22. Demuestre que $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal.

23. Demuestre que si P y Q son matrices ortogonales de $n \times n$, entonces PQ es ortogonal.

24. Verifique el resultado del problema 23 con

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-\sqrt{8}}{3} \\ \frac{\sqrt{8}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

25. Demuestre que si Q es una matriz ortogonal simétrica, entonces $Q^2 = I$.

26. Demuestre que si Q es ortogonal, entonces $\det Q = \pm 1$.

27. Demuestre que para cualquier número real t, la matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & \cos t \\ \cos t & -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$ es ortogonal.

28. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$. Pruebe que $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. [***Sugerencia:*** Si $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, entonces es sencillo encontrar constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ con $c_i \neq 0$ tales que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.]

De los problemas 29 al 37 se dan un subespacio H y un vector $\mathbf{v}$.

*a***)** Calcule $\text{proy}_H\, \mathbf{v}$;
*b***)** encuentre una base ortonormal para $H^\perp$;
*c***)** escriba $\mathbf{v}$ como $\mathbf{h} + \mathbf{p}$ donde $\mathbf{h} \in H$ y $\mathbf{p} \in H^\perp$.

29. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \right\}; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

30. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0 \right\}; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

31. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0 \right\}; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

32. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0, abc \neq 0; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ c \end{pmatrix}$

33. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y - z = 0\}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

34. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \right\}; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

35. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0 \right\}; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$