Unificación

$C_1 = \neg P(a, y) \vee Q(x, y)$ $C_2 = P(x, y) \vee R(x, b)$

$\neg P(a, y)$ y $P(x, y)$ no son literales complementarios

Si sustituimos x/a se obtienen

$C_1' = \neg P(a, y) \vee Q(a, y)$ $C_2' = P(a, y) \vee R(a, b)$

Instancias de C_1 y C_2

$Res(C_1', C_2') = Q(a, y) \vee R(a, b)$

Unificación

Sustitución:

Conjunto finito de reemplazos simultáneos de variables por términos.

$e = \{ x_1/t_1, x_2/t_2, ..., x_n/t_n\}$ x_i variables distintas t_i términos

$A = A(x_1, x_2, ..., x_n)$ término, literal, cláusula o conj. de cláusulas

$Ae = A(x_1, x_2, ..., x_n)e = A(x_1/t_1, x_2/t_2, ..., x_n/t_n)$

Ejemplo:

$A(x, y) = P(x, y) \vee R(f(x), a)$ $e_1 = \{x/g(b), y/a\}$ $e_2 = \{x/f(y), y/x\}$

$A(x, y)\, e_1 = P(g(b), a) \vee R(f(g(b)), a)$

$A(x, y)\, e_2 = P(f(y), x) \vee R(f(f(y)), a)$

Unificación

Composición de sustituciones: Dadas e_1 y e_2 sustituciones

$e_1 = \{ x_1/t_1, x_2/t_2, ..., x_n/t_n\}$ $e_2 = \{ y_1/s_1, y_2/s_2, ..., y_k/s_k\}$

$e_1.e_2 = \{ x_i/t_ie_2 : x_i \neq t_ie_2, i = 1, ..., n\} \cup \{ y_j/s_j : y_j \neq x_i , i = 1, ..., n, j = 1, ..., k\}$

Ejemplo:

$e_1 = \{ x/g(y, a), y/b, z/f(w), u/w\}$ $e_2 = \{ y/f(b), w/u, t/g(a, f(b))\}$

$e_1.e_2 = \{ x/g(f(b), a), y/b, z/f(u), w/u, t/g(a, f(b))\}$

Unificación

Unificador:

A = $\{l_1, l_2, ..., l_n\}$ conjunto de literales con el mismo símbolo de relación

Una sustitución e es un unificador de A si $l_1e = l_2 e = ... = l_n e$

Si existe un unificador de A $\Rightarrow$ A es unificable

Para considerar si dos literales son unificables o no, deben tener el mismo símbolo de relación y deben ser ambos positivos o negativos.

Unificador más general (umg):

Un unificador u es el umg de A sí y sólo sí para todo otro unificador e de A, existe una sustitución λ tal que e = u. λ

Algoritmo de Unificación de Robinson

✓ Método para encontrar umg para un conjunto de fórmulas atómicas

Pares no coincidentes

Sean A y B dos literales considerados como una sucesión de símbolos.

Sea k la posición en ambas secuencias, comenzando desde la izquierda, en donde las secuencias difieren en un par de términos {t, t'} donde $t \in A$ y $t' \in B$.

{t, t'} se denomina k-par no coincidente

Ejemplo:

P(g(a), z, a)   y   P(y, b, a)

{g(a), y}   es el 1-par no coincidente

{z, b}   es el 2-par no coincidente

Algoritmo de Unificación de Robinson

Algoritmo:

- Sean A y B dos literales
- Sea $A_0 = A$ y $B_0 = B$
- Supongamos que se han definido A_i y B_i

  Sea {t, t'} el primer k-par no coincidente de A_i y B_i

  - Si uno de los términos es una variable x_i y el otro es un término t_i tal que $x_i \notin Var(t_i)$ entonces se define la sustitución

  $$e_{i+1} = \{ x_i / t_i \}$$

  Se calculan $A_{i+1} = A_i e_{i+1}$ y $B_{i+1} = B_i e_{i+1}$

  - Si esto no es posible A y B no son unificables.

