a

Abel Doñate Muñoz
abel.donate@estudiantat.upc.edu

Contents

1 Electrostática

1.1 Triángulo eléctrico

Podemos relacionar las variables eléctricas E, V, ρ con las siguientes fórmulas

$$\begin{cases} \nabla \cdot E = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ E = -\nabla V \\ \nabla^2 V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \implies \begin{cases} E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int \dfrac{\hat{r}}{r^2} \rho d\tau \\ V = -\displaystyle\int E dr \\ V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int \dfrac{\rho}{r} d\tau \end{cases}$$

1.2 Dipolos

1.2.1 Puntual

Un dipolo puntual consta de dos cargas iguales y opuestas. Por simplicidad las ponemos en el eje z a una distancia de $\pm\frac{d}{2}$ del origen. Definimos $\boxed{\overline{p} = q\overline{d}}$ como el momento dipolar. Calculando el potencial y el campo en el punto $\overline{r}$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \approx \frac{\overline{p} \cdot \overline{r}}{4\pi\varepsilon_0} \implies \overline{E} = \frac{3\overline{p} \cdot \overline{r}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overline{r}}{r^5} - \frac{\overline{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

donde la aproximación es válida para $r \gg d$

1.2.2 Lineal

Un dipolo lineal consta de dos barras con carga uniforme y opuesta. Por simplicidad ponemos las barras a distancia $\frac{d}{2}$ del origen paralelas al eje z. Definimos $\boxed{\overline{\mathcal{P}} = \lambda\overline{d}}$. Calculamos el potencial y el campo en el punto $\overline{r}$

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{s_-}{s_+}\right) \approx \frac{\overline{\mathcal{P}} \cdot \overline{s}}{2\pi\varepsilon_0 s^2} \implies \overline{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2\overline{\mathcal{P}} \cdot \overline{s}}{s^4}\overline{s} - \frac{\overline{\mathcal{P}}}{s^2}\right)$$

1.3 Conductores

Theorem. *Propiedad electrostática de los conductores. Dentro de un conductor se cumple* $\boxed{\overline{E} = 0}$

Theorem. *Teorema de unicidad. Si se conoce V el una superficie que encierra una región y la distribución de cargas, entonces la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$ dentro de la región tiene una única solución*

1.4 Método de las cargas imagen

Bloque conductor

Tenemos una configuración con una carga q en la posición $h\hat{z}$ y un bloque conductor en $z \leq 0$. La carga inducirá una distribución de carga $\sigma_f$en la superficie del conductor, y entre q y la carga superficial se creará un campo eléctrico $\overline{E}$

Para resolver este problema aprovechamos el teorema de unicidad y planteamos una situación equivalente donde tenemos la carga q en $h\hat{z}$ y una carga ficticia $-q$ en $-h\hat{z}$. Observamos que:

1. El potencial en el plano $z = 0$ y en el infinito es el mismo en ambos problemas

2. La distribución de cargas en $z \geq 0$ es la misma en ambos problemas

Por tanto por el teorema de unicidad el potencial es el mismo en $z \geq 0$ en ambos problemas. Calcularemos $\overline{E}$ con la ley de Coulomb y la σ_f con el Teorema de Gauss en $z = 0 \implies \sigma f = \varepsilon_0 E_0$.

<u>Esfera conductora</u>
Si tenemos una esfera conductora bajo un campo eléctrico uniforme $E_0 \hat{z}$ la imagen será un dipolo puntual $\overline{p}_{IM}$ paralelo al campo tal que genere el mismo potencial en todos los puntos de la superficie de la esfera.

<u>Cilindro conductor</u>
Si tenemos un cilindro conductor bajo un campo eléctrico uniforme $E_0 \hat{z}$ perpendicular al eje del cilindro, la imagen será un dipolo lineal $\overline{\mathcal{P}}_{IM}$ paralelo al campo tal que genere el mismo potencial en todos los puntos de la superficie del cilindro.

2 Dieléctricos y medios polarizados

3 Medios polarizados

Definimos el momento dipolar por unidad de volumen $\boxed{\overline{P} = \frac{\sum \overline{p_i}}{d\tau}}$

En un medio polarizado con $\overline{P}$ se tienen dos densidades de carga que generan un potencial:

$$\begin{cases} \rho_b = -\nabla \cdot P \\ \sigma_b = P \cdot \hat{n} \end{cases} \implies \qquad V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho_b}{|r' - r|} d\tau + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma_b}{|r' - r|} da$$

3.1 Dieléctricos lineales

En un dieléctrico lineal se cumple $P = \varepsilon_0 \chi E_{tot} = \varepsilon_0 \chi (E_{ext} + E_{dep})$ donde E_{ext} es el campo externo dado y E_{dep} el campo creado por P (sentido contrario a P).

