$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = F_1 x + F_2 y + F_2 z.$$

Establecemos

$$F_1 x = x^2, \qquad F_2 y = y, \qquad F_3 z = z$$

y despejamos F_1, F_2 y F_3 para determinar que $\mathbf{F} = x\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Calculando div $\mathbf{F}$, obtenemos

$$\text{div } \mathbf{F} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Por tanto, por el teorema de la divergencia de Gauss,

$$\iint_{\partial W} (x^2 + y + z)\, dS = \iiint_W dV = \text{volumen } (W) = \frac{4}{3}\pi.$$

▲

La divergencia como el flujo por unidad de volumen

El significado físico de la divergencia es que, en un punto P, div $\mathbf{F}(\mathrm{P})$ es la tasa de flujo neto hacia el exterior por unidad de volumen. Esto se sigue del teorema de Gauss y del teorema de valor medio para integrales: si W_ρ es una bola en $\mathbb{R}^3$ de radio ρ centrada en P, entonces existe un punto $\mathrm{Q} \in W_\rho$ tal que

$$\iint_{\partial W_\rho} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_{W_\rho} \text{div } \mathbf{F}\, dV = \text{div } \mathbf{F}(\mathrm{Q}) \cdot \text{volumen } (W_\rho)$$

y por tanto

$$\text{div } \mathbf{F}(\mathrm{P}) = \lim_{\rho \to 0} \text{div } \mathbf{F}(\mathrm{Q}) = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{V(W_\rho)} \iint_{\partial W_\rho} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Esto es análogo a la formulación del rotacional en términos de un límite que se proporciona al final de la Sección 8.2. Por tanto, si div $\mathbf{F}(\mathrm{P}) > 0$, consideramos P como una ***fuente***, porque hay un flujo neto hacia el exterior en un entorno de P. Si div $\mathbf{F}(\mathrm{P}) < 0$, P de denomina ***sumidero*** para $\mathbf{F}$.

Un campo vectorial $\mathbf{F}$ de clase C^1 definido en $\mathbb{R}^3$ se dice que es ***libre de divergencia*** si div $\mathbf{F} = 0$. Si $\mathbf{F}$ es libre de divergencia, entonces tenemos $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$ para todas las superficies cerradas S. El recíproco también se puede demostrar fácilmente utilizando el teorema de Gauss: si $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$ para todas las superficies cerradas S, entonces $\mathbf{F}$ es libre divergencia. Si $\mathbf{F}$ es libre de divergencia, entonces vemos que el flujo de $\mathbf{F}$ a través de cualquier superficie cerrada S es 0, de modo que si $\mathbf{F}$ es el campo de velocidades de un fluido, la cantidad neta de fluido que fluye hacia fuera de cualquier región debe ser 0. Por tanto, en la región debe entrar exactamente la misma cantidad de fluido que sale (por unidad de tiempo). Un fluido con esta propiedad se describe entonces como ***incompresible***.