3.4 Regla de Cramer

En la presente sección se examina un viejo método para resolver sistemas con el mismo número de incógnitas y ecuaciones. Considere el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{3.4.1}$$

que puede escribirse en la forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3.4.2}$$

Si $\det A \neq 0$, el sistema (3.4.2) tiene una solución única dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Se puede desarrollar un método para encontrar dicha solución sin reducción por renglones y sin calcular A^{-1}.

Sea $D = \det A$. Se definen n nuevas matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Es decir, A_i es la matriz obtenida al reemplazar la columna i de A por $\mathbf{b}$. Por último, sea $D_1 = \det A_1$, $D_2 = \det A_2, \ldots, D_n = \det A_n$.

Teorema 3.4.1 Regla de Cramer

Sea A una matriz de $n \times n$ y suponga que $\det A \neq 0$. Entonces la solución única al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por

$$\boxed{x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_i = \frac{D_i}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}} \tag{3.4.3}$$

Demostración

La solución a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Pero

$$A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{D}(\operatorname{adj} A)\,\mathbf{b} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \cdots & \mathrm{A}_{n1} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \cdots & \mathrm{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{A}_{1n} & \mathrm{A}_{2n} & \cdots & \mathrm{A}_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \mathrm{M} \\ b_n \end{pmatrix} \tag{3.4.4}$$

Ahora bien, $(\operatorname{adj} A)\mathbf{b}$ es un vector de dimensión n cuya componente j es

$$(\mathrm{A}_{1j} - \mathrm{A}_{2j} - \cdots - \mathrm{A}_{nj}), \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}_{1j}b_1 + \mathrm{A}_{2j}b_2 + \cdots + \mathrm{A}_{nj}b_n \tag{3.4.5}$$