UNIDAD 6
INTEGRALES INDEFINIDAS

Introducción:

La integral es un concepto fundamental de lo que se conoce como cálculo infinitesimal, el cual alcanzó su auge y desarrollo durante el siglo XVII.

La utilidad del cálculo integral es variada, pero ésta se presentará con toda su fuerza en la próxima unidad al tomar contacto con la integral definida.

El objetivo de este tema y del siguiente es mostrar las técnicas más comunes para el cálculo de integrales y una vez conocidas estas técnicas, explotar su uso en el cálculo de áreas.

Función primitiva de una función:

Conocemos muchos pares de operaciones inversas: adición y sustracción, multiplicación y división, potenciación y radicación, etc..

En este curso hemos estudiado la derivación; su inversa es la antiderivación, entendiendo por tal la operación que nos permite hallar la función primitiva de una función.

Definición 6.1:

Dada una función cualquiera $f(x)$ definida en un intervalo $[a,b]$, se llama función primitiva de $f(x)$ a otra función $F(x)$ cuya derivada sea $f(x)$ en todos los puntos de dicho intervalo.

Es decir:

$$F'(x) = f(x) \text{ para todo } x \text{ de } [a,b]$$

De acuerdo con la definición tenemos que:

- La función $sen\, x$ es una primitiva de $cos\, x$ puesto que $(sen\, x)' = cos\, x$.
- La función $ln|x|$ es una primitiva de $\frac{1}{x}$ ya que $(ln|x|)' = \frac{1}{x}$.
- La función $\frac{x^4}{4}$ es una primitiva de x^3 pues $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3$.

En los ejemplos anteriores nos hemos referido a “una primitiva” y no a “la primitiva”. Para aclarar este punto veamos la siguiente propiedad.

Propiedad 1:

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y C una constante cualquiera, la función $F(x)+C$ es otra primitiva de $f(x)$.

Demostración:

Recordemos que la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las mismas y que la derivada de una constante es cero.

Así:

$$\left(F(x)+C\right)' = F'(x)+C' = f(x)+0 = f(x)$$

Propiedad 2:

Si una función tiene una primitiva, entonces tiene infinitas primitivas.

Demostración:

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, para cualquier constante *C*, $F(x)+C$ es otra primitiva (por propiedad 1). Así, hay tantas primitivas como valores se le quieran dar a *C*.

Propiedad 3:

Dos primitivas de una misma función se diferencian en una constante. Es decir, si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de la función $f(x)$, entonces $F(x)-G(x)=C=cte$.

Demostración:

Recordemos que si una función $f(x)$ definida en un intervalo cualquiera tiene derivada cero en todos los puntos, entonces la función $f(x)$ es constante.
Es decir, si $f'(x)=0$ entonces $f(x)=C$.

Supongamos ahora que $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de la función $f(x)$. Por lo tanto:

$$F'(x)=f(x) \quad \text{y} \quad G'(x)=f(x)$$

Restando miembro a miembro estas igualdades:

$$F'(x)-G'(x)=0 \quad \rightarrow \left(F(x)-G(x)\right)'=0 \quad \rightarrow \quad F(x)-G(x)=C$$

Integral indefinida de una función

Definición:

*S*e llama integral indefinida de una función $f(x)$, al conjunto de todas las primitivas de la función $f(x)$, y se simboliza $\int f(x)\,dx$. (Se lee: “integral de efe de equis diferencial de *x*”)

De acuerdo con la definición:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \quad \text{si} \quad F'(x)=f(x)$$

.
En este caso, $f(x)$ se llama *integrando* o *función bajo el signo integral*; $f(x)\,dx$, *elemento de integración* o *expresión bajo el signo integral* y el símbolo $\int$, *signo de integración.*

El significado geométrico de la integral indefinida es un conjunto (familia) de curvas, cada una de las cuales se obtiene mediante el desplazamiento de una curva paralelamente a sí misma, hacia arriba o hacia abajo.

Debemos aclarar que no toda función $f(x)$ tiene función primitiva, pero señalemos que, toda función $f(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$, tiene una función primitiva y por lo tanto una integral indefinida.

