(a) $f_{xx}(4,2) = 1,\ f_{xy}(4,2) = 3,\ f_{yy} = 5$

(b) $f_{xx}(4,2) = 2,\ f_{yx}(4,2) = -1,\ f_{yy} = 4$

(c) $f_{xx}(4,2) = -2,\ f_{xy}(4,2) = 1,\ f_{yy} = 3$

21. Hallar los puntos de máximo y mínimo locales para $z = (x^2 + 3y^2)\, e^{1-x^2-y^2}$. (Véase la Figura 2.1.15.)

22. Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 + kxy$. Supóngase que la gráfica cambia cuando k se incrementa, ¿qué valores de k hacen que la forma de la gráfica cambie cualitativamente?

23. Un examen de la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto (y-3x^2)(y-x^2)$ da una idea de la dificultad de determinar condiciones que garanticen que un punto crítico es un punto de extremo relativo cuando el Teorema 6 falla. [8] Demostrar que

(a) El origen es un punto crítico de f.

(b) f tiene un punto de mínimo relativo en $(0,0)$ en cada recta que pasa por $(0,0)$; es decir, si $g(t) = (at, bt)$, entonces $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un punto de mínimo relativo en 0, para cualquier elección de a y b.

(c) El origen no es un punto de mínimo relativo de f.

24. Sea $f(x,y) = Ax^2 + E$, donde A y E son constantes. ¿Cuáles son los puntos críticos de f? ¿Son puntos de máximo local o de mínimo local?

25. Sea $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$. En este caso, $D = 0$. Indicar si los puntos críticos son puntos de mínimo local, de máximo local o de silla.

26. Sea $f(x,y) = ax^2 + by^2$, donde $a, b \neq 0$.

(a) Demostrar que (0, 0) es el único punto crítico de f.

(b) Determinar la naturaleza de este punto crítico en función de a y b.

27. Supóngase que $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 y que $\mathbf{x}_0$ es un punto crítico de f. Supóngase que $Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + 4h_2h_3$. ¿Tiene f un punto de máximo local, de mínimo local o de silla en $\mathbf{x}_0$?

28. Determinar el punto sobre el plano $2x - y + 2z = 20$ más próximo al origen.

29. Demostrar que una caja rectangular con un volumen dado tiene un área superficial mínima cuando es un cubo.

30. Demostrar que el paralelepípedo rectangular con una determinada área superficial y un volumen máximo es un cubo.

31. Escribir el número 120 como suma de tres números, de modo que la suma de los productos tomados de dos en dos sea máxima.

32. Demostrar que si (x_0, y_0) es un punto crítico de una función cuadrática $f(x,y)$ y $D < 0$, entonces existen puntos (x,y) próximos a (x_0,y_0) en los que $f(x,y) > f(x_0,y_0)$ y, de forma similar, puntos para los que $f(x,y) < f(x_0,y_0)$.

33. Sean $f(x,y) = x^6 + x^2 + y^6$, $g(x,y) = -x^6 - x^2 - y^6$, $h(x,y) = x^6 - x^4 + y^6$.

(a) Demostrar que (0, 0) es un punto crítico degenerado para f, g y h.

(b) Demostrar que (0, 0) es un punto de mínimo local de f, un punto máximo local de g y punto de silla de h.

34. Sea $f(x,y) = 5ye^x - e^{5x} - y^5$.

(a) Demostrar que f tiene un único punto crítico y que dicho punto es un máximo local para f.

(b) Demostrar que f no está acotada en el eje y y, por tanto, no tiene ningún máximo global. [Obsérvese que para una función $g(x)$ de una sola variable, un punto crítico único que es un punto de extremo local es necesariamente un extremo global. Este ejemplo muestra que esto no es así para funciones de varias variables.]

35. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy.$$

36. Sea n un entero mayor que 2 y sea $f(x,y) = ax^n + cy^n$, donde $ac \neq 0$. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de f.

37. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y$.

[8] Este interesante fenómeno fue apuntado por primera vez por el famoso matemático Giuseppe Peano (1858–1932). Otra “patología” curiosa se proporciona en el Ejercicio 41.