UNIDAD 1

NÚMEROS REALES

Hay muchos métodos para introducir el sistema de números reales. Un método es el de empezar con los enteros 1, 2, 3,… y utilizarlos como base para construir un sistema más amplio que tenga las propiedades deseadas. La idea de este método es tomar los enteros positivos como base para formar un sistema más amplio, que es el de los números racionales positivos (cocientes de enteros positivos). Los números racionales positivos se utilizan a su vez para construir los irracionales positivos (números reales como $\sqrt{2}$ y π que no son racionales). El paso final es la introducción de los números reales negativos y el cero.

En 1889, el matemático italiano Giuseppe Peano dio cinco axiomas para los enteros positivos que se utilizaron como punto de partida para la construcción total.

El punto de vista que nosotros adoptaremos no es constructivo. Se consideran los números reales como conceptos primitivos que satisfacen a un cierto número de propiedades que se toman como axiomas.

Mientras no se diga lo contrario, las letras *a, b, c,…, x, y z* que aparecen en los axiomas representan números reales cualesquiera.

Los axiomas se agrupan en forma natural en tres grupos, que son, ***axiomas de cuerpo, axiomas de orden y axioma del extremo superior*** (llamado también ***axioma de continuidad o axioma de completitud***).

Axiomas de cuerpo

Junto con la existencia de los números reales se supone la existencia de dos operaciones llamadas *adición y sustracción*, tales que para cada par de números reales *x* e *y* se puede formar la *suma* de *x* e *y*, que es otro número real designado por $x + y$ y el *producto* de *x* por *y* designado por xy o $x \cdot y$. La suma $x + y$ y el producto $x \cdot y$ están unívocamente determinados por *x* e *y*. A los signos + y $\cdot$ no se les asigna otro significado especial que el precisado en los axiomas.

Axioma 1. **PROPIEDAD CONMUTATIVA**

$$x + y = y + x,\ \ xy = yx$$

Axioma 2. **PROPIEDAD ASOCIATIVA**

$$x + (y + z) = (x + y) + z,\ \ x(yz) = (xy)z$$

Axioma 3. **PROPIEDAD DISTRIBUTIVA**

$$x \cdot (y + z) = xy + xz$$

Axioma 4. **EXISTENCIA DE ELEMENTOS NEUTROS**

Existen dos números reales distintos, que se indican por 0 *y* 1 *tales que para cada número real x se tiene:* $0 + x = x + 0 = x$ *y* $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

Axioma 5. **EXISTENCIA NEGATIVOS**

Para cada número real x existe un número real y tal que $x + y = y + x = 0$

Axioma 6. **EXISTENCIA DEL RECÍPROCO.**

Para cada número real $x \neq 0$ *existe un número real y tal que* $xy = yx = 1$

De los axiomas anteriores se pueden deducir todas las leyes usuales del Álgebra elemental. A continuación las veremos como teoremas.

Teorema 1.1. **LEY DE SIMPLIFICACIÓN PARA LA SUMA.**

Si $a + b = a + c$*, entonces* $b = c$

Demostración:

Sea $a + b = a + c$. Por el axioma 5, se puede elegir *y* de manera que $y + a = 0$, con lo cual

$$y + (a + b) = y + (a + c),$$

y aplicando la propiedad asociativa $(y + a) + b = (y + a) + c$, o sea, $0 + b = 0 + c$. Por el axioma 4, se tiene que $0 + b = b$ y $0 + c = c$, o sea, $b = c$.

Observación: Este teorema demuestra que existe un único número real que tiene la propiedad del 0 en el axioma 4. En efecto, si 0 y $0'$ tuvieran ambos esta propiedad, entonces,

$$0 + 0' = 0 \quad \text{y} \quad 0 + 0 = 0,$$

por lo tanto, $0 + 0' = 0 + 0$ y por la ley de simplificación $0 = 0'$.

