Luego,

$$y = 4\lambda^2 y,$$

o $\lambda = \pm 1/2$ e $y = \pm x$, lo que significa que $x^2 + x^2 = 2x^2 = 1$ o $x = \pm 1/\sqrt{2}, y = \pm 1/\sqrt{2}$. Hemos calculado que, en C, existen cuatro candidatos para los puntos de máximo y de mínimo, concretamente,

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

El valor de f tanto en $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ como en $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ es $1/2$. El valor de f en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ es $-1/2$, y el valor de f en (0, 0) es 0. Por tanto, el máximo absoluto de f es $1/2$ y el mínimo absoluto es $-1/2$, y ambos se alcanzan en C. En $(0, 0)$, $\partial^2 f/\partial x^2 = 0, \partial^2 f/\partial y^2 = 0$ y $\partial^2 f/\partial x\, \partial y = 1$, por lo que el discriminante es -1 y por tanto (0, 0) es un punto de silla. ▲

Ejemplo 7 Hallar el máximo y el mínimo absolutos de $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ en la región elíptica D definida por $\frac{1}{2}x^2 + y^2 \leq 1$.

Solución De nuevo, por el Teorema 7 de la Sección 3.3, el máximo absoluto existe. En primer lugar, localizamos los puntos críticos de f en U, el conjunto de puntos (x, y) con $\frac{1}{2}x^2 + y^2 < 1$. Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y,$$

el único punto crítico es el origen (0, 0).

Ahora determinamos el máximo y el mínimo de f en C, la frontera de U, que es la curva de nivel $g(x, y) = 1$, donde $g(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$. Las ecuaciones de los multiplicadores de Lagrange son

$$\nabla f(x, y) = (x, y) = \lambda \nabla g(x, y) = \lambda(x, 2y)$$

y $(x^2/2) + y^2 = 1$. En otras palabras,

$$\begin{aligned} x &= \lambda x \\ y &= 2\lambda y \\ \frac{x^2}{2} + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Si $x = 0$, entonces $y = \pm 1$ y $\lambda = \frac{1}{2}$. Si $y = 0$, entonces $x = \pm\sqrt{2}$ y $\lambda = 1$. Si $x \neq 0$ e $y \neq 0$, tenemos que $\lambda = 1$ y $1/2$, lo que es imposible. Por tanto, los candidatos a puntos de máximo y de mínimo de f en C son $(0, \pm 1), (\pm\sqrt{2}, 0)$ y para f dentro de D, el candidato es (0, 0). El valor de f en $(0, \pm 1)$ es $1/2$, en $(\pm\sqrt{2}, 0)$ es 1 y en (0, 0) es 0. Luego el mínimo absoluto de f se alcanza en (0, 0) y es 0. El máximo absoluto de f en D es por tanto 1 y se alcanza en los puntos $(\pm\sqrt{2}, 0)$. ▲