MÓDULO 9

- **SUPERFICIES PARAMÉTRICAS**
- **PLANOS TANGENTES**
- **ÁREA DE UNA SUPERFICIE**
- **INTEGRALES DE SUPERFICIE**
- **TEOREMA DE STOKES**
- **TEOREMA DE LA DIVERGENCIA (GAUSS)**

Superficies paramétricas

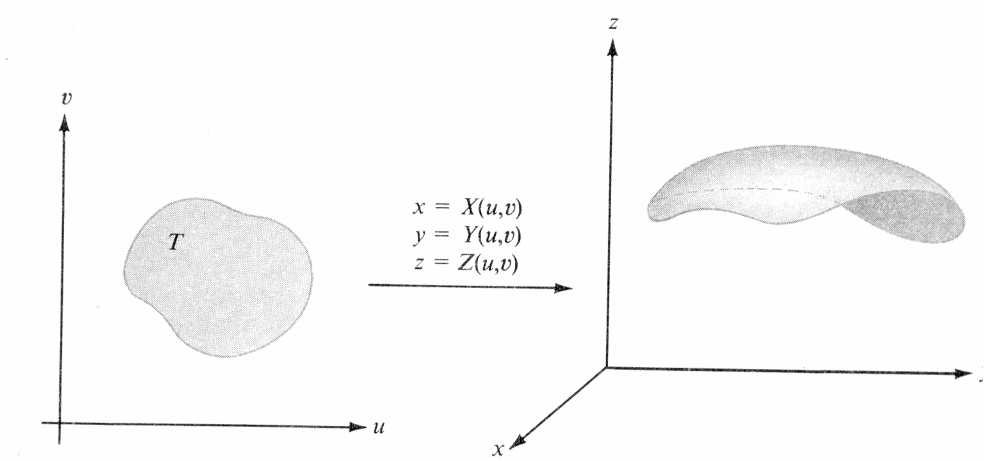
De manera muy similar con la que describimos una curva en el espacio mediante una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ de un solo parámetro *t*, podemos describir una superficie mediante una función vectorial $\mathbf{r}(u,v)$ de los parámetros *u* y *v*. Supongamos que

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$$

es una función vectorial definida en una región *T* del plano *u*-*v* y las derivadas parciales de x, y y z con respecto a *u* y *v* son todas continuas. El conjunto de todos los (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$, tales que:

$$x = x(u,v) \qquad y = y(u,v) \qquad z = z(u,v) \qquad\qquad (u,v) \in T \qquad \mathbf{(1)}$$

donde (u,v) varía a través de *T*, se le llama **superficie paramétrica** *S*, y las ecuaciones en (**1**) son las **ecuaciones paramétricas** de *S*. Es decir, la superficie *S* está delineada por el vector de posición $\mathbf{r}(u,v)$, conforme (u,v) se mueve por la región *T*.



Ejemplo 1

Queremos determinar la representación paramétrica de la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Ya hemos trabajado con las coordenadas esféricas que dependen de *r*, *u* y *v* en nuestro caso $r = a$ entonces los parámetros para describir la superficie son *u* y *v*.

$$x = a.\cos u.\cos v \qquad y = a.\mathrm{sen}\, u.\cos v \qquad z = a.\mathrm{sen} v$$

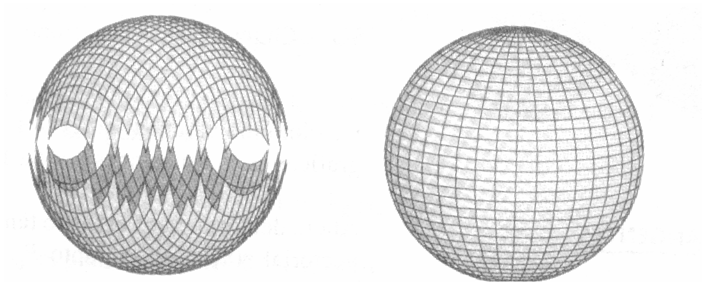
son **las ecuaciones paramétricas** de la esfera. La correspondiente ecuación vectorial es:

$$\mathbf{r}(u,v) = (a.\cos u.\cos v, a.\mathrm{sen}\, u.\cos v, a.\mathrm{sen} v)$$

donde $0 \le u \le 2\pi$ y $-\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$, de modo que el dominio paramétrico es el rectángulo $D = [0,2\pi] \times \left[-\pi/2, \pi/2\right]$

Nota

Uno de los usos de las superficies paramétricas es en las **gráficas por computadoras**. La figura de la izquierda muestra el resultado de tratar de graficar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ resolviendo las ecuaciones para *z*, $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y graficando los hemisferios superior e inferior de manera separada. Una región de la esfera parece que falta debido al sistema reticular que utiliza la computadora. La mejor representación es la de la figura de la derecha y se logró mediante una computadora que utilizó las ecuaciones paramétricas dadas en el ejemplo 1).



Ejemplo 2

Para hallar la representación paramétrica del cilindro: $x^2 + y^2 = 4 \quad 0 \le z \le 1$, usamos las coordenadas cilíndricas sabiendo que en este caso $r = 2$, entonces:

$$x = 2\cos u \qquad y = 2\mathrm{sen} u \qquad z = v$$

donde $0 \le u \le 2\pi$ y $0 \le v \le 1$.

En los dos ejemplos anteriores se pedía hallar las ecuaciones paramétricas de ciertas superficies dadas. Ahora nos planteamos el problema inverso, identificar la superficie conociendo una parametrización adecuada.

Ejemplo 3

Sea la superficie paramétrica *S* dada por:

$$r(u,v) = (\underbrace{u\cos v}_{x}, \underbrace{u\mathrm{sen} v}_{y}, \underbrace{u}_{z}) \qquad \text{con } 0 \le \mathrm{u} \le \infty \quad \text{y} \quad 0 \le \mathrm{v} \le 2\pi$$

Al ser $x = u\cos v$ e $y = u\,\mathrm{sen}v$, para todo punto $(x, y, z) \in S$, las podemos relacionar mediante la ecuación $x^2 + y^2 = u^2 = z^2$, despejando $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (¿porqué sólo el valor positivo de la raíz?) comprobamos que se trata de un **cono circular.**

Si la superficie está dada en forma explícita $z = f(x, y)$ otra forma sencilla de parametrizar es:

$$\mathbf{r}(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

9.1.-

Describir paramétricamente las superficies dadas:

$a)\, x^2 + y^2 = 4z\ ;\ 0 \le z \le 9$ $b)\, x^2 + z^2 = 16\ ;\ 3 \le y \le 5$; $c)\, x^2 + y^2 + z^2 = 4\ ;\ x \ge 0$

$d)\, x^2 + y^2 = 4; 0 \le z \le 2x + 3$ $e)\, x^2 + y^2 = z^2\ ;\ z = 0\ \ z = 6$ $f)\ x = 16 - y^2 - z^2\ \ ; x \ge 0$

