Sistemas lineales homogéneos $\dot{x} = A(t)x$

$$x = e^{At}c = Pe^{Dt}P^{-1}c = M(t)c = M(t)M(t_0)^{-1}x(t_0)$$

Sistemas lineales no homogéneos $\dot{x} = A(t)x + b(t)$

$$x = x_h + x_p, \qquad x_p = M\int_{t_0}^{t} M(s)^{-1}b(s)ds$$

VAP real $\lambda_i \Rightarrow x = e^{\lambda_i t}v_i$

VAP complejo $\lambda = \alpha \pm \beta,\ v = u \pm wi$

$$\begin{cases} x_1 = e^{\alpha t}(u\cos(\beta t) - w\sin(\beta t)) \\ x_2 = e^{\alpha t}(u\sin(\beta t) + w\cos(\beta t)) \end{cases}$$

Matriz exponencial del bloque de Jordan

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1} \\ & 1 & \cdots & \frac{1}{(k-2)!}t^{k-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix} e^{t\lambda}$$

Cálculo en caso de Jordan

$$u \in Ker(A-\lambda I)^2 \Rightarrow (A-\lambda I)u = v$$
$$v \in Ker(A-\lambda I) \Rightarrow Av = \lambda v$$
$$x_1 = ue^{\lambda t} + vte^{\lambda t}, \quad x_2 = ve^{\lambda t}$$

Definition (Estabilidad). *Sea $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ con $\gamma(t), \tilde{\gamma}$ decimos que el sistema es:*

- ***Estable.*** *$\forall t_0, \varepsilon > 0\ \exists \varepsilon : \|\gamma(t_0) - \tilde{\gamma}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\| < \varepsilon\ \forall t \geq t_0$*
- ***Asintóticamente estable.*** *Estable y $\forall t_0\ \exists \varepsilon > 0 : \|\gamma(t_0) - \tilde{\gamma}(t_0)\| < \varepsilon$ para algún $t_0 \Rightarrow \lim \|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\| = 0$*
- ***Inestable.*** *Si no es estable*

Theorem (Estabilidad según espectro). *Sea el sistema $\dot{x} = Ax$ estudiamos la estabilidad de la solución $x = 0$*

1. *Si $Spec(A) \subseteq \{\Re(z) < 0\} \Rightarrow$ Asintóticamente estable*
2. *Si $\exists \lambda \in Spec(A) : \Re(\lambda) > 0 \Rightarrow$ Inestable*
3. *Si $Spec(a) \subseteq \{\Re(z) \leq 0\}$ y $Spec(A) \cap \{\Re(z) = 0\} \neq \emptyset$ y las cajas de Jordan de A con VAPs $\Re(\lambda) = 0$ tienen tamaño $1 \Rightarrow$ Estable pero no Asintóticamente estable*
4. *El resto de casos $\Rightarrow$ Inestable*

Ecuaciones diferenciales de orden n

$$a_n(t)x^{(n)} + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0x(t) = f(x)$$

Wronskiano. Sean $y_1, \ldots, y_n$ soluciones de EDO

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$W'(t) = -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}W(t)$$

Si x_1 es solución de la homogénea, otra solución es

$$x_2(t) = x_1(t)\int \frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{x_1(t)^2}dt$$

Fórmula de Liouville $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$, Φ matriz

$$\det(\Phi(t)) = \det(\Phi(t_0))e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds}$$

Variación de constantes $x_p = \sum u_j x_j$, x_j cada homogénea

$$u_j = \int_{t_0}^{t} \frac{W_j(s)}{W(s)}ds, \quad W_j: \text{ columna } j \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Sistemas periódicos

$A(t)$ T-peródica, $\Phi(t)$ matriz fundamental

$\Phi(t+T)$ también fundamental
$M = \Phi(0)^{-1}\Phi(T)$ matriz monodromía
$\Phi(t+T) = \Phi(t)M$

Theorem (Estabilidad de sistema $T-perdico$). *Sea M la matriz de monodromía de $\dot{x} = A(t)x$. Entonces*

1. *Si $Spec(M) \subseteq D \Rightarrow$ asintóticamente estable*
2. *Si $Spec(M) \subseteq S$ y M diagonaliza $\Rightarrow$ estables, pero no asintóticamente estables*
3. *Si $Spec(M) \not\subseteq \overline{D}$ o no diagonaliza $\Rightarrow$ inestables*

