Resumen: fórmulas para integrales de superficie

1. **Superficie parametrizada:** $\mathbf{\Phi}(u, v)$

a. Integral de una función escalar f:

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(\mathbf{\Phi}(u,v))\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\,du\,dv$$

b. Elemento de superficie escalar:

$$dS = \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\,du\,dv$$

c. Integral de un campo vectorial $\mathbf{F}$:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\,du\,dv$$

d. Elemento de superficie vectorial:

$$d\mathbf{S} = (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\,du\,dv = \mathbf{n}\;dS$$

2. **Gráfica**: $z = g(x, y)$

a. Integral de una función escalar f:

$$\iint_S f\;dS = \iint_D \frac{f(x, y, g(x, y))}{\cos\theta}\;dx\;dy$$

b. Elemento de superficie escalar:

$$dS = \frac{dx\;dy}{\cos\theta} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}\;dx\;dy,$$

donde $\cos\theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$, y $\mathbf{n}$ es un vector normal unitario a la superficie.

c. Integral de un campo vectorial $\mathbf{F}$:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-F_1\frac{\partial g}{\partial x} - F_2\frac{\partial g}{\partial y} + F_3\right)\,dx\;dy$$

d. Elemento de superficie vectorial:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot dS = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)\,dx\;dy$$

3. **Esfera:** $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

a. Elemento de superficie escalar:

$$dS = R^2 \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta$$

b. Elemento de superficie vectorial:

$$d\mathbf{S} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})R\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta = \mathbf{r}R\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta = \mathbf{n}R^2\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta$$