$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h}.$$

Teorema 12 Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces todas las derivadas direccionales existen. La derivada direccional en $\mathbf{x}$ en la dirección $\mathbf{v}$ está dada por

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{v} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x})\right] v_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x})\right] v_2 + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x})\right] v_3,$$

donde $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Demostración Sea $\mathbf{c}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$, de forma que $f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) = f(\mathbf{c}(t))$. Por el primer caso especial de la regla de la cadena, $(d/dt) f(\mathbf{c}(t)) = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$. Sin embargo, $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}$ y $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$, y por tanto

$$\left.\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})\right|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v},$$

como se quería demostrar. ■

Obsérvese que no es necesario utilizar rectas al calcular la variación de f en una dirección determinada $\mathbf{v}$. De hecho, para una trayectoria general $\mathbf{c}(t)$ con $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}$ y $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$, por la regla de la cadena tenemos,

$$\left.\frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t))\right|_{t=0} = \left.\nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\right|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}.$$

Ejemplo 3 Sea $f(x, y, z) = x^2 e^{-yz}$. Calcular la variación de f en la dirección del vector unitario

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \text{en el punto} \qquad (1, 0, 0).$$

Solución La variación requerida es, utilizando el Teorema 12,

$$\nabla f \cdot \mathbf{v} = (2xe^{-yz}, -x^2 ze^{-yz}, -x^2 ye^{-yz}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

que, en el punto (1, 0, 0), es

$$(2, 0, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

▲