EJEMPLO 5.1.9 El espacio vectorial M_{mn}

Si $V = M_{mn}$ denota el conjunto de matrices de $m \times n$ con componentes reales, entonces con la suma de matrices y multiplicación por un escalar usuales se puede verificar que M_{mn} es un espacio vectorial cuyo neutro aditivo es la matriz de ceros de dimensiones $m \times n$.

EJEMPLO 5.1.10 Un conjunto de matrices invertibles puede no formar un espacio vectorial

Sea S_3 el conjunto de matrices invertibles de 3×3. Se define la "suma" $A \oplus B$ por $A \oplus B = AB$. Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible (por el teorema 2.4.3) de manera que el axioma i) se cumple. El axioma ii) es sencillamente la ley asociativa para la multiplicación de matrices (teorema 2.2.2); los axiomas iii) y iv) se satisfacen con $\mathbf{0} = I_3$ y $-A = A^{-1}$. Sin embargo, $AB \neq BA$ en general; entonces el axioma v) no se cumple y por lo tanto S_3 no es un espacio vectorial.

Nota

Se usa un signo para evitar confusión con el signo + normal que denota la suma de matrices.

EJEMPLO 5.1.11 Un conjunto de puntos en un semiplano puede no formar un espacio vectorial

Sea $V = \{(x, y): y \geq 0\}$. V consiste en los puntos en $\mathbb{R}^2$ en el semiplano superior (los primeros dos cuadrantes). Si $y_1 \geq 0$ y $y_2 \geq 0$, entonces $y_1 + y_2 \geq 0$; así, si $(x_1, y_1) \in V$ y $(x_2, y_2) \in V$, entonces $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in V$. Sin embargo, V no es un espacio vectorial ya que el vector $(1, 1)$, por ejemplo, no tiene un inverso en V porque $(-1, -1) \notin V$. Más aún, el axioma vi) falla, ya que si $(x, y)\ \alpha\ V$, entonces $\alpha\,(x, y)\ \alpha\ V$ si $\alpha < 0$.

EJEMPLO 5.1.12 El espacio $\mathbb{C}^n$

Sea $V = \mathbb{C}^n = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n); c_i$ es un número complejo para $i = 1, 2, \ldots, n\}$ y el conjunto de escalares es el conjunto de números complejos. No es difícil verificar que $\mathbb{C}^n$ también es un espacio vectorial.

Como lo sugieren estos ejemplos, existen diferentes tipos de espacios vectoriales y muchas clases de conjuntos que *no* son espacios vectoriales. Antes de terminar esta sección se demostrarán algunos resultados sobre los espacios vectoriales.

Teorema 5.1.1

Sea V un espacio vectorial. Entonces

i) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo escalar α.

ii) $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in V$.

iii) Si $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\alpha = 0$ o $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (o ambos).

iv) $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in V$.

Demostración

i) Por el axioma iii), $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$; y del axioma vii),

$$\alpha\mathbf{0} = \alpha(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0} \tag{5.1.1}$$