Topología

Abel Doñate Muñoz
abel.donate@estudiantat.upc.edu

Contents

0 Propiedades conjuntos y funciones

De un conjunto A se deducen los siguientes:

Interior	$x \in A^\circ \iff \exists U_x : x \in U_x \subseteq A$	$A^\circ \subseteq A$
Adherencia	$x \in \overline{A} \iff \forall U_x \ U_x \cap A \neq \emptyset$	$A \subseteq \overline{A}$
Frontera	$x \in \partial A \iff \forall U_x \ U_x \cap A \neq \emptyset, U_x \cap A^c \neq \emptyset$	$\partial A \subseteq \overline{A}$
Acumulación	$x \in A' \iff \forall U_x \ U_X \cap A \neq \emptyset, \{x\}$	$A' \subseteq \overline{A}$
Aislado	$x \in A^a \iff \exists U_x : U_x \cap A = \{x\}$	$A^a \subseteq A$

$\overline{A} = A^\circ \sqcup \partial A = A' \sqcup A^a$

En una aplicación $f : X \to Y$ se cumple (cec)

1. $A \subseteq A^{ec} \iff A \subseteq f^{-1}(f(A))$ (igualdad si f inyectiva)
2. $A^{ce} \subseteq A \iff f(f^{-1}(A)) \subseteq A$ (igualdad si f exhaustiva)

y cumple las siguientes propiedades

- $f^{-1}(\bigcup A_i) = \bigcup f^{-1}(A_i)$, $f^{-1}(\bigsqcup A_i) = \bigsqcup f^{-1}(A_i)$
- $f^{-1}(\bigcap A_i) = \bigcap f^{-1}(A_i)$
- $f(\bigcup A_i) = \bigcup f(A_i)$
- $f(\bigcap A_i) \subseteq \bigcap f(A_i)$

1 Espacios métricos

Definition. *Una métrica / distancia es una aplicación $d : E \times E \to \mathbb{R}$ que cumple*

1. $d(x,y) \geq 0$ *y* $d(x,y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Definition. *Una norma es una aplicación $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ que cumple*

1. $\|v\| \geq 0$ *y* $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Observamos que toda norma induce una distancia $d(u,v) = \|u - v\|$

Algunos ejemplos de distancias y normas son

- **p-norma** (vectores) $\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $\forall p \geq 1$ y (funciones) $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $\forall p \geq 1$
- **Métrica trivial** $d(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } \neq y \\ 0 \text{ si } = y \end{cases}$
- **Hamming** $d(a,b) = |\{i : a_i \neq b_i\}|$, es decir, la cantidad de componentes diferentes
- **P-ádica** Definimos $u_p(n) = \max\{t \geq 0 : p^t | n\} \implies d_p(a,b) = p^{-u_p(a-b)}$ es una distacia

2 Espacios topológicos

Definition. *Una topología en un conjunto X es un subconjunto $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ que satisface los axiomas*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

2. *Cerrado por reuniones arbitrarias*
3. *Cerrado por intersecciones finitas*

Decimos que un subconjunto C es abierto si $C \in \mathcal{T}$, y es cerrado si $C^c \in \mathcal{T}$

Ejemplos de topologías

- **Discreta** $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, **Gruesa** $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$
- **Complementarios finitos** $\mathcal{T}_{cd} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : |U^c| < \infty\}$
- **Orden** $\mathcal{T}_{\leq} = \{U \subset X : \ \forall x \in U \ \exists \alpha, \beta \in X^{\pm\infty} : x \in (\alpha, \beta) \subset U\}$
- **Límite inferior** $\mathcal{T}_l = \{U \subset X : \ \forall x \in U \ \exists \beta \in X^{\infty} : [x, \beta) \subset U\}$
- **Intervalos semi-infinitos** $\mathcal{T}_{-\infty} = \{U \subset X : \ \forall x \in U \ \exists \beta \in X^{\infty} : (-\infty, \beta) \subset U\}$
- **Zariski:** $\mathcal{T}_{zar} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n : f(x) = 0, \ \forall f \in I \subseteq K[X_1, \ldots, X_2]\}$ (ceros de polinomios)

