Ejemplo 2 Si $z = \cos xy + x\cos y = f(x, y)$, hallar las dos derivadas parciales $(\partial z/\partial x)\,(x_0, y_0)$ y $(\partial z/\partial y)(x_0, y_0)$.

Solución En primer lugar, fijamos y_0 y diferenciamos con respecto a x, para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) &= \left.\frac{\partial(\cos xy_0 + x\cos y_0)}{\partial x}\right|_{x=x_0}\\ &= (-y_0 \operatorname{sen} xy_0 + \cos y_0)|_{x=x_0}\\ &= -y_0 \operatorname{sen} x_0 y_0 + \cos y_0.\end{aligned}$$

Del mismo modo, fijamos x_0 y diferenciamos con respecto a y para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) &= \left.\frac{\partial(\cos x_0 y + x_0\cos y)}{\partial y}\right|_{y=y_0}\\ &= (-x_0 \operatorname{sen} x_0 y - x_0 \operatorname{sen} y)|_{y=y_0}\\ &= -x_0 \operatorname{sen} x_0 y_0 - x_0 \operatorname{sen} y_0.\end{aligned}$$

▲

Ejemplo 3 Hallar $\partial f/\partial x$ si $f(x, y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución Por la regla del cociente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y\sqrt{x^2 + y^2} - xy(x/\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2}\\ &= \frac{y(x^2 + y^2) - x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

▲

Una definición de diferenciabilidad que solo requiere la existencia de derivadas parciales resulta insuficiente. Muchos resultados típicos, como la regla de la cadena para funciones de varias variables, no se verificaría, como se demuestra en el Ejemplo 4. Más adelante veremos cómo rectificar esta situación.

Ejemplo 4 Sea $f(x, y) = x^{1/3} y^{1/3}$. Por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

y, de forma análoga, $(\partial f/\partial y)(0, 0) = 0$ (¡No hay formas indeterminadas!). Es necesario utilizar la definición original de derivada parcial porque las funciones $x^{1/3}$ e $y^{1/3}$ no son diferenciables en 0. Supongamos que restringimos f a la recta $y = x$ para obtener $f(x, x) = x^{2/3}$ (véase la Figura 2.3.2). Podemos considerar la sustitución $y = x$ como la composición $f \circ g$ de la función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida por $g(x) = (x, x)$, y $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^{1/3} y^{1/3}$.

Por tanto, la composición $f \circ g$ viene dada por $(f \circ g)(x) = x^{2/3}$. Cada componente de g es diferenciable en x y f tiene derivadas parciales en