Semántica de Primer Orden

Para interpretar una fórmula de la lógica de predicados de primer orden:

✓ determinar qué objetos representan los términos (**Dominio)**

✓ definir las **funciones** y qué propiedades/relaciones representan los **predicados**

Determinar el **valor de verdad** de la fórmula

Semántica de Primer Orden

Modelos o interpretaciones:

Sea $L = \langle R, F, C \rangle$ un lenguaje de primer orden. Un modelo M en L es una estructura $M = \langle D, R^D, F^D, C^D \rangle$ donde:

✓ **D dominio** o universo de interpretación (conjunto no vacío del cual las variables toman valores)

✓ $\mathbf{R^D}$ conjunto de relaciones n-arias sobre D tal que para cada símbolo $P \in R$ existe una relación $P^D \subseteq D^n$ asignada a P

✓ $\mathbf{F^D}$ conjunto de funciones n-arias sobre D tal que para cada símbolo $f \in F$ existe una función $f^D: D^n \rightarrow D$ asignada a f

✓ $\mathbf{C^D}$ conjunto de elementos distinguidos de D tal que para cada constante $c \in C$ existe un elemento $c^D \in D$ asignado a c

Semántica de Primer Orden

Funciones sobre un Dominio:

Sea D un conjunto no vacío.

• Una función f: $D^n \rightarrow D$ hace corresponder a cada n-upla de su dominio D^n un elemento de D.

Ejemplo D = {a, b, c}

Función unaria f sobre D

$f: D \rightarrow D$

$a \rightarrow b$

$b \rightarrow c$

$c \rightarrow a$

Función binaria g sobre D

$g: D \times D \rightarrow D$

$(a, a) \rightarrow a$	$(b, a) \rightarrow b$	$(c, a) \rightarrow c$
$(a, b) \rightarrow b$	$(b, b) \rightarrow b$	$(c, b) \rightarrow b$
$(a, c) \rightarrow c$	$(b, c) \rightarrow b$	$(c, c) \rightarrow a$

Semántica de Primer Orden

Relaciones sobre un Dominio:

Sea D un conjunto no vacío.

El conjunto D^n es el conjunto de todas las n-uplas de D. Una relación n-aria R sobre D es un subconjunto de D^n

Ejemplo D = {a, b, c}

D^2 = {(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)}

D^3 = {(a, a, a), (a, a, b), (a, a, c), ..., (c, c, a), (c, c, b), (c, c, c)}

- **Relación unaria es un subconjunto de D. Por ejemplo:**

$R_1 = \varnothing$ $R_2 = D$ $R_3 = \{ b \}$ $R_4 = \{a, b\}$

- **Relación binaria es un subconjunto de D^2. Por ejemplo:**

$R_1 = \varnothing$ $R_2 = D^2$ $R_3 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b)\}$

- **Relación ternaria es un subconjunto de D^3. Por ejemplo:**

$R_1 = \varnothing$ $R_2 = D^3$ $R_3 = \{(a, a, a), (a, b, b), (a, c, b) \}$

Semántica de Primer Orden

Valor de verdad de una fórmula en un modelo:

Sea A una sentencia y M un modelo, M = <D, R^D, F^D, C^D>. El valor de verdad de A en el modelo M, v(A), se define reemplazando primero cada constante a_j de A por el elemento $d_j \in D$ asignado, y luego por inducción sobre la estructura de A:

1) $A = P(a_1, ..., a_n)$ luego $v(A) = T$ sí y sólo sí $(d_1, ..., d_n) \in P^D$ $P \in R$

2) $v(\neg A) = T$ sí y sólo sí $v(A) = F$

3) $A = A_1 \vee A_2$ $v(A) = T$ sí y sólo sí $v(A_1) = T$ o $v(A_2) = T$
$A = A_1 \wedge A_2$ $v(A) = T$ sí y sólo sí $v(A_1) = T$ y $v(A_2) = T$
$A = A_1 \rightarrow A_2$ $v(A) = T$ sí y sólo sí $v(\neg A_1) = T$ o $v(A_2) = T$

4) $A = \forall x\, A_1$ $v(A) = T$ sí y sólo sí para todo $d \in D$, $v(A_1[d]) = T$

5) $A = \exists x\, A_1$ $v(A) = T$ sí y sólo sí para algún $d \in D$, $v(A_1[d]) = T$

Semántica de Primer Orden

Definición

Dada una fórmula A y un modelo M, si v(A) = T en M diremos que A es válida en el modelo M, o que M es un modelo para A.

