$$= \frac{1}{24 \cdot 15}\left[(3z+1)^5 - 2(3z)^5 + (3z-1)^5\right]\Big|_{z=0}^{1/3}$$

$$= \frac{1}{24 \cdot 15}(2^5 - 2) = \frac{1}{12}.$$

(b)

$$\iiint_B (x+2y+3z)^2 dy\, dz\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1/3} \int_{-1/2}^{0} (x+2y+3z)^2 dy\, dz\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1/3} \left[\frac{(x+2y+3z)^3}{6}\Big|_{y=-1/2}^{0}\right] dz\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1/3} \frac{1}{6}\left[(x+3z)^3 - (x+3z-1)^3\right] dz\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{6}\left\{\left[\frac{(x+3z)^4}{12} - \frac{(x+3z-1)^4}{12}\right]\Big|_{z=0}^{1/3}\right\} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{72}\left[(x+1)^4 + (x-1)^4 - 2x^4\right] dx$$

$$= \frac{1}{72}\frac{1}{5}\left[(x+1)^5 + (x-1)^5 - 2x^5\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{12}.$$

▲

Ejemplo 2 Integrar e^{x+y+z} en la caja $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

Solución Realizamos las integraciones en el orden habitual:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y+z}\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^1 (e^{x+y+z}|_{x=0}^{1})\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (e^{1+y+z} - e^{y+z})\, dy\, dz = \int_0^1 \left[e^{1+y+z} - e^{y+z}\right]_{y=0}^{1} dz$$

$$= \int_0^1 \left[e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^z\right] dz = \left[e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^z\right]_0^1$$

$$= e^3 - 3e^2 + 3e - 1 = (e-1)^3.$$

▲

Como en el caso de dos variables, definimos la integral de una función f en una región acotada W definiendo una nueva función f^*, que es igual a f en W y cero fuera de W, y definiendo después

$$\iiint_W f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_B f^*(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

donde B es cualquier caja que contenga a la región W.