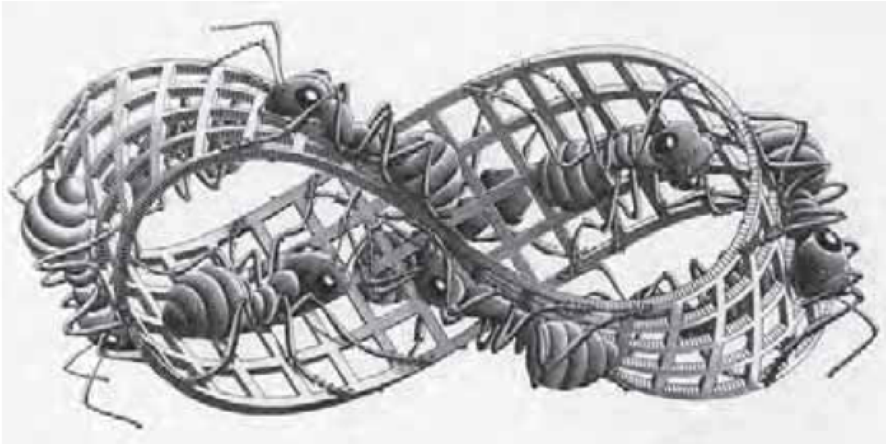

Figura 7.6.4 Hormigas caminando por una banda de M öbius.

Se dice que la parametrización $\mathbf{\Phi}$ ***conserva la orientación*** si tenemos el signo +; es decir, si $(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)/\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \mathbf{n}(\mathbf{\Phi}(u,v))$ en todo $(u,v) \in D$ para el que S es suave en $\mathbf{\Phi}(u,v)$. En otras palabras, $\mathbf{\Phi}$ conserva la orientación si el vector $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ apunta hacia fuera de la superficie. Si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ apunta hacia el interior de la superficie en todos los puntos $(u,v) \in D$ para los que S es regular en $\mathbf{\Phi}(u,v)$, entonces se dice que $\mathbf{\Phi}$ ***invierte la orientación***. Utilizando la notación anterior, esta condición corresponde a la elección $(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)/\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = -\mathbf{n}(\mathbf{\Phi}(u,v))$.

De esta exposición se sigue que la banda de Möbius M no se puede parametrizar mediante una única parametrización para la que $\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{n}$ es continua sobre toda la superficie[13] (si existiera tal parametrización, entonces M tendría dos caras, una determinada por $\mathbf{n}$ y otra determinada por $-\mathbf{n}$). La esfera del Ejemplo 1 se puede parametrizar mediante una única parametrización, pero no mediante una que sea inyectiva en todas partes—véase la explicación al principio de la Sección 7.4.

Por tanto, cualquier superficie parametrizada de forma inyectiva para la que $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ *nunca se anule se puede considerar una superficie orientada con una cara positiva determinada por la dirección de* $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$.

Ejemplo 2 Podemos proporcionar una orientación a la esfera unidad $x^2+y^2+z^2 = 1$ en $\mathbb{R}^3$ (Figura 7.6.5) seleccionando un vector unitario $\mathbf{n}(x,y,z) = \mathbf{r}$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, que apunta hacia el exterior de la superficie. Esta elección corresponde a nuestra idea intuitiva del exterior de la esfera.

Ahora que la esfera S es una superficie orientada, consideremos la parametrización $\mathbf{\Phi}$ de S dada en el Ejemplo 1. El producto vectorial de los vectores tangente $\mathbf{T}_\theta$ y $\mathbf{T}_\phi$—es decir, una normal a S—está dado por

$$(-\operatorname{sen}\phi)[(\cos\theta\operatorname{sen}\phi)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)\mathbf{j} + (\cos\phi)\mathbf{k}] = -\mathbf{r}\operatorname{sen}\phi.$$

[13] Existe una parametrización única que se obtiene cortando una tira de papel, retorciéndola y pegando los extremos, pero da lugar a una $\mathbf{n}$ discontinua sobre la superficie.