En esta definición, el mismo $\mathbf{x}$ puede estar o no estar en $A$; si $\mathbf{x} \in A$, entonces $\mathbf{x}$ es un punto frontera si todo entorno de $\mathbf{x}$ contiene al menos un punto que *no* está en $A$ (ya contiene un punto de $A$, concretamente, $\mathbf{x}$). De forma similar, si $\mathbf{x}$ no está en $A$, este es un punto frontera si todo entorno de $\mathbf{x}$ contiene al menos un punto de $A$.

Nos interesarán especialmente los puntos frontera de los conjuntos abiertos. De acuerdo con la definición de conjunto abierto, ningún punto de un conjunto abierto $A$ puede ser un punto frontera de $A$. Por tanto, *un punto* $\mathbf{x}$ *es un punto frontera de un conjunto abierto* $A$ *si y solo si* $\mathbf{x}$ *no es un punto de* $A$ *y todo entorno de* $\mathbf{x}$ *tiene intersección no vacía con* $A$.

Esto expresa en términos precisos la idea intuitiva de que un punto frontera de $A$ es un punto que está en el "borde" de $A$. En muchos ejemplos está perfectamente claro cuáles son los puntos frontera.

**Ejemplo 2**

(a) Sea $A = (a, b)$ en $\mathbb{R}$. Entonces los puntos frontera de $A$ son los puntos $a$ y $b$. La Figura 2.2.6 y la definición permiten ver esto con claridad. [En el Ejercicio 28(c) se le pide al lector que lleve a cabo la demostración.]

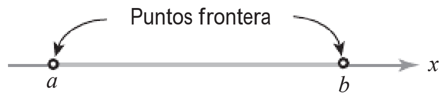


**Figura 2.2.6** Puntos frontera del intervalo $(a, b)$.

(b) Sea $A = D_r(x_0, y_0)$ un $r$-disco en el plano con centro en $(x_0, y_0)$. La frontera está formada por los puntos $(x, y)$ tales que $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$ (Figura 2.2.7).

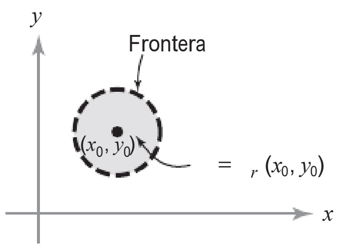


**Figura 2.2.7** La frontera de $A$ está formada por los puntos del borde de $A$.

(c) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Entonces la frontera de $A$ está formada por todos los puntos del eje $y$ (dibujar una figura que describa esto).

(d) Sea $A$ el disco $D_r(\mathbf{x}_0)$ menos el punto $\mathbf{x}_0$ (un disco "perforado" con centro en $\mathbf{x}_0$). Entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto frontera de $A$. ▲

## Límites

Ahora vamos a centrarnos en el concepto de límite. *A lo largo de la siguiente exposición el dominio de definición de la función $f$ será un conjunto abierto $A$.* Nos interesa hallar el límite de $f$ cuando $\mathbf{x} \in A$ se aproxima, bien a un punto de $A$, bien a un punto frontera de $A$.

Debe apreciarse el hecho de que el concepto de límite es una herramienta básica y útil para el análisis de funciones, que nos permite estudiar las derivadas, y por tanto los máximos y mínimos, las asíntotas, las integrales impropias y otras características importantes de las funciones, y además resulta útil en las series infinitas y las sucesiones. Vamos a presentar una teoría de límites de funciones de varias variables que incluye la teoría de funciones de una variable como un caso especial.