Cálculo

Abel Doñate Muñoz
abel.donate@estudiantat.upc.edu

Contents

1 Los axiomas de R

- 9 axiomas algebraicos $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ anillo conmutativo
- 4 axiomas de orden $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ + 2 más de consistencia
- R16 Axioma arquimediano: $\exists n \in \mathbb{N} \mid nx > y$
- R17 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- R18 Axioma de completitud (o del Supremo):

$$A \subset \mathbb{R},\ A \text{ acotado superiormente } \implies \exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = sup(A)$$

2 Sucesiones

Definition 2.1. (a_n) está acotada $\implies \exists\ M \in \mathbb{R}\ \mid\ a_n \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$

Definition 2.2. (a_n) es monótona $\implies a_n \leq a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$

Definition 2.3. (a_n) tiene límite $L \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \implies |a_n - L| < \varepsilon$

Definition 2.4. Definimos el límite superior de (a_n) como $\lim\ sup\ a_n$, el máximo de los límites de sucesiones parciales de (a_n). Se tiene que $\limsup a_n = \inf\ \{sup_{m \geq n}\{a_n\}\}$

2.1 Criterios de convergencia

- **Teorema de la convergencia monótona**

$$a_n \text{ está acotada y es monótona } \implies a_n \text{ tiene límite.}$$

- **Teorema de Bolzano-Weierstrass**

$$a_n \text{ está acotada } \implies a_n \text{ tiene una sucesión parcial convergente.}$$

- **Criterio de Stolz**

$$y_n \text{ divergente, creciente y positiva } \implies \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

- **Teorema del Sandwich**
  Buscar una cota superior e inferior con el mismo límite
- $L = a_n^{b_n} = 1^\infty \quad \implies \quad L = e^{(b_n - 1)a_n}$
- $a_n \to L \quad \implies \quad \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \to L$
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L \quad \implies \quad \sqrt[n]{a_n} \to L$
- $si\ |x_{n+1} - x_n| \leq \rho |x_n - x_{n-1}|\ \ (\rho < 1)\ \ \forall n > n_0 \quad \implies x$ es Cauchy y tiene límite

2.2 Sucesiones de Cauchy

Definition 2.5. .
(a_n) es una sucesión de Cauchy $\implies \forall \varepsilon \geq 0 \;\; \exists n_0 \;\; | \;\; |a_n - a_m| \leq \varepsilon \;\; \forall n, m \geq n_0$
Si a_n es Cauchy, entonces tiene límite.

3 Funciones

3.1 Límite de una función en un punto

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta \mid 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon}$$

Observa que L no tiene porque ser igual que $f(a)$ necesariamente

3.2 Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad

- f inyectiva $\quad \implies \quad \forall x, y \in A, \; x \neq y, \; f(x) \neq f(y)$
- f sobreyectiva $\quad \implies \quad f(A) = B$
- f biyectiva $\quad \implies \quad f$ es inyectiva y sobreyectiva

3.3 Tipos de discontinuidades

1) **Evitable** $\lim_{x\to a} f(x) = b, f(a) \neq b$
2) **Salto** $\lim_{x\to a} f(x) \nexists \quad \implies \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = b \neq \lim_{x\to a^+} f(x) = c$
3) **Esencial** un limite lateral se va a infinito

3.4 Teoremas sobre continuidad

La función f es **Uniformemente continua**:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 \mid si \; |x-y| < \delta \implies \; |f(x) - f(y)| < \varepsilon}$$

Teorema de Bolzano.
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua, $f(a)f(b) < 0$:

$$\exists c \in (a, b) \mid f(c) = 0$$

Similar a **Teorema del valor intermedio**.

Teorema de Weirestrass.
Sea f continua en $[a, b]$ tiene máximo y mínimo.

Teorema de Heine-Cantor.
Sea f continua y compacta (fitada y cerrada) $\implies$ uniformemente continua.

4 Derivadas

La derivada existe en el punto a si existe el límite

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to = 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

4.1 Teoremas sobre derivación

Teorema de Rolle
Sea f continua y derivable en $[a, b]$ y $f(a) = f(b)$

$$\implies \quad \exists c \in (a, b) \mid f'(c) = 0$$

Teorema de Cauchy
Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ cumpliendo

1) f, g continuas
2) f, g derivables en el interior
3) $g(a) \neq g(b)$
4) Si $g'(x) = 0 \implies f'(x) \neq 0$

$$\implies \quad \exists c \in (a, b) \mid \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Teorema del valor medio
Sea f continua en $[a, b]$, derivable en (a, b)

$$\implies \quad \exists c \in (a, b) \mid \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Regla de L'Hopital
Sean f, g derivables en $[a - r, a]$ tal que:

1) $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ en todo I
2) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$
3) $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \infty$

$$\implies \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \infty$$

4.2 Convexidad

f es convexa $\iff f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$

$$a < x < y < b \quad \implies \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(b)-f(y)}{b-y}$$

Haciendo los límites $x \to a, y \to b$ y sandwitch tenemos f' creciente $\implies f'' \geq 0$

4.3 Serie de Taylor

Teorema de Taylor

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^n} = \frac{R_{n,a,f}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Residuo de Lagrange

$$R_{n,a,f}(x) = f(x) - P_{n,a,f}(x)$$

Teorema de Lagrange

$$\exists c \in (a,x) \quad R_{n,a,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$$

5 Integrales

Una función es **Riemman integrable** si:

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

5.1 Teoremas sobre integrabilidad

Th: f es integrable $\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists P \mid U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$

Th: f es integrable $\iff \quad \exists (P_n)_n \mid \lim_{n\to\infty} L(P,f) = \lim_{n\to\infty} L(P,f) = \int_a^b f$

Th: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona ($\implies$ fitada) $\implies$ integrable
Hint: partición $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$ y usar monotonicidad.

Th: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua ($\implies$ fitada por Weierstraß) $\implies$ integrable
Hint: Uniformemente continua y aplicar el ε.

Th: f integrable, g continua $\Rightarrow g \circ f$ integrable

5.2 Teorema fundamental del cálculo

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es primitiva de f si

- F es continua
- F es derivable en (a, b)
- $F' = f(x)\ \forall x \in (a, b)$

Si f tiene primitiva $\Rightarrow$ f es integrable. (No es doble implicación, e.g. step function).

Teorema fundamental del cálculo Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Definimos $F(x) = \int_a^x f$:

- F es contínua
- Si f es continua en $c \in (a, b) \;\Rightarrow\; F$ es derivable en c y $F'(c) = f(c)$

Regla de Barrow Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Teorema del valor medio para integrales Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua.

$$\exists c \in (a, b) : \int_a^b f = f(c)(b - a)$$