Teorema 5.7.6

El rango de una matriz es igual al número de pivotes en su forma escalonada por renglones.

EJEMPLO 5.7.5 Cálculo de $\rho(A)$ y R_A para una matriz de 3×3

Determine el rango y el espacio de los renglones de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. La forma escalonada por renglones de A es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$. Como B tiene dos pivotes, $\rho(A) = \dim R_A = 2$. Una base para R_A consiste en los primeros dos renglones de B:

$$R_A = \text{gen}\,\{(1, -1, 3), (0, 1, -1)\}$$

El teorema 5.7.5 es útil cuando se quiere encontrar una base para el espacio generado por un conjunto de vectores.

EJEMPLO 5.7.6 Determinación de una base para el espacio generado por cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$

Encuentre una base para el espacio generado por

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN ► Se expresan los vectores como renglones de una matriz A y después se reduce la matriz a la forma escalonada por renglones. La matriz que se obtiene tendrá el mismo espacio de renglones que A. La forma escalonada por renglones de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que tiene dos pivotes.

Entonces, una base para gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Existe un camino relativamente sencillo para encontrar el espacio nulo de una matriz.