Funciones de Varible Compleja

Abel Doñate Muñoz
abel.donate@estudiantat.upc.edu

Contents

1 Funciones Holomorfas

Definition. *f es* ***Holomorfa*** *($f \in \mathcal{H}$) si*

$$\exists f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

De la definición se deduce que si f es holomorfa $\implies \exists\ f_x, f_y$.

Definition. *f es* ***Analítica*** *en U si $\forall z_0 \in U$ existe una serie de potencias con radio de convergencia positivo.*

En variable compleja se cumple holomorfa $\iff$ analítica

Theorem. *Ecuaciones de Cauchy-Riemann (CR en adelante) (condiciones necesarias para que f sea holomorfa)*

$$f_y(z_0) = i f_x(z_0) \iff \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \iff \begin{cases} f_z = f' \\ f_{\overline{z}} = 0 \end{cases}$$

Theorem. *Condiciones suficientes para que f sea holomorfa*

$$\begin{cases} u, v \in \mathcal{C}(\Omega) \\ CR \end{cases} \implies f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

Si las funciones f, g son holomorfas, entonces son holomorfas

$$\lambda f + \mu g, \quad fg, \quad \frac{f}{g}, \quad f \circ g$$

y sus derivadas coinciden con las derivadas en el caso $z \in \mathbb{R}$

Definition. *Una función L es lineal $\iff L(z) = \mu z = re^{i\varphi} z$*

$$L(z) = L(x + iy) = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Observamos que se trata de una rotación + homotecia

Proposition. *L preserva ángulos y orientación $\implies L$ es $\mathbb{C}-$lineal*

Definition. *f es conforme en $\Omega \iff f$ preserva ángulos y orientación*

Se cumple f conforme $\iff f$ lineal

Definition. *Una función u es armónica si $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$*

Si $f = u + iv$ holomorfa $\implies u, v$ armónicas

Definition. *Sea a_n una sucesión, definimos la serie de potencias centrada en a*

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$$

y su radio de convergencia como

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Theorem. *Cauchy-Hadamard. Sea R el radio de convergencia de $S = \sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$.*

1. *S es absolutamente convergente en $|z - a| < R$*

2. *S es divergente en $|z-a|>R$*
3. *S es uniformemente convergente en $|z-a|\leq r$ con $r<R$*

Theorem. *Criterio M de Weierstrass. Sea f_n una sucesión de funciones en S tal que existe una sucesión de reales M_n tal que $|f_n(z)|<M_m$ $\forall z\in S$ y $\sum_{n\geq 0} M_n<\infty$, entonces*

$$\sum_{n\geq 0} f_n(z) \text{ es absolutamente y uniformemente convergente en } S$$

Observamos que no podemos saber nada de la convergencia en el borde del disco $|z-a|=R$ con Cauchy-Hadamard

Theorem. *Picard.*

$$si \begin{cases} c_j\geq 0, c_j\in\mathbb{R} \\ c_j\geq c_{j+1} \\ \lim c_j=0 \end{cases} \implies \sum_{n\geq 0} c_n z^n \text{ es convergente } \forall |z|=1 \text{ excepto quizá para } z=1$$

Theorem. *Sea $f(z)=\sum a_n(z-a)^n$ con radio de convergencia RS. Se cumple*

1. *$f\in H(D(a;R))$*
2. *$f\in\mathcal{C}^\infty(D(a;R))$*
3. *$f^{(k)}$ tiene radio de convergencia R*

2 Teoría local de Cauchy

Definition. *La integral de f sobre un camino Γ con parametrización $\gamma(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ se define como*

$$\int_\Gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Si integramos una función derivada, tenemos un campo potencial $\int_\Gamma f'(z)dz=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$

Theorem. *Teorema de Green*

$$\iint_R \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}dxdy=\frac{1}{2i}\int_\gamma f(z)dz$$

Theorem (Cauchy-Goursat). $f\in C(\Omega)\cap H(\Omega-\{w\} \implies \int_{\partial R^+} f(z)dz=0$

Theorem (Existencia de primitivas). $f\in C(D)\cap H(D-\{w\}) \implies \exists F\in H(D):F'(z)=f(z)$

Theorem (Cauchy).

$$f\in H(D)\cap\mathcal{C}(\overline{D}) \implies f(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{z-w}dz$$

Theorem (Representación en serie de potencias). $f\in H(\Omega)$

$$f(z)=\sum c_n(z-a)^n \implies c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)+}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