Teorema 1.2. **POSIBILIDAD DE LA SUSTRACCIÓN.**

Dados a y b existe uno y sólo un x tal que $a + x = b$*. Este x se designa por* $b - a$*. En particular* $0 - a$ *se escribe simplemente* $-a$ *y se denomina negativo de a.*

Demostración:

Dados *a* y *b* se elige *y* de manera que $a + y = 0$ y sea $x = y + b$. Entonces,

$$a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$$

Por lo tanto, hay por lo menos un *x* tal que $a + x = b$. Pero por el teorema 1.1, hay a lo sumo uno. Luego, hay uno y sólo un *x* en estas condiciones.

Teorema 1.3. $b - a = b + (-a)$

Demostración:

Sea $x = b - a$ y sea $y = b + (-a)$. Debemos probar que $x = y$.
Por definición de $b - a$, $x + a = b$ (*teorema* 1.2) y

$$y + a = [b + (-a)] + a = b + [(-a) + a] = b + 0 = b = x + a$$

Por teorema 1.1, $x = y$

Teorema 1.4. $-(-a)=a$

Demostración:

Se tiene que $a+(-a)=0$ por definición de $-a$. Esta igualdad dice que a es el opuesto de $-a$, luego $a=-(-a)$

Teorema 1.5. $a\cdot(b-c)=ab-ac$

Teorema 1.6. $0\cdot a=a\cdot 0=0$

Teorema 1.7. **LEY DE SIMPLIFICACIÓN PARA LA MULIPLICACIÓN**

Si $ab=ac$ *y* $a\neq 0$, *entonces* $b=c$

Observación:
En particular esto demuestra que el número 1 del axioma 4 es único.

Teorema 1.8. **POSIBILIDAD DE LA DIVISIÓN.**

Dados a y b con $a\neq 0$, *existe uno y sólo un x tal que* $ax=b$. *La x se designa con* $\frac{b}{a}$ *y se denomina cociente de b y a. En particular* $\frac{1}{a}$ *se escribe también* a^{-1} *y se designa recíproco de a.*

Demostración:

Supongamos que existe x y x' tal que $ax=b$ y $ax'=b$, luego $ax=ax'$ y por teorema 1.7 $x=x'$.

Teorema 1.9. *Si* $a\neq 0$, *entonces* $\frac{b}{a}=b\cdot a^{-1}$

Teorema 1.10. *Si* $a\neq 0$, *entonces* $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$

Teorema 1.11. *Si* $ab=0$ *entonces o* $a=0$ *o* $b=0$

Teorema 1.12. $(-a)b=-(ab)$ *y* $(-a)(-b)=ab$

Teorema 1.13. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ *si* $b\neq 0$ *y* $d\neq 0$

Teorema 1.14. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{bd}$ *si* $b\neq 0$ *y* $d\neq 0$

Teorema 1.15. $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{bc}$ *si* $b\neq 0$ *y* $d\neq 0$

Axiomas de orden

Entre los números reales se establece una ordenación según la cual es posible decidir si un número real es mayor o menor que otro. Las propiedades de orden se introducen con un conjunto de axiomas referentes al nuevo concepto primitivo de *positivo*, para definir después los conceptos *mayor que* y *menor que* a partir de *positivo*.

Suponemos que existe un cierto subconjunto $\Re^+ \subset \Re$ llamado conjunto de números *positivos* que satisfacen los tres axiomas de orden siguientes:

Axioma 7. *Si x e y pertenecen a* $\Re^+$*, entonces* $x + y \in \Re^+$ *y* $xy \in \Re^+$

Axioma 8. *Para todo real* $x \neq 0$*, o* $x \in \Re^+$ *o* $-x \in \Re^+$*, pero no ambos.*

Axioma 9. $0 \notin \Re^+$

Ahora se pueden definir los símbolos <, >, ≤, ≥ llamados respectivamente *menor que, mayor que, menor o igual que y mayor o igual que,* de la siguiente manera:

$x < y$ significa que $y - x$ es positivo.

$y > x$ significa que $x < y$

$x \leq y$. Significa que $x < y$ o $x = y$

$x \geq y$. Significa que $x > y$ o $x = y$

De los axiomas de orden se pueden deducir todas las reglas usuales de cálculo con desigualdades, las más importantes se dan a continuación como teoremas.

