a

Abel Doñate Muñoz
abel.donate@estudiantat.upc.edu

Contents

1 Sucesiones de funciones

Definition. *Decimos que* $\{f_n\}_n \to f$ *converge puntualmente si*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ \forall x \in E$$

Observamos que esta definición de convergencia es bastante débil, ya que

- f_k continuas $\not\Longrightarrow$ f continua
- $\dfrac{d}{dx} f \neq \lim \dfrac{d}{dx} f_n$
- $\displaystyle\int_a^b f \neq \lim \int_a^b f_n dx$

Definition. *Decimos que* $\{f_n\}_n \to f$ *converge uniformemente si*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) :\ \textit{si}\ n \geq n_0 \implies \sup |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Definition. f_n *cumple el criterio de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m > N\ |f_n - f_m| < \varepsilon$$

Si f_n es de Cauchy y converge a f puntualmente $\implies$ $f_n \to f$ uniformemente

Al contrario que con la convergencia puntual, la monótona nos asegura:

- f_n continua $\implies$ f continua
- $\displaystyle\int_a^b f = \lim \int_a^b f_n dx$

Theorem. *Teorema de Dini.* $f_n \to f$ *puntualmente sobre un compacto* A*, con* f, f_n *continuas.* f_n *puntualmente monótona* $\implies$ $f_n \to f$ *uniformemente en* A*.*

1.1 Criterios de convergencia

Proposition. *Criterio de Weierstrass. Sea* f_n *tal que* $\forall n\ \exists M_n : |f_n| \leq M_n$

Si $\sum M_n$ *es convergente* $\implies$ $\sum f_n$ *converge uniformemente*

Proposition. *Fórmula de sumación de Abel. Sean* $a_n, b_n, s_n := \sum_{i=0}^n a_i$*. Podemos expresar las sumas como:*

1. $\sum a_k b_k = s_n b_{n+1} - \sum s_k (b_{k+1} - b_k)$
2. $\sum a_k b_k = s_n b_1 + \sum (s_n - s_k)(b_{k+1} - b_k)$

Proposition. *Test de Abel. Sean las funciones* f, g *cumpliendo*

1. $\sum f_n \to f$ *uniformemente*
2. $\forall n\ |g_n| < M$
3. g_n *monótona decreciente*

Entonces $\sum f_n g_n$ *converge uniformemente*

1.2 Series de potencias

Una serie de potencias es una suma definida como $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$. Analizaremos la convergencia en función de la sucesión a_n

Proposition. *Caracterización de la convergencia.*

1. *Si* $\sum a_n$ *converge en* $x_0 \neq 0 \implies$ *converge absolutamente en* $(-x_0, x_0)$ *y uniformemente en* $[a, b]$ *con* $a > -x_0, b < x_0$
2. *Si* $\sum a_n$ *diverge en* $x_0 \implies$ *diverge en* $\mathbb{R} - [-x_0, x_0]$

Definition. *Definimos el radio de convergencia como*

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}}$$

Theorem. *Teorema de Abel. Sea* R *el radio de convergencia de la serie* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$

1. *Si* $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ *converge* $\implies \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *converge uniformemente en* $[0, R]$
2. *Si* $\sum_{n\geq 0} a_n R^n = A \implies \lim_{x\to R^-} \sum_{n\geq 0} a_n x^n = A$

Propiedades de las series de potencias. Sea $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ con radio de convergencia R

- f derivable en $(-R, R)$ y f' tiene el mismo radio de convergencia
- f integrable en $(-R, R)$ y f' tiene el mismo radio de convergencia
- Unicidad. Si $f = g$ en un abierto que contiene el origen $\implies a_n = b_n$

1.3 Series de Taylor

Theorem. *Teorema de Taylor. Si* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *converge en* $(-R, R)$ *y* $c \in (-R, R)$*.*

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Proposition. *Condición suficiente para que una función tenga serie de Taylor.*

Si podemos acotar sus derivadas por $|f^{(n)}(x)| < \gamma M^n \implies$ *podemos definir la serie de Taylor*

2 Espacios de funciones continuas

En todo el tema K compacto. $\mathcal{F} = \{f_n\} \subset C(A, \mathbb{R})$

Definition. *Espacio de funciones continuas.*

$$\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathbb{R}) = \{f : A \to R, f \text{ continua en } A\}$$