Theorem. *Extensión analítica. $f\in H(\Omega)$. Si $\exists U$ abierto $: f|_U=0 \implies f=0$ en todo Ω*

Theorem. *Si $f\in H(\Omega) \implies f$ el conjunto de los ceros de f es numerable*

Theorem. *Sea $f\in H(\Omega), f\neq 0$. Sea $E=\{z\in\Omega: f(z)=0\}$ el conjunto de ceros. Entonces*

$$\forall a\in\Omega\ \exists!\ m\geq 1: f(z)=(z-a)^m g(z) \quad con \quad g\in H(\Omega),\ g(a)\neq 0$$

Theorem (Desigualdad de Cauchy). *Sea $f \in H(D(a;R))$, definimos $M(r) = \sup_{z \in \partial D(a,r)}\{|f(z)|\}$. Entonces*

$$|f^{(n)}(a)| \leq n!M(r)r^{-n}$$

Como consecuencia tenemos los dos siguientes teoremas

Theorem (Liouville). *Sea f entera y acotada. Entonces $f(z) = c \ \forall z \in \mathbb{C}$*

Theorem (Fundamental del Álgebra). *Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ un polinomio de grado $n \geq 1$. Entonces*

1. *P tiene n raíces en $\mathbb{C}$ (contando multiplicidad)*
2. *Factoriza como $p(z) = a_n(z - \alpha_1)\cdots(z - \alpha_n)$*

Proposition. *Si f entera y $\exists r, M, \lambda : |f(z)| \leq M|z|^{\lambda} \ \forall |z| \geq r$, entonces f es un polinomio de grado $\leq \lambda$*

Theorem (Valor medio). *Sea $f \in H(\Omega)$, el valor de f en el centro de un disco es el promedio del de la frontera*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta$$

Theorem (Principio del máximo fuerte). *Sea $f \in H(\Omega)$. Si $|f|$ alcanza el supremo en $\Omega^{\circ} \implies f(z) = c$*

Theorem (Principio del mínimo fuerte). *Sea $f \in H(\Omega)$, $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$. Si $|f|$ alcanza el ínfimo en $\Omega^{\circ} \implies f(z) = c$*

Theorem (Teorema de la función inversa). *Sea $f \in H(\Omega), f'(a) \neq 0$, entonces f tiene una inversa local holomorfa tal que $f^{-1}(f(a)) = a$. Es decir, $\exists r > 0$ tal que*

1. *$D(a;r) \subseteq \Omega, f(D(a;r))$ abierto*
2. *$f : D(a;r) \to f(D(a;r)$ biyectiva*
3. *$(f^{-1})'(f(w)) = \frac{1}{f'(w)}$*

Theorem. *Sea $f \in H(\Omega), f \neq c$. Sea $m \geq 1$ el orden del cero de $f(z) - f(a)$ en $z = a$. Entonces $\exists U \subseteq \Omega$ entorno de a, $\varphi \in H(U)$ y $r > 0$ tal que*

1. *$f(z) = f(a) + (\varphi(z))^m \ \forall z \in U$*
2. *$\varphi'(z) \neq 0 \ \forall z \in U$ y $\varphi : U \to D(0;r)$ es biyectiva*

Theorem (Teorema de la aplicación abierta). *Sea $f \in H(\Omega), f \neq c$, f es abierta (envía abiertos a abiertos)*

Theorem (Weierstrass). *Sea $f_i \in H(\Omega) \in i \geq 1$. $\forall K \subseteq \Omega$ compacto $f_n|_K \to f|_K$ es uniformemente convergente a la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Entonces $f \in H(\Omega)$*

3 Teoría global de Cauchy

Definition (Indice respecto a un punto). *sea Γ un camino cerrado y orientado en $\mathbb{C}$, definimos el indice de Γ respecto al punto a como*

$$n(\Gamma, a) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - a}$$

Theorem. *Sea Γ un camino cerrado y orientado fijado. Entonces $n(\Gamma, \cdot) : \mathbb{C} - \Gamma \to \mathbb{Z}$ es constante en cada una de sus componentes conexas y 0 en la no fitada*

Definition (Ciclos homólogos). *Γ es homólogo a 0 en $\Omega(\Gamma \sim 0) \iff \forall a \notin \Omega \ n(\Gamma, a) = 0$*

