

Contents

1	Ceros de ecuaciones y sistemas no lineales	2
1.1	Ecuaciones en una variable	2
1.2	Aceleración de la convergencia	2
1.3	Sistemas de ecuaciones no lineales	2
1.4	Ceros de polinomios	3
2	Interpolación de funciones	4
2.1	Interpolación polinómica	4
2.2	Interpolación de Lagrange	4
2.3	Interpolación de Newton	4
2.4	Chebyshev	5
2.5	Interpolación de Hermite	5
2.6	Interpolación Spline	5
2.7	Interpolación trigonométrica	5
3	Aproximación de funciones	6
4	Derivación e integración numéricas	6
5	Métodos numéricos para EDOs	7

1 Ceros de ecuaciones y sistemas no lineales

1.1 Ecuaciones en una variable

Existen los siguientes métodos

Método	Iteración	Orden de convergencia
Bisección	$I_{k+1} = \begin{cases} (a_k, x_k) & \text{si } f(a_k)f(x_k) < 0 \\ (x_k, b_k) & \text{si } f(a_k)f(x_k) > 0 \end{cases}$	Lineal
Secante	$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$	No siempre, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Regula falsi	Secante + Bisección	Convergente más lenta que secante, lineal
Newton	$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ $x_{k+1} = x_k - Df(x_k)^{-1}f(x_k)$	$\begin{cases} f \in \mathcal{C}^2 \\ f'(x), f''(x) \neq 0 \\ c : f'(x) \text{ es menor} \Rightarrow \left \frac{f(c)}{f'(c)} \right \leq b - a \\ \text{orden 2} \end{cases}$

Theorem (Punto fijo). Sea $g : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$ tal que:

- $g(I) \subseteq I$
- $|g'(x)| \leq L < 1 \quad (\Rightarrow |g(x) - g(x')| \leq L|x - x'|, L < 1)$

Entonces $\exists! s : f(s) = s$ y $\forall x_0$ la sucesión $x_k = g(x_{k-1})$ converge a s

Además se cumple $|x_k - s| \leq \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \quad y \quad |x_k - s| \leq \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|$

Definition (Orden de convergencia). La sucesión $(x_k) \rightarrow \alpha$ tiene orden de convergencia p si existen $N \geq 0, C > 0$ tal que:

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|^p \quad \forall k \geq N$$

Si existe el límite $L = \lim \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^p}$ la sucesión tendrá orden de convergencia al menos p

$$\text{Orden } p \iff G(\alpha) = \alpha, G'(\alpha) = 0, \dots, G^{(p-1)}(\alpha) = 0, G^{(p)}(\alpha) = Cp!$$

1.2 Aceleración de la convergencia

Definition. $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \quad \Delta^2 x_k = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k$

Definition (Aceleración de Aitken). Consideramos la recta que pasa por la pareja de puntos $(x_k, \Delta x_k), (x_{k+1}, \Delta x_{k+1})$ y hacemos $y = 0$. Tenemos la sucesión

$$x'_k = x_k - \frac{(\Delta x_k)^2}{\Delta^2 x_k}$$

Si (x_k) es al menos lineal (x'_k) converge más rápidamente a s que (x_k)

Definition (Aceleración de Steffensen). Dada una g que queremos calcular su punto fijo. Orden $p \rightarrow 2p - 1$

$$G(x) = x - \frac{(g(x) - x)^2}{g(g(x)) - 2g(x) + x}$$

1.3 Sistemas de ecuaciones no lineales

Theorem (Punto fijo). Sea $T \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y $G : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

- $G(T) \subseteq T$
- $\exists L < 1$ tal que $\|G(x_2) - G(x_1)\| \leq L\|x_2 - x_1\| \quad \forall x_1, x_2 \in T$

Entonces existe un único punto fijo $G(s) = s$ y la sucesión $x_k = G(x_k)$ converge a s . Además $\|x_k - s\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\|$ y $\|x_k - s\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_k - x_{k-1}\|$