Theorem. $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ *con la norma del supremo es un espacio de Banach (normado y completo)*

2.1 Equicontinuidad

Definition. $\mathcal{F}$ *es* ***puntualmente acotado*** *si* $\mathcal{F}_x = \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ *es acotado* $\forall x$

$\mathcal{F}$ *es* ***uniformemente acotado*** *si* $\exists \alpha : \|f\| < \alpha \ \forall f \in \mathcal{F}$

Theorem. *$\mathcal{F}$ es **equicontinua** si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x-y| \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon \ \forall f \in \mathcal{F}$$

Proposition. *Si f_n converge uniformemente en $\mathcal{C}(K,\mathbb{R}) \implies \mathcal{F} = \{f_n\}$ es uniformemente acotada y equicontinua*

Theorem. ***Arzela-Ascoli**. Son equivalentes:*

1. *La familia $\mathcal{F}$ es puntualmente acotada y equicontinua en K*
2. *De cada sucesión de elementos de $\mathcal{F}$ se puede extraer una parcial uniformemente convergente*

Podemos generalizar ahora el teorema de Heine-Borel, que nos dice que en $\mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y acotado $\iff$ compacto

Theorem. *Sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto y $\mathcal{F} \subset C(K,\mathbb{R})$. Entonces*

$$\mathcal{F} \text{ compacto } \iff \mathcal{F} \begin{cases} \text{cerrada} \\ \text{equicontinua} \\ \text{puntualmente acotada} \end{cases}$$

Theorem. ***Aproximación de Weierstrass**. Dada $f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ y un $\varepsilon > 0$*

$$\exists p(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ tal que } \|f-g\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| < \varepsilon$$

Definimos $\begin{cases} (f \vee g) = \max\{f(x), g(x)\} \\ (f \wedge g) = \min\{f(x), g(x)\} \end{cases} \implies \begin{cases} f \vee g = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \\ f \wedge g = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2} \end{cases}$

Definition. *$\mathcal{B} \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ es un **retículo** si es cerrado por las operaciones $\vee, \wedge$*

Theorem. ***Aproximación de Stone**. Sea $\mathcal{B}$ un retículo:*

$$\forall x \neq y \in [a,b] \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \exists f \in \mathcal{B} : f(x) = \alpha, f(y) = \beta$$

Theorem. *Stone-Weierstrass. Si $B \subseteq \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ es una subálgebra que contiene constantes y separa puntos, entonces $\overline{B} = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ (B es denso en las funciones continuas).*

3 Series de Fourier

Al igual que en un espacio vectorial finito, en un espacio de funciones también podemos construir una base ortonormal. En este capítulo se tratarán las bases llamadas de Fourier.

Proposition. *Observamos que el espacio $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ con la norma $\|\cdot\|_2$ **no es completo**.*

Como consecuencia, las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ no son equivalentes

Proposition. *Si (f_n) es una sucesión de funciones integrables riemman que tienden a f con la norma del supremo, entonces también tienden a f en la norma cuadrática. El recíproco es falso.*

Definition. *Un **Espacio de Hilbert** es un espacio vectorial dotado de un producto escalar que induce una norma $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Definition. *Forman una base ortonormal (completar)*

1. $\varphi_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}, \varphi_n = \dfrac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \psi_n \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}$ *en* $\mathcal{C}(-\pi,\pi)$
2. $\varphi_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}, \varphi_n = \dfrac{\cos(n\frac{2\pi}{L}x)}{\sqrt{\pi}}, \psi_n \dfrac{\sin(n\frac{2\pi}{L}x)}{\sqrt{\pi}}$ *en* $\mathcal{C}(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$

3. $\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)$ *en* $\mathcal{C}$

Proposition. *Sea* $\{\varphi_n\}$ *un sistema ortonormal,* $f \in E, a_n = \langle f, \varphi_n \rangle$*. Definimos*

$$f_n = \sum_{k\geq 1} a_k \varphi_k, \quad \sum_{k\geq 1} b_k \varphi_k, \quad b_i \in \mathbb{R}$$

Entonces $\|f_n - f\|_2 \leq \|g_n - f\|_2$ *con igualdad si y solo si* $b_i = a_i \ \forall i$