9.2.-

Hallar la ecuación cartesiana de la superficie dada en forma vectorial

a) $\mathbf{r}(u,v) = \left(u, v, \dfrac{v+u}{2}\right)$

b) $\mathbf{r}(u,v) = (2\cos u, v, 2\,\mathrm{sen}u)$

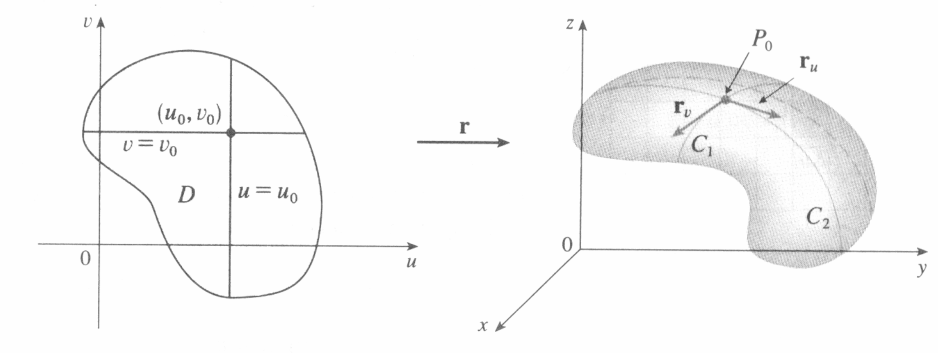
c) $\mathbf{r}(u,v) = (5\cos u \cos v, 5\,\mathrm{sen}u.\cos v, 5\,\mathrm{sen}v)$

<u>Planos tangentes</u>

Queremos ahora hallar el plano tangente a una superficie *S*, dada por una función vectorial $\mathbf{r}\ (u,v)$ en el punto P_0 cuyo vector posición es $\mathbf{r}\ (u_0, v_0)$.

Si mantenemos a *u* constante, $u = u_0$, entonces $\mathbf{r}(u_0, v)$ resulta ser una función vectorial de un solo parámetro *v*, y define a la curva C_1 que está sobre *S*. El vector tangente a C_1 en P_0 se obtiene al tomar la derivada parcial de $\mathbf{r}$ con respecto a *v*.

$$\vec{\mathbf{T}}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(P_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$



Análogamente si mantenemos a $v = v_0$ obtenemos la curva C_2 dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que está sobre S y su vector tangente en P_0 es:

$$\vec{\mathbf{T}}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(P_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$

Por lo tanto los vectores tangentes a las curvas en el punto de intersección generan el **plano tangente** a la superficie en ese punto. Como consecuencia el producto vectorial entre ellos es un vector ortogonal a dicho plano y por ello normal a la superficie en P_0.

Si el vector normal $\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{T}}_u \times \vec{\mathbf{T}}_v$ no es nulo se dice que la superficie es **regular** o **suave** en dicho punto y admite plano tangente en ese punto.

Por ejemplo la superficie dada por las ecuaciones paramétricas:

$$x = u\cos v \qquad y = u\,\mathrm{sen}v \qquad z = u \qquad u \geq 0$$

corresponden a un cono ya que describen la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (para comprobarlo elevar al cuadrado las ecuaciones de x, y y z).

Esta superficie **no es regular** en el origen ya que $\vec{\mathbf{T}}_u(0,0) = (1,0,1)$ y $\vec{\mathbf{T}}_v(0,0) = \vec{0}$ de donde resulta $\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{0}}$.

<u>Definición</u>

Si una superficie parametrizada $\mathbf{r}(u,v)$ es regular en $\mathbf{r}(u_0, v_0)$, es decir $\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{T}}_u \times \vec{\mathbf{T}}_{v\,v} \neq \vec{0}$ en (u_0, v_0), definimos el **plano tangente** a la superficie como el plano determinado por los vectores $\vec{\mathbf{T}}_u$ y $\vec{\mathbf{T}}_v$ evaluados en (u_0, v_0), así su producto vectorial determina el vector normal a la superficie en dicho punto:

$$\vec{\mathbf{N}}.(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{N}_1(x - x_0) + \mathbf{N}_2(y - y_0) + \mathbf{N}_3(z - z_0) = 0$$

Ejemplo

Sea $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$x = u\cos v \qquad y = u\,\mathrm{sen}v \qquad z = u^2 + v^2$$

Queremos hallar el plano tangente en $\mathbf{r}(1,0)$.¿Dónde no existe el plano tangente?

Calculamos

$$\vec{\mathbf{T}}_u(1,0) = (\cos 0, \mathrm{sen}\ 0, 2) = (1,0,2) \qquad \text{y} \qquad \vec{\mathbf{T}}_v(1,0) = (-\mathrm{sen}0, \cos 0, 2.0) = (0,1,0)$$

Luego $\vec{\mathbf{N}}(1,0)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-2,0,1)$ y $(x_0,y_0,z_0)=(1,0,1)$ entonces e plano tangente pedido es:

$-2(x-1)+(z-1)=0 \Rightarrow z=2x-1$.

No existe plano tangente en (0,0). Justifica

9.3.-

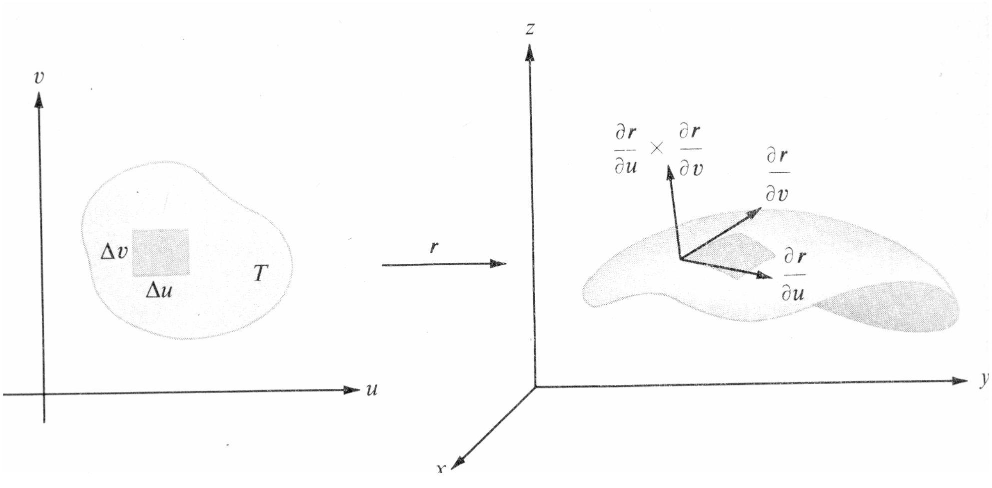
Hallar la ecuación del plano tangente para la superficie paramétrica dada en el punto indicado

a) $x=u+v$ $y=3u^2$ $z=u-v$ en (2,3,0)

