iii) Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que para todo $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$
(el $\mathbf{0}$ se llama **vector cero** o **idéntico aditivo**).

iv) Si $\mathbf{x} \in V$, existe un vector $-\mathbf{x}$ en $\in V$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
($-\mathbf{x}$ se llama **inverso aditivo** de $\mathbf{x}$).

v) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
(**ley conmutativa de la suma de vectores**).

vi) Si $\mathbf{x} \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha\mathbf{x} \in V$
(**cerradura bajo la multiplicación por un escalar**).

vii) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$
(**primera ley distributiva**).

viii) Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)\,\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$
(**segunda ley distributiva**).

ix) Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$
(**ley asociativa de la multiplicación por escalares**).

x) Para cada vector $\mathbf{x} \in V$, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Campo

Los escalares tienen una estructura denominada **campo**, la cual consiste en un conjunto de elementos y dos operaciones binarias (por ejemplo, los número reales y las operaciones de adición y multiplicación). Los números reales con la operación de suma cumplen con los axiomas del grupo abeliano. Además, la multiplicación es asociativa y distributiva por la derecha e izquierda. Existe un elemento neutro llamado unidad, y todo número real diferente de cero tiene un elemento inverso.

Nota

En los problemas 5.1.23 y 5.1.24 se estudian la propiedad de unicidad sobre el elemento neutro aditivo y el elemento inverso aditivo en un espacio vectorial.

EJEMPLO 5.1.1 El espacio $\mathbb{R}^n$

$$\text{Sea } V = \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_j \in \mathbb{R} \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Cada vector en $\mathbb{R}^n$ es una matriz de $n \times 1$. Según la definición de suma de matrices dada en la página 53, $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ es una matriz de $n \times 1$ si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son matrices de $n \times 1$. Haciendo $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ y $-\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$, se observa que los axiomas ii) a x) se obtienen de la definición de suma de vectores (matrices) y el teorema 2.1.1.

Nota

Los vectores en $\mathbb{R}^n$ se pueden escribir indistintamente como vectores renglón o vectores columna.

EJEMPLO 5.1.2 Espacio vectorial trivial

Sea $V = \{0\}$. Es decir, V consiste sólo en el número 0. Como $0 + 0 = 1 \cdot 0 = 0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0 = 0$, se ve que V es un espacio vectorial. Con frecuencia se le otorga el nombre de espacio vectorial **trivial**.