Guía Teórico Práctica
Análisis Matemático I

Cursada 2015

Índice general

Integrantes

Responsable de cátedra:

Mg. Marta García

Auxiliares de cátedra:

Dra. Ana Paula Madrid

Ing. Rosana Ferrati

Mg. Mauro Natale

Lic. María José Galotto

Prof. Virginia Cano

Prof. Anibal Tolaba

Lic. María Paula Menchón

Prof. María Paz Bilbao

Modalidad de Evaluación

Modalidad de Evaluación 2015

La evaluación de la cursada de esta materia consistirá en un parcial y dos recuperatorios.

El parcial y el primer recuperatorio serán de carácter teórico-práctico, y el segundo recuperatorio será sólo de carácter práctico.

Durante la cursada, se tomarán evaluaciones parciales de los prácticos (parcialitos).

Si el alumno obtiene una calificación de 4 (cuatro) a 6 (seis) puntos en el parcial o en sus respectivos recuperatorios aprueba la cursada.

Para **promocionar** la materia, el alumno debe aprobar el 50 % de los parcialitos y además obtener una calificación de 7 o más puntos, en el parcial o en el primer recuperatorio.

El segundo recuperatorio (prefinal) tendrá carácter sólo práctico y en esa instancia no se puede promocionar.

Enlaces de interés

- Página de la cátedra. En esta página están las guias teóricas, los prácticos, exámenes que se han tomado años anteriores y cualquier información pertinente.

  http://analisis-matematico-i.alumnos.exa.unicen.edu.ar/

- Software para graficar. En este link encuentran el GeoGebra, un software de matemática para poder hacer gráficos interactivos, álgebra y planillas dinámicas.

  http://www.geogebra.org

- Software para graficar. En este link encuentran el Máxima, programa con el que puedes realizar todo tipo de operación numérica o simbólica: polinomios, álgebra matricial, cálculo diferencial, análisis de Fourier y mucho más. Asimismo, Maxima puede generar gráficos 2D y 3D de alta calidad.

  http://maxima.softonic.com/

A los estudiantes

Estos apuntes fueron pensados y escritos con el objetivo de ser utilizados en el primer curso de análisis de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN.

La matemática es una obra viva. Constantemente se produce matemática, se reformulan teorías, se crean teoremas nuevos (se publican alrededor de 200.000 por año). Ciertamente no todos tienen aplicación inmediata, pero significa que constantemente hay problemas que se resuelven, y nuevos problemas que se plantean.

Es importante que al momento de leer estos apuntes, intenten analizar, pensar y cuestionar cada una de las afirmaciones que aparecen, así como también establecer relaciones entre los diferentes contenidos. Estudiar matemáticas no es sólo aprender algoritmos de resolución de ciertas problemáticas, sino también ser capaz de analizar diversas situaciones de la vida real, desarrollar y/o modificar herramientas que modelen situaciones, justificar afirmaciones, realizar deducciones lógicas.

Estudiar matemáticas nos abre las puertas a un mundo fascinante, un mundo que constantemente nos ofrece nuevos desafíos y problemas. Es nuestro mayor deseo que este curso sea el comienzo del viaje que los lleve a él.

Hay algunas preguntas que vamos a plantear en este momento, y que nos gustaría que poco a poco, y a medida que ustedes empiecen a entrar en el mundo de las matemáticas, comiencen a formular su propia respuesta:

- ¿Qué es la matemática?
- ¿Qué es hacer matemática?
- ¿Cómo se desarrolla la matemática?
- ¿Cómo se justifica la matemática?

Capítulo 1

Funciones

Los objetivos que nos proponemos para esta unidad es que los alumnos logren:

- Identificar y reconocer las distintas familias de funciones.
- Analizar dominio, imagen, raíces, ordenada al origen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, amplitud, periodo, frecuencia, ángulo de fase, eje de onda de funciones trigonométricas.
- Representar gráficamente funciones trigonométricas, utilizando las variaciones provocadas por los distintos parámetros.
- Familiarizarse y reconocer las principales características de funciones especiales (secante, cosecante, cotangente, seno hiperbóloco, coseno hiperbólico, tangente hiperbólica, parte entera, mantisa, signo).
- Utilizar las inecuaciones para determinar los conjuntos de positividad y negatividad de funciones simples.
- Analizar y representar gráficamente funciones definidas por ramas.
- Determinar analítica y gráficamente si una función es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva.
- Analizar si una función es inversible, y en caso afirmativo determinar la expresión algebraica de la función inversa.
- Familiarizarse con la función inversa de las funciones ya estudiadas.
- Operar funciones.
- Reconocer analítica y gráficamente funciones pares e impares.

Con frecuencia, en las aplicaciones prácticas el valor de una variable depende del valor de otra. Por ejemplo, el salario de una persona puede depender del número de horas que trabaje;

la producción total de una fábrica puede depender del número de máquinas que se utilicen, etc. Es decir, dos variables están relacionadas entre sí de modo que a cada valor de una de ellas corresponde un valor de la otra, y la relación entre ambas suele expresarse mediante una función. Por ejemplo el perímetro de un círculo depende del diámetro del mismo, $P = \pi.d$, donde $\pi \cong 3,1415$ representa un valor constante, mientras que P (perímetro) y d (diámetro) representan las variables. En este caso P representa la variable dependiente, (varía en función de cómo varía el diámetro) y d representa la variable independiente. Entonces P es **función** de d y se denota $P(d)$.

Definición 1.1 *Sean A y B conjuntos no vacíos, una* ***Función*** *con dominio A y codominio B es una aplicación que a cada elemento x de A asigna uno y sólo un elemento y de B. En adelante notaremos a la funciones como*

$$f : A \to B$$

Generalmente vamos a considerar funciones $f : A \to B$, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$, indicando de este modo funciones que toman valores del dominio y codominio en el conjunto de números reales.

Recordemos que el **Dominio** de una función f es:

$$Dom(f) = \{x \in A : \exists\ y \in B\ \wedge\ f(x) = y\}$$

y la **Imagen o Rango** de una función f es:

$$Img(f) = \{y \in B :\ \exists x \in Dom\,(f)\ \ tal\ que\ y = f(x)\}$$

Notar que $Img(f) \subseteq Codom(f)$.

1.1. Repaso de funciones

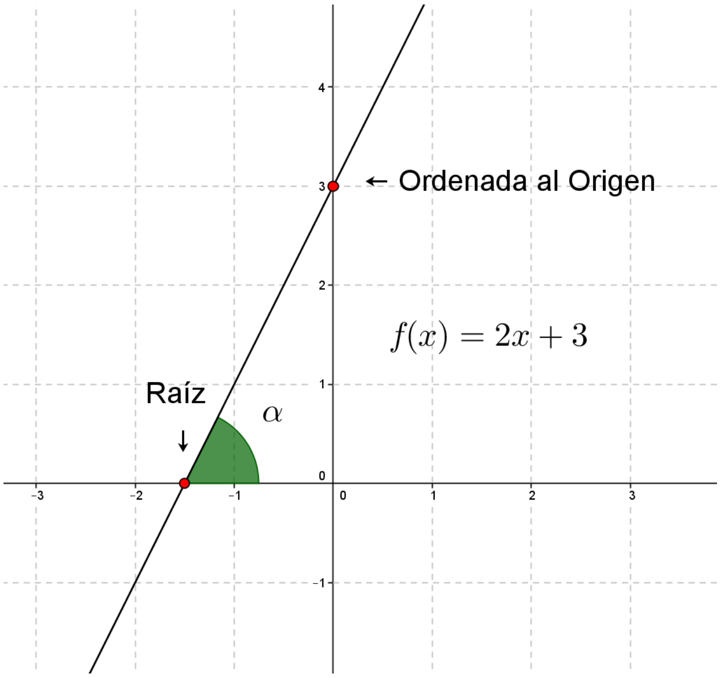
Recordemos las diferentes familias de funciones estudiadas en el curso de ingreso:

- **Función Lineal:** Las funciones lineales son aquellas de la forma

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\quad /\quad f(x) = mx + b \text{ con } m, b \in \mathbb{R}$$

La gráfica de $f(x)$ es una recta de pendiente m y con ordenada al origen b, donde

$m = tg\,(\alpha)$, siendo α el ángulo determinado por la recta y el eje de las abscisas.



- **Función Polinómica:** Las funciones polinómicas son aquellas de la forma

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o \qquad a_n, a_{n-1}, \; ...., a_1, a_o \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

Las funciones lineales y cuadráticas son casos particulares de funciones polinómicas.

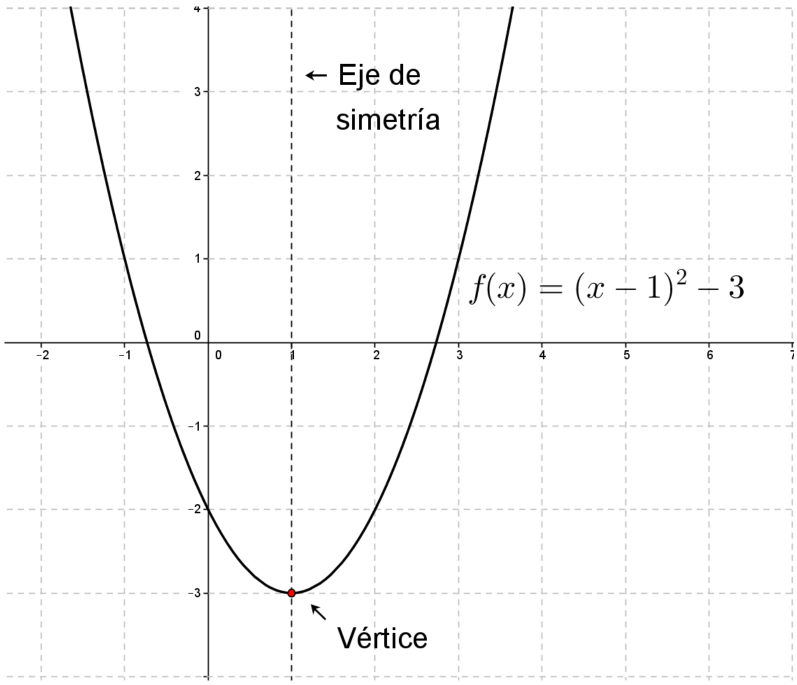
Si $a_1 \neq 0$, y $n = 1$, la función es lineal.

Si $a_2 \neq 0$, y $n = 2$, la función es cuadrática y su gráfica es una parábola, siendo cóncava si $a_2 > 0$ y convexa si $a_2 < 0$.

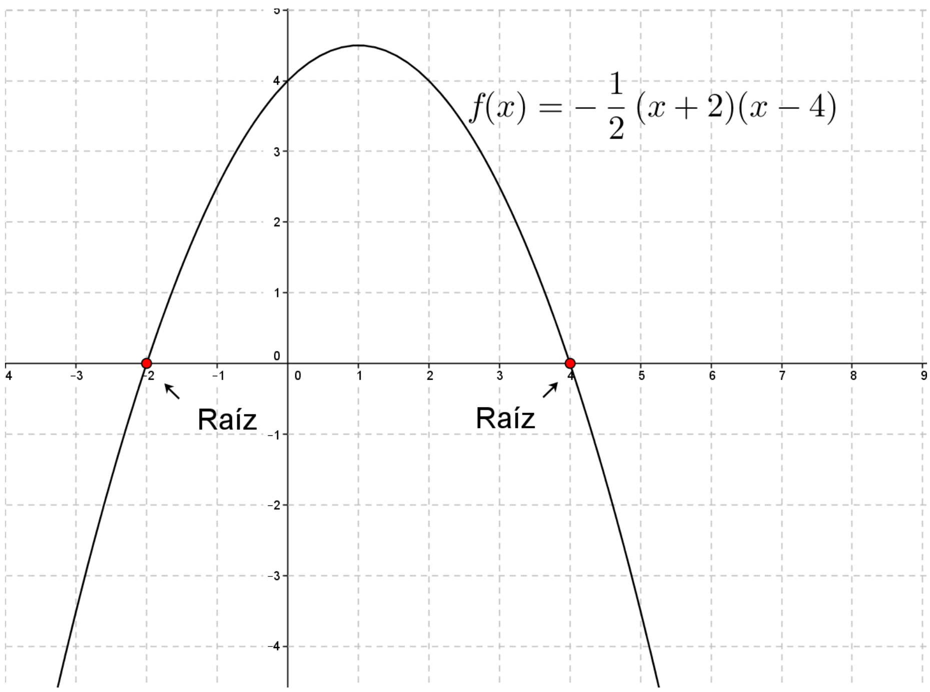
A continuación presentaremos ejemplos de funciones polinómicas:

1. El siguiente gráfico corresponde a la función $f\,(x) = (x-1)^2 - 3$ (expresada en forma

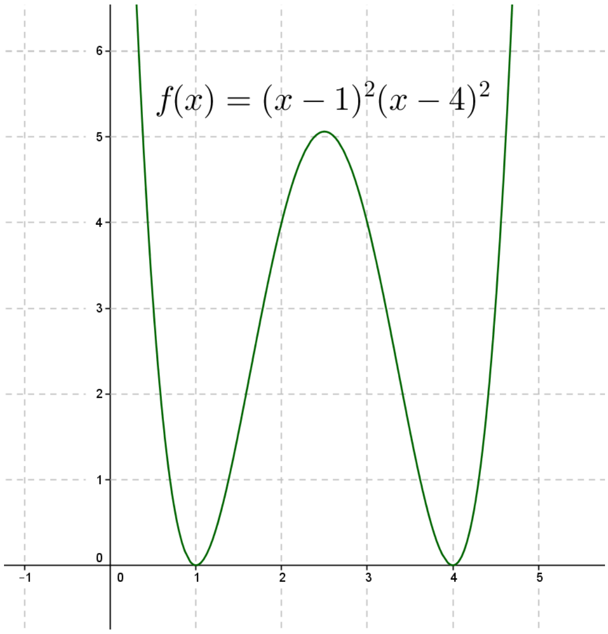
canónica), la cual es un función cuadrática cóncava.

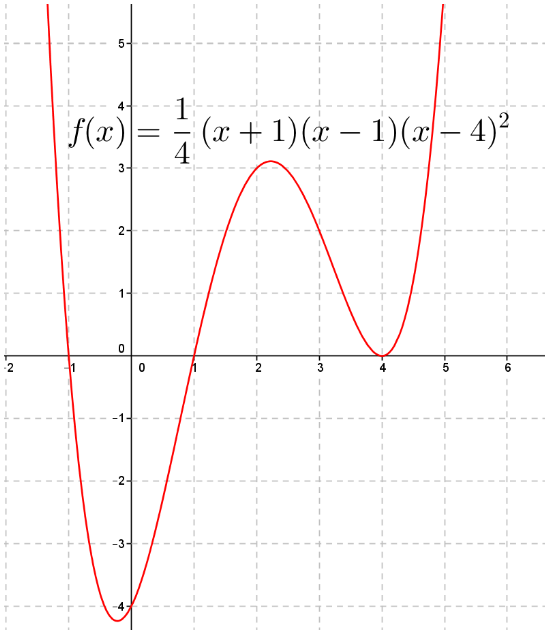


2. El siguiente gráfico corresponde a la función $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$ (expresada en forma factorizada), la cual es un función cuadrática convexa.



3. Los siguientes gráficos corresponden a funciones polinómicas de grado mayor que 2.



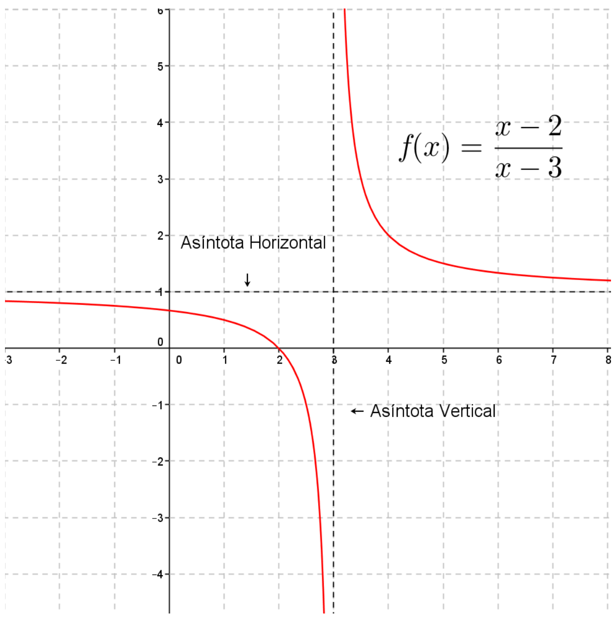


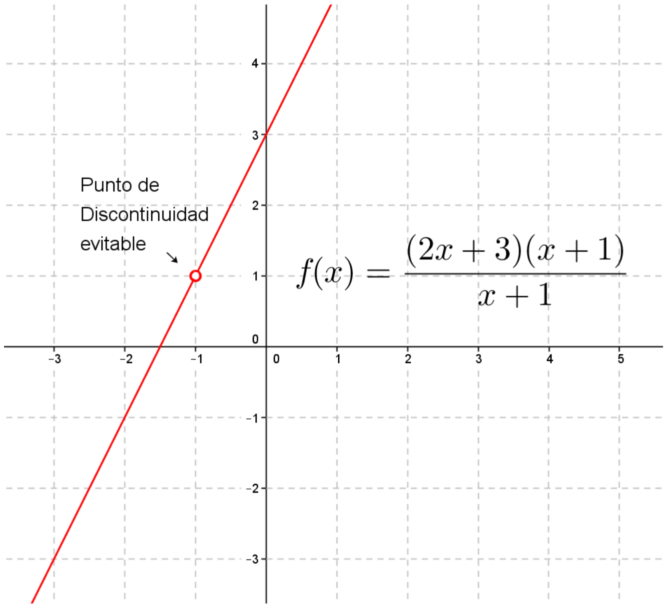
- **Función Racional:** Las funciones racionales son aquellas de la forma:

$$f : \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Un ejemplo particular de las funciones racionales son las funciones de *Proporcionalidad inversa* $f(x) = \frac{b}{x}$, en las que $P(x) = b$, con b un número real y $Q(x) = x$.

Las siguientes funciones son ejemplos de funciones racionales:

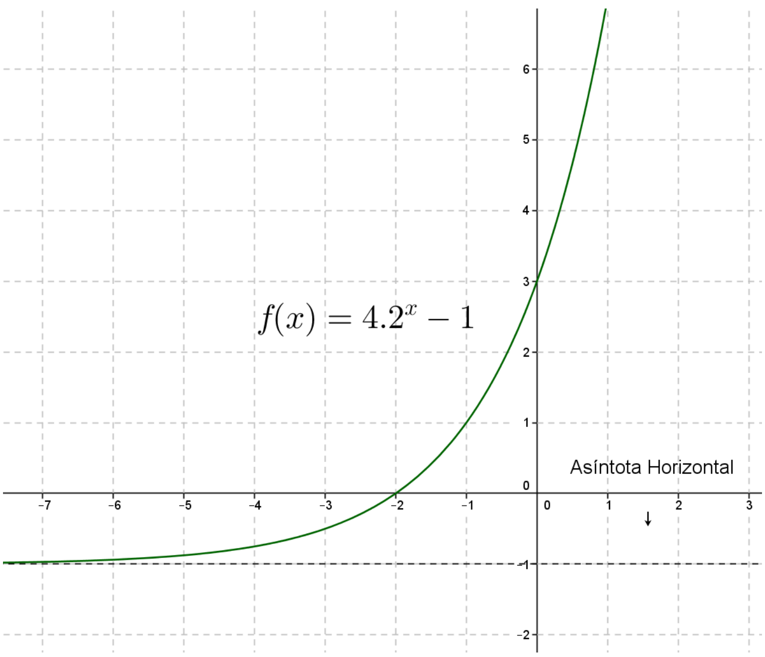


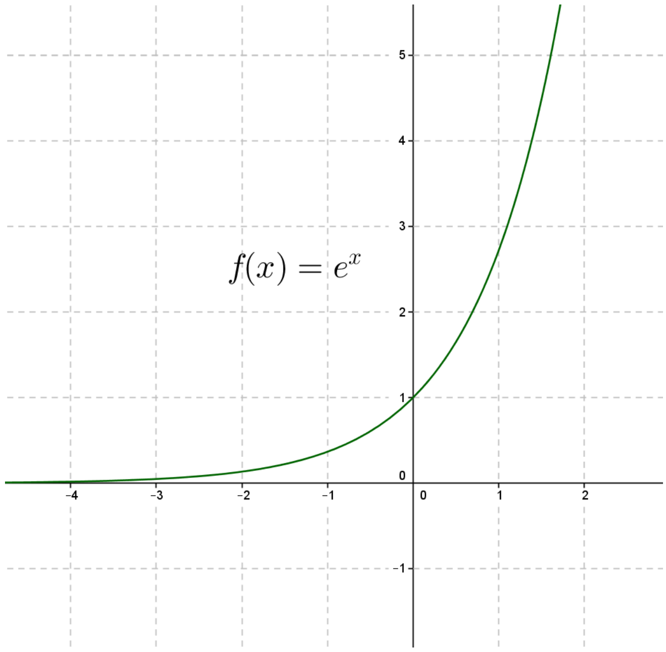


- **Función Exponencial:** Las funciones exponenciales son aquellas de la forma:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = k.a^x + c \text{ con } k \in \mathbb{R} - \{0\}\,, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}\,, c \in \mathbb{R}$$

Las siguientes funciones son ejemplos de funciones exponenciales:

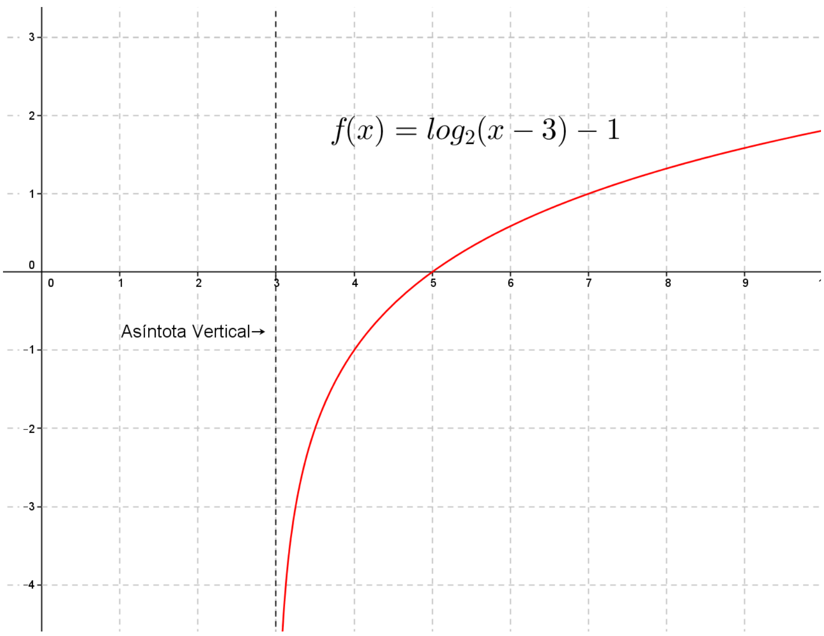


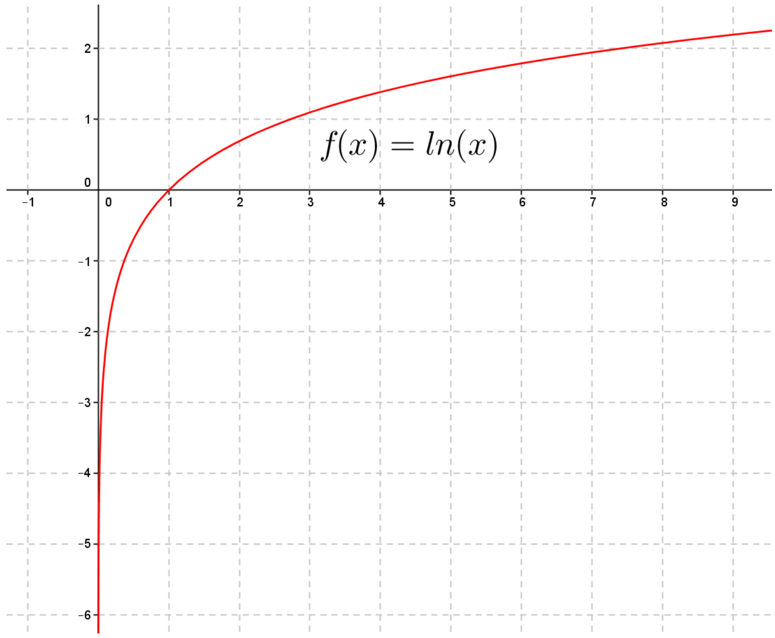


- **Función Logaritmica:** Las funciones logaritmicas son aquellas de la forma:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = k.log_a\,(x-b) + c \text{ con } k \in \mathbb{R} - \{0\}\,, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}\,, b, \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

Las siguientes funciones son ejemplos de funciones logaritmicas:



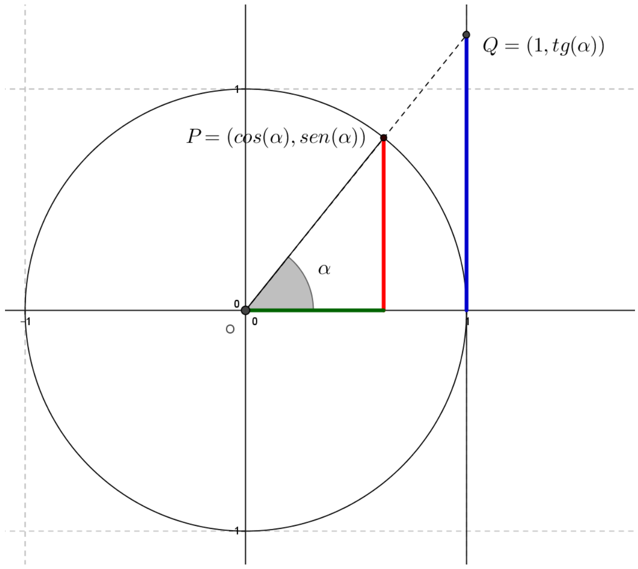


1.2. Funciones Trigonométricas

Esta clase de funciones surgen a partir de las razones trigonométricas con las cuales han trabajado en los módulos del curso de ingreso. Estas funciones presentan una característica nueva frente a las diferentes funciones estudiadas hasta el momento: son periódicas. Sus valores, y por lo tanto su comportamiento se repite una y otra vez, cada cierto intervalo del dominio. La periodicidad es una propiedad muy especial, que nos permite simplificar su análisis, y que pocas funciones la poseen. Este hecho, junto con la diversidad de fenómenos de la naturaleza que tienen comportamiento periódico (el péndulo de un reloj en la pared, las ondas sísmicas, el sonido, la corriente alterna, los latidos del corazón, una cuerda de guitarra, entre otros), les confiere una importancia capital, ya que ellas o ciertas variantes suyas pueden ser utilizadas para modelar estos fenómenos.

Para definir las funciones trigonométricas utilizaremos la circunferencia trigonométrica, también denominada circunferencia goniométrica o unidad. Es un circunferencia de radio 1 y centrada en el origen de coordenadas. Para cada punto P de la circunferencia, el radio vector $\overrightarrow{OP}$ forma un único ángulo α con el eje positivo de abscisa o eje x. Este ángulo será positivo, si $\overrightarrow{OP}$

giró en sentido antihorario, y negativo si giró en sentido horario.



Como se observa en el gráfico anterior, el punto P perteneciente a la circunferencia trigonométrica tiene como coordenadas:

$$x = cos\,(\alpha) \qquad y = sen\,(\alpha)$$

Además, si consideramos el punto Q como la intersección de la recta tangente a la circunferencia que pasa por el punto $(1, 0)$ y la prolongación del radio vector $\overrightarrow{OP}$, las coordenadas de Q son

$$x = 1 \qquad y = tg\,(\alpha)$$

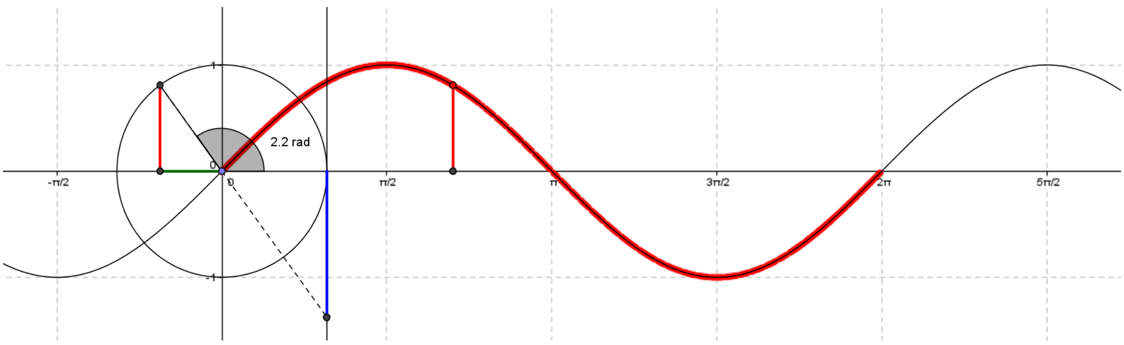
A continuación presentaremos y analizaremos las funciones seno, coseno y tangente, así como también sus desplazamientos.

1.2.1. Función Seno

Se define la función trigonométrica seno como:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(\alpha) = sen\,(\alpha)$$

Su representación gráfica es (ver construcción animada en la página de la cátedra):



Debido a que el valor de las razones trigonométricas de ángulos congruentes es el mismo, tenemos que

$$sen\,(\alpha) = sen\,(\alpha + 2k\pi) \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{Z}$$

De esta forma, si dos valores del dominio están a distancia 2π, sus imágenes por medio de la función seno son iguales. Por lo tanto, la función seno es una función periódica de periodo (longitud del intervalo en el que la función periódica completa un ciclo) 2π. Esta característica queda evidenciada en la representación gráfica anterior, observando que la curva se repite por cada intervalo del dominio de longitud 2π.

La periodicidad de una función nos permite simplificar su análisis, debido a que su comportamiento es el mismo en cada periodo. Presentamos a continuación el análisis de la función $f(\alpha) = sen\,(\alpha)$:

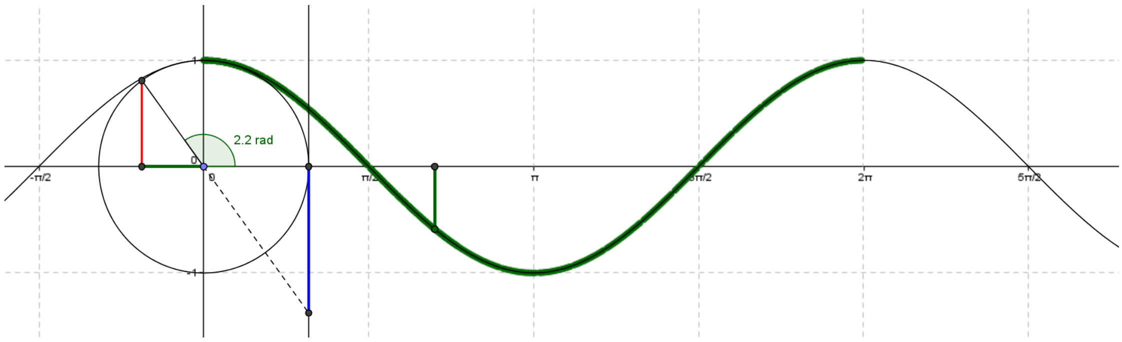
- Función Periódica, con periodo 2π.
- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $Img(f) = [-1; 1]$
- Ordenada al origen: $f\,(0) = 0$
- Raíces $C^0 = \{0 + 2.k.\pi \;\; ; \;\; \pi + 2.k.\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$
- Conjunto de positividad: $C^+ = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (0 + 2.k.\pi; \pi + 2.k.\pi)$
- Conjunto de negatividad: $C^- = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (\pi + 2.k.\pi; 2\pi + 2.k.\pi)$
- Intervalo de crecimiento: $I_c = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(0 + 2.k.\pi; \frac{\pi}{2} + 2.k.\pi\right) \cup \left(\frac{3.\pi}{2} + 2.k.\pi; 2\pi + 2.k.\pi\right)$
- Intervalo de decrecimiento: $I_d = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + 2.k.\pi; \frac{3.\pi}{2} + 2.k.\pi\right)$
- Máximo: 1 en $x = \frac{\pi}{2} + 2.k.\pi$
- Mínimo: -1 en $x = \frac{3.\pi}{2} + 2.k.\pi$
- Eje de onda $y = 0$

1.2.2. Función Coseno

Se define la función trigonométrica coseno como:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(\alpha) = cos\,(\alpha)$$

Su representación gráfica es (ver construcción animada en la página de la cátedra):



Debido a que el valor de las razones trigonométricas de ángulos congruentes es el mismo, tenemos que

$$cos\,(\alpha) = cos\,(\alpha + 2k\pi) \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{Z}$$

De esta forma, si dos valores del dominio están a distancia 2π, sus imágenes por medio de la función coseno son iguales. Por lo tanto, la función coseno, al igual que la fución seno, es una función periódica de periodo 2π. Esta característica queda evidenciada en la representación gráfica anterior, observando que la curva se repite por cada intervalo del dominio de longitud 2π.

La periodicidad de una función nos permite simplificar su análisis, debido a que su comportamiento es el mismo en cada periodo. Presentamos a continuación el análisis de la función $f(\alpha) = cos\,(\alpha)$:

- Función Periódica, con periodo 2π.
- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $Img(f) = [-1; 1]$
- Ordenada al origen: $f\,(0) = 1$
- Raíces $C^0 = \left\{\frac{\pi}{2} + 2.k.\pi \;\; ; \;\; \frac{3}{2}\pi + 2.k.\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\}$
- Conjunto de positividad: $C^+ = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left(0 + 2.k.\pi; \frac{\pi}{2} + 2.k.\pi\right) \cup \left(\frac{3.\pi}{2} + 2.k.\pi; 2\pi + 2.k.\pi\right)$
- Conjunto de negatividad: $C^- = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + 2.k.\pi; \frac{3}{2}\pi + 2.k.\pi\right)$
- Intervalo de crecimiento: $I_c = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} (\pi + 2.k.\pi; 2\pi + 2.k.\pi)$
- Intervalo de decrecimiento: $I_d = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} (0 + 2.k.\pi; \pi + 2.k.\pi)$
- Máximo: 1 en $x = 0 + 2.k.\pi$

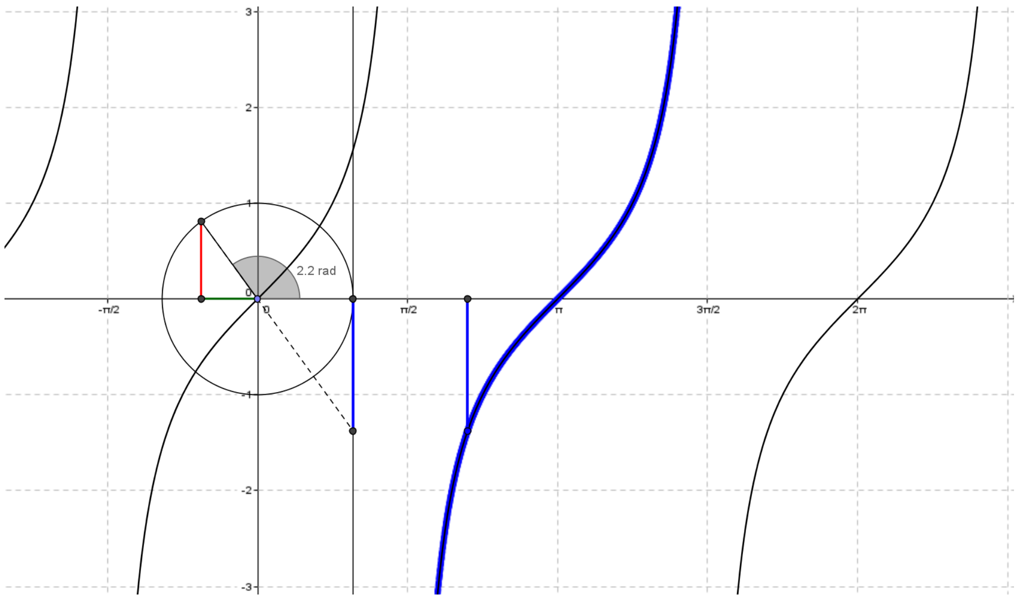
- Mínimo: -1 en $x = \pi + 2.k.\pi$
- Eje de onda $y = 0$

1.2.3. Función Tangente

Se define la función trigonométrica tangente como:

$$f : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(\alpha) = tg\,(\alpha)$$

Su representación gráfica es (ver construcción animada en la página de la cátedra):



En primer lugar observemos que como $tg\,(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$, la función tangente posee asíntotas verticales en todos los valores en los que $cos\,(\alpha) = 0$.

La función $f(\alpha) = tg\,(\alpha)$ también es una función periódica, pero en este caso el periodo es π.

Presentamos a continuación el análisis de la función $f(\alpha) = tg\,(\alpha)$:

- Función Periódica, con periodo π.
- $Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $Img(f) = \mathbb{R}$
- Ordenada al origen: $f\,(0) = 0$
- Raíces: $C^0 = \{0 + k.\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$
- Conjunto de Positividad: $C^+ = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left(0 + k.\pi; \frac{\pi}{2} + k.\pi\right)$

- Conjunto de negatividad: $C^{-} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + k.\pi; \pi + k.\pi\right)$
- Intervalo de crecimiento: $I_c = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\}$
- Intervalo de decrecimiento: $I_d = \phi$
- Máximo: no tiene
- Mínimo: no tiene
- Asíntota vertical en $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

1.2.4. Desplazamientos de las funciones trigonométricas

La expresión de las funciones trigonométricas en su forma general tiene la forma:

$$f(x) = k.sen(a.x - b) + c \qquad \text{con } k, a \in \mathbb{R} - \{0\}, b,\ c \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = k.cos(a.x - b) + c \qquad \text{con } k, a \in \mathbb{R} - \{0\}, b,\ c \in \mathbb{R}$$

A continuación analizaremos la modificación que cada uno de los parámetros provoca en la representación gráfica de las funciones $f(x) = sen(x)$ y $f(x) = cos(x)$.

Ejercicio 1.2 *Utilizando el software Geogebra, representar gráficamente las siguientes familias de funciones, y establecer conclusiones sobre la modificación que el parámetro involucrado provoca*

Familia 1	*Familia 2*
$f_1(x) = sen(x)$	$f_1(x) = cos(x)$
$f_2(x) = sen(2x)$	$f_2(x) = cos(2x)$
$f_3(x) = sen(3x)$	$f_3(x) = cos(3x)$
$f_4(x) = sen\left(\frac{1}{2}x\right)$	$f_4(x) = cos\left(\frac{1}{2}x\right)$
$f_5(x) = sen\left(\frac{1}{3}x\right)$	$f_5(x) = cos\left(\frac{1}{3}x\right)$
$f_6(x) = sen(-x)$	$f_6(x) = cos(-x)$
$f_7(x) = sen(-2x)$	$f_7(x) = cos(-2x)$
$f_8(x) = sen\left(-\frac{1}{2}x\right)$	$f_8(x) = cos\left(-\frac{1}{2}x\right)$

Definición 1.3 *El **período T** de una función trigonométrica es la longitud del intervalo en el que se cumple un ciclo completo*

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{|a|}}$$

Definición 1.4 *La **frecuencia F** es la cantidad de períodos que realiza la función por cada 2π rad.*

$$\boxed{F = |a|}$$

Ejercicio 1.5 *Utilizando el software Geogebra, representar gráficamente las siguientes familias de funciones, y establecer conclusiones sobre la modificación que el parámetro involucrado provoca*

Familia 1	*Familia 2*
$f_1(x) = sen(x)$	$f_1(x) = cos(x)$
$f_2(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	$f_2(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
$f_3(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$	$f_3(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
$f_4(x) = sen(x - \pi)$	$f_4(x) = cos(x - \pi)$
$f_5(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	$f_5(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
$f_6(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$f_6(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
$f_7(x) = sen\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$	$f_7(x) = cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$
$f_8(x) = sen(2x - \pi)$	$f_8(x) = cos(2x - \pi)$

Definición 1.6 *Se denomina* ***ángulo de fase*** θ *al ángulo de desplazamiento horizontal que tiene la función con respecto a la función* $f(x) = sen(x)$ *ó* $f(x) = cos(x)$.

$$\boxed{\theta = \frac{b}{a}}$$

Ejercicio 1.7 *Utilizando el software Geogebra, representar gráficamente las siguientes familias de funciones, y establecer conclusiones sobre la modificación que el parámetro involucrado provoca*

Familia 1	*Familia 2*
$f_1(x) = sen(x)$	$f_1(x) = cos(x)$
$f_2(x) = 2sen(x)$	$f_2(x) = 2cos(x)$
$f_3(x) = 3sen(x)$	$f_3(x) = 3cos(x)$
$f_4(x) = 4sen(x)$	$f_4(x) = 4cos(x)$
$f_5(x) = \frac{1}{2}sen(x)$	$f_5(x) = \frac{1}{2}cos(x)$
$f_6(x) = -sen(x)$	$f_6(x) = -cos(x)$
$f_7(x) = -2sen(x)$	$f_7(x) = -2cos(x)$
$f_8(x) = -\frac{1}{2}sen(x)$	$f_8(x) = -\frac{1}{2}cos(x)$

Definición 1.8 *Definimos la* ***amplitud A*** *de una función trigonométrica como la mayor distancia vertical entre la función y el eje de onda*

$$\boxed{A = |k|}$$

Ejercicio 1.9 *Utilizando el software Geogebra, representar gráficamente las siguientes familias de funciones, y establecer conclusiones sobre la modificación que el parámetro involucrado* *provocaDetermianr*

Familia 1	*Familia 2*
$f_1(x) = sen(x)$	$f_1(x) = cos(x)$
$f_2(x) = sen(x) + 1$	$f_2(x) = cos(x) + 1$
$f_3(x) = sen(x) + 2$	$f_3(x) = cos(x) + 2$
$f_4(x) = sen(x) + 3$	$f_4(x) = cos(x) + 3$
$f_5(x) = sen(x) + 4$	$f_5(x) = cos(x) + 4$
$f_6(x) = sen(x) - 1$	$f_6(x) = cos(x) - 1$
$f_7(x) = sen(x) - 2$	$f_7(x) = cos(x) - 2$
$f_8(x) = sen(x) - 3$	$f_8(x) = cos(x) - 3$

Ejercicio 1.10 *Dadas las siguientes funciones trigonométricas:*

a. $f(x) = 2sen(x) - 1$ *b.* $f(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$ *c.* $f(x) = sen(2x) - 4$

e. $f(x) = -2cos(x) + 3$ *f.* $f(x) = 3sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ *g.* $f(x) = cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$

h. $f(x) = 2sen(3x + \pi) - 1$ *i.* $f(x) = \frac{1}{2}cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 3$ *i.* $f(x) = -3sen\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - 2$

j. $f(x) = -cos(-2x) + 3$ *k.* $f(x) = 4cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

Analizar dominio, imagen, amplitud, frecuencia, período, ángulo de fase, ecuación del eje de onda. Graficar utilizando las variaciones provocadas por los parámetros y los datos analizados.

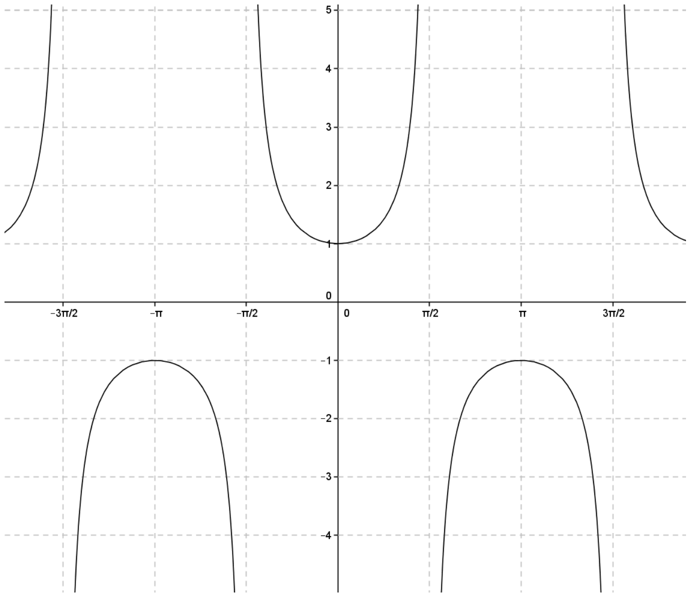
1.2.5. Más funciones trigonométricas

A continuación presentaremos tres funciones trigonométricas (las correspondientas a las relaciones trigonométricas restantes: secante, cosecante y cotangente), que utilizaremos a lo largo del curso.

- **Función Secante**: Se define la función trigonométrica secante como:

$$f : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(\alpha) = sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)}$$

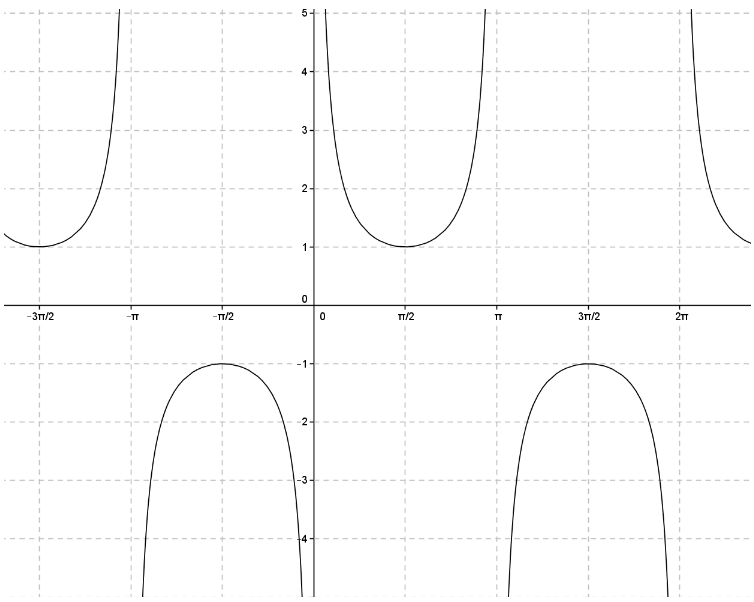
Su representación gráfica es:



- **Función Cosecante:** Se define la función trigonométrica cosecante como:

$$f : \mathbb{R} - \{0 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(\alpha) = cosec\,(\alpha) = \tfrac{1}{sen(\alpha)}$$

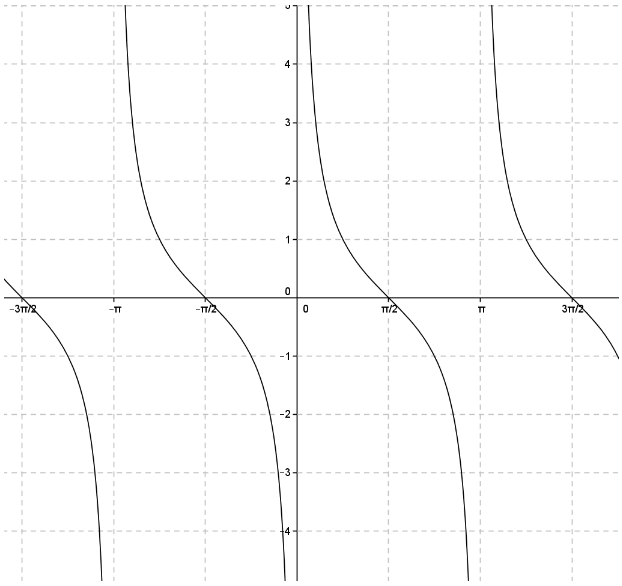
Su representación gráfica es:



- **Función Cotangente:** Se define la función trigonométrica cotangente como:

$$f : \mathbb{R} - \{0 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(\alpha) = cotg\,(\alpha) = \tfrac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)}$$

Su representación gráfica es:



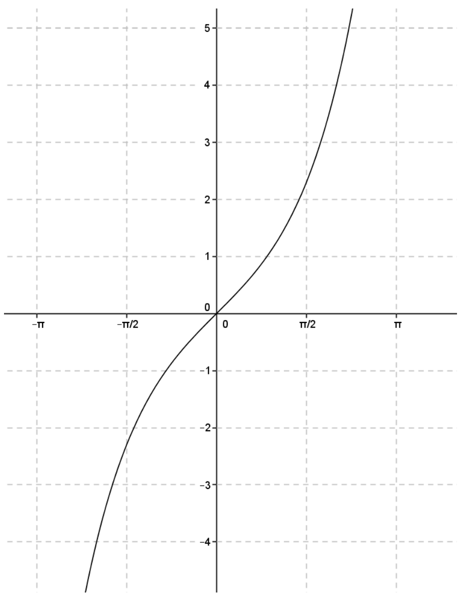
1.2.6. Funciones Trigonométricas Hiperbólicas

A continuación presentaremos tres funciones trigonométricas hiperbólicas, que también serán utilizadas a lo largo del curso. Sus definiciones se basan en la función exponencial estudiada en los módulos de ingreso.

- **Función Seno Hiperbólico:** Se define la función seno hiperbólico como:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = senh\,(x) = \tfrac{e^x - e^{-x}}{2}$$

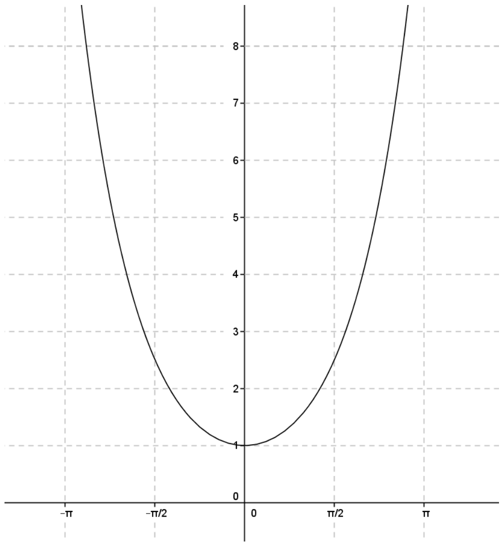
Su representación gráfica es:



- **Función Coseno Hiperbólico:** Se define la función coseno hiperbólico como:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = cosh\,(x) = \tfrac{e^x + e^{-x}}{2}$$

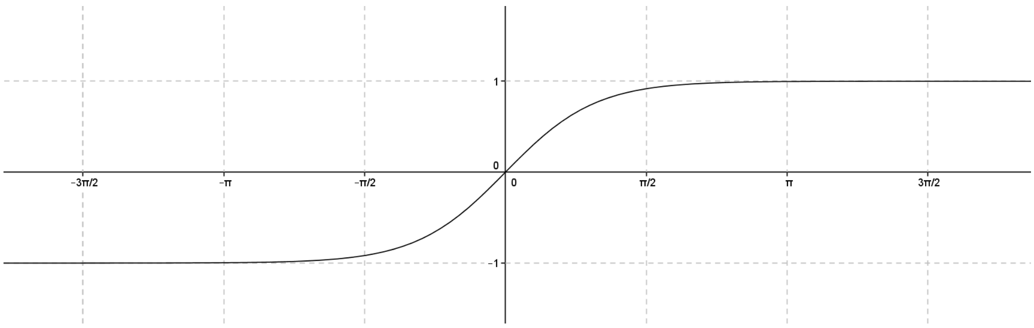
Su representación gráfica es:



- **Función Tangente Hiperbólica:** Se define la función tangente hiperbólica como:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad / \quad f(x)=tgh\,(x)=\frac{senh(x)}{cosh(x)}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

Su representación gráfica es:



Ejercicio 1.11 *Para cada una de las funciones definidas anteriormente en esta sección, realizar un análisis completo.*

1.3. Función Definida por Ramas

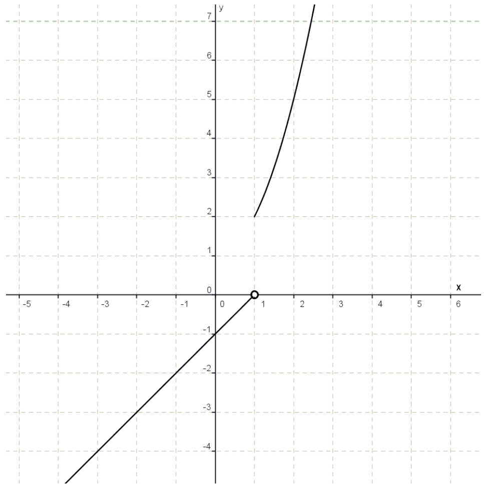
Definición 1.12 *Una **función definida por ramas** es una función que para distintos subconjuntos del dominio, le corresponden distintas reglas de asignación.*

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.13 *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por*

$$f(x)=\begin{cases} x-1 \ si \ x<1 \\ x^{2}+1 \ si \ x\geq 1 \end{cases}$$

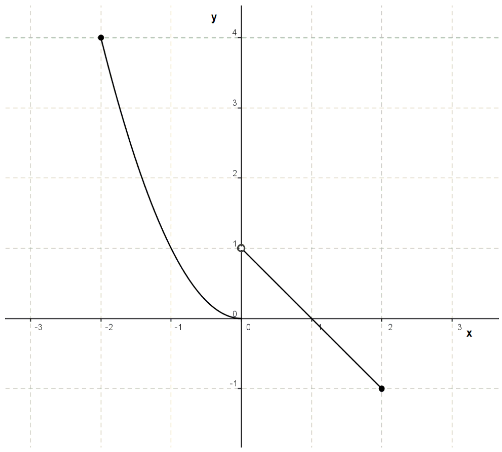
El dominio de la función es $Dom(f) = \mathbb{R}$ *y la imagen de la función es* $Im(f) = (-\infty, 0) \cup (2; +\infty)$



Ejemplo 1.14 *Sea* $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ si \ -2 \leq x \leq 0 \\ 1 - x \ si \ 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

El dominio de la función es $Dom(f) = [-2, 2]$ *y la imagen de la función es* $Img\,(f) = [-1, 4]$

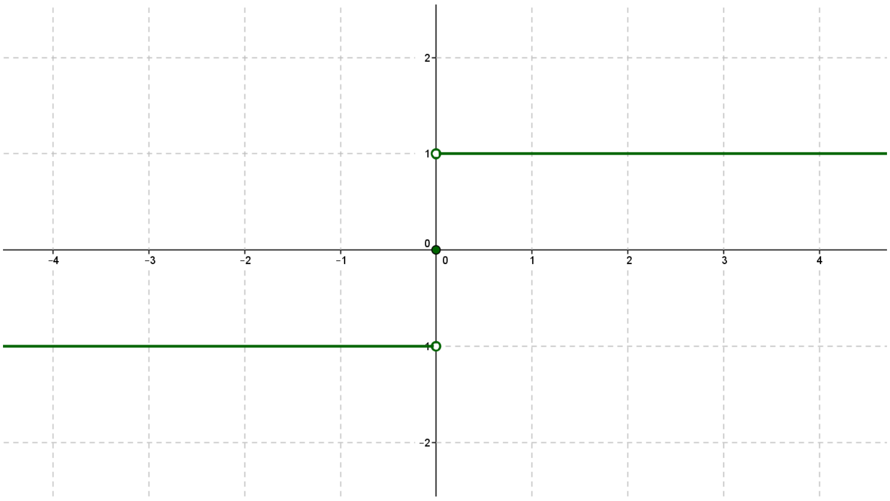


A continuación presentamos tres funciones definidas por ramas, que utilizaremos en diferentes ocasiones a lo largo del proceso de estudio.

- **Función Signo:**

$$sgn : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad sgn\,(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Su representación gráfica es:

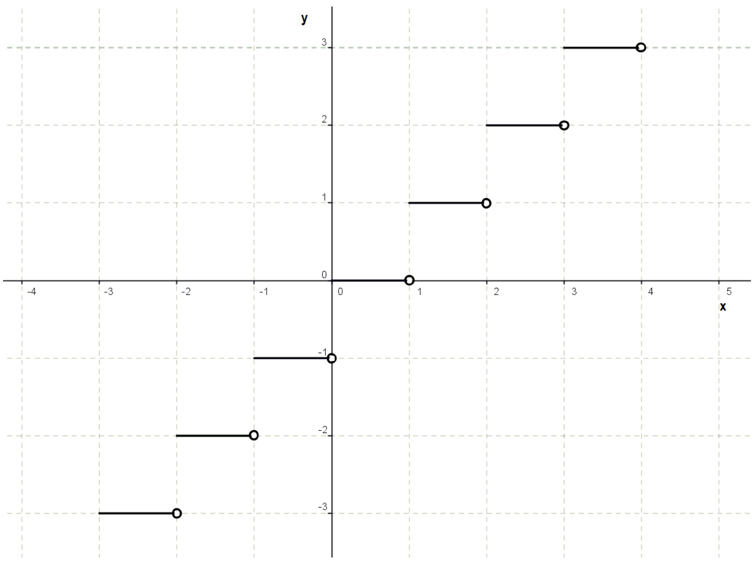


- **Función Parte Entera:** Se define la **función parte entera** como

$$floor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \quad / \quad floor(x) = [x]$$

siendo $[x]$ el número entero que cumple la desigualdad $[x] \leq x < [x] + 1$. Es decir, $[x]$ es el mayor número entero que es menor o igual a x.