b) $\mathbf{r}(u,v)=(uv,ue^v,ve^u)$ en $(0,0,0)$

Área de una superficie

Consideremos en T un segmento rectilíneo horizontal. Su imagen por $\mathbf{r}$ es una curva situada en la superficie $\mathbf{r}(T)$. Para v fija, imaginamos que el parámetro u representa el tiempo. El vector $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ es el vector velocidad de esta curva. Cuando u se incrementa en Δu, un punto situado al principio en $\mathbf{r}(u,v)$ se desplaza a lo largo de la u-curva una distancia aproximadamente igual a $\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right\|.\Delta u$, puesto que $\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right\|$ representa la velocidad a lo largo de la u-curva. Análogamente, para una u fija un punto de una v- curva se desplaza en el tiempo Δv una distancia igual a $\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\|.\Delta v$. Un rectángulo en T que tenga un área $\Delta u.\Delta v$ se convierte en una porción de $S=\mathbf{r}(T)$ que aproximaremos por un paralelogramo determinado por los vectores $(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u})\Delta u$. y $(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}).\Delta v$



El área del paralelogramo determinado por $(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u})\,\Delta u.$ y $(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}).\Delta v$ es el módulo de su producto vectorial.

__Definición__

El área de $S=\mathbf{r}(T)$ que representamos con $A(S)$ se define como la integral doble

$$A(S)=\iint_S 1.dS=\iint_T \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\| dudv=\iint_T \left\|\vec{\mathbf{N}}\right\| dudv$$

Ejemplo 1

Sabemos, porque nos contaron, que el área de una esfera de radio a es: $4\pi a^2$, la fórmula anterior nos va a permitir calcularla.

Ya hemos visto la parametrización de la esfera de radio a

$$\mathbf{r}(u,v)=(a\cos u\cos v, a\,\mathrm{sen}u\cos v, a\,\mathrm{sen}v)$$

$\vec{\mathbf{T}}_u=(-a\mathrm{sen}u\cos v, a\cos u\cos v, 0))$ $\quad\vec{\mathbf{T}}_v=(-a\cos u\,\mathrm{sen}v, -a\,\mathrm{sen}u\,\mathrm{sen}v, a\cos v)$

$$\vec{\mathbf{N}}=\vec{\mathbf{T}}_u\times\vec{\mathbf{T}}_v=\left(a^2\cos u\cos^2 v, a^2\mathrm{sen}u\cos^2 v, \underbrace{a^2\mathrm{sen}^2 u\cos v\,\mathrm{sen}\,v+a^2\cos^2 u\cos v\,\mathrm{sen}v}_{a^2\cos v\mathrm{sen}v}\right)$$

$$\left\|\vec{\mathbf{N}}\right\|=\sqrt{a^4\cos^4 v+a^4\cos^2 v\,\mathrm{sen}^2 v}=\sqrt{a^4\cos^2 v}=a^2\cos v$$

$$A(S)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} a^2\cos v\,du\;dv=2\pi a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos v\,dv=2\pi a^2\underbrace{\left(\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}-\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}_{2}=4\pi a^2$$

Ejemplo 2

Hallar el área del paraboloide $z=x^2+y^2$ que está debajo del plano $z=9$

Tenemos primero que parametrizar la superficie, usamos las coordenadas cilíndricas:

$\mathbf{r}(u,v)=(\sqrt{v}\cos u, \sqrt{v}\mathrm{sen}u, v).\qquad 0\le u\le 2\pi \qquad\qquad 0\le v\le 9$

$\vec{\mathbf{T}}_u=(-\sqrt{v}\,\mathrm{sen}u, \sqrt{v}\cos u, 0)\qquad\qquad \vec{\mathbf{T}}_v=\left(-\frac{1}{2\sqrt{v}}\cos u\,,,-\frac{1}{2\sqrt{v}}\mathrm{sen}u, 1\right)$

$$\vec{\mathbf{N}}=\vec{\mathbf{T}}_u\times\vec{\mathbf{T}}_v=\left(\sqrt{v}\cos u, \sqrt{v}\,\mathrm{sen}u, \frac{1}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad\left\|\vec{\mathbf{N}}\right\|=\sqrt{v+\frac{1}{4}}$$

$$A(S)=\int_0^9\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(v+\frac{1}{4}\right)}du\right)dv=2\pi\int_0^9\left(\sqrt{v+\frac{1}{4}}\right)dv=2\pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{\left(v+\frac{1}{4}\right)^3}\Bigg|_0^9\right)=\frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right)$$

Integrales de superficie

Ahora estamos preparados para definir la integral de una **función escalar sobre una superficie *S*.** Este concepto es una generalización natural del área de una superficie, que corresponde a la integral sobre *S* de la función escalar $f(x,y,z)=1$.

Sea *S* una superficie parametrizada por la aplicación: $\mathbf{r}: D \to S \subset \mathbb{R}^3$, siendo:

$$\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

La integral de una función escalar sobre una superficie

Definición

Sea $S = \mathbf{r}(T)$ una superficie paramétrica descripta por una función diferenciable $\mathbf{r}$ definida en una región *T* del plano *u*-*v* y sea *f* un campo escalar definido y acotado en *S*. La integral de superficie de *f* sobre *S* está definida por la ecuación

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_S f\ dS = \iint_D f[\mathbf{r}(u,v)] \left\| \vec{\mathbf{T}}_u \times \vec{\mathbf{T}}_v \right\| dudv$$

Así si *f* es idénticamente uno recuperamos la fórmula de área vista anteriormente. Al igual que el área de una superficie, la integral de superficie es independiente de la parametrización empleada.

Ejemplo 1

Sea *S* una superficie definida por $z = x^2 + y$ donde *D* es la región $0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$.

Evaluar $\iint_S x dS$

Solución

Primeramente vamos a parametrizar la superficie $\mathbf{r}(u,v) = (u, v, u^2 + v)$.

