Funciones de valor complejo ortogonales

EJERCICIOS CON MATLAB 6.3

En MATLAB, si la matriz A tiene elementos complejos, `A'` produce la transpuesta conjugada compleja. Así, si **u** y **v** son vectores en $\mathbb{C}^n$, se pueden representar por matrices de $n \times 1$ con elementos complejos y $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ se calcula con `v'*u` y $|\mathbf{u}|$ se calcula con `norm(u)` o `sqrt(u'*u)`.

En MATLAB se construye la variable `i` para representar el número imaginario $\sqrt{-1}$. MATLAB reconoce `i` como tal siempre que no se haya usado para otro propósito.

Para `n` dada, si se quiere generar un vector aleatorio en $\mathbb{C}^n$, dé

```
v = 2*rand(n,1)-1 + i*(2*rand(n,1)-1)
```

1. Genere cuatro vectores aleatorios en $\mathbb{C}^4$. Encuentre la base ortonormal para el espacio generado por estos vectores utilizando el proceso de Gram-Schmidt. Verifique que el conjunto de vectores ortonormales obtenido con este proceso es ortonormal y que cada vector en el conjunto original es una combinación lineal del conjunto de vectores obtenido.

2. ***a)*** Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ el conjunto de vectores obtenido en el problema 1 anterior. Sea A la matriz $[\mathtt{u}_1\ \ \mathtt{u}_2\ \ \mathtt{u}_3\ \ \mathtt{u}_4]$. Sea w un vector aleatorio en $\mathbb{C}^4$. Verifique que

$$\mathtt{w} = (\mathtt{w},\ \mathtt{u}_1)\ \mathtt{u}_1 + \cdots + (\mathtt{w},\ \mathtt{u}_4)\mathtt{u}_4$$

Repita para otro vector w.

b) (*Lápiz y papel*) ¿Qué propiedad de una base ortonormal para $\mathbb{C}^n$ es expresada en el inciso *a*)? Describa cómo encontrar las coordenadas de un vector en $\mathbb{C}^n$ respecto a una base ortonormal.

3. Genere cuatro vectores aleatorios en $\mathbb{C}^6$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$. Sea $H = \text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. Sea $\mathtt{A} = [\mathtt{v}_1\ \ \mathtt{v}_2\ \ \mathtt{v}_3\ \ \mathtt{v}_4]$ y `B = orth(A)`. Sea $\mathtt{u}_\mathtt{i}$ la *i*-ésima columna de *B*.

a) Sea w un vector aleatorio en $\mathbb{C}^n$. Encuentre la proyección de w sobre H, $\mathbf{p} = \text{proy}_H\,\mathbf{w}$.

Calcule $\begin{pmatrix} \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_1\rangle \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_2\rangle \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_3\rangle \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_4\rangle \end{pmatrix}$. Verifique que `z = B'*w y p = B*B'*w`. Repita para otro vector w.

b) Sea **x** un vector aleatorio en $\mathbb{C}^4$ y forme $\mathbf{h} = A\mathbf{x}$. Entonces **h** está en *H*. Compare $|\mathbf{w} - \mathbf{p}|$ y $|\mathbf{w} - \mathbf{h}|$. Repita para otros tres vectores **x**. Escriba una interpretación de sus observaciones.

c) Sea $\mathbf{z} = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$. Entonces $H = \text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{z}\}$ (aquí *H* es el subespacio descrito en los incisos anteriores de este problema). ¿Por qué? Sea $\mathtt{C} = [\mathtt{v}_1\ \ \mathtt{v}_2\ \ \mathtt{v}_3\ \ \mathtt{z}]$ y `D = orth(C)`. Entonces las columnas de *D* serán otra base ortonormal para *H*.

Sea **w** un vector aleatorio en $\mathbb{C}^6$. Calcule la proyección de **w** sobre *H* usando *B* y la proyección de **w** sobre *H* usando *D*. Compare los resultados. Repita para otros dos vectores **w**. Escriba una interpretación de sus observaciones.

4. ***a)*** (*Lápiz y papel*) Explique por qué el espacio nulo de $\mathbf{A}'$ es ortogonal a la imagen de *A*; es decir, si $H = \text{Im}(A)$, entonces el espacio nulo de $\mathbf{A}' = H^\perp$.

b) Sea *A* una matriz aleatoria con elementos complejos de 7×4. (Sea `A = 2*rand(7,4) -1 + i*(2*rand(7,4)-1)`.) Sea `B = orth(A)` y sea `C = null(A')` (entonces las columnas de *B* forman una base ortonormal para $H = \text{Im}(A)$ y las columnas de *C* forman una base ortonormal para $H^\perp$). Verifique que las columnas de *C* son ortonormales.

c) Sea **w** un vector aleatorio en $\mathbb{C}^7$. Encuentre **h**, la proyección de **w** sobre *H*, y **p**, la proyección de **w** sobre $H^\perp$. Verifique que $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{h}$. Repita para otros tres vectores **w**.