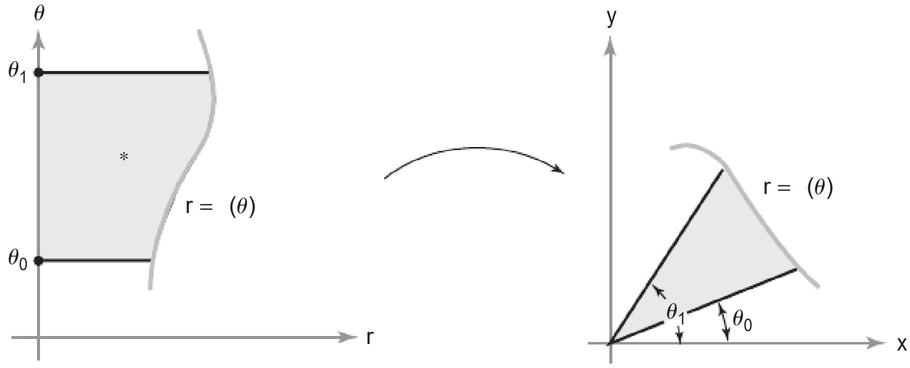

Figura 6.2.5 El efecto sobre la regi ón D^* de la aplicaci ón de cambio a coordenadas polares.

Esta fórmula para $A(D)$ le resultará familiar del cálculo de una variable. ▲

Fórmula del cambio de variables

Antes de enunciar la fórmula del cambio de variables para dos variables, que es el objetivo de esta explicación, recordemos el teorema correspondiente del cálculo de una variable que a veces se denomina *método de sustitución*:

$$\int_a^b f(x(u))\frac{dx}{du}\,du = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\,dx, \tag{5}$$

donde f es continua y $u \mapsto x(u)$ es continuamente diferenciable en $[a, b]$.

Demostración Sea F una primitiva de f; es decir, $F' = f$, cuya existencia garantiza el teorema fundamental del cálculo. El lado derecho de la Ecuación (5) se convierte en

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\,dx = F(x(b)) - F(x(a)).$$

Para calcular el lado izquierdo de la Ecuación (5), hacemos $G(u) = F(x(u))$. Por la regla de la cadena, $G'(u) = F'(x(u))x'(u) = f(x(u))x'(u)$. De nuevo por el teorema fundamental,

$$\int_a^b f(x(u))x'(u)\,du = \int_a^b G'(u)\,du = G(b) - G(a) = F(x(b)) - F(x(a)),$$

como se quería. ■

Supongamos ahora que tenemos una *función* C^1, $u \mapsto x(u)$ que es inyectiva en $[a, b]$. Por tanto, debe ser $dx/du \geq 0$ en $[a, b]$ o $dx/du \leq 0$ en $[a, b]$.[1] Sea I^* el intervalo $[a, b]$ y sea I el intervalo cerrado con puntos

[1] Si dx/du es positiva y luego negativa, la función $x = x(u)$ primero sube y después desciende, por lo que no es inyectiva; lo mismo se aplica si dx/du es negativa y luego positiva.