Observemos también que por el Teorema 3 de la Sección 7.2, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al mover una partícula de masa m de un punto P_1 a un punto P_2 está dado por

$$V(\mathrm{P}_1) - V(\mathrm{P}_2) = GmM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

donde r_1 es la distancia radial de P_1 desde el origen y r_2 se define de forma similar. ▲

El caso plano

Con la misma demostración, el Teorema 7 también es válido para campos vectoriales $\mathbf{F}$ de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$. En este caso, necesitamos que $\mathbf{F}$ *no* tenga puntos excepcionales; es decir, $\mathbf{F}$ tiene que ser suave en todos los puntos (véase el Ejercicio 16). Obsérvese, no obstante, que la conclusión *puede* seguir siendo válida aunque existan puntos excepcionales, como por ejemplo en el caso del campo $(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/(x^2 + y^2)^{3/2}$. Un ejemplo en el que la conclusión *no* se cumple es $(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, como se demuestra en el Ejercicio 16.

Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, entonces

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

En ocasiones, $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ se denomina ***rotacional escalar*** de $\mathbf{F}$. Por tanto, la condición $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ se reduce a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Así, tenemos:

Corolario 1 $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ de la forma $P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}$ que satisface $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, entonces $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función f en $\mathbb{R}^2$.

Insistimos de nuevo en que este corolario puede ser falso si $\mathbf{F}$ no es de clase C^1 incluso en un único punto (en el Ejercicio 16 se proporciona un ejemplo). Sin embargo, como ya hemos dicho, en $\mathbb{R}^3$ se permiten excepciones en puntos aislados (véase el Teorema 7).

Ejemplo 3

(a) Determinar si el campo vectorial

$$\mathbf{F} = e^{xy}\mathbf{i} + e^{x+y}\mathbf{j}$$

es un campo gradiente.

(b) Repetir el apartado (a) para

$$\mathbf{F} = (2x\cos y)\mathbf{i} - (x^2 \operatorname{sen} y)\mathbf{j}.$$

Solución

(a) En este caso $P(x, y) = e^{xy}$ y $Q(x, y) = e^{x+y}$, y calculamos