Teorema 1.16. **PROPIEDAD DE TRICOTOMÍA**

Para a y b números reales cualesquiera se verifica una y sólo una de las tres relaciones $a < b$, $a > b$, $a = b$.

Demostración:

Sea $x = b - a$. Si $x = 0$, entonces $b - a = a - b = 0$ y por el axioma 9 , no puede ser ni $a > b$ ni $b > a$.
Si $x \neq 0$, el axioma 8 afirma que o $x > 0$ o $x < 0$, pero no ambos; por consiguiente, o es $a < b$ o es $b < a$ pero no ambos. Por lo tanto se verifica una y sólo una de las tres relaciones.

Teorema 1.17. **PROPIEDAD TRANSITIVA.** *Si* $a < b$ *y* $b < c$*, es* $a < c$

Demostración:

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $b - a > 0$ y $c - b > 0$. Por el axioma 7 se tiene que $(b - a) + (c - b) > 0$ es decir $c - a > 0$ y por lo tanto $a < c$.

Teorema 1.18. *Si* $a < b$ *es* $a + c < b + c$

Demostración:

Sea $x = a + c$, $y = b + c$. Entonces $y - x = b - a$. Como $a < b$ resulta $b - a > 0$ de donde $y - x > 0$ lo que significa $x < y$, es decir, $a + c < b + c$.

Teorema 1.19. *Si* $a < b$ *y* $c > 0$ *es* $a \cdot c < b \cdot c$

Demostración:

Si $a < b$ entonces $b - a > 0$. Si $c > 0$ (por axioma 7) $(b - a) \cdot c > 0$. Luego $bc - ac > 0$ y esto significa que $bc > ac$.

Teorema 1.20. *Si* $a \neq 0$ *es* $a^2 > 0$

Demostración:

Si $a > 0$, por axioma 7, $a \cdot a > 0$. Si $a < 0$, entonces $-a > 0$ y por lo tanto, $(-a) \cdot (-a) > 0$. En ambos casos $a^2 > 0$

Teorema 1.21. $1 > 0$

Demostración:

Se aplica el teorema 1.20 para el caso $a = 1$

Teorema 1.22. *Si* $a < b$ *y* $c < 0$ *es* $a \cdot c > b \cdot c$

Teorema 1.23. *Si* $a < b$, *es* $-a > -b$

Teorema 1.24. *Si* $ab > 0$ *entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos.*

Teorema 1.25. *Si* $a < c$ *y* $b < d$, *entonces* $a + b < c + d$. **Teorema 1.19.** *Si* $a < b$ *y* $c > 0$ *es* $a \cdot c < b \cdot c$

Números enteros y racionales

Hay subconjuntos de $\Re$ que se distinguen porque tienen propiedades especiales que no gozan todos los números reales. Dos de estos subconjuntos son los *números enteros* y *los números racionales*.

Para introducir los enteros positivos se empieza con el número 1, cuya existencia queda asegurada por el axioma 4. El número $1+1$ se representa por 2, el $2+1$ por 3, y así sucesivamente. Los números $1, 2, 3, \ldots$ obtenidos de este modo por la adición repetida del 1 son todos positivos, y se llaman *enteros positivos.*

Esta descripción de los números enteros positivos no es del todo precisa aunque la significación intuitiva parezca clara. Para realizar un estudio cuidadoso de los números reales es necesario dar una definición más precisa de los enteros positivos. Una manera de hacerlo es introduciendo la noción de *conjunto inductivo*.

DEFINICIÓN DE CONJUNTO INDUCTIVO.

Un conjunto de números reales se denomina inductivo si tiene las siguientes propiedades:

a) El número 1 pertenece al conjunto

b) Para todo x en el conjunto, el número $x+1$ pertenece también al conjunto.

DEFINICIÓN DE ENTEROS POSITIVOS.

Un número real se llama entero positivo si pertenece a todo conjunto inductivo.

Sea *P* el conjunto de todos los enteros positivos. P es un conjunto inductivo ya que a) contiene al 1, y b) contiene a $x+1$ siempre que contenga *x*.

