Teorema 2.3.1

Sean $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ soluciones al sistema no homogéneo (2.3.4). Entonces su diferencia $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ es una solución al sistema homogéneo asociado (2.3.5).

Demostración

$$A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \overset{\substack{\text{por la ley distributiva} \\ (2.2.7)}}{=} A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Corolario

Sea $\mathbf{x}$ una solución particular al sistema no homogéneo (2.3.4) y sea $\mathbf{y}$ otra solución a (2.3.4). Entonces existe una solución $\mathbf{h}$ al sistema homogéneo (2.3.5) tal que

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h} \tag{2.3.6}$$

Demostración

Si $\mathbf{h}$ está definida por $\mathbf{h} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, entonces $\mathbf{h}$ es una solución de (2.3.5) por el teorema 2.3.1 y $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h}$.

Observación

Un resultado muy similar se cumple para las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas (vea los problemas 30 y 31). Una de las bondades de las matemáticas es que temas en apariencia muy diferentes pueden tener una fuerte interrelación.

El teorema 2.3.1 y su corolario son muy útiles. Establecen que

> Con objeto de encontrar todas las soluciones al sistema no homogéneo (2.3.4), basta con encontrar una solución a (2.3.4), que llamaremos solución particular (x_p), y todas las soluciones al sistema homogéneo asociado (2.3.5), que llamaremos solución homogénea (x_h).

EJEMPLO 2.3.2 Cómo escribir un número infinito de soluciones como una solución particular a un sistema no homogéneo más las soluciones al sistema homogéneo

Encuentre todas las soluciones al sistema no homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 1 \\ -x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

usando el resultado anterior.

SOLUCIÓN ► Primero, se encuentra una solución mediante la reducción por renglones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ -1 & -3 & 8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \end{array}\right)$$