a) Encuentre el polinomio característico *a mano* y verifique encontrando `c = (–1)^n*poly(A)`. (Aquí n es el tamaño de la matriz.) Dé `doc poly` para obtener ayuda en la interpretación del resultado de `poly` y explique por qué se incluyó el factor $(-1)^n$.

b) Encuentre los valores característicos obteniendo las raíces del polinomio característico *a mano*. Verifique encontrando `r = roots(c)` (`doc roots` proporciona la información sobre la función).

c) Para cada valor característico λ encontrado, resuelva $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *a mano* y verifique usando `rref(A– r(k)*eye(n))` para $k = 1, \ldots, n$, donde `r` es el vector que contiene los valores característicos y n es el tamaño de la matriz.

d) Verifique que existen n valores característicos distintos (donde n es el tamaño de la matriz) y que el conjunto de vectores característicos es linealmente independiente.

e) Dé `[V,D] = eig(A)`. Para $k = 1, \ldots, n$, verifique que

`(A–D(k,k)*eye(n))*V(:,k) = 0`

Escriba una conclusión interpretando esto en el lenguaje de los valores y vectores característicos.

La función `eig (doc eig)` encuentra vectores característicos de norma 1. Como cada valor característico tiene multiplicidad algebraica y geométrica 1, los vectores encontrados en el inciso *c*), normalizados a 1, deben coincidir con las columnas de V hasta un posible múltiplo por un número complejo de módulo 1 (por lo general 1, –1, i o $-i$). Verifíquelo.

4. Los cálculos de valores característicos (y los vectores característicos asociados) son sensibles a errores de redondeo, en especial cuando el valor característico tiene multiplicidad algebraica mayor que 1.

a) (*Lápiz y papel*) Para la siguiente matriz, calcule los valores y vectores característicos a mano. Verifique que $\lambda = 2$ es un valor característico con multiplicidad algebraica 2 (y multiplicidad geométrica 1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Encuentre `c = poly(A)` y compare con sus cálculos manuales. Dé `format long`. Encuentre `r = roots(c)`. ¿Qué observa sobre los valores característicos? Intente encontrar los vectores característicos con `rref(A–r(k)*eye(3))` para $k = 1$, 2 y 3. ¿Tuvo éxito?

c) La rutina `eig` es más estable numéricamente que `roots` (utiliza un proceso diferente al teórico que se describió en esta sección). Sin embargo, no puede evitar el hecho básico sobre raíces múltiples y los errores de redondeo estudiados en el inciso *e*). De todas formas, utilizando `format long`, encuentre `[V,D] = eig(A)`. Compare los valores característicos en D con los valores característicos verdaderos y con los valores característicos calculados en el inciso *b*). Argumente por qué el cálculo con `eig` es un poco más cercano a los verdaderos valores.

d) Para $k = 1$, 2 y 3, verifique que `(A–D(k,k)*eye(3))*V(:,k)` es cercano a cero. ¿De qué manera llevaría esto a decir que aun habiendo inexactitudes, en cierto sentido los cálculos no son tan erróneos?

Con pequeñas perturbaciones en los cálculos de los vectores característicos se puede llegar a que son linealmente independientes: encuentre `rref(V)`. Examine V, ¿ve alguna evidencia de que los vectores característicos asociados con los valores característicos cercanos a $\lambda = 2$ sean “casi” dependientes?

e) (*Lápiz y papel*) Este inciso ofrece una explicación general de los problemas asociados con aproximaciones numéricas de raíces múltiples (en este contexto, las raíces del polinomio ca-