1 Ceros de ecuaciones y sistemas no lineales

1.1 Ecuaciones en una variable

Existen los siguientes métodos

Método	*Iteración*	*Orden de convergencia*
Bisección	$I_{k+1} = \begin{cases} (a_k, x_k) & \text{si } f(a_k)f(x_k) < 0 \\ (x_k, b_k) & \text{si } f(a_k)f(x_k) > 0 \end{cases}$	Lineal
Secante	$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\dfrac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$	No siempre, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Regula falsi	Secante + Bisección	Convergente más lenta que secante, lineal
Newton	$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ $x_{k+1} = x_k - Df(x_k)^{-1}f(x_k)$	$\begin{cases} f \in \mathcal{C}^2 \\ f'(x), f''(x) \neq 0 \\ c : \lvert f'(x)\rvert \text{ es menor } \Rightarrow \lvert\frac{f(c)}{f'(c)}\rvert \leq b - a \\ \text{orden } 2 \end{cases}$

Theorem (Punto fijo). *Sea $g : I = [a, b] \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$ tal que:*

- $g(I) \subseteq I$
- $|g'(x)| \leq L < 1 \quad (\Rightarrow |g(x) - g(x')| \leq L|x - x'|,\ L < 1)$

Entonces $\exists! s : f(s) = s$ y $\forall x_0$ la sucesión $x_k = g(x_{k-1})$ converge a s

Además se cumple $|x_k - s| \leq \dfrac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \quad y \quad |x_k - s| \leq \dfrac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|$

Definition (Orden de convergencia). *La sucesión $(x_k) \to \alpha$ tiene orden de convergencia p si existen $N \geq 0, C > 0$ tal que:*

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|^p \ \forall k \geq N$$

Si existe el límite $L = \lim \dfrac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^p}$ la sucesión tendrá orden de convergencia al menos p

$$\text{Orden } p \iff G(\alpha) = \alpha,\ G'(\alpha) = 0, \ldots,\ G^{(p-1)}(\alpha) = 0,\ G^{(p)}(\alpha) = Cp!$$

1.2 Aceleración de la convergencia

Definition. $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \quad \Delta^2 x_k = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k$

Definition (Aceleración de Aitken). *Consideramos la recta que pasa por la pareja de puntos $(x_k, \Delta x_k), (x_{k+1}, \Delta x_{k+1})$ y hacemos $y = 0$. Tenemos la sucesión*

$$x'_k = x_k - \frac{(\Delta x_k)^2}{\Delta^2 x_k}$$

Si (x_k) es al menos lineal (x'_k) converge más rápidamente a s que (x_k)

Definition (Aceleración de Steffensen). *Dada una g que queremos calcular su punto fijo. Orden $p \to 2p - 1$*

$$G(x) = x - \frac{(g(x) - x)^2}{g(g(x)) - 2g(x) + x}$$

1.3 Sistemas de ecuaciones no lineales

Theorem (Punto fijo). *Sea $T \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y $G : T \to \mathbb{R}^n$ tal que*

- $G(T) \subseteq T$
- $\exists L < 1$ *tal que* $\|G(x_2) - G(x_1)\| \leq L\|x_2 - x_1\| \ \forall x_1, x_2 \in T$

Entonces existe un único punto fijo $G(s) = s$ y la sucesión $x_k = G(x_k)$ converge a s. Además $\|x_k - s\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|x_1 - x_0\| \quad y \quad \|x_k - s\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_k - x_{k-1}\|$

1.4 Ceros de polinomios

Definition (Deflación). *Cuando obtenemos un cero $p(\alpha) \approx 0$ hacemos la división por la raíz para seguir encontrando ceros del nuevo polinomio $q(x)$ con $p(x) = (x - \alpha)q(x) + p(\alpha)$*

Theorem (Regla de Laguerre). *Sea $p(x)$ un polinomio.*

$$p(x) = (x - L)(b_0 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}) + b_n$$

Si $b_i \geq 0$ entonces L es cota superior de las raíces reales de $p(x)$

Theorem (Regla de Newton). *Sea $p(x), L \in \mathbb{R}$ tal que $p(L), p'(L), \ldots, p^{(n)} > 0$*
Entonces L es cota superior de las raíces reales de $p(x)$

