siglo XIX, los matemáticos estudiaron las matrices y determinantes, ambos temas se consideraron como disciplinas distintas. Para conocer toda la historia hasta 1900, consulte T. Muir, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* (reimpreso por Dover, Nueva York, 1960).

Producto vectorial

Una vez establecidas las propiedades necesarias de los determinantes y expuesta su historia, estamos preparados para estudiar el producto vectorial.

Definición Producto vectorial Supongamos que $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$. El ***producto vectorial*** o ***producto cruz*** de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, denotado por $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, se define como el vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k},$$

o, formalmente,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Aunque únicamente hemos definido los determinantes para matrices de números *reales*, esta expresión formal que incluye *vectores* es una buena ayuda para recordar el producto vectorial.

Ejemplo 4 Hallar $(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

Solución

$$(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

▲

Algunas propiedades algebraicas del producto vectorial se deducen de la definición. Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores y α, β y γ son escalares, entonces

(I) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$

(II) $\mathbf{a} \times (\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \beta(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{a} \times \mathbf{c})$ y $(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Observe que $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = -(\mathbf{a}\times\mathbf{a})$, por la propiedad (i). Por tanto, $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$. En particular,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$