Ciencias de la Computación I

Propiedades de Clausura de Lenguajes Regulares y Lenguajes Libres del Contexto

Propiedades de Clausura de Lenguajes Regulares

Los lenguajes regulares (LR) son cerrados bajo las siguientes operaciones:

- ✓ **Unión**
- ✓ **Intersección**
- ✓ **Complemento**
- ✓ **Clausura**
- ✓ **Reversa**
- ✓ **Concatenación**

Cualquiera de estas operaciones aplicadas sobre lenguajes regulares da como resultado otro lenguaje regular.

Intersección de Lenguajes Regulares

Teorema: **Dados L_1 y L_2 lenguajes regulares, $L_1 \cap L_2$ es un lenguaje regular.**

Demostración:

Como L_1 es LR existe un AFD $M_1 = <E_1, A_1, \delta_1, e_{01}, F_1>$ tal que $L_1 = L(M_1)$

Como L_2 es LR existe un AFD $M_2 = <E_2, A_2, \delta_2, e_{02}, F_2>$ tal que $L_2 = L(M_2)$

A partir de M_1 y M_2 es posible definir un AFD M de la siguiente manera:

$M = < E_1 \times E_2, A_1 \cup A_2, \delta, [e_{01}, e_{02}], F_1 \times F_2>$ $\quad E_1 \cap E_2 = \emptyset$

δ se define como: $\delta([e_j, e_k], a) = [e_j', e_k']$ sí y sólo sí

$\delta_1(e_j, a) = e_j'$ y $\delta_2(e_k, a) = e_k'$

Es decir, $\delta([e_j, e_k], a) = [\delta_1(e_j, a), \delta_2(e_k, a)]$

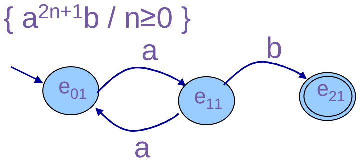
para todo $e_j \in E_1$, $e_k \in E_2$ y para todo $a \in A$

Como $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2) = L_1 \cap L_2$ $\quad L_1 \cap L_2$ es un lenguaje regular

Ejemplo: Intersección entre dos Lenguajes Regulares

$L_1 = \{ a^{2n+1}b \ / \ n \geq 0 \}$

δ_1

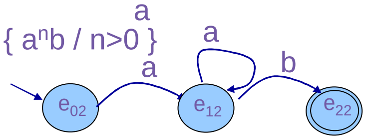


$M_1 = <\{e_{01}, e_{11}, e_{21}\}, \{a,b\}, \delta_1, e_{01}, \{e_{21}\}>$

$L(M_1) = L_1$

$L_2 = \{ a^n b \ / \ n > 0 \}$

δ_2



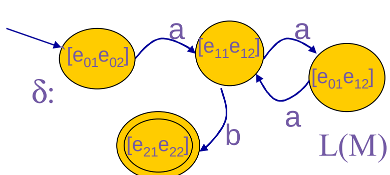
$M_2 = <\{e_{02}, e_{12}, e_{22}\}, \{a,b\}, \delta_2, e_{02}, \{e_{22}\}>$

$L(M_2) = L_2$

A partir de M_1 y M_2, según la demostración anterior, se puede construir un AFD M como:

$M = <\{[e_{01}e_{02}], [e_{11}e_{12}], [e_{01}e_{12}], [e_{21}e_{22}]\}, \{a,b\}, \delta, [e_{01}\, e_{02}], \{[e_{21}\, e_{22}]\}>$

δ:



$L(M) = \{a^{2n+1}b \ / n \geq 0\}$

$L(M) = L(M_1) \cap L(M_2) = L_1 \cap L_2$

$L_1 \cap L_2$ es regular

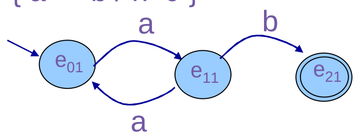
Ejemplo: Unión entre dos Lenguajes Regulares

