$$\iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}\, dS = \iiint_W \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) dV = 0.$$

Dado que

$$\iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}\, dS = \iint_{\partial M} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}\, dS + \iint_{\partial N} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}\, dS,$$

donde $\mathbf{n}$ es la normal exterior a S, tenemos

$$\iint_{\partial M} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}\, dS = -\iint_{\partial N} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}\, dS.$$

Sin embargo, sobre $\partial N, \mathbf{n} = -\mathbf{r}/r$ y $r = \varepsilon$, puesto que ∂N es una esfera de radio ε, de modo que

$$-\iint_{\partial N} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}\, dS = \iint_{\partial N} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4}\, dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\partial N} dS.$$

Pero $\iint_{\partial N} dS = 4\pi\varepsilon^2$, el área de la superficie de la esfera de radio ε. Esto prueba el resultado. ■

Ejemplo 6 La ley de Gauss tiene la siguiente interpretación física. El potencial debido a una carga puntual Q en (0, 0, 0) está dado por

$$\phi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi r} = \frac{Q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

y el campo eléctrico correspondiente es

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right).$$

Por tanto, el Teorema 10 establece que el flujo eléctrico total $\iint_{\partial M} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ (es decir, el flujo de $\mathbf{E}$ hacia el exterior de una superficie cerrada ∂M) es igual a Q si la carga está dentro de M y cero en cualquier otro caso. Obsérvese que incluso si $(0, 0, 0) \notin M, \mathbf{E}$ será *distinto de cero* sobre M.

Para una distribución de carga continua descrita por una densidad de carga ρ en una región W, el campo $\mathbf{E}$ está relacionado con la densidad ρ por

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho.$$

Entonces, por el teorema de Gauss,

$$\iint_{\partial W} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W \rho\, dV = Q;$$

es decir, el flujo que sale de la superficie es igual a la carga total en el interior. ▲