

MÓDULO 8

- GRADIENTE – DIVERGENCIA – ROTOR
- CAMINOS EN \mathbb{R}^2 - \mathbb{R}^3
- LONGITUD DE ARCO
- INTEGRALES DE LÍNEA
- CAMPOS CONSERVATIVOS
- TEOREMA DE GREEN

Gradiente, divergencia y rotor - El operador nabla (∇)¹

Ya hemos definido el **gradiente** de un **campo escalar** diferenciable como el **vector**:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{o} \quad \nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

según tratemos con funciones de dos o tres variables.

Ahora nos proponemos “ver” a ∇ como un operador, el **operador nabla**, dado por:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Entonces podemos escribir el gradiente para el caso de dos variables como:

$$\nabla f(x, y) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)$$

Y para tres variables:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right)$$

En términos operacionales el gradiente de f se obtiene tomando el operador ∇ y aplicándolo sobre f .

Divergencia

Definimos la **divergencia** de un **campo vectorial** \mathbf{F} formalmente, tomando el producto escalar del operador ∇ con \mathbf{F} .

¹ El nombre del símbolo ∇ (nabla) proviene de la palabra griega equivalente a la palabra hebrea arpa, instrumento que tiene una forma similar.

Definición

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ un campo vectorial con derivadas parciales continuas.

La **divergencia** de \mathbf{F} es el **campo escalar**:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z)$$

Interpretación

La divergencia tiene una importante interpretación física. Si imaginamos que \mathbf{F} es el campo de velocidades de un gas (o de un fluido), entonces $\operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0)$ representa la **razón de expansión por unidad de volumen bajo el flujo del gas (o del fluido)**.

Si $\operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) < 0$ el gas se está **comprimiendo** en el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ (también decimos que es un punto **sumidero**), en el caso contrario $\operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) > 0$ se está **expandiendo** (punto **fuelle**).

Finalmente, si $\operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) = 0$, decimos que el fluido es **incompresible** en ese punto.

Ejemplo

Sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (xyz, y^2z, xy^3)$, calcular la $\operatorname{div} \mathbf{F}$ en el punto $P = (-2, 1, -3)$ y clasificarlo en fuente, sumidero o incompresible.

Calculamos la divergencia del campo \mathbf{F}

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} xyz + \frac{\partial}{\partial y} y^2 z + \frac{\partial}{\partial z} xy^3 = yz + 2yz + 0 = 3yz$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(-2, 1, -3) = 3 \cdot 1 \cdot (-3) = -9$$

Por lo tanto el punto es un **sumidero**.

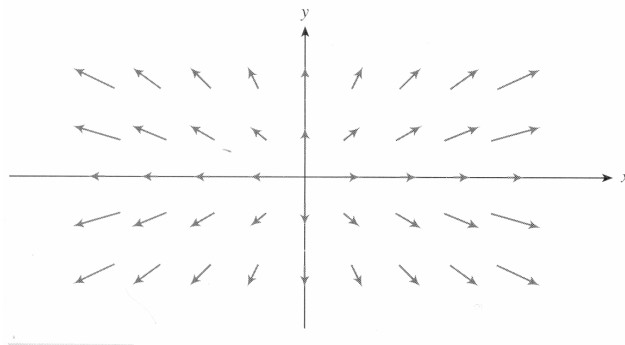
Para el caso de un campo vectorial plano

$\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$, la divergencia de \mathbf{F} mide la **razón de expansión del área**.

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y)$$

Ejemplos**Ejemplo 1**

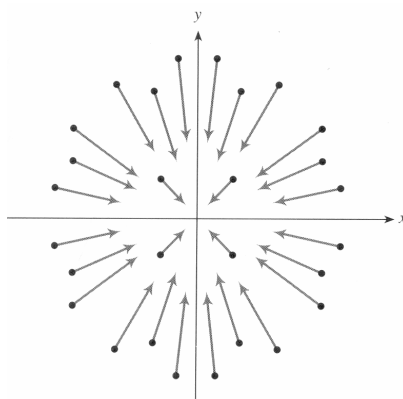
Representar el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$, conjeturar a partir de la gráfica si se está expandiendo o comprimiendo y verificarlo calculando la divergencia.



De acuerdo a la grafica el campo se está expandiendo, si calculamos la divergencia, $\text{div } \mathbf{F} = 2 > 0$, cosa que lo verifica.

Ejemplo 2

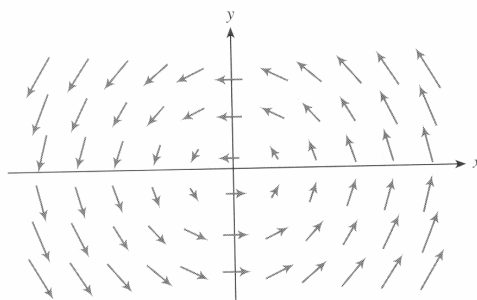
Ídem para el campo $\mathbf{F}(x, y) = (-x, -y)$



Acá vemos que el campo se **comprime**, cosa que se verifica al calcular $\text{div } \mathbf{F} = -2 < 0$

Ejemplo 3

Ídem para el campo $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$



En este caso el campo no se **comprime** ni se **expande**, cosa que nos da $\text{div } \mathbf{F} = 0$.

Rotor

Para calcular el **rotor** o **rotacional** de un **campo vectorial** \mathbf{F} , tomamos formalmente el producto vectorial de ∇ con \mathbf{F} .

Definición

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ un campo vectorial con derivadas parciales continuas.

El **rotor** o **rotacional** de \mathbf{F} es el **campo vectorial**

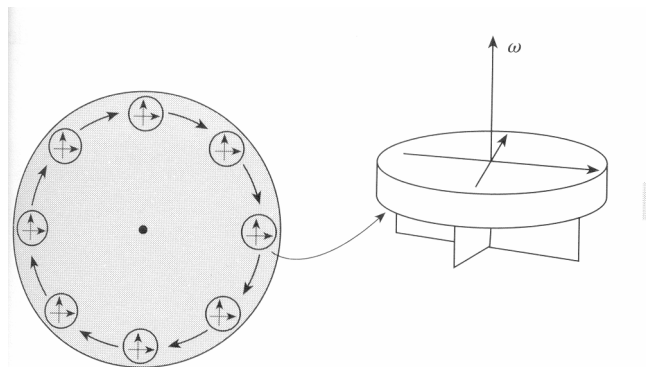
$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)(x, y, z)$$

Interpretación

Si un campo vectorial \mathbf{F} representa el flujo de un fluido, entonces el $\text{rot } \mathbf{F}$ en un punto, es el doble de la velocidad angular de un pequeño sólido que rotase del mismo modo que lo hace el fluido cerca de ese punto.

En particular si $\text{rot } \mathbf{F} = (0, 0, 0) = \vec{0}$ en un punto P , significa que el fluido está libre de rotaciones rígidas en P , es decir, no tiene remolinos.

También podemos decir que si una pequeña rueda rígida con paletas flota en el fluido, se moverá con él, pero no girará alrededor de su eje. A un campo vectorial con estas características lo llamamos **irrotacional**.



