Aplicando otra vez la regla de la cadena a $(f_x)_t$ y $(f_y)_t$ tenemos

$$(f_x)_t = f_{xx}g_t + f_{xy}h_t \quad \text{y} \quad (f_y)_t = f_{yx}g_t + f_{yy}h_t,$$

y por tanto k_{st} pasa a ser

$$\begin{aligned} k_{st} &= (f_{xx}g_t + f_{xy}h_t)g_s + f_x g_{st} + (f_{yx}g_t + f_{yy}h_t)h_s + f_y h_{st} \\ &= f_{xx}g_t\, g_s + f_{xy}(h_t g_s + h_s g_t) + f_{yy}h_t h_s + f_x g_{st} + f_y h_{st}. \end{aligned}$$

Obsérvese que esta última fórmula es simétrica en (s,t), verificándose la igualdad $k_{st} = k_{ts}$. Calculando f_{xx}, f_{xy} y f_{yy}, obtenemos

$$\begin{aligned} k_{st} = {} & (e^x \operatorname{sen} xy + 2ye^x \cos xy - y^2 e^x \operatorname{sen} xy)g_t g_s \\ & + (xe^x \cos xy + e^x \cos xy - xye^x \operatorname{sen} xy)(h_t g_s + h_s g_t) \\ & - (x^2 e^x \operatorname{sen} xy)h_t h_s + (e^x \operatorname{sen} xy + ye^x \cos xy)g_{st} + (xe^x \cos xy)h_{st}, \end{aligned}$$

donde se entiende que $x = g(s,t)$ e $y = h(s,t)$. ▲

Algunas ecuaciones en derivadas parciales

Nota histórica

La Filosofía [Naturaleza] está escrita en este vasto libro que está siempre abierto ante nuestros ojos—me refiero al Universo—pero no lo podemos entender si antes no aprendemos el lenguaje y nos familiarizamos con los símbolos en que está escrito. El libro está escrito en lenguaje matemático y los símbolos son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin cuya ayuda es imposible comprender una sola palabra del mismo; sin los cuales vagabundeamos en vano por un oscuro laberinto. —Galileo

Esta cita ilustra la creencia griega, también popular en tiempos de Galileo, de que la mayor parte de la naturaleza se podría describir mediante las matemáticas. A finales del siglo diecisiete este pensamiento se vio espectacularmente reforzado cuando Newton utilizó su ley de la gravitación para deducir las tres leyes de Kepler del movimiento celeste (véase la Sección 4.1) para explicar las mareas, y para mostrar que la Tierra estaba achatada por los polos. El impacto de esta filosofía sobre las matemáticas fue considerable y muchos matemáticos intentaron “matematizar” la naturaleza. Hasta qué punto impregnan las matemáticas las ciencias físicas hoy día (y de forma creciente, la economía y las ciencias sociales y biológicas) es el testamento del éxito de dichos intentos. A su vez, los intentos de matematizar la naturaleza han llevado a menudo a nuevos descubrimientos matemáticos.

Muchas de las leyes de la naturaleza fueron descritas bien mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO, ecuaciones que implican las derivadas de funciones de una sola variable, tales como las leyes del movimiento de los planetas) o ecuaciones en derivadas parciales (EDP), es decir, ecuaciones que implican derivadas parciales de funciones. Con el fin de proporcionar una cierta perspectiva histórica y la necesaria motivación para estudiar las derivadas parciales, presentamos una breve descripción de tres de las más famosas ecuaciones en derivadas parciales: la ecuación del calor, la ecuación del potencial (o ecuación de Laplace) y la ecuación de ondas.

Ecuación del calor. A principios del siglo diecinueve, el matemático francés Joseph Fourier (1768–1830) abordó el estudio del calor. El flujo de calor tiene aplica-