lo que nos lleva a

$$D = 2 \cdot 2 = 4 > 0.$$

Puesto que $(\partial^2 f/\partial x^2)(0,0) > 0$, concluimos por el Teorema 6 que $(0,0)$ es un punto de mínimo local. (¿Se puede demostrar esto solo a partir del hecho de que $\log t$ es una función creciente en $t > 0$?) ▲

Ejemplo 8 La gráfica de la función $g(x,y) = 1/xy$ es una superficie S en $\mathbb{R}^3$. Determinar los puntos en S que están más próximos al origen $(0,0,0)$. (Véase la Figura 3.3.6.)

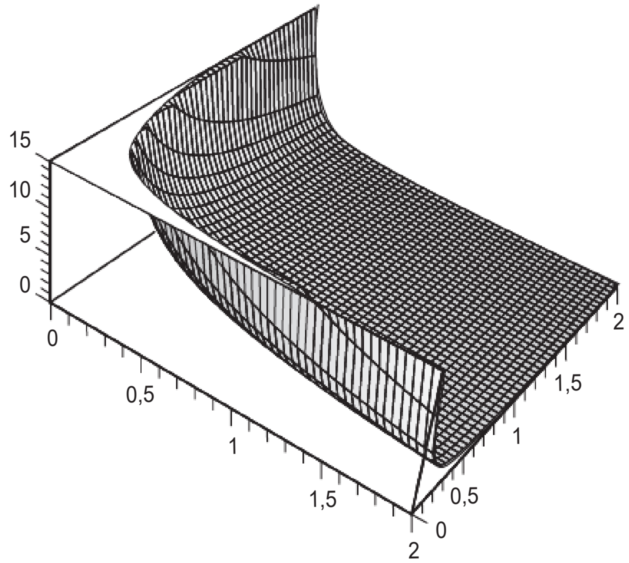

Figura 3.3.6 La superficie $z = 1/xy$ definida en el primer cuadrante del plano xy. (Las figuras en los otros cuadrantes son similares, pero tenga en cuenta que $z < 0$ en el segundo y cuarto cuadrantes.)

Solución Cada punto en S es de la forma $(x, y, 1/xy)$. La distancia de este punto al origen es

$$d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 y^2}}.$$

Es más fácil trabajar con el cuadrado de d, por lo que tomamos $f(x,y) = x^2 + y^2 + (1/x^2 y^2)$, que tendrá el mismo punto de mínimo. Esto se deduce del hecho de que $d(x,y)^2 \geq d(x_0,y_0)^2$ si y solo si $d(x,y) \geq d(x_0,y_0)$. Obsérvese que $f(x,y)$ se hace muy grande cuando x e y se hacen cada vez mayores; $f(x,y)$ también se hace muy grande cuando (x,y) se aproxima a los ejes x o y donde f no está definida, por lo que f debe alcanzar un mínimo en algún punto crítico. Los puntos críticos están determinados por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{2}{x^3 y^2} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \frac{2}{y^3 x^2} = 0,$$