$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \sum_{i<j}(x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

Usar esto para proporcionar otra demostración de la desigualdad de Cauchy–Schwarz en $\mathbb{R}^n$,

15. Probar que si A es una matriz $n \times n$, entonces

(a) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$; y

(b) Si B es una matriz obtenida a partir de A multiplicando cualquier fila o columna por un escalar λ, entonces $\det B = \lambda \det A$.

En los Ejercicios 16 a 18, A, B, y C denotan matrices $n \times n$.

16. ¿Es cierto que $\det(A + B) = \det A + \det B$? Proporcionar una demostración o un contraejemplo.

17. ¿Es cierto que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$?

18. Suponiendo cierta la ley $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, demostrar que $\det(ABC) = (\det A)(\det B)(\det C)$.

19. (Este ejercicio supone que se tienen conocimientos sobre la integración de funciones continuas de una variable.) Téngase en cuenta que la demostración de la desigualdad de Cauchy–Schwarz (Teorema 4) solo depende de las propiedades del producto escalar enumeradas en el Teorema 1. Utilizar esta observación para establecer la siguiente desigualdad para funciones continuas $f, g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$:

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\, dx\right| \le \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2\, dx}\sqrt{\int_0^1 [g(x)]^2\, dx}.$$

Para ello:

(a) Comprobar que el espacio de las funciones continuas de [0, 1] en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial; es decir, podemos pensar en las funciones f, g de forma abstracta como "vectores" que se pueden sumar entre sí y multiplicar por escalares.

(b) Introducir el producto escalar de funciones

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$$

y verificar que satisface las condiciones (I) a (IV) del Teorema 3.

20. Se define la matriz traspuesta A^T de una matriz $n \times n$ A como sigue: el elemento ij-ésimo de A^T es a_{ji} donde a_{ij} es el elemento ij-ésimo de A. Demostrar que A^T se caracteriza por la siguiente propiedad: Para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$,

$$(A^T\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}).$$

21. Comprobar que la inversa de

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{es} \quad \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

22. Utilizar la respuesta del Ejercicio 21 para demostrar que la solución del sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

23. Suponiendo cierta la ley $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, comprobar que $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$ y concluir que si A tiene inversa, entonces $\det A \neq 0$.

24. Determinar dos matrices 2×2, A y B, tales que $AB = 0$ pero $BA \neq 0$.

Ejercicios de repaso del Capítulo 1

1. Sean $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Calcular $\mathbf{v} + \mathbf{w}, 3\mathbf{v}, 6\mathbf{v} + 8\mathbf{w}, -2\mathbf{v}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Interpretar cada operación geométricamente dibujando los vectores.

2. Repetir el Ejercicio 1 con $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

3. (a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-1, 2, -1)$ en la dirección de $\mathbf{j}$.