- Si después de algún paso $A_n = B_n$, A y B son unificables y el umg es

$$u = e_i \, e_{i+1} \ldots e_n$$

Algoritmo de Unificación de Robinson

Ejemplos: 1) $A = Q(z, y, f(x), g(t))$ $B = Q(g(y), a, f(g(w)), x)$ a cte.

$A_0 = A = Q(z, y, f(x), g(t))$ $B_0 = B = Q(g(y), a, f(g(w)), x)$

1- par no coincidente $\{z, g(y)\}$ se define $e_1 = \{ z/g(y) \}$

$A_1 = A_0e_1 = Q(g(y), y, f(x), g(t))$ $B_1 = B_0e_1 = Q(g(y), a, f(g(w)), x)$

2- par no coincidente $\{y, a\}$ se define $e_2 = \{ y/a) \}$

$A_2 = A_1e_2 = Q(g(a), a, f(x), g(t))$ $B_2 = B_1e_2 = Q(g(a), a, f(g(w)), x)$

3- par no coincidente $\{x, g(w)\}$ se define $e_3 = \{ x/g(w) \}$

$A_3 = A_2e_3 = Q(g(a), a, f(g(w)), g(t))$ $B_3 = B_2e_3 = Q(g(a), a, f(g(w)), g(w))$

4- par no coincidente $\{t, w\}$ se define $e_4 = \{ w/t \}$

$A_4 = A_3e_4 = Q(g(a), a, f(g(t)), g(t))$ $B_4 = B_3e_4 = Q(g(a), a, f(g(t)), g(t))$

$u = \{ z/g(a),\ y/a,\ x/g(t),\ w/t \}$ u unificador más general

Algoritmo de Unificación de Robinson

Ejemplos:

1) $A = Q(z, y, f(x), g(t))$ $B = Q(g(y), a, f(g(w)), x)$ a cte.

$u = \{ z/g(a),\ y/a,\ x/g(t),\ w/t \}$ u unificador más general

$u_1 = u \,.\, \lambda_1 = \{ z/g(a),\ y/a,\ x/g(b),\ w/b, t/b \}$ $\lambda_1 = \{ t/b \}$

$u_2 = u \,.\, \lambda_2 = \{ z/g(a),\ y/a,\ x/g(f(a)),\ w/f(a), t/f(a) \}$ $\lambda_2 = \{ t/f(a) \}$

u_1 y u_2 son unificadores de A y B A y B son unificables

2) $A = Q(x, f(a), b, y)$ $B = Q(g(x), y, b, z)$ A y B no son unificables

3) $A = R(f(x), g(f(x)))$ $B = R(y, g(h(u)))$ A y B no son unificables

Resolución con Unificación

Sean C_1 y C_2 cláusulas

1) Supongamos que existen sustituciones e_1: Var(C_1) $\rightarrow$ Var y e_2: Var(C_2) $\rightarrow$ Var tal que las cláusulas C_1e_1 y C_2e_2 no tienen variables en común.

2) Supongamos que los conjuntos de literales $L_1e_1 = \{l_1, ..., l_n\} \subseteq C_1e_1$ y $L_2e_2 = \{l_1', ..., l_m'\} \subseteq C_2e_2$ son tales que el conjunto

$L_1e_1 \cup \neg L_2e_2 = \{l_1, ..., l_n, l_1', ..., l_m'\}$ es unificable por el umg u

$l_1u = ...= l_nu = l_1'u = ... l_m'u = l$

Entonces la resolvente de C_1 y C_2 es la cláusula

$Res(C_1, C_2) = (C_1e_1u - \{ l \}) \cup (C_2e_2u - \{ l^c \})$

donde $L_1e_1u = \{ l \}$ y $L_2e_2u = \{l^c \}$

Resolución con Unificación

<u>Ejemplo</u>:

Determinar la resolvente de

$C_1 = P(x) \vee \neg R(y)$ $\quad$ $C_2 = Q(b, f(x)) \vee \neg P(g(z))$ $\quad$ b cte.

