Formulario Probabilidad

Abel Doñate Muñoz
abel.donate@estudiantat.upc.edu

Tabla de distribuciones discretas

Modelo	$p(X=k)$	$E[X]$	$Var[X]$	$G_X(z)$
Bernoulli $\sim Be(p)$	$\begin{cases} p(X=1)=p \\ p(X=0)=1-p \end{cases}$	p	$p(1-p)$	$(1-p)+pz$
Binomial $\sim Bin(N,p)$	$\binom{N}{k} p^i (1-p)^{N-k}$	Np	$Np(1-p)$	$((1-p)+pz)^N$
Uniforme $\sim U(1,N)$	$\frac{1}{N}$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\frac{1}{N}\frac{z(z^N-1)}{z-1}$
Poisson $\sim Po(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ	$e^{\lambda(z-1)}$
Geométrica $\sim Geom(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pz}{1-(1-p)z}$
Binomial negativa $\sim BinN(r,p)$	$\begin{cases} 0 & \text{si } k<r \\ \binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r} & \text{si } k\geq r \end{cases}$	$\frac{r}{p}$	$r\frac{1-p}{p^2}$	$\left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^r$

Tabla de distribuciones continuas

Modelo	$f_X(x)$	$E[X]$	$Var[X]$	$G_X(z)$
Uniforme $\sim U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}\mathbb{I}_{[a,b]}$	$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	1 en $t=0$, $\frac{e^{ibt}-e^{iat}}{it(b-a)}$
Exponencial $\sim Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0, \lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-it}$
Normal $\sim N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$e^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$
Gamma $\sim Gamma(\lambda,\tau)$	$\frac{\lambda^\tau}{\Gamma(\tau)}x^{\tau-1}e^{-\lambda x}, x>0, \lambda,\tau>0$	$\frac{\tau}{\lambda}$	$\frac{\tau}{\lambda^2}$	$\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-\tau}$
Beta $\sim Beta(\alpha,\beta)$	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, x\in[0,1]$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	Sin forma sencilla
Weibull $\sim Weibull(\alpha,\beta)$	$\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}e^{-(x/\beta)^\alpha}, x,\alpha,\beta>0$	$\beta\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$	$\beta^2\left[\Gamma(1+\frac{2}{\alpha})-\Gamma^2(1+\frac{1}{\alpha})\right]$	$\sum_{k\geq 0}\frac{(it)^k\beta^k}{k!}\Gamma(1+\frac{k}{\alpha})$
Cauchy $\sim Cauchy(\theta,\gamma)$	$\frac{1}{\pi\gamma}\frac{1}{1+(\frac{x-\theta}{\gamma})^2}, \gamma>0$	No definida	No definida	$e^{\theta it-\gamma\lvert t\rvert}$
χ^2_p	$\frac{1}{\Gamma(p/2)2^{p/2}}x^{\frac{p}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, x>0, p\in\mathbb{N}$	p	$2p$	$(1-2it)^{-\frac{p}{2}}$
Doble expon $\sim DobExp(\mu,\gamma)$	$\frac{1}{2\gamma}e^{-\frac{\lvert x-\mu\rvert}{\gamma}}, \gamma>0$	μ	$2\gamma^2$	$\frac{e^{\mu it}}{1+\gamma^2t^2}$
Lognormal $\sim LogN(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x,\sigma>0$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2(\mu+\sigma^2)}-e^{2\mu+\sigma^2}$	Sin forma sencilla

1 Espacio de probabilidad

Lemma (Desigualdades de Bonferroni).

$$p\left(\bigcup A_i\right)\begin{cases}\leq \sum p(A_i) \\ \geq \sum p(A_i)-\sum p(A_i\cap A_j) \\ \leq \sum p(A_i)-\sum p(A_i\cap A_j)+\sum p(A_i\cap A_j\cap A_k)\end{cases}$$

Definition (Probabilidad condicionada). *La probabilidad de A condicionada a B es*

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{p(B|A)p(A)}{p(B)}$$

Theorem (Bayes). *Sea $\{A_1,\dots,A_n\}$ un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos. Entonces si B es otro suceso:*

$$p(A_i|B)=\frac{p(B|A_i)p(A_i)}{\sum p(B|A_k)p(A_k)}$$

Borel-Cantelli

Definition (Límites superior e inferior). *Sea $\{A_n\}\in\mathcal{A}$ definimos los límites superior e inferior como*

$$\limsup A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k \qquad y \qquad \liminf A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$$

