como hemos visto en el Teorema 3. De nuevo, podemos representar una función tal por su serie de Taylor siempre que podamos probar que $R_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Este punto se estudia en detalle en el Ejercicio 13.

Los polinomios de Taylor de primer, segundo y tercer orden también se denominan aproximaciones de Taylor de primer, segundo y tercer orden a f, ya que se supone que el resto es pequeño y se hace más pequeño a medida que el orden del polinomio de Taylor aumenta.

Ejemplo 3 Determinar las aproximaciones de Taylor de primer y segundo orden a $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ en el punto $(x_0, y_0) = (1, \pi/2)$.

Solución Aquí

$$\begin{aligned}
f(x_0,y_0) &= \operatorname{sen}(x_0y_0) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1\\
f_x(x_0,y_0) &= y_0 \cos(x_0y_0) = \frac{\pi}{2}\cos(\pi/2) = 0\\
f_y(x_0,y_0) &= x_0 \cos(x_0y_0) = \cos(\pi/2) = 0\\
f_{xx}(x_0,y_0) &= -y_0^2 \operatorname{sen}(x_0y_0) = -\frac{\pi^2}{4}\operatorname{sen}(\pi/2) = -\frac{\pi^2}{4}\\
f_{xy}(x_0,y_0) &= \cos(x_0y_0) - x_0y_0 \operatorname{sen}(x_0y_0) = -\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(\pi/2) = -\frac{\pi}{2}\\
f_{yy}(x_0,y_0) &= -x_0^2 \operatorname{sen}(x_0y_0) = -\operatorname{sen}(\pi/2) = -1.
\end{aligned}$$

Por tanto, la aproximación lineal (de primer orden) es

$$\begin{aligned}
l(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\\
&= 1 + 0 + 0 = 1,
\end{aligned}$$

y la aproximación de segundo orden (o cuadrática) es

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= 1 + 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi^2}{4}\right)(x-1)^2 + \left(-\frac{\pi}{2}\right)(x-1)\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\\
&\quad + \frac{1}{2}(-1)\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2\\
&= 1 - \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 - \frac{\pi}{2}(x-1)\left(y-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Veáse la Figura 3.2.1. ▲

Ejemplo 4 Hallar las aproximaciones lineal y cuadrática a la expresión $(3{,}98-1)^2/(5{,}97-3)^2$. Comparar con el valor exacto.

Solución Sea $f(x,y) = (x-1)^2/(y-3)^2$. La expresión deseada está próxima a $f(4,6) = 1$. Para hallar las aproximaciones, derivamos:

$$f_x = \frac{2(x-1)}{(y-3)^2}, \qquad f_y = \frac{-2(x-1)^2}{(y-3)^3}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{-4(x-1)}{(y-3)^3}, \qquad f_{xx} = \frac{2}{(y-3)^2}, \qquad f_{yy} = \frac{6(x-1)^2}{(y-3)^4}.$$