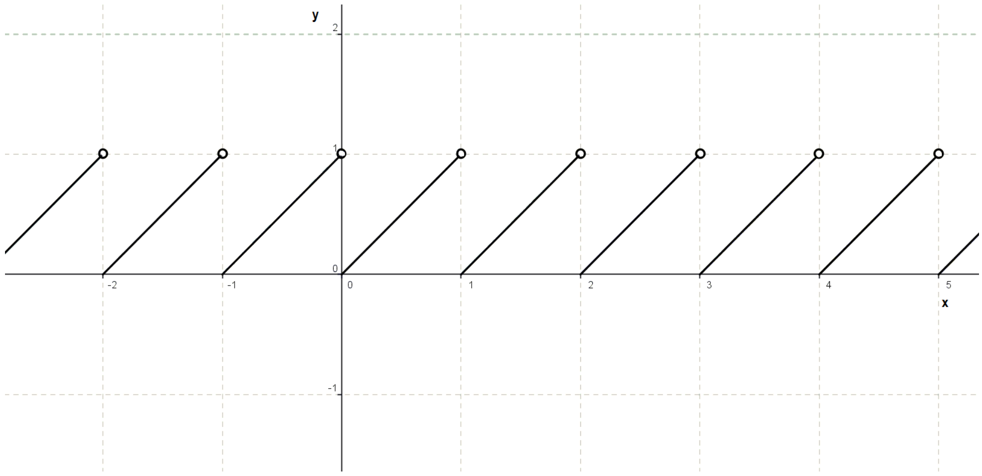
Su representación gráfica es:



- **Función Mantisa:** Se define la función mantisa como:

$$man : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad man(x) = x - [x]$$

Su representación gráfica es:



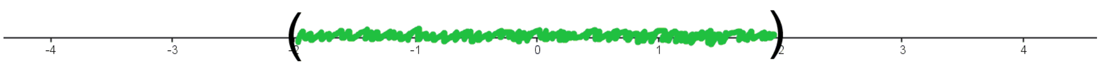
Ejercicio 1.15 *Realizar un análisis completo de las funciones signo, parte entera y mantisa.*

1.4. Función Valor Absoluto

Definición 1.16 *Sea $x \in \mathbb{R}$ definimos el* ***módulo o valor absoluto de*** *x al número real*

$$|x| = \begin{cases} x \ si \ x \geq 0 \\ -x \ si \ x < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto de x puede interpretarse como la distancia que hay entre x y 0. Por ejemplo el conjunto solución de la desigualdad $|x| < 2$, se interpreta como todos los números reales x cuya distancia al cero es menor que 2. En otras palabras, el conjunto solución a la desigualdad $|x| < 2$ es el intervalo de números reales mayores que -2 y menores que 2.



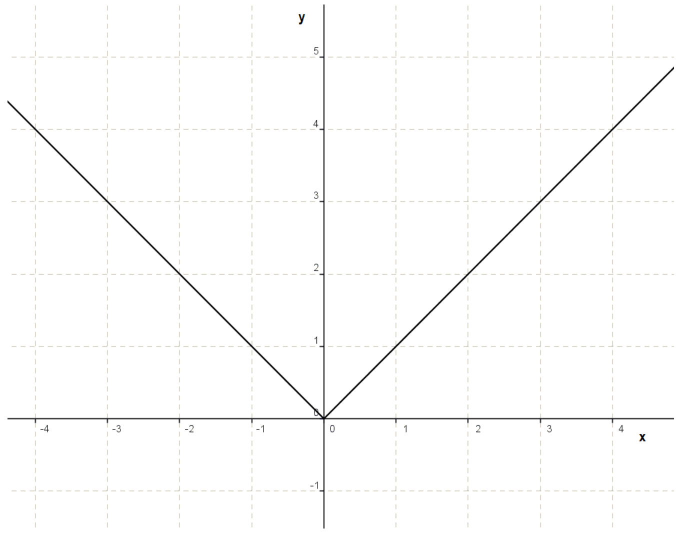
Así también el conjunto solución de la desigualdad $|x - 1| < 2$, se interpreta como todos los números reales x cuya distancia al número 1 es menor que 2. En otras palabras, el conjunto solución a la desigualdad $|x - 1| < 2$ es el intervalo de números reales mayores que -1 y menores que 3.

Podemos utilizar el valor absoluto para definir una función:

- **Función Valor Absoluto:** Se define la función valor absoluto como:

$$abs : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad abs(x) = |x|$$

Su representación gráfica es:



Ejercicio 1.17 *Realizar un análisis completo de la función valor absoluto.*

Ejercicio 1.18 *La expresión general de una función valor absoluto es $f(x) = a.\,|x-b| + c$. Utilizando el software Geogebra, graficar distintas familias de funciones para analizar las modificaciones provocadas por cada parámetro, con respecto a la función $abs(x)$. Establecer conclusiones.*

Ejercicio 1.19 *Dadas las siguientes funciones:*

$$f(x) = 2.\,|x-1| + 3 \qquad f(x) = -3.\,|x-1| + 2 \qquad f(x) = 3.\,|x+1| - 2$$

a. Analizar dominio, imagen, raíces, ordenada al origen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b. Realizar una representación gráfica.

c. Representar gráficamente las funciones simétricas con respecto a los ejes coordenados, y determinar una expresión algebraica que las represente.

1.5. Inyectividad. Suryectividad. Función Inversa

Definición 1.20 *Una función f se denomina **inyectiva** si se verifica la siguiente propiedad:*

$$\textit{Para todo } x_1, x_2 \in Dom(f), \textit{ si } f(x_1) = f(x_2) \textit{ entonces } x_1 = x_2$$

O equivalentemente

$$\text{Para todo } x_1, x_2 \in Dom(f), \text{ si } x_1 \neq x_2 \text{ entonces } f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ejemplo 1.21 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 5$. Investiguemos si f es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces*

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ 2x_1 + 5 &= 2x_2 + 5 \\ 2x_1 &= 2x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

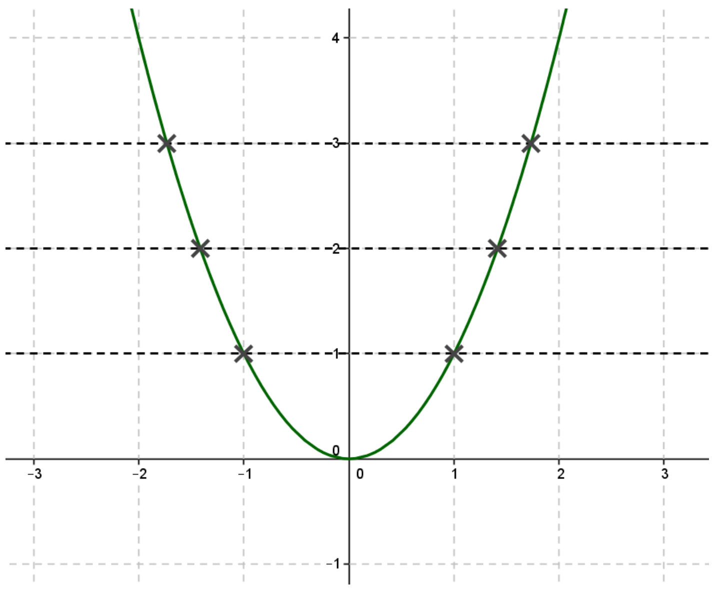
Por lo tanto f es inyectiva.

Ejemplo 1.22 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Investiguemos si f es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces*

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ x_1^2 &= x_2^2 \\ \sqrt{x_1^2} &= \sqrt{x_2^2} \\ |x_1| &= |x_2| \\ x_1 &\neq x_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto f no es inyectiva.

Observando la representación gráfica de la función f, también podemos ver que la función no es inyectiva. Si tomamos rectas horizontales en cualquier valor del codominio, y estas cortan en más de un punto a la gráfica de la función, significa que existen $x_1, x_2 \in Dom(f)$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$, lo que contradice la definición de inyectividad.



Ahora bien, si redefinimos la función f restringiendo el dominio, podemos obtener una función inyectiva. En nuestro ejemplo, la función

$$g : [0; \infty) \to \mathbb{R} \quad / \quad g(x) = x^2$$

es inyectiva. Esta forma de redefinir la función para obtener una función inyectiva no es única.

Definición 1.23 *Una función f se denomina* ***Suryectiva o Sobreyectiva*** *si para cualquier $y \in Codom(f)$ existe $x \in Dom(f)$ tal que $f(x) = y$.*

Ejemplo 1.24 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 5$. Investiguemos si f es sobreyectiva. Sea $y \in \mathbb{R}$, busquemos $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$*

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ 2x + 5 &= y \\ 2x &= y - 5 \\ x &= \frac{y-5}{2} \\ x &= \frac{y}{2} - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Luego si $y \in \mathbb{R}$, no es dificil de justificar que $x = \frac{y}{2} - \frac{5}{2} \in \mathbb{R}$, por lo que f es una función sobreyectiva.

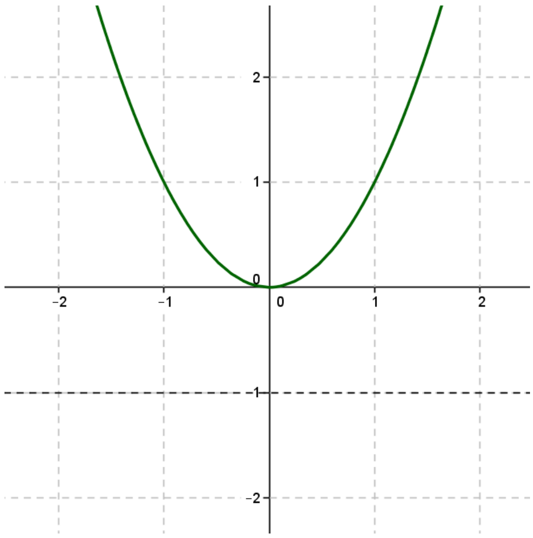
Ejemplo 1.25 *Sea $f : [0; \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Investiguemos si es sobreyectiva. Sea $y \in \mathbb{R}$, busquemos $x \in [0; \infty)$ tal que $f(x) = y$*

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ x^2 &= y \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{y} \\ |x| &= \sqrt{y} \end{aligned}$$

Por lo que si y es un número negativo, no existe $x \in [0; \infty)$ tal que $y = f(x)$. Luego la función f no es sobreyectiva.

Observando la representación gráfica de la función f, también podemos ver que la función no es sobreyectiva. Si tomamos rectas horizontales en algún valor del codominio, y esta no corta a la gráfica de la función, significa que existe $y \in Codom(f)$ para el cual no existe $x \in Dom(f)$

tal que $y = f(x)$, lo que contradice la definición de sobreyectividad.



Ahora bien, si redefinimos la función f restringiendo el codominio, podemos obtener una función sobreyectiva. En nuestro ejemplo, la función

$$g : [0; \infty) \to [0; \infty) \quad / \quad g(x) = x^2$$

es una función sobreyectiva.

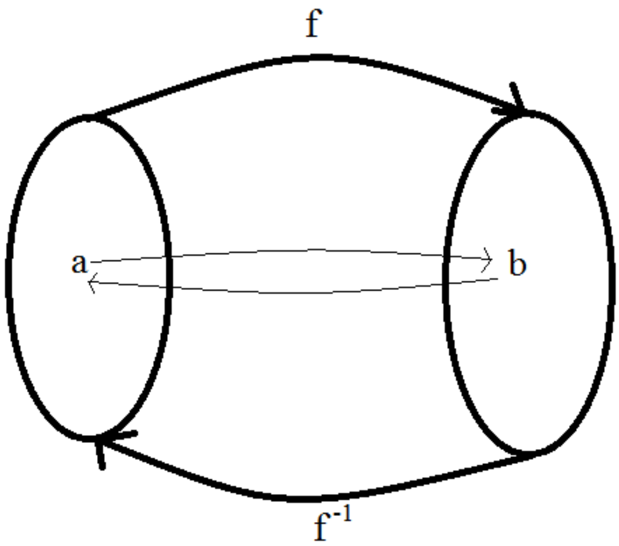
IMPORTANTE:

- Para analizar la inyectividad y la suryectividad de una función es importante considerar, no sólo la regla de asignación, sino también el dominio y el codominio de la función.
- Si la función no es inyectiva, podemos redefinir la función para que lo sea, eligiendo un dominio adecuado.
- Si la función no es sobreyectiva, podemos redefinir la función para que lo sea, eligiendo un codominio adecuado.
- Dos funciones f y g son iguales si: $Dom(f) = Dom(g)$, $Codom(f) = Codom(g)$ y su regla de asignación es la misma. Si alguna de estas tres condiciones no se cumple, las funciones son distintas.

Definición 1.26 *Una función f se denomina* ***Biyectiva*** *si f es inyectiva y sobreyectiva.*

Si una función f es biyectiva, entonces a cada valor del codominio le corresponde uno y sólo un valor del dominio. Esto hace posible que la relación inversa de f sea una función (cumple unicidad y existencia), denominada **Función Inversa** y que la notaremos f^{-1}

$$f^{-1} : Codom(f) \to Dom(f) \quad / \quad f^{-1}(b) = a \text{ siempre que } f(a) = b$$



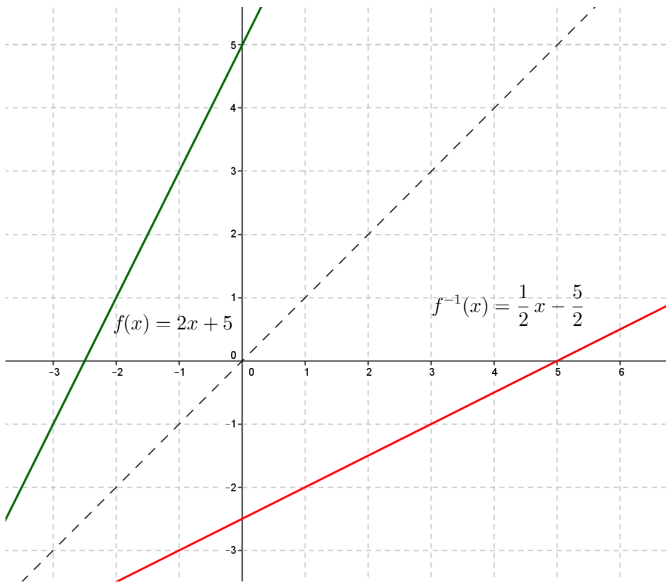
IMPORTANTE: La representación gráfica de la función f y de su función inversa f^{-1}, son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

Proposición 1.27 *Una función f es inversible (existe la función inversa) si y sólo si f es biyectiva.*

A continuación analizaremos la biyectividad de algunas funciones

Ejemplo 1.28 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x+5$. Como hemos probado anteriormente, esta función es inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto es biyectiva. Su función inversa es*

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{2}$$

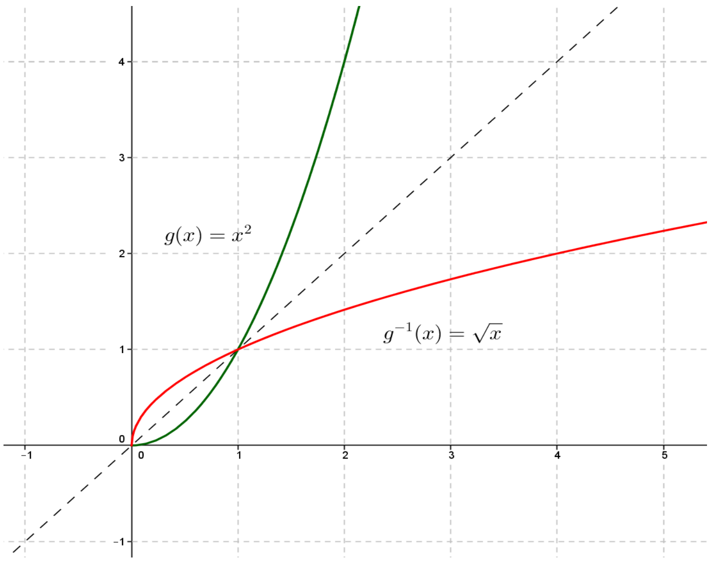


Ejemplo 1.29 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Como hemos probado anteriormente, esta función no es inyectiva y ni sobreyectiva. Pero podemos redefinirla para que lo sea*

$$g : [0; \infty) \to [0; \infty) \quad / \quad g(x) = x^2$$

Su función inversa es

$$g^{-1} : [0; \infty) \to [0; \infty) \quad / \quad g^{-1}(x) = \sqrt{x}$$



Ejemplo 1.30 *Sea* $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. *Analicemos si la función es inyectiva: Sean* $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{2\}$ *tal que* $f(x_1) = f(x_2)$

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\frac{x_1+1}{x_1-2} = \frac{x_2+1}{x_2-2}$$
$$(x_2-2)(x_1+1) = (x_1-2)(x_2+1)$$
$$x_1x_2 + x_2 - 2x_1 - 2 = x_1x_2 + x_1 - 2x_2 - 2$$
$$x_2 - 2x_1 = x_1 - 2x_2$$
$$x_2 + 2x_2 = x_1 + 2x_1$$
$$3x_2 = 3x_1$$
$$x_2 = x_1$$

Así $x_1 = x_2$, *por lo que* f *es inyectiva.*

Analicemos ahora la sobreyectividad de f*: Sea* $y \in \mathbb{R}$, *busquemos* $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ *tal que*

$f\left(x\right)=y$

$$
\begin{aligned}
f\left(x\right) &= y\\
\frac{x+1}{x-2} &= y\\
x+1 &= y\left(x-2\right)\\
x+1 &= yx-2y\\
1+2y &= yx-x\\
1+2y &= x\left(y-1\right)\\
\frac{1+2y}{y-1} &= x
\end{aligned}
$$

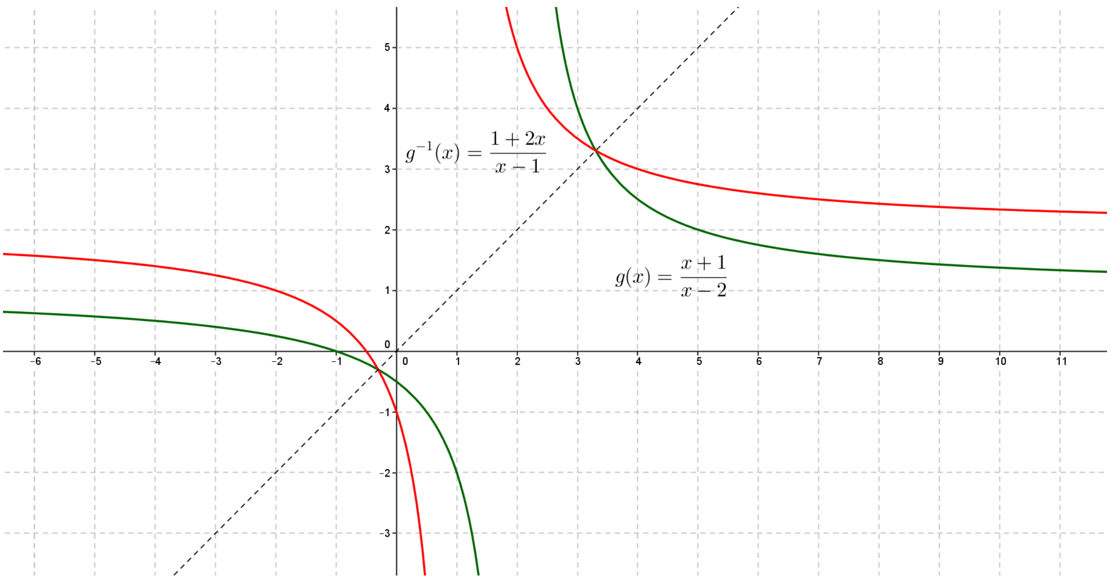
Entonces, para $y=1$ no existe $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ tal que $y=f(x)$. Por lo tanto la función no es sobreyectiva.

Si restringimos el codominio de f a $\mathbb{R}-\{1\}$, obtenemos una nueva función g que resulta sobreyectiva. Así la función

$$g:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{1\}\quad/\quad g\left(x\right)=\tfrac{x+1}{x-2}$$

es biyectiva. Su función inversa es

$$g^{-1}:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}-\{2\}\quad/\quad g^{-1}\left(x\right)=\tfrac{1+2x}{x-1}$$

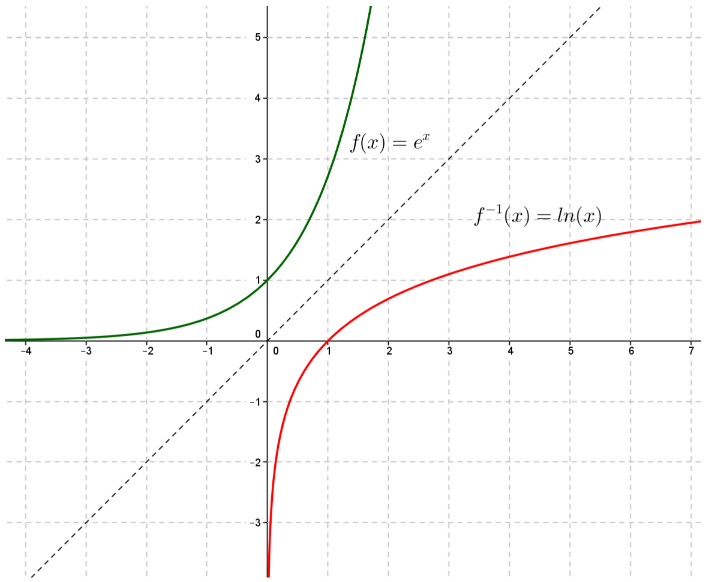


Ejemplo 1.31 *La función*

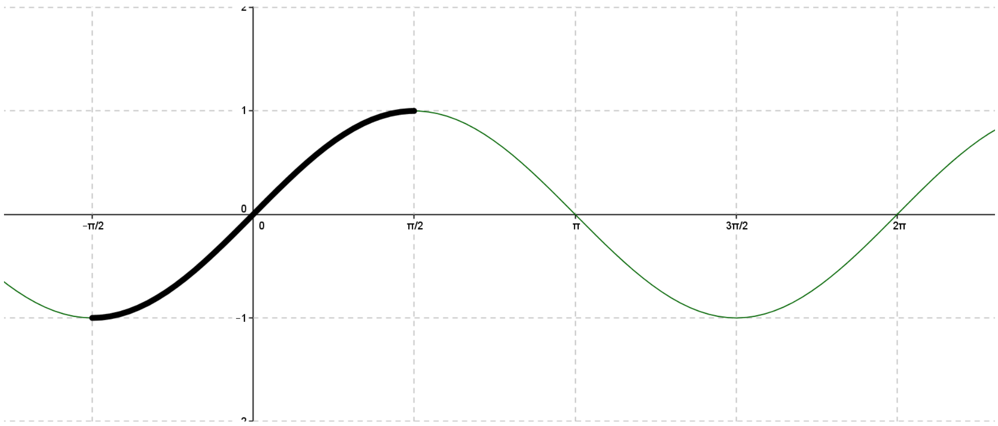
$$f:\mathbb{R}\to(0;\infty)\quad/\quad f(x)=e^{x}$$

es biyectiva. Su función inversa es

$$f^{-1}:(0;\infty)\to\mathbb{R}\quad/\quad f^{-1}(x)=\ln\left(x\right)$$



Ejemplo 1.32 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = sen(x)$. Esta función no es inyectiva y ni sobreyectiva.*



Sin embargo podemos redefinirla para que lo sea.

$$g : \left[-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1] \quad / \quad g\,(x) = sen(x)$$

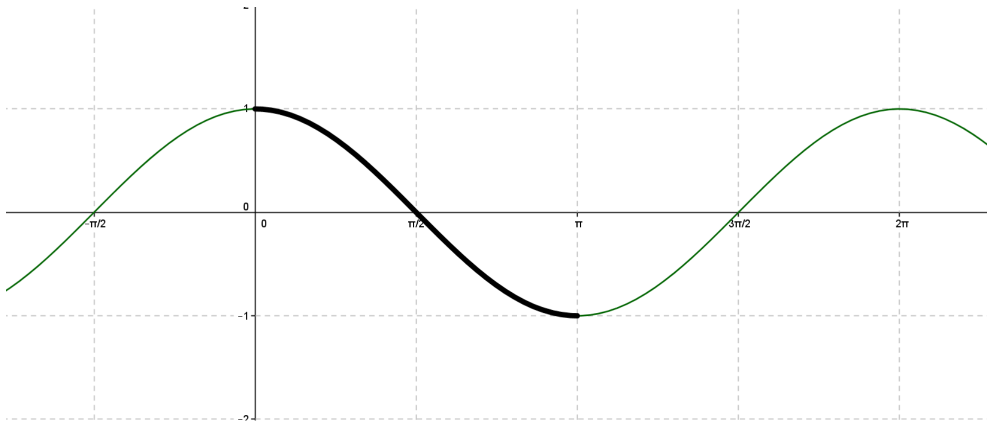
La función g se está remarcada en el gráfico anterior.

Su función inversa es

$$g^{-1} : [-1; 1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right] \quad / \quad g^{-1}\,(x) = arcsen\,(x)$$

Ejercicio 1.33 *Representar gráficamente la función $g^{-1}\,(x) = arcsen\,(x)$.*

Ejemplo 1.34 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = cos(x)$. Esta función no es inyectiva y ni* *sobreyectiva.*



Pero podemos redefinirla para que lo sea

$$g : [0; \pi] \to [-1; 1] \quad / \quad g(x) = cos(x)$$

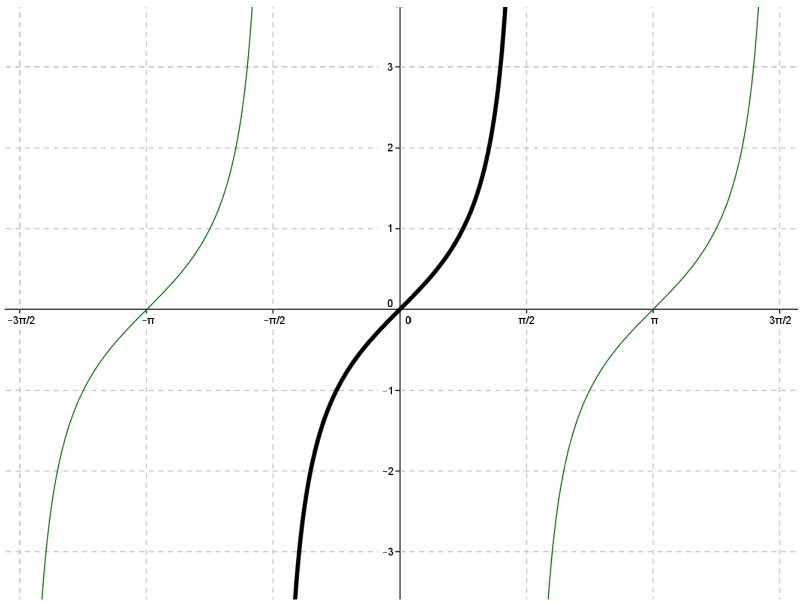
La función g se está remarcada en el gráfico anterior.

Su función inversa es

$$g^{-1} : [-1; 1] \to [0; \pi] \quad / \quad g^{-1}(x) = arccos(x)$$

Ejercicio 1.35 *Representar gráficamente la función* $g^{-1}(x) = arccos(x)$.

Ejemplo 1.36 *Sea* $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = tg(x)$. *Esta función no es inyectiva y si es sobreyectiva.*



Pero podemos redefinirla para obtener una función biyectiva

$$g : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \quad / \quad g(x) = tg(x)$$

La función g se está remarcada en el gráfico anterior.

Su función inversa es

$$g^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right) \quad / \quad g^{-1}(x) = arctg\,(x)$$

Ejercicio 1.37 *Representar gráficamente la función $g^{-1}(x) = arctg\,(x)$.*

1.6. Operaciones con funciones

A partir de funciones conocidas podemos obtener nuevas funciones realizando ciertas operaciones entre ellas. A continuación definiremos las siguientes operaciones entre funciones: suma, resta, producto, división y composición. Es preciso que tengamos cuidado a la hora de definir el dominio de las nuevas funciones.

1. **Suma:** $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, es decir la imagen de un elemento x por la función $f+g$ es la suma de la imagen de x por las funciones f y g. Por lo que es claro que

$$Dom\,(f+g) = Dom\,(f) \cap Dom\,(g)$$

2. **Resta:** $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$, es decir la imagen de un elemento x por la función $f-g$ es la resta de la imagen de x por las funciones f y g. Por lo que es claro que

$$Dom\,(f-g) = Dom\,(f) \cap Dom\,(g)$$

3. **Producto:** $(f.g)(x) = f(x).g(x)$, es decir la imagen de un elemento x por la función $f.g$ es el producto de la imagen de x por las funciones f y g. Por lo que es claro que

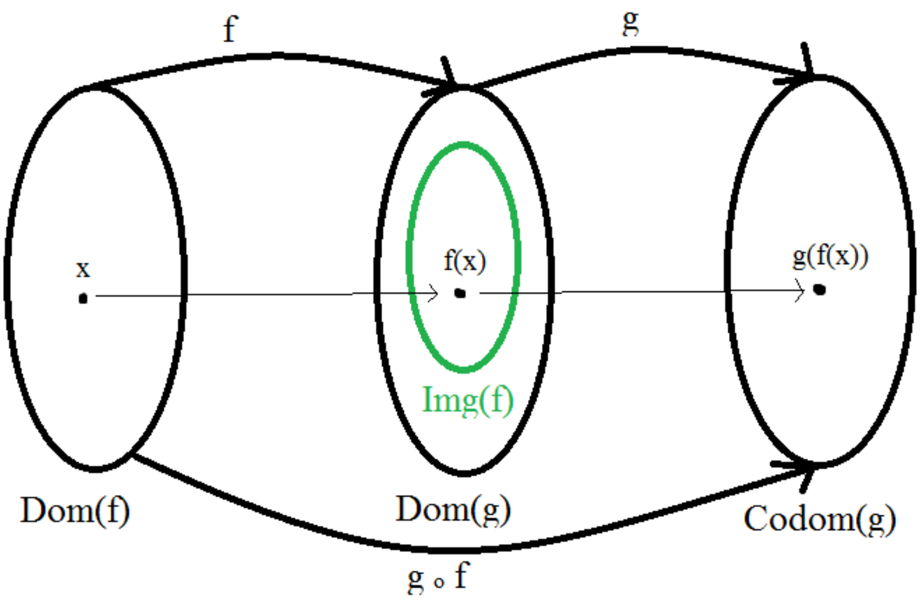
$$Dom\,(f.g) = Dom\,(f) \cap Dom\,(g)$$

4. **Cociente:** $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, es decir la imagen de un elemento x por la función f/g es el cociente de la imagen de x por las funciones f y g. Por lo que es claro que

$$Dom\,(f/g) = Dom\,(f) \cap Dom\,(g) - \{x : g\,(x) = 0\}$$

5. **Composición:** Sean $g : Dom\,(g) \to Codom\,(g)$ y $f : Dom\,(f) \to Codom\,(f)$ dos funciones. Definimos la operación $g \circ f$, y la nombraremos f compuesta con g, a la función

$$(g \circ f)\,(x) = g\,(f\,(x))$$



Es claro que la función $g \circ f$ esta bien definida si se cumple que $Img\,(f) \subseteq Dom\,(g)$. El dominio de la función $g \circ f$ es igual al dominio de f.

Ejemplo 1.38 *Consideremos las siguientes funciones:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = 2x + 3$$

y

$$g : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} \quad / \quad g(x) = \tfrac{x+1}{x-2}$$

Analicemos si es posible realizar las operaciones $g \circ f$ y $f \circ g$. Para ello debemos tener presente el dominio y la imagen de las funciones:

$$Dom(f) = \mathbb{R} \qquad\qquad Img\,(f) = \mathbb{R}$$

$$Dom(g) = \mathbb{R} - \{2\} \qquad Img\,(g) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Debido a que $Img\,(f) \subsetneq Dom(g)$ no es posible realizar la operación $g \circ f$, sin redefinir las funciones para que cumplan la condición $Img\,(f) \subseteq Dom(g)$.

Por otro lado $Img\,(g) \subseteq Dom(f)$, por lo que podemos realizar la operación $f \circ g$, siendo $Dom\,(f \circ g) = Dom\,(g) = \mathbb{R} - \{2\}$:

$$(f \circ g)\,(x) = f\,(g\,(x)) = f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = 2.\frac{x+1}{x-2} + 3 = \frac{2.(x+1) + 3(x-2)}{x-2} = \frac{5x-4}{x-2}$$

1.7. Ejercicios

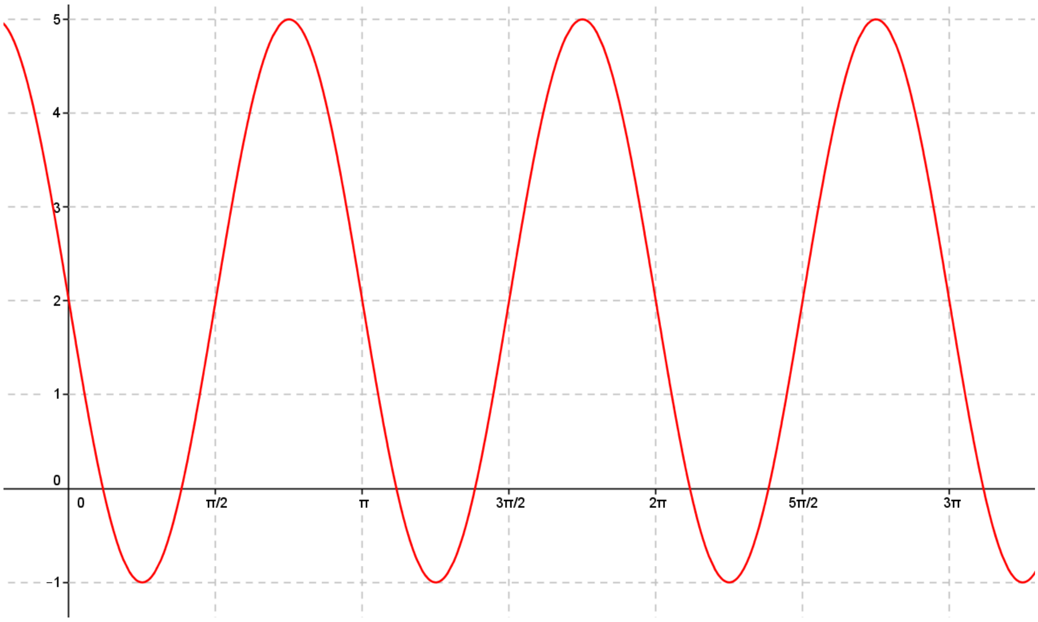
1. Dada $f(x) = 3x^2 - 4$, calcular: $f(-4)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(x^2\right)$, $f\left(x-h\right)$, $f\left(x\right) - f\left(h\right)$

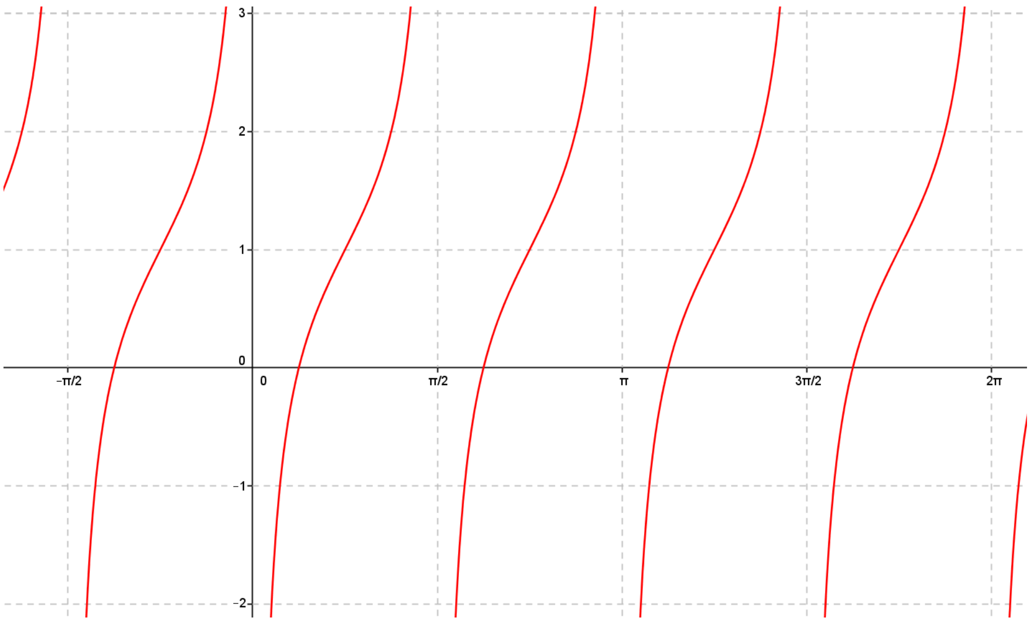
2. Dadas las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 3x - 1$
   b) $f(x) = 2x^2 + 5x - 4$
   c) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$
   d) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
   e) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$
   f) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$
   g) $f(x) = \sqrt{x-1}$
   h) $f(x) = \sqrt{x+4} - 1$
   i) $f(x) = |2x - 3| + 1$
   j) $f(x) = \left|5 - \frac{1}{2}x\right| - 2$
   k) $f(x) = 2e^x - 1$
   l) $f(x) = (\frac{1}{2})^{x-2} + 2$
   m) $f(x) = ln(x - 2)$
   n) $f(x) = sen\,(2x) + 3$
   ñ) $f(x) = cos(3x + 2\pi)$
   o) $f(x) = 6sen\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$
   p) $f(x) = -2cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$
   q) $f(x) = tg\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
   q) $f(x) = tg\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

   Analizar dominio, imagen, raíces, ordenada al origen,conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Realizar una representación gráfica.

3. Dados los siguientes gráficos, determinar la expresión algebraica de la función representada:





4. Dadas las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \text{ si } x < 3 \\ 2x - 1 \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$ $\qquad$ $c)\ f(x) = \begin{cases} 32(\frac{1}{2})^x \text{si } x < 5 \\ \sqrt{x-4} \text{ si } x \geq 5 \end{cases}$

$b)\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 \text{ si } x \leq 0 \\ x^2 - 2x - 3 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ $\qquad$ $d)\ f(x) = \begin{cases} \frac{4x}{x-1} \text{ si } x \leq 0 \\ 4cos(x+\pi) \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Analizar dominio, imagen, raíces, ordenada al origen,conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Realizar una representación gráfica.

5. Resolver analítica y gráficamente las siguientes desigualdades:

   $a)\ 2x^2-6x+4\leq 0$ $\quad b)\ x^2-5x-6>0$ $\quad c)\ -x^2+x-1<0$

   $d)\ x^2-6x+9\geq 0$ $\quad e)\ \frac{2x+1}{x-2}\geq 0$ $\quad f)\ \frac{x+4}{x-3}\leq 0$

   $e)\ \frac{4}{x^2+6x+5}>0$ $\quad f)\ \frac{x^2-5x-6}{x+2}\geq 0$

6. Resolver analítica y gráficamente las siguientes desigualdades:

   $a)\ |5x-2|<1$ $\quad b)\ |2-3x|\leq 1$ $\quad c)\ |3x-1|>1$

   $d)\ |4x-12|>4$ $\quad e)\ |x-7|<|x-3|$ $\quad f)\ 2\,|2x-3|<|x+10|$

   $g)\ \left|\frac{x+4}{x-3}\right|\leq 1$ $\quad h)\ \left|\frac{2x+1}{x-2}\right|\geq 2$ $\quad i)\ \left|\frac{x+2}{x^2-4}\right|\geq 1$

7. Una función f se dice **par** si cumple la propiedad $f(-x)=f(x)$.

   Una función f se dice **impar** si cumple la propiedad $f(-x)=-f(x)$.

   Clasificar las siguientes funciones en pares, impares o ninguna de ambas:

   $a)\ f(x)=x^2$ $\quad c)\ f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ $\quad e)\ f(x)=senh\,(x)$ $\quad g)f(x)=cosx$

   $b)\ f(x)=x^3$ $\quad d)\ f(x)=|x|$ $\quad f)f(x)=senx$ $\quad h)\ f(x)=sen^3x$

8. Utilizar Geogebra para representar la gráfica de cada función y a partir de la misma conjeturar si la función es par, impar o ninguna de estos dos tipos. Luego comprobarlo en forma analítica.

   $a)\ f(x)=4x^2\,(x-1)\,(x+1)$ $\quad b)\ f(x)=3x^5-4x^3-9x$ $\quad c)\ f(x)=2x^4+7x^3-x^2+9$

   $d)\ f(x)=\sqrt[3]{x}$ $\quad e)\ f(x)=\frac{|x|}{x}$ $\quad f)\ f(x)=\sqrt{|x|+4}$

   $g)\ f(x)=\frac{x^3-x}{x^2-1}$ $\quad h)\ f(x)=\frac{|x|}{x^2+1}$ $\quad i)\ f(x)=sen(2x)+x$

9. Sea g una función par y sea $h=f\circ g$. ¿h es una función par?

10. Sea g una función impar y sea $h=f\circ g$. ¿h es una función impar?

11. Sea h una función par y sea $h=f+g$. ¿Es posible que f y g no sean funciones pares ni impares?

12. Sea h una función par y sea $h=f.g$. ¿Es posible que f y g no sean funciones pares ni impares?

13. Dadas las siguientes funciones:

    a) $f(x) = |x+3| - |x-3|$ *b*) $f(x) = |x+3| + |x-3|$ *c*) $f(x) = |sen(x)| + |cos(x)|$

    a) Definir cada función como una función a trozos y representar graficamente.

    b) Analizar si las funciones son par, impar o ninguna de los dos tipos.

14. Dadas las siguientes funciones analizar si son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas. En caso de que la función sea biyectiva determinar la función inversa.

    a)
    $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = 4x + 2$$

    b)
    $$f : \mathbb{R}_0^+ \to [3; \infty) \quad / \quad f(x) = x^2 - 3$$

    c)
    $$f : \left[-\tfrac{2}{5}; \infty\right) \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \sqrt{2+5x}$$

    d)
    $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \tfrac{1}{x^2+1}$$

    e)
    $$f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{1\} \quad / \quad f(x) = \tfrac{x+3}{x-2}$$

    f)
    $$f : \mathbb{R} \to (-4; \infty) \quad / \quad f(x) = 3{,}2^x + 4$$

    g)
    $$f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = log(-3x)$$

    h)
    $$f : [-\pi/4; \pi/4] \to [-1; 1] \quad / \quad f(x) = sen\,(2x - \pi)$$

15. Dados los siguientes pares de funciones, calcular $f+g$, $f-g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$. Determinar dominio e imagen de cada función resultante:

    a) $f(x) = 1 + x^2$ $\quad g(x) = 1 + x$

    b) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad g(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{3}$

    c) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ $\quad g(x) = x^2$

    d) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad g(x) = \sqrt{4-x}$

    e) $f(x) = cos(x)$ $\quad g(x) = sen\,(x)$

16. Expresar las funciones dadas como composición de dos o más funciones simples (No olvidar definir dominio y codominio para que la composición sea posible).

$a)\ f(x) = (1+x)^2$ $\quad b)\ f(x) = (x-9)^5$ $\quad c)\ f(x) = \frac{1}{x+3}$

$d) f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$ $\quad e)\ f(x) = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$ $\quad f)\ f(x) = sen(\sqrt{x})$

$g)\ f(x) = 5^{tg(x-3)}$ $\quad h)\ f(x) = \sqrt{cos(x)}$ $\quad i)\ f(x) = ln\left(sen\left(x^2+1\right)\right)$

17. Decidir si existen las funciones $f \circ g$ y/o $g \circ f$. En caso existir, determinar la función composición.

$a)\ f(x) = x^3\ \ g(x) = x^2$ $\quad d)\ f(x) = ln\,(x)\ \ g(x) = sen(x)$

$b)\ f(x) = \frac{1}{x-2}\ \ g(x) = x^2$ $\quad e)\ f(x) = \frac{1}{x}\ \ g(x) = 3^x$

$c)\ f(x) = \sqrt{x}\ \ g(x) = 1 + x^3$ $\quad f)\ f(x) = cos\,(x)\ \ g(x) = \frac{x+1}{2x+1}$

T.U.A.S.Q.S:

1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F), argumentando tu respuesta:

   a) Si se duplica la frecuencia de una función trigonométrica (de la familia del seno ó del coseno), la cantidad de máximo y mínimos que hay en el intervalo $[0; 2\pi]$ se duplica.

   b) La ordenada al origen de la función $f\,(x) = a.cos\,(x) + c$ es $a + c$.

   c) La función
   $$f : \left[\tfrac{-\pi}{4}; \tfrac{\pi}{4}\right] \to [-2; 2] \quad / \quad f\,(x) = 2.sen(x+\pi)$$
   es inyectiva.

   d) La función inversa de la función $f(x) = sen\,(x)$ es la función $g\,(x) = cosec\,(x)$.

   e) Si la función $f\,(x) = sen\,(b.x)$ tiene frecuencia 3, la primer raíz positiva es $\frac{\pi}{3}$.

   f) Las funciones
   $$f : \left(-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \quad / \quad f\,(x) = tg\,(x)$$
   $$g : \left(\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{3\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \quad / \quad g\,(x) = tg\,(x)$$
   son iguales.

   g) Si sumo las funciones
   $$f : \mathbb{R} \to [-1; 1] \quad / \quad f\,(x) = sen\,(x)$$
   $$g : \mathbb{R} \to [-1; 1] \quad / \quad g\,(x) = cos\,(x)$$

obtengo la función

$$f + g : \mathbb{R} \to [-1; 1] \quad / \quad (f + g)(x) = 1$$

h) Si sumo las funciones

$$f : \mathbb{R} \to [-1; 1] \quad / \quad f(x) = sen(x)$$

$$g : \mathbb{R} \to [-1; 1] \quad / \quad g(x) = sen(-x)$$

obtengo la función

$$f + g : \mathbb{R} \to [-1; 1] \quad / \quad (f + g)(x) = 0$$

i) Existe una función que sea par e impar.

2. Una función con más de una raíz ¿puede ser inyectiva? Justificar.

3. Una función ¿puede tener dos ordenadas al origen? Justificar.

4. Una función con $Codom(f) = \mathbb{R}$ y $C^- = \phi$ ¿puede ser sobreyectiva? Justificar.

5. Si f es una función par ¿puede ser inyectiva? Justificar.

6. Sean f y g dos funciones. Probar que:

   a) Si f y g son sobreyectivas, entonces también lo $g \circ f$ es. Mostrar con un contraejemplo que el recíproco no es cierto.

   b) Si f y g son inyectivas, entonces también lo es $g \circ f$. Mostrar con un contraejemplo que el recíproco no es cierto.

1.8. Anexo A

1.8.1. Propiedades del Valor Absoluto

Sean $x, y \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$
3. $x \leq |x|$
4. $|x| = \sqrt[n]{x^n}$ con $n \in \mathbb{N}$ y n par.
5. $|x.y| = |x| \, . \, |y|$
6. Si $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
7. Desigualdad triangular: $|x + y| \leq |x| + |y|$
8. Si $a > 0$, entonces $|x| \leq a$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$
9. Además, $|x| \geq a$ si y sólo si $a \leq x$ ó $x \leq -a$
10. $|x - y| \geq ||x| - |y||$
11. $|x| < |y|$ si y sólo si $x^2 < y^2$

1.8.2. Propiedades inecuaciones

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$
2. Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$
3. $a < b$ si y sólo si $a \pm c < b \pm c$
4. $a \leq b$ si y sólo si $a \pm c \leq b \pm c$
5. Si $c > 0$, $a < b$ si y sólo si $a.c < b.c$
6. Si $c > 0$, $a \leq b$ si y sólo si $a.c \leq b.c$
7. Si $c < 0$, $a < b$ si y sólo si $a.c > b.c$
8. Si $c < 0$, $a \leq b$ si y sólo si $a.c \geq b.c$
9. Si $c > 0$, $a < b$ si y sólo si $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

10. Si $c > 0$, $a \leq b$ si y sólo si $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$

11. Si $c < 0$, $a < b$ si y sólo si $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

12. Si $c < 0$, $a \leq b$ si y sólo si $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$

13. $a < b$ si y sólo si $-a > -b$

14. Si a y b son no nulos, $a < b$ si y sólo si $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Capítulo 2

Límite y Continuidad

Los objetivos que nos proponemos para esta unidad es que los alumnos logren:

- Interpretar geométricamente el concepto de límite de una función en un valor real.
- Utilizar la definición formal del límite de una función en un valor real para demostrar la validez del mismo.
- Utilizar los límites laterales para justificar la existencia del límite de una función en un valor real.
- Reconocer y utilizar adecuadamente las propiedades algebraicas de los límites.
- Enunciar y demostrar el teorema de unicidad del límite.
- Enunciar, demostrar y utilizar el teorema del emparedado.
- Interpretar geométricamente el concepto de límite de una función cuando x tiende a infinito.
- Interpretar geométricamente el concepto de límite infinito.
- Calcular $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.
- Resolver límites indeterminados.
- Analizar la existencia de asíntotas utilizando el cálulo de límites.
- Interpretar la definición de continuidad de una función en un valor real.
- Analizar la continuidad de funciones, clasificando las discontinuidades.
- Redefinir la función, en caso de ser posible, para obtener una función contínua.
- Interpretar la definición de continuidad de una función en un intervalo.

- Reconocer y utilizar adecuadamente las propiedades algebraicas de las funciones continuas.
- Enunciar, demostrar y utilizar el teorema de Bolzano.
- Enunciar, demostrar y utilizar el teorema del Valor Intermedio.
- Utilizar las propiedades para justificar la continuidad de funciones.

2.1. Límite

Isaac Newton fue el primero en hablar explícitamente del concepto de límite en el siglo XVII. Explicó que la idea principal detrás de los límites es que las cantidades se acerquen más que cualquier diferencia dada. Newton expresó que el límite era el concepto básico del cálculo, pero fue tarea de matemáticos posteriores, aclarar sus ideas.

En el siglo XVIII, Cauchy retomó la idea de límite de Newton y la hizo más precisa: *Cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable tienden indefinidamente a un valor fijo, de modo que al final difieren de él todo lo poco que uno desea, a esto último se lo llama límite de los demás.*

A partir del concepto de **Límite,** podremos analizar el comportamiento de una función tanto en intervalos muy pequeños alrededor de un número real, como cuando los valores del dominio aumentan indefinidamente. Esto nos permitirá tener una idea más aproximada de la representación gráfica de una función.

2.1.1. Noción intuitiva de límite

Para comenzar con la idea intuitiva de límite, consideremos la siguiente función racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Observemos que la función f no está definida para $x = 1$ (es decir que no existe $f(1)$), pero si para cualquier otro número real. Entonces nos podríamos preguntar cómo se comporta la función cuando x toma valores próximos a 1. Para responder a esta pregunta calculamos en la siguiente tabla los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 1.

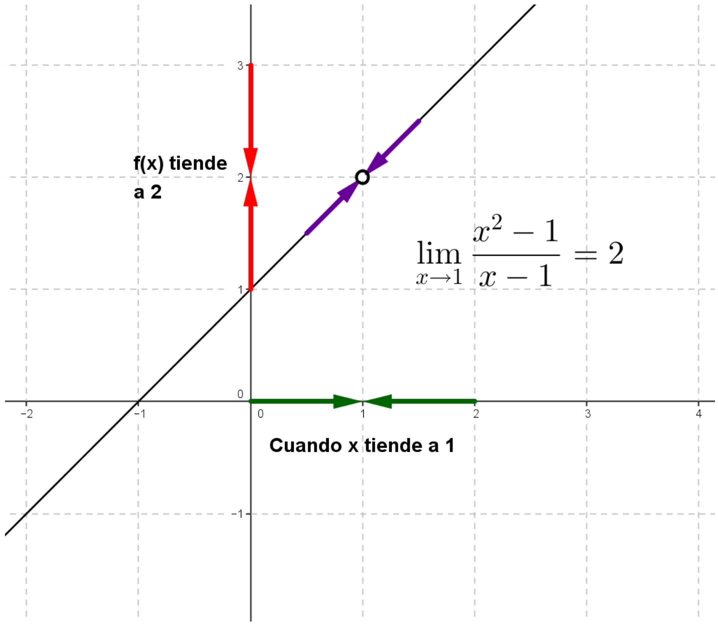
x	$1,25$	$1,1$	$1,01$	$1,001$	$\to$	1	$\leftarrow$	$0,999$	$0,99$	$0,90$	$0,75$
$f(x)$	$2,25$	$2,1$	$2,01$	$2,001$	$\to$	2	$\leftarrow$	$1,999$	$1,99$	$1,9$	$1,75$

A partir de observar los datos de la tabla, no es difícil de concluir que a medida de que x toma valores cada vez más próximos a 1 (tanto por valores mayores como por menores), $f(x)$ toma valores cada vez más próximos a 2. Notaremos esta situación de la siguiente manera

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

y se leerá: *El límite de la función* $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, *cuando* x *tiende a* 1, *es igual a* 2.

Nos parece importante que observemos en la representación gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ la información que nos brinda el cálculo del límite anterior.



De hecho, podemos aproximar los valores de $f(x)$ a 2 tanto como deseemos si tomamos un valor de x suficientemente cerca de 1.

Definición 2.1 *Sean* x_0 *y* L *números reales, escribimos*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

y lo leeremos

El límite de la función $f(x)$, *cuando* x *tiende* x_0, *es igual a* L

o también

La función $f(x)$ *tiende a* L *cuando* x *tiende a* x_0

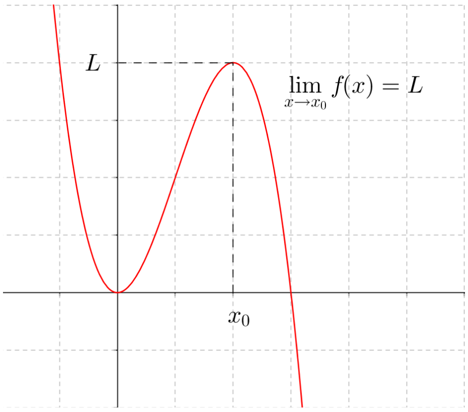
si los valores de $f(x)$ *se aproximan cada vez más al número* L *cuando* x *se aproxima al número* x_0 *(tanto por valores mayores como por valores menores), pero* $x \neq x_0$.

Más adelante presentaremos la definición formal de límite.

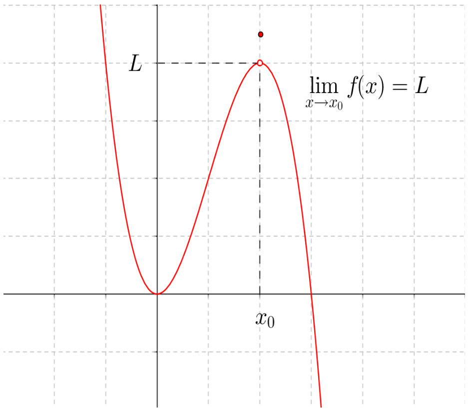
IMPORTANTE:

Es importante advertir la frase **pero** $x \neq x_0$ *en la definición anterior. Esto significa que al hallar el límite de la función* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* x_0, *nunca consideramos* $x = x_0$. *Incluso no es necesario que la función* $f(x)$ *este definida en* x_0, *lo único que importa es como está definida la función en valores muy próximos a* x_0.

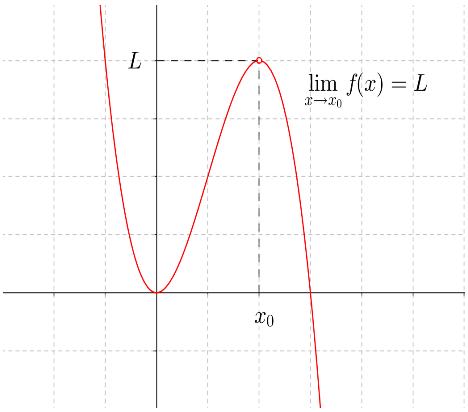
A continuación mostramos tres representaciones gráficas de funciones cuyo límite cuando x tiende a x_0 es L:



(a)



(b)



(c)

En el gráfico (a), $f(x_0)$ existe y $f(x_0) = L$; en el gráfico (b), $f(x_0)$ existe pero $f(x_0) \neq L$; en el gráfico (c), $f(x_0)$ no existe.

Ejercicio 2.2 *Determinar el valor de los siguientes límites:*

$$a.\ \lim_{x\to -1} x^2+3 \qquad b.\ \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} \qquad c.\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} \qquad d.\ \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} \qquad e.\ \lim_{x\to 0} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

Ejemplo 2.3 *Conjeturar el valor del siguiente límite:*

$$\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

Si bien la función $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$ *no está definida para* $x = 0$*, sí lo está para valores próximos a él. Evaluemos la función en valores próximos a cero*

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\to$	0	$\leftarrow$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1
$f(x)$	0	0	0	0	0	0	$\to$	0	$\leftarrow$	0	0	0	0	0	0

Con base en esta información estaríamos tentados en concluir que

$$\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

sin embargo, nuestra conjetura es errónea, y proviene de la elección para los valores de x. Veamos por qué. En primer lugar determinemos los máximos y los mínimos de está función (ya hemos estudiado en el capítulo anterior la técnica). Busquemos los máximos:

$$sen\left(\frac{\pi}{x}\right)=1\Leftrightarrow\frac{\pi}{x}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow x=\frac{2}{4k+1}\quad con\quad k\in\mathbb{Z}$$

Utilizando esta información podemos rearmar la tabla anterior

k	1	2	3	4				-4	-3	-2	-1
x	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{17}$	$\rightarrow$	0	$\leftarrow$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{2}{3}$
$f(x)$	1	1	1	1	$\rightarrow$	1	$\leftarrow$	1	1	1	1

Busquemos los mínimos:

$$sen\left(\frac{\pi}{x}\right)=-1\Leftrightarrow\frac{\pi}{x}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow x=\frac{2}{4k+3}\quad con\quad k\in\mathbb{Z}$$

Utilizando esta información podemos rearmar la tabla anterior

k	1	2	3	4				-4	-3	-2	-1
x	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{19}$	$\rightarrow$	0	$\leftarrow$	$-\frac{2}{13}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{2}{5}$	-2
$f(x)$	-1	-1	-1	-1	$\rightarrow$	-1	$\leftarrow$	-1	-1	-1	-1

Y entonces ¿cuál es el valor del límite? Debido a que los valores de $f(x)$ no tienden a ningún valor fijo cuando x tiende a 0, concluimos que

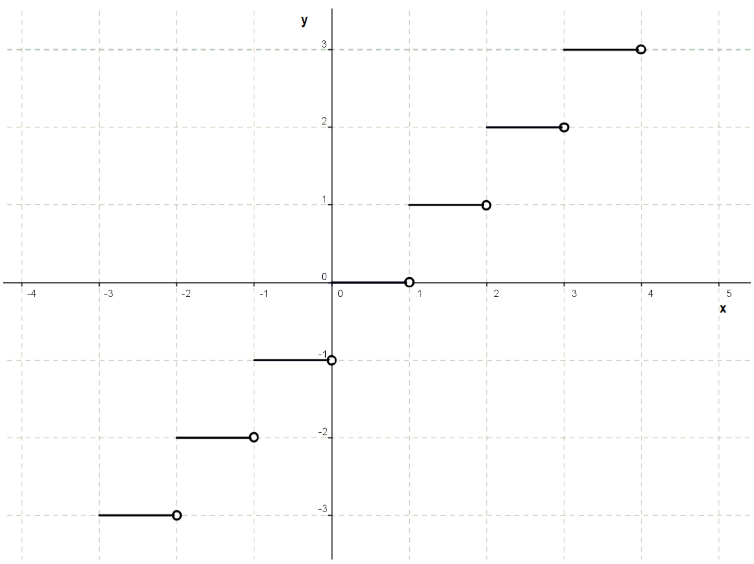
$$\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{\pi}{x}\right)\quad no\ existe$$

El ejemplo anterior nos muestra las limitaciones que tiene la técnica que hasta entonces hemos desarrollado. En la próxima sección desarrollaremos técnicas mucho más potentes.

