$F-$módulos

Abel Doñate Muñoz

Universitat Politècica de Catalunya

Presentación del trabajo final, Enero 2024

Table of Contents

Endomorfimo de Frobenius

Endomorfismo de Frobenius

Sea R un anillo con característica $p > 0$. Definimos el endomorfismo de Frobenius como el mapa

$$\begin{aligned} f : R &\to R \\ r &\to r^p \end{aligned}$$

Observación

Este morfismo en general no es inyectivo ni exhaustivo.

Endomorfsimo de Frobenius

Módulo con acción de Frobenius

Sea M un $R-$módulo, definimos el módulo $M^{(e)}$ inducido por $f^{(e)}$ como el grupo abeliano M dotado con la acción

$$r \cdot m = f^{(e)}(r)m = r^{p^e} m$$

Notación

Por simplicidad denotaremos $M^{(1)}$ como M' y $R^{(1)}$ como R'.

Functor de Frobenius

Functor de Frobenius

Definimos el functor de Frobenius como el el functor $F : \mathbf{R} - \mathbf{Mod} \to \mathbf{R} - \mathbf{Mod}$ que envía

$$M \longmapsto R' \otimes_R M, \qquad (M \xrightarrow{\phi} N) \longmapsto R' \otimes_R M \xrightarrow{id \otimes_R \phi} R' \otimes_R N$$

Functor de Frobenius

Frobenius de un complejo

Dado el complejo $M^\bullet$, definimos su complejo inducido $F(M^\bullet)$ como el complejo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_{k-1} \arrow[r, "h_{k-1}"] \arrow[d, "F"] & M_k \arrow[r, "h_k"] \arrow[d, "F"] & M_{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "F"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & F(M_{k-1}) \arrow[r, "F(h_{k-1})"] & F(M_k) \arrow[r, "F(h_k)"] & F(M_{k+1}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Podemos hacer exactamente la misma construcción para $F^{(e)}$.

Functor de Frobenius

Propiedades del functor de Frobenius

1. F es exacto por la derecha. Adicionalmente, si R es regular, entonces R' es flat y F es exacto.
2. F conmuta con sumas directas.
3. F conmuta con la localización.
4. F conmuta con limites directos.
5. F preserva generación finita de módulos.
6. Si R es regular, entonces F conmuta con la cohomología de complejos

Functor de Frobenius

Ideal potencia de Frobenius

Sea $I = (x_1, \ldots, x_n)$ un ideal de R, definimos su ideal potencia de Frobenius $e-$ésimo como

$$I_{p^e} := (x_1^{p^e}, \ldots, x_n^{p^e})R$$

Algunos ejemplos de trasformaciones

- $F(R) \cong R$
- $F(I) \cong I_{p^e}$
- $F(R/I) \cong R/I_{p^e}$

$F-$módulos

Definición de un $F-$módulo

Un $F-$módulo es un $R-$módulo M dotado con un $R-$isomorfismo $\theta : M \to F(M)$ llamado morfismo de estructura.

Morfismo de $F-$módulos

Dados dos $F-$módulos (M, θ_M) y (N, θ_N), decimos que $g : M \to N$ es un morfismo de $F-$módulos si el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\theta_M"] & N \arrow[d, "\theta_N"] \\ F(M) \arrow[r, "F(g)"] & F(N) \end{tikzcd}$$

$F-$módulos

Una forma alternativa

Los $F-$módulos también se pueden pensar como módulos en el anillo $R[F]$, donde hemos añadido una variable F no conmutativa con las relaciones $r^p F = Fr\ \forall r \in R$. Esta caracterización está presente en [Bli04]

Observación

La notación $R[F]-$module usada en [Bli04] es muy sugestiva para pensar de esta forma la estructura del módulo.

