Ejemplo 14 Demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Solución Tenemos que demostrar que $x^2/\sqrt{x^2+y^2}$ es pequeño cuando (x, y) está próximo al origen. Para ello, utilizamos la siguiente desigualdad:

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (\text{puesto que } y^2 \geq 0)$$
$$= \sqrt{x^2+y^2}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta = \varepsilon$. Entonces $\|(x, y) - (0, 0)\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$, y por tanto $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ implica que

$$\left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta = \varepsilon.$$

Por tanto, se cumplen las condiciones del Teorema 6 y se comprueba el valor del límite. ▲

Ejemplo 15

(a) ¿Existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2/(x^2 + y^2)$? (Véase la Figura 2.2.18(a).)

(b) Demostrar que (véase la Figura 2.2.18(b))

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

Solución (a) Si el limite existe, $x^2/(x^2+y^2)$ debe aproximarse a un valor determinado, por ejemplo, a, cuando (x, y) se aproxima a (0, 0). En particular, si (x, y) se aproxima al origen a lo largo de una trayectoria dada, entonces $x^2/(x^2 + y^2)$ debe aproximarse al valor límite a. Si (x, y) se aproxima a (0, 0) a lo largo de la recta $y = 0$, el valor límite es clara-

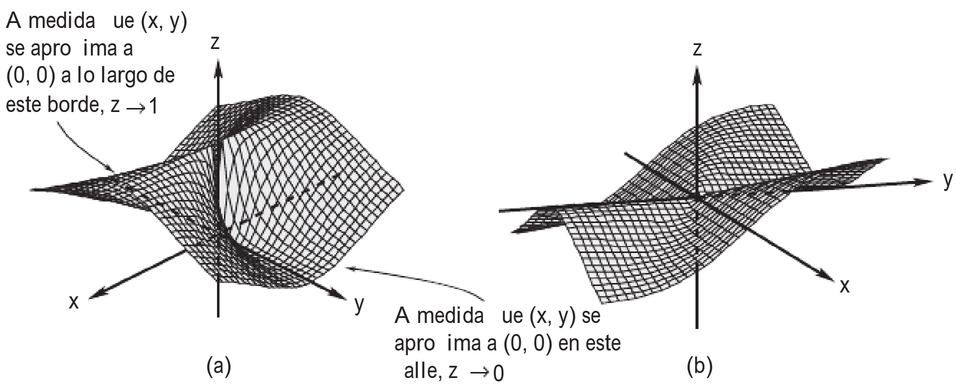

Figura 2.2.18 (a) La función $z = x^2/(x^2 + y^2)$ no tiene límite en (0, 0). (b) La función $z = (2x^2y)/(x^2 + y^2)$ tiene límite 0 en (0, 0).