MODULO 7

- **INTEGRALES DOBLES**
- **INTEGRALES TRIPLES**
- **CAMBIO DE VARIABLES**

Integrales Multiples

La idea para definir integrales múltiples es la misma que la que usamos para las integrales de funciones de una variable.

Particionar la región de integración en subregiones, tomar los valores extremos de la función en cada subregión, armar los conjuntos de las sumas inferiores y las superiores y, en el caso de que el supremo del primero coincida con el ínfimo del segundo definir a ese número como la integral.

Vamos a hacer este análisis para el caso de integrales dobles, pero el proceso se puede generalizar a integrales n-múltiples.

Integrales dobles sobre rectángulos

Definición

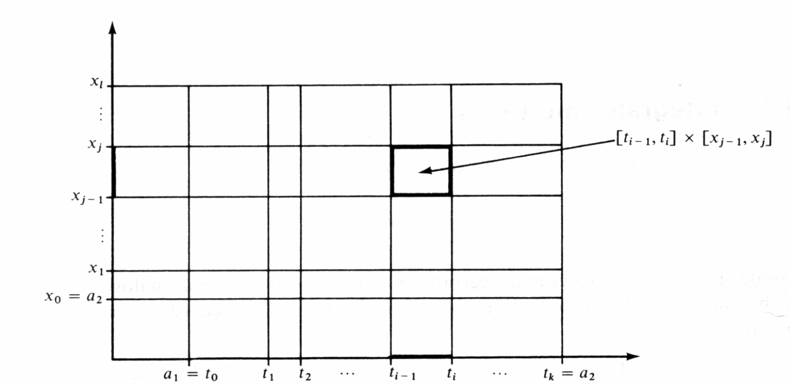
Una partición de un intervalo cerrado $[a,b]$ es una sucesión $t_0, t_1, \dots, t_n$ tal que: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

La partición P divide al intervalo $[a,b]$ en n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$.

Definición

Una partición de un rectángulo cerrado $R = [a,b] \times [c,d]$ es un par $P = (P_1, P_2)$ tal que P_1 es partición de $[a,b]$ y P_2 lo es de $[c,d]$.

Si $P_1 = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ y $P_2 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ la partición $P = (P_1, P_2)$ divide al rectángulo cerrado $R = [a,b] \times [c,d]$ en $m \times n$ subrectángulos $[t_{i-1}, t_i] \times [x_{j-1}, x_j]$.



Sea *f* una función $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, acotada sobre *R*, sea *P* una partición de *R*, definimos para cada subrectángulo *S* de la partición:

$$m_S(f) = \inf\{f(x,y);(x,y)\in S\}$$
$$M_S(f) = \sup\{f(x,y);(x,y)\in S\}$$

Estos números existen por ser *f* acotada en *R* y por lo tanto en *S*.

Definición

Si $R=[a,b]\times[c,d]$ llamamos área de R, $A(R)$ al número:

$$A(R)=(b-a)(d-c)$$

Análogamente el área de *S* es:

$$A(S)=(t_i-t_{i-1})(x_j-x_{j-1})$$

Definición

Llamamos suma inferior de *f* correspondiente a la partición *P* a:

$$L(f,P)=\sum_{S\in P} m_S(f)A(S)$$

y suma superior de *f* con la partición *P* a:

$$U(f,P)=\sum_{S\in P} M_S(f)A(S)$$

Teorema

$L(f,P)\leq U(f,P)\quad \forall P$, partición de *R*.

Demostración

Como $m_S(f)\leq M_S(f)\Rightarrow L(f,P)=\sum_{S\in P} m_S(f)A(S)\leq \sum_{S\in P} M_S(f)A(S)=U(f,P)$

Definición

Decimos que la partición *P’* es más fina que *P* si cada subrectángulo de *P’* está contenido en un subrectángulo de *P*.

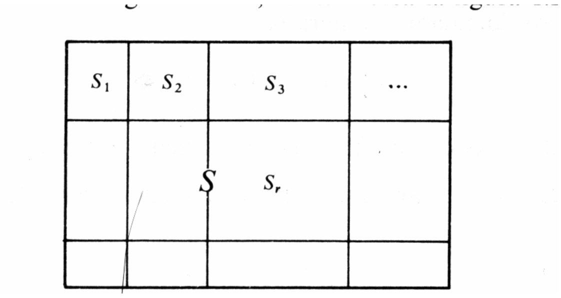
Teorema

Si *P’* es más fina que *P*, entonces:

$a)\ L(f,P)\leq L(f,P')$
$b)\ U(f,P')\leq U(f,P)$

Demostración

a) Por ser *P'* más fina que *P*, cada subrectángulo *S* de *P* está formado por varios subrectángulos de *P'*.



Sea $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_r \,; S_i \in P'$, entonces

$A(S) = A(S_1) + A(S_2) + \cdots + A(S_r)$

además $m_s(f) \leq m_{s_i}(f)$

entonces

$$m_s(f)A(S) = m_s(f)\left[A(S_1) + A(S_2) + \cdots + A(S_r)\right] =$$
$$= m_s(f)A(S_1) + m_s(f)A(S_2) + \cdots + m_s(f)A(S_r) \leq$$
$$\leq m_{s_1}(f)A(S_1) + m_{s_2}(f)A(S_2) + \cdots + m_{s_r}(f)A(S_r)$$

La suma para todo *S* de *P* del primer miembro es $L(f,P)$, mientras que en el segundo miembro de la desigualdad obtenemos $L(f,P')$

$\therefore L(f,P) \leq L(f,P')$

Análogamente se demuestra (b)

<u>Teorema</u>

Para particiones cualesquiera de *R*, *P* y *P'*, se verifica que:

$L(f,P) \leq U(f,P')$

Demostración

Basta tomar una partición *P"* más fina que *P* y que *P'*, entonces:

$L(f,P) \leq L(f,P'') \leq U(f,P'') \leq U(f,P')$

<u>Consecuencia</u>

Sea *f* acotada en *R*, y los conjuntos

$\mathcal{L} = \{L(f,P) / P \text{ es particion de } R\}$
$\mathcal{U} = \{U(f,P) / P \text{ es particion de } R\}$

$\mathcal{L}$ y $\mathcal{U}$ son conjuntos de números reales, no vacíos.

$\mathcal{L}$ está acotado superiormente por cualquier $U(f,P)$.

Por axioma de completitud $\mathcal{L}$ admite supremo

Análogamente $\mathcal{U}$ admite ínfimo y vale que:

$\sup \mathcal{L} \leq \inf \mathcal{U}$

Definición

Sea *f* definida y acotada en *R*, *f* es integrable sobre *R* sí y sólo sí:

$$\sup \mathcal{L} = \inf \mathcal{U}$$

A este número le damos el nombre de integral doble de *f* sobre *R* y lo representamos

$$\iint_R f(x,y)\, dA \ \text{ o } \iint_R f(x,y)\, dx\, dy$$

Cuando $f(x,y) \geq 0$ sobre *R*, la integral doble **representa el volumen** del sólido de base *R* y altura $f(x,y)$.

