$$T\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Es decir, dos vectores diferentes en $\mathbb{R}^3$ tienen la misma imagen en $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 7.4.5 Una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ no es sobre

Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. En este caso, $n = 2$ y $m = 3$, por lo que T no es sobre. Para demostrar esto debe encontrarse un vector en que no esté en la imagen de T. Un ejemplo de vector así es $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Esto es, no existe un vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $T\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Esto se prueba suponiendo que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \\ 5x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Reduciendo por renglones se tiene

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La última línea se lee $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$. Por tanto, el sistema es inconsistente y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ no está en la imagen de T.

Definición 7.4.3

Isomorfismo

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces T es un **isomorfismo** si T es 1-1 y sobre.

Observación

La palabra “isomorfismo” proviene del griego *isomorphus*, que significa “de igual forma” (*iso* = igual; *morphus* = forma).

Definición 7.4.4

Espacios vectoriales isomorfos

Se dice que los espacios vectoriales V y W son isomorfos si existe un isomorfismo T de V sobre W. En este caso se escribe $V \cong W$.

Después de unos ejemplos se verá la relación tan cercana que tienen las “formas” de los espacios vectoriales isomorfos.