Theorem (Floquet). *Sea A $T-$periódica y M la matriz de monodromía de $\dot{x} = Ax$. Sea $B : e^{TB} = M$. Entonces existe $P(t)$ $T-$periódica tal que $P(t)e^{tB}$ es matriz fundamental del sistema*

$$x = P(t)y \text{ transforma } \dot{x} = Ax \text{ en } \dot{y} = By$$

VAPs de la matriz de monodromía

$$\Pi\lambda_i = e^{\int_0^T tr(A(t))dt}$$

Retratos de fase $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Si $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
   - Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ Nodo repulsor
   - Si $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ Nodo atractor
   - $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \Rightarrow$ Sella
2. $\lambda = a \pm bi$
   - Si $a > 0 \Rightarrow$ Foco repulsor
   - Si $a < 0 \Rightarrow$ Foco atractor
   - Si $a = 0 \Rightarrow$ Foco

Si $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow$ Recta horizontal

Si $\lambda_1, \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ Recta

1 Teoremas fundamentales

En toda la sección problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \mathcal{F}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

Theorem (Arzela-Ascoli). *Son equivalentes:*

1. *La familia $\mathcal{F}$ es puntualmente acotada y equicontinua en K*
2. *De cada sucesión de elementos de $\mathcal{F}$ se puede extraer una parcial uniformemente convergente*

Theorem (Picard). *Dados*

- *$t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n, a, b > 0$*
- *$V_{a,b} = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0)$ compacto*
- *$f : V_{a,b} \to \mathbb{R}^n$ continua y $x-$Lipschitz*
- *$M \geq \|f\| = \max_{(t,x)\in V} \|f(t,x)\|$.*

El pvi tiene solución única $\varphi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^n$ con $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

Proposition. *Sean $I = [a,b]$ compacto, $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y $x-$Lipschitz. Entonces para cualquier x_0, t_0 el pvi tiene una única solución.*

Proposition. *Sea $f : (a,b) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, $x-$Lipschitz. Entonces para cualquier $t_0 \in (a,b), x_0 \in \mathbb{R}^n$ el pvi*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^n$

Theorem (Peano). *Dados*

- *$t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n, a, b > 0$*
- *$V_{a,b} = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0)$ compacto*
- *$f : V_{a,b} \to \mathbb{R}^n$ continua*
- *$M \geq \|f\| = \max_{(t,x)\in V} \|f(t,x)\|$.*

El pvi tiene al menos una solución $\varphi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^n$ con $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

Definition (Solución maximal). *La solución φ es maximal en I si para cualquier otra solución $\tilde{\varphi}$ definida en $\tilde{I}$ tal que $I \subseteq \tilde{I}$, $\varphi = \tilde{\varphi}|_I$*

Theorem. *Sean $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ continua. Si φ es maximal única de $\dot{x} = f(t,x)$ en el intervalo maximal (ω_-, ω_+), entonces*

$$(t, \varphi(t)) \xrightarrow[t\to\omega_\pm]{\partial} U$$

$\forall K \subseteq U$ compacto existen entornos $V_\pm$ de $\omega_\pm$ tal que $\varphi(t) \notin K$ si $t \in V_\pm \cap (\omega_-, \omega_+)$

Definition (Flujo de la EDO). *Sea $\tilde{U} = \{(t, t_0, x_0, \lambda) \in \mathbb{R}^{1+1+n+p} : (t_0, x_0, \lambda) \in U, t \in (\omega_-(t_0, x_0, \lambda), \omega_+(t_0, x_0, \lambda)\}$ La aplicación $\varphi : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ es el flujo*

Theorem. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^{1+1+n+p}$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ continua. Si el pvi tiene solución maximal $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ en el intervalo $I = (\omega_i(t_0, x_0, \lambda), \omega_+(t_0, x_0, \lambda))$ entonces $\tilde{U}$ es abierto y $\varphi : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ es continua.*

Theorem (Lema de Grönwall). *Sean $u, v : [a,b] \to [0, \infty)$ continuas. Suponemos que existe α tal que*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds \quad \Rightarrow \quad u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}$$

Proposition. *Sea U abierto, f continua y $L-$Lipschitz en x. Entonces*

$$\|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, \tilde{x}_0)\| \leq e^{L|t-t_0|}\|x_0 - \tilde{x}_0\|$$

Theorem. *$M(t) = (\frac{d\varphi}{dx})|_{(t,s,x,\lambda)}$ es la única solución del pvi*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}M(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t,s,x,\lambda), \lambda)M(t) \\ M(s) = Id \end{cases}$$

2 Teoría cualitativa

Definition (Punto singular). *p es un punto singular de $\dot{x} = f(x)$ si $f(p) = 0$*

