Sean

$$E = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u} \right\|^2, \qquad F = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}, \qquad G = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v} \right\|^2.$$

En el Ejercicio 23 de la Sección 7.5, vimos que

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|^2 = EG - F^2.$$

Por cuestiones de notación, denominamos W a $EG - F^2$. Además, denotaremos mediante

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} = \frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\sqrt{W}}$$

al vector normal *unitario* a la superficie imagen en $p = \boldsymbol{\Phi}(u, v)$. A continuación vamos a definir dos nuevas medidas de la curvatura de una superficie en p—la “curvatura de Gauss” $K(p)$ y la “curvatura media” $H(p)$. Ambas medidas tienen profundas conexiones con la curvatura de las curvas en el espacio, lo que esclarece el significado de sus definiciones, aunque aquí no vamos a profundizar en ello.

Para definir estas dos curvaturas, en primer lugar definimos tres nuevas funciones ℓ, m, n sobre S como sigue:

$$\begin{aligned} \ell(p) &= \mathbf{N}(u, v) \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial u^2} = \mathbf{N}(u, v) \cdot \boldsymbol{\Phi}_{uu} \\ m(p) &= \mathbf{N}(u, v) \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial u \partial v} = \mathbf{N}(u, v) \cdot \boldsymbol{\Phi}_{uv} \\ n(p) &= \mathbf{N}(u, v) \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial v^2} = \mathbf{N}(u, v) \cdot \boldsymbol{\Phi}_{vv}. \end{aligned} \tag{1}$$

La ***curvatura de Gauss*** $K(p)$ de S en p está dada por

$$K(p) = \frac{\ell n - m^2}{W}, \tag{2}$$

y la ***curvatura media*** $H(p)$ de S en p se define como[15]

$$H(p) = \frac{G\ell + En - 2Fm}{2W}, \tag{3}$$

donde el lado derecho de ambas expresiones está calculado en el punto $p = \boldsymbol{\Phi}(u, v)$.

[15]Técnicamente hablando, $K(p)$ y $H(p)$, en principio, podrían depender de la parametrización $\boldsymbol{\Phi}$ de S, pero podemos demostrar que, de hecho, son independientes de $\boldsymbol{\Phi}$.