5. ¿Para qué valor de m es isomorfo a $\mathbb{R}^m$ el conjunto de matrices simétricas de $n \times n$?

6. Demuestre que el conjunto de matrices simétricas de $n \times n$ es isomorfo al conjunto de matrices triangulares superiores de $n \times n$.

7. Sea $V = \mathbb{P}_4$ y $W = \{p \in \mathbb{P}_5: p(0) = 0\}$. Demuestre que $V \cong W$.

8. Defina $T: \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ por $Tp = p + p'$. Demuestre que T es un isomorfismo.

9. Encuentre una condición sobre los números m, n, p, q tales que $\mathbb{M}_{mn} \cong \mathbb{M}_{pq}$.

10. Demuestre que $D_n \cong \mathbb{P}_{n-1}$.

11. Pruebe que cualesquiera espacios vectoriales complejos de dimensión finita V y W con dim V = dim W son isomorfos.

12. Defina $T: C[0, 1] \to C[3, 4]$ por $Tf(x) = f(x - 3)$. Demuestre que T es un isomorfismo.

13. Sea B una matriz invertible de $n \times n$. Demuestre que $T: \mathbb{M}_{mn} \to \mathbb{M}_{mn}$ definida por $TA = AB$ es un isomorfismo.

14. Demuestre que la transformación $Tp(x) = xp'(x)$ no es un isomorfismo de $\mathbb{P}_n$ en $\mathbb{P}_n$.

15. Sea H un subespacio del espacio V de dimensión finita con producto interno. Demuestre que $T: V \to H$ definida por $T\mathbf{v} = \text{proy}_H \mathbf{v}$ es sobre. ¿Bajo qué circunstancias será 1-1?

16. Demuestre que si $T: V \to W$ es un isomorfismo, entonces existe un isomorfismo $S: W \to V$ tal que $S(T\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Aquí S se llama **transformación inversa** de T y se denota por T^{-1}.

Transformación inversa

17. Demuestre que si $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ está definido por $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ y si T es un isomorfismo, entonces A es invertible y la transformación inversa T^{-1} está dada por $T^{-1}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}$.

18. Encuentre T^{-1} para el isomorfismo del problema 7.

*19. Considere el espacio $\mathbb{C} = \{z = a + ib$, donde a y b son números reales e $i^2 = -1\}$. Demuestre que si los escalares se toman como reales, entonces $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

*20. Considere el espacio $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^n = \{(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n): \mathbf{c}_i \in \mathbb{C}$ y los escalares son reales$\}$. Demuestre que $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. [*Sugerencia:* Vea el problema 19.]

EJERCICIOS CON MATLAB 7.4

1. Sea $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación definida por $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ para $i = 1, \ldots, 4$, donde

$$\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3, \mathrm{w}_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$