Ejemplo 2.4 *Conjeturar el valor del siguiente límite:*

$$\lim_{x\to 2} floor(x)$$

Recordemos la representación gráfica de la función parte entera: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}\quad/\quad f(x)=floor(x)$:



Evaluemos la función en valores próximos a 2:

x	$1,9$	$1,99$	$1,999$	$1,9999$	$\to$	2	$\leftarrow$	$2,0001$	$2,001$	$2,01$	$2,1$
$f(x)$	1	1	1	1	$\to$	$???$	$\leftarrow$	2	2	2	2

Es claro que cuando x tiende a 2 por valores menores (también se dice cuando x tiende a 2 por izquierda), $f(x)$ tiende a 1; pero cuando x tiende a 2 por valores mayores (también se dice cuando x tiende a 2 por derecha), $f(x)$ tiende a 2. Esta situación se simboliza:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 \quad y \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$$

en donde el símbolo $x \to 2^-$ indica que nos aproximamos a 2, pero sólo por valores de x menores que 2; y el simbolo $x \to 2^+$ indica que nos aproximamos a 2, pero sólo por valores de x mayores que 2.

Debido a que no existe un número único al que $f(x) = floor(x)$ se aproxime cuando x tiende a 2, concluimos que:

$$\lim_{x\to 2} floor(x) \text{ no existe}$$

El análisis de este ejemplo nos conduce a la necesidad de definir los **Límites Laterales** (límite izquierdo y límite derecho).

Definición 2.5 *Sean x_0 y L números reales, escribimos*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

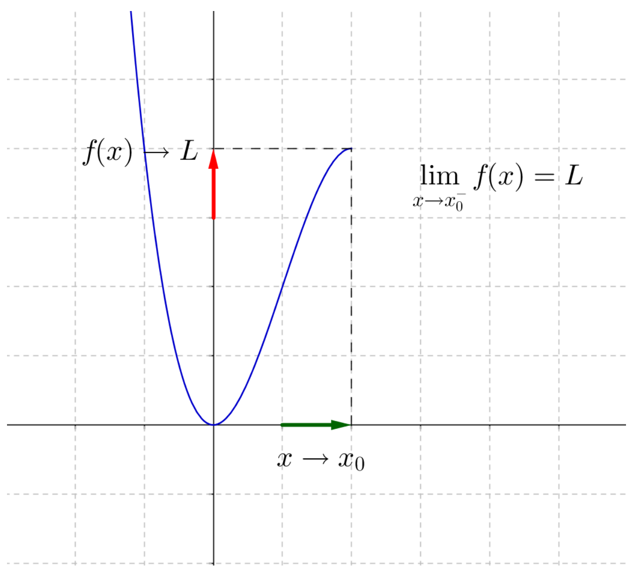
y lo leeremos

*El **límite izquierdo** de la función $f(x)$, cuando x tiende x_0, es igual a L*

o también

*La función $f(x)$ tiende a L cuando x **tiende por izquierda** a x_0*

si los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L cuando x se aproxima al número x_0 por valores menores.



De manera análoga definimos el límite por derecha.

Definición 2.6 *Sean x_0 y L números reales, escribimos*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

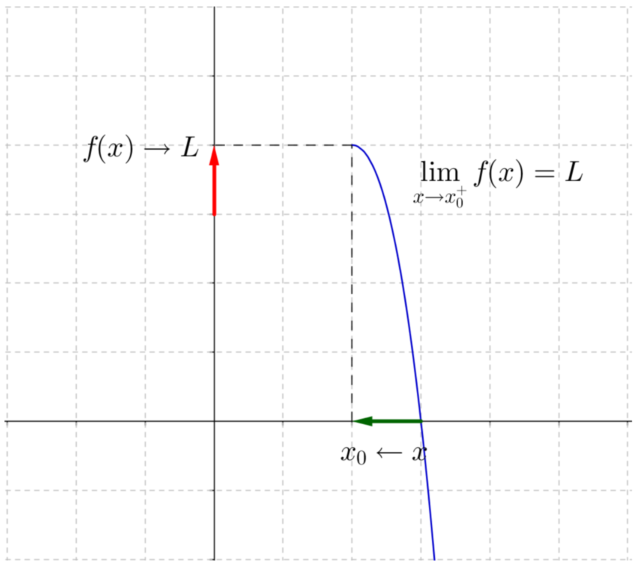
y lo leeremos

El ***límite derecho*** *de la función $f(x)$, cuando x tiende x_0, es igual a L*

o también

La función $f(x)$ tiende a L cuando x ***tiende por derecha*** *a x_0*

si los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L cuando x se aproxima al número x_0 por valores mayores.



Si comparamos la definición 2.1 con las definiciones de los límites laterales, podemos concluir que:

Proposición 2.7

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \textit{si y sólo si} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

Ejercicio 2.8 *Determinar si existe el límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ en los siguientes casos:*

a. $x_0 = 0$ *y* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = abs(x)$

b. $x_0 = 0$ *y* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \frac{abs(x)}{x}$

c. $x_0 = 1$ *y* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \begin{cases} -x + 2 \ \textit{si} \ x \leq 1 \\ 2x - 2 \ \textit{si} \ x > 1 \end{cases}$

d. $x_0 = 1$ *y* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \ \textit{si} \ x \leq 1 \\ 2x - 2 \ \textit{si} \ x > 1 \end{cases}$

2.1.2. Definición Formal de Límite

La definición intuitiva de límite estudiada en la sección anterior, es muy importante para comprender el concepto, pero inadecuada para algunos propósitos, e incluso imprecisa en algunos casos. Frases tales como: *si los valores de* $f(x)$ *se aproximan cada vez más al número* L *cuando* x *se aproxima al número* x_0, son poco formales, pues ¿qué tan próximo tiene que estar x de x_0 para que $f(x)$ este próximo de L? En este sección presentaremos la definición formal de límite, la cual utilizaremos para demostrar la validez de los mismos.

Antes de enunciar la definición formal, analicemos un caso particular con mayor detalle. Consideremos la función:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad / \quad f(x)=\begin{cases} 2x-1 \text{ si } x\neq 3 \\ 6 \text{ si } x=3 \end{cases}$$

Si bien $f(3)=6$, a esta altura es de esperar que nadie dude en concluir que cuando x está cerca de 3, pero es distinto de 3, $f(x)$ esta cerca de 5. Es decir

$$\lim_{x\to 3} f(x)=5$$

Pero ¿qué tan cerca de 3 tiene que estar x para que $f(x)$ este cerca de 5? Supongamos por ejemplo que queremos determinar que tan cerca de 3 tiene que estar x para que $f(x)$ diste de 5 en menos de $0,1$. Como la distancia entre x y 3 es $|x-3|$ y la distancia entre $f(x)$ y 5 es $|f(x)-5|$, nuestro problema es encontrar un número δ[1] tal que

$$\text{si } |x-3|<\delta \text{ pero } x\neq 3 \quad \text{suceda que} \quad |f(x)-5|<0,1$$

Como $x\neq 3$ si y sólo si $|x-3|\neq 0$, entonces otra manera de formular nuestro problema sería: encontrar un número δ tal que

$$\text{si } 0<|x-3|<\delta \quad \text{suceda que} \quad |f(x)-5|<0,1$$

Notemos que

$$|f(x)-5|=|(2x-1)-5|=|2x-6|=2|x-3|$$

Por lo que si buscamos que $|f(x)-5|<0,1$, es claro que $|x-3|<\frac{0,1}{2}=0,05$. Así la respuesta a nuestro problema sería que $\delta=0,05$, es decir si x está a distancia no mayor que $0,05$ de 3, entonces $f(x)$ estará a distancia no mayor que $0,01$ del valor 5.

Si en lugar de tolerar un error de $0,1$ queremos una precisión con una tolerancia de un número arbitrario ε[2], podemos encontrar utilizando el procedimiento anterior que:

$$\text{si } 0<|x-3|<\delta=\tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{entonces sucede que} \quad |f(x)-5|<\varepsilon \tag{2.1}$$

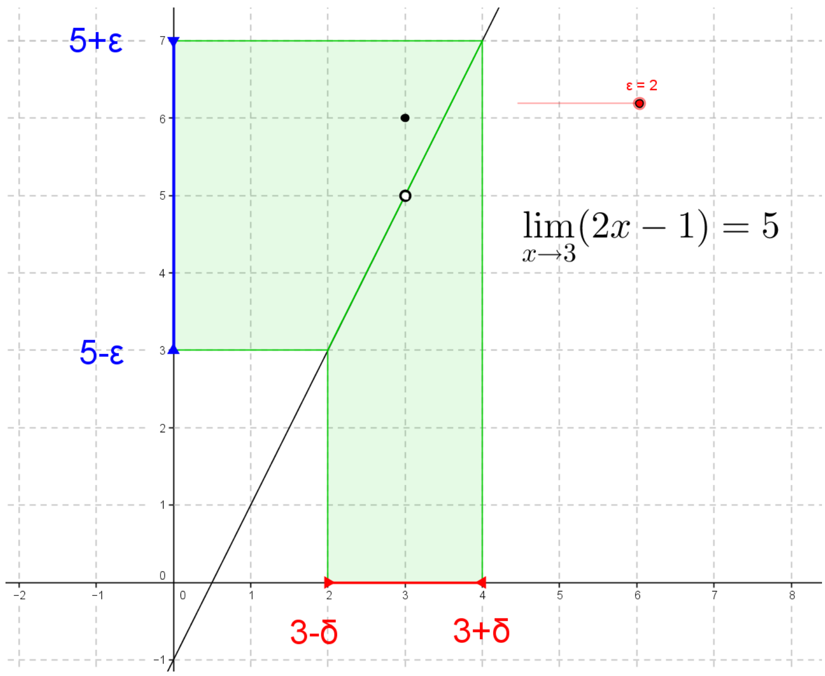
[1] δ **delta** es la cuarta letra del alfabeto griego. En matemática, δ suele designar pequeñas cantidades.
[2] ε **épsilon** es la quinta letra del alfabeto griego. En matemática, ε suele designar pequeñas cantidades.

Esta es una forma precisa de decir que $f(x)$ es cercano a 5 cuando x está cerca de 3 porque 3.1 dice que podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cerca de 5 tomando los valores de x a una distancia de $\varepsilon/2$ desde el valor 3 (pero $x \neq 3$).

Observemos que 3.1 se puede reescribir como

$$5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 3 - \delta < x < 3 + \delta \text{ y } x \neq 3$$

Esta situación se ilustra en el siguiente gráfico: si consideramos valores de x distintos de 3 pero pertenecientes al intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$, su imagen $f(x)$ pertenece al intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.



Utilizando como modelo el problema anterior, presentaremos la definición formal de límite.

Definición 2.9 *Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y f una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto (a, b) que contiene a x_0, salvo quizás en el mismo x_0. Entonces decimos que **el límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** x_0 **es** L y escribimos*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si para cada número ε positivo existe un correspondiente número δ, también positivo, tal que

$$\textit{si } 0 < |x - x_0| < \delta \quad \textit{sucede que} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Una forma reducida de expresar esta definición es

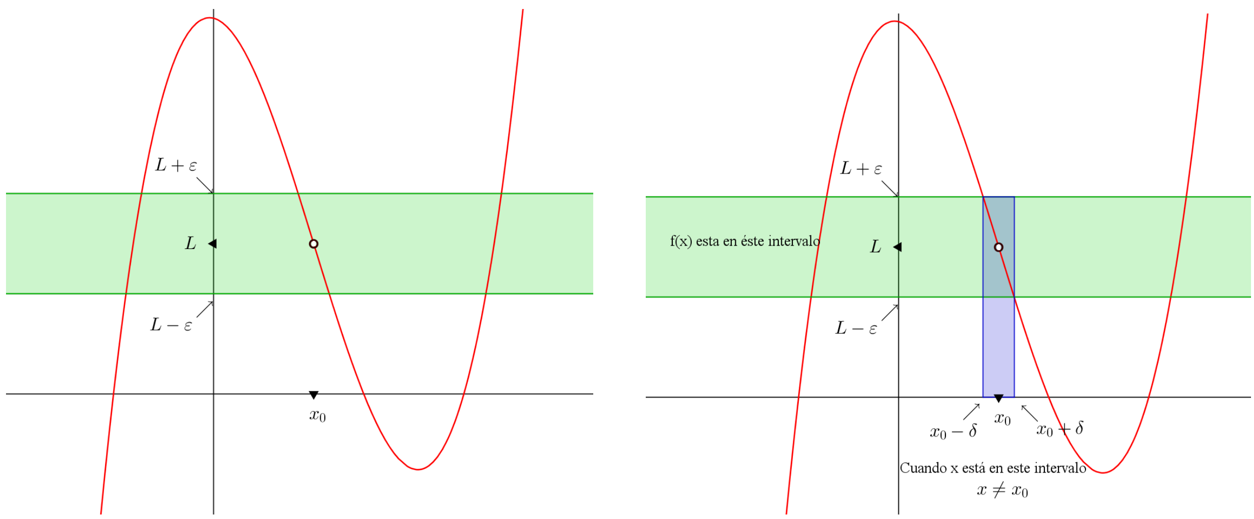
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) \text{ tal que si } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon}$$

La definición de límite puede expresarse en palabras de las siguientes formas equivalentes:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ significa que la distancia entre $f(x)$ y L puede hacerse arbitrariamente pequeña al tomar la distancia entre x y x_0 suficientemente pequeña, pero no nula.

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ (sin importar lo pequeño del valor de ε) podemos encontrar $\delta > 0$ (que depende del valor de ε) tal que si x se encuentra en el intervalo abierto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y $x \neq x_0$ entonces $f(x)$ está en el intervalo abierto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Una interpretación geométrica de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ puede darse en términos de la gráfica de la función f:



Dado $\varepsilon > 0$, trazamos rectas horizontales $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$ sobre la representación gráfica de la función f. Entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ si y sólo si podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que si restringimos el valor de x a valores del intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y $x \neq x_0$, entonces la curva que representa a la función f está entre las rectas $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$, o lo que es lo mismo $f(x)$ pertenece al intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. No es difícil de observar en esta interpretación que si un valor de δ sirve para verificar la condición, también lo será cualquier valor menor de δ.

Es importante resaltar que el proceso ilustrado anteriormente debe cumplirse para cada número ε positivo, sin importar lo pequeño que sea.

A continuación mostraremos varios ejemplos en los que probaremos por definición el valor de ciertos límites dados:

Ejemplo 2.10 *Demostrar que* $\lim\limits_{x\to 3} (2x+1) = 7$

Entonces dado $\varepsilon > 0$ tenemos que encontrar un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $0 < |x-3| < \delta$ suceda que $|2x+1-7| < \varepsilon$.

Comencemos trabajando con la expresión $|2x+1-7|$

$$|2x+1-7| = |2x+6| = 2|x-3|$$

y como por hipótesis $|x-3|<\delta$ *entonces* $2|x-3|<2\delta$. *Reemplazando en la expresión anterior tenemos*

$$|2x+1-7| = |2x+6| = 2|x-3| < 2\delta$$

Luego, queremos que 2δ *sea menor que el* ε *dado, es decir,* $2\delta<\varepsilon$. *Así obtenemos el* δ *buscado*

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2}$$

Reconstruimos ahora la demostración formal.

Sea $\varepsilon>0$, *si* $\delta<\frac{\varepsilon}{2}$ *entonces* $0<|x-2|<\delta$ *implica que*

$$|2x+1-7| = |2x+6| = 2|x-3| < 2\delta < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Con lo que queda demostrado que $\lim_{x\to 3}(2x+1)=7$.

Ejercicio 2.11 *Interpretar geométricamente (como distancia) la demostración de* $\lim_{x\to 3}(2x+1) = 7$.

Ejemplo 2.12 *Demostrar que el* $\lim_{x\to 2}(x^2)=4$

Entonces dado $\varepsilon>0$ *tenemos que encontrar un* $\delta(\varepsilon)>0$ *tal que si* $0<|x-2|<\delta$ *suceda que* $|x^2-4|<\varepsilon$.

Comencemos trabajando con la expresión $|x^2-4|$

$$\left|x^2-4\right| = |(x-2)(x+2)| = |x-2|\,|x+2| \tag{2.2}$$

Por hipótesis tenemos que $0<|x-2|<\delta$, *por lo que sólo nos falta acotar* $|x+2|$, *es decir encontrar un número positivo* M *tal que* $|x+2|<M$. *Podemos determinar* M *si nos restringimos a que* x *esté en algún intervalo centrado en* 2. *Elegimos* $\delta=1$, *luego utilizando propiedades de valor absoluto y de desigualdades tenemos que*

$$\begin{aligned}
|x-2| &< \delta = 1 \\
-1 &< x-2 < 1 \\
1 &< x < 3 \\
3 &< x+2 < 5 \Longrightarrow |x+2| < 5
\end{aligned}$$

Así $|x+2|<5$, *reemplazando en 2.2 obtenemos*

$$\left|x^2-4\right| = |x-2|\,|x+2| < \delta{,}5 < \varepsilon \Longrightarrow \delta < \frac{\varepsilon}{5}$$

Pero como ya habíamos supuesto un valor para δ, *el valor es el mínimo entre ellos*

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$$

Reconstruimos ahora la demostración formal.

Sea $\varepsilon > 0$, *si el mínimo es* $\delta = \frac{\varepsilon}{5} \Longrightarrow \frac{\varepsilon}{5} < 1$ *entonces* $0 < |x-2| < \delta$ *implica que*

$$\left|x^2 - 4\right| = |(x-2)(x+2)| = |x-2|\,|x+2| < 5\delta < 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

Si el mínimo es $\delta = 1$ *entonces* $1 < \frac{\varepsilon}{5}$, *luego*

$$\left|x^2 - 4\right| = |(x-2)(x+2)| = |x-2|\,|x+2| < 5\delta < 5 \cdot 1 < 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

Con lo que queda demostrado que $\lim\limits_{x \to 2} (x^2) = 4$.

Ejercicio 2.13 *Interpretar geométricamente (como distancia) la demostración de* $\lim\limits_{x\to 2} (x^2) = 4$.

Ejemplo 2.14 *Demostrar que* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Entonces dado $\varepsilon > 0$ *tenemos que encontrar un* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tal que si* $0 < |x-1| < \delta$ *suceda que* $\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$.

Como

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| = \left|\frac{x^2-1-2x+2}{x-1}\right| = \left|\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right| =$$

$$= \left|\frac{(x-1)(x-1)}{x-1}\right| = \frac{|(x-1)|\,|(x-1)|}{|(x-1)|} = |(x-1)| < \delta$$

Entonces bastará tomar un $\delta < \varepsilon$. *Reconstruimos ahora la demostración formal.*

Sea $\varepsilon > 0$, *si* $\delta < \varepsilon$ *entonces* $0 < |x-1| < \delta$ *implica que*

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| = \left|\frac{x^2-1-2x+2}{x-1}\right| = \left|\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right| =$$

$$= \left|\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right| = \frac{|(x-1)|\,|(x-1)|}{|(x-1)|} = |(x-1)| < \delta < \varepsilon$$

Con lo que queda demostrado que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Ejemplo 2.15 *Demostrar que* $\lim\limits_{x\to -2} \frac{2x+1}{3x-2} = \frac{3}{8}$.

Entonces dado $\varepsilon > 0$ *tenemos que encontrar un* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tal que si* $0 < |x+2| < \delta$ *suceda que* $\left|\frac{2x+1}{3x-2} - \frac{3}{8}\right| < \varepsilon$.

Comencemos trabajando con la expresión $\left|\frac{2x+1}{3x-2} - \frac{3}{8}\right|$

$$\left|\frac{2x+1}{3x-2} - \frac{3}{8}\right| = \frac{7\,|x+2|}{8\,|3x-2|} = \frac{7}{8}\,|x+2|\,\frac{1}{|3x-2|} \tag{2.3}$$

Por hipótesis tenemos que $0 < |x+2| < \delta$, *por lo que sólo nos falta acotar* $\frac{1}{|3x-2|}$, *es decir encontrar un número positivo* M *tal que* $\frac{1}{|3x-2|} < M$. *Podemos determinar* M *si nos restringimos* *a que x esté en algún intervalo centrado en -2. Elegimos $\delta = 1$, luego utilizando propiedades de valor absoluto y de desigualdades tenemos que*

$$|x+2| < \delta = 1 \Rightarrow -1 < x+2 < 1 \Rightarrow -3 < x < -1 \Rightarrow$$

$$-9 < 3x < -3 \Rightarrow -11 < 3x-2 < -5$$

multiplicando por (-1)

$$5 < (-1)(3x-2) < 11 \Rightarrow \frac{1}{11} < \frac{1}{(-1)(3x-2)} < \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{11} < \frac{1}{|3x-2|} < \frac{1}{5}$$

Así $\frac{1}{|3x-2|} < \frac{1}{5}$. Reemplazando en 2.3

$$\left|\frac{2x+1}{3x-2} - \frac{3}{8}\right| = \frac{7|x+2|}{8|3x-2|} = \frac{7}{8}|x+2|\frac{1}{|3x-2|} < \frac{7}{8}.\delta.\frac{1}{5} < \varepsilon \Longrightarrow \delta < \frac{40}{7}\varepsilon$$

Entonces bastará considerar $\delta = \text{mín}\left\{\frac{40}{7}\varepsilon, 1\right\}$. Dejamos para el lector la reconstrucción formal del límite.

Ejercicio 2.16 *Interpretar geométricamente (como distancia) la demostración de $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x+1}{3x-2} = \frac{3}{8}$.*

Ejemplo 2.17 *Demostrar que $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x+1}{3x+8} = 5$.*

Entonces dado $\varepsilon > 0$ tenemos que encontrar un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $0 < |x+3| < \delta$ suceda que $\left|\frac{2x+1}{3x+8} - 5\right| < \varepsilon$.

Comencemos trabajando con la expresión $\left|\frac{2x+1}{3x+8} - 5\right|$

$$\left|\frac{2x+1}{3x+8} - 5\right| = \frac{|-13x-39|}{|3x+8|} = 13|x+3|\frac{1}{|3x+8|} \tag{2.4}$$

Por hipótesis tenemos que $0 < |x+3| < \delta$, por lo que sólo nos falta acotar $\frac{1}{|3x+8|}$, es decir encontrar un número positivo M tal que $\frac{1}{|3x+8|} < M$. Podemos determinar M si nos restringimos a que x esté en algún intervalo centrado en -3. Elegimos $\delta = 1$, luego utilizando propiedades de valor absoluto y de desigualdades tenemos que

$$|x+3| < \delta = 1 \Rightarrow -1 < x+3 < 1 \Rightarrow -4 < x < -2 \Rightarrow -12 < 3x < -6$$

$$-12 < 3x < -6 \Rightarrow -4 < 3x+8 < 2$$

En este caso no me sirve multiplicar por (-1), pues igual me queda una desigualdad entre un número positivo y un número negativo, entonces debo considerar δ más pequeño, como por ejemplo $\delta = \frac{1}{4}$

$$|x+3| < \delta = \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{7}{4} < 3x+8 < -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} < (-1)(3x+8) < \frac{7}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{7} < \frac{1}{(-1)(3x+8)} < 4 \Rightarrow \frac{4}{7} < \frac{1}{|3x+8|} < 4$$

Por lo que $\frac{1}{|3x+8|} < 4$. *Reemplazando en 2.4*

$$\left|\frac{2x+1}{3x+8} - 5\right| = \frac{|-13x-39|}{|3x+8|} = 13\,|x+3|\,\frac{1}{|3x+8|} < 13 \cdot \delta \cdot 4 < \varepsilon \Longrightarrow \delta < \frac{\varepsilon}{52}$$

Bastará considerar $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{52}, \frac{1}{4}\right\}$. *Dejamos para el lector la reconstrucción formal del límite.*

Ejercicio 2.18 *Demostrar que* $\lim\limits_{x\to 3}(4x-5) = 7$.

Ejercicio 2.19 *Demostrar que* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+3}{2x-1} = 4$.

Formalicemos los conceptos de límite por izquierda y por derecha (límites laterales), que hemos estudiado en forma intuitiva en la sección anterior.

Definición 2.20 *Sea* $x_0 \in \mathbb{R}$ *y* f *una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto* (x_0, a). *Decimos que* ***el límite de*** $f(x)$ ***cuando*** x ***tiende a*** x_0 ***por derecha es*** L *y escribimos*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

si para cada número ε *positivo existe un correspondiente número* δ, *también positivo, tal que*

$$\text{si } 0 < x - x_0 < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definición 2.21 *Sea* $x_0 \in \mathbb{R}$ *y* f *una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto* (a, x_0). *Decimos que* ***el límite de*** $f(x)$ ***cuando*** x ***tiende a*** x_0 ***por izquierda es*** L *y escribimos*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

si para cada número ε *positivo existe un correspondiente número* δ, *también positivo, tal que*

$$\text{si } 0 < x_0 - x < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Para Recordar: Recordemos la proposición 2.7 enunciada en la sección anterior, la cual es una herramienta muy útil para justificar la existencia del límite de una función cuando x tiende a x_0.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L}$$

Ejercicio 2.22 *Demostrar la validez de los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to 2}|3x-1| = 5$
3. $\lim\limits_{x\to 3^-} floor\,(x) = 2$

Ejercicio 2.23 *Sea* $c \in \mathbb{Z}$. *Demostrar que* $\lim\limits_{x\to c^-} floor\,(x) = c-1$ *y* $\lim\limits_{x\to c^+} floor\,(x) = c$.

2.1.3. Propiedades de los Límites

A continuación estudiaremos algunas propiedades de los límites de funciones, que nos ayudaran a determinar el valor de algunos límites, así como también a demostrar la validez de los límites en forma sencilla.

Teorema 2.24 (Unicidad del Límite) *Sea f una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto (a, b) que contiene a x_0, salvo quizás en el mismo x_0. Si existe el límite de la función en el punto x_0, este es único.*

Demostración 2.25 *Supongamos que existen $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ con $l_1 \neq l_2$, tal que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad y \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$$

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$, entonces para cada número $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número $\delta_1(\varepsilon) > 0$ tal que

$$si\ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad entonces \quad |f(x) - l_1| < \varepsilon/2$$

Y si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$, entonces para cada número $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número $\delta_2(\varepsilon) > 0$ tal que

$$si\ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad entonces \quad |f(x) - l_2| < \varepsilon/2$$

Luego si consideramos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces si $0 < |x - x_0| < \delta$ sucede que

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - l_2 - f(x) + f(x)| \leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Pero como esta desigualdad es válida para todo valor positivo de ε, $|l_1 - l_2| = 0$ (por ser 0 el único número real no negativo que es menor que ε, para cualquier ε). Luego $l_1 = l_2$, lo que es una contradicción, que proviene de suponer que $l_1 \neq l_2$.

Teorema 2.26 (Propiedades Algebraicas de los límites) *Sean f y g funciones que tienen límite en c, es decir existen*

$$\lim_{x \to c} f(x) \quad y \quad \lim_{x \to c} g(x)$$

y k un número real. Entonces valen las siguientes igualdades:

i) $\lim_{x \to c} k = k$

ii) $\lim_{x \to c} x = c$

iii) $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x)$

iv) $\lim_{x \to c} [f(x).g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) . \lim_{x \to c} g(x)$

v) $\lim_{x \to c} [f(x)/g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) / \lim_{x \to c} g(x)$ *si* $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$

vi) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$

vii) $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *(en el caso de que* n *sea par, la propiedad vale si* $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$*)*

viii $\lim\limits_{x\to c}[\ln f(x)] = \ln\left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]$ *si* $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$

ix $\lim\limits_{x\to c}[f(x)^{g(x)}] = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$

La demostración de las igualdades anteriores se dejan para el lector interesado.

Ejercicio 2.27 *Calcular los siguientes límites, justificando los pasos realizados:*

a) $\lim\limits_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4)$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 3x + 4)^{x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to \pi}\ln\left[sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

Ejercicio 2.28 *Sean* f *y* g *funciones tales que* $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$ *y* $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 8$*. Determinar el valor del siguiente límite*

$$\lim_{x\to 3}\frac{f^2(x).\sqrt[3]{g(x)}}{\frac{1}{2}x^2 - f(x)}$$

Ejercicio 2.29 *Justificar la validez de las siguientes afirmaciones:*

a) *Si* f *es una función polinomial, entonces* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$*.*

b) *Si* f *es una función racional y* $c \in Dom(f)$*, entonces* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

El siguiente teorema conocido como teorema del emparedado (o teorema de la compresión, o teorema de encaje) afirma que si dos funciones tienen el mismo límite L cuando x tiende a x_0, entonces cualquier otra función que pueda ser acotada entre las dos anteriores, tendrá límite L cuando x tiende a x_0. Es un teorema muy útil para determinar el límite de ciertas funciones un poco raras.

Teorema 2.30 (del emparedado) *Sean* f, g *y* h *tres funciones definidas en un intervalo* (a, b)*, salvo quizás en* x_0*, que cumplen las siguientes condiciones:*

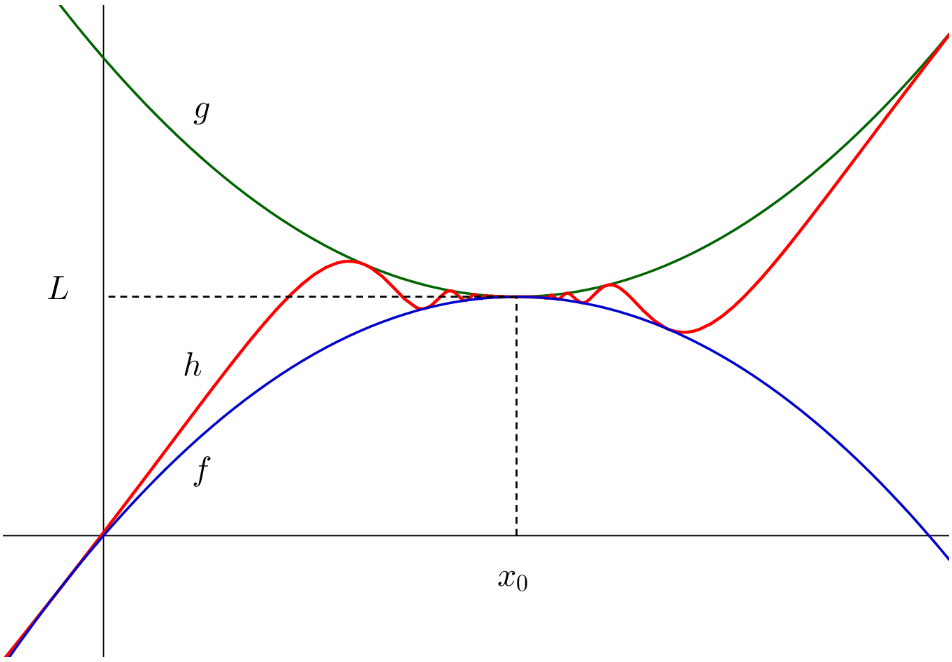
1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *(tienen el mismo límite cuando* x *tiende a* x_0*).*

2. $\forall x \in (a, b)$, $x \neq x_0$ *se cumple que* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *(la función* h *está acotada por las funciones* f *y* g *en el intervalo* (a, b) *salvo, quizás en* x_0*)*

Entonces

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = L$$

En la siguiente representación gráfica se ilustra el teorema del emparedado



Demostración 2.31 *Si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, *entonces para cada número* $\varepsilon > 0$ *existe un correspondiente número* $\delta_1(\varepsilon) > 0$ *tal que*

$$si\ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad entonces \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$, *entonces para cada número* $\varepsilon > 0$ *existe un correspondiente número* $\delta_2(\varepsilon) > 0$ *tal que*

$$si\ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad entonces \quad |g(x) - L| < \varepsilon$$

Consideremos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, *entonces si* $0 < |x - x_0| < \delta$ *sucede que*

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \quad y \quad -\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$$

y como $\forall x \in (a, b)$, $x \neq x_0$ *sucede que* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, *se cumple que*

$$-\varepsilon < f(x) - L \leq h(x) - L \leq g(x) - L < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon$$

Luego $\lim_{x\to x_0} h(x) = L$.

Ejemplo 2.32 *Demostrar que* $\lim_{x\to 0}\left[x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$

En primer lugar notemos que no podemos utilizar las propiedades algebraicas de los límites para demostrar la validez del límite, pues no existe $\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$ *(justificar la última afirmación). Sin embargo como*

$$-1 \leq sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

y $x^2 \geq 0$ *para todo* x *número real, sucede que*

$$-x^2 \leq x^2 sen\left(\tfrac{1}{x}\right) \leq x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por otro lado no es difícil de probar que

$$\lim_{x\to 0} -x^2 = 0 \quad y \quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

Luego si llamamos $f(x) = -x^2$, $h(x) = x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)$ *y* $g(x) = x^2$, *como se cumplen las condiciones del Teorema del emparedado 2.30, hemos demostrado que*

$$\lim_{x\to 0}\left[x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$$

Ejercicio 2.33 *Utilizar el teorema 2.30 para demostrar la validez de los siguientes límites:*

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left[x^2 cos\left(\tfrac{1}{x}\right)\right] = 0 \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{sen^3(x)}{x} = 0$$

2.1.4. Límites infinitos

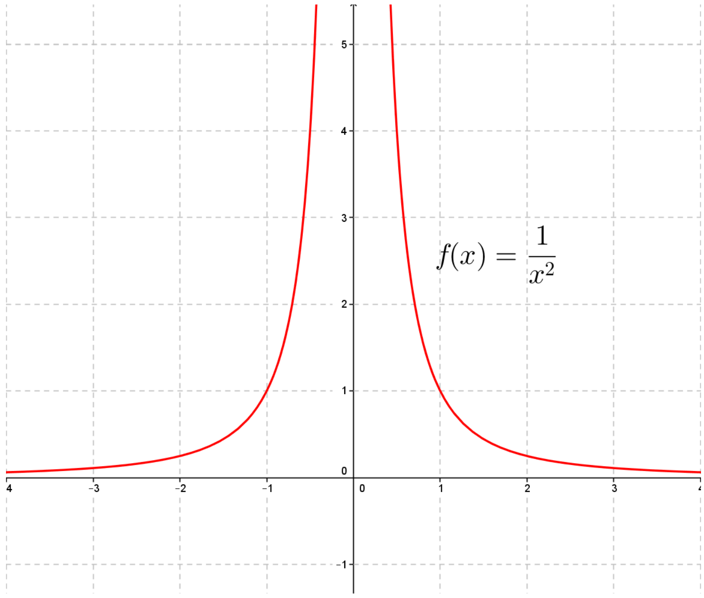
Para comenzar esta sección tratemos de resolver el siguiente problema: Determinar el limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$$

Debido a que $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es una función racional para la cual $x = 0$ no pertenece a su dominio, no podemos utilizar las propiedades algebraicas del límite para resolver nuestro problema. Por lo que no tenemos otra alternativa (por ahora) que analizar en forma rudimentaria el comportamiento de $f(x)$ a medida que x se aproxima a 0:

x	$-0,2$	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$\rightarrow$	0	$\leftarrow$	$0,001$	$0,01$	$0,1$	$0,2$
$f(x)$	25	100	10000	1000000	$\rightarrow$	???	$\leftarrow$	1000000	10000	100	25

Si observamos la tabla, no es difícil de concluir que conforme x se aproxima a 0, x^2 se aproxima a 0 también y entonces $1/x^2$ se hace cada vez más grande. De hecho al ver la representación gráfica de la función confirmamos dicha conjetura.



Como los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número real, la conclusión es que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \text{ no existe}$$

Pero este comportamiento de los valores de $f(x)$ cuando x tiende a 0, requiere nuestra atención y una notación especial. En los casos en que los valores de $f(x)$ aumenten indefinidamente, si se escoge x lo bastante cerca de 0, lo indicaremos como $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$. Esta notación no significa que consideremos ∞ como un número, ni tampoco que exista el límite.

En general notaremos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

para indicar que los valores de $f(x)$ se hacen más grande (o *crecen sin límite*) a medida que x se acerca a x_0; y en forma análoga notaremos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

para indicar que los valores de $f(x)$ se hacen más grande en valores negativos a medida que x se acerca a x_0.

Consideremos nuevamente la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y analicemos el comportamiento de $f(x)$ cuando x crece, tanto en valores positivos, como en valores negativos:

x	1	5	10	100	1000	10000	$\to$	$+\infty$
$f(x)$	1	$0,04$	$0,01$	$0,0001$	$0,000001$	$0,00000001$	$\to$	???

y

x	-1	-5	-10	-100	-1000	-10000	$\to$	$-\infty$
$f(x)$	1	$0,04$	$0,01$	$0,0001$	$0,000001$	$0,00000001$	$\to$	???

Cuando x se vuelve más y más grande, sucede que los valores de $f(x)$ se acercan más y más a 0. De hecho, podemos aproximar los valores de $f(x)$ tanto como querramos a 0 aumentando x lo suficiente. Indicaremos este comportamiento como $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Cuando x crece en valor absoluto tomando valores negativos, el comportamiento de $f(x)$ es similar. Indicaremos este comportamiento como $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

En general notaremos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

para indicar que los valores de $f(x)$ se acercan a L a medida que x crece indefinidamente en valores positivos; y notaremos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

para indicar que los valores de $f(x)$ se acercan a L a medida que x crece indefinidamente en valor absoluto tomando valores negativos.

Definamos formalmente los límites analizados anteriormente.

Definición 2.34 *Sea f una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto (a, b) que contiene a x_0, salvo quizás en el mismo x_0. Entonces decimos que $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende a x_0 y escribimos*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

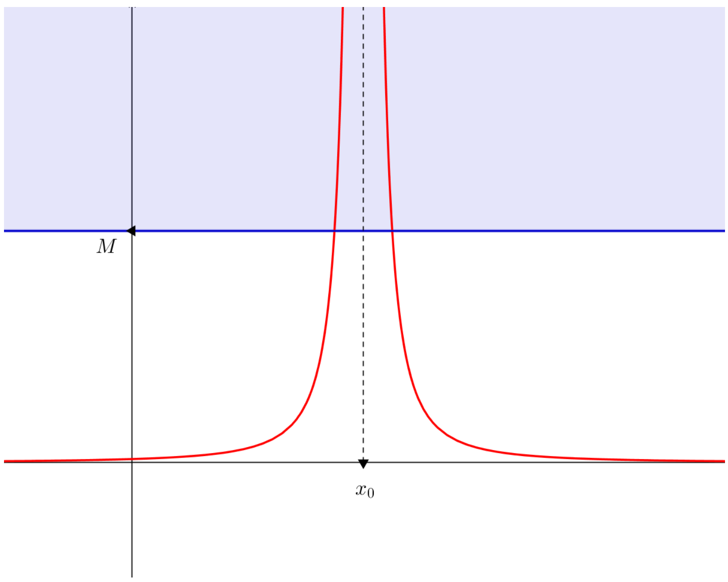
si para todo M número real positivo, existe un $\delta(M)$ también positivo, tal que

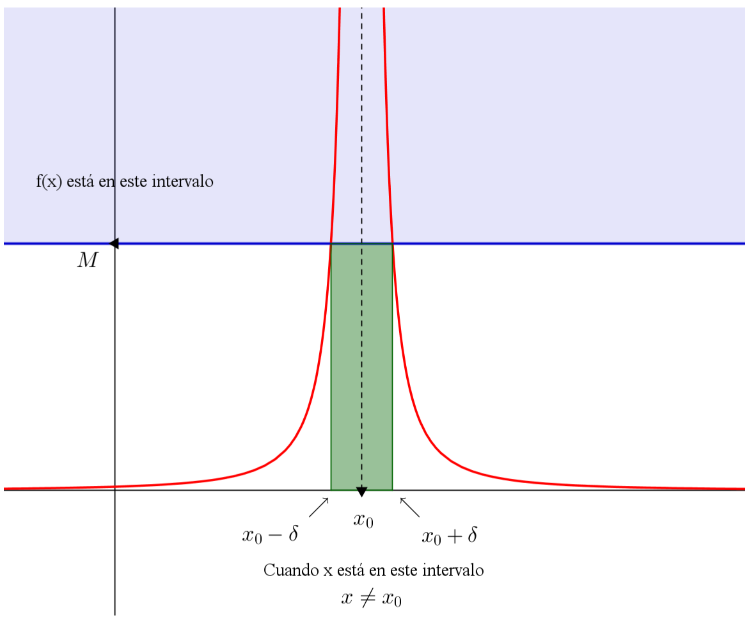
$$\textit{si } 0 < |x - x_0| < \delta \quad \textit{entonces} \quad f(x) > M$$

Una forma reducida de expresar esta definición es

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta(M) \text{ tal que si } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ entonces } f(x) > M}$$

Una interpretación geométrica de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ puede darse en términos de la representación gráfica de la función f:





Dado $M > 0$ trazamos un recta horizontal $y = M$ sobre la representación gráfica de la función f. El $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ si y sólo si podemos encontrar un número $\delta(M) > 0$ tal que si restringimos el valor de x a valores del intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y $x \neq x_0$, entonces la curva que representa a la función f queda por encima de la recta $y = M$, o lo que es lo mismo $f(x) > M$. No es difícil de observar en esta interpretación que si un valor de δ sirve para verificar la condición, también lo será cualquier valor menor de δ.

Es importante resaltar de que el proceso ilustrado anteriormente debe cumplirse para cada número M positivo, sin importar lo grande que sea.

Definición 2.35 *Sea f una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto (a, b) que contiene a x_0, salvo quizás en el mismo x_0. Entonces decimos que $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x tiende a x_0 y escribimos*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

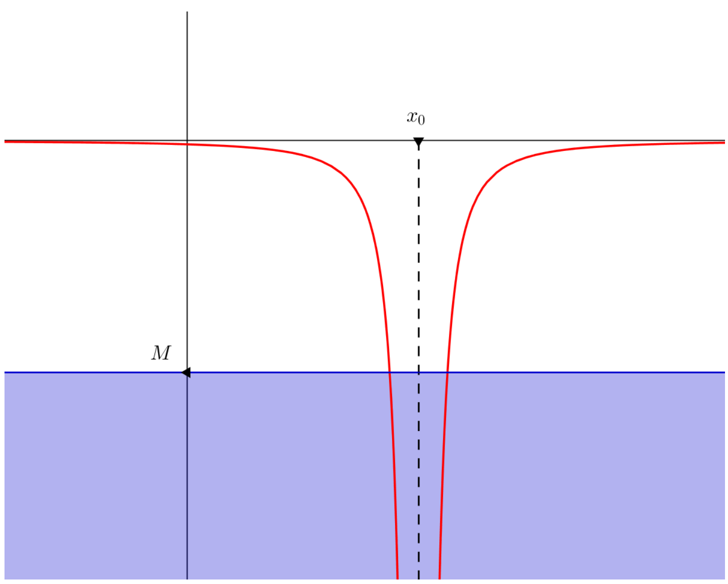
si para todo M número real negativo, existe un $\delta(M)$ positivo, tal que

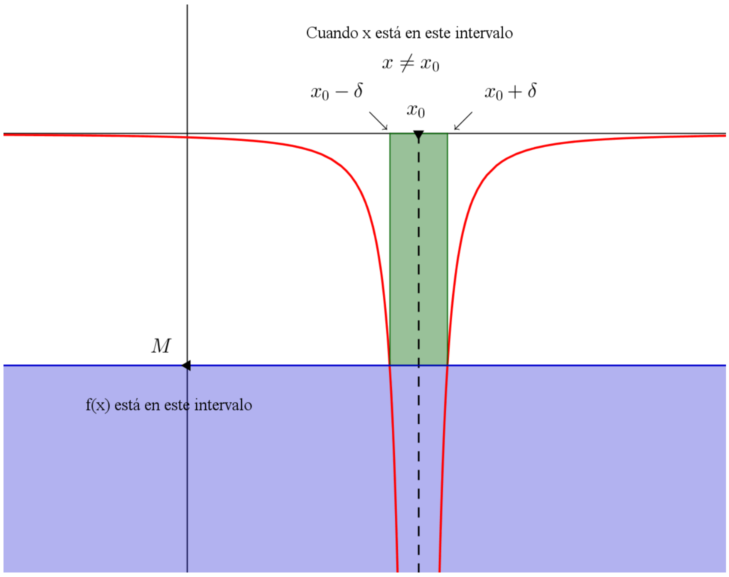
$$\textit{si } 0 < |x - x_0| < \delta \quad \textit{entonces} \quad f(x) < M$$

Una forma reducida de expresar esta definición es

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M < 0, \exists \delta(M) > 0 \text{ tal que si } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ entonces } f(x) < M}$$

Una interpretación geométrica de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ puede darse en términos de la representación gráfica de la función f:





Dado $M < 0$ trazamos un recta horizontal $y = M$ sobre la representación gráfica de la función f. El $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si y sólo si podemos encontrar un número $\delta(M) > 0$ tal que si restringimos el valor de x a valores del intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y $x \neq x_0$, entonces la curva que representa a la función f queda por debajo de la recta $y = M$, o lo que es lo mismo $f(x) < M$. Al igual que en la otra interpretación, no es difícil de observar que si un valor de δ sirve para verificar la condición, también lo será cualquier valor menor de δ.

Es importante resaltar de que el proceso ilustrado anteriormente debe cumplirse para cada número M negativo, sin importar lo grande en valor absoluto que sea.

Definición 2.36 *Sea f una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto $(a, +\infty)$. Entonces decimos que $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a $+\infty$ y escribimos*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

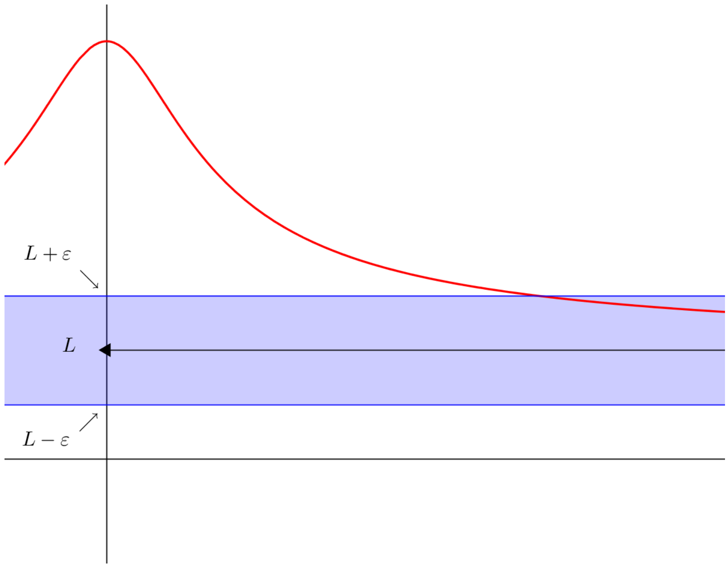
si para cada número ε positivo existe un correspondiente número M, tal que

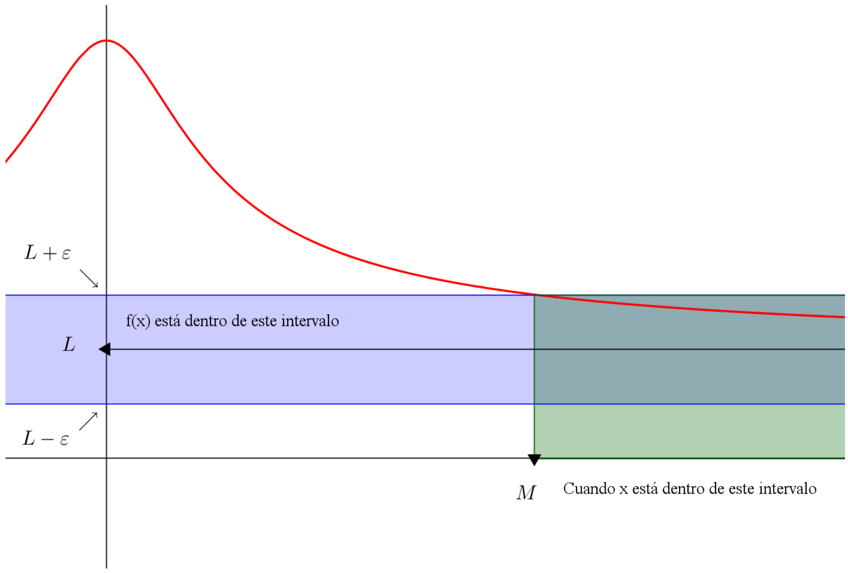
$$\textit{si } x > M \quad \textit{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Una forma reducida de expresar esta definición es

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) \text{ tal que si } x > M \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon}$$

Una interpretación geométrica de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ puede darse en términos de la representación gráfica de la función f:





Dado $\varepsilon > 0$, trazamos rectas horizontales $y = L-\varepsilon$ e $y = L+\varepsilon$ sobre la representación gráfica de la función f. Entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ si y sólo si podemos encontrar un número M tal que si restringimos el valor de x a valores del intervalo $(M, +\infty)$, entonces la curva que representa a la función f está entre las rectas $y = L-\varepsilon$ e $y = L+\varepsilon$, o lo que es lo mismo $f(x)$ pertenece al intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. No es difícil de observar en esta interpretación que si un valor de M sirve para verificar la condición, también lo será cualquier valor mayor.

Es importante resaltar que el proceso ilustrado anteriormente debe cumplirse para cada número ε positivo, sin importar lo pequeño que sea.

Definición 2.37 *Sea f una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto $(-\infty, a)$. Entonces decimos que $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a $-\infty$ y escribimos*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

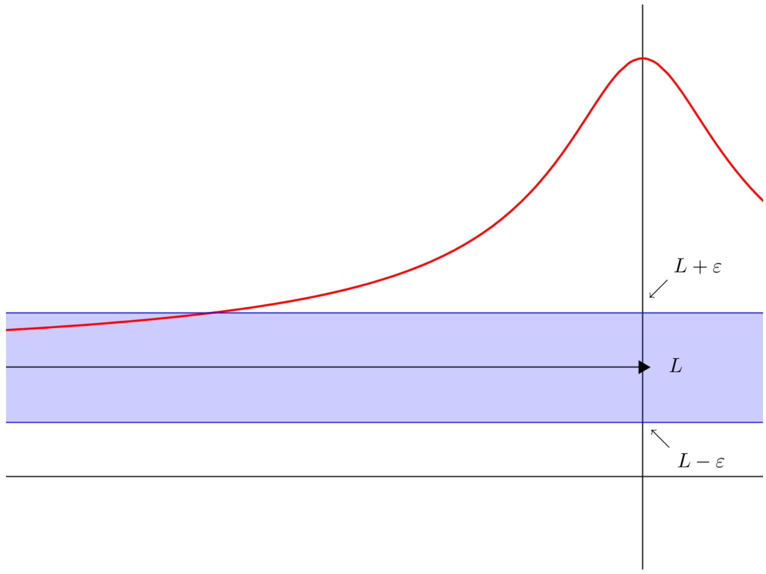
si para cada número ε positivo existe un correspondiente número M, tal que

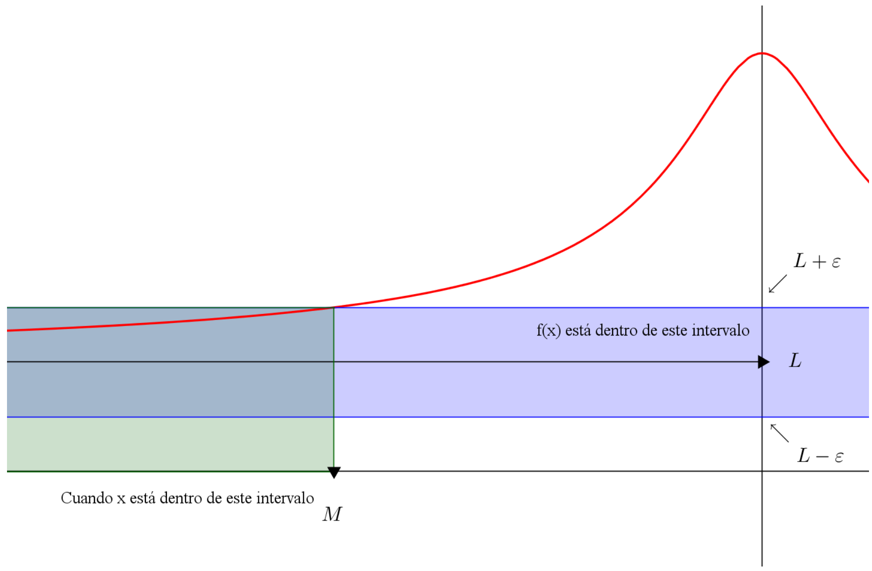
$$\text{si } x < M \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Una forma reducida de expresar esta definición es

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) \text{ tal que si } x < M \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon}$$

Una interpretación geométrica de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ puede darse en términos de la representación gráfica de la función f:





Dado $\varepsilon > 0$, trazamos rectas horizontales $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$ sobre la representación gráfica de la función f. Entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ si y sólo si podemos encontrar un número M tal que si restringimos el valor de x a valores del intervalo $(-\infty, M)$, entonces la curva que representa a la función f está entre las rectas $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$, o lo que es lo mismo $f(x)$ pertenece al intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. No es difícil de observar en esta interpretación que si un valor de M sirve para verificar la condición, también lo será cualquier valor menor.

Es importante resaltar de que el proceso ilustrado anteriormente debe cumplirse para cada número ε positivo, sin importar lo pequeño que sea.

Ejercicio 2.38 *Sea r un número natural, determinar los siguientes límites:*

$$\lim_{x\to 0^-} \tfrac{1}{x^r} \qquad \lim_{x\to 0^+} \tfrac{1}{x^r}$$

Ejercicio 2.39 *Sea a cualquier número real tal que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad y \qquad \lim_{x\to a} g(x) = c \neq 0$$

determinar el límite $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)}$ *(tener presente el signo de c).*

Ejercicio 2.40 *Sea a cualquier número real tal que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad y \qquad \lim_{x\to a} g(x) = c \neq 0$$

determinar los límites

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) \qquad \lim_{x\to a} f(x).g(x)$$

(tener presente el signo de c).

Ejercicio 2.41 *Sea a cualquier número real tal que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad y \qquad \lim_{x\to a} g(x) = c \neq 0$$

determinar los límites

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) \qquad \lim_{x\to a} f(x).g(x)$$

(tener presente el signo de c).

El siguiente teorema enuncia las propiedades algebraicas para los límites cuando x tiende a ∞ (son válidas tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$)

Teorema 2.42 *Sean f y g funciones tal que existen*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to\infty} g(x)$$

Entonces valen las siguientes igualdades:

i) $\lim_{x\to\infty} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to\infty} f(x) \pm \lim_{x\to\infty} g(x)$

ii) $\lim_{x\to\infty} [f(x).g(x)] = \lim_{x\to\infty} f(x). \lim_{x\to\infty} g(x)$

iii) $\lim_{x\to\infty} [f(x)/g(x)] = \lim_{x\to\infty} f(x)/ \lim_{x\to\infty} g(x)$ *si* $\lim_{x\to\infty} g(x) \neq 0$

iv) $\lim_{x\to\infty} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to\infty} f(x)\right]^n$ *para cada $n \in \mathbb{N}$*

v) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to\infty} f(x)}$ *para cada $n \in \mathbb{N}$ (en el caso de que n sea par, la propiedad vale si $\lim_{x\to\infty} f(x) > 0$)*

2.1.5. Casos de Indeterminación

Conocer el límite de dos funciones no siempre es información suficiente para determinar el límite de la función que resulta de operar ambas funciones. Estos límites son conocidos como casos de indeterminación. Por ejemplo si bien

$$\lim_{x\to 1}(x-1)=0 \qquad \lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$$

el límite

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$$

no puede determinarse en forma directa con estos datos. Que el límite sea indeterminado no significa que el límite no exista; en el ejemplo anterior no es difícil de verificar que $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{2}$.

Los casos de **indeterminación** son

$$\boxed{\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty-\infty \quad 0.\infty \quad 1^{\infty} \quad \infty^0 \quad 0^0}$$

En el próximo capítulo estudiaremos una herramienta que nos permitirá salvar las indeterminaciones en forma sencilla, e incluso poder resolver límites indeterminados de funciones más complejas.

A continuación desarrollaremos algunas técnicas específicas para salvar algunas indeterminaciones (los casos de indeterminación ∞^0 y 0^0 se estudiaran en el próximo capítulo).

Ejemplo 2.43 *Determinar el límite*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-6}$$

Si queremos determinar el límite utilizando las propiedades, nos encontramos con el problema que al evaluar la función en $x=2$, tanto el polinomio numerador como el polinomio denominador dan 0. Este es un límite indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Como el numerador y el denominador son polinomios que se anulan en $x=2$, ambos son divisibles por el binomio $x-2$. Esta observación nos ayudará a salvar la indeterminación:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+5)}{(x+3)}=\frac{7}{5}$$

Ejemplo 2.44 *Determinar el límite*

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$$

Si queremos determinar el límite utilizando las propiedades, nos encontramos con el problema que al evaluar la función en $x=2$, tanto el numerador como el denominador dan 0, pero a diferencia del ejemplo anterior el númerador no es un polinomio. La técnica para salvar *esta indeterminación es multiplicar (al numerador y al denominador) por el conjugado de la expresión que tiene el radical:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}.\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ejemplo 2.45 *Determinar el límite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{5x}$$

Si queremos determinar el límite utilizando las propiedades, nos encontramos con el problema que al evaluar la función en $x=0$, tanto el numerador como el denominador dan 0, pero el numerador no es un polinomio. Para salvar esta indeterminación utilizaremos la siguiente proposición, que enunciaremos pero no demostraremos.

