Ejercicios

1. Considérese la superficie cerrada S formada por la gráfica $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$ y el disco unidad en el plano xy. Asignar a esta superficie una normal exterior. Calcular:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, 2y, z)$.

2. Calcular la integral de superficie

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ y S es la superficie parametrizada por $\Phi(u, v) = (2 \operatorname{sen} u, 3 \cos u, v)$, con $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 1$.

3. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

donde S es:

(a) La semiesfera superior de radio 3 centrada en el origen.

(b) La esfera completa de radio 3 centrada en el origen.

4. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. Calcular

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

donde S es el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con $z \in [0, 1]$.

5. La temperatura de un punto en $\mathbb{R}^3$ está dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. Calcular el flujo de calor a través de la superficie $x^2 + z^2 = 2, 0 \leq y \leq 2$, si $k = 1$.

6. Calcular el flujo de calor a través de la esfera unidad S si $T(x, y, z) = x$. ¿Es posible interpretar la respuesta físicamente?

7. Sea S la superficie cerrada formada por la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ y la base $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$. Sea $\mathbf{E}$ el campo eléctrico definido por $\mathbf{E}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$. Hallar el flujo eléctrico a través de S. (SUGERENCIA: descomponer S en dos trozos S_1 y S_2 y calcular $\iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ y $\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ por separado).

8. El campo de velocidades de un fluido está descrito por $\mathbf{F} = \sqrt{y}\mathbf{i}$ (medido en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo atraviesan la superficie $x^2 + z^2 = 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$.

9. Calcular $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la superficie $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1, z \leq 0$ y $\mathbf{F}$ es el campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + zx^3y^2\mathbf{k}$. (La normal unitaria $\mathbf{n}$ apunta hacia arriba).

10. Calcular $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$ y S es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0$. (La normal unitaria $\mathbf{n}$ apunta hacia arriba).

11. Calcular la integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde S es toda la superficie de la semiesfera sólida $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $z \geq 0$ y $\mathbf{F} = (x+3y^5)\mathbf{i}+(y+10xz)\mathbf{j}+(z-xy)\mathbf{k}$. ($S$ está orientada por la normal que apunta hacia el exterior).

12. * Se está construyendo un restaurante en la ladera de una montaña. En la Figura 7.6.11 se muestran los planos del arquitecto.

(a) La pared curvada vertical del restaurante se va a construir de cristal. ¿Cuál es el área de la superficie de esta pared?

(b) El ingeniero consultor informa al desarrollador que el volumen del interior tiene que exceder $\pi R^4/2$, para que sea rentable. ¿Para qué R satisfará la estructura propuesta este requisito?

(c) Durante un día típico de verano, los alrededores del restaurante están sometidos a un campo de temperaturas dado por

$$T(x, y, z) = 3x^2 + (y - R)^2 + 16z^2.$$

Una densidad de flujo de calor $\mathbf{V} = -k\,\nabla T$ (k es una constante que depende del grado de aislamiento que se vaya a utilizar) a través de toda la superficie del restaurante

---

* La resolución de este problema puede llevar bastante tiempo.