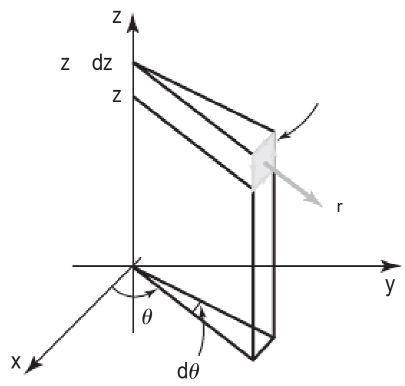

Figura 8.2.9 Un elemento de superficie en coordenadas cilíndricas.

$$[F_\theta(r,\theta,z) - F_\theta(r,\theta,z+dz)]r\,d\theta + [F_z(r,\theta+d\theta,z) - F_z(r,\theta,z)]\,dz$$
$$\approx -\frac{\partial F_\theta}{\partial z}\,dz\,r\,d\theta + \frac{\partial F_z}{\partial \theta}\,d\theta\,dz.$$

Por tanto, la circulación por unidad de área es esta expresión dividida entre $r\,d\theta\,dz$, concretamente,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}.$$

De acuerdo con el recuadro anterior, esto debe ser la componente $\mathbf{e}_r$ del rotacional. ▲

Gradiente, divergencia y rotacional en coordenadas cilíndricas y esféricas

Por argumentos similares a los del Ejemplo 4, encontramos que el rotacional en coordenadas cilíndricas está dado por

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}.$$

Podemos determinar otras importantes cantidades vectoriales expresadas en diferentes sistemas de coordenadas. Por ejemplo, la regla de la cadena muestra que el gradiente en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{e}_z,$$

y en la Sección 8.4 estableceremos técnicas relacionadas que dan la fórmula siguiente para la divergencia en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}(rF_z)\right].$$