$F-$módulos

Abel Doñate Muñoz

Universitat Politècica de Catalunya

Presentación del trabajo final, Enero 2024

Table of Contents

1. Functor de Frobenius
2. $F-$módulos
3. Módulos inyectivos

Endomorfimo de Frobenius

Endomorfismo de Frobenius

Sea R un anillo con característica $p > 0$. Definimos el endomorfismo de Frobenius como el mapa

$$\begin{aligned} f : R &\to R \\ r &\to r^p \end{aligned}$$

Observación

Este morfismo en general no es inyectivo ni exhaustivo.

Endomorfsimo de Frobenius

Módulo con acción de Frobenius

Sea M un $R-$módulo, definimos el módulo $M^{(e)}$ inducido por $f^{(e)}$ como el grupo abeliano M dotado con la acción

$$r \cdot m = f^{(e)}(r)m = r^{p^e} m$$

Notación

Por simplicidad denotaremos $M^{(1)}$ como M' y $R^{(1)}$ como R'.

Functor de Frobenius

Functor de Frobenius

Definimos el functor de Frobenius como el el functor $F : \mathbf{R} - \mathbf{Mod} \to \mathbf{R} - \mathbf{Mod}$ que envía

$$M \longmapsto R' \otimes_R M, \qquad (M \xrightarrow{\phi} N) \longmapsto R' \otimes_R M \xrightarrow{id \otimes_R \phi} R' \otimes_R N$$

Functor de Frobenius

Frobenius de un complejo

Dado el complejo $M^\bullet$, definimos su complejo inducido $F(M^\bullet)$ como el complejo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_{k-1} \arrow[r, "h_{k-1}"] \arrow[d, "F"] & M_k \arrow[r, "h_k"] \arrow[d, "F"] & M_{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "F"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & F(M_{k-1}) \arrow[r, "F(h_{k-1})"] & F(M_k) \arrow[r, "F(h_k)"] & F(M_{k+1}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Podemos hacer exactamente la misma construcción para $F^{(e)}$.

Functor de Frobenius

Propiedades del functor de Frobenius

1. F es exacto por la derecha. Adicionalmente, si R es regular, entonces R' es flat y F es exacto.
2. F conmuta con sumas directas.
3. F conmuta con la localización.
4. F conmuta con limites directos.
5. F preserva generación finita de módulos.
6. Si R es regular, entonces F conmuta con la cohomología de complejos

Functor de Frobenius

Ideal potencia de Frobenius

Sea $I = (x_1, \ldots, x_n)$ un ideal de R, definimos su ideal potencia de Frobenius $e-$ésimo como

$$I_{p^e} := (x_1^{p^e}, \ldots, x_n^{p^e})R$$

Algunos ejemplos de trasformaciones

- $F(R) \cong R$
- $F(I) \cong I_{p^e}$
- $F(R/I) \cong R/I_{p^e}$

$F-$módulos

Definición de un $F-$módulo

Un $F-$módulo es un $R-$módulo M dotado con un $R-$isomorfismo $\theta : M \to F(M)$ llamado morfismo de estructura.

Morfismo de $F-$módulos

Dados dos $F-$módulos (M, θ_M) y (N, θ_N), decimos que $g : M \to N$ es un morfismo de $F-$módulos si el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\theta_M"] & N \arrow[d, "\theta_N"] \\ F(M) \arrow[r, "F(g)"] & F(N) \end{tikzcd}$$

$F-$módulos

Una forma alternativa

Los $F-$módulos también se pueden pensar como módulos en el anillo $R[F]$, donde hemos añadido una variable F no conmutativa con las relaciones $r^pF = Fr\ \forall r \in R$. Esta caracterización está presente en [Bli04]

Observación

La notación $R[F]-$module usada en [Bli04] es muy sugestiva para pensar de esta forma la estructura del módulo.