8.1.-

Calcular $\text{div } \mathbf{F}$ y $\text{rot } \mathbf{F}$ en los puntos indicados:

- a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ en \mathbb{R}^3 b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$ en \mathbb{R}^3
 c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ en $(0,0,0)$ y en $(1,1,1)$

8.2.-

Sea \mathbf{F} un campo vectorial definido y con derivadas segundas continuas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$, y sea $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable en U . Probar:

- a) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0$
 b) $\operatorname{rot}(\nabla \varphi) = \vec{0}$

8.3.-

- a) Verificar que $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ es irrotacional.
 b) Verificar que $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 yz, xz, -xyz^2)$ es incompresible.

Caminos en \mathbb{R}^2 o en \mathbb{R}^3 **Definición**

Una función vectorial $\mathbf{r}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ o $\mathbf{r}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, continua, definida en el intervalo I de \mathbb{R} , se llama **camino** o **trayectoria** en el plano \mathbb{R}^2 o en el espacio \mathbb{R}^3 .

- Si la función continua \mathbf{r} está definida en el intervalo cerrado $I = [a, b]$, diremos que el punto $\mathbf{r}(a)$ es el punto inicial del camino y $\mathbf{r}(b)$ el punto final.
- Si ocurre que $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ diremos que el camino es **cerrado**.
- Si la función \mathbf{r} es **inyectiva** en I (es decir $\forall t_1, t_2 \in I, t_1 \neq t_2 \Rightarrow \mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$) diremos que \mathbf{r} es un **camino simple** (su gráfica no tiene autointersecciones).
- Si además tenemos que $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ y la función \mathbf{r} restringida al intervalo $[a, b)$ es inyectiva, diremos que es un camino **simple cerrado**.

La gráfica de \mathbf{r} es una **curva** en el plano o en el espacio.

Definición

Decimos que un camino \mathbf{r} es **diferenciable**, si cada una de las componentes de \mathbf{r} tiene derivada.

Al vector $\mathbf{r}'(t)$ lo llamaremos **vector velocidad** del camino en el punto $\mathbf{r}(t)$ con $t \in I$.

Ya vimos en el Modulo 2 que este vector es tangente a la curva (gráfica de \mathbf{r}) en cada punto.

Definición

Sea $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ o $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un camino **diferenciable con continuidad** (sus componentes tienen derivadas continuas). Decimos que es un **camino regular** si $\mathbf{r}'(t) \neq \vec{0}$ (vector nulo) $\forall t \in I$.

El camino se llama **regular por secciones** o **regular a trozos** si el intervalo $I = [a, b]$ se puede descomponer en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales \mathbf{r} es regular.

Longitud de un camino

Sea $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ o $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un camino **diferenciable con continuidad**, ya vimos que el vector velocidad $\mathbf{r}'(t)$ es tangente a la curva en cada punto, su **norma** multiplicada por dt nos daría (hablando informalmente) una longitud “infinitesimal” (muy chiquita) de la trayectoria en el punto t .

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

Para obtener la longitud de la curva tendríamos que sumar todas estas “longitudes infinitesimales” desde a hasta b .

Este razonamiento hace plausible la siguiente

Definición

Sea $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ o $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un camino diferenciable con continuidad cuya gráfica es la curva C . La longitud de C desde $t = a$ hasta $t = b$, denotada por $s(\mathbf{r})$, se define por:

$$s(\mathbf{r}) = \int_a^b ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

Observemos que al pedir que \mathbf{r} sea un camino diferenciable con continuidad, $\|\mathbf{r}'(t)\|$ es una función continua, por lo tanto, integrable y la integral de la definición siempre existe.

Ejemplo

Sea $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ / $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, la curva que describe su gráfica es una vuelta completa de una hélice. Calculemos su longitud.

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \|(-\sin t, \cos t, 1)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

así que

$$s(\mathbf{r}) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2} \pi$$

Reparametrización por longitud de arco

Habíamos visto en el Módulo 2, que distintas funciones vectoriales $\mathbf{r}(t)$, podían tener como imagen la misma curva C , salvo, eventualmente, el sentido de recorrido.

Por ejemplo $\mathbf{r}_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbf{r}_1(t) = (2 \sin t, 2 \cos t)$ tiene como gráfica una circunferencia de radio 2, que empieza en el punto (0,2) y tiene sentido horario.

Mientras que $\mathbf{r}_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbf{r}_2(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$ también tiene por gráfica a una circunferencia de radio 2 que empieza en el mismo punto (0,2) pero que ahora tiene sentido de recorrido antihorario.

Si en ambos casos calculamos $\|\mathbf{r}'(t)\|$ obtenemos:

$$\|\mathbf{r}'_1(t)\| = \|\mathbf{r}'_2(t)\| = \sqrt{(4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t)} = 2$$

Lo que nos indica que la curva se esta recorriendo con una **rapidez** de 2 (m/s ó km/h ó etc) en cada instante t entre 0 y 2π .

Pues bien, existe una **única** parametrización que hace que la rapidez con que se recorre la curva en cada instante sea constante e igual a 1 (uno).

A esta parametrización la llamamos **parametrización por longitud de arco** y la obtenemos mediante un cambio de variable.

Sea $\mathbf{r} : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ o $\mathbf{r} : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización $\mathbf{r}(t)$ diferenciable con continuidad, para obtener la reparametrización por longitud de arco hacemos el cambio de variable:

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\| du$$

Ejemplo

Sea $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbf{r}(t) = (r \sin t, r \cos t)$. Este es un camino regular que recorre una vez la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, obtengamos la reparametrización por longitud de arco.

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{r^2 \cos^2 u + r^2 \sin^2 u} du = \int_0^t r du = r t$$

Cuando $t = 0 \rightarrow s(0) = 0$; $t = 2\pi \rightarrow s(2\pi) = 2\pi r$

Además $t = \frac{s}{r}$

Con esto volvemos a la parametrización que nos dieron y hacemos el cambio de los extremos del intervalo y de la variable t , obteniendo la reparametrización buscada.

$$\bar{\mathbf{r}} : [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2 / \bar{\mathbf{r}}(s) = \left(r \sin \frac{s}{r}, r \cos \frac{s}{r} \right)$$

Y se verifica fácilmente que

$$\left\| \bar{\mathbf{r}}'(s) \right\| = 1$$

8.4.-

Sea $\mathbf{r} : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbf{r}(t) = (t, \cosh t)$. Se trata de un camino regular que recorre la catenaria $y = \cosh x$ desde el punto $(0, 1)$ al punto $(3, \cosh 3)$. Obtener su parametrización por longitud de arco.

Nota: Recordar que $\operatorname{arcsenh} u = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$

8.5.-

Sea $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 / \mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, con a y b constantes. Describir la curva dada por \mathbf{r} y efectuar su parametrización por longitud de arco.

Integrales de línea

Las integrales de línea son otra posible extensión de las integrales unidimensionales a integrales de funciones de más variables.

Existen dos casos de estas integrales, las que llamamos **integrales de línea de primera especie** o **integrales de línea con respecto a la longitud de arco**, que son con funciones **escalares**. Y las **integrales de segunda especie** que son con funciones **vectoriales**.

Integrales de línea con respecto a la longitud de arco o de primera especie

Supongamos tener una función f **escalar** definida y continua en un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 y una curva C , regular (o regular por secciones) contenida en el mismo conjunto abierto. Pretendemos calcular la integral de f cuando los pares (x, y) o las ternas (x, y, z) recorren la curva C .

