11. No. $f(x, y) = (-1, 0)$ tiene infinitas soluciones, concretamente, $(x, y) = (0, y)$ para todo y.

13. (a) $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$.
(b) $f'(z) = -z(x + 2y)/(x^2 + y^2)$;
$g'(z) = z(y - 2x)/(x^2 + y^2)$.

15. (a) Resolver la ecuación $x^3 - y^2 = 0$ para x. Entonces C es la gráfica de $f(y) = y^{2/3}$.
(b) $F_x(0, 0) = 3x^2|_{0,0} = 0$. No; se contradice el inverso del teorema de la función implícita.

17. (a) Sea $F_1 = x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4, F_2 = 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8$. Calcular $(\partial F_1/\partial u)(2, -1, 2, 1) = -12, (\partial F_1/\partial v)(2, -1, 2, 1) = 2, (\partial F_2/\partial u)(2, -1, 2, 1) = -8, (\partial F_2/\partial v)(2, -1, 2, 1) = 12$. Entonces $\Delta = -128 \neq 0$, por lo que según el teorema de la función implícita podemos resolver para u y v como funciones de x e y cerca de (2, -1, 2, 1).
(b) $\dfrac{13}{32}$.

19. Multiplicar y igualar los coeficientes para obtener a_0, a_1 y a_2 como funciones de r_1, r_2 y r_3. A continuación calculamos el determinante jacobiano $\partial(a_0, a_1, a_2)/\partial(r_1, r_2, r_3) = (r_3 - r_2)(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)$, que es distinto de cero si las raíces son distintas. Por tanto, el teorema de la función inversa demuestra que se pueden determinar las raíces como funciones de los coeficientes en un entorno de cualquier punto en el que las raíces son distintas. Es decir, si las raíces r_1, r_2, r_3 de $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ son todas diferentes, entonces existen entornos V de (r_1, r_2, r_3) y W de (a_0, a_1, a_2) tales que las raíces en V son funciones suaves de los coeficientes en W.

Ejercicios de repaso del Capítulo 3

1. Sea $g(x, y) = y - kx$, de modo que $u = f \circ g$. Entonces $(\partial u/\partial x) = (\partial f/\partial g)(\partial g/\partial x) = (\partial f/\partial g)(-k)$ y $(\partial u/\partial y) = (\partial f/\partial g)(\partial g/\partial y) = (\partial f/\partial g)$.

3. Punto de silla en (0,0).

5. $p(x, y) = e^{-1} - 2e^{-1}(x - 1) + 2e^{-1}(y - 1) + e^{-1}(x - 1)^2 - 4e^{-1}(x - 1)(y - 1) + e^{-1}(y - 1)^2$.

7. (a) Punto de silla.
(b) Punto de silla para cualquier C.

9. (a) 1.
(b) $\sqrt{83}/6$.

11. Utilizar el criterio de la segunda derivada; (0, 0) es un punto de máximo local; $(-1, 0)$ es un punto de silla; (2, 0) es un punto de mínimo local.

13. Puntos de silla en $(n, 0)$, para $n =$ entero.

15. Máximo $\approx 2{,}618$; mínimo $\approx 0{,}382$.

17. Máximo 1, mínimo $\cos 1$.

19. $z = 1/4$.

21. $(0, 0, \pm 1)$.

23. Si $b \geq 2$, la distancia mínima es $2\sqrt{b - 1}$; si $b \leq 2$, la distancia mínima es $|b|$.

25. Máximo local en (2, 0), mínimo local en (0,1) y (3, 1), puntos de silla en (0,0), (3,0) y (2, 1).

27. No estable.

29. $f(-\frac{3}{2}, -\sqrt{3}/2) = 3\sqrt{3}/4$.

31. $x = (20/3)\sqrt[3]{3}; y = 10\sqrt[3]{3}; z = 5\sqrt[3]{3}$.

33. El determinante requerido en el teorema general de la función implícita no es cero, por lo que podemos resolver para u y v; $(\partial u/\partial x)(2, -1) = 13/32$.

35. Se puede encontrar una nueva base ortonormal con respecto a la cual la forma cuadrática dada por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

tiene forma diagonal. Este cambio de base define nuevas variables ξ y η, que son funciones lineales de x e y. Manipulaciones de álgebra lineal y la regla de la cadena demuestran que $Lv = \lambda(\partial^2 v/\partial\xi^2) + \mu(\partial^2 v/\partial\eta^2)$. Los números λ y μ son los autovalores de A y son positivos, porque la forma cuadrática es definida positiva. En un máximo, $\partial v/\partial\xi = \partial v/\partial\eta = 0$. Además, $\partial^2 v/\partial\xi^2 \leq 0$ y $\partial^2 v/\partial\eta^2 \leq 0$, puesto que si uno de ellos fuera mayor que 0, la sección transversal de la gráfica en dicha dirección tendría un mínimo. Entonces $Lv \leq 0$, y se tiene una contradicción con la subarmonicidad estricta.

37. Invertir las desigualdades de los Ejercicios 35 y 36.