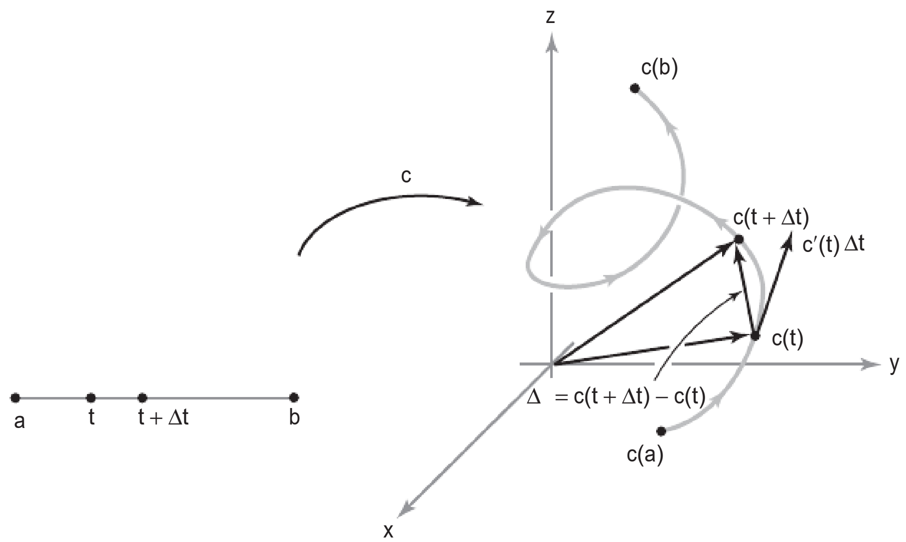

Figura 7.2.1 Para Δt pequeño, $\Delta\mathbf{s} = \mathbf{c}(t+\Delta t) - \mathbf{c}(t) \approx \mathbf{c}'(t)\,\Delta t$.

Si subdividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, con $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, entonces el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ es aproximadamente

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{F}(\mathbf{c}(t_i)) \cdot \Delta\mathbf{s} \approx \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{F}(\mathbf{c}(t_i)) \cdot \mathbf{c}'(t_i)\,\Delta t.$$

Cuando $n \to \infty$, esta aproximación cada vez es mejor, por lo que es razonable definir el trabajo como el límite de la suma anterior cuando $n \to \infty$. Este límite está dado por la integral

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\,dt.$$

Definición de integral de línea

La exposición anterior sobre el trabajo nos lleva a la siguiente definición.

Definición Integral de línea Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ que es continuo sobre la trayectoria C^1 $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$. Definimos $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, la ***integral de línea*** de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{c}$ mediante la fórmula

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\,dt;$$

es decir, integramos el producto escalar de $\mathbf{F}$ por $\mathbf{c}'$ sobre el intervalo $[a, b]$.

Como en el caso de las funciones escalares, también podemos definir $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ si $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$ es solo continua a trozos.

Para trayectorias $\mathbf{c}$ que satisfacen $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$, existe otra útil fórmula para la integral de línea: concretamente, si $\mathbf{T}(t) = \mathbf{c}'(t)/\|\mathbf{c}'(t)\|$ denota al vector tangente unitario, tenemos