1.4 Ceros de polinomios

Definition (Deflación). Cuando obtenemos un cero $p(\alpha) \approx 0$ hacemos la división por la raíz para seguir encontrando ceros del nuevo polinomio $q(x)$ con $p(x) = (x - \alpha)q(x) + p(\alpha)$

Theorem (Regla de Laguerre). Sea $p(x)$ un polinomio.

$$p(x) = (x - L)(b_0x^{n-1} + \dots + b_{n-1}) + b_n$$

Si $b_i \geq 0$ entonces L es cota superior de las raíces reales de $p(x)$

Theorem (Regla de Newton). Sea $p(x)$, $L \in \mathbb{R}$ tal que $p(L), p'(L), \dots, p^{(n)}(L) > 0$
Entonces L es cota superior de las raíces reales de $p(x)$

Sea el polinomio $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ y z una de sus raíces. Se cumplen los dos siguientes teoremas

Theorem (Regla de Lagrange).

$$|z| \leq \max \left\{ 1, \sum_{i=1}^n \left| \frac{a_i}{a_0} \right| \right\}$$

Theorem (Regla de Cauchy).

$$|z| \leq 1 + \max \left\{ \left| \frac{a_1}{a_0} \right|, \left| \frac{a_2}{a_0} \right|, \dots, \left| \frac{a_n}{a_0} \right| \right\}$$

Definition (Matriz de Frobenius). La matriz acompañante o de Frobenius es

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es $\det(C(p) - zI) = (-1)^n p(z)$, por lo que sus VAPs son las raíces de $p(z)$

En ambos métodos tenemos el siguiente caso: Sea el polinomio mónico $p(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n$ y z_i aproximaciones de sus n ceros. El objetivo es encontrar las correcciones Δz_i tal que las nuevas aproximaciones sean $z'_i = z_i + \Delta z_i$.

Método de Durand-Kerner

Desarrollamos la expresión y despreciamos los términos de grado ≥ 2 de Δz_i

$$p(z) = \prod (z - z'_i) = \prod (z - (z_i + \Delta z_i)) = \prod (z - z_i) - \sum \left(\Delta z_j \prod_{k \neq j} (z - z_k) \right)$$

Imponemos $z = z_i$ para $i = 1, \dots, n$

$$-\Delta z_i \prod_{k \neq i} (z_i - z_k) = p(z_i) \Rightarrow \boxed{z'_i = z_i - \frac{p(z_i)}{\prod_{k \neq i} (z_i - z_k)}}$$

Notas:

- Convergencia cuadrática (igual a Newton)
- En la primera aproximación todos los z_i deben ser diferentes

Método de Ehrlich-Aberth

Consideramos las funciones racionales tal que $R(\alpha_i) = 0$ y le aplicamos Newton

$$R_i(z) = -\frac{p(z)}{\prod_{k \neq i}(z - z_k)} \Rightarrow z'_i = z_i - \frac{R_i(z_i)}{R'_i(z_i)} \Rightarrow \boxed{\Delta z_i = \frac{p(z_i)}{p'(z_i) - p(z_i) \sum_{k \neq i} \frac{1}{z_i - z_k}}}$$

Notas:

- Convergencia cuadrática si el resto de z_i no se mueven
- Convergencia cúbica si se mueven todas las z_i a la vez

2 Interpolación de funciones

Definition (Interpolación). *Dado un conjunto de puntos (x_k, y_k) hemos de encontrar una función f tal que $f(x_k) = y_k$*

2.1 Interpolación polinómica

Theorem (Existencia y unicidad). *Existe un único polinomio $p(x)$ con grado $\leq n$ que interpola $n + 1$ puntos.*

Theorem (Error de interpolación). *Sea $f \in C^{n+1}(a, b)$ y $p(x)$ su polinomio interpolador en (x_k) . Entonces el error de interpolación es*

$$|f(x) - p(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\eta(x))}{(n+1)!} (x - x_0) \cdots (x - x_n), \quad \text{con } \eta(x) \in (\min(x_k), \max(x_k))$$

2.2 Interpolación de Lagrange

Definimos unas funciones $l_k(x)$ tal que $l_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$

$$\boxed{p(x) = \sum y_k l_k(x)}, \quad \text{donde} \quad l_k = \frac{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)}$$

