MÓDULO 10

- **ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN**
- **ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES.**
- **ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS.**
- **ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS- FACTOR DE INTEGRACIÓN.**
- **ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN HOMOGÉNEAS.**

Introducción

Una **ecuación diferencial** es una ecuación en la que intervienen una función y una o más de sus derivadas. Si la función tiene solamente una variable independiente, la ecuación se denomina **ecuación diferencial ordinaria.** Por ejemplo, $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-2y=0$ es una ecuación diferencial ordinaria en la que $y=f(x)$ es una función dos veces diferenciable de *x*.

Si la función depende de dos o más variables, las derivadas serán parciales, denominándose la ecuación en este caso **ecuación en derivadas parciales.**

Además de por el **tipo** (ordinarias o parciales), las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse por el orden. El **orden** de una ecuación diferencial es el de la derivada más alta que figura en la ecuación. Ambas clasificaciones (tipo y orden) resultan útiles para decidir qué procedimientos utilizar para resolver una ecuación diferencial dada. Veamos la siguiente clasificación

Ecuación	Tipo	Orden
a) $y'''+4y=2$	Ordinaria	3
b) $\frac{d^2s}{dt^2}=32$	Ordinaria	2
c) $(y')^2-3y=e^x$	Ordinaria	1
d) $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$	Parcial	2
e) $y-\operatorname{sen}y'=0$	Ordinaria	1

Una función $y = f(x)$ se denomina **solución** de una ecuación diferencial si la ecuación se satisface cuando se sustituyen *y* y sus derivadas por $f(x)$ y sus derivadas, respectivamente.

Por ejemplo, derivando y sustituyendo veríamos que $y = e^{-2x}$, $y = 3e^{-2x}$ e $y = \frac{1}{2}e^{-2x}$ son algunas de las soluciones de la ecuación diferencial $y' + 2y = 0$.

La solución $y = Ce^{-2x}$, siendo *C* un número real cualquiera, se denomina **solución general.**

10.1.-

Demostrar que cada una de las funciones definidas en la columna I es solución de la ecuación diferencial correspondiente de la columna II, siendo $y = f(x)$.

I	II
$f(x) = x + 3e^{-x}$	$\frac{dy}{dx} + y = x + 1$
$f(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x}$	$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = 0$
$f(x) = e^x + 2x^2 + 6x + 7$	$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$
$f(x) = \frac{2}{3}\operatorname{sen} x$	$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$
$f(x) = -5\operatorname{sen} x + \frac{1}{7}\cos x$	$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$
$f(x) = -\frac{17}{28}e^x$	$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$
$f(x) = 4e^x - \frac{1}{5}e^{-x} + 6e^{2x}$	$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$

10.2.-

a) Demostrar que cada función definida por $f(x) = (x^3 + c)e^{-3x}$; donde c es una constante arbitraria, es una solución de la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2e^{-3x}$.

b) Demostrar que cada función definida por $f(x) = 2 + c\ e^{-2x^2}$; donde c es una constante arbitraria, es una solución de la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x$.

10.3.-

a) Demostrar que cada función *f* definida por $f(x) = c_1\ e^{4x} + c_2\ e^{-2x}$; donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, es una solución de la ecuación diferencial: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 8y = 0$

10.4.-

Considerando que toda solución de $\frac{dy}{dx} + y = 2x\ e^{-x}$; se puede escribir en la siguiente forma: $y = (x^2 + c)e^{-x}$, para alguna elección de la constante arbitraria *c*, resolver los siguientes problemas de valor inicial:

a) $\frac{dy}{dx} + y = 2x\ e^{-x}$; $y(0) = 2$

b) $\frac{dy}{dx} + y = 2x\ e^{-x}$; $y(-1) = e + 3$.

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\ y = Q(x) \qquad (1)$$

Donde *P* y *Q* son funciones continuas sobre un intervalo dado, es una **ecuación diferencial lineal de primer orden**.

El método más usado para resolver la ecuación (1) es multiplicar ambos miembros de la ecuación por una función apropiada $I(x)$, que se conoce como **factor integrante.** Trataremos de determinar a $I(x)$, de manera que el miembro izquierdo de la ecuación (1), cuando se multiplica por $I(x)$ se convierta en la derivada del producto $I(x)y$:

$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)' \qquad (2)$$

Si podemos encontrar dicha función *I*, entonces la ecuación (1) se convierte en

$$(I(x)y)' = I(x)Q(x)$$

Al integrar ambos lados, tendríamos: $I(x)y = \int I(x)Q(x)dx + C$ y despejando la solución sería:

$$y = \frac{1}{I(x)}.\left[\int I(x)Q(x)dx + C\right] \qquad (3)$$

Para hallar la función *I* , desarrollamos la ecuación (2) y cancelamos términos:

$$I(x)y' + I(x)P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$

$$I(x)P(x) = I'(x)$$

Ésta es una ecuación diferencial separable para I , la cual se resuelve de la siguiente manera:

$$\int \frac{dI}{I} = \int P(x)dx$$

$$\ln|I| = \int P(x)dx$$

$$I = Ae^{\int P(x)dx}$$

donde $A = \pm e^{c}$. Estamos buscando un factor integrante particular, y no el más general, de modo que tomamos $A = 1$ y utilizamos

$$I(x) = e^{\int P(x)dx} \qquad (4)$$

Así que una fórmula para la solución general de la ecuación (1) la proporciona la ecuación (3) en donde I está dada por la expresión (4).

