Ejemplo 6 Calcular

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz\, dy\, dx.$$

Dibujar la región de integración W e interpretar la integral.

Solución

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^x (2 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(2x - x^3 - \frac{x^3}{3}\right) dx = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}.$$

Esta integral es el volumen de la región dibujada en la Figura 5.5.8.

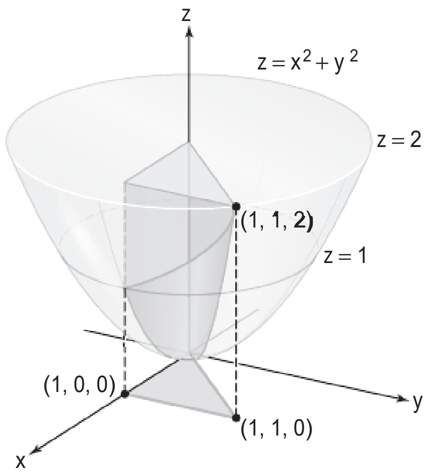

Figura 5.5.8 La región W está entre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2$, y por encima de la región D. ▲

Ejercicios

1. En los apartados (a) hasta (d), cada integral iterada es una integral sobre una región D. Asociar cada integral con la región de integración correcta (dos de las figuras están en la página siguiente).

(a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy\, dz\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy\, dx\, dz$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^y dz\, dy\, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y \int_0^x dz\, dx\, dy$