

# Formulario Probabilidad

Abel Doñate Muñoz  
abel.donate@estudiantat.upc.edu

Tabla de distribuciones discretas

Modelo	$p(X = k)$	$E[X]$	$Var[X]$	$G_X(z)$
<b>Bernoulli</b> $\sim Be(p)$	$\begin{cases} p(X = 1) = p \\ p(X = 0) = 1 - p \end{cases}$	$p$	$p(1 - p)$	$(1 - p) + pz$
<b>Binomial</b> $\sim Bin(N, p)$	$\binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N-k}$	$Np$	$Np(1 - p)$	$((1 - p) + pz)^N$
<b>Uniforme</b> $\sim U(1, N)$	$\frac{1}{N}$	$\frac{N + 1}{2}$	$\frac{N^2 - 1}{12}$	$\frac{1}{N} \frac{z(z^N - 1)}{z - 1}$
<b>Poisson</b> $\sim Po(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$\lambda$	$\lambda$	$e^{\lambda(z-1)}$
<b>Geométrica</b> $\sim Geom(p)$	$p(1 - p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1 - p}{p^2}$	$\frac{pz}{1 - (1 - p)z}$
<b>Binomial negativa</b> $\sim BinN(r, p)$	$\begin{cases} 0 & \text{si } k < r \\ \binom{k-1}{r-1} p^r (1 - p)^{k-r} & \text{si } k \geq r \end{cases}$	$\frac{r}{p}$	$r \frac{1 - p}{p^2}$	$\left( \frac{pz}{1 - (1 - p)z} \right)^r$

Tabla de distribuciones continuas

Modelo	$f_X(x)$	$E[X]$	$Var[X]$	$G_X(z)$
<b>Uniforme</b> $\sim U(a, b)$	$\frac{1}{b - a} \mathbb{I}_{[a, b]}$	$\frac{b + a}{2}$	$\frac{(b - a)^2}{12}$	$1 \text{ en } t = 0, \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{it(b - a)}$
<b>Exponencial</b> $\sim Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0, \lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - it}$
<b>Normal</b> $\sim N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mu$	$\sigma^2$	$e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
<b>Gamma</b> $\sim Gamma(\lambda, \tau)$	$\frac{\lambda^\tau}{\Gamma(\tau)} x^{\tau-1} e^{-\lambda x}, x > 0, \lambda, \tau > 0$	$\frac{\tau}{\lambda}$	$\frac{\tau}{\lambda^2}$	$\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-\tau}$
<b>Beta</b> $\sim Beta(\alpha, \beta)$	$\frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1 - x)^{\beta-1}, x \in [0, 1]$	$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$	Sin forma sencilla
<b>Weibull</b> $\sim Weibull(\alpha, \beta)$	$\frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha}, x, \alpha, \beta > 0$	$\beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$	$\beta^2 \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right]$	$\sum_{k \geq 0} \frac{(it)^k \beta^k}{k!} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right)$
<b>Cauchy</b> $\sim Cauchy(\theta, \gamma)$	$\frac{1}{\pi \gamma} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\theta}{\gamma}\right)^2}, \gamma > 0$	No definida	No definida	$e^{\theta it - \gamma  t }$
$\chi_p^2$	$\frac{1}{\Gamma(p/2) 2^{p/2}} x^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, x > 0, p \in \mathbb{N}$	$p$	$2p$	$(1 - 2it)^{-\frac{p}{2}}$
<b>Doble expon</b> $\sim DobExp(\mu, \gamma)$	$\frac{1}{2\gamma} e^{-\frac{ x-\mu }{\gamma}}, \gamma > 0$	$\mu$	$2\gamma^2$	$\frac{e^{\mu it}}{1 + \gamma^2 t^2}$
<b>Lognormal</b> $\sim LogN(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, x, \sigma > 0$	$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2(\mu + \sigma^2)} - e^{2\mu + \sigma^2}$	Sin forma sencilla

# 1 Espacio de probabilidad

**Lemma** (Desigualdades de Bonferroni).

$$p\left(\bigcup A_i\right) \begin{cases} \leq \sum p(A_i) \\ \geq \sum p(A_i) - \sum p(A_i \cap A_j) \\ \leq \sum p(A_i) - \sum p(A_i \cap A_j) + \sum p(A_i \cap A_j \cap A_k) \end{cases}$$

