sobre la integral gaussiana. En dicho ejemplo, integramos $\exp(-x^2 - y^2)$ sobre todo $\mathbb{R}^2$ integrando primero sobre un disco de radio $a$ y después tomando el límite cuando $a \to \infty$.

## Ejercicios

*En los ejercicios 1 a 4, calcular las siguientes integrales, si existen (explicar cómo se podría definir la integral si ésta no se define en el texto).*

**1.** $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}}\, dA$, donde $D = [0,1] \times [0,1]$

**2.** $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}\, dx\, dy$, donde $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1,\, y \leq x\}$

**3.** $\displaystyle\iint_D (y/x)\, dx\, dy$, donde $D$ está acotada por $x = 1, x = y$ y $x = 2y$

**4.** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{e^v} \log x\, dx\, dy$

**5.** Sea $D = [0,1]\times[0,1]$. Sea $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$. Calcular:

$$\iint_D \frac{dx\, dy}{x^\alpha y^\beta}.$$

**6.** Sea $D = [1,\infty) \times [1,\infty)$. Sea $1 < \gamma$ y $1 < \rho$. Calcular:

$$\iint_D \frac{dx\, dy}{x^\gamma y^\rho}.$$

**7.** (a) Calcular

$$\iint_D \frac{dA}{(x^2+y^2)^{2/3}},$$

donde $D$ es el disco unidad en $\mathbb{R}^2$.

(b) Determinar los números reales $\lambda$ para los que la integral

$$\iint_D \frac{dA}{(x^2+y^2)^\lambda}$$

es convergente, donde, de nuevo, $D$ es el disco unidad.

**8.** (a) Explicar cómo se podría definir $\iint_D f\, dA$ si $D$ fuera una región no acotada—por ejemplo, el conjunto de $(x,y)$ tales que $a \leq x < \infty$ y $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$, dadas $\phi_1 \leq \phi_2$ (Figura 6.4.5).

(b) Calcular $\iint_D xye^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ si $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 1$.

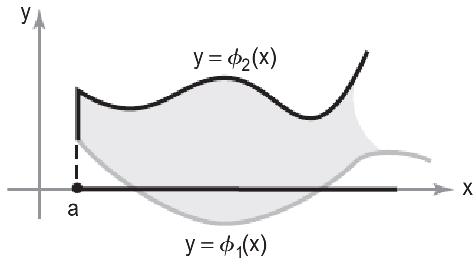


**Figura 6.4.5** Una región no acotada $D$.

**9.** Usando el Ejercicio 8, integrar $e^{-xy}$ para $x \geq 0, 1 \leq y \leq 2$ de dos formas distintas. Suponiendo que se pueda usar el teorema de Fubini, demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx = \log 2.$$

**10.** Demostrar que la siguiente integral existe y calcularla.

$$\int_0^1 \int_0^a (x/\sqrt{a^2 - y^2})\, dy\, dx$$

**11.** Discutir si existe la integral

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+2xy+y^2}\, dx\, dy$$

donde $D = [0,1] \times [0,1]$. Si existe, calcular su valor.

**12.** También se pueden considerar integrales impropias de funciones que sean discontinuas en una curva contenida en una región $D$. Por ejemplo, dividiendo $D = [0,1] \times [0,1]$ en dos regiones, definir y después discutir la convergencia de la integral