Theorem. *Sea* $\mathcal{S} = (\varphi_n)$ *y* $f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_n$ *con* $a_k = \langle f, \varphi_k \rangle$*. Entonces*

1. ***Desigualdad de Bessel*** $\sum_{k\geq 1}$ *converge y satisface* $\sum_{k\geq 1} a_k^2 \leq \|f\|_2^2$
2. ***Identidad de Parseval*** *Si además* $\lim_n \|f - f_n\|_2 = 0 \implies \sum_{k\geq 1} a_k^2 = \|f\|_2^2$

Definition. *Consideramos las familias de funciones:*

- ***Funciones continuas a trozos*** $\mathcal{PC}[a,b]$ *funciones continuas excepto en un número finito de puntos*
- ***Funciones suaves*** $\mathcal{PS}[a,b]$ *funciones tal que* $f, f' \in \mathcal{PC}[a,b]$

Definition. *La* ***Serie de Fourier trigonométrica*** *de* $f \in \mathcal{PS}[-\pi,\pi]$ *es*

$$S_f(x) = \lim S_f^n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Definition. *La* ***Serie de Fourier compleja*** *de* $f \in \mathcal{PS}[-\pi,\pi]$ *es*

$$SC_f(x) = \lim SC_f^n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

donde

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

Theorem (Teorema de Dirichlet)**.** *Sea* $f \in \mathcal{PS}[-\pi,\pi]$ *y consideramos su extensión periódica a* $\mathbb{R}$*. Entonces*

$$\lim SC_f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$$

Definition. *El* ***Núcleo de Dirichlet*** *es la función*

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}$$

Esta función tiende a la delta de Dirac en el límite.

Theorem (Convergencia uniforme de serie de Fourier)**.** *Si* $f \in \mathcal{PS}[-\pi,\pi]$ *tal que la extensión periódica es continua, entonces* (SC_f^N) *converge uniformemente a* f*.*

Theorem (Identidad de Parseval)**.** *Si* $f \in \mathcal{PS}[-\pi,\pi]$*:*

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{k\in Z} |c_k|^2 = \pi\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n^2 + b_n^2\right)$$

4 Teoría de la medida

Definition ($\sigma-$álgebra)**.** *. Sea X un conjunto. Una $\sigma-$álgebra sobre X es una $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que cumple los axiomas:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{X}$
2. *Si* $A \in \mathcal{X} \implies \overline{A} \in \mathcal{X}$
3. *Si* $A_i \in \mathcal{X} \implies \bigcup_{i\geq 0} A_i \in \mathcal{X}$

Llamaremos a $(X, \mathcal{X})$ un **espacio mesurable**

Definition (Álgebra de Borel)**.** *Es la $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$ generada por los intervalos abiertos (a, b).*

Se demuestra que el álgebra de Borel tambien contiene los intervalos de la forma $(a, b], [a, b), [a, b]$

Definition (Función mesurable)**.** *Sea $f : X \to \mathbb{R}$. f es mesurable si*

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{X} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Las siguientes son equivalentes a que una función f sea mesurable

1. $A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{X}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
2. $A_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{X}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $A_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{X}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
4. $A_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{X}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Si f, g son mesurables, entonces son mesurables $cf, f^2, f + g, fg, |f|$

f es mesurable $\iff$ f^+, f^- son mesurables

Definition. *Sea (f_n) una sucesión con $f_i \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X})$ definimos*

- $f(x) = \inf f_n(x)$
- $F(x) = \sup f_n(x)$
- $f^*(x) = \liminf f_n(x)$
- $F^*(x) = \liminf f_n(x)$

Entonces $f, F, f^*, F^* \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X})$

4.1 Medida

Definition (Mesura)**.** *Una mesura es una función $\mu : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$ tal que*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(E) \geq 0\ \forall E \in \mathcal{X}$
3. *Si* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *con* $i \neq j \implies \mu\left(\bigcup_{i\geq 1} E_i\right) = \sum_{i\geq 1} \mu(E_i)$

Definition (Espacio de mesura)**.** *Es un triplete $(X, \mathcal{X}, \mu)$ donde $(X, \mathcal{X})$ es un espacio mesurable y μ es una mesura sobre $\mathcal{X}$*

4.2 Medida exterior

Definition (Álgebra de conjuntos)**.** *La familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es un álgebra si*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. Si $E \in \mathcal{A} \implies \overline{E} \in \mathcal{A}$
3. Si $E_i \in \mathcal{A}, i \leq n \implies \bigcup E_i \in A$

La diferencia con una σ-algebra es que el algebra es cerrada bajo uniones finitas y la σ-algebra bajo contables.