Proposición 2.46

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\tfrac{\sin x}{x}=1}$$

Volviendo a nuestro ejemplo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{5x}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{4}{4}\frac{\sin 4x}{x}=\frac{4}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=\frac{4}{5}$$

Ejemplo 2.47 *Determinar el límite*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$$

Este también es un límite indeterminado, pero del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Como la función $f(x)$ es una función racional, salvaremos la indeterminación dividiendo al numerador y al denominador por x^k donde k es el mayor grado que aparece en el cociente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}.\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2-x-2}{x^2}}{\frac{5x^2+4x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{5x}{x^2}^2+\frac{4x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{3-0-0}{5+0+0}=\frac{3}{5}$$

Ejemplo 2.48 *Determinar el límite*

$$\lim_{x\to\infty}x^3-2x^2+3$$

Este es un ejemplo de límite indeterminado del tipo $\infty-\infty$. Debido a que la función en cuestión es polinomial, podemos salvar la indeterminación sacando factor común x^k, donde k es el grado del polinomio.

$$\lim_{x\to\infty}x^3-2x^2+3=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{3}{x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}\right)=\infty$$

Ejemplo 2.49 *Determinar el límite*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$$

Este es también un ejemplo de límite indeterminado del tipo $\infty-\infty$, pero la función es suma de fuciones racionales. Para salvar la indeterminación lo primero que haremos es buscar una expresión equivalente que sea cociente de dos funciones:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2\,(x+1)}{(x-1)\,(x+1)}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2\,(x+1)-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x^2-1}=\infty$$

Ejemplo 2.50 *Determinar el límite*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{2x}$$

Este también es un límite indeterminado, pero del tipo 1^∞. Para salvar esta indeterminación utilizaremos la siguiente proposición, que enunciaremos pero no demostraremos.

Proposición 2.51

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x=e}$$

Volviendo a nuestro ejemplo

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1+1-1}{x+2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1+1}{x+2}+\frac{-1}{x+2}\right)^{2x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+2)}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+2)}\right)^{2(x+2-2)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+2)}\right)^{2(x+2)-4}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+2)}\right)^{2(x+2)}.\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+2)}\right)^{-4}=$$

$$\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+2)}\right)^{-(x+2)}\right]^{-2}\cdot 1=e^{-2}$$

Ejemplo 2.52 *Determinar el límite*

$$\lim_{x\to\infty}\left[(x+7)\sqrt{\frac{1}{4x^2+3}}\right]$$

Este es un caso de indeterminación del tipo $0.\infty$. Este tipo de indeterminación se convierte en el tipo de indeterminación $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, obteniendo una expresión equivalente como sigue:

$$f\,(x)\,.g\,(x)=\frac{f\,(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

En nuestro ejemplo

$$\lim_{x\to\infty}\left[(x+7)\sqrt{\frac{1}{4x^2+3}}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{4x^2+3}}}{\frac{1}{x+7}}$$

Ejercicio 2.53 *Determinar el límite*

$$\lim_{x\to\infty}\left[(x+7)\sqrt{\frac{1}{4x^2+3}}\right]$$

2.1.6. Aplicaciones: Determinar Asíntotas

Analizar ciertos límites de una función nos brindan datos sobre la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

Definición 2.54 *La recta $x = c$ es una* ***asíntota vertical*** *de la función f, si se verifica al menos una de las siguientes condiciones:*

$$\lim_{x\to c^-}f(x)=-\infty \quad ó \quad \lim_{x\to c^-}f(x)=+\infty \quad ó \quad \lim_{x\to c^+}f(x)=-\infty \quad ó \quad \lim_{x\to c^+}f(x)=+\infty$$

Definición 2.55 *La recta $y = L$ es una* ***asíntota horizontal*** *de la función f, si se verifica al menos una de las siguientes condiciones:*

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=L \quad ó \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=L$$

Definición 2.56 *La recta $y = m.x+n$ es una* ***asíntota oblicua*** *de la función f, si se verifica al menos una de las siguientes condiciones:*

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=m & & \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m \\ & ó & \\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-mx=n & & \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-mx=n \end{array}$$

Ejercicio 2.57 *Determinar las asíntotas (si existen) de las siguientes funciones:*

$$a)\ f(x)=\tfrac{2x}{x-1} \qquad b)\ f(x)=\tfrac{4x^2+2x-2}{3x-1} \qquad c)\ f(x)=\tfrac{x-2}{x^2-4x+4}$$

2.2. Ejercicios

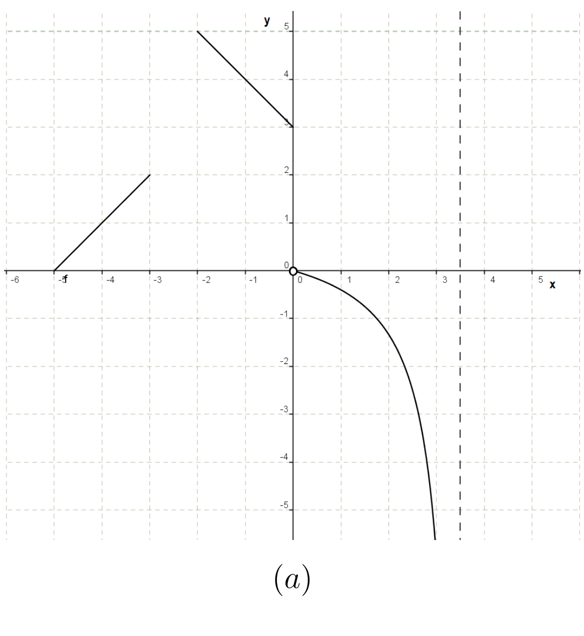
1. Hallar los límites indicados cuando existan.

$$a)\, f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x<1 \\ 2 & \text{si} \quad x=1 \\ 7-2x & \text{si} \quad x>1 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \lim\limits_{x\to 1} f(x) \\ \lim\limits_{x\to -2} f(x) \\ \lim\limits_{x\to 3} f(x) \end{array}$$

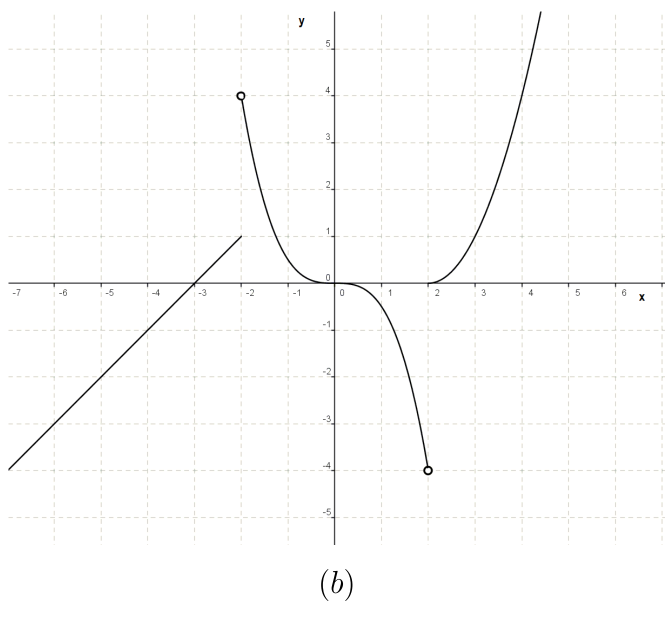
$$b)\, f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x\leq -2 \\ 3-x & \text{si} \quad x>-2 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \lim\limits_{x\to 0} f(x) \\ \lim\limits_{x\to -2} f(x) \\ \lim\limits_{x\to 3} f(x) \end{array}$$

$$c)\, f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ 8-2x & \text{si} \quad x>2 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \lim\limits_{x\to -3} f(x) \\ \lim\limits_{x\to -1,8} f(x) \\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) \end{array}$$

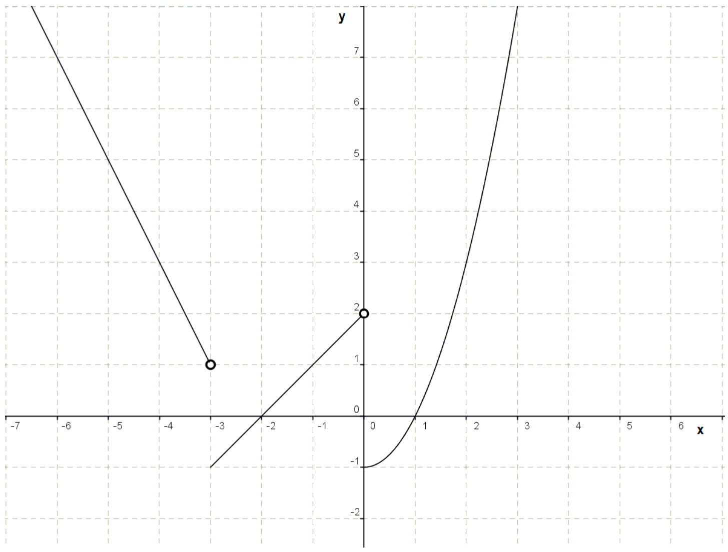
2. Dadas las siguientes representaciones gráficas de funciones definidas por ramas, determinar los límites laterales en los valores donde la función presenta un salto:



(a)



(b)



(c)

3. Bosquejar la gráfica de una función que satisfaga las siguientes condiciones:

   a) $Dom(f) = [0, 4]\,; f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1;$
   $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2; \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2; \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1; \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 1.$

   b) $Dom(f) = [0, 6]; f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = 2;$
   $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1; \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 3$

   c) $Dom(f) = (-5, 4)\,; f(0) = f(2) = f(4) = -2; \lim\limits_{x\to 2} f(x) = -2;$
   $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -2; \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

   d) $Dom(f) = \mathbb{R}; C^+ = (-\infty, 1)\,; \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 2; \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \dfrac{1}{2};$
   $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{2}; \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1; C^- = (1, \infty)$

   e) $Dom(f) = \mathbb{R}\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 4, \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2, \lim\limits_{x\to -2} f(x) = 2, f(3) = 3, f(-2) = 1$

   f) $Dom(f) = \mathbb{R}; \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1; \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1; \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0,$
   $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1; f(2) = 1; f(0)$ no existe

4. Demostrar la validez de los siguientes límites:

$a)\lim\limits_{x\to 2}(3x-4)=2$ $b)\lim\limits_{x\to 5}(x^2)=9$ $c)\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x+1}{x-2}=\frac{2}{3}$

$d)\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{x^2-1}{2x+1}=-\frac{3}{8}$ $e)\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2$ $f)\lim\limits_{x\to 2}(x^3)=8$

$g)\lim\limits_{x\to 1}|6x-1|=5$ $h)\lim\limits_{x\to 2}(|2x-4|+1)=1$ $i)\lim\limits_{x\to 3}(x^2+x-5)=7$

$j)\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{3x}=\frac{1}{6}$ $k)\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x+1}{2x-3}=7$ $l)\lim\limits_{x\to 0}\left[x.sen\left(\frac{1}{x}\right)\right]=0$

5. Bosquejar la gráfica de una función que satisfaga las siguientes condiciones:

$a)\ Dom(f)=\mathbb{R}-\{-4,3\};\ \lim\limits_{x\to -4}f(x)=\infty;\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\infty;\ \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$

$b)\ Dom(f)=\mathbb{R}-\{1,5\};\ \lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=6;\ \lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=-4;$

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty;\lim\limits_{x\to 5}f(x)=4;C^-=(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,3)$

6. Calcular los siguientes límites:

$a)\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$ $b)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ $c)\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2-1}{x+3}$

$d)\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^6-4096}{x+4}$ $e)\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{-2}-1}{x}$ $f)\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^4-16}$

$g)\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}}{h}$ $h)\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{3\cos x}{5\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$ $i)\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2+3x+9}$

$j)\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-3x-4}$

7. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$ calcular los siguientes límites:

$a)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$ $b)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{6x}$ $c)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(1-x)}$

$d)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}$ $e)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$ $f)\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x}$

8. Calcular los siguientes límites:

$a)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-1}{2x^3-3x+4}$ $b)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x}{x^3+1}$ $c)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x-3}{4x^3+1}$

$d)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$ $e)\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$ $f)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x}{4x+1+\sqrt{16x^2+x+1}}$

$g)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2}-\frac{x^2+1}{x-2}\right)$ $h)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+a)}-x\right)$ $i)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$

9. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, calcular los siguientes límites:

$a)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x$ $\quad b)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$ $\quad c)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$

$d)\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad e)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+1}$ $\quad f)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x-1}{7x+3}\right)^{5x-1}$

$g)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-2}\right)^x$ $\quad h)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+5}{4x-3}\right)^{6x+2}$ $\quad i)\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{n}{x}}$

10. Calcular los siguientes límites:

$a)\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ $\quad b)\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-25}$ $\quad c)\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

$d)\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ $\quad e)\lim\limits_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ $\quad f)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}$

$g)\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ $\quad h)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 4x\cos(3x-2)}{\sin(-2x)}$ $\quad i)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-6}\right)^{3x+1}$

$j)\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-3x-4}$ $\quad k)\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2x^2-5}$ $\quad l)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x-3}\right)^{2x+1}$

$m)\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{\pi x^3+3x}{\sqrt{2}x^3+7x}}$ $\quad ñ)\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\cot(\pi\theta)\sin\theta}{2\sec\theta}$ $\quad o)\lim\limits_{x\to\pi}\frac{2x^2-6x\pi+4\pi^2}{x^2-\pi^2}$

11. Calcular los siguientes límites:

$a)\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-|x-1|-1}{|x-1|}$ $\quad b)\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$ $\quad c)\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$ $\quad d)\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{|x-2|}\right)$

12. Para cada una de las siguientes funciones hallar, si existen, sus asíntotas:

$a)\ f(x)=\frac{-5x+3}{3-x}$ $\quad b)\ f(x)=\frac{x+2}{x^2-4}$ $\quad c)\ f(x)=\frac{2x-6}{x^2-9}$

$d)\ f(x)=\frac{4}{x^3-4x^2+3x}$ $\quad e)\ \frac{x^3-2}{2x^2-1}$ $\quad f)\ f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x-1} & \text{si } x<1\\ 3 & x=1\\ \frac{2x^2}{x^2-1} & \text{si } x>1\end{cases}$

13. Sea M un número real y f una función tal que $|f(x)|\leq M$ para toda x del dominio de f. Emplear el teorema del emparedado para demostrar que $\lim\limits_{x\to 0}x^2.f(x)=0$.

2.3. Continuidad

2.3.1. Definición Formal

Durante el curso de ingreso y quizás también en la escuela secundaria han definido informalmente el concepto de **Función continua**, como

una función f es continua si es posible dibujarla sin levantar el lápiz del papel

Es claro que esta definición, si bien es útil para comprender el concepto de continuidad, es imprecisa y poco formal. El objetivo en esta sección es presentar la definición formal de continuidad y estudiar las principales propiedades de las funciones continuas.

En primer lugar enunciaremos la definición puntual de continuidad, para luego extenderla a la definición de continuidad en un intervalo.

Definición 2.58 *Sea f una función definida en un intervalo abierto (a,b) de $\mathbb{R}$ y sea $x_0 \in (a,b)$. Diremos que la función f es **continua** en x_0 si y sólo si:*

i) *Existe $f(x_0)$.*

ii) *Existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (es un número real).*

iii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

*Si al menos una de estas condiciones no se cumple, la función f se dirá **discontinua** en x_0 ó que f tiene una **discontinuidad** en x_0.*

Observemos que la condición iii) de la definición anterior, tiene como información implicita las condiciones i) y ii). Por lo que, si tenemos presente esta información implicita, podemos expresar esta definición en forma reducida como:

$$\boxed{f \text{ es continua en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

De acuerdo con la definición de límite, la continuidad de una función f en x_0 se puede reescribir de la siguiente forma:

Definición 2.59 *Sea f una función definida en un intervalo abierto (a,b) de $\mathbb{R}$ y sea $x_0 \in (a,b)$. Diremos que la función f es **continua** en x_0 si y sólo si para cada número real positivo ε, existe un correspondiente número real positivo δ tal que*

$$\textit{si } |x - x_0| < \delta \quad \textit{entonces} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Una forma reducida de expresar esta definición es

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) \text{ tal que si } |x - x_0| < \delta \text{ entonces } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}$$

La definición precedente afirma que la función f es continua en x_0 si f tiende a $f(x_0)$ cuando x tiende a x_0. Es decir que la distancia entre $f(x)$ y $f(x_0)$ puede ser arbitrariamente pequeña, restringiendo los valores de x a aquellos que esten a una distancia conveniente de x_0.

Ejemplo 2.60 *Sea f la función definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 \text{ si } -1 < x < 1 \\ 2x - 4 \text{ si } 1 \leq x < 2 \\ 5 - x^2 \text{ si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

Investigar la continuidad de la función f en $x = 1$ y $x = 2$.

Como $f(1) = -2$ y

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x - 4 = -2 = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 - 3$$

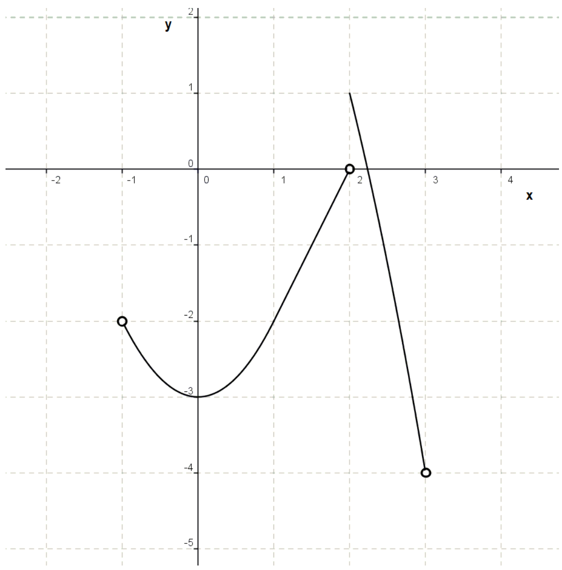
f resulta continua en $x = 1$.

Por otro lado $f(2) = 1$, pero el límite cuando x tiende a 2 no existe pues

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} 5 - x^2 = 1 \neq \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 2x - 4 = 0$$

Por lo que la función es discontinua en $x = 2$.

Podemos verificar nuestro análisis observando la representación gráfica de la función:



Ejercicio 2.61 *Determinar si las siguientes funciones son continuas en los valores indicados. Representar gráficamente cada función y verificar la conclusión obtenida.*

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = abs(x - 2) + 3$ *en* $x_0 = 2$.

b) $f : \mathbb{R} - \{5\} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \frac{x^2-25}{x-5} \quad en\ x_0 = 5.$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases} \quad en\ x_0 = 0.$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \neq 2 \\ 6 & si \quad x = 2 \end{cases} \quad en\ x_0 = 2.$

Cuando una función es discontinua en x_0, es porque no se cumple alguna/s (puede ser más de una) de las condiciones requeridas en la definición de continuidad. Las distintas discontinudades presentan características que las diferencian de las otras, por lo que podemos realizar una primera clasificación de las discontinuidades, en evitables y no evitables:

- La función f presenta una **discontinuidad evitable** en x_0 si: existe el límite de la función en x_0, pero no existe $f(x_0)$; o existe $f(x_0)$ y también el límite de la función en x_0, pero no coinciden.

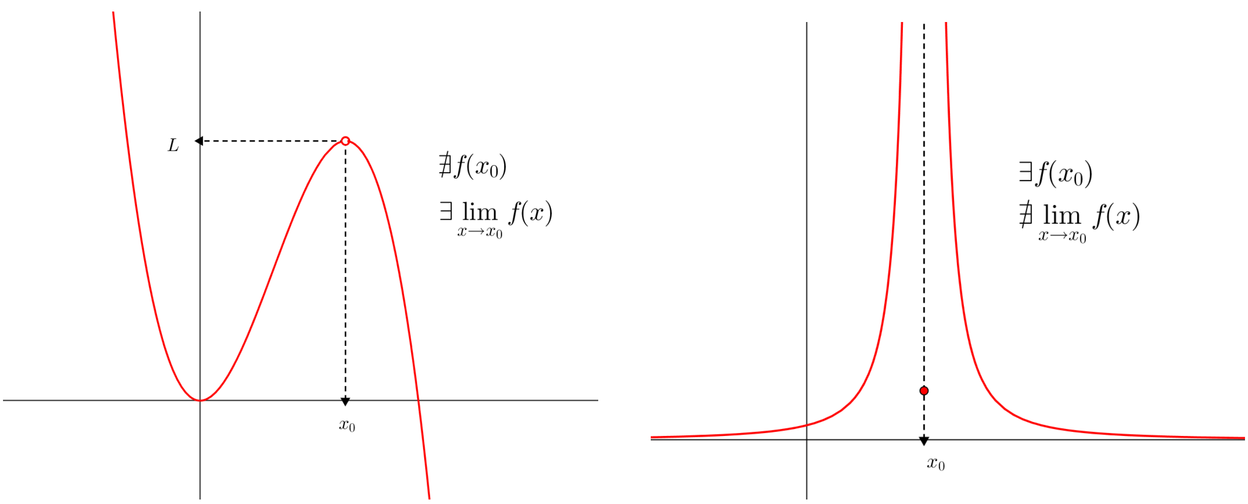
- En cualquier otro caso f presenta una **discontinuidad no evitable** en x_0.

En ciertas bibliografías se presentan clasificaciones más exhaustivas. En nuestro curso sólo realizaremos la clasificación en evitables y no evitables. La discontinuidad evitable recibe su nombre debido a que es posible redefinir la función f para que sea continua en x_0. La nueva función continua en x_0 es

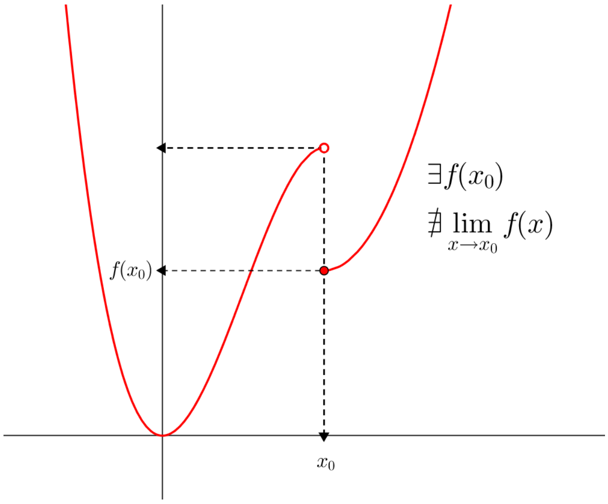
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases}$$

Observemos que si existe $f(x_0)$, $Dom(g) = Dom(f)$. Pero si no existe $f(x_0)$, $Dom(g) = Dom(f) \cup \{x_0\}$.

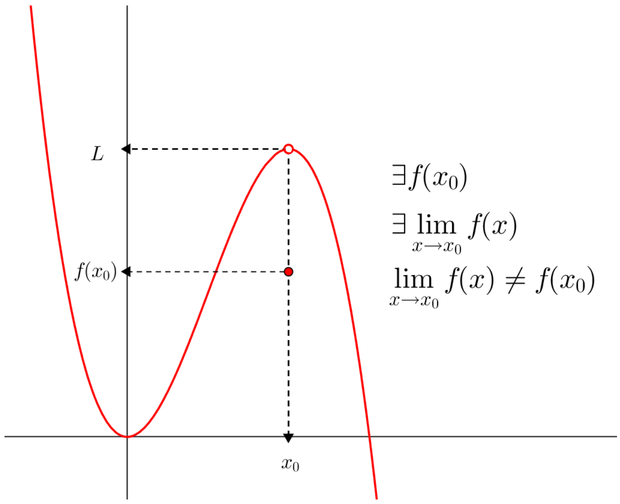
A continuación mostraremos diferentes representaciones gráficas de funciones discontinuas en $x = x_0$, cada una de las cuales presenta características distintas:



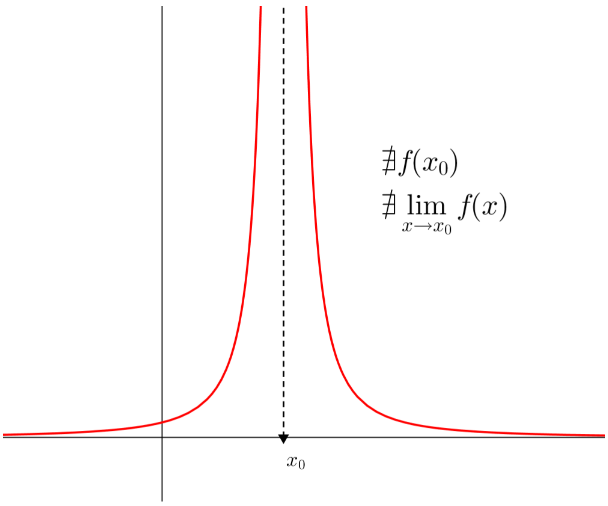
(a) (b)



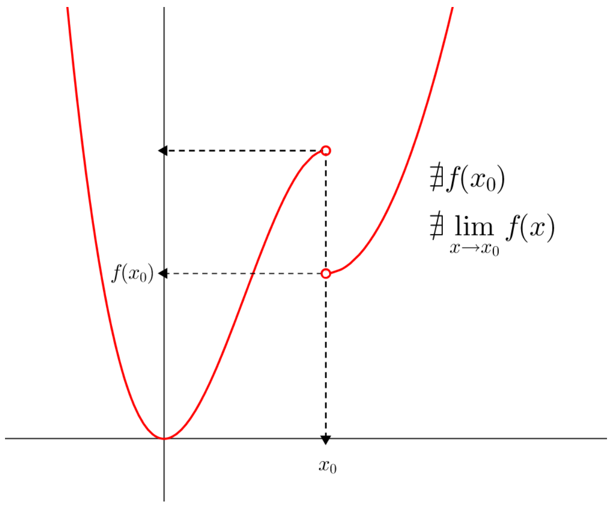
(c)



(d)



(e)



(f)

Las funciones representadas en las figuras (a) y (d) presentan discontinuidades evitables en x_0, mientras las restantes funciones presentan discontinuidades inevitables en x_0.

Ejercicio 2.62 *Clasificar las discontinuidades de las funciones del ejercicio 2.61. En los casos posibles redefinir la función para que sea continua en x_0.*

A continuación enunciaremos algunas propiedades algebriacas de funciones continuas en un número real, que nos permitiran justificar la continuidad de funciones complejas.

Teorema 2.63 *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas en x_0 y k un número real. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

i) $k.f$ es continua en x_0.

ii) $f \pm g$ es continua en x_0.

iii) $f.g$ es continua en x_0.

iv) $\frac{f}{g}$ es continua en x_0, si $g(x_0) \neq 0$.

Teorema 2.64 *Sean f y g funciones tal que $Img\,(f) \subseteq Dom\,(g)$. Si f es una función continua en x_0 y g una función continua en $f(x_0)$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en x_0.*

La demostración de estos teoremas se deja para el lector interesado. Hay que utilizar la definición de continuidad y las propiedades algebraicas de límite.

Ejemplo 2.65 *Investigar la continuidad de la función* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \;\; / \;\; f\,(x) = \sqrt{x}$ *en* $x = 0$.

i) $f(0) = \sqrt{0} = 0$

ii) *Cuando queremos investigar la existencia del límite cuando x tiende a 0, vemos que sólo podemos analizar el límite por derecha, debido a que los valores menores que 0 no pertenecen al dominio de la función.*

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

iii) *Aunque no podamos analizar el límite de la función cuando x tiende a 0 por izquierda, se cumple que*

$$f\,(0) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}$$

Entonces ¿es continua la función en $x = 0$?

El análisis de la continuidad en ciertos valores del dominio de algunas funciones (como el ejemplo anterior), requieren que incorporemos la definición de continuidad por derecha y continuidad por izquierda, de forma análoga a la definición de continuidad.

Definición 2.66 *Se dice que la función f* ***es continua por la derecha en el valor*** *x_0, si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Existe $f(x_0)$.*
2. *Existe $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$.*
3. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Definición 2.67 *Se dice que la función f* ***es continua por la izquierda en el valor*** *x_0, si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Existe $f(x_0)$.*

2. *Existe* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

3. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Ahora estamos en condiciones de definir cuando una función es continua en un intervalo.

Definición 2.68 *Diremos que una función f es **continua en el intervalo** (a, b) si es contínua en cada x_0 pertenecientes al intervalo (a, b).*

Definición 2.69 *Diremos que una función f es **continua en el intervalo** $[a, b]$ si se cumplen las siguientes condiciones:*

i) *f es continua en cada $x_0 \in (a, b)$.*

ii) *f es continua por la derecha en a.*

iii) *f es continua por la izquierda en b.*

Definición 2.70 *Diremos que f es una **función continua**, si f es continua en todos los valores de su dominio.*

Ejercicio 2.71 *Estudiar si las siguientes funciones son continuas en los intervalos indicados:*

a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ *en* $[-2, 2]$.

b) $f(x) = \ln(x - 2)$ *en* $(2, +\infty)$.

c) $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & si \quad x < -1 \\ x - 1 & si \quad -1 \leq x < 3 \\ x^2 + 1 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$ *en* $[-1, 3]$.

2.3.2. Propiedades de funciones continuas

Es importante que estudiemos algunas propiedades algebraicas de las funciones continuas. Estas propiedades nos permitirán justificar la continuidad de ciertas funciones, de manera sencilla, conociendo la continuidad de otras.

Teorema 2.72 *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas y k un número real. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

i) $k.f$ es continua.

ii) $f \pm g$ es continua.

iii) $f.g$ es continua.

iv) $\frac{f}{g}$ es continua en $\{x \in Dom\,(f) \cap Dom\,(g) : g(x) \neq 0\}$.

v) Si f y g son funciones contínuas tal que $Img\,(f) \subseteq Dom\,(g)$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua.

La demostración de este teorema se deja para el lector interesado. Hay que utilizar la definición de continuidad y las propiedades algebraicas de límite.

Teorema 2.73 *Las siguientes funciones son continuas:*

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f\,(x) = k$ *para cualquier* k *número real.*

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f\,(x) = x^n$ *para cualquier* n *número natural.*

iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f\,(x) = a^n$ *para* a *positivo distinto de* 1.

iv) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \ / \ f\,(x) = \ln\,(x)$.

v) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f\,(x) = sen\,(x)$.

vi) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f\,(x) = cos\,(x)$.

vii) $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \ / \ f\,(x) = tg\,(x)$.

La demostración de estos teoremas se deja para el lector interesado.

Ejercicio 2.74 *Justificar la validez de las siguientes afirmaciones:*

a) *Las funciones polinómicas son continuas.*

b) *Las funciones racionales* $f\,(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *son continuas en* $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$.

c) *La función* $f\,(x) = 4.sen^2\,(x) + cos\,(x) - 3$ *es continua.*

d) *La función* $f\,(x) = \ln\,(x) + tg\,(x)$ *es continua en* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

e) *La función* $f\,(x) = \frac{3.sen^2(x)+2}{sen(x)-1}$ *es continua en* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

2.3.3. Continuidad en intervalos cerrados

En esta sección enunciaremos y demostraremos teoremas que establecen propiedades importantes de funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ (en los extremos entendemos que continuidad significa continuidad por izquierda y por derecha).

Para Pensar: *Determinar las raíces reales de la siguiente función polinómica*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f\,(x) = x^3 - 3x - 9$$

Como habrán estudiado en el curso de ingreso, el Teorema Fundamental del Álgebra establece que todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces complejas (las raíces reales pueden ser menos). En nuestro caso la función f puede tener a lo sumo 3 raíces reales, y como el grado del polinomio es impar, al menos tiene una raíz real (esto se debe a que si un número complejo es raíz, también lo es su conjugado). Comencemos el proceso de búsqueda. Contamos con las herramientas estudiadas en el curso de ingreso: Teorema del resto y Lema de Gauss (IMPORTANTE: el lema de Gauss nos brindaba las posibles raíces **racionales** del polinomio).

Por lo que las posibles raíces racionales del polinomio $f(x) = x^3 - 3x - 9$ son:

$$-1, 1, -3, 3, -9, 9$$

pero al evaluar los números en el polinomio obtenemos

$$f(-1) = -7 \qquad f(1) = -11 \qquad f(-3) = -27 \qquad f(3) = 9 \qquad f(-9) = -711 \qquad f(9) = 693$$

por lo que ninguno de los candidatos es raíz. Entonces las raíces son números irracionales o imaginarios puros, pero al menos una debe ser irracional. Entonces ¿contamos con alguna herramienta que nos brinde datos de las raíces irracionales?

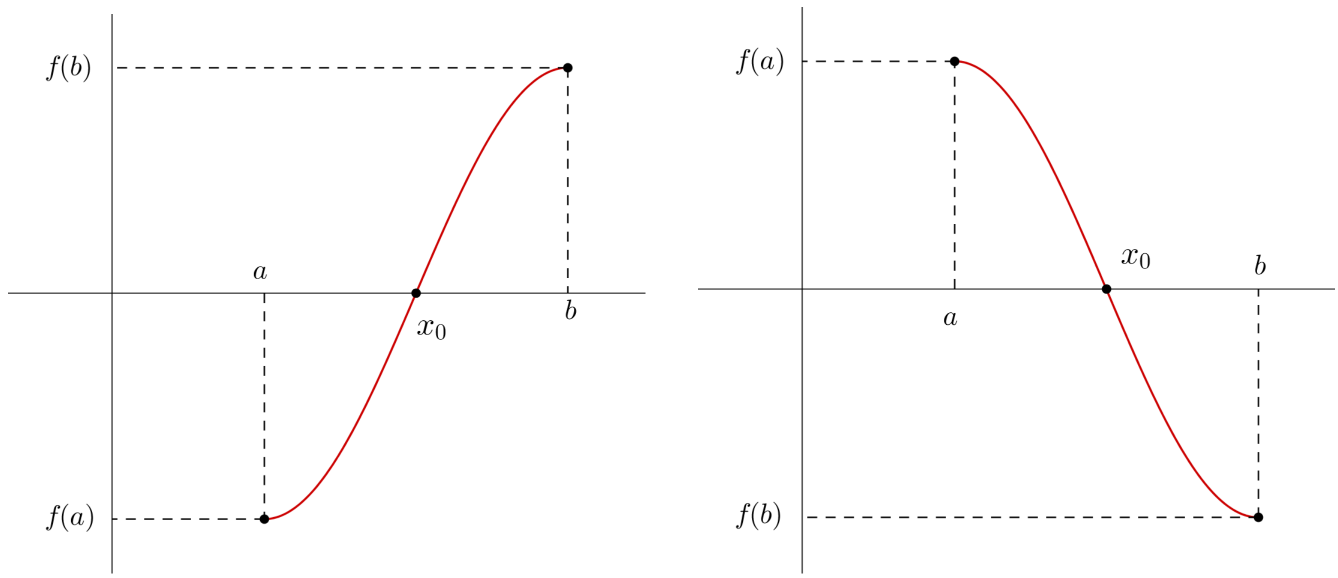
La determinación de las raíces de una ecuación es uno de los problemas más antiguos en matemáticas y se han realizado un gran número de esfuerzos en este sentido. Determinar la solución de una ecuación $f(x) = 0$ puede llegar a ser un problema muy difícil. Si f es una función polinómica de grado 1 ó 2, conocemos expresiones simples que nos permitirán determinar sus raíces. Para polinomios de grado 3 ó 4 es necesario emplear métodos complejos y laboriosos. Sin embargo, si f es de grado mayor que cuatro o bien no es polinómica, no hay ninguna fórmula conocida que permita determinar la solución de dicha ecuación (excepto en casos muy particulares).

La mayoría de los métodos utilizados para el cálculo de las raíces de una ecuación son iterativos y se basan en modelos de aproximaciones sucesivas. Estos métodos trabajan del siguiente modo: a partir de una primera aproximación al valor de la raíz, determinamos una aproximación mejor aplicando una determinada regla de cálculo y así sucesivamente hasta que se determine el valor de la raíz con el grado de aproximación deseado.

El método más elemental y antigüo se denomina **Método de Bisección** y se basa en el Teorema de Bolzano, que a continuación enunciaremos.

Teorema 2.75 (Bolzano) *Sea f una función continua definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos entonces existe al menos un número real x_0 pertene-*

ciente al intervalo (a,b), *es decir* $a < x_0 < b$, *tal que* $f(x_0) = 0$.



Demostración 2.76 *Supongamos* $f(a) < 0$ *y* $f(b) > 0$ *(como en la primer figura). Consideremos el conjunto*

$$A = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$$

este conjunto está acotado superiormente por b, *y es no vacío pues* $a \in A$. *Entonces por propiedad de conjuntos acotados (ver Anexo B) existe un número real* x_0 *que es el supremo del conjunto* A

$$x_0 = \sup A \quad y \quad x_0 \in [a,b]$$

Analicemos el signo de la imagen de x_0, *es decir el signo de* $f(x_0)$. *Por ser* $f(x_0)$ *un número real debe cumplir alguna de las siguientes opciones:*

$$f(x_0) < 0 \qquad f(x_0) = 0 \qquad f(x_0) > 0$$

Analicemos la factibilidad de cada una de ellas:

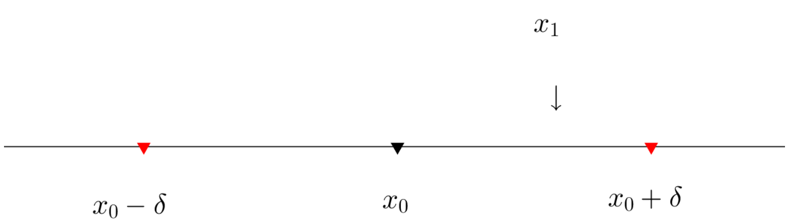
1. *¿Puede ser* $f(x_0) < 0$*? Supongamos que* $f(x_0) < 0$. *Utilizando la proposición 2.96 del Anexo B podemos asegurar que existe* δ *positivo tal que*

$$si \ |x - x_0| < \delta \quad sucede \ que \quad f(x) < 0$$

   es decir

$$si \ x_0 - \delta < x < \delta + x_0 \quad sucede \ que \quad f(x) < 0$$

   Si consideramos un número real x_1 *tal que* $x_0 < x_1 < x_0 + \delta$



por la condición anterior sucede que $f(x_1) < 0$, así $x_1 \in A$. Pero esto es una contradicción, pues

$$x_0 < x_1 \qquad x_1 \in A \qquad x_0 = \sup A$$

es decir x_1 resulta un elemento del conjunto mayor que el supremo. ***Absurdo.***

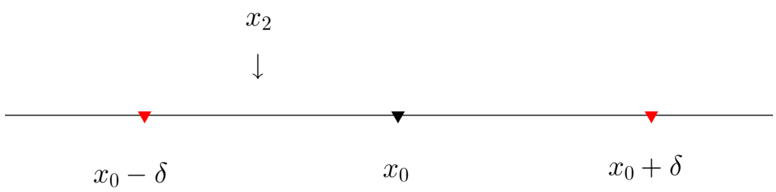
2. *¿Puede ser $f(x_0) > 0$? Supongamos que $f(x_0) > 0$. Utilizando la proposición 2.96 del Anexo B podemos asegurar que existe δ positivo tal que*

$$\text{si } |x - x_0| < \delta \quad \text{sucede que} \quad 0 < f(x)$$

es decir

$$\text{si } x_0 - \delta < x < \delta + x_0 \quad \text{sucede que} \quad 0 < f(x)$$

Si consideramos un número real x_2 tal que $x_0 - \delta < x_2 < x_0$



x_2 no puede ser cota superior de A, pues es menor que el supremo de A (la menor de las cotas superiores); luego por propiedades de conjuntos acotados debe existir $x_3 \in A$ tal que $x_2 < x_3 \leq x_0$. Así

$$f(x_3) > 0 \text{ debido a que } x_0 - \delta < x_3 < x_0 \quad y \quad f(x_3) < 0 \text{ debido a que } x_3 \in A$$

Absurdo.

Como no puede suceder que $f(x_0) < 0$ ni $f(x_0) > 0$, entonces $f(x_0) = 0$. Además $x_0 \neq a$, pues $f(a) < 0$ y $x_0 \neq b$, pues $f(b) > 0$.

Resumiendo: hemos concluido que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = 0$.

Método de Bisección: El método consiste en considerar un intervalo inicial $[a_0, b_0]$ tal que $f(a_0)$ y $f(b_0)$ tengan distinto signo. Por el Teorema de Bolzano podemos asegurar que la función f tiene una raíz en el intervalo (a_0, b_0). Luego partimos este intervalo en dos

$$\left[a_0, \tfrac{a_0+b_0}{2}\right] \quad \text{y} \quad \left[\tfrac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$$

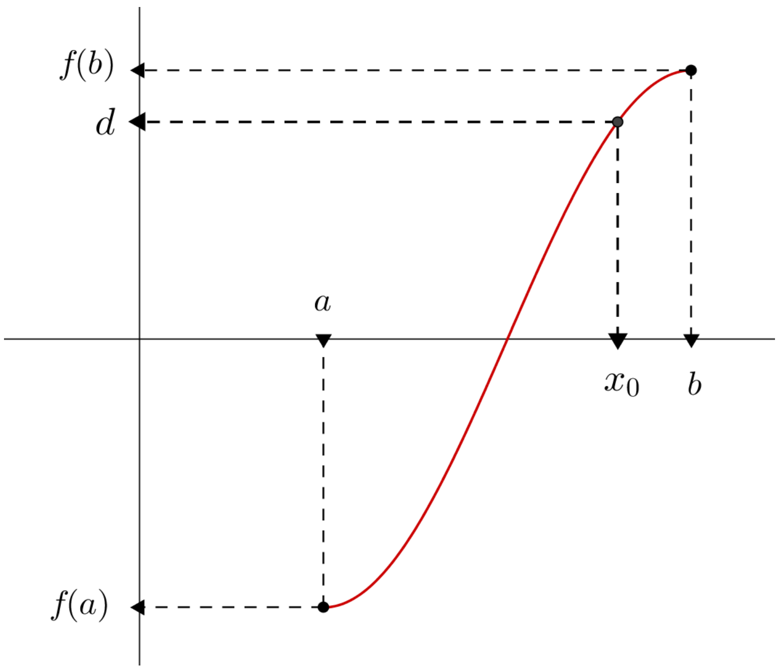
y determinamos en cúal subintervalo está la raíz. Continuamos iterativamente el procedimiento hasta conseguir la aproximación de la raíz con la precisión deseada.

Ejercicio 2.77 *Utilizar el método de bisección para completar la búsqueda de las raíces reales de la función polinómica*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = x^3 - 3x - 9$$

Ejercicio 2.78 *Un alpinista decide subir a una montaña. Sale a las 9 de la mañana y llega a la cumbre a las 7 de la tarde. Allí pasa la noche y a la mañana siguiente, a las 9 de la mañana, emprende el regreso por el mismo sendero y llega al punto de partida nuevamente a las 7 de la tarde. ¿Habrá algún punto del camino en el que el alpinista estuvo a la misma hora en los dos días?*

Teorema 2.79 (del Valor Intermedio) *Sea f una función continua definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(a) < f(b)$. Si d es cualquier número tal que $f(a) < d < f(b)$, entonces existe un número $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = d$.*



El teorema del Valor Intermedio afirma que una función continua en un intervalo cerrado toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$. Este hecho se ilustra en la representación gráfica anterior y no es difícil de ver que el teorema de Bolzano es un caso particular. Observemos que puede existir más de un valor $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = d$.

Se puede interpretar gráficamente este teorema: Si tomamos cualquier recta horizontal $y = d$ comprendida entre las rectas $y = f(a)$ e $y = f(b)$, entonces esta recta interseca en al menos una vez a la gráfica de la función f.

Una hipótesis fundamental del teorema es la continuidad de la función f; en general el teorema no se cumple para funciones que no sean continuas.

A continuación presentamos una demostración del teorema.

Demostración 2.80 *Consideremos la función* $g(x) = f(x) - d$. *La función* g *es continua en el intervalo cerrado* $[a,b]$, *debido a que es resta de funciones continuas* ($f(x)$ *por hipótesis y* d *por ser una función constante). Como*

$$f(a) < d < f(b) \Longrightarrow f(a) - d < 0 < f(b) - d$$

por lo que

$$g(a) = f(a) - d < 0 \quad y \quad g(b) = f(b) - d > 0$$

Luego la función g *cumple las condiciones del Teorema de Bolzano en el intervalo* $[a,b]$, *entonces existe* $x_0 \in (a,b)$ *tal que* $g(x_0) = 0$. *Luego*

$$0 = g(x_0) = f(x_0) - d \Longrightarrow f(x_0) = d$$

Además $x_0 \neq a$, *porque sino sería* $0 = g(x_0) = g(a) = f(a) - d$, *es decir* $f(a) = d$ *lo que es una contradicción. En forma análoga se demuestra que* $x_0 \neq b$.

Resumiendo: hemos determinado $x_0 \in (a,b)$ *tal que* $f(x_0) = d$, *que era lo que queríamos probar.*

El último resultado de esta sección será de utilidad para demostrar la continuidad de muchas funciones (conocidas por nosotros pero que no teníamos hasta ahora forma de demostrar su continuidad).

Teorema 2.81 (Continuidad de la función inversa) *Sea* f *una función continua en* $[a,b]$.

Si f *es estrictamente creciente en* $[a,b]$, *entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ *es biyectiva.*
2. $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$ *es continua.*

Si f *es estrictamente decreciente en* $[a,b]$, *entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $f : [a,b] \to [f(b), f(a)]$ *es biyectiva.*
2. $f^{-1} : [f(b), f(a)] \to [a,b]$ *es continua.*

La demostración se deja para el lector interesado.

Ejercicio 2.82 *Justificar la validez de las siguientes afirmaciones:*

a) *La función* $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = \sqrt{x}$ *es continua.*

b) *La función* $f : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ / \ f(x) = arcsen\,(x)$ *es continua.*

c) *La función* $f : [-1,1] \to [0,\pi] \ / \ f(x) = arccos\,(x)$ *es continua.*

d) *La función* $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ / \ f(x) = arctg\,(x)$ *es continua.*

2.4. Ejercicios

1. Determinar si las siguientes funciones son continuas en $x = 2$, justificando la respuesta. En el caso de que las funciones sean discontinuas, clasificar la discontinuidad.

   a) $f(x) = 4x^2 - 2x + 12$ *b*) $f(x) = \frac{8}{x-2}$ *c*) $f(x) = \frac{3x^2}{x^2-4}$

   d) $f(x) = \sqrt{x-1}$ *e*) $f(t) = floor\,(t)$ *h*) $f(t) = floor\left(t - \frac{1}{2}\right)$

   i) $g(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ *j*) $h(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 12 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$ *k*) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x < 2 \\ x^2+1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

   l) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

2. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en el valor indicado:

   a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, \text{ si } x \neq 3 \\ 6, \text{ si } x = 3 \end{cases}$ en $x_0 = 3$ *b*) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, \text{ si } x \neq 1 \\ 3, \text{ si } x = 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

   c) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x_0 = 0$ *d*) $f(x) = \begin{cases} -1, \text{ si } x < 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \\ x, \text{ si } x > 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$

   e) $f(x) = \frac{9.x^2-4}{3.x-2}$ en $x_0 = -\frac{2}{3}$ *f*) $f(x) = \begin{cases} 5, \text{ si } x = 3 \\ \frac{x^2-4.x+3}{x-3}, \text{ si } x \neq 3 \end{cases}$ en $x_0 = 3$

3. Determinar el valor de a para que la siguiente función sea continua en 3.

   a) $f(x) = \begin{cases} \frac{3.x^3-9.x^2+4.x-12}{x^2-2.x-3} & \text{si} \quad x \neq 3 \\ a & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}$ *b*) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} & \text{si} \quad x \neq 3 \\ a & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}$

4. Determinar si las siguientes funciones son continuas. Para las funciones discontinuas, especificar el valor de la discontinuidad y clasificarla.

   a) $f(x) = x^2 \sin x$ *b*) $f(x) = \frac{x^3+3x+7}{x^2-6x+8}$

   c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 1 & \text{si} \quad -1 < x \leq 2 \\ 2x + 6 & \text{si} \quad 2 < x < 3 \\ x^3 - 15 & \text{si} \quad 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$ *d*) $f(x) = \begin{cases} 3.x^2 + 2 & \text{si} \quad x \leq -2 \\ \frac{(x-1)(3.x-8)}{x^2-1} & \text{si} \quad -2 < x \leq 5 \\ 2.x - 3 & \text{si} \quad x > 5 \end{cases}$

   e) $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ *f*) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

   g) $f(x) = sen\frac{x^2-1}{x+1}$ *h*) $f(x) = floor\,(x + 1/2)$

5. Determinar los valores de a y b de modo que las siguientes funciones sean continuas:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x<1 \\ ax+b & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 3x & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases} \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ ax+b & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 1-x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$c)\ f(x) = \begin{cases} 2.x+3 \text{ si } x<1 \\ a.x+b \text{ si } 1 \leq x \leq 5 \\ 2.x-5 \text{ si } x>5 \end{cases}$$

6. Dada la función
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq a \\ a+2 & \text{si} \quad x > a \end{cases}$$
con dominio $Dom\,(f) = [-a-1, a+1]$ ¿Es f continua para cualquier valor de a?. Graficar la función.

7. Justificar porqué las siguientes funciones son continuas:
$$a)\ f(x) = \sqrt{x^2+3x^4+1} \qquad b)\ f(x) = sen\left(\tfrac{x^2+3x-1}{x^2+1}\right) \qquad c)\ f(x) = 3^{\frac{x-1}{x^2+3}}$$

8. Bosquejar la gráfica de una función f que satisfaga las condiciones siguientes:

   a) Su dominio es $[-2, 2]$; $f(-2) = f(-1) = f(1) = f(2) = 1$; es discontinua en -1 y 1.

   b) Su dominio es $\mathbb{R} - \{-1; 4\}$; $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ no existe; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

   c) Su dominio es $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$; $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to3^+} f(x) = -\infty$; es discontinua en 0.

   d) Su dominio es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$; $\lim\limits_{x\to3} \lim_{x\to3} f(x)$ no existe; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

9. Utilizar el Teorema del Valor Intermedio para mostrar que las siguientes ecuaciones tiene una solución real en el intervalo indicado. Obtener una aproximación de la misma con una presición de 2 decimales.

   a) $x^3 + 3x - 2 = 0$ en $[0, 1]$.

   b) $x - \cos x = 0$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   c) $x^5 - 4x^3 - 3x + 1 = 0$ en $[2, 3]$.

   d) $x \ln(x) - 1 = 0$ en $[1, e]$.

10. Demostrar que existe un número x tal que verifica la identidad siguiente:
$$x^{179} + \frac{163}{1+x^2+\sin^2 x} = 119$$

T.U.A.S.Q.S:

1. Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F), justificando su respuesta:

   a) Si $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 1} g(x)$ entonces $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ no existe.

   b) Si $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 5} g(x) = 0$ entonces la función $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene una asíntota vertical en $x = 5$.

   c) Si $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 5$ entonces $f(3) = 5$.

   d) Todas las funciones racionales son discontínuas.

   e) Si f es una función continua y $\lim\limits_{x\to \pi} f(x) = 0$ entonces f tiene una raíz en $x = \pi$.

   f) Si f es una función continua en 5 y $f(5) = 8$, entonces $\lim\limits_{x\to 2} f(4x^2 - 11) = 8$.

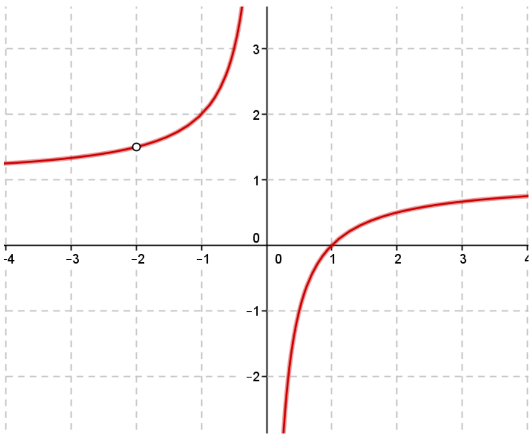
   g) Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ entonces la función f es continua en $x = a$.

2. Para cada una de las siguientes funciones, determinar los números reales a tal que:

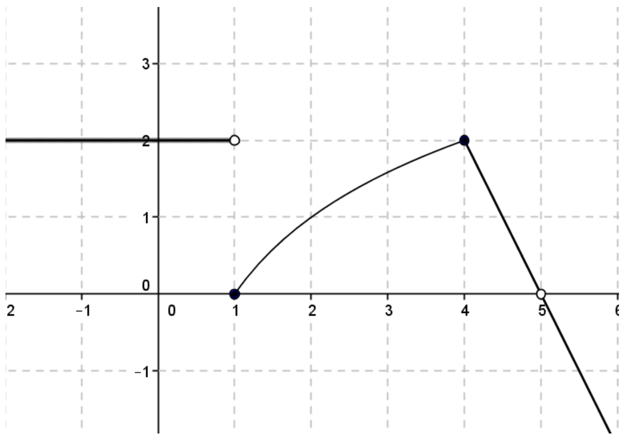
   a) $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe

   b) $f(a)$ no existe.

   c) f no es continua en a.



(i)



(ii)

3. Interpretar geométricamente la continuidad de la función f en x_0. ¿Cuál es la diferencia entre la definición de que f sea continua en x_0 y la definición de que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$?

4. Mostrar por medio de un ejemplo que $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x))$ puede existir aunque ni $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ni $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existan.

5. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \begin{cases} \frac{sen(e^x - 1)}{x^2+1} & \text{si} \quad x > 0 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

6. Sea $f(x) = tg\,(x)$, a pesar de que $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ y $f(\frac{3\pi}{4}) = -1$ no existe ningún número en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ para el cual $f(x) = 0$. ¿Por qué no hay contradicción con el Teorema de Bolzano?

2.5. Anexo B

2.5.1. Cotas, Supremo e Infimo

Definición 2.83 *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$, un número real c se dice* ***cota superior*** *de A si cumple la siguiente propiedad:*

$$\text{Para todo } a \in A \text{ se cumple que } a \leq c$$

Es decir, un número real c es cota superior de un conjunto cuando es mayor o igual que todos los elementos del conjunto. Si A tiene cota superior se dice que A está ***acotado superiormente***.

Ejemplo 2.84 *El conjunto $A = (-2, 3)$ está acotado superiormente. Cualquier número real mayor o igual que 3 es cota superior de A.*

Definición 2.85 *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$, un número real c se dice* ***supremo*** *de A y se escribe $c = \sup A$ si tiene las dos propiedades siguientes:*

S_1) *c es una cota superior de A.*

S_2) *Si d es cota superior de A, entonces $c \leq d$ (es decir c es la menor de las cotas superiores).*

Si el supremo c pertenece al conjunto A, se lo denomina ***máximo*** *de A.*

Ejemplo 2.86 *Sea $A = (-2, 3)$, $\sup A = 3$, no tiene máximo.*

Ejemplo 2.87 *Sea $A = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 7\ \}$, $\sup A = 7$, es máximo.*

Teorema 2.88 *Sea A un conjunto acotado superiormente y no-vacío; entonces un número real c es el* ***supremo*** *de A si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

S_1') *c es cota superior de A.*

S_2') *Si ε es un número real arbitrario mayor que cero, entonces existe $a \in A$ tal que $c - \varepsilon < a$.*

Teorema 2.89 (Propiedad de Completitud) *Sea A un conjunto de números reales,$A \subseteq \mathbb{R}$, distinto de vacío y acotado superiormente, entonces existe c supremo de A.*

Definición 2.90 *Sea $A \subset \mathbb{R}$, un número real d se dice* ***cota inferior*** *de A si cumple la siguiente propiedad:*

$$\text{Para todo } a \in A \text{ se cumple que } d \leq a$$

Es decir, un número real d es cota inferior de un conjunto cuando es menor o igual que todos los elementos del conjunto. Si A tiene cota inferior se dice que A está ***acotado inferiormente***.

Definición 2.91 *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$, un número real d se dice* ***ínfimo*** *de A y se escribe $d = \text{ínf } A$ si tiene las dos siguientes propiedades:*

I_1) d es cota inferior de A.

I_2) Si k es cota inferior de A entonces $k \leq d$ (es decir d es la mayor de las cotas inferiores).

Si el ínfimo $d \in A$ se lo denomina ***mínimo*** *de A.*

Ejemplo 2.92 *Sea $A = (-2, 3)$, $\text{ínf } A = -2$, no es mínimo.*

Ejemplo 2.93 *Sea $A = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 7\ \}$, $\text{ínf } A = 3$, es mínimo.*

Teorema 2.94 *Sea A un conjunto acotado inferiormente y no-vacío; entonces un número real d es el* ***ínfimo*** *de A si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

I'_1) d es cota inferior de A.

I'_1) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $a < d + \varepsilon$.

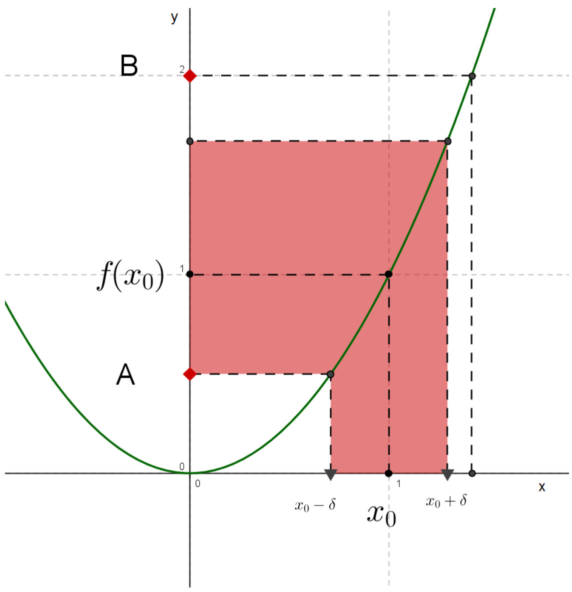
Teorema 2.95 (Propiedad de Completitud) *Si A es un conjunto de números reales, $A \subseteq \mathbb{R}$, acotado inferiormente y no-vacío, entonces existe d ínfimo de A.*

2.5.2. Propiedad de Continuidad

Proposición 2.96 *Sea f una función continua en un número x_0. Si $A < f(x_0) < B$, entonces existe un número positivo δ tal que:*

$$\textit{si } |x - x_0| < \delta \quad \textit{entonces} \quad A < f(x) < B$$

La siguiente figura ilustra la proposición:



Capítulo 3

Derivada

Los objetivos que nos proponemos para esta unidad es que los alumnos logren:

- Comprender el concepto de derivada de una función en un punto.
- Conocer su aplicación a la Física.
- Encontrar rectas tangentes a la curva de una función f.
- Distinguir entre derivada en un punto y función derivada de f.
- Establecer relaciones entre derivada y continuidad.
- Calcular la derivada de funciones aplicando las reglas de derivación.
- Estudiar la derivabilidad de una función.
- Conocer y utilizar el concepto de diferencial de una función.
- Analizar el estudio de una función: crecimiento, decrecimiento, máximos y/o mínimos, concavidad, convexidad a través del estudio de su derivada.
- Resolver problemas de aplicación utilizando la derivada.
- Enunciar, demostrar y utilizar los Teoremas de Fermat, Rolle, Lagrange y Cauchy.
- Conocer y aplicar la Regla de L´Hospital para calcular límites indeterminados.