Dos casos importantes

Si $M = R$

Tenemos el isomorfismo natural $\theta : R \to F(R)$, que trasnforma (R, θ) en un $F-$módulo. Este isomorfismo viene dado por

$$\begin{aligned} \theta : R &\to F(R) \cong R' \otimes_R R \\ r &\mapsto r \otimes 1 \end{aligned}$$

Si $M = S^{-1}R$

Tenemos el isomorfismo $F(S^{-1}R) \cong S^{-1}R$. La conmutatividad del functor de Frobenius con la localización ya te proporciona el isomorfismo. Explícitamente tenemos el mapa

$$\begin{aligned} \theta : S^{-1}R &\to R' \otimes_R S^{-1}R \\ \frac{r}{s} &\mapsto rs^{p-1} \otimes \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Módulos $F-$finitos

Morfismo generador

Dado un $F-$module (M,θ) definimos su morfismo generador $\theta_0 : M_0 \to F(M_0)$ como el morfismo tal que el sistema directo

$$\begin{tikzcd}
M_0 \arrow[r, "\theta_0"] \arrow[d, "\theta_0"] & F(M_0) \arrow[r, "F(\theta_0)"] \arrow[d, "F(\theta_0)"] & F^2(M_0) \arrow[r, "F^2(\theta_0)"] \arrow[d, "F(\theta_0)"] & \cdots & M \arrow[d, "\theta"] \\
F(M_0) \arrow[r, "F(\theta_0)"] & F^2(M_0) \arrow[r, "F^2(\theta_0)"] & F^3(M_0) \arrow[r, "F^3(\theta_0)"] & \cdots & F(M)
\end{tikzcd}$$

tiene límite módulo M y morfismo θ.

Módulo $F-$finito

Decimos que el módulo M es $F-$finito si M tiene un morfismo generador $\theta_0 : M_0 \to F(M_0)$ con M un $R-$module finitamente generado.

Cohomología local

Functor de torsión

Sea $\Gamma_I = \{m \in M : I^n m = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$. Uno puede comprobar que induce un functor que transforma los morfismos de la siguiente manera natural

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Gamma_I"] & N \arrow[d, "\Gamma_I"] \\ \Gamma_I(M) \arrow[r, "\Gamma_I(g)"] & \Gamma_I(N) \end{tikzcd}$$

LC via functor de torsión

Tomando una resolución inyectiva $E^\bullet$ de M, definimos el j-ésimo módulo de cohomología local de M con soporte en I como el $j-$ésimo functor derivado por la derecha de Γ_I, esto es

$$H_I^j(M) = H^j(\Gamma_I(E^\bullet))$$

LC via complejo de Čech

Sea $I = (x_1, \ldots, x_n) \subseteq R$. Definimos el complejo de Čech $\check{C}^\bullet(M, I)$ en el ideal I como

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_0} \bigoplus_{1\leq i\leq n} M_{x_i} \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{1\leq i<j\leq n} M_{x_i x_j} \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} M_{x_1\cdots x_n}$$

donde los mapas diferenciales d_i se definen a través de la localización canónica, y alternamos signos para tener $d_i \circ d_{i-1} = 0$. Explicitamente tenemos los morfismos de cada componente $d_p : M_{x_{i_1}\cdots x_{i_p}} \to M_{x_{j_1}\cdots x_{j_{p+1}}}$ como

$$d_p(m) = \begin{cases} (-1)^{k+1}\frac{m}{1} & \text{if } \{i_1, \ldots, i_p\} = \{j_1, \ldots, \hat{j}_k, \ldots, j_{p+1}\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Dos propiedades importantes de LC

- $H^j_I(M) = H^j_{\sqrt{I}}(M)$
- Sea N un $A-$módulo y un morfismo flat $f : R \to A$. Entonces $A \otimes_R H^j_I(N) \cong H^j_{IA}(A \otimes_R N)$

Proposición

Si el anillo R es regular, entonces para todo ideal $I \subseteq R$ tenemos $F(H^j_I(R)) \cong H^j_I(R)$

$F-$finitud

$F-$finitud de módulos de LC

Dado un ideal I de R, si M es $F-$finito, entonces $H_I^j(M)$ es $F-$finito.

Observación

Este no es el comportamiento clásico de los $R-$modulos finitamente generados.
En general M finitamente generado $\not\Rightarrow H_I^j(M)$ finitamente generado.

