UNIDAD 2

FUNCIONES EN $\Re$

El concepto más importante de todas las matemáticas, es sin dudarlo, el de *función.* En casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en su estudio. No ha de sorprender por lo tanto, que el concepto de función sea de una gran generalidad, sin embargo, ésta fue alcanzada en forma gradual.

La noción moderna de función es fruto de los esfuerzos de muchos matemáticos de los siglos XVII y XVIII. La palabra *función* fue introducida por Leibnitz, que utilizaba este término para designar cierto tipo de fórmulas matemáticas. Posteriormente, el significado de la palabra función fue experimentando generalizaciones progresivas.

La notación $y = f(x)$ es debida a Leonhard Euler. Para esa época los matemáticos y científicos habían llegado a la conclusión que la mayoría de los fenómenos naturales pueden representarse por modelos matemáticos tomados de una colección básica de funciones, llamadas *funciones elementales*: algebraicas, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales. En la actualidad la definición de función, es esencialmente la siguiente:

Definición 2.1:

Dados dos conjuntos X *e* Y *, una función es una ley de asignación que asocia a cada objeto de* X *, uno y sólo un objeto de Y.*

Ejemplo:

El volumen de un cubo es función de la longitud de sus aristas. Si las aristas tienen longitud x el volumen está dado por $V(x) = x^3$.

En esta situación los valores que pueden tomar *V* y *x* no son independientes sino que dependen uno de otro: para cada valor de *x* hay un único valor posible de *V*. Se dice que *V* varía en función de *x* o que *V* es función de *x*.

Al decir que *V* varía en función de *x* estamos asignando roles diferenciados a las variables: para cada valor que tome *x* (independiente) el valor de *V* quedará determinado. Estamos considerando a *x* como la *variable independiente* y a *V* como la *variable dependiente* en la relación funcional.

La variable independiente toma valores dentro de un conjunto de valores admisibles, al que llamaremos *dominio* $(domf \subseteq X)$, y para cada uno de estos valores la variable dependiente tomará un valor perteneciente al codominio (*Y*).
Se utilizan las letras *f, g, h,…,F, G, H,…* para designar funciones.

Notaremos $f : Domf \subseteq X \to Y$ para indicar que *f* es la función cuya *regla de asignación* hace que a cada elemento del dominio le corresponda un único elemento del codominio.

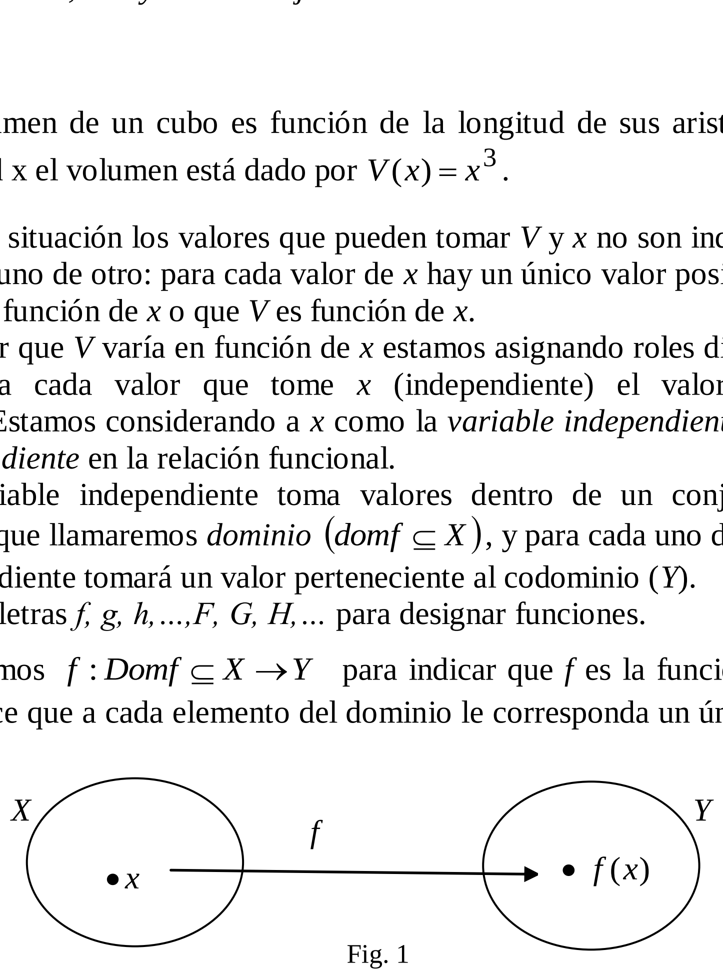

Fig. 1

Llamaremos *imagen de un elemento* $x \in Domf$ por la función f *al* valor $f(x) \in Y$, e *imagen de la función* f al subconjunto de Y formado por las imágenes de todos los elementos del dominio:

$$\operatorname{Im} f = \{ f(x) \in Y \ / \ x \in Domf \}.$$

Observación: En este curso serán de mayor interés aquellas funciones en las que tanto el dominio como el codominio sean subconjuntos de los números reales, es decir,

$$f : domf \subseteq \Re \to \Re$$

Estas funciones reciben el nombre de *funciones reales*.

Ejemplos de funciones reales:

1) $f : \Re \to \Re$ definida por $f(x) = x^2$.

Esta correspondencia es función porque todo número real tiene su cuadrado; no importa que distintos valores del dominio tengan la misma imagen, por ejemplo $x = 2$ y $x = -2$.

$Domf = \Re$

$\operatorname{Im} f(x) = \{ y \in \Re \ / \ y \geq 0 \}$

2) $f : \Re \to \Re$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. (Raíz cuadrada positiva)

Esta correspondencia no es función de $\Re$ en $\Re$, pues no asigna ningún elemento a los reales negativos.

3) $f : \Re_{\geq 0} \subseteq \Re \to \Re$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. (raíz cuadrada positiva)

Con la restricción del dominio, es decir, tomando un subconjunto de $\Re$ en el cual se cumplan las condiciones de la definición, es función.

$Domf = \Re_{\geq 0}$

$\operatorname{Im} f(x) = \{ y \in \Re \ / \ y \geq 0 \}$

En el ejemplo 3) hemos hallado el *dominio de definición* de la función. En la práctica este tipo de situaciones puede plantearse como: “hallar el dominio de definición de las siguientes funciones” o bien, “decir cuál es el mayor conjunto $X \subseteq \Re$ para el cual cada una de las siguientes correspondencias es función de $X \to \Re$”.

