e) (*Lápiz y papel*) Pruebe el resultado del inciso *d*). [***Sugerencia:*** Encuentre una expresión general para F en términos de α y utilice las identidades trigonométricas.]

2. Trabaje el problema 4 anterior. Además, verifique que la transformación T mapea una base ortonormal sobre una base ortonormal. ¿Es siempre cierto esto para una isometría? ¿Por qué?

Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 al 9 determine si la transformación dada de V a W es lineal.

1. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ T(x, y) = x + y$
2. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T(x, y) = (xy, x^2)$
3. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ T(x, y, z) = (1, y, z)$
4. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T(x, y) = (x + y, x + y)$
5. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ T(x, y) = \dfrac{y}{x}$
6. $T: \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2;\ Tp(x) = xp(x) + 1$
7. $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2;\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_2x + a_0x^2$
8. $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{M}_{22};\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} 0 & a_0 - a_1 \\ a_0 + a_2 & 0 \end{pmatrix}$
9. $T: C[0, 1] \to C[0, 1];\ Tf(x) = f(1)$

En los ejercicios 10 al 16 encuentre el núcleo, imagen, rango y nulidad de la transformación lineal dada.

10. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
11. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
12. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$
13. $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3;\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_2x + a_0x^3$
14. $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3;\ Tp(x) = xp(x) - 2p(x)$
15. $T: \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{M}_{22};\ T(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}A$
16. $T: C[0, 1] \to \mathbb{R};\ Tf = \dfrac{f(1) - f(0)}{2}$

De los ejercicios 17 al 24 encuentre la representación matricial de la transformación lineal dada y encuentre su núcleo, imagen, nulidad y rango.

17. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T(x, y) = (0, -y)$
18. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ T(x, y, z) = (y, z)$
19. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_3;\ T(a, b, c) = a + (b + c)x^2 + (c - a)x^3$
20. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2;\ T(x, y, z, w) = (x - 2z, 2y + 3w)$
21. $T: \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_4;\ (Tp)(x) = xp(x)$
22. $T: \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_3;\ (Tp)(x) = x^2p(x) + 2xp^1 + p(x)$
23. $T: \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{M}_{22};\ T(A) = A\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
24. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T(x, y) = (x - y, 2x + 3y);\ B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\};\ B_2 = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$