Los elementos de *P* pertenecen a todo conjunto inductivo, luego nos referiremos a *P* como el menor conjunto inducido. Esta propiedad del conjunto *P* constituye la base lógica para un tipo de razonamiento llamado *demostración por inducción*.

Los opuestos de los enteros positivos se llaman *enteros negativos*. Los enteros positivos junto con los enteros negativos y el 0 (cero), constituyen un conjunto Z que se llama *conjunto de enteros.*

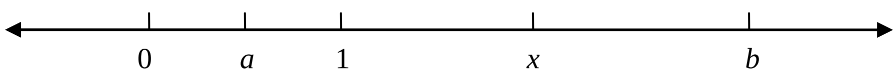
La suma, la diferencia o el producto de dos números enteros es un entero, pero el cociente de dos enteros no es necesariamente un entero.

Los cocientes de enteros a/b $(\text{siendo } b \neq 0)$ se llaman *números racionales.* El conjunto de los números racionales, representado por *Q*, contiene a Z, como subconjunto. *Q* satisface todos los axiomas de cuerpo y de orden. Por esta razón se dice que el conjunto de los números racionales es un *cuerpo ordenado*. Los números reales que no pertenecen a *Q* se llaman *irracionales*.

Interpretación geométrica de los números reales

Los números se representan por medio de puntos de una recta. Se elige un punto para representar el 0 y otro a la derecha del 0 para representar el 1. Esta elección determina la escala. Cada número real corresponde a uno y sólo un punto de la recta y, recíprocamente, cada punto de la recta a un número real y sólo uno. Por esta razón la recta se denomina con frecuencia *recta real* o *eje real,* y es costumbre utilizar las palabras *número real* y *punto* como sinónimos.

La relación de orden entre los números reales tiene una interpretación geométrica simple. Si $x<y$, el punto *x* está a la izquierda del punto *y*. Los números positivos están a la derecha del 0 y los negativos a la izquierda del 0. Si $a<b$, un punto *x* satisface las desigualdades $a<x<b$, sí y sólo sí *x* está entre *a* y *b*.



Los nueve axiomas expresados hasta el momento contienen todas las propiedades de los números reales. Hay otro axioma de fundamental importancia en el cálculo, necesario para establecer la existencia del número irracional

En álgebra elemental se presentan números irracionales cuando se trata de resolver ciertas ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo se trata de obtener un número real *x* tal que $x^2=2$. A partir de los nueve axiomas anteriores no es posible probar que exista un número *x* en el conjunto de los números reales que verifique tal ecuación, ya que estos nueve axiomas son satisfechos por los números racionales y no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. El axioma 10 permite introducir números irracionales en el conjunto de los números reales.

Antes de expresar el axioma 10, es conveniente introducir una terminología y notación especiales

Cota superior de un conjunto, elemento máximo, extremo superior.

Sea *A* un conjunto no vacío de números reales y supongamos que existe un número *b* tal que $x \leq b$ para todo *x* en *A*. Entonces se dice que *A* está *acotado superiormente* por *b*. El número *b* se denomina una *cota superior* para *A*. Decimos una cota superior debido a que todo número mayor que *b* también es cota superior.

Si una cota superior *b* pertenece también a *A*, entonces *b* se llama *elemento máximo* de *A*. Un conjunto puede tener a lo sumo un *b* que sea elemento *máximo*. Si existe, se escribe $b = máx\ A$.

Así que, $b = máx\ A$ si $b \in A \wedge x \leq b \ \forall x \in A$.

Un conjunto sin cota superior se dice *no acotado superiormente*.

Ejemplo 1: Sea $A = Z$. Es un conjunto no acotado superiormente. No tiene cotas superiores ni elemento máximo.

Ejemplo 2: Sea $A = \{x : x \in \Re \wedge 3 \leq x < 6\}$. Es un conjunto acotado superiormente pero no tiene elemento máximo.

Ejemplo 3: Sea $A = \{x : x \in \Re \wedge 3 \leq x \leq 6\}$. Es un conjunto acotado superiormente por todos los reales mayores o iguales que 6 y puesto que 6 es un elemento de A, su elemento máximo es el 6.

