

¿Hacia dónde lleva todo esto? Quizá pueda verse la dirección general. Se ha definido el orden en los conjuntos y los elementos maximales. Se ha demostrado que un conjunto linealmente independiente es una base si es maximal. Falta únicamente un resultado que puede ayudar a probar la existencia de un elemento maximal. Ese resultado es una de las suposiciones básicas de las matemáticas.

Muchos de los lectores estudiaron la geometría euclidiana en la secundaria. Tal vez ahí tuvieron su primer contacto con una demostración matemática. Para probar cosas, Euclides hizo ciertas suposiciones que denominó *axiomas*. Por ejemplo, supuso que la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta. Comenzando con estos axiomas, él y sus alumnos de geometría pudieron demostrar muchos teoremas.

En todas las ramas de las matemáticas es necesario tener axiomas. Si no se hace una suposición, no es posible probar nada. Para completar nuestra demostración se necesita el siguiente axioma:

Lema de Zorn*

Si S es un conjunto parcialmente ordenado, no vacío, tal que toda cadena no vacía tiene una cota superior, entonces S tiene un elemento maximal.

Observación. El **axioma de elección** dice, a grandes rasgos, que dado un número (finito o infinito) de conjuntos no vacíos, existe una función que elige un elemento de cada conjunto. Este axioma es equivalente al lema de Zorn; es decir, si se supone el axioma de elección, se puede probar el lema de Zorn y viceversa. Una demostración de esta equivalencia y otros interesantes resultados se pueden encontrar en el excelente libro *Naive Set Theory* de Paul R. Halmos (Nueva York: Van Nostrand, 1960), en especial en la página 63.

Finalmente se puede establecer y probar el resultado central.

Teorema 5.8.2

Todo espacio vectorial V tiene una base.



Demostración

Se quiere demostrar que V tiene un subconjunto linealmente independiente maximal. Esto se hace en varios pasos.

- i) Sea S una colección de subconjuntos, todos linealmente independientes, parcialmente ordenados por inclusión.
- ii) Una cadena en S es un subconjunto T de S tal que si A y B están en T , $A \subseteq B$ o bien, $B \subseteq A$.
- iii) Sea T una cadena. Se define

$$M(T) = \bigcup_{A \in T} A$$

Es evidente que $M(T)$ es un subconjunto de V y $A \subseteq M(T)$ para todo $A \in T$. Se quiere demostrar que $M(T)$ es una cota superior para T . Como $A \subseteq M(T)$ para todo $A \in T$, sólo es necesario demostrar que $M(T) \in S$; es decir, debe demostrarse que $M(T)$ es linealmente independiente.



* Max A. Zorn (1906-1993) pasó varios años en la University of Indiana donde fue profesor emérito hasta su muerte el 9 de marzo de 1993. Publicó su famoso resultado en 1935 ["A Remark on Method in Transfinite Algebra", *Bulletin of the American Mathematical Society* 41 (1935):667-670].