Como ya sabemos, hay muchas funciones de una variable que son continuas pero no diferenciables, como $f(x) = |x|$. Antes de enunciar el resultado, veamos un ejemplo de una función de dos variables cuyas *derivadas parciales existen en un punto, pero que no es continua en dicho punto*.

Ejemplo 9 Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ o si } y = 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Puesto que f es constante en los ejes x e y, sobre los que es igual a 1,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Pero f no es continua en $(0, 0)$, ya que no existe $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$. ▲

Algunos teoremas básicos

El primero de estos teoremas básicos relaciona la diferenciabilidad y la continuidad.

Teorema 8 Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$. Entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$.

Este resultado es muy razonable, ya que "diferenciabilidad" significa que hay suficiente suavidad como para tener un plano tangente, lo que es más fuerte que ser simplemente continua.

Como hemos visto, suele ser fácil establecer si las derivadas parciales de una función existen basándonos en lo que sabemos del cálculo de una variable. Sin embargo, la definición de diferenciabilidad parece algo complicada y la condición de aproximación requerida en la Ecuación (4) puede parecer, y a veces lo es, difícil de verificar. Afortunadamente, existe un criterio sencillo, dado en el siguiente teorema, que nos dice cuándo una función es diferenciable.

Teorema 9 Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Supongamos que todas las derivadas parciales $\partial f_i/\partial x_j$ de f existen y son continuas en un entorno de un punto $\mathbf{x} \in U$. Entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}$.

Obsérvese que: