Álgebra Multilineal

Abel Doñate Muñoz
abel.donate@estudiantat.upc.edu

Contents

1 Formas de Jordan

Por el *Primer teorema de Descomposición* tenemos que todo espacio se puede escribir como suma directa de núcleos de potencias de $f - \lambda_i I$, donde λ_i son los VAPs del endomorfismo f:

$$E = \ker(f - \lambda_1 I)_1^m \oplus \cdots \oplus \ker(f - \lambda_r I)^{m_r}$$

Además, se cumple

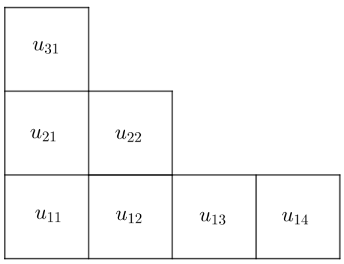
$$0 = \ker(f - \lambda_i I)^0 \subset \ker(f - \lambda_i I)^1 \subset \cdots \subset \ker(f - \lambda_i I)^{m_i} = \cdots$$

Es por esto por lo que todo endomorfismo se puede descomponer en endomorfismos más simples, ya que los VAPs generan subespacios invariante. Por ello trabajaremos con endomorfismos de un solo VAP (con multiplicidad > 1)

Para todo el capítulo definimos:

- $f : E \to E, \ n = \dim(E)$
- $Q_f(t) = (\lambda - t)^n, \ m_f(t) = (t - \lambda)^m$
- $N^i = \ker(f - \lambda I)^i = \ker(g^i), \ d_i = \dim(N^i)$

Para hacerlo más visual desarrollaremos el concepto de *Edificio de Jordan.* Calcularemos los subespacios N^i y construiremos el edificio tal que el el $i-$ésimo piso haya vectores de N^i, pero no de N^{i-1} y además sean l.i. entre sí. Buscaremos también que $g(u_{i,j}) = u_{i-1,j}$, es decir, que para bajar un piso (en la misma columna) solo se deba aplicar g. Esto es lo que dará la forma a la matriz de Jordan.



$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & & \\ & 1 & \lambda & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & 1 & \lambda & & \\ & & & & & \lambda & \\ & & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Proposición: Son equivalentes

- $u_1, \ldots, u_s$ l.i. de N^i, $[u_1, \ldots, u_s] \cap N^{i-1} = 0$
- $\dim([u_1, \ldots, u_s]) = s, \ [u_1, \ldots, u_s] \oplus N^{i-1} \subseteq N^i$
- $g(u_1), \ldots, g(u_s)$ l.i. de N^{i-1}, $[g(u_1), \ldots, g(u_s)] \cap N^{i-2} = 0$
- $\dim([g(u_1), \ldots, g(u_s)]) = s, \ [g(u_1), \ldots, g(u_s)] \oplus N^{i-2} \subseteq N^{i-1}$
- $g^{i-1}(u_1), \ldots g^{i-1}(u_s)$ l.i. de N^1

2 Formas cuadráticas

2.1 Definiciones

Para esta sección $\varphi : E \to E$ será una forma bilineal simétrica y $\dim(E) = n$

Una forma cuadrática es una aplicación $q : E \to \mathbb{K}$ tal que existe φ que cumple $q(x) = \varphi(x, x)$. Existe una biyección entre las formas cuadráticas y formas bilineales simétricas:

$$q(x) = \varphi(x, x) \qquad \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$$

La matriz $M_e(q)$ cumple $q(x) = x^T M_e x$ donde x está escrito en base e. Por el *Teorema Espectral*, como M es simétrica, podemos diagonalizarla en una base ortogonal. Podemos usar la diagonalización o el Método de Gauss.