Definición de extremo superior o supremo

Un número b se denomina extremo superior de un conjunto no vacío A, si tiene las siguientes propiedades:

a) b es una cota superior de A.
b) Ningún número menor que b es cota superior de A.

Si *A* tiene máximo, éste es también extremo superior de *A*. Si *A* no tiene máximo puede extremo superior de *A*. Esto ocurre en el ejemplo 2, el número 6 es extremo superior pero no es máximo para el conjunto.

Teorema 1.26.

Dos números distintos no pueden ser extremos superiores para el mismo conjunto.

Demostración:

Sean *b* y *c* dos extremos superiores para un conjunto *A*. La propiedad b) implica que $b \leq c$ por ser *b* extremo superior y $c \leq b$ por ser *c* extremo superior. Luego $b = c$.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el axioma 10 del extremo superior para el sistema de números reales.

Axioma 10: AXIOMA DEL EXTREMO SUPERIOR

Todo conjunto no vacío A de números reales acotado superiormente posee extremo superior, esto es, existe un número real b tal que b = sup A.

Este axioma también es conocido como *axioma de completitud.*

Las definiciones de *cota inferior, acotado inferiormente y, mínimo,* se formulan en forma análoga.

Definición de extremo inferior o ínfimo

Un número c se denomina extremo inferior de un conjunto no vacío A, si tiene las siguientes propiedades:

a) c es una cota inferior de A.
b) Ningún número mayor que c es cota inferior de A.

Teorema 1.27.

Todo conjunto no vacío A acotado inferiormente posee extremo inferior, esto es, existe un número real c, tal que c = inf A

Teorema 1.28.

El conjunto P de los números positivos no está acotado superiormente.

Demostración:
Supongamos que *P* está acotado superiormente. Puesto que *P* no es vacío, por el axioma 10, *P* tiene extremo superior. Sea *b* dicho extremo superior. El número *b-1*, siendo menor que *b*, no puede ser cota superior de *P*. Luego existe un número positivo *n* tal que $n > b - 1$. Para este *n* tenemos $n + 1 > b$. Puesto que *n+1* pertenece a *P*, esto contradice que b sea cota superior para *P*.

Teorema 1.29.

Para cada real x existe un entero positivo n tal que $n > x$

Demostración:

Si no fuera así, *x* sería cota superior de *P*, en contradicción con el teorema 1.28.

Teorema 1.30. Propiedad arquimediana del conjunto de los números reales

Si $x > 0$ ***e y*** *un número real arbitrario, existe un entero positivo n tal que* $n \cdot x > y$,

Demostración:
Aplicar el teorema 1.29 cambiando *x* por y/x.

A partir de la propiedad arquimediana , podemos demostrar el siguiente teorema.

Propiedades fundamentales del extremo superior

Teorema 1.31

Si tres números reales a, x, e y satisfacen las desigualdades

$$a \le x \le a + \frac{y}{n}$$

para todo entero $n \ge 1$*, entonces* $x = a$.

Demostración:

Si $x > a$*, entonces x-a>0. El teorema 1.30 nos dice que existe un entero positivo n que satisface* $n \cdot (x-a) > y$*, lo que contradice la hipótesis.*

Teorema 1.32

Sea h. un número positivo dado y A un conjunto de números reales.

a) Si A tiene extremo superior, para un cierto x de A se tiene

$$x > \sup A - h$$

b) Si A tiene extremo inferior, para un cierto x de A se tiene

$$x < \inf\ A - h$$

La propiedad a) establece que todo conjunto de números con extremo superior contiene números tan próximos como se quiera a dicho extremo y del mismo modo la b) expresa que todo conjunto de números con extremo superior contiene números tan próximos como se quiera a dicho extremo.

Demostración:

a) Si es $x \le \sup A - h$ para todo *x* de *A*, entonces $\sup A - h$ sería una cota superior de A menor que su extremo superior. Por consiguiente debe ser $x > \sup A - h$ por lo menos para un *x* de *A*.
En forma similar se demuestra b).

