Además de las vistas en el Capítulo 5, existen otras generalizaciones que veremos en las siguientes secciones.

Supongamos que tenemos una función escalar $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de modo que f envía puntos de $\mathbb{R}^3$ a números reales. Será útil definir la integral de dicha función f a lo largo de una trayectoria $\mathbf{c}\colon I = [a, b] \to \mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Para relacionar este concepto con algo tangible, supongamos que la imagen de $\mathbf{c}$ representa un alambre. Hacemos que $f(x, y, z)$ denote la densidad de masa en (x, y, z) y la integral de f será la masa total del alambre. Si $f(x, y, z)$ indica la temperatura, también podemos utilizar la integral para determinar la temperatura media a lo largo del alambre. En primer lugar, proporcionamos la definición formal de la integral a lo largo de una trayectoria y luego, después del ejemplo, la motivaremos algo más.

Definición Integral a lo largo de una trayectoria La ***integral a lo largo de una trayectoria*** o la ***integral de*** $f(x, y, z)$ ***a lo largo de la trayectoria*** $\mathbf{c}$ está definida cuando $\mathbf{c}\colon I = [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es de clase C^1 y cuando la función compuesta $t \mapsto f(x(t), y(t), z(t))$ es continua en I. Definimos esta integral mediante la ecuación

$$\int_{\mathbf{c}} f\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt.$$

En ocasiones, $\int_{\mathbf{c}} f\, ds$ se denota

$$\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\, ds$$

o

$$\int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt.$$

Si $\mathbf{c}(t)$ solo es a trozos C^1 o $f(\mathbf{c}(t))$ es continua a trozos, definimos $\int_{\mathbf{c}} f\, ds$ dividiendo $[a, b]$ en segmentos sobre los que $f(\mathbf{c}(t))\|\mathbf{c}'(t)\|$ es continua y sumando las integrales sobre los segmentos.

Cuando $f = 1$, recuperamos la definición de la longitud de arco de $\mathbf{c}$. Obsérvese también que para que la definición anterior tenga sentido basta con que f esté definida en la curva imagen C de $\mathbf{c}$ y no necesariamente en todo el espacio.

Ejemplo 1 Sea $\mathbf{c}$ la hélice $\mathbf{c}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ (veáse la Figura 2.4.9) y sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcular la integral $\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\, ds$.

Solución En primer lugar calculamos $\|\mathbf{c}'(t)\|$:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{c}'(t)\| &= \sqrt{\left[\frac{d(\cos t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{d(\operatorname{sen} t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dt}{dt}\right]^2} \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$