Formas del resto En el Teorema 2,

$$R_1(\mathbf{x}_0,\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j\, dt \qquad (5)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{c}_{ij})h_i h_j,$$

donde $\mathbf{c}_{ij}$ es un punto de la recta que une $\mathbf{x}_0$ con $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$.

En el Teorema 3,

$$R_2(\mathbf{x}_0,\mathbf{h}) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j h_k\, dt$$
$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k}(\mathbf{c}_{ijk})h_i h_j h_k, \qquad (5')$$

donde $\mathbf{c}_{ijk}$ es un punto de la recta que une $\mathbf{x}_0$ con $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$.

Las fórmulas con $\mathbf{c}_{ij}$ y $\mathbf{c}_{ijk}$ (llamadas formas de Lagrange del resto) se obtienen haciendo uso del *segundo teorema del valor medio para integrales*. Este establece que

$$\int_a^b h(t)g(t)\,dt = h(c)\int_a^b g(t)\,dt,$$

siempre que h y g *sean continuas y* $g \geq 0$ en $[a,b]$; aquí c *es un número entre* a y b.[3] Esto se aplica en la Fórmula (4) para la forma explícita del resto con $h(t) = (\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ y $g(t) = 1 - t$.

La fórmula de Taylor de tercer orden es

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$$
$$+ \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n} h_i h_j h_k \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j\, \partial x_k}(\mathbf{x}_0) + R_3(\mathbf{x}_0,\mathbf{h}),$$

[3] *Demostración* Si $g = 0$, el resultado está claro, por lo que podemos suponer $g \neq 0$; por tanto, podemos suponer que $\int_a^b g(t)\,dt > 0$. Sean M y m los valores máximo y mínimo de h, alcanzados en t_M y t_m, respectivamente. Puesto que $g(t) \geq 0$,

$$m\int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b h(t)g(t)\,dt \leq M\int_a^b g(t)\,dt.$$

Luego, $\left(\int_a^b h(t)g(t)\,dt\right)\Big/\left(\int_a^b g(t)\,dt\right)$ está entre $m = h(t_m)$ y $M = h(t_M)$ y, por tanto, por el teorema de los valores intermedios, es igual a $h(c)$ para algún punto c intermedio. ■