Ejemplo 5 Considérese de nuevo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Puesto que $(0, 0)$ es un punto crítico y f ya está en la forma del teorema de Taylor:

$$f((0,0) + (h_1, h_2)) = f(0,0) + (h_1^2 + h_2^2) + 0.$$

Podemos ver directamente que la forma cuadrática hessiana en $(0, 0)$ es

$$Hf(\mathbf{0})(\mathbf{h}) = h_1^2 + h_2^2,$$

que es evidentemente definida positiva. Así, $(0, 0)$ es un punto de mínimo relativo. Por supuesto, este sencillo caso se puede resolver sin hacer ningún cálculo. Está claro que $f(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. ▲

Para funciones de dos variables $f(x, y)$, la forma cuadrática hessiana se puede escribir del siguiente modo:

$$Hf(x,y)(\mathbf{h}) = \tfrac{1}{2}[h_1, h_2] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

Ahora vamos a proporcionar un criterio muy útil para saber cuando una forma cuadrática definida mediante una matriz 2×2 es definida positiva. Resultará útil junto con el Teorema 5.

Lema 2 Sea

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad H(\mathbf{h}) = \tfrac{1}{2}[h_1, h_2] B \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

Entonces $H(\mathbf{h})$ es definida positiva si y solo si $a > 0$ y $\det B = ac - b^2 > 0$.

Demostración Tenemos

$$H(\mathbf{h}) = \tfrac{1}{2}[h_1, h_2] \begin{bmatrix} ah_1 + bh_2 \\ bh_1 + ch_2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}(ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2).$$

Completamos el cuadrado, escribiendo

$$H(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}a\left(h_1 + \frac{b}{a}h_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(c - \frac{b^2}{a}\right)h_2^2.$$

Supongamos que H es definida positiva. Haciendo $h_2 = 0$, vemos que $a > 0$. Haciendo $h_1 = -(b/a)h_2$, obtenemos $c - b^2/a > 0$ o $ac - b^2 > 0$. Inversamente, si $a > 0$ y $c - b^2/a > 0$, $H(\mathbf{h})$ es una suma de cuadrados, de modo que $H(\mathbf{h}) \geq 0$. Si $H(\mathbf{h}) = 0$, entonces cada cuadrado tiene que ser