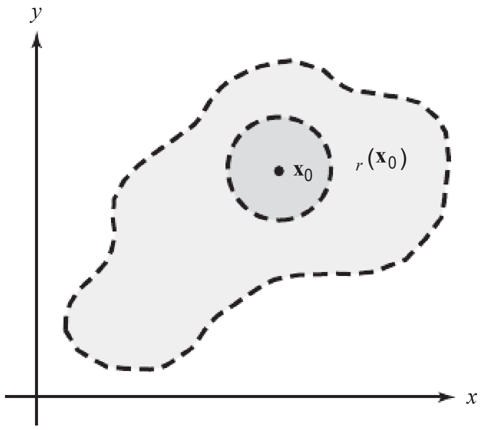

Figura 2.2.2 Un conjunto abierto U es aquel que contiene completamente algún disco $D_r(\mathbf{x}_0)$ para cada uno de sus puntos $\mathbf{x}_0$.

Hemos definido disco abierto y conjunto abierto. Por la elección que hemos hecho de los términos parece que un disco abierto debería ser un conjunto abierto. Si pensamos un poco en ello vemos que este hecho requiere demostración. El siguiente teorema prueba esto.

Teorema 1 Para todo $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y para todo $r > 0, D_r(\mathbf{x}_0)$ es un conjunto abierto.

Demostración Sea $\mathbf{x} \in D_r(\mathbf{x}_0)$; es decir, sea $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$. Según la definición de conjunto abierto, debemos hallar un $s > 0$ tal que $D_s(\mathbf{x}) \subset D_r(\mathbf{x}_0)$. Si nos fijamos en la Figura 2.2.3, vemos que $s = r - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ es una elección razonable; nótese que $s > 0$, pero que s es tanto menor cuanto más cerca está $\mathbf{x}$ del borde de $D_r(\mathbf{x}_0)$.

Para demostrar que $D_s(\mathbf{x}) \subset D_r(\mathbf{x}_0)$, sea $\mathbf{y} \in D_s(\mathbf{x})$; es decir, sea $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| < s$. Queremos demostrar que también $\mathbf{y} \in D_r(\mathbf{x}_0)$. Demostrarlo, dada la definición de r-disco, es lo mismo que demostrar que $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0\| < r$. Esto se hace utilizando la desigualdad triangular para vectores de $\mathbb{R}^n$:

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0\| = \|(\mathbf{y}-\mathbf{x})+(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\| \leq \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|+\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < s+\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| = r.$$

Así, $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < r$. ■

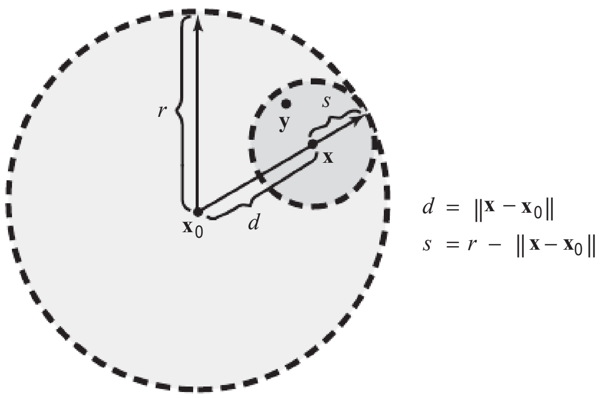

Figura 2.2.3 Geometría de la demostración de que un disco abierto es un conjunto abierto.