25 000 = suministro total por semana de alimento A. Si se obtiene una ecuación similar para los otros dos alimentos se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25\,000 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 20\,000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 55\,000 \end{aligned}$$

La matriz aumentada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25\,000 \\ 1 & 4 & 1 & 20\,000 \\ 2 & 5 & 5 & 55\,000 \end{array}\right)$$

Utilizando la reducción de Gauss-Jordan

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \\ 0 & -1 & 5 & 5\,000 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 40\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nota

El sistema de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones. Sin embargo, el problema de administración de recursos tiene sólo un número finito de soluciones porque x_1, x_2 y x_3 deben ser enteros positivos y existen nada más 3 001 enteros en el intervalo [5 000, 8 000]. (Por ejemplo, no puede haber 5 237.578 peces.)

Por consiguiente, si x_3 se elige arbitrariamente, se tiene un número infinito de soluciones dada por $(40\,000 - 5x_3,\ x_3 - 5\,000,\ x_3)$. Por supuesto, se debe tener $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$. Como $x_2 = x_3 - 5\,000 \geq 0$, se tiene $x_3 \geq 5\,000$. Esto significa que $0 \leq x_1 \leq 40\,000 - 5(5\,000) = 15\,000$. Por último, como $40\,000 - 5x_3 \geq 0$ se tiene que $x_3 \leq 8\,000$. Esto significa que las poblaciones que pueden convivir en el lago con todo el alimento consumido son

$$\begin{aligned} x_1 &= 40\,000 - 5x_3 \\ x_2 &= x_3 - 5\,000 \\ 5\,000 &\leq x_3 \leq 8\,000 \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $x_3 = 6\,000$, entonces $x_1 = 10\,000$ y $x_2 = 1\,000$.

Análisis de insumo y producto (opcional)

Los siguientes dos ejemplos muestran la forma en la cual pueden surgir los sistemas de ecuaciones en el modelado económico.

EJEMPLO 1.2.9 El modelo de insumo-producto de Leontief

Modelo de insumo-producto de Leontief

Un modelo que se usa con frecuencia en economía es el **modelo de insumo-producto de Leontief**.[4] Suponga un sistema económico que tiene n industrias. Existen dos tipos de demandas en cada industria: la primera, una demanda *externa* desde afuera del sistema. Por ejemplo, si el sistema es un país, la demanda externa puede provenir de otro país. Segunda, la demanda que hace una industria a otra industria en el mismo sistema. Por ejemplo, en Estados Unidos la industria automotriz demanda parte de la producción de la industria del acero.

4 Así llamado en honor del economista estadounidense Wassily W. Leontief, quien utilizó este modelo en su trabajo pionero "Quantitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States" en *Review of Economic Statistics* 18(1936). Leontief ganó el Premio Nobel de Economía en 1973 por su desarrollo del análisis de insumo-producto.