

Por ejemplo, las dos 3-cadenas del vértice 4 al vértice 2 son

$$V_4 \rightarrow V_3 \rightarrow V_4 \rightarrow V_2$$

y

$$V_4 \rightarrow V_2 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2$$

Ambas cadenas son redundantes. Las dos 3-cadenas del vértice 5 al vértice 1 son

$$V_5 \rightarrow V_4 \rightarrow V_2 \rightarrow V_1$$

y

$$V_5 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_1$$

El siguiente teorema responde la pregunta que se hizo acerca de encontrar la trayectoria más corta entre dos vértices.

Teorema 2.8.2

Sea A una matriz de incidencia de una gráfica dirigida. Sea $a_{ij}^{(n)}$ la componente ij de A^n .

- i) Si $a_{ij}^{(n)} = k$, entonces existen exactamente k n -cadenas del vértice i al vértice j .
- ii) Más aún, si $a_{ij}^{(m)} = 0$ para toda $m < n$ y $a_{ij}^{(n)} \neq 0$, entonces la cadena más corta del vértice i al vértice j es una n -cadena.

EJEMPLO 2.8.6 Cálculo de cadenas mediante las potencias de la matriz de incidencia

En el ejemplo 2.8.2 se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^5 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nota

También se tienen 5-cadenas (todas redundantes) que unen el vértice 2 consigo mismo.

Como $a_{13}^{(1)} = a_{13}^{(2)} = a_{13}^{(3)} = 0$ y $a_{13}^{(4)} = 1$, se observa que la ruta más corta del vértice 1 al vértice 3 es una 4-cadena que está dada por

$$V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_5 \rightarrow V_4 \rightarrow V_3$$