Integrales de línea sobre curvas geométricas

Hemos visto cómo definir integrales a lo largo de trayectorias (integrales de funciones escalares) e integrales de línea (integrales de funciones vectoriales) sobre curvas parametrizadas. También hemos visto que nuestro trabajo se simplifica si elegimos adecuadamente la parametrización. Dado que estas integrales son independientes de la parametrización (excepto posiblemente por el signo), parece natural expresar la teoría en una forma que sea independiente de la misma y que sea por tanto más "geométrica". En la siguiente exposición haremos esto brevemente y de manera informal.

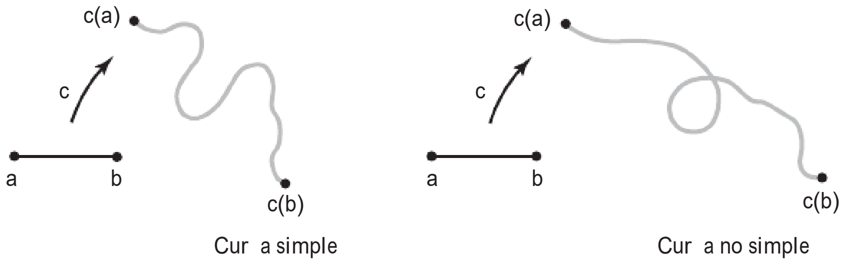

Figura 7.2.6 A la izquierda se muestra una curva simple que no se corta a sí misma. A la derecha se muestra una curva que sí se corta a sí misma y que no es tan simple.

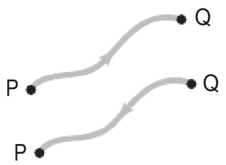

Figura 7.2.7 En una curva que une P y Q existen dos posibles sentidos de una misma dirección.

Definición Definimos una ***curva simple*** C como la imagen de una aplicación C^1 a trozos $\mathbf{c}\colon I \to \mathbb{R}^3$ que es inyectiva en un intervalo I; $\mathbf{c}$ se dice que es una ***parametrización*** de C. Por tanto, una curva simple es aquella que no se corta a sí misma (Figura 7.2.6). Si $I = [a, b]$, llamamos a $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(b)$ ***extremos*** de la curva.

Toda curva simple C tiene dos orientaciones o sentidos asociados. Si P y Q son los extremos de la curva, entonces podemos considerar a C como dirigida bien desde P a Q, o bien desde Q a P. La curva simple C junto con una de estas orientaciones es una ***curva simple orientada*** o ***curva simple dirigida*** (Figura 7.2.7).

Definición Curvas cerradas simples Por ***curva cerrada simple*** entendemos la imagen de una aplicación C^1 a trozos $\mathbf{c}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ que es inyectiva en $[a, b)$ y satisface la igualdad $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ (Figura 7.2.8). Si $\mathbf{c}$ satisface la condición $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$, pero no necesariamente es inyectiva en $[a, b)$, diremos que su imagen es una ***curva cerrada***. Las curvas cerradas simples tienen dos orientaciones, que corresponden a los dos posibles sentidos de movimiento a lo largo de la curva (Figura 7.2.9).

Si C es una curva simple orientada o una curva cerrada simple orientada, podemos definir a lo largo de ella, sin ninguna ambigüedad, integrales de línea.