3.1. Definición formal de derivada

Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716), independientemente uno del otro, fueron en gran parte los responsables del desarrollo de las ideas básicas del cálculo diferencial y del cálculo integral (que desarrollaremos en el siguiente capítulo). La idea central del Cálculo diferencial es la noción de *Derivada*, que surge como un problema de Geometría: hallar la recta tangente a una curva en un punto. El concepto de derivada recién se formuló en el siglo XVII, cuando el matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665), trató de determinar los máximos y mínimos de ciertas funciones. Fermat observó que en los puntos donde ciertas funciones tiene un máximo o un mínimo, la recta tangente a la curva en dicho punto resulta una recta horizontal (paralela al eje x). Por lo tanto el problema de localizar estos valores extremos se reduce al de la localización de las rectas tangentes horizontales.

Esto conduce a la cuestión más general de la determinación de la dirección de la recta tangente en un punto arbitrario de la curva. El intento de resolver este problema fue lo que condujo a Fermat a descubrir algunas de las primeras ideas referentes a la noción de derivada.

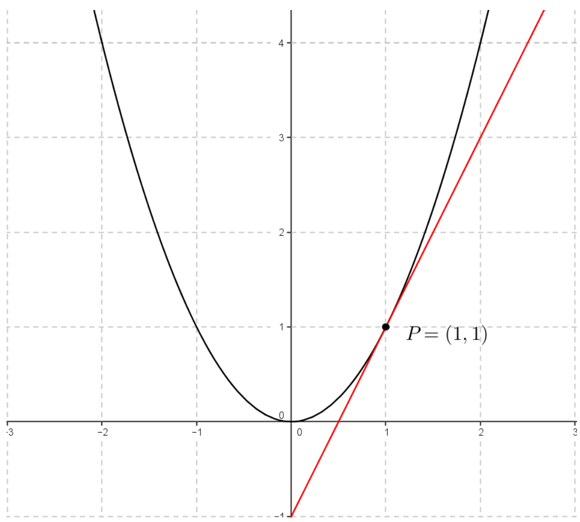
Issac Barrow (1630-1677), maestro de Newton, fue el primero en relacionar el problema de hallar el área de una región limitada por una curva y el de hallar la tangente en un punto de la curva. Siendo Newton y Leibniz los que comprendieron la verdadera importancia de esta relación y la explotaron en forma tal que inauguraron una etapa sin precedente en el desarrollo de la matemática.

Aunque la derivada se introdujo inicialmente para el estudio del problema de la tangente, pronto se vió que proporcionaba también un instrumento para el cálculo de velocidades y, en general para completar el análisis de una función.

En este capítulo estudiaremos uno de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial: la derivada y sus aplicaciones. Comenzaremos el estudio analizando dos problemas.

Problema de la Pendiente

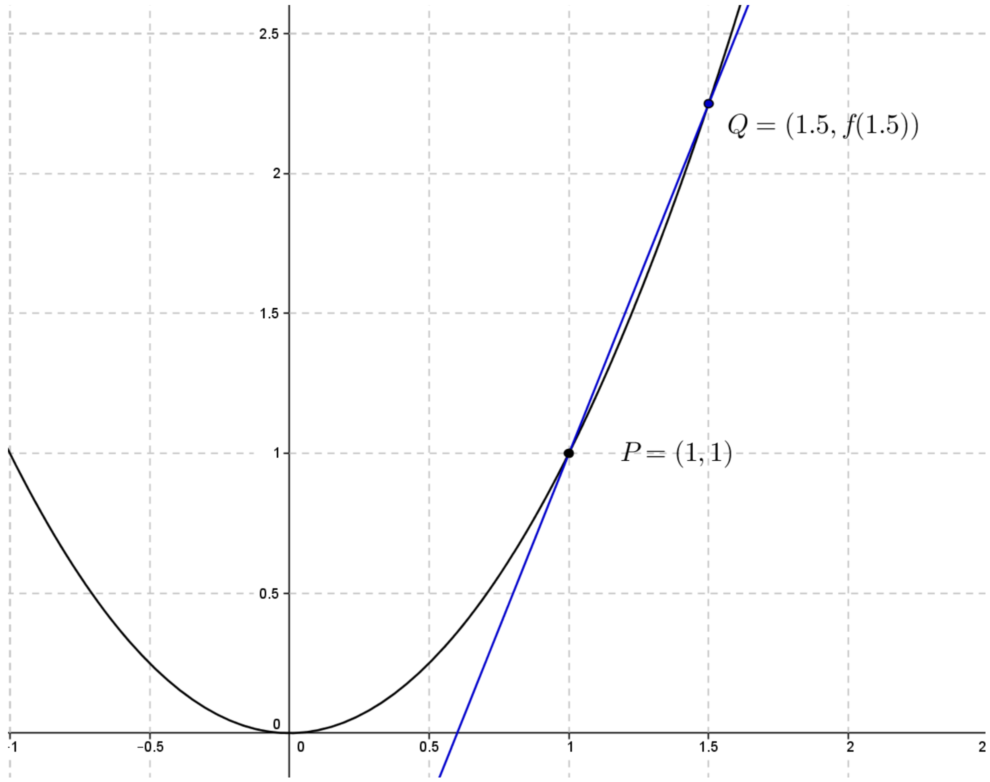
¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la representación gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el punto $P = (1, 1)$?



Han estudiado en el curso de ingreso que cada recta queda determinada de manera única conociendo dos puntos por los que pasa. Recordemos que la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\text{pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Debido a que en los datos del problema sólo hay un punto que pertenece a la recta, no podemos calcular la pendiente de la recta tangente en forma inmediata. Pero como la recta es *tangente* a la curva, podemos considerar otro punto perteneciente a la representación gráfica de $f(x) = x^2$ próximo al punto $(1, 1)$. Por ejemplo consideremos el punto $Q = (1{,}5, f(1{,}5))$, y determinemos la recta que pasa por P y Q (recta secante a la curva)



Su pendiente es

$$\text{pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(1{,}5)^2 - 1^2}{1{,}5 - 1} = 2{,}5$$

Así una estimación de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(1, 1)$ sería 2,5. Para mejorar la estimación, tendríamos que considerar otros puntos cada vez más próximos a P (sin importar si $x > 1$ $x < 1$). Cada uno de estos puntos tiene coordenadas $Q = (x, x^2)$, por lo que la pendiente de la recta que pasa por P y Q es

$$\text{pendiente} = \frac{x^2 - 1^2}{x - 1}$$

Como nuestro objetivo es averiguar la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(1, 1)$, debemos investigar qué le ocurre a este cociente cuando x tiende a 1, es decir

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1}$$

Utilizando las propiedades del límite estudiadas en el capítulo anterior, podemos calcular este límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

Luego la recta tangente a la representación gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el punto $(1,1)$ tiene pendiente 2.

Problema de la velocidad instantánea

Se deja caer una pelota desde la terraza de un edificio cuya altura es 450 metros. ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de 5 segundos?

Al intentar resolver este problema, aplicamos el hecho descubierto por Galileo Galilei[1] hace casi cuatro siglos, de que la *distancia recorrida por cualquier cuerpo que cae libremente es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo*. Es decir

$$d(t) = \frac{1}{2}.g.t^2$$

donde $d(t)$ es la distancia recorrida (medida en metros) después de t segundos, y g es la aceleración de la gravedad. Como en la superficie de la Tierra, la aceleración originada por la gravedad es $9,8$ m/s^2 aproximadamente, la función que describe la distancia recorrida por la pelota en función del tiempo es $d(t) = 4,9t^2$.

Por otro lado recordemos que la velocidad media v_m se define como

$$v_m = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

La dificultad para hallar la velocidad de la pelota a los 5 segundos es que buscamos la velocidad en un sólo instante ($t = 5$), de modo que no interviene un intervalo de tiempo. Pero podríamos obtener una buena aproximación calculando la velocidad media durante un breve intervalo de tiempo. Por ejemplo podríamos considerar un intervalo de tiempo de $0,1$ segundos ($t = 5$ y $t = 5{,}1$)

$$v_m = \frac{d(5,1) - d(5)}{5,1 - 5} = \frac{4,9\,(5,1)^2 - 4,9\,(5)^2}{0,1} = 49,49m/s$$

Para mejorar la estimación, tendríamos que considerar intervalos de tiempo cada vez más próximos a cero, es decir $t \to 5$. Luego la velocidad v_i en el tiempo $t = 5$ es

$$v_i(5) = \lim_{t\to 5}\frac{d(t) - d(5)}{t-5} = \lim_{t\to 5}\frac{4,9t^2 - 4,9\,(5)^2}{t-5} = \lim_{t\to 5}\frac{4,9\left(t^2 - (5)^2\right)}{t-5} = \lim_{t\to 5}\frac{4,9\,(t-5)\,(t+5)}{t-5} = 49$$

A esta velocidad se la denomina **velocidad instantánea**. La velocidad instantánea de la pelota en el instante $t = 5$ segundos es $49m/s$.

En los problemas analizados anteriormente existe una semejanza en su resolución: para dar respuesta a la pregunta planteada es necesario calcular el límite $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Este es el nuevo concepto que vamos a estudiar.

[1] Galileo Galilei (Pisa, 15 de febrero de 15644 - Arcetri, 8 de enero de 1642) fue un astrónomo, filósofo, ingeniero, matemático y físico italiano, relacionado estrechamente con la revolución científica. Eminente hombre del Renacimiento, mostró interés por casi todas las ciencias y artes (música, literatura, pintura). Sus logros incluyen la mejora del telescopio, gran variedad de observaciones astronómicas, la primera ley del movimiento y un apoyo determinante al copernicanismo. Ha sido considerado como el «padre de la ciencia».

Definición 3.1 *Sea f una función definida sobre un intervalo abierto (a, b) y x_0 número real perteneciente al intervalo. Se denomina **Derivada de la función** f **en el valor** x_0 y se simboliza $f'(x_0)$ o también $\frac{df}{dx}(x_0)$ al valor*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*siempre que el límite exista. En caso contrario se dice que f **no es derivable en** x_0.*

También existe otra forma de definir la derivada de la función f en x_0, que resulta de realizar un cambio de variable en el límite que la define. Sea $h = x - x_0$ entonces

$$h \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{y} \quad x = x_0 + h$$

Luego

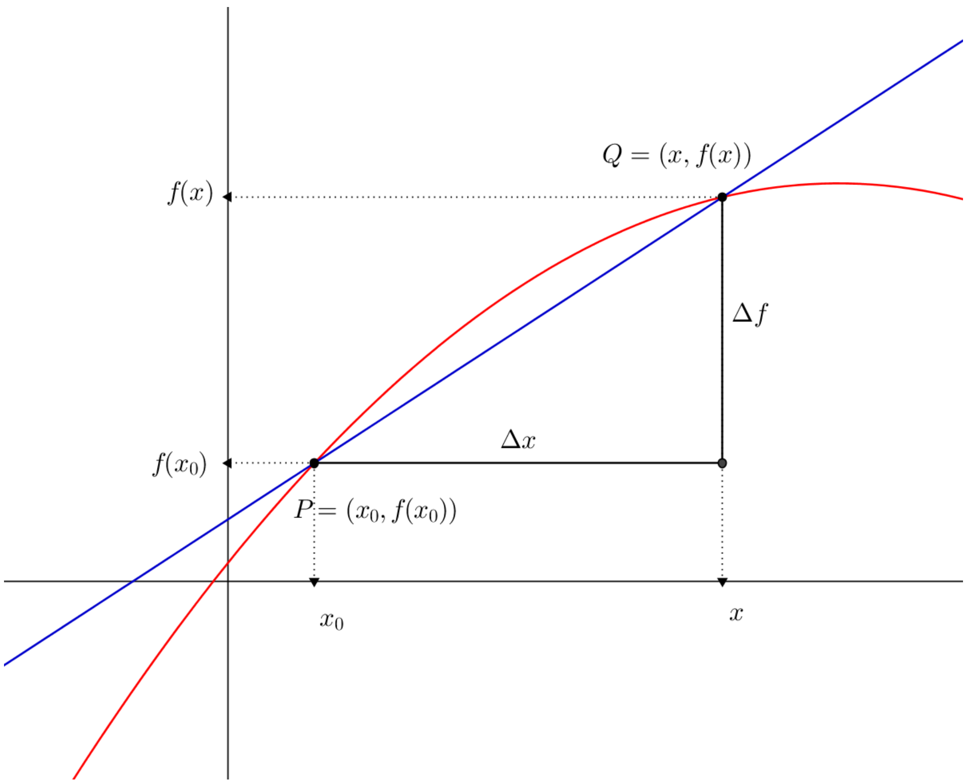
$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

3.1.1. Interpretación geométrica de la derivada

Sea f una función continua representada por medio de una curva C. Consideremos un punto fijo $P = (x_0, f(x_0))$ y otro punto $Q = (x, f(x))$ pertenecientes a esta curva. La diferencia entre $f(x)$ y $f(x_0)$ se denomina *incremento de la función* y se simboliza Δf, mientras que la diferencia entre los valores x y x_0 se denomina *incremento de la variable* y se simboliza Δx. Luego la pendiente de la recta que pasa por los puntos P y Q es el cociente entre estos incrementos

$$\text{pendiente} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

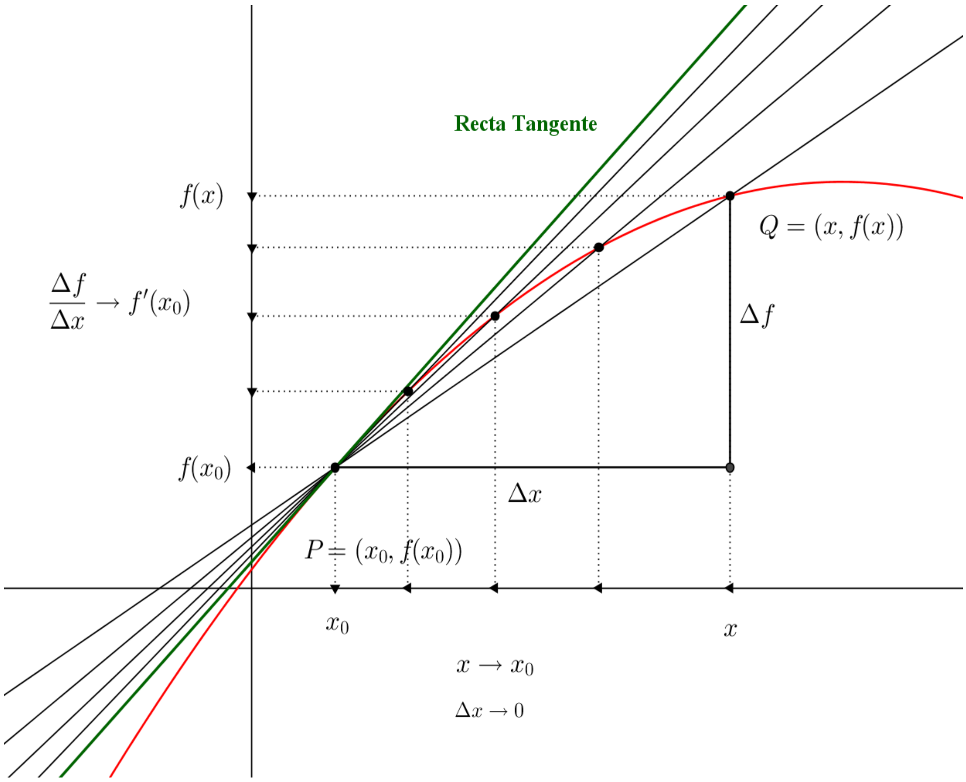
y se denomina *cociente incremental.*



Luego podemos reescribir la definición 3.1 como

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Este límite se interpreta gráficamente como: a medida que x se acerca cada vez más a x_0 (o lo que es equivalente que Δx se aproxime cada vez más a 0), el punto Q se aproxima al punto P; luego la recta secante que pasa por P y Q se aproxima a la recta tangente a la curva en el punto P (el cociente incremental se aproxima al valor de la pendiente de la recta tangente). Por lo que podemos concluir que la derivada de la función f en x_0 es la pendiente de la recta tangente en P a la curva que representa a f.



(ver gráfico correspondiente en la página de la cátedra).

Recta Tangente y Recta Normal a una función

Como conocemos la pendiente de la recta tangente a la curva que representa a la función f en el punto $(x_0, f(x_0))$, podemos determinar la ecuación de dicha recta

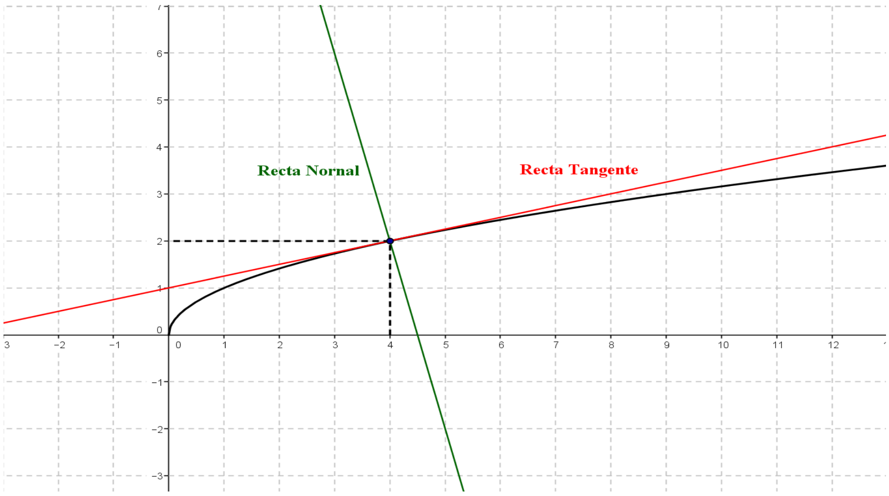
Ecuación de la Recta Tangente	$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Es importante notar que la recta tangente es una buena aproximación de la función f cuando los valores de x son próximos a x_0.

También es importante determinar la ecuación de la recta perpendicular a la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$. Dicha recta recibe el nombre de recta normal de f en el punto $(x_0, f(x_0))$, y su ecuación es

Ecuación de la Recta Normal	$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$

El la siguiente figura podemos obsrvar la recta tangente y la recta normal a la representación gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto (4,2).



Ejemplo 3.2 *Investigar si la función* $f(x) = x^2+5x$ *es derivable en* $x_0 = 1$*, En caso afirmativo hallar* $f'(1)$ *e indicar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto* $(1, f(1))$.

Analicemos la existencia del siguiente límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+5(1+h)-(1^2+5\cdot 1)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2+5+5h-1-5}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+7h}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(h+7)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+7) = 7$$

Como el límite existe la función es derivable en $x_0 = 1$ *y* $f'(1) = 7$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f *en el punto* $(1, f(1))$ *es:*

$$y = 7(x-1) + f(1) = 7(x-1) + 6 = 7x - 1$$

La ecuación de la recta normal a la gráfica de f *en el punto* $(1, f(1))$ *es:*

$$y = -\frac{1}{7}(x-1) + f(1) = -\frac{1}{7}(x-1) + 6 = -\frac{1}{7}x + \frac{43}{7}$$

Ejemplo 3.3 *Investigar si la función* $f(x) = \sqrt{x}$ *es derivable en* $x_0 = 4$*. En caso afirmativo hallar* $f'(4)$ *e indicar la ecuación de la recta tangente en el punto* $(4, f(4))$.

Analizamos la existencia del siguiente límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h}+\sqrt{4}}{\sqrt{4+h}+\sqrt{4}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{4+h}\right)^2 - \left(\sqrt{4}\right)^2}{h \cdot \left(\sqrt{4+h}+2\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{4+h-4}{h \cdot \left(\sqrt{4+h}+2\right)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{h \cdot \left(\sqrt{4+h}+2\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{4+h}+\sqrt{4}\right)} = \frac{1}{4}$$

Como el límite existe la función es derivable en $x_0 = 4$ *y* $f'(4) = \frac{1}{4}$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f *en el punto* $(4, f(4))$ *es:*

$$y = \frac{1}{4}(x-4) + 2 = \frac{1}{4}x + 1$$

La ecuación de la recta normal a la gráfica de f *en el punto* $(4, f(4))$ *es:*

$$y = -4(x-4) + 2 = -4x + 18$$

Ejercicio 3.4 *Investigar si la función* $f(x) = 2x^3 - 4$ *es derivable en* $x_0 = 1$. *En caso afirmativo determinar la ecuación de la recta normal y de la recta tangente a la función en el punto* $(1, f(1))$. *Representar graficamente la función* f, *la recta normal y la recta tangente.*

Ángulo entre curvas

La pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, nos permite también definir el ángulo que determinan dos curvas que se intersecan en un punto.

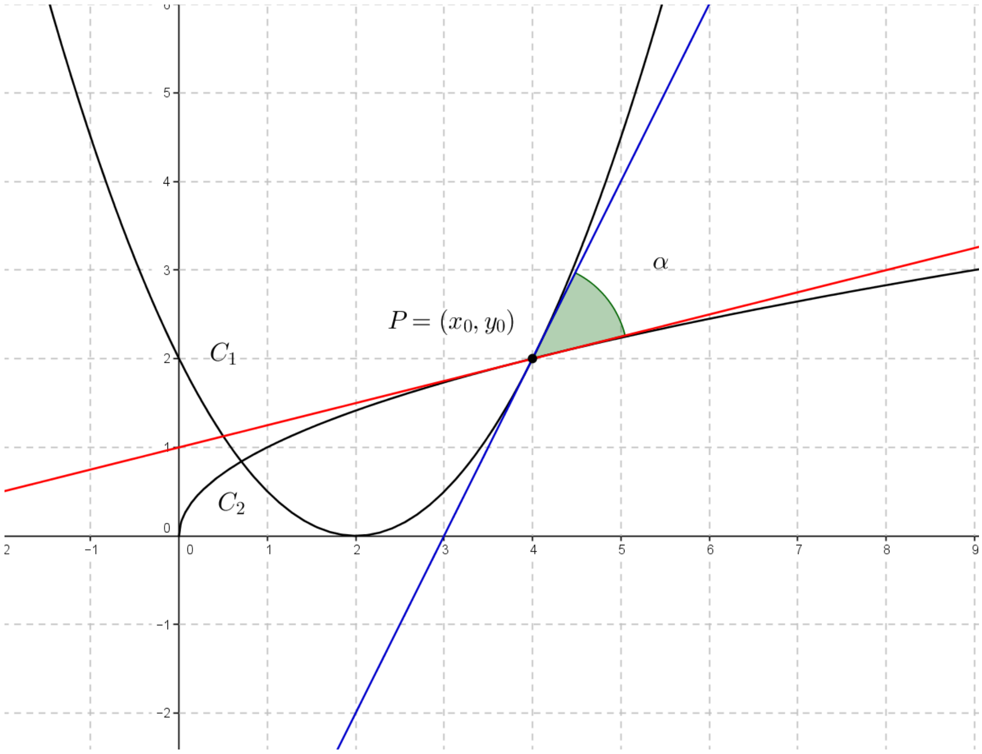
Recordemos que el ángulo α que determinan dos rectas, se puede calcular conociendo sus pendientes

$$tg(\alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

Sean C_1 y C_2 las curvas que representan graficamente a las funciones f_1 y f_2 respectivamente, tales que se intersecan en un punto $P = (x_0, y_0)$. Si las funciones f_1 y f_2 son derivables en x_0, definimos el ángulo α entre las curvas C_1 y C_2 como

$$tg(\alpha) = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_2'(x_0) f_1'(x_0)}$$

es decir, α es el ángulo determinado por las respectivas tangentes a las curvas C_1 y C_2 en P.



Ejercicio 3.5 *Determinar el ángulo que forman las curvas en su punto de intersección*

$$C_1 : y^2 = 2x$$
$$C_2 : x^2 = 2y$$

Representar graficamente la situación.

3.1.2. Interpretación física de la derivada

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta (movimiento rectilineo), de acuerdo con una ecuación del movimiento $s = f(t)$ donde s es el desplazamiento (distancia dirigida) del objeto respecto del origen, en el instante t. La función f que describe el movimiento se conoce como **función de posición** del objeto. En el intervalo de tiempo de $t = x_0$ hasta $t = x$, el tiempo transcurrido es $\Delta t = x - x_0$ y la distancia recorrida por el objeto es $\Delta f = f(x) - f(x_0)$. Luego la velocidad promedio v_m es

$$v_m = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Es importante destacar que la velocidad promedio v_m es la pendiente de la recta secante a la curva que representa la función posición f, que pasa por los puntos $P = (x_0, f(x_0))$ y $Q = (x, f(x))$.

Cuando consideramos intervalos de tiempos cada vez más pequeños (es decir Δt tiende a 0, o lo que es equivalente, x tiende a x_0) obtenemos la velocidad ó **velocidad instantánea** v_i del objeto en el tiempo $t = x_0$

$$v_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Esto significa que la velocidad del objeto en el instante $t = x_0$ es igual a la derivada de lo función posición f en $t = x_0$. Es importante notar que la velocidad instantánea coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva que representa a la función posición f, en el punto $P = (x_0, f(x_0))$.

Ejercicio 3.6 *Se lanza una pelota al aire en forma vertical con una velocidad de* 40 *pies/s. Su altura (en pies) después de t segundos es* $A(t) = 40t - 16t^2$. *Determinar la velocidad de la pelota a los* 2 *segundos.*

Ejercicio 3.7 *La ecuación del movimiento* $f(t) = 4t^3 + 6t + 2$ *modela el desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta, después de t segundos. Determinar la velocidad de la partícula en los instantes* $t = 1, t = 2, t = 3$ *y* $t = a$.

3.1.3. Derivadas Laterales

Definition 3.8 *Sea f una función definida sobre un intervalo abierto (a, b) y sea $x_0 \in (a, b)$, definimos* ***Derivada por Derecha de** f **en** x_0* *a*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

y ***Derivada por Izquierda de** f **en** x_0* *a*

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Analizando la definición 3.1 es fácil concluir que que para que la función f sea derivable en x_0 es necesario que las derivadas laterales existan y sean iguales

$$\boxed{f \text{ es derivable en } x_0 \iff f'_+(x_0) = f'_-(x_0)}$$

Ejemplo 3.9 *Investigar si la función definida por* $f(x) = |1 - x^2|$ *es derivable en* 1.

Si definimos la función f como una función definida por ramas, es fácil de observar que en $x = 1$ cambia la regla de asignación

$$\left|1 - x^2\right| = \begin{cases} 1 - x^2 & si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ -1 + x^2 & si \quad x < -1 \text{ ó } x > 1 \end{cases}$$

Es necesario estudiar las derivadas laterales en el valor $x = 1$*:*

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{-1 + x^2}{x - 1} = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1 - x^2}{x - 1} = -2$$

Como las derivadas laterales son distintas, concluimos que $f'(1)$ no existe, es decir la función no es derivable en 1.

Ahora estamos en condiciones de definir cuando una función es derivable en un intervalo.

Definición 3.10 *Sea f una función definida sobre un intervalo abierto (a, b). Diremos que f* ***es Derivable en*** (a, b) *si es derivable en todo x_0 número real perteneciente al intervalo (a, b).*

Definición 3.11 *Sea f una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Diremos que f* ***es Derivable en*** $[a, b]$ *si:*

i) *es derivable en todo x_0 número real perteneciente al intervalo (a, b).*

ii) *es derivable por derecha en a.*

iii) *es derivable por izquierda en b.*

Si una función f es derivable en todo número real perteneciente a su dominio, diremos simplemente que f es una **Función Derivable**.

3.1.4. Continuidad y Derivada

Si bien la función del ejemplo 3.9 es una función definida por ramas, se puede mostrar que es una función continua (se deja al lector la comprobación). Este ejemplo nos permite concluir que la continuidad de una función en x_0 no es una condición suficiente para establecer la derivabilidad de la función en x_0.

El siguiente teorema establece que la derivabilidad de una función en x_0 es una condición suficiente para asegurar la continuidad en el valor x_0.

Teorema 3.12 *Si una función f es derivable en x_0 entonces f es continua en x_0.*

Demostración 3.13 *Sea f una función derivable en x_0, entonces existe el siguiente limite:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Para probar que la función f es continua en x_0 mostremos que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Así

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Luego

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f\left(x_0\right)\right]=0 \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} f\left(x_0\right)=0 \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} f\left(x_0\right) \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(x_0\right)$$

Para Recordar

f es continua en x_0	$\not\Rightarrow$	f es derivable en x_0
f es derivable en x_0	$\Rightarrow$	f es continua en x_0
f no es continua en x_0	$\Rightarrow$	f no es derivable en x_0

Ejercicio 3.14 *Analizar la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones en $x_0=0$. Luego representar graficamente las funciones (utilizando geogebra) y sacar conclusiones*

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad / \quad f(x)=|x|$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad / \quad f(x)=\sqrt[3]{x}$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad / \quad f(x)=\sqrt{|x|}$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad / \quad f(x)=\begin{cases} x^3 & si \quad x\leq 0 \\ x^2 & si \quad x>0 \end{cases}$

Ejercicio 3.15 *Analizar si las siguientes funciones son derivables en $x=1$. Obtener conclusiones.*

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad / \quad f(x)=\begin{cases} (x-1)^2+2 & si \quad x\neq 1 \\ 3 & si \quad x=1 \end{cases}$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad / \quad f(x)=\begin{cases} 3x-1 & si \quad x\leq 1 \\ x^2 & si \quad x>1 \end{cases}$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad / \quad f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x-1} & si \quad x\neq 1 \\ 0 & si \quad x=1 \end{cases}$

3.1.5. La función derivada

En las secciones anteriores hemos trabajado con el concepto de derivada de una función en un número real. Definimos la derivada de la función f en x_0 como

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Si en lugar de considerar en la definición un valor fijo x_0, lo reemplazamos por una variable x que pueda tomar cualquier valor del dominio de la función, obtenemos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

una nueva función, denominada **Función Derivada de** f (o simplemente derivada de f), y que notaremos f' ó $\frac{df}{dx}$. El dominio de esta nueva función es el conjunto de valores en los cuales la función f es derivable.

Las funciones estudiadas hasta ahora (polinómicas, trigonométricas, logarítmicas, exponenciales) son derivables en todo su dominio. A continuación encontraremos la función derivada de algunas de ellas.

Derivada de la Función constante

Sea $f(x) = k$ con k un número real, calculemos su función derivada

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Por lo que la función derivada de una función constante es

$$\boxed{\frac{d}{dx}(k) = 0}$$

Derivada de la Función lineal

Sea $f(x) = x$, calculemos su función derivada

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Por lo que la función derivada de la función $f(x) = x$ es

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x) = 1}$$

Derivada de la Función cuadrática

Sea $f(x) = x^2$, calculemos su función derivada. E

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

Por lo que la función derivada de la función $f(x) = x^2$ es

$$\boxed{\tfrac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x}$$

Derivada de la Función x^n con $n \in \mathbb{N}$

Sea $f(x) = x^n$, calculemos su función derivada. Necesitaremos tener presente la siguiente identidad, conocida como Binomio de Newton[2]

$$(x+h)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} .x^i.h^{n-i}$$

Luego

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.x^i.h^{n-i} - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{(n-1)}h + ... + h^n}{h} = \lim_{h\to 0} \left[nx^{(n-1)} + ... + h^{(n-1)}\right] = nx^{(n-1)}$$

Por lo que la función derivada de la función $f(x) = x^n$ es

$$\boxed{\tfrac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}}$$

Derivada de la Funcion $sen\,(x)$

Sea $f(x) = sen\,(x)$, calculemos su función derivada. Necesitaremos tener presente la siguiente identidad trigonométrica

$$sen\,(\alpha) - sen\,(\beta) = 2sen(\frac{\alpha-\beta}{2})cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \qquad (*)$$

y el siguiente límite

$$\lim_{z\to 0} \frac{sen\,(z)}{z} = 1 \qquad (**)$$

[2]Atribuido a Newton, el teorema fue en realidad descubierto por primera vez por un ingeniero Indú, llamado Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn al-Karaji alrededor del año 1000. Newton generalizó esta fórmula para cualquier exponente real. El teorema del binomio fue publicado por primera vez en 1685 por Wallis, atribuyendo a Newton este descubrimiento.

Luego

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen\,(x+h)-sen\,(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}2cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)sen\left(\frac{h}{2}\right)\ \text{(utilizamos } (*))$$

$$=\lim_{h\to 0}cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{sen\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\ \text{(utilizamos } (**)\text{)}$$

$$=\lim_{h\to 0}cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)=cos\,(x)$$

Por lo que la función derivada de la función $f(x)=sen\,(x)$ es

$$\boxed{\frac{d}{dx}(sen\,(x))=cos\,(x)}$$

De forma análoga se puede calcular la función derivada para las funciones restantes. A continuación presentamos en una tabla las derivadas de las funciones que hemos estudiado en el primer capítulo, y que utilizaremos muy a menudo.

f (función)	$\frac{df}{dx}$ (Función derivada)	
k	$\frac{d}{dx}(k)=0$	siendo k un número real
x	$\frac{d}{dx}(x)=1$	
x^k	$\frac{d}{dx}\left(x^k\right)=kx^{k-1}$	siendo k un número real
$\sqrt{x}$	$\frac{d}{dx}(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$sen\,(x)$	$\frac{d}{dx}(sen\,(x))=cos\,(x)$	
$cos\,(x)$	$\frac{d}{dx}(cos\,(x))=-sen\,(x)$	
$tg\,(x)$	$\frac{d}{dx}(tg\,(x))=\frac{1}{cos^2(x)}$	
shx	$\frac{d}{dx}(shx)=chx$	
chx	$\frac{d}{dx}(chx)=shx$	
thx	$\frac{d}{dx}(thx)=\frac{1}{ch^2x}$	
e^x	$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$	
a^x	$\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\ln a$	siendo a un número real
$\ln x$	$\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$	
$arcsen\,(x)$	$\frac{d}{dx}(arcsen\,(x))=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	con $x>1$
$arccos\,(x)$	$\frac{d}{dx}(arcos\,(x))=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	con $x>1$
$arctg\,(x)$	$\frac{d}{dx}(arctg\,(x))=\frac{1}{1+x^2}$	
$\arg senh\,(x)$	$\frac{d}{dx}(\arg senh\,(x))=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	
$\arg cosh\,(x)$	$\frac{d}{dx}(\arg cosh\,(x))=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	con $x>1$
$\arg tgh\,(x)$	$\frac{d}{dx}(\arg tgh\,(x))=\frac{1}{1-x^2}$	con $\vert x\vert<1$

Ejercicio 3.16 *Elegir cinco funciones de la tabla anterior, y utilizando Geogebra, representar graficamente en un mismo gráfico la función y su derivada. Luego establezcan conclusiones.*

Reglas de derivación

En el capítulo 1 definimos como obtener nuevas funciones a partir de la suma, resta, multiplicación y/o división de funciones conocidas. Ahora estudiaremos como calcular la función derivada de estas funciones utilizando la derivada de las funciones que la conforman.

Teorema 3.17 (Propiedad de Linealidad) *Si f y g son dos funciones derivables, entonces la suma $(f+g$ y el producto por un escalar $k.f$ también son funciones derivables y se cumple:*

$$\boxed{\begin{array}{c}(k.f)'(x) = k.f'(x) \\ \\ (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)\end{array}}$$

Demostración 3.18 *Demostremos la primer propiedad*

$$(k.f)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(k.f)(x+h) - (k.f)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k.f(x+h) - k.f(x)}{h}$$

$$= k.\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k.f'(x)$$

Demostremos la segunda propiedad

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

Ejercicio 3.19 *Hallar la derivada de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$

b) $f(x) = 3.tg(x) + 5\ln(x) - 4$

Teorema 3.20 (Derivada de un producto) *Sean f y g funciones derivables, entonces $f.g$ es derivable y además*

$$\boxed{(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x)g'(x)}$$

Demostración 3.21

$$(f.g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f.g)(x+h) - (f.g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h}. \lim_{h\to 0} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x). \lim_{h\to 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= f'(x).g(x) + f(x)g'(x)$$

Ejercicio 3.22 *Hallar la derivada de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = x^2 sen(x)$

b) $f(x) = x^3. \ln(x).tg(x)$

Teorema 3.23 (Derivada de un cociente) *Sean f y g funciones derivables y $g(x) \neq 0$ entonces f/g es derivable y además*

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}}$$

Demostración 3.24

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x)\, g(x)}{h} + \frac{f(x)\, g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

$$= \frac{1}{g^2(x)} \cdot \left[f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x) \right] = \frac{f'(x)\,.g(x) - f(x)\,.g'(x)}{g^2(x)}$$

Ejercicio 3.25 *Hallar la derivada de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \frac{x^2+2}{2x+1}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{sen(x)}$

Teorema 3.26 (Regla de la Cadena) *Sean f y g funciones derivables entonces $f \circ g$ es derivable y además:*

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,.g'(x)}$$

La demostración de este teorema queda para el lector interesado.

Ejercicio 3.27 *Hallar la derivada de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = sen\,(4x)$

b) $f(x) = \ln^4 x$

c) $f(x) = \ln^4(cos\,(3x))$

d) $f(x) = \sqrt[3]{sen\,(2x)}$

e) $f(x) = cos^3(2x+1)$

f) $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x^2}\right)$

Ejercicio 3.28 *Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones y luego hallar su derivada:*

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 2 & si \quad x \neq 1 \\ 3 & si \quad x = 1 \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & si \quad x \leq 1 \\ x^2 & si \quad x > 1 \end{cases}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x \leq 0 \\ x^2 & si \quad x > 0 \end{cases}$

Teorema 3.29 (Derivada de una Potencia) *Sean f y g funciones derivables entonces f^g es derivable y además:*

$$\boxed{\left(f(x)^{g(x)}\right)'(x) = \left[g'(x) \,.\, \ln(f(x)) + g(x) \,.\, \tfrac{f'(x)}{f(x)}\right] .f(x)^{g(x)}}$$

Demostración 3.30 *Llamemos $y(x) = f(x)^{g(x)}$ y apliquemos logaritmo a ambos lados*

$$y(x) = f(x)^{g(x)}$$

$$\ln(y(x)) = g(x) \,.\, \ln(f(x))$$

y luego derivemos aplicando regla de la cadena y la derivada de un producto

$$\frac{1}{y(x)}.y'(x) = g'(x) \,.\, \ln(f(x)) + g(x) \,.\, \frac{1}{f(x)}.f'(x)$$

$$y'(x) = \left[g'(x) \,.\, \ln(f(x)) + \frac{g(x) \,.f'(x)}{f(x)}\right] .y(x)$$

$$y'(x) = \left[g'(x) \,.\, \ln(f(x)) + \frac{g(x) \,.f'(x)}{f(x)}\right] .f(x)^{g(x)}$$

Ejemplo 3.31 *Hallar la derivada de la función $h(x) = (x^3 + 2x)^{sen(x)}$.*

Procedemos como en la demostración anterior

$$h(x) = \left(x^3 + 2x\right)^{sen(x)}$$

$$\ln[h(x)] = \ln\left[\left(x^3 + 2x\right)^{sen(x)}\right]$$

$$\ln[h(x)] = sen(x) \,.\, \ln\left(x^3 + 2x\right)$$

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = cos(x) \,.\, \ln\left(x^3 + 2x\right) + sen(x) \,.\, \frac{1}{x^3 + 2x}.\left(3x^2 + 2\right)$$

$$h'(x) = \left[cos(x) \,.\, \ln\left(x^3 + 2x\right) + sen(x) \,.\, \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x}\right] .h(x)$$

$$h'(x) = \left[cos(x) \,.\, \ln\left(x^3 + 2x\right) + sen(x) \,.\, \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x}\right] .\left(x^3 + 2x\right)^{sen(x)}$$

Ejercicio 3.32 *Hallar la derivada de $f(x) = (sen(3x))^{1/x}$.*

Teorema 3.33 (De la Función Inversa) *Sea f una función continua y estrictamente creciente o estrictamente decreciente en $[a,b]$ con lo cual existe la función inversa definida por:*

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b] \ \text{ si } f \text{ es estrictamente creciente}$$

$$f^{-1} : [f(b), f(a)] \to [a,b] \ \text{ si } f \text{ es estrictamente decreciente}$$

Si $x_0 \in (a,b)$, f es derivable en x_0 y $f'(x_0) \neq 0$ entonces f^{-1} es derivable en $f(x_0)$ y

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Ejemplo 3.34 *Hallar la derivada de la función $f^{-1}(x) = arcsen\,(x) : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.*

Notemos que

$$y = arcsen\,(x) \Longrightarrow x = sen\,(y) \tag{3.1}$$

Además la función seno es estrictamente creciente y derivable en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Por otra parte sabemos que $(sen\,(x))' = cos\,(x)$. Por lo tanto, usando el teorema de la función inversa tenemos

$$(arcsen\,(x))' = \frac{1}{cos\,(arcsen\,(x))}$$

Pero usando la igualdad (3.1) tenemos

$$cos\,(y) = \sqrt{1 - sen^2\,(y)} = \sqrt{1 - x^2}$$

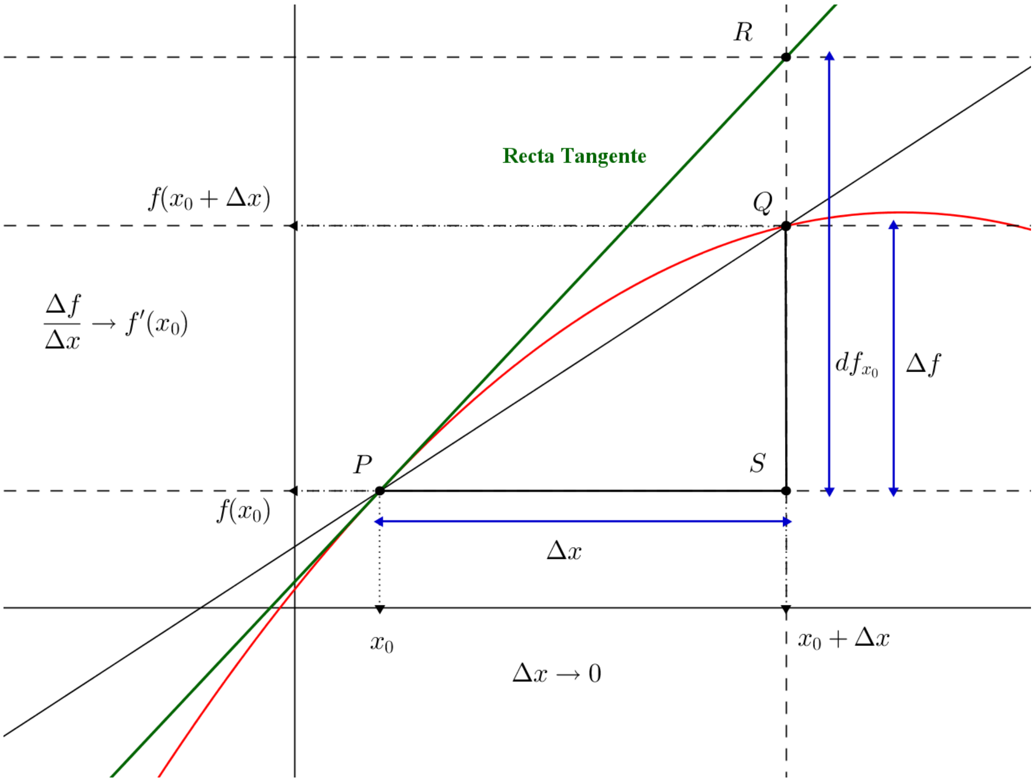
En definitiva

$$(arcsen\,(x))' = \frac{1}{cos\,(arcsen\,(x))} = \frac{1}{cos\,(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ \text{ con } x \in (-1,1)$$

Ejercicio 3.35 *Hallar la derivada de la función $f^{-1}(x) = arccos\,(x) : [-1,1] \to [0,\pi]$. Representar graficamente la f^{-1} y $\left(f^{-1}\right)'$.*

3.1.6. Diferencial

Consideremos f una función en x_0. Debido a que la recta tangente en el punto $P = (x_0, f(x_0))$ a la curva que representa la función f es la mejor aproximación lineal de la curva para valores próximos a x_0, la utilizaremos para estimar la variación de la función Δf causado por una pequeña variación en la variable independiente que hemos nombrado Δx.



Consideremos la variación de f cuando x varia de x_0 a $x_0 + \Delta x$ como $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ y notaremos df_{x_0} a la variación de la recta tangente en el mismo rango de variación en x. Observemos que cuando Δx tiende a 0, df_{x_0} tiende a Δf, es decir que df_{x_0} es una buena aproximación de Δf cuando consideramos valores para x cercanos a x_0.

Utilizando nociones de trigonometría podemos expresar df_{x_0} en términos de Δx y la pendiente de la recta tangente a la curva en x_0. Consideremos el triángulo rectángulo PQS. No es difícil concluir que

$$tg(\alpha) = \frac{df_{x_0}}{\Delta x} \Longrightarrow df_{x_0} = tg(\alpha).\Delta x = f'(x_0).\Delta x$$

Como df_{x_0} es un *aproximador* de la diferencia Δf se denomina **Diferencial de f en el valor** x_0. Observemos que df_{x_0} es una función lineal que depende del incremento Δx

Definición 3.36 *Sea f una función derivable en x_0. Se define como* ***Diferencial de f en el valor*** *x_0 a la función*

$$df_{x_0}(\Delta x) = f'(x_0).\Delta x$$

Ejemplo 3.37 *Calcular la diferencial de la función $f(x) = x^3$ en $x_0 = 1$ y en $x_0 = x$.*

Utilizando la definición 3.36 calculemos la diferencial para $x_0 = 1$

$$df_{x_0}(\Delta x) = f'(x_0).\Delta x$$

$$df_{x_0}(\Delta x) = 3(x_0)^2.\Delta x$$

$$df_1(\Delta x) = 3(1)^2.\Delta x = 3\Delta x$$

Para el caso general $x_0 = x$ *tenemos que* $df_x(\Delta x) = 3x^2.\Delta x$.

NOTA: Por abuso de lenguaje llamaremos simplemente la diferencial de f, y la notaremos $df(\Delta x)$, a la diferencial de la función f en el valor $x_0 = x$.

Observemos que si la función es $f(x) = x$ la diferencial resulta

$$dx(\Delta x) = 1.\Delta x = \Delta x$$

por lo que $\Delta x = dx$. Sustituyendo esta igual en la definición 3.36 tenemos que la diferencial de f en el valor x_0 es

$$\boxed{df_{x_0}(dx) = f'(x_0).dx}$$

y la diferencial de f es

$$\boxed{df(dx) = f'(x).dx}$$

Ejemplo 3.38 *Sea* $f(x) = x^3$, $x_0 = 5$ *y* $dx = 0{,}1$. *Comparar* df_{x_0} *y* Δf.

$$df_{x_0}(dx) = f'(x_0)dx = 3(x_0)^2 dx \Longrightarrow df_5(0{,}1) = 3(5)^2 0{,}1 = 7{,}5$$

Mientras que

$$\Delta f = f(x + dx) - f(x) = (5 + 0{,}1)^3 - (5)^3 = 7{,}651$$

Vemos que df_{x_0} *es una buena aproximación de* Δf.

OBSERVACION: Debido a que la diferencial de f en x_0 es una buena aproximación de Δf tenemos que

$$df_{x_0}(dx) \approx \Delta f \Longrightarrow df_{x_0}(dx) \approx f(x_0 + dx) - f(x_0) \Longrightarrow f(x_0 + dx) \approx df_{x_0}(dx) + f(x_0)$$

Es decir que podemos utilizar la diferencial de f en x_0 para obtener una buena aproximación de $f(x_0 + dx)$.

Ejercicio 3.39 *Calcular la diferencial de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \ln(3x - 2)$

d) $f(x) = sen^2(5x - \pi)$

Ejercicio 3.40 *Utilizando la diferencial estimar el valor de* $\sqrt{67}$.

Ejercicio 3.41 *Utilizando la diferencial estimar el valor de* $tg\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

3.2. Ejercicios

1. Investigar si la función f es derivable en el valor x_0 indicado. En caso afirmativo, encontrar la ecuación de la recta tangente y normal en el punto $(x_0, f(x_0))$.

   a) $f(x) = 1 - 2x - x^2$ en $x_0 = 0$

   b) $f(x) = 2x^4 + 3$ en $x_0 = 2$

   c) $f(x) = \sqrt{x-2}$ en $x_0 = 2$

   d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ en $x_0 = 5$

2. Investigar si cada una de las siguientes funciones es derivable en los valores de x_0 que se indican

   a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ en $x_0 = 3^+$

   b) $f(x) = |3x - 2|$ $x_0 = \frac{2}{3}$

3. Sea la función $f(x) = x^3 - 5x + 1$, calcular $f'(1)$ y usar el resultado para hallar la ecuación de la recta tangente en el punto $(1, -3)$. Realizar la representación gráfica de la función f y la recta tangente en un mismo gráfico.

4. Realizar la representación gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y graficar las rectas tangentes en los puntos $x = 1$ y $x = -1$. Extraer conclusiones.

5. Sea la función $f(x) = 1 - x^3$, calcular $f'(0)$ y usar el resultado para hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(0, 1)$.

6. Hallar la función $f'(x)$ usando la definición de derivada:

   a) $f(x) = \cos x$ *b)* $f(x) = \frac{1}{x}$ *c)* $f(x) = \ln(x)$

7. Sea la función $f(x) = x^3 - 3x$, determine los puntos de la gráfica donde la recta tangente es horizontal. Justifique y grafique.

8. Hallar los valores de a y b para que la función f sea derivable en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

9. Dada la función $f(x) = \sqrt{x-4}$, demostrar que f es continua por la derecha en $x = 4$. Demostrar que $f'_+(4)$ no existe.

10. Dada la función $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, demostrar que es continua por derecha en $x = 0$. Demostrar que $f'_{+}(0)$ existe y determinar su valor. Realizar la representación gráfica de la función f.

11. Dadas las siguientes funciones, determinar si son continuas y derivables en el x_0 indicado

    a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x \leq -4 \\ \\ -x-6 & \text{si} \quad x > -4 \end{cases}$ en $x_0 = -4$

    b) $f(x) = 1 + |x+2|$ en $x_0 = -2$

    c) $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si} \quad x < 2 \\ \\ \sqrt{x-2} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$ en $x_0 = 2$

12. Hallar la función derivada f' de cada una de las siguientes funciones utilizando las reglas de derivación:

    a) $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 2x + 1$

    b) $f(x) = \frac{x-1}{x}$

    c) $f(x) = \frac{x^3}{(4-x^2)^3}$

    d) $f(x) = \sqrt{6x^2 - 3x - 2}$

    e) $f(x) = (x^2+1) \,.\, \ln(x)$

    f) $f(x) = tg\,(x)$

    g) $f(x) = cosh^5\,(x)$

    h) $f(x) = \ln^2(senh\,(x))$

    i) $f(x) = sen^3\,(5x)\,cos^2\left(\frac{x}{3}\right)$

    j) $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - \sqrt{\frac{3}{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt{x^2-1}$

    k) $f(x) = xsen\,(x) + \sqrt[3]{x^2}$

    l) $f(x) = \ln\,(senh\,(x))^3$

    m) $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+e^x} - 1\right) - \ln\left(\sqrt{1+e^x} + 1\right)$

    n) $f(x) = \sqrt{\frac{2x-5}{3x+1}}$

    o) $f(x) = tg(\sqrt{x^2+1})$

13. Hallar la función derivada f' de cada una de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = (x^2+1)^{\sqrt{x}}\, cos\,(4x)$ $\qquad b)\ f(x) = 3^{sen(x)} - 5\cdot 2^{tg(x)}$

$c)\ f(x) = \left(sen^3\,(x)\right)^{\ln(x)}$ $\qquad d)\ f(x) = 2^{x^x}$

$e)\ f(x) = (sen\,(\ln 5x))^{cos(x)}$ $\qquad f)\ f(x) = 7^{5x+\ln\left(x^2\right)} + sen^3\,(x^2+1)$

$g)\ f(x) = x^{\sqrt{x}}$ $\qquad h)\ f(x) = (cos\,(3x))^{3x^2+2x}$

$i)\ f(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)^{sen(x)}$

14. Hallar la función derivada f' de cada una de las siguientes funciones definidas por ramas:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si} \quad x<2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = 1 + |x+2|$

c) $f(x) = \begin{cases} sen^2\,(3x) & \text{si} \quad x<0 \\ x^2+e^x & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$

15. Se define la *derivada segunda f'' de una función f* como la función derivada de la función f'. Calcular la derivada primera y segunda de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = (2x + sen\,(x))^3$ $\qquad c)\ h(x) = \ln\,(sen\,(4x))$

$b)\ g(x) = e^x\,(x^2+3x-1)$ $\qquad d)\ i(x) = \frac{x^2+x}{\ln(x)}$

16. Probar que cada función f satisface la ecuación indicada.

$a)\ f(x) = 2sen\,(x) + 3cos\,(x)$ $\qquad f''(x) + f(x) = 0$

$b)\ f(x) = \frac{10-cos(x)}{x}$ $\qquad xf'(x) + f(x) = sen\,(x)$

T.U.A.S.Q.S

1. La derivada de una función par, ¿es una función impar? Dé un ejemplo.

2. La derivada de una función impar, ¿es una función par?

3. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar su respuesta:

a) Si f es continua en a, entonces f es derivable en a

b) Si $f'(a)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

c) Si f es derivable, entonces $f'(\sqrt{x}) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{x}}$

d) Si f es derivable, entonces $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

3.3. Teoremas de aplicación de derivadas

La interpretación de la derivada como la pendiente de la recta tangente proporciona información acerca del comportamiento de las funciones y de sus gráficas.

El objetivo de esta sección es estudiar cómo el conocimiento de la derivada de una función nos da información acerca de la función misma. En la primer parte de esta sección enunciaremos, demostraremos y utilizaremos algunos teoremas que nos brindan herramientas para completar el análisis de una función f.

Definición 3.42 *Se dice que el punto* $(x_0, f(x_0))$ *es un* ***máximo absoluto*** *de* f *si* $f(x_0) \geq f(x)$ *para todo* x *en el dominio de* f.

Definición 3.43 *Se dice que el punto* $(x_0, f(x_0))$ *es un* ***máximo relativo*** *de* f *si* $f(x_0) \geq f(x)$ *para todo* x *perteneciente a un entorno de* x_0.

Definición 3.44 *Se dice que el punto* $(x_0, f(x_0))$ *es un* ***mínimo absoluto*** *de* f *si* $f(x_0) \leq f(x)$ *para todo* x *en el dominio de* f.

Definición 3.45 *Se dice que el punto* $(x_0, f(x_0))$ *es un* ***mínimo relativo*** *de* f *si* $f(x_0) \leq f(x)$ *para todo* x *perteneciente a un entorno de* x_0.

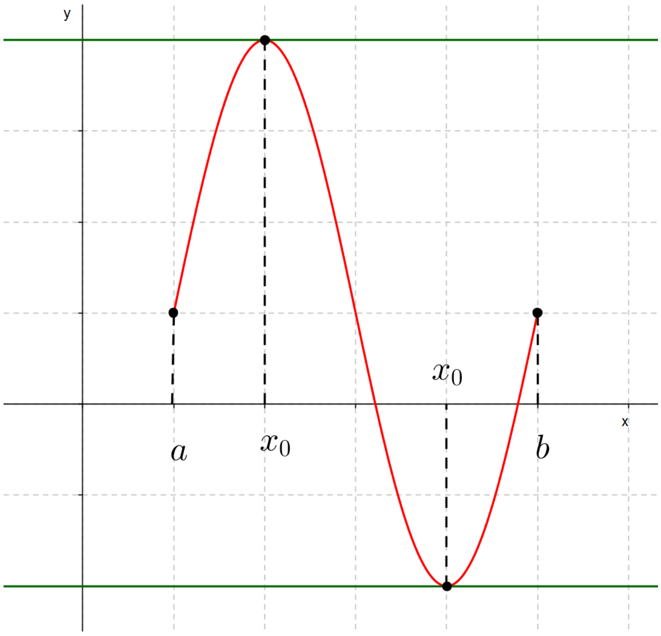
El siguiente teorema establece que toda función continua en un intervalo cerrado alcanza un máximo y un mínimo en dicho intervalo.

Teorema 3.46 *Si* f *es una función continua en el intervalo cerrado* $[a, b]$, *entonces existen* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *tal que* $(x_1, f(x_1))$ *es un máximo absoluto de* f *y* $(x_2, f(x_2))$ *es un mínimo absoluto de* f.

La demostración de este teorema se deja para el lector interesado.

Teorema 3.47 (Fermat) *Sea* f *definida en el intervalo abierto* (a, b), *y* $x_0 \in (a, b)$. *Si* f *es derivable en* x_0 *y* $(x_0, f(x_0))$ *es un máximo o un mínimo de* f, *entonces*

$$f'(x_0) = 0$$



(ver gráfico correspondiente en la página de la cátedra).

Demostración 3.48 *Supongamos primero que* $(x_0, f(x_0))$ *es un mínimo, entonces* $f(x_0) \leq f(x)$ *para todo* $x \in (a,b)$. *Como* f *es derivable en* x_0 *entonces existe* $f'(x_0)$. *Analicemos las derivadas laterales de la función* f *en* x_0. *Consideremos primero la derivada lateral por derecha*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

pero cuando $x \to x_0^+$ *es* $x - x_0 > 0$ *y* $f(x) - f(x_0) \geq 0$ *por ser* x_0 *mínimo. Luego para* $x > x_0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad y \text{ entonces} \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

Consideremos ahora la derivada lateral por izquierda

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

cuando $x \to x_0^-$ *es* $x - x_0 < 0$ *y* $f(x) - f(x_0) \geq 0$ *por ser* x_0 *mínimo. Luego para* $x < x_0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \quad y \text{ entonces} \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

Luego

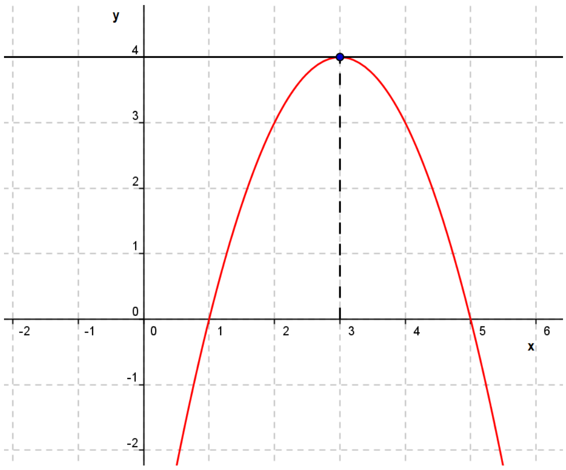
$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \quad \text{entonces} \quad f'(x_0) = 0$$

La demostración para cuando $(x_0, f(x_0))$ *es un máximo es análoga y se deja como ejercicio para el lector.*

Ejemplo 3.49 *Sea la función* $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ *en* $(-1, 7)$. *Como* f *es una función cuadrática convexa el vértice (3,4) es un máximo, y* f *es derivable es una función derivable. Verifiquemos que se cumple el Teorema de Fermat*

$$f'(x) = -2x + 6 \quad y \quad f'(3) = 0$$

También es posible verificar la conclusión del teorema de Fermat observando la representación gráfica de la función f, ya que la recta tangente a la función en $x_0 = 3$ es horizontal, por lo que su pendiente es 0.