Definition. *$N \subseteq X$ es un entorno de $x \in X$ si existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subseteq N$*

Si el entorno es abierto se le suele denotar U_x

Definition. *X es de **Hausdorff** si $\forall x \neq y \in X \ \exists U_x, U_y : U_x \cap U_y = \emptyset$*

Definition. *Comparación de topologías. Si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ se dice que $\mathcal{T}_2$ es más fina que $\mathcal{T}_1$*

2.1 Bases y subbases

Definition. *Una base de la topología $\mathcal{T}$ es un subconjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ tal que todo abierto de $\mathcal{T}$ es reunión de abiertos de $\mathcal{B}$*

Podemos comprobar que un subconjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es base de $\mathcal{T}$ si y solo si

$$\forall x \in X \text{ y cualquier entorno } U_x \ \exists \text{ un abierto básico } B \in \mathcal{B} : B \subseteq U_x$$

Para ver si $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ es base de alguna topología, tenemos que lo es si y solo si

1. $X = \bigcup B : \ \forall x \in X \ \exists B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$
2. si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \ \forall x \in B_1 \cap B_2 \implies \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset B_1 \cap B_2$

Definition. *Una subbase de la topología $\mathcal{T}$ es un conjunto $\mathcal{S} \subset X$ que genera la $\mathcal{T}$ más fina que contiene $\mathcal{S}$. Lo denotaremos $\mathcal{T} = \langle \mathcal{S} \rangle$.*

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \{U = \bigcup B_i : B_i = S_{i,1} \cap \ldots \cap S_{i,n}, S_{i,j} \in \mathcal{S}\}$$

2.2 Aplicaciones continuas

Definition. *Una aplicación $f : X \mapsto Y$ es continua en un punto $x \in X$ si todo entorno de $f(x)$ contiene la imagen de algún entorno de x*

La aplicación es continua y lo es para todos los puntos de X

Para probar que f es continua solo basta con probar alguna de estas

1. La antiimagen de un abierto es abierto
2. La antiimagen de un cerrado es cerrado
3. La antiimagen de todo abierto subbasico (o básico) es abierto

Definition. *Un **Homeomorfismo** es una aplicación $f : X \to Y$ tal que*

1. *f continua*
2. *f biyectiva*
3. *f^{-1} continua*

Definition. *Una aplicación f es **Abierta** si la imagen de todo abierto es abierto, y **Cerrada** si la imagen de todo cerrado es cerrado.*

Observamos que si f es continua y biyectiva, nos vale con que sea abierta o cerrada para decir que es un homeomorfismo.

Theorem. ***Criterio Compacto-Hausdorff**. Toda aplicación $f : K \to H$ de compacto a Hausdorff es cerrada*

3 Construcción de nuevos espacios topológicos

3.1 Subespacios topológicos

Definition. *Un subespacio topológico de $(X, \mathcal{T})$es un subespacio $S \subset X$ con la topología $\mathcal{T}|_S \subset \mathcal{P}(S)$ obtenida como*

$$\mathcal{T}|_S = \{U \cap S : U \in \mathcal{T}\}$$

Tenemos las siguientes afirmaciones con bases y subbases

1. Si $\mathcal{B}$ es base de $X \implies \mathcal{B}|_S := \{B \cap S : B \in \mathcal{B}\}$ es base de S
2. Si $\mathcal{S}$ es subbase de $X \implies \mathcal{S}|_S := \{U \cap S : U \in \mathcal{S}\}$ es subbase de S

Proposition. *Sea $S \subset X$ un subespacio topológico e Y otro espacio topológico*

1. *La aplicación de inclusión $\iota : S \hookrightarrow X$ es continua*
2. *$\mathcal{T}|_S$ es la menos fina que hace continua ι*
3. *$f : Y \to S$ es continua $\iff$ $\iota \circ f$ es continua*

Theorem. ***Lema del enganchamiento**. Sea $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ un recubrimiento del espacio topológico X que satisfacen una de las dos:*

1. *X_i abierto $\forall i \in I$*
2. *X_i cerrado $\forall i \in I$, I finito*

Definition. *Una **Inmersión** es una aplicación $f : X \hookrightarrow Y$ continua e inyectiva que da un homeomorfismo entre $X \cong f(X) \subset Y$*