2.2 Rango, Radical e Indice

Nos encontramos con tres propiedades de las formas cuadráticas:

- **Rango** $rang(\varphi) = rang(M(\varphi))$
- **Radical** $rad(\varphi) = \{x \in E \mid \varphi(x,y) = 0 \forall y \in E\}$
- **Indice** $\begin{cases} i_+(\varphi) & = \#\lambda_i > 0 \\ i_-(\varphi) & = \#\lambda_i < 0 \\ i(\varphi) & = \min(i_+, i_-) \end{cases}$

2.3 Clasificación Afín y Proyectiva

Afín
$\varphi : E \to E$ es *Afín-equivalente* a $\psi : F \to F$ (**rellenar**) si existe un isomorfismo $\alpha : E \to F$ tal que $\psi = \varphi \circ (\alpha^-1 \times \alpha^-1)$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R} \implies rang(\varphi) = rang(\psi),\ i_+(\varphi) = i_+(\psi)$

Proyectiva
$\varphi : E \to E$ es *Proyectivo-equivalente* a $\psi : F \to F$ (**rellenar**) si existe un isomorfismo $\alpha : E \to F$ y un $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ tal que $\psi = \lambda\varphi \circ (\alpha^-1 \times \alpha^-1)$
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R} \implies rang(\varphi) = rang(\psi),\ i(\varphi)i(\psi)$

3 Tensores

Un *p-q tensor* es un elemento f del espacio vectorial definido como

$$\boxed{\mathcal{T}_p^q(E) = \{f : E^{\times p} \times (E^*)^{\times q} \to \mathbb{K} \mid f \text{ multilineal}\} = \mathcal{L}(E^{p)}, (E^*)^{q)}; \mathcal{K})}$$

Los tensores *Covariantes* son los que pertenecen a $\mathcal{T}_p := \mathcal{T}_p^0$
Los tensores *Contravariantes* son los que pertenecen a $\mathcal{T}^q := \mathcal{T}_0^q$

Podemos escribir la base de un tensor $f \in \mathcal{T}_p^q$ como

$$\mathcal{B}_p^q = \{e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} \mid i_k, j_k \in [n]\} = \{e^{\otimes I} \otimes e_{\otimes J}\}$$

Observamos que la dimensión de f es $n^{(p+q)}$

Si queremos expresar un tensor f en la base $\mathcal{B}$ sus componentes son:

$$f = \sum f(e_{\times I} e^{\times J})(e^{\otimes I} e_{\otimes J})$$

3.1 Producto tensorial

Definimos el producto tensorial como

$$f \otimes g : E^{\times(p+r)} \times (E^*)^{\times(q+s)} \to \mathbb{K} \text{ cumpliendo } \boxed{f \otimes g(x,y,u,v) = f(x,u)g(y,v)}$$

3.2 Cambio de base

El producto tensorial entre dos matrices (o producto de Kronecker) se define como

$$M \otimes N = \begin{pmatrix} m_{1,1}N & \cdots & m_{1,r}N \\ \vdots & & \vdots \\ m_{r,1}N & \cdots & m_{r,r}N \end{pmatrix}$$

Sea $M_{u,e} = \begin{pmatrix} u_1(e^1) & u_2(e^1) \\ u_1(e^2) & u_2(e^1) \end{pmatrix}$ y $M_{u^*,e^*} = \begin{pmatrix} u^1(e_1) & u^2(e_1) \\ u^1(e_2) & u^2(e_1) \end{pmatrix}$ las matrices de cambio de base.
Una propiedad importante es que $M_{u,e}^T M_{u^*,e^*} = I$.
Si ahora queremos calcular el cambio de base de $u^* \otimes u$ a $e^* \otimes e$ tenemos que

$$M_{u^* \otimes u, e^* \otimes e} = M_{u^*,e^*} \otimes M_{u,e}$$

3.3 Tensores simétricos y antisimétricos

$f \in \mathcal{T}_p(E)$ es *Simétrico* ($f \in \mathcal{S}$) si $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$
$f \in \mathcal{T}_p(E)$ es *Antisimétrico* ($f \in \mathcal{A}$) si $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$

Podemos construir dos operadores: el de simetrización y el de antisimetrización

$$\mathcal{S}(f) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma f, \qquad \mathcal{A}(f) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \sigma f$$

Propiedades de estos operadores

- $\mathcal{S}(f) \in \mathcal{S}_p(E)$ y $\mathcal{A}(f) \in \mathcal{A}_p(E)$
- $\mathcal{S}, \mathcal{A}$ son proyectores $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}, \mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$
- $\mathcal{T}_p(E) = \mathcal{S}_p(E) \oplus \ker(\mathcal{S}) = \mathcal{A}_p(E) \oplus \ker(\mathcal{A})$