Teorema 1.33. PROPIEDAD ADITIVA

Dados dos subconjuntos no vacíos A y B de $\Re$*, sea C el conjunto*

$$C = \{a + b \ / \ a \in A,\ b \in B\}$$

a) Si A y B poseen extremo superior, entonces C tiene extremo superior , y

$$\sup C = \sup A + \sup B$$

b) Si A y B poseen extremo inferior, entonces C tiene extremo inferior , e

$$\inf\ C = \inf\ A + \inf\ B$$

Demostración:

Supongamos que A y B tienen extremo superior. Si $c \in C$, entonces $c = a + b$, donde $a \in A$ y $b \in B$. Por consiguiente $c = a + b \le \sup A + \sup B$. Por lo tanto $\sup A + \sup B$ es una cota superior de C. Esto demuestra que C tiene extremo superior.

Sea ahora n un entero positivo cualesquiera. Por teorema 1.32 (con $h = 1/n$) existen un a en A y un b en B tales que

$$a > \sup A - \frac{1}{n}, \quad b > \sup B - \frac{1}{n}$$

Sumando estas desigualdades se obtiene

$$a + b > \sup A + \sup B - \frac{2}{n} \quad \text{o} \quad \sup A + \sup B < a + b + \frac{2}{n} \leq \sup C + \frac{2}{n}$$

puesto que $a + b \leq \sup C$. Hemos demostrado que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B < \sup C + \frac{2}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$. Por el teorema 1.31 debe ser $\sup C = \sup A + \sup B$.

La demostración de la parte b) es similar.

Teorema 1.34.

Dados dos conjuntos no vacío A y B de $\Re$ *tales que* $a \leq b$ *para todo a de A y todo b de B. Entonces A tiene extremo superior y B tiene extremo inferior, y se verifica*

$$\sup A \leq \inf B$$

Demostración:

Cada b de B es cota superior para A. Por consiguiente A tiene extremo superior que satisface la desigualdad $\sup A \leq b$ para todo b de B.. Luego $\sup A$ es una cota inferior para B, con lo cual B tiene extremo inferior que no puede ser menor que $\sup A$, luego $\sup A \leq \inf B$.

Representación de los números reales por medio de decimales

Un número real de la forma

(1) $$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

donde a_0 es un entero no negativo y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros que satisfacen $0 \leq a_i \leq 9$, se escribe corrientemente en la forma más breve $r = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n$.
Se dice que ésta es la representación decimal finita del número r.

Números reales de esta clase son necesariamente racionales y todos ellos son de la forma $r = \dfrac{a}{10^n}$ donde a es un entero. Sin embargo, no todos los números racionales pueden expresarse por medio de una representación decimal finita. Por ejemplo, si $\frac{1}{3}$ se pudiera representar así, se tendría $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$ o $3a = 10^n$ para algún entero a. Pero esto es imposible, puesto que 3 no es divisor de ninguna potencia de 10.

No obstante, cualquier número real $x>0$ puede aproximarse con un error tan pequeño como se desee por medio de una suma de la forma (1) si se toma n suficientemente grande. Esto se puede ver utilizando el siguiente argumento geométrico: si x no es entero, x está comprendido entre dos enteros consecutivos, es decir, $a_0 < x < a_0 + 1$.

El segmento que une a_0 y a_0+1 puede dividirse en 10 partes iguales. Si x no coincide con uno de estos puntos de subdivisión, x debe estar comprendido entre dos de ellos. Esto da lugar a las desigualdades

$$a_0 + \frac{a_1}{10} < x < a_0 + \frac{a_1+1}{10}$$

donde a_1 es un entero $\left(0 \le a_1 \le 9\right)$. Se divide ahora, el segmento que une $a_0 + \frac{a_1}{10}$ y $a_0 + \frac{a_1+1}{10}$ en diez partes iguales (cada una de longitud 10^{-2}) y se continúa el proceso. Si luego de un número finito de subdivisiones, uno de los puntos coincide con x, x es un número de la forma (1). Si no es así, el proceso se continúa indefinidamente y se engendra un conjunto de infinitos enteros $a_1, a_2, a_3, \ldots$. En este caso se dice que x tiene la representación decimal infinita $x = a_0, a_1\, a_2\ \ a_3, \ldots$.
Después de n subdivisiones, x satisface las desigualdades

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} < x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n+1}{10^n}$$

las cuales dan dos aproximaciones de x, una por exceso y otra por defecto, por medio de decimales finitos que difieren en 10^{-n}. Una buena aproximación se logra tomando n suficientemente grande.