3.2 Espacios producto

Definition. *Sean $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$. El **Espacio Producto** es el conjunto cartesiano $X \times Y$ con la topología que tiene por base el producto de abiertos:*

$$\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$$

Algunos ejemplos y contraejemplos de estos productos son los siguientes

- $X_{dis} \times Y_{dis} = (X \times Y)_{dis}$
- $X_{gro} \times Y_{gro} = (X \times Y)_{gro}$
- $\mathbb{R}^n_{euc} \times \mathbb{R}^m_{euc} = \mathbb{R}^{n+m}_{euc}$
- $\mathbb{R}_{cf} \times \mathbb{R}_{cf} \neq \mathbb{R}^2_{cf}$

- $\mathbb{R}_{dis} \times \mathbb{R}_{euc} = \mathbb{R}^2_{lex}$
- $[0,1]_{dis} \times [0,1]_{euc} \neq [0,1]^2_{lex}$

Proposition. *Sea $X = \Pi X_i$ un producto de espacios e Y otro espacio*

1. *Las proyecciones $\pi_j : X \to X_i$ son continuas*
2. *La topología producto en X es la menos fina con la que todas las π_j son continuas*
3. *$f : Y \to X$ continua $\iff$ todas las $\pi_i \circ f$ continuas*

3.3 Espacio cociente

Definition. *Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre X y $\pi : X \twoheadrightarrow X/\sim$ la proyección sobre el cociente. El espacio cociente $(Q, \mathcal{T}_Q)$ tiene la topología*

$$\mathcal{T}_Q := \{V \subset Q : \pi^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$$

En un espacio cociente se cumple

1. La proyección π es continua
2. $\mathcal{T}_Q$ es la mas fina tal que π es continua
3. La aplicación es continua $\iff$ $f \circ \pi$ es continua

Definition. *Una* ***Identificación*** *(o aplicación cociente) es una $f : X \twoheadrightarrow Y$ continua y exhaustiva tal que el Y tiene la topología cociente correspondiente*

$$V \in \mathcal{T}_Y \iff f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$$

Theorem. ***Teorema de isomorfismo***. *Sea $\sim$ tal que $x \sim y \iff f(x) = f(y)$*

Si $f : X \twoheadrightarrow Y$ es una identificación $\implies$ $f_\sim : X/\sim \to f(X)$ es homeomorfismo

Podemos deducir que si f continua y exhaustiva, entoces

1. f abierta $\implies$ f identificación
2. f cerrada $\implies$ f identificación
3. f identificación $\not\Rightarrow$ f abierta ni cerrada

4 Compacidad

Definition. *Un* ***Recubrimiento*** *de $S \subset X$ es una familia $(A_i)_{i \in I}$ con $A_i \subset X$ abiertos tal que $S \subset \bigcup_{i \in I} A_i$*

Un ***Subrecubrimiento*** *es una subfamilia $(A_j)_{j \in J}, J \subset I$ tal que $S \subset \bigcup_{j \in J} A_j$*

Definition. *El espacio $(X, \mathcal{T})$ es* ***Compacto*** *si todo recubrimiento por abiertos tiene un subrecubrimiento finito (srf a partir de ahora)*

Ejemplos de compactos

- Cualquier espacio con $\mathcal{T}_{gr}$
- Cualquier espacio con $\mathcal{T}_{cf}$
- El subespacio $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \geq 1\} \subset R$
- Un intervalo abierto $[a, b]$

Ejemplos de no compactos

- Espacio discreto finito
- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$
- un intervalo abierto (a, b)
- Una bola abierta $B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n$

Theorem. *Sea $f : X \to Y$ continua. Si X es compacto $\implies$ $f(X)$ es compacto*

Tenemos como resultado que todo espacio cociente de un compacto es compacto.