<u>Conclusión</u>

Para resolver la ecuación diferencial lineal $\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)$ multiplicamos sus dos miembros por el **factor integrante** $I(x) = e^{\int P(x)dx}$ e integramos ambos miembros.

Ejemplo 1

Resolveremos la ecuación $y' + \underbrace{2x}_{P(x)} y = \underbrace{2xe^{-x^2}}_{Q(x)}$

El factor integrante es $I(x) = e^{\int 2xdx} = e^{x^2} \Rightarrow y = \frac{1}{e^{x^2}}\left[\int e^{x^2}.2xe^{-x^2}dx\right] = e^{-x^2}(x^2 + C)$

Ejemplo 2

Queremos resolver: $\frac{dy}{dx} - 3x^2 y = x^2$

En este caso $P(x) = -3x^2 \rightarrow e^{\int -3x^2\,dx} = e^{-x^3}$ este es el factor de integración.

Ahora multiplicamos ambos miembros de la ecuación diferencial por dicho factor.

$$\underbrace{y'e^{-x^3} - 3x^2e^{-x^3}}_{\frac{d}{dx}\left(y.e^{-x^3}\right)} = x^2e^{-x^3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y.e^{-x^3}\right) = x^2e^{-x^3} \rightarrow y.e^{-x^3} = \int x^2e^{-x^3}dx \rightarrow y.e^{-x^3} = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C \rightarrow y = -\frac{1}{3} + C.e^{\,x^3}$$

La solución general de la ecuación diferencial es: $y = -\frac{1}{3} + C.e^{x^3}$

Supongamos que nos piden una solución particular con la condición: $y(0) = 1$.

Entonces reemplazamos en la solución general $x = 0$ $y = 1$ y obtenemos el valor de C.

$1 = -\frac{1}{3} + C\,e^0 \rightarrow C = \frac{4}{3}$ así la solución particular nos queda:

$$y = \frac{4}{3}.e^{x^3} - \frac{1}{3}$$

Ejemplo 3

Sea $x^2 y' + 5xy + 3x^5 = 0 \; x \neq 0$

Primero dividimos la ecuación diferencial por x^2

$y' + \frac{5}{x} y + 3x^3 = 0 \rightarrow y' + \underbrace{\frac{5}{x}}_{P(x)} y = \underbrace{-3x^3}_{Q(x)}$, el factor de integración es:

$$e^{\int P(x)\;dx} = e^{\int \frac{5}{x} dx} = e^{5\ln x} = e^{\ln x^5} = x^5$$

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación diferencial por el factor de integración

$$\underbrace{x^5 y' + 5x^4 y}_{\frac{d}{dx}\left(x^5 y\right)} = -3x^3$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^5 y\right) = -3x^3 \rightarrow x^5 y = \int -3x^3\,dx \rightarrow x^5 y = -\frac{3}{4}x^4 + C \rightarrow y = -\frac{3}{4}x^{-1} + C\,x^{-5}$$

La solución general de la ecuación diferencial es $y = -\frac{3}{4}x^{-1} + C\,x^{-5}$

Ejemplo 4

$y' + ytgx = \sec x + 2x\cos x$ Factor integrante: $e^{\int \tan x\;dx} = e^{-\ln(\cos x)} = e^{\ln(\cos x)^{-1}} = \frac{1}{\cos x}$

multipicando ambos miembros:

$$y'\frac{1}{\cos x}+y\tan x\frac{1}{\cos x}=\sec x\frac{1}{\cos x}+2x\cos x\frac{1}{\cos x}$$
$$y'\frac{1}{\cos x}+y\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+2x$$
$$\frac{d}{dx}\left(y\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{1}{\cos^2 x}+2x$$
$$y\frac{1}{\cos x}=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+2x\right)dx=\tan x+x^2+C\rightarrow y=\operatorname{sen} x+x^2\cos x+C\cos x$$

10.5.-

Resolver las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

$a)$ $\frac{dy}{dx}-3x^2y=x^2$ $\qquad$ $b)$ $x^2y'+5xy+3x^5=0 \quad x\neq 0$

$c)$ $y'+y\operatorname{tg} x=\sec x+2x\cos x$ $\qquad$ $d)$ $y'+2y=e^{2x}$

$e)$ $y'-3y=2$ $\qquad$ $f)$ $xy'-3y=x^5$

$g)$ $y'+y\cot x=\csc x$ $\qquad$ $h)$ $xy'+y+x=e^x$

$i)xy'+(1+x)y=5$ $\qquad$ $j)$ $x^2dy+(2xy-e^x)dx=0$

$k)$ $x^2dy+(x-3xy+1)dx=0$ $\qquad$ $l)$ $y'+y\cot x=4x^2\csc x$

$m)$ $y'+y\operatorname{tg} x=\operatorname{sen} x$ $\qquad$ $n)$ $(y\operatorname{sen} x-2)\,dx+\cos x\,dy=0$

$o)$ $(x^2y-1)\,dx+x^3\,dy=0$ $\qquad$ $p)$ $xy'+(2+3x)y=x\,e^{-3x}$

$q)$ $x^{-1}y'+2y=3$ $\qquad$ $r)$ $y'-5y=e^{5x}$

10.6.-

Encontrar la solución particular de la ecuación que satisface la condición dada:

$a)$ $xy'-y=x^2+x$; $y=2$ cuando $x=1$

$b)$ $y'+2y=e^{-3x}$; $y=2$ cuando $x=0$

$c)$ $xy'+y+xy=e^{-x}$; $y=0$ cuando $x=1$

<u>Ecuaciones diferenciales a variables separables</u>

La ecuación diferencial de primer orden tiene la forma: $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$, donde $F(x, y)$ es alguna función de dos variables x e y.

