Por tanto, la integral iterada dada es igual a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\log 2}\int_{e^y}^{2}(x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\,dx\,dy &= \int_0^{\log 2}\sqrt{1+e^{2y}}\left[\int_{e^y}^{2}(x-1)\,dx\right]dy\\
&= \int_0^{\log 2}\sqrt{1+e^{2y}}\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{e^y}^{2}dy\\
&= -\int_0^{\log 2}\left(\frac{e^{2y}}{2}-e^y\right)\sqrt{1+e^{2y}}\,dy\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\log 2}e^{2y}\sqrt{1+e^{2y}}\,dy+\int_0^{\log 2}e^y\sqrt{1+e^{2y}}\,dy. \qquad (1)
\end{aligned}$$

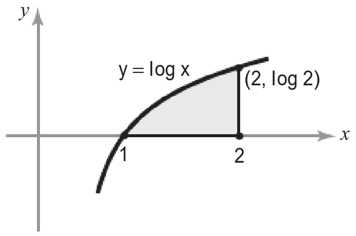

Figura 5.4.2 *D* es la región de integración para el Ejemplo 2.

En la primera integral de la expresión (1), sustituimos $u = e^{2y}$ y en la segunda, $v = e^y$. De este modo, obtenemos

$$-\frac{1}{4}\int_1^4\sqrt{1+u}\,du+\int_1^2\sqrt{1+v^2}\,dv. \qquad (2)$$

Ambas integrales de la expresión (2) pueden calcularse fácilmente mediante las técnicas del cálculo de una variable (o consultando la tabla de integrales que se proporciona al final del libro). Para la primera integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int_1^4\sqrt{1+u}\,du &= \left[\frac{1}{6}(1+u)^{3/2}\right]_1^4=\frac{1}{6}[(1+4)^{3/2}-2^{3/2}] \qquad (3)\\
&= \frac{1}{6}[5^{3/2}-2^{3/2}].
\end{aligned}$$

La segunda integral es

$$\begin{aligned}
\int_1^2\sqrt{1+v^2}\,dv &= \frac{1}{2}\left[v\sqrt{1+v^2}+\log\left(\sqrt{1+v^2}+v\right)\right]_1^2\\
&= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{5}+\log(\sqrt{5}+2)\right]-\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)\right] \qquad (4)
\end{aligned}$$

(véase la fórmula 43 en la tabla de integrales disponible al final del libro). Por último, restamos la Ecuación (3) de la Ecuación (4) para obtener el resultado

$$\frac{1}{2}\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}+\log\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{2}+1}\right)-\frac{1}{6}\left[5^{3/2}-2^{3/2}\right].$$

▲

Desigualdad del valor medio

Terminamos esta sección con una desigualdad que nos ayudará a estimar integrales. Supongamos que m y M son números tales que para todo $(x, y) \in D$ y $m \le f(x, y) \le M$. Entonces integrando sobre D, obtenemos

$$m \cdot A(D) \le \iint_D f(x,y)\,dA \le M \cdot A(D), \qquad (5)$$