Sea el polinomio $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ y z una de sus raíces. Se cumplen los dos siguientes teoremas

Theorem (Regla de Lagrange).

$$|z| \leq \max\left\{1, \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{a_i}{a_0}\right|\right\}$$

Theorem (Regla de Cauchy).

$$|z| \leq 1 + \max\left\{\left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \left|\frac{a_2}{a_0}\right|, \ldots, \left|\frac{a_n}{a_0}\right|\right\}$$

Definition (Matriz de Frobenius). *La matriz acompañante o de Frobenius es*

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es $\det(C(p) - zI) = (-1)^n p(z)$, por lo que sus VAPs son las raíces de $p(z)$

En ambos métodos tenemos el siguiente caso: Sea el polinomio mónico $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$ y z_i aproximaciones de sus n ceros. El objetivo es encontrar las correcciones Δz_i tal que las nuevas aproximaciones sean $z'_i = z_i + \Delta z_i$.

Método de Durand-Kerner
Desarrollamos la expresión y despreciamos los términos de grado ≥ 2 de Δz_i

$$p(z) = \prod(z - z'_i) = \prod(z - (z_i + \Delta z_i)) = \prod(z - z_i) - \sum\left(\Delta z_j \prod_{k \neq j}(z - z_k)\right)$$

Imponemos $z = z_i$ para $i = 1, \ldots, n$

$$-\Delta z_i \prod_{k \neq i}(z_i - z_k) = p(z_i) \Rightarrow \boxed{z'_i = z_i - \frac{p(z_i)}{\prod_{k \neq i}(z_i - z_k)}}$$

Notas:

- Convergencia cuadrática (igual a Newton)
- En la primera aproximación todos los z_i deben ser diferentes

.

Método de Ehrlich-Aberth
Consideramos las funciones racionales tal que $R(\alpha_i) = 0$ y le aplicamos Newton

$$R_i(z) = -\frac{p(z)}{\prod_{k\neq i}(z - z_k)} \quad \Rightarrow \quad z_i' = z_i - \frac{R_i(z_i)}{R_i'(z_i)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta z_i = \frac{p(z_i)}{p'(z_i) - p(z_i)\sum_{k\neq i}\frac{1}{z_i - z_k}}}$$

Notas:

- Convergencia cuadrática si el resto de z_i no se mueven
- Convergencia cúbica si se mueven todas las z_i a la vez

2 Interpolación de funciones

Definition (Interpolación). *Dado un conjunto de puntos (x_k, y_k) hemos de encontrar una función f tal que $f(x_k) = y_k$*

2.1 Interpolación polinómica

Theorem (Existencia y unicidad). *Existe un único polinomio $p(x)$ con grado $\leq n$ que interpola $n+1$ puntos.*

Theorem (Error de interpolación). *Sea $f \in C^{n+1}(a,b)$ y $p(x)$ su polinomio interpolador en (x_k). Entonces el error de interpolación es*

$$|f(x) - p(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\eta(x))}{(n+1)!}(x - x_0)\cdots(x - x_n), \qquad \textit{con} \quad \eta(x) \in (\min(x_k), \max(x_k))$$

2.2 Interpolación de Lagrange

Definimos unas funciones $l_k(x)$ tal que $l_k(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ si } j \neq k \end{cases}$

$$\boxed{p(x) = \sum y_k l_k(x)}, \qquad \text{donde} \qquad l_k = \frac{\prod_{i\neq k}(x - x_i)}{\prod_{i\neq k}(x_k - x_i)}$$

2.3 Interpolación de Newton

Sea el polinomio interpolador $p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})$ Imponiendo que $p(x)$ interpola tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & & \dots & & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & & & \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & x_n - x_0 & \dots & \dots & \prod_{j=0}^{n-1}(x_n - x_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \\ \vdots \\ \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \\ \vdots \\ \\ y_n \end{pmatrix}$$

Definimos una operación "diferencia dividida" recursivamente:

$$f[x_0, \dots, x_{k+1}] = \frac{f[x_1, \dots, x_{k+1}] - f[x_0, \dots x_k]}{x_{k+1} - x_0} \quad \text{y} \quad f[x_i] = y_i$$