$L_1 = \{ a^{2n+1}b \ / \ n \geq 0 \}$

Usando autómatas finitos:

$M_1 = <\{e_{01}, e_{11}, e_{21}\}, \{a,b\}, \delta_1, e_{01}, \{e_{21}\}>$

δ_1

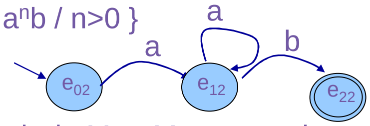


$L(M_1) = L_1$

$L_2 = \{ a^n b \ / \ n>0 \}$

$M_2 = <\{e_{02}, e_{12}, e_{22}\}, \{a,b\}, \delta_2, e_{02}, \{e_{22}\}>$

δ_2

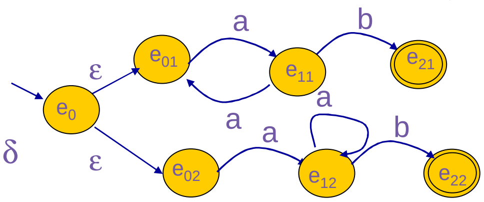


$L(M_2) = L_2$

A partir de M_1 y M_2, se puede construir un AF M como:

$M = <\{e_0, e_{01}, e_{11}, e_{21}, e_{02}, e_{12}, e_{22}\}, \{a,b\}, \delta, e_0, \{e_{21}, e_{22}\} >$

δ



$L(M) = \{a^n b \ / n>0\}$

M es AFND_ε y se puede convertir mediante pasajes en AFD que acepta el mismo lenguaje

Como $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2) = L_1 \cup L_2$ luego $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje regular

Unión de Lenguajes Regulares

Teorema: Dados L_1 y L_2 lenguajes regulares, $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje regular.

Demostración: (usando Autómatas Finitos (AF))

Como L_1 es LR existe un AFD $M_1 = <E_1, A_1, \delta_1, e_{01}, F_1>$ tal que $L_1 = L(M_1)$

Como L_2 es LR existe un AFD $M_2 = <E_2, A_2, \delta_2, e_{02}, F_2>$ tal que $L_2 = L(M_2)$

A partir de M_1 y M_2 es posible definir un AF M de la siguiente manera

$M = < E_1 \cup E_2 \cup \{e_0\}, A_1 \cup A_2, \delta, e_0, F_1 \cup F_2 >$ $\quad e_0 \notin E_1$ y $e_0 \notin E_2$

$E_1 \cap E_2 = \varnothing$

δ: se define como:

$$\delta(e_k, a) = \begin{cases} \delta_1(e_k, a) & \text{si } e_k \in E_1 \\ \delta_2(e_k, a) & \text{si } e_k \in E_2 \end{cases}$$

para todo $e_k \in E_1 \cup E_2$ y
para todo $a \in A_1 \cup A_2$

Además se define $\delta(e_0, \varepsilon) = e_{01}$ y $\delta(e_0, \varepsilon) = e_{02}$

M es AFND-ε pero se pueden usar los algoritmos existentes para obtener un AFD equivalente que acepta el mismo lenguaje que M.

Como $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2) = L_1 \cup L_2$ luego $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje regular

Ejemplo: Unión entre dos Lenguajes Regulares

Usando expresiones regulares ER:

$L_1 = \{ a^{2n+1}b \ / \ n>=0 \}$ L_1 es regular, luego existe una ER $r_1=a(aa)^*b$ $L(r_1)=L_1$

$L_2 = \{ a^n b \ / \ n>0 \}$ L_2 es regular luego existe una ER $r_2=aa^*b$ $L(r_2)=L_2$

r_1+r_2 es ER que describe $L(r_1) \cup L(r_2)$ por definición, luego

$a(aa)^*b+aa^*b$ es ER que describe $L(r_1) \cup L(r_2)= L_1 \cup L_2$
$= \{ a^{2n+1}b \ / \ n\geq 0 \} \cup \{ a^n b \ / \ n>0 \}$

Por lo tanto, si $L_1 \cup L_2$ se describe con una ER es un lenguaje regular

Unión de Lenguajes Regulares

<u>Teorema</u>:

Dados L_1 y L_2 lenguajes regulares, $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje regular.