Analicemos algunas correspondencias y determinemos el dominio de las mismas.

4) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ $\qquad f : X \to \Re \qquad X = ?$

Para que la raíz cuadrada sea un número real debemos pedir que:

$$9 - x^2 \geq 0 \ \Rightarrow \ 9 \geq x^2 \ \Rightarrow \ |x| \leq 3 \ \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$Domf(x) = \{x \in \Re \ / \ |x| \leq 3\}$$

5) Los ceros en el denominador

a) La correspondencia de $X \to \Re$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{2-3x}$ es función si $X = \Re - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

pues $2 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2/3$ y $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ no está definida.

b) La correspondencia de $X \to \Re$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es función si $X = \Re - \{0\}$ ya que $f(0)$ no está definida.

6) Analicemos cuál es el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{2-3x}$.

Según el ejemplo 4) el dominio del numerador es $[-3,3]$ y por el 5.a) el dominio del denominador es $\Re - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

$$Domf(x) = Dom \text{ numerador} \cap Dom \text{ denominador}$$

$$Domf(x) = [-3,3] \cap \Re - \left\{\frac{2}{3}\right\} = \left[-3, 2/3\right) \cup \left(2/3, 3\right]$$

Es decir, para que *f* sea función, el dominio de definición de la misma está determinado por las condiciones dadas por el numerador y el denominador.

7) Determinar el dominio de definición de: $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x^2 - 5}}{2^x - 4}$

Analizando el dominio del numerador, se tiene que verificar que:

$$5x^2 - 5 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 5^{x^2} \geq 5 \quad \Rightarrow \quad x^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |x| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x \in \Re - (-1,1)$$

Para el dominio del denominador se debe cumplir que:

$$2^x - 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 2^x \neq 4 \quad \Rightarrow \quad x \neq 2 \quad \Rightarrow \quad x \in \Re - \{2\}$$

$$Domf(x) = (-\infty, -1] \cup [1, 2) \cup (2, \infty]$$

8) Dada $f(x) = \sqrt{(x-2)\cdot(x-1)}$ encontrar el dominio de *f*.

En este caso, al ser una raíz de índice par, para que exista en el conjunto de números reales debemos pedir que el radicando sea positivo, es decir:

$$(x-2)\cdot(x-1)\geq 0 \rightarrow \begin{cases} x-2\geq 0 \;\wedge\; x-1\geq 0 \rightarrow x\geq 2 \;\wedge\; x\geq 1 \;\rightarrow\; x\geq 2 \\ 0 \\ x-2\leq 0 \;\wedge\; x-1\leq 0 \;\rightarrow\; x\leq 2 \;\wedge\; x\leq 1 \;\rightarrow\; x\leq 1 \end{cases}$$

$$Domf(x)=\{x\in\Re \,/\, x\leq 1 \;\vee\; x\geq 2\}=(-\infty,1]\cup(2,\infty]$$

Representaciones gráficas de una función:

Resulta útil concebir una función como una *máquina*.

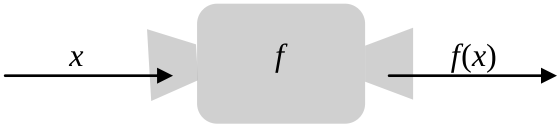

Fig. 2

Si x pertenece al dominio de la función *f*, entonces x entra en la máquina, es aceptada y la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. De esta manera podemos concebir el dominio como el conjunto de todas las entradas posibles y el rango como el conjunto de todas las salidas posibles.

Un claro ejemplo lo tenemos en la funciones preprogramadas de una calculadora. Tomemos el caso particular de la tecla $\sqrt{x}$. Si $x<0$, x no está en el dominio de la función, es decir, x no es una entrada aceptable y la calculadora indicará un error. Si $x\geq 0$, entonces en la pantalla aparecerá una aproximación para $\sqrt{x}$.

Otra manera de representar una función es mediante un diagrama de flechas (Fig. 1) pero el método más común para visualizar una función es su *gráfica*.

Definición 2.2:

*Dada $f: A\rightarrow B$, llamaremos gráfica de f al conjunto de **todos** los pares ordenados cuya primera componente pertenece a A y su segunda componente es el $f(x)$ correspondiente según la ley de asignación.*

$$Graf\ f=\{(x,y):x\in A,\ y\in B \wedge f(x)=y\}$$

La gráfica de una función *f* nos da una visualización útil del comportamiento o "historia de vida", de una función. La gráfica de *f* también nos permite tener una imagen del dominio y del rango de *f* sobre el eje *x* y el eje *y* respectivamente.

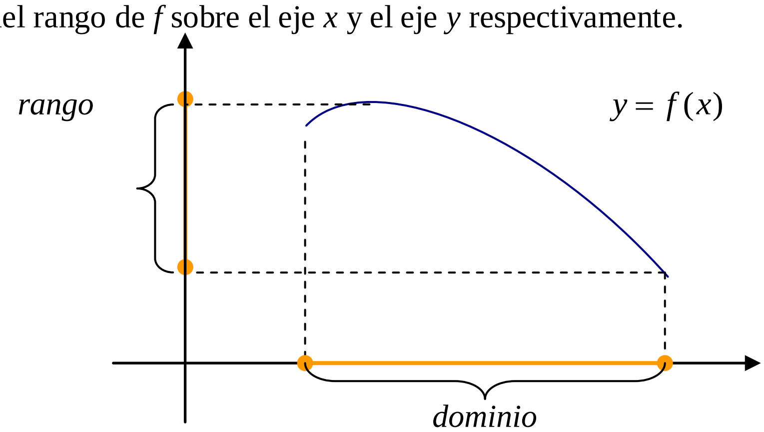

Fig. 3

Funciones seccionalmente definidas:

En los siguientes ejemplos las funciones están definidas por fórmulas diferentes en diferentes partes de su dominio.

Ejemplo 1:

Sea *f* una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & si \quad x \leq 1 \\ x^2 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Recordemos que una función es una regla de asignación. Para esta función en particular, la regla es:

- Si el valor de entrada *x* verifica $x \leq 1$, entonces el valor de $f(x)$ es $1 - x$.
- Si el valor de entrada *x* verifica $x > 1$, entonces el valor de $f(x)$ es x^2.

