UNIDAD 5

Límites Indeterminados

En la unidad correspondiente a límites ya se han calculado límites de cocientes $f(x)/g(x)$ en los que el numerador y el denominador tienden a cero, es decir, cuando el cociente adopta "la forma indeterminada $0/0$".

Algunas veces el trabajo para "salvar" estas indeterminaciones puede abreviarse con el uso de una técnica de derivación llamada *regla de L´Hôpital.*

La idea del método consiste en el estudio del cociente de derivadas $f'(x)/g'(x)$ y deducir de él información relativa a $f(x)/g(x)$.

Veamos qué relación existe entre el cociente $f(x)/g(x)$ y el cociente de derivadas $f(x)/g(x)$.

Supongamos que *f* y *g* son dos funciones para las que $f(a) = g(a) = 0$. Luego, para $x \neq a$ tenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Big/ \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Si las derivadas $f'(a)$ y $g'(a)$ existen, y si $g'(a) \neq 0$, entonces cuando $x \to a$ el cociente del tercer miembro tiende a $f'(a)/g'(a)$ y por lo tanto

$$f(x)/g(x) \to f'(x)/g'(x)$$

L a regla de L´Hopital nos dice que $f(x)/g(x)$ tiende al mismo límite.

Regla de L´Hôpital para $0/0$.

Supongamos que *f* y *g* admiten derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ en cada punto de un intervalo abierto (a, b) y supongamos que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$$

y además, $g'(x) \neq 0$ para cada *x* en (a, b).

Si el límite: $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

existe y tiene el valor *L*, entonces el límite

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

también existe y tiene el valor *L*.

Demostración:

Para la demostración haremos uso de la fórmula de Cauchy aplicada al intervalo cerrado que tiene a a como extremos izquierdo.
Las funciones f y g pueden no estar definidas en a, por esta razón, introducimos dos funciones que estén definidas en a. Sean estas funciones:

$$F(x) = f(x) \qquad \text{si } x \neq a, \qquad F(a) = 0$$

$$G(x) = g(x) \qquad \text{si } x \neq a, \qquad G(a) = 0$$

F y G son continuas en a . En efecto, si $a < x < b$, las dos funciones son continuas en el intervalo cerrado $[a, x]$ y tienen derivada en todos los puntos del intervalo abierto (a, x). Por lo tanto, la fórmula de Cauchy se puede aplicar al intervalo $[a, x]$ resultando:

$$[F(x) - F(a)] \cdot G'(c) = [G(x) - G(a)] \cdot F'(c)$$

donde c es un punto que satisface: $a < c < x$.

Teniendo en cuenta que $F(a) = G(a) = 0$ se tiene:

$$f'(x) \cdot g'(c) = g(x) \cdot f'(c)$$

siendo $g'(c) \neq 0$, puesto que por hipótesis $g'(c)$ no se anula en ningún punto de (a, b), y $g(x)$ es también distinto de cero. Si fuera $g(x) = 0$ tendría que ser $G(x) = G(a) = 0$ y por el teorema de Rolle, existiría un punto x_1 entre a y x donde $G'(x_1) = 0$, en contradicción con la hipótesis de que g' no se anula nunca en (a, b). Por lo tanto, se puede dividir por $g'(c)$ y $g(x)$ obteniéndose:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Cuando $x \to a$, el punto $c \to a$ y el cociente $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ tiende a L. Por lo tanto, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tiende también a L con lo que el teorema queda demostrado.

Observación 1: El teorema ha sido formulado tomando límites por la derecha. Existe un teorema similar en el que las condiciones son todas por la izquierda. Combinando los dos teoremas, se obtiene un teorema por ambos lados, en el que $x \to a$ de cualquier manera.

Observación 2: Si el cociente de las derivadas $f'(x) \big/ g'(x)$ toma a su vez la forma $0/0$ se puede aplicar nuevamente la regla de L´Hôpital y así sucesivamente hasta que desaparezca la indeterminación.

Ejemplo 1:

Encontrar el $\displaystyle \mathop{lím}_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$.

Solución:

$$\underset{x\to 1}{lím}\ \ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \underset{x\to 1}{lím}\ (x-1) = 0$$

Podemos aplicar la regla de L´Hôpital:

$$\underset{x\to 1}{lím}\ \frac{\ln x}{x-1} = \underset{x\to 1}{lím}\ \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x-1)} = \underset{x\to 1}{lím}\ \frac{1/x}{1} = 1$$

Ejemplo 2:

Encontrar el $\underset{x\to 0}{lím}\ \dfrac{tg\,x - x}{x^3}$.

