Superficies regulares

Dado que los vectores $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ son tangentes a las dos curvas sobre la superficie en un punto dado, el vector $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ debería ser normal a la superficie en dicho punto.

Decimos que la superficie S es ***regular*** o ***suave***[7] en $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$, si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ en (u_0, v_0). Se dice que la superficie es ***regular*** si es regular en todos los puntos $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0) \in S$. El vector no nulo $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es *normal* a S (recordemos que el producto vectorial de $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ es perpendicular al plano generado por $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$); el hecho de que no sea nulo garantiza que habrá un plano tangente. Intuitivamente, una superficie suave no tiene "esquinas".[8]

Ejemplo 2 Considérese la superficie dada por las ecuaciones

$$x = u\cos v, \qquad y = u\,\mathrm{sen}\, v, \qquad z = u, \qquad u \geq 0.$$

¿Es esta superficie diferenciable? ¿Es regular?

Solución Estas ecuaciones describen la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (para comprobarlo, elevamos al cuadrado las ecuaciones para x, y y z), que se muestra en la Figura 7.3.8. Esta superficie es un cono con "vértice" en $(0, 0, 0)$; es una superficie diferenciable dado que cada función componente es diferenciable como una función de u y v. Sin embargo, *la superficie no es regular en* $(0, 0, 0)$. Para ver esto, calculamos $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ en $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}(0,0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(0,0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(0,0)\mathbf{k} = (\cos 0)\mathbf{i} + (\sin 0)\mathbf{j} + \mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{k},$$

y de forma similar,

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = 0(-\mathrm{sen}\, 0)\mathbf{i} + 0(\cos 0)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Por tanto, $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \mathbf{0}$ y, por definición, la superficie no es regular en $(0, 0, 0)$. ▲

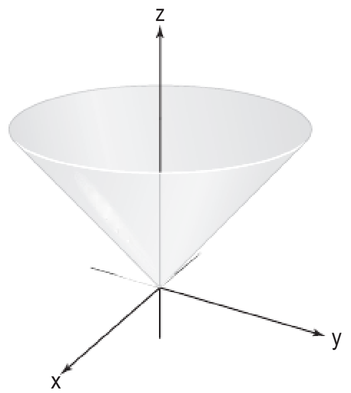

Figura 7.3.8 La superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ es un cono. No es regular en su vértice.

Plano tangente a una superficie parametrizada

Podemos usar el hecho de que $\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es normal a la superficie tanto para definir formalmente el plano tangente como para calcularlo.

[7]Hablando estrictamente, la regularidad depende de la parametrización $\mathbf{\Phi}$ y no solo de su imagen S. Por tanto, esta terminología en ocasiones resulta imprecisa; sin embargo, es descriptiva y no debería causar confusión. (Véase el Ejercicio 21.)

[8]En la Sección 3.5 demostramos que las superficies de nivel $f(x, y, z) = 0$ eran de hecho gráficas de funciones de dos variables en algún entorno de un punto (x_0, y_0, z_0) que satisface $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Esto unificaba dos conceptos de superficie—gráficas y conjuntos de nivel. De nuevo, usando el teorema de la función implícita, es posible demostrar que la imagen de una superficie parametrizada $\mathbf{\Phi}$ en el entorno de un punto (u_0, v_0) donde $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ es también la gráfica de una función de dos variables. Así, todas las definiciones de superficie son coherentes. (Véase el Ejercicio 24.)