$$\boxed{R_A = \textbf{espacio de los renglones de } A = \text{gen } \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\}} \tag{5.7.3}$$

y

$$\boxed{C_A = \textbf{espacio de las columnas de } A = \text{gen } \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}} \tag{5.7.4}$$

Nota

R_A es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y C_A es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Se ha introducido una gran cantidad de notación en tan sólo tres páginas.

Antes de dar un ejemplo, se demostrará que dos de estos cuatro espacios son los mismos.

Teorema 5.7.3

Para cualquier matriz A, $C_A = \text{im}A$. Es decir, la imagen de una matriz es igual al espacio de sus columnas.

Demostración

Para demostrar que $C_A = \text{im}A$ se demuestra que $\text{im}A \subseteq C_A$ e $\text{im}A \subseteq C_A$.

i) Se quiere probar que $\text{im}A \subseteq C_A$. Suponga que $\mathbf{y} \in \text{im}A$. Entonces existe un vector $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Pero como se observó en la sección 2.2, $A\mathbf{x}$ se puede expresar como una combinación lineal de las columnas de A. Por lo tanto, $\mathbf{y} \in C_A$, de manera que $\text{im}A \subseteq C_A$.

ii) Se quiere probar que $\text{im}A \subseteq C_A$. Suponga que $\mathbf{y} \in C_A$. Entonces $\mathbf{y}$ se puede expresar como una combinación lineal de las columnas de A como en la ecuación (2.2.9). Sea $\mathbf{x}$ el vector columna de los coeficientes de esta combinación lineal. Entonces, igual que en la ecuación (2.2.9), $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Así, $\mathbf{y} \in \text{im}A$, lo que prueba que $\text{im}A \subseteq C_A$.

EJEMPLO 5.7.3 **Cálculo de N_A, $\nu(A)$, im$A$, $\rho(A)$, R_A y C_A para una matriz de 2×3**

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. A es una matriz de 2×3.

i) El *espacio nulo de* $A = N_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Como se vio en el ejemplo 5.7.1,

$$N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

ii) La *nulidad de* $A = \nu(A) = \dim N_A = 1$.

iii) Se sabe que $\text{im}A = C_A$. Las primeras dos columnas de A son vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$ y, por lo tanto, forman una base para $\mathbb{R}^2$. La $\text{im}A = C_A = \mathbb{R}^2$.

iv) $\rho(A) = \dim \text{im}A = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

v) El *espacio de los renglones de* $A = R_A = \text{gen}\ \{(1, 2, -1), (2, -1, 3)\}$. Como estos dos vectores son linealmente independientes, se ve que R_A es un subespacio de dimensión dos de $\mathbb{R}^3$. Del ejemplo 5.5.9, se observa que R_A es un plano que pasa por el origen.

En el ejemplo 5.7.3 iv) se observa que $\rho(A) = \dim R_A = 2$, lo que no es una coincidencia.