De esta manera:

$$f(0) = 1 - 0 = 1 \quad \text{dado que} \quad 0 \leq 1$$

$$f(1) = 1 - 1 = 0 \quad \text{dado que} \quad 1 \leq 1$$

$$f(2) = 2^2 \quad \text{dado que} \quad 2 > 1$$

La parte de la gráfica que se encuentra a la izquierda de la recta vertical $x = 1$ debe coincidir con el tramo correspondiente a la recta $y = 1 - x$ que tiene pendiente -1 y ordenada al origen 1.
La parte de la gráfica que se encuentra a la derecha de la recta vertical $x = 1$ debe coincidir con el tramo correspondiente a la gráfica de $y = x^2$ que es una parábola.

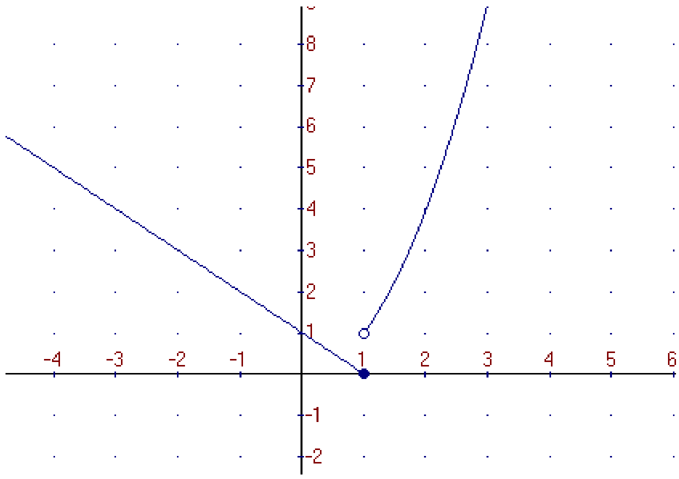

Fig. 4

Ejemplo 2:

Consideremos $f : \Re \to \Re$ dada por $f(x) = |x|$ como ejemplo de función seccionalmente definida. Recordemos que el *valor absoluto* de un número *x*, es la distancia de x hasta 0, sobre la recta de los números reales. Las distancias siempre son positivas o 0, por lo tanto tenemos $|x| \geq 0 \;\; \forall x \in \Re$.

$$f : \Re \to \Re \; / \; f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

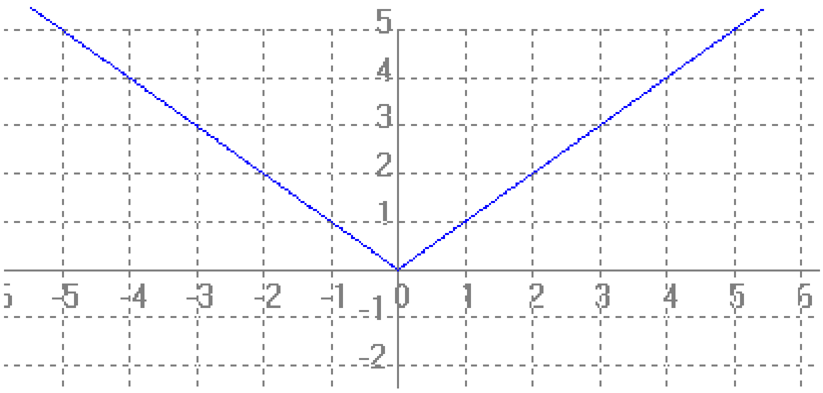

Fig. 5

Igualdad de funciones

Definición 2.3:

Dos funciones f y g son iguales sí y sólo sí:

a) tienen el mismo dominio.

b) $\forall x \in Dom, \;\; f(x) = g(x)$

Para que dos funciones sean distintas basta que haya un punto donde $f(x) \neq g(x)$ aún teniendo el mismo dominio.

Las funciones $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ y $g(x) = x + 2$ no son iguales ya que $f(x)$ no existe en $x = 2$ y $g(x)$ sí, aunque $f(x) = g(x) \;\; \forall x \neq 2$.

Operaciones con funciones

Definición 2.4:

Sean f y g dos funciones cualesquiera definidas del conjunto de números reales en sí mismo. Para cada x perteneciente al dominio los valores $f(x)$ y $g(x)$ son números reales, entonces $f(x) + g(x)$ es también un número real, que es por definición la suma de f y g en el punto x. Es decir. $f + g$ es una nueva función que definimos:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \;\; \text{con} \;\; x \in Domf \cap Domg$$

Análogamente, para la diferencia, producto y cociente teniendo en cuenta en este último caso que el denominador sea distinto de cero:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \;\; \text{con} \;\; x \in Domf \cap Domg$$

$$(c\cdot f)(x)=c\cdot f(x) \text{ con } \forall x\in Domf \wedge c\in\Re$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x) \text{ con } x\in Domf\cap Domg$$

$$(f/g)(x)=f(x)/g(x) \text{ con } x\in Domf\cap[Domg-\{x/g(x)=0\}]$$

Composición de funciones

Hemos visto que a partir de funciones dadas, por adición, sustracción, multiplicación y división, podemos construir nuevas funciones. Veremos ahora otro procedimiento para construir funciones llamado *composición.*

Sea $h(x)=\cos(x^3)$. Para calcular $h(x)$ primero elevamos x al cubo y luego tomamos el coseno de x^3. Por lo tanto *h* es la combinación de dos funciones, la elevación al cubo y el coseno. Llamando $f(x)=\cos x$ y $g(x)=x^3$ podemos expresar a la función *h*(*x*) en función *f*(*x*) y g(*x*) de la siguiente manera

$$h(x)=f[g(x)]$$

Decimos que *h* resulta de la composición de *f* y *g*.

Definición 2.5:

Dadas $f(x)$ *y* $g(x)$ *dos funciones cualesquiera, la función compuesta de f y g que notaremos* $f\circ g$ *está definida por:*

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)] \qquad \textit{se lee: “f de g de x”}$$

Para calcular la función compuesta en *x*, primero se calcula $g(x)$ y luego se obtiene *f* en el punto $g(x)$.