Proposition. *$\phi(t) = p$ es solución de $\dot{x} = f(x) \iff p$ punto singular de f. Además $\mathcal{O}(p) = \{p\}$*

Definition (Órbita periódica). *$\mathcal{O}(p)$ de $\dot{x} = f(x)$ es periódica si la solución por p e periódica.*

Proposition. *Sea $\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon)$ con g T-periódica respecto t. Suponemos $\exists p : f(p) = 0$. Entonces si $\frac{2k\pi i}{T} \notin spec(Df(p)) \Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall |\varepsilon| < \varepsilon_0$ el sistema tiene solución T-periódica $\gamma(t, \varepsilon)$ y $\|\gamma(t, \varepsilon) - p\| \leq K|\varepsilon|$*

Definition (Flujo).

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi(t, \tau, x) = f(t, \varphi(t, \tau, x)) \\ \varphi(\tau, \tau, x) = x \end{cases}$$

Theorem (Flujo con volumen fijo). *Si consideramos $\nabla_x \cdot f(t,x) = Tr(\frac{df}{dx}(t,x)) = 0$, entonces φ preserva el volumen, es decir*

$$mesura(A) = mesura(\varphi_{t,\tau,A})$$

Definition (Estabilidad). *Liapunov*

- *φ estable. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :$ si ψ solución también y $\|\varphi(0) - \psi(0)\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \psi(t)\| < \varepsilon$*
- *φ asintóticamente estable. Estable y $\exists \delta > 0 :$ si $\|\varphi(0) - \psi(0)\| < \delta \Rightarrow \lim \|\varphi(t) - \psi(t)\| = 0$*

Theorem. *Suponemos que $\forall \delta\ \exists \rho :$ si $x \in B_\rho \Rightarrow \|g(t,x)\| < \delta\|x\|$ Consideramos*

$$\dot{x} = Ax + g(t,x)$$

Si todos los VAPS de A tienen parte real negativa, la solución $\psi(t) = 0$ es asintóticamente estable.

Definition (Función de Liapunov). *p punto singular de f. $\tilde{U} \subseteq U$ entorno de p. La función $V : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ diferenciable es de Liapunov si*

1. *$V(p) = 0, V(x) > 0$ si $x \neq p$*
2. *$\dot{V}(x) \leq 0\ \forall x \in \tilde{U}$ (estricta si $\leq$)*

Theorem. *p punto singular de $\dot{x} = f(x)$. Si existe función de Liapunov, entonces p es estable. Si la función es estricta, entonces p es asintóticamente estable.*

Definition (Integral primera). *Sea $\varphi(t,x)$ el flujo de $\dot{x} = f(x)$. La función $I : U \to \mathbb{R}$ es integral primera del sistema si*

$$\frac{d}{dt}(I \circ \varphi)(t,x) = 0$$

Proposition. *I es integral primera de $\dot{x} = f(x) \iff$*

$$DI(x)f(x) = 0 \; \forall x \in U$$

Definition (Sistema Hamiltoniano). *$x = (q,p), f : U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. $\dot{x} = f(x)$ es Hamiltoniano si existe $H : U \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q,p) \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q,p) \end{cases}$$

Proposition. *H hamiltoniano de $\dot{x} = f(x) \Rightarrow H$ integral primera del sistema*

3 Casuística

Definition (Cambio a polares).

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r' = \cos\theta x' + \sin\theta y' \\ r\theta' = \cos\theta y' - \sin\theta x' \end{cases}$$

Definition (Bernoulli).

$$y' = a(x) + b(x)y^r \xRightarrow{z=y^{1-r}} lineal$$

Definition (Ricatti). *$y_1(x)$ sol conocida*

$$y' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 \begin{cases} \xRightarrow{y=y_1+z} Bernoulli \\ \xRightarrow{y=y_1+\frac{1}{u}} lineal \end{cases}$$

Definition (Homogénea). *$F(x,y)$ grad $0 \iff F = f(\frac{y}{x})$*

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}) \xRightarrow{u(x)=\frac{y(x)}{x}} separable$$

Definition (Exactas). *$Pdx + Qdy = 0$ con $P_y = Q_x$. Entonces $\exists U : U_x = P, U_y = Q$ tal que la solución es $U(x,Y) = c$*

Definition (Factores integrantes). *buscamos $\mu(x,y)$ para que $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$ sea exacta.*

$$Q\mu_x - P\mu_y = \mu(P_y - Q_x)$$

Definition (Lagrange). *$y = xf(y') + g(y')$. Hacer cambio $p = y'$ y derivar con respecto a x para encontrar*

$$\frac{dx}{dp}(p - f(p)) - f'(p)x = g'(p)$$