<u>Demostración</u>: (usando Expresiones Regulares (ER))

Como L_1 es LR existe una ER r_1 tal que $L_1 = L(r_1)$

Como L_2 es LR existe una ER r_2 tal que $L_2 = L(r_2)$

$r_1+ r_2$ es ER que describe el lenguaje regular $L(r_1) \cup L(r_2)$, por definición

Como $L(r_1) = L_1$ y $L(r_2) = L_2$ entonces $L(r_1) \cup L(r_2) = L_1 \cup L_2$

Por lo tanto, $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje regular

Ejemplo: Unión entre dos Lenguajes Regulares

Usando gramáticas regulares

$L_1 = \{ a^{2n+1}b \ / \ n>=0 \}$ $L(G_1)=L_1$

$G_1=<\{A,B\},\{a,b\},P_1,S_1>$

$P_1=\{S_1 \rightarrow aB,\ A \rightarrow aB,\ B \rightarrow aA,\ B \rightarrow b\}$

$L_2 = \{ a^nb \ / \ n>0 \}$ $L(G_2)=L_2$

$G_2=<\{C\},\{a,b\},P_2,S_2>$

$P_2=\{S_2 \rightarrow aC,\ C \rightarrow aC\ \ C \rightarrow b\}$

Los no terminales deben tener nombre distinto que en G_1 si no se deben renombrar

A partir de G_1 y G_2, se puede construir una gramática regular G como:

$P=P_1 \cup P_2$ y reemplazando en cada regla que aparece S_1 y S_2 por S

$P=\{S \rightarrow aB,\ A \rightarrow aB,\ B \rightarrow aA,\ B \rightarrow b,\ S \rightarrow aC,\ C \rightarrow aC,\ C \rightarrow b\}$

$G=<\{A, B, C\}, \{a, b\}, P, S>$

$L(G)=L(G_1)\cup(G_2)=L_1 \cup L_2$

G es regular y genera un Lenguaje Regular $L_1 \cup L_2$

Unión de Lenguajes Regulares

Teorema:

Dados L_1 y L_2 lenguajes regulares, $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje regular.

Demostración: (usando Gramáticas Regulares (GR))

Como L_1 es LR existe una GR $G_1 = <N_1, T_1, P_1, S_1>$ tal que $L_1 = L(G_1)$

Como L_2 es LR existe una GR $G_2 = <N_2, T_2, P_2, S_2>$ tal que $L_2 = L(G_2)$

A partir de G_1 y G_2 es posible definir una gramática G como sigue:

$G = <N_1 \cup N_2, T_1 \cup T_2, P, S>$ $\quad$ $N_1 \cap N_2 = \varnothing$

$P = P_1 \cup P_2$ $\quad$ reemplazando S_1 en P_1 y S_2 en P_2 por S

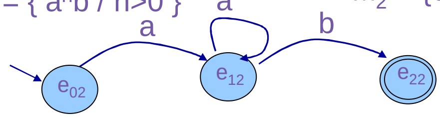
Como las reglas de P son las reglas de P_1 y P_2, G es una GR y entonces $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2) = L_1 \cup L_2$ es un lenguaje regular

