P-satisfacibilidad

Cláusula cerrada:
Cláusula sin variables; los argumentos de los símbolos de relación son términos cerrados.

Ejemplo: $C = P(a) \vee Q(a, b)$ a, b constantes

Definición:
S conjunto de cláusulas; P conjunto de términos cerrados. P(S) es el conjunto de todas las instancias de cláusulas de S donde las variables de S se sustituyen por términos de P.

Ejemplo:
$S = \{ R(x) \vee T(x, y), \neg R(b), R(a) \vee \neg T(a, z) \}$ $P = \{ a, b \}$ a, b ctes.

$P(S) = \{ R(a) \vee T(a, a), R(a) \vee T(a, b), R(b) \vee T(b, a), R(b) \vee T(b, b), \neg R(b), R(a) \vee \neg T(a, a), R(a) \vee \neg T(a, b) \}$

P-satisfacibilidad

Definición:
Sea S conjunto de cláusulas cerradas. S es proposicionalmente satisfacible o p-satisfacible si S es satisfacible como un conjunto de cláusulas proposicionales, donde las fórmulas atómicas cerradas $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ que ocurren en S se tratan como variables proposicionales.

Ejemplo:
$P(S) = \{ R(a) \vee T(a, a), R(a) \vee T(a, b), R(b) \vee T(b, a), R(b) \vee T(b, b), \neg R(b), R(a) \vee \neg T(a, a), R(a) \vee \neg T(a, b) \}$

P(S) se puede escribir como un conj. de cláusulas proposicionales S'

$p_1 = R(a)$ $p_2 = R(b)$ $p_3 = T(a, a)$ $p_4 = T(a, b)$ $p_5 = T(b, a)$ $p_6 = T(b, b)$

$S' = \{p_1 \vee p_3, p_1 \vee p_4, p_2 \vee p_5, p_2 \vee p_6, \neg p_2, p_1 \vee \neg p_3, p_1 \vee \neg p_4 \}$

P-satisfacibilidad

$S' = \{p_1 \vee p_3, p_1 \vee p_4, p_2 \vee p_5, p_2 \vee p_6, \neg p_2, p_1 \vee \neg p_3, p_1 \vee \neg p_4\}$

Se puede comprobar que la valuación

$v(p_1) = 1 \quad v(p_2) = 0 \quad v(p_3) = v(p_4) = 0 \qquad v(p_5) = v(p_6) = 1$

satisface a S'

Por lo tanto, como S' es satisfacible, S es p-satisfacible.

P-satisfacibilidad

Lema:
Sea S un conjunto de cláusulas cerradas. Entonces S es p-satisfacible sí y sólo sí S tiene un Modelo de Herbrand.

Ejemplo:
$S = \{ R(x) \vee T(x, y), \neg R(b), R(a) \vee \neg T(a, z) \}$ a, b ctes.

$U(S) = \{ a, b \}$
$B(S) = \{ R(a), R(b), T(a, a), T(a, b), T(b, a), T(b, b) \}$

S es p-satisfacible entonces debe tener un Modelo de Herbrand

Sea $Y \subseteq B(S)$ tal que $M_y(H) \models S \leftrightarrow$

$M_y(H) \models R(x) \vee T(x, y)$ y $M_y(H) \models \neg R(b)$ y $M_y(H) \models R(a) \vee \neg T(a, z)$

P-satisfacibilidad

Ejemplo:

$S = \{ R(x) \vee T(x, y), \neg R(b), R(a) \vee \neg T(a, z) \}$ a, b ctes.

⇨ $M_y(H) \models \neg R(b) \quad \leftrightarrow \quad R(b) \notin Y$ ✓ (1)

⇨ $M_y(H) \models R(a) \vee \neg T(a, z) \quad \leftrightarrow \quad R(a) \in Y$

ó $T(a, d) \notin Y \;\; \forall d: d \in U(S) \leftrightarrow T(a, a), T(a, b) \notin Y$

⇨ Elegimos $R(a) \in Y$ ✓ (2)

⇨ $M_y(H) \models R(x) \vee T(x, y) \quad \leftrightarrow$

$M_y(H) \models (R(x) \vee T(x, y))[d_1, d_2] \qquad \forall d_1, d_2: d_1, d_2 \in U(S)$

P-satisfacibilidad

$d_1 = d_2 = a$

$M_y(H) \models R(a) \vee T(a, a) \quad \leftrightarrow \quad M_y(H) \models R(a)$ ó $M_y(H) \models T(a, a)$

✓ por (2)

$d_1 = a, d_2 = b$

$M_y(H) \models R(a) \vee T(a, b) \quad \leftrightarrow \quad M_y(H) \models R(a)$ ó $M_y(H) \models T(a, b)$

$d_1 = b, d_2 = a$

✓ por (2)