Necesitamos hallar $\vec{\mathbf{T}}_u$ y $\vec{\mathbf{T}}_v$.

$$\vec{\mathbf{T}}_u = (1,0,2u) \qquad \vec{\mathbf{T}}_v = (0,1,1) \qquad \vec{\mathbf{T}}_u \times \vec{\mathbf{T}}_v = (-2u,-1,1) \quad \Rightarrow \quad \left\| \vec{\mathbf{T}}_u \times \vec{\mathbf{T}}_v \right\| = \sqrt{4u^2 + 2}$$

Además debemos evaluar la función a integrar en la parametrización: $f(\mathbf{r}(u,v)) = u$ y como $u = x \to 0 \le u \le 1$ y $v = y \to -1 \le v \le 1$.

$$\iint_S x dS = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^1 u\sqrt{4u^2+2}\ du \right) dv = \frac{1}{12}\int_{-1}^{1} (6^{3/2} - 2^{3/2}) dv = \sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Ejemplo 2

Calcular $\iint_S (x-2y+z)\,dS$; si la superficie es: $S: z=10$; $x^2+y^2\le 1$

La superficie es un círculo de radio 1, paralelo al plano *x y*, a la altura de *z* = 10. Se parametriza usando coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\ \cos t & 0\le r\le 1 \\ y = r\ \operatorname{sen} t & 0\le t\le 2\pi \qquad\qquad \mathbf{r}(u,v)=(r\ \cos t; r\ \operatorname{sen} t; 10) \\ z=10 \end{cases}$$

Se calculan los vectores $\mathbf{T}_r$ y $\mathbf{T}_t$

$$\overrightarrow{\mathbf{T}_r}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}=(\cos t;\operatorname{sen} t;0) \qquad \overrightarrow{\mathbf{T}_t}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}=(-r\operatorname{sen} t; r\cos t; 0)$$

Al multiplicar vectorialmente estos vectores, se obtiene el vector normal a la superficie. Para que éste tenga sentido hacia el exterior de *S*, se aplica la regla del tirabuzón derecho que dice: “si se multiplican vectorialmente dos vectores, se obtiene un nuevo vector, cuya dirección es perpendicular al plano que forman los vectores multiplicados y su sentido es tal que si se hace girar un tirabuzón derecho en el sentido que va del primer vector al segundo vector, la punta del tirabuzón indica el sentido del vector resultante”.

Para que **N** apunte hacia arriba el orden del producto vectorial debe ser:

$$\overrightarrow{\mathbf{N}}=\overrightarrow{\mathbf{T}_\mathbf{r}}\times\overrightarrow{\mathbf{T}_t}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{N}}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos t & \operatorname{sen} t & 0 \\ -r\operatorname{sen} t & r\cos t & 0\end{vmatrix}=(r\cos^2 t+r\operatorname{sen}^2 t)\breve{k}=r\ \breve{k}=(0,\ 0,\ r) \quad\Rightarrow\quad \left\|\overrightarrow{\mathbf{N}}\right\|=r$$

Ahora se evalúa $f[\mathbf{r}(r,t)]=r\cos t-2r\operatorname{sen} t+10$.

Por último se calcula la integral:

$$\iint_S f\ dS=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos t-2r\operatorname{sen} t+10)r\ dr\ dt=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^3}{3}\cos t-2\frac{r^3}{3}\operatorname{sen} t+10\frac{r^2}{2}\right)_0^1 dt=$$

$$=\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen} t+\frac{2}{3}\cos t+5t\right)_0^{2\pi}=10\pi$$

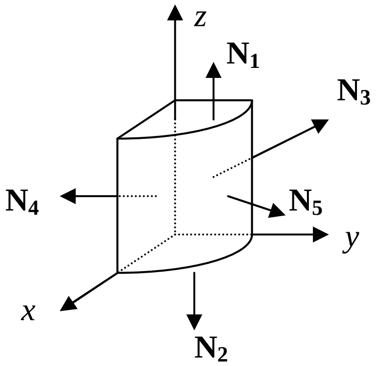
Ejemplo 3

Calcular $\iint_S (x+z)\,dS$; $S: x^2+y^2=9$; $0\le z\le 4$; $0\le x\le 3$; $0\le y\le 3$.

La superficie es la parte correspondiente al primer octante de un cilindro cuyo eje coincide con el eje *z*.

Por lo tanto la superficie total se descompone en cinco superficies regulares.

Se debe calcular la integral de superficie de la función sobre cada una de ellas, y la integral de superficie será la suma de todos estos resultados



$$S_1 : \begin{cases} x = r\cos t & 0 \le t \le \pi/2 & \overrightarrow{\mathbf{T}_r} = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \\ y = r\operatorname{sen} t & 0 \le r \le 3 & \overrightarrow{\mathbf{T}_t} = (-r\operatorname{sen} t, r\cos t, 0) \\ z = 4 & & \overrightarrow{\mathbf{N}} = \overrightarrow{\mathbf{T}_\mathbf{r}} \times \overrightarrow{\mathbf{T}_t} = (0,0,r) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{\mathbf{N}}\right\| = r \end{cases}$$

$$\iint_{S_1} f\ dS = \int_0^3 \int_0^{\pi/2} (r\cos t + 4)\, r\ dt\ dr = 9 + 9\pi$$

$$S_2 : \begin{cases} x = r\cos t & 0 \le r \le 3 & \overrightarrow{\mathbf{N}} = \overrightarrow{\mathbf{T}_t} \times \overrightarrow{\mathbf{T}_\mathbf{r}} = (0,0,-r) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{\mathbf{N}}\right\| = r \\ y = r\operatorname{sen} t & 0 \le t \le \pi/2 & \\ z = 0 & & \end{cases}$$

$$\iint_{S_2} f\ dS = \int_0^3 \int_0^{\pi/2} r^2 \cos t\ dt\ dr = 9$$

$$S_3 : \begin{cases} x = 0 & \mathbf{r}(y,z) = (0, y, z) & \\ 0 \le y \le 3 & \overrightarrow{\mathbf{T}_y} = (0,1,0) & \overrightarrow{\mathbf{T}_z} = (0,0,1) \\ 0 \le z \le 4 & \overrightarrow{\mathbf{N}} = \overrightarrow{\mathbf{T}_z} \times \overrightarrow{\mathbf{T}_y} = (-1,0,0) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{\mathbf{N}}\right\| = 1 & \end{cases}$$

$$\iint_{S_3} f\ dS = \int_0^3 \int_0^4 z\, dz\, dy = 24$$

$$S_4 : \begin{cases} y = 0 & \mathbf{r}(x,z) = (x, 0, z) & \\ 0 \le x \le 3 & \overrightarrow{\mathbf{T}_x} = (1,0,0) & \overrightarrow{\mathbf{T}_z} = (0,0,1) \\ 0 \le z \le 4 & \overrightarrow{\mathbf{N}} = \overrightarrow{\mathbf{T}_x} \times \overrightarrow{\mathbf{T}_z} = (0,-1,0) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{\mathbf{N}}\right\| = 1 & \end{cases}$$

$$\iint_{S_4} f\ dS = \int_0^3 \int_0^4 (x + z)\, dz\, dx = 42$$

$$S_5:\begin{cases} x=3\cos u & 0\le u\le \pi/2 \quad 0\le v\le 4\\ y=3\,\text{sen}u & \overrightarrow{\mathbf{T}_u}=(-3\,\text{sen}u,3\cos u,0)\quad \overrightarrow{\mathbf{T}_v}=(0,0,1)\\ z=v & \overrightarrow{\mathbf{N}}=\overrightarrow{\mathbf{T}_u}\times\overrightarrow{\mathbf{T}_v}=(3\cos u,3\,\text{sen}u,0)\Rightarrow \left\|\overrightarrow{\mathbf{N}}\right\|=3\end{cases}$$

$$\iint_{S_5} f\, dS=\int_0^4\int_0^{\pi/2} 3\ (3\cos u+v)\,du\ dv=36+12\pi$$

Entonces la integral sobre la superficie es: $\iint_S=\iint_{S_1}+\iint_{S_2}+\iint_{S_3}+\iint_{S_4}+\iint_{S_5}=120+21\pi$