Solución:

$$\underset{x\to 0}{lím}\ tg\,x - x = 0 \qquad \text{y} \qquad \underset{x\to 1}{lím}\ x^3 = 0$$

Aplicamos la regla de L´Hôpital:

$$\underset{x\to 0}{lím}\ \frac{tg\,x - x}{x^3} = \underset{x\to 0}{lím}\ \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

Como el límite del segundo miembro sigue siendo indeterminado del tipo $0/0$, aplicamos nuevamente la regla:

$$\underset{x\to 0}{lím}\ \frac{tg\,x - x}{x^3} = \underset{x\to 0}{lím}\ \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \underset{x\to 0}{lím}\ \frac{2\cdot \sec x\cdot tgx}{6x}$$

Nuevamente numerador y denominador tienden a cero, de modo que es necesario aplicar nuevamente la regla de L´Hôpital:

$$\underset{x\to 0}{lím}\ \frac{tg\,x - x}{x^3} = \underset{x\to 0}{lím}\ \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \underset{x\to 0}{lím}\ \frac{2\cdot \sec^2 x\cdot tgx}{6x}$$

$$= \underset{x\to 0}{lím}\ \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \underset{x\to 0}{lím}\ \frac{2\cdot \sec x\cdot tgx}{6x} = \underset{x\to 0}{lím}\ \frac{4\cdot \sec^2 x\cdot tg^2 x + 2\cdot \sec^4 x}{6} = \frac{1}{3}$$

Extensión de la regla de L´Hôpital:

La regla de L´Hôpital permite resolver otras indeterminaciones (distintas a $0/0$) mediante una sustitución adecuada.

Veremos cómo se pueden resolver utilizando esta regla, ingerminaciones del tipo

$$0/0 \ con\ x\to\infty,\ \infty/\infty,\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^\infty,\ \infty^0,\ 0^0$$

Caso: $0/0$ ***cuando*** $x \to \infty$

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ siendo } \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 .$$

Haciendo el cambio de variables $x = \dfrac{1}{t}$, tenemos:

$$x = \frac{1}{t} \quad \to \quad t = \frac{1}{x} \text{ y por lo tanto cuando } x \to \infty,\ t \to 0 .$$

De esta manera:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(1/t\right)}{g\left(1/t\right)}$$

Podemos ahora aplicar la regla de L´Hôpital, obteniendo:

$$L = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(1/t\right)}{g\left(1/t\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'\left(1/t\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(1/t\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Por consiguiente:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Caso: ∞/∞

$$L = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ siendo } \lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty .$$

Llevamos la indeterminación a la forma $0/0$ mediante la igualdad:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$$

dado que si $f(x) \to \infty$, $1/f(x) \to 0$ y lo mismo ocurre para $g(x)$, luego:

$$L = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)}$$

$$L = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{f^2(x)}{g^2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot L^2$$

de donde

$$\frac{1}{L} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \quad \to \quad L = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Caso: $0 \cdot \infty$

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) \text{ siendo } \lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = \infty .$$

En este caso podemos escribir $f(x) \cdot g(x)$ como $\dfrac{f(x)}{1/g(x)}$ o $\dfrac{g(x)}{1/f(x)}$ lo que lleva a una de las dos formas indeterminadas $\dfrac{0}{0}$ o bien $\dfrac{\infty}{\infty}$ a las cuales se aplica la regla de L´Hôpital.

Ejemplo:

$$L = \lim_{x \to 0} x \cdot \cot g(2x)$$

Solución:

Llevamos la indeterminación a la forma $\dfrac{0}{0}$.

$$L = \lim_{x \to 0} x \cdot \cot g(2x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1/\cot g(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{tg(2x)} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla de L´Hôpital.

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{(x)'}{[tg(2x)]'} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2 \cdot \sec^2(2x)} = \frac{1}{2}$$

Caso: $\infty - \infty$

$$L = \lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] \text{ siendo } \lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = \infty .$$

Se transforma la diferencia $f - g$ en una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$, de la siguiente manera:

$$f(x) - g(x) = \frac{f(x) - g(x)}{f(x) \cdot g(x)} \cdot \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right) \cdot \frac{1}{1/f(x) \cdot g(x)}$$

por lo tanto:

$$f(x) - g(x) = \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

Puesto que $f(x)$ y $g(x)$ tienden a infinito, la expresión obtenida tiende a $\dfrac{0}{0}$.

Ejemplo 1:

$$L = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left[\sec x - tgx\right]$$

Solución:

Observemos que $\sec x \to \infty$ y $tg\, x \to \infty$ cuando $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$.