2.3 Interpolación de Newton

Sea el polinomio interpolador $p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$ Imponiendo que $p(x)$ interpola tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & & & \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & x_n - x_0 & \cdots & \cdots & \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Definimos una operación "diferencia dividida" recursivamente:

$$f[x_0, \dots, x_{k+1}] = \frac{f[x_1, \dots, x_{k+1}] - f[x_0, \dots, x_k]}{x_{k+1} - x_0} \quad \text{y} \quad f[x_i] = y_i$$

Entonces se cumple que $c_k = f[x_0, \dots, x_k]$

2.4 Chebyshev

Definition (Polinomio de Chebyshev). $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ cumple $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$

Theorem (Abcisas de Chebyshev). La mejor elección de puntos $y_0, \dots, y_n \in [-1, 1]$ tal que $\max |(y - y_0) \dots (y - y_n)|$ sea mínima viene dada por las raíces del polinomio de Chebyshev de grado $n + 1$ y vale $\frac{1}{2^n}$

2.5 Interpolación de Hermite

Queremos un polinomio que coincida con la función y su derivada en $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ y $(x_0, y'_0), \dots, (x_m, y'_m)$

$$H_{2m+1}(x) = \sum y_i \varphi_i(x) + \sum y'_i \psi_i(x) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \varphi_i(x) = (1 - 2l'_i(x_i)(x - x_i))l_i^2(x) \\ \psi_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x) \end{cases}$$

El error de esta interpolación viene dado por

$$f(x) - H_{2m+1}(x) = \frac{f^{2m+2}\eta(x)}{(2m+2)!} (x - x_0)^2 \dots (x - x_m)^2 \quad \text{con} \quad \eta(x) \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$$

Podemos calcular los coeficientes de manera similar a Newton definiendo $f[x_i, x_i] = f'(x_i)$

$$H_{2m+1} = f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + \dots + f[x_0, x_0, \dots, x_m, x_m](x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \dots (x - x_m)$$

2.6 Interpolación Spline

Definition (Función spline). Dados los puntos $\{(x_i, y_i)\}$ la función $s(x)$ de grado p es spline si

1. $s(x_i) = y_i$
2. En cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $s(x)$ es un polinomio de grado p
3. $s(x) \in C^{p-1}$

Cúbicas naturales $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$

$$\begin{cases} s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i) = y_i \\ s'_{i-1} = s'_i(x_i) \\ s''_{i-1} = s''_i(x_i) \end{cases}, \quad B_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - (M_{i+1} - M_i) \frac{h_i}{6} - M_i \frac{h_i}{2}$$

$$\Rightarrow s_i(x) = \frac{M_{i+1} - M_i}{h_i} \frac{(x - x_i)^3}{6} + M_i \frac{(x - x_i)^2}{2} + B_i(x - x_i) + A_i$$

2.7 Interpolación trigonométrica

Definition (Interpolación trigonométrica).

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=-M}^M c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad \begin{cases} c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(x_j) \\ a_k = c_k + c_{-k} = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n f(x_j) \cos(jhk) \\ b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n f(x_j) \sin(jhk) \end{cases}$$

3 Aproximación de funciones

Theorem (Aproximación continua). Dado $I, F_n = f_n = a_0\varphi_0(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)$ l.i., se cumple

$$\exists! f_n^* = \sum a_j^* \varphi_j(x) \text{ que minimiza } \|f - f_n\|_2 \text{ en } F_n$$

En el caso general resolvemos $\boxed{(\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle) a^* = (\langle f, \varphi_i \rangle)}$, si F_n es ortogonal $\boxed{a_j^* = \frac{\langle \varphi_j, f \rangle}{\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle}}$

