Teorema 11 Regla de la cadena Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos. Sean $g\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f\colon V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funciones tales que g lleva U en V, de modo que $f \circ g$ está definida. Suponemos que g es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y f es diferenciable en $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$. Entonces $f \circ g$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y

$$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0). \tag{1}$$

El miembro de la derecha es la matriz producto de $\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)$ y $\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$.

A continuación proporcionamos una demostración de la regla de la cadena *bajo la hipótesis adicional de que las derivadas parciales de f son continuas*. Demostramos el caso general desarrollando dos casos especiales que son importantes por sí mismos.

Primer caso especial de la regla de la cadena

Suponemos que $\mathbf{c}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una trayectoria diferenciable y que $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Sea $h(t) = f(\mathbf{c}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$, donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Entonces

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{2}$$

Es decir,

$$\frac{dh}{dt} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t),$$

donde $\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Este es el caso especial del Teorema 11 en el que tomamos $\mathbf{c} = g$, f es una función con valores reales y $m = 3$. Obsérvese que

$$\nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))\mathbf{D}\mathbf{c}(t),$$

donde el producto del lado izquierdo es el producto escalar de vectores, mientras que el producto del lado derecho es una multiplicación de matrices en la que hemos tomado $\mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))$ como matriz *fila* y $\mathbf{D}\mathbf{c}(t)$ como matriz *columna*. Los vectores $\nabla f(\mathbf{c}(t))$ y $\mathbf{c}'(t)$ tienen las mismas componentes que sus equivalentes matriciales; el cambio en la notación indica el cambio de matrices a vectores.

Demostración de la ecuación (2) Por definición,

$$\frac{dh}{dt}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}.$$

Sumando y restando dos términos, escribimos