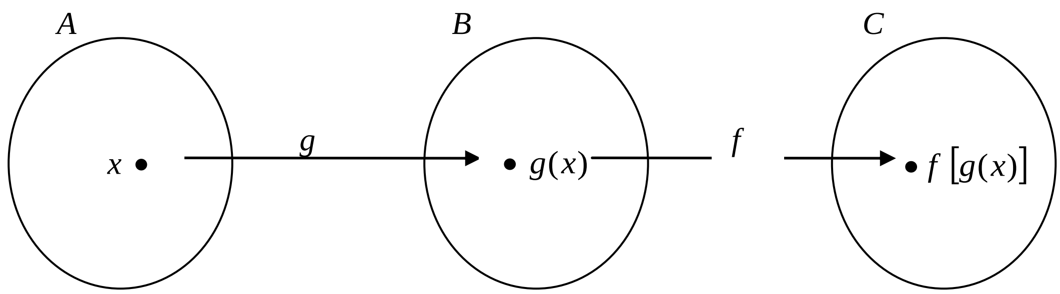

Fig. 6

$$f:B\to C \qquad g:A\to B \qquad f\circ g:A\to C$$

Para que la composición $f\circ g$ esté definida, los valores de *x* deben ser tales que hagan que $g(x)\in Domf(x)$.

$$Dom(f\circ g)(x)=\{x:x\in Domg \ \wedge \ g(x)\in Domf\}$$

$$\operatorname{Im} g(x)\subseteq Domf(x)$$

Ejemplo 1:

Consideremos las funciones: $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=-1-x^2$

¿Es posible $(f\circ g)(x)$?

$\operatorname{Im} g(x)=(-\infty,-1]$ $\quad$ $Dom f(x)=\Re_{\geq 0}$ $\quad$ $(-\infty,-1]\not\subseteq \Re_{\geq 0}$

Por lo tanto $f\circ g$ no es posible.

¿Es posible $(g\circ f)(x)$?

$\operatorname{Im} f(x)=\Re_{\geq 0}$ $\quad$ $Dom g(x)=\Re$ $\quad$ $\Re_{\geq 0}\subset \Re$

En este caso es posible la composición.

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g(\sqrt{x})=-1-(\sqrt{x})^2=-1-|x|=-1-x$$

Hemos reemplazado $|x|$ por x dado que:

$$Dom(g\circ f)(x)=\Re_{\geq 0}$$

y por lo tanto, $(\sqrt{x})^2=|x|=x$

Ejemplo 2:

Sean $f(x)=2x-3$ y $g(x)=5x^2$. Queremos hallar (si es posible) $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$.

Resulta:

$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(5x^2)=2\cdot 5x^2-3=10\cdot x^2-3$

$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g(2x-3)=5\cdot(2x-3)^2=5\cdot(4x^2-12x+9)=20\cdot x^2-60\cdot x+45$

Se puede ver con los ejemplos anteriores que la composición de funciones *no es conmutativa*, es decir:

$$(f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x)$$

La composición de tres o más funciones se obtiene componiendo dos, el resultado con la tercera, y así sucesivamente.
Dadas *f*, *g* y *h* se tiene que:

$$[f\circ(g\circ h)](x)=f\circ g[h(x)]=f[g[h(x)]]=(f\circ g)(h(x))=[(f\circ g)\circ h](x)$$

Luego, la composición de funciones es *asociativa,*

$$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h=f\circ g\circ h$$

Función creciente

Definición 2.6:

Una función $f(x)$ es *creciente* si para cada par de puntos x_1, x_2 pertenecientes a su dominio de definición tal que $x_1 < x_2$ se verifica la desigualdad $f(x_1) \leq f(x_2)$. Si se verifica la desigualdad estricta $f(x_1) < f(x_2)$ decimos que es estrictamente creciente.

$$f \text{ creciente } \Leftrightarrow \left(\forall x_1, x_2 \in Dom f(x);\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \leq f(x_2)\right)$$

En forma análoga definimos *función decreciente*

Definición 2.7:

Una función $f(x)$ es *decreciente* si para cada par de puntos x_1, x_2 pertenecientes a su dominio de definición tal que $x_1 < x_2$ se verifica la desigualdad $f(x_1) \geq f(x_2)$. Si se verifica la desigualdad estricta $f(x_1) > f(x_2)$ decimos que es estrictamente decreciente.

$$f \text{ decreciente } \Leftrightarrow \left(\forall x_1, x_2 \in Dom f(x);\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \geq f(x_2)\right)$$

Función acotada:

La función $y = f(x)$ se denomina *acotada* en el dominio de definición, si existe un número positivo M tal que para todos los valores de x pertenecientes a dicho dominio se verifica la desigualdad $|f(x)| \leq M$, es decir, $-M \leq f(x) \leq M$.
Si tal número M no existe se dice que la función es *no acotada*.

Función inyectiva

Definición 2.8:

Una función $f : X \to Y$ *es inyectiva si para todo* x_1, x_2 *pertenecientes a X tales que* $f(x_1) = f(x_2)$ *se tiene que* $x_1 = x_2$.

$$f : X \to Y \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow \left(\forall x_1, x_2 \in X\ ;\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\right)$$

Ejemplo 1:

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$ y sea $f : A \to B$ la correspondencia definida por:

$f(1) = a$

$f(2) = a$

$f(3) = b$

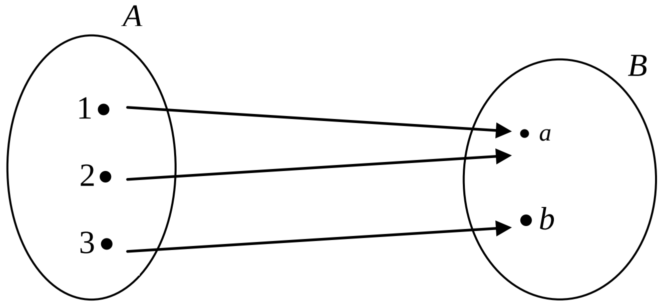

Fig. 7

Según la definición *f* es función pero NO es inyectiva porque hay dos elementos distintos en *A* que tienen la misma imagen en *B*.

Ejemplo 2:

Sea $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x)=3x+2$. Veamos cómo debemos analizar la inyectividad de *f*.

Sean $x_1, x_2 \in \Re$. Si $f(x_1)=f(x_2)$ para que *f* sea inyectiva debe ser $x_1=x_2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=3x_1+2 \\ f(x_2)=3x_2+2 \end{array}\right\} \to 3x_1+2=3x_2+2 \quad \to \quad 3x_1=3x_2 \quad \to \quad x_1=x_2$$

Por lo tanto, la función es inyectiva.

Ejemplo 3:

Sea $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x)=5x^2+13$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=5x_1^2+13 \\ f(x_2)=5x_2^2+13 \end{array}\right\} \to 5x_1^2+13=5x_2^2+13 \;\to\; x_1^2=x_2^2 \;\to\; |x_1|=|x_2| \;\to \pm x_1=\pm x_2$$

En este caso, elementos distintos del dominio tienen la misma imagen, por ejemplo, $x=2$ y $x=-2$. Luego la función no es inyectiva.