Teorema

La función acotada $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, es integrable sobre *R* sí y sólo sí:

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, P$, partición de *R* tal que

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

Propiedades

Sean $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *f* y *g* integrables sobre *R*, entonces:

a) $(f+g)$ es integrable sobre *R* y vale que:

$$\iint_R (f+g)(x,y)\, dA = \iint_R f(x,y)\, dA + \iint_R g(x,y)\, dA$$

b) $c \in \mathbb{R}$, $c\, f$ es integrable sobre *R* y:

$$\iint_R c\ f(x,y)\, dA = c \iint_R f(x,y)\, dA$$

c) Si $\forall (x,y)/(x,y)\in R;\ f(x,y)\le g(x,y) \Rightarrow \iint_R f(x,y)\ dA \le \iint_R g(x,y)\ dA$

Demostración

a)

$$m_S(f)=\inf\{f(x,y)/(x,y)\in S\}$$
$$m_S(g)=\inf\{g(x,y)/(x,y)\in S\}$$
$$m_S(f+g)=\inf\{(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y)/(x,y)\in S\}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_S(f)\le f(x,y),\forall (x,y)\in S \\ m_S(g)\le g(x,y),\forall (x,y)\in S \end{array}\right\} \Rightarrow m_s(f)+m_S(g)\le f(x,y)+g(x,y),\forall (x,y)\in S$$

$m_s(f)+m_S(g)$ es cota inferior de $\{f(x,y)+g(x,y)/(x,y)\in S\}$

$\therefore m_s(f)+m_S(g)\le m_s(f+g)$

de acá deducimos que:

$$L(f,P)+L(g,P)\le L(f+g,P)$$

Análogamente:

$$U(f+g,P)\le U(f,P)+U(g,P)$$

Entonces:

$$L(f,P)+L(g,P)\le L(f+g,P)\le U(f+g,P)\le U(f,P)+U(g,P)$$

Como *f* y *g* son integrables sobre *R*, existen particiones *P* y *P’* tales que:

$$U(f,P)-L(f,P)<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(g,P')-L(g,P')<\frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando *P”* más fina que *P* y *P’* tenemos:

$$U(f+g,P'')-L(f+g,P'')\le [U(f,P'')+U(g,P'')]-[L(f,P'')+L(g,P'')]<\varepsilon$$

$\therefore \iint_R [f(x,y)+gx,y)]\ dA$ existe.

$\therefore (f+g)$ es integrable.

Falta ver que $\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]\ dA=\iint_R f(x,y)\ dA+\iint_R g(x,y)\ dA$

$$L(f,P)\le \iint_R f(x,y)\ dA\le U(f,P)$$

$$\underline{L(g,P)}\le \underline{\iint_R g(x,y)\ dA}\le \underline{U(g,P)}$$

$$L(f,P)+L(g,P)\le \iint_R f(x,y)\ dA+\iint_R g(x,y)\ dA\le U(f,P)+U(g,P)\quad (1)$$

Por otro lado

$$L(f,P)+L(g,P)\le L(f+g,P)\le \int_a^b [f(x)+g(x)]dx \le U(f+g,P)\le U(f,P)+U(g,P)$$

$$\therefore -[U(f,P)+U(g,P)]\le -\int_a^b [f(x)+g(x)]dx \le -[L(f,P)+L(g,P)] \quad (2)$$

$(1)+(2)$

$$-\underbrace{\left[\underbrace{U(f,P)-L(f,P)}_{<\frac{\varepsilon}{2}}+\underbrace{U(g,P)-L(g,P)}_{<\frac{\varepsilon}{2}}\right]}_{<\varepsilon}\le$$

$$\le \iint_R f(x,y)\,dA+\iint_R g(x,y)\,dA-\iint_R (f+g)(x,y)\,dA\le$$

$$\le \underbrace{\left[\underbrace{U(f,P)-L(f,P)}_{<\frac{\varepsilon}{2}}+\underbrace{U(g,P)-L(g,P)}_{<\frac{\varepsilon}{2}}\right]}_{<\varepsilon}$$

$$-\varepsilon<\iint_R f(x,y)\,dA+\iint_R g(x,y)\,dA-\iint_R (f+g)(x,y)\,dA<\varepsilon$$

$$\left|\iint_R f(x,y)\,dA+\iint_R g(x,y)\,dA-\iint_R (f+g)(x,y)\,dA\right|<\varepsilon \ \forall\varepsilon>0$$

$$\therefore \qquad \iint_R f(x,y)\,dA+\iint_R g(x,y)\,dA=\iint_R (f+g)(x,y)\,dA$$

Los casos (b) y (c) se demuestran similarmente.

Teorema

Sea $f: R\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si *f* es continua en *R* entonces *f* es integrable sobre *R*.

Integrales iteradas

Sea *f* integrable sobre el rectángulo $R=[a,b]\times[c,d]$.

Si mantenemos *x* fija, podemos integrar a $f(x,y)$ respecto de *y* desde $y=c$ a $y=d$.

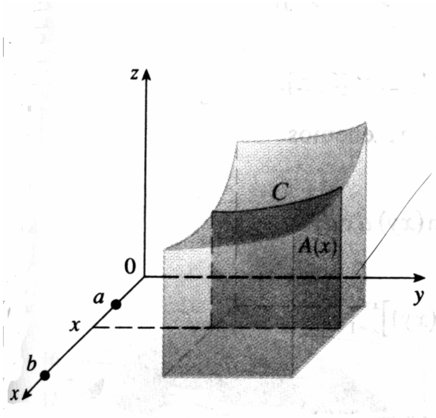
La integral es un número que depende del valor de $x\in[a,b]$.

$$A(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$$

Si ahora integramos $A(x)$ respecto de *x* de $x=a$ a $x=b$, tenemos:

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\;dy\right] dx$$

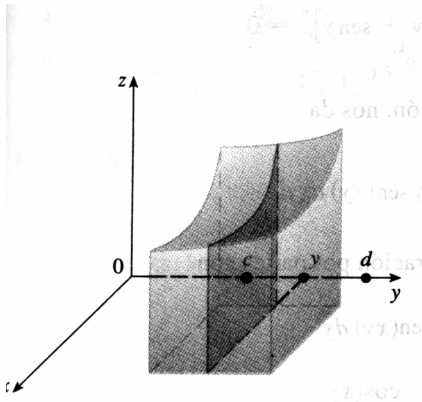
la integral de la derecha se llama integral iterada.



Análogo con y fija ($c \le y \le d$).

$A(y) = \int_a^b f(x,y)\;dx$, e integrando de $y = c$ a $y = d$

$$\int_c^d A(y)\;dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\;dx\right] dy$$



Ejemplo

Evaluar las integrales iteradas: a) $\int_0^3\int_1^2 x^2 y\,dy\,dx$ b) $\int_1^2\int_0^3 x^2 y\,dx\,dy$

a) La región de integración es un rectángulo $D = \{(x,y)\,/\,0 \le x \le 3,\; 1 \le y \le 2\}$

Considerando a x como una constante, obtenemos:

$$\int_1^2 x^2 y dy = \left[\; x^2\,\frac{y^2}{2}\;\right]_{y=1}^{y=2} = x^2\left(\frac{2^2}{2}\right) - x^2\left(\frac{1^2}{2}\right) = \frac{3}{2}x^2 = A(\,x)$$

Ahora integrando esta función $A(\,x)$ dependiente de x, desde 0 hasta 3 :

$$\int_0^3 A(x)\;dx = \int_0^3 \frac{3}{2}\;x^2\;dx = \left.\frac{x^3}{2}\right]_0^3 = \frac{27}{2}$$

En general planteamos:

$$\int_0^3\int_1^2 x^2 y\,dy\,dx = \int_0^3\left[\int_1^2 x^2 y\,dy\right]dx = \int_0^3 \frac{3}{2}x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{2}\right]_0^3 = \frac{27}{2}$$

b) Análogamente, si integramos primero respecto de x :

$$\int_1^2\int_0^3 x^2 y\,dx\,dy = \int_1^2\left[\int_0^3 x^2 y\,dx\right]dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3}y\right]_{x=0}^{x=3} dy = \int_1^2 9\,y\,dy = 9\left.\frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \frac{27}{2}$$

Observamos que en ambos casos obtuvimos la misma respuesta, aunque primero hallamos integrado con respecto a x, o con respecto a y. En este caso resulta que las dos integrales iteradas son independientes del orden de integración.

