Teoría Geometría

Abel Doñate
abel.donate@estudiantat.upc.edu

1 Varietats lineals

Varietats lineals. Definició i propietats bàsiques. Inclusió, intersecció i suma. Dimensions i Fórmula de Grassman.

Variedad lineal:

$$V = p + F \quad \text{donde} \quad p \in \mathbb{A}, F \subset \mathbb{E}, \quad \dim F = \dim V$$

Suma

$$V + W := [V, W] \text{ (comb afines) } = p + [F, G, p - q]$$

Intersección

$$V \cap W := \{x \in \mathbb{A} | x \in V, x \in W\} = c + F \cap G$$

Posiciones relativas

- Si $V \cap W = \phi$ y $F \subseteq G$ ó $G \subseteq F \implies$ son paralelas
- Si $V \cap W \neq \phi \implies$ se cortan
- Si no se cortan ni son paralelas $\implies$ se cruzan

Fórmula de Grassmann

$$\begin{cases} (1) \text{ Si } V \cap W \neq \phi \implies \dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(F \cap G) \\ (2) \text{ Si } V \cap W = \phi \implies \dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(F \cap G) + 1 \end{cases}$$

Dem:
(1) Se demuestra que $p - q \in F + G$. Aplicamos Grassmann para espacios vectoriales sabiendo $\dim(V) = \dim(F)$.
(2) Se demuestra que $p - q \notin F + G$. Aplicamos Grassmann para espacios vectoriales sabiendo $\dim(V) = \dim(F)$.

2 Teoremes clàssics de la geometria afí plana

2.1 Thales

H_1, H_2, H_3 hiperplanos paralelos entre ellos, r, s dos rectas concurrentes ($r \cap s = P$) no paralelas a H_i:

$$\text{Si } A_i = H_i \cap r, B_i = H_i \cap s \implies (A_1, A_2, A_3) = (B_1, B_2, B_3)$$

Demostración
Consideramos la referencia $\mathcal{R} = \{P; \text{ base de } F, v\}$. Tenemos entonces:

$$\begin{cases} A_1 = (\dots, a), B_1 = (\dots, a) \\ A_2 = (\dots, b), B_2 = (\dots, b) \\ A_3 = (\dots, c), B_3 = (\dots, c) \end{cases} \implies \lambda = \frac{c - a}{b - a} = \frac{c - a}{b - a} \iff (A_1, A_2, A_3) = (B_1, B_2, B_3)$$

2.2 Ceva

$$r_i =< p_i, q_i > \text{ paralelas o concurrentes } \iff (q_1, p_2, p_3)(q_2, p_3, p_1)(q_3, p_1, p_2) = -1$$

Demostración

$$r_1 : (1-a)x - ay = 0, \quad r_2 = bx + y = b, \quad r_3 : x + cy = c$$

Por tanto si se cortan debe ocurrir (sistema compatible determinado)

$$\det \begin{pmatrix} 1-a & -a & 0 \\ b & 1 & b \\ 1 & c & c \end{pmatrix} = 0 \iff \frac{a}{a-1} \frac{b}{b-1} \frac{c-1}{c} = (q_1, p_2, p_3)(q_2, p_3, p_1)(q_3, p_1, p_2) = -1$$

2.3 Menelao

$$q_1, p_2, q_3 \text{ alineados } \iff (q_1, p_2, p_3)(q_2, p_3, p_1)(q_3, p_1, p_2) = 1$$

Demostración

$$q_1q_2 = (-a, a+b-1), \quad q_1q_3 = (c-a, a-1)$$

$$q_1, q_2, q_3 \text{ alineados } \iff -a(a-1) = (c-a)(a+b-1) \iff (q_1, p_2, p_3)(q_2, p_3, p_1)(q_3, p_1, p_2) = 1$$

2.4 Pappus

p_1, p_2, p_3 en una recta, q_1, q_2, q_3 en otra recta.

$$A_i =< p_j, q_l > \cap < p_l, q_j > \Longrightarrow A_1, A_2, A_3 \text{ alineados}$$

Demostración
Consideramos $t_i =< p_i, q_j > \cap < p_l, q_i >$. Por el teorema de Menelao tenemos:

$$(q_1, t_1, t_3)(q_3, t_3, t_2)(q_2, t_2, t_1) = 1 \quad (1)$$
$$(p_3, t_1, t_3)(p_2, t_3, t_2)(p_1, t_2, t_1) = 1 \quad (2)$$
$$(A_1, t_2, t_1)(q_1, t_1, t_3)(p_2, t_3, t_2) = 1 \quad (3)$$
$$(A_2, t_1, t_3)(q_3, t_3, t_2)(p_1, t_2, t_1) = 1 \quad (4)$$
$$(A_3, t_3, t_2)(q_2, t_2, t_1)(p_3, t_1, t_3) = 1 \quad (5)$$

Si hacemos:

$$\frac{(3)(4)(5)}{(1)(2)} = (A_1, t_2, t_1)(A_2, t_1, t_3)(A_3, t_3, t_2) = 1 \iff A_1, A_2, A_3 \text{ están alineados}$$

2.5 Desargues

Sean $ABC, A'B'C'$ dos triángulos:

$$< A, A' >, < B, B' >, < C, C' > \text{ son concurrentes } \iff \begin{cases} P =< A, B > \cap < A', B' > \\ Q =< B, C > \cap < B', C' > \\ M =< C, A > \cap < C', A' > \end{cases} \text{ están alineados}$$

3 Propietats de les afinitats

Propietats bàsiques. Caracterització geomètrica de les afinitats.