Ejemplo 1:

Calcular $\int cos\, x\, dx$

Solución:

Puesto que una primitiva de $cos\, x$ es $sen\, x$,

$$\int cos\, x\, dx = sen\, x + C$$

En la gráfica siguiente se ha representado a la función $\cos x$ y la integral indefinida para distintos valores de la constante.

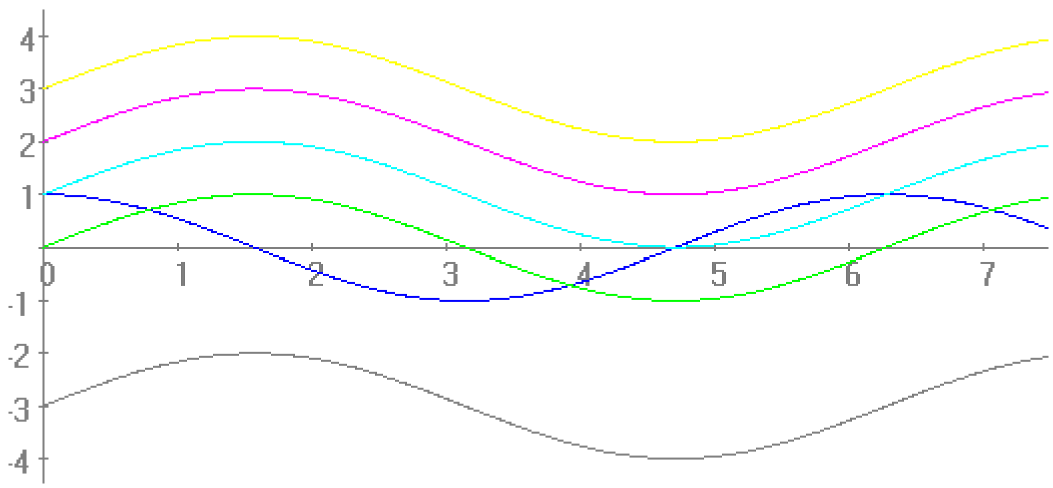

Fig. 1

Ejemplo 2:

Hallar $\int \frac{1}{x}\, dx$

Solución:

Una primitiva de $\frac{1}{x}$ es $ln|\,x\,|$. Por lo tanto,

$$\int \frac{1}{x}\, dx = ln|\,x\,| + C$$

Las gráficas correspondientes son:

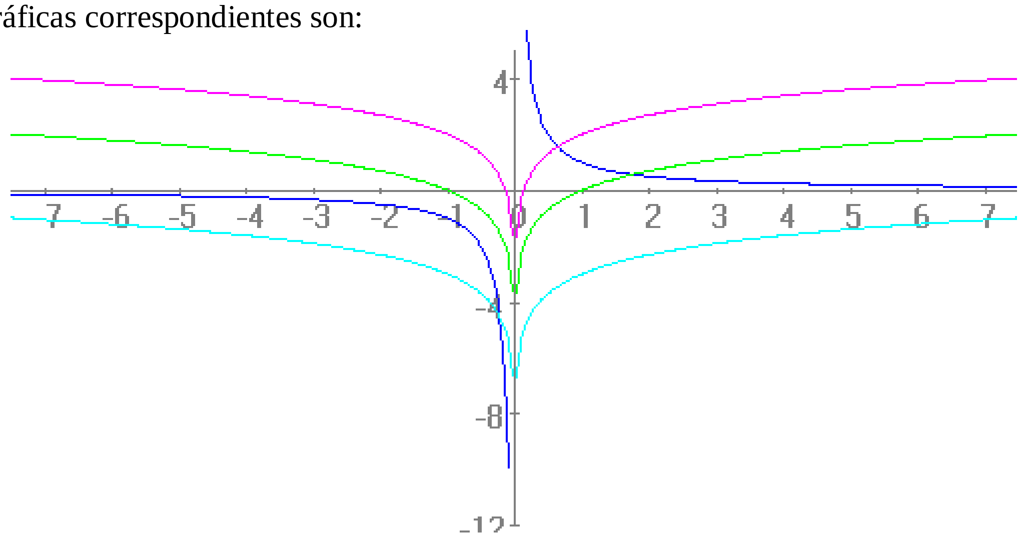

Fig.

