ya que

$$|A + B| \leq |A| + |B| \tag{8.7.13}$$

Después, usando (8.7.12) y (8.7.13) en (8.7.10), se obtiene

$$|e^{a}| \leq 1 + |A| + \frac{|A|^2}{2!} + \frac{|A|^3}{3!} + \frac{|A|^4}{4!} + \cdots = e^{|A|}$$

Puesto que $|A|$ es un número real, $e^{|A|}$ es finito. Esto muestra que la serie en (8.7.10) converge para cualquier matriz A.

Ahora se verá la utilidad de la serie en la ecuación (8.7.10).

Teorema 8.7.1

Para cualquier vector constante $\mathbf{c}$, $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{c}$ es una solución a (8.7.7). Más aún, la solución de (8.7.7) dada por $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ satisface $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Demostración

Se calcula, usando (8.7.10):

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{c} = \left[I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \cdots\right]\mathbf{c} \tag{8.7.14}$$

Pero como A es una matriz constante, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A^k\frac{t^k}{k!} &= \frac{d}{dt}\frac{t^k}{k!}A^k = \frac{kt^{k-1}}{k!}A^k \\ &= \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = \left[A^{k-1}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right] \end{aligned} \tag{8.7.15}$$

Entonces, combinando (8.7.14) y (8.7.15) se obtiene (ya que $\mathbf{c}$ es un vector constante)

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{d}{dt}e^{At}\mathbf{c} = A\left[I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \cdots\right]\mathbf{c} = Ae^{At}\mathbf{c} = A\mathbf{x}(t)$$

Por último, como $e^{A.0} = e^0 = I$, se tiene

$$\mathbf{x}(0) = e^{A\cdot 0}\mathbf{x}_0 = I\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$$

Definición 8.7.2

Matriz solución principal

La matriz e^{At} se denomina la **matriz solución principal** o **matriz exponencial** del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Todavía queda un problema importante (y obvio): ¿cómo se calcula e^{At} de manera práctica? Primero se darán dos ejemplos.