Entonces se cumple que $\boxed{c_k = f[x_0, \dots, x_k]}$

2.4 Chebyshev

Definition (Polinomio de Chebyshev). $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ *cumple* $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$

Theorem (Abcisas de Chebyshev). *La mejor elección de puntos $y_0, \dots, y_n \in [-1, 1]$ tal que $\max|(y - y_0)\dots(y - y_n)|$ sea mínima viene dada por las raíces del polinomio de Chebyshev de grado $n+1$ y vale $\frac{1}{2^n}$*

2.5 Interpolación de Hermite

Queremos un polinomio que coincida con la función y su derivada en $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ y $(x_0, y_0'), \dots, (x_m, y_m')$

$$H_{2m+1}(x) = \sum y_i \varphi_i(x) + \sum y_i' \psi_i(x) \qquad \text{con} \begin{cases} \varphi_i(x) = (1 - 2l_i'(x_i)(x - x_i))l_i^2(x) \\ \psi_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x) \end{cases}$$

El error de esta interpolación viene dado por

$$f(x) - H_{2m+1}(x) = \frac{f^{2m+2}\eta(x)}{(2m+2)!}(x - x_0)^2 \cdots (x - x_m)^2 \qquad \text{con} \qquad \eta(x) \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$$

Podemos calcular los coeficientes de manera similar a Newton definiendo $f[x_i, x_i] = f'(x_i)$

$H_{2m+1} = f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + \cdots + f[x_0, x_0, \dots, x_m, x_m](x - x_0)^2(x - x_1)^2 \cdots (x - x_m)$

2.6 Interpolación Spline

Definition (Función spline). *Dados los puntos $\{(x_i, y_i)\}$ la función $s(x)$ de grado p es spline si*

1. *$s(x_i) = y_i$*
2. *En cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $s(x)$ es un polinomio de grado p*
3. *$s(x) \in \mathcal{C}^{p-1}$*

Cúbicas naturales $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$

$$\begin{cases} s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i) = y_i \\ s_{i-1}' = s_i'(x_i) \\ s_{i-1}'' = s_i''(x_i) \end{cases} \quad , \quad B_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - (M_{i+1} - M_i)\frac{h_i}{6} - M_i\frac{h_i}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{s_i(x) = \frac{M_{i+1} - M_i}{h_i}\frac{(x - x_i)^3}{6} + M_i\frac{(x - _i)^2}{2} + B_i(x - x_i) + A_i}$$

2.7 Interpolación trigonométrica

Definition (Interpolacion trigonométrica).

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=-M}^{M} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad \begin{cases} c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f(x_j) \\ a_k = c_k + c_{-k} = \frac{2}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\cos(jhk) \\ b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{2}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\sin(jhk) \end{cases}$$

3 Aproximación de funciones

Theorem (Aproximación continua)**.** *Dado* $I, F_n = f_n = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$ *l.i., se cumple*

$$\exists! f_n^* = \sum a_j^* \varphi_j(x) \text{ que minimiza } \|f - f_n\|_2 \text{ en } F_n$$

En el caso general resolvemos $\boxed{(\langle\varphi_j, \varphi_i\rangle)a^* = (\langle f, \varphi_i\rangle)}$, si F_n es ortogonal $\boxed{a_j^* = \dfrac{\langle\varphi_j, f\rangle}{\langle\varphi_j, \varphi_j\rangle}}$

Theorem (Gram-Schmidt)**.** *Dada la base* $\{\varphi_i\}$ *construimos la base ortogonal* $\{\psi_i\}$

$$\psi_0 = \varphi_0, \quad \psi_1 = \varphi_1 - \frac{\langle\varphi_1, \psi_0\rangle}{\langle\psi_0, \psi_0\rangle}\psi_0, \quad \psi_n = \varphi_n - \frac{\langle\varphi_n, \psi_0\rangle}{\langle\psi_0, \psi_0\rangle}\psi_0 - \cdots - \frac{\langle\varphi_n, \psi_{n-1}\rangle}{\langle\psi_{n-1}, \psi_{n-1}\rangle}$$

