cio 16 son entonces $a^2+b^2 = c^2+d^2$ y $ac+bd = 0$. Demostrar que $a \neq 0$ y, por un argumento de normalización, demostrar que podemos suponer que $a = 1$. Realizar el resto de cálculos.

27. $2a^2$.

Sección 7.6

1. $\frac{5\pi}{2}$.

3. (a) 54π. (b) 108π.

5. $\pm 48\pi$ (el signo depende de la orientación).

7. 4π.

9. 2π (o -2π, si se elige una orientación diferente).

11. 2π.

13. $12\pi/5$.

15. Con la parametrización en coordenadas esféricas habitual, $\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi = -\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{r}$ (véase el Ejemplo 1). Entonces,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint \mathbf{F}\cdot(\mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_\theta)\,d\phi\,d\theta = \iint (\mathbf{F}\cdot\mathbf{r})\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_r \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta$$

y

$$\iint_S f\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta.$$

17. Para un cilindro de radio $R=1$ y una componente normal F_r,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_a^b\int_0^{2\pi} F_r\,d\theta\,dz.$$

19. $2\pi/3$.

21. $\frac{2}{5}a^3bc\pi$.

Sección 7.7

1. Aplicar la fórmula (3) de esta sección y simplificar; $H = 0$ y $K = -b^2/(u^2+b^2)^2$.

3. Aplicar la fórmula (3) de esta sección y simplificar.

5. $K = \dfrac{-4a^6b^6}{(a^4b^4+4b^4u^2+4a^4v^2)^2}$.

7. Utilizando la parametrización estándar del elipsoide $\Phi(u,v) = (a\cos u \operatorname{sen} v, a\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v, c\cos v)$, $u \in [0,2\pi]$, $v \in [0,\pi]$ del Ejercicio 6 determinar que la curvatura de Gauss del elipsoide es:

$$K = \frac{a^4c^2}{(a^4\cos^2 v + a^2c^2\cos^2 u\operatorname{sen}^2 v + a^2c^2\operatorname{sen}^2 u\operatorname{sen}^2 v)^2} = \frac{a^4c^2}{(a^4\cos^2 v + a^2c^2\operatorname{sen}^2 v)^2}.$$

Entonces, el elemento de área para el elipsoide está dado por:

$$T_u \times T_v = \operatorname{sen} v\sqrt{a^4\cos^2 v + a^2c^2\operatorname{sen}^2 v}.$$

Esto lleva a la integral:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^4c^2\operatorname{sen} v}{(a^4\cos^2 v + a^2c^2\operatorname{sen}^2 v)^{\frac{3}{2}}}\,du\,dv.$$

Para calcular esta integral, la expresamos en una de las formas estándar disponibles en las tablas de este texto:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^4c^2\operatorname{sen} v}{(a^4\cos^2 v + a^2c^2\operatorname{sen}^2 v)^{\frac{3}{2}}}\,du\,dv$$
$$= 2\pi\int_0^{\pi} \frac{a^4c^2\operatorname{sen} v}{a^3(a^2\cos^2 v + c^2\operatorname{sen}^2 v)^{\frac{3}{2}}}\,dv$$
$$= 2\pi ac^2\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} v}{(a^2\cos^2 v + c^2(1-\cos^2 v))^{\frac{3}{2}}}\,dv$$
$$= 2\pi ac^2\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} v}{((a^2-c^2)\cos^2 v + c^2)^{\frac{3}{2}}}\,dv$$
$$= \frac{2\pi ac^2}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} v}{\left(\cos^2 v + \frac{c^2}{a^2-c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\,dv.$$

Ahora, aplicamos la siguiente sustitución $w = \cos v$:

$$\frac{2\pi ac^2}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} v}{\left(\cos^2 v + \frac{c^2}{a^2-c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\,dv$$
$$= \frac{2\pi ac^2}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left((w)^2 + \left(\sqrt{\frac{c^2}{a^2-c^2}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dw.$$