La idea para calcular estas integrales es similar a la que usamos con funciones de una variable:

- Dividimos el intervalo de integración en subintervalos
- Evaluamos la función en un punto del subintervalo

- Multiplicamos la longitud del subintervalo (base) por el valor de la función (altura), obteniendo el área del subrectángulo
- Sumamos todas las áreas y obtenemos una aproximación del valor del área comprendida entre el intervalo (incluido en x) y la gráfica de f (suponiendo f no negativa).

El valor de esa suma cuando el ancho de cada subintervalo tiende a cero es la integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

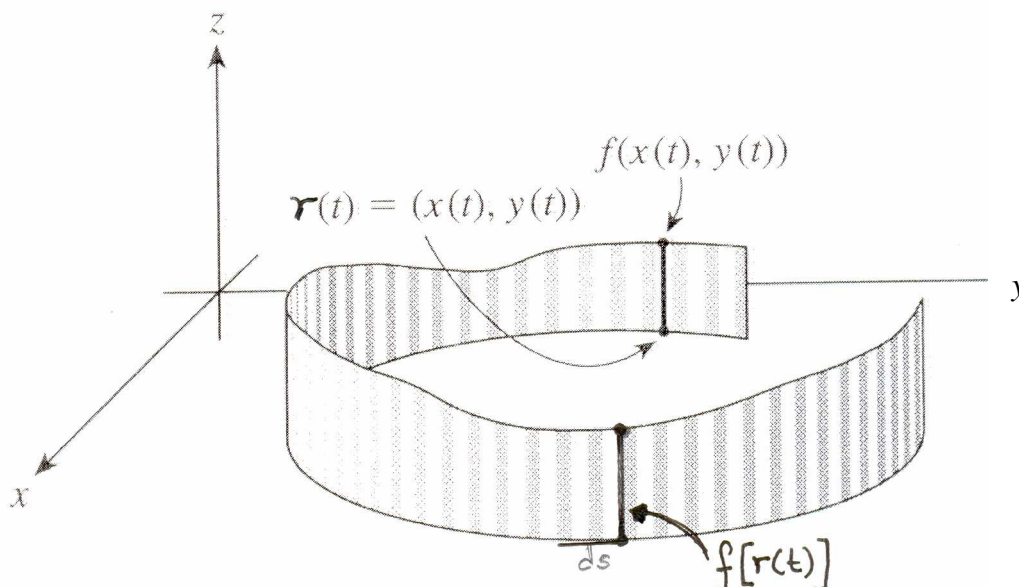
Para la integral de línea respecto de la longitud de arco:

- Partimos de la curva C , parametrizada por $\mathbf{r}(t)$
- La dividimos en subarcos de longitud ds

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\| du \Rightarrow ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

- Evaluamos la función f en la parametrización de C , $\mathbf{r}(t)$. (Esto es posible porque pedimos que C esté contenida en el dominio de f).
- Multiplicamos f evaluada en la parametrización (altura) por ds (base) y obtenemos el área del subrectángulo.
- Sumamos dichas áreas y obtenemos una aproximación del área encerrada entre la curva C (suponiéndola plana) y la gráfica de la función F (suponiéndola no negativa).

El valor de esa suma será la integral que buscamos definir y representará el área de la “pared” cuyo cimientto es la curva C y cuya altura (variable) será f .



Ahora estamos en condiciones de dar la definición formal, lo haremos para el caso de una función de tres variables, pero es extensivo a cualquier número de variables.

Definición

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, una función real continua definida en el conjunto abierto U de \mathbb{R}^3 y sea $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función vectorial con derivadas continuas, cuya gráfica es la curva C contenida en U .

Definimos a la integral de línea con respecto a la longitud de arco de la función f a lo largo de la curva C y la denotamos por

$$\int_C f \, ds$$

como

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f[\mathbf{r}(t)] \underbrace{\|\mathbf{r}'(t)\|}_{ds} dt$$

Observemos que esta integral existe, puesto que pedimos que f sea continua y \mathbf{r} , por tener derivada continua, resulta continua y una función continua es integrable.

Nota

Si el camino de integración resulta ser una **curva cerrada** la integral se simboliza:

$$\oint_C f \, ds$$

Como vemos en la definición, la integral de línea termina siendo calculable mediante una integral del tipo unidimensional, así que el mayor problema de estos cálculos reside en hacer una correcta parametrización de la curva C .

Las parametrizaciones de las curvas más usuales son:

- segmento de recta que une los puntos P_1 y P_2 : $\mathbf{r}(t) = P_1(1-t) + P_2 t$; $0 \leq t \leq 1$ si se recorre de P_1 (punto inicial) hacia P_2 (punto final).
- circunferencia de radio a : $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t)$; $0 \leq t \leq 2\pi$ se recorre antihoraria.
- elipse de semiejes a y b : $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$; $0 \leq t \leq 2\pi$ se recorre antihoraria.
- hélice circular: $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, t)$; $0 \leq t \leq 2\pi$ para una vuelta.
- curva dada por la ecuación $y = f(x)$; $x \in [a, b]$: $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$ $a \leq t \leq b$ se recorre de a hacia b . Si se recorre de b hacia a $\mathbf{r}(t) = [a + b - t, f(a + b - t)]$ $a \leq t \leq b$

Propiedades de la integral de línea con respecto a la longitud de arco

Puesto que las integrales de línea se definen en función de integrales ordinarias, gozan de muchas de sus propiedades, como ser:

- **Linealidad respecto al integrando**

$$\int_C (a f + b g) ds = a \int_C f ds + b \int_C g ds$$

- **Aditividad respecto del camino de integración**

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds \quad \text{donde las dos curvas } C_1 \text{ y } C_2 \text{ forman a la curva } C.$$

Cambio de parámetro en la integral de línea respecto de la longitud de arco

La integral de línea de un campo escalar es invariante por reparametrizaciones de la curva C . Lo probaremos para el caso de funciones de tres variables, pero es fácilmente extensible a cualquier número de variables.

Teorema

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, una función real continua definida en el conjunto abierto U de \mathbb{R}^3 , sea $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función vectorial con derivadas continuas, cuya gráfica es la curva C contenida en U y sea $\mathbf{p}: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una reparametrización de C , digamos $\mathbf{p} = \mathbf{r} \circ \phi$, donde $\phi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ es una función suryectiva, con derivada continua y tal que $\phi'(t) \neq 0, \forall t \in [c, d]$. Entonces

$$\int_{\mathbf{r}} f ds = \int_{\mathbf{p}} f ds$$

Demostración

Tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{p}} f ds &= \int_c^d f[\mathbf{p}(t)] \|\mathbf{p}'(t)\| dt = \int_c^d f[\mathbf{r}(\phi(t))] \|\mathbf{r}'(\phi(t)) \phi'(t)\| dt = \\ &= \int_c^d f[\mathbf{r}(\phi(t))] \|\mathbf{r}'(\phi(t))\| |\phi'(t)| dt = (1) \end{aligned}$$

Si $\phi'(t) > 0, \forall t \in [c, d]$ se tiene que $\phi(c) = a, \phi(d) = b$. Hacemos $u = \phi(t)$, $du = \phi'(t) dt = |\phi'(t)| dt$ y reemplazamos en (1).

$$\int_{\mathbf{p}} f ds = \int_a^b f[\mathbf{r}(u)] \|\mathbf{r}'(u)\| du = \int_{\mathbf{r}} f ds$$

Si $\phi'(t) < 0, \forall t \in [c, d]$ tenemos $\phi(c) = b, \phi(d) = a$. Hacemos $u = \phi(t)$, $du = \phi'(t) dt = -|\phi'(t)| dt$ y reemplazamos en (1).