Definition (Familia ortogonal de polinomios)**.** A_j *es el coeficiente dominante de* ψ_j

$$\begin{cases} \psi_0 = A_0 \\ \psi_{j+1} = \alpha_j(x - \beta_j)\psi_j - \gamma_j\psi_{j-1} \end{cases} \quad \text{donde} \begin{cases} \alpha_j = \frac{A_{j+1}}{A_j}, \quad \gamma_0 = 0 \\ \beta_j = \frac{\langle\psi_j, x\psi_j\rangle}{\langle\psi_j, \psi_j\rangle} = \frac{\langle\psi_j, x\psi_j\rangle}{\alpha_j} \\ \gamma_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_{j-1}} \frac{\langle\psi_j, \psi_j\rangle}{\langle\psi_{j-1}, \psi_{j-1}\rangle} = \frac{\alpha_j}{\alpha_{j-1}} \frac{\langle\psi_j, \psi_j\rangle}{\langle\psi_{j-1}, \psi_{j-1}\rangle} \end{cases}$$

Definition (Polinomios de Legendre)**.** *Familia ortogonal en* $I = [-1, 1]$ *con* $w(x) = 1$

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2 - 1)^n), \qquad \langle P_n, P_n\rangle = \frac{2}{2n+1} \qquad \begin{cases} \alpha_j = \frac{2j+1}{j+1} \\ \beta_j = 0 \\ \gamma_j = \frac{j}{j+1} \end{cases}$$

Otros tipos de bases ortogonales

- Chebyshev $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad I = [-1, 1]$
- Hermite $w(x) = e^{-x^2}, \quad I = (-\infty, \infty)$
- Generalizados de Legendre $w(x) = x^\alpha e^{-x}, I = (0, \infty)$

Definition (Aproximación trigonométrica)**.**

$$f_n^*(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum(a_j^* \cos(jx) + b_j^* \sin(jx)) \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_0^* = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_j^* = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(jx)dx \\ b_j^* = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(jx)dx \end{cases}$$

4 Derivación e integración numéricas

Definition (Derivación)**.**

$$\text{Hacia adelante} \quad f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2!}h \qquad \xi \in [a, a+h]$$

$$\text{Centrada} \quad f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2 \cdot 3!}h^2 \qquad \xi_1, \xi_2 \in [a, a+h]$$

Definition (Método 1)**.**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum y_k l_k(x)dx = \sum y_k \overbrace{\int_a^b l_k(x)dx}^{w_k(x)}$$

Definition (Formula de Simpson)**.**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} s(t)dt \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2} + f(b)\right]$$

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(c-h) + 4f(c) + f(c+h)] \quad E = \frac{-h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

Definition (Formula general error integración interpolativa)**.**

$$E = \int_a^b \frac{f^{(m+1)}(\xi}{(m+1)!}(x - x_0)\cdots(x - x_m)dx$$

Fórmulas de Newton-Cortes

m	Método	Integral	Error
$m = 1$	Trapecio	$\frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$	$\frac{h^3}{12}f''(c), \quad h = b - a$
$m = 2$	Simpson	$\frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$	$\frac{h^5}{90}f^{(4)}(c), \quad h = \frac{b-a}{2}$
$m = 3$	Regla 8/3	$\frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$	$\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(c), \quad h = \frac{b-a}{3}$

Definition (Fórmula trapecios compuesta)**.** $h = \frac{b-a}{N}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + \cdots + 2f(b-h) + f(b)], \qquad E = \frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi)$$

Definition (Fórmula compuesta de Simpson)**.** $h = \frac{b-a}{N}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \cdots + 4f(b-h) + f(b)], \qquad E = \frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi)$$

Definition (Integración gaussiana)**.**

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \int_a^b P_m(x)w(x)dx = \sum\left(\overbrace{\int_a^b l_i(x)w(x)dx}^{\tilde{w}_i}\right)y_i, \qquad E = \frac{1}{A_{m+1}^2(2m+2)!}f^{2m+2}(\xi)\langle\psi_{m+1}, \psi_{m+1}\rangle$$