<u>Teorema de Fubini</u>

Si f es continua en el rectángulo $R=[a,b]\times[c,d]$, entonces:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx = \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$$

7.1.-

Dibujar la región de integración R y calcular $\iint_R f(x,y)\,dA$

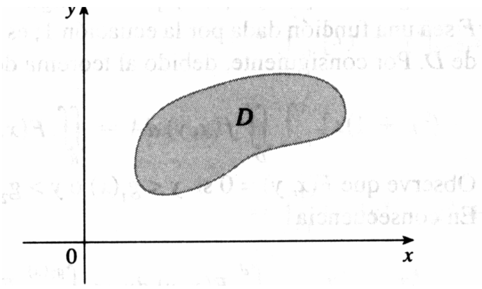
$$a)\int_0^2\int_0^1 (1+2x+2y)\,dy\,dx \qquad b)\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 x.\cos^2 y)\,dy\,dx$$

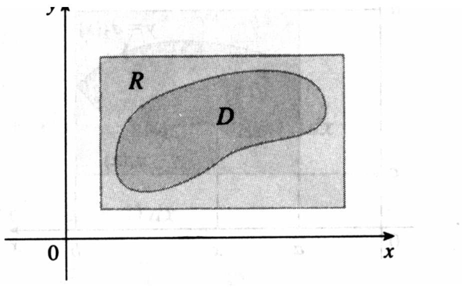
<u>Integrales dobles sobre regiones más generales</u>

Sea D una región acotada, D puede encerrarse en una región rectangular R.

Sea f definida y acotada sobre D. Definimos una nueva función F con dominio R así:

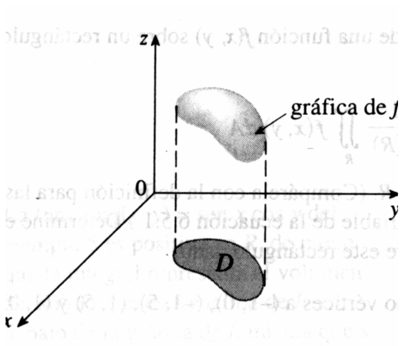
$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y)\in D \\ 0 & \text{si } (x,y)\in R \text{ y } (x,y)\notin D \end{cases}$$





Si F es integrable sobre R entonces es integrable sobre D y definimos:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA$$

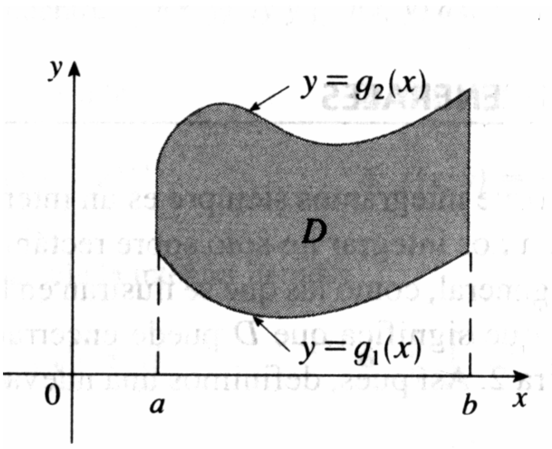


Definición

Se dice que una región plana D, es del tipo I si está entre las gráficas de dos funciones continuas de x.

$$D = \{(x,y) / a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

con g_1 y g_2 continuas en $[a,b]$.

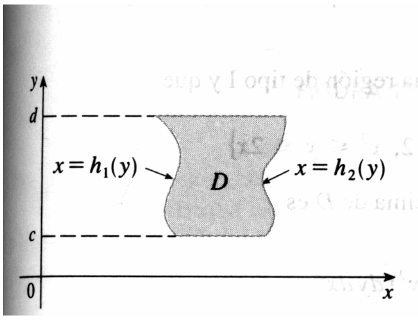


Definición

Se dice que una región plana D, es del tipo II si está entre las gráficas de dos funciones continuas de y.

$$D = \{(x,y) / c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

con h_1 y h_2 continuas en $[c,d]$.



Si *f* es continua sobre una región *D* del tipo I, entonces:

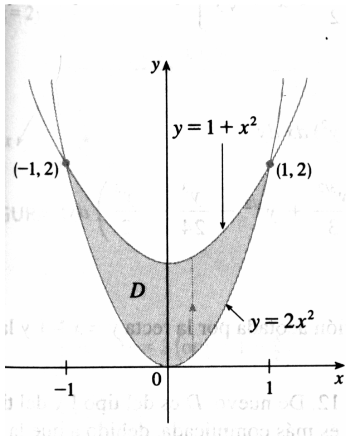
$$\iint_D f(x,y)\ dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy \right] dx$$

Si *f* es continua sobre una región *D* del tipo II, entonces:

$$\iint_D f(x,y)\ dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\ dx \right] dy$$

Ejemplo

Evaluar $\iint_D (x+2y)\ dA$, donde *D* es la región acotada por las parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$



Las parábolas se cruzan cuando $2x^2 = x^2 + 1$, es decir, $x^2 = 1 \to x = \pm 1$

Observamos que la región *D*, dibujada en la figura, es una región tipo I, por lo que podemos escribir:

$$D = \left\{ (x,y) / -1 \le x \le 1;\ \ 2x^2 \le y \le 1 + x^2 \right\}$$

Puesto que la frontera inferior es $y = 2x^2$ y la frontera superior es $y = 1 + x^2$ resulta:

$$\iint_D (x+2y)\, dA =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y)dy\,dx = \int_{-1}^{1}\left[xy+y^2\right]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx = \int_{-1}^{1}\left[x\left(1+x^2\right)+\left(1+x^2\right)^2 - x\left(2x^2\right)-\left(2x^2\right)^2\right] dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1\right) dx = -3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Bigg]_{-1}^{1} = \frac{32}{15}$$

Nota: Cuando establecemos una integral doble, como la del ejemplo (2), resulta esencial hacer un diagrama. A menudo es útil dibujar una flecha vertical, como en la figura anterior. Así los límites de integración para la integral *interna* pueden leerse a partir del diagrama como sigue: La flecha comienza en la frontera inferior $y = g_1(x)$, la cual da el límite inferior de la integral, y la flecha termina en la frontera superior $y = g_2(x)$, la que brinda el límite superior de la integración.

Para una región del tipo II, la flecha es horizontal y va de la frontera izquierda a la frontera derecha.

Ejemplos

Ejemplo 1

Determinar el volumen del sólido que está bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y encima de la región D en el plano xy acotado por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$

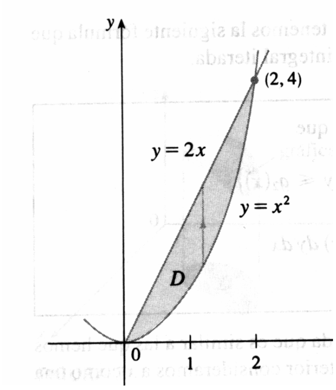


Fig. 1 – Región del tipo I

De la Fig.1, vemos que D es una región del tipo I y que:

$$D = \left\{(x, y) /\ \ 0 \le x \le 2,\ \ x^2 \le y \le 2x\right\}$$

En consecuencia, el volumen bajo $z = x^2 + y^2$ y encima de D es:

$$V = \int\int_D (x^2+y^2)\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)\, dy\, dx = \frac{216}{35}$$

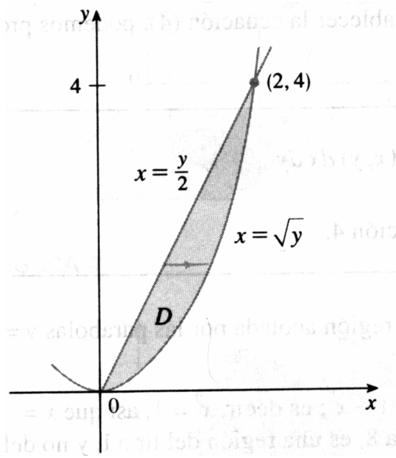


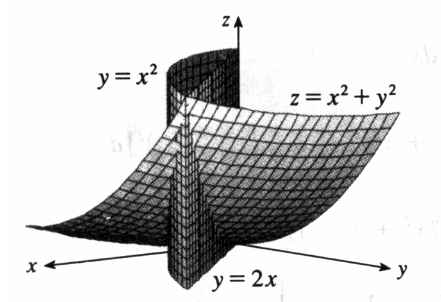
Fig. 2 – Región del tipo II

De la Fig. 2, observamos que *D* puede también escribirse como una región tipo II:

$$D = \left\{ (x,y) / 0 \le y \le 4,\ \frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y} \right\}$$