Función suryectiva

Definición 2.9:

Una función $f:X\to Y$ *es suryectiva o sobreyectiva cuando* $\mathrm{Im}\, f=B$.

$$f:X\to Y \text{ es suryectiva } \Leftrightarrow \left(\forall y\in Y, \exists x\in A \;/\; f(x)=y\right)$$

En el ejemplo 1) dado anteriormente se ve claramente que *f* no es suryectiva ya que $\mathrm{Im}\, f=\{a,c\}\subset B$ pero no es igual a *B*.

La función considerada en el ejemplo 2) es suryectiva ya que la imagen es el conjunto de números reales en tanto que la del ejemplo 3) no lo es puesto que su imagen es el intervalo $[13,\infty)$.

Ejemplos:

a) $f:\Re\to\Re \;/\; f(x)=x^2$

$\mathrm{Im}\, f(x)=\Re_{\geq 0}\subset\Re \quad \to \quad$ no es suryectiva

b) $f:\Re\to\Re \;/\; f(x)=x^3$

$\mathrm{Im}\, f(x)=\Re \quad \to \quad$ es suryectiva

Función biyectiva:

Definición 2.10:

Una función $f : X \to Y$ es biyectiva cuando es inyectiva y suryectiva.

Ejemplos:

a) $f : \Re \to \Re \;/\; f(x) = x$

b) $f : \Re_0^+ \to \Re_0^+ \;/\; f(x) = x^2$

c) $f : \Re \to \Re \;/\; f(x) = x^3$

Si se conocen las representaciones gráficas de una función, entonces es fácil decidir a simple vista si es inyectiva y/o suryectiva.

- *Inyectiva:* toda recta paralela al eje de abscisas corta a la gráfica de la función a lo sumo en un punto.
- *Suryectiva:* toda recta paralela al eje de ordenadas corta a la gráfica de la función en por lo menos un punto (ya que de esa manera se encontraría gráficamente el x necesario para que $f(x) = y$).

Definición 2.11:

Una función $g : B \to A$ es la inversa de $f : A \to B$ si verifica:

$$(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A \qquad y \qquad (f \circ g)(x) = x \quad \forall x \in B$$

Sea $f : A \to B$ una función. Existe la función inversa de *f* (que notaremos f^{-1}) sí y sólo sí *f* es biyectiva.

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

Observación: El -1 de f^{-1} NO ES UN EXPONENTE. Por lo tanto

$$f^{-1}(x) \text{ no significa } \frac{1}{f(x)}$$

Veamos ahora cómo calcular funciones inversas. Si tenemos una función $y = f(x)$ y es posible despejar x en términos de y entonces, según la definición tenemos que $x = f^{-1}(y)$. Si deseamos llamar x a la variable independiente, intercambiamos x e y y llegamos a la ecuación $y = f^{-1}(x)$.

Ejemplo 1:

Dada $f : \Re \to \Re$ definida por $f(x) = x^3 + 2$, encontrar su función inversa.

- f es inyectiva y suryectiva, por lo tanto es biyectiva y tiene inversa.
- Tenemos $y = x^3 + 2$.

- Despejamos *x* en términos de *y*

$$x^3 = y - 2$$

$$x = \sqrt[3]{y-2}$$

- Intercambiamos *x* e *y*

$$y = \sqrt[3]{x-2}$$

- Por lo tanto, la función inversa es: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$

- Verifiquemos que efectivamente es la inversa de la función dada:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = \left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3 + 2 = x - 2 + 2 = x$$

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}[f(x)] = \sqrt[3]{x^3 + 2 - 2} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

El principio de intercambiar *x* e *y* a fin de hallar la función inversa nos proporciona el método para hallar la gráfica de f^{-1}, a partir de la de *f*. Puesto que $f(a) = b$ si y sólo si $f^{-1}(b) = a$, el punto (a,b) está en la gráfica de *f* si y sólo sí el punto (b,a) está en la gráfica de f^{-1}. El punto (b,a) se obtiene por reflexión del punto (a,b) respecto de la recta $y = x$. Por ejemplo, el punto $(1,3)$ pertenece a la gráfica de $f(x)$ y por reflexión obtenemos el punto $(3,1)$ perteneciente a la gráfica de $f^{-1}(x)$. Por lo tanto, se obtiene la gráfica de $f^{-1}(x)$ al reflejar la gráfica de $f(x)$ respecto a la recta $y = x$, como se observa en la figura.

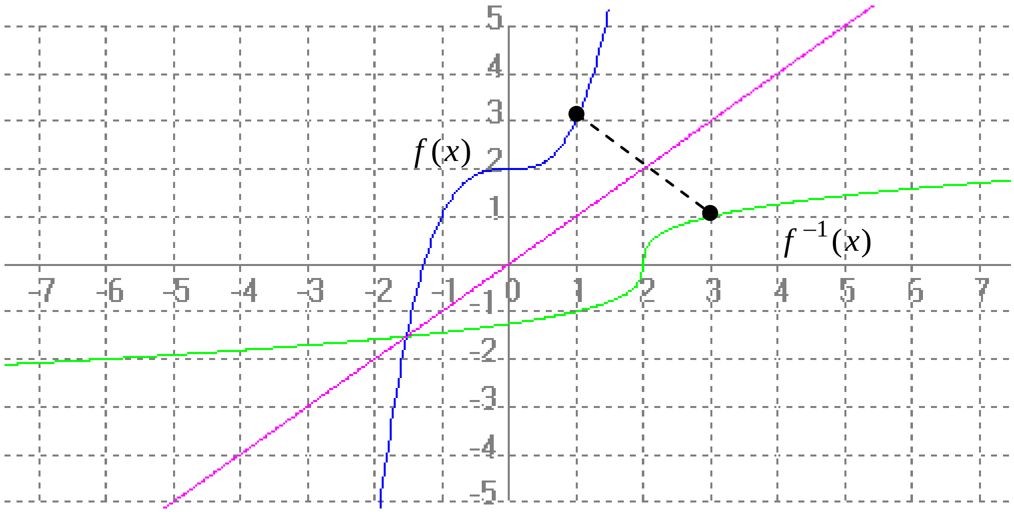

Fig. 8

Ejemplo 2:

Sea $f : \Re \to \Re$ definida por $f(x) = 3x + 2$. Ya hemos visto que esta función es biyectiva, entonces admite inversa.

