40. Demuestre que $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$. [*Sugerencia:* Escríbalo en términos de componentes.]

41. Utilice las propiedades 3.2.1, 3.2.4, 3.2.2 y 3.2.3 (en ese orden) para probar los incisos i), ii), iii) y iv) del teorema 4.4.2.

42. Pruebe el teorema 4.4.2 inciso v) escribiendo las componentes de cada lado de la igualdad.

43. Pruebe el teorema 4.4.2 inciso vi). [*Sugerencia:* Utilice los incisos ii) y v) y la propiedad de que el producto escalar es conmutativo para demostrar que $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = -\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$.]

44. Pruebe el teorema 4.4.2 inciso vii). [*Sugerencia:* Use el teorema 4.3.3, la propiedad 3.2.6, y la ecuación (4.4.2).]

45. Demuestre que si $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ y $\mathbf{w} = (a_3, b_3, c_3)$, entonces

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

46. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $3\mathbf{i}+2\mathbf{k}$, $-7\mathbf{j}+3\mathbf{k}$.

47. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$, donde $P = (5, 1, 3)$, $Q = (-3, 1, 4)$, $R = (-1, 0, 2)$ y $S = (-3, -1, 5)$.

****48.** El **volumen generado** por tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^3$ está definido como el volumen del paralelepípedo cuyos lados son $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ (como en la figura 4.32). Sea A una matriz de 3×3 y sean $\mathbf{u}_1 = A\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1 = A\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}_1 = A\mathbf{w}$. Demuestre que

Volumen generado

Volumen generado por $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1$ = $(\det A)$(volumen generado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$).

Esto muestra que el determinante de una matriz de 2×2 multiplica el área; el determinante de una matriz de 3×3 multiplica el volumen.

49. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule el volumen generado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.
b) Calcule el volumen generado por $A\mathbf{u}$, $A\mathbf{v}$ y $A\mathbf{w}$.
c) Calcule $\det A$.
d) Demuestre que [volumen en el inciso *b*)] = $(\pm\det A)\times$ [volumen en el inciso *a*)].

50. El **triple producto cruz** de tres vectores en $\mathbb{R}^3$ está definido como el vector $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$. Demuestre que

Triple producto cruz

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$$