8. Recordemos de la Sección 2.4 que una circunferencia rodante de radio R describe una cicloide, la cual se puede parametrizar mediante $\mathbf{c}(t) = (Rt - R \operatorname{sen} t, R - R\cos t)$. Un arco de la cicloide se completa de $t = 0$ a $t = 2\pi$. Demostrar que este arco siempre es 4 veces el diámetro de la circunferencia rodante.

9. Sea C el segmento rectilíneo que conecta el punto $\mathbf{p} = (1, 2, 0)$ con el punto $\mathbf{q} = (0, 1, -1)$.

(a) Determinar la curva $\mathbf{c}(t)\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ que describe C.

(b) Hallar la longitud de arco de $\mathbf{c}(t)$.

(c) Hallar $||\mathbf{p} - \mathbf{q}||$.

10. Calcular la longitud de la curva $\mathbf{c}(t) = (\log(\sqrt{t}), \sqrt{3}t, \frac{3}{2}t^2)$ para $1 \leq t \leq 2$.

11. Hallar la longitud de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$, definida por $\mathbf{c}(t) = (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t, t)$, si $0 \leq t \leq 2\pi$ y $\mathbf{c}(t) = (2, t - 2\pi, t)$, si $2\pi \leq t \leq 4\pi$.

12. Sea $\mathbf{c}$ la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t, t \operatorname{sen} t, t \cos t)$. Hallar la longitud de arco de $\mathbf{c}$ entre los puntos $(0, 0, 0)$ y $(\pi, 0, -\pi)$.

13. Sea $\mathbf{c}$ la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (2t, t^2, \log t)$, definida para $t > 0$. Hallar la longitud de arco de $\mathbf{c}$ entre los puntos $(2, 1, 0)$ y $(4, 4, \log 2)$.

14. La función longitud de arco $s(t)$ para una trayectoria dada $\mathbf{c}(t)$, definida por $s(t) = \int_a^t \|\mathbf{c}'(\tau)\|\, d\tau$, representa la distancia recorrida por una partícula que viaja a lo largo de la trayectoria de $\mathbf{c}$ durante un tiempo t, habiendo empezado a moverse en el instante a; es decir, proporciona la longitud de $\mathbf{c}$ entre $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(t)$. Hallar las funciones longitud de arco para las curvas $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t, t)$ y $\boldsymbol{\beta}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, con $a = 0$.

15. Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria dada, $a \leq t \leq b$. Sea $s = \alpha(t)$ una nueva variable, donde α es una función C^1 estrictamente creciente en $[a, b]$. Para cada s en $[\,\alpha(a), \alpha(b)]$ existe un t único tal que $\alpha(t) = s$. Definir la función $\mathbf{d}\colon [\,\alpha(a), \alpha(b)] \to \mathbb{R}^3$ mediante $\mathbf{d}(s) = \mathbf{c}(t)$.

(a) Razonar que las curvas $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ tienen la misma imagen.

(b) Demostrar que $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ tienen la misma longitud de arco.

(c) Sea $s = \alpha(t) = \int_a^t \|\mathbf{c}'(\tau)\|\, d\tau$. Definir $\mathbf{d}$ como antes $\mathbf{d}(s) = \mathbf{c}(t)$. Demostrar que

$$\left\| \frac{d}{ds}\mathbf{d}(s) \right\| = 1.$$

Se dice que la trayectoria $s \mapsto \mathbf{d}(s)$ es una ***reparametrización de*** $\mathbf{c}$ ***por la longitud de arco*** (véase también el Ejercicio 17).

En los Ejercicios 16, 17 y 20–23 se desarrollan algunos aspectos de la geometría diferencial clásica de curvas.

16. Sea $\mathbf{c}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una trayectoria infinitamente diferenciable (existen derivadas de todos los órdenes). Suponemos que $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t. El vector $\mathbf{c}'(t)/\|\mathbf{c}'(t)\| = \mathbf{T}(t)$ es tangente a $\mathbf{c}$ en $\mathbf{c}(t)$, y puesto que $\|\mathbf{T}(t)\| = 1$, $\mathbf{T}$ se denomina la ***tangente unitaria*** a $\mathbf{c}$.

(a) Demostrar que $\mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0$. [SUGERENCIA: derivar $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 1$.]

(b) Escribir una fórmula para $\mathbf{T}'(t)$ en términos de $\mathbf{c}$.

17. (a) Se dice que una trayectoria $\mathbf{c}(s)$ está ***parametrizada por la longitud de arco*** o, lo que es lo mismo, se dice que tiene ***rapidez unitaria*** si $\|\mathbf{c}'(s)\| = 1$. Para una curva parametrizada por la longitud de arco en $[a, b]$, demostrar que $l(\mathbf{c}) = b - a$.

(b) La ***curvatura*** en un punto $\mathbf{c}(s)$ de una trayectoria se define por $k = \|\mathbf{T}'(s)\|$ cuando la trayectoria está parametrizada por la longitud de arco. Demostrar que $k = \|\mathbf{c}''(s)\|$.

(c) Si $\mathbf{c}$ está dada en términos de algún otro parámetro t y $\mathbf{c}'(t)$ nunca es $\mathbf{0}$, demostrar que $k = \|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|/\|\mathbf{c}'(t)\|^3$.

(d) Calcular la curvatura de la hélice $\mathbf{c}(t) = (1/\sqrt{2})(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$. (Esta curva $\mathbf{c}$ es un múltiplo escalar de la hélice circular recta.)

18. Demostrar que cualquier recta $\mathbf{l}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$, donde $\mathbf{v}$ es un vector unitario, tiene curvatura cero.

19. Consideremos la parametrización de la circunferencia unidad dada por $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

(a) Comprobar que $\mathbf{c}$ está parametrizada por la longitud de arco.

(b) Demostrar que la curvatura k de $\mathbf{c}$ es constante.