

Teorema 8.1.5

Sea λ un valor característico de A . Entonces

$$\text{Multiplicidad geométrica de } \lambda \leq \text{multiplicidad algebraica de } \lambda.$$

Nota

La multiplicidad geométrica de un valor característico nunca es cero. Esto se deduce de la definición 1, que establece que si λ es un valor característico, entonces existe un vector característico *diferente de cero* que corresponde a λ .

En el resto de este capítulo, un problema importante será determinar si una matriz de $n \times n$ dada tiene o no n vectores característicos linealmente independientes. Con lo que se ha estudiado en esta sección se vuelve evidente el siguiente teorema.

Teorema 8.1.6

Sea A una matriz de $n \times n$; entonces A tiene n vectores característicos linealmente independientes si y sólo si la multiplicidad geométrica de cada valor característico es igual a su multiplicidad algebraica. En particular, A tiene n vectores característicos linealmente independientes si todos los valores característicos son distintos (ya que entonces la multiplicidad algebraica de cada valor característico es 1).

En el ejemplo 8.1.5 se observó una matriz para la que un valor característico era cero. En realidad, por el teorema 8.1.1 es evidente que cero es un valor característico de A si y sólo si $\det A = \det(A - 0I) = 0$. Esto permite extender, por última vez, el teorema de resumen (vea el teorema 7.4.4).

Teorema 8.1.7 Teorema de resumen (punto de vista 9)

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes 12 afirmaciones son equivalentes; es decir, cada una implica a las otras 11 (de manera que si una es cierta, todas las demás lo son):

- i) A es invertible.
- ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).
- iii) Para cada vector \mathbf{b} de dimensión n , el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única.
- iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n .
- v) A se puede expresar como el producto de matrices elementales.
- vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.
- vii) Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.
- viii) $\det A \neq 0$.
- ix) $\nu(A) = 0$.
- x) $\rho(A) = n$.
- xi) La transformación lineal T de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n definida por $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ es un isomorfismo.
- xii) Cero *no* es un valor característico de A .