En símbolos **M $\models$ A**

Ejemplo: Sea L = <{P}, {f, g}, {a, b}> P binario, f y g binarias, se define

M = < Z, {P^D}, {f^D, g^D}, {a^D, b^D} > Z = conj. de números enteros

$P^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2 : x \leq y\}$

$f^D(x, y) = x * y$ $g^D(x, y) = x + y$ $a^D = 0$ $b^D = 2$

1) M $\models$ P(a, b) **2) M $\models$ P(g(b,b), a)** **3) M $\models$ P(a, b) $\vee$ P(b, a)**

4) M $\models$ $\forall$x (P(x, a) $\rightarrow$ P(a, f(x, x))) **5) M $\models$ $\exists$x$\forall$yP(x, y)**

1), 3) y 4) SON FORMULAS VALIDAS EN M **2) y 5) SON FÓRMULAS FALSAS EN M**

Semántica de Primer Orden

Ejemplos:

Sea $M = \langle D, \{P^D, Q^D, R^D\}, \{\ \}, \{c^D\} \rangle$ P y Q unarios y R binario

$D = \{1, 2, 3, 4\}$ $c^D = 2$

$P^D = \{1, 2\}$ $Q^D = \{3, 4\}$ $R^D = \{(3, 2), (2, 3), (2, 4)\}$

✓ $A = \forall x(P(x) \vee R(c, x))$

✓ $A = \forall x(P(x) \vee Q(x))$

✓ $A = \forall x \exists y(R(x, y) \vee P(x))$

✓ $A = \exists y \forall x R(y, x)$

Semántica de Primer Orden

Ejemplo

$M = \langle Z, \{P^D\}, \{f^D, g^D\}, \{a^D, b^D\} \rangle$ Z = conj. de números enteros

$P^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2 : x \leq y\}$

$f^D(x, y) = x * y$ $g^D(x, y) = x + y$ $a^D = 0$ $b^D = 2$

$A(x) = P(g(x, b), b)$ x variable libre

En M $A(x) = x + 2 \leq 2$ x variable libre

Es verdadera en M cuando a x se asignan valores negativos ó 0.

⇓

Valuación: asigna elementos del dominio a variable libres

Semántica de Primer Orden

Sea L = <R, F, C> y M = < D, R^D, F^D, C^D > un modelo

Una valuación o asignación v es una función v: Var $\rightarrow$ D

v = (a_1, ..., a_n, ...) donde cada $a_i \in$ D y $v(p_i) = a_i$ para cada $p_i \in$ Var

$\vec{a}$ = (a_1, ..., a_n, ...) notación vectorial

El valor de un término t(x_1, ..., x_n) bajo una valuación $\vec{a}$ = (a_1, ..., a_n, ...) $t^D[\vec{a}]$ es un elemento de D que se define como:

1) Si **$t \in$ Var**, **$t_i = x_i$** entonces **$x_i^D[\vec{a}] = a_i$**
2) Si **$t \in$ C, t = c**, y c^D es la interpretación de c en D, entonces **$t^D[\vec{a}] = c^D$**
3) Si **$t = f(t_1, t_2, ..., t_n)$ $t_1, t_2, ..., t_n \in$ Ter(L)** y f símbolo de función n-ario,

   $t^D[\vec{a}] = f^D(t_1, t_2, ..., t_n)[\vec{a}] = f^D(t_1^D[\vec{a}], t_2^D[\vec{a}], ..., t_n^D[\vec{a}])$

   $f^D: D^n \rightarrow D$ función n-aria que interpreta a f

Semántica de Primer Orden

Sea M = < D, R^D, F^D, C^D > un modelo y A(x_1, ..., x_n) una fórmula.
Sea $\vec{a}$ una valuación. A(x_1, ..., x_n) es válida bajo $\vec{a}$, o $\vec{a}$ satisface a A(x_1, ..., x_n), en símbolos $M \models A(x_1, ..., x_n)\ [\vec{a}]$ si se cumple:

1) Si A $\in$ At(L), A = P(t_1, t_2, ..., t_n) $t_i(x_1, x_2, ..., x_n) \in$ Ter(L) y P es un símbolo de predicado n-ario, P $\in$ R

   $M \models P(t_1, ..., t_n)[\vec{a}] \leftrightarrow (t_1^D[\vec{a}], t_2^D[\vec{a}], ..., t_n^D[\vec{a}]) \in P^D$

2) Si A = $\neg$B $M \models A\ [\vec{a}] \leftrightarrow M \not\models B\ [\vec{a}] \leftrightarrow M \models \neg B\ [\vec{a}]$