Si $x = \frac{1}{3}$ se puede ver fácilmente que $a_0 = 0$ y $a_n = 3 \quad \forall n \ge 1$, y por lo tanto la representación decimal es $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$.

Cada número irracional tiene una representación decimal infinita.. Por ejemplo, si $x = \sqrt{2}$ se pueden calcular por tanteo tantos dígitos como se deseen de se aproximación decimal. Podemos decir que $\sqrt{2}$ está comprendido entre 1,4 y 1,5 ya que

$$(1{,}4)^2 < 2 < (1{,}5)^2$$

Análogamente, elevando al cuadrado y comparando con 2 se obtienen las siguientes aproximaciones sucesivas:

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42, \qquad 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415, \qquad 1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143.$$

El proceso anterior engendra una sucesión de intervalos de longitud 10^{-1}, 10^{-2}, $10^{-3}, \ldots$, cada uno contenido en el anterior y conteniendo cada uno el punto x. Esto es un ejemplo del llamado *encaje de intervalos*, concepto que se utiliza algunas veces como base para construir los números irracionales a partir de los racionales.
Veremos ahora cómo se pueden definir análiticamente expresiones decimales, con auxilio del axioma del extremo superior.

Si x es un número real positivo dado, ea a_0 el mayor entero menor o igual que x. Tomando a_0, sea a_1, el mayor entero tal que:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \le x$$

En general, determinados $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$, sea a_n el mayor entero tal que

(2) $$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \le x$$

Sea A el conjunto de todos los números:

(3) $$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

obtenidos de esta forma para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Puesto que A es no vacío y acotado superiormente, tiene un extremo superior y éste coincide con x. Los enteros $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ así obtenidos se pueden utilizar para obtener una expresión decimal de x poniendo

$$x = a_0, a_1\, a_2\, a_3, \ldots$$

donde el dígito a_n que ocupa el lugar n es el mayor entero que satisface (2).

Valor absoluto y desigualdad triangular

Definición:

Si x es un número real, el valor absoluto de s es un número real no negativo que se designa por $|x|$ y se define:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \ge 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Si los números reales están representados geométricamente en el eje real, el número $|x|$ se denomina distancia de x a 0. Si $a > 0$ y si un punto x está situado entre $-a$ y a entonces x está más próximo a 0 que a. La expresión analítica de este hecho está dada por el siguiente teorema:

Teorema 1.35.

Sea $a \ge 0$, es $|x| \le a$ sí y sólo sí $-a \le x \le a$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supuesto $|x| \le a$ se tiene también $-a \le -|x|$. Pero $x = |x|$ o $x = -|x|$ y, por lo tanto $-a \le -|x| \le x \le |x| \le a$.

$\Leftarrow$) Supuesto $-a \le x \le a$. Si $x \ge 0$ se tiene $|x| = x \le a$. Si $x < 0$, entonces $|x| = -x \le a$. En ambos casos se tiene $|x| \le a$.

Una consecuencia de este teorema, es una importante desigualdad que expresa que el valor absoluto de dos números reales no puede exceder a la suma de sus valores absolutos.

Teorema 1.36. DESIGUALDAD TRIANGULAR

Para x e y números reales cualesquiera se tiene $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Demostración:

Puesto que $x=|x|$ o $x=-|x|$, se tiene $-|x| \leq x \leq |x|$. Análogamente $-|y| \leq y \leq |y|$. Sumando ambas desigualdades se tiene

$$-|x|-|y| \leq x+y \leq |x|+|y|$$

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$$

Por el teorema 1.35 $|x+y| \leq |x|+|y|$