Probabilidad

Abel Doñate Muñoz

Contents

1 Espacios de probabilidad

Definition (σ-álgebra)**.** . *Tupla* $(\Omega, \mathcal{A})$ *con* Ω *un conjunto (espacio muestral) y* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *tal que*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
3. $\{A_n\}$ *colección numerable de* $\mathcal{A} \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{A}$

Definition (Espacio de probabilidad)**.** *Terna* (Ω, A, p) *con* $p : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *tal que*

1. $p(\emptyset) = 0, \quad p(\Omega) = 1$
2. $0 \leq p(A) \leq 1$
3. $\{A_n\}$ *colección numerable disjunta* $\Rightarrow p(\bigcup A_n) = \sum p(A_n)$

Lemma (Desigualdades de Bonferroni)**.**

$$p\left(\bigcup A_i\right) \begin{cases} \leq \sum p(A_i) \\ \geq \sum p(A_i) - \sum p(A_i \cap A_j) \\ \leq \sum p(A_i) - \sum p(A_i \cap A_j) + \sum p(A_i \cap A_j \cap A_k) \end{cases}$$

Definition (Probabilidad condicionada)**.** *La probabilidad de* A *condicionada a* B *es*

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)}$$

Theorem (Bayes)**.** *Sea* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos. Entonces si* B *es otro suceso:*

$$p(A_i|B) = \frac{p(B|A_i)p(A_i)}{\sum p(B|A_k)p(A_k)}$$

Definition (Independencia)**.** A *y* B *son independientes si (TFAE)*

$$p(A \cap B) = p(A)p(B) \quad \equiv \quad p(A|B) = p(A) \quad \equiv \quad p(B|A) = p(B)$$

1.1 Espacio producto

Definition (Espacio producto)**.** *Sean* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, p_1)$ *y* $\Omega_2, \mathcal{A}_2, p_2$ *dos espacios de probabilidad, definimos el espacio producto* $(\Omega_3, \mathcal{A}_3, p_3)$ *tal que*

1. $\Omega 3 = \Omega_1 \times \Omega_2$
2. $\mathcal{A}_3 = \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$
3. p_3 *cumple* $\forall A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \Rightarrow p_3(A_1 \times A_2) = p_1(A_1)p_2(A_2)$

1.2 Borel-Cantelli

Definition (Límites superior e inferior)**.** *Sea* $\{A_n\} \in \mathcal{A}$ *definimos los límites superior e inferior como*

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \qquad y \qquad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Proposition. *Sea* $\{A_n\}$ *sucesión.* $p(\lim A_n) = \lim p(A_n) = p(A)$

Theorem (Borel-Cantelli)**.** *Sea* $\{A_n\}$ *una sucesión de eventos*

1. $\sum_{n \geq 1} p(A_n) < \infty \Rightarrow p(\limsup A_n) = 0$
2. *Si* $\{A_n\}$ *independent y* $\sum_{n \geq 1} p(A_n) = \infty \Rightarrow p(\limsup A_n) = 1$

2 Variables aleatorias

2.1 Variable aleatoria

Definition (Variable aleatoria)**.** *Sean* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ *espacios mesurables. Decimos que* $X : \Omega_1 \to \Omega_2$ *es una variable aleatoria si*

$$X^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1, \ \forall A_2 \in \mathcal{A}_2$$

En este curso siempre tomaremos $(\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$

Ejemplos de variables aleatorias (siendo X, Y variables aleatorias)

- c (función constante)
- I_A (función indicadora)
- $X \pm Y, aX, XY, |X|, \max X, Y, \min X, Y$
- $g(X, Y)$ con g mesurable

2.2 Esperanza y varianza

Definition (Esperanza)**.** *Sea* X *una variable aleatoria y* P_x *su probabilidad asociada* P_x*se define la esperanza como*

$$E[X] = \int_\Omega X dp = \int_\mathbb{R} x dP_x$$

Definition (Momento)**.** *El momento de orden* r *de* X *es* $E[X^r]$

Definition (Varianza)**.** $Var[X] = E[(|X - E[X]|)^2] = E[X^2] - E[X]^2$

Definition (Covarianza)**.** $Cov[X, Y] = E[(|X - E[X]|)(|Y - E[Y]|)] = E[XY] - E[X]E[Y]$

Definition (Desviación típica)**.** $\sigma(X) = \sqrt{Var[X]}$

Algunas propiedades de la esperanza y la varianza

- $E[a] = 0$
- $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$
- $E[I_A] = p(A)$
- $Var[a] = 0$
- $Var[a + X] = Var[X]$
- $Var[aX] = a^2 Var[X]$

Proposition. *Desigualdades*

- ***Hölder*** $E[|XY|] \leq E[|X|^p]^{\frac{1}{p}} E[|X|^q]^{\frac{1}{q}} \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$
  - ***Minkowsky*** $E[|X + Y|^p]^{\frac{1}{p}} \leq E[|X|^p]^{\frac{1}{p}} + E[|Y|^p]^{\frac{1}{p}}$

Theorem (Desigualdad de Markov)**.** *Sea* $X > 0$ *una variable aleatoria y* $a \in \mathbb{R}^+$*. Se cumple*

$$p(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

Theorem (Desigualdad de Chebyshev)**.** *Sea* X *una variable aleatoria con* $E[X] < \infty, Var[X] < \infty, Var[X] \neq 0, k > 0$

$$p(|X - E[X]| \geq kVar[X]^{\frac{1}{2}}) \leq \frac{1}{k^2}$$

3 Variables aleatorias discretas

3.1 Funciones generadoras de probabilidad

Definition (Función generadora)**.** *Asociamos a la variable aleatoria X la función generadora*

$$G_X(z) = \sum_{n \geq 0} p(X = n) z^n$$

Las funciones generadoras satisfacen las siguientes propiedades

- $G_X(0) = p(X = 0), \qquad G_X(1)q = 1$
- $E[X(X-1)\cdots(X-k+1)] = G^{(k)}(1)$
- $Var(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$
- X, Y variables aleatorias independientes $\Rightarrow G_{X+Y} = G_X G_Y$

3.2 Modelos discretos

Modelo	$p(X = k)$	$E[X]$	$Var[X]$	$G_X(z)$
Bernoulli $\sim Be(p)$	$\begin{cases} p(X=1) = p \\ p(X=0) = 1-p \end{cases}$	p	$p(1-p)$	$(1-p) + pz$
Binomial $\sim Bin(N, p)$	$\binom{N}{k} p^i (1-p)^{N-k}$	Np	$Np(1-p)$	$()$
Uniforme $\sim U(1, N)$	$\frac{1}{N}$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\frac{1}{N} \frac{z(z^N-1)}{z-1}$
Poisson $\sim Po(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ	$e^{\lambda(z-1)}$
Geométrica $\sim Geom(p)$	$p(1-p)^k - 1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pz}{1-(1-p)z}$
Binomial negativa $\sim BinN(r, p)$	$\begin{cases} 0 & \text{si } k < r \\ \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} & \text{si } k \geq r \end{cases}$	$\frac{r}{p}$	$r\frac{1-p}{p^2}$	$\left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^r$

Descripciones de cada modelo

1. **Bernoulli** Lanzamiento de moneda con probabilidad p y $1 - p$ en cada cara
2. **Binomial** Número de éxitos haciendo N experimentos independientes $\sim Be(p)$
3. **Uniforme** De 1 a N todas las probabilidades son iguales
4. **Poisson**
5. **Geométrica** Número de experimentos necesarios antes de obtener el primer éxito en Bernoulli.
6. **Binomial negativa** Numero de experimentos necesarios para conseguir r éxitos.