3) Si A = B $\wedge$ C $M \models (B \wedge C)\ [\vec{a}] \leftrightarrow M \models B\ [\vec{a}]$ y $M \models C\ [\vec{a}]$

4) Si A = B $\vee$ C $M \models (B \vee C)\ [\vec{a}] \leftrightarrow M \models B\ [\vec{a}]$ o $M \models C\ [\vec{a}]$

5) Si A = B $\rightarrow$ C $M \models (B \rightarrow C)\ [\vec{a}] \leftrightarrow M \models \neg B\ [\vec{a}]$ o $M \models C\ [\vec{a}]$

Semántica de Primer Orden

6) Si $A(x_1, ..., x_n) = \forall x B(x, x_1, ..., x_n)$ entonces

$M \models \forall x B(x, x_1, ..., x_n)\, [\vec{a}] \leftrightarrow$ para todo $d \in D$ $M \models B(x, x_1, ..., x_n)\, [d, \vec{a}]$

7) Si $A(x_1, ..., x_n) = \exists x B(x, x_1, ..., x_n)$ entonces

$M \models \exists x B(x, x_1, ..., x_n)\, [\vec{a}] \leftrightarrow$ existe $d \in D$ $M \models B(x, x_1, ..., x_n)\, [d, \vec{a}]$

Definiciones: Sea M un modelo y A una fórmula:

✓ A es **válida bajo una valuación en M** sí y sólo sí existe al menos una valuación $\vec{a}$ tal que $M \models A\, [\vec{a}]$

✓ A es **válida en M** sí y sólo sí A es válida bajo toda valuación en M

$M \models A \leftrightarrow M \models A\, [\vec{a}]$ para toda valuación $\vec{a}$

✓ A es **falsa en M** sí y sólo sí A es falsa bajo toda valuación en M

$M \models \neg A \leftrightarrow M \not\models A\, [\vec{a}]$ para toda valuación $\vec{a}$

Semántica de Primer Orden

Ejemplos:

Sea $M = < D, \{P^D, Q^D, R^D\}, \{\ \}, \{c^D\}>$ P y Q unarios y R binario

$D = \{1, 2, 3, 4\}$ $c^D = 2$

$P^D = \{1, 2\}$ $Q^D = \{3, 4\}$ $R^D = \{(3, 2), (2, 3), (2, 4)\}$

✓ $A(x) = \exists y R(x, y)$

✓ $A(x) = P(x) \vee \exists y R(y, x)$

✓ $A(x) = P(x) \wedge Q(x)$

Semántica de Primer Orden

Definiciones:

Sea A una fórmula:

✓ A es **satisfacible** sí y sólo sí A es **válida en al menos un modelo**

A es **satisfacible** sí y sólo sí **existe M Modelo** tal que $\mathbf{M \models A}$

✓ A es **válida** o **lógicamente válida** sí y sólo sí **A es válida en todo modelo**

A es **válida** sí y sólo sí **para todo M Modelo** $\mathbf{M \models A}$

✓ A es **contradictoria** sí y sólo sí A es **falsa en todo modelo**

Semántica de Primer Orden

Ejemplo:

Sea $M = \langle D, \{A^D, B^D, C^D\}, \{f^D, g^D\}, \{c^D, d^D\}\rangle$

$D = \{x \in \{a, b\}^*$ y x empieza con a $\}$

$A^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2$: x es prefijo de y$\}$ (es decir $y = x.z$ para $z \in \{a, b\}^*$)

$B^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2$: x es subcadena de y$\}$ $C^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2: x = y\}$

$c^D = a$ $d^D = aa$

$f^D(x, y) = x.y$ (x concatenada con y) $g^D(x) = a$

✓ $\exists x \forall y\, (A(x, y) \wedge \neg C(x, d))$

✓ $\forall x \forall y\, (C(x, f(c, y)) \to A(f(c, c), x))$

✓ $\forall x\, (B(y, x) \to A(y, x))$

✓ $\forall x \forall y \forall z\, (A(x, y) \to A(f(x, z), f(y, z)))$

Formalización de Lenguaje Natural

Formalizar frase en lenguaje natural → encontrar expresión en lenguaje formal que la represente fielmente

↓ No hay procedimientos generales para la formalización

↑Existen algunas estrategias o heurísticas

- Si la estructura sintáctica de la frase es compleja, se puede **reescribir** con una estructura más sencilla que mantenga el mismo significado

- Definir el **dominio** al cual pertenecen los elementos a utilizar

- Determinar:
  - **Constantes**: elementos concretos del dominio
  - **Variables**: elementos genéricos
  - **Funciones**: representan cómo un elemento queda determinado por otros
  - **Predicados unarios**: representan propiedades de un elem.
  - **Predicados de aridad > 1**: representan relaciones entre elem