3.4 Producto exterior

Sean $f \in \mathcal{T}_p(E), g \in \mathcal{T}_q(E)$ definimos el producto exterior como

$$f \wedge g := \frac{(p+q)!}{p!q!} \mathcal{A}(f \otimes g) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma)(f \otimes g) \in \mathcal{A}_{p+q}(E)$$

Algunas propiedades básicas son

- $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$
- $(\lambda f) \wedge (f \wedge g) = f \wedge (\lambda g)$
- $f \wedge (g + g') = (f \wedge g) + (f \wedge g')$
- $g \wedge f = (-1)^{pq} f \wedge g$

Podemos construir la siguiente base de el espacio de tensores antisimétricos $\mathcal{A}_p(E)$

$$\mathcal{B} = \{e^I \mid I \in \mathcal{L}_p\}, \text{ donde } \mathcal{L}_p = \{(i_1, \ldots, i_p) \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n\}$$

3.5 Propiedades

- $f = \sum f(e_{\times I}, e^{\times J}) e^{\otimes I} e_{\otimes J}$
- $\sigma(u^1 \otimes \ldots \otimes u^p) = u^{\tau(1)} \otimes \ldots \otimes u^{\tau(p)}, \quad (\tau := \sigma^{-1})$
- $\mathcal{A}(\mathcal{A}(f) \otimes g) = \mathcal{A}(f \otimes \mathcal{A}(g)) = \mathcal{A}(f \otimes g)$
- $u^1 \wedge \ldots \wedge u^p = p! \mathcal{A}(u^1 \otimes \ldots \otimes u^p) = \sum_\sigma \epsilon(\sigma) u^{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes u^{\sigma(p)}$
- $\sigma(u^1 \wedge \ldots \wedge u^p) = \epsilon(\sigma) u^1 \wedge \ldots \wedge u^p$
- $(u^1 \wedge \ldots \wedge u^p)(x_1, \ldots, x_p) = \det(u^i(x_j))$
- $e^{\wedge I}(e_{\times J}) = \delta_I^J$

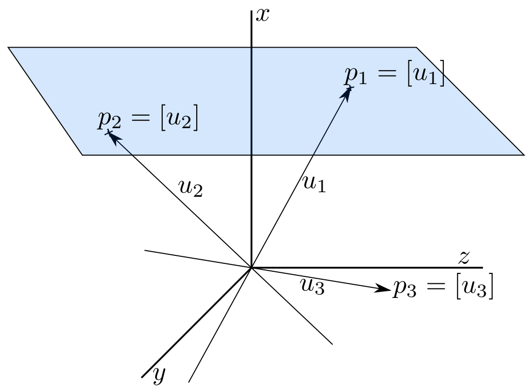
4 Espacio proyectivo

4.1 Definiciones

Un espacio proyectivo sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ es una terna $(\mathbb{P}, E, \pi)$ siendo $\pi : E - 0 \to \mathbb{P}$ una aplicación exhaustiva que satisface $\pi(x) = \pi(y) \iff x = \lambda y$.
Denotaremos $p = \pi(x) = [x]$. Definimos $\dim \mathbb{P} = \dim E - 1$.

Un Espacio proyectivo se puede pensar como la unión disjunta de un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de la misma dimensión y un espacio proyectivo de una dimensión menos:

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{K}^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}$$



4.2 Variedades lineales proyectivas

Una variedad lineal proyectiva (vlp) $L = [F]$definida por el subespacio F es el subconjunto de $\mathbb{P}$ definido como $\pi(F - 0)$.
Propiedades:

- $\dim L = \dim F - 1$
- $L_1 \subseteq L_2 \iff F_1 \subseteq F_2$
- Si $L_1 \subseteq L_2 \implies \dim L_1 \leq \dim L_2$
- Si $L_1 \subseteq L_2$ y $\dim L_1 = \dim L_2 \implies L_1 = L_2$

En cuanto a la intersección y el joint ($\vee$), sean $L_1 = [F_1], L_2 = [F_2]$:

- $L_1 \cap L_2 = [F_1 \cap F_2]$
- $L_1 \vee L_2 = [F_1 + F_2]$
- Grassmann: $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim L_1 \cap L_2 + \dim L_1 \vee L_2$

4.3 Referencias proyectivas

Una referencia proyectiva es un conjunto $\mathcal{R} = \{p_0, \ldots, p_n; U\}$ de $n+1$ puntos ordenados li y un punto unidad U combinación lineal de todos los otros con ningún coeficiente 0.

