Geometría afín y euclidea

Abel Doñate

May 31, 2022

Contents

1 Espacio afín

1.1 Definición y propiedades

Un espacio afín es una terna $\mathbf{A} = (A, E, \delta)$ $\begin{cases} A \text{ Conjunto (puntos)} \\ E \text{ K-espacio vectorial (vectores)} \\ \delta : A \times A \to E \implies \delta(p,q) = \overline{pq} \end{cases}$

Propiedades

(1) $\delta(p,q) = 0 \iff p = q$

(2) $\delta(q,p) = -\delta(p,q)$

(3) Regla del paralelogramo $\delta(p_1,p_2) = \delta(p_3,p_4) \iff \delta(p_1,p_3) = \delta(p_2,p_4)$

1.2 Sistemas de referencia

Sea $R = \{p_0; B\}$, $\bar{R} = \{\bar{p_0}; \bar{B}\}$ tal que $(\bar{p_0})_R = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ Sea S la matriz cambio de base $S = M_{\bar{B}\to B} = ((\bar{u}_1)_B, \cdots, (\bar{u}_n)_B)$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & S & & \cdots \\ & & & a_n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \\ 1 \end{pmatrix} = \widetilde{S} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \\ 1 \end{pmatrix} \implies \widetilde{S}^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & S^{-1} & & -S^{-1}a \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1.3 Variedades lineales

Si tenemos $F \subset E$ un subespacio vectorial, entonces tenemos que $V = a + F$ es un variedad lineal.
Fórmulas de Grassmann

- Si $V \cap W \neq \phi \implies \dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(F \cap G)$
- Si $V \cap W = \phi \implies \dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(F \cap G) + 1$

2 Afinidades

2.1 Puntos fijos y Varidedades invariantes

Definition: p es un punto fijo $\iff f(p) = p$.
El subespacio vectorial generado por estos puntos es $W = p_0 + \ker(f - I)$ (solución particular + subespacio homogéneo)

Definition: V es una variedad invariante $\iff f(V) \subseteq V$.
Para ello debe ocurrir $\begin{cases} \widetilde{f}(F) \subseteq F \\ \overline{af(a)} \in F \end{cases}$

Hiperplano $ax + by + cz + d = 0$: es invariante si y solo si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ VEP de $\tilde{A}^T$

2.2 Tipos de afinidades

2.2.1 Traslación

$f(p+u) = f(p) + u \implies \widetilde{f} = I$
Sin puntos fijos.

2.2.2 Homotecia

$f(p) = o + \lambda \overline{op} \implies \widetilde{f} = \lambda I$, donde el punto o es el centro de la homotecia.
El punto fijo es o.

2.2.3 Proyección

$f^2 = f \implies \widetilde{f}^2 - \widetilde{f} = 0$. El polinomio anulador es $P(t) = t(t-1)$.
Los puntos fijos son el subespacio afín $V = Im(f) = q + Im(\widetilde{f})$

2.2.4 Simetría

$f^2 = I \implies \widetilde{f}^2 = I$. El polinomio anulador es $P(t) = t^2 - 1$. Los puntos fijos son $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}f(p)$.

Si tenemos un sistema de referencia $\overline{R} = \{p_0; u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_n\}$, donde $u_1, \cdots, u_r$ son VEPs de VAP 1 y $u_{r+1}, \cdots, u_n$ son VEPs de VAP -1. La matriz asociada de la función es:

$$M_{\overline{R}}(f) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2.2.5 Homología

f tiene un hiperplano de puntos fijos. $V = p_o + F, \dim(F) = n - 1$ con $F = \ker(f - I)$.
El poinomio anulador es $P = (x-1)^{n-1}(x-a)$

3 Teoremas

3.1 Teorema de Thales

3.2 Teorema de Ceva

3.3 Teorema de Menelao

3.4 Teorema de Pappus

3.5 Teorema de Desargues

4 Espacio euclídeo

Un espacio Euclideo es un espacio vectorial dotado con un producto escalar

$$<,>: E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \begin{cases} \text{bilineal} \\ \text{simétrico} \\ \text{definido positivo} \end{cases} , \quad <u,v> = u^T M v, \quad M = (<u_i, u_j>)$$

4.1 Proyección

Tenemos el subespacio $F = [v_1, \cdots, v_d]$, y su subespacio ortogonal $F^\perp$.

$$u = u' + u'', \quad u' = \pi_F(u) \in F, \ u'' = \pi_{F^\perp}(u) \in F^\perp \implies u' = \sum \alpha_i v_1 \quad M\bar{\alpha} = (<u, v_i>)$$

4.2 Producto vectorial

4.3 Ángulos y orientaciones

$$\cos\alpha = \frac{<u,v>}{||u||||v||} \quad \begin{cases} (\det V)^2 \alpha \in (0, \pi \text{ si } \{u,v\} \text{ es base positiva } (\det S > 0)) \\ \alpha \in (\pi, 2\pi \text{ si } \{u,v\} \text{ es base negativa } (\det S < 0)) \end{cases}$$

4.4 Determinante de Gram

Este determinante nos da el volumen (n-dimensional) al cuadrado de la transformación lineal.

$$G(v_1 \cdots, v_n) = \det(< v_i, v_j >) = \det(V^T V) \overset{\text{si V es base}}{=} (\det V)^2$$

$$G(v_1, \cdots, v_m) = ||v'_m||^2 G(v_1, \cdots, v_{m-1}), \quad \text{donde} \quad v'_m = \pi_{[v_1, \cdots, v_{m-1}]^\perp}(v_m)$$

4.5 Distancias

Distancia punto-recta

$$d(p, r) = \frac{V(v_1, p - p_1)}{V(v_1)} = \frac{||v_1 \wedge (p - p_1)||}{||v_1||}$$

Distancia recta-recta

$$d(r_1, r_2) = \frac{V(v_1, v_2, p_2 - p_1)}{V(v_1, v_2)} = \frac{\sqrt{(\det(v_1, v_2, p_2 - p_1))}}{||v_1 \wedge v_2||}$$

Distancia punto-hiperplano

$$d(p, H) = \frac{|A_1 a_1 + \ldots A_n a_n + D|}{\sqrt{A_1^2 + \ldots A_n^2}}$$

5 Movimientos

6 Cónicas y cuádricas