9.4.-

Calcular $\iint_S (x-2y+z)\,dS$; si la superficie es: $S: z=4-x$; $0\le x\le 4$; $0\le y\le 4$

9.5.-

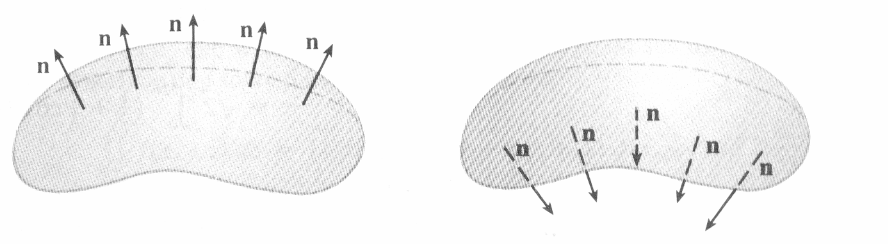
Hallar $\iint_S x.y\ dS$; sobre $S: z=6-x-2y$ (primer octante).

9.6.-

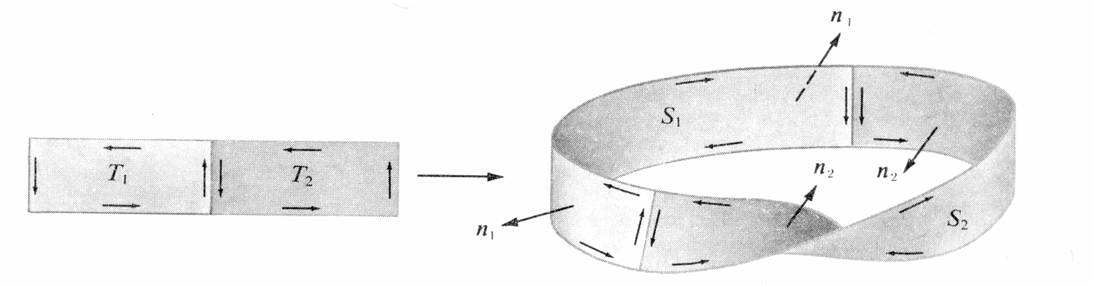
Calcular $\iint_S z\,dS$ siendo S la superficie lateral del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z\le 3$.

Orientación de una superficie

Es necesario definir superficies orientables para poder posteriormente hablar de flujo. Podemos decir que una superficie es **orientable** siempre que admita vector normal unitario $\mathbf{N}$ en cada punto (x,y,z) y $\mathbf{N}$ sea función continua de (x,y,z). Así, si se calcula $\mathbf{N}(P_0)$ y a partir de él se sigue una trayectoria cerrada, considerando ese campo de normales, se obtiene al cerrar la trayectoria un vector normal con el mismo sentido que tenía al iniciar el recorrido.



A pesar de que lo dicho en la definición pareciera que se cumple en todas las superficies, esto es cierto en casi todas pero puede encontrarse algún ejemplo en el cual no sucede. El ejemplo clásico es la **cinta de Möbius**, la cual puede construirse con facilidad tomando una cinta rectangular larga de papel, dándole un semigiro a uno de los extremos y pegando luego con el otro extremo.



Para ver que no es orientable basta con tomar un lápiz que representará el vector normal, apoyarlo en un punto y trazar una línea, verificar que si queremos retornar al punto inicial, el lápiz tendrá el sentido opuesto al de partida. Esto equivale a decir que en la superficie no se distinguen dos caras, luego en las que son orientables sí se distinguen.

Todas las superficies que hemos trabajado: esferas, paraboloides, planos son orientables, es decir pueden pintarse las caras con colores distintos para cada una.

Integrales de campos vectoriales sobre superficies

La definición de integral de línea de un campo vectorial estuvo motivada por la noción física de **trabajo**. De forma semejante, la noción física de **flujo** motiva la definición de integral de superficie de campos vectoriales. En forma más precisa, supongamos que $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo (continuo) en $\mathbb{R}^3$ y que *S* es una superficie simple. Si $\mathbf{F}$ representa el campo de velocidades del fluido, se trata de ver cuál es el flujo de éste a través de la superficie *S*.

Flujo de un fluido a través de una superficie

Sea **F** una función vectorial a la que podemos interpretar como la densidad de flujo de una corriente de partículas, es decir que nos indica cuánta masa de fluido circula por un punto (x, y, z) en una cierta dirección.

Sea $S = \mathbf{r}(T)$ una superficie paramétrica simple. Sea **N** el vector normal a *S* en cada uno de sus puntos regulares.

La masa de fluido que pasa a través de *S* en la unidad de tiempo y en la dirección de N se define por:

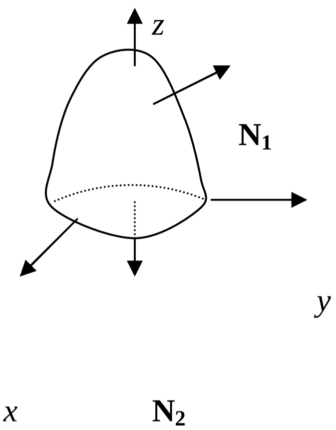
$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\; dS = \iint_T \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)]\cdot\mathbf{N}\, du\; dv$$

Ejemplo 1

Determinar el flujo de **F** a través de la superficie cerrada:

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(x+y,y,z)\ ;\ S: z=1-x^2-y^2\ ;\ z=0.$$

La superficie es la de un paraboloide de vértice (0,0,1) limitado inferiormente por el plano *xy*.



La superficie cerrada está compuesta por dos superficies regulares: la parte del paraboloide y la tapa circular sobre el plano *xy*.

