(I) $2x - 1 = 2\lambda x$

(II) $2y + 1 = 2\lambda y$

(III) $2z = 2\lambda z$

Si $\lambda = 1$, entonces tendríamos $2x - 1 = 2x$, o $-1 = 0$, lo que es imposible. Podemos suponer que $\lambda \neq 0$ ya que si $\lambda = 0$, solo obtenemos un punto interior como antes. Por tanto, (III) implica que $z = 0$ y

(IV) $x^2 + y^2 = 1$.

Resolviendo (I) y (II) para x e y obtenemos

(V) $x = 1/2(1 - \lambda)$

(VI) $y = -1/2(1 - \lambda)$

Aplicando (IV) podemos resolver para λ, concretamente $\lambda = 1 \pm (1/\sqrt{2})$. Así, a partir de (V) y (VI) tenemos que $x = \pm(1/\sqrt{2})$ e $y = \pm(1/\sqrt{2})$; es decir, tenemos cuatro puntos críticos en ∂U. Evaluando f en cada uno de estos puntos, vemos que el valor máximo para f en ∂U es $1 + 2/\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$ y el valor mínimo es $1 - \sqrt{2}$. El valor de f en $(1/2, -1/2)$ es $-1/2$. Comparando estos valores, observamos que $-1/2 < 1 - \sqrt{2}$, por lo que el mínimo absoluto es $-1/2$, que se alcanza en $(1/2, -1/2)$, y el máximo absoluto es $1 + \sqrt{2}$, que se alcanza en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. ▲

Dos aplicaciones adicionales

Ahora vamos a ver dos aplicaciones adicionales (a la geometría y la economía) de las técnicas matemáticas desarrolladas en esta sección. Comenzamos con un ejemplo geométrico.

Ejemplo 9 Se considera una curva definida por la ecuación

$$\phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1 = 0.$$

Hallar la máxima y la mínima distancia de la curva al origen. Estas son las longitudes de los ***semiejes mayor*** y ***menor*** de esta cuádrica.

Solución El problema es equivalente a hallar los valores extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeta a la condición restrictiva $\phi(x, y) = 0$. Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$2x + \lambda(2Ax + 2By) = 0 \qquad (6)$$

$$2y + \lambda(2Bx + 2Cy) = 0 \qquad (7)$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1. \qquad (8)$$

Sumando x veces la Ecuación (6) a y veces la Ecuación (7), obtenemos

$$2(x^2 + y^2) + 2\lambda(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) = 0.$$