SOLUCIÓN ► Del ejemplo 2.7.1, $A = LU$, donde $U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix}$ por lo que $\det A = \det U = (2)(4)(3)(-49) = -1\,176$.

Si A no se puede reducir a la forma triangular sin hacer permutaciones, por el teorema 2.7.3, existe una matriz permutación P tal que

$$PA = LU$$

Es sencillo probar que si P es una matriz permutación, entonces $\det P = \pm 1$ (vea el problema 53 de esta sección). Entonces

$$\begin{aligned} \det PA &= \det LU \\ \det P \det A &= \det L \det U = \det U \qquad \boxed{\det L = 1} \\ \pm \det A &= \det U \\ \det A &= \pm \det U \end{aligned}$$

Teorema 3.2.3

Si $PA = LU$, donde P es una matriz permutación y L y U son como antes, entonces

$$\det A = \frac{\det U}{\det P} = \pm \det U$$

EJEMPLO 3.2.3 Uso de la factorización $PA = LU$ para calcular el determinante de una matriz de 3×3

Encuentre $\det A$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN ► Del ejemplo 2.7.3, se encontró que $PA = LU$, donde

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, $\det P = 1$ y $\det U = (1)(2)(-3)$, de manera que $\det A = \frac{-6}{1} = -6$.

Se establecerá un importante teorema sobre determinantes.

Teorema 3.2.4 $\det A^{\top} = \det A$

Demostración

Suponga que $A = LU$. Entonces $A^{\top} = (LU)^{\top} = U^{\top}L^{\top}$ por el teorema 2.5.1 ii). Se calcula

$$\begin{aligned} \det A &= \det L \det U = \det U \\ \det A^{\top} &= \det U^{\top} \det L^{\top} = \det U^{\top} = \det U = \det A \qquad \boxed{\det L = 1} \end{aligned}$$