Demostración

U y L se obtienen como en el ejemplo 2.7.1. Sólo es necesario probar la unicidad en el caso de que A sea invertible. Como U tiene n pivotes, su forma escalonada por renglones también tiene n pivotes (para verificar esto divida cada renglón de U por el pivote en ese renglón). Entonces, de acuerdo con el teorema de resumen en la página 134, U es invertible.

Para demostrar que L es invertible, considere la ecuación $L\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se deduce que $x_1 = 0$, $a_{21}x_1 + x_2 = 0$, etc., lo que demuestra que $x_1 = x_2 \cdots = x_n = 0$ y L es invertible por el teorema de resumen. Para demostrar la unicidad, suponga que $A = L_1U_1 = L_2U_2$. Entonces

$$\begin{aligned} U_1U_2^{-1} &= (L_1^{-1}L_1)(U_1U_2^{-1}) = L_1^{-1}(L_1U_1)U_2^{-1} = L_1^{-1}(L_2U_2)U_2^{-1} \\ &= (L_1^{-1}L_2)(U_2U_2^{-1}) = L_1^{-1}L_2 \end{aligned}$$

Por el resultado del problema 2.4.36, U_2^{-1} es triangular superior y L_1^{-1} es triangular inferior. Todavía más, según el teorema 2.7.1, $L_1^{-1}L_2$ es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal mientras que $U_1U_2^{-1}$ es triangular superior. La única forma en que una matriz triangular superior y una inferior pueden ser iguales es si ambas son diagonales. Como $L_1^{-1}L_2$ tiene unos en la diagonal se ve que

$$U_1U_2^{-1} = L_1^{-1}L_2 = I$$

de lo que se deduce que $U_1 = U_2$ y $L_1 = L_2$.

Uso de la factorización *LU* para resolver un sistema de ecuaciones

Suponga que se quiere resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es invertible. Si A satisface la hipótesis del teorema 2.7.2 se puede escribir

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Como L es invertible, existe un vector único $\mathbf{y}$ tal que $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Como U también es invertible, existe un vector único $\mathbf{x}$ tal que $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Entonces $A\mathbf{x} = L(U\mathbf{x}) = L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ y nuestro sistema está resuelto. Observe que $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ se puede resolver directamente mediante la sustitución hacia adelante, mientras que el sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ se puede resolver por sustitución hacia atrás. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.7.2 Uso de la factorización *LU* para resolver un sistema

Resuelva el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$