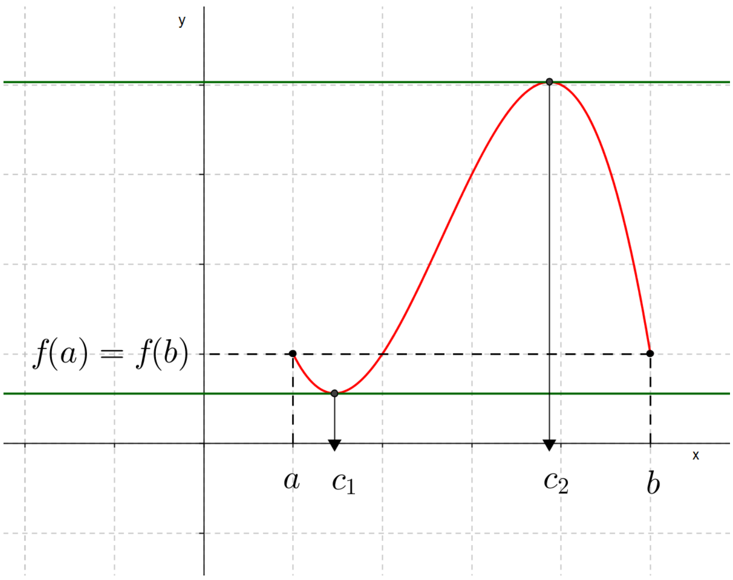
Teorema 3.50 (Rolle) *Sea f una función que cumple las siguientes condiciones:*

i) *Continua en* $[a, b]$.

ii) *Derivable en* (a, b).

iii) $f(a) = f(b)$.

Entonces existe al menos un valor real c perteneciente al intervalo (a, b) tal que $f'(c) = 0$.



(ver gráfico correspondiente en la página de la cátedra).

Demostración 3.51 *Como f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ por el teorema 3.46, f alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo. Sea*

$$(x_1, f(x_1)) \text{ mínimo absoluto} \quad y \quad (x_2, f(x_2)) \text{ máximo absoluto}$$

Si $x_1 \neq a$ y $x_1 \neq b$ (es decir no es ninguno de los extremos) entonces $x_1 \in (a,b)$ y se cumplen las condiciones del Teorema de Fermat para $(x_1, f(x_1))$. Luego

$$f'(x_1) = 0$$

es decir $c = x_1$.

Analogamente si $x_2 \neq a$ y $x_2 \neq b$ (es decir no es ninguno de los extremos) entonces $x_2 \in (a,b)$ y se cumplen las condiciones del Teorema de Fermat para $(x_2, f(x_2))$. Luego

$$f'(x_2) = 0$$

es decir $c = x_2$.

Si x_1 y x_2 están en los extremos, supongamos sin pérdida de generalidad que $x_1 = a$ y $x_2 = b$. Pero como por hipótesis $f(a) = f(b)$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$.

Como $(x_1, f(x_1))$ es mínimo absoluto, $f(x_1) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$ y como $(x_2, f(x_2))$ es máximo absoluto, $f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a,b]$. Luego

$$f(x_1) = f(x) = f(x_2) \qquad \text{para todo } x \in [a,b]$$

es decir, f es una función constante cuya derivada es

$$f'(x) = 0 \qquad \text{para todo } x \in [a,b]$$

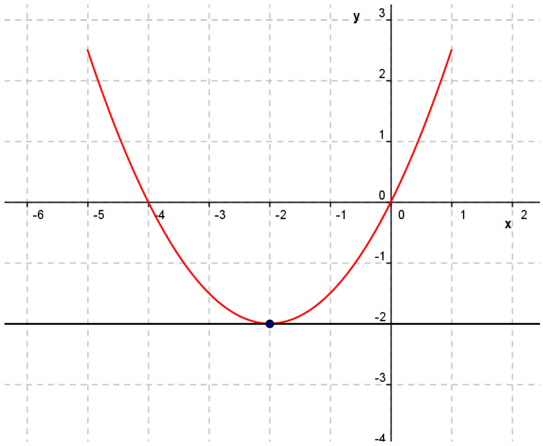
Con lo cual queda demostrado el teorema.

Ejemplo 3.52 *Considerar la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ y verificar que se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-5,1]$. Luego determinar el o los valores $c \in (-5,1)$ tal que $f'(c) = 0$.*

La función f es continua en $[-5,1]$ por ser una función polinómica. La función f es derivable en $(-5,1)$ por ser una función polinómica. Además verifica que $f(-5) = f(1) = \frac{5}{2}$. Entonces existe $c \in (-5,1)$ tal que $f'(c) = 0$. Para determinar c resolvamos la ecuación

$$f'(c) = 0$$
$$c + 2 = 0$$
$$c = -2$$

es decir $c = -2$.



Ejercicio 3.53 *Determinar si las siguientes funciones cumplen las hipótesis del teorema de Rolle en los intervalos indicados:*

Ejemplo 3.54 a) $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in [0,1) \\ 0 & si \quad x = 1 \end{cases}$ *en* $[0,1]$.

b) $f(x) = |x|$ *en* $[-1,1]$.

c) $f(x) = x$ *en* $x \in [0,1]$.

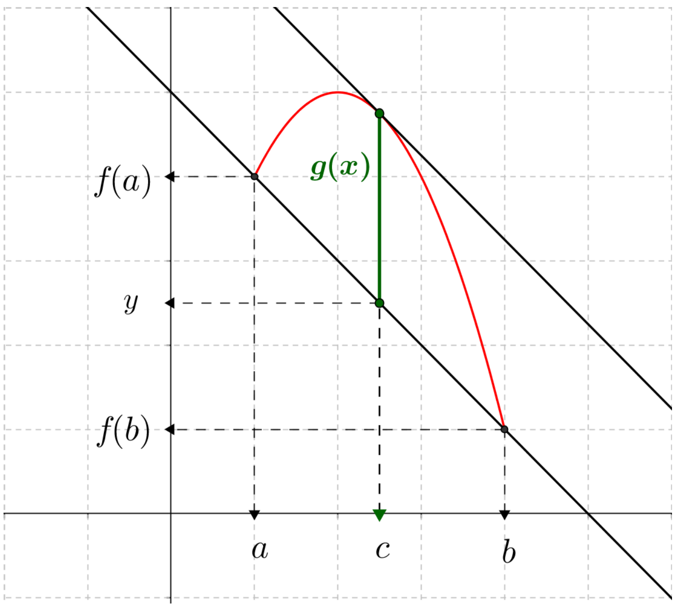
Teorema 3.55 (Lagrange o Teorema del Valor Medio) *Sea* f *una función que cumple las siguientes condiciones:*

i) *Continua en* $[a,b]$.

ii) *Derivable en* (a,b)

Entonces existe al menos un valor real c *perteneciente al intervalo* (a,b) *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$



(ver gráfico correspondiente en la página de la cátedra).

Demostración 3.56 *Consideremos para cada* $x \in [a,b]$, *la longitud* $g(x)$ *del segmento vertical indicado en la figura,*

$$g(x) = f(x) - y$$

para determinar y *consideremos la recta que pasa por los puntos* $(a, f(a))$ *y* $(b, f(b))$ *cuya ecuación es*

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

entonces

$$y = (x-a)\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + f(a)$$

Luego la función $g(x)$ es

$$g(x) = f(x) - y = f(x) - (x-a)\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f(a)$$

Verifiquemos que la función $g(x)$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle:

- *$g(x)$ es continua en $[a,b]$ por ser producto y diferencia de funciones continuas en $[a,b]$.*
- *$g(x)$ es derivable en (a,b) por ser producto y diferencia de funciones derivables en (a,b).*
- *Analicemos la imagen de los extremos del intervalo*

  $$g(a) = f(a) - (a-a)\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f(a) = 0$$

  $$g(b) = f(b) - (b-a)\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f(a) = 0$$

  es decir $g(a) = g(b)$.

Entonces podemos aplicar el Teorema de Rolle, que asegura la existencia de $c \in (a,b)$ tal que $g^{'}(c) = 0$. Como

$$g^{'}(x) = f^{'}(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

entonces

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

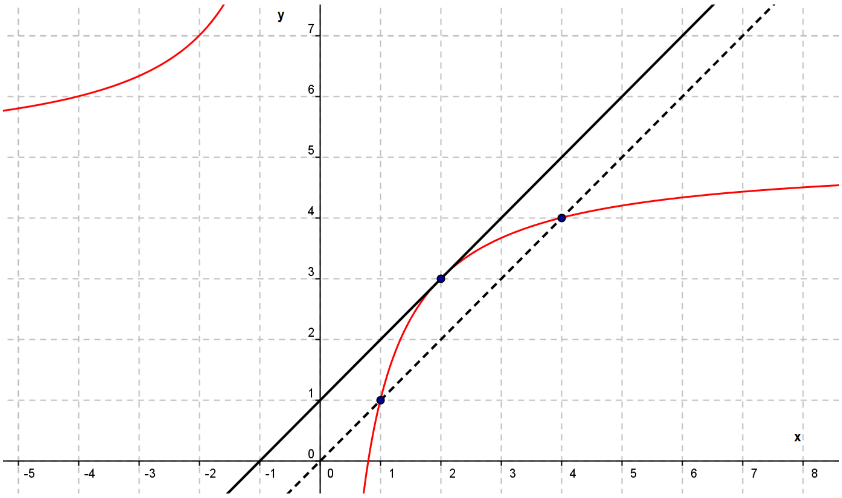
que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo 3.57 *Considerar la función $f(x) = 5 - \frac{4}{x}$, y verificar que se cumplen las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[1,4]$. Luego determinar el o los valores $c \in (1,4)$ tal que $f'(c) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1}$.*

Sabemos que la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(1, f(1))$ y $(4, f(4))$ es $\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{4-1}{4-1} = 1$. Como f satisface las condiciones del teorema de Lagrange existe al menos un $c \in (1,4)$ para el cual $f'(c) = 1$. Para determinar c resolvamos la ecuación

$$\begin{aligned} f'(c) &= 1 \\ \frac{4}{c^2} &= 1 \\ c &= \pm 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto en el intervalo $(1, 4)$ *concluimos que* $c = 2$.



Teorema 3.58 (Cauchy) *Sean las funciones* f *y* g *que cumplen las siguientes condiciones:*

i) *Continuas en* $[a, b]$.

ii) *Derivables en* (a, b).

iii) $g'(x) \neq 0$ *en todos los valores del intervalo* (a, b).

Entonces existe al menos un valor real c perteneciente al intervalo (a, b) *tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Demostración 3.59 *Consideremos la función*

$$h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$$

la función $h(x)$ *es continua en* $[a, b]$ *y derivable en* (a, b) *, por ser producto y diferencia de funciones de ese tipo, además*

$$h(a) = (f(b) - f(a))(g(a) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(a) - f(a)) = 0$$

$$h(b) = (f(b) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(b) - f(a)) = 0$$

entonces $h(x)$ *satisface las hipótesis del teorema de Rolle, por lo que existe al menos un valor* $c \in (a, b)$ *tal que* $h'(c) = 0$. *Como*

$$h'(x) = (f(b) - f(a)).g'(x) - (g(b) - g(a)).f'(x)$$

entonces

$$0 = h'(c) = (f(b) - f(a)).g'(c) - (g(b) - g(a)).f'(c) = 0$$

Si $g'(x) \neq 0$ *entonces*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ejercicio 3.60 *Determinar las derivadas de las siguientes funciones y establecer conclusiones:*

$$f(x) = \sin(3x) + 145 \qquad g(x) = \sin(3x) + \tfrac{\pi}{2} \qquad h(x) = \sin(3x)$$

Proposición 3.61 *Sean f y g funciones que cumplen las siguientes condiciones:*

Proposition 3.62 **i)** *Continuas en $[a, b]$.*

ii) *Derivables en (a, b).*

iii) $f'(x) = g'(x)$.

Entonces f y g son funciones que difieren en una constante, es decir existe c un número real tal que

$$f(x) = g(x) + c \quad \textit{para todo} \quad x \in [a, b]$$

3.4. Ejercicios

1. Verificar si las siguientes funciones cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle. En caso afirmativo hallar los valores de c que verifican la conclusión del teorema.

a) $f(x) = x - x^3$	en	$[-1, 0]$	*d*) $f(x) = 4x^2 - 9x$	en	$\left[0, \frac{3}{2}\right]$
b) $f(x) = x - x^3$	en	$[0, 1]$	*e*) $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$	en	$[0, 3]$
c) $f(x) = 4x^2 - 9x$	en	$\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$	*f*) $f(x) = x\sqrt{x+6}$	en	$[-6, 0]$

2. Verificar la representación gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4}$. Probar que la recta que pasa por los puntos $\left(-\frac{1}{9}, f\left(-\frac{1}{9}\right)\right)$ y $\left(\frac{5}{3}, f\left(\frac{5}{3}\right)\right)$ es paralela a la recta tangente a f en $\left(\frac{7}{9}, f\left(\frac{7}{9}\right)\right)$.

3. Verificar si las siguientes funciones cumplen las hipótesis del Teorema de Lagrange. En caso afirmativo hallar los valores de c que verifican la conclusión del teorema.

a) $f(x) = x - x^3$	en	$[-2, 1]$	*d*) $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$	en	$[0, 5]$
b) $f(x) = x + \frac{2}{x}$	en	$[1, 3]$	*e*) $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$	en	$[3, 5]$
c) $f(x) = x + \frac{2}{x}$	en	$[-1, 3]$	*f*) $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$	en	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

4. Demostrar que la ecuación $3x - 2 + cos(\pi x/2) = 0$ tiene una raiz y sólo una.

5. Demostrar que la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$ tiene por lo menos una raíz real en el intervalo $(0, 1)$.

6. Comprobar que las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ verifican las hipótesis del Teorema de Cauchy en el intervalo $[1, 4]$ y hallar los valores de c que verifican la conclusión del teorema.

7. Comprobar que las funciones $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$ y $g(x) = x^3 - 4x + 2$ verifican las hipótesis del Teorema de Cauchy en el intervalo $[0, 1]$

T.U.A.S.Q.S

1. Sea la función $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Comprobar que $f(1) = f(-1)$ pero no hay un número c en $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$ ¿Por que no se contradice el Teorema de Rolle?

2. Sea la función $f(x) = (x-1)^{-2}$. Comprobar que $f(0) = f(2)$ pero no existe un valor c en $(0, 2)$ que verifique $f'(c) = 0$.¿Por que no se contradice el Teorema de Rolle?

3. Sea $f(x) = |x-1|$. Comprobar que no hay un valor c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3-0)$.¿Porque este hecho no contradice el Teorema del Valor Medio?

4. ¿Es verdadero el recíproco del Teorema de Rolle?

3.5. Regla de L'Hôpital

En el capítulo de Límite y Continuidad se calcularon algunos límites indetermindos. En esta sección, estudiaremos una técnica que se conoce como *Regla de L´Hôpital*, en honor al matemático francés Guillermo Francisco Antonio de L´Hôpital (1661-1704), quien escribió el primer libro de cálculo, publicado en 1696. Este trabajo apareció en muchas ediciones y desempeñó un papel importante en la divulgación del cálculo. Gran parte del contenido, incluyendo el método conocido como Regla de L ´Hôpital, se basó en el trabajo anterior de Juan Bernoulli, uno de los maestros de L ´Hôpital.

Esta técnica nos servirá para calcular todos los límites en los que intervienen formas indeterminadas. Recordemos que los casos pueden ser:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0.\infty; \infty - \infty; 0^0; \infty^0; 1^\infty$$

Teorema 3.63 (Regla de L´Hôpital) *(Caso 0/0): Sean f y g funciones derivables en el intervalo (a,b). Sea $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, con $x \neq x_0$. Entonces si existe el limíte $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica la siguiente igualdad:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nota 1: La regla de L'Hôpital afirma que el límite de un cociente de funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas, siempre que se satisfagan las condiciones establecidas en el teorema. Es muy importante comprobar las condiciones referentes a los límites de f y g, antes de utilizar la conclusión del teorema.

Nota 2: La regla de L'Hôpital también es válida para los límites laterales y los límites en el infinito ($+\infty$ y ∞), es decir

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo 3.64 *Calcular el siguiente límite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

Como ambas funciones son derivables, $g'(0) \neq 0$ y $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \frac{0}{0}$, apliquemos la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{2x} - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2.e^{2x}}{1} = 2$$

Ejercicio 3.65 *Calcular los siguientes límites:*

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x}$

Teorema 3.66 (Regla de L´Hôpital) *(Caso ∞/∞): Sean f y g funciones derivables en el intervalo (a,b). Sea $x_0 \in (a,b)$ tal que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, con $x \neq x_0$. Entonces si existe el limíte $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica la siguiente igualdad:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nota 1: La regla de L'Hôpital afirma que el límite de un cociente de funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas, siempre que se satisfagan las condiciones establecidas en el teorema. Es muy importante comprobar las condiciones referentes a los límites de f y g, antes de utilizar la conclusión del teorema.

Nota 2: La regla de L'Hôpital también es válida para los límites laterales y los límites en el infinito ($+\infty$ y ∞), es decir

$$\lim_{x\to x_0^+} \tfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \tfrac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \lim_{x\to x_0^-} \tfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^-} \tfrac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \lim_{x\to \infty} \tfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to \infty} \tfrac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo 3.67 *Calcular el límite $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-2}}$. Vemos que para $x \to 0$ resulta*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-2}} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = \infty \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^{-2} = \infty \end{cases}$$

y como se cumplen las condiciones planteadas anteriormente, aplicamos la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{-2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{-2} = 0$$

Los otros casos de indeterminación pueden ser estudiados utilizando alguno de los casos $0/0$ ó ∞/∞.

Ejemplo 3.68 *(Caso $0.\infty$). Calcular el límite*

$$\lim_{x\to 0^+} x.\ln(x)$$

A primera vista, este no es un límite del tipo estudiado anteriormente (es de la forma $0.\infty$). Pero es fácil llevarlo a la forma anterior.

$$\lim_{x\to 0^+} x.\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Nota: Es posible que en determinadas situaciones sea necesario aplicar en forma reiterada la Regla de L'Hôpital.

Ejemplo 3.69 *(Caso $\infty - \infty$). Calcular el siguiente límite*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

Al intentar calcularlo, observamos que es una indeterminada del tipo $\infty-\infty$. Para resolver esa indeterminación, primero hacemos la resta y vemos que la indeterminación es ahora del tipo $0/0$. *Asi estamos en condiciones de aplicar la Regla de L´Hôpital*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)}\right)=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(\ln(x)-x+1)'}{((x-1)\ln(x))'}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1-x}{x\ln x+x-1}\right]$$

Pero este límite vuelve a ser una indeterminación del tipo $0/0$, *con lo cual debemos aplicar nuevamente la Regla de L´Hôpital*

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{1-x}{x\ln(x)+x-1}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(1-x)'}{(x\ln(x)+x-1)'}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{-1}{\ln(x)+1+1}\right]=-\frac{1}{2}$$

Ejemplo 3.70 *(Caso 0^0). Calcular el límite*

$$\lim_{x\to 0^+}(sen\,(x))^x$$

Suponemos que el límite existe en el valor

$$L=\lim_{x\to 0^+}(sen\,(x))^x$$

$$\ln L=\ln\left(\lim_{x\to 0^+}(sen\,(x))^x\right)=\lim_{x\to 0^+}\ln(sen\,(x))^x=\lim_{x\to 0^+}x.\ln sen\,(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln sen\,(x)}{1/x}$$

reemplazando obtenemos la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, aplicamos entonces la Regla de L'Hôpital,

$$\ln L=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln sen\,(x))'}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot(x)}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{x^2}{tg\,(x)}$$

Pero esta forma es una indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo que aplicamos nuevamente la Regla de L'Hôpital

$$\ln L=\lim_{x\to 0^+}-\frac{(x^2)'}{(tg\,(x))'}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{2x}{\sec^2(x)}=0$$

Ahora de $\ln L=0$ *deducimos que* $L=e^0=1$ *y en consecuencia,*

$$L=\lim_{x\to 0^+}(sen\,(x))^x=1$$

Ejemplo 3.71 *(Caso 1^∞). Calcular el siguiente límite*

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$$

Al igual que en el ejemplo anterior es conveniente calcular el logaritmo de este límite:

$$L = \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\ln L = \ln\left(\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}\right) = \lim_{x\to 1} \ln x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\ln(x)\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}$$

reemplazando tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, entonces aplicamos la Regla de L'Hôpital

$$\ln L = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1} = 1$$

Ahora bien, si $\ln L = 1$ entonces $L = e$.

Ejemplo 3.72 *(Caso ∞^0) Calcular el siguiente límite*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^x$$

Es una indeterminación del tipo ∞^0. Para resolverla, al igual que en los ejemplos anteriores, suponemos que el límite existe siendo el valor L y aplicamos logaritmo natural

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^x \\ \ln L &= \ln\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^x\right) = \lim_{x\to 0}\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)^x\right] \\ \ln L &= \lim_{x\to 0}\left[x.\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right] \end{aligned}$$

Este límite que resulta es una indeterminda del tipo $0.\infty$. Ya sabemos que para resolver ese tipo de indeterminaciones, debemos reescribir el límite de manera que quede una indeterminada del tipo $0/0$ o ∞/∞. Entonces escribimos

$$\ln L = \lim_{x\to 0}\left[x.\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1/x}\right]$$

y ahi aplicamos la Regla de L´Hôpital

$$\ln L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}{(1/x)'}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x.(-x^{-2})}{-x^{-2}}\right] = \lim_{x\to 0} x = 0$$

Para saber cuanto vale L, hacemos $L = e^0 = 1$, por lo tanto el valor del limite es

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^x = 1$$

3.6. Ejercicios

1. Calcular los siguientes límites aplicando la Regla de L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{1-x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-sen(x)}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{sen(x)}-\frac{1}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan(3x)}{\tan(5x)}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot(2x)$

g) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}$

h) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\cos(x))^{\frac{\pi}{2}-x}$

i) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(sen(x))^{\tan x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{2/x}$

k) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}$

m) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{\ln(x)-\ln(a)}$

n) $\lim\limits_{x\to 0}x^{sen(x)}$

o) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos(x))^{\ln(\cos(x))}$

p) $\lim\limits_{y\to 1}\frac{y-1}{\ln(y)}$

q) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

r) $\lim\limits_{x\to 0}(x-sen(x)).\ln(x)$

s) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^{2}}{(x-sen(x))}$

t) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos(x))\cot(x)$

u) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{\ln(x)}\right)$

v) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\left(\pi\frac{x}{2}\right)}$

m) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(2x))^{3/x^{2}}$

x) $\lim\limits_{x\to 0}x.e^{1/x}$

y) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{-1}-\cot(x)\right)$

z) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{x}{x-1}\right)$

3.7. Estudio de funciones

La interpretación de la derivada como la pendiente de la recta tangente proporciona información acerca del comportamiento de las funciones, lo cual resulta muy útil para trazar su gráfica. Por ejemplo, la función derivada puede emplearse para determinar en que puntos la recta tangente es horizontal; estos son los puntos donde la derivada es cero.

Proposición 3.73 *Sea f una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b),*

a) *Si $f^{'}(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f* ***es estrictamente creciente en*** *$[a,b]$.*

b) *Si $f^{'}(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces f* ***es estrictamente decreciente en*** *$[a,b]$.*

Demostración 3.74 *Comencemos demostrando la parte a) de la proposición.*

Sean $x_1, x_2 \in (a,b)$ tal que $x_1 < x_2$. Como f es una función continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2) se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor Medio, por lo que concluímos que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f^{'}(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Longrightarrow f^{'}(c)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$$

siendo $f^{'}(c)(x_2 - x_1) > 0$ (por ser $f^{'}(x) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$). Por lo que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, es decir $f(x_2) > f(x_1)$. Luego f es estrictamente creciente.

Para demostrar la parte b) de la proposición se procede en forma similar, se deja como ejercicio.

Definition 3.75 *Sea x_0 perteneciente al dominio de f. El punto $(x_0, f(x_0))$ se denomina* ***Punto Crítico*** *de la función f si cumple alguna de las siguientes condiciones:*

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{ó} \quad f'(x_0) \ \text{no existe}$$

IMPORTANTE: Los puntos críticos de una función son posibles máximos o mínimos relativos de la misma.

Proposición 3.76 *Supongamos que x_0 es un valor del dominio de f tal que $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) \neq 0$. Entonces:*

a) *Si $f''(x_0) > 0$ entonces $(x_0, f(x_0))$ es un* ***mínimo relativo*** *de f.*

b) *Si $f''(x_0) < 0$ entonces $(x_0, f(x_0))$ es un* ***máximo relativo*** *de f.*

Demostración 3.77 *Notemos que para hablar de derivada segunda en x_0, debe tener derivada primera en un entorno de x_0. Luego*

a) *Si* $f''(x_0) > 0$*, entonces*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)}{h} > 0$$

Si $0 < h < \delta \Longrightarrow f'(x_0+h) > 0$. *Por otro lado, si* $-\delta < h < 0 \Longrightarrow f'(x_0+h) < 0$. *Pero esto es lo mismo que decir que* $f' > 0$ *en* $(x_0, x_0+\delta)$*, entonces* f *crece y* $f' < 0$ *en* $(x_0-\delta, x_0)$ *entonces* f *decrece. Por lo tanto* $(x_0, f(x_0))$ *es un mínimo.*

b) *Para demostrar este inciso es un razonamiento análogo, queda como ejercicio.*

Ejemplo 3.78 *Encontrar los máximos y mínimos de la función* $f(x) = x^3 - 6x + 2$ *cuyo dominio es* $\mathbb{R}$*.*

Busquemos los puntos críticos de f*, para ello calculemos la derivada de* f*.*

$$f'(x) = 3x^2 - 6$$

Como el dominio de f' *es* $\mathbb{R}$*, encontramos los puntos críticos resolviendo la ecuación*

$$f'(x) = 3x^2 - 6 = 0$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = -\sqrt{2}$ *y* $x_2 = \sqrt{2}$ *por lo que los puntos críticos son* $P_1 = \left(-\sqrt{2}, f\left(-\sqrt{2}\right)\right)$ *y* $P_2 = \left(\sqrt{2}, f\left(\sqrt{2}\right)\right)$*. Para determinar si son máximos relativos o mínimos relativos utilicemos la proposición 3.76. Como* $f''(x) = 6x$ *y*

$$f''\left(-\sqrt{2}\right) < 0 \quad \textit{entonces} \quad \left(-\sqrt{2}, f\left(-\sqrt{2}\right)\right) \ \textit{es máximo}$$

$$f''\left(\sqrt{2}\right) > 0 \quad \textit{entonces} \quad \left(\sqrt{2}, f\left(\sqrt{2}\right)\right) \ \textit{es mínimo}$$

IMPORTANTE: Notar que las condiciones $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$ son suficientes para que $(x_0, f(x_0))$ sea un mínimo o máximo relativo pero no necesarias.

En el siguiente ejemplo ilustramos esta observación.

Ejemplo 3.79 *Determinar los máximos y mínimos de la función* $f(x) = x^4$*.*

usquemos los valores del dominio en los cuales f' *se anula*

$$f'(x) = 4x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Ahora calculamos la segunda derivada, $f''(x) = 12x^2$ *y observamos que* $f''(0) = 0$*. Entonces no podemos aplicar la Proposición (3.76). Sin embargo observando la representación gráfica sabemos que* f *tiene un mínimo en* $(0, f(0))$*.*

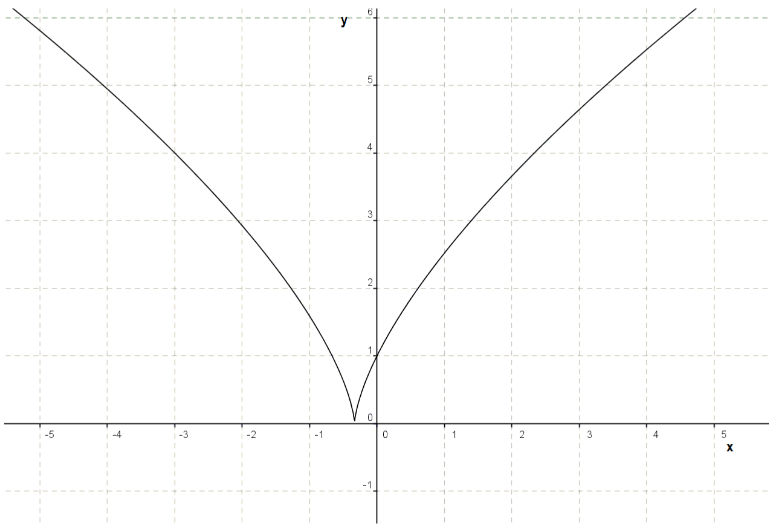
La siguiente proposición nos brinda una herramienta para analizar si un punto crítico $(x_0, f(x_0))$ es una máximo ó mínimo, sin utilizar f''.

Proposición 3.80 *Si f es continua en un intervalo abierto que contiene a x_0 y $f'(x_0) = 0$, entonces:*

a) *Si $f'(x_0 - \epsilon) < 0$ (la función decrece) y $f'(x_0 + \epsilon) > 0$ (la función crece) entonces en $(x_0, f(x_0))$ hay un mínimo relativo.*

b) *Si $f'(x_0 - \epsilon) > 0$ (la función crece) y $f'(x_0 + \epsilon) < 0$ (la función decrece) entonces en $(x_0, f(x_0))$ hay un máximo relativo.*

Ejemplo 3.81 *Sea $f(x) = (3x+1)^{\frac{2}{3}}$ cuyo dominio es $\mathbb{R}$. Como $f'(x) = 2.(3x+1)^{-\frac{1}{3}}$, no es difícil de ver que $f'(x) \neq 0$ para todo x, pero como $f'(x)$ no está definida en $x = -\frac{1}{3}$, aunque este valor sí pertenece al dominio de f, el punto $\left(-\frac{1}{3}, f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ es un punto crítico de f. Si observamos la representación gráfica de f vemos que en ese punto existe un mínimo.*



¿Cómo nos damos cuenta de esto sin realizar la gráfica? Analizamos el signo de la función derivada f' en un entorno de $x = -\frac{1}{3}$. Consideremos los valores $x = -1$ y $x = 0$. Como $f'(-1) < 0$ y $f'(0) > 0$ entonces en $\left(-\frac{1}{3}, f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ hay un mínimo relativo.

El estudio de la derivada segunda de una función nos dice si la función es **cóncava** o **convexa**.

Definición 3.82 *Sea f una función. Un punto $(x_0, f(x_0))$ se denomina* ***punto de inflexión*** *si en él la curva que representa la función f pasa de cóncava a convexa o viceversa.*

IMPORTANTE: Un punto $(x_0, f(x_0))$ es un posible punto de inflexión de la función f si satisface alguna de las siguientes condiciones

$$x_0 \notin Dom(f'') \quad \text{ó} \quad f''(x_0) = 0$$

Proposición 3.83 *Sea f una función tal que existe $f''(x)$:*

a) *Si* $f''(x) > 0$ *en* (a, b) *entonces la función es cóncava en* (a, b).

b) *Si* $f''(x) < 0$ *en* (a, b) *entonces la función es convexa en* (a, b).

Ejemplo 3.84 *Hallar puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de la función* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

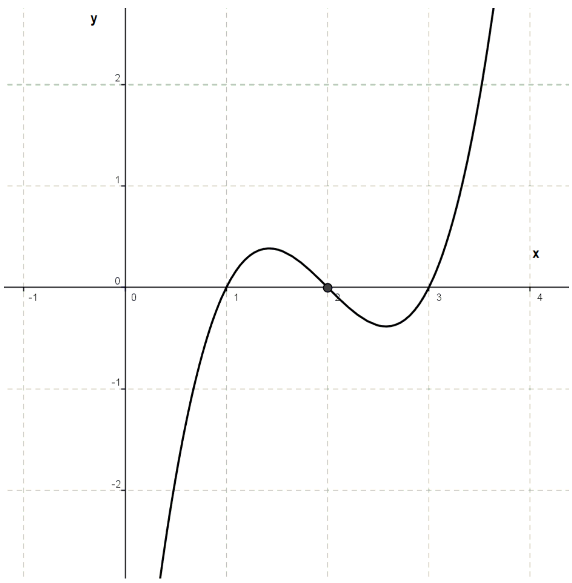
Para hallar los posibles puntos de inflexión derivamos dos veces la función f. *Como* $f''(x) = 6x - 12$ *los posibles puntos de inflexión resultan de resolver la siguiente ecuación*

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Estudiemos la concavidad de la función en un entorno de 2 *en el que la función es continua.*

$$\begin{aligned} f''(1) &< 0, \text{ entonces la función es convexa en } (-\infty, 2) \\ f''(3) &> 0, \text{ entonces la función es cóncava en } (2, \infty) \end{aligned}$$

Como la función pasa de convexa a cóncava, el punto $(2, 0)$ *y* $2 \in Dom(f)$, $(2, 0)$ *es un punto de inflexión.*



Resumimos ahora toda la información de como realizar el estudio de funciones utilizando derivada y cuya obtención puede ser útil para la representación gráfica de una función.

- Determinar el dominio de la función. Los puntos que no pertenecen al dominio pueden ser los puntos donde hay una asíntota vertical o bien un salto de la función.
- Determinar las asíntotas de la función.
- Determinar las raíces de la función y los intervalos de positividad y negatividad (considerando los valores que no pertenecen al dominio de f y las raíces de f).
- Determinar los puntos críticos de la función.

- Determinar los máximos y mínimos relativos.
- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función (considerando los valores que no pertenecen al dominio de f y las absisas de los puntos críticos de f).
- Determinar los puntos de inflexión.
- Determinar los intervalos de concavidad y convexidad (considerando los valores que no pertenecen al dominio de f y las absisas de los puntos de inflexión de f).
- Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en el análisis.

En el siguiente ejemplo se realizamos un estudio completo de la función.

Ejemplo 3.85 *Realizar un análisis completo de la función* $f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$ *y representar gráficamente.*

Su dominio es $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$. *Tiene asíntotas verticales en* $x = -3$ *y* $x = 3$ *debido a que*

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2}{x^2-9} = \infty$$
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2}{x^2-9} = \infty$$

Busquemos las asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-9} = 1$$

por lo tanto en $y = 1$ *la función tiene una asintota horizontal. No tiene asíntotas oblicuas.*

Busquemos las raíces

$$\frac{x^2}{x^2-9} = 0 \Longrightarrow x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

por lo tanto $C^0 = \{0\}$. *Luego* $C^+ = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ *y* $C^- = (-3, 0) \cup (0, 3)$.

Buscamos los puntos críticos.Como

$$f'(x) = -\frac{18x}{(x^2-9)^2}$$

y los valores -3 *y* 3 *no pertenecen al dominio de* f, *el punto crítico es* $(0, 0)$.

Busquemos los intervalos de crecimiento y decreciemiento de f. *El intervalo de decrecimiento es* $I_D = (0, 3) \cup (3, \infty)$ *y el intervalo de crecimiento es* $I_C = (-\infty, -3) \cup (-3, 0)$.

Ahora estudiamos los máximos y mínimos

$$f''(x) = \frac{54(x^2+3)}{(x^2-9)^3} \Longrightarrow f''(0) < 0 \text{ entonces existe un máximo en } (0, 0)$$

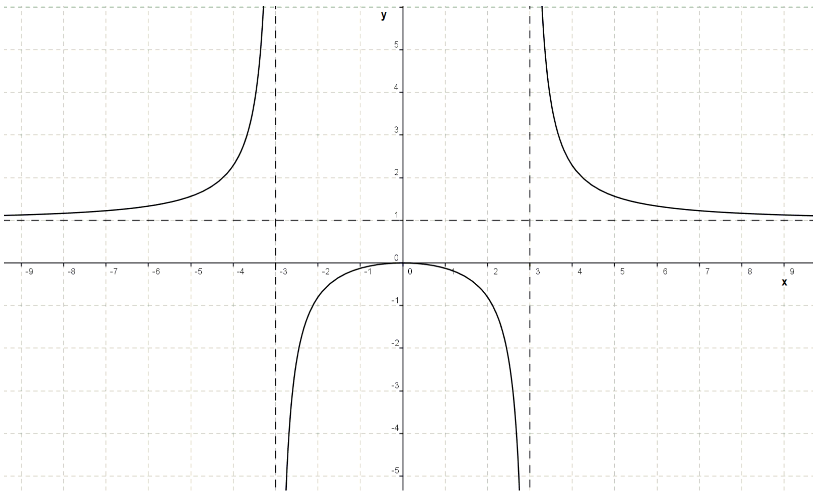
Busquemos los puntos de inflexión. No existe ningún valor tal que $f''(x) = 0$ *por lo que no hay puntos de inflexión.*

Busquemos los intervalos de concavidad y convexidad. Como $f''(x) < 0$ *si* $x \in (-3, 3)$, *entonces la función es convexa en ese intervalo, mientras que* $f''(x) > 0$ *si* $x \in (-\infty, 3)$ *ó* $x \in (3, \infty)$, *entonces en estos intervalos la función es cóncava.*

$$\textit{Intervalos de concavidad} = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$$

$$\textit{Intervalos de convexidad} = (-3, 3)$$

Con la información obtenida podemos realizar la representación gráfica de la función f.



Ejemplo 3.86 *Problema de Aplicación. Hallar el rectángulo de área máxima inscripto en la circunferencia* $x^2 + y^2 = 1$.

El área del rectángulo es:

$$A = 2x \cdot 2y$$

Debido a que el rectángulo debe estar inscripto en la circunferencia dada el área se puede reescribir como:

$$A(x) = 4x.\sqrt{1 - x^2}$$

Debemos maximizar la función $A(x)$.

$$A'(x) = 4\sqrt{1 - x^2} + 4x.\frac{(-2x)}{2\sqrt{1 - x^2}}$$

$$A'(x) = 4\frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ *es un punto crítico de la función* A*. Veamos si es un máximo:*

$$A''(x) = \frac{-3x + 2x^3}{(1 - x^2)^{3/2}}$$

$$A''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \textit{es un máximo}$$

Luego si $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *resulta* $y = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$*. Por consiguiente el rectángulo de área máxima es un cuadrado.*

3.8. Ejercicios

1. Encontrar los puntos críticos en las siguientes funciones. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Decidir si son máximos o mínimos.

$a)\ f(x) = x^3 - x \qquad d)\ f(x) = |x-1|$

$b)\ f(x) = x^{\frac{1}{3}} - x \qquad e)\ f(x) = \frac{4}{1-x}$

$c)\ f(x) = x \ln x \qquad f) f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$

2. Encontrar los extremos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos indicados.

$a)\ f(x) = x^3 - 3x + 3 \quad \text{en} \quad \left[-3, \frac{3}{2}\right]$

$b)\ f(x) = sen(2x) \quad \text{en} \quad [0, \pi]$

3. Encontrar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

$a) f(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad b) f(x) = x^5 - 5x + 2$

4. Realizar el estudio completo de las siguientes funciones indicando: dominio, asíntotas, raíces, conjunto de positividad y negatividad, puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, puntos de inflexión, intervalos de concavidad y convexidad. Realizar un gráfico aproximado usando los datos obtenidos.

$a)\ f(x) = 12x^2(x-1) \qquad g)\ f(x) = \frac{3x}{1-x^2} \qquad m)\ f(x) = 3x + \frac{3x}{x-1}$

$b)\ f(x) = \frac{6x}{x^2+3} \qquad h)\ f(x) = \frac{x^2-1}{x} \qquad n)\ f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

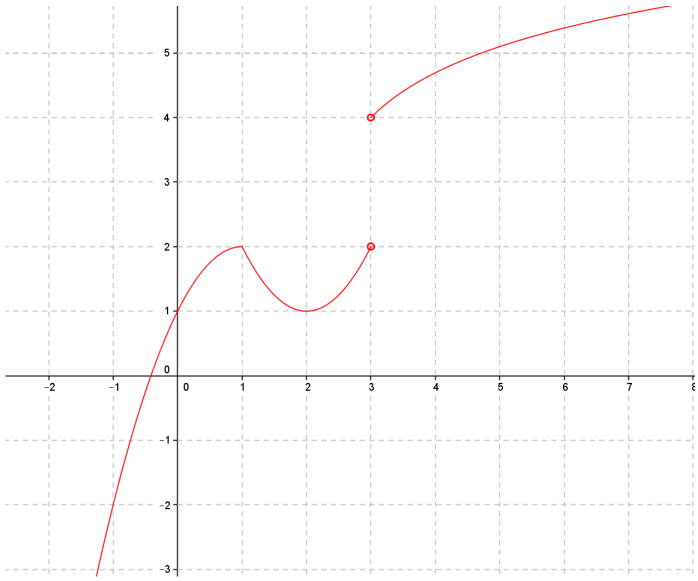
$c)\ f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \qquad i)\ f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 \qquad o)\ f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)$

$d)\ f(x) = e^x(2x^2+x+1) \qquad j)\ f(x) = \frac{5x}{x-3} \qquad p)\ f(x) = \frac{x^2-4}{x^3}$

$e)\ f(x) = \frac{x^2-4}{x^3} \qquad k)\ f(x) = \frac{2x^3}{x^2-4} \qquad q)\ f(x) = \frac{x^2-4}{x}$

$f)\ f(x) = x^5 - 5x + 2 \qquad l)\ f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad r)\ f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

5. A partir de la representación gráfica de la función f determinar



a) Los valores de x para los cuales $f'(x) > 0$

b) Los valores de x en los cuales $f'(x) < 0$

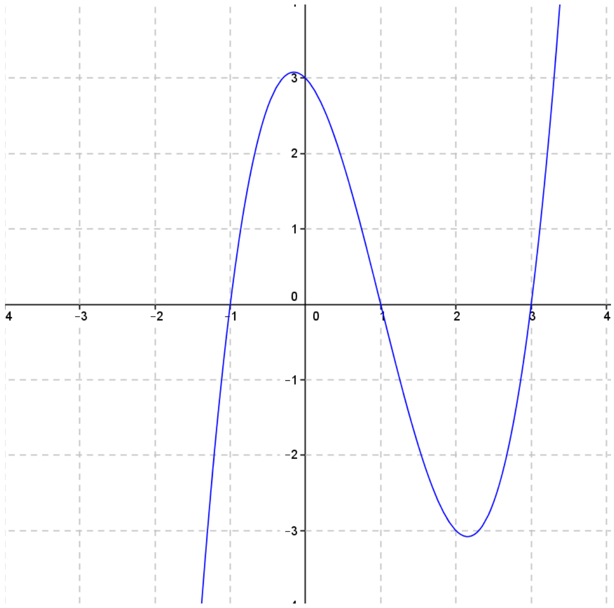
c) Los extremos relativos de f.

6. Observando la representación gráfica de la función derivada de la función f decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar las respuestas

a) La función f es creciente en $\mathbb{R}$

b) En $x = 2$, la función f tiene un mínimo relativo.

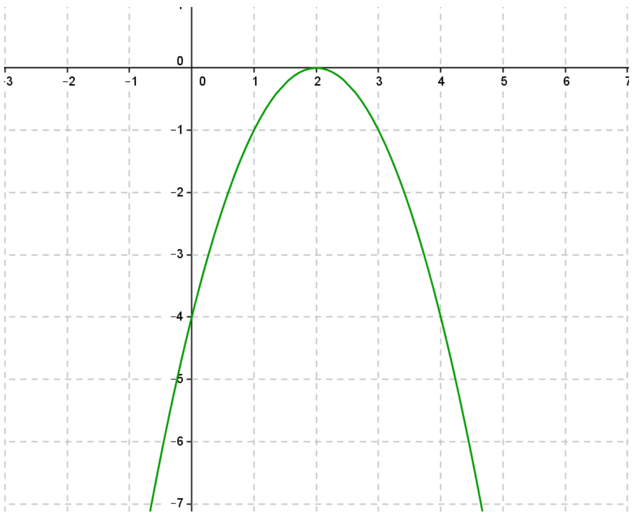
7. El siguiente gráfico corresponde a la función derivada de f. Analizando el gráfico, obtener:



   a) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

   b) Los valores de x en los cuales la función f tiene maximos y mínimos relativos.

8. Determinar si la siguiente representación gráfica puede ser el de la función derivada de una función que es decreciente en todo su dominio. Justificar la respuesta.



9. Determinar si la proposición es verdadera o falsa. Justificar

   a) Si $f'(x) < 0$ para $1 < x < 6$, entonces f es decreciente en $(1, 6)$

   b) Si $f''(2) = 0$ entonces $(2, f(2))$ es un punto de inflexión de la curva $y = f(x)$

   c) Existe una función f tal que $f(1) = -2, f(3) = 0$ y $f'(x) > 1$ para toda x

   d) Existe una función f tal que $f(x) > 0, f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para toda x

10. El alcance horizontal de un proyectil disparado en el vacío por un cañón que forma un ángulo φ con la horizontal es:

$$R(\varphi) = \frac{\nu_0 . sen\,(2\varphi)}{g}$$

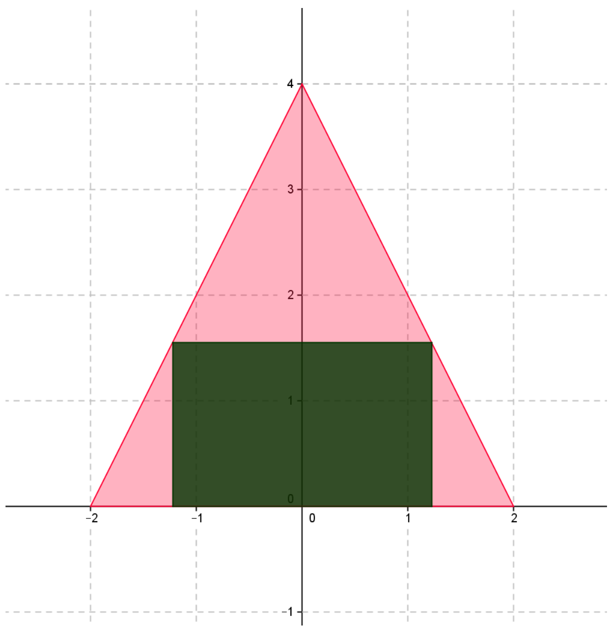
con ν_0 = velocidad inicial y g = aceleración de la gravedad[3].

Determinar el ángulo φ para el cual el alcance es máximo con una velocidad inicial dada.

11. Se desea construir una caja rectangular con una pieza de cartón de 24 centímetros de largo por 9 de ancho, cortando cuadrados en las cuatro esquinas y doblando los lados. Encuentre las dimensiones de la caja de máximo volumen. ¿Cuál es ese volumen?

12. ¿Qué dimensiones debe tener un cilindro para que su área total S sea mínima, dado el volumen V?

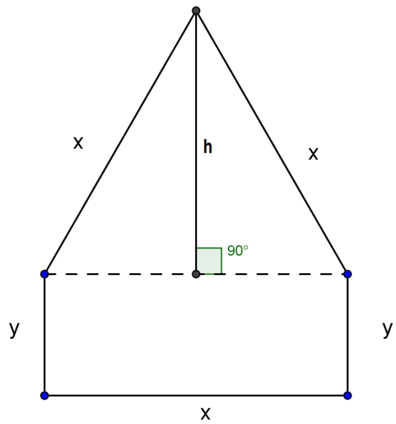
13. Determine la base y la altura del rectángulo de área máxima inscriptible en un triángulo isósceles dado (ver figura de análisis).



14. Un fabricante determina que x empleados de cierta línea de producción, fabricarán q unidades por mes, en donde $q = 80x^2 - 0,1x^4$. Para lograr la máxima producción mensual, ¿cuántos empleados se deben asignar a la línea de producción?

[3]La gravedad es una de las cuatro interacciones fundamentales. Produce la aceleración que experimenta un cuerpo físico en las cercanías de un objeto astronómico. También se denomina interacción gravitatoria o gravitación. Por efecto de la gravedad tenemos la sensación de peso. Si estamos situados en las proximidades de un planeta, experimentamos una aceleración dirigida hacia la zona central de dicho planeta (si no estamos sometidos al efecto de otras fuerzas). En la superficie de la Tierra, la aceleración originada por la gravedad es 9.81 m/s^2, aproximadamente.

15. Una ventana tiene forma de rectángulo, culminando en la parte superior con un triángulo equilátero. El perímetro de la ventana es de 3 metros. ¿Cuál debe ser la longitud de la base del rectángulo para que la ventana tenga el área máxima?



16. Halle el punto más cercano al punto $(0, -3)$ sobre la parábola $x + y^2 = 0$.

17. Entre $0^o C$ y $30^o C$, el volumen V (en cm^3) de 1 kg de agua a una temperatura T se expresa aproximadamente mediante la fórmula

$$V(T) = 999,87 - 0,06426.T + 0,0085043.T^2 - 0,0000679.T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el agua tiene su densidad máxima. (Para Recordar: densidad = masa/volumen).

18. Encuentren el rectángulo de mayor área que puede dibujarse dentro de la curva de la función $f(x) = 4 - x^2$ para $-2 < x < 2$.

19. La diferencia entre dos números es 20. Selecciona estos números de modo que su producto sea lo más pequeño posible.

20. Se quiere construir un cesto de cuero de forma cilíndrica (sin tapa) y 8 dm^3 de capacidad. ¿Cuáles serán las dimensiones para que la cantidad de cuero a utilizar sea mínima?

21. Realizar la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones en cada ejercicio.

    a) $f'(-1) = f'(1) = 0$; $f'(x) < 0$ si $|x| < 1$; $f'(x) > 0$ si $|x| > 1$; $f(-1) = 4$; $f(1) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < 0$; $f''(x) > 0$ si $x > 0$.

    b) $f'(-1) = 0$; $f'(1)$ no existe; $f'(x) < 0$ si $|x| < 1$; $f'(x) > 0$ si $|x| > 1$; $f(-1) = 4$; $f(1) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x \neq 1$

    c) $f'(2) = 0$; $f(2) = -1$; $f(0) = 0$; $f'(x) < 0$ si $0 < x < 2$; $f'(x) > 0$ si $x > 2$; $f''(x) < 0$ si $0 \leq x < 1$ o si $x > 4$; $f''(x) > 0$ si $1 < x < 4$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

d) $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$; $f''(x) < 0$ si $x \neq 3$; $f'(0) = 0$; $f'(x) > 0$ si $x < 0$ o si $x > 3$; $f'(x) < 0$ si $0 < x < 3$.

Capítulo 4

Integral

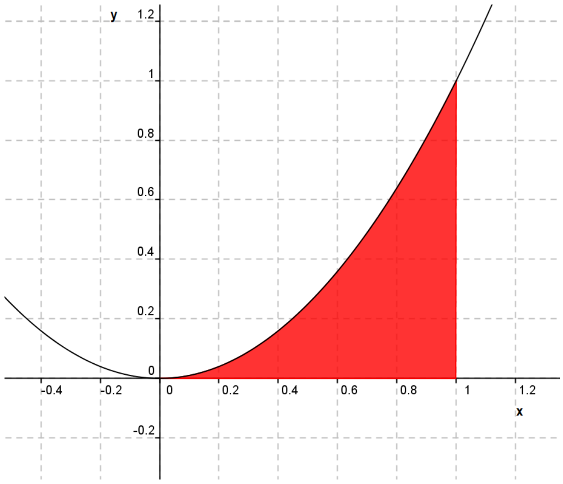
Los objetivos que nos proponemos para esta unidad es que los alumnos logren:

- Comprender el concepto de integral definida como el cálculo del área bajo una curva dada.
- Conocer y utilizar las propiedades de integrales definidas.
- Enunciar y demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo.
- Enunciar, demostrar y utilizar la Regla de Barrow.
- Comprender el concepto de antiderivada.
- Comprender el concepto de integral indefinida.
- Comprender y utilizar los diferentes métodos de integración.
- Resolver problemas de aplicación utilizando integrales definidas (cálculo de área, longitud de arco y volumen de sólidos de revolución)

4.1. La integral definida como Área

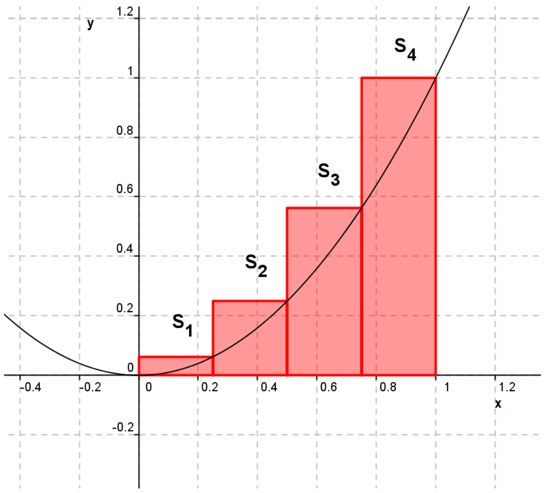
Seguramente recuerdan de años anteriores lo que significa el área de ciertas figuras geométricas; es una medida que de alguna manera indica el tamaño de la región delimitada por la figura. Por ejemplo, el área de un rectángulo es el producto de la base por la altura y el área de un triángulo es la mitad del producto de las longitudes de la base y la altura. Sin embargo, ¿cómo se define el área de una región en un plano si dicha región está acotada por una curva? En este capítulo se da la definición del área de dicha región usando el concepto de *integral definida*.

Ejemplo 4.1 *Hallar el área de la región que esta debajo de la curva* $f(x) = x^2$ *desde* 0 *hasta* 1.



Para calcularla dividimos el intervalo $[0,1]$ *en 4 partes iguales. Asi el área* A *queda dividida en 4 franjas* A_1, A_2, A_3, A_4.

Podemos obtener una aproximación de cada franja por medio de un rectángulo que tenga como base $\frac{1}{4}$ *y cuya altura sea el lado derecho de la franja,*



$$S_1 = \tfrac{1}{4}.h_1 \qquad S_2 = \tfrac{1}{4}.h_2 \qquad S_3 = \tfrac{1}{4}.h_3 \qquad S_4 = \tfrac{1}{4}.h_4$$

las alturas son

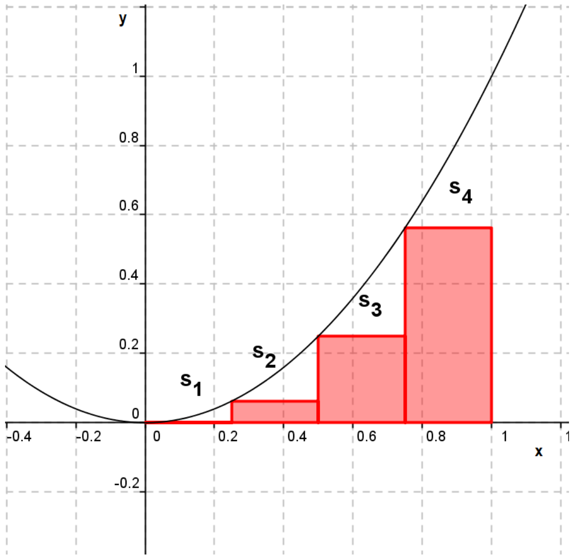
$$h_1 = f(\tfrac{1}{4}) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 \qquad h_2 = f(\tfrac{1}{2}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \qquad h_3 = f(\tfrac{3}{4}) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 \qquad h_4 = f(1) = (1)^2$$

Entonces, la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación es:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}.(1)^2 = \frac{15}{32} = 0,46875$$

Así a partir del gráfico observamos que el área A *es menor que* S.

Por otro lado consideramos los rectángulos que tengan como base $\frac{1}{4}$ y cuya altura sea el lado izquierdo de la franja,



$$s_1 = \tfrac{1}{4}.\,(0)^2 \qquad s_2 = \tfrac{1}{4}.\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 \qquad s_3 = \tfrac{1}{4}.\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \qquad s_4 = \tfrac{1}{4}.\left(\tfrac{3}{4}\right)^2$$

La suma de las áres de estos rectángulos de aproximación es

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = \frac{1}{4}.\,(0)^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0,21875$$

Vemos que el área A es mayor que s, luego

$$s < A < S$$

Podriamos obtener estimaciones mejores al incrementar el número de franjas. En la tabla se muestran los resultados de cálculos semejantes, usando n rectángulos cuyas alturas se encontraron con los puntos extremos izquierdos (s) o con los puntos extremos derechos (S).

n	s_n	S_n
10	$0,285$	$0,385$
20	$0,30875$	$0,35875$
30	$0,3168519$	$0,3501852$
50	$0,3234$	$0,3434$
100	$0,32835$	$0,33835$
1000	$0,3328335$	$0,3338335$

Se obtiene una buena aproximación promediando estos números $A \simeq 0,3333335$. Con base en los valores de la tabla, vemos que $A \longrightarrow \frac{1}{3}$ a medida que n aumenta. Conforme n crece, tanto s_n como S_n se vuelven cada vez mejores aproximaciones para el área A. Por lo tanto, definimos el área A como el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación, esto es

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

La noción de *integral definida*, surge como solución en el problema de calcular el área de la región determinada por la representación gráfica de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, el eje de las abscisas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Definición 4.2 *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, con $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, y sea R es la región acotada por la representación gráfica de f, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y denotamos el i-ésimo subintervalo por $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces si $f(m_i)$ es el valor mínimo absoluto de la función en el i-ésimo subintervalo, la medida del área de la región R está dada por*

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x$$

En lugar de los rectángulos inscriptos podríamos tomar los rectángulos circunscriptos. En este caso, tomamos como altura de los rectángulos el valor máximo absoluto de f en cada subintervalo y entonces la medida del área de la región R la podemos definir como

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x$$

Para llegar a la definición anterior, dividimos el intervalo $[a, b]$ en subintervalos de igual longitud, y después tomamos m_i como el punto en el i-esimo subintervalo, para el caul f tiene un valor mínimo absoluto.