Definition (Mesura). *Una mesura sobre el álgebra $\mathcal{A}$ es una función $\mu : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$ tal que*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(E) \geq 0 \ \forall E \in \mathcal{A}$
3. Si $E_i \cap E_j = \emptyset$ con $i \neq j$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A} \implies \mu\left(\bigcup_{i\geq 1} E_i\right) = \sum_{i\geq 1} \mu(E_i)$

Definition (Mesura exterior). *Definimos $\mu^*(B) = \inf \sum \mu(E_j)$ sobre las colecciones $B \subseteq \bigcup E_j$. Entonces*

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. $\mu^*(B) \geq 0 \ \forall B \in \mathcal{P}(X)$
3. $A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
4. $B \in A \implies \mu^*(B) = \mu(B)$
5. $(B_n) \subseteq \mathcal{P}(X) \implies \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n)$

Definition (Condición de Caratheodory). *Decimos que un conjunto E es μ^*-mesurable si satisface*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E) \ \forall A \subseteq X$$

La colección de conjuntos μ^*-mesurables es $\mathcal{A}^*$

Theorem (Teorema de extensión de Caratheodory). *$\mathcal{A}^*$ es una $\sigma-$álgebra que contiene A, y por tanto $(X, \mathcal{A}^*)$ es un espacio mesurable. Si E_n es disjunta de $\mathcal{A}^*$:*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

4.3 Mesura de Lebesgue

Queremos fabricar una mesura $l^* = \lambda$ en $\mathbb{R}$ que coincida con las longitudes de los intervalos.

Comenzamos con el álgebra generada por los intervalos $\underline{\sigma}(\mathcal{I})$ y su mesura l que coincide con los intervalos. La mesura exterior + la concición de Caratheodory nos dan la mesura de Lebesgue.

Definition (Conjuntos mesurables Lebesgue). *$\mathcal{L} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A$ cumple Caratheodory$\}$. Entonces*

1. $\mathcal{L}$ es una $\sigma-$álgebra
2. $l^* = \lambda$ es una mesura sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$

Tenemos por tanto $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$

4.4 Integral de Lebesgue

Definition (Función simple). *Es una función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ con imagen finita $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{I}_{E_j}$*

Proposition. *Monotonicidad de la integral de Lebesgue*

1. $f \leq g \implies \int f \leq \int g$

2. $E \subseteq F \implies \int_E f \leq \int_F f$

Theorem (Teorema de la Convergencia monótona (TCM))**.** *Sea* $(f_n) \in M^+(X, \mathcal{X})$ *una sucesión monótona creciente que converge a* f *puntualmente. Entonces:*

$$\int f = \lim \int f_n$$

Es generalizable a funciones convergentes puntualmente μ*-g.a.*

Theorem (Lema de Fatou)**.** *Sea* $(f_n) \in M^+(X, \mathcal{X})$ *sucesión, entonces:*

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$$

Proposition. *Sea* $(g_n) \in M^+(X, \mathcal{X})$*. Entoces*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n$$

Theorem. *Una función mesurable* f *es de* $L \iff |f| \in L$*. Entonces*

$$|\int f| \leq \int |f|$$

Theorem (Convergencia Dominada (TCD))**.** *Sea* (f_n) *mesurables que convergen* μ*-g.a. a* f*. Si existe una función integlable* $g : |f_n| \leq g \ \forall n \implies f$ *integrable y*

$$\int f = \lim \int f_n$$

Theorem. *Si* f *es integrable Riemann en* $[a, b] \implies f \in L(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ *y las integrales coinciden*

4.5 Espacios L^p

Theorem (Riesz-Fischer)**.** *El espacio* $(L_p, \|\cdot\|_p), 1 \leq p < \infty$ *es normado y completo* $\implies$ *es un espacio de Banach.*

Proposition. *El espacio* $L^2(-\pi, \pi)$ *es un espacio de Hilbert donde podemos realizar la serie de Fourier, ya que la familia* $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}$ *es completa en* $L^2(-\pi, \pi)$