Cuando $U = [e_0 + \ldots + e_n]$ con $p_i = [e_i]$, entonces la referencia se denomina "adaptada". Este punto fuerza a que el factor de proporcionalidad sea constante, y por tanto, que las coordenadas estén bien definidas.

4.4 Cambio de base

Sean $\mathcal{R}_1 = \{p_0, \ldots, p_n; U\}$, $\mathcal{R}_2 = \{q_0, \ldots, q_n; V\}$ dos referencias proyectivas de $\mathbb{P}$. Sean $e_0, \ldots, e_n$ y $u_0, \ldots; u_n$ bases adaptadas. Sea $M_{u,e}$ la matriz de cambio de base.

La matriz de cambio de referencia de $\mathcal{R}_2 \to \mathcal{R}_1$ es $[M_{u,e}] \in \mathbb{P}(M_{n+1}(\mathbb{K}))$

Sean $x = x_0e_0 + \ldots + x_ne_n, y = y_0u_0 + \ldots + y_nu_n$. Podemos expresar sus coordenadas proyectivas como:

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_0 : \ldots : x_n), \qquad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (y_0 : \ldots : y_n), \qquad X = M_{u,e}Y$$

(Completar)

4.5 Coordenada Absoluta y razón doble

Sea $q = [xe_0 + ye_1]$. Definimos la *coordenada absoluta* $\theta(q) = \frac{x}{y}$ si $q \neq p_0$ y $\theta(p_1) = \infty$. Esta aplicación $\theta : \mathbb{P}^1 \to \bar{\mathbb{K}}$ está bien definida.

Definimos ahora la *razón doble* de q_1, q_2, q_3, q_4:

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\det(v_1, v_3)\det(v_2, v_4)}{\det(v_1, v_4)\det(v_2, v_3)} = \frac{(\theta_3 - \theta_1)(\theta_4 - \theta_2)}{(\theta_4 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_2)}$$

La razón doble de cuatro puntos no depende de la referencia.
Si $\mathcal{R} = \{p_1, p_2; U\}$, algunas propiedades:

- $(q_1, q_2, q_3, q_4)(q_1, q_2, q_4, q_5) = (q_1, q_2, q_3, q_5)$
- $(q_1, q_2, q_3, q_4) = 0 \iff q_1 = q_3$ ó $q_2 = q_4$
- $(q_1, q_2, q_3, q_4) = \infty \iff q_2 = q_3$ ó $q_1 = q_4$
- $(q_1, q_2, q_3, q_4) = 1 \iff q_1 = q_2$ ó $q_3 = q_4$
- $(p_1, p_2, q_3, q_4) = \frac{\theta(q_4)}{\theta(q_3)}$
- $(p_1, p_2, U, q_4) = \theta(q_4)$

4.6 Teoremas

4.6.1 Teorema de Desargues

4.6.2 Teorema de Pappus

5 Espacio proyectivo y afín

5.1 Clausura proyectiva

Recordemos que un *espacio afín* es una terna $(\mathcal{A}, E, s)$, que satisface:

- $\exists\ s : \mathcal{A} \times E \to \mathcal{A}$ tal que $s(a, u) = a + u$
- $(a + u) + v = a + (u + v)$
- Para cada $a, b \in \mathcal{A}\ \exists!\ u \in E$ tal que $a + u = b$

La *clausura proyectiva* de un espacio afín es un espacio proyectivo $\bar{\mathcal{A}}$ tal que $\mathcal{A} \cong \bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}_\infty$, donde $\mathcal{A}_\infty$ es el hiperplano del infinito.

(Dibujo fancy)

Podemos construir una aplicación $i : \mathcal{A} \to \mathbb{P}$ ...

