1 Probabilidad Discreta

Teorema de Bayes

$$P(A|_B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \implies P(A) = \sum_{B \text{ part. de } \Omega} P(A|_{B_i})P(B_i) \implies P(B|_A) = \frac{P(A|_B)P(B)}{P(A)}$$

Inclusión-Exclusión

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |I|=k}} P(A_I) \right),$$

Esperanza

$$E(X) = \sum xP(X=x), \quad E(X+Y) = E(X) + E(Y), \quad E((X-m)^k) = \sum (x-m)^k P(X=x)$$

Varianza

$$Var(X) = E((X-m)^2) = E(X^2) - (E(X))^2, \quad Var(aX+b) = a^2 Var(X), \quad \text{desv. tipica } \sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Desigualdades

$$\text{Markov } P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}, \quad \text{Chebychev } P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$$

Funciones generadoras

$$G_X(z) = \sum P(X=n)z^n, \quad E(X) = G'_X(1), \quad G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z)$$

Modelos de distribución

Distribución	$\mathbf{P(X=k)}$	$\mathbf{E(X)}$	$\mathbf{Var(X)}$	**F.Gen**	**Definición**
Uniforme $U(n)$	$1/n$				n bolas diferentes
Bernoulli $B(p)$	p	p	$p(p-1)$	$(1-p)+pz$	weighted coin
Binomial $Bin(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$	np	npq	$((1-p)+pz)^n$	n weighted coins
Poisson $Poiss(\lambda)$	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ	$e^{-\lambda(1-z)}$	
Geométrica $Geom(p)$	$q^{k-1}p$	$1/p$	q/p^2	$\frac{pz}{1-(1-p)z}$	Binomial hasta el éxito
Binomial negativa					

2 Teoría de Grafos

Definición

$$G(V,E), \quad |V| = n, \quad |E| = m, \quad G_1 \cong G_2 \iff \exists \text{ biyección } f \text{ entre las aristas}$$

Tipos

$$K_n \text{ completo}, \quad \bar{K}_n \text{ vacío}, \quad C_n \text{ ciclo}, \quad P_n \text{ camino}$$

Grados

$$d(x) = |N(x)|, \quad \Delta(G) = \max d(x), \quad \delta(G) = \min d(x), \quad \sum d(v) = 2m$$

Conexión

$$u \sim v \iff u,v \text{ conectados (componente conexa)}, \quad G \text{ conexo} \iff \text{solo 1 comp.conexa}$$

$$m \geq n-1$$

Distancia

$$d(u,v) = \min |E(P)|, P \subset G \text{ camino}, \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Diámetro, radio, excentricidad

$$\begin{cases} D(G) = \max d(x,y) \\ r(G) = \min_y \max_x d(x,y) \\ Exe(x) = \max d(x,y) \end{cases} \qquad n \leq 1 + \Delta \left(\frac{(\Delta-1)^D - 1}{\Delta - 2} \right)$$

Matriz de adyacencia

$$A : (a_{ij}) = \begin{cases} 1 \text{ si } x_i x_j \in E \\ 0 \text{ si } x_i x_j \notin E \end{cases} \quad , \quad A^k_{ij} = \#\text{recorridos long. k entre } x_i, x_j$$

Arbol

$$|L(T)| = 2 + \sum_{x:d(x)\geq 3} (d(x)-2), \quad \textbf{Prüfer} \quad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ / & | & \backslash \\ 2 & 3 & 4 \\ | & | & \\ 6 & 5 & \end{array} \quad \iff (1,3,1,2) \implies \#T = n^{n-2}$$

$$\text{Si los grados son } d_1, \ldots, d_n \implies \#T = \binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1}$$

Arbres arrelats

$$\text{Arboles por capas etiquetados con orden} \implies \#T = C_n$$

Grafo Euleriano (Aristas)

$$\text{Tma Euler: } G \text{ es Euleriano} \iff d(x) \text{ es par } \forall x$$

Grafo Hamiltoniao (Vértices)

$$\text{Dirac: } \delta(G) \geq \frac{n}{2} \implies G \text{ Hamiltoniano}, \quad \text{Ore: Si } xy \notin E, d(x) + d(y) \geq n \implies G \text{ Hamiltoniano}$$

Apareamiento

Grafo regular de grado $d(M) = 1$, **Hall:** *Gbipartit* tiene apareamiento $M \iff \forall U \subseteq V_1, |N(U)| \geq |U|$

Número de recubrimiento

$$\begin{cases} \nu(G) = \min\{|U| : U \subset V \text{ recubrimiento por vértices}\} \text{ (toda arista tiene un vértice en } U) \\ \nu'(G) = \min\{|L| : L \subset E \text{ recubrimiento por aristas}\} \text{ (todo vértice tiene una arista en } L) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(G) = \max\{|U| : U \subset V \text{ estable}\} \text{ (ninguno de sus vértices está unido a otro)} \\ \alpha'(G) = \max |E(M)| : M \text{ aparellament} \omega(G) = \alpha(\bar{G}) \text{(Clique: \# vértices del subgrafo completo más grande)} \end{cases}$$

Teoremas sin vértices aislados

$$\textbf{Gallai: } \alpha'(G) + \nu'(G) = n, \quad \text{Bipartit: } \begin{cases} \textbf{König: } \nu(G) = \alpha'(G) \\ \textbf{König: } \nu'(G) = \alpha(G) \end{cases}$$

Coloración

$$\text{Alg. Voraç} \implies \Delta G + 1 \geq \chi(G) \geq max\{\omega(G) = \alpha(\bar{G}), \frac{n}{\alpha(G)}\}, \quad \chi(G) \leq 1 + \max_{H \subseteq G \text{ induit}} \delta(H)$$

Grafos planares

$$m \leq 3n - 6, \quad n - m + f = 2$$