Se calcula el flujo a través de cada una de ellas y luego se realiza la suma de ambos.

$$S_1:\begin{cases} x=\sqrt{1-z}\cos u & 0\le z\le 1 \qquad 0\le u\le 2\pi \\ y=\sqrt{1-z}\,\mathrm{sen}u & \overrightarrow{\mathbf{T}_u}=(-\sqrt{1-z}\ \mathrm{sen}u,\sqrt{1-z}\ \cos u;0) \\ z=z & \overrightarrow{\mathbf{T}_z}=[-\tfrac{1}{2}(1-z)^{-1/2}\cos u,-\tfrac{1}{2}(1-z)^{-1/2}\mathrm{sen}u,1] \end{cases}$$

$$\mathbf{N}=\overrightarrow{\mathbf{T}_u}\times\overrightarrow{\mathbf{T}_z}=[\sqrt{1-z}\cos u,\sqrt{1-z}\,\mathrm{sen}u,\tfrac{1}{2}(\mathrm{sen}^2u+\cos^2u)]=(\sqrt{1-z}\cos u,\sqrt{1-z}\,\mathrm{sen}u,\tfrac{1}{2})$$

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(u,z)]=(\sqrt{1-z}\cos u+\sqrt{1-z}\,\mathrm{sen}u,\sqrt{1-z}\,\mathrm{sen}u,z)$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}=(1-z)\cos^2u+(1-z)\cos u\,\mathrm{sen}u+(1-z)\mathrm{sen}^2u+\tfrac{1}{2}z=(1-z)+(1-z)\cos u\,\mathrm{sen}u+\tfrac{1}{2}z$$

$$\iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\int_0^1\int_0^{2\pi}[1-z+(1-z)\cos u\,\mathrm{sen}u+\tfrac{1}{2}z]\,du\,dz=\tfrac{3}{2}\pi$$

$$S_2:\begin{cases} x=r\cos t & 0\le t\le 2\pi \qquad 0\le r\le 1 \\ y=r\,\mathrm{sen}t & \overrightarrow{\mathbf{T}_t}=(-r\,\mathrm{sen}t,r\cos t,0) \qquad \overrightarrow{\mathbf{T}_r}=(\cos t,\mathrm{sen}t,0) \\ z=0 & \mathbf{N}=\overrightarrow{\mathbf{T}_t}\times\overrightarrow{\mathbf{T}_\mathbf{r}}=(0,0,-r\,\mathrm{sen}^2t-r\cos^2t)=(0,0,-r) \end{cases}$$

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(r,t)]=(r\cos t+r\,\mathrm{sen}t,r\,\mathrm{sen}t,0)$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}=0\ \Rightarrow\iint_{S_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=0$$

Entonces el flujo total a través de *S* resulta:

$$\iint_S\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS+\iint_{S_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\frac{3}{2}\pi$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{F}(x,y,z)=(ax,by,cz);a,b,c$ constantes. Probar que el flujo de **F** a través de la esfera de radio unidad, centrada en el origen, vale $\tfrac{4}{3}\pi(a+b+c)$.

Parametrizamos a la esfera en coordenadas esféricas

$$S:\begin{cases} x = 1\ \cos u \cos v & 0 \le u \le 2\pi \\ y = 1\ \text{sen}u \cos v & -\pi/2 \le v \le \pi/2 \\ z = 1\ \text{sen}v & \overrightarrow{\mathbf{T}_u} = (-\text{sen}u\cos v, \cos u \cos v, 0) \quad \overrightarrow{\mathbf{T}_v} = (-\cos u\,\text{sen}v, -\text{sen}u\,\text{sen}v, \cos v) \end{cases}$$

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{\mathbf{T}_u} \times \overrightarrow{\mathbf{T}_v} = (\cos u\ \cos^2 v, \text{sen}u\ \cos^2 v, \text{sen}^2 u\ \cos v\ \text{sen}v + \cos^2 u\ \cos v\ \text{sen}v)$$

$$\mathbf{N} = (\cos u\ \cos^2 v\,, \text{sen}u\ \cos^2 v\,, \cos v\ \text{sen}v)$$

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)] = (a\cos u\cos v\,, b\,\text{sen}u\cos v\,, c\,\text{sen}v)$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = a\cos^2 u\ \cos^3 v + b\ sen^2 u\ \cos^3 v + c\ \cos v\ \text{sen}^2 v$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(a\cos^2 u\ \cos^3 v + b\ \text{sen}^2 u\ \cos^3 v + c\ \cos v\ \text{sen}^2 v)\,dv\ du$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \frac{4}{3}\ \pi\ (a+b+c)$$

Ejemplo 3

Calcular el flujo de $\mathbf{F} = \dfrac{q}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}(x,y,z)$ a través de la esfera de radio 1 centrada en el origen.

Como en el caso anterior parametrizamos la superficie con coordenadas esféricas y obtenemos el vector normal:

$$\mathbf{N} = (\cos u\cos^2 v, senu\cos^2 v, senv\cos v)$$

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)] = \frac{q}{1^{3/2}}(\cos u\cos v, senu\cos v, senv)$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = q\ (\cos^2 u\ \cos^3 v + sen^2 u\ \cos^3 v + sen^2 v\ \cos v) = q\,(\cos^3 v + sen^2 v\ \cos v) = q\cos v$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\ dS = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} q\cos v\ dv\ du = 4\pi\,q$$

9.7.-

Determinar el flujo de **F** a través de S ; $\iint_S \mathbf{F.N}\ dS$.

$a)\,\mathbf{F}(x,y,z) = (3z\,, -4\,, y)$; $S:\ x+y+z=1$; (primer octante).

$b)\,\mathbf{F}(x,y,z) = (x\,, y\,, z)$; $S:\ z = 9 - x^2 - y^2$; $z \ge 0$.

$c)\,\mathbf{F}(x,y,z) = x\breve{i} + y\ \breve{j} + z\ \breve{k}$; $S:\ x^2+y^2+z^2 = 16$; $z \ge 0$.

$d)\,\mathbf{F}(x,y,z) = (x z^2\,, x^2 y - z^3\,, 2xy + y^2 z)$; $S:\ x^2+y^2+z^2 = 9$; $y \ge 0$.

9.8.-

Determinar el flujo de **F** a través de la superficie cerrada:

$\mathbf{F}(x, y, z) = (4.x.y\,, z^2\,, y.z)$; $S:$ cubo unidad limitado por: $x = 0; x = 1; y = 0; y = 1;\quad z = 0; z = 1.$

<u>Teorema de Stokes</u>

Sea S una superficie orientada con vector normal **N**, limitada por una curva cerrada simple suave por secciones C. Si **F** es un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a S y a C, entonces:

$$\iint_S rot\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \oint_C \mathbf{F}\,d\mathbf{r}$$

Ejemplo 1

Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial y la superficie dados (C es el contorno de S)

$\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (y, z, x) \qquad S : z = 1 - x^2 - y^2 \quad z \geq 0$

La superficie es un paraboloide:

Coordenadas cilindricas

$$\begin{cases} x = r.\cos u = \sqrt{1-v}.\cos u & 0 \leq u \leq 2\pi \\ y = r.\text{sen}u = \sqrt{1-v}.\text{sen}u & 0 \leq v \leq 1 \\ z = v \end{cases}$$