Para definir la integral definida, necesitamos considerar un nuevo procedimiento. Sea f una función definida en un intervalo $[a, b]$. Dividimos este intervalo en n subintervalos seleccionando cualesquiera $n - 1$ puntos intermedios entre a y b. Sean $x_0 = a$ y $x_n = b$, y sean $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ los puntos intermedios de manera que

$$x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n$$

Los puntos $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ no son necesariamente equidistantes. Sea $\Delta_1 x$ la longitud del primer subintervalo tal que $\Delta_1 x = x_1 - x_0$; sea $\Delta_2 x$ la longitud del segundo subintervalo tal que $\Delta_2 x = x_2 - x_1$; y así sucesivamente, de tal manera que la longitud del i-ésimo subintervalo sea $\Delta_i x$ y $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. El conjunto de todos esos subintervalos del intervalo $[a, b]$ se llama **partición** del intervalo $[a, b]$. Sea Δ dicha partición, que contiene n subintervalos. La longitud del subintervalo más largo de la partición Δ, llamado **norma** de la partición, se denota por $\|\Delta\|$. Escojamos un punto en cada subintervalo de la partición Δ: sea ξ_1 el punto elegido en $[x_0, x_1]$ tal que $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1$. Sea ξ_2 el punto escogido en $[x_1, x_2]$ tal que $x_1 \leq \xi_2 \leq x_2$, y así sucesivamente, de manera que ξ_i sea el punto seleccionado en $[x_{i-1}, x_i]$ y $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Entonces se forma la suma:

$$f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + ... + f(\xi_i)\Delta_i x + ... + f(\xi_n)\Delta_n x$$

o bien

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

Tal suma se conoce como *suma de Riemann*, en honor del matemático George Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

Definición 4.3 *Sea f una función cuyo dominio incluya el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces se dice que f es **integrable** en $[a, b]$ si existe un número L que satisface la condición de que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partición Δ para la cual $\|\Delta\| < \delta$, y para cualquier*

ξ_i en el intervalo cerrado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ entonces

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x = L$$

Definición 4.4 *Si f es una función definida en el intevalo cerrado $[a, b]$, entonces la integral definida de f desde a a b, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, está dada por*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

si el límite existe.

Observemos que la afirmación *la función f es integrable en el intervalo cerrado* $[a, b]$, es sinónimo de *la integral definida de f de a a b existe.* En la notación para la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ se conoce como **integrando**, a se denomina **límite inferior** y b **límite superior**. El simbolo $\int$ se denomina signo de integración[1].

La pregunta que nos podemos hacer ahora es: ¿en que condiciones existe el número L para que satisfaga la Definición 4.3? Es decir, ¿en que condicones es integrable una función f? Una respuesta a esta pregunta se da por medio del siguiente teorema.

Teorema 4.5 *Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.*

La demostración de este teorema se deja para el lector interesdo.

4.1.1. Propiedades de la integral definida

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

[1]El signo $\int$ se parece a una S mayúscula, lo cual es apropiado, pues la integral definida es el límite de una suma.

2. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

3. Si $a < c < b$ entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. Si $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$ entonces $\displaystyle\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$

5. $c \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b c\ f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

6. Sean f y g funciones continuas definidas en $[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

7. $\displaystyle\int_a^b dx = (b-a)$

8. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$

9. Si $f(x)$ es una función par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

10. Si $f(x)$ es una función impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

4.1.2. Teorema del Valor Medio para Integrales

Continuaremos con el estudio de las propiedades de la integral definida enunciado y analizando el *Teorema del Valor Medio para Integrales*. Este teorema es de gran importancia para la demostración de uno de los teoremas más importantes del capítulo: el Teorema Fundamental del Cálculo, el cual es la clave para establecer el método de evaluación de integrales definidas.

Teorema 4.6 (Teorema del Valor Intermedio para Integrales) *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces existe un número $\chi \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\chi)(b-a)$$

4.1.3. Teorema Fundamental del Cálculo

Los conceptos básicos de la integral definida fueron empleados por los antiguos griegos, principalmente por Arquimedes (287-212 a. C.), hace más de 2000 años, es decir, mucho antes de que se descubriera el cálculo diferencial.

En el siglo XVII, casi simultáneamente, pero trabajando en forma independiente, Newton y Leibniz demostraron cómo se podía usar el Cálculo para determinar el área de una región acotada por una curva o un conjunto de curvas, evaluando mediante antidiferenciación una integral definida. El procedimiento incluye lo que se conoce como Teorema Fundamental del Cálculo, que establece la relación entre derivada e integral definida.

Teorema 4.7 ***(Teorema fundamental del Cálculo)*** *Sea la función f continua en $[a,b]$ y sea x cualquier número en $[a,b]$. Si F es la función definida por $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ entonces $F'(x)=f(x)$.*

Demostración 4.8 *Consideremos dos números x_1 y $x_1+\Delta_x$ en $[a,b]$. Entonces*

$$F(x_1)=\int_a^{x_1} f(t)dt$$

$$F(x_1+\Delta_x)=\int_a^{x_1+\Delta_x} f(t)dt$$

de modo que si las restamos tenemos

$$F(x_1+\Delta_x)-F(x_1)=\int_a^{x_1+\Delta_x} f(t)dt-\int_a^{x_1} f(t)dt=\int_{x_1}^{x_1+\Delta_x} f(t)dt$$

Por el Teorema del valor Medio para integrales, existe algún número χ en el intervalo cerrado acotado por x_1 y $x_1+\Delta_x$ tal que

$$F(x_1+\Delta_x)-F(x_1)=f(\chi)\Delta_x \Longleftrightarrow \frac{F(x_1+\Delta_x)-F(x_1)}{\Delta_x}=f(\chi)$$

Si tomamos límite cuando Δ_x se aproxima a cero tenemos

$$\lim_{\Delta_x\to 0}\frac{F(x_1+\Delta_x)-F(x_1)}{\Delta_x}=\lim_{\Delta_x\to 0} f(\chi) \tag{4.1}$$

El lado izquierdo de la igualdad anterior es $F'(x_1)$. Para determinar el límite $\lim\limits_{\Delta_x\to 0} f(\chi)$, recordemos que χ se encuentra en el intervalo cerrado acotado por x_1 y $x_1+\Delta_x$ y como

$$\lim_{\Delta_x\to 0} x_1=x_1 \quad y \quad \lim_{\Delta_x\to 0}(x_1+\Delta_x)=x_1$$

de acuerdo con el teorema del emparedado, sabemos que $\lim\limits_{\Delta_x\to 0}\chi=x_1$. Entonces $\lim\limits_{\Delta_x\to 0} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to x_1} f(\chi)$. Como la función f es continua en x_1 sabemos que

$$\lim_{\chi\to x_1} f(\chi)=f(x_1)\Longrightarrow \lim_{\chi\to x_1} f(\chi)=f(x_1)$$

y asi resulta

$$F'(x_1) = f(x_1) \tag{4.2}$$

Si la función f no está definida para valores de x menores que a, pero es continua a la derecha de a, entonces, si $x_1 = a$ en (4.1), Δ_x debe aproximarse a 0 por la derecha. Por lo tanto, el lado izquierdo de (4.2) será $F'_+(x_1)$. Analogamente, si f no está definida para valores de x mayores que b, pero es continua a la izquierda de b, entonces si $x_1 = b$ en (4.1), Δ_x debe aproximar a cero por la izquierda. Por lo tanto, tenemos $F'_-(x_1)$ en el lado izquierdo de (4.2). Debido a que x_1 es cualquier número en $[a, b]$, la ecuación (4.2) establece lo que queriamos demostrar.

Teorema 4.9 ***(Regla de Barrow)*** *Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea g una función tal que*

$$g^{'}(x) = f(x) \tag{4.3}$$

para toda $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$$

Demostración 4.10 *Si f es continua en $[a, b]$, sabemos por el teorema anterior que la integral definida $\int_a^x f(t)dt$ define una función F cuya derivada en $[a, b]$ es f, es decir*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{4.4}$$

con $F^{'}(x) = f(x)$ para toda $x \in [a, b]$. Pero por hipótesis $g'(x) = f(x)$. Entonces si las derivadas son iguales, las funciones difieren en una constante $c \in \mathbb{R}$, por lo tanto

$$g(x) = F(x) + c = \int_a^x f(t)dt + c$$

para todo $x \in [a, b]$. Haciendo $x = b$ y $x = a$, obtenemos

$$g(b) = \int_a^b f(t)dt + c$$

$$g(a) = \int_a^a f(t)dt + c$$

De lo anterior tenemos que

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

4.1.4. Antidiferenciación

Ya hemos estudiado operaciones inversas. La adición y la sustración son operaciones inversas; la multiplicación y la división también lo son, lo mismo que elevar a una potencia y extraer una raiz. En esta sección desarrollaremos la operación inversa de la diferenciación: la *antidiferenciación*.

Definición 4.11 *Una función F se llama* ***antiderivada*** *de una función f, en un intervalo I, si $F'(x) = f(x)$ para todo valor x de I. También suele nombrarse como* ***primitiva*** *de la función f.*

En general, si una función F es la antiderivada de una función f, en un intervalo I, y si G está definida por $G(x) = F(x) + c$, donde c es una constante arbitraria, entonces $G'(x) = F'(x) = f(x)$ y G también es una antiderivada de f en el intervalo I.

La antidiferenciación es el proceso de determinación de todas las antiderivadas de una función dada. El símbolo $\int$ denota la operación de antidiferenciación y se escribe

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

donde $F'(x) = f(x)$ y $d(F(x)) = f(x)dx$. A la expresión $\int f(x)dx$ se denomina **integral indefinida** de la función f.

Leibniz estableció la convención de expresar la diferencial de una función después del símbolo de antidiferenciación. Podemos escribir

$$\int f(x)dx = \int d(F(x)) = F(x) + c$$

Cuando se antidiferencia la diferencial de una función, se obtiene esa función y además una constante arbitraria. Así puede considerarse que el símbolo $\int$ para la antidiferenciación es la operación inversa de la operación denotada por d para calcular la diferencial.

4.1.5. Reglas de integración

Como la antidiferenciación es la operación inversa de la diferenciación, se pueden obtener las siguientes antiderivadas

$\int 1dx = x + C$
$\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$
$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$ con $r \neq -1$
$\int sen(x)dx = -\cos(x) + C$
$\int \cos(x)dx = sen(x) + C$

$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$
$\int e^x v = e^x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$
$\int \cosh(x) dx = senh(x) + C$
$\int senh(x) dx = \cosh(x) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsen(x) + C$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos(x) + C$
$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \arg\tanh(x) + C$

Teorema 4.12 ***(Propiedad de linealidad):*** *Sean f y g dos funciones definidas en el mismo intervalo y sea k una constante, entonces:*

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

2. $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Ejemplo 4.13 *Encontrar la primitiva de $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x + 6$.*

$$\int \left(4x^3 - 3x^2 - 2x + 6\right) dx = 4\int x^3 dx - 3\int x^2 dx - 2\int x dx + 6\int dx$$

$$= 4\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 6x + C$$

4.2. Métodos de Integración

Muchas antiderivadas no pueden calcularse directamente, por lo tanto es necesario aprender algunos métodos que puedan utilizarse en la determinación de dichas antiderivadas.

4.2.1. Método de Sustitución

Para resolver integrales del tipo

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

Debemos hacer una sustitución, llamando $u = g(x)$ y sustituir todas las $g(x)$ por u en la integral. Luego sustituir $u'dx$ por du y calcular la integral que resulte, que ahora estará en función de u. Volver al reemplazo $u = g(x)$.

Ejemplo 4.14 *Calcular la integral* $\int sen^2(x)\cos(x)\,dx$.

Llamamos $u = sen(x)$, *con lo cual* $du = \cos(x)\,dx$. *Entonces será*

$$\int sen^2(x)\cos(x)\,dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{sen^3(x)}{3} + C$$

Ejemplo 4.15 *Calcular la integral* $\int x\sqrt{x-1}dx$

Si llamamos $t = \sqrt{x-1}$ *entonces* $x = t^2+1$ *y calculamos el diferencial* $dx = 2t\ dt$. *Entonces*

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \int \left(t^2+1\right)\cdot t\cdot 2tdt = 2\int \left(t^4+t^2\right)dt$$

$$= 2\frac{t^5}{5} + 2\frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + C$$

Ejemplo 4.16 *Calcular la integral* $\int \cot(x)\,dx$

Llamamos $u = sen(x)$ *entonces* $du = \cos(x)\,dx$, *entonces*

$$\int \cot(x)\,dx = \int \frac{\cos(x)}{sen(x)}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|sen(x)| + C$$

Ejemplo 4.17 *Sabiendo que* $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$ *hallar* $\int \frac{dx}{3+27x^2}$.

Tenemos que reescribir la integral dada, para poder aplicar el dato que tenemos

$$\int \frac{dx}{3+27x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+9x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+(3x)^2}$$

llamamos $u = 3x \Longrightarrow du = 3dx$. *Entonces*

$$\int \frac{dx}{3+27x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3}\frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{9}\arctan(u) + C = \frac{1}{9}\arctan(3x) + C$$

Ejemplo 4.18 *Sabiendo que* $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsen(x) + C$ *hallar* $\int \frac{dx}{\sqrt{1-6x-x^2}}$.

Analizamos $1-6x-x^2 = -\left(x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2-3^2\right)+1 = -(x+3)^2+9+1 = 10-(x+3)^2$. *Entonces;*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-6x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{10-(x+3)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{10}\sqrt{1-\frac{(x+3)^2}{10}}}$$

llamamos

$$u^2 = \frac{(x+3)^2}{10} \Longrightarrow u = \frac{x+3}{\sqrt{10}} \Longrightarrow du = \frac{1}{\sqrt{10}}dx$$

Entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-6x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{(x+3)^2}{10}}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \int \frac{\sqrt{10}du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= arcsen\,(u) + C = arcsen\left(\frac{x+3}{\sqrt{10}}\right) + C$$

4.2.2. Método de Integración por partes

El método de integración por partes proviene de la fórmula para la derivada del producto de dos gunciones. Si f y g son dos funciones derivables, entonces

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Longleftrightarrow f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x)$$

Al integrar en cada miembro de la igualdad anterior, se obtiene

$$\int f(x)g'(x)dx = \int [f(x)g(x)]'\,dx - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

A la expresión anterior se la llama fórmula de **integración por partes**. Se puede obtener una manera más adecuada de escribir la fórmula al considera $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces tenemos que $du = f'(x)dx$ y $dv = g\prime(x)dx$ con lo cual la expresión de la fómrula de integración por partes quedaría

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

Esta fórmula expresa la integral $\int u\ dv$ en términos de otra integral $\int v\ du$. Por medio de una elección adecuada de u y dv, puede ser más fácil evaluar la segunda integral que la primera. Cuando se eligen las sustituciones para u y dv, por lo general se desea que dv sea el factor más comlpicado del integrando que se pueda integrar directamente y que u sea una función cuya derivada sea una función más simple. Los siguientes ejemplos muestran el método de integración por partes.

Ejemplo 4.19 *Calculamos la siguiente integral $\int x^2e^x dx$.*

Consideremos en este caso, $u = x^2$ entonces $du = 2xdx$ y por otro lado, $dv = e^x dx$ entonces $v = \int e^x dx = e^x$. Asi tenemos que

$$\int x^2e^x dx = x^2.e^x - \int e^x 2xdx = x^2.e^x - 2\int e^x xdx$$

Para resolver la integral $\int e^x x dx$ *debemos aplicar nuevamente el método de integración por partes. Sea* $u = x$, $du = dx$ *y también* $dv = e^x v$ *y* $y = e^x$. *Tenemos que*

$$\int x^2 e^x dx = x^2.e^x - 2\int e^x x dx = x^2.e^x - 2\left[x.e^x - \int e^x dx\right] = x^2.e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Ejemplo 4.20 *Calcular* $\int \cos^2(x)\, dx$.

$$\int \cos^2(x)\, dx = \int \cos(x)\cos(x)\, dx$$

Llamamos $u = \cos(x)$ *entonces* $du = -sen(x)\, dx$ *y* $dv = \cos(x)\, dx$ *entonces* $v = sen(x)$. *Reemplazando en la integral, obtenemos;*

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x)\, dx &= \cos(x)\, sen(x) - \int sen(x)\,(-sen(x))\, dx \\ &= \cos(x)\, sen(x) + \int sen^2(x)\, dx \\ &= \cos(x)\, sen(x) + \int \left(1 - \cos^2(x)\right) dx \\ &= \cos(x)\, sen(x) + \int dx - \int \cos^2(x)\, dx\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}2\int \cos^2(x)\, dx &= \cos(x)\, sen(x) + \int dx \\ &= \cos(x)\, sen(x) + x + c\end{aligned}$$

Luego

$$\int \cos^2(x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\cos(x)\, sen(x) + x\right) + C$$

Ejemplo 4.21 *Calcular* $\int \sqrt{2 - 3x^2} dx$.

$$\int \sqrt{2 - 3x^2} dx = \int \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{3}{2}x^2} dx$$

llamando $\frac{3}{2}x^2 = sen^2(u)$ *tenemos* $\sqrt{1 - \frac{3}{2}x^2} = \sqrt{1 - sen^2(u)} = \cos(u)$, *entonces derivando*

$$\left(\sqrt{1 - \frac{3}{2}x^2}\right)' = (\cos(u))'$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{-3x}{2\sqrt{1 - \frac{3}{2}x^2}} dx &= -sen(u)\, du \\ dx &= \frac{-2sen(u)\cos(u)}{-3\sqrt{\frac{2}{3}sen^2(u)}} du \\ dx &= \frac{2\sqrt{3}\cos(u)}{3\sqrt{2}} du\end{aligned}$$

Reemplazando

$$\int \sqrt{2-3x^2}dx = \int \sqrt{2}\sqrt{1-\frac{3}{2}x^2}dx = \sqrt{2}\int \sqrt{1-sen^2(u)}\frac{2\sqrt{3}\cos(u)}{3\sqrt{2}}du$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3}\int \cos^2(u)\,du = \frac{2}{3}\sqrt{3}\frac{1}{2}\left(\cos(u)\,sen(u)+u\right)+C$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\ \cos\left(arcsen\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)\right)+arcsen\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)\right)+C$$

4.3. Integración de funciones racionales

Vamos a estudiar ahora la integral de funciones racionales, es decir, cociente de funciones polinómicas $P(x)$ y $Q(x)$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

En el caso de que $\operatorname{grad}(P(x)) \geq \operatorname{grad}(Q(x))$ se realiza la división de los polinomios y posteriormente se integra.

Ejemplo 4.22 *Calcular* $\int \frac{2x^2+1}{x-1}dx$. *Entonces hacemos* $(2x^2+1):(x-1) = 2x+2+\frac{3}{x-1}$

$$\int \frac{2x^2+1}{x-1}dx = \int 2x\ dx + \int 2\ dx + \int \frac{3}{x-1}dx = x^2+2x+3\ln|x-1|+C$$

4.3.1. Método de Fracciones Simples

En el caso de que $\operatorname{grad}(P(x)) < \operatorname{grad}(Q(x))$, es necesario escribir $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como la suma de fracciones parciales o simples. Los denominadores de tales fracciones se obtienen al factorizar $Q(x)$ como un producto de factores lineales y cuadráticos. Después de que $Q(x)$ ha sido factorizado en productos lineales y cuadráticos, el método para determinar las fracciones simples depende de la naturaleza de dichos factores. Consideraremos tres casos por separado.

Primer Caso: Raices reales y simples

Ejemplo 4.23 *Calcular la integral* $\int \frac{2x+1}{x^2+2x-3}dx$.

Comenzamos factorizando el denominador $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$.

Luego escribimos

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x-3}dx = \int \frac{A}{x-1}dx + \int \frac{B}{x+3}dx$$

Para hallar el valor de las constantes A *y* B *hacemos*

$$\frac{2x+1}{x^2+2x-3} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

entonces resolvemor el siguiente sistema:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 3A-B=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=\frac{3}{4} \\ B=\frac{5}{4} \end{cases}$$

Reemplazando tenemos

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x-3}dx = \int \frac{3/4}{x-1}dx + \int \frac{5/4}{x+3}dx$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{x+3} = \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{5}{4}\ln|x+3| + C$$

Segundo Caso: Raíces reales y múltiples

Ejemplo 4.24 *Calcular la integral* $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}dx$.

Igual que el ejemplo anterior, comenzamos factorizando el denominador $x^3-2x^2+x = x(x-1)^2$. *Luego*

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}dx = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x-1}dx + \int \frac{D}{(x-1)^2}dx$$

Hallamos los valores de las constantes A, B *y* D *como en el ejemplo anterior*

$$\frac{x+2}{x^3-2x^2+x} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Dx}{x(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B+D=1 \\ A=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ D=3 \end{cases}$$

Reemplazando se tiene

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{-2}{x-1}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx$$

$$= 2\ln|x| - 2\ln|x-1| - 3\frac{1}{x-1} + C$$

donde $\int \frac{dx}{(x-1)^2}$ *se resuelve haciendo sustitución;* $u = x-1 \Longrightarrow du = dx$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = -u^{-1} + c = -\frac{1}{x-1} + c$$

Tercer Caso: Raíces complejas

Ejemplo 4.25 *Calcular la integral* $\int \frac{3x+1}{x^3-2x^2+2x}dx$.

Factorizando el denominador, tenemos $x^3 - 2x^2 + 2x = x\left(x^2 - 2x + 2\right)$. *El segundo factor tiene raices complejas, entonces*

$$\int \frac{3x+1}{x^3-2x^2+2x}dx = \int \frac{A}{x}v + \int \frac{Bx+D}{x^2-2x+2}dx$$

Así tenemos

$$\frac{3x+1}{x^3-2x^2+2x} = \frac{A\left(x^2-2x+2\right)+\left(Bx+D\right)x}{x\left(x^2-2x+2\right)}$$

de donde

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+D=3 \\ 2A=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ D=4 \end{cases}$$

Reemplazando

$$\int \frac{3x+1}{x^3-2x^2+2x}dx = \int \frac{1/2}{x}dx + \int \frac{-1/2x+4}{x^2-2x+2}dx \tag{4.5}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2-2x+2}dx + 4\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2-2x+2}dx + 4\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$$

Ahora resolvemos

$$\int \frac{x}{x^2-2x+2}dx$$

multiplicamos y dividimos por 2, *y también sumamos y restamos* 1,

$$\int \frac{x}{x^2-2x+2}dx = \int \frac{2.\frac{1}{2}\left(x-1+1\right)}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\left(x-1\right)+2}{x^2-2x+2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2\left(x-1\right)}{x^2-2x+2}dx + \int \frac{dx}{x^2-2x+2}$$

llamando $u = x^2 - 2x + 2 \Longrightarrow du = \left(2x-2\right)dx = 2\left(x-1\right)dx$ *entonces*

$$\int \frac{x}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \int \frac{dx}{x^2-2x+2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + \int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+2\right| + \int \frac{dx}{x^2-2x+2}$$

Reemplazando en la expresión (4.5) tenemos

$$\int \frac{3x+1}{x^3-2x^2+2x}dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+2\right| + \int \frac{dx}{x^2-2x+2}\right] + 4\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln\left|x^2-2x+2\right| + \frac{7}{2}\int \frac{v}{x^2-2x+2}$$

con lo cual nos resta resolver la última integral; es decir, calcular

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$$

Para ello, escribimos el denominador como $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$*, entonces*

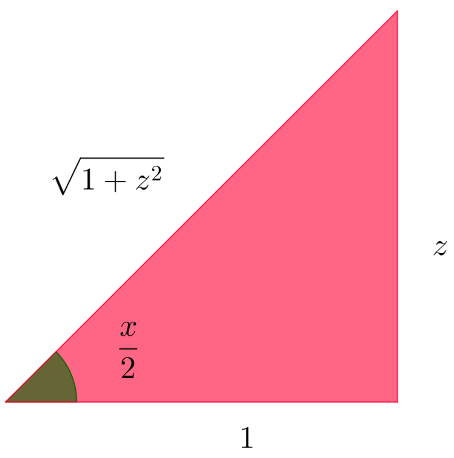
$$\int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \arctan(x-1)+C$$

Finalmente

$$\int \frac{3x+1}{x^3-2x^2+2x}dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln\left|x^2-2x+2\right| + \frac{7}{2}\arctan(x-1)+C$$

4.4. Integración de funciones racionales trigonométricas

Para funciones racionales donde el denominador y/o numerador son funciones trigonométricas como $sen\,(x)$ y $\cos(x)$ podemos utilizar la siguiente sustitución:



Además

$$sen\,(x) = sen\left(2\frac{x}{2}\right) = 2sen\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{2z}{1+z^2}$$

y

$$\cos(x) = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 - \left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

y

$$z = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Longrightarrow 2\arctan(z) = x \Longrightarrow 2\frac{1}{1+z^2}dz = dx$$

Ejemplo 4.26 *Calcular* $\int \frac{dx}{\cos(x)}$. *Utilizando la sustitución anterior tenemos que*

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \int \left(\frac{2}{1+z^2} : \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) dz = \int \frac{2}{1-z^2} dz$$

$$= 2\arg\tanh(z) + C = 2\arg\tanh\left(\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

4.5. Ejercicios

1. En cada uno de los siguientes casos encontrar la antiderivada de f, es decir una función F tal que $F'(x) = f(x)$.

   a) $f(x) = 5x^3$

   b) $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{\frac{1}{2}x}$ con $x > 0$

   c) $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 5\cos(x)$

   d) $f(x) = (1+\sqrt{x})^2$ con $x > 0$

   e) $f(x) = (x+1)(x^3-2)$

   f) $f(x) = \frac{2x^2-6x+7}{2\sqrt{x}}$ con $x > 0$

   g) $f(x) = 3sen(x) + 2x^5$

   h) $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ con $x > 0$

2. En los siguientes ejercicios aplicar el método de sustitución para calcular las primitivas propuestas.

   a) $\int \sqrt{2x+1}dx$

   b) $\int x\sqrt{1+3x^2}dx$

   c) $\int x^2\sqrt{x+1}dx$

   d) $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x}}dx$

   e) $\int \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}dx$

   f) $\int \sin^3 x dx$

   g) $\int \frac{\sin x}{(3+\cos x)^3}dx$

   h) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$

   i) $\int \frac{\sin\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$

   j) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

   k) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

   l) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

   m) $\int \frac{dx}{5+2x^2}$

   n) $\int \frac{dx}{3x^2+5x+4}$

   o) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

   p) $\int \frac{dx}{\sqrt{14-2x-3x^2}}$

   q) $\int \sqrt{5-7x^2}dx$

   r) $\int \sqrt{2x+4+3x^2}dx$

   s) $\int \sqrt{\frac{1}{3}x^2+6}dx$

   t) $\int \sqrt{x^2-3x-2}dx$

3. Realizar la sustitución $sen^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ para resolver la integral $\int sen^2(x)\,dx$.

4. Realizar la sustitución $senh^2(x) = \frac{1}{2}(\cosh(x)-1)$ para resolver la integral $\int senh^2(x)\,dx$.

5. Aplicar el método de integración por partes para resolver las siguientes integrales:

$a)\int x^3e^x dx$ $\quad d)\int x\ln(x)\,dx$ $\quad g)\int sen^2(x)\,dx$

$b)\int x^2\cos(x)\,dx$ $\quad e)\int \arctan(\sqrt{x})\,dx$ $\quad h)\int \cosh^2(x)\,dx$

$c)\int e^x sen(x)\,dx$ $\quad f)\int sen(x)\cos(x)\,dx$ $\quad i)\int x\arctan(x)\,dx$

6. Calcular las primitivas de f, siendo:

$a)\ f(x) = \int \frac{5x^3-2x^2+15}{x+1}dx$ $\quad c)\ f(x) = \int \frac{3x^2+6x-1}{x^2+5x+20}dx$

$b)\ f(x) = \int \frac{1+x^2}{1-x^2}dx$ $\quad d)\ f(x) = \int \frac{2x^3+3}{x^2+1}dx$

7. Aplicar el método de fracciones simples para resolver las siguientes integrales

$a)\ \int \frac{4x-7}{x^2-3x+2}dx$ $\quad d)\int \frac{x}{1+x^3}dx$ $\quad g)\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)(x^2-4)}dx$

$b)\ \int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$ $\quad e)\int \frac{2x^3+x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}dx$

$c)\int \frac{3x+2}{x^4+3x^3+3x^2+x}dx$ $\quad f)\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$

8. Integrar utilizando el método de funciones trigonométricas con la sustitución $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$a)\int \frac{dx}{sen(x)}$ $\quad d)\int \frac{sen^2(x)}{1+\cos^2(x)}dx$ usando la sustitución $z = \tan x$

$b)\int \frac{dx}{sen(x)\cos(x)}$ $\quad e)\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx$

$c)\int \frac{dx}{2+4sen(x)}$ $\quad f)\int \frac{dx}{5-3\cos(x)}$

9. Hallar la primitiva de cada una de las siguientes funciones:

$a)f(x) = sen^3(x)$ $\quad e)f(x) = \sqrt{4+7x^2}$ $\quad i)f(x) = \frac{x-2}{x^2+9}$

$b)f(x) = \frac{2e^x+1}{e^x+e^{2x}+1}$ $\quad f)f(x) = \frac{x}{\sin x^2}$ $\quad j)f(x) = e^{4x}\cos(3x)$

$c)f(x) = \frac{x}{e^x}$ $\quad g)f(x) = \frac{x^3-1}{4x^3-x}$

$d)f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ $\quad h)f(x) = \frac{\cos(x)}{1-sen(x)}$

10. Calcular las siguientes integrales indefinidas

$$a)\int \cos\left(\pi\theta-\sqrt{7}\right)d\theta \qquad c)\int \frac{z\cos\left(\sqrt[3]{z^2+3}\right)}{\left(\sqrt[3]{z^2+3}\right)^2}dz \qquad e)\int \frac{3dx}{(x-2)(x+1)^2}dx$$

$$b)\int \frac{1}{2+\sin(\theta)}d\theta \qquad d)\int \ln\left(x^2+1\right)dx \qquad f)\int \sqrt{4-x^2}dx$$

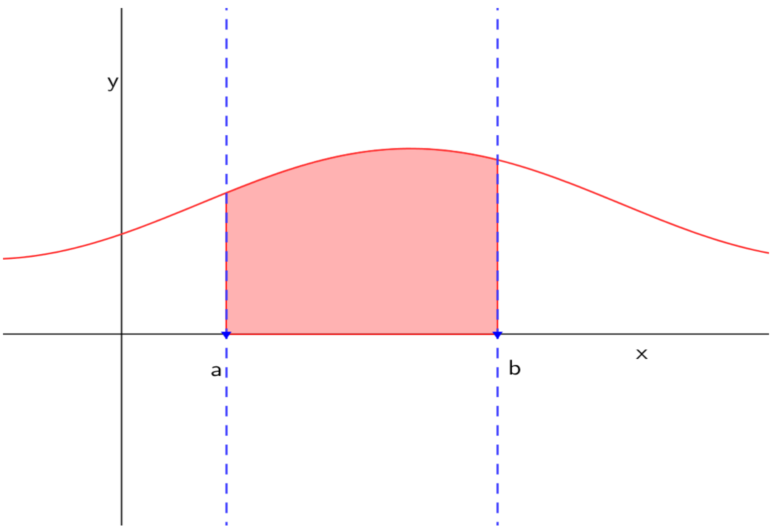
4.6. Aplicaciones de Integrales definidas

En esta sección se demuestra la gran importancia del cálculo integral en geometría, física e ingeniería.

Se aplicará la integral definida para el cálculo de área de una región en un plano, para calcular volúmenes de diferentes sólidos y también para hallar la longitud de arco de una función entre dos puntos.

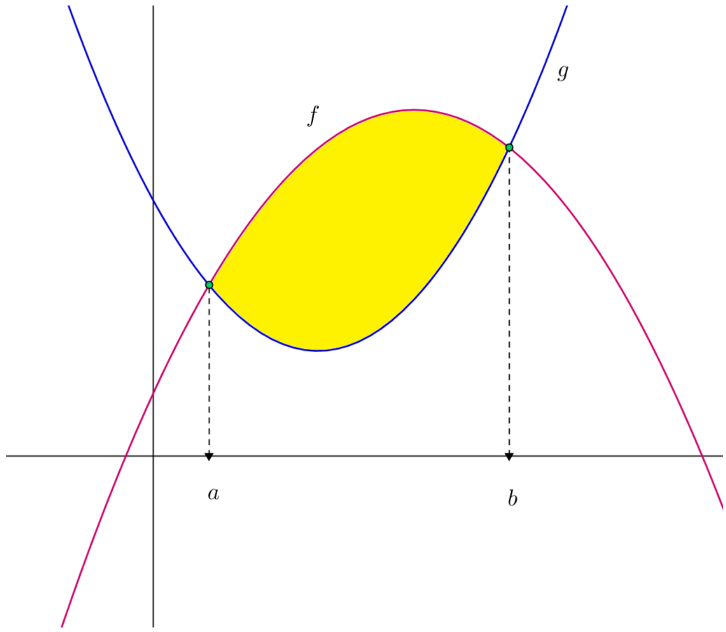
4.6.1. Área de una región en un plano

Hemos definido la integral definida de manera que para funciones no negativas f, la integral $\int_a^b f(x)dx$ es el área de la región del plano comprendida entre la representación gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas verticales que cortan al eje de abscisas en $x=a$ y $x=b$, como muestra el siguiente gráfico:

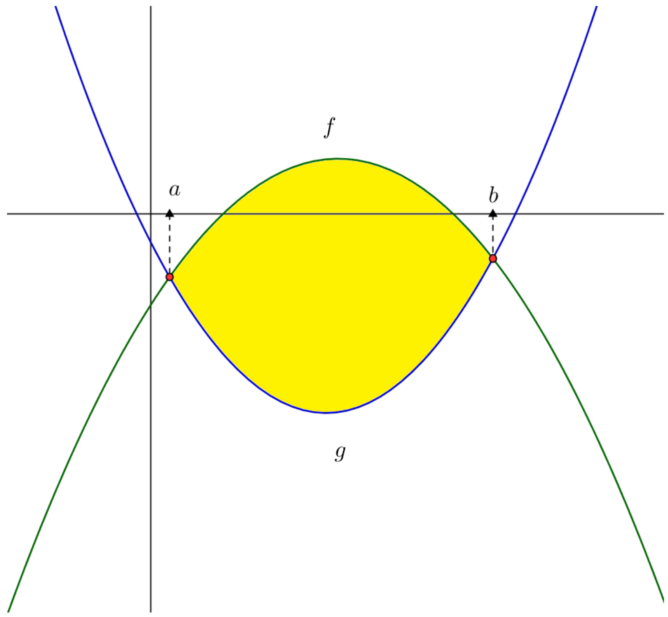


Si tenemos ahora dos funciones f y g no negativas cuyas representaciones gráficas se cortan solamente en los puntos correspondientes a $x=a$ y $x=b$ y si se cumple que $g(x)\leq f(x)$ para todo $x\in[a,b]$, entonces el área de la región comprendida entre ambas representaciones gráficas se puede obtener como el área de la región debajo de la representación gráfica de f menos el área de la región bajo la representación gráfica de g, es decir

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$



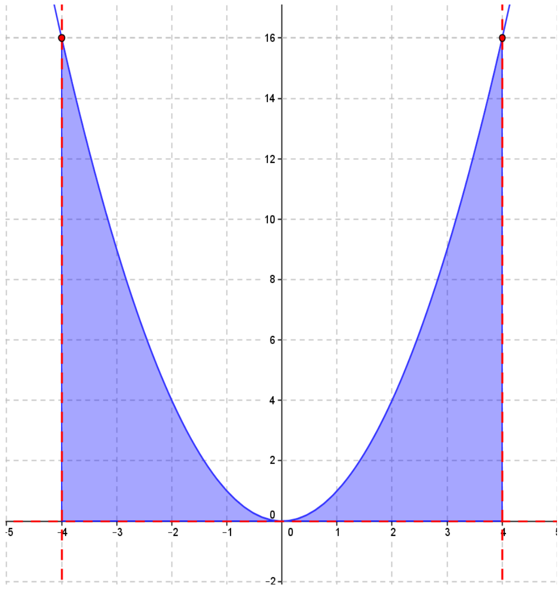
Esta fórmula puede aplicarse aún cuando las funciones tienen valores negativos (pero siempre que $g(x) \leq f(x)$ para toda $x \in [a, b]$)



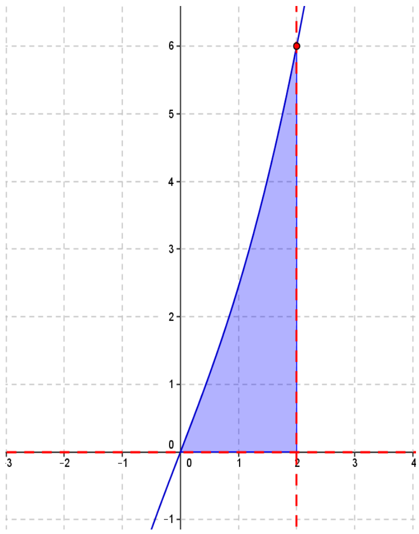
Ejemplo 4.27 *Calcular $\int_{-4}^{4} x^2 dx$. Esta integral definida representa el área comprendida entre la curva $y = x^2$ y el eje x en $[-4, 4]$*

Resolvemos de la siguiente forma:

$$\int_{-4}^{4} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Bigg|_{-4}^{4} = \frac{1}{3}\left[4^3 - (-4)^3\right] = \frac{128}{3} \ u \ a$$



Ejemplo 4.28 *Calcular el área de la región en el primer cuadrante acotada por la representación gráfica de la función* $f(x) = x\sqrt{x^2+5}$*, el eje* x *y la recta* $x = 2$.



Para calcular el área, debemos resolver la siguiente integral definida

$$A = \int_0^2 x\sqrt{x^2+5}dx$$

Se resuelve utilizando sustitución $u = x^2 + 5$ *y* $du = 2xdx$

$$\int x\sqrt{x^2+5}dx = \int \frac{u^{\frac{1}{2}}}{2}du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\left(x^2+5\right)^{\frac{3}{2}}$$

Aplicando la Regla de Barrow, resulta

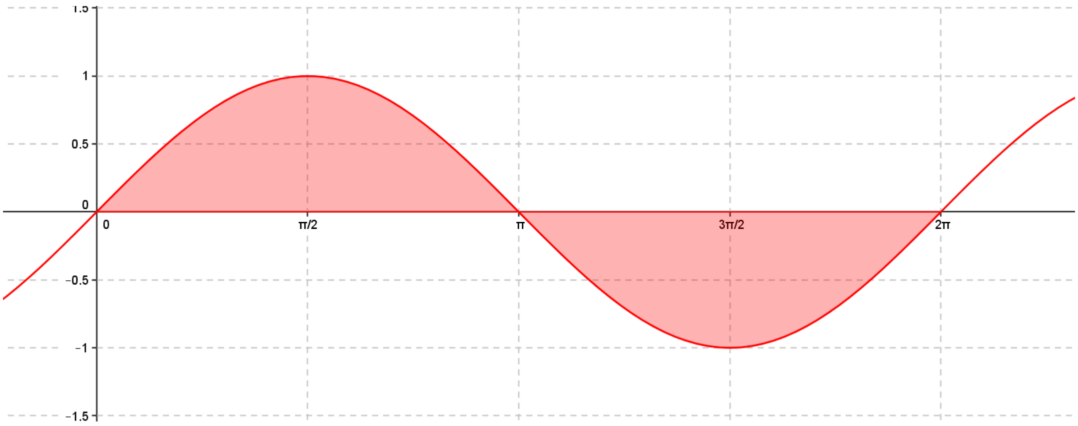
$$A = \int_0^2 x\sqrt{x^2+5}dx = \frac{1}{3}\left(x^2+5\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\left(2^2+5\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\left(0^2+5\right)^{\frac{3}{2}} = 9 - \frac{5}{3}\sqrt{5}\ ua$$

Ejemplo 4.29 *Calcular* $A = \int_0^{2\pi} sen\,(x)\,dx$

Como la función $f(x) = sen\,(x)$ *es una función impar;*

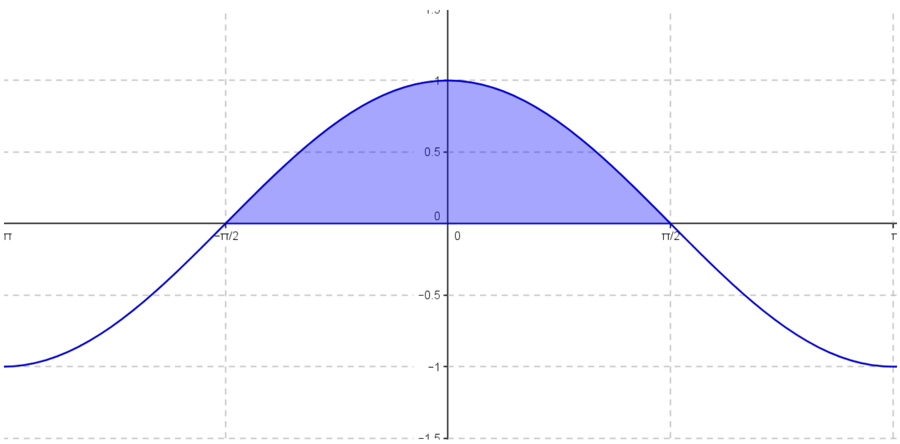
$$\int_0^{2\pi} sen\,(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0$$

Interpretado como área este resultado nos dice que el recinto limitado por la sinusoide y el eje de las abscisas en el intervalo $(0, 2\pi)$ *tiene área nula. Esto ocurre porque el área entre* $(0, \pi)$ *es igual y de signo contrario al área entre* $(\pi, 2\pi)$.



Ejemplo 4.30 *Calcular* $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ dx$. *Como el* $\cos(x)$ *es una función par, tenemos*

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ dx = 2\ sen\,(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\ u\ a$$



Ejemplo 4.31 *Calcular el área limitada por las parábolas de eje horizontal*

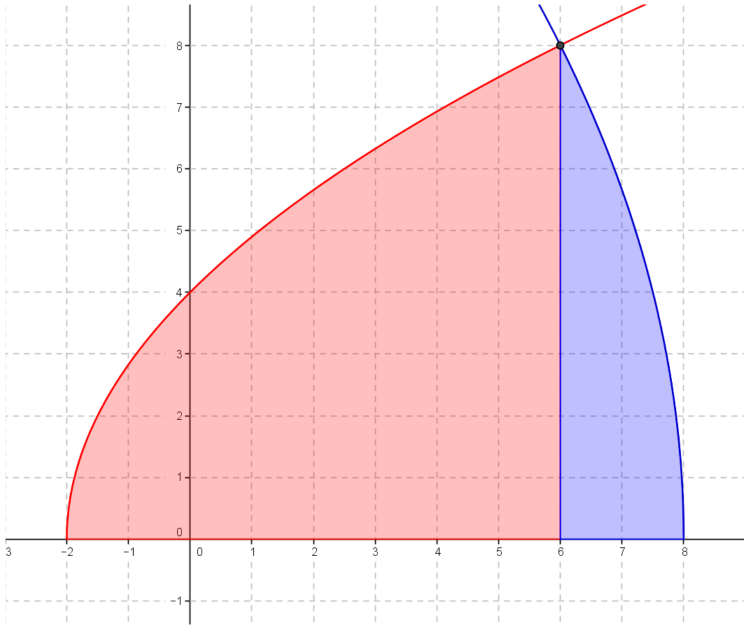
$$\begin{cases} y^2 = 8\,(x+2) \\ y^2 = 32\,(8-x) \end{cases}$$

Por razones de simetría podemos calcular el área correspondiente al semiplano superior $y > 0$ *y multiplicar el resultado por 2.*

Primero hallamos los puntos de intersección;

$$8(x+2) = 32(8-x) \Longrightarrow x = 6$$

los otros dos puntos de intersección con el eje x *los hallamos haciendo* $y = 0 \Longrightarrow x = -2$ *y* $x = 8$.



Entonces

$$A = \int_{-2}^{6} \sqrt{8(x+2)}dx + \int_{6}^{8} \sqrt{32(8-x)}dx = \sqrt{8}\int_{-2}^{6} (x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx + \sqrt{32}\int_{6}^{8} (8-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \sqrt{8}\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|\begin{matrix}6\\-2\end{matrix} - \sqrt{32}\frac{2}{3}(8-x)^{\frac{3}{2}}\Bigg|\begin{matrix}8\\6\end{matrix} = \frac{160}{3}\ u\ a$$

entonces el área buscada es el doble; es decir, $A = \frac{320}{3}u\ a$.

Ejercicio 4.32 *Calcular el área de la región limitada por las siguientes curvas:*

a) $\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = 2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \\ y = -x^2 + 2x + 8 \\ y = 0 \end{cases}$

4.6.2. Longitud de arco

Otra aplicación geométrica de la integral definida es el cálculo de la longitud de arco de la representación gráfica de una función. Sea la función f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Consideremos la representación gráfica de $f(x)$. La porción de la curva desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ se llama **arco**. Deseamos asignarle un número a lo que consideramos la longitud de arco. Lo haremos por medio del siguiente teorema.

Teorema 4.33 *Sea f una función y su función derivada f' continuas en el intervalo cerrao $[a, b]$. Entonces la longitud de arco de la curva $y = f(x)$ del punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ está dada por*

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

Ejemplo 4.34 *Calcular la longitud del arco de la curva $y = x^{\frac{3}{2}}$ en el intervalo $(0, 1)$.*

Entonces, si $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, luego

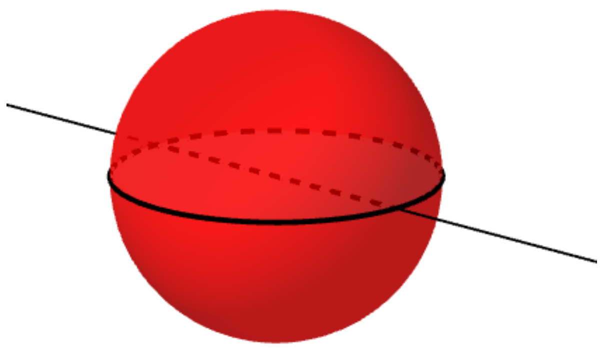
$$S = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \frac{2}{3}\frac{4}{9}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} = 1,4$$

Ejercicio 4.35 *Calcular la longitud de la curva de $f(x) = -2x^2 + x - 1$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$.*

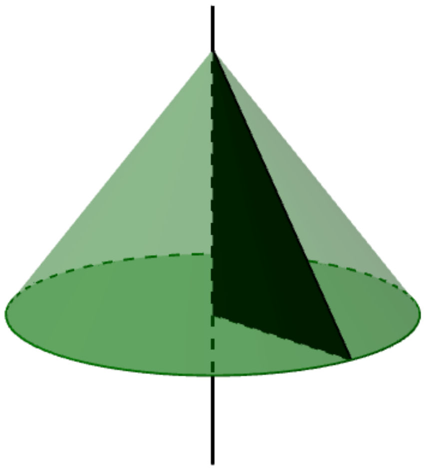
Ejercicio 4.36 *Calcular la longitud del arco de la curva de $f(x) = e^x$ comprendido entre $A = (0, 1) y$ $B = (1, e)$.*

4.6.3. Volumen de un Sólido de Revolución

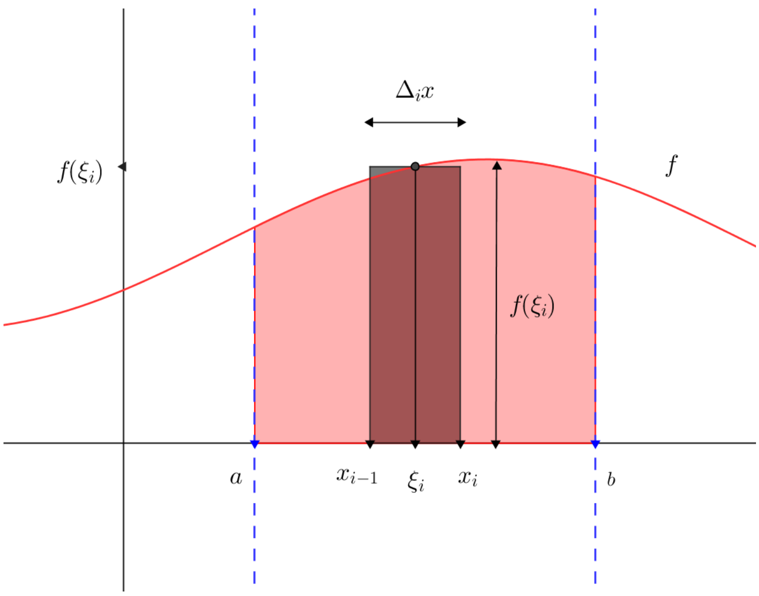
Un **sólido de revolución** es un cuerpo que se genera cuando una región plana gira con respecto a una recta de un plano, a la que se llama **eje de revolución**, y tal eje puede o no cortar a la región. Por ejemplo, si la región delimitada por un semicírculo y su diámetro gira alrededor del diámetro, se genera una esfera.



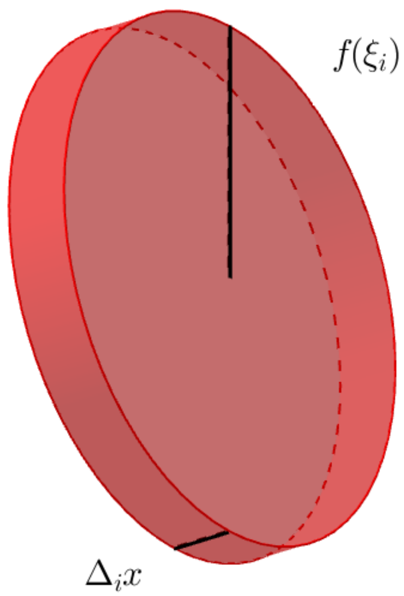
Cuando se produce una revolución de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, se genera un cono.



Consideremos el caso donde el eje de revolución es una frontera de la región que se hace girar. Sea la función f continua en el intervalo $[a, b]$ y supongamos que $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$. Sea R la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. El siguiente gráfico muestra la región R del i-ésimo rectangulo.



Cuando el rectángulo gira alrededor del eje x, se obtiene un elemento cuyo volumen es un disco de base circular con un radio de $f(\xi_i)$ unidades y una altura de $\Delta_i x$ unidades, como se muestra en el siguiente grafico



Si el volumen del disco es $\Delta_i V$ unidades cúbicas

$$\Delta_i V = \pi \left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta_i x$$

Puesto que hay n rectángulos, se obtienen n discos procediendo de esta manera, y la suma de las medidas de los volumenes de n discos es

$$\sum_{i=n}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=n}^{n} \pi \left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta_i x$$

Esta es una suma de Riemann. Por consiguiente, si el volumen del sólido de revolución es V unidades cúbicas, se deduce que V es el límite de esa suma de Riemann a medida que $\|\Delta\|$ tiende a cero. Este límite existe debido a que f^2 es continua en $[a, b]$, ya que f es continua en dicho intervalo. Por lo tanto tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.37 *Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$. Si S es el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje x la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x, y las rectas $x = a$ y $x = b$, y si V es el volumen de S en unidades cúbicas, entonces*

$$V = \lim_{\|\Delta_i\| \to 0} \sum_{i=n}^{n} \pi \left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta_i x = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Ejemplo 4.38 *Determinar el volumen de un sólido de revolución generado cuando la región acotada por la curva $y = x^2$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 2$ se hace girar alrededor del eje x.*

Para calcular dicho volumen, calcularemos la sigueinte integral definida

$$V = \pi \int_1^2 \left(x^2\right)^2 dx = \pi \int_1^2 x^4 dx = \pi \left.\left(\frac{1}{5}x^5\right)\right|_1^2 = \frac{31}{5}\pi$$

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución es $\frac{31}{5}\pi$ unidades cúbicas.

4.7. Ejercicios

1. Calcular las siguientes integrales definidas:

   a) $\int_0^{\pi} \cos(x)\, dx$ *d)* $\int_1^{e} \frac{1}{x} dx$ *g)* $\int_0^{3} 3(x-2)\, dx$ *j)* $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} [sen(x) - \cos(x)]\, dx$

   b) $\int_1^{3} 3x^2 dx$ *e)* $\int_1^{4} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ *h)* $\int_0^{\pi/6} \frac{sen(\theta)}{\cos^3(\theta)}\, d\theta =$ *k)* $\int_{-3}^{0} \frac{1}{\sqrt{25+3x}} dx$

   c) $\int_1^{e} \frac{sen(\ln\ x)}{x} dx$ *f)* $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$ *i)* $\int_1^{4} \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{\sqrt{x}} dx =$ *l)* $\int_0^{\pi/2} sen^2(3x)\ \cos(3x)\ dx =$

2. Calcular las integrales siguientes mediante las sustituciones indicadas

   a) $\int_0^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ $x = t^2$ *c)* $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos(x)}$ $t = \tan\frac{x}{2}$

   b) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ $u^2 = e^x - 1$ *d)* $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ $x = sen(u)$

3. Calcular utilizando el método de integración por partes:

   a) $\int_0^{1} xe^x dx$ *c)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 sen(x)\, dx$

   b) $\int_0^{\pi} e^x sen(x)\, dx$ *d)* $\int_0^{1} x\ln(1+x^2)\, dx$

4. Hallar el área comprendida entre la gráfica de $f(x) = x^2 - 3x + 2$, y el eje de abscisas para $0 \leq x \leq 4$.

5. Hallar el área determinada por las curvas $y = e^{-x/3}, y = 0$, con $x = 3, x = 0$.

6. Calcular el área de la región limitada por las siguientes curvas:

   a) $\begin{cases} y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \\ y = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = -x \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -x^2 + 4 \\ y = -x \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 \\ y = 0 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3x^2 - 2x \end{cases}$

7. Hallar el área determinada por las funciones $\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$ en el intervalo $[-3, 5]$.

8. Dibujar las regiones y luego hallar su área (si es necesario dividir el área en partes)

   a) La región limitada por $y = x + 6$; $y = x^3$; $2y + x = 0$

   b) El triángulo de vértices $(-1, 4), (2, -2), (5, 1)$

9. Hallar el área de la figura limitada por las curvas,

$$a)\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ x = \pm 2 \\ y = -x \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} y + x = 2 \\ y = x^2 \end{cases} \qquad e)\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad f)\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

10. Hallar el área determinada por las curvas de : $\begin{cases} y = sen\,(3x) \\ y = \cos(x) \end{cases}$ entre 0 y $\pi/2$.

11. Calcular la longitud del arco de la parábola $y = 2x^2 + 5x$ entre $x = 1$ y $x = 4$.

12. Hallar la longitud del arco de la curva $y = x^{\frac{3}{2}}$ con $0 \leq x \leq 4$.

13. Hallar la longitud del arco de la curva $y = \ln(\cos(x))$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

14. Hallar la longitud del arco de la curva $y = 3x^2 + 2x - 3$ comprendido entre $A = (1, 2)$ y $B = (2, 13)$

15. Encontrar la longitud del arco de la curva $y = 3x^2 + 4x - 2$ entre $A = (1, 5)$ y $B = (3, 37)$

16. Una cometa vuela al oeste. La altura de la cometa por arriba del suelo desde la posición horizontal $x = 0$ hasta $x = 80$ pies está dada por $y = 150 - \frac{1}{40}(x - 50)^2$. Calcular la distancia recorrida.

17. Un halcón vuela a 15 m/s a una altitud de 180 m y accidentalmente suelta su presa. La trayectoria parábólica de la presa en caida libre está descrita por la ecuación $y = 180 - \frac{x^2}{45}$ hasta tocar tierra, donde y es la altura sobre el suela y s es la distancioa horizontal, en metros. Calcular la distancia que recorre la presa entre el instante que la suelta y al tocar tierra.

18. Determinar el volumen de un sólido de revolución generado cuando se hace girar alrededor del eje x la región acotada por la curva $y = x^2$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

19. Determinar el volumen de un sólido de revolución generado cuando se hace girar alrededor del eje x la región acotada por la curva $y = x^2 + 1$, el eje x y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

4.7.1. T.U.A.S.Q.S

1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas

   a) Si f es integrable en $[a, b]$ entonces f es continua en $[a, b]$

   b) $\int f(x)dx$ existe para cualquier función $f(x)$

   c) Si f es una función par entonces $\int_a^b f(x)dx = 0$

   d) El área de la región entre la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $4x - 3y = 4$ es $A = \frac{16}{9}$ u.a.

   e) La longitud de arco de la curva $y = x^{\frac{2}{3}}$ desde el punto $(1, 1)$ al punto $(8, 4)$ es $L \approx 7,6$

Capítulo 5

Series

Los objetivos que nos proponemos para esta unidad es que los alumnos logren:

- Comprender el concepto de sucesión de números reales.
- Analizar la convergencia de sucesiones de números reales.
- Conocer y utilizar las propiedades de las sucesiones convergentes.
- Definir series numéricas.
- Conocer las condiciones necesarias y suficientes de convergencia para diferentes tipos de series numéricas.
- Comprender y utilizar los diferentes criterios de convergencia de series numéricas.
- Definir series de potencia.
- Comprender y utilizar los criterios de convergencia de series de potencia.
- Comprender el concepto de representación de funciones mediante series de potencia.
- Definir y utilizar polinomios de Taylor para aproximar funciones.
- Resolver ejercicios para calcular el error cometido al aproximar funciones mediante polinomios de Taylor.

5.1. Sucesiones

Este capítulo comienza con la definición de una clase especial de funciones llamadas sucesiones. En particular, las sucesiones de números reales que asignan, a cada número natural, un número real.

Se definirá luego la sucesión de sumas parciales correspodientes a una sucesión dada y las condiciones necesarias y suficientes para que la serie obtenida sea convergente. Se darán criterios de convergencia para diferentes tipos de series numéricas.

Finalmente, se definirán series de funciones, en particular, series de potencia y se determinarán los intervalos de convergencia de las mismas que permiten la representación de funciones mediante su serie. A partir de estos conceptos, se presentarán aproximaciones de funciones mediante polinomios de Taylor.

