Teorema 3.1.3

El área generada por $A = |\det A|$.*

Demostración

Se supone que a y c son diferentes de cero. La prueba para $a = 0$ o $c = 0$ se dejará como ejercicio (vea el problema 21 de esta sección).

El área del paralelogramo = base × altura. La base del paralelogramo en la figura 3.1 tiene longitud $\overline{0A} = \sqrt{a^2 + c^2}$. La altura del paralelogramo es $\overline{0Q}$, de donde $0Q$ es el segmento perpendicular a BC. De la figura se ve que las coordenadas de C, el cuarto vértice del paralelogramo, son $x = a + b$ y $y = c + d$. Así,

$$\text{Pendiente de } BC = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(c+d) - d}{(a+b) - b} = \frac{c}{a}$$

Entonces la ecuación de la recta que pasa por B y C es

$$\frac{y-d}{x-b} = \frac{c}{a} \quad \text{o} \quad y = \frac{c}{a}x + d - \frac{bc}{a}$$

$$\text{Pendiente de } 0Q \overset{\text{Propiedad iv)}}{=} -\frac{1}{\text{pendiente de } BC} = -\frac{a}{c}$$

La ecuación de la recta que pasa por (0, 0) y Q es

$$\frac{(y-0)}{(x-0)} = -\frac{a}{c} \quad \text{o} \quad y = -\frac{a}{c}x$$

Q es la intersección de BC y $0Q$, por lo que satisface ambas ecuaciones. En el punto de intersección se tiene

$$\frac{c}{a}x + d - \frac{bc}{a} = -\frac{a}{c}x$$

$$\left(\frac{c}{a}x + \frac{a}{c}\right)x = \frac{bc}{a} - d$$

$$\frac{a^2 + c^2}{ac}x = \frac{bc - ad}{a}$$

$$x = \frac{ac(bc - ad)}{a(a^2 + c^2)} = \frac{c(bc - ad)}{a^2 + c^2} = -\frac{c(ad - bc)}{a^2 + c^2} = -\frac{c \det A}{a^2 + c^2}$$

y

$$y = -\frac{a}{c}x = -\frac{a}{c} \cdot -\frac{-c \det A}{a^2 + c^2} = \frac{a \det A}{a^2 + c^2}$$

Entonces Q tiene coordenadas $\left(\dfrac{-c \det A}{a^2 + c^2}, \dfrac{a \det A}{a^2 + c^2}\right)$

* Aquí $|\det A|$ denota el valor absoluto del determinante de A.