Algebra Lineal

Abel Doñate Muñoz

abel.donate@estudiantat.upc.edu

Contents

1 Matrices y sistemas

1.1 Matrices elementales

- $E_1 : f_i \to f_j \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $E_2 : f_i \leftarrow cf_j \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $E_3 : f_i \leftarrow cf_j + f_i \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ahora podemos expresar $\tilde{A} = REF(A)$ (the Row Echelon Form of A REF) como:

$$\tilde{A} = EA$$

con E como producto de matrices elementales.

Podemos también transformar esta matriz en una REF (los pivotes son unos y encima hay ceros) como:

$$RREF(A) = \tilde{E}\tilde{A} = \tilde{E}EA = E'A$$

1.2 Rouché-Frobenius

$Rank(A) := \#$ pivotes en la REF.

- $Rank(A) = rank(A') \implies$ Consistente con $n - rank(A)$ variables libres

- $Rank(A) \neq rank(A') \implies$ No consistente (sin solución)

1.3 Gauss-Jordan

Transformar una matriz a REF:

$$Ax = b,\ A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & b_3 \end{array}\right) \implies \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{32} & a_{42} & b_2\ hangeofbasis \\ 0 & 0 & 0 & a_{43} & b_3 \end{array}\right)$$

Columnas sin pivotes son las variables libres (x_3 en el ejemplo).

1.4 Determinante

Teorema de Laplace

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j} \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

Propiedades del determinante:

- Intercambiando dos filas $|A| = -|A^*|$ (Multiplicar por E_1)
- Si A, B, C solo difieren en una fila $C_i = A_i + B_i$. Entonces $|C| = |A| + |B|$
- Multiplicar por E_3 no cambia el determinante
- $|AB| = |A||B|$

2 Espacios vectoriales

2.1 Subespacios vectoriales

El subespacio vectorial (s.e.v.) W de V se define como:

$$W = [u_1, ..., u_n] := \{\lambda_1 u_1, ..., \lambda_n u_n \ : \lambda_i \in K\}$$

donde u_i son vectores en V.

Para determinar si es subespacio de un espacio:

1. Transformar el problema en una matriz.
2. Hacer REF de la matriz y resolver el sistema con variables libres.
3. Dar una base factorizando las variables libres de la solución.

2.2 Cambio de base

Si tenemos dos bases $B : \{u_1, ..., u_n\}$ y $C : \{v_1, ..., v_n\}$ podemos cambiar las coordenadas por medio de una matriz de cambio de base $A_{B\to C}$:

$$M_{B\to C} = ((u_1)_C, ..., (u_n)_C)$$

$$M_{B\to C}(u_1, ..., u_n) = (v_1, ..., v_n)$$

2.3 Suma de espacios vectoriales

La suma de dos espacios vectoriales se define como $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \ : \ v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$
Si $V_1 \cap V_2 = \emptyset \implies$ la suma es directa $V_1 \oplus V_2$

Fórmula de Grassmann

$$\boxed{\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)}$$

2.4 Buscando espacios vectoriales

Para encontrar el espacio vectorial:

$\mathbf{F}+\mathbf{G}$ Entonces $F+G=[u_1,\cdots,u_n,v_1,\cdots v_m]$, donde u_i,v_i son elementos de la base de F y G respectivamente.

$\mathbf{F}\cap\mathbf{G}$ Pon F y G como sistemas homogéneos y resuelve con variables libres. El subespacio de soluciones es el deseado.

$\mathbf{E}/\mathbf{F}$ Usa el que E/F es el complementario de F. Comprueba que combinación de los vectores unitarios de la base lo complementa.

3 Aplicaciones lineales

Una aplicación lineal $f:E\to F$ se puede pensar como una matriz A tal que $f(v)=Av$.

Distinguimos los siguientes tipos de aplicaciones:

- Monomorfismo $\implies$ f inyectiva $\implies$ $Ker(f)=0$
- Epimorfismo $\implies$ f exhaustiva/sobreyectiva $\implies$ $Im(f)=F$
- Isomorfismo $\implies$ f biyectiva

También tenemos los subespacios $Ker(f)/Nuc(f)$ and $Im(f)$. Se relacionan por la siguiente fórmula:

$$\dim(Ker(f))+\dim(Im(f))=\dim(E)$$

Primer teorema de isomorfismo Sea $f:E\to F$ una aplicación lineal:

$$\boxed{\bar{f}:E/Ker(f)\to Im(f) \quad\implies E/Ker(f)\cong Im(f)}$$

es un isomorfismo

3.1 Trabajando con bases

Sea $f:E\to F,\ \ \dim(E)=n,\dim(F)=m$ y $\mathcal{B}_E=\{u_1,...,u_n\},\mathcal{B}_F=\{v_1,...,v_m\}$:

