Utilicemos la notación ∂D para la curva orientada C^+, es decir, la curva frontera de D orientada en el sentido descrito por la regla ilustrada en la Figura 8.1.4. Entonces podemos escribir el teorema de Green como

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

El teorema de Green es muy útil porque relaciona una integral de línea a lo largo de la frontera de una región con una integral de área sobre el interior de la región, y en muchos casos resulta más fácil evaluar la integral de línea que la integral de área, o viceversa. Por ejemplo, si sabemos que P se anula en la frontera, podemos concluir inmediatamente que $\iint_D (\partial P/\partial y)\,dx\,dy = 0$ incluso aunque $\partial P/\partial y$ no se anule en el interior. (¿Puede el lector construir una tal P en el cuadrado unidad?)

Ejemplo 1 Verificar el teorema de Green para $P(x, y) = x$ y $Q(x, y) = xy$, donde D es el círculo unidad $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solución Haremos la comprobación evaluando directamente ambos lados del teorema de Green. La frontera de D es la circunferencia unidad parametrizada por $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 2\pi$, y por tanto

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy &= \int_0^{2\pi} [(\cos t)(-\operatorname{sen} t) + \cos t \operatorname{sen} t \cos t]\,dt \\ &= \left[\frac{\cos^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} + \left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D y\,dx\,dy,$$

que también es cero, por simetría. Por tanto, el teorema de Green se verifica en este caso. ▲

Áreas

Podemos usar el teorema de Green para obtener una fórmula para el área de una región acotada por una curva cerrada simple.

Teorema 2 Área de una región Si C es una curva cerrada simple que acota una región en la cual es aplicable el teorema de Green, entonces el área de la región D acotada por $C = \partial D$ es

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx.$$