El caso especial en el que F puede factorizarse como una función de x multiplicada por una función de y, es decir, cuando $F(x, y) = f(x).g(y)$ se llama **ecuación separable,** y nos permite escribir**:**

$$\frac{dy}{dx} = f(x).g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{h(y)} \Rightarrow h(y)dy = f(x)dx$$

integrando ambos miembros $\int f(x)dx = \int h(y)dy$ hallamos la solución general.

Ejemplo 1

Queremos resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = e^{-y}\cos x$, esta ecuación puede llevarse a variables separables:

$$\frac{dy}{e^{-y}} = \cos x dx \Rightarrow \int \cos x dx = \int e^{y} dy \Rightarrow e^{y} = \operatorname{sen} x + C \Rightarrow y = \ln(\operatorname{sen} x + C) \text{(I)}$$

Ésta es la solución general. Observamos que involucra a una constante arbitraria C.

Para determinar el valor de la constante C, nos deben indicar el valor inicial, por ejemplo, $y(0) = 1$, remplazando en la solución general $1 = \ln(\operatorname{sen} 0 + C) \Rightarrow C = e^{1}$.

Ejemplo 2

$$4xydx + (x^2 + 1)dy = 0$$

$$4xydx + (x^2 + 1)dy = 0 \rightarrow 4xydx = -(x^2 + 1)dy \rightarrow -\frac{4x}{(x^2 + 1)}dx = \frac{1}{y}dy \rightarrow -\int \frac{4x}{(x^2 + 1)}dx = \int \frac{1}{y}dy \rightarrow$$

$$\rightarrow -2\ln(x^2 + 1) + \ln C = \ln y \rightarrow \ln\left((x^2 + 1)^{-2}.C\right) = \ln y \rightarrow y = (x^2 + 1)^{-2}.C$$

Al calcular las primitivas ponemos la constante de integración en cualquiera de los dos miembros. Además, en este caso, resultó conveniente ponerla como $\ln C$, para reducir la expresión de la solución.

Ejemplo 3

$$(xy + 2x + y + 2)dx + (x^2 + 2x)dy = 0$$

$$(xy + 2x + y + 2)dx + (x^2 + 2x)dy = 0 \rightarrow [x(y + 2) + 1(y + 2)]dx = -(x^2 + 2x)dy \rightarrow$$

$$\rightarrow (x + 1)(y + 2)\,dx = -(x^2 + 2x)dy \rightarrow -\frac{(x + 1)}{(x^2 + 2x)}dx = \frac{dy}{y + 2} \rightarrow -\int \frac{(x + 1)}{(x^2 + 2x)}dx = \int \frac{dy}{y + 2} \rightarrow$$

$$\to -\frac{1}{2}\ln(x^2+2x)+\ln C=\ln(y+2)\to \ln\left[(x^2+2x)^{-\frac{1}{2}}.C\right]=\ln(y+2)\to (x^2+2x)^{-\frac{1}{2}}.C=y+2\to$$

$$\to y=(x^2+2x)^{-\frac{1}{2}}.C-2$$

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Una ecuación diferencial de primer orden $y'=f(x,y)$ se llama **homogénea** si $f(x,y)$ puede escribirse como $g\left(\frac{y}{x}\right)$, donde g es una función de una variable. Por ejemplo, la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}+\ln x-\ln y+\frac{x+y}{x+2y}$$

es homogénea porque puede expresarse como:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}-\ln\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1+\frac{y}{x}}{1+2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Pero la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-xy^2+y^2}{x-y^2}$$

no es homogénea porque el miembro derecho no puede expresarse como una función de $\frac{y}{x}$.

Una ecuación diferencial homogénea $y'=g\left(\frac{y}{x}\right)$ siempre puede transformarse en una ecuación a variables separables al llevar a cabo un cambio de variable $v=\frac{y}{x}$

En consecuencia $y=xv$ así que $y'=v+xv'$.

Por lo tanto, la ecuación diferencial $y'=g\left(\frac{y}{x}\right)$ se convierte en $v+xv'=g(v)\Rightarrow v'=\frac{g(v)-v}{x}$.

Después de resolver esta ecuación a variables separable para v como una función de x tenemos la solución $y=x.v(x)$ de la ecuación diferencial original.

Si la ecuación diferencial es de la forma:

$$M(x,y)\ dx+N(x,y)\ dy=0$$

Donde, con $t>0$,

$$M(t.x,t.y)=t^n\,M(x,y) \qquad y \qquad N(t.x,t.y)=t^n\,N(x,y)$$, **n es el grado de homogeneidad.**

Ahora se hace una sustitución: $y(x)=x.u(x)\rightarrow dy=x\,du+u\,dx$ o bien $x=y.v\rightarrow dx=ydv+vdy$, con la cual la ED se lleva a **variables separadas**.