Por lo tanto, otra expresión para V es:

$$V = \int\int_D (x^2+y^2) dA = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x^2+y^2) dx dy = \frac{216}{35}$$



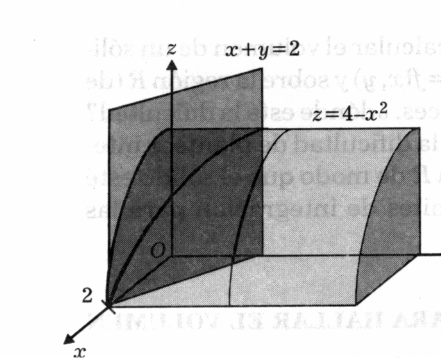
La figura muestra el sólido cuyo volumen se ha calculado. Está encima del plano *XY*, debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$, y entre el plano $y = 2x$ y el cilindro parabólico $y = x^2$

Ejemplo 2

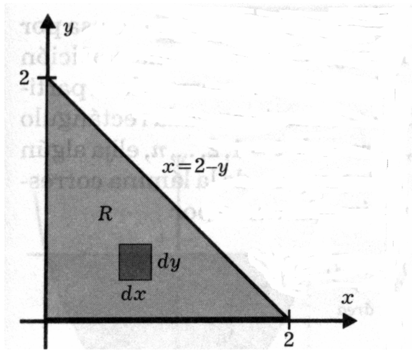
Hallar el volumen de un sólido situado en el primer octante y limitado por las gráficas de:

$$z = 4 - x^2, \quad x + y = 2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

Primero dibujamos una gráfica del sólido, observamos que $z = 4 - x^2$ es un cilindro, $x + y = 2$ es un plano, además $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ son los planos coordenados.



Observando la figura vemos que el sólido está situado bajo la superficie $z = 4 - x^2$ y sobre la región triangular *R* en el plano *xy* formado por el eje *x*, el eje *y*, y la proyección del plano $x + y = 2$ en el plano *xy* (es decir la recta $x + y = 2$).



La región *R* graficada nos muestra que podría integrarse en cualquiera de los dos ordenes: primero respecto de *x* o de *y*. Primero respecto de *y* sería:

$$R = \{(x, y) /\ 0 \le x \le 2;\ \ 0 \le y \le 2 - x\}$$

$$\int_0^2 \int_o^{2-x} \underbrace{\left(4 - x^2\right)}_{altura}\ \underbrace{dy}_{\text{largo}}\ \underbrace{dx}_{ancho}$$

Análogamente, integrando primero respecto de x sería:

$$R = \{(x, y) /\ 0 \le y \le 2;\ \ 0 \le x \le 2 - y\}$$

$$\int_0^2 \int_o^{2-y} \underbrace{\left(4 - x^2\right)}_{altura}\ \underbrace{dx}_{\text{largo}}\ \underbrace{dy}_{ancho} = \int_0^2 \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)_{x=0}^{x=2-y} dy = \int_0^2 \left[4(2-y) - \frac{(2-y)^3}{3}\right] dy\ = \frac{20}{3}$$

7.2.-

Dibujar la región de integración R y calcular $\iint_R f(x,y)\,dA$

$a)\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}} x^2y^2\,dx\,dy$ $\qquad$ $b)\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}(1+2x+2y)\,dy\,dx$

$c)\int_0^1\int_{y-1}^{0} e^{x+y}\,dx\,dy+\int_0^1\int_0^{1-y} e^{x+y}\,dx\,dy$ $\qquad$ $d)\int_0^6\int_{y/2}^{3}(x+y)\,dx\,dy$

Propiedades

1) Si $D=D_1\cup D_2$ y $D_1\cap D_2=\varnothing$ y f continua en D, entonces:

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_{D_1} f(x,y)\,dA+\iint_{D_2} f(x,y)\,dA$$

2) Área de D

$$A(D)=\iint_D 1\,dA$$

3) Si $m\le f(x,y)\le M\quad\forall(x,y)\in D$ y f continua en D, entonces:

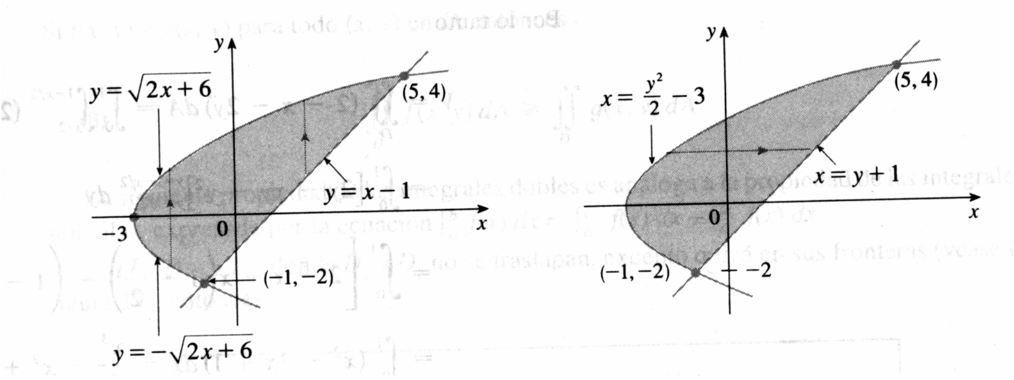
$$m\,A(D)\le\iint_D f(x,y)\,dA\le M\,A(D)$$

Elección del orden de integración

Ejemplo

Evaluar $\iint_D xy\,dA$ donde D es la región acotada por la recta $y=x-1$ y la parábola $y^2=2x+6$

Las gráficas siguientes muestran a D como región tipo I y tipo II, pero la descripción de D como región tipo I es más complicada, debido a que la frontera inferior consiste de dos partes.



Así que preferimos expresar a D como región tipo II :

$$D=\left\{(x,y)\ /\ \ -2\le y\le 4,\quad \frac{y^2}{2}-3\le x\le y+1\ \right\}$$

$$\iint_D xy\,dA=\int_{-2}^{4}\int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} xy\,dx\,dy=\int_{-2}^{4}\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{x=\frac{y^2}{2}-3}^{x=y+1}dy=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}y\left[(y+1)^2-\left(\frac{y^2}{2}-3\right)^2\right]dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(-\frac{y^5}{4}+4y^3+2y^2-8y\right)dy=\frac{1}{2}\left[-\frac{y^6}{24}+y^4+2\frac{y^3}{3}-4y^2\right]_{-2}^{4}=36$$

Si hubiéramos expresado a D como una región tipo I utilizando la primera de las figuras, entonces hubiésemos obtenido:

$$\iint_D xy\,dA=\int_{-3}^{-1}\int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dydx+\int_{-1}^{5}\int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dydx$$

lo que implicaría el cálculo de dos integrales para evaluar la integral pedida.

7.3.-

Plantear la integral para ambos órdenes de integración y usar el más conveniente para calcular la integral sobre la región R.

$a)\iint_R x.y\ dA$ $\qquad R=$ rectángulo con vértices (0,0) ; (0,5) ; (3,5) ; (3,0)

$b)\iint_R \dfrac{y}{x^2+y^2}\ dA$ $\qquad R$ limitada por : $y=x; y=2x;\ x=2$

$c)\iint_R \dfrac{y}{1+x^2}\ dA$ $\qquad R$ limitada por $y=0; y=\sqrt{x}\,; x=4$

$d)\iint_R (x^2+y^2)\ dA$ $\qquad R:$ semicírculo limitado por $y=\sqrt{4-x^2}\,; y=0$.