**Definition** (Probabilidad condicionada). La probabilidad de  $A$  condicionada a  $B$  es

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)}$$

**Theorem** (Bayes). Sea  $\{A_1, \dots, A_n\}$  un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos. Entonces si  $B$  es otro suceso:

$$p(A_i|B) = \frac{p(B|A_i)p(A_i)}{\sum p(B|A_k)p(A_k)}$$

**Borel-Cantelli**

**Definition** (Límites superior e inferior). Sea  $\{A_n\} \in \mathcal{A}$  definimos los límites superior e inferior como

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad y \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

**Proposition.** Sea  $\{A_n\}$  sucesión.  $p(\lim A_n) = \lim p(A_n) = p(A)$

**Theorem** (Borel-Cantelli). Sea  $\{A_n\}$  una sucesión de eventos

1.  $\sum_{n \geq 1} p(A_n) < \infty \Rightarrow p(\limsup A_n) = 0$
2. Si  $\{A_n\}$  independent y  $\sum_{n \geq 1} p(A_n) = \infty \Rightarrow p(\limsup A_n) = 1$

## 2 Variables aleatorias

**Definition** (Esperanza). Sea  $X$  una variable aleatoria y  $P_x$  su probabilidad asociada  $P_x$  se define la esperanza como

$$E[X] = \int_{\Omega} X dp = \int_{\mathbb{R}} x dP_x$$

**Definition** (Momento). El momento de orden  $r$  de  $X$  es  $E[X^r]$

**Definition** (Varianza).  $Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$

**Definition** (Covarianza).  $Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

**Definition** (Desviación típica).  $\sigma(X) = \sqrt{Var[X]}$

Algunas propiedades de la esperanza y la varianza

- $E[a] = a$
- $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$
- $E[I_A] = p(A)$
- $|E[X]| \leq E[|X|]$
- $E[X^2] = \sum k^2 p(x = k)$
- $Var[a] = 0$
- $Var[a + X] = Var[X]$
- $Var[aX] = a^2 Var[X]$
- $E[E[Y|X]] = E[Y]$
- $X, Y$  independientes  $\Rightarrow Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$

**Proposition.** Desigualdades

- **Hölder**  $E[|XY|] \leq E[|X|^p]^{\frac{1}{p}} E[|Y|^q]^{\frac{1}{q}} \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$
- **Minkowsky**  $E[|X + Y|^p]^{\frac{1}{p}} \leq E[|X|^p]^{\frac{1}{p}} + E[|Y|^p]^{\frac{1}{p}}$

**Theorem** (Desigualdad de Markov). Sea  $X > 0$  una variable aleatoria y  $a \in \mathbb{R}^+$ . Se cumple

$$p(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

**Theorem** (Desigualdad de Chebyshev). Sea  $X$  una variable aleatoria con  $E[X] < \infty, Var[X] < \infty, Var[X] \neq 0, k > 0$

$$p(|X - E[X]| \geq k Var[X]^{\frac{1}{2}}) \leq \frac{1}{k^2}$$

## 3 VA Discretas

**Definition** (Función generadora). Asociamos a la variable aleatoria  $X$  la función generadora

$$G_X(z) = \sum_{n \geq 0} p(X = n) z^n = E[z^X]$$

Las funciones generadoras satisfacen las siguientes propiedades

- $G_X(0) = p(X = 0), \quad G_X(1) = 1$
- $E[X(X - 1) \cdots (X - k + 1)] = G^{(k)}(1)$
- $Var(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$
- $X, Y$  independientes  $\Rightarrow G_{X+Y} = G_X G_Y$

Árboles de Galton Watson

$$G_{Z_n} = G_x \circ \cdots \circ G_x, \quad \mu = E[X], \quad \eta = P(ext)$$

- $E[Z_n] = E[X]^n$
- $Var[Z_n] = \begin{cases} n Var[X] & \text{si } E[X] = 1 \\ Var[X] E[X]^{n-1} \frac{E[X]^n - 1}{E[X] - 1} & \text{otherwise} \end{cases}$
- $\eta = G(\eta)$

## 4 VA Continuas

**Definition** (Absolutamente continua).  $\mu_1$  abs cont respecto  $\mu_2$  ( $\mu_1 \ll \mu_2$ ) si

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu_2(A) = 0 \Rightarrow \mu_1(A) = 0$$

**Theorem** (Radon-Nikodyn).

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu_1(A) &= \int_A d\mu_1 \\ \forall A \in \mathcal{B}, \quad P_X(A) &= \int_A f_X d\lambda \end{aligned}$$

**Proposition.** En vectores de v.a.

- $(X, Y)$  abs. cont.  $\Rightarrow X, Y$  abs. cont.
- $X, Y$  abs. cont.  $\nRightarrow (X, Y)$  abs. cont.