Ejemplo: Complemento de un Lenguaje Regular

$L_2 = \{ a^n b \ / \ n>0 \}$

$M_2=<\{e_{02},e_{12},e_{22}\},\{a,b\},\delta_2,e_{02},\{e_{22}\}>$

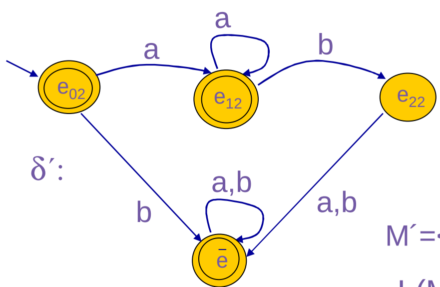
δ_2:



$L(M_2)=L_2$

A partir de M_2, se puede construir un AFD M´ como:

δ´:



$M´=<\{e_{02},e_{12},e_{22},\overline{e}\},\{a,b\},\delta´,e_{02},\{e_{02}, e_{12}, \overline{e}\}>$

$L(M´) = \{a, b\}^*- \{a^n b \ / \ n>0\}$

Como $L(M´) = \overline{L(M_2)} = \overline{L_2}$ $\quad$ $\overline{L_2}$ es un lenguaje regular

Complemento de un Lenguaje Regular

<u>Teorema</u>:

Dado L lenguaje regular, $\overline{L}$ es un lenguaje regular.

<u>Demostración</u>:

Como L es LR existe un AFD M = <E, A, δ, e_0, F> tal que L = L(M)

A partir de M, se puede construir un nuevo autómata M´ tal que L(M´) = $\overline{L}$

M´ se define como M´ = <E ∪ { $\overline{e}$ }, A, δ´, e_0, (E – F) ∪ { $\overline{e}$ }>,

donde δ´ se define como

- si $e_k \in E$ y $\delta(e_k, a)$ está definida, $\delta´(e_k, a) = \delta(e_k, a)$ para todo $e_k \in E$ y para todo $a \in A$

- si $e_k \in E$ y $\delta(e_k, a)$ no está definida, $\delta´(e_k, a) = \overline{e}$ para todo $e_k \in E$ y para todo $a \in A$

- si $e_k = \overline{e}$ $\quad$ $\delta´(\overline{e}, a) = \overline{e}$ $\quad$ para todo $a \in A$

Como L(M´) = $\overline{L}$ $\quad$ $\overline{L}$ es un lenguaje regular

Ejemplo: Reversa de un Lenguaje Regular

$L_2 = \{ a^n b \ / \ n>0 \}$ $L(G_2)=L_2$

$G_2=<\{C\},\{a,b\},P_2,S_2>$

$P_2=\{S_2 \rightarrow aC, C \rightarrow aC \ \ C \rightarrow b\}$

G_2 es Regular, Lineal a derecha

A partir de G_2, se puede construir una gramática regular G´ como:

G´=<{A,B,C},{a,b},P´,S>

P´={S $\rightarrow$ Ca, C $\rightarrow$ Ca, C $\rightarrow$ b}

Invirtiendo la parte derecha de la reglas de P_2
G´ es Regular, Lineal a izquierda

$L(G´) = L(G_2)^R = L_2^R$ G´ es regular y genera un Lenguaje Regular L_2^R

Reversa de un Lenguaje Regular

Teorema:

Dado L lenguaje regular, L^R es un lenguaje regular.

Demostración:

Como L es LR existe una GR lineal a derecha G = <N, T, P, S> tal que L = L(G)

A partir de G es posible definir una gramática G´ =<N, T, P´, S> tal que L(G´) = L^R

donde P´ = P con cada regla de producción de P de la forma
$A \rightarrow aB$ reemplazada por $A \rightarrow Ba$ para $A \in N \cup \{S\}$ y $B \in N$ y $a \in T$

Como L(G´) = L^R L^R es un lenguaje regular

Propiedades de Clausura de Lenguajes Libres del Contexto

Los lenguajes libres del contexto (LLC) son cerrados bajo las siguientes operaciones:

- ✓ **Unión**
- ✓ **Clausura**
- ✓ **Reversa**
- ✓ **Concatenación**

Los lenguajes libres del contexto (LLC) no son cerrados bajo las siguientes operaciones:

