Demostración

Se hará referencia a las tablas 7.1 y 7.2

Caso 1: $E = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c < 0$

Ésta es la representación matricial de una expansión a lo largo del eje x si $c > 1$ o una compresión a lo largo del eje x si $0 < c < 1$.

Caso 2: $E = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c < 0$

Caso 2a: $c = -1$

Entonces $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que es la representación matricial de una reflexión respecto al eje y.

Caso 2b: $c < 0, c \neq -1$

Entonces $-c > 0$ y

$$E = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es el producto de la representación matricial de una reflexión respecto al eje y y la representación matricial de una expansión (si $-c > 1$) a lo largo del eje x.

Caso 3: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, c > 0$

Lo mismo que el caso 1 con el eje y en lugar del eje x.

Caso 4: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, c < 0$

Lo mismo que el caso 2 con los ejes intercambiados.

Caso 5: $E = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ésta es la representación matricial de un corte a lo largo del eje x.

Caso 6: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$

Ésta es la representación matricial de un corte a lo largo del eje y.

Caso 7: $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ésta es la representación matricial de una reflexión respecto a la recta $y = x$.

En el teorema 2.6.3 se demostró que toda matriz invertible se puede expresar como el producto de matrices elementales. En el teorema 7.3.6 se demostró que toda matriz elemental en $\mathbb{R}^2$ se puede expresar como el producto de representaciones matriciales de expansiones, compresiones, cortes y reflexiones. Por esto se tiene el siguiente resultado:

Teorema 7.3.7

Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que su representación matricial es invertible. Entonces T se puede obtener como una sucesión de expansiones, compresiones, cortes y reflexiones.