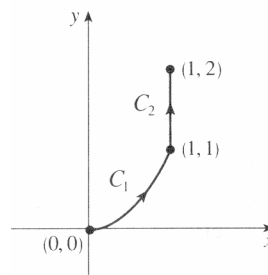
$$\int_p f ds = \int_b^a f[\mathbf{r}(u)] \|\mathbf{r}'(u)\| (-du) = \int_a^b f[\mathbf{r}(u)] \|\mathbf{r}'(u)\| du = \int_r f ds$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Evaluar la $\int_C 2x ds$ donde C consiste en el arco de parábola $y = x^2$ desde $(0,0)$ a $(1,1)$, seguido del segmento de recta vertical del $(1,1)$ al $(1,2)$.

Tenemos que descomponer la curva C en dos tramos para cumplir con la regularidad (no debe de haber puntos angulosos), así que C_1 será el arco de parábola y C_2 el segmento de recta.



Como C_1 es la gráfica de una función $y = x^2$, podemos elegir a x como el parámetro t .

Nos queda entonces: $\mathbf{r}_1(t) = (t, t^2)$ $0 \leq t \leq 1$

Calculamos $\mathbf{r}'_1(t) = (1, 2t) \rightarrow \|\mathbf{r}'_1(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$

Además necesitamos la función evaluada en la parametrización: $f[\mathbf{r}_1(t)] = 2t$

Entonces

$$\int_{C_1} f ds = \int_0^1 2t \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}$$

Para C_2 tenemos que $P_1 = (1,1)$; $P_2 = (1,2)$.

Así queda $\mathbf{r}_2(t) = (1,1)(1-t) + (1,2)t = (1, 1+t)$; $0 \leq t \leq 1$, $\mathbf{r}'_2(t) = (0,1) \rightarrow \|\mathbf{r}'_2(t)\| = 1$ y $f[\mathbf{r}_2(t)] = 2$

Ahora

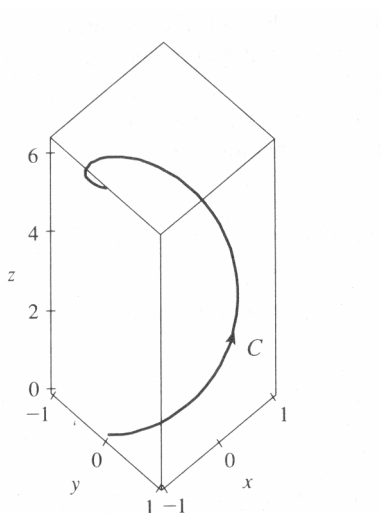
$$\int_{C_2} f ds = \int_0^1 2 dt = 2$$

Finalmente

$$\int_C 2x \, ds = \int_{C_1} 2x \, ds + \int_{C_2} 2x \, ds = \frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 2$$

Ejemplo 2

Evaluar $\int_C y \sin z \, ds$, donde C es la hélice circular dada por las ecuaciones $x = \cos t$; $y = \sin t$; $z = t$ con $0 \leq t \leq 2\pi$.



En este caso nos dan la parametrización de la curva $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t); 0 \leq t \leq 2\pi$

Calculamos $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ y $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$ además $f[\mathbf{r}(t)] = \sin^2 t$

$$\int_C y \sin z \, ds = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \sqrt{2} \pi$$

8.6.-

Calcular la integral $\int_C (x^2 + y^2) \, ds$; sobre el camino dado:

a) C : eje x de $x = 0$ a $x = 3$

b) C : contorno del triángulo de vértices $(0,0); (1,0); (0,1)$, recorrido en sentido antihorario.

Integrales de línea de campos vectoriales o de segunda especie

Supongamos ahora tener una función **vectorial** (\mathbf{F}), definida y continua sobre un conjunto abierto de \mathbb{R}^3 (esto puede extenderse a cualquier \mathbb{R}^n).

Podemos imaginar que tal función \mathbf{F} es un campo vectorial de fuerzas (como el campo gravitacional, o un campo eléctrico, etc.).

Nuestro objetivo ahora es calcular el **trabajo** que hace este campo de fuerzas, sobre una partícula que se desplaza a lo largo de una curva regular (o regular por secciones), contenida en el conjunto abierto donde está definido el campo de fuerzas \mathbf{F} .

Recordemos que el valor del trabajo de una fuerza constante \mathbf{F} para desplazar un objeto una cierta distancia rectilínea dada por el vector \mathbf{d} se calcula multiplicando escalarmente el vector fuerza por el vector desplazamiento.

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = (\text{magnitud de la fuerza}) \cdot (\text{desplazamiento en dirección de la fuerza})$$

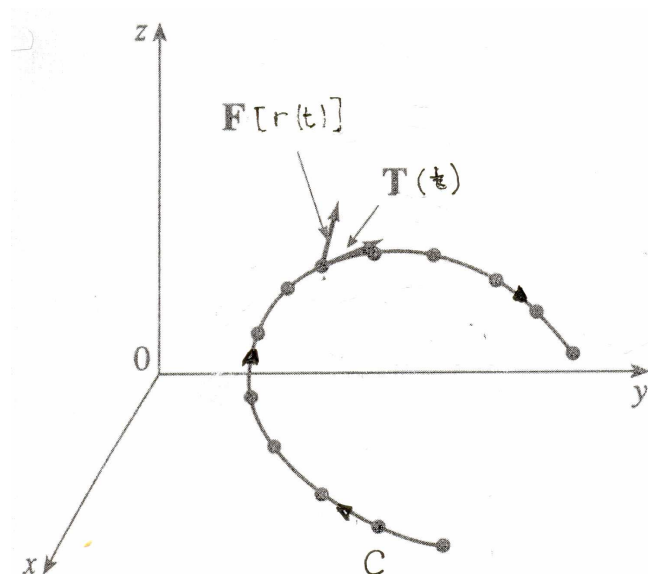
Si la trayectoria es una curva regular (gráfica de la parametrización $\mathbf{r}(t)$), podemos imaginar que está formada por una sucesión de desplazamientos rectilíneos “infinitesimales”, o que se puede **aproximar** por un número finito de desplazamientos rectilíneos.

La idea entonces será elegir un cierto t en el intervalo $[a, b]$, obtener su imagen en la curva C evaluando $\mathbf{r}(t)$.

Una vez ubicados en ese punto de C , ver cuánto vale la fuerza \mathbf{F} en dicho punto y multiplicarla escalarmente por el vector **tangente unitario** (\mathbf{T}) a la curva, también en el mismo punto.

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{T}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

Esto nos dará una función **escalar** y, como pretendemos calcular el trabajo a lo largo de toda la curva C , estamos de nuevo en el caso, ya visto, de la **integral de línea con respecto a la longitud de arco**.



$$\int_C (\mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{T}(t)) ds = \int_a^b \underbrace{\mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}}_{\mathbf{T}(t)} \underbrace{\|\mathbf{r}'(t)\|}_{ds} dt = \int_a^b \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Ahora estamos en condiciones para dar la definición formal de integral de línea de una función vectorial, lo haremos para el caso de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 , pero se puede extender a otras dimensiones.

