b) Para la J que sigue y la matriz C dada en el inciso *a*), forme $A = CJC^{-1}$.

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Para $k = 1, \ldots, 4$, sea $\mathbf{c}_k$ la k-ésima columna de C.

i) Verifique que $(A - 3I)\mathbf{c}_1 = 0$, $(A - 3I)^2\mathbf{c}_2 = 0$, $(A - 3I)^3\mathbf{c}_3 = 0$ y $(A - 3I)\mathbf{c}_4 = 0$. ¿Cuáles de las columnas de C son vectores característicos de A? ¿Cuáles de las columnas de C son vectores característicos generalizados de A?

ii) Repita para otra matriz invertible C de 4×4.

iii) (*Lápiz y papel*) Explique por qué se puede decir que $\lambda = 3$ es un valor característico de A con multiplicidad algebraica 4 y multiplicidad geométrica 2.

c) Forme $A = CJC^{-1}$, donde C es la matriz dada en el inciso *a*) y J es la matriz que sigue.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

i) Con base en el patrón observado en los incisos *a*) y *b*), determine qué columnas de C son vectores característicos de A y cuáles son vectores característicos generalizados. Verifique sus respuestas mostrando que los productos adecuados son cero.

ii) Repita para otra matriz C.

iii) (*Lápiz y papel*) ¿Qué puede decir sobre las multiplicidades algebraica y geométrica de los valores característicos de A? Justifique su respuesta.

2. Genere una matriz invertible C de 5×5. Forme una matriz A tal que $\lambda = 2$ sea un valor característico de A con multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1, donde las columnas 1 y 2 de C son los vectores característicos o los vectores característicos generalizados asociados con $\lambda = 2$; $\mu = 4$ es un valor característico para A con multiplicidad algebraica 3 y multiplicidad geométrica 1, donde las columnas 3 a 5 de A son vectores característicos o vectores característicos generalizados asociados con $\mu = 4$. Explique su procedimiento. Verifique su respuesta final para A mostrando que los productos pertinentes son cero.

8.7 Una aplicación importante: forma matricial de ecuaciones diferenciales

Cálculo*

Suponga que $x = f(t)$ representa alguna cantidad física como el volumen de una sustancia, la población de ciertas especies, la masa de una sustancia radiactiva en decaimiento o el número de dólares invertidos en acciones. Entonces la tasa de crecimiento de $f(t)$ está dada por su derivada $f'(t) = \frac{dx}{dt}$. Si $f(t)$ crece a una tasa constante, entonces $\frac{dx}{dt} = k$ y $x = kt + C$; es decir, la función $x = f(t)$ es una recta.

Tasa relativa de crecimiento

Con frecuencia es más interesante y apropiado considerar la **tasa relativa de crecimiento** definida por

$$\boxed{\text{Tasa relativa de crecimiento} = \frac{\text{tamaño real de crecimiento}}{\text{tamaño de } f(t)} = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{x'(t)}{x(t)}} \qquad \textbf{(8.7.1)}$$

* El símbolo Cálculo indica que se necesita el cálculo para resolver el problema.