3. Una función lineal apropiada T está dada por $T(x,y) = \left(x, -\frac{x}{3} + \frac{2y}{3}\right)$, o en forma matricial, como:

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \mathbf{v}.$$

5. $S =$ el disco unidad menos su centro.

7. $D = [0,3] \times [0,1]$; sí.

9. La imagen es el triángulo con vértices en (0, 0), (0, 1) y (1, 1). T no es inyectiva, pero lo es si eliminamos la porción $x^* = 0$.

11. D es el conjunto de los (x,y,z) tales que $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ (la bola unidad). T no es inyectiva, pero sí lo es en $(0,1] \times (0,\pi) \times (0,2\pi]$.

13. Demostrar que T es sobreyectiva es equivalente en el caso 2×2 a demostrar que el sistema $ax + by = e$, $cx + dy = f$ siempre se puede resolver para x e y, donde

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Si se hace esto por eliminación o por la regla de Cramer, la cantidad por la que debemos dividir es $\det A$. Por tanto, si $\det A \neq 0$, las ecuaciones siempre se pueden resolver.

15. Supongamos que $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y})$. Entonces

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} + \mathbf{v} &= A\mathbf{y} + \mathbf{v} \\ A\mathbf{x} &= A\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Por el Ejercicio 12, esto implica que $x = y$ si y solo si $\det A \neq 0$.

Demostrar que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ es equivalente a demostrar que

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{y}$$

o

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{v}$$

tiene una solución para cualquier elección de $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Por el Ejercicio 13, esto ocurre si y solo si $\det A \neq 0$. Por último, exactamente como en el Ejercicio 14, verificar que T aplica paralelogramos a paralelogramos, simplemente aplicando T a ambos lados de la ecuación dada y simplificando.

17. El determinante jacobiano de T es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} 2r\cos 2\theta & -2r^2 \operatorname{sen} 2\theta \\ 2r \operatorname{sen} 2\theta & -2r^2\cos 2\theta \end{vmatrix} = 4r^3$$

que solamente se anula para $r = 0$. Para ver que T no es inyectiva es suficiente encontrar dos puntos que tengan la misma imagen, por ejemplo, $(-\frac{1}{2}, 0)$ y $(\frac{1}{2}, 0)$.

Sección 6.2

1. Una buena sustitución sería $u = 3x + 2y$, $v = x - y$, cuyo jacobiano es $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{5}$.

3. $\pi(e-1)$.

5. D es la región $0 \le x \le 4$, $\dfrac{1}{2}x + 3 \le y \le \dfrac{1}{2}x + 6$.
(a) 140 (b) -42

7. D^* es la región $0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2$; $\dfrac{2}{3}(9 - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$.

9. Como

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 4u^2 + 4v^2$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \iint_{D^*} \frac{4u^2 + 4v^2}{\sqrt{(u^2+v^2)^2}}\, dudv \\ &= \iint_{D^*} 4dudv. \end{aligned}$$

11. $\dfrac{64\pi}{5}$.

13. $3\pi/2$.

15. $\dfrac{5\pi}{2}(e^4 - 1)$.

17. $2a^2$.

19. $\dfrac{21}{2}\left(e - \dfrac{1}{e}\right)$.

21. $\dfrac{100\pi}{3}$.

23. $4\pi[\sqrt{3}/2 - \log(1+\sqrt{3}) + \log\sqrt{2}]$.

25. $4\pi\log(a/b)$.

27. 0.

29. $2\pi[(b^2+1)e^{-b^2} - (a^2+1)e^{-a^2}]$.

31. 24.