Forma Clausular

Formas Normales:

✓ Literal: fórmula atómica o negación de fórmula atómica

Un literal se denota con l y su complementario con l^C

Ejemplo:

L = <{P, Q}, {f}, {c}>   P binario, Q unario, f unaria

$l_1 = P(c, f(c))$ $l_2 = l_1^C = \neg P(c, f(c))$ $l_3 = \neg P(x, y)$ $l_4 = l_3^C = P(x, y)$

Forma Normal Conjuntiva (FNC): es una conjunción de disyunciones de literales

Forma Prenexa: es una conjunción de disyunciones de literales con la siguiente forma

$$\underbrace{Q_1x_1\ Q_2x_2 \ldots Q_nx_n}_{\text{Prefijo}}\ \underbrace{M(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{\text{Matriz}}$$

Prefijo: Q_i cuantificadores

Matriz: Libre de cuantificadores, en FNC

Forma Clausular

Ejemplo de fórmula en Forma Prenexa:

$\forall x \exists y((P(x, c) \vee Q(y)) \wedge \neg P(x, y) \wedge (Q(f(c)) \vee \neg P(c, x)))$

Cómo llevar una fórmula a Forma Prenexa:

1) Renombrar variables si es necesario
   $\forall xA(x) \equiv \forall yA(y)$ $\exists xA(x) \equiv \exists yA(y)$ y no es variable de A

2) Eliminar implicaciones
   $A \to B \equiv \neg A \vee B$

3) Hacer que la negación aparezca inmediatamente antes de una fórmula atómica
   $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
   $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
   $\neg\neg A \equiv A$
   $\neg\forall xA(x) \equiv \exists x\neg A(x)$
   $\neg\exists xA(x) \equiv \forall x\neg A(x)$

Forma Clausular

Cómo llevar una fórmula a Forma Prenexa:

4) Escribir todos los cuantificadores al principio

$\forall x A(x) \wedge B \equiv \forall x(A(x) \wedge B)$ $\quad x \notin Var(B)$

$\forall x A(x) \vee B \equiv \forall x(A(x) \vee B)$ $\quad x \notin Var(B)$

$\exists x A(x) \wedge B \equiv \exists x(A(x) \wedge B)$ $\quad x \notin Var(B)$

$\exists x A(x) \vee B \equiv \exists x(A(x) \vee B)$ $\quad x \notin Var(B)$

5) Aplicar la ley distributiva

$A \vee B \wedge C \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Ejemplo

$F = \exists x P(x, c) \vee \forall x P(c, x) \rightarrow \forall x\, \exists y P(x, y)$

Aplicando los 5 pasos anteriores, se obtiene F´ en forma prenexa $F' \equiv F$

$$F' = \underbrace{\forall x \exists u \forall w \exists y}_{\text{Prefijo}} \underbrace{((\neg P(x, c) \vee P(w, y)) \wedge (\neg P(c, u) \vee P(w, y)))}_{\text{Matriz libre de cuantificadores, en FNC}}$$

Forma Clausular

Cláusula:

Es una **sentencia** escrita en **forma prenexa** que en el **prefijo sólo** tiene **cuantificadores universales** y la **matriz** es una **disyunción de literales**.

$$\underbrace{\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n}_{\text{Prefijo}} \underbrace{(l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_n)}_{\text{Matriz – Disyunción de literales}} \qquad l_i \text{ literales}$$

Forma clausular (o clausal):

Una **fórmula** está **en forma clausular** (o clausal, o forma normal de Skolem) si es una **conjunción de claúsulas**

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m)$$

C_i cláusulas y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variables que ocurren en $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$

Forma Clausular

Toda variable está cuantificada universalmente $\Rightarrow$ se omiten cuantificadores

$A = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m)$ $A = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ forma clausular

Ejemplo

$A = \forall x \forall y (P(x, y) \wedge (\neg P(f(a), x) \vee P(f(x), a)))$

$A = \{ P(x, y), \neg P(f(a), x) \vee P(f(x), a) \}$ forma clausular

$A = \forall x \exists y P(x, y)$ está en forma prenexa pero NO en forma clausular

$A' = \forall x P(x, f(x))$ está en forma clausular pero A y A´ NO son equivalentes

Forma Clausular

Teorema de Skolem

Sea A una sentencia. Entonces existe una fórmula A´ en la forma normal de Skolem tal que existe un modelo M de A sí y sólo sí existe un modelo M´ de A´, es decir A es satisfacible sí y solo sí A´ es satisfacible.
En símbolos $A \approx A'$

Para construir A´, a partir de A en forma prenexa, se deben eliminar los cuantificadores existenciales, teniendo en cuenta:

1) Si la fórmula es de la forma $A = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n \exists x\, M(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$
   - se define un nuevo símbolo de función f de aridad n
   - se reemplaza toda ocurrencia de x por $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$

   $A' = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n M(f(y_1, y_2, \dots, y_n), y_1, y_2, \dots, y_n)$

2) Si la fórmula es de la forma $A = \exists x M(x)$
   - se reemplaza toda ocurrencia de x por una nueva constante a

   $A' = M(a)$

Forma Clausular

Ejemplo:

Sea $A = \exists x P(x, c) \vee \forall x P(c, x) \rightarrow \forall x\, \exists y P(x, y)$ c constante

En forma prenexa

$A = \forall x \exists u \forall w \exists y((\neg P(x, c) \vee P(w, y)) \wedge (\neg P(c, u) \vee P(w, y)))$

Dos formas clausulares a partir de A

$A' = \forall x \forall w((\neg P(x, c) \vee P(w, f(x, w))) \wedge (\neg P(c, g(x)) \vee P(w, f(x, w))))$

$A'' = \forall x \forall w((\neg P(x, c) \vee P(w, f(w))) \wedge (\neg P(c, a) \vee P(w, f(w))))$ a constante

(sin pasar por la forma prenexa, en general se obtienen funciones de menor aridad)

Corolario del Teorema de Skolem:

Sea A una fórmula. Entonces A es insatisfacible o contradictoria sí y sólo sí cualquier forma clausular asociada es insatisfacible.

⬇

Método para determinar validez de una fórmula

(A es lógicamente válida sí y sólo sí $\neg A$ es contradictoria)

$\neg A$ es contradictoria sí y sólo sí cualquier forma clausular de $\neg A$ es insatisfacible)