20. Si $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$, del Ejercicio 16 se deduce que $\mathbf{N}(t) = \mathbf{T}'(t)/\|\mathbf{T}'(t)\|$ es normal (es decir, perpendicular) a $\mathbf{T}(t)$; $\mathbf{N}$ es el ***vector normal principal***. Definimos un tercer vector unitario que es perpendicular tanto a $\mathbf{T}$ como a $\mathbf{N}$ mediante $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$; $\mathbf{B}$ se denomina ***vector binormal***. Los tres juntos, $\mathbf{T}, \mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ forman un sistema de vectores ortogonal orientado positivamente que podemos interpretar en movimiento a lo largo de la trayectoria (Figura 4.2.5). Demostrar que

(a) $\dfrac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{B} = 0.$

(b) $\dfrac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{T} = 0.$

(c) $d\mathbf{B}/dt$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{N}$.

21. Si $\mathbf{c}(s)$ está parametrizada por la longitud de arco, utilizamos el resultado del Ejercicio 20(c) para definir una función con valores escalares τ, denominada ***torsión***, mediante

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}.$$

(a) Demostrar que

$$\tau = \frac{[\mathbf{c}'(s) \times \mathbf{c}''(s)] \cdot \mathbf{c}'''(s)}{\|\mathbf{c}''(s)\|^2}$$

(b) Demostrar que si $\mathbf{c}$ está dada en términos de algún otro parámetro t,

$$\tau = \frac{[\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)] \cdot \mathbf{c}'''(t)}{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|^2}.$$

Compárese con el Ejercicio 17(c).

(c) Calcular la torsión de la hélice $\mathbf{c}(t) = (1/\sqrt{2})(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.

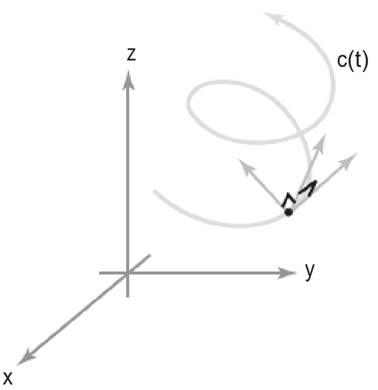

Figura 4.2.5 Tangente $\mathbf{T}$, normal principal $\mathbf{N}$ y binormal $\mathbf{B}$.

22. Demostrar que si una trayectoria está contenida en un plano, entonces la torsión es cero. Para ello, demostrar que $\mathbf{B}$ es constante y es un vector normal al plano en el que $\mathbf{c}$ está contenida. (Si la torsión es distinta de cero, entonces proporciona una medida de lo rápido que la curva se despega del plano formado por $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$.)

23. (a) Utilizar los resultados de los Ejercicios 17, 20 y 21 para probar las siguientes ***fórmulas de Frenet*** para una curva de rapidez unitaria:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}; \quad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}; \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}.$$

(b) Reescribir los resultados del apartado (a) como

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$$

para un vector $\boldsymbol{\omega}$ apropiado.

24. En relatividad especial, el tiempo propio de una trayectoria $\mathbf{c}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^4$ con componentes dadas por $\mathbf{c}(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), t(\lambda))$ se define como sigue

$$\int_a^b \sqrt{-[x'(\lambda)]^2 - [y'(\lambda)]^2 - [z'(\lambda)]^2 + c^2[t'(\lambda)]^2}\, d\lambda,$$

donde c es la velocidad de la luz, una constante. En la Figura 4.2.6, utilizando una notación clara, demostrar que se cumple la "paradoja de los gemelos":

tiempo propio (AB) + tiempo propio (BC) < tiempo propio (AC).

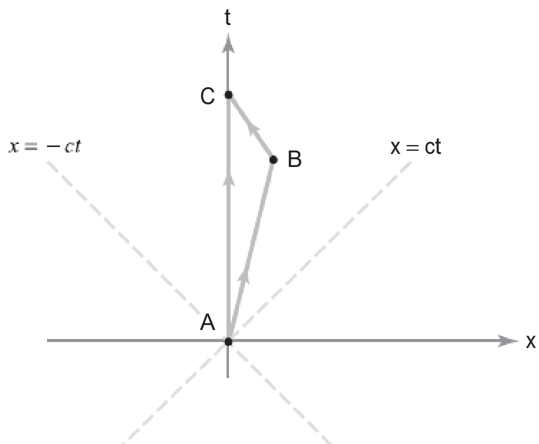

Figura 4.2.6 Desigualdad triangular relativista.