Las fórmulas correspondientes para el gradiente, la divergencia y el rotacional en coordenadas esféricas son:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\mathbf{e}_\theta$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\operatorname{sen}\phi F_\phi) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$$

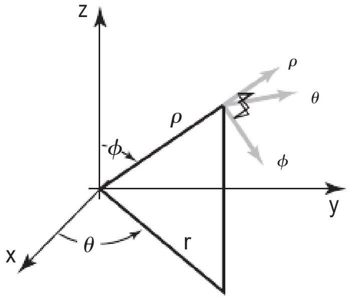

Figura 8.2.10 Vectores ortonormales $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$ y $\mathbf{e}_\theta$ asociados con las coordenadas esféricas.

y

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left[\frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\operatorname{sen}\phi F_\theta) - \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial F_\phi}{\partial \theta}\right]\mathbf{e}_\rho$$
$$+ \left[\frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\theta)\right]\mathbf{e}_\phi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\phi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right]\mathbf{e}_\theta,$$

donde $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta$ son vectores unitarios como los mostrados en la Figura 8.2.10 y donde $\mathbf{F} = F_\rho \mathbf{e}_\rho + F_\phi \mathbf{e}_\phi + F_\theta \mathbf{e}_\theta$.

Ley de Faraday

El cálculo vectorial desempeña un papel esencial en la teoría del electromagnetismo. El siguiente ejemplo muestra cómo se aplica el teorema de Stokes.

Ejemplo 5 Sean $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ campos eléctrico y magnético, respectivamente, dependientes del tiempo, en el espacio. Sea S una superficie con frontera C. Definimos

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \text{circulación del campo eléctrico a lo largo de } C,$$

$$\iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \text{flujo magnético a través de } S.$$

La ***ley de Faraday*** (véase la Figura 8.2.11) establece que la *circulación del campo eléctrico a lo largo de C es igual a la tasa de cambio del flujo magnético a través de S.* Demostrar que la ley de Faraday se sigue de la siguiente ecuación diferencial (una de las ecuaciones de Maxwell):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

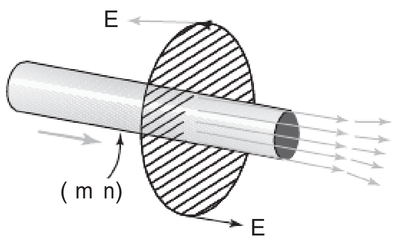

Figura 8.2.11 Ley de Faraday.