Ejemplo 1

$$(2xy+3y^2)dx-(2xy+x^2)dy=0$$

$$\begin{aligned}M(tx,ty)&=2tx\,ty+3(ty)^2=t^2(2xy+3y^2)=t^2\,M(x,y)\\N(tx,ty)&=-(2tx\,ty+(tx)^2)=t^2\left[-(2xy+x^2)\right]=t^2\,N(x,y)\end{aligned}$$ es una E.D. homogénea de grado 2.

Hacemos la sustitución: $y(x)=x.u(x)\rightarrow dy=x\,du+u\,dx$

$$(2x.xu+3(xu)^2)\,dx-(2x\,xu+x^2)(x\,du+u\,dx)=0$$
$$(2x^2u+3x^2u^2)\,dx+(-2x^2u-x^2)(x\,du+u\,dx)=0$$
$$2x^2u\,dx+3x^2u^2\,dx-2x^3u\,du-x^3\,du-2x^2u^2\,dx-x^2u\,dx=0$$
$$x^2u\,dx+x^2u^2\,dx-2x^3u\,du-x^3\,du=0$$
$$x^2(u+u^2)\,dx-x^3(2u+1)\,du=0\rightarrow x^2(u+u^2)\,dx=x^3(2u+1)\,du \text{ Var.Sep.}\rightarrow\frac{x^2}{x^3}\,dx=\frac{(2u+1)}{(u+u^2)}du$$
$$\int\frac{1}{x}\,dx=\int\frac{(2u+1)}{(u+u^2)}du\rightarrow\ln x+\ln C=\ln(u+u^2)\rightarrow C.x=u+u^2$$

Ahora debemos reemplazar $u=\dfrac{y}{x}$

$$C\,x=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}\rightarrow C\,x^3=y\,x+y^2$$

En este caso dejamos la solución general en forma implícita.

Ejemplo 2

$$\left(x\tan\frac{y}{x}+y\right)dx-xdy=0$$

Haciendo el procedimiento anterior, vemos que es homogénea de grado 1, sustituimos:

$y(x) = x.u(x) \to dy = x\,du + u\,dx$

$(x\tan u + ux)dx - xu\,dx - x^2\,du = 0$

$x\tan u\,dx + ux\,dx - ux\,dx - x^2\,du = 0$

$x\tan u\,dx = x^2\,du \to \frac{x}{x^2}dx = \cot u\,du \to \frac{1}{x}dx = \frac{\cos u}{\text{sen}\,u}du \to \int \frac{1}{x}dx = \int \frac{\cos u}{\text{sen}\,u}du \to \ln x + \ln C = \ln \text{sen}\,u$

$\ln(Cx) = \ln \text{sen}\,u \to Cx = \text{sen}\left(\frac{\text{y}}{\text{x}}\right) \to \frac{y}{x} = \text{arc sen}\,(Cx) \to y = x\ \text{arc sen}\,(Cx)$

10.7.-

Resolver las ecuaciones de variables separables u homogéneas:

$a)\ \ 4xy\,dx + (x^2+1)\,dy = 0$

$b)\ \ (xy + 2x + y + 2)\,dx + (x^2 + 2x)\,dy = 0$

$c)\ \ 2r(s^2+1)\,dr + (r^4+1)\,ds = 0$

$d)\ \ \csc y\,dx + \sec x\,dy = 0$

$e)\tan\theta dr + 2r\,d\theta = 0$

$f\,)\ \ (e^v+1)\cos u\,du + e^v(\text{sen}\,u + 1)\,dv = 0$

$g)\ \ (x+4)(y^2+1)\,dx + y(x^2+3x+2)\,dy = 0$

$h)\ \ (x+y)\,dx - x\,dy = 0$

$i)\ \ (2xy + 3y^2)\,dx - (2xy + x^2)\,dy = 0$

$j)\ \ v^3\,du + (u^3 - uv^2)\,dv = 0$

$k)\ \ \left(x\,\text{tg}\frac{y}{x} + y\right)dx - x\,dy = 0$

$l)\ \ (2s^2 + 2st + t^2)\,ds + (s^2 + 2st - t^2)\,dt = 0$

$m)\ \ \left(x^3 + y^2\sqrt{x^2+y^2}\right)dx - xy\sqrt{x^2+y^2}\ dy = 0$

10.8.-

Resolver los problemas de valor inicial:

$a)\ \ (y+2)\,dx + y(x+4)\,dy = 0\ \ ;\ \ y(-3) = -1$

$b)\ \ 8\cos^2 y\,dx + \csc^2 x\,dy = 0\ \ ;\ \ y\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{4}$

$c)\ \ (x^2 + 3y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0\ \ ;\ \ y(2) = 6$

<u>Ecuaciones diferenciales exactas</u>

Son de la forma: $M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = 0$

Para que una ecuación sea **diferencial exacta**, debe existir una función $F(x,y) = 0$ tal que:

$$d\,F(x,y) = \underbrace{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}_{M(x,y)}dx + \underbrace{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}_{N(x,y)}\ dy = 0$$

La condición que debe cumplirse para que tal función exista es que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Lo que equivale a decir que las **derivadas parciales cruzadas** de la función $F(x,y)$ son **iguales**.

Resolver una ecuación diferencial exacta, consiste en encontrar $F(x,y)$.

