implica que $|x-0|<\varepsilon$. Esto demuestra que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x=0$. Dado $\varepsilon>0$, también podríamos haber tomado $\delta=\varepsilon/2$ o $\varepsilon/3$, pero es suficiente con hallar un solo δ que satisfaga los requisitos de la definición de límite. ▲

Ejemplo 13 Consideremos la función

$$f(x,y)=\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Aún cuando f no está definida en (0, 0), determinar si $f(x,y)$ se aproxima a algún número cuando (x,y) se aproxima a (0, 0).

Solución Del cálculo de una variable o por la regla de L'Hôpital, sabemos que

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}=1.$$

Por tanto, es razonable conjeturar que

$$\lim_{\mathbf{v}\to(0,0)} f(\mathbf{v})=\lim_{\mathbf{v}\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}\|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^2}=1.$$

De hecho, dado que $\lim_{\alpha\to 0}(\operatorname{sen}\alpha)/\alpha=1$, para $\varepsilon>0$ podemos hallar $\delta>0$, con $0<\delta<1$, tal que $0<|\alpha|<\delta$ implica que $|(\operatorname{sen}\alpha)/\alpha-1|<\varepsilon$. Si $0<\|\mathbf{v}\|<\delta$, entonces $0<\|\mathbf{v}\|^2<\delta^2<\delta$ y, por tanto,

$$|f(\mathbf{v})-1|=\left|\frac{\operatorname{sen}\|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^2}-1\right|<\varepsilon.$$

Por tanto, $\lim_{\mathbf{v}\to(0,0)} f(\mathbf{v})=1$. Si representamos $[\operatorname{sen}(x^2+y^2)]/(x^2+y^2)$ en una computadora, obtenemos una gráfica que de hecho se comporta bien cerca de (0, 0) (Figura 2.2.17).

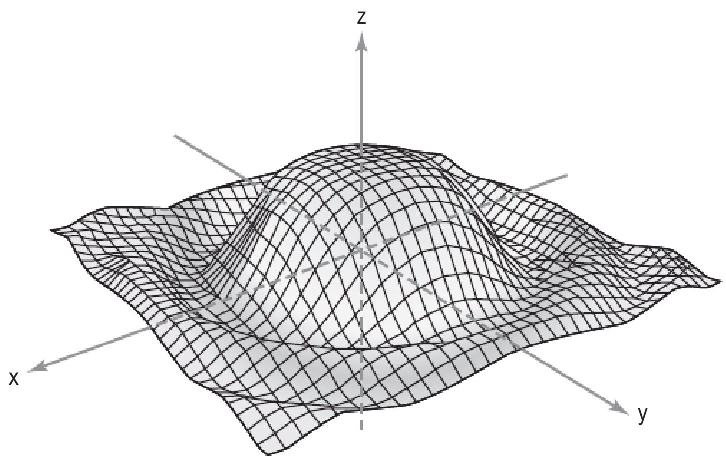

Figura 2.2.17 Gráfica de la función $f(x,y)=[\operatorname{sen}(x^2+y^2)]/(x^2+y^2)$. ▲