Dos ciclos son homólogos en $\Omega(\Gamma_1 \sim \Gamma_2) \iff \Gamma_1 - \Gamma_2 \sim 0$

Definition (Homotopía de caminos). *Dos caminos son homótopos* ($\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$) *si se pueden deformar de forma continua en* Ω. *Es decir*

$$\exists F : [0,1] \times [0,1] \to \Omega, F \in \mathcal{C}^0 : \begin{cases} F(0,t) = \gamma_1(t) \\ F(1,t) = \gamma_2(t) \\ F(s,1) = F(s,0) \end{cases}$$

Observamos que $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2 \implies \Gamma_1 \sim \Gamma_2$ pero $\Gamma_1 \sim \Gamma_2 \not\Longrightarrow \Gamma_1 \simeq \Gamma_2$

Theorem (Teorema de Cauchy Global). *Sea* $f \in H(\Omega)$ *y* Γ *ciclo tal que* $\Gamma \sim 0$ *en* Ω

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0, \qquad n(\Gamma, a)f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz \quad \forall a \in \Omega - \Gamma$$

Definition (Singularidades). .

1. ***Evitable*** *si* $\exists \lim_{z\to a} f(z) = L \in \mathbb{C} \implies$ *prolongación holomorfa con* $f(a) = L$
2. ***Polo*** *si* $\exists \lim_{z\to a} |f(z)| = \infty \implies f(z) = (z-a)^{-m}h(z)$ *con* h *holomorfa*
3. ***Esencial*** *si* $\nexists \lim_{z\to a} f(z) \implies f(D(a;\varepsilon) - \{a\})$ *es denso en* $\mathbb{C}$ *(Casorati-Weierstrass)*

Theorem (Series de Laurent). *Sea* $f \in H(A(R_1, R_2))$, *entonces f admite un desarrollo*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a;r)^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \qquad R_1 < r < R_2$$

Definition (Residuo). *Sea* $f \in H(\Omega)$ *y* a *una singularidad aislada de* f

$$Res(f,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a;\varepsilon)} f(z)dz \qquad \varepsilon > 0 : D(a;\varepsilon) - \{a\} \subseteq \Omega$$

Observamos que si $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n \implies Res(f,a) = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-a)^m f(z)\right)$

Theorem (Residuos). *Sea* $f \in H(\Omega - \{a_j\}$ *con* $\{a_j\}$ *conjunto de singularidades aisladas finitas o numerables y* $\Gamma \sim 0$ *un ciclo* $a_j \notin \Gamma$.

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_j n(\Gamma, a_j)Res(f, a_j)$$

Definition (Función meromorfa). *Sea* $f \in H(\Omega)$ *con* $\{a_j\}$ *conjunto de singularidades aisladas finitas o numerables.* f *es meromorfa si todas las* a_j *son polos.*

Theorem (Principio del argumento). *Sea* f *meromorfa en* Ω *con ceros* $\{a_j\}$ *y polos* $\{b_j\}$. *Sea* $\Gamma \sim 0$ *un ciclo tal que* $a_j, b_j \notin \Gamma$ *:*

$$n(f(\Gamma), 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_j n(\Gamma, a_j) - \sum_k n(\Gamma, b_k)$$

Theorem (Rouche). *Sea* $f \sim 0 : \ \forall z \in \Omega - \Gamma, \ n(\Gamma, z) = 0$ *ó* $1, \quad f, g \in H(\Omega), \quad |f(z) - g(z)| < |f(z)| \ \forall z \in \Gamma \implies \#z_{f,\Gamma} = \#z_{g,\Gamma}$

Proposition. *Son equivalentes:*

1. Ω *simplemente conexo*
2. *Para todo ciclo* $\Gamma \subseteq \Omega$ *se cumple* $\Gamma \sim 0$
3. *Sea* $f \in H(\Omega)$ *existe* $F \in H(\Omega)$ *primitiva holomorfa tal que* $F' = f$
4. $f \in H(\Omega), \Gamma \subseteq \Omega$ *se tiene* $\int_\Gamma f(z)dz = 0$
5. *Sea* $f \in H(\Omega), f(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$. *Existe* $g \in H(\Omega) : f = e^g$ *(*$g = \log f$ *determinación holomorfa del logaritmo)*

Theorem (Gauss-Lucas). *Sea* $p(z)$ *un polinomio. Las raíces de* $p'(z)$ *están en la envoltura convexa de las raíces de* $p(z)$