Dos casos importantes

Si $M = R$

Tenemos el isomorfismo natural $\theta : R \to F(R)$, que trasnforma (R, θ) en un $F-$módulo. Este isomorfismo viene dado por

$$\begin{aligned} \theta : R &\to F(R) \cong R' \otimes_R R \\ r &\mapsto r \otimes 1 \end{aligned}$$

Si $M = S^{-1}R$

Tenemos el isomorfismo $F(S^{-1}R) \cong S^{-1}R$. La conmutatividad del functor de Frobenius con la localización ya te proporciona el isomorfismo.
Explícitamente tenemos el mapa

$$\begin{aligned} \theta : S^{-1}R &\to R' \otimes_R S^{-1}R \\ \frac{r}{s} &\mapsto rs^{p-1} \otimes \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Módulos $F-$finitos

Morfismo generador

Dado un $F-$module (M, θ) definimos su morfismo generador $\theta_0 : M_0 \to F(M_0)$ como el morfismo tal que el sistema directo

$$\begin{tikzcd}
M_0 \arrow[r, "\theta_0"] \arrow[d, "\theta_0"] & F(M_0) \arrow[r, "F(\theta_0)"] \arrow[d, "F(\theta_0)"] & F^2(M_0) \arrow[r, "F^2(\theta_0)"] \arrow[d, "F(\theta_0)"] & \cdots & M \arrow[d, "\theta"] \\
F(M_0) \arrow[r, "F(\theta_0)"] & F^2(M_0) \arrow[r, "F^2(\theta_0)"] & F^3(M_0) \arrow[r, "F^3(\theta_0)"] & \cdots & F(M)
\end{tikzcd}$$

tiene límite módulo M y morfismo θ.

Módulo $F-$finito

Decimos que el módulo M es $F-$finito si M tiene un morfismo generador $\theta_0 : M_0 \to F(M_0)$ con M un $R-$module finitamente generado.

Cohomología local

Functor de torsión

Sea $\Gamma_I = \{m \in M : I^n m = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$. Uno puede comprobar que induce un functor que transforma los morfismos de la siguiente manera natural

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Gamma_I"] & N \arrow[d, "\Gamma_I"] \\ \Gamma_I(M) \arrow[r, "\Gamma_I(g)"] & \Gamma_I(N) \end{tikzcd}$$

LC via functor de torsión

Tomando una resolución inyectiva $E^\bullet$ de M, definimos el j-ésimo módulo de cohomología local de M con soporte en I como el $j-$ésimo functor derivado por la derecha de Γ_I, esto es

$$H_I^j(M) = H^j(\Gamma_I(E^\bullet))$$

Cohomología local

LC via complejo de Čech

Sea $I = (x_1, \dots, x_n) \subseteq R$. Definimos el complejo de Čech $\check{C}^\bullet(M, I)$ en el ideal I como

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_0} \bigoplus_{1 \le i \le n} M_{x_i} \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{1 \le i < j \le n} M_{x_i x_j} \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} M_{x_1 \cdots x_n} \longrightarrow 0$$

donde los mapas diferenciales d_i se definen a través de la localización canónica, y alternamos signos para tener $d_i \circ d_{i-1} = 0$. Explicitamente tenemos los morfismos de cada componente $d_p : M_{x_{i_1} \cdots x_{i_p}} \to M_{x_{j_1} \cdots x_{j_{p+1}}}$ como

$$d_p(m) = \begin{cases} (-1)^{k+1} \frac{m}{1} & \text{if } \{i_1, \dots, i_p\} = \{j_1, \dots, \hat{j}_k, \dots, j_{p+1}\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Cohomología local

Dos propiedades importantes de LC

- $H_I^j(M) = H_{\sqrt{I}}^j(M)$
- Sea N un $A-$módulo y un morfismo flat $f : R \to A$. Entonces $A \otimes_R H_I^j(N) \cong H_{IA}^j(A \otimes_R N)$

Proposición

Si el anillo R es regular, entonces para todo ideal $I \subseteq R$ tenemos $F(H_I^j(R)) \cong H_I^j(R)$

$F-$finitud

$F-$finitud de módulos de LC

Dado un ideal I de R, si M es $F-$finito, entonces $H^j_I(M)$ es $F-$finito.

Observación

Este no es el comportamiento clásico de los $R-$modulos finitamente generados.
En general M finitamente generado $\not\Rightarrow H^j_I(M)$ finitamente generado.