$e)\iint_R x\ dA$ R: sector circular situado en el primer cuadrante limitado por

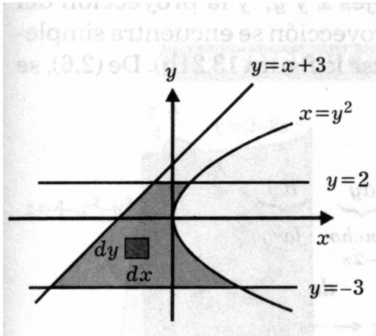
$$y=\sqrt{25-x^2}\,; 3x-4y=0\,, y=0$$

<u>Empleo de la integral doble para hallar el área</u>

Ejemplo

Hallar el área de la región limitada por las gráficas de:

$x = y^2, y - x = 3,\ y = -3$ e $y = 2$



Observamos que en la figura se señaló un pequeño rectángulo cuyos lados son *dx* y *dy*, respectivamente. Esto sirve de ayuda para indicar los límites de la integral iterada.

$$A = \iint_R dA = \int_{-3}^{2}\int_{y-3}^{y^2} dx\,dy = \int_{-3}^{2} x\Big|_{x=y-3}^{x=y^2} dy = \int_{-3}^{2}\left[y^2 - (y-3)\right] dy = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 3y\right)\Bigg|_{-3}^{2} = \frac{175}{6}$$

7.4.-

Usar una integral iterada para hallar el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas:

$a)\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2; x = 0; y = 0.$

$b)\ y = x^{3/2}; y = x.$

$c)\ x.y = 9; y = x; y = 0; x = 9$

7.5.-

Usar una integral doble para obtener el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones:

$a)\ z = x.y; z = 0; y = x; x = 1$ (primer octante)

$b)\ y = 0; z = 0; y = x; z = x; x = 0; x = 5.$

$c)\ z = 0; z = x^2; x = 0; x = 2; y = 0; y = 4.$

$d)\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Cambio de variables en integrales dobles

Al estudiar integración en una dimensión aparece el método de sustitución, que nos permite calcular algunas integrales transformándolas en otras conocidas o más sencillas. La fórmula en la que se basa el método es:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f\left[g(t)\right]g'(t)\,dt$$

El siguiente es un ejemplo de lo que ocurre si en la fórmula de sustitución no incluimos a $g'(t) = \frac{1}{3}$

(Hecho con Derive)

#1: $\mathrm{SIN}(3 \cdot x)$

#2: $\mathrm{SIN}(t)$

#3: $\int_0^{3\cdot\pi} \mathrm{SIN}(3\cdot x)\,dx$

#4: $\frac{2}{3}$

#5: $\int_0^{\pi} \mathrm{SIN}(t)\,dt$

#6: 2

Con esto se evidencia que $g'(t)$ juega el papel de **factor de proporcionalidad de áreas**, es decir que compensa el cambio de escala hecho al sustituir $g(t) = 3x$

Gráficamente:

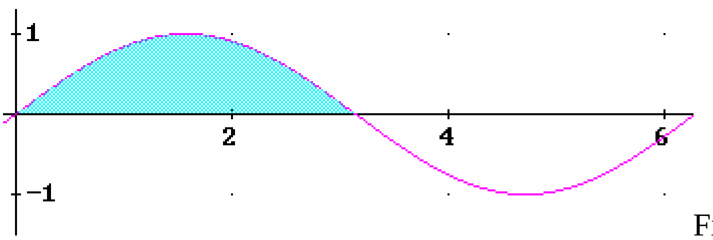


Fig. 1

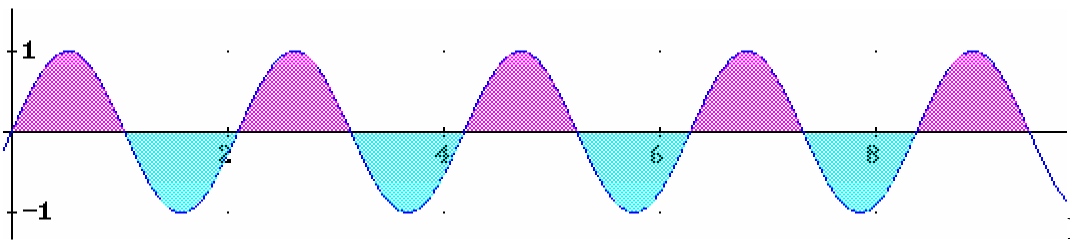


Fig. 2

El área resaltada de la figura 1 representa a la $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\, dt$ que es tres veces mayor que el área encerrada por cualquiera de las semiondas de la figura 2 que representa a la integral $\int_0^{3\pi} \operatorname{sen}(3x)\, dx$ (las áreas de las otras semiondas se anulan por ser iguales y de distinto signo).

En dos variables hay un problema análogo para el cambio de variables en integrales dobles. Pretendemos transformar una integral doble $\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ en otra de la forma $\iint_T f(u,v)\, du\, dv$, donde *D* es una región del plano *xy* mientras que *T* es otra región del plano *uv*.
El cambio de variables vendrá dado por dos ecuaciones que definen una función que hace corresponder a un punto (u,v) del plano *uv*, el punto imagen (x,y) del plano *xy*.

$$x = X(u,v) \quad y = Y(u,v)$$

Consideraremos funciones *X*, *Y*, biyectivas, continuas y con derivadas parciales continuas $\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial v}$ en *D*. (La mayoría de las funciones usuales cumplen con estas condiciones).

La fórmula de transformación para integrales dobles puede escribirse:

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_T f\left[X(u,v), Y(u,v)\right] \left|J(u,v)\right|\, du\; dv$$

Donde $\left|J(u,v)\right|$ es **el valor absoluto del jacobiano de la transformación**, y juega el mismo papel de **factor de corrección de áreas** que tiene $g'(t)$ en el caso de una variable.
El jacobiano de la transformación es el valor absoluto del determinante:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

<u>Transformaciones lineales</u>

Una transformación lineal es una aplicación definida por un par de ecuaciones de la forma:

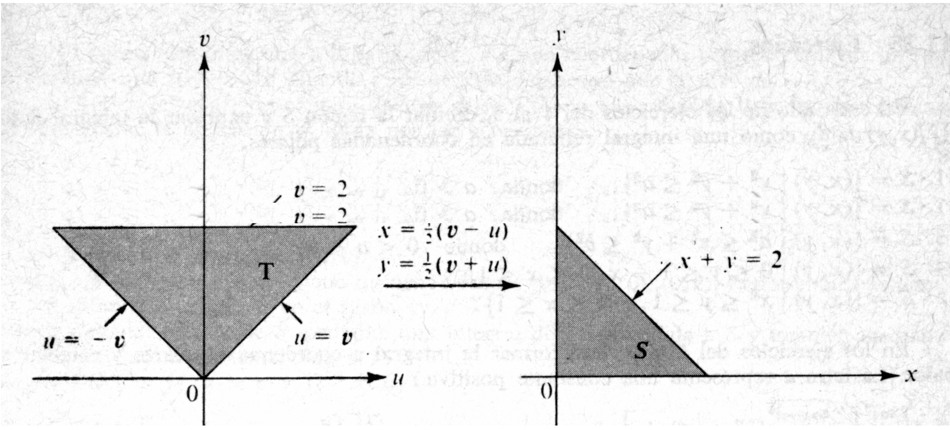
$$x = Au + Bv \qquad y = Cu + Dv$$

donde A, B ,C, D son constantes dadas. El jacobiano es: $J(u,v)=A\ D\ -\ B\ C$. Para asegurar la existencia de la transformación inversa debe ser $J(u,v) \neq 0$, esto nos asegura que podemos resolver las ecuaciones respecto de u y v en función de x y de y.

Las transformaciones lineales transforman rectas en rectas. Por lo tanto, la imagen de un rectángulo en el plano uv es un cuadrilátero en el plano xy, y su área es la del rectángulo multiplicada por el factor: $\left|J(u,v)\right|$.

