Modelos de Herbrand

↓ Dificultad de Lógica de Predicados → definición de modelos basada en conjuntos arbitrarios

↑ Teoría para construir modelos en forma canónica → Modelos de Herbrand

Modelos de Herbrand:

✓ se construyen a partir del conjunto de términos cerrados de un lenguaje de primer orden

✓ permiten definir un método para determinar si una fórmula es lógicamente válida o no.

Modelos de Herbrand

Dado L = < R, F, C >, lenguaje de primer orden

El conjunto de los términos cerrados de L se llama

UNIVERSO DE HERBRAND U(L)

1) **Si $c \in C$ entonces $c \in U(L)$**
2) **Si $t_1, t_2, \ldots, t_n \in U(L)$ y f es un símbolo de función n-ario entonces $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in U(L)$**

Si $C = \varnothing$, U(L) se inicia con un nuevo símbolo de constante c.

Ejemplo:

L_1 = < {P, Q}, { }, {a} >   P binario, Q unario   **$U(L_1)$ = { a }**

L_2 = < {P, Q}, {f}, {a, b} >   P binario, Q unario   f unaria

$U(L_2)$ = { a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), … }

Modelos de Herbrand

Dado L = < R, F, C >, lenguaje de primer orden

El conjunto de las fórmulas atómicas cerradas de L se llama

BASE DE HERBRAND B(L)

B(L) = { $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$: $t_i \in$ U(L) y P predicado n-ario}

Ejemplo:

L_1 = < {P, Q}, { }, {a} > P binario, Q unario

$U(L_1)$ = { a }

$B(L_1)$ = { P(a, a), Q(a) }

L_2 = < {P, Q}, {f}, {a, b} > P binario, Q unario f unaria

$U(L_2)$ = { a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), … }

$B(L_2)$ = { P(a, a), P(a, b), P(b, a), P(b, b), P(f(a), f(b)), P(f(f(a)), f(f(a))), …

Q(a), Q(b), Q(f(a)), …}

Modelos de Herbrand

Se definen conceptos análogos para cláusulas. Sea S conjunto de cláusulas:

UNIVERSO DE HERBRAND DE S U(S):conjunto de términos cerrados de S

1) **Si c es símbolo de constante que aparece en S entonces c $\in$ U(S)**
2) **Si $t_1, t_2, \ldots, t_n \in$ U(S) y f es un símbolo de función n-ario entonces $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in$ U(S)**

BASE DE HERBRAND DE S B(S): conjunto de las fórmulas atómicas cerradas de S

B(S) = { $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$: $t_i \in$ U(S) y P predicado n-ario que aparece en S}

Importante: La Base de Herbrand está formada por todas las instancias de fórmulas atómicas de S donde los términos se toman de U(S)

Ejemplo:

S = { Q(a) $\vee$ $\neg$Q(x), R(b, y) $\vee$ R(a, b) }

U(S) = { a, b } B(S) = { Q(a), Q(b), R(a, a), R(a, b), R(b, a), R(b, b) }

Modelos de Herbrand

Dado L = < R, F, C >, lenguaje de primer orden

Sea M_H = < D, R^D, F^D, C^D > donde

- **D = U(L) (el dominio es el conj. de términos cerrados de L)**
- **Para cada c $\in$ C, $c^D = c$**
- **Para cada f $\in$ F, $f^D(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(t_1^D, t_2^D, \ldots, t_n^D)$**

interpretación de términos es fija

- **Para R^D se elige un subconjunto de fórmulas atómicas de B(L)**
  Sea Y $\subseteq$ B(L). Si $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in$ B(L) entonces

$$M_H \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \leftrightarrow P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in Y$$

Sea A una fórmula

Una estructura o modelo de Herbrand M es un modelo de Herbrand para A si es un modelo de A, es decir M $\models$ A

Modelos de Herbrand

Dado S un conjunto de cláusulas

Sea M_H = < D, R^D, F^D, C^D > donde

- **D = U(S) (el dominio es el conj. de términos cerrados de S)**
- **Para cada c $\in$ C, $c^D = c$**
- **Para cada f $\in$ F, $f^D(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(t_1^D, t_2^D, \ldots, t_n^D)$**

interpretación de términos es fija

- **Para R^D se elige un subconjunto de fórmulas atómicas de B(S)**
  Sea Y $\subseteq$ B(S). Si $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in$ B(S) entonces

$$M_H \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \leftrightarrow P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in Y$$

Sea S un conjunto de cláusulas.

