

Más aún, como $\int_0^0 g(t) dt = 0$, se tiene que $f(0) = 0$. Por tanto, para todo g en W existe una $f \in V$ tal que $Df = g$. Así, D es sobre y se ha demostrado que $V \cong W$.

El teorema que sigue ilustra la similitud entre dos espacios vectoriales isomorfos.

Teorema 7.4.5

Sea $T: V \rightarrow W$ un isomorfismo.

- i) Si v_1, v_2, \dots, v_n genera a V , entonces Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n genera a W .
- ii) Si v_1, v_2, \dots, v_n son linealmente independientes en V , entonces Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n son linealmente independientes en W .
- iii) Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base en V , entonces $\{Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n\}$ es una base en W .
- iv) Si V tiene dimensión finita, entonces W tiene dimensión finita y $\dim V = \dim W$.



Demostración

- i) Sea $w \in W$. Entonces como T es sobre, existe un vector $v \in V$ tal que $Tv = w$. Como los vectores v_i generan a V , se puede escribir $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$, de manera que $w = Tv = a_1Tv_1 + a_2Tv_2 + \dots + a_nTv_n$, y eso muestra que $\{Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n\}$ genera a W .
- ii) Suponga que $c_1Tv_1 + c_2Tv_2 + \dots + c_nTv_n = 0$. Entonces $T(c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n) = 0$. Así, como T es 1-1, $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0$, lo que implica que $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ ya que los vectores v_i son independientes.
- iii) Esto se deduce de los incisos i) y ii).
- iv) Esto se deduce del inciso iii).

Por lo regular es difícil demostrar que dos espacios vectoriales de dimensión infinita son isomorfos. Sin embargo, para los espacios de dimensión finita es muy sencillo. El teorema 7.4.3 señala que si $\dim V \neq \dim W$, entonces V y W no son isomorfos. El siguiente teorema muestra que si $\dim V = \dim W$, y si V y W son espacios vectoriales reales, entonces V y W son isomorfos. Esto es,

Dos espacios reales de dimensión finita de la misma dimensión son isomorfos.

Teorema 7.4.6

Sean V y W dos espacios reales* de dimensión finita con $\dim V = \dim W$. Entonces $V \cong W$.



Demostración

Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base para V y sea $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ una base para W . Defina la transformación lineal T por

$$Tv_i = w_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (7.4.2)$$



* Es necesaria la palabra “reales” porque es importante que los conjuntos de escalares en V y W sean el mismo. De otra manera, la condición $T(\alpha v) = \alpha Tv$ puede no cumplirse porque $v \in V$, $Tv \in W$, y αv o αTv pueden no estar definidas. El teorema 7.4.6 es cierto si se omite la palabra “real” y en su lugar se imponen las condiciones de que V y W estén definidos con el mismo conjunto de escalares (como \mathbb{C} por ejemplo).