**Proposition.** Si  $X, Y$  son independientes  $\Rightarrow f_{(X,Y)}(u, v) = f_X(u)f_Y(v)$

**Definition** (Esperanza y varianza).

$$\begin{aligned} E[(X, Y)] &= (E[X], E[Y]) \\ \text{Var}[(X, Y)] &= \begin{pmatrix} \text{Var}[X] & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \text{Var}[Y] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Proposition.**  $X, Y$  indep  $\Rightarrow \text{Var}[(X, Y)]$  diagonal

**Definition** (Probabilidad condicionada).  $Y$  condicionada a  $X = x$

$$\begin{aligned} F_{Y|X}(y, x) &= \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^y f_{(X,Y)}(x, v) dv \\ E[Y|X = x] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y, x) dy = \psi(x) \end{aligned}$$

**Definition** (Marginal). Si la fdp de  $(X, Y)$  es  $f_{(X,Y)}$  las fdp marginales son  $f_X, f_Y$

**Definition** (Distribución normal).

$$N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

**Theorem** (Moivre-Laplace).

$$p\left(a \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

**Proposition.** Si  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  independientes  $\Rightarrow X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

**Definition** (Distribución  $\chi^2$ ). Sea  $X_i \sim N(0, 1)$  tenemos

$$\chi_n^2 \sim X_1^2 + \dots + X_n^2 \sim \Gamma\left(\lambda = \frac{1}{2}, \tau = \frac{n}{2}\right)$$

**Definition** (Distribución de Fisher-Snedecor).

$$F \sim \frac{\chi_{d_1}^2/d_1}{\chi_{d_2}^2/d_2}$$

**Definition** (Distribución de Student).

$$t \sim \frac{N(0, 1)}{\sqrt{\chi_k^2/k}}$$

**Definition** (Normal multivariante).

$$f_{\bar{X}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{\mu})^T \Sigma^{-1}(\bar{x}-\bar{\mu})}$$

**Theorem** (Descomposición normal). Si  $\bar{X}$  normal multivariante  $\Rightarrow \exists A$  no singular,  $b$  tal que  $\bar{X} = A\bar{U} + \bar{b}$  con  $\bar{U} \sim N(0, 1)$

**Proposition.**  $E[\bar{X}] = \bar{\mu}, \quad \Sigma_{ij} = \text{Cov}[X_i, X_j]$

**Theorem.**  $\bar{X} \sim N(\bar{\mu}, \Sigma)$  y  $M$  matriz  $m \times n$  con rango  $m$ . Sea  $\bar{Y} = M\bar{X}$ . Entonces

$$\bar{Y} \sim N(M\bar{\mu}, M\Sigma M^T)$$

**Definition** (Esperanza muestral).  $\hat{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$

**Definition** (Varianza muestral).  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \hat{X})^2$

**Proposition.**  $E[\hat{X}] = \mu, \text{Var}[\hat{X}] = \frac{\sigma^2}{n}, E[S^2] = \sigma^2$

**Theorem** (Fisher). Sean  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  indep. Entonces  $\hat{X}, S^2$  indep. y

$$\hat{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad S^2 \sim \frac{n-1}{\sigma^2} \xi_{n-1}^2$$

**Proposition.** Sea  $\bar{X}$  absolutamente continua con  $f_{\bar{X}}(x_1, \dots, x_n)$ . Sea  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^1$  biyectiva. Si  $g(\bar{X}) = \bar{Y}$  encontramos  $f_{\bar{Y}}$  de la siguiente forma:

Sea  $h := g^{-1}$ :

$$f_{\bar{Y}}(y_1, \dots, y_n) = f_{\bar{X}}(h(y_1, \dots, y_n)) |J_h(y_1, \dots, y_n)|$$

## 5 Funciones características

**Definition** (Función generadora de momentos).

$$M_X(s) = E[e^{sX}] = \sum \frac{E[X^i]}{i!} s^i$$

La serie de potencias puede tener radio de convergencia 0

Propiedades

1.  $Y = aX + b \Rightarrow M_Y(s) = e^{bs} M_X(as)$
2.  $\frac{d^k}{ds^k} M_X(s)|_{s=0} = E[X^k]$
3.  $X, Y$  indep  $\Rightarrow M_{X+Y}(s) = M_X(s) M_Y(s)$