Una estructura o modelo de Herbrand M es un modelo de Herbrand para S si es un modelo de S, es decir M $\models$ S

Ejemplo

Sea el conjunto de cláusulas

$S = \{ \neg Q(x, a) \lor P(f(b)), \neg P(a) \}$ a, b constantes

$U(S) = \{ a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), \dots \}$

$B(S) = \{ P(a), P(b), P(f(a)), P(f(b)), P(f(f(a))), P(f(f(b))), \dots,$
$Q(a, a), Q(a, b), Q(b, a), Q(b, b), Q(a, f(a)), Q(a, f(b)), \dots \}$

Probaremos si existe $Y \subseteq B(S)$ tal que $M_Y(H) \models S$

Es decir $M_Y(H) \models (\neg Q(x, a) \lor P(f(b))) \land \neg P(a)$

Ejemplo

$\Rightarrow M_Y(H) \models (\neg Q(x, a) \lor P(f(b))) \land \neg P(a) \quad \leftrightarrow$

$M_Y(H) \models \neg Q(x, a) \lor P(f(b))$ y $M_Y(H) \models \neg P(a)$

$\Rightarrow M_Y(H) \models \neg P(a) \leftrightarrow P(a) \notin Y$ (1)

$\Rightarrow M_Y(H) \models \neg Q(x, a) \lor P(f(b)) \quad \leftrightarrow$
$M_Y(H) \models \neg Q(x, a)$ [d] para todo $d \in U(S)$ ó $M_Y(H) \models P(f(b))$

Elegimos $M_Y(H) \models P(f(b)) \leftrightarrow P(f(b)) \in Y$ (2)

Por (1) y (2) $Y = \{ P(f(b)) \}$

Entonces $S = \{ \neg Q(x, a) \lor P(f(b)), \neg P(a) \}$ tiene un modelo de Herbrand

Dado $Y = \{ P(f(b)), Q(a, b), Q(b, a) \}$ es MH para S?

Teoría de Herbrand

TEOREMA DE HERBRAND:

Sea S un conjunto de cláusulas. Entonces S tiene un modelo sí y sólo sí S tiene un Modelo de Herbrand.

Es decir,
S no tiene modelos sí y sólo sí S no tiene Modelos de Herbrand.
S es insatisfacible sí y sólo sí S no tiene Modelos de Herbrand.

$S= \{ \neg Q(x, a) \vee P(f(b)), \neg P(a)\}$ tiene un modelo de Herbrand entonces S tiene un modelo, es decir S es satisfacible

Teoría de Herbrand

En general, el Teorema de Herbrand no es válido para fórmulas.

Ejemplo $A = P(a) \wedge \exists x \neg P(x)$ a constante

$U(A) = \{a\}$ $B(A) = \{ P(a) \}$

Dos posibles MH: $Y_1 = \varnothing$ y $Y_2 = \{ P(a) \}$

$M_{Y1}(H) \models \neg P(a)$ $M_{Y2}(H) \models P(a)$

En $M_{Y1}(H) \not\models P(a)$ entonces $M_{Y1}(H) \not\models A$

En $M_{Y2}(H) \models P(a)$ entonces $M_{Y2}(H) \not\models \neg P(a)$

$M_{Y2}(H) \not\models \exists x \neg P(x)$ y entonces $M_{Y2}(H) \not\models A$

Por lo tanto A no tiene Modelos de Herbrand

Teoría de Herbrand

Pero $A = P(a) \wedge \exists x \neg P(x)$ tiene modelos

$D = \{ 0, 1\}$ $a^D = 0$ $P^D = \{ 0 \}$

Como $0 \in P^D$ entonces $M \models P(a)$

Como $1 \notin P^D$ en $M \not\models P(1)$ y entonces $M \models \exists x \neg P(x)$

Por lo tanto $M \models A$

El Teorema de Herbrand no es válido para fórmulas.

Teoría de Herbrand

Teorema de Skolem:

Sea A una sentencia. Entonces existe una fórmula A' en forma clausular o forma normal de Skolem tal que A es satisfacible sí y sólo sí A' es satisfacible ($A \approx A'$).

Teorema de Herbrand:

Sea S un conjunto de cláusulas. Entonces S tiene un modelo sí y sólo sí S tiene un Modelo de Herbrand.

Es decir, S no tiene modelos sí y sólo sí S no tiene Modelos de Herbrand.

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA - 2016

Teoría de Herbrand

Teorema:

Sea A una sentencia. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- ✓ A es lógicamente válida (o válida)
- ✓ ¬A es insatisfacible (o contradictoria)
- ✓ Cualquier forma clausular de ¬A es insatisfacible
- ✓ Cualquier forma clausular de ¬A no tiene Modelos de Herbrand

Teoría de Herbrand

Método para determinar si una sentencia A es válida:

1) Obtener ¬A
2) Obtener una forma clausular de ¬A (cl(¬A))
3) Estudiar si cl(¬A) tiene o no Modelos de Herbrand:

✓ Si cl(¬A) no tiene Modelos de Herbrand, cl(¬A) es insatisfacible ⇒ A es válida

✘ Si cl(¬A) tiene Modelos de Herbrand, cl(¬A) es satisfacible ⇒ A no es válida

Teoría de Herbrand

Ejemplo: Determinar si A es válida

$A = \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \rightarrow \exists x (A(x) \vee B(x))$

a) Usando Modelos   A es válida $\leftrightarrow$ para todo modelo M, $M \models A$

Sea M un modelo arbitrario.