Designaremos una afinidad como $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$. Entonces existe una aplicación lineal $\tilde{f} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ tal que:
Propiedades

- $f(p) - f(q) = \tilde{f}(p - q) \iff f(p + \bar{u}) = f(p) + \tilde{f}(\bar{u})$
- f inyectiva $\Longrightarrow$ $\tilde{f}$ inyectiva, f exhaustiva $\Longrightarrow$ $\tilde{f}$ exhaustiva, f biyectiva $\Longrightarrow$ $\tilde{f}$ biyectiva

- Si $\sum \lambda_i = 1 \implies f(\sum \lambda_i p_i) = \sum \lambda_i f(p_i)$
- Si f afinidad, g afinidad $\implies f \circ g$ afinidad

Caracterización geométrica
f afinidad $\iff$ conserva los puntos alineados y las razones simples. ($\mathbb{K} \neq \mathbb{Z}_2$)
Sean a, b, c alineados con $b - a = u, c - a = \lambda u$

$$f(c) - f(a) = \tilde{f}(c - a) = \tilde{f}(\lambda u) = \lambda \tilde{f}(u)$$
$$f(b) - f(a) = \tilde{f}(b - a) = \tilde{f}(u) = \tilde{f}(u)$$

4 Simetries i projeccions

Definicions, propietats, formes reduïdes i interpretació geomètrica.

Simetrías. Realiza una simetría con respecto a la variedad de puntos fijos (con VAP 1)

$$f^2 = I, \implies \tilde{f}^2 = I, \quad \text{Puntos fijos } V = \{\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}f(p)\ \forall p\}, \quad P(t) = t^2 - 1 \implies \lambda_i = \pm 1$$

Si la simetría se hace sobre un hiperplano podemos usar la fórmula $M = I - 2\dfrac{uu^T}{u^T u}$

Proyecciones. Realiza una proyección sobre la variedad de puntos fijos (con VAP 1).

$$f^2 = f, \implies \tilde{f}^2 = \tilde{f}, \quad \text{Puntos fijos } V = Im(f), \quad P(t) = t(t-1) \implies \lambda_i = 0, 1$$

$$M_{\bar{R}}(f_{sim}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad M_{\bar{R}}(f_{proy}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

5 Isometries

Definició, caracterització i propietats. El Teorema de Classificació (en dimensió arbitrària).
Definición Isometría

$$\varphi \text{ es una isometría} \iff <\varphi(u), \varphi(v)> = <u, v>\ \forall u, v \in \mathbb{E}$$

Caracterización

$$\varphi \text{ isometría} \iff A^T A = I$$

Propiedades
Las isometrías son giros o rotaciones.

- $||\varphi(u)|| = ||u||\ \forall u \in \mathbb{E}$
- $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ es b.o $\implies B' = \{\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)\}$ es b.o
- $M_B(\varphi)$ ortogonal

Teorema de la clasificación
Si φ es una isometría, entonces existe una base donde la matriz se puede expresar como:

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \boxed{B_1} & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \text{con } \boxed{B_i} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$$

A su vez ϕ se puede descomponer en una simetría y una rotación:

$$M_B(\phi) = M_B(\phi_{sim})M_B(\phi_{rot}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \boxed{B_1} & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Dem:
Tenemos si un VAP λ de VEP v es complejo, entonces sus conjugados también lo son. Sea $v = v_1+iv_2, \lambda = a + bi$ tenemos $f(v_1) = cv_1 + dv_2, f(v_2) = ev_1 + fv_2$

6 Moviments

Definició. Teorema de caracterització de moviments. Teorema de classificació (en dimensió arbitrària).

<u>Definición</u>
f movimiento $\iff d(f(p_1), f(p_2)) = d(p_1, p_2)\ \forall p_1, p_2$

<u>Caracterización</u>
f movimiento $\iff \tilde{f}$ isometría y f afinidad
Dem:
$\Leftarrow$
$||f(p_1) - f((p_2)|| = ||\tilde{f}(p_1 - p_0) - \tilde{f}(p_2 - p_0)|| = ||\tilde{f}(p_1 - p_2)|| = ||p_1 - p_2||$
$\Rightarrow$
Obs: f mov $\implies f$ inyectiva
Lema: a, b, c alineados (en orden) $\iff d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$
f movimiento $\implies$ mantiene distancias $\implies$ (Lema) mantiene alineaciones y razones simples $\implies f$ afinidad.
$||\tilde{f}(u)|| = ||f(p + u) - f(p)|| = ||p + u - p|| = ||u|| \implies \tilde{f}$ isometría

<u>Teorema de clasificación</u>
Podemos clasificar todos los movimientos de la siguiente manera:

$$M_{\bar{R}}(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & a \\ & M_B & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad M_B(\tilde{f}) \text{ es la matriz de la isometría } \tilde{f}$$

Dem:
Por el teorema de caracterización de movimientos, sabemos que $\tilde{f}$ es una isometría.
Si $\exists p_0$ punto fijo, hemos acabado. Si no existe, $\exists V$ formada por VEPs de VAP 1 con una b.o. $\{u_{r+1}, \dots, u_n\}$. Cogiendo $u_1 = \dfrac{f(p_0) - p_0}{||f(p_0) - p_0||}$, tenemos que $f(p_0) = p_0 + au_1$ y siempre podemos coger los vectores $u_2, \dots, u_r$ ortonormales a los demás.