Ejemplo

Consideremos la integral: $\iint\limits_S e^{\frac{y-x}{y+x}}\ dx\, dy$ en la que S es un triángulo determinado por la recta $x+y=2$ y los ejes coordenados.



La presencia de y-x e $y + x$ en el integrando sugiere el cambio de variables:

$$u = y - x \qquad v = y + x$$

Resolviendo respecto de x e y encontramos:

$$x = \frac{v-u}{2} \qquad y = \frac{v+u}{2}$$

El jacobiano es $J(u,v)=\dfrac{1}{2}$. Para encontrar la imagen T de S en el plano uv observamos que la recta x=0 e y =0 se transforman en las rectas $u = v$ y $u = -v$, respectivamente, la recta x+y=2 se transforma en la recta $v=2$.

Los puntos interiores de S satisfacen $0 < x + y < 2$ y se transforman en puntos de T que satisfacen 0<v<2. por lo tanto la nueva región de integración T es una región triangular, como puede apreciarse en la figura.

La integral doble considerada se transforma así en:

$$\iint_S e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dx\, dy = \frac{1}{2}\iint_T e^{\frac{u}{v}} du dv$$

Integrando respecto a u obtenemos:

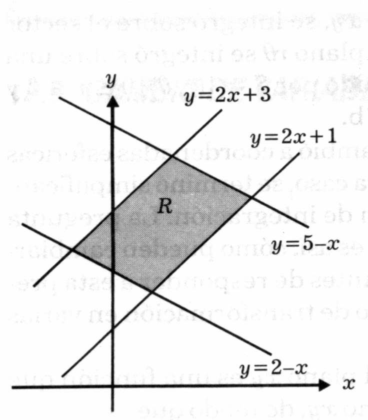
$$\frac{1}{2}\iint_T e^{\frac{u}{v}} du dv = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} du\right] dv = \frac{1}{2}\int_0^2 v\left(e-\frac{1}{e}\right) dv = e-\frac{1}{e}$$

<u>Cambio de variables para transformar una región</u>

Ejemplo

Evaluar la integral $\iint_R \left(x^2+2xy\right)dA,$ donde R es la región limitada por las rectas: $y = 2x+3;\ y = 2x+1;\ y = 5-x;\quad y = 2-x$.

La dificultad para evaluar esta integral se debe a que la región de integración requiere la descomposición de la integral en tres partes.



Una alternativa es hallar un cambio de variables; observando las ecuaciones vemos que $y-2x=3;\ y-2x=1;\ y+x=2;\quad y+x=5$ esto nos sugiere el cambio de variables:

$$u = y-2x \qquad\qquad v = y+x$$

despejando x e y en función de u y v obtenemos:

$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(v-u) \\ y = \frac{1}{3}(2v+u) \end{cases}$ y el rectángulo a integrar es: $S = \{(u,v)/\ 1 \le u \le 3;\ 2 \le v \le 5\}$, además puede comprobarse fácilmente que $J(u,v) = -\frac{1}{3}$

$$\iint_R \left(x^2+2xy\right)dA = \iint_S \left[\frac{1}{9}(v-u)^2 + \frac{2}{9}(v-u)(2v+u)\right]\left|J(u,v)\right| \; du\,dv =$$

$$= \frac{1}{27}\int_2^5\int_1^3 \left[(v-u)^2 + 2\left(2v^2-uv-u^2\right)\right] du\,dv = \frac{196}{27}$$

7.6.-

Usar el cambio de variables indicado para calcular la integral doble:

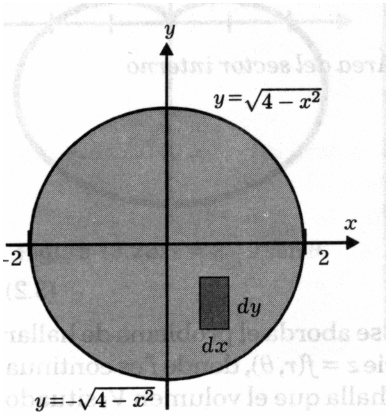
$a) \iint_R x \; dx\,dy \; ; \quad x=\frac{1}{2}(u+v) \; ; \; y=\frac{1}{2}(u-v).\, R:$cuadrado de vert. $(0,0);(1,1);(2,0);(1.-1)$

$b) \iint_R 4(x+y)e^{x+y} dy\,dx \; ; x=\frac{(u+v)}{2} \; ; \; y=\frac{(u-v)}{2}.R:$ triángulo de vértices (-1,1);(1,1);(0,0).

Cambio a coordenadas polares

Ejemplo

Calcular la $\iint_R \left(x^2+y^2+3\right) dA$, donde R es la región circular de radio 2 centrada en el origen de coordenadas.



De acuerdo a la figura la región $R=\left\{(x,y)/ \; -2\le x\le 2; \; -\sqrt{4-x^2} \; \le y\le \sqrt{4-x^2}\right\}$, y vemos que es muy complicado expresar la integral en coordenadas rectangulares, cuando la región es circular lo adecuado es utilizar coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r \; \cos\phi \\ y = r \; \operatorname{sen}\phi \end{cases}$$

$S=\left\{(r,\phi)/ \; 0\le r\le 2, \; 0\le\phi\le 2\pi\right\}$y además el integrando: $x^2+y^2+3=r^2+3$ y el $J(r,\phi)= r$

$$\iint_R \left(x^2+y^2+3\right) dA = \iint_S \left(r^2+3\right) |J| \; dr\; d\phi \;=\; \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(r^2+3\right) r\, dr\, d\phi \;= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(r^3+3r\right) dr d\phi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4}+3\frac{r^2}{2}\right)_{r=o}^{r=2} d\phi = 20\pi$$

7.7.-

Calcular la integral, cambiando a coordenadas polares:

$$a) \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y\, dx\, dy$$

$$b) \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\, dy\, dx$$

$$c) \int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\; dy\, dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\; dy\; dx$$

$$d) \iint_R (x^2+y^2)\; dA \;;\; R:\; x^2+y^2 \le 4 \;;\; 0 \le x \;;\; 0 \le y$$

Integrales triples

Las integrales triples tienen una definición similar a la de integrales dobles, pero ahora la región rectangular del plano donde estaba definida $f(x,y)$, es una caja rectangular en el espacio $\mathbb{R}^3$, donde está definida $f(x,y,z)$.

El problema acá es que las imágenes de $f(x,y,z)$ tendrían que graficarse en un eje perpendicular a los ejes *x, y, z,* cosa que es imposible. Lo único que podemos dibujar son los dominios de las funciones, que son sólidos del espacio $\mathbb{R}^3$.

Teorema de Fubini

Si *f* es continua sobre $R=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ entonces:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

(hay seis órdenes posibles).

Integrales triples en regiones más generales

Sea una región $E \subset \mathbb{R}^3$ acotada, entonces puede ser encerrada en una caja:
$R=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$.

