

# 4

## Funciones con valores vectoriales

... quien con vigor mental casi divino, fue el primero en demostrar los movimientos y formas de los planetas, las trayectorias de los cometas y el flujo de las mareas. —Epitafio de Newton

**Los Capítulos 2 y 3** se han centrado en las funciones con valores *reales*. Este capítulo se dedica principalmente al estudio de las funciones con valores *vectoriales*. Comenzamos en la primera sección de este capítulo con una continuación de nuestro estudio de las trayectorias, añadiendo aplicaciones de la segunda ley de Newton. Luego, estudiaremos la longitud de arco de las trayectorias. A continuación, definiremos la divergencia y el rotacional de un campo vectorial que, junto con el gradiente, son los operadores básicos del cálculo *diferencial* vectorial. Por último, veremos los aspectos geométricos y propiedades analíticas de la divergencia y el rotacional. El cálculo *integral* asociado se verá más adelante, en el Capítulo 8.

### 4.1 La aceleración y la segunda ley de Newton

En la Sección 2.4 estudiamos la geometría básica de las trayectorias, aprendiendo a esbozar curvas (las imágenes de las trayectorias) y a calcular rectas tangentes. También aprendimos a interpretar una trayectoria, como su nombre sugiere, en términos del movimiento de una partícula y a ver la derivada de una trayectoria como su vector velocidad. En esta sección continuamos nuestro estudio de las trayectorias, incluyendo algunos aspectos adicionales, en particular el concepto de aceleración y la segunda ley de Newton.

#### Diferenciación de trayectorias

Recordemos que una trayectoria en  $\mathbb{R}^n$  es una aplicación  $\mathbf{c}$  de  $\mathbb{R}$  o un intervalo de  $\mathbb{R}$  con valores en  $\mathbb{R}^n$ . Si la trayectoria es diferenciable, su