Ejemplo

$$(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0$$

Primero veamos si se cumple la condición de exactitud:

$$M(x,y) = 3x^2 + 4xy \rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4x \qquad N(x,y) = 2x^2 + 2y \rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 4x$$

Se verifica que es una ecuación diferencial exacta, entonces procedemos a buscar $F(x,y)$.

Como $M(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \rightarrow F(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int \left(3x^2 + 4xy\right)dx = x^3 + 2x^2 y + g(y)$

Para determinar la expresión de $g(y)$, derivamos parcialmente la $F(x,y)$ que acabamos de hallar respecto de y, y la igualamos a $N(x,y)$.

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^3 + 2x^2 y + g(y)\right] = 2x^2 + g'(y) = N(x,y) = 2x^2 + 2y \therefore g'(y) = 2y \rightarrow g(y) = y^2 + C$$

Finalmente la solución general de la ecuación diferencial resulta:

$$F(x,y) = x^3 + 2x^2 y + y^2 + C = 0$$

o también se puede escribir $\quad x^3 + 2x^2 y + y^2 = C$

<u>Ecuaciones diferenciales exactas: factor de integración</u>

En algunos casos una ecuación diferencial **no** es exacta, pero puede transformarse en una de ellas, multiplicándola por una función llamada **factor de integración**.

Supongamos tener una ecuación de la forma

$$M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = 0$$

Pero que ocurre

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Como la condición de exactitud es

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Vamos a multiplicar a la ecuación por una función $\mu(x,y)$ que será nuestro factor de integración.

$$\mu(x,y)\, M(x,y)\ dx + \mu(x,y)\, N(x,y)\ dy = 0$$

Y volvemos a imponer la condición de ecuación diferencial exacta:

$$\frac{\partial\left[\mu(x,y)\, M(x,y)\right]}{\partial y} = \frac{\partial\left[\mu(x,y)\, N(x,y)\right]}{\partial x}$$

Hacemos las derivadas en ambos miembros.

$$\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y}\ M(x,y) + \mu(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x}\ N(x,y) + \mu(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Ahora vamos a suponer que el factor de integración es una función que depende **sólo de *x***.

Con esto, la expresión anterior se transforma en:

$$\underbrace{\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y}}_{0}\ M(x,y) + \underbrace{\mu(x,y)}_{\mu(x)}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x}}_{\frac{\partial \mu(x)}{\partial x}}\ N(x,y) + \underbrace{\mu(x,y)}_{\mu(x)}\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$\mu(x)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial \mu(x)}{\partial x}}_{d\,\mu(x)}\ N(x,y) + \mu(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \Leftrightarrow \mu(x)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \mu(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = d\mu(x)\ N(x,y)$$

$\Leftrightarrow \mu(x)\left[\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right] = d\mu(x)\ N(x,y)$, supongamos además que $\mu(x)$ es una función positiva, podemos despejar:

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \underbrace{\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}}_{f(x)}$$

Como $\mu(x)$ y su derivada son funciones sólo de *x*, el segundo miembro también lo es.

Al integrar ambos miembros nos queda

$$\int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)}\,dx = \int \frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}\,dx$$

$$\ln \mu(x) = \int \frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}\,dx$$

Donde tomamos a la constante de integración como $C = 0$, de aquí nos queda:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}\,dx}$$

Haciendo un razonamiento análogo para el caso que $\mu(x,y)$ sea **sólo función de *y***, llegamos a:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)}\,dy}$$

Ejemplo

Vamos a resolver la ecuación diferencial

$$(x + 2y^2)dx + xydy = 0$$

Primero veamos que **no** es exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

Probamos con el primer caso de factor integrante

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = P(x) \rightarrow \frac{4y - y}{xy} = \frac{3}{xy} = \frac{3}{x} = P(x)$$

$$F.I.\ e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

Ahora multiplicamos la ecuación diferencial por el factor integrante

$$(x^4 + 2x^3y^2)dx + x^4ydy = 0$$

Esta ecuación diferencial es exacta, veámoslo

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4x^3y \quad \frac{\partial N}{\partial x}=4x^3y \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

A partir de acá se sigue el mismo procedimiento que antes para hallar $F(x,y)$

$$F(x,y)=\int (x^4+2x^3y^2)\,dx \quad =\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4y^2+g(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=x^4y+g'(y)=N(x,y)=x^4y \rightarrow g'(y)=0 \rightarrow g(y)=C$$

$$F(x,y)=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4y^2+C=0 \quad o \quad \frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4y^2=C$$

10.9.-

Verificar cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas y, en ese caso, resolverlas:

$a)\, y^2dx+2xy\,dy=0 \qquad b)(3x^2+4xy)dx+(2x^2+2y)dy=0$

$c)(2x\cos y+3x^2y)dx+(x^3-x^2\text{sen}y-y)dy=0 \quad y(0)=2$

$d)(e^{2y}-y\cos xy)dx+(2xe^{2y}-x\cos xy+2y)dy=0$

$e)(\cos x\,\text{sen}x-xy^2)dx=y(x^2-1)dy \quad y(0)=2 \qquad f)2t\,\text{sen}y+y^3e^t+(t^2\cos y+3y^2e^t)\frac{dy}{dt}=0$

$g)1+(1+ty)e^{ty}+(1+t^2e^{ty})\frac{dy}{dt}=0 \qquad h)\,y\sec^2 t+\sec t\tan t+(2y+\tan t)\frac{dy}{dt}=0$