Sea *f* continua sobre *E,* definimos:

$$F(x,y,z)=\begin{cases} f(x,y,z) & si\ (x,y)\in E \\ 0 & si\ (x,y)\in R \wedge (x,y)\notin E \end{cases}$$

entonces:

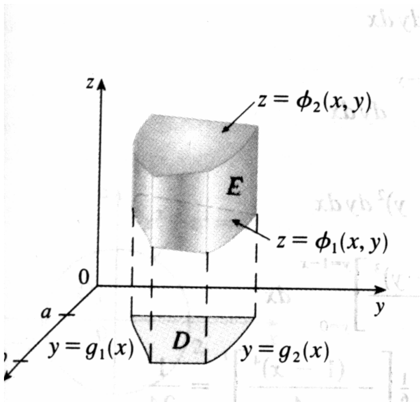
$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV=\iiint_R F(x,y,z)\,dV$$

Si $E=\{(x,y,z)/(x,y)\in D,\Phi_1(x,y)\le z\le \Phi_2(x,y)\}$, donde D es la proyección de E sobre el plano xy, y Φ_1, Φ_2 continuas, entonces:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV=\iint_D\left[\int_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dA$$

En particular si la proyección D de E sobre el plano xy es una región plana del tipo I, entonces:
$E=\{(x,y,z)/a\le x\le b, g_1(x)\le y\le g_2(x),\Phi_1(x,y)\le z\le \Phi_2(x,y)\}$, y la integral triple se calcula:

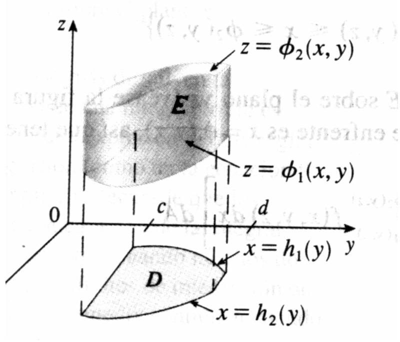
$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV=\int_a^b\left\{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\left[\int_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dy\right\}dx$$



Si, en vez de esto, la región D es del tipo II:

$E=\{(x,y,z)/c\le y\le d, h_1(y)\le x\le h_2(y),\Phi_1(x,y)\le z\le \Phi_2(x,y)\}$, y la integral queda:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV=\int_c^d\left\{\int_{h_1(y)}^{h_2(y)}\left[\int_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dx\right\}dy$$



7.8.-

Resolver las integrales triples:

$$a)\int_0^3\int_0^2\int_0^1 (x+y+z)\,dx\,dy\,dz \qquad d)\int_1^2\int_0^{x^2}\int_{x+z}^{x-z} z\;dy\,dz\,dx$$

$$b)\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 x^2y^2z^2\;dx\,dy\,dz \qquad e)\int_{-1}^2\int_1^{x^2}\int_1^{x+y} 2x^2y\;\;dz\,dy\,dx$$

$$c)\int_0^1\int_{1+x}^{2x}\int_z^{x+z} x\;dy\,dz\,dx \qquad f)\int_2^3\int_0^{3y}\int_1^{y.z}(2x+y+z)\,dx\,dz\,dy$$

<u>Volumen de la región *E*</u>

$$V(E)=\iiint_E 1\,dx\,dy\,dz$$

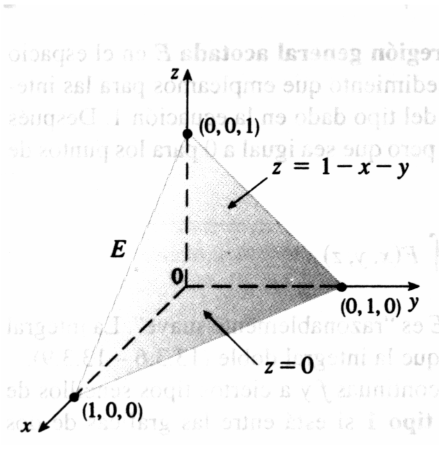
<u>Cálculo de algunas integrales triples</u>

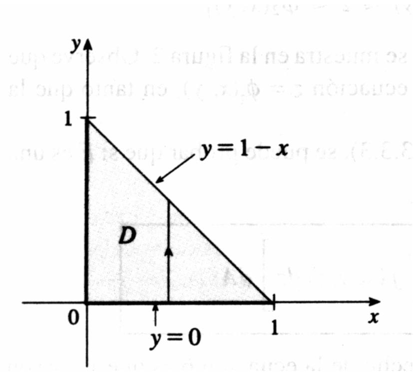
Ejemplo

Evaluar la $\iiint_E z\,dV$ donde E es el tetraedro sólido acotado por los cuatro planos:

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0 \quad \text{y} \quad x+y+z=1$$

Cuando establecemos una integral triple, resulta conveniente dibujar *dos* diagramas: uno para la región sólida E y otro para su proyección D sobre el plano xy .





La frontera inferior del tetraedro es el plano $z=0$ y la superior es el plano $x+y+z=1$ de modo que utilizamos $\Phi_1(x,y)=0$ y $\Phi_2(x,y)=1-x-y$.

La intersección entre los planos: $x+y+z=1$ y $z=0$ es la recta $x+y=1$ en el plano *xy*. Por consiguiente, la proyección de E es la región triangular mostrada en la segunda figura, así que tenemos:

$$E = \{(x, y, z) /\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x,\ \ 0 \le z \le 1 - x - y\ \}$$

La descripción de E como región tipo 1 nos permite evaluar la integral de la siguiente manera:

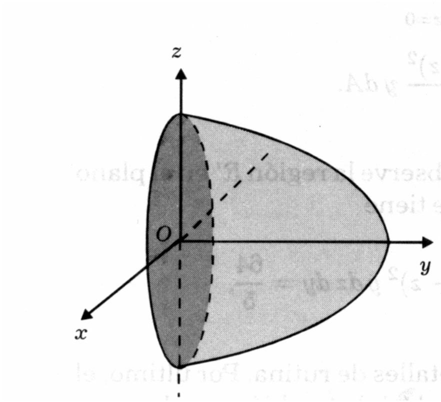
$$\iiint_E z\, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{1-x-y} dydx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2\, dy\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[- \frac{(1-x-y)^3}{3} \right]_0^{1-x} dx = \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3\, dx = \frac{1}{6} \left[- \frac{(1-x)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

<u>Empleo de una integral triple para hallar el volumen</u>

Ejemplo

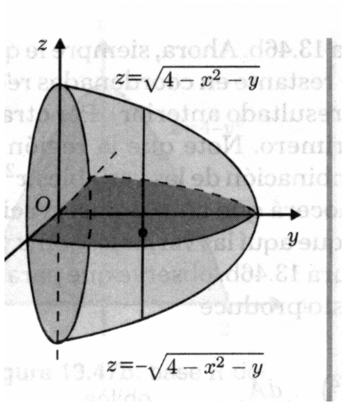
Usar una integral triple para hallar el volumen del sólido Q limitado por las gráficas de $y = 4 - x^2 - z^2$ y el plano xz



Observamos que la gráfica es un paraboloide cuyo vértice está en (0,4,0), el eje corresponde al eje *y* y abre hacia el eje *y* negativo, como puede apreciarse en la figura.

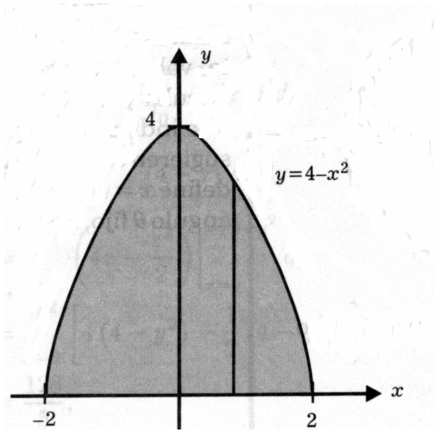
Ahora la pregunta es: ¿cómo establecer los límites de integración?.

Podríamos considerar primero la integración con respecto a *z*, en este caso, la proyección del sólido en el plano *xy* es la parábola formada por la intersección del paraboloide con el plano *xy*.



En la figura observamos que para cada x e y fijos, la recta que pasa por el punto $(x, y, 0)$, la cual es perpendicular al plano xy, entra al sólido por la mitad inferior del paraboloide $z = -\sqrt{4 - x^2 - y}$ y sale por la parte superior del mismo $z = \sqrt{4 - x^2 - y}$. Esto da los límites más internos de la integración.

El resto se obtiene al observar la proyección del paraboloide en el plano xy.



