sabemos [por la fórmula (9) de la tabla de identidades vectoriales de la Sección 4.4] que div(rot $\mathbf{G}$) $= 0$ para cualquier campo vectorial $\mathbf{G}$ de clase C^2. Podemos plantearnos el enunciado recíproco: si div $\mathbf{F} = 0$, ¿es $\mathbf{F}$ el rotacional de un campo vectorial $\mathbf{G}$? El siguiente teorema responde de forma afirmativa a esta pregunta.

Teorema 8 Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ tal que div $\mathbf{F} = 0$, entonces existe un campo vectorial $\mathbf{G}$ de clase C^1 tal que $\mathbf{F} =$ rot $\mathbf{G}$.

En el Ejercicio 20 se esboza la demostración. Una advertencia: al contrario que en el Teorema 7, el campo vectorial $\mathbf{F}$ del Teorema 8 no permite tener un punto excepcional. Por ejemplo, el campo de fuerza gravitatoria $\mathbf{F} = -(GmM\mathbf{r}/r^3)$ tiene la propiedad de que div $\mathbf{F} = 0$, y no existe ningún $\mathbf{G}$ para el que $\mathbf{F} =$ rot $\mathbf{G}$ (véase el Ejercicio 29). El Teorema 8 no es aplicable, porque el campo de la fuerza gravitatoria $\mathbf{F}$ no está definido en $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$.

Ejercicios

1. Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales $\mathbf{F}$ en el plano es el gradiente de una función escalar f. Si existe una función f así, calcularla.

(a) $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$

(c) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$

2. Repetir el Ejercicio 1 para los siguientes campos vectoriales:

(a) $\mathbf{F}(x, y) = (\cos xy - xy \operatorname{sen} xy)\mathbf{i} - (x^2 \operatorname{sen} xy)\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{F}(x, y) = (x\sqrt{x^2y^2 + 1})\mathbf{i} + (y\sqrt{x^2y^2 + 1})\mathbf{j}$

(c) $\mathbf{F}(x, y) = (2x \cos y + \cos y)\mathbf{i} - (x^2 \operatorname{sen} y + x \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$

3. Para cada uno de los siguientes campos vectoriales $\mathbf{F}$, determinar (I) si existe una función g tal que $\nabla g = \mathbf{F}$ y (II) si existe un campo vectorial $\mathbf{G}$ tal que rot $\mathbf{G} = \mathbf{F}$. (No es necesario determinar g ni $\mathbf{G}$).

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xz - x, -4yz, z - 2y)$

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos y, z^2)$

(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (\log(z^2 + 1) + y^2, 2xy, \frac{2xz}{z^2+1})$

(d) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + x \operatorname{sen} z,\ y \cos z - 2xy,\ \cos z + \operatorname{sen} z)$

4. Para cada uno de los siguientes campos vectoriales $\mathbf{F}$, determinar (I) si existe una función g tal que $\nabla g = \mathbf{F}$ y (II) sis existe un campo vectorial $\mathbf{G}$ tal que rot $\mathbf{G} = \mathbf{F}$. (No es necesario determinar g ni $\mathbf{G}$).

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \cos y, -e^x \operatorname{sen} y, \pi)$

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{y}{z^2+4}, \frac{x}{z^2+4}, \frac{-2xyz}{z^4+8z^2+16}\right)$

(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2y^2z^2, ye^x, xy \cos z)$

(d) $\mathbf{F}(x, y, z) = (6z^5y^5, 9x^8z^2, 4x^3y^3)$

5. Demostrar que cualesquiera dos funciones potenciales para un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ difieren como máximo en una constante.

6. (a) Sea $\mathbf{F}(x,y) = (xy, y^2)$ y sea $\mathbf{c}$ la trayectoria $y = 2x^2$ que une $(0, 0)$ a $(1, 2)$ en $\mathbb{R}^2$. Evaluar $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

(b) ¿Depende la integral del apartado (a) de la trayectoria que une $(0, 0)$ a $(1, 2)$?

7. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz + \operatorname{sen} x)\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$. Hallar una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

8. Calcular $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{c}(t) = (\cos^5 t, \operatorname{sen}^3 t, t^4)$, $0 \le t \le \pi$, y $\mathbf{F}$ es como en el Ejercicio 7.