$i)2ty^3+3t^2y^2\frac{dy}{dt}=0 \quad y(1)=1 \qquad j)3t^2+4ty+(2y+2t^2)\frac{dy}{dt}=0 \quad y(0)=1$

10.10.-

En cada uno de los siguientes problemas determinar la constante *a* para que la ecuación diferencial sea exacta, y entonces resolverla:

$a)t+ye^{2ty}+ate^{2ty}\frac{dy}{dt}=0$

$b)\frac{1}{t^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{(at+1)}{y^3}\frac{dy}{dt}=0$

$c)e^{at+y}+3t^2y^2+(2yt^3+e^{at+y})\frac{dy}{dt}=0$

10.11.-

Para cada una de las ecuaciones siguientes, encontrar, si es posible, un factor de integración que dependa de una sola variable. En caso de obtenerlo, resolver la ecuación.

$a)\,(x+2y^2)dx+xy\,dy=0$ $\quad b)\,2y\,dx+(x+y)\,dy=0$

$c)\,2y\,dy+(x+y)\,dx=0$ $\quad d)\,(5y-x^2)\,dx+x\,dy=0$

$e)\,(x+y\_xy)\,dx+x\,dy=0$ $\quad f)\,(u+5t)\,du+3u\,dt=0$

$g)\,(u+5t)\,du+3t\,dt=0$ $\quad h)\,xy^2dx+(1+x^2y+x^2y^2)\,dy=0$

$i)\,(x^2+y^2)\,dx+2xy\ln x\,dy=0$ $\quad j)\,2xy\,dx+(y\,e^{x^2}-1)\,dy=0$

$k)\,r\cos\theta\,d\theta+(r-\operatorname{sen}\theta)\,dr=0$ $\quad l)\,(\cos x\cos y+\operatorname{sen}x)\,dx-\cos x\operatorname{tg}y\,dy=0$

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, homogéneas, con coeficientes constantes

Son de la forma: $a\,y''+b\,y'+c=0$

Se ensaya una solución $y=e^{mx}\rightarrow y'=m\,e^{mx}\rightarrow y''=m^2e^{mx}$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$a\,m^2e^{mx}+b\,me^{mx}+c\,e^{mx}=0\rightarrow a\,m^2+b\,m+c=0$ ecuación característica.

De acuerdo a las raíces de la ecuación característica hay tres clases de soluciones para la ecuación diferencial

a) **Raíces reales distintas** $m_1\in R$, $m_2\in R, m_1\neq m_2$

$$y=C_1\,e^{m_1x}+C_2\,e^{m_2x}$$

b) **Raíces reales e iguales** $m_1\in R$, $m_2\in R, m_1=m_2$

$$y=C_1\,e^{mx}+C_2\,x\,e^{mx}$$

c) **Raíces complejas conjugadas** $m_1=\alpha+i\beta \quad m_2=\alpha-i\beta$

$$y=C_1\,e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2\,e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$$

Ejemplo 1

$e)\ y''-3y'+2y=0$

$m^2-3m+2=0\rightarrow m_1=2\quad m_2=1\rightarrow y=C_1e^{2x}+C_2e^{x}$

Ejemplo 2

$g)\,y''+8y'+16y=0$

$m^2+8m+16=0\rightarrow m_1=m_2=-4\rightarrow y=C_1e^{-4x}+C_2\,x\,e^{-4x}$

Ejemplo 3

$c)\quad y'' + y' + y = 0$

$$m^2 + m + 1 = 0 \rightarrow m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \rightarrow y = C_1\, e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + C_2\, e^{-\frac{1}{2}x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$$

10.12.-

Obtener la solución general de las siguientes E.D. lineales de 2º orden homogéneas con coeficientes constantes:

$a)\, 2y'' - 5y' - 3y = 0$ $\qquad f)\, y'' - y' - 6y = 0$

$b)\, y'' - 10y' + 25y = 0$ $\qquad g)\, y'' + 8y' + 16y = 0$

$c)\, y'' + y' + y = 0$ $\qquad h)\, y'' - 10y' + 25y = 0$

$d)\, 3y'' - y' = 0$ $\qquad i)\, 12y'' - 5y' - 2y = 0$

$e)\, y'' - 3y' + 2y = 0$ $\qquad j)\, 8y'' + 2y' - y = 0$

10.13.-

Resolver las ecuaciones dadas sujetas a las condiciones iniciales que se indican:

$a)\, y'' + 16y = 0 \quad y(0) = 2 \;\; y'(0) = -2$ $\qquad c)\, 2y'' - 2y' + y = 0 \quad y(0) = -1 \;\; y'(0) = 0$

$b)\, y'' + 6y' + 5y = 0 \quad y(0) = 0 \;\; y'(0) = 3$ $\qquad d)\, y'' + y = 0 \quad y(\pi/3) = 0 \;\; y'(\pi/3) = 2$

DERIVADAS

1. $\dfrac{dau}{dx} = a\,\dfrac{du}{dx}$

2. $\dfrac{d(u+v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

3. $\dfrac{d(uv)}{dx} = u\,\dfrac{dv}{dx} + v\,\dfrac{du}{dx}$

4. $\dfrac{d(u/v)}{dx} = \dfrac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$