De dicho análisis podemos deducir que Q está descripta por:

$$Q = \left\{(x, y, z) / -2 \le x \le 2, 0 \le y \le 4 - x^2, -\sqrt{4 - x^2 - y} \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y}\right\}$$

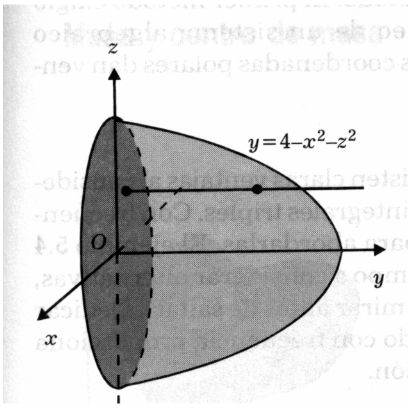
Luego la integral triple que nos permite calcular el volumen es:

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\int_{-\sqrt{4-x^2-y}}^{\sqrt{4-x^2-y}} dz\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} 2\sqrt{4 - x^2 - y}\; dy\,dx =$$

$$\int_{-2}^{2} (-2)\left(\frac{2}{3}\right)\left(4 - x^2 - y\right)^{3/2}\Big|_{0}^{4-x^2} dx = \frac{4}{3}\int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)^{3/2} dx = 8\pi$$

Estas integraciones son difíciles, podemos resolverlas por sustitución trigonométrica o empleando las tablas.

En estas situaciones, podríamos preguntarnos si existe un método más fácil; así que examinamos otro punto de vista. Si observamos nuevamente la figura del sólido, debe ser un paraboloide de base circular en el plano xz. Esto indica que quizá deberíamos integrar primero respecto de y.



Observamos en la figura que para cada punto de la base del sólido en el plano *xz, y* varía desde 0 hasta $4-x^2-z^2$. En este caso, la base está formada por la intersección del paraboloide con el plano *xz*, $(y=0)\rightarrow 0=4-x^2-z^2$, circunferencia de radio 2 centrada en el origen, (recordar coordenadas polares y jacobiano) entonces ahora podemos escribir a *Q*:

$$Q=\left\{(x(r,\phi),y,z(r,\phi))/\,0\le r\le 2,\ 0\le\phi\le 2\pi,\ 0\le y\le 4-x^2-z^2\right\}$$

$$V=\iiint_Q dV=\iint_R\int_0^{4-x^2-z^2} dy\,dA=\iint_R \underbrace{4-x^2-z^2}_{4-r^2}\quad \underbrace{dA}_{r\,drd\phi}=\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2)\,r\,dr\,d\phi=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left.\frac{\left(4-r^2\right)^2}{2}\right|_0^2 d\phi=4\int_0^{2\pi}d\phi=8\pi$$

Al comparar ambas maneras de abordar el problema vemos que es más natural visualizar al sólido como si tuviera la base en el plano *xz*, y si comparamos el nivel de dificultad de las integrales requeridas en cada caso, obviamente preferimos la segunda forma de resolución.

Como observamos en este ejemplo, existen claras ventajas al considerar métodos alternativos para calcular integrales triples. Es conveniente analizar todas las posibles maneras de describir la región Q para luego optar por la que nos proporciona menos dificultades de integración.

7.9.-

Representar la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas, expresar su volumen como una integral triple y calcularlo:

$a)$ $x+2y+3z=6, x=0\ y=0\ z=0$

$b)$ $x^2+y^2=9, z=0\ z=2$

$c)$ $z=9-4x^2-y^2, z=0$

$d)$ $36x^2+9y^2+4z^2=36$

Cambio de variables en una integral triple

Con las mismas hipótesis que para el cambio de variables para integrales dobles, en el caso de tres variables tenemos las ecuaciones de la transformación del dominio *V* del espacio *xyz* al *W* del espacio *uvw*:

$$x = X(u,v,w),\, y = Y(u,v,w),\, z = Z(u,v,w)$$

La ecuación de transformación de la integral es:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_W f\left[X(u,v,w),Y(u,v,w),Z(u,v,w)\right]\left|J(u,v,w)\right|du\,dv\,dw$$

donde

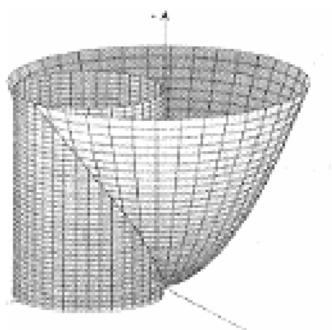
$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial w} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial w} \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Cambio a coordenadas cilíndricas o esféricas

Ejemplo

Calcular el volumen del sólido que está por debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$, encima del plano *xy* y dentro del cilindro $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

El sólido está por encima del disco *R*, cuya frontera tiene de ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$



En coordenadas cilíndricas tenemos: $x-1 = r.\cos t \quad y = r.\text{sen}t \quad z = z$ con $|J| = r$

Donde el radio varia entre 0 y 1, ya que va del centro al borde del círculo de la base, $0 < r < 1$.

El ángulo debe dar una vuelta completa, $0 < t < 2\pi$

Finalmente *z* debe empezar en el plano *xy* y terminar en el paraboloide

$x^2 + y^2 = (r\cos t + 1)^2 + (r.\,\text{sen}\,t)^2 = r^2 + 2r\cos t + 1$, por lo que $0 < z < r^2 + 2r\cos t + 1$

Con esto calculamos el volumen pedido:

$$V=\iiint_v r\,dz\ dr\ dt=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left(\int_0^{r^2+2r\cos t+1} r\ dz\right)dr\right]dt=\frac{3}{2}\pi$$

7.10.-

Calcular $\iiint_V \exp\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}\,dV$, donde V es la esfera unidad de $\mathbb{R}^3$.

7.11.-

Calcular, por triple integración, el volumen de la esfera centrada de radio R.

7.12.-

Calcular $\iiint_V z\,dV$, siendo V la región adentro del cilindro $x^2+y^2=1$, por encima del plano $z=0$, y por debajo del cono $z=\left(x^2+y^2\right)^{1/2}$.

7.13.-

Calcular $\iiint_W \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\,dW$, donde W es el sólido acotado por las dos esferas $x^2+y^2+z^2=a^2$ y $x^2+y^2+z^2=b^2$, con $0<b<a$.

Problemas propuestos

1)

Calcular el valor de la siguiente integral doble:

$$\int_0^2\int_{\sqrt{2x}}^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\,y^3\right)dy\ dx$$

2)

Hallar el área de la región encerrada entre las gráficas de: $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=x$, $y=\sqrt{3}\,x$

Parcial 2006

Calcular la $\iint_R x\,y\,dA$, donde R es la región acotada por la recta $y=x-1$ y la parábola $y^2=2x+6$.

Recuperatorio 2008

Dada $A(R)=\int_{-6}^{-1}\left[\int_{-3}^{x+3} dy\right]dx+\int_{-1}^{0}\left[\int_{-3}^{2} dy\right]dx+\int_{0}^{9}\left[\int_{-3}^{-\sqrt{x}} dy\right]dx+\int_{0}^{4}\left[\int_{\sqrt{x}}^{2} dy\right]dx$

a) Dibujar la región de integración *R*.

b) Invertir el orden de integración.

c) Calcular la integral obtenida en (b).

Recuperatorio 2009

Calcular el área de la región común a $y \le x$; $y \ge x^2 - 4x$

Parcial 2012

Dada la integral $\int_{\sqrt{8}}^{4}\left[\int_{\sqrt{16-x^2}}^{x} x\,y\,dy\right]dx+\int_{4}^{\sqrt{18}}\left[\int_{0}^{x} x\,y\,dy\right]dx+\int_{\sqrt{18}}^{6}\left[\int_{0}^{\sqrt{36-x^2}} x\,y\,dy\right]dx$

a) Dibujar la región de integración.

b) Pasarla a coordenadas polares.

c) Calcular la integral obtenida en (b).

Parcial 2014

Calcular la $\iint_R \left(\frac{y}{x}\right)^3 dA$, siendo *R* la región limitada por: $y=\sqrt{x}, y=\sqrt{2x}, 3y=x^2, 5y=x^2$,

usando el cambio de variables: $x=u^{1/3}v^{2/3}$, $y=u^{2/3}v^{1/3}$.