Definición

Sea $\mathbf{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, una función vectorial continua definida en el conjunto abierto U de \mathbb{R}^3 y sea $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función vectorial con derivadas continuas, cuya gráfica es la curva C contenida en U .

Definimos a la integral de línea de la función vectorial \mathbf{F} a lo largo de la curva C y la denotamos por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

a

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Nuevamente las hipótesis sobre \mathbf{F} y \mathbf{r} , garantizan la existencia de la integral dada.

Nota

Igual que en el caso escalar, si la curva es cerrada, simbolizamos la integral:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Otra notación para la integral de línea de un campo vectorial

Si el campo vectorial es $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$, la integral de línea puede denotarse como:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz$$

Cambio de parametrización para integrales de línea

Teorema

Sea $\mathbf{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, un campo vectorial continuo definido en el conjunto abierto U de \mathbb{R}^3 y sea $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función vectorial con derivadas continuas, cuya gráfica es la curva C contenida en U y sea $\mathbf{p}: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una reparametrización de C .

Si \mathbf{p} conserva la orientación de C , entonces

$$\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Si \mathbf{p} invierte la orientación de C , entonces

$$\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Demostración

Por hipótesis, tenemos una función $h: [c, d] \rightarrow [a, b]$ suryectiva, con derivadas continuas tal que $\mathbf{p} = \mathbf{r} \circ h$. Por la regla de la cadena

$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{r}'(h(t)) h'(t)$$

y por tanto

$$\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_c^d \mathbf{F}[\mathbf{p}(t)] \mathbf{p}'(t) dt = \int_c^d \mathbf{F}[\mathbf{r}(h(t))] [\mathbf{r}'(h(t)) h'(t)] dt = \int_c^d \mathbf{F}[\mathbf{r}(h(t))] \mathbf{r}'(h(t)) h'(t) dt \quad (1)$$

- Si $h'(t) > 0, \forall t \in [c, d]$, tenemos que: $h(c) = a \quad h(d) = b$

Hacemos el cambio de variable: $u = h(t) \rightarrow du = h'(t) dt \quad t = c \rightarrow u = a; t = d \rightarrow u = b$

Reemplazamos en (1) y nos queda:

$$\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}[\mathbf{r}(u)] \mathbf{r}'(u) du = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

- Si $h'(t) < 0, \forall t \in [c, d]$ tenemos que $h(c) = b \quad h(d) = a$

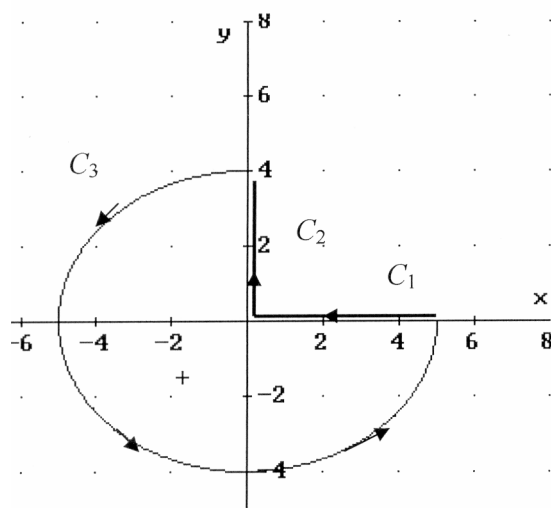
Hacemos el cambio de variable: $u = h(t) \rightarrow du = h'(t) dt \quad t = c \rightarrow u = b; t = d \rightarrow u = a$

Reemplazando en (1)

$$\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_b^a \mathbf{F}[\mathbf{r}(u)] \mathbf{r}'(u) du = - \int_a^b \mathbf{F}[\mathbf{r}(u)] \mathbf{r}'(u) du = - \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Ejemplo

Calcular la $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, siendo \mathbf{F} el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x^2, 2xy)$ y C el camino cerrado que va del $(5, 0)$ al $(0, 0)$ a lo largo del eje x , del $(0, 0)$ al $(0, 4)$ a lo largo del eje y , y de regreso del $(0, 4)$ al $(5, 0)$ por la curva $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ en sentido antihorario.



Descomponemos a la curva C en tres secciones **regulares**.

$$\mathbf{r}_1(t) = (5,0)(1-t) + (0,0)t = (5-5t,0) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\mathbf{r}'_1(t) = (-5,0) \quad \mathbf{F}[\mathbf{r}_1(t)] = ((5-5t)^2, 0) \rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = -5(5-5t)^2 \rightarrow \int_{C_1} \mathbf{F} d\mathbf{r} = -\frac{125}{3}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (0,0)(1-t) + (0,4)t = (0,4t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\mathbf{r}'_2(t) = (0,4) \quad \mathbf{F}[\mathbf{r}_2(t)] = (0,0) \rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = 0 \rightarrow \int_{C_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0$$

$$\mathbf{r}_3(t) = (5 \cos t, 4 \sin t) \quad t: \frac{\pi}{2} \rightarrow 2\pi$$

$$\mathbf{r}'_3(t) = (-5 \sin t, 4 \cos t) \quad \mathbf{F}[\mathbf{r}_3(t)] = (25 \cos^2 t, 40 \sin t \cos t) \rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = 35 \cos^2 t \sin t$$

$$\int_{C_3} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} 35 \cos^2 t \sin t \, dt = -\frac{35}{3}$$

$$\oint_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F} d\mathbf{r} = -\frac{160}{3}$$

8.7.-

Calcular la integral $\int_C (2x - y) dx + (x + 3y) dy$; sobre el camino dado:

a) C : eje x desde $x = 0$ a $x = 5$

b) C : poligonal que une $(0,0)$ con $(3,0)$ y $(3,0)$ con $(3,3)$.

c) C : camino elíptico $x = 4 \cos t$; $y = 3 \sin t$; de $(0,3)$ a $(4,0)$ en sentido antihorario.

8.8.-

Evaluar la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$; donde C está representada por $\mathbf{r}(t)$.

a) $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ $C: \mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$; $0 \leq t \leq 1$.

b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2y, x - z, x.y.z)$ $C: \mathbf{r}(t) = (t, t^2, 2)$; $0 \leq t \leq 1$.

c) $\mathbf{F}(x, y) = (-x, -2y)$ $C: y = x^3$ desde $(0,0)$ hasta $(2,8)$.

$$d) \mathbf{F}(x, y) = (2xy, x^2) \quad d_1) C: \mathbf{r}_1(t) = (t, t^2); 0 \leq t \leq 1.$$

$$d_2) C: \mathbf{r}_2(t) = (t, t^3); 0 \leq t \leq 1.$$

$$e) \mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy) \quad e_1) C: \mathbf{r}_1(t) = \left(t, \frac{t}{2}, t\right); 0 \leq t \leq 4.$$

$$e_2) C: \mathbf{r}_2(t) = (t^2, t, t^2); 0 \leq t \leq 2.$$

Integrales de línea de campos gradiente

A continuación consideramos una técnica útil para evaluar cierto tipo de integrales de línea. Recordemos que un campo vectorial \mathbf{F} es un **campo vectorial gradiente** si $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna

función f con valores reales. Así $\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$

Supongamos que g y G son funciones continuas con valores reales definidas sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, que G es diferenciable en (a, b) y que $G' = g$. Entonces, por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a)$$

Así el valor de la integral de g depende sólo del valor de G en los extremos del intervalo $[a, b]$.

