21. Aquí, hacemos $D_1 = [0,1] \times [0,1]$ y $D_2 = [1,\infty] \times [1,\infty]$, como indica la sugerencia. En D_1, sean $g(x,y) = \frac{1}{x^\alpha y^\beta}$ y $f(x,y) = \frac{1}{x^\alpha y^\beta + x^\gamma y^\rho}$. Puesto que $x, y \geq 0$, está claro que $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ para todos los puntos de D_1. Por tanto, ya que $\iint_{D_1} g(x,y)\,dx\,dy$ existe por el Ejercicio 5, sabemos que $\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy$ también tiene que existir.

Se puede usar un argumento similar para la región D_2 eligiendo una $g(x,y)$ diferente y aplicando el resultado del Ejercicio 6. Si $\iint f(x,y)\,dx\,dy$ existe en la regiones D_1 y D_2, también existirá en su unión, $D = D_1 \cup D_2$.

Ejercicios de repaso del Capítulo 6

1. (a) $T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u+v \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
(b) $\iint_P f(x,y)\;dx\;dy = 4\iint_S f(2u+v, 2v)\,du\,dv$.

3. 3 (Utilizar el cambio de variables $u = x^2 - y^2, v = xy$).

5. $\frac{1}{3}\pi(4\sqrt{2} - \frac{7}{2})$.

7. $(5\pi/2)\sqrt{15}$.

9. $abc/6$.

11. Cortar con los planos $x + y + z = \sqrt[3]{k/n}$, $1 \leq k \leq n-1, k$ entero.

13. $(25 + 10\sqrt{5})\pi/3$.

15. $(e - e^{-1})/4$ (Utilizar el cambio de variables $u = y - x, v = y + x$).

17. $(9{,}92 \times 10^6)\pi$ gramos.

19. (a) 32.
(b) Esto ocurre en el punto de la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ inscrita en el cubo.

21. $(0, 0, 3a^{4/8})$.

23. $4\pi \ln(a/b)$.

25. $\pi/2$.

27. (a) $9/2$. (b) 64π.

29. Calcular la integral con respecto a y primero en la región $D_{\varepsilon,L} = \{(x,y) | \varepsilon \leq x \leq L, 0 \leq y \leq x\}$ para obtener $I_{\varepsilon,L} = \iint_{D_{\varepsilon,L}} f\;dx\;dy = \int_\varepsilon^L x^{-3/2}(1 - e^{-x})\;dx$. El integrando es positivo y por tanto $I_{\varepsilon,L}$ crece cuando $\varepsilon \to 0$ y $L \to \infty$. Acotar $1 - e^{-x}$ por arriba por x cuando $0 < x < 1$ y por 1 cuando $1 < x < \infty$ para ver que $I_{\varepsilon,L}$ permanece acotada y por tanto debe converger. La integral impropia existe.

31. (a) $1/6$. (b) $16\pi/3$.

33. 2π.

Capítulo 7

Sección 7.1

1. $\gamma(t) = \begin{cases} (3\cos\pi t, 3\,\mathrm{sen}\,\pi t), & t \in [0,1] \\ (6t - 9, 0), & t \in [1,2] \end{cases}$

3. $\gamma(t) = \begin{cases} (t, \mathrm{sen}\,\pi t), & t \in [0,1] \\ (2\pi - \pi t, 0), & t \in [1,2] \end{cases}$

5. $\gamma(t) = (3\cos 2\pi t, 4\,\mathrm{sen}\,2\pi t, 3), \quad t \in [0,1]$.

7. $\gamma(t) = (t, t, t^3), \quad t \in [-3, 2]$, o
$\gamma(t) = (5t - 3, 5t - 3, (5t - 3)^3), \quad t \in [0,1]$.

9.
$$\int_{\mathbf{c}} f(x,y,z)\;ds = \int_I f(x(t), y(t), z(t))\|\mathbf{c}'(t)\|\;dt = \int_0^1 0 \cdot 1\;dt = 0.$$

11. (a) 2. (b) $52\sqrt{14}$.

13. $-\frac{1}{3}(1 + 1/e^2)^{3/2} + \frac{1}{3}(2^{3/2})$.

15. (a) La trayectoria sigue la recta que va de $(0,0)$ a $(1,1)$ y vuelve a $(0,0)$ en el plano xy. Sobre la trayectoria, la gráfica de f es una recta que va de $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$. La integral es dos veces el área del triángulo resultante y es igual a $\sqrt{2}$.

(b)
$$s(t) = \begin{cases} \sqrt{2}(1 - t^4) & \text{cuando} \quad -1 \leq t \leq 0 \\ \sqrt{2}(1 + t^4) & \text{cuando} \quad 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

La trayectoria es

$$\mathbf{c}(s) = \begin{cases} (1 - s/\sqrt{2})(1,1) & \text{cuando } 0 \leq s \leq \sqrt{2} \\ (s/(\sqrt{2} - 1))(1,1) & \text{cuando } \sqrt{2} \leq s \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$$