Si en $M \not\models \exists x A(x) \vee \exists y B(y)$ entonces $M \models A$

Si en $M \models \exists x A(x) \vee \exists y B(y)$ debemos   probar $M \models \exists z (A(z) \vee B(z))$

Sean $d_1, d_2 \in D$ tal que $M \models A(d_1)$ ó $M \models B(d_2)$ (por hipótesis)

Luego, si $M \models A(d_1)$ entonces $M \models A(d_1) \vee B(d_1)$

si $M \models B(d_2)$ entonces $M \models A(d_2) \vee B(d_2)$ A es válida

Teoría de Herbrand

Ejemplo: Determinar si A es válida

$A = \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \rightarrow \exists x (A(x) \vee B(x))$

b) Usando propiedad: A es válida $\leftrightarrow$ cl($\neg$A) es insatisfacible

$\neg A \equiv \neg(\exists x A(x) \vee \exists y B(y) \rightarrow \exists z (A(z) \vee B(z)))$

$\equiv \neg(\neg (\exists x A(x) \vee \exists y B(y)) \vee \exists z (A(z) \vee B(z)))$

$\equiv (\exists x A(x) \vee \exists y B(y)) \wedge \neg \exists z (A(z) \vee B(z))$

$\equiv (\exists x A(x) \vee \exists y B(y)) \wedge \forall z \neg(A(z) \vee B(z))$

$\equiv (\exists x A(x) \vee \exists y B(y)) \wedge \forall z (\neg A(z) \wedge \neg B(z))$

$\approx (A(a) \vee B(b)) \wedge \forall z (\neg A(z) \wedge \neg B(z))$ a, b constantes

$\equiv \forall z ((A(a) \vee B(b)) \wedge \neg A(z) \wedge \neg B(z))$ a, b constantes

$cl(\neg A) = \{ A(a) \vee B(b), \ \neg A(z), \neg B(z) \}$ a, b constantes

Teoría de Herbrand

$cl(\neg A) = \{ A(a) \vee B(b),\ \neg A(z), \neg B(z) \}$ a, b constantes

Suponemos que existe un modelo M tal que $M \models cl(\neg A)$

Entonces se debe cumplir

⇨ $M \models A(a) \vee B(b)$ $\leftrightarrow$ $M \models A(a)$ ó $M \models B(b)$ y

⇨ $M \models \neg A(z)[d]$ $\forall d: d \in D$ y

⇨ $M \models \neg B(z)[d]$ $\forall d: d \in D$

Si $M \models A(a)$ entonces $M \not\models \neg A(a)$ y $M \not\models \neg A(z)[d]$ $\forall d: d \in D$

Si $M \models B(b)$ entonces $M \not\models \neg B(b)$ y $M \not\models \neg B(z)[d]$ $\forall d: d \in D$

Por lo tanto, no existe M tal que $M \models cl(\neg A)$

$cl(\neg A)$ es insatisfacible y A es válida

Teoría de Herbrand

Ejemplo: Determinar si A es válida

$A = \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \rightarrow \exists x(A(x) \vee B(x))$

c) Usando propiedad:

A es válida $\leftrightarrow$ $cl(\neg A)$ no tiene Modelos de Herbrand

$cl(\neg A) = \{A(a) \vee B(b),\ \neg A(z), \neg B(z) \}$ a, b constantes

$U(cl(\neg A)) = \{a, b\}$

$B(cl(\neg A)) = \{A(a), A(b), B(a), B(b)\}$ 2^4 posibles MH

Teoría de Herbrand

$cl(\neg A) = \{A(a) \vee B(b),\ \neg A(z), \neg B(z)\}$ a, b constantes

Suponemos que existe $Y \subseteq B(cl(\neg A))$ tal que $M_Y(H) \models cl(\neg A)$

$M_Y(H) \models \neg A(z) \leftrightarrow M_Y(H) \models \neg A(z)\,[d]\ \forall d: d \in U(S) \leftrightarrow A(a), A(b) \notin Y$ *

$M_Y(H) \models \neg B(z) \leftrightarrow M_Y(H) \models \neg B(z)\,[d]\ \forall d: d \in U(S) \leftrightarrow B(a), B(b) \notin Y$ **

$M_Y(H) \models A(a) \vee B(b) \leftrightarrow M_Y(H) \models A(a)$ ó $M_Y(H) \models B(b)$

$M_Y(H) \models A(a) \leftrightarrow A(a) \in Y$ contradice * $M_Y(H) \models B(b) \leftrightarrow B(b) \in Y$ contradice **

Por lo tanto $cl(\neg A)$ no tiene Modelos de Herbrand y entonces

A es válida