Utilice la conclusión del inciso *b*) para probar la observación del inciso *c*). [***Sugerencia:*** Dada la columna de Q seleccione un vector adecuado $\mathbf{x}$ tal que $Q\mathbf{x}$ sea igual a la columna dada.]

2.6 Matrices elementales y matrices inversas

Considere que A es una matriz de $m \times n$. Entonces, como se muestra a continuación, se pueden realizar operaciones elementales con renglones en A multiplicando A por la izquierda por una matriz adecuada. Recordando de la sección 1.2, las operaciones elementales con renglones son:

i) Multiplicar el renglón i por un número c diferente de cero $\quad R_i \to cR_i$

ii) Sumar un múltiplo del renglón i al renglón j $\quad R_j \to R_j + cR_i$

iii) Permutar (intercambiar) los renglones i y j $\quad R_i \rightleftarrows R_j$

Matriz elemental

Definición 2.6.1

Matriz elemental

Una matriz (cuadrada) E de $n \times n$ se denomina una **matriz elemental** si se puede obtener a partir de la matriz identidad, I_n, de $n \times n$ mediante *una sola* operación elemental con renglones.

Notación. Una matriz elemental se denota por E, o por cR_i, $R_j + cR_i$, o por P_{ij} de acuerdo con la forma en que se obtuvo de I. En este caso, P_{ij} (la matriz de permutación) es la matriz obtenida a partir del intercambio de los renglones de i y j de I.

EJEMPLO 2.6.1 **Tres matrices elementales**

Obtenga tres matrices elementales de 3×3.

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3R_2$ Matriz obtenida multiplicando el segundo renglón de I por 3

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_3 - 2R_1$ Matriz obtenida multiplicando el primer renglón de I por –2 y sumándolo al tercer renglón

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightleftarrows R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{23}$ Matriz obtenida permutando el segundo y tercer renglones de I

La prueba del siguiente teorema se deja como ejercicio (vea los problemas 2.6.79 a 2.6.81).