5. $\dfrac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\,\dfrac{du}{dx}$

6. $\dfrac{d(u^v)}{dx} = vu^{v-1}\,\dfrac{du}{dx} + u^v(\log u)\,\dfrac{dv}{dx}$

7. $\dfrac{d(e^u)}{dx} = e^u\,\dfrac{du}{dx}$

8. $\dfrac{d(e^{au})}{dx} = ae^{au}\,\dfrac{du}{dx}$

9. $\dfrac{da^u}{dx} = a^u(\log a)\,\dfrac{du}{dx}$

10. $\dfrac{d(\log u)}{dx} = \dfrac{1}{u}\,\dfrac{du}{dx}$

11. $\dfrac{d(\log_a u)}{dx} = \dfrac{1}{u(\log a)}\,\dfrac{du}{dx}$

12. $\dfrac{d\,\mathrm{sen}\,u}{dx} = \cos u\,\dfrac{du}{dx}$

13. $\dfrac{d\cos u}{dx} = -\,\mathrm{sen}\,u\,\dfrac{du}{dx}$

14. $\dfrac{d\tan u}{dx} = \sec^2 u\,\dfrac{du}{dx}$

15. $\dfrac{d\cot u}{dx} = -\csc^2 u\,\dfrac{du}{dx}$

16. $\dfrac{d\sec u}{dx} = \tan u \sec u\,\dfrac{du}{dx}$

17. $\dfrac{d\csc u}{dx} = -(\cot u)(\csc u)\,\dfrac{du}{dx}$

18. $\dfrac{d\,\mathrm{arcsen}\,u}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\dfrac{du}{dx}$

19. $\dfrac{d\arccos u}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\,\dfrac{du}{dx}$

20. $\dfrac{d\arctan u}{dx} = \dfrac{1}{1+u^2}\,\dfrac{du}{dx}$

21. $\dfrac{d\,\mathrm{arccot}\,u}{dx} = \dfrac{-1}{1+u^2}\,\dfrac{du}{dx}$

22. $\dfrac{d\,\mathrm{arcsec}\,u}{dx} = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,\dfrac{du}{dx}$

23. $\dfrac{d\,\mathrm{arccsc}\,u}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{u^2-1}}\,\dfrac{du}{dx}$

24. $\dfrac{d\,\mathrm{senh}\,u}{dx} = \cosh u\,\dfrac{du}{dx}$

25. $\dfrac{d\cosh u}{dx} = \mathrm{senh}\,u\,\dfrac{du}{dx}$

26. $\dfrac{d\tanh u}{dx} = \mathrm{sech}^2 u\,\dfrac{du}{dx}$

27. $\dfrac{d \coth u}{dx} = -(\operatorname{csch}^2 u)\dfrac{du}{dx}$

28. $\dfrac{d \operatorname{sech} u}{dx} = -(\operatorname{sech} u)(\tanh u)\dfrac{du}{dx}$

29. $\dfrac{d \operatorname{csch} u}{dx} = -(\operatorname{csch} u)(\coth u)\dfrac{du}{dx}$

30. $\dfrac{d \operatorname{arcsenh}^{-1} u}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\dfrac{du}{dx}$

31. $\dfrac{d \operatorname{arccosh}^{-1} u}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

32. $\dfrac{d \operatorname{arctanh}^{-1} u}{dx} = \dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx}$

33. $\dfrac{d \operatorname{arccoth}^{-1} u}{dx} = \dfrac{1}{u^2-1}\dfrac{du}{dx}$

34. $\dfrac{d \operatorname{arcsech}^{-1} u}{dx} = \dfrac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

35. $\dfrac{d \operatorname{arccsch}^{-1} u}{dx} = \dfrac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\dfrac{du}{dx}$

INTEGRALES

1. $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ (n \neq -1)$

2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$

3. $\int e^x\,dx = e^x$

4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}$

5. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$

6. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$

7. $\int \tan x\,dx = -\log|\cos x|$

8. $\int \cot x\,dx = \log|\operatorname{sen} x|$

9. $\int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| = \log|\tan(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi)|$

10. $\int \csc dx = \log|\csc x - \cot x| = \log|\tan\tfrac{1}{2}x|$

11. $\int \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}\quad (a > 0)$

12. $\int \arccos\frac{x}{a}\,dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}\quad (a > 0)$

13. $\int \arctan\frac{x}{a}\,dx = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\log(a^2 + x^2)\quad (a > 0)$

14. $\int \operatorname{sen}^2 mx\,dx = \frac{1}{2m}(mx - \operatorname{sen} mx\cos mx)$

15. $\int \cos^2 mx\, dx = \frac{1}{2m}(mx + \operatorname{sen} mx \cos mx)$

16. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x$

17. $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x$

18. $\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$

19. $\int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$

20. $\int \tan^n x\, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\, dx \quad (n \neq 1)$

21. $\int \cot^n x\, dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x\, dx \quad (n \neq 1)$

22. $\int \sec^n x\, dx = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\, dx \quad (n \neq 1)$

23. $\int \csc^n x\, dx = -\frac{\cot x \csc^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} x\, dx \quad (n \neq 1)$