Para hallar la inversa despejamos x de la ecuación:

$$\frac{y-2}{3}=x \quad \rightarrow \quad f^{-1}(y)=\frac{y-2}{3} \quad \text{o lo que es lo mismo:} \quad f^{-1}(x)=\frac{x-2}{3}$$

Veamos que la función obtenida verifica: $\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=x$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}[f(x)]=f^{-1}(3x+2)=\frac{3x+2-2}{3}=\frac{3x}{3}=x \quad \forall x\in\Re$$

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=f\left(\frac{x-2}{3}\right)=3\cdot\frac{x-2}{3}+2=x \quad \forall x\in\Re$$

Observando las representaciones de f y f^{-1} vemos que son simétricas con respecto a la recta $y=x$.

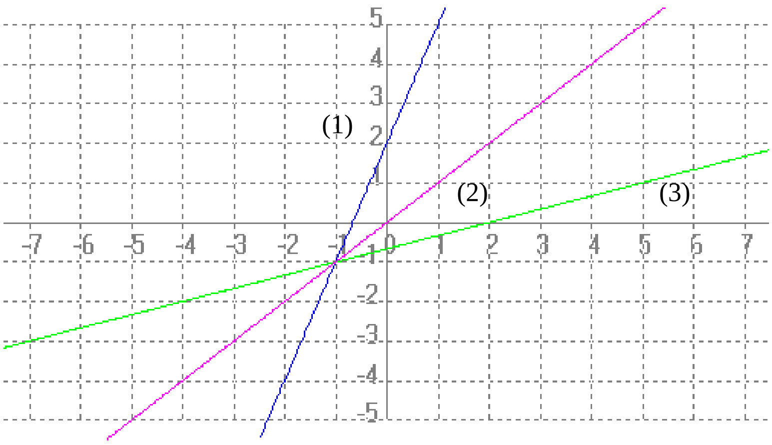

Fig. 9

(1): $f(x)=3x+2$, (2): $f(x)=x$, (3): $f(x)=\frac{x}{3}-\frac{2}{3}$

Simetría:

Definición 2.12:

- $f(x)$ *es una función par, si para todo x perteneciente a su dominio de definición, se cumple que f evaluada en x es igual a f evaluada en* $-x$.

$$\forall x\in Domf,\ f(x)=f(-x) \ \Rightarrow\ f(x) \text{ es par}$$

Ejemplos de funciones pares: $|x|,\ x^2+5,\ \cos x,\ x^4,\ldots$

Si $f(x)$ es par, su gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas .

- $f(x)$ *es una función impar, si para todo x perteneciente a su dominio de definición, se cumple que f evaluada en x es igual al opuesto de f evaluada en* $-x$.

$$\forall x\in Domf,\ f(x)=-f(-x) \ \Rightarrow\ f(x) \text{ es impar}$$

Ejemplos de funciones impares: $sg(x), x, senx, x^5, \ldots$

Si $f(x)$ es impar, su gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Las gráficas siguientes corresponden a una función par y a una impar respectivamente.

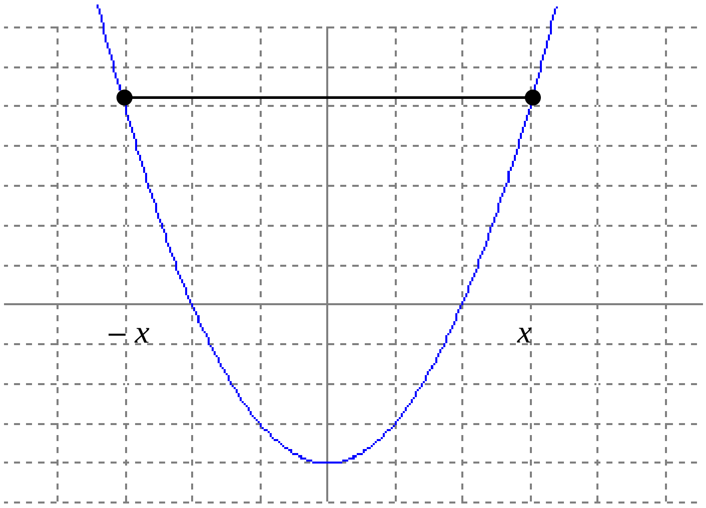

Fig. 10

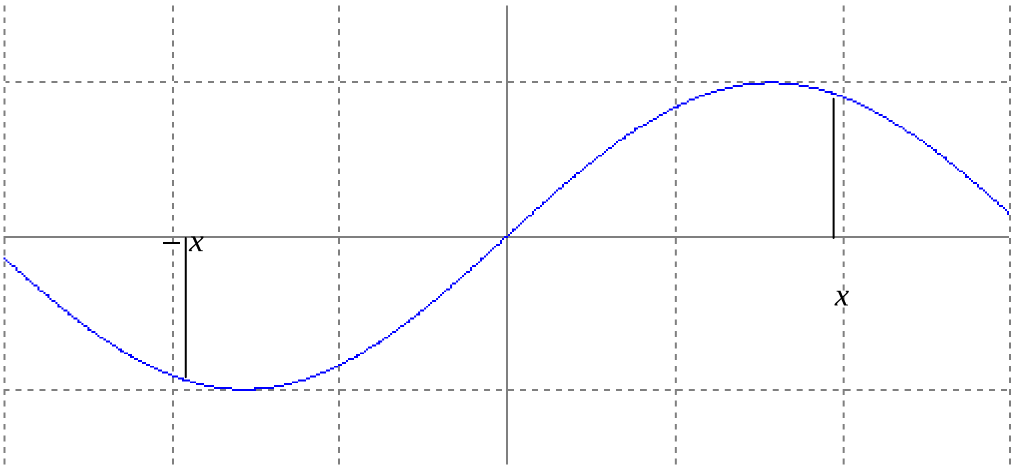

Fig. 11

En general hay gran cantidad de funciones que no son ni pares, ni impares, tal como la función parte entera de x $([x])$, la función mantisa $(x-[x])$ y la función escalón $(E(x))$, entre otras.

Distintos tipos de funciones:

Cuando resolvemos problemas de cálculo, resulta útil estar familiarizado con las gráficas y características de algunas funciones cuya presencia es frecuente. Veamos la clasificación de algunas de ellas.

1. *FUNCIÓN CONSTANTE*

Esta función tiene como dominio y codominio al conjunto de los números reales.

$$f:\Re \to \Re \ / \ f(x)=k\,,\ k=cte. \quad \forall x\in\Re$$

La gráfica es una recta paralela al eje de abscisas que interseca al eje de ordenadas en el punto $(0,k)$.

