Demostración

Es obvio que si H es un espacio vectorial, entonces las dos reglas de cerradura deben cumplirse. De lo contrario, para demostrar que H es un espacio vectorial, debe demostrarse que los axiomas i) a x) en las páginas 286 y 287 se cumplen bajo las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar definidas en V. Las dos operaciones de cerradura [axiomas i) y iv)] se cumplen por hipótesis. Como los vectores en H son también vectores en V, las identidades asociativa, conmutativa, distributiva y multiplicativa [axiomas ii), v), vii), viii), ix) y x)] se cumplen. Sea $\mathbf{x} \in H$. Entonces $0\mathbf{x} \in H$ por hipótesis ii). Pero por el teorema 5.1.1 (parte ii), $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$. De este modo, $\mathbf{0} \in H$ y se cumple el axioma iii). Por último, por la parte ii), $(-1)\mathbf{x} \in H$ para todo $\mathbf{x} \in H$. Por el teorema 5.1.1 (parte iv), $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x} \in H$, de manera que se cumple el axioma iv) y la prueba queda completa.

Este teorema demuestra que para probar si H es o no un subespacio de V, es suficiente verificar que

$$\boxed{\mathbf{x} + \mathbf{y} \text{ y } \alpha\mathbf{x} \text{ están en } H \text{ cuando } \mathbf{x} \text{ y } \mathbf{y} \text{ están en } H \text{ y } \alpha \text{ es un escalar.}}$$

La prueba anterior contiene un hecho que por su importancia merece ser mencionado de forma explícita:

$$\boxed{\text{Todo subespacio de un espacio vectorial } V \text{ contiene al } \mathbf{0}.} \qquad (5.2.1)$$

Este hecho con frecuencia facilitará la averiguación de si un subconjunto de V en particular *no* es un subespacio de V. Es decir, si un subconjunto no contiene al $\mathbf{0}$, entonces no es un subespacio. Note que el vector cero en H, un subespacio de V, es el mismo que el vector cero en V.

A continuación se mostrarán algunos ejemplos de subespacios.

EJEMPLO 5.2.1 El subespacio trivial

Para cualquier espacio vectorial V, el subconjunto $\{\mathbf{0}\}$ que consiste en el vector cero es únicamente un subespacio ya que $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo número real α [parte i) del teorema 5.1.1]. Esto se denomina **subespacio trivial**.

EJEMPLO 5.2.2 Un espacio vectorial es un subespacio en sí mismo

Para cada espacio vectorial V, V es un subespacio de sí mismo.

Los primeros dos ejemplos muestran que todo espacio vectorial V contiene dos subespacios, $\{\mathbf{0}\}$ y V (que coinciden si $V = \{\mathbf{0}\}$). Es más interesante encontrar otros subespacios. Los subespacios distintos a $\{\mathbf{0}\}$ y **V** se denominan **subespacios propios**.

Subespacios propios

EJEMPLO 5.2.3 Un subespacio propio de $\mathbb{R}^2$

Sea $H = \{(x, y): y = mx\}$ (vea el ejemplo 5.1.4). Entonces, como ya se dijo, H es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. En la sección 5.5 (problema 5.5.15) se verá que si H es cualquier subespacio propio de $\mathbb{R}^2$, entonces H consiste en el conjunto de puntos que se encuentran sobre una recta que pasa por el origen; es de-