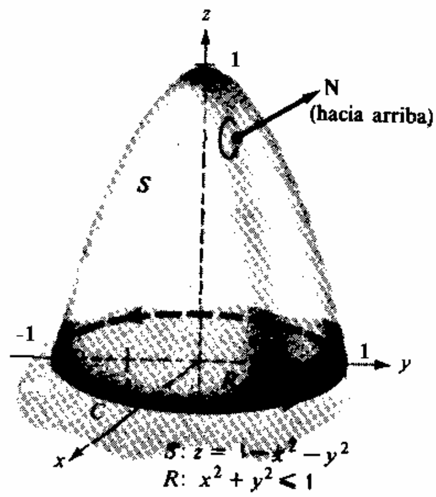
$$\text{rot}\vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1, -1, -1)$$

$$\mathbf{T}_u = (-\sqrt{1-v}\,\text{sen}\,u, \sqrt{1-v}\cos u, 0)$$

$$\mathbf{T}_v = (-\frac{1}{2\sqrt{1-v}}\cos u, -\frac{1}{2\sqrt{1-v}}\text{sen}u, 1)$$

$$\vec{\mathbf{N}} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = (\sqrt{1-v}\cos u, ;\sqrt{1-v}\,\text{sen}u,\ \tfrac{1}{2})$$

$$\text{rot}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = -\sqrt{1-v}\cos u - \sqrt{1-v}\,\text{sen}v - \tfrac{1}{2}$$



$$\iint_S \text{rot}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \int_0^1\int_0^{2\pi}(-\sqrt{1-v}\cos u - \sqrt{1-v}\,\text{sen}u - \tfrac{1}{2})\,du\,dv =$$

$$= \int_0^1 -\sqrt{1-v}\,\text{sen}u\Big|_0^{2\pi} dv - \int_0^1 \sqrt{1-v}\,(-\cos u)\Big|_0^{2\pi} dv - \tfrac{1}{2}\int_0^1 u\Big|_0^{2\pi} dv =$$

$$= -\tfrac{1}{2}2\pi v\Big|_0^1 = -\pi$$

La curva del contorno es una circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

Polares

$$\begin{cases} x = 1\cos t & 0 \le t \le 2\pi \\ y = 1\text{sen}t \end{cases}$$

$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \text{sen}t, 0) \qquad \mathbf{r}'(t) = (-\text{sen}t, \cos t, 0)$

$\vec{\mathbf{F}}[r(t)] = (\text{sen}t, 0, \cos t) \qquad \vec{\mathbf{F}}[\mathbf{r}(t)], \mathbf{r}'(t) = -\text{sen}^2 t$

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{r} = -\int_0^{2\pi} \text{sen}^2 t\, dt = -\tfrac{1}{2}(t - \text{sen}t\cos t)\Big|_0^{2\pi} = -\tfrac{1}{2}2\pi = -\pi$$

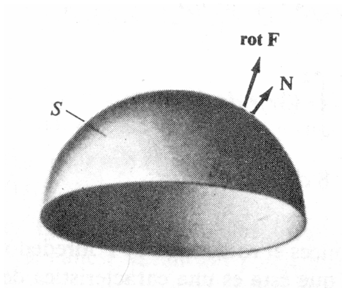
$$\iint_S rot\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-\sqrt{1-v}\cos u - \sqrt{1-v}\,\text{sen}u - \tfrac{1}{2})\, du dv =$$

$$= \int_0^1 -\sqrt{1-v}\,\text{sen}u\Big|_0^{2\pi} dv - \int_0^1 \sqrt{1-v}\,(-\cos u)\Big|_0^{2\pi} dv - \tfrac{1}{2}\int_0^1 u\Big|_0^{2\pi} dv =$$

$$= -\tfrac{1}{2}2\pi v\Big|_0^1 = -\pi$$

Ejemplo 2

Verificar el teorema de Stokes para $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y + z, x - z, xy)$, si S es la semiesfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1; z \ge 0$, y C su contorno.



a) Integral de línea sobre la curva C (circunferencia en el plano xy). La recorremos antihoraria.

$\mathbf{r}(t) = (1\cos t, 1\text{sen}t, 0)$; $0 \le t \le 2\pi$; $\mathbf{r}'(t) = (-\text{sen}t, \cos t, 0)$

$\mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] = (-\text{sen}t, \cos t, \cos t - \text{sen}t)$

$\vec{\mathbf{F}}.\mathbf{r}' = \text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}}.\mathbf{r}' = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$

b) Integral sobre la superficie de la semiesfera

Parametrización en esféricas

$$S:\begin{cases} x = r\cos u\cos v & 0\le u\le 2\pi\ ;\ 0\le v\le \pi/2\ ;\quad r=1\\ y = r\,\mathrm{sen}u\cos v & \vec{\mathbf{N}} = (r^2\cos u\cos^2 v; r^2\mathrm{sen}u\cos^2 v; r^2\,\mathrm{sen}v\cos v)\\ z = r\,\mathrm{sen}v & \vec{\mathbf{N}} = (\cos u\cos^2 v; \mathrm{sen}u\cos^2 v; \mathrm{sen}v\cos v)\end{cases}$$

$$rot\ \mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix} = (x+1, 1-y, 1+1) = (x+1,\ 1-y,\ 2)$$

$$rot\ \mathbf{F}(u,v) = (\cos u\cos v + 1,\ 1-\mathrm{sen}\,u\ \cos v, 2)$$

$$rot\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = \cos^2 u\ \cos^3 v + \cos u\ \cos^2 v + \mathrm{sen}\,u\ \cos^2 v - \mathrm{sen}^2 u\ \cos^3 v + 2\,\mathrm{sen}v\cos v$$

$$\iint_S rot\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\cos^2 u\ \cos^3 v + \cos u\ \cos^2 v + \mathrm{sen}\,u\ \cos^2 v - \mathrm{sen}^2 u\ \cos^3 v + 2\,\mathrm{sen}v\cos v\right)dv\ du = 2\pi$$

9.9.-

Comprobar el teorema de Stokes:

$a)\,\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2, x.y, x.z)\ ;\ S:\ x^2+y^2+z^2 = 1\ ;\ z\ge 0.$

$b)\,\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2, 2x.z, y.z)\ ;\ S:\ x^2+y^2+z^2 = 16;\ z\le 2\sqrt{3}$

$c)\,\mathbf{F}(x,y,z) = (3-2y, \dfrac{1}{3}-z, 6-4x)\ ;\ S:\ z = 9-x^2-y^2\ ;\ z\ge 0.$

9.10.-

Aplicar el Teorema de Stokes para calcular la circulación del vector $(y, 2x, -1)$ a lo largo del círculo $x^2+y^2-3=0\ ;\ z=1$.

9.11.-

Probar que la circulación de $\mathbf{F}(x,y,z) = (x\ ,y\ ,z)$ a lo largo de cualquier curva cerrada es nula.

9.12.-

Verificar que se cumple el teorema de Stokes para $\mathbf{F}(x,y,z) = (2y, 3x, -z^2)$ siendo S la superficie del paraboloide $x^2+y^2 = 2.z$; y C su contorno para $z = 2$.

