28. Demostrar que las siguientes funciones son armónicas:

(a) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

(b) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

29. Sean f y g funciones de clase C^2 de una variable. Definimos $\phi = f(x - t) + g(x + t)$.

(a) Demostrar que ϕ satisface la ecuación de ondas: $\partial^2\phi/\partial t^2 = \partial^2\phi/\partial x^2$.

(b) Dibujar la gráfica de ϕ en función de t y x si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 0$.

30. (a) Demostrar que la función $g(x, t) = 2 + e^{-t}$ sen x satisface la ecuación del calor $g_t = g_{xx}$. [Aquí $g(x, t)$ representa la temperatura de una varilla de metal en la posición x y el instante t.]

(b) Dibujar la gráfica de g para $t \geq 0$. (SUGERENCIA: considerar las secciones por los planos $t = 0, t = 1$ y $t = 2$.)

(c) ¿Qué sucede con $g(x, t)$ cuando $t \to \infty$? Interpretar este límite en términos del comportamiento del calor en la varilla.

31. Demostrar que el potencial de Newton $V = -GmM/r$ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \text{para} \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

32. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(véase la Figura 3.1.4).

(a) Si $(x, y) \neq (0, 0)$, calcular $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.

(b) Demostrar que $(\partial f/\partial x)(0, 0) = 0 = (\partial f/\partial y)(0, 0)$.

(c) Demostrar que $(\partial^2 f/\partial x\,\partial y)(0, 0) = 1$, $(\partial^2 f/\partial y\,\partial x)(0, 0) = -1$.

(d) ¿Qué es erróneo? ¿Por qué las derivadas parciales cruzadas no son iguales?

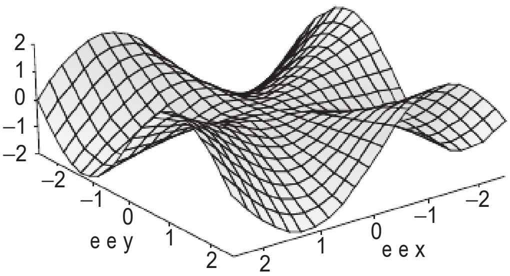

Figura 3.1.4 Gráfica de la función del Ejercicio 32.

3.2 Teorema de Taylor

Al presentar la derivada en el Capítulo 2, vimos que la *aproximación lineal* de una función desempeñaba un papel esencial tanto por una razón geométrica—determinar la ecuación de un plano tangente—como por una razón analítica—determinar los valores aproximados de las funciones. El teorema de Taylor se ocupa de la importante cuestión de hallar *aproximaciones cuadráticas y de orden superior*.

El teorema de Taylor es una herramienta fundamental para hallar aproximaciones numéricas precisas de funciones, por lo que desempeña un papel importante en muchas áreas de la matemática aplicada y computacional. En la siguiente sección lo utilizaremos para desarrollar el criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos de funciones de varias variables.

La estrategia utilizada para probar el teorema de Taylor es reducirlo al caso de una variable evaluando la función de muchas variables a lo largo de rectas de la forma $\mathbf{l}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}$ que parten de un punto $\mathbf{x}_0$ y apuntan en la dirección $\mathbf{h}$. Por tanto, será útil comenzar revisando el teorema de Taylor del cálculo de una variable.