- ***Núcleo e imagen de una transformación lineal***

Sean V y W dos espacios vectoriales y sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces el **núcleo** de T, denotado por nu T, está dado por

$$\text{nu } T = \{\mathbf{v} \in V: T\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

La **imagen** de T, denotada por im T está dada por

$$\text{im } T = \{\mathbf{w} \in W: T\mathbf{v} \text{ para algún } \mathbf{v} \in V\}$$

nu T es un subespacio de V e im T es un subespacio de W.

- ***Nulidad y rango de una transformación lineal***

Si T es una transformación lineal de V en W, entonces

$$\textbf{nulidad} \text{ de } T = \nu(T) = \dim \text{nu } T$$
$$\textbf{rango} \text{ de } T = \rho(T) = \dim \text{im } T$$

Autoevaluación 7.2

De los siguientes enunciados, indique si son verdaderos o falsos.

I) Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. En ocasiones es posible encontrar tres vectores diferentes $\mathbf{v_1} \in V$, $\mathbf{v_2} \in V$ y $\mathbf{w} \in W$ tales que $T\mathbf{v}_1 = T\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}$.

II) Si $T\mathbf{v}_1 = T\mathbf{v}_2$ como en el problema 7.2.1, entonces $\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} \in$ nu T.

III) Si T es una transformación lineal de $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$, entonces la imagen de T es $\mathbf{w}$.

IV) Sea $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ una base para $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ una base para P_{n-1}. Entonces existen dos transformaciones lineales S y T tales que $T\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1$ y $S\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

V) Si $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces T es la transformación cero.

VI) Existe una transformación lineal T de $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ con $\rho(T) = \nu(T)$.

VII) Suponga que $T: M_{22} \to M_{22}$ con $\rho(T) = \mathbf{4}$. Si $TA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Respuestas a la autoevaluación

I) V **II)** V **III)** F **IV)** F
V) F **VI)** F **VII)** V