Theorem. *K compacto, $A \subseteq K$ cerrado $\implies$ A compacto*

Theorem. *$K \subseteq X$ compacto de un Hausdorff* $\begin{cases} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{cases}$ *K cerrado*

4.1 Producto de espacios

Veremos que el producto se comporta bien respecto a la compacidad

Proposition. ***Lema del tubo**. $X \times Y$ con Y compacto. Todo abierto de $X \times Y$ que contenga la fibra $\{x\} \times Y = \pi_X^{-1}(x)$ sobre $x \in X$ contiene algún tubo $U_x \times Y$*

Theorem. ***Subbase de Alexander**. Sea $\mathcal{S}$ una subbase de $(X, \mathcal{T})$.*
X es compacto $\iff$ todo recubrimiento por abiertos de $\mathcal{S}$ tiene srf

Theorem. ***Tychonoff**. Sea $X = \Pi X_i$ un producto de espacios topológicos arbitrarios. Entonces*

1. *Si $X_i \neq \emptyset$ $\forall i, X$ compacto $\implies$ X_i compactos*
2. *Si X_i compacto $\forall i$ $\implies$ X compacto*

4.2 Espacios métricos

Theorem. ***Heine-Borel**. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto $\iff$ cerrado y acotado*

Observamos que en un espacio métrico se cumple compacto $\begin{cases} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{cases}$ cerrado y acotado

Theorem. ***Weierstrass**. $f : X \to \mathbb{R}$ continua con X compacto tiene máximo y mínimo*

Theorem. *En un espacio métrico son equivalentes:*

1. *Compacidad por recubrimientos: todo recubrimiento tiene un srf*
2. *Bolzano-Weierstrass: todo subconjunto infinito tiene algún punto de acumulación*
3. *Compacidad secuencial: toda sucesión tiene alguna parcial convergente*

5 Conexión

5.1 Espacios conexos

Definition (Espacio conexo)**.** *El espacio $(X, \mathcal{T})$ es conexo si $X = U \sqcup V$ con U, V abiertos distintos de $\emptyset, X$*

El subespacio $S \subseteq X$ es no conexo si existe una separación, es decir

$$\exists \begin{cases} U \subseteq X \\ V \subseteq X \end{cases} : \begin{cases} U \cap V \cap S = \emptyset \\ U \cap S \neq \emptyset \\ V \cap S \neq \emptyset \end{cases} \implies S \subseteq U \cup V$$

Si no existe tal separación decimos que S es conexo

Propidedes de los conexos

1. Si A conexo, $A \subseteq B \subseteq \overline{A} \implies B$ conexo
2. A_i conexos, $A_i \cap A_j \neq \emptyset \implies A = \bigcup A_i$ conexo
3. f continua, A conexo $\implies f(A)$ conexo

Theorem (Valor intermedio)**.** *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua con X conexo.*

$$\forall x, y \in X : f(x) \leq \alpha \leq f(y) \implies \exists z \in X : f(z) = \alpha$$

Theorem (Conexión de producto)**.** *Sea $X = \Pi X_i$ producto de espacios topológicos:*

1. *Si $X_i \neq \emptyset$ $\forall i$ y X es conexo $\implies X_i$ es conexo*
2. *Si X_i es conexo $\forall i \implies X$ es conexo*

5.2 Espacios arco-conexos

Definition (Camino)**.** *Un camino es una aplicación $\sigma : \mathbb{I} \to X$ continua*

Definition (Espacio arco-conexo)**.** *El espacio $(X, \mathcal{T})$ es arco-conexo si para cada par de puntos $a, b \in X$ existe un camino $\sigma : \sigma(0) = a, \sigma(1) = b$*

En general tenemos arco-conexo $\implies$ conexo, pero conexo $\not\Longrightarrow$ arco-conexo (la pinta y la puça)

Proposition. *Sea f es una aplicación continua. X arco-conexo $\implies f(X)$ arco-conexo*

6 Homotopía

6.1 Homotopía

Definition (Homotopía de aplicaciones)**.** *Sean $f, g : X \to Y$ continuas. Una homotopía es una aplicación continua*

$$F : X \times [0,1] \to Y : \begin{cases} F(x,0) = f(x) \\ F(x,1) = g(x) \end{cases} \quad \forall x \in X$$

Esta homotopía crea una clase de equivalencia homotópica ($\simeq$). El conjunto de las clases homotópicas de las aplicaciones continuas de X en Y se denomina $\mathcal{C}[X, Y]$.