Módulo inyectivo

Decimos que el $R-$módulo E es inyectivo si para todos los $R-$módulos M, N y morfismos $f : M \to N$ inyectivo y $g : M \to E$ arbitrario existes un morfismo $h : N \to E$ tal que $h \circ f = g$. Esto es, que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "g"] \arrow[r, hook, "f"] & N \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

Módulos inyectivos

Caracterizaciones equivalentes

Tenemos tres caracterizaciones equivalentes. TFAE

- E es un módulo inyectivo.
- Cualquier secuencia exacta $0 \to E \to M \to N \to 0$ splits.
- Si E es un submódulo de M, entonces existe otro submódulo $N \subseteq M$ tal que $E \oplus N = M$.
- El functor $\mathrm{Hom}(-, E)$ es exacto.

Módulos inyectivos

Envolvente inyectiva

Dado un módulo M, definimos su envolvente inyectiva como la extensión esencial maximal $N = E_R(M)$. Esto es, dado un morfismo inyectivo $\theta : M \to N$, si $\varphi \circ \theta$ es inyectivo, entonces φ es también inyectivo.

$$\begin{tikzcd} & & E \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[ur, hook, "\varphi\circ\theta"] \arrow[r, hook, "\theta"] & N \arrow[u, dashed, hook, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Módulos inyectivos

Teorema de estructura

Todo módulo inyectivo E es suma directa de módulos inyectivos no descomponibles de la forma

$$E \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} E_R(R/\mathfrak{p})^{\mu_\mathfrak{p}}$$

con los *números de Bass* $\mu_\mathfrak{p}$ independientes de la descomposición.

Computing Bass numbers

Los números de Bass se pueden calcular como el rango del conjunto Hom de los cuerpos residuales de la siguiente manera

$$\mu_\mathfrak{p} = \mathrm{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), E_\mathfrak{p})$$

Proposición

Si R es regular y E un $R-$módulo inyectivo, entonces $F(E) \cong E$

$E^\bullet$ resolución inyectiva de M

$$E^i = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} E_R(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p}, M)}$$

donde los números de Bass se pueden calcular de la siguiente manera

$$\mu_i(\mathfrak{p}, M) = \mathrm{rank}_{k(\mathfrak{p})} \mathrm{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p})$$

(Huneke,-Sharp)

Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo regular local decaracterística p. Entonces los números de Bass $\mu_i(\mathfrak{p}, H^j_I(R))$ son finitos.

Manuel Blickle.
The intersection homology d–module in finite characteristic.
Mathematische Annalen, 328:425–450, 2004.

Florian Enescu and Melvin Hochster.
The frobenius structure of local cohomology.
Algebra & Number Theory, 2(7):721–754, 2008.

Robin Hartshorne and Robert Speiser.
Local cohomological dimension in characteristic p.
Annals of Mathematics, 105(1):45–79, 1977.

Srikanth Iyengar, Anton Leykin, Graham Leuschke, Claudia Miller, Ezra Miller, Anurag K Singh, and Uli Walther.
Hours of local cohomology.
Graduate Studies in Mathematics, 87, 24.

Gennady Lyubeznik.
F-modules: applications to local cohomology and d-modules in characteristic p¿ 0.
1997.

Gennady Lyubeznik.
Finiteness properties of local cohomology modules: a characteristic-free approach.
Journal of Pure and Applied Algebra, 151(1):43–50, 2000.

Christian Peskine and Lucien Szpiro.
Dimension projective finie et cohomologie locale.
Publications Mathématiques de l'IHÉS, 42:47–119, 1973.

Guillem Quingles Daví.
Finiteness properties of local cohomology modules.
Master's thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, 2022.

Uli Walther and Wenliang Zhang.
Local cohomology—an invitation.
In *Commutative Algebra: Expository Papers Dedicated to David Eisenbud on the Occasion of his 75th Birthday*, pages 773–858. Springer, 2021.

Wenliang Zhang.
Introduction to local cohomology and frobenius.