a

Abel Doñate Muñoz

Contents

1 Ecuaciones diferenciales lineales

Definition (EDO lineal)**.** *. Decimos que una EDO es lineal si es de la forma* $\dot{x} = A(t)x + b(t)$
Además se llama

- *Homogénea si* $b(t) = 0$
- *De coeficientes constantes si* A *es constante*

Theorem (Existencia y unicidad)**.** *Sea* A *una matriz con coeficientes continuos. Entonces hay una única solución* φ *a*

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

Definition (Flujo)**.** *Por el teorema anterior está bien definida la siguiente aplicación*

$$\varphi : I \times I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \textit{tal que} \qquad (t, t_0, x_0) \mapsto \varphi(t, t_0, x_0)$$

Definition (Matriz exponencial)**.** $e^{tA} := \sum \frac{A^k t^k}{k!}$

Theorem (Forma canónica de Jordan)**.** *Sea* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$*.* $\exists C \in \mathcal{M}_{n\times n}$ *tal que*

$$J = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix} \qquad \textit{con} \qquad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \vdots \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} j$$

Proposition. *A partir de la EDO* $\dot{x} = Ax$ *la podemos resolver con* $A = C^{-1}JC$ *en*

$$x = e^{tA} = e^{tC^{-1}JC} = C^{-1}e^{tJ}C = C^{-1} \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_k} \end{pmatrix} C$$

Proposition. *Sea* J *un bloque de Jordan con* λ *en la diagonal. Entonces*

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1} \\ & 1 & \cdots & \frac{1}{(k-2)!}t^{k-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix} e^{t\lambda}$$

1.1 Órbitas y Retratos de fase

Definition (Órbita)**.** *Sea el sistema* $\dot{x} = Ax, x_0 \in \mathbb{R}^n$*. Llamamos órbita de* x_0 *a*

$$\mathcal{O}(x_0) = \{\varphi(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^n : t \in \mathbb{R}\}$$

Intuitivamente es el recorrido que hacen todas las soluciones de $\dot{x} = Ax$ *que pasan en algún instante por* x_0

1.2 Estabilidad

Definition (Estabilidad)**.** *Sea* $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ *con* $\gamma(t), \tilde{\gamma}$ *decimos que el sistema es:*

- ***Estable.*** $\forall t_0, \varepsilon > 0\ \exists \varepsilon : \|\gamma(t_0) - \tilde{\gamma}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\| < \varepsilon\ \forall t \geq t_0$
- ***Asintóticamente estable.*** *Estable y* $\forall t_0\ \exists \varepsilon > 0 : \|\gamma(t_0) - \tilde{\gamma}(t_0)\| < \varepsilon$ *para algún* $t_0 \Rightarrow \lim \|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\| = 0$
- ***Inestable.*** *Si no es estable*

Theorem (Estabilidad según espectro). *Sea el sistema $\dot{x} = Ax$ estudiamos la estabilidad de la solución $x = 0$*

1. *Si $Spec(A) \subseteq \{\Re(z) < 0\} \Rightarrow$ Asintóticamente estable*
2. *Si $\exists \lambda \in Spec(A) : \Re(\lambda) > 0 \Rightarrow$ Inestable*
3. *Si $Spec(a) \subseteq \{\Re(z) \leq 0\}$ y $Spec(A) \cap \{\Re(z) = 0\} \neq \emptyset$ y las cajas de Jordan de A con VAPs $\Re(\lambda) = 0$ tienen tamaño $1 \Rightarrow$ Estable pero no Asintóticamente estable*
4. *El resto de casos $\Rightarrow$ Inestable*