<u>Teorema de la Divergencia (o de Gauss)</u>

Sea V una región sólida limitada por una superficie cerrada S orientada por un vector normal $\mathbf{N}$ dirigido hacia el exterior de V. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en V, entonces:

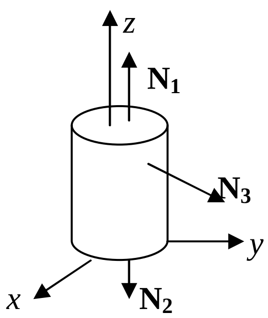
$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_V div\,\mathbf{F}\;dV$$

donde si: $\mathbf{F} = (F_1\,;F_2\,;F_3\,) \Rightarrow div\,\mathbf{F} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \dfrac{\partial F_3}{\partial z}$

Ejemplo

Verificar el teorema de la divergencia en el siguiente caso:

$\mathbf{F}(x,y,z) = (2x,-2y,z^2)$ $\qquad S : x^2 + y^2 = 1\ ;\ 0 \le z \le h$



La región, en este caso, es un cilindro cuyo eje coincide con z. Para la integral de superficie se deben considerar tres casos, las dos tapas circulares (S_1 y S_2) y la superficie lateral (S_3).

a) Integral triple

$div\,\mathbf{F} = 2 - 2 + 2\,z = 2\,z$

Coordenadas cilíndricas

$$S:\begin{cases} x = r\cos t & 0 \le r \le 1 \\ y = r\,\text{sen}\,t & 0 \le t \le 2\pi \qquad\qquad |J| = r \\ z = z & 0 \le z \le h \end{cases}$$

$$\iiint_V div\,\mathbf{F}\;dV = \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^1 2\,z\,r\,dr\,dz\,dt = h^2\,\pi$$

b) Integral de superficie

$$S_1:\begin{cases} x = r\cos t & 0 \le r \le 1 \qquad 0 \le t \le 2\pi \\ y = r\,\text{sen}t & \overrightarrow{\mathbf{T}_r} = (\cos t, \text{sen}t, 0) \qquad \overrightarrow{\mathbf{T}_t} = (-r\,\text{sen}t, r\cos t, 0) \\ z = h & \overrightarrow{\mathbf{N}} = \overrightarrow{\mathbf{T}_r} \times \overrightarrow{\mathbf{T}_t} = (0,0,r) \qquad \mathbf{F}(r,t) = (2r\cos t, -2r\,\text{sen}t,\ h^2) \end{cases}$$

$\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = h^2\,r \qquad \displaystyle\iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 h^2\,r\,dr\,dt = h^2\,\pi$

$$S_2:\begin{cases} x = r\cos t & 0 \le r \le 1 \quad 0 \le t \le 2\pi \\ y = r\,\text{sen}t & \mathbf{N} = \overrightarrow{\mathbf{T}_t} \times \overrightarrow{\mathbf{T}_r} = (0,0,-r) \qquad \mathbf{F}(r,t) = (2r\cos t, -2r\,\text{sen}t,\ 0) \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = 0 \qquad \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = 0$$

$$S_3:\begin{cases} x = 1\cos t & 0 \le z \le h \quad 0 \le t \le 2\pi \\ y = 1\,\text{sen}t & \overrightarrow{\mathbf{T}_z} = (0,0,1) \quad \overrightarrow{\mathbf{T}_t} = (-\text{sen}t, \cos t, 0) \\ z = z & \overrightarrow{\mathbf{N}} = \overrightarrow{\mathbf{T}_\mathbf{t}} \times \overrightarrow{\mathbf{T}_\mathbf{z}} = (\cos t, \text{sen}t, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = 2\cos^2 t - 2\,\text{sen}^2 t = 4\cos^2 t - 2 \qquad \iint_{S_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \int_0^h \int_0^{2\pi} (4\cos^2 t - 2)\,dt\,dz = 0$$

$$\iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3} = h^2\ \pi$$

9.13.-

Comprobar el teorema de la divergencia en los siguientes casos:

$a)\,\mathbf{F}(x,y,z) = (2x, -2, z^2)$; S : cubo definido por los planos $x = 0; x = a, y = 0, y = a$;

$z = 0, z = a.$

$b)\,\mathbf{F}(x,y,z) = (2.x, 2.y, z^2)$; S : cilindro $x^2 + y^2 = 1$; $0 \le z \le 5$.

9.14.-

En los siguientes ejercicios, usando el teorema de la divergencia, evaluar $\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{N}\ dS$ y hallar el flujo de **F** al exterior, a través del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones

$a)\,\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, -2.x.y, x.y.z^2)$; $S: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$; $z = 0.$

$b)\,\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y, z)$; $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$

$c)\,\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y^2, -z)$; $S: x^2 + y^2 = 9$; $z = 0$; $z = 4.$

$d)\,\mathbf{F}(x,y,z) = (5x^3 + 1, \frac{3}{2}y^2, 5z^3 - 2x)$; $S: x^2 + z^2 + 2 = 4y$; $4 - y = 0$

$e)\,\mathbf{F}(x,y,z) = (3x^2, 2y^2, 2z^2)$; $S: x^2 + y^2 = z^2, z = 0, z = 2$

Problemas propuestos

Parcial recuperatorio 2000

Calcular la integral de superficie de $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(4z+5,5x-\frac{1}{3},4y+2\right)$, siendo S la superficie definida por $9x^2+9y^2+z=1$; $z\geq 0$.

Parcial recuperatorio 2003

Hallar el flujo del campo vectorial el campo $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3/\mathbf{F}(x,y,z)=\left(2y+\frac{1}{2},3z-1,x+5\right)$ siendo S la superficie del paraboloide: $z=4-x^2-y^2\,;z\geq 0$.

Segundo recuperatorio del parcial 2003

Usar el teorema de Stokes para hallar: $\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, siendo $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(5z+7,3x-\frac{1}{4},2y+1\right)$ y S la superficie $1-25x^2-25y^2=z\,,z\geq 0$

Segundo recuperatorio del parcial 2005

Comprobar el teorema de la divergencia siendo $\mathbf{F}(x,y,z)=(6z,2x+y,-x)$ en el volumen encerrado por $x^2+z^2=9;y=0;y=3$.

Segundo recuperatorio del parcial 2007

Calcular la integral de superficie de $\mathbf{F}(x,y,z)=(3x,z,2y)$ siendo S la superficie lateral del cilindro: $x^2+y^2=16$, desde $z=0$ hasta $z=x+8$.

Final 2013

Verificar el teorema de Stokes para el campo $\mathbf{F}(x,y,z)=(2y,3z,x)$ sobre la superficie $S:z=4-x^2-y^2$; $z\geq 0$ y C su contorno en $z = 0$.

Segundo Rcuperatorio 2014

Comprobar el teorema de Stokes si $\mathbf{F}(x,y,z)=(-y,x,1)$ siendo S: $x^2+y^2+z^2=1;z\geq 0$.

Final diciembre 2014

Calcular el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=(y,x,z)$ siendo S la superficie cerrada

$$z=1+x^2+y^2;\ z=9$$