Definition (Espacios homotópicos)**.** *Dos espacios X, Y son homotópicos ($X \simeq Y$) si:*

$$\exists \begin{cases} f : X \to Y \\ g : Y \to X \end{cases} : \begin{cases} g \circ f \simeq Id_X \\ f \circ g \simeq Id_Y \end{cases}$$

De la misma forma esta relación homotópica define una relación de equivalencia.

Definition. *Un espacio es **contráctil** si tiene el mismo tipo de homotopía que un punto*

Definition (Retracción)**.** *Una retracción es una aplicación $r : X \to S \subseteq X$ tal que $r|_S = Id_S$*

*Un **retracto** se da si existe una retracción $r \simeq Id_X$*

6.2 Revestimientos

Definition (Abierto elemental)**.** *Sea $f : X \to Y$, un abierto elemental de Y es un abierto V de Y tal que*

1. $f^{-1}(V) = \sqcup U_i$, U_i *abierto de* X
2. $f|_{U_i} : U_i \to V$ *es homeomorfismo* ($U_i \simeq V$)

Definition (Revestimiento)**.** *Aplicación* $p : \tilde{X} \twoheadrightarrow X$ *exhaustiva tal que* X *tiene un recubrimiento formado por abiertos elementales*

6.3 Levantamientos

Definition (Levantamiento)**.** *Sea* $p : \tilde{X} \twoheadrightarrow X$ *revestimiento,* $f : Y \to X$*, entonces un levantamiento (aixecament) de* f *en el espacio* $\tilde{X}$ *es*

$$\tilde{f} : Y \to \tilde{X} \quad \text{tal que} \quad p \circ \tilde{f} = f$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & \tilde{X} \arrow[d, two heads, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Si ademas Y es conexo, cualquier levantamiento de una aplicación continua $f : Y \to X$ queda determinado por la imagen de un solo punto

Definition (Levantamiento de caminos)**.** *Sea* $p : \tilde{X} \twoheadrightarrow X$ *revestimiento con* $p(\tilde{x}) = x$ *y el camino* $\sigma : \mathbb{I} \to X$ *tal que* $\sigma(0) = x$*. Entonces* σ *tiene un único levantamiento* $\tilde{\sigma} : \mathbb{I} \to X$ *tal que* $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{x}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{I} \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] \arrow[dr, "\sigma"'] & \tilde{X} \arrow[d, two heads, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Definition (Levantamiento de homotopías)**.** *Sea* $p : \tilde{X} \twoheadrightarrow X$ *revesimiento con* $p(\tilde{x}) = x$*. Toda aplicación continua* $F : \mathbb{I}^2 \to X$ *con* $F(0,0) = x$ *tiene un único levantamiento* $\tilde{F} : \mathbb{I}^2 \to X$ *con* $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}$

6.4 Grado de homotopías $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$

En toda la seccioón la función $\exp(x) = e^{2\pi i x}$. Nótese $\exp^{-1}(\exp(\alpha)) = \alpha + \mathbb{Z}$.

Proposition. *Sea* $\sigma : \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ *un camino. Dos levantamientos* $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ *de* σ *difieren en un entero. Es decir* $\tilde{\sigma}_1(s) = \tilde{\sigma}_2(s) + k$*.*

Definition (Grado de la aplicación)**.** *Sea* $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ *definimos*

$$\deg f := \tilde{\sigma}_f(1) - \tilde{\sigma}_f(0) \in \mathbb{Z}$$

con $\tilde{\sigma}_f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ *un levantamiento del camino* $\sigma_f = f \circ \pi : \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{I} \arrow[r, "\tilde{\sigma_f}"] \arrow[d, "exp"'] \arrow[dr, "\sigma_f"] & \mathbb{R} \arrow[d, two heads, "p=exp"] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Proposition. *La aplicación* $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ *tiene grado* 0 *si y solo si tiene un levantamiento de la forma* $\tilde{f} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ *con* $f = \exp \circ \tilde{f}$

Vemos además que la aplicación $[f] \mapsto \deg f$ es un isomorfismo de grupos $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \cong \mathbb{Z}$ con la multiplicación en las funciones y suma en los enteros.