Sea $\mathbb{B} = \mathbb{P} - H$. Sea $L = [F]$ vlp no contenida en H. Si $q \in L \cap \mathbb{B} \implies L \cap B$

5.2 Coordenadas

5.3 Pasar de coordenadas afines a proyectivas

Ejemplo 1

$$L = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}] \implies \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_1 - 2 \\ 0 & x_2 \\ 0 & x_3 \\ 1 & x_4 - 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_1 - 2 \\ 0 & x_2 \\ 0 & x_3 \\ 0 & x_4 - x_1 + 1 \end{array}\right) \implies \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 - x_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

Para calcular $\overline{L}$ podemos (1) hacer el join de los puntos de la clausura (los puntos afines serán puntos con cordenada $x_0 = 1$ y los vectores puntos con coordenada $x_0 = 0$) o (2) homogeneizar las ecuaciones implícitas:

$$(1) : \overline{L} = (1 : 2 : 0 : 0 : 1) \vee (0 : 1 : 0 : 0 : 1) \qquad (2) : \overline{L} : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 - x_1 + x_0 = 0 \end{cases}$$

6 Dualidad

El espacio dual de $\mathbb{P}$ es el conjunto $\mathbb{P}^* = \{H | H \text{ hiperplano de } \mathbb{P}\}$
Se comprueba que $\mathbb{P}^*$ es también un espacio proyectivo $(\mathbb{P}^*, E^*, \pi^*)$ Podemos definir naturalmente el dual de una vlp como:

$$L = [F]_\pi \implies L^* = [F^\perp]_{\pi^*}$$

Existe una biyección $Vlp_d(\mathbb{P}) \iff Vlp_{n-d-1}(\mathbb{P}^*)$

Propiedades:

- $[\omega]_{\pi^*} := [\ker(\omega)]_\pi$
- $L_1 \subset L_2 \implies L_2^* \subset L_1^*$
- $L = L_1 \cap L_2 \implies L^* = L_1^* \vee L_2^*$
- $L = L_1 \vee L_2 \implies L^* = L_1^* \cap L_2^*$

6.1 Principio de dualidad

Una frase es dualizable y solo si es composición de dimensiones, inclusiones, contenciones, intensecciones y joins de vlps:

- $\mathcal{F}_1 : \dim L = d \implies \mathcal{F}_1^* : dim L = n - d - 1$
- $\mathcal{F}_2 : L_1 \supset L_2 \implies \mathcal{F}_2^* : L_1 \subset L_2$
- $\mathcal{F}_3 : L_1 \subset L_2 \implies \mathcal{F}_3^* : L_1 \supset L_2$
- $\mathcal{F}_4 : L = L_1 \cap L_2 \implies \mathcal{F}_4^* : L_1 \vee L_2$
- $\mathcal{F}_5 : L = L_1 \vee L_2 \implies \mathcal{F}_5^* : L_1 \cap L_2$

Denotamos como *enunciado* $\mathcal{E}$, una hipótesis $\mathcal{H}$ que implica una tesis $\mathcal{T}$: $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \mathcal{T}$.
El *Principio de dualidad* nos dice que si $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \mathcal{T}$, entonces se cumple también $\mathcal{E}^* : \mathcal{H}^* \to \mathcal{T}^*$

Con este principio podemos dualizar los teoremas proyectivos que ya conocemos como Desargues o Pappus. En el caso de Desargues llegamos a su recíproco, y en el de Pappus a un nuevo resultado.

7 Proyectividades

7.1 Proyectividades

Una proyectividad es una aplicación $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ inducida por un isomorfismo $\varphi : E \to E'$ tal que $f = [\varphi]$.
En particular una homografía es una proyectividad $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$

7.2 Propiedades

Propiedades de las vlp:

- Si $L = [F] \implies f(L) = [\varphi(F)]$ y $\dim f(F) = \dim L$
- $f|_L : L \to f(L)$ definida por $f|_L = [\varphi|_F]$
- $L_1 \subseteq L_2 \iff f(L_1) \subseteq f(L_2)$
- $f(L_1 \cap L_2) = f(L_1) \cap f(L_2)$
- $f(L_1 \vee L_2) = f(L_1) \vee f(L_2)$
- $f(q_0 \vee \ldots \vee q_m) = f(q_0) \vee \ldots \vee f(q_m)$
- $q_0, \ldots, q_m$ l.i. $\implies f(q_0), \ldots, f(q_m)$ l.i.

Propiedades de las referencias:

- Si $\mathcal{R} = \{p_0, \ldots, p_n; U\} \implies f(\mathcal{R}) = \{f(p_0), \ldots, f(p_n); U\}$ es referencia
- Si e es base adaptada a $\mathcal{R} \implies \varphi(e)$ base adaptada a $f(\mathcal{R})$
- q_1, q_2, q_3, q_4 alineados en $\mathbb{P} \implies f(q_1), f(q_2), f(q_3), f(q_4)$ alineados y $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (f(q_1), f(q_2), f(q_3), f(q_4))$
- La proyectividad queda determinada por la imagen de la base.