- ✓ **Intersección**
- ✓ **Complemento**

Ejemplo: Unión de lenguajes Libres del Contexto

$L_1 = \{ a^n b^n / n \geq 0 \}$	$L_2 = \{ b^n a^n / n \geq 0 \}$
$L(G_1)=L_1$	$L(G_2)=L_2$
$G_1=<\{A\},\{a,b\},P_1,S_1>$	$G_2=<\{B\},\{a,b\},P_2,S_2>$
$P_1=\{S_1 \rightarrow \varepsilon,$	$P_2=\{S_2 \rightarrow \varepsilon,$
$S_1 \rightarrow A,$	$S_2 \rightarrow B,$
$A \rightarrow aAb,$	$B \rightarrow bBa,$
$A \rightarrow ab\}$	$B \rightarrow ba\}$

A partir de G_1 y G_2, se puede construir una gramática G como:

$G=<\{A, B, S_1, S_2\}, \{a, b\}, P, S>$

Si los no terminales en G_1 y G_2 tienen el mismo nombre deben renombrarse

$P=P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\} - \{S_1 \rightarrow \varepsilon, S_2 \rightarrow \varepsilon\}\}$

Considerar el caso especial

Si en $P_1 \cup P_2$ estaba $S_1 \rightarrow \varepsilon$ ó $S_2 \rightarrow \varepsilon$ agregar en P: $S \rightarrow \varepsilon$

$P=\{S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2, S_1 \rightarrow A, A \rightarrow aAb, A \rightarrow ab, S_2 \rightarrow B, B \rightarrow bBa, B \rightarrow ba\}$

$L(G)=L(G_1) \cup L(G_2) = L_1 \cup L_2$ G es tipo 2 luego $L_1 \cup L_2$ es LLC

Unión de Lenguajes Libres del Contexto

Teorema:

Dados L_1 y L_2 LLC, $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje libre del contexto.

Demostración:

Como L_1 es LLC existe una GLC $G_1 = <N_1, T_1, P_1, S_1>$ tal que $L_1 = L(G_1)$

Como L_2 es LLC existe una GLC $G_2 = <N_2, T_2, P_2, S_2>$ tal que $L_2 = L(G_2)$

A partir de G_1 y G_2 es posible definir una gramática libre del contexto

$G =<N, T, P, S>$ tal que $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2) = L_1 \cup L_2$

La gramática G se define como sigue

$G = <N_1 \cup N_2 \cup \{S_1, S_2\}, T_1 \cup T_2, P, S>$ $\quad N_1 \cap N_2 = \emptyset$

$P = P_1 \cup P_2 \cup \{ S \to S_1, S \to S_2 \} – \{S_1 \to \varepsilon, S_2 \to \varepsilon\}$ y además

Si en P_1 está la regla $S_1 \to \varepsilon$, ó en P_2 $S_2 \to \varepsilon$ se agrega a P $S \to \varepsilon$

Como las reglas de P respetan el formato de las GLC, G es una GLC y entonces $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2) = L_1 \cup L_2$ es un lenguaje libre del contexto

Ejemplo: Concatenación de lenguajes Libres del Contexto

$L_1 = \{ a^nb^n / n\geq 0 \}$

$L(G_1)=L_1$

$G_1=<\{A\},\{a,b\},P_1,S_1>$

$P_1=\{S_1 \to \varepsilon,$
$S_1 \to A,$
$A \to aAb,$
$A \to ab\}$

$L_2 = \{ b^na^n / n\geq 0 \}$

$L(G_2)=L_2$

$G_2=<\{B\},\{a,b\},P_2,S_2>$

$P_2=\{S_2 \to \varepsilon,$
$S_2 \to B,$
$B \to bBa,$
$B \to ba\}$

A partir de G_1 y G_2, se puede construir una gramática $G =<\{A,B,S_1,S_2\}, \{a,b\}, P, S>$

