(x - iy)^3$

(c) $e^{x-iy} = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y)$

Ejercicios de repaso del Capítulo 4

Para los Ejercicios 1 a 4, calcular el vector velocidad, el vector aceleración, la rapidez y la ecuación de la recta tangente en el punto indicado.

1. $\mathbf{c}(t) = (t^3 + 1, e^{-t}, \cos(\pi t/2))$, en $t = 1$

2. $\mathbf{c}(t) = (t^2 - 1, \cos(t^2), t^4)$, en $t = \sqrt{\pi}$

3. $\mathbf{c}(t) = (e^t, \operatorname{sen} t, \cos t)$, en $t = 0$

4. $\mathbf{c}(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, en $t = 2$

5. Calcular los vectores tangente y aceleración para la hélice $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ en $t = \pi/4$.

6. Calcular los vectores tangente y aceleración para la cicloide $\mathbf{c}(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$ en $t = \pi/4$ y dibujarlos.

7. Sea una partícula de masa m que se mueve sobre la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t^2, \operatorname{sen} t, \cos t)$. Calcular la fuerza que actúa sobre la partícula en $t = 0$.

8. (a) Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria con $\|\mathbf{c}(t)\| =$ constante; es decir, la curva está en una esfera. Demostrar que $\mathbf{c}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{c}(t)$.

(b) Sea $\mathbf{c}$ una trayectoria cuya rapidez nunca es igual a cero. Demostrar que $\mathbf{c}$ tiene una rapidez constante si y solo si el vector aceleración $\mathbf{c}''$ es siempre perpendicular al vector velocidad $\mathbf{c}'$.

9. Sea $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \sqrt{3}t)$ una trayectoria en $\mathbb{R}^3$.

(a) Hallar la velocidad y la aceleración de esta trayectoria.

(b) Hallar una parametrización para la línea tangente a esta trayectoria en $t = 0$.

(c) Hallar la longitud de arco de esta trayectoria para $t \in [0, 2\pi]$.

10. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (\operatorname{sen}(xz), e^{xy}, x^2 y^3 z^5)$.

(a) Hallar la divergencia de $\mathbf{F}$.

(b) Hallar el rotacional de $\mathbf{F}$.

11. Comprobar que el campo de la fuerza gravitacional $\mathbf{F}(x, y, z) = -A\dfrac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, donde A es constante, es irrotacional fuera del origen.

12. Demostrar que el campo vectorial $\mathbf{V}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$ no es el rotacional de ningún campo vectorial.

13. Expresar la longitud de arco de la curva $x^2 = y^3 = z^5$ entre $x = 1$ y $x = 4$ como una integral, utilizando una parametrización adecuada.

14. Hallar la longitud de arco de $\mathbf{c}(t) = t\mathbf{i} + (\log t)\mathbf{j} + 2\sqrt{2t}\mathbf{k}$ para $1 \leq t \leq 2$.