Sección 5.2

1. (a) $\frac{7}{12}$. (b) $e-2$.
(c) $\frac{1}{9}\operatorname{sen} 1$. (d) $2\ln 4 - 2$.

3. 0.

5.

7. 1/4.

9. Utilizar el teorema de Fubini para escribir

$$\iint_R [f(x)g(y)]\ dx\ dy = \int_c^d g(y)\left[\int_a^b f(x)\ dx\right] dy,$$

y observar que $\int_a^b f(x)\ dx$ es una constante, por lo que se puede sacar de la integral.

11. 11/6.

13. Por el Ejercicio 2(a), tenemos:

$$f(m,n) = \iint_R x^m y^n dx\, dy = \left(\frac{1}{m+1}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Entonces, cuando $m, n \to \infty$, vemos que $\lim f(m,n) = 0$.

15. Dado que $\int_0^1 dy = \int_0^1 2y\, dy = 1$, tenemos que $\int_0^1 [\int_0^1 f(x,y)\, dy]\ dx = 1$. En cualquier partición de $R = [0,1]\times[0,1]$, cada rectángulo R_{jk} contiene puntos $\mathbf{c}_{jk}^{(1)}$ con x racional y $\mathbf{c}_{jk}^{(2)}$ con x irracional. Si en la partición regular de orden n, seleccionamos $\mathbf{c}_{jk} = \mathbf{c}_{jk}^{(1)}$ en aquellos rectángulos con $0 \le y \le \frac{1}{2}$ y $\mathbf{c}_{jk} = \mathbf{c}_{jk}^{(2)}$ cuando $y > \frac{1}{2}$, las sumas de aproximación son las mismas que para

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 \le y \le \frac{1}{2} \\ 2y & \frac{1}{2} < y < 1. \end{cases}$$

Puesto que g es integrable, las sumas de aproximación tienen que converger a $\int_R g\, dA = 7/8$. Sin embargo, si hemos elegido todos los $\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{c}_{jk}^{(1)}$, todas las sumas de aproximación tendrán el valor 1.

17. El teorema de Fubini no se aplica porque el integrando no es continuo ni está acotado en $(0,0)$.

Sección 5.3

1. (a) (III) (b) (IV)
(c) (II) (d) (I)

3. (a) 1/3, ambos. (b) 5/2, ambos.
(c) $(e^2-1)/4$, ambos. (d) 1/35, ambos.

5. $A = \int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy\ dx = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\ dx = r^2[\operatorname{arc\,sen} 1 - \operatorname{arc\,sen}(-1)] = \pi r^2$.

7. 756 m^3.

9. 0.

11. y-simple; $\pi/2$.

13. $\frac{2}{3}$.

15. 50 π.

17. $\pi/24$.

19. Calcular la integral primero con respecto a y. Dividir esta integral en dos integrales sobre $[-\phi(x), 0]$ y $[0, \phi(x)]$ y hacer un cambio de variables en la primera, o utilizar simetría.

21. Sea $\{R_{ij}\}$ una partición de un rectángulo R que contiene D y sea f igual a 1 en D. Luego, f^* es 1 en D y 0 en $R\backslash D$. Sea $\mathbf{c}_{jk} \in R\backslash D$ si R_{ij} no no está completamente contenido en D. La suma de aproximación de Riemann es la suma de las áreas de aquellos rectángulos de la partición que están contenidos en D.