Formulario EDPs

Abel Doñate Muñoz

Contents

1 Ecuación del transporte

Definition (Ecuación del transporte)**.** *Para c constante*

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = g(x-ct)$$

Para c variable no homogéneo

$$\begin{cases} u_t + (cu)_x = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Theorem (Curvas características)**.**

$$a(x,t)u_t + b(x,t)u_x + d(x,t)u + f(x,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x'(s) \\ t'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(x(s),t(s)) \\ a(x(s),t(s)) \end{pmatrix}$$

$$v(s) := u(x(s),t(s)), \quad v'(s) = bu_x + au_t = -f(x(s),t(s)) - d(x(s),t(s))v(s)$$

Theorem (Fórmula de Duhamel)**.** *T semigrupo de la homogénea, $F(u) = f(x,t)$*

$$u(x,t) = (T_t g)(x) + \int_0^t (T_{t-s} f(\cdot,s))(x)ds$$

2 Espacios de Banach, Operadores y Semigrupos

Ejemplos espacios de Banach

- $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto, $E = C^0(K)$ con la norma $\|u\|_\infty = sup_{x\in K}|u(x)|$ es Banach
- $E = L^2([a,b])$ con la norma $\|u\|_2$ es Banach

Theorem (Punto fijo de Banach)**.** *E Banach*

$$T : \overline{B_M}(u) \to \overline{B_M}(u) \text{ contracción } \|Tu - Tv\| \le \lambda\|u - v\|, \lambda < 1 \quad \Rightarrow \quad T \text{ tiene un único punto fijo}$$

Proposition. *E, F Banach, $A : E \to F$ operador lineal. Son equivalentes:*

1. *A continuo*
2. *A acotado, es decir $\|Au\|_F \le C\|u\|_E \ \forall u \in E$*

3 Ecuación del Calor / Difusión

Definition (Ecuación del calor)**.** *Condiciones de Dirichlet*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = g(x) = \sum b_k \sin(\frac{k\pi}{L}x) \\ u(0,t) = u(L,t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = \sum b_k e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Tenemos además la siguiente cota $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,\pi)} \le e^{-t}\|g\|_{L^2(0,\pi)}$

(cosas de sturm Liouvulle)

Definition (Ecuación del calor no homogénea)**.** *Condiciones de Dirichlet*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) = \sum b_k \sin(\frac{k\pi}{L}x) \\ u(0,t) = u(L,t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = \sum c_k(t) \sin(\frac{k\pi}{L}x)$$

Introduciendo el semigrupo $T : (T_t g)(x) = \sum b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$, que es una contracción, usando la fórmula de Duhamel

$$u(x,t) = (T_t g)(x) + \int_0^t T_{t-s} f(\cdot, s)(x) ds$$

4 El Laplaciano. Funciones armónicas

Definition (Ecuación de Poisson).

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & en\ \Omega \\ u = g(x) & en\ \partial\Omega \end{cases}$$

Definition (Funciones armónicas). *la función u es:*

- ***Armónica*** *si* $\Delta u = 0$
- ***Subarmónica*** *si* $-\Delta u \leq 0$
- ***Superarmónica*** *si* $-\Delta u \geq 0$

El laplaciano se puede representar de las siguientes maneras dependiendo de las coordenadas:

$$\text{(cartesianas) } \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \qquad \text{(polares) } \Delta u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = \frac{(ru_r)_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2}$$

(PROBABILIDADES)

Theorem (Propiedad de la mediana). *Sea u armónica. Entonces para todo* x_0 *y* $\overline{B}_r(x_0) \subseteq \Omega$ *tenemos*

$$u(x_0) = \fint_{\partial B_r(x_0)} u(y) dy = \fint_{B_r(x_0)} u(y) dy$$

Proposition. *Principio del máximo y del mínimo. Sea* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\omega})$, *entonces*

1. *Si* $-\Delta \leq 0$, *entonces u tiene el máximo en* $\partial\Omega$
2. *Si* $-\Delta \geq 0$, *entonces u tiene el mínimo en* $\partial\Omega$
3. *Si* $\Delta u = 0$, *entonces u satisface 1) y 2)*

Definition (Frontera parabólica). *La frontera parabólica de* $Q_T = \Omega \times (0, T)$ *es*

$$\partial_p Q_T = (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$$

Es decir, la unión de la tapa inferior y la frontera lateral.

Definition (Función subcalórica). *u es subcalórica si* $u_t - \Delta u \leq 0$ *en* Q_T

Proposition. *Principio del máximo para la ecuación de difusión. Sea u subcalórica. Entonces u tiene el máximo en* $\partial_p Q_T$

(SUBSOLUCIÓN y SUPERSOLUCION)