$$\text{Área} = |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}\,| = |(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \times (-5\mathbf{i} + 2\mathbf{k})|$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 6 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = |4\mathbf{i} - 32\mathbf{j} - 10\mathbf{k}| = \sqrt{1\,140} \text{ unidades cuadradas.}$$

Interpretación geométrica de los determinantes de 2 × 2 (otra vez)

En la sección 3.1 se estudió el significado geométrico de un determinante de 2 × 2. Ahora se observará el mismo problema. Haciendo uso del producto cruz se obtiene el resultado de la sección 3.1 en forma más sencilla. Sea A una matriz de 2 × 2 y sean **u** y **v** dos vectores de dos componentes. Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Estos vectores están dados en la figura 4.31.

Área generada

El **área generada** por **u** y **v** se define como el área del paralelogramo dado en la figura. Se puede pensar que **u** y **v** son vectores en $\mathbb{R}^3$ que están en el plano xy. Entonces $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, y

$$\text{área generada por } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & u_1 & 0 \\ v_2 & u_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= |(u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k}| = |u_1 v_2 - u_2 v_1|^*$$

Ahora sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}' = A\mathbf{v}$. Entonces $\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix}$.

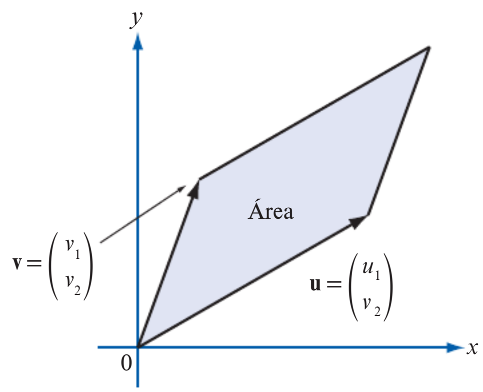

Figura 4.31

El área de la región sombreada es el área generada por **u** y **v**.

¿Cuál es el área generada por **u**′ y **v**′? Se calcula siguiendo los pasos anteriores.

* Observe que éste es el valor absoluto de det $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$.