19. (a) Comprobar el teorema de la divergencia para $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ y D el círculo unidad $x^2 + y^2 \leq 1$.

(b) Evaluar la integral de la componente normal de $2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$ a lo largo de la elipse definida por $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

20. Sean $P(x,y) = -y/(x^2 + y^2)$ y $Q(x,y) = x/(x^2 + y^2)$. Suponiendo que D es el círculo unidad, analizar por qué no se cumple el teorema de Green para estas P y Q en dicha región.

21. Utilizar el teorema de Green para evaluar $\int_{C^+} (y^2 + x^3)\, dx + x^4 dy$, donde C^+ es el perímetro del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$, recorrido en dirección antihoraria.

22. Comprobar el Teorema 3 demostrando que $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$.

23. Usar el Teorema 2 para calcular el área encerrada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

24. Usar el Teorema 2 para obtener la fórmula del área de una región expresada en coordenadas polares, $A = \frac{1}{2}\int_a^b r^2\, d\theta$.

25. Esbozar la prueba del teorema de Green para la región mostrada en la Figura 8.1.10.

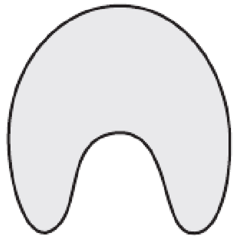

Figura 8.1.10 Demostrar el teorema de Green para esta regi ón.

26. Demostrar la identidad

$$\int_{\partial D} \phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D (\phi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \phi)\, dA.$$

27. Utilizar el teorema de Green para hallar el área de un lazo de la rosa de cuatro pétalos $r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$. (SUGERENCIA: $x\, dy - y\, dx = r^2 d\theta$).

28. Demostrar que si C es una curva cerrada simple que acota una región en la cual es aplicable el teorema de Green, entonces el área de la región D encerrada por C es

$$A = \int_{\partial D} x\, dy = -\int_{\partial D} y\, dx.$$

Demostrar que de esto se deduce el Teorema 2.

Los Ejercicios 29 a 37 ilustran la aplicación del teorema de Green a las ecuaciones en derivadas parciales. Se centran principalmente en las soluciones de la ecuación de Laplace, es decir, funciones armónicas. Para estos ejercicios, sea D una región abierta en $\mathbb{R}^2$ con frontera ∂D. Sea u: $D \cup \partial D \to \mathbb{R}$ una función continua de clase C^2 en D. Supongamos que $\mathbf{p} \in D$ es un punto de D y que la bola cerrada $B_\rho = B_\rho(\mathbf{p})$ de radio ρ y centrada en $\mathbf{p}$ está contenida en D para $0 < \rho \leq R$. Definimos $I(\rho)$ mediante

$$I(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho} u\, ds.$$

29. Demostrar que $\lim_{\rho \to 0} I(\rho) = 2\pi u(\mathbf{p})$.

30. Sea $\mathbf{n}$ la normal unitaria exterior a ∂B_ρ y $\partial u/\partial n = \nabla u \cdot \mathbf{n}$. Demostrar que

$$\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \iint_{B_\rho} \nabla^2 u\, dA.$$

31. Usando el Ejercicio 30, demostrar que $I'(\rho) = (1/\rho) \iint_{B_\rho} \nabla^2 u\, dA$.

32. Supongamos que u satisface la ecuación de Laplace: $\nabla^2 u = 0$ on D. Usar los ejercicios anteriores para demostrar que

$$u(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} u\, ds.$$

(Esto expresa el hecho de que el valor de una función armónica en un punto es la media de sus valores a lo largo de cualquier circunferencia centrada en él).

33. Utilizar el Ejercicio 32 para demostrar que si u es armónica (es decir, si $\nabla^2 u = 0$), entonces $u(\mathbf{p})$ puede expresarse como una integral de área:

$$u(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{B_R} u\, dA.$$