Por último, usamos la sustitución trigonométrica $w = \sqrt{\frac{c^2}{a^2-c^2}}\tan\theta$ para terminar la integración. La solución final se simplifica a 4π, verificándose así el teorema de Gauss–Bonnet.

9. Aplicar la fórmula (3) de esta sección y simplificar.

11. Aplicar la fórmula (2) de esta sección y simplificar; $K = -h''/[(1+(h')^2)^2 h]$.

Ejercicios de repaso del Capítulo 7

1. (a) $3\sqrt{2}(1-e^{6\pi})/13$.
(b) $-\pi\sqrt{2}/2$.
(c) $(236\,158\sqrt{26}-8)/35\cdot(25)^3$.
(d) $8\sqrt{2}/189$.

3. (a) $\dfrac{2}{\pi}+1$. (b) $-1/2$.

5. $2a^3$.

7. (a) Una esfera de radio 5 centrada en $(2,3,0)$; $\mathbf{\Phi}(\theta,\phi) = (2+5\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 3+5\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 5\cos\phi)$; $0\le\theta\le 2\pi; 0\le\phi\le\pi$.
(b) Un elipsoide con centro en $(2,0,0)$ y con $0\le\theta\le 2\pi, 0\le\phi\le\pi$.

$$\mathbf{\Phi}(\theta,\phi) = (2+(1/\sqrt{2})3\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 3\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 3\cos\phi).$$

(c) Un hiperboloide elíptico de una hoja y con $0\le\theta\le 2\pi, -\infty<z<\infty$

$$\mathbf{\Phi}(\theta,z) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{8+2z^2}\cos\theta, \frac{1}{3}\sqrt{8+2z^2}\operatorname{sen}\theta, z\right).$$

.

9. $A(\mathbf{\Phi}) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{3\cos^2\theta+5}\,d\theta$; $\mathbf{\Phi}$ describe la parte superior de un cono con secciones transversales horizontales elípticas.

11. $11\sqrt{3}/6$.

13. $\sqrt{2}/3$.

15. $5\sqrt{5}/6$.

17. (a) $(e^y\cos\pi z, xe^y\cos\pi z, -\pi xe^y\operatorname{sen}\pi z)$.
(b) 0.

19. $\frac{1}{2}(e^2+1)$.

21. $\mathbf{n} = (1/\sqrt{5})(-1,0,2), 2z-x=1$.

23. 0.

25. Si $\mathbf{F} = \nabla\phi$, entonces $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$ (al menos si ϕ es de clase C^2; véase el Teorema 1 de la Sección 4.4). El Teorema 3 de la Sección 7.2 demuestra que $\int_{\mathbf{c}}\nabla\phi\cdot d\mathbf{s} = 0$ porque $\mathbf{c}$ es una curva cerrada.

27. (a) 24π. (b) 24π. (c) 60π.

29. (a) $[\sqrt{R^2+p^2}(z_0-z_1)]/p$.
(b) $\sqrt{2z_0(R^2+p^2)/p^2 g}$.

Capítulo 8

Sección 8.1

1. $\gamma(t) = \begin{cases} (2t-1, -t+1), & t\in[0,1] \\ (2t-1, 2t-2), & t\in[1,2] \\ (-4t+11, -t+4), & t\in[2,3] \end{cases}$

3. 8.

5. 8.

7. 61.

9. -8.

11. (a) 0. (c) 0.
(b) $-\pi R^2$. (d) $-\pi R^2$.

13. $3\pi a^2$.

15. $3\pi/2$.

17. $3\pi(b^2-a^2)/2$.

19. (a) Ambos lados son 2π. (b) 0.

21. 0.

23. πab.

25. Un segmento horizontal divide la región en tres regiones a las que se puede aplicar el teorema de Green; emplear el Ejercicio 16 o la técnica de la Figura 8.1.5.

27. $9\pi/8$

29. Si $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que $|u(\mathbf{q})-u(\mathbf{p})|<\varepsilon$ cuando $\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\| = \rho < \delta$. Parametrizar $\partial B_\rho(\mathbf{p})$ por $\mathbf{q}(\theta) = \mathbf{p}+\rho(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Entonces