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)=(f(u_1)_{\mathcal{B}_F},...,f(u_n)_{\mathcal{B}_F})}$$

3.2 Espacio Dual

Definimos el espacio dual E^* de E de la siguiente manera:
Sea u_i^* una aplicación lineal $u_i^*:E\to\mathbb{R}$
Let $\mathcal{B}_E=\{u_1,...,u_n\},\ \ \mathcal{B}_{E^*}=\{u_1^*,...,u_n^*\}$

$$u_i^*u_j=\delta_i^j \qquad\implies\qquad u=u_1^*(u)u_1+\cdots+u_n^*(u)u_n$$

Estas aplicaciones lineales u_i^* podemos pensarlas como productos escalares $u^*(v)=<u,v>$, donde u es un vector columna de la misma dimensión que v.

4 Diagonalización

4.1 Encontrar un endomorfismo diagonal

Queremos encontrar una base cuya matriz del endomorfismo sea diagonal. Si no es posible, recurriremos a la forma de Jordan:

1) Encontrar los VAP's $\implies P_f(x) = |M - xI| = 0 \Rightarrow \lambda_i$

2) Encontrar los VEP's $\implies Nuc(M - \lambda_i I)$

3) $1 \leq g_\lambda \leq a_\lambda$

El **Polinomio característico** $P_f(x)$ es el polinomio tal que $P_f(x) = |M - \lambda I|$

El **Polinomio mínimo** $m_f(x)$ es el polinomio mónico de menor grado que anula f.
$m_f(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_r)^{n_r}$, donde n_i es el menor exponente k tal que

$$Nuc(f - \lambda_i I)^k = Nuc(f - \lambda_i I)^{k+1}$$

Teorema de Cayley-Hamilton

$$P_f(M) = 0$$

4.2 Teoremas de diagonalización y descomposición

Primer teorema de diagonalización
f diagonaliza sobre $\mathbb{K}$ si y solo si:

- $P_f(x)$ descompone en factores simples en $\mathbb{K}$
- $g_1 + \cdots + g_r = n \iff a_i = g_i \ \forall i$

Si queremos que diagonalize sobre $\mathbb{C}$ la única condición que hace falta es la segunda, ya que la primera siempre se cumple.

Segundo teorema de diagonalización

$$f \text{ diagonaliza} \iff m_f(x) \text{ descompone en factores lineales}$$

Primer teorema de descomposición
Si $P_f(x)$ descompone en factores simples:

$$\dim\ Ker((M - \lambda_i I)^{a_i}) = a_i \quad \iff \quad E = Ker((M - \lambda_1 I)_1^a) \oplus \cdots \oplus Ker((M - \lambda_r I)_r^a)$$

4.3 Matrices positivas

Una matriz A es positiva $(A > 0) \iff a_{ij} > 0 \ \forall i, j$

Teorema de Perron-Frobenius Sea A una matriz positiva, entonces se cumple:

- Tiene un VAP $\lambda_1 > 0$ dominante
- El VEP de λ_1, v_1 es positivo
- No hay otros VEP's positivos

4.4 Matrices estocásticas

Se trata de matrices donde las columnas sumen 1. Su propiedades son:

- $\lambda_1 = 1$ VAP dominante con VEP positivo por Perron-Frobenius
- Si x suma 1 $\Rightarrow Ax$ también

4.5 Algunas propiedades

- $|A|$ y $tr(A)$ no dependen de la elección de la base
- u, v son VEP's de diferentes VAP's $\Rightarrow$ son l.i.

