TRABAJO PRACTICO Nº 3

LOGICA DE PREDICADOS DE PRIMER ORDEN: Primera Parte

1. Sea el lenguaje de primer orden L que tiene un símbolo de constante c, dos símbolos de función f y g (f unario y g binario) y dos símbolos de relación binarios P y Q.
   Decidir cuáles de las siguientes expresiones pertenecen al lenguaje L y cuáles no.
   - Para el primer caso determine cuáles son términos, cuáles fórmulas atómicas y cuáles fórmulas.
   - Para las que no pertenecen al lenguaje indique por qué.

   (a) $(\exists f(x)P(f(x,y)))$
   (b) $\forall x(P \vee Q)$
   (c) $g(f(x), f(y))$
   (d) $\forall x \exists c P(x, c)$
   (e) $\exists x \exists y Q(P(x, y), P(y, x))$
   (f) $P(f(x), f(y))$
   (g) $\forall x \exists y(P(g(x, y), y) \wedge \neg Q(x, y))$
   (h) $g(x, \exists y(P(y, c))$

2. Para cada una de las siguientes fórmulas:

   (a) Determine el alcance de cada cuantificador e indique cuáles son las variables libres y cuáles las ligadas.
   (b) Realice los cambios necesarios para que cada ocurrencia de una variable aparezca libre o ligada, y en este último caso a un solo cuantificador.
   (c) Determine si es o no cerrada.

   1. $\forall x(P(x, y) \rightarrow Q(x))$
   2. $\forall x P(x, y) \rightarrow Q(x)$
   3. $\exists x(A(x, y) \wedge \forall y B(y))$
   4. $\forall x(\forall y A(x, y, z) \rightarrow \exists x A(x, z, z))$
   5. $\exists x A(x) \rightarrow \forall x A(x)$
   6. $\forall x(\forall y(A(x, y) \rightarrow \exists z B(y, z)) \rightarrow \exists x C(x, z))$

3. Para cada una de las siguientes fórmulas, realice las sustituciones indicadas. Justifique.

   (a) $A = \forall x(P(x, y) \rightarrow Q(x))$ .... $A(y/f(c))$ para c constante
   (b) $A = \forall x(P(x, y) \rightarrow Q(x))$ .... $A(y/f(x))$
   (c) $A = \forall x(P(x, y) \rightarrow Q(x))$ .... $A(x/f(c))$ para c constante
   (d) $A = \exists x(D(x, y) \wedge \forall y B(y, z))$ .... $A(y/f(c), z/c)$ para c constante
   (e) $A = \exists x(D(x, y) \wedge \forall y B(y, z))$ .... $A(y/f(z), z/y)$
   (f) $A = \exists x D(x, y) \wedge \forall y B(y, x)$ .... $A(y/f(c), x/f(c))$ para c constante

(g) $A = \forall x D(x) \to \exists x \exists y (B(x) \wedge C(x,y))$ ... $A(x/f(y), y/z)$ para c constante

4. Dadas e_1 y e_2 sustituciones:

   (a) $e_1 = \{x/y, y/f(x)\}$ $\quad$ $e_2 = \{x/a, y/x, z/f(a)\}$
   (b) $e_1 = \{y/f(x), z/b\}$ $\quad$ $e_2 = \{x/c, z/c\}$
   (c) $e_1 = \{x/a, y/z\}$ $\quad$ $e_2 = \{x/a, y/c, z/y\}$
   (d) $e_1 = \{x/f(y), y/z\}$ $\quad$ $e_2 = \{x/a, y/c, z/f(y)\}$
   (e) $e_1 = \{x/a, y/f(z,a)\}$ $\quad$ $e_2 = \{x/b, y/c, z/y\}$

   1. Calcule la composición $e_1 e_2$
   2. Calcule Ae_1e_2 siendo $A = \exists x D(x,y) \wedge \forall y B(y,z)$

5. Dados los siguientes predicados:

   $real(x)$ x es un número real $\quad$ $int(x)$ x es un número entero
   $primo(x)$ x es un número primo
   $par(x)$ x es un número par
   $mayor(x,y)$ x es mayor que y $\quad$ $suma(x,y,z)$ $x + y = z$

   Reescriba en lenguaje natural las siguientes fórmulas de la lógica de predicados de primer orden.

   (a) $\forall x(\neg par(x) \to primo(x))$
   (b) $\forall x(int(x) \to real(x))$
   (c) $\forall x(primo(x) \wedge mayor(x,2) \to \neg par(x))$
   (d) $\exists x(int(x) \wedge par(x) \wedge primo(x))$
   (e) $\forall x \forall y \exists z(int(x) \wedge int(y) \to int(z) \wedge suma(x,y,z))$
   (f) $\exists z \forall x \forall y(int(x) \wedge int(y) \to int(z) \wedge suma(x,y,z))$

6. Formalice en la lógica de predicados de primer orden las siguientes oraciones del lenguaje natural, usando funciones siempre que sea posible:

   (a) El padre de Bárbara ama a la madre de Bárbara.
   (b) Pedro ama a la hermana de María.
   (c) Todo padre quiere mucho a sus hijos.
   (d) Si la suma de dos números enteros es más grande que su producto, luego uno de los números debe ser cero.
   (e) En los números reales, el producto de cualquier número real positivo por cualquier número negativo, es negativo.

