Solución Aplicando la fórmula (7),

$$M(S) = \iint_S 2\sqrt{x^2+y^2}\, dS = \iint_D 2r\, dS = \iint_D 2r\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\|\, dr\, d\theta.$$

A partir del Ejemplo 2 de la Sección 7.4, vemos que $\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| = \sqrt{1+r^2}$. Luego,

$$M(S) = \iint_D 2r\sqrt{1+r^2}\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\sqrt{1+r^2}\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}(1+r^2)^{3/2}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{2}{3}(2^{3/2}-1)\, d\theta = \frac{4\pi}{3}(2^{3/2}-1).$$

▲

Ejercicios

1. Calcular la integral de la función $f(x,y,z) = x+y$ sobre la superficie S dada por:

$$\Phi(u,v) = (2u\cos v, 2u \operatorname{sen} v, u), \quad u \in [0,4], v \in [0,\pi]$$

2. Calcular la integral de la función $f(x,y,z) = z+6$ sobre la superficie S dada por:

$$\Phi(u,v) = (u, \frac{v}{3}, v), \quad u \in [0,2], v \in [0,3].$$

3. Calcular la integral

$$\iint_S (3x-2y+z)\, dS,$$

donde S es la porción del plano $2x+3y+z=6$ que está en el primer octante.

4. Calcular la integral

$$\iint_S (x+z)\, dS,$$

donde S es la parte del cilindro $y^2+z^2=4$ con $x \in [0,5]$.

5. Sea S la superficie definida por

$$\Phi(u,v) = (u+v, u-v, uv).$$

(a) Demostrar que la imagen de S se encuentra en la gráfica de la superficie $4z = x^2-y^2$.

(b) Calcular $\iint_S x\, dS$ para todos los puntos de la gráfica S en $x^2+y^2 \leq 1$.

6. Calcular la integral

$$\iint_S (x^2 z + y^2 z)\, dS,$$

donde S es la parte del plano $z = 4+x+y$ que se encuentra en el interior del cilindro $x^2+y^2=4$.

7. Calcular $\iint_S xy\, dS$, donde S es la superficie del tetraedro de caras $z=0, y=0$, $x+z=1$ y $x=y$.

8. Calcular $\iint_S xyz\, dS$, donde S es el triángulo de vértices en $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,1,1)$.

9. Calcular $\iint_S z\, dS$, donde S es la semiesfera superior de radio a, es decir, el conjunto de los (x,y,z) con $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

10. Calcular $\iint_S (x+y+z)\, dS$, donde S es la frontera de la bola unidad B; es decir, S es el conjunto de los (x,y,z) tales que $x^2+y^2+z^2=1$. (SUGERENCIA: utilizar la simetría del problema).

11. (a) Calcular el área de la porción del cono $x^2+y^2=z^2$ con $z \geq 0$ que está en el interior de la esfera $x^2+y^2+z^2=2Rz$, donde R es una constante positiva.

(b) ¿Cuál es el área de la porción de esfera que está en el interior del cono?

12. Verificar que en coordenadas esféricas sobre una esfera de radio R,

$$\|\mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_\theta\|\, d\phi\, d\theta = R^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta.$$