1) Cambiar variables $e_2 = \{x/w\}$ (dejamos fijas las de C_1)

$C_2e_2 = Q(b, f(w)) \vee \neg P(g(z))$

2) Determinar el umg para {P(x), P(g(z))}

El umg es u = {x/g(z)}

$C_1u = P(g(z)) \vee \neg R(y)$ $\quad$ $C_2e_2u = Q(b, f(w)) \vee \neg P(g(z))$

$Res(C_1, C_2) = \neg R(y) \vee Q(b, f(w))$

Resolución

<u>Factorización</u>:

Si un subconjunto de los literales en una cláusula D son unificables por un unificador más general u, entonces la cláusula C obtenida aplicando u a D se llama un factor de D, es decir C = Du es un factor de D.

<u>Ejemplo</u>:

Sean D = P(x, y) $\vee$ P(y, x) $\vee$ Q(a) (D = {P(x, y), P(y, x), Q(a)})

l_1 = P(x, y)

l_2 = P(y, x)

u = { y/x }

C = P(x, x) $\vee$ Q(a) es un factor de D (C = {P(x, x), Q(a)})

Resolución

<u>Deducción por Resolución</u>:

Sea S un conjunto de cláusulas y C una cláusula.

Una deducción por resolución de C a partir de S, S $\vdash_R$ C, es una sucesión finita de cláusulas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ = C tales que

1) $C_i \in S$ ó

2) Existen cláusulas C_j, C_k con $j, k < i \leq n$ tal que $Res(C_j, C_k) = C_i$

3) Existe $j < i \leq n$ tal que C_i es un factor de C_j

<u>Refutación de un conjunto de cláusulas</u>:

Sea S un conjunto de cláusulas. Una resolución de $\perp$ de un conjunto de cláusulas S se dice una refutación de S.

<u>Teorema</u>:

Sea S un conjunto de cláusulas. Entonces S $\vdash_R \perp$ sí y sólo sí S es insatisfacible.

Resolución

Sea S un conjunto de cláusulas. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1) S es insatisfacible.
2) S no tiene modelos.
3) S no tiene Modelos de Herbrand.
4) U(S)(S) es p-insatisfacible.
5) Existe un subconjunto finito $S_0 \subseteq U(S)(S)$ que es p-insatisfacible
6) Existe un subconjunto finito $S_0 \subseteq U(S)(S)$ tal que $S_0 \vdash_R \perp$
7) $S \vdash_R \perp$

Resolución

<u>Ejemplo</u>:

Determinar si el siguiente conjunto de cláusulas es satisfacible o no.

$S = \{F(a), \neg E(y) \vee A(a, y), \neg F(x) \vee \neg C(y) \vee \neg A(x, y), E(b), C(b)\}$ a, b ctes

Se puede probar que $S \vdash_R \perp$ por lo tanto S es insatisfacible.

También se puede demostrar que S es p-insatisfacible ya que existe un subconjunto finito $S_0 \subseteq U(S)(S)$ que es insatisfacible.

Resolución

✓ El método de resolución es completo y correcto.

<u>Teorema de Completitud</u>:

Sea $S \cup \{C\}$ un conjunto de cláusulas.

Si $S \models C$ entonces $S \cup \{\neg C\} \vdash_R \perp$.

<u>Teorema de Corrección</u>:

Sea $S \cup \{C\}$ un conjunto de cláusulas.

Si $S \vdash_R C$ entonces $S \models C$.

Resolución

✓ Ningún sistema de demostración es decidible en LPPO $\rightarrow$
el método de resolución no es decidible

✓ La validez de fórmulas en LPPO es un problema indecidible.

✓ Aunque la validez de fórmulas en LPPO es indecidible en general, es decidible en algunos casos particulares:

- Si se consideran dominios finitos
- Si se usan sólo predicados unarios