En este caso la indeterminación se lleva a la forma $\frac{0}{0}$ sin más necesidad que expresar a las funciones trigonométricas en función del seno y el coseno.

$$L = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left[\sec x - tgx\right] = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left[\frac{1}{\cos x} - \frac{sen\, x}{\cos x}\right] = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1 - sen\, x}{\cos x} = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{-\cos x}{-senx} = 0$$

Ejemplo 2:

$$L = \lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right]$$

Solución:

$f(x) = \ln x \to \infty$ y $g(x) = \frac{1}{x-1} \to \infty$ cuando $x \to 1$.

Utilizamos la transformación:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$ resultando en este caso: $$\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-\ln x}{\ln x \cdot (x-1)}$$

La indeterminación es del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos la regla de L´Hôpital.

$$L = \lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{x-1-\ln x}{\ln x \cdot (x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1-\ln x)'}{[\ln x \cdot (x-1)]'} = \lim_{x\to 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\cdot (x-1) + \ln x} = \frac{0}{0}$$

Es necesario aplicar nuevamente la regla:

$$L = \lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)'}{\left[\frac{1}{x}\cdot (x-1) + \ln x\right]'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

Caso de formas exponenciales 1^{∞} , ∞^{0} , 0^{0}

Se trata de calcular $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ donde:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \\ 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \infty \end{cases}.$$

Tomando logaritmo natural a ambos miembros de la expresión:

$$\ln L = \ln \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$$

$$\ln L = \lim_{x \to a} \left[g(x) \cdot \ln f(x) \right]$$

De esta manera se llega a indeterminaciones del tipo: $0 \cdot (-\infty)$, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$ que se tratan como el caso $0 \cdot \infty$ visto anteriormente.
Una vez calculado el $\ln L$, se calcula L tomando antilogaritmo.

Ejemplo 1:

$$L = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

Solución:

La indeterminación es de la forma 1^{∞}.

$$L = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

Aplicando logaritmo natural en ambos miembros:

$$\ln L = \ln \left[\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} \right]$$

$$\ln L = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1 + x)$$

$$\ln L = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \frac{0}{0}$$

Luego, aplicando la regla de L´Hôpital:

$$\ln L = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1 + x}}{1} = 1$$

Por lo tanto:

$$\ln L = 1 \quad \to \quad L = e^{1} = e$$

Ejemplo 2:

$$L = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{tgx}$$

Solución:

La indeterminación es del tipo ∞^0. Luego, aplicamos logaritmo natural:

$$L = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{tgx}$$

$$\ln L = \ln \left[\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{tgx} \right]$$

$$\ln L = \lim_{x \to 0} \; tg\, x \cdot \ln \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$\ln L = \lim_{x \to 0} \; \frac{\ln \left(\frac{1}{x} \right)}{\cot g\, x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Derivando numerador y denominador:

$$\ln L = \lim_{x \to 0} \; \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} \cdot \left(-\cos ec^2\, x \right)} = \lim_{x \to 0} \; \frac{sen^2\, x}{x} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos nuevamente la regla y obtenemos:

$$\ln L = \lim_{x \to 0} \; \frac{sen^2\, x}{x} = \lim_{x \to 0} \; \frac{2 \cdot sen\, x \cdot \cos x}{1} = 0$$

Por lo tanto:

$$\ln L = 0 \quad \to \quad L = e^0 = 1$$

Ejemplo 3:

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\cos x \right)^{(\pi/2) - x}$$

Solución:

La indeterminación es de la forma 0^0.

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\cos x \right)^{(\pi/2) - x}$$

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{(\pi/2)-x}\right]$$

$$\ln L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\pi}{2}-x\right]\cdot \ln(\cos x)$$

La indeterminación ahora es del tipo $0\cdot(-\infty)$.

Realizamos el cambio correspondiente para poder aplicar la regla:

$$\ln L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos x)}{1/\left[\frac{\pi}{2}-x\right]} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\operatorname{sen} x/\cos x}{1/\left[\frac{\pi}{2}-x\right]^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\operatorname{sen} x\cdot\left[\frac{\pi}{2}-x\right]^2}{\cos x} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos nuevamente la regla:

$$\ln L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left\{-\operatorname{sen} x\cdot\left[\frac{\pi}{2}-x\right]^2\right\}'}{(\cos x)'}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x\cdot\left[\frac{\pi}{2}-x\right]^2 + \operatorname{sen}x\cdot 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{-\operatorname{sen}x} = \frac{0}{-1} = 0$$

Por lo tanto:

$$\ln L = 0 \quad\to\quad L = e^0 = 1$$