Cuando aplicamos un campo E_{ext} al dieléctrico lineal se crea un momento dipolar $\overline{P}$ que crea una distrbución de carga σ_b, ρ_b. Esta distribución de carga crea un campo opuesto a $\overline{P}$.

Dependiendo de la geometría del dieléctrico definimos γ tal que

$$E_{dep} = -\gamma \frac{\overline{P}}{\varepsilon_0} \implies \boxed{\overline{P} = \frac{\chi}{1 + \chi\gamma} \varepsilon_0 E_{ext}}$$

4 Campo de desplazamiento $\overline{D}$

Si ahora tenemos en cuenta las cargas libres en un dieléctrico, podemos definir el campo de desplazamiento como

$$\boxed{\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P}} \implies \begin{cases} \nabla \cdot D = \rho_f \\ \nabla \times D = \nabla \times P \end{cases}$$

En un dieléctrico lineal tenemos

$$\overline{D} = \chi \varepsilon_0 \overline{E} \implies \boxed{D = \varepsilon_r \varepsilon_0 \overline{E}} \text{ con } \varepsilon_r = 1 + \chi$$

4.1 Condensadores

5 Magnetostática

Podemos establecer la siguiente analogía con el campo eléctrico

Campo eléctrico	**Campo magnético**
$\overline{F_e} = q\overline{E}$	$\overline{F_m} = q_m\overline{B}$
$\overline{p} = q\overline{d}$	$\overline{m} = q_m\overline{d}$
$\overline{\Gamma} = \overline{p} \times \overline{E}$	$\overline{\Gamma} = \overline{m} \times \overline{B}$
$U = -\overline{p} \cdot \overline{E}$	$U = -\overline{m} \cdot \overline{B}$
$\overline{P} = \frac{\sum \overline{p}}{d\tau}$	$\overline{M} = \frac{\sum \overline{m}}{d\tau}$
$\rho_b = -\nabla \cdot \overline{P},\ \ \sigma_b = \overline{P} \cdot \hat{n}$	$\rho_m = -\nabla \cdot \overline{M},\ \ \sigma_m = \overline{M} \cdot \hat{n}$
$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho_b}{\lvert r' - r\rvert} d\tau + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma_b}{\lvert r' - r\rvert} da$	$\Xi(r) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m}{\lvert r' - r\rvert} d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma_m}{\lvert r' - r\rvert} da$
$\overline{E} = -\nabla V$	$\overline{H} = -\nabla \Xi$
$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P}$	$\overline{H} = \frac{\overline{B}}{\mu_0} - \overline{M}$
$\overline{E}_{dep} = -\gamma \frac{\overline{P}}{\varepsilon_0}$	$\overline{H}_{dep} = -\gamma \overline{M}$

6 Corriente

We begin with the definitions of Current density $\overline{J}$, average or drift velocity $\langle v \rangle = \overline{v}_{drift}$

$$\overline{J} = -e\frac{\sum \overline{v_1}}{d\tau} = -en\overline{v}_{drift} \qquad v_{drift} = \frac{\sum \overline{v}_i}{\delta N} \qquad \text{con } n = \frac{dN}{d\tau}$$

Theorem (Continuity equation). $\nabla \cdot JJ + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

6.1 Currents of free and bound charges

$J = J_f + J_b$ with $\nabla \cdot J_i + \partial_t \rho_f = 0$

Note that in steady conditions $J_b = 0 \implies \nabla \cdot J_f = 0 \implies J_{f,1} \cdot \hat{n} = J_{f,2} \cdot \hat{n}$

We found for the bound charge $\boxed{J_b = \frac{\partial P}{\partial t}}$

6.2 Ohm's law

$J_f = gE \implies \Delta V = IR$ con $G = R^{-1} = \frac{gA}{l}$

6.3 Laws for magnetism and current

Biot-Savart Law $\boxed{B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I d\bar{l} \times \frac{\overline{r} - \overline{r'}}{\lvert \overline{r} - \overline{r'} \rvert^3}}$

Ampere's Law $\boxed{\nabla \times \overline{B} = \mu_0 \overline{J} \iff \oint \overline{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I}$

6.4 Analogy Electric and Magnetic circuits

Electric Circuit	Magnetic Circuits
$\mathcal{E} = \int \overline{E} \cdot d\bar{l}$	$\mathcal{M} = \int \overline{H} \cdot d\bar{l}$
$\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$	$\begin{cases} \text{Generated by coil } \mathcal{M} = NI \\ \text{Generated by magnet } \mathcal{M} = ML \end{cases}$
$I = \iint_S \overline{J} \cdot d\overline{a}, \quad I = JA$	$\Phi = \iint \overline{B}_i \cdot d\overline{a} \quad \Phi = BA$
$J = gE$	$B = \mu_0 \mu_r H$
$\mathcal{E} = RI$	$\mathcal{M} = R\Phi$
$R = \dfrac{l}{gA}$	$R = \dfrac{l}{\mu_0 \mu_r A}$