Ejemplo 3:

Encontrar $\int x^3\, dx$

Solución:

Por ser $\dfrac{x^4}{4}$ una primitiva de x^3,

$$\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + C$$

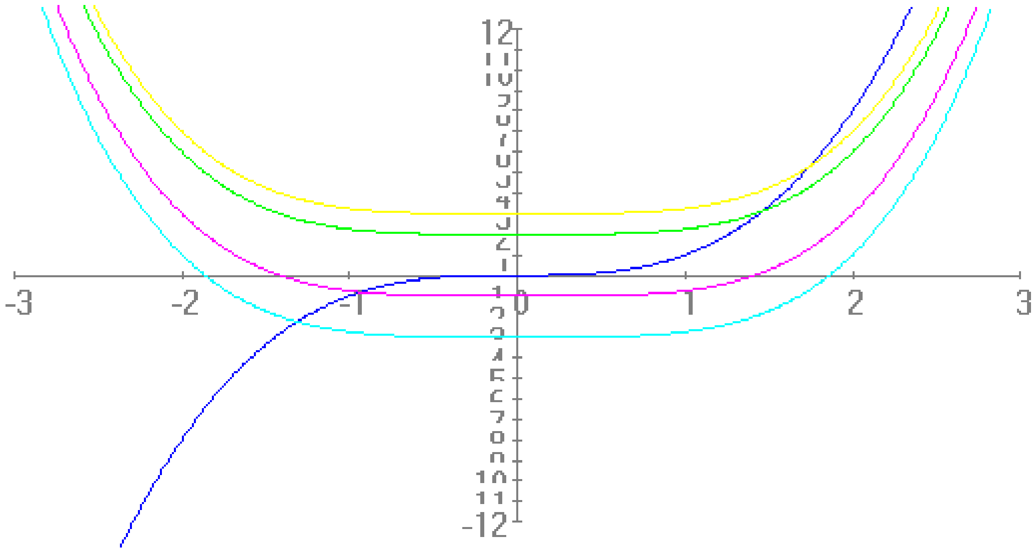

Fig.

Integrales inmediatas:

De la derivación de funciones elementales se deducen sus correspondientes integrales llamadas inmediatas. Te sugerimos que aprendas estos resultados para lograr agilidad en el cálculo de integrales menos sencillas.

1.- $\int dx = x + C$

2.- $\int x^m \, dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad \text{si} \quad m \neq -1$

3.- $\int \dfrac{1}{x} \, dx = ln\left| x \right| + C$

4.- $\int e^x \, dx = e^x + C$

5.- $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{ln\, a} + C, \text{ siendo } \; a > 0 \text{ y } a \neq 1$

6.- $\int sen\, x \, dx = -cos\, x + C$

7.- $\int cos\, x \, dx = sen\, x + C$

8.- $\int tg\; x \, dx = -\int \dfrac{-sen\, x}{cos\, x} \, dx = -ln\left| \, cos x \right| + C$

9.- $\int cot\, g\, x \, dx = \int \dfrac{cos\, x}{sen\, x} \, dx = ln\left| \, sen x \right| + C$

10.- $\int \dfrac{1}{cos^2\, x} \, dx = \int sec^2 x \, dx = tg\; x + C$

11.- $\int \dfrac{1}{sen^2\, x} \, dx = \int cos\, ec^2 x \, dx = -cot\; gx + C$

12.- $\int sec\, x \cdot tg\; x \, dx = sec\, x + C$

13.- $\int cos\, ecx \cdot cot\; gx \, dx = -cos\, ecx + C$

14.- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,sen\,x + C = -arc\cos x + C$

15.- $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\,x + C = -arc\cot g\,x + C$

16.- $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2-1}} = arc\sec x + C = -arc\cos ec\,x + C$

17.- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = ln\left| x + \sqrt{x^2+1} \right| + C$

18.- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = ln\left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + C$

19.- $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\,ln\left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$

20.- $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\,ln\left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$