Características:

- No es inyectiva
- No es sobreyectiva.
- Es par

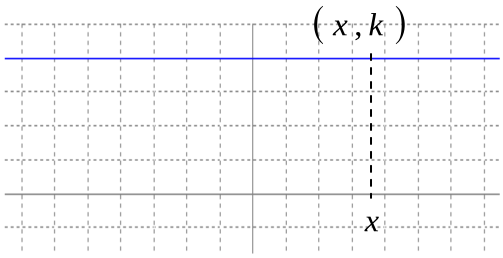

Fig. 12

2. *FUNCIÓN POTENCIAL*

La función potencial es de la forma $f(x)=x^{\alpha}$. Se presentan los siguientes casos:

a) α *es un número entero positivo*

En este caso el dominio es el conjunto de los números reales.

$$f(x)=x^{\alpha}, \quad \alpha\in Z^{+}, \text{entonces } Dom f(x)=\Re$$

Ejemplos:

i) . *FUNCIÓN IDENTIDAD* $(\alpha=1)$

Esta función tiene como dominio y codominio al conjunto de los números reales.

$$f:\Re \to \Re \ / \ f(x)=x$$

La gráfica es una recta bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Características:

- Es inyectiva y sobreyectiva.
- Es impar
- Es creciente

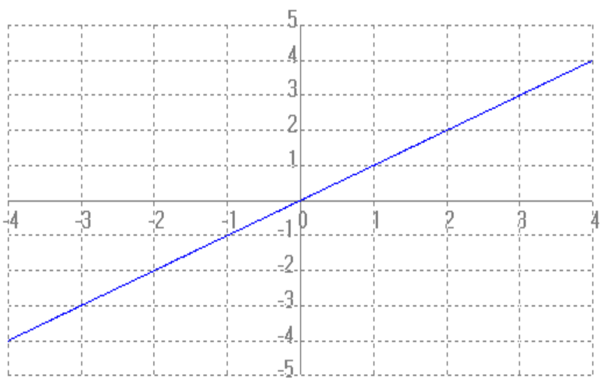

Fig. 13

ii) . *FUNCIÓN CUADRÁTICA* $(\alpha = 2)$

Consideremos la función: $f : \Re \to \Re \; / \; f(x) = x^2$

- $f(0) = 0$ y $f(x) > 0$ si $x \neq 0$. La gráfica está incluida en el semiplano superior.
- $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in Domf$, es decir, es una función par.
- Si $x_1 > x_2 > 0 \quad \to \quad f(x_1) > f(x_2)$, luego es creciente en el intervalo $(0, \infty)$.
- Si $x_1 < x_2 < 0 \quad \to \quad f(x_1) < f(x_2)$ por lo tanto. es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.

La curva representada se llama parábola cuadrática.

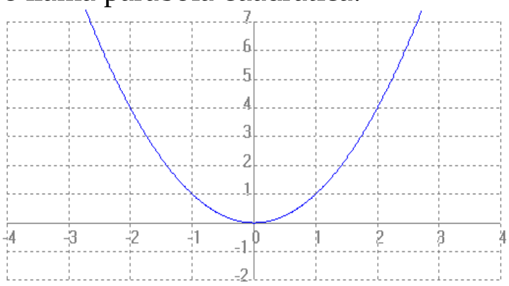

Fig. 14

iii) *PARÁBOLA CÚBICA* $(\alpha = 3)$

Consideremos la función:

$$f : \Re \to \Re \; / \; f(x) = x^3$$

- $f(0) = 0$.
- $f(x) > 0$ si $x > 0$. La gráfica está incluida en el semiplano superior.
- $f(x) < 0$ si $x < 0$.
- $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in Domf$. Es una función impar y por lo tanto es simétrica respecto al origen de coordenadas.
- Si $x_1 < x_2 \quad \to \quad f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2$, luego es creciente en todo el plano..

La curva representada se llama parábola cúbica.

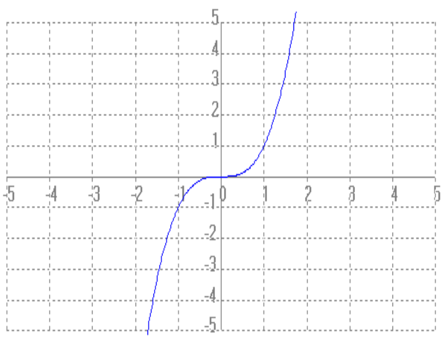

Fig. 15

b) α *es un número entero negativo*

En este caso el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales distintos de cero.

$$f(x) = x^{\alpha}, \quad \alpha \in Z^{-}, \text{entonces } Dom f(x) = \Re - \{0\}$$

Las siguientes gráficas corresponden a la función para distintos enteros negativos.

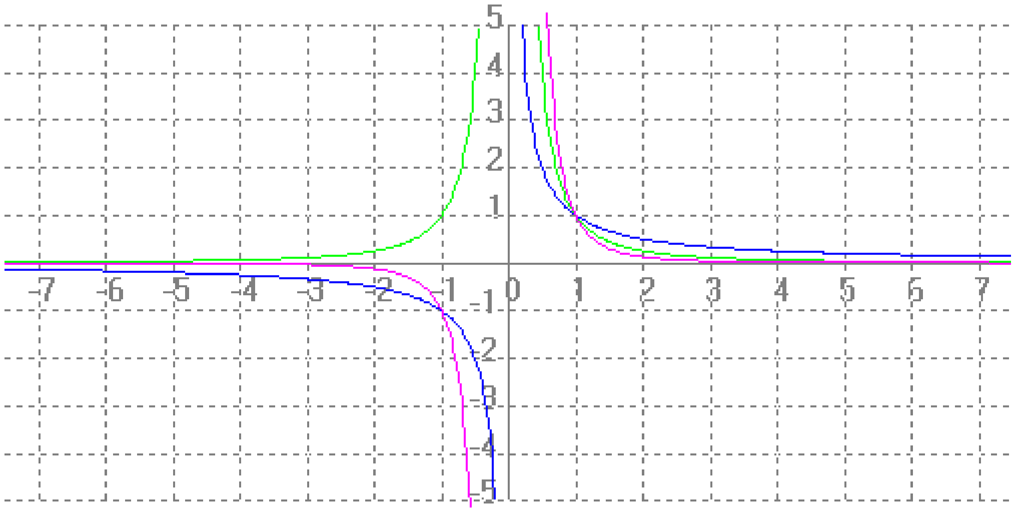

Fig. 16

$f(x) = x^{\alpha}, \ \alpha = -2, -3, -5$

c) α *es un número racional fraccionario*

Sea $x > 0$ y $\alpha = p/q$ un número racional irreducible con $q > 0$- Se define x^{α} como la raíz *q*-ésima positiva de x^{p} ($f(x) = \sqrt[q]{x^{p}}$).

