De este modo, todas las soluciones al sistema homogéneo están dadas por $\left(-\frac{1}{5}z, -\frac{7}{5}z, z\right)$. Haciendo $z = t$ se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta L en $\mathbb{R}^3$: $x = -\frac{1}{5}t$, $y = -\frac{7}{5}t$, $z = t$. Como se observó en el ejemplo 5.2.4, el conjunto de vectores sobre L constituye un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Observación. No es necesariamente cierto que si H_1 y H_2 son subespacios de V, $H_1 \cup H_2$ es un subespacio de V (puede o no serlo). Por ejemplo, $H_1 = \{(x, y): y = 2x\}$ y $\{(x, y): y = 3x\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^2$, pero $H_1 \cup H_2$ *no* es un subespacio. Para ver esto, observe que $(1, 2) \in H_1$ y $(1, 3) \in H_2$, de manera que tanto $(1, 2)$ como $(1, 3)$ están en $H_1 \cup H_2$. Pero $(1, 2) + (1, 3) = (2, 5) \notin H_1 \cup H_2$ porque $(2, 5) \notin H_1$ y $(2, 5) \in H_2$. Así, $H_1 \cup H_2$ no es cerrado bajo la suma y por lo tanto no es un subespacio.

RESUMEN 5.2

- Un **subespacio** H de un espacio vectorial V es un subconjunto de V que es en sí un espacio vectorial.
- Un subespacio no vacío H de un espacio vectorial V es un subespacio de V si las dos siguientes reglas se cumplen:
  i) Si $\mathbf{x} \in H$ y $\mathbf{y} \in H$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in H$.
  ii) Si $\mathbf{x} \in H$, entonces $\alpha\mathbf{x} \in H$ para cada escalar α.
- Un **subespacio propio** de un espacio vectorial V es un subespacio de V diferente de $\{\mathbf{0}\}$ y de V.

AUTOEVALUACIÓN 5.2

De las siguientes aseveraciones, evalúe si son falsas o verdaderas.

I) Conjunto de vectores de la forma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

II) El conjunto de vectores de la forma $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

III) El conjunto de matrices diagonales de 3×3 es un subespacio de $\mathbb{M}_{33}$.

IV) El conjunto de matrices triangulares superiores de 3×3 es un subespacio de $\mathbb{M}_{33}$.

V) El conjunto de matrices triangulares de 3×3 es un subespacio de $\mathbb{M}_{33}$.

VI) Sea H un subespacio de $\mathbb{M}_{22}$. Entonces $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ debe estar en H.

VII) Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x + 3y - z = 0 \right\}$ y $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - 2y + 5z = 0 \right\}$. Entonces $H \cup K$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.