Si $\mathbf{y}$ es un vector tal que $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$, entonces los cálculos anteriores demuestran que $\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b}$. Es decir, $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Se ha demostrado lo siguiente:

**Teorema 2.4.4 Solución de sistemas de ecuaciones lineales en términos de su matriz inversa**

$$\text{Si } A \text{ es invertible, el sistema } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ tiene una solución única } \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad (2.4.2)$$

Ésta es una de las razones por la que se estudian las matrices inversas.

Ya que se ha definido la inversa de una matriz, surgen dos preguntas básicas.

**Pregunta 1.** ¿Qué matrices tienen inversa?

**Pregunta 2.** Si una matriz tiene inversa ¿cómo se puede calcular?

En la presente sección se contestan ambas preguntas. Se comenzará por analizar lo que ocurre en el caso $2 \times 2$.

### EJEMPLO 2.4.2 Cálculo de la inversa de una matriz de $2 \times 2$

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$. Calcule $A^{-1}$ si existe.

**SOLUCIÓN ►** Suponga que $A^{-1}$ existe. Se escribe $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ y se usa el hecho de que $AA^{-1} = I$. Entonces

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3z & 2y - 3w \\ -4x + 5z & -4y + 5w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las dos últimas matrices pueden ser iguales únicamente si cada una de sus componentes correspondientes son iguales. Esto significa que

$$2x - 3z = 1 \quad (2.4.3)$$

$$2y - 3w = 0 \quad (2.4.4)$$

$$-4x + 5z = 0 \quad (2.4.5)$$

$$-4y + 5w = 1 \quad (2.4.6)$$

Éste es un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Observe que hay dos ecuaciones que involucran únicamente a $x$ y a $z$ [las ecuaciones (2.4.3) y (2.4.5)] y dos que incluyen sólo a $y$ y $w$ [las ecuaciones (2.4.4) y (2.4.6)]. Se escriben estos dos sistemas en la forma aumentada:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{array}\right) \quad (2.4.7)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \end{array}\right) \quad (2.4.8)$$