6.5 Topología del plano

Theorem (Fundamental del Álgebra)**.** *Todo polinomio con coeficientes complejos no constante tiene alguna raíz*

Proposition. *No existe una retracción* $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$

Theorem (Punto fijo de Brouwer)**.** *Toda aplicación continua* $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ *tiene algún punto fijo.*

Theorem (Borsuk-Ulam)**.** $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$*. Entonces existe* $x \in \mathbb{S}^2$ *tal que* $f(x) = f(-x)$

Theorem (Invariancia de dimensión)**.** *Un abierto* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *no puede ser homeomorfo a uno de* $\mathbb{R}^n$ *con* $n \neq 3$

7 Grupo Fundamental

Definition (Homotopía de caminos)**.** *Sean $\sigma, \tau : \mathbb{I} \to X$ caminos. Una homotopía de caminos es una aplicación continua*

$$F : \mathbb{I} \times [0,1] \to X : \begin{cases} F(s,0) = \sigma(s) \\ F(s,1) = \tau(s) \\ F(0,t) = \sigma(0) = \tau(0) F(1,t) = \sigma(1) = \tau(1) \end{cases} \qquad \forall s \in \mathbb{I}, t \in [0,1]$$

Definition (Composición de caminos)**.** *Sean $\sigma, \tau : \mathbb{I} \to X$ tal que $\sigma(1) = \tau(0)$. Se define su composición como $\mu = \sigma \star \tau$:*

$$\mu : \mathbb{I} \to X, \qquad \mu(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Definition (Grupo Fundamental)**.** *El grupo Fundamental de X en el punto x es el conjunto de clases de homotopía*

$$\pi_1(X,x) = \{[\sigma] : \sigma \text{ lazo en } X \text{ con extremos } \sigma(0) = \sigma(1) = x\}$$

con la operación $[\sigma] \cdot [\tau] := [\sigma \star \tau]$

8 Clasificación de aplicaciones continuas

Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua

Nombre	**f cumple**	**Propiedades**
Abierta	imagen de todo abierto es abierto	
Cerrada	imagen de todo cerrado es cerrado	
Homeomorfismo	f biyectiva, f^{-1} continua	
Inmersión	f inyectiva, $X \cong f(X)$	
Identificación	f exhaustiva, $f^{-1}(V)$ abierto $\implies$ V abierto	$f_\sim : X/\sim \to f(X)$ homeo

8.1 Implicaciones útiles

Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua

- f biyectiva + abierta/cerrada $\begin{cases} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{cases}$ f homeomorfismo
- f exhaustiva + abierta/cerrada $\begin{cases} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{cases}$ f identificación
-

8.2 Diagramas conmutativos

Propiedad universal proyecciones

$$\begin{cases} \pi_i^y \circ f & \text{continua} \\ \pi_i^y & \text{continua} \end{cases} \implies f \text{ continua}$$

$$\begin{tikzcd} \Pi X_i \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi_i^y \circ f"'] & \Pi Y_i \arrow[d, "\pi_i^y"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Propiedad universal cociente

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & X/\sim \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

$$\tilde{f} \text{ continua} \iff f \text{ continua}$$

9 Ejemplos

9.1 Aixecament de camins

Encontraremos el grado de la función $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, f(z) = z^n$. Para ello primero creamos el camino $\sigma_f = f \circ \exp$. Vemos en el diagrama conmutativo que

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{I} \arrow[r, "\tilde{\sigma_f}"] \arrow[d, "exp"'] \arrow[dr, "\sigma_f"'] & \mathbb{R} \arrow[d, two heads, "p=exp"] \\
\mathbb{S}^1 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

$$f \circ \exp(s) = p \circ \tilde{\sigma_f}(s) \implies e^{2\pi i s n} = e^{2\pi i \tilde{\sigma_f}(s)} \implies \tilde{\sigma}_f(s) = ns + k$$

$$\deg(f) = \tilde{\sigma}_f(1) - \tilde{\sigma}_f(0) = n + k - k = n$$