definida para $|x| < 1$ (U no debe ser demasiado grande) y z es única solo si está cerca de z_0 (V no debe ser demasiado grande). Estos hechos y la no existencia de $\partial z/\partial x$ en $z_0 = 0$ son, por supuesto, claros partiendo del hecho de que $x^2 + z^2 = 1$ define una circunferencia en el plano xz (Figura 3.5.2). ▲

El teorema de la función implícita y las superficies

Vamos a aplicar el Teorema 11 al estudio de las superficies. Estamos interesados en el conjunto de nivel de una función $g\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; es decir, en la superficie S formada por los puntos $\mathbf{x}$ que satisfacen $g(\mathbf{x}) = c_0$, donde $c_0 = g(\mathbf{x}_0)$ y $\mathbf{x}_0$ está dado. Para concretar, tomamos $n = 3$. Por tanto, estamos tratando con la superficie de nivel de una función $g(x, y, z)$ que pasa por un punto dado (x_0, y_0, z_0). Como en el teorema de los multiplicadores de Lagrange, suponemos que $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Esto significa que al menos una de las derivadas parciales de g es distinta de cero. Para ser específicos, supongamos que $(\partial g/\partial z)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Aplicando el Teorema 11 a la función $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z) - c_0$, sabemos que existe una única función $z = k(x, y)$ que satisface $g(x, y, k(x, y)) = c_0$ para (x, y) próximo a (x_0, y_0) y z próximo a z_0. Por tanto, cerca de z_0 la superficie S es la gráfica de la función k. Dado que k es continuamente diferenciable, esta superficie tiene un plano tangente en (x_0, y_0, z_0) dado por

$$z = z_0 + \left[\frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0). \tag{2}$$

Pero, por la fórmula (1),

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la ecuación del plano tangente se obtiene esta descripción equivalente:

$$0 = (z - z_0)\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + (x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0);$$

es decir,

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \nabla g(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Por tanto, el plano tangente a la superficie de nivel de g es el complemento ortogonal a $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0). Esto concuerda con la caracterización de planos tangentes a conjuntos de nivel que vimos en el Capítulo 2.

Ahora estamos preparados para completar la demostración del teorema de los multiplicadores de Lagrange. Para ello, tenemos que demostrar que todo vector tangente a S en (x_0, y_0, z_0) es tangente a una curva en S. Por el Teorema 11, basta con demostrar esto para una gráfica de la