$P=P_1\cup P_2\cup\{S \to S_1S_2\} – \{S_1 \to \varepsilon, S_2 \to \varepsilon\}$

Considerar casos especiales

Si en $P_1\cup P_2$ estaban	$S_1 \to \varepsilon$ y $S_2 \to \varepsilon$	agregar en P : $S \to \varepsilon$
Si en P_1 estaba	$S_1 \to \varepsilon$	agregar en P : $S \to S_2$
Si en P_2 estaba	$S_2 \to \varepsilon$	agregar en P : $S \to S_1$

$P=\{S \to S_1S_2, S\to\varepsilon, S \to S_1, S\to S_2, S_1\to A, A\to aAb, A\to ab, S_2\to B, B\to bBa, B \to ba\}$

$L(G)=L(G_1). L(G_2) =L_1 . L_2$ $\quad$ G es tipo 2 luego $L_1.L_2$ es LLC

Concatenación de Lenguajes Libres del Contexto

Teorema: Dados L_1 y L_2 LLC, $L_1 . L_2$ es un lenguaje libre del contexto.

Demostración:

Como L_1 es LLC existe una GLC $G_1 = <N_1, T_1, P_1, S_1>$ tal que $L_1 = L(G_1)$

Como L_2 es LLC existe una GLC $G_2 = <N_2, T_2, P_2, S_2>$ tal que $L_2 = L(G_2)$

A partir de G_1 y G_2 es posible definir una gramática libre del contexto

$G =<N, T, P, S>$ tal que $L(G) = L(G_1) . L(G_2) = L_1 . L_2$

La gramática G se define como sigue

$G = <N_1 \cup N_2 \cup \{S_1, S_2\}, T_1 \cup T_2, P, S>$ $\quad N_1 \cap N_2 = \emptyset$

$P = (P_1 \cup P_2 \cup \{ S \to S_1S_2 \}) - \{S_1 \to \varepsilon, S_2 \to \varepsilon\}$ y además

Si en P_1 está la regla $S_1 \to \varepsilon$, se agrega a P la regla $S \to S_2$

Si en P_2 está la regla $S_2 \to \varepsilon$, se agrega a P la regla $S \to S_1$

Si en P_1 está la regla $S_1 \to \varepsilon$, y en P_2 $S_2 \to \varepsilon$ se agrega a P $S \to \varepsilon$

Como las reglas de P respetan el formato de las GLC, G es una GLC y entonces $L(G) = L(G_1) . L(G_2) = L_1 . L_2$ es un lenguaje libre del contexto

Ejemplo: Clausura de un Lenguaje Libre del Contexto

$L_1 = \{ a^nb^n / n \geq 0 \}$

$L(G_1)=L_1$

$G_1=<\{A\},\{a,b\},P_1,S_1>$

$$P_1=\{S_1 \to \varepsilon,\ S_1 \to A,\ A \to aAb,\ A \to ab\}$$

A partir de G_1 se puede construir una gramática G como:

$G=<\{A, X, S_1\},\{a,b\}, P, S>$

$P=\{S \to \varepsilon, S \to X, X \to S_1\ X \to S_1X, S_1 \to A, A \to aAb, A \to ab\}$

$L(G)=(L(G_1))^* =L_1^*$ $\quad$ G es tipo 2 luego L_1^* es LLC

Clausura de un Lenguaje Libre del Contexto

Teorema: Dado L_1 LLC, L_1^* es un lenguaje libre del contexto.