7.3 Caracterización geométrica de las proyectividades

Si $\dim \mathbb{P} \geq 1$ tenemos la caracterización:

$$f \text{ proyectividad} \iff \begin{cases} f \text{ biyectiva} \\ f \text{ colineación} \\ f \text{ conserva razón doble} \end{cases}$$

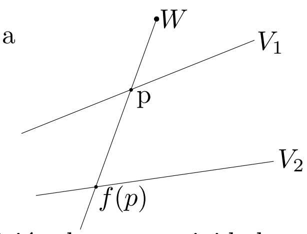
Para $\dim \mathbb{P} = 1$ lo mismo sin colineación.

7.4 Tipos de proyectividades

7.4.1 Perspectividad

Dadas V_1, V_2 vlp disjuntas de dimensión d. W la vlp complementaria a ambas con dimensión $n - d - 1$.
La pespectividad de centro W sobre V_1, V_2 es:

$$\begin{aligned} f : V_1 &\to V_2 \\ p &\to f(p))(W \vee p) \cap V_2 \end{aligned}$$

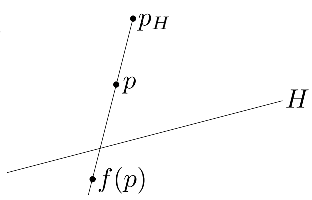


Por el **Teorema de Poncelet** la proyectividad $f : V_1 \to V_2$ es composición de perspectividades.

7.4.2 Homologías

Una **Homologías** de eje H hiperplano es una homografía f que deja fijo H y tiene un único punto fijo p_H. Además toda recta por p_H es invariante.

- $p_H \notin H \implies$ homología general. $m_\varphi(t) = (t - a)(t - b)$
- $p_H \in H \implies$ homología especial. $m_\varphi(t) = (t - a)^2$



7.4.3 Involución

f homografía tal que $f^2 = I$ con $f \neq I$

Tenemos que $m_\varphi(t) = t^2 - \lambda$:

<u>Caso $\lambda > 0$</u> $\implies A = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & -\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$

<u>Caso $\lambda < 0$</u> $\implies \varphi$ no diagonaliza

7.5 Matriz de una Proyectividad

Tenemos que $M_{\mathcal{R},\mathcal{R}'} = [M_{u,v}(\varphi)]$ donde $[M] = [\lambda M]$ $\forall \lambda \neq 0$

Propiedades

- $M_{\mathcal{R},\mathcal{R}''}(g \circ f) = M_{\mathcal{R}',\mathcal{R}''}(g) M_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}(f)$
- $M_{\mathcal{R}',\mathcal{R}}(f^{-1}) = M_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}(f)^{-1}$
- $M_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(f) = M_{\mathcal{R}',\mathcal{S}'} M_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}(f) M_{\mathcal{S},\mathcal{R}}$
- $M_{\mathcal{R}^*}(f^*) = M_{\mathcal{R}}(f)^T$

7.6 Clasificación de proyectividades

Clasificaremos las proyectividades respecto a su forma de Jordan como relación de equivalencia. $f \sim g \iff$ el edificio de Jordan es el mismo.

Se demuestra que si $L = [F]$ es f-invariante $\implies [\rho^{-1}(F^\perp)]$ es invariante.

Toda homografía es composición de homologías.

7.6.1 Puntos fijos y variedades invariantes

p es un **punto fijo** de $f \iff f(p) = p$
Los puntos fijos son la clase de los VEPs de φ, y las variedades fijas la clase espacio generado por los VEPs de mismo VAP de φ

V es una **variedad invariante** por $f \iff f(V) = V$
Las variedades invariantes son la clase de los subespacios invariantes de φ

Propiedades:

- V_1, V_2 invariantes $\implies V_1 \vee V_2, V_1 \cap V_2$ invariantes
- p_1, p_2 puntos fijos $\implies p_1 \vee p_2$ recta invariante
- V $f-$invariante $\implies V^* f^*-$invariante

7.6.2 Homografías en la recta $\mathbb{P}^1$

El tipo representa las afinidades de las que viene tomando p_∞ como el punto del infinito.

