22. $V = \mathbb{P}_n$; $H = \{p \in \mathbb{P}_n: p(0) = 0\}$

23. $V = \mathbb{P}_n$; $H = \{p \in \mathbb{P}_n: p(0) = 1\}$

24. $V = C[0, 1]$; $H = \{f \in C[0, 1]: f(0) = f(1) = 0\}$

25. $V = C[0, 1]$; $H = \{f \in C[0, 1]: f(0) = 2\}$

Cálculo

26. $V = C^1[0, 1]$; $H = \{f \in C^1[0, 1]: f'(0) = 0\}$

Cálculo

27. $V = C[a, b]$; donde a y b son números reales y $a < b$; $H = \{f \in C[a, b]: \int_a^b f(x)dx = 0\}$

Cálculo

28. $V = C[a, b]$; $H = \{f \in C[a, b]: \int_a^b f(x)dx = 1\}$

Cálculo

29. $V = C[a, b]$; $H = \{f \in C[a, b]: \int_a^b f^2(x)dx \leq 1\}$

30. Sea $V = \mathbb{M}_{22}$; $H_1 = \{A \in \mathbb{M}_{22}: a_{11} = 0\}$ y $H = \left\{ A \in \mathbb{M}_{nn}; A = \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Demuestre que H_1 y H_2 son subespacios.
b) Describa el subconjunto de $H = H_1 \cap H_2$ y muestre que es un subespacio.

Cálculo

31. Si $V = C[0, 1]$, sea H_1 el subespacio del ejemplo 5.2.10 y H_2 el subespacio del ejemplo 5.2.11. Describa el conjunto $H_1 \cap H_2$ y demuestre que es un subespacio.

Espacio nulo de una matriz

32. Sea A una matriz de $n \times m$ y sea $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m: A\mathbf{x} = 0\}$. Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^m$. H se llama **espacio nulo** de la matriz A.

33. En el problema 32 sea $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m: A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$. Demuestre que H no es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Hiperplano en $\mathbb{R}^4$

34. Sea $H = \{(x, y, z, w): ax + by + cz + dw = 0\}$, donde a, b, c y d son números reales, no todos cero. Demuestre que H es un subespacio propio de $\mathbb{R}^4$. H se llama un **hiperplano en $\mathbb{R}^4$** que pasa por el origen.

Hiperplano en $\mathbb{R}^n$

35. Sea $H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales no todos cero. Demuestre que H es un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$. H se llama un **hiperplano en $\mathbb{R}^n$** que pasa por el origen.

36. Sean H_1 y H_2 subespacios de un espacio vectorial V. Sea $H_1 + H_2 = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ con $\mathbf{v}_1 \in H_1$ y $\mathbf{v}_2 \in H_2\}$. Demuestre que H_1 y H_2 es un subespacio de V.

37. Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Demuestre que $H = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2; a, b \text{ reales}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

***38.** En el problema 37 demuestre que si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son no colineales, entonces $H = \mathbb{R}^2$.

Subespacio generado

***39.** Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores arbitrarios en un espacio vectorial V. Sea $H = \{\mathbf{v} \in V: \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n\}$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares. Demuestre que H es un subespacio de V. H se llama el **subespacio generado** por los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

EJERCICIOS CON MATLAB 5.2

1. *a)* Genere una matriz aleatoria A de 4×4 y sea `S = triu(A) + triu(A)'`. Verifique que S es simétrica.

b) Usando el inciso *a*), genere dos matrices aleatorias de 4×4 reales simétricas, S y T, y un escalar aleatorio, a. Verifique que aS y $S + T$ también son simétricas. Repita para otros cuatro juegos de S, T y a.