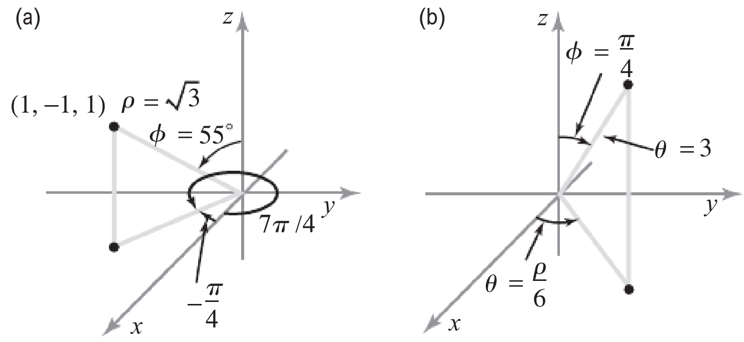

Figura 1.4.6 Cálculo de (a) las coordenadas esféricas del punto (1, –1, 1), y de (b) las coordenadas cartesianas de (3, $\pi/6$, $\pi/4$).

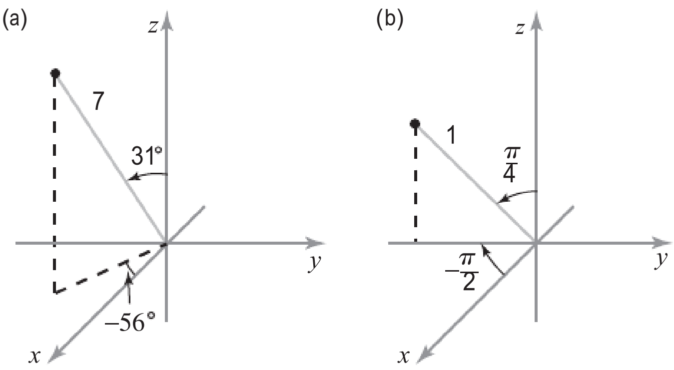

Figura 1.4.7 Cálculo de (a) las coordenadas esféricas del punto (2, -3, 6), y de las (b) coordenadas cartesianas de (1, $-\pi/2$, $\pi/4$). ▲

Ejemplo 3 Expresar (a) la superficie $xz = 1$ y (b) la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en coordenadas esféricas.

Solución A partir de la Fórmula (3), $x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$ y $z = \rho \cos \phi$, y así la superficie $xz = 1$ de (a) está formada por los puntos (ρ, θ, ϕ) tales que

$$\rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta \cos \phi = 1, \qquad \text{esto es,} \qquad \rho^2 \operatorname{sen} 2\phi \cos \theta = 2.$$

En cuanto al apartado (b), podemos escribir

$$x^2 + y^2 - z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2z^2 = \rho^2 - 2\rho^2 \cos^2 \phi,$$

de modo que la superficie es $\rho^2(1 - 2\cos^2 \phi) = 1$; esto es, $-\rho^2 \cos(2\phi) = 1$. ▲

Asociados a las coordenadas cilíndricas y esféricas están los vectores unitarios que se corresponden con $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en las coordenadas rectangulares, que se muestran en la Figura 1.4.8. Por ejemplo, $\mathbf{e}_r$ es el vector unitario paralelo al plano xy que tiene dirección radial, de modo que $\mathbf{e}_r = (\cos \theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} \theta)\mathbf{j}$. De forma similar, en coordenadas esféricas, $\mathbf{e}_\phi$ es el vector unitario tangente a la curva parametrizada por la variable ϕ manteniendo fijas las variables ρ y θ. Utilizaremos estos vectores unita-