**Theorem** (Chernoff).  $X = \sum X_i, \quad X_i \sim Be(p_i)$

$$p(X \geq (1+\delta)\mu) \leq e^{-\frac{\delta^2}{2+\delta}\mu}, \quad \delta \geq 0$$

$$p(X \leq (1-\delta)\mu) \leq e^{-\frac{\delta^2}{2}\mu}, \quad \delta \in (0, 1)$$

Deducimos  $p(|X - \mu| \geq \delta\mu) \leq 2e^{-\frac{\delta^2}{3}\mu}$

**Definition** (Función característica).

$$\phi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx$$

**Theorem** (Inversión).

$$P_X((a, b)) + \frac{P_X(a) + P_X(b)}{2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_X(t) dt$$

Propiedades de  $\phi_X$

1.  $\phi_X(0) = 1, \quad |\phi_X(t)| \leq 1$
2.  $\phi_X(t)$  unif cont
3.  $\forall t_i \in \mathbb{R} \forall z_i \in \mathbb{C}, \sum \phi_X(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geq 0$

**Definition** (Familias exponenciales). *parámetros*  $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$

$$p(X, \bar{\theta}) = p(X|\theta) = g(x) e^{\sum \theta_i t_i(x) - c(\bar{\theta})}$$

**Definition** (Familia exponencial natural).  $\exists k : t_k = x$

$$\phi_X(t) = e^{c(\theta_1 + it, \dots, \theta_n) - c(\bar{\theta})}$$

## 6 Convergencia

**Definition** (Tipos de convergencia). .

- *Casi-segura*

$$X_n \xrightarrow{qs} X \iff p(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \xrightarrow{n} X(\omega)\}) = 1$$

- *En media de orden r*

$$X_n \xrightarrow{r} X \iff E[|X_n - X|^r] \xrightarrow{n} 0$$

- *En probabilidad*

$$X_n \xrightarrow{p} X \iff p(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n} 0$$

- *En distribución*

$$X_n \xrightarrow{d} X \iff F_{X_n}(x) \xrightarrow{n} F_X(x) \forall x \in \mathbb{R} : F_X \text{ continua}$$

Si  $r \geq s \geq 1$  tenemos

Propiedades conv  $X_n \xrightarrow{qs} X, Y_n \xrightarrow{qs} Y$

- $p(X = Y) = 1$
- $X_n + Y_n \xrightarrow{qs} X + Y$
- $X_n Y_n \xrightarrow{qs} XY$
- $\forall c \in \mathbb{R}, cX_n \xrightarrow{qs} cX$
- $\forall g$  función continua,  $g(X_n) \xrightarrow{qs} g(X)$

**Theorem** (Ley fuerte de los grandes números). Sean  $\{X_i\}$  independientes tal que  $X_i \sim X$  con  $E[|X|] < \infty$ .

$$E[X] = \mu, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i \Rightarrow \begin{cases} \frac{S_n}{n} \xrightarrow{qs} \mu \\ E\left[\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right)^2\right] = \frac{\sigma^2}{n} \end{cases}$$

**Proposition.**  $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{d} \alpha \in \mathbb{R}$  entonces

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + \alpha$$

**Theorem** (Representación de Skorokhod). Sea  $\{X_n\}$  con  $X_n \xrightarrow{d} X$ . Entonces existe un nuevo espacio de probabilidad  $(\Omega', \mathcal{A}', p')$  donde definimos  $\{Y_n\}$  tal que

1.  $F_{X_n}(x) = F_{Y_n}(x)$  i  $F_X(x) = F_Y(x)$   $\mu$ -gairrebé arreu
2.  $Y_n \xrightarrow{q-s} T$

**Proposition.**  $g$  continua  $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$

**Theorem** (Lévy).  $\{X_n\}$  con las características  $\{\phi_n(t)\}$

- Si  $X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow \phi_n(t) \xrightarrow{n} \phi(t)$  puntualmente
- Si  $\phi_n(t) \xrightarrow{n} \phi(t)$  puntualmente y  $\phi(t)$  es continua en  $t = 0 \Rightarrow \exists X : X_n \xrightarrow{d} X$

**Theorem** (Límite central).  $X_i$  idénticamente distribuidas,  $E[X_i] = \mu, \text{Var}[X_i] = \sigma^2$

$$S_n = \sum X_i \Rightarrow \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$