$M_y(H) \models R(b) \vee T(b, a) \quad \leftrightarrow \quad M_y(H) \models R(b)$ ó $M_y(H) \models T(b, a)$

NO por (1)   ✓

$d_1 = d_2 = b$

$M_y(H) \models R(b) \vee T(b, b) \quad \leftrightarrow \quad M_y(H) \models R(b)$ ó $M_y(H) \models T(b, b)$

NO por (1)   ✓

Podemos definir $Y = \{ R(a), T(b, a), T(b, b)\}$

S tiene un Modelo de Herbrand

P-satisfacibilidad

Y = { R(a), T(b, a), T(b, b)}

Está asociado a la valuación definida en resolución por p-satisfacible

p_1 = R(a) p_2 = R(b) p_3 = T(a, a) p_4 = T(a, b) p_5 = T(b, a) p_6 = T(b, b)

$v(p_1) = 1$ $v(p_2) = 0$ $v(p_3) = v(p_4) = 0$ $v(p_5) = v(p_6) = 1$

P-satisfacibilidad

Teorema:

Sea S un conjunto de cláusulas (no necesariamente cerradas).
Las siguientes condiciones son equivalentes:

- S tiene Modelos de Herbrand
- U(S)(S) es p-satisfacible (U(S)(S) denota el conjunto de todas las instancias cerradas de cláusulas de S sobre U(S))
- Todo subconjunto finito $S_0 \subseteq$ U(S)(S) es p-satisfacible

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA - 2016

P-satisfacibilidad

Teorema:

Sea S un conjunto de cláusulas.
Las siguientes condiciones son equivalentes:

- S es insatisfacible
- S no tiene modelos
- S no tiene Modelos de Herbrand
- U(S)(S) es p-insatisfacible
- Existe un subconjunto finito $S_0 \subseteq U(S)(S)$ que es p-insatisfacible
- Existe un subconjunto finito $S_0 \subseteq U(S)(S)$ tal que $S_0 \vdash_R \perp$

P-satisfacibilidad

Ejemplo:

$S = \{ A(x, b) \vee A(f(a), y), \neg A(f(a), b), \neg A(f(a), f(a)) \}$ a, b constantes

$U(S) = \{ a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), \ldots\}$

$B(S) = \{ A(a, a), A(a, b), A(b, a), A(b, b), A(a, f(a)), A(f(a), a),$
$A(b, f(a)), A(f(a), b), \ldots, A(a, f(b)), A(f(b), a), \ldots\}$

$U(S)(S) = \{A(a, b) \vee A(f(a), a), A(a, b) \vee A(f(a), b), A(b, b) \vee A(f(a), a),$
$A(b, b) \vee A(f(a), b), \ldots, A(f(a), b) \cancel{\vee A(f(a), b),} \neg A(f(a), b), \neg A(f(a), f(a))\}$

El subconjunto finito
$S_0 = \{A(f(a), b), \neg A(f(a), b)\}$ es claramente insatisfacible

S es insatisfacible

P-satisfacibilidad

Ejemplo:

S = { A(x, b), ¬A(z, b) ∨ B(y), ¬B(f(b))} b constante

U(S) = { b, f(b), f(f(b)), f(f(f(b))), ...}

B(S) = { A(b, b), A(b, f(b)), A(f(b), b), A(f(b), f(b)), ...,
B(b), B(f(b)), B(f(f(b))), ...}

Supongamos que existe un modelo $M_Y(H)$, tal que $M_Y(H) \models S$

Entonces $M_Y(H) \models A(x, b) \wedge (\neg A(z, b) \vee B(y)) \wedge \neg B(f(b))$

- Como $M_Y(H) \models \neg B(f(b))$ entonces $M_Y(H) \not\models B(y)$
- Como $M_Y(H) \models \neg A(z, b) \vee B(y)$ entonces debe ser $M_Y(H) \not\models A(z, b)$
- Pero entonces $M_Y(H) \not\models A(x, b)$

S es insatisfacible

P-satisfacibilidad

S = { A(x, b), ¬A(z, b) ∨ B(y), ¬B(f(b)) } b constante

S es insatisfacible

Entonces

$\neg S = \neg\ \forall x\ \forall z\ \forall y (A(x, b) \wedge (\neg A(z, b) \vee B(y)) \wedge \neg B(f(b)))$ Es válida

$\neg S = \exists x\ \exists z\ \exists y\ (\neg A(x, b) \vee A(z, b) \wedge \neg B(y) \vee B(f(b)))$ Es válida

Otra forma para probar que S es insatisfacible:

Mostrar que existe $S_0 \subseteq$ U(S)(S) tal que S_0 es insatisfacible

$S_0 = \{ A(b, b),\ \neg A(b, b) \vee B(f(b)), \neg B(f(b)) \}$