Tipo	Forma de Jordan φ	Forma de Jordan f	Puntos Fijos	Vlp invariantes
Identidad	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Todos	Todas
Homología general	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$	p_0, p_1	(por determinar)
Homología especial	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	p_1	
Nada	φ no descomponible	φ no descomponible	$\emptyset$	(por determinar)

7.6.3 Homografías en el plano $\mathbb{P}^2$

Tipo	Forma de Jordan φ	Forma de Jordan f	Puntos Fijos	Vlp invariantes
Identidad	$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$	Todos	Todas
Homología general	$\begin{pmatrix}a&&\\&b&\\&&b\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}a&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$	$p_0, L = p_1 \vee p_2$	p_0^*
Homología especial	$\begin{pmatrix}a&&\\1&a&\\&&a\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&&\\1&1&\\&&1\end{pmatrix}$	$L = p_1 \vee p_2$	
	$\begin{pmatrix}a&&\\1&a&\\&&b\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&&\\1&1&\\&&a\end{pmatrix}$	p_1, p_2	$p_1 \vee p_2, p_0 \vee p_1$
	$\begin{pmatrix}a&&\\&b&\\&&c\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&&\\&a&\\&&b\end{pmatrix}$	p_0, p_1, p_2	$p_0 \vee p_1, p_1 \vee p_2, p_2 \vee p_0$
	$\begin{pmatrix}a&&\\1&a&\\&1&a\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&&\\1&1&\\&1&1\end{pmatrix}$	p_2	$p_1 \vee p_2$
	$\begin{pmatrix}a&&\\&b&c\\&d&e\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&&\\&a&b\\&c&d\end{pmatrix}$	p_0	$p_1 \vee p_2$

8 Cuádricas

8.1 Definiciones y propiedades básicas

Una **Cuádrica** es el conjunto de puntos p tal que la forma cuadrática $Q(p) = 0 \iff x^T Ax = 0$

p es un **Punto singular** de Q $\iff u \in rad(\varphi) = \ker(A)$.

El conjunto de puntos singulares es $sing(Q)$. Si $sing(Q) \neq 0 \iff$ la cuádrica es degenerada.

8.2 Tangencia y polaridad

- L es generatriz de $Q \iff L \subset Q$
- L es tangente a $Q \iff \varphi(v_1, v_1) \cdot \varphi(v_2, v_2) - \varphi(v_1, v_2)^2 = 0$
- L es secante a $Q \iff \varphi(v_1, v_1) \cdot \varphi(v_2, v_2) - \varphi(v_1, v_2)^2 \neq 0$
- $p_1 \sim_Q p_2$ conjugados o polares $\iff \varphi(v_1, v_2) = 0$
- Hiperplano tangente $T_p(Q) = \{(a_0 : \ldots : a_n)A \begin{pmatrix}x_0\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\}$
- Hiperplano polar $H_p(Q) = \{q : q \sim_Q p\}$

Propiedades si $p_1 \sim p_2$:

- $p_1, p_2 \in Q \iff L = p_1 \vee p_2 \subset Q$
- $p_1 \in Q, p_2 \notin Q \iff L = p_1 \vee p_2$ tangente a Q en p_1
- Si $p \in Q \implies H_p(Q) = T_p(Q)$

8.3 Ejemplos en $\mathbb{P}^2$

Tipo	Matriz	Ecuación	Ecuación afín
Elipse	$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	$x_1^2 + x_2^2 = 1$
Hipérbola	$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$-x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	$x_1^2 - x_2^2 = 1$
Parábola	$\begin{pmatrix} 0 & & -\frac{1}{2} \\ & 1 & \\ -\frac{1}{2} & & 0 \end{pmatrix}$	$-x_0x_2 + x_1^2 = 0$	$x_2 = x_1^2$

8.4 Teoremas

8.4.1 Steiner

8.4.2 Pascal

Sea $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un hexágono inscrito en una cónica Q

$$A_1A_2 \cap A_4A_5, \quad A_2A_3 \cap A_5A_6, \quad A_3A_4 \cap A_6A_1 \quad \text{Están alineados}$$

8.4.3 Brianchon (Dual de Pascal)

Sea $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un hexágono circunscrito en una cónica Q

$$A_1A_4, \quad A_2A_5, \quad A_3A_6 \quad \text{concurrentes}$$