La integral sobre una región elemental

Ahora podemos utilizar un "truco" interesante para ampliar la definición de integral de rectángulos a regiones elementales.

> **Definición Integral sobre una región elemental** Si D es una región elemental en el plano, elegimos un rectángulo R que contenga a D. Dada $f\colon D \to \mathbb{R}$, donde f es una función continua (y por tanto acotada), definimos $\iint_D f(x,y)\,dA$, la ***integral de f sobre el conjunto*** D, como sigue: extendemos f a una función f^* definida sobre todo R como
>
> $$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin D \text{ y } (x,y) \in R. \end{cases}$$
>
> Obsérvese que f^* está acotada (ya que f lo está) y es continua excepto posiblemente en la frontera de D (véase la Figura 5.3.4). La frontera de D está formada por gráficas de funciones continuas, por lo que f^* es integrable sobre R por el Teorema 2, Sección 5.2. Por tanto, podemos definir
>
> $$\iint_D f(x,y)\;dA = \iint_R f^*(x,y)\;dA.$$

Cuando $f(x,y) \geq 0$ sobre D, podemos interpretar la integral $\iint_D f(x,y)\,dA$ como el volumen de la región tridimensional que está entre la gráfica de f y D, como es evidente en la Figura 5.3.4.

Hemos definido $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ eligiendo un rectángulo R que contiene a D. Intuitivamente, debería estar claro que el valor de $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ no depende del rectángulo R seleccionado; demostraremos este hecho al final de la sección.

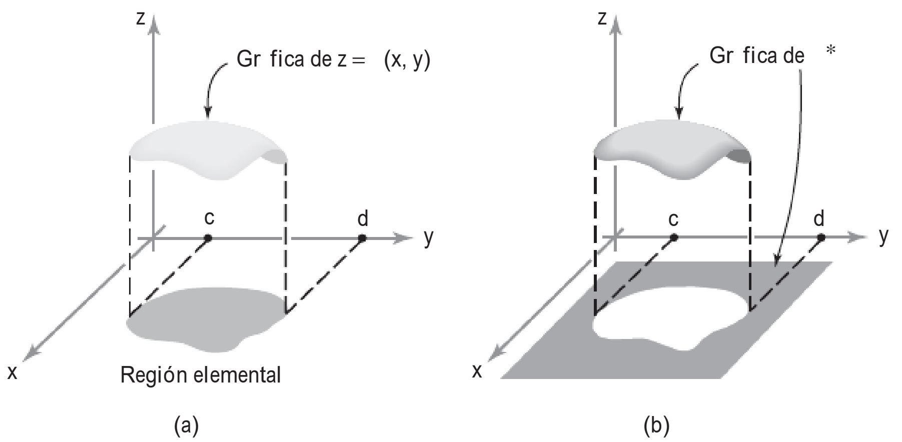

Figura 5.3.4 (a) Gráfica de $z = f(x,y)$ sobre una región elemental D. (b) La región sombreada muestra la gráfica de $z = f^*(x,y)$ en un rectángulo R que contiene a D. En esta imagen vemos que los puntos de frontera de D pueden ser puntos de discontinuidad de f^*, ya que la gráfica de $z = f^*(x,y)$ puede estar rota en estos puntos.