Vamos a calcular $d(F\,dx\,dy)$. Utilizando de nuevo la propiedad (3), obtenemos

$$d(F\,dx\,dy) = d(F \wedge\ dx\,dy) = dF \wedge (dx\,dy) + F \wedge d(dx\,dy).$$

Por el Ejemplo 14, $d(dx\,dy) = 0$, de modo que nos queda

$$\begin{aligned} dF \wedge (dx\,dy) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz\right) \wedge (dx \wedge dy) \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial x}dx \wedge (dx \wedge dy)\right] + \left[\frac{\partial F}{\partial y}\,dy \wedge (dx \wedge dy)\right] \\ &\quad + \left[\frac{\partial F}{\partial z}dz \wedge (dx \wedge dy)\right]. \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} dx \wedge (dx \wedge dy) &= (dx \wedge dx) \wedge dy = 0 \wedge dy = 0, \\ dy \wedge (dx \wedge dy) &= -dy \wedge (dy \wedge dx) \\ &= -(dy \wedge dy) \wedge dx = 0 \wedge dx = 0, \end{aligned}$$

y

$$dz \wedge (dx \wedge dy) = (-1)^2 (dx \wedge dy) \wedge dz = dx\,dy\,dz.$$

En consecuencia,

$$d(F\,dx\,dy) = \frac{\partial F}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Análogamente, tenemos

$$d(G\,dy\,dz) = \frac{\partial G}{\partial x}\,dx\,dy\,dz \qquad \text{y} \qquad d(H\,dz\,dx) = \frac{\partial H}{\partial y}\,dx\,dy\,dz.$$

Por tanto,

$$d\eta = \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz.$$

▲

Ya hemos desarrollado todos los conceptos necesarios para reformular los teoremas de Green, Stokes y Gauss en el lenguaje de las formas diferenciales.

Teorema 11 Teorema de Green Sea D una región elemental en el plano xy con ∂D orientada en sentido antihorario. Supongamos que $\omega = P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy$ es una 1-forma sobre algún conjunto abierto K en $\mathbb{R}^3$ que contiene a D. Entonces

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega.$$