15. Una partícula está restringida a moverse alrededor de la circunferencia unidad en el plano xy de acuerdo con la fórmula $(x, y, z) = (\cos(t^2), \operatorname{sen}(t^2), 0), t \geq 0$.

(a) ¿Cuáles son el vector velocidad y la rapidez de la partícula como funciones de t?

(b) ¿En qué punto de la circunferencia debe liberarse la partícula para alcanzar un objetivo que se halla en $(2, 0, 0)$? (observar especialmente la dirección en la que se mueve la partícula alrededor de la circunferencia).

(c) ¿En qué instante t debería liberarse la partícula? (utilizar el $t > 0$ más pequeño que cumpla lo anterior.)

(d) ¿Cuáles son la velocidad y la rapidez en el instante de la liberación?

(e) ¿En qué instante se alcanza el objetivo?

16. Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de una fuerza $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, donde k es una constante y $\mathbf{r}(t)$ es la posición de la partícula en el instante t.

(a) Escribir las ecuaciones diferenciales para las componentes de $\mathbf{r}(t)$.

(b) Resolver las ecuaciones del apartado (a) sujetas a las condiciones iniciales $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{r}'(0) = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

17. Escribir en forma paramétrica la curva descrita por las ecuaciones $x - 1 = 2y + 1 = 3z + 2$.

18. Escribir en forma paramétrica la curva $x = y^3 = z^2 + 1$.

19. Demostrar que $\mathbf{c}(t) = (1/(1-t), 0, e^t/(1-t))$ es una línea de flujo del campo vectorial definido por $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, 0, z(1 + x))$.

20. Sea $\mathbf{F}(x, y) = f(x^2 + y^2)[-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}]$ para una función f de una variable. ¿Qué ecuación debe satisfacer $g(t)$ para que

$$\mathbf{c}(t) = [\cos g(t)]\mathbf{i} + [\sin g(t)]\mathbf{j}$$

sea una línea de flujo para $\mathbf{F}$?

En los Ejercicios 21 a 24, calcular $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y $\nabla \times \mathbf{F}$.

21. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$

22. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

23. $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z + x)\mathbf{k}$

24. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

En los Ejercicios 25 y 26, calcular en los puntos indicados la divergencia y el rotacional de los campos vectoriales.

25. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, en el punto $(1, 1, 1)$.

26. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)^3\mathbf{i} + (\operatorname{sen} xy)\mathbf{j} + (\cos xyz)\mathbf{k}$, en el punto $(2, 0, 1)$.

En los Ejercicios 27 a 30, calcular los gradientes de las funciones y verificar que $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$.

27. $f(x, y) = e^{xy} + \cos(xy)$

28. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

29. $f(x, y) = e^{x^2} - \cos(xy^2)$

30. $f(x, y) = \tan^{-1}(x^2 + y^2)$

31. (a) Sea $f(x, y, z) = xyz^2$; calcular ∇f.

(b) Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zy\mathbf{k}$; calcular $\nabla \times \mathbf{F}$.

(c) Calcular $\nabla \times (f\mathbf{F})$ utilizando la identidad 10 de la lista de identidades del análisis vectorial. Compárese con el cálculo directo.

32. (a) Sea $\mathbf{F} = 2xye^z\mathbf{i} + e^z x^2\mathbf{j} + (x^2ye^z + z^2)\mathbf{k}$. Calcular $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y $\nabla \times \mathbf{F}$.

(b) Hallar una función $f(x, y, z)$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

33. Sea $\mathbf{F}(x, y) = f(x^2 + y^2)[-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}]$, como en el Ejercicio 20. Calcular div $\mathbf{F}$ y rot $\mathbf{F}$, y analizar sus respuestas teniendo en cuenta los resultados del Ejercicio 20.

34. Sea una partícula de masa m que se mueve siguiendo la hélice elíptica $\mathbf{c}(\mathrm{t}) = (4\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.

(a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la hélice en $t = \pi/4$.