7. Dadas las siguientes oraciones en lenguaje natural:

   (a) Algunos caballos son salvajes.
   (b) No hay un número primo entre 23 y 29.
   (c) No todos los pájaros pueden volar.
   (d) Cada persona es amada por alguien.

(e) Todas las personas tienen algún amigo.

(f) Sólo los científicos que trabajan en áreas aplicadas son famosos.

(g) En lo números naturales, el siguiente de cualquier número par no es par. El siguiente de cualquier número no par es par.

(h) Si el producto de dos números naturales es múltiplo de un número primo, entonces uno de ellos es múltiplo del número primo.

(i) Dos personas son hermanas si tienen el mismo padre.

1. Formalice cada oración en la lógica de predicados de primer orden.
2. Escriba la negación de cada fórmula obtenida y vuelva a traducirla al lenguaje natural.

8. Formalice en la lógica de predicados de primer orden las siguientes oraciones en lenguaje natural, primero sin utilizar cuantificadores existenciales y después sin utilizar cuantificadores universales.

   (a) Algunas personas son simpáticas o altas.

   (b) No todas las bicicletas tienen dos ruedas.

   (c) Ningún ratón es más pesado que un elefante.

   (d) Todo número es negativo o posee raíz cuadrada.

9. Formalice en la lógica de predicados de primer orden las siguientes oraciones del lenguaje natural:

   (a) No existe ningún profesor que sea alto.

   (b) Existe un profesor que está más ocupado o tiene más éxito que cualquier alumno.

   (c) Si todos los individuos son alumnos, no existe ninguno que vaya al gimnasio.

   (d) En general, cualquier individuo está más ocupado que otro sí y sólo sí éste va al gimnasio y el otro no.

   (e) Todos los profesores que van al gimnasio conocen a algún alumno.

   (f) Sólo los profesores que van al gimnasio conocen a algún alumno.

   (g) Algunos alumnos sólo conocen a los profesores que van al gimnasio.

10. Cuáles de las siguientes fórmulas son las correctas para formalizar las siguientes frases:

    - "Todos los hombres son iguales" utilizando los siguientes predicados: $H(x)$: "x es un hombre", $I(x,y)$: "x es igual a y"
      (a) $\forall x \forall y (H(x) \wedge H(y) \wedge I(x,y))$
      (b) $\forall x \forall y (I(x,y) \leftrightarrow H(x) \wedge H(y))$
      (c) $\forall x \forall y (I(x,y) \rightarrow H(x) \wedge H(y))$
      (d) $\forall x \forall y (H(x) \wedge H(y) \rightarrow I(x,y))$
    - "Todos los que juegan con alguien juegan con todos" utilizando el siguiente predicado: $J(x,y)$: "x juega con y"
      (a) $\forall x (\exists y J(x,y) \rightarrow \forall z J(x,z))$
      (b) $\forall x (\forall z J(x,z) \rightarrow \exists y J(x,y))$
      (c) $\forall x \exists y \forall z (J(x,y) \rightarrow J(x,z))$

(d) Ninguna de las anteriores es una formalización válida

- "Sólo los alumnos que estudian cualquier materia la aprueban" utilizando los siguientes predicados: $A(x,y)$: "x aprueba la materia y" , $P(x,y)$: "x estudia la materia y"

  (a) $\forall x \forall y((A(x,y) \rightarrow P(x,y))$
  (b) $\forall x \exists y((A(x,y) \rightarrow P(x,y))$
  (c) $\exists x \forall y((A(x,y) \rightarrow P(x,y))$
  (d) Ninguna de las anteriores es una formalización válida

11. Sean las siguientes relaciones definidas sobre el conjunto de las piezas de ajedrez: $T(x)$ significa que x es una torre, $C(x)$ significa que x es un caballo, $MD(x)$ que x se mueve en diagonal, $B(x)$ que x es una pieza blanca, $N(x)$ que x es una pieza negra, $CP(x,y)$ significa que x come a y; $A(x,y)$ significa que x está alineada con y. Usando únicamente estos símbolos de relación definidos traduzca las siguientes oraciones a la lógica de predicados de primer orden:

    (a) Ninguna torre se mueve en diagonal.
    (b) Toda pieza se mueve en diagonal, salvo si es una torre o un caballo.
    (c) Una pieza blanca sólo come piezas negras.
    (d) Para que una torre coma un caballo es necesario que las dos piezas estén alineadas.