El lado derecho de esta ecuación se puede definir en $\mathbb{R}^n$, como se hace en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Sigue representando el coseno del ángulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$; este ángulo está geométricamente bien definido, porque $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ están en un subespacio bidimensional de $\mathbb{R}^n$ (el plano determinado por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$) y nuestras ideas geométricas habituales son aplicables a tales planos.

Resultará útil disponer de algunas propiedades algebraicas del producto escalar. Estas se resumen en el siguiente teorema [compárense con las propiedades (i), (ii), (iii) y (iv) de la Sección 1.2].

Teorema 3 Para $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ y α, β, números reales, tenemos

(i) $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$.

(ii) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.

(iii) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$.

(iv) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Demostración Cada una de las cuatro afirmaciones se puede probar mediante un cálculo simple. Por ejemplo, para probar la propiedad (i), escribimos

$$\begin{aligned}
(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} &= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n) \cdot (z_1, z_2, \ldots, z_n) \\
&= (\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 + \cdots + (\alpha x_n + \beta y_n)z_n \\
&= a x_1 z_1 + \beta y_1 z_1 + \alpha x_2 z_2 + \beta y_2 z_2 + \cdots + \alpha x_n z_n + \beta y_n z_n \\
&= \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}).
\end{aligned}$$

Las restantes demostraciones son similares. ■

En la Sección 1.2, hemos probado una interesante propiedad del producto escalar: la desigualdad de Cauchy–Schwarz.[4] Para $\mathbb{R}^2$ nuestra demostración requirió el uso de la ley de los cosenos. Para $\mathbb{R}^n$ también podríamos utilizar este método, restringiendo nuestra atención a un plano en $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, también podemos proporcionar una demostración directa completamente algebraica.

Teorema 4 Desigualdad de Cauchy–Schwarz en $\mathbb{R}^n$ Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|.$$

[4] En ocasiones denominada desigualdad de Cauchy–Bunyakovskii–Schwarz, o simplemente desigualdad CBS, porque fue descubierta independientemente en casos particulares por el matemático francés Cauchy, el matemático ruso Bunyakovskii y el matemático alemán Schwarz.