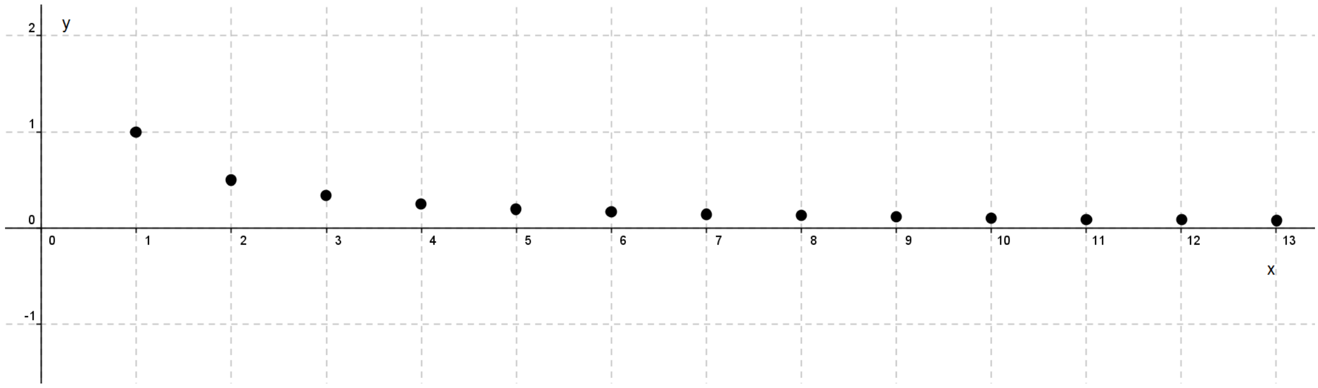
Definición 5.1 *Una **sucesión** de números reales es una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que asocia a cada número natural n un número real $a_n = a(n)$, siendo a_n el término $n-$ésimo de la sucesión.*

$$\{a_n\}_{n\geq 1} = a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

Ejemplo 5.2 *A cada número natural $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ le hacemos corresponder*

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$$

entonces tenemos la sucesión definida a través de la función $a(n) = a_n = \frac{1}{n}$.



Cuando estudiamos sucesiones se presentan dos cuestiones básicas:

- Dados los términos de la sucesión encontrar la regla o ley que define el término general. Es importante aclarar que hay sucesiones para las cuales no existe el término general.
- Conociendo su regla o ley investigar si la sucesión, a medida que n crece arbitrariamente se aproxima a algún valor determinado.

Ejemplo 5.3 *Dada la sucesión*

$$1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}, ...$$

encontrar cual es la regla o ley general que define esta sucesión.

Es claro que la asignación es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
1 &\to \frac{1}{1^2}\\
2 &\to \frac{3}{2^2} = \frac{2\cdot 2-1}{2^2}\\
3 &\to \frac{5}{3^2} = \frac{2\cdot 3-1}{3^2}\\
4 &\to \frac{7}{4^2} = \frac{2\cdot 4-1}{4^2}\\
&\vdots\\
n &\to \frac{2\cdot n-1}{n^2}
\end{aligned}$$

Entonces será $a_n = \frac{2.n-1}{n^2}$.

Ejercicio 5.4 *Encontrar los primeros seis términos de las sucesiones cuyo término general es* $a_n = \frac{2n}{n+1}$ *y* $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

Ejercicio 5.5 *Encontrar el término general de las siguientes sucesiones:*

a) $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, ...$
b) $1, -1, 1, -1, 1, ...$
c) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{6}, \frac{5}{24}, \frac{6}{120}, ...$

Existen dos familias especiales de sucesiones.

- **Sucesiones aritméticas** que son aquellas en las cuales cada término se obtiene sumando un valor fijo al término anterior, es decir

  $$a_n = a_{n-1} + d$$

  Su término general es

  $$a_n = a_1 + d.(n-1)$$

  Ejemplo 5.6 $\{a_n\}_{n\geq 1} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, ...$ *con* $d = 1$. *La sucensión es* $\left\{\frac{1}{2} + 1.(n-1)\right\}_{n\geq 1}$.

- **Sucesiones geométicas** donde cada término se obtiene multiplicando el término anterior por un valor constante, es decir

  $$a_n = q \cdot a_{n-1}$$

  Su término general es

  $$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

  Ejemplo 5.7 $\{a_n\}_{n\geq 1} = 1, 0.3, 0.09, 0.027, \cdots$ *con* $q = 0.3$. *La sucensión es* $\{0.3^{n-1}\}_{n\geq 1}$.

La segunda cuestión a analizar es: dada la regla o ley, qué ocurre cuando n crece arbitrariamente?

Ejemplo 5.8 *Dada la sucesión* $\{\frac{1}{n^2}\}_{n\geq 1}$ *podemos verificar que cuando* n *crece arbitrariamente, los términos de la sucesión se aproximan a* 0

$$\begin{aligned} 1 &\to \frac{1}{1^2} = 1 \\ 2 &\to \frac{1}{2^2} = 0{,}25 \\ 3 &\to \frac{1}{3^2} = 0{,}11 \\ 4 &\to \frac{1}{4^2} = 0{,}06 \\ &\vdots \\ 10 &\to \frac{1}{10^2} = 0{,}01 \\ &\vdots \\ 100 &\to \frac{1}{100^2} = 0{,}0001 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.9 *La sucesión aritmética* $\{3+4(n-1)\}_{n\geq 1}$ *crece indefinidamente a medida que crece arbitrariamente* n.

Ejemplo 5.10 *En la sucesión* $\{a_n\}_{n\geq 1} = 1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, ...$ *los términos impares se hacen infinitamente grandes a medida que* n *crece mientras que los términos pares tienden a* 0*, para* n *suficientemente grande. Este tipo de sucesiones se conoce con el nombre de oscilantes.*

Definición 5.11 *Una sucesión es* ***convergente*** *si, a medida que crece* n*, los términos de la sucesión se aproximan a un número real;* ***divergente*** *si, a medida que crece* n*, los términos de la sucesión creceno decrecen indefinidamente;* ***oscilante*** *si no es convergente ni divergente.*

Ejercicio 5.12 *¿Para que valores de la razón, las sucesiones aritméticas son convergente? ¿Y divergentes? ¿Y oscilantes?*

Ejercicio 5.13 *¿Para que valores de la razón, las sucesiones geométricas son convergente? ¿Y divergentes? ¿Y oscilantes?*

5.1.1. Convergencia de las sucesiones

La convergencia de una sucesión de números reales puede investigarse de dos maneras:

1. analizando si es monótona y acotada.

2. calculando su límite.

Para el primer item, definimos:

- Una sucesión se dice que es **acotada** si verifica:

$$\text{Existe } M \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } |a_n| \leq M \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

- Una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es **creciente** si $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq .... \leq a_n \leq a_{n+1}.....$ Si todos los términos de la sucesión son positivos, podemos probar que la sucesión es creciente mostrando que
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$$

- Una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es **decreciente** si $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq .... \geq a_n \geq a_{n+1}....$ Si todos los términos de la sucesión son positivos, podemos probar que la sucesión es decreciente mostrando que
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$$

- En cualquiera de los dos casos si la sucesión es creciente o decreciente, se dice que la sucesión es **monótona**.

- En ambos casos, si las desigualdades con sólo de tipo $<$ o $>$, las sucesiones serán **estrictamente crecientes** o **estrictamente decrecientes**.

Teniendo presente estas definiciones podemos presentar un primer criterio de convergencia de sucesiones.

Teorema 5.14 *Toda sucesión monótona y acotada es* ***convergente****.*

La demostración del teorema queda a cargo del lector interesado.

Ejercicio 5.15 *Proponga sucesiones que cumplan con las condiciones pedidas y determine, utilizando el teorema anterior, si son convergentes o no:*

- *sucesión acotada y no monótona*

- *sucesión no acotada y monótona*

- *sucesión no acotada y no monótona*

- *sucesión acotada y monótona*

El segundo criterio de convergencia lo expresa el límite de la sucesión.

Definición 5.16 *Una sucesión* $\{a_n\}_{n\geq 1}$ *tiene* ***límite*** l*, o* ***converge*** *a* l*, si se cumple la siguiente propiedad:*

$$\text{Dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \text{ es } |a_n - l| < \varepsilon$$

Lo notaremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

(ver gráfico correspondiente en la página de la cátedra).

Ejemplo 5.17 *La sucesión* $\left\{a_n = \frac{1}{n^2}\right\}_{n\geq 1}$ *es convergente a* 0*.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Si el límite es infinito tendremos la siguiente.

Definición 5.18 *Una sucesión* $\{a_n\}_{n\geq 1}$ *tiene* ***límite infinito****, o* ***diverge*** *si se cumple la siguiente propiedad:*

$$\text{Dado } M \in \mathbb{R}^+ \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que para } n \geq n_0 \text{ se cumple que } |a_n| > M$$

Lo notaremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Ejemplo 5.19 *La sucesión* $\{a_n = 4n - 1\}_{n\geq 1}$ *tiene límite infinito.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 4n - 1 = \infty$$

Finalmente, y como ocurre en algunos casos

Definición 5.20 *Una sucesión* $\{a_n\}_{n\geq 1}$ *que no posee límite se denomina* ***oscilante***

Ejemplo 5.21 *La sucesión* $b_n = 1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, ...,$ *es oscilante y no tiene límite.*

5.1.2. Propiedades de las sucesiones convergentes

Para calcular el límite de una sucesión se utilizan los mismos métodos que aplicamos cuando calculamos el límite de una función cuando la variable tiende a infinito $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y se utilizan las siguientes propiedades:

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones convergentes. Se cumple entonces que:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (ca_n \pm b_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n.\, b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n . \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/\ b_n) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ *si* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

iv) Siendo $k \in \mathbb{R}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^k\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^k$.

v) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geq 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{a}$.

vi) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a > 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

vii) (propiedad del emparedado) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ y sea $\{c_n\}$ una sucesión tal que $a_n \leq c_n \leq b_n$ con $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $\{c_n\}$ es convergente y su límite es $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

Ejercicio 5.22 *Encontrar, si es posible, los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+4}{n^2+1}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-2}{n^2+1}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-2}{3n^2+1}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^{2/3}+n^{4/5}+n^{5/2}}{n^3+n^{2/3}+5n}$

5.2. Series Numéricas

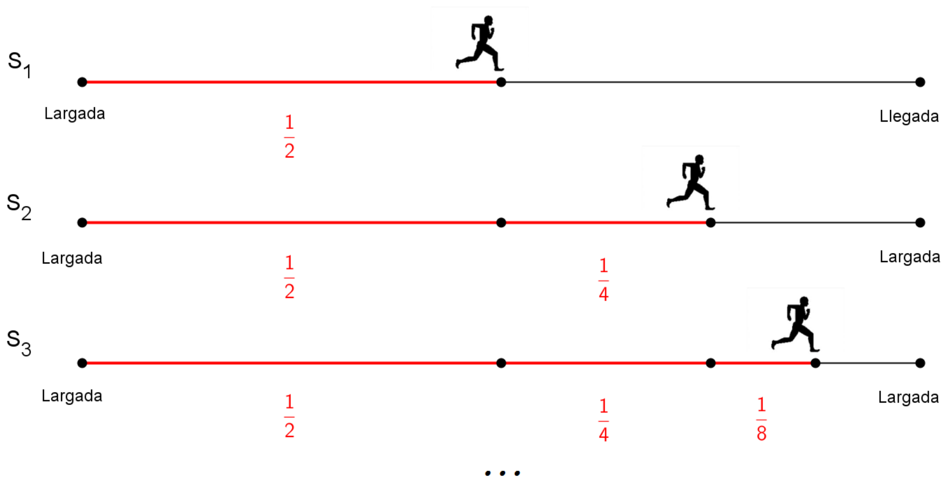
Todos sabemos que la suma de una cantidad finita de números reales da otro número real. ¿Pero qué pasa si sumamos una cantidad infinita de números? ¿A qué nos referimos cuando decimos *suma de un número infinito de términos* y en qué circunstancias existe dicha suma? Para tener una idea intuitiva de esto, recordemos una famosa paradoja formulada hace unos 2400 años. Zenón de Elea decía que un corredor no podía terminar una carrera, porque primero debía cubrir la mitad de la distancia, luego la mitad de la que queda, y así sucesivamente. Puesto que el tiempo de la carrera es finito, no podría recorrer el infinito número de segmentos del camino. Pero todos sabemos que los corredores terminan sus carreras.

Imagine que el recorrido de la carrera mide 1 km de longitud. Los segmentos del argumento de Zenón tendrían como longitudes $\frac{1}{2}$ km, $\frac{1}{4}$ km, $\frac{1}{8}$ km, etc.

En el lenguaje matemático, terminar la carrera significaría evaluar la suma:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+....$$

Consideremos las sumas parciales



$$
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2}\\
S_2 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\\
S_3 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}\\
&\ldots\ldots.\\
S_n &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....+\frac{1}{2^n}
\end{aligned}
$$

Es claro que las sumas parciales aumentan acercándose a 1. En efecto, se puede probar que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

Definición 5.23 *Dada una sucesión* $\{a_n\}_{n\geq 1} = a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...,$ *consideramos para todo* $n \in \mathbb{N}$ *la suma de los primeros* n *términos de la sucesión* $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, *es decir,*

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1\\
S_2 &= a_1 + a_2\\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3\\
&\ldots..\\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.
\end{aligned}
$$

Los números $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ *se denominan* ***sumas parciales****. Consideremos ahora la sucesión de sumas parciales* $\{S_n\}_{n\geq 1} = S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$ *La sucesión* $\{S_n\}_{n\geq 1}$ *se llama* ***serie****. Esta serie se representa por:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + \ldots$$

Si existe S el límite de la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$, es decir si $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, diremos que la serie dada es ***convergente*** *y que S es la* ***suma*** *de los infinitos términos de la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$. En símbolos*

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Si no existe el límite de la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$, diremos que la serie es **divergente** y que la serie no tiene suma.

Ejemplo 5.24 *Dada la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$$

obtener los primeros cuatro términos de la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n\geq 1}$ y mostrar por inducción que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Luego podemos calcular el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Luego, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente y tenemos que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Ejemplo 5.25 *Un ejemplo de serie divergente es la que se conoce como* ***serie armónica****, la cual es:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + \dots$$

Intuitivamente podemos ver que diverge, asociando términos resulta claro que tomando un n suficientemente grande, podemos obtener en la última expresión tantas mitades como queramos, por consiguiente S_n diverge:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + ... + \frac{1}{n} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + ... + \frac{1}{n} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... \end{aligned}$$

5.3. Condición necesaria de la convergencia

En muchos casos no es posible obtener una expresión para S_n en términos de n y, por lo tanto, debemos conocer otros métodos para determinar si una serie dada tiene o no suma, o lo que es lo mismo, si una serie es convergente o divergente.

Proposición 5.26 *Si la serie* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *converge, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Demostración 5.27 *Sea* $\{S_n\}_{n\geq 1}$ *la sucesión de sumas parciales para la serie* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *y sea* $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \ldots a_{n-1} + a_n \\ S_{n-1} &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \\ S_n - S_{n-1} &= a_n \end{aligned}$$

Por la unicidad del límite

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n$$

analizando el primer término , $\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$, *aplicando el limite de una resta igual a la resta de los limites, porque cada limite existe, y además por la unicidad del límite,*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} &= \lim_{n\to\infty} a_n \\ S - S &= \lim_{n\to\infty} a_n \\ 0 &= \lim_{n\to\infty} a_n \end{aligned}$$

Que es lo que se quería demostrar.

Esta es la condición necesaria para la convergencia.

La recíproca no es cierta, es decir que el $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ esto no quiere decir que la serie converge. Un contraejemplo es la serie armónica.

Ejemplo 5.28 *Sea la serie armónica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. *Es sencillo ver que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

pero a pesar de esto, la serie diverge.

El contrarecíproco de la condición necesaria de convergencia es muy útil para mostrar que una serie es divergente. Se puede enunciar como sigue:

Corolario 5.29 *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *ó si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *no existe entonces la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Ejemplo 5.30 *Sea* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3n^3+2n^2}$. *Mostrar que la serie diverge.*

Si analizamos el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3n^3+2n^2} = \frac{1}{3} \neq 0$$

entonces podemos afirmar que la serie diverge.

Ejercicio 5.31 *Mostrar que la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$ *es divergente.*

5.4. Serie Geométrica

Definición 5.32 *Una serie de la forma*

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

donde $a \neq 0$ *se llama* ***serie geométrica*** *de razón* r. *También la podemos escribir como* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ar^k$.

Proposición 5.33 *La serie geométrica converge a la suma* $\frac{a}{1-r}$ *si* $|r| < 1$, *y diverge si* $|r| \geq 1$.

Demostración 5.34 *Si* $r \neq 1$ *y* $a = 1$, *por inducción se prueba que la suma parcial* S_n *de la serie* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r^{k-1}$ *es:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \ ... + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Luego por la unicidad del límite,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{r^n - 1}{r - 1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{r-1} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r-1}$$

Recordemos que si $|r| < 1$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$, *luego*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r-1} = \frac{1}{1-r}$$

en cuyo caso vemos que la serie geométrica converge. Generalizando para el caso que $a \neq 1$, *si* $|r| < 1$ *la serie* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ *converge y su suma es* $S = \frac{a}{1-r}$.

Analicemos ahora para $|r| > 1$*, en este caso* $\lim\limits_{n\to\infty} r^n \neq 0$*, y por el criterio del n-ésimo término para la divergencia la serie* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ *diverge.*

Si $|r| = 1$*,* $r = 1$ *o* $r = -1$*, también tenemos que* $\lim\limits_{n\to\infty} r^n \neq 0$*, luego diverge.*

Resumiendo,

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} \begin{cases} \text{si } |r| < 1 & \text{Converge} \\ \text{si } |r| \geq 1 & \text{Diverge} \end{cases}$$

Ejemplo 5.35 *Recordemos la paradoja de Zenón. En la primera sección de este capítulo mostramos que la sucesión de sumas parciales es* $S_n = \frac{1}{2^n}$ *con* $n \in \mathbb{N}$*. Luego, la serie que representa la distancia recorrida por el corredor es* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$*. Vemos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

es una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$*, como* $r < 1$*, entonces la serie converge. La suma de la serie será* $S = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$*.*

Ejemplo 5.36 *Expresar el decimal* $0,27272727\ldots$ *como fracción.*

$$\begin{aligned} 0,27272727... &= \frac{27}{100} + \frac{27}{10000} + \frac{27}{1000000} + \ldots + \frac{27}{100^n} + \ldots \\ &= \frac{27}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \ldots + \frac{1}{100^{n-1}} + \ldots\right) \end{aligned}$$

Se trata de una serie geométrica con $a = \frac{27}{100}$ *y* $r = \frac{1}{100}$*. Como* $|r| < 1$*, la serie converge y su suma es:*

$$0,27272727\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{27}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} = \frac{\frac{27}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{3}{11}$$

Ejemplo 5.37 *Estudiar la convergencia de la siguiente serie geométricas y en caso que converja encontrar el valor de su suma:*

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \ldots = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots\right) = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots\right)$$

Vemos que es una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{3}$*, como* $r < 1$*, entonces la serie converge. La suma de la serie será* $S = \frac{4/3}{1-1/3} = 2$*.*

Ejercicio 5.38 *Expresar el decimal* $0,515151\ldots$ *como fracción.*

5.5. Serie Armónica Generalizada

Definición 5.39 *Llamamos* ***serie armónica generalizada*** *a la serie de la forma* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *con* $p \in \mathbb{R}$.

Proposición 5.40 *La serie armónica generalizada converge si* $p > 1$ *y diverge si* $p \leq 1$. *Resumiendo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \textit{si } p > 1 \textit{ la serie converge} \\ \textit{si } p \leq 1 \textit{ la serie diverge} \end{cases}$$

5.5.1. Propiedades de las series convergentes

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes y c una constante, entonces:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, además la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n$ también converge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, además la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ también converge.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n$ también diverge para $c \neq 0$.

Ejemplo 5.41 *Estudiar la convergencia o divergencia de la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k}$.

Como sabemos la serie armónica diverge, al estar multiplicada por la constante $\frac{1}{3}$ *(no nula) la serie dada también diverge.*

Ejemplo 5.42 *Estudiar la convergencia o divergencia de la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \left[3\left(\frac{1}{8}\right)^k - 5\left(\frac{1}{3}\right)^k\right]$.

Sabemos que las series geométricas $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ *convergen pues* $r = \frac{1}{8} < 1$ *y* $r = \frac{1}{3} < 1$. *Por la propiedad a) al estar multiplicadas por una constante también convergen y por la propiedad b) su suma también converge.*

Ejercicio 5.43 *Estudiar la convergencia o divergencia de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3 \cdot 4^n} + \frac{1}{n^4}\right]$.

En las próximas secciones estudiaremos la convergencia de algunas familias especiales de series.

5.6. Serie de Términos Positivos

Estudiemos el caso de series de términos positivos, es decir, series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en las que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En estas series la sucesión de sumas parciales resulta monótona creciente, efectivamente:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \\ S_{n+1} &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1} \\ &\Longrightarrow S_{n+1} \geq S_n \end{aligned}$$

Luego, si demostrásemos que la sucesión está acotada, entonces la serie sería convergente, mientras que si no estuviera acotada la serie sería divergente.

Ejemplo 5.44 *Demostrar que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *es convergente.*

Debemos encontrar una cota superior para la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. *Como* $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ *tenemos:*

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \leq \frac{1}{2^0} \\ S_2 &= 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \leq \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} \\ S_3 &= 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \leq \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} \\ S_4 &= 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \leq \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \\ &\vdots \\ S_n &= 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

Consideremos ahora la serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$. *Como* $a = 1$ *y* $r = \frac{1}{2} < 1$ *sabemos que converge. Por lo tanto,* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. *Luego*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 2$$

Vemos que la sucesión S_n *tiene cota superior 2. Por ser una sucesión monótona creciente y acotada, la serie es convergente.*

5.6.1. Criterio de comparación para series de términos positivos

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de términos positivos y tales que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq n_0$. Entonces:

i) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

ii) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Demostración 5.45 i) *Sean*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$S_n' = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge, o sea* S_n' *converge. Por lo tanto, la sucesión* S_n' *esta acotada, es decir existe* $M' > 0$ *tal que* $S_n' \leq M'$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, si* $n > n_0$ *sucede que*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n_0} a_k + S_n' \leq \sum_{k=1}^{n_0} a_k + M' \end{aligned}$$

llamando $M'' = \sum_{k=1}^{n_0} a_k + M'$ *entonces* $S_n \leq M''$ *y si* $M = \max\{S_1, S_2, \ldots, S_{n_0}, M''\}$ *entonces* $S_n \leq M$ *´para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Luego* $\{S_n\}_{n\geq 1}$ *está acotada superiormente y como además es creciente, es convergente, o sea existe el* $\lim_{n\to\infty} S_n$*. Luego, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

ii) *Supongamos que* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge. Por i) la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *también converge, lo cual es un absurdo. Luego* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge.*

Ejemplo 5.46 *Estudiar la convergencia o divergencia de la serie* $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots$

En este caso $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$*, entonces la serie será* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ (n+1)}$.

Analizamos la convergencia por el criterio de comparación:

$$\frac{1}{n.\,(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}$$

pues $n^2+n>n^2$ *y como la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *converge (serie armónica generalizada con* $p>1$*)* *tenemos que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(n+1)}$ *converge.*

Ejemplo 5.47 *Estudiar la convergencia o divergencia de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^2-4}$.

Vamos a aplicar el criterio de comparación

$$\frac{n}{5n^2-4}>\frac{n}{5n^2}=\frac{1}{5n}$$

pero sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n}$ *diverge, implica que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^2-4}$ *diverge.*

Ejemplo 5.48 *Estudiar la convergencia o divergencia de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)}$.

Aplicamos el criterio de comparación:

$$\frac{n}{2^n\,(n+1)}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{n}{n+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \textit{porque}\ \frac{n}{n+1}<1$$

puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *converge (serie geométrica con* $r=\frac{1}{2}<1$ *) concluimos que la serie dada converge.*

Ejercicio 5.49 *Estudiar la convergencia o divergencia de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

5.6.2. Criterio de paso al límite

Teorema 5.50 *Sean* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones de términos positivos.*

1. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=s>0$*, entonces, ambas series convergen o divergen.*
2. *Si* $s=0$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *converge implica que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *también converge.*

Ejemplo 5.51 *Estudiar la convergencia o divergencia de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+19n}}$.

Vamos a aplicar el criterio de paso al límite, para comparar utilizamos la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$*, así*

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+19n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+19n}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2}{n^2+19n}}=1$$

Al ser $S=1>0$ *ambas series se comportan del mismo modo, en este caso la serie dada diverge pues* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *diverge.*

Ejercicio 5.52 *Estudiar la convergencia o divergencia de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n+1}$.

5.6.3. Criterio de D'Alembert o del cociente

Proposición 5.53 *Sea* $\{a_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de términos positivos tal que* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = s$. *Entonces:*

1. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge si* $s < 1$.
2. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge si* $s > 1$.
3. *El criterio no decide si* $s = 1$.

Ejemplo 5.54 *Estudiar la convergencia o divergencia de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Como es una serie de términos positivos, podemos utilizar el criterio del cociente o de D'Alembert para analizar la convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}/\,(n+1)!}{2^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n 2.n!}{2^n.\,(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

como $s = 0 < 1$ *la serie converge.*

Ejercicio 5.55 *Estudiar la convergencia o divergencia de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

5.6.4. Criterio de Cauchy o de la raíz

Proposición 5.56 *Sea* $\{a_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de términos positivos tal que* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = s$. *Entonces:*

1. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge si* $s < 1$.
2. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge si* $s > 1$.
3. *El criterio no decide si* $s = 1$.

Ejemplo 5.57 *Estudiar la convergencia o divergencia de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n}$.

Como es una serie de términos positivos, podemos utilizar el criterio de la raíz o de Cauchy para analizar la convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{2^n n}} = \frac{3}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{3}{2}$$

pues por propiedad $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Luego $s = \frac{3}{2} > 1$ *por lo tanto la serie dada diverge.*

Ejercicio 5.58 *Estudiar la convergencia o divergencia de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n+1n}}{n^{2n}}$.

5.7. Series Alternadas

Estudiemoa ahora la convergencia de series alternadas, es decir series de la forma $\sum (-1)^{n+1} a_n$ con $a_n \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^n a_n + ...$$

Presentaremos un único criterio para series de este tipo.

5.7.1. Criterio de Leibniz para series alternadas

Si una sucesión $\{a_n\}$ verifica:

i) $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $a_{n+1} \leq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$, es decir, la sucesión es monótona decreciente.

iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Entonces, la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge.

Ejemplo 5.59 *Estudiar la convergencia o divergencia de la serie alternada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Vamos a aplicar el criterio de series alternadas para lo cual debemos comprobar si se verifican las condiciones:

i) $a_n = \frac{1}{n} \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ *sucesión decreciente.*

iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Por el criterio de series alternadas la serie converge.

Ejercicio 5.60 *Estudiar la convergencia o divergencia de la serie alternada* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n\,(n+1)}$.

5.7.2. Convergencia Absoluta

Definición 5.61 *Una serie* ***converge absolutamente*** *si la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *es convergente.*

Teorema 5.62 *Toda serie absolutamente convergente es convergente. La recíproca de esta propiedad no es cierta.*

La demostración de este teorema se deja para el lector interesado.

Ejemplo 5.63 *Estudiar la convergencia o divergencia de la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$.

Vamos a estudiar la convergencia absoluta $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$. *Como es una serie de términos positivos podemos aplicar el criterio del cociente:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

Entonces por el criterio del cociente la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ *converge, es decir la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$ *converge absolutamente. Luego la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$ *converge.*

Para verificar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$ *converge, aplicamos el criterio de Leibniz. Demostraremos, primero, que es decreciente:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2n} < \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow a_n > a_{n+1}$$

Estudiamos $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$, *aplicando la propiedad que nos permite pasar al límite de funciones y por la Regla de L'Hospital,*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x\ln 2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x(\ln 2)^2} = 0$$

y aplicando el criterio de Leibniz decimos que la serie dada es convergente.

Ejemplo 5.64 *Estudiar la convergencia o divergencia de la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$.

Analizamos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ *y aplicamos el criterio del cociente:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n!}{3^n(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0$$

$s = 0 < 1$. *Concluimos que la serie dada converge absolutamente y por lo tanto converge.*

Ejemplo 5.65 *Mostraremos que la reciproca del teorema no es cierta.*

Consideremos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. *Dicha serie converge por el criterio de Leibniz, pero no absolutamente, puesto que* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *diverge por ser la serie armónica.*

5.7.3. Convergencia Condicional

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge se dice que la serie es **condicionalmente convergente**.

Ejemplo 5.66 *Demostrar que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *es condicionalmente convergente.*

Si aplicamos el criterio de Leibniz vemos que la serie converge. Pero la serie de valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *diverge por ser la serie armónica generalizada con* $p = \frac{1}{2} < 1$. *Entonces la serie es condicionalmente convergente.*

5.8. Ejercicios

1. Calcular los 3 primeros términos de la sucesión de sumas parciales

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n^2} \quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{(n+1)(n+2)} \quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{2n+1} \quad d)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\tfrac{1}{n!}$$

2. Determinar la suma de las series

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\tfrac{2}{3}\right)^n \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}2\left(-\tfrac{2}{3}\right)^n \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \qquad d)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n$$

3. Determinar si las siguientes series geométricas convergen o divergen. Si convergen encontrar su suma:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{3}{2^n} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{3}{2}\right)^n \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}(0,9)^n \qquad d)v2\left(\tfrac{3}{4}\right)^n$$

4. Use el criterio de comparación del límite para determinar la convergencia o divergencia de las series siguientes:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{n}{n^2+2n+3} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{3n+1}{n^3-4} \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$$

5. Use el criterio del cociente para determinar la convergencia o divergencia de las series dadas:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{8^n}{n!} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{5^n}{n^5} \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{n!}{n^{100}}$$

6. Determinar la convergencia o divergencia de cada serie. Indicar el criterio:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{4n^3+3n}{n^5-4n^2+1} \qquad d)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{5+n}{n!} \qquad g)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n^3-5n}$$

$$b)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{\sqrt{n+1}}{n^2+1} \qquad e)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{2n+3}{3n+2}\right)^n \qquad h)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\tfrac{3^n}{n!}$$

$$c)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{n^3}{3^n} \qquad f)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n^3+5n} \qquad i)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^{n+1}}{n}$$

7. Aplicar el criterio de Leibniz para las siguientes series alternadas:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^n}{n!} \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{3n} \qquad d)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\tfrac{1}{\ln(n+1)}$$

8. Estudiar la convergencia o divergencia absoluta de las series:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n} \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n} \qquad d)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{n}{2^n}$$

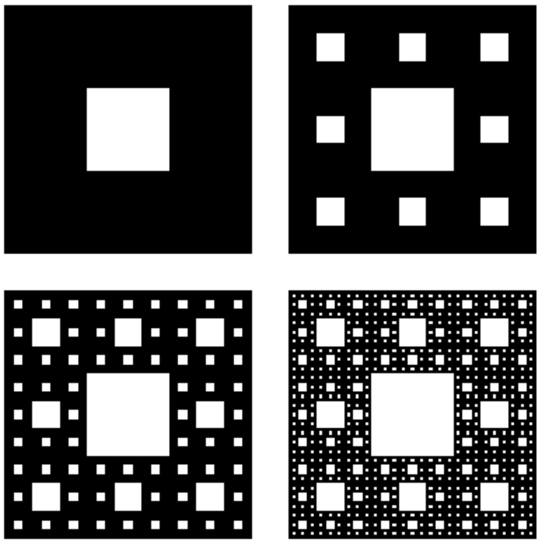
9. Se deja caer una pelota desde una altura de 100 pies. Cada vez que golpea el piso rebota 2/3 de su altura anterior. Encontrar la distancia total que recorre.

10. Tres personas A, B y C dividen una manzana de la siguiente manera:

    Primero la dividen en 4 y cada uno toma $\frac{1}{4}$. Luego dividen la cuarta parte sobrante en cuartos y cada uno toma uno de esos cuartos y así sucesivamente.

    Demostrar que cada uno obtiene un tercio de la manzana.

11. Considerar la alfronbra de Sierpinski (la figura anexa muestra los primeros pasos de su construcción). Demostrar que la suma de las áreas de los cuadrados que se suprimieron es 1.



5.9. Series de potencias

Hemos considerado, hasta aquí sucesiones de números reales y definido sumas parciales y series numéricas, analizando sus propiedades y la convergencia de las mismas.

Consideraremos ahora una sucesión $f_1, f_2, f_3, ..., f_n, ...$ donde cada f_n no es un número real sino una función. Es decir, tendremos una sucesión de funciones definidas todas en un mismo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y a valores en $\mathbb{R}$.

Definición 5.67 *Una **serie de funciones** es una serie donde cada uno de los términos es una función.*

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Si le asignamos un valor a la variable x, por ejemplo $x = a$, la serie de funciones se transforma en una serie numérica

$$f_1(a) + f_2(a) + ... + f_n(a) + ...$$

y podremos analizar su convergencia.

Definición 5.68 *Todos aquellos valores para los cuales la serie numérica converge, es decir, para las cuales existe el límite de las sumas parciales*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(a) = S(a)$$

*forman el **Campo o Intervalo de Convergencia** de la serie de funciones dada.*

La función $S(x)$ es entonces la función que representa la suma de la serie

$$f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ...$$

para los valores de x en el intervalo de convergencia.

Un caso especial de serie de funciones son las **series de potencias**, que definiremos a continuación.

Definición 5.69 *Sea x_0 un número real y a_n una sucesión. La serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

*se denomina **Serie de Potencias** centrada en x_0.*

En particular, si $x_0 = 0$, se obtiene una serie de potencias en x de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Una serie de potencias, como se explicitó para serie de funciones, podrá entonces ser convergente para ciertos valores de x y divergente para otros.

En general, nos interesará conocer el conjunto de valores de x para los cuales la serie de potencias converge dado que, para ese dominio, podremos definir una función $S(x)$ como la suma de la serie.

Ejemplo 5.70 *Un ejemplo y tres miradas: Si consideramos la serie geométrica de razón x*

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

- *Sabemos que, si la razón x tiene valor absoluto menor que 1, $|x| < 1$, esta serie* ***converge*** *y su suma queda expresada por la función $S(x) = \frac{1}{1-x}$*

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

- *Podemos observar también que, dada la función $\frac{1}{1-x}$, es posible representarla por su desarrollo en serie de potencias.*

- *Finalmente, si asignamos un valor a la variable independiente y queremos evaluar la función en ese punto, podemos considerar polinomios finitos y obtener aproximaciones tan precisas como se desee.*

  Consideremos $x = \frac{1}{2}$ y encontremos el valor aproximado de la función suma $S(\frac{1}{2})$ tomando los primeros 7 términos de la serie:

$$S(\frac{1}{2}) = \frac{1}{1-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1{,}984$$

  La aproximación encontrada será mejor a medida que tomemos mayor cantidad de términos de la serie. El valor exacto es $S(\frac{1}{2}) = 2$

Esta sección analizaremos herramientas relacionadas a series de potencias que nos permitirán responder las siguientes preguntas:

- dada una serie de potencias, para qué valores de x la serie converge?

- todas las funciones tienen desarrollo en serie de potencias?

- si una función puede ser desarrollada en serie de potencias, podremos evaluarla con tanta exactitud como queramos considerando polinomios finitos?

5.9.1. Convergencia de una serie de potencias

Como quedó definido anteriormente, el intervalo de convergencia de una serie de potencias consta de todos los valores de x para los cuales la serie converge.

Dada una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

puede ocurrir que:

- exista un número real R para el cual la serie converge para todo x si $|x-x_0| < R$ pero diverge si $|x-x_0| > R$ (en los extremos del intervalo la serie puede converger o diverger, debiéndose analizar cada caso en particular).
- la serie converge sólo para $x = x_0$, es decir, $R = 0$.
- la serie converge para todo x, es decir, $R = \infty$.

En el primer caso, R recibe el nombre de ***radio de convergencia de la serie***. En el segundo caso, se dice que el radio de convergencia es nulo y se expresa $R = 0$. En el tercer caso, se dice que el radio de convergencia es infinito y se expresa $R = \infty$.

Ejemplo 5.71 *La serie geométrica $1 + x + x^2 + ...$ tiene un radio de convergencia $R = 1$ ya que la serie converge para $|x| < 1$ y diverge para $|x| \geq 1$ (en los extremos del intervalo también diverge).*

Se resumen estos conceptos en el siguiente teorema:

Teorema 5.72 *Toda serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ tiene un radio de convergencia R asociado. Si $R = 0$, la serie sólo converge en $x = x_0$. Si R es un número real positivo, la serie converge para $|x-x_0| < R$ y diverge para $|x-x_0| > R$. Si $R = \infty$, la serie converge para todo x.*

Importante: Para los extremos del intervalo de convergencia, $x_0 - R$ y $x_0 + R$, puede suceder que la serie converja o no, debiendo analizarse en cada caso particular.

Para determinar el valor del radio de convergencia de una serie, utilizamos los criterios dados en la siguiente proposición.

Proposición 5.73 *Sea la serie de potencias $\sum\limits_{n=o}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.*

- *Si existe el $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ y es distinto de cero, entonces $R = \frac{1}{\ell}$ y la serie de potencias converge para todo x tal que $x_0 - R < x < x_0 + R$. Si $\ell = 0$ entonces la serie converge para todo x y el radio de convergencia es infinito $R = \infty$.*

- *Si existe el* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ *y es distinto de cero, entonces* $R = \frac{1}{\ell}$ *y la serie de potencias converge para todo* x *tal que* $x_0 - R < x < x_0 + R$. *Si* $\ell = 0$ *entonces* $R = \infty$ *y la serie converge para todo* x.

Demostración 5.74 *Por el criterio de D'Alembert, que se aplica para serie de términos positivos 5.53, sabemos que una serie converge si* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1$ *luego,*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x-x_0| = \ell.\,|x-x_0| < 1$$

si existe el límite l y es distinto de cero, podrá calcularse el radio $|x-x_0| < \frac{1}{\ell} = R$ *que indica que la serie converge para todos los valores de* x *tales que* $x_0 - R < x < R + x_0$.

En el caso $\ell = 0$ *entonces* $R = \infty$ *y la serie converge para* $-\infty < x < \infty$.

La demostración para el segundo caso es similar, utilizando el criterio de Cauchy para serie de términos positivos. Se deja como ejercicio para el lector.

Resumiendo: El radio de convergencia R de una serie de potencias es

$$\boxed{R = \frac{1}{\ell} \quad \text{siendo} \quad \ell = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{ó} \quad \ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Ejemplo 5.75 *¿Cuál es el intervalo de convergencia de la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$*?*

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(n+2)\,2^{n+1}} : \frac{1}{(n+1)\,2^n}\right| = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n+2}\right| = \frac{1}{2} \Longrightarrow R = 2$$

entonces la serie converge en $|x| < 2$, *es decir,* $-2 < x < 2$.

Veamos ahora si la serie converge en los extremos del intervalo, que en este caso son los puntos $x = 2$ *y* $x = -2$. *Si* $x = -2$, *entonces tenemos la serie numérica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)\,2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)}$$

se puede demostrar usando el criterio de Leibniz que converge.

Si $x = 2$, *tenemos*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)\,2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}$$

aplicando el criterio de comparación esta serie se comporta igual que la serie armónica y por lo tanto diverge.

Luego el intervalo de convergencia de la serie dada es $[-2, 2)$.

Ejemplo 5.76 *¿Cuál es el intervalo de convergencia de la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$*?*

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right| = 0 \Longrightarrow R = \infty$$

entonces la serie converge para todo x.

Ejemplo 5.77 *¿Cuál es el intervalo de convergencia de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$*?*

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty \Longrightarrow R = 0$$

Por lo que la serie converge para $x = 0$.

Ejemplo 5.78 *¿Cuál es el intervalo de convergencia de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2,2^n}$*?*

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}}{\frac{1}{n^2 2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \frac{2^n}{2^n 2}\right] = \frac{1}{2} \Longrightarrow R = \frac{1}{l} = 2$$

Entonces el intervalo de convergencia será $|x-3| < 2$ *es decir* $1 < x < 5$.

Analizamos los extremos del intervalo. Si $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

la serie converge por ser serie armónica generalizada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *con* $p = 2 > 1$.

Si $x = 5$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

es una serie alternada, aplicamos el criterio de Leibniz, como $a_n = \frac{1}{n^2} > 0$ *es una sucesión decreciente y* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ *entonces la serie converge.*

Luego el intervalo de convergencia de la serie es $[1, 5]$.

Ejercicio 5.79 *Encontrar el intervalo de convergencia de las series*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n!}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ *c)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1),5^n}$

5.9.2. Representación de funciones mediante series de potencias

¿Alguna vez te preguntaste cómo hacen las calculadoras científicas para determinar, por ejemplo el valor *sen* $\left(\frac{\pi}{7}\right)$, ó $\ln(4{,}5)$, ó $e^{0,32}$ siendo que sólo pueden sumar, restar y multiplicar? En esta subsección determinaremos cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que una función pueda ser representada mediante su serie de potencias.

Analizaremos el concepto de aproximación de funciones mediante un polinomio infinito, o lo que es lo mismo, mediante su serie de potencias. Inicialmente analizaremos el concepto de aproximación de funciones mediante polinomios finitos. Este análisis nos permite ir construyendo los coeficientes de la serie de potencias y, además, determinar la magnitud del error que se comete cuando evaluamos funciones utilizando polinomios finitos.

El uso de polinomios finitos permite que las calculadoras, programadas de esa manera, nos devuelvan los valores aproximados de funciones trascendentales evaluadas en diferentes valores del dominio tales como *sen* $\left(\frac{\pi}{7}\right)$, ó $\ln(4{,}5)$, ó $e^{0,32}$.

Polinomios de Taylor

De todas las funciones que estamos utilizando, las polinomiales son, sin duda, las funciones más simples. Lo son cuando queremos encontrar sus derivadas, cuando queremos integrarlas o cuando las evaluamos en determinados valores de su dominio, involucrando sólo operaciones de suma, resta y multiplicación. Esta última cualidad las hace además adecuadas para el cálculo computacional.

El objetivo será entonces, aproximar funciones no polinomiales mediante otras funciones más simples (polinomiales) que nos permitan encontrar valores de la función con la exactitud que deseemos.

Comenzaremos estudiando el proceso de linealización que ofrece la derivada primera y que vimos cuando analizamos la expresión del diferencial de una función. Como sabemos, la recta tangente a la función $f(x)$ en un punto $x = x_0$, donde la función es derivable, pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ y tiene pendiente $f'(x_0)$; su ecuación es:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Esta función polinómica es conocida como polinomio aproximante de Taylor de primer grado (o de orden 1) y lo notamos con $P_1(x)$.

Definición 5.80 *Sea f una función derivable en $x = x_0$, se define el **polinomio aproximante de Taylor de primer grado** como:*

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Este polinomio representa la linealización de la función $f(x)$ en el punto x_0 y permite obtener una aproximación de la función en valores del dominio cercanos al mismo.

En los siguientes ejemplos, construimos los polinomios de Taylor de primer grado $P_1(x)$ y analizamos cuan bien aproximan a la función $f(x)$ en valores cercanos al x_0 considerado.

Ejemplo 5.81 *Encontrar el polinomio de Taylor de primer grado para $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ y utilizarlo para evaluar $e^{0,1}$ y e^1.*

La derivada de $f(x) = e^x$ es $f'(x) = e^x$, entonces $f'(0) = 1$ resultando

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + x$$

Cuando utilizamos la aproximación $e^x \approx 1 + x$ para evaluar $e^{0,1}$ obtenemos que $e^{0,1} \approx 1{,}1$. El valor exacto es $e^{0,1} = 1{,}1051709\ldots$ y la aproximación es buena, con un error $\varepsilon < 10^{-2}$.

Luego, para $x = 1$, $e^1 \approx 2$, siendo el valor exacto $e^1 = 2{,}71828\ldots$.

Se observa que esta aproximación pierde precisión y no es esperable que produzca buenos resultados.

Ejercicio 5.82 *Utilizando el demo que se encuentra en la página de la cátedra, observar la representación gráfica de $f(x) = e^x$ y su polinomio de Taylor de primer orden $P_1(x)$, y analizar qué ocurre con el error ε a medida que x se aleja del punto x_0.*

Ejemplo 5.83 *Encontrar el polinomio de Taylor de primer grado para $f(x) = sen(x)$ en $x_0 = 0$ y utilizarlo para evaluar $sen(0{,}01)$.*

La derivada de $f(x) = sen(x)$ es $f'(x) = cos(x)$, entonces $f'(0) = 1$ resultando

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = x$$

Luego, $sen(0{,}01) \approx 0{,}01$, siendo el valor exacto $0{,}0099998\ldots$.

Ejercicio 5.84 *Idem al ejercicio anterior con la función $f(x) = sen(x)$ y $P_1(x)$.*

El polinomio de Taylor de primer grado verifica que: $P_1(x_0) = f(x_0)$ y $P_1'(x_0) = f'(x_0)$. Puede pensarse entonces, la construcción de un nuevo polinomio de Taylor de segundo grado $P_2(x)$ que satisfaga además la condición $P_2''(x_0) = f''(x_0)$.

Así el polinomio de Taylor de segundo grado es

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$$

y buscamos la expresión de a_2 que nos permita cumplir la condición requerida. Efectivamente, $P_2(x_0) = f(x_0)$, $P_2'(x) = f'(x_0) + 2a_2(x - x_0)$ y $P_2'(x_0) = f'(x_0)$. Finalmente, como $P_2''(x_0) = 2a_2$, se obtiene $a_2 = f''(x_0)/2$.

Definición 5.85 *Sea f una función derivable en en $x = x_0$, al menos hasta el segundo orden. Se define el* ***polinomio aproximante de Taylor de segundo grado*** *para f en $x = x_0$ como:*

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

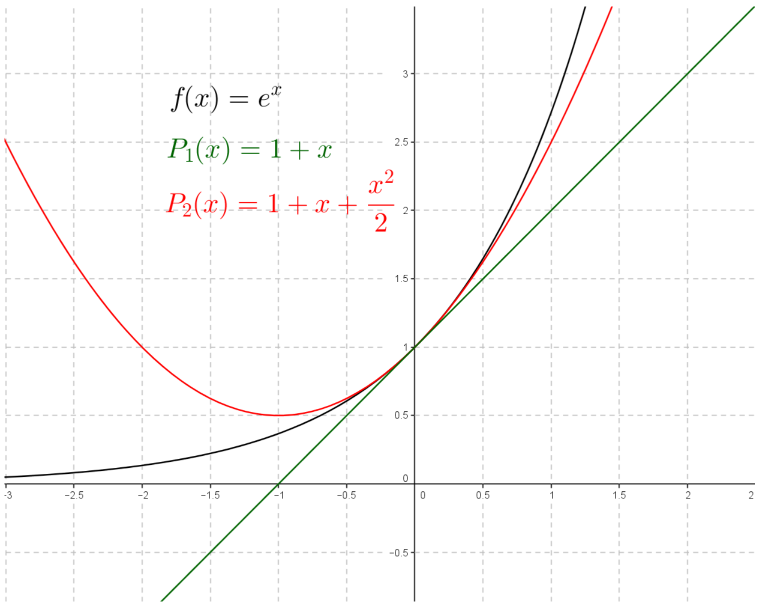
Los siguientes ejemplos muestran que $P_2(x)$ mejora la aproximación de $P_1(x)$.

Ejemplo 5.86 *Encontrar el polinomio de Taylor de segundo grado para $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$.*

Las derivadas primera y segunda de $f(x) = e^x$ son $f'(x) = f''(x) = e^x$, resultando $f'(0) = f''(0) = 1$. El polinomio aproximante de Taylor de segundo grado es:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2}(x - 0)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Si graficamos $f(x)$, $P_1(x)$ y $P_2(x)$, se observa como mejora la aproximación:



Ejemplo 5.87 *Encontrar el polinomio de Taylor de segundo grado para $f(x) = ln(x)$ en $x_0 = 1$ y estimar $ln(1{,}1)$.*

Las derivadas primera y segunda de $f(x) = ln(x)$ son, respectivamente, $f'(x) = \frac{1}{x}$ y $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$, así $f'(1) = 1$ y $f''(1) = -1$. Por lo que el polinomio aproximante de Taylor de segundo grado es:

$$P_2(x) = 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

Luego, $ln(1{,}1) \approx 0{,}095$, siendo el valor exacto $0{,}09531018\ldots$. Si hubiésemos utilizado $P_1(x) = (x-1)$, el valor aproximado hubiese sido $0{,}1$.

Ejercicio 5.88 *Utilizando el graficador Geogebra, representar graficamente $f(x) = ln(x)$, $P_1(x)$ y $P_2(x)$. Observar el error que se comete en una y otra representación a medida que x se aleja del punto x_0.*

Si queremos aumentar el grado del polinomio aproximante de Taylor, deberemos encontrar la expresión, en general, del coeficiente del término de mayor grado. Así por ejemplo, para $P_3(x)$, el polinomio será

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3$$

y, para encontar la expresión de a_3 de forma que se cumpla que $P_3(x_0) = f(x_0)$, $P_3'(x_0) = f'(x_0)$, $P_3''(x_0) = f''(x_0)$ y $P_3^{(3)}(x_0) = f^{(3)}(x_0)$ debermos derivar tres veces el polinomio $P_3(x)$ y evaluarlo en x_0. Luego

$$P_3^{(3)}(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3$$

y, con la condición $P_3^{(3)}(x_0) = f^{(3)}(x_0)$, se obtiene entonces que $a_3 = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}$.

Se observa entonces inductivamente que, si la función f tiene derivada $k-ésima$, el coeficiente del término $k-ésimo$ del polinomio de Taylor es:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Definición 5.89 *Sea f una función derivable en $x = x_0$, por lo menos hasta el orden n. Se define el **polinomio aproximante de Taylor de grado n** para f en $x = x_0$ como:*

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

El polinomio aproximante de Taylor de grado n satisface las condiciones $P_n(x_0) = f(x_0)$, $P_n'(x_0) = f'(x_0)$, $P_n''(x_0) = f''(x_0)$, ...,$P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.

Ejemplo 5.90 *Encontrar $P_5(x)$ para $f(x) = sen(x)$ en $x_0 = 0$.*

Las derivadas hasta orden 5 de $f(x) = sen(x)$ son $f'(x) = cos(x)$, $f''(x) = -sen(x)$, $f^{(3)}(x) = -cos(x)$, $f^{(4)}(x) = sen(x)$ y $f^{(5)}(x) = cos(x)$. Luego, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$ y $f^{(5)}(0) = 1$ y el polinomio aproximante de Taylor de grado 5 es:

$$P_5(x) = 0 + 1(x-0) + \frac{0}{2}(x-0)^2 + \frac{-1}{6}(x-0)^3 + \frac{0}{24}(x-0)^4 + \frac{1}{120}(x-0)^5 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Si se evalúa ahora el polinomio en el valor 0,01 se obtendrá, redondeando a 8 decimales $P_5(0{,}01) \approx 0{,}00999983$, lo cual indica un error $\varepsilon < 10^{-8}$ respecto del valor exacto.

Ejercicio 5.91 *Obtener diferentes polinomios aproximantes de Taylor para la función $f(x) = sen(x)$ utilizando el demo de la página de la cátedra.*

A partir de los ejemplos dados se observa que, aumentando el grado del polinomio de Taylor, obtenemos un polinomio que se aproxima más a la función. Definimos entonces la serie de Taylor y analizamos las condiciones necesarias y suficientes para que una función pueda ser representada por ella.

Series de Taylor

Definición 5.92 *Dada una función infinitamente derivable en x_0 , se define la **Serie de Taylor** como la serie:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

En muchos casos, una función f infinitamente derivable se puede representar en forma de una serie de potencias utilizando la serie de Taylor. Esto será válido para aquellos valores de x para los cuales podamos asegurar que el resto de la serie, $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ tienda a cero cuando $n \to \infty$.

Expresamos dicha condición con el siguiente teorema.

Teorema 5.93 *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función derivable en (a,b) hasta orden $n+1$ y supongamos $f^{(n+1)}$ continua en (a,b). Entonces, dado un $x_0 \in (a,b)$, para todo $x \in (a,b)$ existe un número c entre x_0 y x tal que*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

*llamado **Resto de la serie de Taylor** que cumple con*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Se deduce de este Teorema que la condición necesaria y suficiente para que la función f sea igual a su serie de Taylor en x_0 es que $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto sucede, por ejemplo, cuando las derivadas estan acotadas en un cierto intervalo alrededor de x_0 por un mismo numero. Pues si existe M tal que para $|x-x_0| < \delta$ se cumple que

$$|f(x)| \leq M \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

entonces

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} < \frac{M}{(n+1)!}\delta^{n+1} \to 0 \text{ si } n \to \infty$$

Definición 5.94 *Se define la serie de MacLaurin de una función f como la serie de Taylor de f en $x_0 = 0$.*

En los siguientes ejemplos, se obtendrá el desarrollo en series de potencia de algunas funciones.

Ejemplo 5.95 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = e^x$ Determinar su serie de MacLaurin y el intervalo de convergencia de la misma.*

Las derivadas de cualquier orden de la función exponencial son $f^{(n)}(x) = e^x$ y, evaluadas en $x_0 = 0$ serán $f^{(n)}(0) = 1$. Luego, la serie de Mac Laurin para la exponencial es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

y la expresión del resto es

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Luego, para cada valor de x que se analice, x fijo, $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como esto sucede para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, entonces f es igual a su serie de Taylor para todo $x \in \mathbb{R}$. En otras palabras

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \cdots \mathit{para} - \infty < x < \infty$$

Ejemplo 5.96 *Sea $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ la función $f(x) = sen(x)$. Determinar su serie de MacLaurin y el intervalo de convergencia de la misma.*

Las derivadas de la función seno son $f'(x) = cos(x)$, $f''(x) = -sen(x)$, $f^{(3)}(x) = -cos(x)$, $f^{(4)}(x) = sen(x)$ y luego se repite el esquema siendo, en general, $sen^{(n)}(x) = sen(x + n\frac{\pi)}{2}$. Si evaluamos las derivadas en $x_0 = 0$ se obtendrá $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$,$f^{(3)}(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$ Luego, la serie de MacLaurin para la función seno es:

$$1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

y la expresión del resto

$$|R_n(x)| = \left| \frac{sen(c + (n+1)\frac{\pi}{2})}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Luego, para cada valor de x que se analice, x fijo, $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Nuevamente esto sucede para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, entonces $sen(x)$ es igual a su serie de Taylor para todo $x \in \mathbb{R}$. En otras palabras

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad para \ -\infty < x < \infty$$

Ejercicio 5.97 *Encontrar el desarrollo en serie de Taylor y el intervalo de convergencia de las funciones:*

$$a)\ f(x) = cos(x) \qquad b)\ f(x) = e^{x^2}$$

A partir de la expresión del resto de la serie de Taylor, podemos calcular el error de aproximación que ocurre cuando truncamos la serie para evaluar su función.

Ejemplo 5.98 *Estimar el error cometido cuando se aproxima la función $sen(x)$ por su polinomio de Taylor de grado 5 $P_5(x)$ para $0 \leq x \leq 0{,}5$.*

Siendo $f^{(5)}(x) = cos(x)$, como se obtuvo en el ejemplo último, calculamos $f^{(6)} = -sen(x)$. Luego, $|f^{(6)}| = |-sen(x)| \leq 1$. La cota del error cometido será entonces

$$|R_5(x)| = |E_5(x)| \leq \frac{1}{6!}|x|^6 = \frac{|x|^6}{720} \leq \frac{|0{,}5|^6}{720} = 0{,}0000217$$

Ejemplo 5.99 *Estimar el valor del número e utilizando polinomio de Taylor de grado 8 $P_8(x)$ para $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$. Siendo $f^{(9)}(x) = e^x$, para $0 \leq x \leq 1$ será $|f^{(9)}(x)| = |e^x| \leq e$ y para acotar el valor de e podemos tomar $e < 3$, dado que no podemos utilizar el valor de e que estamos queriendo estimar. Luego*

$$|E_9(x)| \leq \frac{e}{9!}|x - 0|^9 < \frac{3|x|^9}{362880}$$

Se obtiene entonces que, para $x = 1$, $P_{(8)}(1) \approx 2{,}7182788$ y $|E_9(x)| \leq 0{,}00000827$. Luego, el valor real de e estará entre $2{,}7182788 - 0{,}00000827 = 2{,}7182705$ y $2{,}7182788 + 0{,}00000827 = 2{,}7182871$

Ejemplo 5.100 *Estimar el valor del número e con error menor que* $0,01$.

Teniendo en cuenta el desarrollo en serie obtenido para la función $f(x) = e^x$, *para* $x = 1$ *será,*

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots$$

Si calculamos hasta el término $n -$ *ésimo, el error cometido es,*

$$R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}1^{n+1} < \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

considerando $0 < c < 1$ *y* $e < 3$.

Luego, calculamos el valor de n *que verifique la desigualdad*

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0,01 \Longrightarrow 300 < (n+1)!$$

siendo $n \geq 5$, *consideramos la aproximación* $P_5(x)$ *y obtenemos*

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2,72$$

Luego, el valor exacto de e debe estar entre $2{,}72 - 0{,}01 = 2{,}71$ *y* $2{,}72 + 0{,}01 = 2{,}73$.

5.10. Ejercicios

1. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencia y estudiar la convergencia en los extremos del intervalo

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \qquad e)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$$

$$b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-2)^n \qquad d)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}(x+3)^n \qquad f)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n-1}}{n^2}$$

2. Representar las siguientes funciones y sus polinomios de Taylor de orden 1, 2 y 3 en un mismo gráfico.

$$a)f(x) = e^{-x} \qquad c)f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$b)f(x) = cos(x) \qquad d)f(x) = ln(1+x)$$

3. Utilizar los tres primeros términos no nulos de la serie de MacLaurin para estimar el valor dado. Determinar la cota del error cometido utilizando la formulación del error.

$$a)e^{\frac{1}{3}} \qquad c)sen(1)$$

$$b)e^2 \qquad d)cos(20)$$

4. Hallar las series de MacLaurin de las siguientes funciones indicando el término R_n

$$a)f(x) = cos(x) \qquad c)f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$b)f(x) = ln(1+x) \qquad d)f(x) = sh(x)$$

5. Hallar los desarrollos de Taylor en el punto dado

$$a)f(x) = cos(x)x_0 = \pi \qquad c)f(x) = e^x x_0 = 1$$

$$b)f(x) = sh(x)x_0 = 1$$

6. Calcular

   a) $sen(\frac{\pi}{7})$ con error menor a 0.01.
   b) $\sqrt{2}$ con error menor a 0.001.
   c) $e^{0,32}$ con error menor a 0.0001.
   d) $ln(4{,}5)$ con error menor a 0.001.