Módulo inyectivo

Decimos que el $R-$módulo E es inyectivo si para todos los $R-$módulos M, N y morfismos $f : M \to N$ inyectivo y $g : M \to E$ arbitrario existes un morfismo $h : N \to E$ tal que $h \circ f = g$. Esto es, que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "g"] \arrow[r, hook, "f"] & N \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

Módulos inyectivos

Caracterizaciones equivalentes

Tenemos tres caracterizaciones equivalentes. TFAE

- E es un módulo inyectivo.
- Cualquier secuencia exacta $0 \to E \to M \to N \to 0$ splits.
- Si E es un submódulo de M, entonces existe otro submódulo $N \subseteq M$ tal que $E \oplus N = M$.
- El functor $\mathrm{Hom}(-, E)$ es exacto.

Módulos inyectivos

Envolvente inyectiva

Dado un módulo M, definimos su envolvente inyectiva como la extensión esencial maximal $N = E_R(M)$. Esto es, dado un morfismo inyectivo $\theta : M \to N$, si $\varphi \circ \theta$ es inyectivo, entonces φ es también inyectivo.

$$\begin{tikzcd}
 & & E \\
0 \arrow[r] & M \arrow[ur, hook, "\varphi\circ\theta"] \arrow[r, hook, "\theta"] & N \arrow[u, hook, dashed, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Módulos inyectivos

Teorema de estructura

Todo módulo inyectivo E es suma directa de módulos inyectivos no descomponibles de la forma

$$E \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)} E_R(R/\mathfrak{p})^{\mu_{\mathfrak{p}}}$$

con los *números de Bass* $\mu_{\mathfrak{p}}$ independientes de la descomposición.

Computing Bass numbers

Los números de Bass se pueden calcular como el rango del conjunto Hom de los cuerpos residuales de la siguiente manera

$$\mu_{\mathfrak{p}} = \operatorname{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(k(\mathfrak{p}), E_{\mathfrak{p}})$$

Proposición

Si R es regular y E un $R-$módulo inyectivo, entonces $F(E) \cong E$

$E^\bullet$ resolución inyectiva de M

$$E^i = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} E_R(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p},M)}$$

donde los números de Bass se pueden calcular de la siguiente manera

$$\mu_i(\mathfrak{p}, M) = \mathrm{rank}_{k(\mathfrak{p})} \mathrm{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p})$$

(Huneke,-Sharp)

Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo regular local decaracterística p. Entonces los números de Bass $\mu_i(\mathfrak{p}, H^j_I(R))$ son finitos.

Manuel Blickle.
The intersection homology d–module in finite characteristic.
Mathematische Annalen, 328:425–450, 2004.

Florian Enescu and Melvin Hochster.
The frobenius structure of local cohomology.
Algebra & Number Theory, 2(7):721–754, 2008.

Robin Hartshorne and Robert Speiser.
Local cohomological dimension in characteristic p.
Annals of Mathematics, 105(1):45–79, 1977.

Creig Huneke.
Problems on local cohomology, free resolutions in commutative algebra and algebraic geometry (sundance, ut, 1990), 93–108.
Res. Notes Math, 2, 1992.

Srikanth Iyengar, Anton Leykin, Graham Leuschke, Claudia Miller, Ezra Miller, Anurag K Singh, and Uli Walther.
Hours of local cohomology.
Graduate Studies in Mathematics, 87, 24.

Gennady Lyubeznik.
F-modules: applications to local cohomology and d-modules in characteristic p¿ 0.
1997.

Gennady Lyubeznik.
Finiteness properties of local cohomology modules: a characteristic-free approach.
Journal of Pure and Applied Algebra, 151(1):43–50, 2000.

Christian Peskine and Lucien Szpiro.
Dimension projective finie et cohomologie locale.
Publications Mathématiques de l'IHÉS, 42:47–119, 1973.

Guillem Quingles Daví.
Finiteness properties of local cohomology modules.
Master's thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, 2022.

Uli Walther and Wenliang Zhang.
Local cohomology—an invitation.

In *Commutative Algebra: Expository Papers Dedicated to David Eisenbud on the Occasion of his 75th Birthday*, pages 773–858. Springer, 2021.

Wenliang Zhang.
Introduction to local cohomology and frobenius.