Como ∇f representa a la derivada de f , podemos preguntarnos si $\int_c \nabla f \cdot d\mathbf{r}$ está determinada completamente por el valor de f en los extremos $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(b)$. La respuesta está contenida en la siguiente **generalización del teorema fundamental del cálculo**.

Teorema

Supongamos que $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales continuas y que $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una trayectoria con derivada continua a trozos. Entonces

$$\int_c \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

Demostración

Al aplicar la regla de la cadena a la función compuesta

$$F: t \rightarrow f(\mathbf{r}(t))$$

Obtenemos

$$F'(t) = (f \circ \mathbf{r})'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$$

La función F es una función con valores reales de la variable t y, por tanto. Por el teorema fundamental del cálculo de una variable,

$$\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a) = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

Por consiguiente

$$\int_c \nabla f \cdot ds = \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a) = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

El siguiente teorema nos da herramientas para saber cuando un campo vectorial es conservativo:

Campos conservativos

Teorema

Sea \mathbf{F} un campo vectorial con derivadas parciales continuas, definido en \mathbb{R}^3 , excepto tal vez en un número finito de puntos. Las siguientes condiciones sobre \mathbf{F} son equivalentes:

- i) Para cualquier curva orientada cerrada y simple C ,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

- ii) Para dos curvas orientadas simples cualesquiera, C_1 y C_2 que tengan los mismos extremos,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

- iii) \mathbf{F} es el gradiente de alguna función f ; es decir, $\mathbf{F} = \nabla f$ (y si \mathbf{F} tiene uno o más puntos excepcionales donde no está definido, entonces f tampoco está definido allí)

- iv) $\text{rot } \mathbf{F} = \vec{0}$

Un campo vectorial que satisface una (y, por lo tanto, todas) de las condiciones i) – iv) se denomina **campo vectorial conservativo**.

A la función f que verifica $\mathbf{F} = \nabla f$ la llamamos **función potencial**.

Ejemplo

Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(3x^2, y^2 + \frac{3}{4}y, z + \frac{2}{5} \right)$ al trasladar una partícula sobre el segmento de recta que une los puntos $A = (1, 2, -1)$ y $B = (-5, 4, -3)$

$\int_C \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) dt = f(B) - f(A)$ pues el $\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \vec{0}$ el campo es conservativo (comprobarlo)

Debemos hallar la función potencial $f(x, y, z)$ tal que $\nabla f(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \Rightarrow f(x, y, z) = \int 3x^2 dx + g(y, z) \Rightarrow f(x, y, z) = x^3 + g(y, z)$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + \frac{3}{4}y \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = y^2 + \frac{3}{4}y \Rightarrow g(y, z) = \frac{y^3}{3} + \frac{3}{8}y^2 + h(z)$$

$$\mathbf{F}_3 = \frac{\partial f}{\partial z} = z + \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left(x^3 + \frac{y^3}{3} + \frac{3}{8}y^2 + h(z) \right) = z + \frac{2}{5} \Rightarrow h'(z) = z + \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(z) = \frac{z^2}{2} + \frac{2}{5}z + C$$

$f(x, y, z) = x^3 + \frac{y^3}{3} + \frac{3}{8}y^2 + \frac{z^2}{2} + \frac{2}{5}z + C$ es la función potencial, luego la integral pedida es el resultado de la resta: $f(-5, 4, -3) - f(1, 2, -1)$

8.9.-

Con las funciones \mathbf{F} dadas en d y e del ejercicio 8.8:

- Calcular el rotor.
- Determinar la función potencial f ($\nabla f = \mathbf{F}$).
- Evaluar $f(P_2) - f(P_1)$; donde P_1 y P_2 son los extremos de C .
- Enunciar la propiedad que se verifica.

8.10.-

Dado el campo vectorial:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(3ay \frac{1}{x} - 2xe^{3z}, 3 \ln x + c z \sin(2yz), 2y \sin(2yz) - bx^2 e^{3z} \right)$$

- Hallar las constantes a , b , y c para que sea conservativo.
- Hallar la función potencial.
- Calcular el trabajo realizado por una partícula al desplazarse de $(1, 0, 1)$ a $(e, 2, 1)$.

8.11.-

Calcular $\int_C (z + 2y) dx + (2x - z) dy + (x - y) dz$; si C es el arco de espiral de Arquímedes que une $(0, 0, 0)$ con $(1, 1, 1)$.

8.12.-

Determinar el trabajo realizado para mover una partícula de $P = (0, 0)$ a $Q = (5, 9)$ en el campo de fuerzas: $\mathbf{F}(x, y) = (9x^2 y^2, 6x^3 y - 1)$.

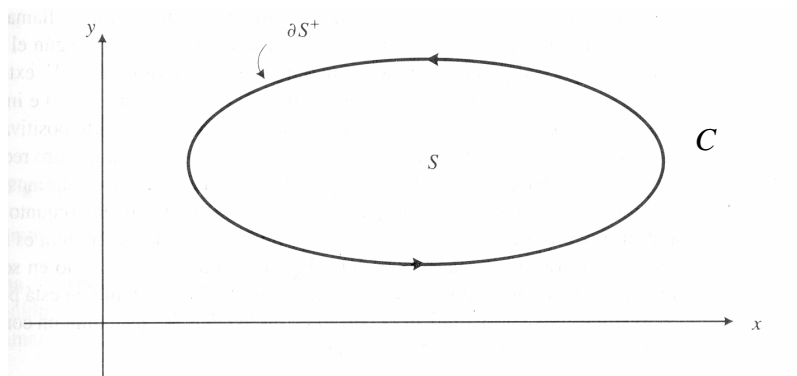
Teorema de Green

Sea $\mathbf{F}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ un campo vectorial con derivadas parciales primeras continuas, definido en el abierto U de \mathbb{R}^2 .

Sea $S \subset U$ una región compacta con su frontera C orientada positivamente (antihoraria), entonces

$$\oint_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \iint_S \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy$$

donde $\mathbf{r}(t)$ es un camino regular (regular por secciones) cuya traza es $C (\partial S)$.



Para la demostración debemos ver dos teoremas

Teorema 1

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función real definida en el abierto U de \mathbb{R}^2 , con derivadas parciales primeras continuas, y sea $S \subset U$ una región del tipo:

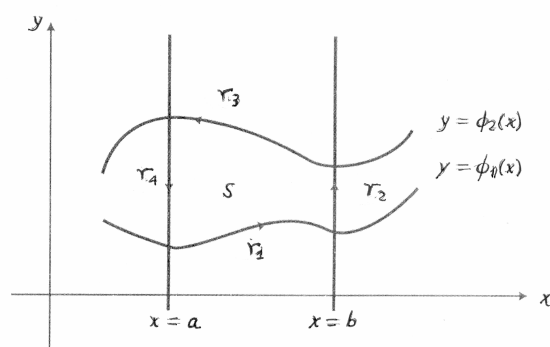
$$S = \{(x, y) / a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

entonces

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = - \iint_S \frac{\partial f}{\partial y} dx dy$$

donde $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, es el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (f(x, y), 0)$ y $\mathbf{r}(t)$ es un camino cuya traza C es la curva frontera de S orientada positivamente.