Proposition. *Sea $\{A_n\}$ sucesión.* $p(\lim A_n)=\lim p(A_n)=p(A)$

Theorem (Borel-Cantelli). *Sea $\{A_n\}$ una sucesión de eventos*

1. $\sum_{n\geq 1}p(A_n)<\infty\Rightarrow p(\limsup A_n)=0$
2. *Si $\{A_n\}$ independent y* $\sum_{n\geq 1}p(A_n)=\infty\Rightarrow p(\limsup A_n)=1$

---

2 Variables aleatorias

Definition (Esperanza). *Sea X una variable aleatoria y P_x su probabilidad asociada $P_x$se define la esperanza como*

$$E[X]=\int_\Omega Xdp=\int_{\mathbb{R}}xdP_x$$

Definition (Momento). *El momento de orden r de X es* $E[X^r]$

Definition (Varianza). $Var[X]=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-E[X]^2$

Definition (Covarianza). $Cov[X,Y]=E[(X-E[X])(Y-E[Y]j]=E[XY]-E[X]E[Y]$

Definition (Desviación típica). $\sigma(X)=\sqrt{Var[X]}$

Algunas propiedades de la esperanza y la varianza

- $E[a]=a$
- $E[aX+bY]=aE[X]+bE[Y]$
- $E[I_A]=p(A)$
- $|E[X]|\leq E[|X|]$
- $E[X^2]=\sum k^2p(x=k)$
- $Var[a]=0$
- $Var[a+X]=Var[X]$
- $Var[aX]=a^2Var[X]$
- $E[E[Y|X]]=E[Y]$
- X,Y independientes $\Rightarrow Var[X+Y]=Var[X]+Var[Y]$

Proposition. *Desigualdades*

- ***Hölder*** $E[|XY|]\leq E[|X|^p]^{\frac{1}{p}}E[|X|^q]^{\frac{1}{q}}\quad(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$
- ***Minkowsky*** $E[|X+Y|^p]^{\frac{1}{p}}\leq E[|X|^p]^{\frac{1}{p}}+E[|Y|^p]^{\frac{1}{p}}$

Theorem (Desigualdad de Markov). *Sea $X>0$ una variable aleatoria y $a\in\mathbb{R}^+$. Se cumple*

$$p(X\geq a)\leq\frac{E[X]}{a}$$

Theorem (Desigualdad de Chebyshev). *Sea X una variable aleatoria con $E[X]<\infty, Var[X]<\infty, Var[X]\neq 0, k>0$*

$$p(|X-E[X]|\geq kVar[X]^{\frac{1}{2}})\leq\frac{1}{k^2}$$

---

3 VA Discretas

Definition (Función generadora). *Asociamos a la variable aleatoria X la función generadora*

$$G_X(z)=\sum_{n\geq 0}p(X=n)z^n=E[z^X]$$

Las funciones generadoras satisfacen las siguientes propiedades

- $G_X(0)=p(X=0),\qquad G_X(1)=1$
- $E[X(X-1)\cdots(X-k+1)]=G^{(k)}(1)$
- $Var(X)=G''(1)+G'(1)-G'(1)^2$
- X,Y independientes $\Rightarrow G_{X+Y}=G_XG_Y$

Árboles de Galton Watson

$$G_{Z_n}=G_x\circ\cdots\circ\cdots G_X,\quad \mu=E[X],\quad \eta=P(ext)$$

- $E[Z_n]=E[X]^n$
- $Var[Z_n]=\begin{cases}nVar[X] & \text{si } E[X]=1 \\ Var[X]E[X]^{n-1}\frac{E[X]^n-1}{E[X]-1} & \text{otherwise}\end{cases}$
- $\eta=G(\eta)$

4 VA Continuas

Definition (Absolutamente continua). *μ_1 abs cont respecto μ_2 ($\mu_1 \ll \mu_2$) si*

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu_2(A) = 0 \Rightarrow \mu_1(A) = 0$$

Theorem (Radon-Nikodyn).

