Coordenadas esféricas

A continuación vamos a considerar el sistema de coordenadas esféricas. Recuérdese que se define por

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \qquad z = \rho \cos\phi.$$

Por tanto, tenemos

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por la última fila, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} &= \cos\phi \begin{vmatrix} -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} \\ &\quad -\rho\operatorname{sen}\phi \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= -\rho^2\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}^2\theta - \rho^2\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi\cos^2\theta \\ &\quad -\rho^2\operatorname{sen}^3\phi\cos^2\theta - \rho^2\operatorname{sen}^3\phi\operatorname{sen}^2\theta \\ &= -\rho^2\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi - \rho^2\operatorname{sen}^3\phi = -\rho^2\operatorname{sen}\phi. \end{aligned}$$

Y llegamos así a la fórmula:

Cambio de variables—Coordenadas esféricas

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W^*} f(\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi. \quad (10)$$

Para demostrar la Fórmula (10), se debe probar que la transformación S en el conjunto W^* es inyectiva, excepto en un conjunto que es una unión finita de gráficas de funciones continuas. Dejamos esta verificación como Ejercicio 38.

Ejemplo 6 Calcular

$$\iiint_W \exp{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dV,$$

donde W es la bola unidad de $\mathbb{R}^3$.

Solución En primer lugar vemos que no podemos integrar *fácilmente* esta función usando integrales iteradas (¡inténtese!). Por ello (empleando la estrategia de la cita que abre este capítulo), vamos a intentar un cambio de variables. La transformación a coordenadas esféricas parece apropiada,