Teorema de Taylor para una variable

Al recordar un teorema de un curso anterior, suele resultar útil plantearse las siguientes preguntas básicas: ¿Qué es lo más importante del teorema? ¿Cuáles son las ideas clave de la demostración? ¿Entiendo mejor el resultado esta segunda vez?

El punto más importante del teorema de Taylor para una variable es encontrar aproximaciones de una función cerca de un punto dado que sean precisas con un orden mayor que la aproximación lineal. La idea clave de la demostración es utilizar el *teorema fundamental del cálculo* seguido de una *integración por partes*. De hecho, simplemente recordando estas ideas básicas, podemos reconstruir la demostración completa. Razonar de esta forma nos ayudará a organizar todas las piezas que necesitamos para dominar las aproximaciones de Taylor de funciones de una o varias variables.

Para una función suave $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de una variable, el teorema de Taylor afirma que:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + R_k(x_0,h), \tag{1}$$

donde

$$R_k(x_0,h) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-\tau)^k}{k!} f^{k+1}(\tau)\, d\tau$$

es el resto. Para h pequeño, este resto es pequeño de orden k, en el sentido de que

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_k(x_0,h)}{h^k} = 0. \tag{2}$$

En otras palabras, $R_k(x_0,\, h)$ es pequeño comparado con la cantidad, ya de por sí pequeña, h^k.

Lo anterior es el enunciado formal del teorema de Taylor. ¿Qué podemos decir de la demostración? Como prometimos, comenzamos con el teorema fundamental del cálculo, escrito de la forma:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f'(\tau)\, d\tau.$$

A continuación, escribimos $d\tau = -d(x_0+h-\tau)$ e integramos por partes[1] para obtener:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \int_{x_0}^{x_0+h} f''(\tau)(x_0+h-\tau)\, d\tau,$$

[1]Recuérdese que la integración por partes (la regla de derivación del producto leída al revés) dice que :

$$\int_a^b u\, dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\, du.$$

Aquí elegimos $u = f'(\tau)$ y $v = x_0 + h - \tau$.