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu_1(A) = \int_A d\mu_1$$
$$\forall A \in \mathcal{B}, \quad P_X(A) = \int_A f_X d\lambda$$

Proposition. *En vectores de v.a.*

- *(X,Y) abs. cont. $\Rightarrow X,Y$ abs. cont.*
- *X,Y abs. cont. $\not\Rightarrow (X,Y)$ abs.cont.*

Proposition. *Si X,Y son independientes $\Rightarrow$ $f_{(X,Y)}(u,v) = f_X(u)f_y(v)$*

Definition (Esperanza y varianza).

$$E[(X,Y)] = (E[X], E[Y])$$
$$Var[(X,Y)] = \begin{pmatrix} Var[X] & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var[Y] \end{pmatrix}$$

Proposition. *X,Y indep $\Rightarrow Var[(X,Y)]$ diagonal*

Definition (Probabilidad condicionada). *Y condicionada a $X = x$*

$$F_{Y|X}(y,x) = \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(x,v)dv$$
$$E[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y,x)dy = \psi(x)$$

Definition (Marginal). *Si la fdp de (X,Y) es $f_{(X,Y)}$ las fdp marginales son f_X, f_Y*

Definition (Distribución normal).

$$N(\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Theorem (Moivre-Laplace).

$$p\left(a \le \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

Proposition. *Si $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ independientes $\Rightarrow X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$*

Definition (Distribución χ^2). *Sea $X_i \sim N(0,1)$ tenemos*

$$\chi_n^2 \sim X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \Gamma\left(\lambda = \frac{1}{2}, \tau = \frac{n}{2}\right)$$

Definition (Distribución de Fisher-Snedecor).

$$F \sim \frac{\chi_{d_1}^2/d_1}{\chi_{d_2}^2/d_2}$$

Definition (Distribución de Student).

$$t \sim \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi_k^2/k}}$$

Definition (Normal multivariante).

$$f_{\overline{X}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\overline{x}-\overline{\mu})^T\Sigma^{-1}(\overline{x}-\overline{\mu})}$$

Theorem (Descomposición normal). *Si $\overline{X}$ normal multivariante $\Rightarrow$ $\exists A$ no singular, b tal que $\overline{X} = A\overline{U} + \overline{b}$ con $U \sim N(0,1)$*

Proposition. $E[\overline{X}] = \overline{\mu}, \quad \Sigma_{ij} = Cov[X_i, X_j]$

Theorem. *$\overline{X} \sim N(\overline{\mu},\Sigma)$ y M matriz $m \times n$ con rango m. Sea $\overline{Y} = M\overline{X}$. Entonces*

$$\overline{Y} \sim N(M\overline{\mu}, M\Sigma M^T)$$

Definition (Esperanza muestral). $\hat{X} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$

Definition (Varianza muestral). $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum(X_i - \hat{X})^2$

Proposition. $E[\hat{X}] = \mu, Var[\hat{X}] = \frac{\sigma^2}{n}, E[S^2] = \sigma^2$

Theorem (Fisher). *Sean $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ indep. Entonces $\hat{X}, S^2$ indep. y*

$$\hat{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \qquad S^2 = \frac{n-1}{\sigma^2}\xi_{n-1}^2$$

Proposition. *Sea $\overline{X}$ absolutamente continua con $f_{\overline{X}}(x_1,\ldots,x_n)$. Sea $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^1$ biyectiva. Si $g(\overline{X}) = \overline{Y}$ encontramos $f_{\overline{Y}}$ de la siguiente forma:*

Sea $h := g^{-1}$:

$$f_{\overline{Y}}(y_1,\ldots,y_n) = f_{\overline{X}}(h(y_1,\ldots,y_n))|J_h(y_1,\ldots,y_n)|$$

---

5 Funciones características

Definition (Función generadora de momentos).

$$M_X(s) = E[e^{sX}] = \sum \frac{E[X^i]}{i!} s^i$$

La serie de potencias puede tener radio de convergencia 0

Propiedades

1. $Y = aX + b \Rightarrow M_Y(s) = e^{bs}M_X(as)$
2. $\frac{d^k}{ds^k}M_X(s)|_{s=0} = E[X^k]$
3. X,Y indep $\Rightarrow M_{X+Y}(s) = M_X(s)M_Y(s)$

Theorem (Chernoff). $X = \sum X_i, \quad X_i \sim Be(p_i)$

$$p(X \ge (1+\delta)\mu) \le e^{-\frac{\delta^2}{2+\delta}\mu}, \quad \delta \ge 0$$
$$p(X \le (1-\delta)\mu) \le e^{-\frac{\delta^2}{2}\mu}, \quad \delta \in (0,1)$$