Theorem (Gram-Schmidt). Dada la base $\{\varphi_i\}$ construimos la base ortogonal $\{\psi_i\}$

$$\psi_0 = \varphi_0, \quad \psi_1 = \varphi_1 - \frac{\langle \varphi_1, \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle} \psi_0, \quad \psi_n = \varphi_n - \frac{\langle \varphi_n, \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle} \psi_0 - \dots - \frac{\langle \varphi_n, \psi_{n-1} \rangle}{\langle \psi_{n-1}, \psi_{n-1} \rangle} \psi_{n-1}$$

Definition (Familia ortogonal de polinomios). A_j es el coeficiente dominante de ψ_j

$$\begin{cases} \psi_0 = A_0 \\ \psi_{j+1} = \alpha_j(x - \beta_j)\psi_j - \gamma_j\psi_{j-1} \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \alpha_j = \frac{A_{j+1}}{A_j}, \quad \gamma_0 = 0 \\ \beta_j = \frac{\langle \psi_j, x\psi_j \rangle}{\langle \psi_j, \psi_j \rangle} = \frac{\langle \psi_j, x\psi_j \rangle}{\alpha_j} \\ \gamma_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_{j-1}} \frac{\langle \psi_j, \psi_j \rangle}{\langle \psi_{j-1}, \psi_{j-1} \rangle} = \frac{\alpha_j}{\alpha_{j-1}} \frac{\langle \psi_j, \psi_j \rangle}{\langle \psi_{j-1}, \psi_{j-1} \rangle} \end{cases}$$

Definition (Polinomios de Legendre). Familia ortogonal en $I = [-1, 1]$ con $w(x) = 1$

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n), \quad \langle P_n, P_n \rangle = \frac{2}{2n+1} \quad \begin{cases} \alpha_j = \frac{2j+1}{j+1} \\ \beta_j = 0 \\ \gamma_j = \frac{j}{j+1} \end{cases}$$

Otros tipos de bases ortogonales

- Chebyshev $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad I = [-1, 1]$
- Hermite $w(x) = e^{-x^2}, \quad I = (-\infty, \infty)$
- Generalizados de Legendre $w(x) = x^\alpha e^{-x}, I = (0, \infty)$

Definition (Aproximación trigonométrica).

$$f_n^*(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum (a_j^* \cos(jx) + b_j^* \sin(jx)) \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_0^* = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_j^* = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(jx) dx \\ b_j^* = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(jx) dx \end{cases}$$

4 Derivación e integración numéricas

Definition (Derivación).

$$\begin{aligned} \text{Hacia adelante} \quad f'(a) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2!} h & \xi &\in [a, a+h] \\ \text{Centrada} \quad f'(a) &= \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2 \cdot 3!} h^2 & \xi_1, \xi_2 &\in [a, a+h] \end{aligned}$$

Definition (Método 1).

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum y_k l_k(x) dx = \sum y_k \overbrace{\int_a^b l_k(x) dx}^{w_k(x)}$$

Definition (Formula de Simpson).

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 s(t)dt \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(c-h) + 4f(c) + f(c+h)] \quad E = \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Definition (Formula general error integración interpolativa).

$$E = \int_a^b \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x-x_0) \cdots (x-x_m) dx$$

Fórmulas de Newton-Cortes

m	Método	Integral	Error
$m = 1$	Trapezio	$\frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$	$\frac{h^3}{12} f''(c), \quad h = b - a$
$m = 2$	Simpson	$\frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$	$\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c), \quad h = \frac{b-a}{2}$
$m = 3$	Regla 8/3	$\frac{3}{8} h [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$	$\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(c), \quad h = \frac{b-a}{3}$

Definition (Fórmula trapezios compuesta). $h = \frac{b-a}{N}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + \cdots + 2f(b-h) + f(b)], \quad E = \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

Definition (Fórmula compuesta de Simpson). $h = \frac{b-a}{N}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \cdots + 4f(b-h) + f(b)], \quad E = \frac{h^4}{180} (b-a) f^{(4)}(\xi)$$

Definition (Integración gaussiana).