Demostración



El camino $\mathbf{r}(t)$ se puede tomar como $\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_3(t) + \mathbf{r}_4(t)$

$\mathbf{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{r}_1(t) = (t, \phi_1(t))$ frontera inferior

$\mathbf{r}_2 : [\phi_1(b), \phi_2(b)] \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{r}_2(t) = (b, t)$ frontera derecha

$\mathbf{r}_3 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{r}_3(t) = (a + b - t, \phi_2(a + b - t))$ frontera superior

$\mathbf{r}_4 : [\phi_1(a), \phi_2(a)] \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{r}_4(t) = (a, \phi_1(a) + \phi_2(a) - t)$ frontera izquierda

entonces

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$$

Para C_2 y C_4

$$\int_{C_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{\phi_1(b)}^{\phi_2(b)} (f(\mathbf{r}_2(t)), 0) \cdot \underbrace{(0, 1)}_{\mathbf{r}_2'(t)} dt = 0$$

$$\int_{C_4} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{\phi_1(a)}^{\phi_2(a)} (f(\mathbf{r}_4(t)), 0) \cdot \underbrace{(0, -1)}_{\mathbf{r}_4'(t)} dt = 0$$

Con lo que:

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{C_1} + \int_{C_3}$$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F} d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_a^b (f(t, \phi_1(t)), 0) \cdot (1, \phi_1'(t)) dt + \\ &+ \int_a^b (f(a + b - t, \phi_2(a + b - t)), 0) \cdot (-1, \phi_2'(a + b - t)) dt = \\ &= \int_a^b f(t, \phi_1(t)) dt - \int_a^b f(a + b - t, \phi_2(a + b - t)) dt = \quad (*) \\ &= \int_a^b f(t, \phi_1(t)) dt - \int_a^b f(t, \phi_2(t)) dt = \\ &= - \int_a^b (f(t, \phi_2(t)) - f(t, \phi_1(t))) dt = \\ &= - \int_a^b \left(\int_{\phi_1(t)}^{\phi_2(t)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \right) dt = - \iint_S \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx dy \end{aligned}$$

entonces

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = - \iint_S \frac{\partial f}{\partial y} dx dy$$

Nota

En (*) hacemos el cambio de variables $u = a + b - t \rightarrow du = -dt$, pero esto invierte el sentido de recorrido de C_3 por lo que hay que poner otro signo (-).

Teorema 2

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función real definida en el abierto U de \mathbb{R}^2 , con derivadas parciales primeras continuas, y sea $S \subset U$ una región del tipo:

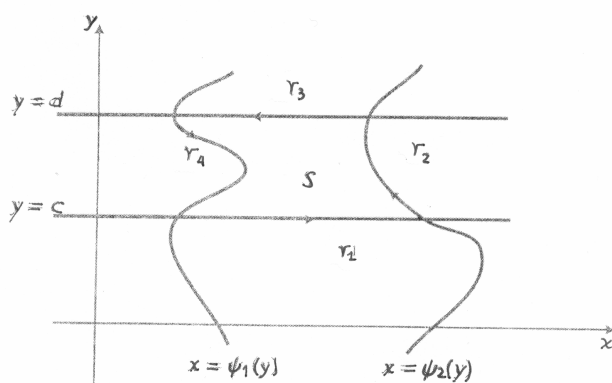
$$S = \{(x, y) / \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y), c \leq y \leq d\}$$

entonces

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \iint_S \frac{\partial f}{\partial x} dx dy$$

donde $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, es el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (0, f(x, y))$ y $\mathbf{r}(t)$ es un camino cuya traza C es la curva frontera de S orientada positivamente.

Demostración



$$\mathbf{r}_1 : [\varphi_1(c), \varphi_2(c)] \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{r}_1(t) = (t, c)$$

$$\mathbf{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{r}_2(t) = (\varphi_2(t), t)$$

$$\mathbf{r}_3 : [\varphi_1(d), \varphi_2(d)] \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{r}_3(t) = (\varphi_1(d) + \varphi_2(d) - t, d)$$

$$\mathbf{r}_4 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{r}_4(t) = (\varphi_1(c + d - t), c + d - t)$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} &= \underbrace{\int_{C_1}}_0 + \int_{C_2} + \underbrace{\int_{C_3}}_0 + \int_{C_4} = \int_{C_2} + \int_{C_4} = \\ &= \int_c^d f(\varphi_2(t), t) dt + \int_c^d f(\varphi_1(c + d - t), c + d - t)(-1) dt = \\ &= \int_c^d f(\varphi_2(t), t) dt - \int_c^d f(\varphi_1(t), t) dt = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx \right) dt = \iint_S \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx dy \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \iint_S \frac{\partial f}{\partial x} dx dy$$

Ahora estamos en condiciones de demostrar el Teorema de Green.

Demostración

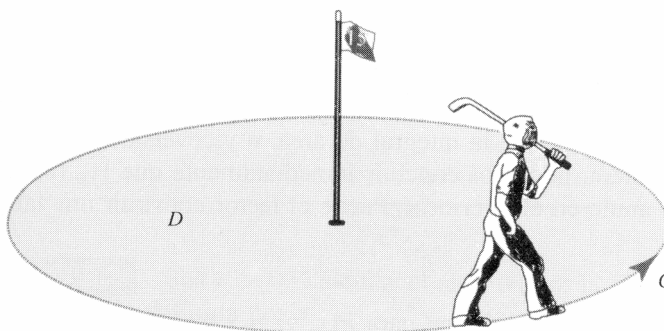
Sea S una región compacta del tipo I y II, el campo $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ se escribe como $\mathbf{F}(x, y) = \underbrace{(P(x, y), 0)}_{\mathbf{F}_1} + \underbrace{(0, Q(x, y))}_{\mathbf{F}_2}$.

Para el campo \mathbf{F}_1 vemos a S como región del tipo I y para \mathbf{F}_2 como región del tipo II.

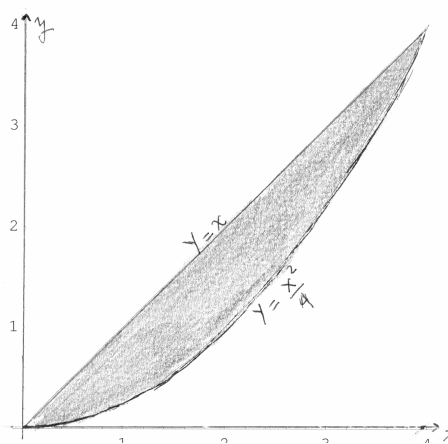
$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} d\mathbf{r} &= \oint_C (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F}_1 d\mathbf{r} + \oint_C \mathbf{F}_2 d\mathbf{r} = - \iint_S \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy + \iint_S \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Nota

La forma de asegurarnos de que estamos recorriendo la curva frontera de la región en sentido antihorario, es imaginar que si caminamos por dicha curva, la región debe quedar a nuestra izquierda.