Deducimos $p(|X-\mu| \ge \delta\mu) \le 2e^{-\frac{\delta^2}{3}\mu}$

Definition (Función característica).

$$\phi_X(t) = E[e^i tX] = \int_R e^{itx} f_X(x)dx$$

Theorem (Inversión).

$$P_X((a,b)) + \frac{P_X(a)+P_X(b)}{2} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi_X(t)dt$$

Propiedades de ϕ_X

1. $\varphi_X(0) = 1, \quad |\phi_X(t)| \le 1$
2. $\phi_X(t)$ unif cont
3. $\forall t_i \in \mathbb{R}\ \forall z_i \in \mathbb{C}, \sum \phi_X(t_j - t_k)z_j\overline{z}_k \ge 0$

Definition (Familias exponenciales). *parámetros $\overline{\theta} = (\theta_1,\ldots,\theta_n)$*

$$p(X,\overline{\theta}) = p(X|\theta) = g(x)e^{\sum\theta_i t_i(x) - c(\overline{\theta})}$$

Definition (Familia exponencial natural). $\exists k : t_k = x$

$$\phi_X(t) = e^{c(\theta_1+it,\ldots,\theta_n)-c(\overline{\theta})}$$

---

6 Convergencia

Definition (Tipos de convergencia). .

- *Casi-segura*

$$X_n \xrightarrow{qs} X \iff p(\{\omega\in\Omega : X_n(\omega) \xrightarrow{n} X(\omega)\}) = 1$$

- *En media de orden r*

$$X_n \xrightarrow{r} X \iff E[|X_n - X|^r] \xrightarrow{n} 0$$

- *En probabilidad*

$$X_n \xrightarrow{p} X \iff p(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n} 0$$

- *En distribución*

$$X_n \xrightarrow{d} X \iff F_{X_n}(x) \xrightarrow{n} F_X(x)\ \forall x \in \mathbb{R} : F_X \textit{ continua}$$

Si $r \ge s \ge 1$ tenemos

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & X_n \xrightarrow{qs} X \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
 & & X_n \xrightarrow{p} X \arrow[r, Rightarrow] & X_n \xrightarrow{d} X \\
X_n \xrightarrow{r} X \arrow[r, Rightarrow] & X_n \xrightarrow{s} X \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

Propiedades conv $X_n \xrightarrow{qs} X, Y_n \xrightarrow{qs} Y$

- $p(X = Y) = 1$
- $X_n + Y_n \xrightarrow{qs} X + Y$
- $X_nY_n \xrightarrow{qs} XY$
- $\forall c \in \mathbb{R}, cX_n \xrightarrow{qs} cX$
- $\forall g$ función continua, $g(X_n) \xrightarrow{qs} g(X)$

Theorem (Ley fuerte de los grandes números). *Sean $\{X_i\}$ independientes tal que $X_i \sim X$ con $E[|X|] < \infty$.*

$$E[X] = \mu, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad \Rightarrow \begin{cases} \frac{S_n}{n} \xrightarrow{qs} \mu \\ E\left[\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right)^2\right] = \frac{\sigma^2}{n} \end{cases}$$

Proposition. *$X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{d} \alpha \in \mathbb{R}$ entonces*

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + \alpha$$

Theorem (Representación de Skorokhod). *Sea $\{X_n\}$ con $X_n \xrightarrow{d} X$. Entonces existe un nuevo espacio de probabilidad $(\Omega', \mathcal{A}', p')$ donde definimos $\{Y_n\}$ tal que*

1. *$F_{X_n}(x) = F_{Y_n}(x)$ i $F_X(x) = F_Y(x)$ $\mu-$gairrebé arreu*
2. *$Y_n \xrightarrow{q-s} T$*

Proposition. *g continua $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$*

Theorem (Lévy). *$\{X_n\}$ con las características $\{\phi_n(t)\}$*

- *Si $X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow \phi_n(t) \xrightarrow{n} \varphi(t)$ puntualmente*
- *Si $\phi_n(t) \xrightarrow{n} \phi(t)$ puntualmente y $\phi(t)$ es continua en $t = 0 \Rightarrow \ \exists X : X_n \xrightarrow{d} X$*

Theorem (Límite central). *X_i identicamente distribuidas, $E[X_i] = \mu, Var[X_i] = \sigma^2$*

$$S_n = \sum X_i \quad \Rightarrow \quad \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$