5. La intersección del plano $z = 3$ con el cilindro elíptico

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

6. El triángulo formado por el recorrido que se describe al ir desde el punto $(1, 2, 3)$ a $(0, -2, 1)$, después hasta $(6, 4, 2)$ y de vuelta a $(1, 2, 3)$

7. La intersección de las superficies $y = x$ y $z = x^3$, desde el punto $(-3, -3, -27)$ hasta el punto $(2, 2, 8)$

8. La intersección del cilindro $y^2 + z^2 = 1$ y el plano $z = x$

9. Sean $f(x, y, z) = y$ y $\mathbf{c}(t) = (0, 0, t), 0 \leq t \leq 1$. Demostrar que $\int_{\mathbf{c}} f\, ds = 0$.

10. Calcular las siguientes integrales a lo largo de trayectorias $\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\, ds$, donde

(a) $f(x, y, z) = x + y + z$ y $\mathbf{c}\colon t \mapsto (\operatorname{sen} t, \cos t, t), t \in [0, 2\pi]$

(b) $f(x, y, z) = \cos z$, $\mathbf{c}$ como en el apartado (a).

11. Calcular las siguientes integrales a lo largo de trayectorias $\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\, ds$, donde

(a) $f(x, y, z) = \exp\sqrt{z}$, y $\mathbf{c}\colon t \mapsto (1, 2, t^2), t \in [0, 1]$

(b) $f(x, y, z) = yz$ y $\mathbf{c}\colon t \mapsto (t, 3t, 2t)$, $t \in [1, 3]$

12. Calcular la integral de $f(x, y, z)$ a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}$, donde

(a) $f(x, y, z) = x \cos z$, $\mathbf{c}\colon t \mapsto t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, t \in [0, 1]$

(b) $f(x, y, z) = (x + y)/(y + z)$ y $\mathbf{c}\colon t \mapsto \left(t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t\right), t \in [1, 2]$

13. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \backslash \{\text{ plano } xz\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = 1/y^3$. Calcular $\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\, ds$, donde $\mathbf{c}\colon [1, e] \to \mathbb{R}^3$ está dada por $\mathbf{c}(t) = (\log t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

14. (a) Demostrar que la integral de $f(x, y)$ a lo largo de la trayectoria dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

(b) Calcular la longitud de arco de la trayectoria $r = 1 + \cos\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

15. Sea $f(x, y) = 2x - y$ y consideremos la trayectoria $x = t^4, y = t^4, -1 \leq t \leq 1$.

(a) Calcular la integral de f a lo largo de esta trayectoria e interpretar geométricamente la respuesta.

(b) Calcular la función de longitud de arco $s(t)$ y repetir el apartado (a) en términos de s (véase el Ejercicio 2 de la Sección 4.2).

Los Ejercicios 16 a 19 se ocupan de la aplicación de la integral a lo largo de una trayectoria al problema de definir el valor medio de una función escalar a lo largo de una trayectoria. Definimos el número

$$\frac{\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\, ds}{l(\mathbf{c})}$$

como el ***valor medio*** *de f a lo largo de $\mathbf{c}$. Aquí $l(\mathbf{c})$ es la longitud de la trayectoria:*

$$l(\mathbf{c}) = \int_{\mathbf{c}} \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt.$$

(Esto es análogo al valor medio de una función sobre una región definido en la Sección 6.3.)

16. (a) Justificar la fórmula $[\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\, ds]/l(\mathbf{c})$ para el valor medio de f a lo largo de $\mathbf{c}$ usando las sumas de Riemann.

(b) Demostrar que el valor medio de f a lo largo de $\mathbf{c}$ en el Ejemplo 1 es $(1 + \frac{4}{3}\pi^2)$.

(c) En los Ejercicios 10(a) y (b), hallar el valor medio de f sobre las curvas dadas.

17. Hallar el valor medio de la coordenada y de los puntos sobre la semicircunferencia parametrizada por $\mathbf{c}\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^3, \theta \mapsto (0, a\operatorname{sen}\theta, a\cos\theta); a > 0$.

18. Supongamos que la semicircunferencia del Ejercicio 17 está hecha con un alambre con una densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.