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \int_a^b P_m(x)w(x)dx = \sum \left(\overbrace{\int_a^b l_i(x)w(x)dx}^{\tilde{w}_i} \right) y_i, \quad E = \frac{1}{A_{m+1}^2 (2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi) \langle \psi_{m+1}, \psi_{m+1} \rangle$$

Theorem (Ceros de elemento de base ortogonal). Sea $w(x)$ continua positiva en $(a, b]$. Sea $\varphi_m(x)$ el polinomio ortogonal de grado m respecto del producto escalar con w . Entonces φ_m tiene m ceros simples en $[a, b]$

Además si f es un polinomio de grado $\leq 2m+1$ la integración gaussiana es exacta con los puntos tomados en los ceros de $\varphi_{m+1}(x)$

Definition (Formula del error de Gauss-Legendre).

$$E_{m+1}(f) = \frac{(b-a)^{2m+3} (m+1)!^4}{(2m+3)(2m+2)!^3} f^{(2m+2)}(\xi)$$

Definition (Extrapolacion de Richardson). Sea $F(h) = v + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \dots$

$$F_2(h) = \frac{q^{p_1} F_1(h) - F_1(qh)}{q^{p_1} - 1} = v + a_2^{(2)} h^{p_2} + \dots$$

5 Métodos numéricos para EDOs

Definition (Problema de Cauchy). $\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Definition (Método de integración de un paso).

$$\begin{cases} y_0 = y(a) \\ y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h) \end{cases} \quad \text{con} \quad |\Phi(x, y, h) - \Phi(x, \bar{y}, h)| \leq L|y - \bar{y}|$$

Definition (Orden del error). *Un método de integración tiene orden global p si*

$$\mathcal{O}(h^p) \iff e_n \leq kh^p \quad \text{con} \quad e_n = |y(x_n) - y_n|$$

Definition (Método de Euler). $\mathcal{O}(h)$ (método de Taylor de orden 1)

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

Definition (Método de Taylor). *Tenemos en cuenta $y''(x_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)f(x_0, y_0)$*

$$y(x) \approx y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) + y''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!}$$

Definition (Métodos de Runge-Kutta).

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^k c_i k_i^n \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} k_1^n = f(x_n, y_n) \\ k_i^n = f(x_n + a_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j^n) \end{cases} \quad \text{con } c_i, a_i, b_{ij} \text{ a determinar}$$

Definition (Método multipaso de paso k).

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{n+1} = \sum_{i=i}^k \alpha_i y_{n+1-i} + h \sum_{i=0}^k \beta_i f(x_{n+1-i}, y_{n+1-i}) \end{cases} \quad \text{con } \alpha_i, \beta_i \text{ por determinar}$$

Si $\beta_0 = 0$ tenemos el método **Adams-Bashforth**. Si $\beta_0 \neq 0$ tenemos el método **Adams-Moulton**

Definition (Sistemas de ecuaciones de EDOs).

$$\begin{cases} Y'(x) = (f^1(x, y^1(x), \dots, y^m(x)), \dots, f^m(x, y^1(x), \dots, y^m(x)))^T \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

Definition (Métodos de Adam-Bashforth). $y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \overbrace{f(x_n, y_n)}^{p(x)} dx$. Orden $\mathcal{O}(h^k)$

- $K = 1 \Rightarrow \Phi = f(x_n, y_n)$
- $K = 2 \Rightarrow \Phi = \frac{1}{2}(3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1}))$
- $K = 3 \Rightarrow \Phi = \frac{1}{12}(23f(x_n, y_n) - 16f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 5f(x_{n-2}, y_{n-2}))$
- $K = 4 \Rightarrow \Phi = \frac{1}{24}(55f(x_n, y_n) - 59f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 37f(x_{n-2}, y_{n-2}) - 9f(x_{n-3}, y_{n-3}))$

Definition (Métodos de Adam-Moulton). $y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \overbrace{f(x_n, y_n)}^{p(x)} dx$. Orden $\mathcal{O}(h^k)$

- $K = 1 \Rightarrow \Phi = \frac{1}{2}(f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n))$
- $K = 2 \Rightarrow \Phi = \frac{1}{2}(5f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 8f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1}))$
- $K = 3 \Rightarrow \Phi = \frac{1}{24}(9f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 19f(x_n, y_n) - 5f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2}))$