a continuación con distintos grados de rigor. Los estudiantes deberán consultar al profesor acerca del nivel de conocimientos requerido.

Conjuntos abiertos

Comenzamos definiendo disco abierto para formular el concepto de conjunto abierto. Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea r un número real positivo. El ***disco abierto*** (o ***bola abierta***) de radio r y centro $\mathbf{x}_0$ se define como el conjunto de puntos $\mathbf{x}$ tales que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$. Este conjunto se denota mediante $D_r(\mathbf{x}_0)$ y es el conjunto de puntos $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ cuya distancia a $\mathbf{x}_0$ es menor que r. Obsérvese que solo incluimos aquellos $\mathbf{x}$ para los que se cumple la desigualdad *estricta*. El disco $D_r(\mathbf{x}_0)$ se ilustra en la Figura 2.2.1 para $n = 1, 2, 3$. En el caso $n = 1$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, el disco abierto $D_r(x_0)$ es el intervalo abierto $(x_0 - r, x_0 + r)$, formado por los números $x \in \mathbb{R}$ que están *estrictamente* entre $x_0 - r$ y $x_0 + r$. En el caso $n = 2, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2, D_r(\mathbf{x}_0)$ es el "interior" del disco de radio r centrado en $\mathbf{x}_0$. En el caso $n = 3, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3, D_r(\mathbf{x}_0)$ es estrictamente la parte "interior" de la bola de radio r centrada en $\mathbf{x}_0$.

> **Definición Conjuntos abiertos** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ (es decir, sea U un subconjunto de $\mathbb{R}^n$). Llamamos a U ***conjunto abierto*** si para todo punto $\mathbf{x}_0$ en U existe $r > 0$ tal que $D_r(\mathbf{x}_0)$ está contenido dentro de U; simbólicamente, escribimos $D_r(\mathbf{x}_0) \subset U$ (véase la Figura 2.2.2).

El número $r > 0$ puede depender del punto $\mathbf{x}_0$ y, generalmente, r decrecerá cuando $\mathbf{x}_0$ se aproxime al "borde" de U. Intuitivamente, un conjunto U es abierto cuando los puntos de la "frontera" de U no pertenecen a U. En la Figura 2.2.2, la línea discontinua *no* está incluida en U.

Establecemos el convenio de que el conjunto vacío $\emptyset$ (el conjunto que no tiene elementos) es abierto.

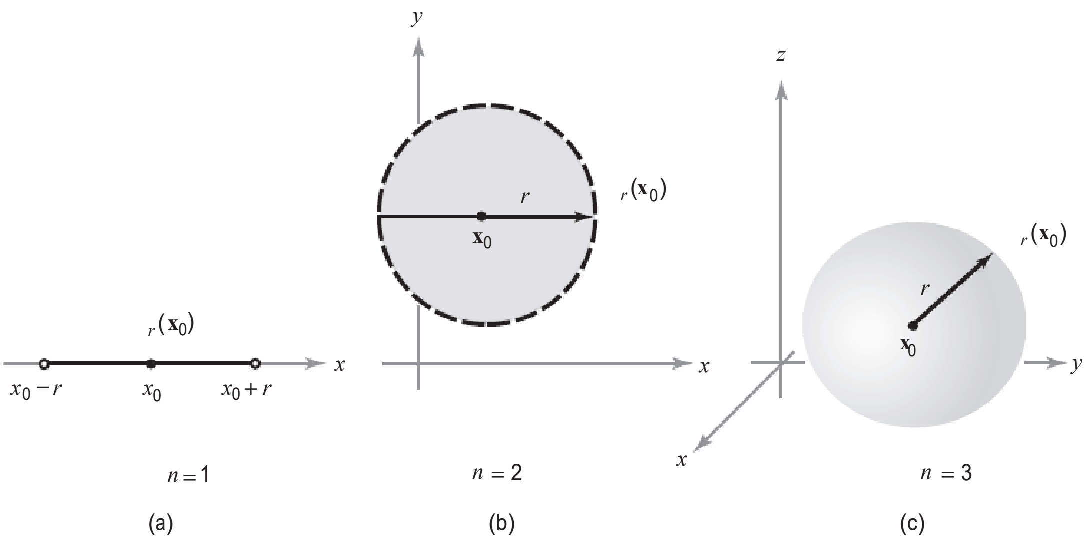

Figura 2.2.1 Los discos $D_r(\mathbf{x}_0)$ en (a) una, (b) dos y (c) tres dimensiones.