Según el teorema 7.2.2, existe exactamente una transformación lineal que satisface la ecuación (7.4.2). Suponga que $\mathbf{v} \in V$ y $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Entonces, si $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$, se tiene que $T\mathbf{v} = c_1T\mathbf{v}_1 + c_2T\mathbf{v}_2 + \cdots + c_nT\mathbf{v}_n = \mathbb{C}\ c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0}$. Pero como $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ son linealmente independientes, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Por tanto, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ y T es 1-1. Como V y W tienen dimensión finita y dim $V =$ dim W, T es sobre por el teorema 7.4.2 y la prueba queda completa.

Este último resultado es esencial en el álgebra lineal. Nos indica que si se conoce un espacio vectorial real de dimensión n, se conocen todos los espacios vectoriales reales de dimensión n. Es decir, si se asocian todos los espacios vectoriales isomorfos, entonces $\mathbb{R}^n$ es el único espacio de dimensión n sobre los reales.

RESUMEN 7.4

- ***Transformación uno a uno***

  Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Se dice que T es **uno a uno**, descrito 1-1, si $T\mathbf{v}_1 = T\mathbf{v}_2$ implica que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$. Esto es, T es 1-1 si todo vector $\mathbf{w}$ en la imagen de T es la imagen de exactamente un vector en V.
- Sea $T: V \to W$ una transformación lineal; entonces T es 1-1 si y sólo si nu $T = \{\mathbf{0}\}$
- ***Transformación sobre***

  Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Se dice que T es **sobre** W o simplemente **sobre**, si para todo $\mathbf{w} \in W$ existe al menos un $\mathbf{v} \in V$ tal que $T\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Es decir, T es sobre W si y sólo si im T $= W$.
- Sea $T: V \to W$ una transformación lineal y suponga que dim $V =$ dim $W = n$:

  i) Si T es 1-1, entonces T es sobre.

  ii) Si T es sobre, entonces T es 1-1.
- Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Suponga que dim $V = n$ y dim $W = m$. Entonces

  i) Si $n > m$, T no es 1-1.

  ii) Si $m > n$, T no es sobre.
- ***Isomorfismo***

  Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Se dice que T es un **isomorfismo** si T es 1-1 y sobre.
- ***Espacios vectoriales isomorfos***

  Los espacios vectoriales V y W son isomorfos si existe un isomorfismo T de V sobre W. En este caso, se escribe $V \cong W$.
- Cualesquiera dos espacios vectoriales reales de dimensión finita con la misma dimensión son isomorfos.
- ***Teorema de resumen***

  Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes 11 afirmaciones son equivalentes:

  i) Es invertible.

  ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).