Demostración:

Como L_1 es LLC existe una GLC $G_1 = <N_1, T_1, P_1, S_1>$ tal que $L_1 = L(G_1)$

A partir de G_1 es posible definir una gramática libre del contexto $G =<N, T, P, S>$ tal que $L(G) = L^*(G_1)$

La gramática G se define como sigue $G = <N, T, P, S>$

$N = N_1 \cup \{S_1, X\}$ $X \notin N_1$

$T = T_1$

$P = P_1 \cup \{ S \longrightarrow \varepsilon, S \longrightarrow X, X \longrightarrow S_1X, X \longrightarrow S_1 \} - \{S_1 \longrightarrow \varepsilon\}$

Como las reglas de P respetan el formato de las GLC, G es una GLC y entonces $L(G) = (L(G_1))^* = L_1^*$ es un lenguaje libre del contexto

Ejemplo Reversa de un lenguaje libre del contexto

$L(G_1)=L_1$

$G_1=<\{A\},\{a,b\},P_1,S_1>$

$$P_1=\{S_1 \rightarrow \varepsilon,\ S_1 \rightarrow A,\ A \rightarrow aAb,\ A \rightarrow ab\}$$

A partir de G_1 se puede construir G como:

$G=<\{A\},\{a,b\}, P, S_1>$

$P=\{S_1 \rightarrow \varepsilon,\ S_1 \rightarrow A,\ A \rightarrow bAa,\ A \rightarrow ba\}$

$L(G)=L(G_1)^R =L_1^R$

G es tipo 2 luego L_1^R es LLC

Reversa de un Lenguaje Libre del Contexto

Teorema: Dado L_1 LLC, L_1^R es un lenguaje libre del contexto.

Demostración:

Como L_1 es LLC existe una GLC $G_1 = <N_1, T_1, P_1, S_1>$ tal que $L_1 = L(G_1)$

A partir de G_1 es posible definir una gramática libre del contexto $G =<N, T, P, S>$ tal que $L(G) = (L(G_1))^R$

La gramática G se define como sigue $G = <N_1, T_1, P, S_1>$

Donde $P=P_1$ con cada regla de producción de P_1 de la forma

$A\rightarrow \omega$ reemplazada por $A \longrightarrow \omega^R$ para $A \in N \cup \{S\}$ y $\omega\in \{N \cup T\}^* - \{\varepsilon\}$

Como las reglas de P respetan el formato de las GLC, G es una GLC y entonces $L(G) = (L(G_1))^R = L_1^R$ es un lenguaje libre del contexto

Intersección de lenguajes libres del contexto

Es una operación cerrada?

Contraejemplo

$L_1 = \{ a^n b^n c^k \ / \ n, k \geq 0 \}$ Libre del contexto

$L_2 = \{ a^k b^n c^n \ / \ n, k \geq 0 \}$ Libre del contexto

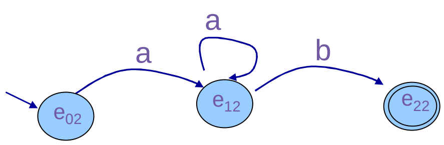
$L_1 \cap L_2 = \{ a^n b^n c^n \ / \ n \geq 0 \}$ No es Libre del contexto es Sensible al contexto

La intersección NO es una operación CERRADA para Lenguajes Libres del Contexto

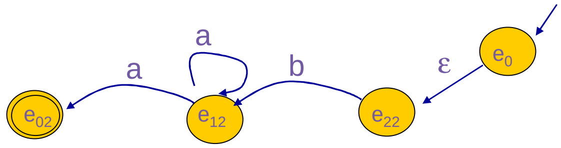
Ejemplo reversa de un Lenguaje Regular

$L_2 = \{ a^n b \ / \ n>0 \}$

$M_2=<\{e_{02},e_{12},e_{22}\},\{a,b\},d_2,e_{02},\{e_{22}\}>$



$L(M_2)=L_2$



Tener en cuenta que si hay varios estados finales hay que definir una transición vacía desde e_0 a cada e_f

$M=<\{e_{02},e_{12},e_{22},e_0\}, \{a, b\}, \delta, e_0, \{e_{02}\}>$

Como $L(M) = L(M_2)^R = L_2^R$ **L_2^R es un lenguaje regular**