Theorem (Ceros de elemento de base ortogonal)**.** *Sea* $w(x)$ *continua positiva en* $(a, b]$*. Sea* $\varphi_m(x)$ *el polinomio ortogonal de grado* m *respecto del producto escalar con* w*. Entonces* φ_m *tiene* m *ceros simples en* $[a, b]$

Además si f *es un polinomio de grado* $\leq 2m + 1$ *la integración gaussiana es exacta con los puntos tomados en los ceros de* $\varphi_{m+1}(x)$

Definition (Formula del error de Gauss-Legendre)**.**

$$E_{m+1}(f) = \frac{(b-a)^{2m+3}(m+1)!^4}{(2m+3)(2m+2)!^3}f^{(2m+2)}(\xi)$$

Definition (Extrapolacion de Richardson)**.** *Sea* $F(h) = v + a_1h^{p_1} + a_2h^{p_2} + \ldots$

$$F_2(h) = \frac{q^{p_1}F_1(h) - F_1(qh)}{q^{p_1} - 1} = v + a_2^{(2)}h^{p_2} + \ldots$$

5 Métodos numéricos para EDOs

Definition (Problema de Cauchy)**.** $\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Definition (Método de integración de un paso).

$$\begin{cases} y_0 = y(a) \\ y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h) \end{cases} \qquad con \quad |\Phi(x,y,h) - \Phi(x,\overline{y},h)| \leq L|y - \overline{y}|$$

Definition (Orden del error). *Un método de integración tiene orden global p si*

$$\mathcal{O}(h^p) \iff e_n \leq kh^p \qquad con \qquad e_n = |y(x_n) - y_n|$$

Definition (Método de Euler). $\mathcal{O}(h)$ *(método de Taylor de orden 1)*

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

Definition (Método de Taylor). *Tenemos en cuenta* $y''(x_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)f(x_0, y_0)$

$$y(x) \approx y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) + y''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!}$$

Definition (Métodos de Runge-Kutta).

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^k c_i k_i^n \end{cases} \quad con \begin{cases} k_1^n = f(x_n, y_n) \\ k_i^n = f(x_n + a_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j^n \end{cases} \quad con\ c_i, a_i, b_{ij}\ a\ determinar$$

Definition (Método multipaso de paso k).

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{n+1} = \sum_{i=i}^k \alpha_i y_{n+1-i} + h\sum_{i=0}^k \beta_i f(x_{n+1-i}, y_{n+1-i} \end{cases} \qquad con\ \alpha_i, \beta_i\ por\ determinar$$

Si $\beta_0 = 0$ *tenemos el método* ***Adams-Bashforth****. Si*$\beta_0 \neq 0$ *tenemos el método* ***Adams-Moulton***

Definition (Sistemas de ecuaciones de EDOs).

$$\begin{cases} Y'(x) = (f^1(x, y^1(x), \dots, y^m(x)), \dots, f^m(x, y^1(x), \dots, y^m(x)))^T \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

Definition (Métodos de Adam-Bashforth). $y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \overbrace{f(x_n, y_n)}^{p(x)} dx$. *Orden* $\mathcal{O}(h^k)$

- $K = 1 \Rightarrow \Phi = f(x_n, y_n)$
- $K = 2 \Rightarrow \Phi = \frac{1}{2}(3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1}))$
- $K = 3 \Rightarrow \Phi = \frac{1}{12}(23f(x_n, y_n) - 16f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 5f(x_{n-2}, y_{n-2}))$
- $K = 4 \Rightarrow \Phi = \frac{1}{24}(55f(x_n, y_n) - 59f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 37f(x_{n-2}, y_{n-2}) - 9f(x_{n-3}, y_{n-3}))$

Definition (Métodos de Adam-Moulton). $y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \overbrace{f(x_n, y_n)}^{p(x)} dx$. *Orden* $\mathcal{O}(h^k)$

- $K = 1 \Rightarrow \Phi = \frac{1}{2}(f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n))$
- $K = 2 \Rightarrow \Phi = \frac{1}{2}(5f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 8f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1}))$
- $K = 3 \Rightarrow \Phi = \frac{1}{24}(9f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 19f(x_n, y_n) - 5f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2}))$