- Identificar conectivas linguísticas y cuantificadores y sustituir por **conectivos** y **cuantificadores** de la lógica de primer orden

Formalización de Lenguaje Natural

Patrones más habituales:

• **Universal afirmativo** $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$

Todo A es B - Sólo los B son A – No hay ningún A que no sea B

• **Universal negativo** $\forall x(A(x) \rightarrow \neg B(x))$

Ningún A es B

• **Existencial afirmativo** $\exists x(A(x) \wedge B(x))$

Algún A es B – Alguien es a la vez A y B

• **Existencial negativo** $\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$

Algún A no es B – No todos los A son B

Formalización de Lenguaje Natural

Relación entre cuantificadores:

• **Universal/Existencial**

$\neg\forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$

"No todos son A" equivale a decir "Algunos no son A"

• **Existencial/Universal**

$\neg\exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$

"No hay A" equivale a decir "Todos son no A"

Semántica de Primer Orden

Equivalencia Lógica:

Sean A y B fórmulas con las mismas variables libres. $A \equiv B$ sí y sólo sí para todo modelo M, $M \models A \leftrightarrow M \models B$.

Es decir, A y B son válidas en los mismos modelos.

Para cualquier fórmula A se verifica:

- ✓ $\neg\forall x A \equiv \exists x \neg A$
- ✓ $\neg\exists x A \equiv \forall x \neg A$
- ✓ $\forall x A \equiv \neg\exists x \neg A$
- ✓ $\exists x A \equiv \neg\forall x \neg A$

Semántica de Primer Orden

Sentencias satisfacibles:

Sea Γ un conjunto de sentencias en un lenguaje L.

Γ es satisfacible si existe un modelo M tal que M $\models$ A para toda sentencia A $\in \Gamma$.

En caso contrario Γ es insatisfacible.

Ejemplo:

1) $\Gamma = \{ \exists x(P(x) \wedge Q(x)), \forall x(P(x) \rightarrow R(x, x)), \forall x(Q(x) \rightarrow \neg R(x, x))\}$

Es un conjunto de sentencias insatisfacible

2) $\Gamma = \{\forall x \exists y R(x, y), \forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x))\}$

Es un conjunto de sentencias satisfacible (es posible definir al menos un modelo en el que toda sentencia del conjunto es válida)

Semántica de Primer Orden

Ejemplo:

1) $\Gamma = \{ \exists x(P(x) \wedge Q(x)), \forall x(P(x) \rightarrow R(x, x)), \forall x(Q(x) \rightarrow \neg R(x, x))\}$

Supongamos que existe un modelo arbitrario M que satisface a las tres sentencias. Entonces

Existe a $\in$ D tal que M $\models$P(a) (1) y M $\models$ Q(a) (2) (primera sentencia)

En la segunda sentencia se debe cumplir M $\models$P(a) $\rightarrow$ R(a, a)

Como por (1) M $\models$P(a) debe ser que M $\models$R(a, a) (3)

En la tercera sentencia se debe cumplir M $\models$Q(a) $\rightarrow \neg$R(a, a)

Como por (2) M $\models$Q(a) debe ser que M $\models \neg$R(a, a) contradice (3)

Por lo tanto, como no existe modelo tal que M $\models \Gamma$ entonces

Γ es insatisfacible

Semántica de Primer Orden

Consecuencia Semántica:

Una fórmula A es consecuencia semántica de un conjunto de sentencias Γ, $\Gamma \models A$, si para cada modelo M tal que $M \models \Gamma$ entonces $M \models A$.

Ejemplo:

$\{\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)), \forall x(P(x) \wedge T(x))\} \models \forall x(T(x) \wedge \neg Q(x))$

Propiedades de la Consecuencia Semántica:

Sea Γ un conjunto de sentencias y A una sentencia.

- ✓ Si $A \in \Gamma$ entonces $\Gamma \models A$
- ✓ Si $\Gamma \models A$ y $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces $\Delta \models A$. Δ conjunto de sentencias

Teorema de la Deducción:

Sea $\Gamma \cup \{A, B\}$ un conjunto de sentencias. $\Gamma \cup \{A\} \models B \leftrightarrow \Gamma \models A \rightarrow B$

Corolario:

Sea $\Gamma \cup \{A\}$ un conjunto de sentencias. $\Gamma \models A \leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg A\}$ es insatisfacible

Herramienta FOLST

First Order Logic Semantics Tutor

- **http://sourceforge.net/projects/folst/**