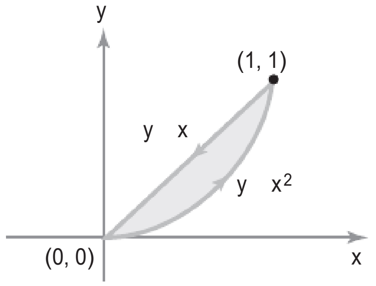

Figura 8.1.8 La región acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = x$.

Método 2. Utilizamos el Teorema 3 para obtener:

$$\iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dx\, dy = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

La integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva $y = x$ de izquierda a derecha es

$$\int_0^1 F_1\ dx + F_2\ dy = \int_0^1 (x^3 + 2x)\ dx = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$

A lo largo de la curva $y = x^2$ obtenemos

$$\int_0^1 F_1\ dx + F_2\, dy = \int_0^1 x^5\ dx + (x + x^2)(2x\ dx) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}.$$

Por tanto, recordando que la integral a lo largo de $y = x$ ha de tomarse de derecha a izquierda, como en la Figura 8.1.8,

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4}{3} - \frac{5}{4} = \frac{1}{12}.$$

▲

Forma vectorial usando la divergencia

Hay otra versión del teorema de Green que se puede generalizar a $\mathbb{R}^3$.

Teorema 4 Teorema de la divergencia en el plano Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región en la que sea válido el teorema de Green y sea ∂D su frontera. Sea $\mathbf{n}$ la normal unitaria exterior a ∂D. Si $\mathbf{c}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización orientada positivamente de ∂D, $\mathbf{n}$ viene dada por

$$\mathbf{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}$$

(véase la Figura 8.1.9). Sea $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ un campo vectorial C^1 sobre D. Entonces

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA.$$