24. $\int \operatorname{senh} x\, dx = \cosh x$

25. $\int \cosh x\, dx = \operatorname{senh} x$

26. $\int \tanh x\, dx = \log|\cosh x|$

27. $\int \coth x\, dx = \log|\operatorname{senh} x|$

28. $\int \operatorname{sech} x\, dx = \arctan(\operatorname{senh} x)$

29. $\int \operatorname{csch} x\, dx = \log\left|\tanh \frac{x}{2}\right| = -\frac{1}{2}\log\frac{\cosh x + 1}{\cosh x - 1}$

30. $\int \operatorname{senh}^2 x\, dx = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2x - \frac{1}{2}x$

31. $\int \cosh^2 x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2x + \frac{1}{2}x$

32. $\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x$

33. $\int \operatorname{arcsenh}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arcsenh}^{-1}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2+a^2} \quad (a>0)$

34. $\int \operatorname{arccosh}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\operatorname{arccosh}^{-1}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2-a^2} & \left[\operatorname{arccosh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) > 0,\ a>0\right] \\ x\operatorname{arccosh}^{-1}\frac{x}{a} + \sqrt{x^2-a^2} & \left[\operatorname{arccosh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) < 0,\ a>0\right] \end{cases}$

35. $\int \operatorname{arctanh}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arctanh}^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\log|a^2-x^2|$

36. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \log(x+\sqrt{a^2+x^2}) = \operatorname{arcsenh}^{-1}\frac{x}{a} \quad (a>0)$

37. $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \quad (a>0)$

38. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \quad (a>0)$

39. $\int (a^2-x^2)^{3/2}\,dx = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \quad (a>0)$

40. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \quad (a>0)$

41. $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$

42. $\int \frac{1}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}$

43. $\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|$

44. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \log|x+\sqrt{x^2-a^2}| = \operatorname{arccosh}^{-1}\frac{x}{a} \quad (a>0)$

45. $\int \frac{1}{x(a+bx)}\,dx = \frac{1}{a}\log\left|\frac{x}{a+bx}\right|$

46. $\displaystyle\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(3bx-2a)(a+bx)^{3/2}}{15b^2}$

47. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\,dx = 2\sqrt{a+bx} + a\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2(bx-2a)\sqrt{a+bx}}{3b^2}$

49. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\log\left|\dfrac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right| & (a>0) \\ \dfrac{2}{\sqrt{-a}}\arctan\left|\sqrt{\dfrac{a+bx}{-a}}\right| & (a<0) \end{cases}$

50. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\log\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$

51. $\displaystyle\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\tfrac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}$

52. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \quad (a>0)$

53. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\log\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$

54. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\sqrt{a^2-x^2}$

55. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \quad (a>0)$

56. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\log\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|$

57. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{|x|} \quad (a>0)$

58. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$

59. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\log\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right|$

60. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{|x|} \quad (a>0)$

61. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \mp \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x}$

62. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \sqrt{x^2 \pm a^2}$

63. $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \log \left| \dfrac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| & (b^2 > 4ac) \\ \dfrac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \dfrac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} & (b^2 < 4ac) \end{cases}$

64. $\displaystyle\int \frac{x}{ax^2 + bx + c}\,dx = \frac{1}{2a} \log |ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\,dx$

65. $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \log |2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| & (a > 0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arsen} \dfrac{-2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} & (a < 0) \end{cases}$

66. $\displaystyle\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8a} \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + b + c}}\,dx$

67. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx$

68. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{c}} \log \left| \dfrac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2 + bx + c} + bx + 2c}{x} \right| & (c > 0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{arcsen} \dfrac{bx + 2c}{|x|\sqrt{b^2 - 4ac}} & (c < 0) \end{cases}$

69. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2 + a^2}\,dx = (\tfrac{1}{5}x^2 - \tfrac{2}{15}a^2)\sqrt{(a^2 + x^2)^3}$

70. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^4}\,dx = \frac{\mp\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}}{3a^2x^3}$

71. $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a - b)x}{2(a - b)} - \frac{\operatorname{sen}(a + b)x}{2(a + b)} \quad (a^2 \neq b^2)$

72. $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax \cos bx\,dx = -\frac{\cos(a - b)x}{2(a - b)} - \frac{\cos(a + b)x}{2(a + b)} \quad (a^2 \neq b^2)$

73. $\displaystyle\int \cos ax \cos bx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a - b)x}{2(a - b)} + \frac{\operatorname{sen}(a + b)x}{2(a + b)} \quad (a^2 \neq b^2)$

74. $$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x$$

75. $$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x$$

76. $$\int \cos^m x \operatorname{sen}^n x \, dx = \frac{\cos^{m-1} x \operatorname{sen}^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \cos^{m-2} x \operatorname{sen}^n x \, dx$$
$$= -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \cos^m x \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$

77. $$\int x^n \operatorname{sen} ax \, dx = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx$$

78. $$\int x^n \cos ax \, dx = \frac{1}{a} x^n \operatorname{sen} ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \operatorname{sen} ax \, dx$$

79. $$\int x^n e^{ax} \, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx$$

80. $$\int x^n \log ax \, dx = x^{n+1} \left[\frac{\log ax}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right]$$

81. $$\int x^n (\log ax)^m \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\log ax)^m - \frac{m}{n+1} \int x^n (\log ax)^{m-1} \, dx$$

82. $$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \operatorname{sen} bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

83. $$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(b \operatorname{sen} bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

84. $$\int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x$$

85. $$\int \operatorname{csch} x \coth x \, dx = -\operatorname{csch} x$$