5 Ortogonalidad

5.1 Algunas definiciones

Producto escalar. Forma bilineal $< u, v >$ tal que:

- Bilineal $< u + \lambda v, t > = < u, t > + \lambda < v, t >$
- Simétrica $< u, v > = < v, u >$
- Definida positiva (Criterio de Sylvester $\Rightarrow$ Todos los determinantes principales son positivos) $\iff \; < u, u > \geq 0 \; \forall u$

En $\mathbb{R}^n$ el producto escalar viene definido por:

$$< u, v > = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} < u_1, v_1 > & < u_1, v_2 > & < u_1, v_3 > \\ < u_2, v_1 > & < u_2, v_2 > & < u_2, v_3 > \\ < u_3, v_1 > & < u_3, v_2 > & < u_3, v_3 > \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Norma. La norma $\|v\| = \sqrt{< v, v >}$ debe cumplir:

- $\|v\| \geq 0$
- $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$
- $\|v\| \, \|u\| \geq < u, v >$
- $\|v\| + \|u\| \geq \|u + v\|$

Dinstancia $d(u, v) = \|u - v\|$

Ángulo $cos\alpha = \frac{< u, v >}{\|u\|}$

Ortogonales $u \perp v \iff < u, v > = 0$

5.2 Algoritmo de Gram-Schmidt

Se usa para convertir una base $u_1, \cdots, u_n$ en otra ortogonal $v_1, \cdots, v_n$:

$$v_d = u_d - \frac{< v_1, u_d >}{< v_1, v_1 >} u_1 - \cdots - \frac{< v_{d-1}, u_d >}{< v_{d-1}, v_{d-1} >} u_{d-1}$$

5.3 Subespacio complementario ortogonal

Este espacio se define como:

$$F^{\perp} = \{u \in E \ : < u, v >= 0 \ \forall v \in F\}$$

Algunas propiedades son:

a) $F \subset G \Rightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$

b) $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$

c) $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$

d) $Ker(A)^{\perp} = Im(A^T)$

5.4 Proyección ortogonal

Podemos escribir de una única forma cada vector de E como $v = w + w'$ con $w \in F$ y $w' \in F^{\perp}$.
De esta forma $w = proj_F(v)$ y $w' = proj_{F^{\perp}}(v)$.
Como tenemos que $w \in F$ y $(v - w) \in F^{\perp} \ \Rightarrow < u_i, w >=< u_i, v >$. Por tanto si $w = c_1u_1 + \cdots + c_du_d$

$$\begin{pmatrix} < u_1, u_1 > & < u_1, u_2 > & < u_1, u_3 > \\ < u_2, u_1 > & < u_2, u_2 > & < u_2, u_3 > \\ < u_3, u_1 > & < u_3, u_2 > & < u_3, u_3 > \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < u_1, v > \\ < u_2, v > \\ < u_3, v > \end{pmatrix}$$

5.5 Teorema espectral

Sea $A = A^T$ simétrica:

- A tiene todos los VAP'S reales
- A diagonaliza
- $\exists$ base ortogonal formada por VEP's de A

5.6 Descomposición SVD

Sea A una matriz $m \times n$, queremos encontrar las siguientes matrices:

- U $m \times m$ ortogonal
- D $m \times n$ diagonal con $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r$ y $r = Rank(A)$
- V $n \times n$ ortogonal

Con ellas podemos expresar $A = UDV^T$. Para encontrar estas matrices seguimos los siguientes pasos

1) $A^TA = VD^TDV^T \Rightarrow$ podemos diagonalizar A^TA (simétrica), obteniendo V, V^T y D, dado que $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

2) Los vectores columna que forman U son $u_i = \frac{1}{\sigma_i}Av_i$

5.7 Teorema Fundamental del Álgebra

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal definida por la matriz A. Entonces tenemos los siguientes espacios:

- $Im(A) = [u_1, \cdots, u_r]$
- $Ker(A) = [v_{r+1}, \cdots, v_n]$
- $Im(A^T) = [v_1, \cdots, v_r]$
- $Ker(A^T) = [u_{r+1}, \cdots, u_n]$

Con los que se cumple $\mathbb{R}^n = Ker(A) \otimes Im(A^T)$ y $\mathbb{R}^m = Ker(A^T) \otimes Im(A)$.
Además se cumple por las propiedades de 5.3 que los espacios son complementos ortogonales.

5.8 Norma de una matriz

La norma de una matriz se define como

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \ = \max \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Algunas propiedades son:

- $\|A\| \geq 0$
- $\|\lambda A\| = \lambda \|A\|$
- $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ igaldad cuando B es ortogonal
- $\|A\| = \sigma_1$ (SVD) $\Rightarrow \ \|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_r}$

Torema de Eckart-Young.
Sea $A = UDV$, sabemos que $\|A\| = \sigma_1$. Sea A_k la matriz SVD de rango k:

- $\|A - M_k\| = \sigma_{k+1}$
- $\|A - M\| \geq \|A - M_k\| \ \forall M$ de rango k