Supongamos ahora que para cada x,

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x,y)\,dy$$

existe. Denótese por $\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy$. Supongamos además que

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{a+\eta}^{b-\eta}\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

también existe. Denotamos este límite por $\int_a^b\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$. Entonces, si todos los límites existen, *todos los límites deben ser iguales*. Por tanto, si f es integrable y la integral impropia iterada existe, se deduce necesariamente que

$$\iint_D f(x,y)\;dA=\int_a^b\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

En este punto podemos plantearnos: ¿es posible que la existencia de *solo* las integrales iteradas *implique* la integrabilidad de f? A continuación vamos a analizar esta importante cuestión.

Teorema de Fubini para integrales impropias

Con las *integrales*, sucede algo realmente *notable*. A diferencia del caso de los límites iterados (como en el contraejemplo que hemos considerado anteriormente), la existencia de los límites iterados *sí que implica* la integrabilidad de f, siempre que $f\geq 0$. Por tanto, si $f\geq 0$ y si $\int_a^b\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$ existe como límite iterado, entonces f es integrable y

$$\iint_D f(x,y)\;dA=\int_a^b\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Si D es una región x-simple con la coordenada x entre dos funciones ψ_1 y ψ_2, y si

$$\int_c^d\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\;dx\;dy$$

existe como integral impropia, de nuevo se deduce que f es integrable y

$$\iint_D f(x,y)\;dA=\int_c^d\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\;dx\;dy.$$

Todos estos resultados, que son los análogos *impropios* de los Teoremas 4 y 4′ de la Sección 5.3, se conocen como *teorema de Fubini* para integrales impropias, que a continuación enunciamos formalmente.