Método de las secciones—principio de Cavalieri Sea S un sólido y sea P_x, para x que satisface $a \leq x \leq b$, una familia de planos paralelos tales que:

1. S está entre P_a y P_b;
2. El área de la sección de S cortada por P_x es $A(x)$.

Entonces el volumen de S es igual a

$$\int_a^b A(x)\, dx.$$

Reducción a integrales iteradas

Ahora vamos a utilizar el principio de Cavalieri para evaluar integrales dobles. Consideremos la región sólida bajo la gráfica $z = f(x, y)$ y definida en la región $[a, b] \times [c, d]$, donde f es continua y mayor que cero. Hay dos funciones naturales para el área de sección transversal: una obtenida utilizando planos de corte perpendiculares al eje x y la otra obtenida mediante planos de corte perpendiculares al eje y. La sección transversal del primer tipo determinada por un plano de corte $x = x_0$ es la región plana bajo la gráfica de $z = f(x_0, y)$ entre $y = c$ e $y = d$ (Figura 5.1.8).

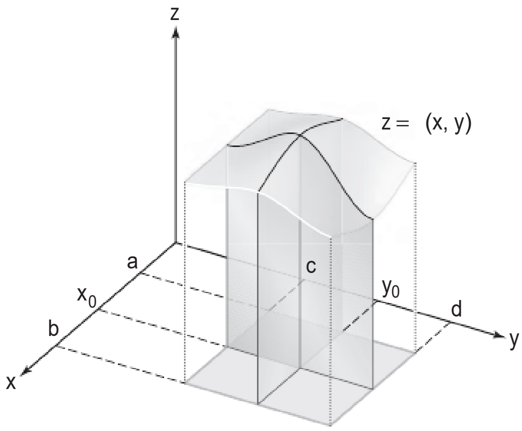

Figura 5.1.8 Dos secciones transversales diferentes que barren el volumen bajo $z = f(x, y)$.

Si fijamos $x = x_0$, obtenemos la función $y \mapsto f(x_0, y)$, que es continua en $[c, d]$. El área de sección transversal $A(x_0)$ es, por tanto, igual a la integral $\int_c^d f(x_0, y)\, dy$. Luego la función de área de la sección transversal A tiene dominio $[a, b]$ y está dada por la fórmula $A\colon x \mapsto \int_c^d f(x, y)\, dy$. Por el principio de Cavalieri, el volumen V de la región bajo $z = f(x, y)$ tiene que ser igual a

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx.$$

La integral $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$ se conoce como ***integral iterada*** ya que se obtiene integrando con respecto a y e integrando después el resul-