EJEMPLO 5.5.12 Una base para el espacio de solución de un sistema homogéneo

Encuentre una base para el espacio de solución S del sistema

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0 \\ 4x - 2y + 6z &= 0 \\ -6x + 3y - 9z &= 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN ► Reduciendo renglones se obtiene

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

lo que da una sola ecuación: $2x - y + 3z = 0$. S es un plano y, por el ejemplo 5.5.3, una base está dada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y dim $S = 2$.

Antes de dar por terminada esta sección, demostraremos un resultado útil para encontrar una base para un espacio vectorial arbitrario. Se ha visto que n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ constituyen una base para $\mathbb{R}^n$. Este hecho se cumple para *todo* espacio vectorial de dimensión finita.

Teorema 5.5.5

Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V de dimensión n constituyen una base para V.

Demostración

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores. Si generan el espacio V, entonces constituyen una base. De lo contrario, existe un vector $\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} \notin$ gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Esto significa que los $n + 1$ vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}$ son linealmente independientes. Para ver esto, observe que si

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n + c_{n+1}\mathbf{u} = 0 \qquad \textbf{(5.5.8)}$$

Entonces $c_{n+1} = 0$, porque de lo contrario podríamos escribir $\mathbf{u}$ como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_n$ dividiendo la ecuación (5.5.8) entre c_{n+1} y poniendo todos los términos, excepto $\mathbf{u}$, en el lado derecho. Pero si $c_{n+1} = 0$, entonces (5.5.8) es

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = 0$$

lo que significa que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, ya que los $\mathbf{v}_i$ son linealmente independientes. Ahora sea $W =$ gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}\}$. Como todos los vectores entre las llaves están en V, W es un subespacio de V. Como $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}$ son linealmente independientes, forman una base para W, y dim $W = n + 1$. Pero por el teorema 5.5.4, dim $W \leq n$. Esta contradicción muestra que *no* existe el vector $\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} \notin$ gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Así, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ genera a V y, por lo tanto, constituye una base para V.