**Ejemplos****Ejemplo 1**

Verificar el teorema de Green siendo $F(x, y) = (y^2, x^2)$ y R la región limitada por $y = x$, $y = \frac{x^2}{4}$



Primero calculamos la integral doble

$$R = \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{x^2}{4} \leq y \leq x \end{cases}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y$$

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= 2 \int_0^4 \left[\int_{\frac{x^2}{4}}^x (x - y) dy \right] dx = 2 \int_0^4 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right)_{\frac{x^2}{4}}^x dx = \\ &= 2 \int_0^4 \left(x^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{32} \right) dx = 2 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{160} \right)_0^4 = \frac{32}{15} \end{aligned}$$

Ahora calculamos la integral de línea.

$$C_1 : r_1(t) = \left(t, \frac{t^2}{4} \right) \quad 0 \leq t \leq 4$$

$$r_1'(t) = \left(1, \frac{t}{2} \right) \quad \mathbf{F}(r_1(t)) = \left(\frac{t^4}{16}, t^2 \right) \rightarrow \mathbf{F} \cdot r_1' = \frac{t^4}{16} + \frac{t^3}{2}$$

$$\int_{C_1} \mathbf{F} dr = \int_0^4 \left(\frac{t^4}{16} + \frac{t^3}{2} \right) dt = \frac{224}{5}$$

$$C_2 : r_2(t) = (4,4)(1-t) + (0,0)t = (4-4t, 4-4t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

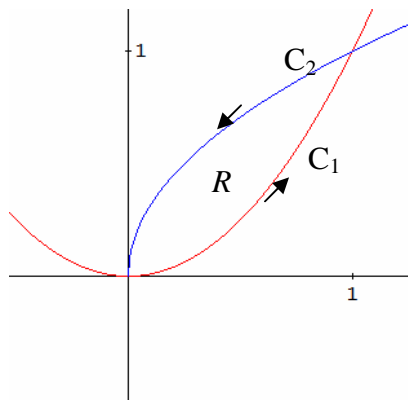
$$r_2'(t) = (-4, -4) \quad \mathbf{F}(r_2(t)) = ((4-4t)^2, (4-4t)^2) \rightarrow \mathbf{F} \cdot r_2' = -8(4-4t)^2$$

$$\int_{C_2} \mathbf{F} dr = \int_0^1 -8(4-4t)^2 dt = -\frac{128}{3}$$

$$\oint_C \mathbf{F} dr = \int_{C_1} \mathbf{F} dr + \int_{C_2} \mathbf{F} dr = \frac{224}{5} - \frac{128}{3} = \frac{32}{15}$$

Ejemplo 2

Verificar el teorema de Green, siendo $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x y)$, y R la región común a $y \geq x^2$; $y^2 \leq x$.



$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (y - 2y) dy \right] dx = -\frac{3}{20}$$

$$\oint P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \oint F[r(t)] \cdot r'(t) dt = \int_{C_1} F[r_1(t)] \cdot r_1'(t) dt + \int_{C_2} F[r_2(t)] \cdot r_2'(t) dt =$$

$$\int_0^1 (t^4, t^3)(1, 2t) dt + \int_0^1 \left(1-t, (1-t)^{\frac{3}{2}} \right) \left(-1, -\frac{1}{2\sqrt{1-t}} \right) dt = \frac{3}{5} - \frac{3}{4} = -\frac{3}{20}$$

8.13.-

Usar el Teorema de Green para calcular: $\oint_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy$; siendo C el camino de $(0,0)$ a $(1,1)$ sobre la gráfica de $y = x^3$; y de $(1,1)$ a $(0,0)$ sobre la de $y = x$.

8.14.-

Mientras está bajo la acción de una fuerza $\mathbf{F}(x, y) = (y^3, x^3 + 3xy^2)$, una partícula da una vuelta a la circunferencia centrada de radio 3. Usar el teorema de Green para hallar el trabajo realizado por \mathbf{F} .

8.15.-

a) Demostrar que, si R es una región plana limitada por una curva cerrada simple, regular a trozos

C ; entonces el área de R viene dada por: $A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$

b) Calcular: el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

8.16.- Verificar el Teorema de Green si $\mathbf{F}(x, y) = (y^2; x^2)$; y C es la frontera de la región situada entre las gráficas de $y = x$; $y = \frac{x^2}{4}$.

8.17.-

Comprobar el teorema de Green en el plano para: $P(x, y) = 2xy - x^2$; $Q(x, y) = x + y^2$. Donde C es la curva cerrada que limita la región entre: $y = x^2$; $y^2 = x$.

8.18.-

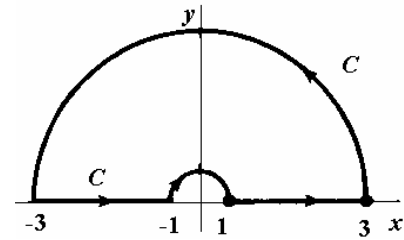
Verificar el Teorema de Green para la función $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 + y, 4xy^2)$, siendo C la frontera de la región limitada por las gráficas de: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$.

8.19.-

Usando el Teorema de Green en el plano, evaluar la integral curvilínea cerrada:

$$\oint_C (\arctg x + y^2) dx + (\ln y - x^2) dy.$$

Donde C es la curva que encierra a la región anular mostrada en la figura.

**Problemas propuestos****Parcial 2001**

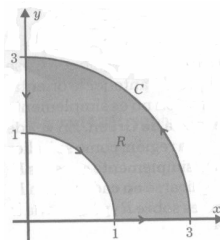
Verificar el Teorema de Green con el campo $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbf{F}(x, y) = (3x^2y, -x^3)$ y R la región comprendida entre las gráficas de $y = -x^2$; $y = -1$.

Parcial 2005

Verificar el teorema de Green para $f(x, y) = (-y^2, x^2)$, siendo R la región limitada por: el segmento de recta que va del punto $(-1, -\sqrt{3})$ al $(1, \sqrt{3})$ y el arco $x^2 + y^2 = 4$ que vuelve del $(1, \sqrt{3})$ al $(-1, -\sqrt{3})$ en sentido antihorario.

Recuperatorio del Parcial 2008

Emplear el teorema de Green para evaluar $\oint_C (\sin x^2 + 6xy) dx + (8x^2 + e^{y^2}) dy$, donde C es la frontera de la región limitada por las circunferencias de radios 1 y 3, centradas en el origen y situadas en el primer cuadrante como se ve en la figura.

**Parcial 2010**

Sea C la frontera de la región encerrada por la curva $x \cdot y = 9$ y el segmento de recta que une los puntos $(9, 1)$ y $(1, 9)$. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x)$ al mover un objeto en sentido antihorario a lo largo de C .

Segundo recuperatorio 2010

Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x^2, xy + z, z^2)$ al desplazar una partícula a lo largo de la curva de intersección del cono elíptico $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = \frac{y^2}{25}$ y el plano $y = 5$, desde el punto $P_0 = (2, 5, 0)$ al $P_1 = (0, 5, -3)$, en sentido horario visto desde el origen.

Segundo recuperatorio 2010

Demostrar que: $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, 2y \sin x - 4, 3xz^2 + 2)$ es un campo irrotacional. Hallar la función potencial y el trabajo realizado para trasladar una partícula desde el punto $A = (0, 1, -1)$ hasta $B = \left(\frac{\pi}{2}, -1, 2\right)$

Parcial 2011

Verificar el teorema de Green, siendo $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, xy)$, y R la región común a $y \geq x^2$; $y^2 \leq x$.

Final 11/02/14

Verificar el Teorema de Green siendo el campo $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x^2)$ y R la región triangular de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

Final febrero 2015

Verificar el teorema de Green siendo el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ y R la región encerrada por $y = 3 - x^2$; $y = x^4 + 1$

Problema

Supongamos que $\nabla F = 0$ y $\nabla G = 0$. ¿Cuáles de los siguientes campos tienen necesariamente divergencia cero?

- a) $F + G$ b) $F \cdot G$ c) $F \times G$