Las siguientes gráficas corresponden a la función para distintos racionales fraccionarios:

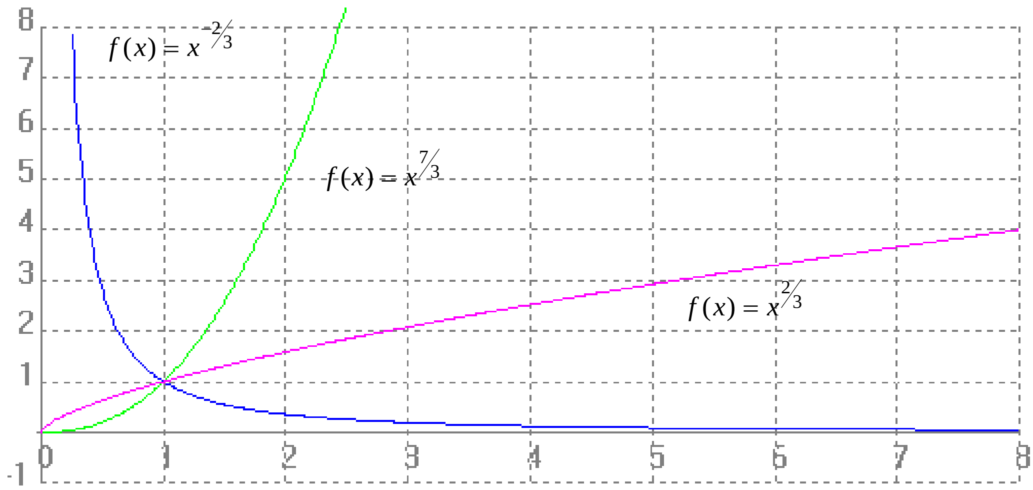

Fig. 17

3. *FUNCIÓN RACIONAL ENTERA O POLINOMIO*

Una función racional entera o polinomio es una suma de funciones potenciales de base real y exponente natural o cero.
Tanto el dominio como la imagen de esta función es el conjunto de los números reales y a cada x perteneciente al dominio, le asigna una expresión de la forma $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. Si $a_n \neq 0$, n indica el grado del polinomio.

- El polinomio de primer grado en x, $y = a_0 + a_1 x$ se llama *función lineal*.
- El polinomio en x de grado 2 es de la forma $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ con El polinomio en x de grado 3 es de la forma $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ con $a_3 \neq 0$

Veamos un ejemplo de función lineal:

Función lineal.

Sea la función lineal dada por:

$$f : \Re \to \Re \ / \ f(x) = 2x - 3$$

Observamos que la *pendiente* es 2. La pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje positivo de las *x*. En este caso es un valor positivo, por lo tanto, el ángulo es agudo.
La *ordenada al origen* (distancia desde el origen del sistema de coordenadas hasta donde la recta corta al eje de las *y*), es -3.

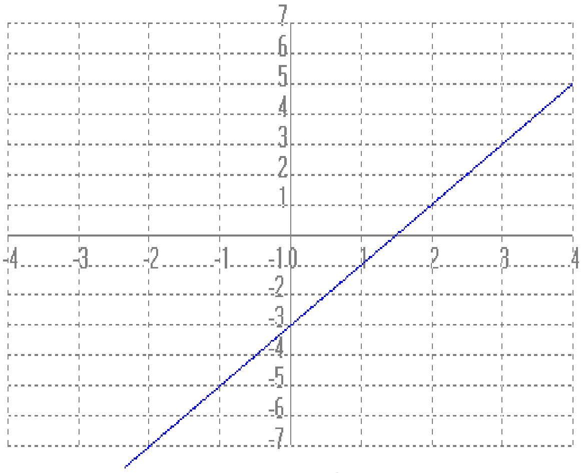

Fig. 18

Características:

- El cero o raíz de la función se obtiene haciendo $2x - 3 = 0 \to x = \dfrac{3}{2}$ que corresponde al punto donde la recta corta al eje de abscisas.
- Es inyectiva y suryectiva, por lo tanto biyectiva.
- No es par ni impar.
- Es creciente.

4. *FUNCIÓN RACIONAL FRACCIONARIA*

Esta función está definida como cociente de dos polinomios

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Ejemplo: $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^3-2x^2-x+2}$. La gráfica de la misma es:

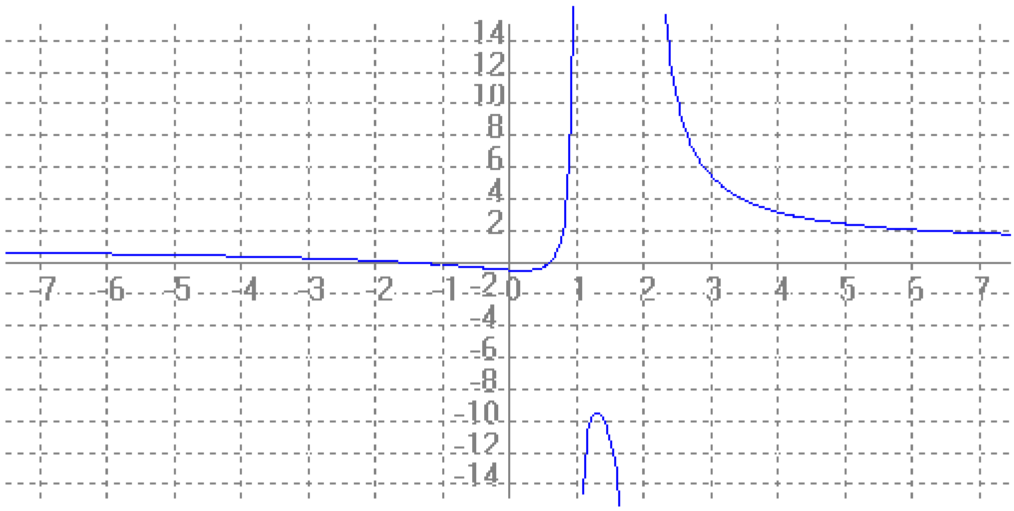

Fig. 19

El dominio de la función excluye los ceros del denominador, que se llaman *polos* de la misma. En el ejemplo los valores que anulan al denominador son $x=1, x=-1$ y $x=2$, por lo tanto:

$$Dom f(x)=\Re-\{-1,1,2\}$$

Los valores de *x* que anulan al numerador son los *ceros* de la función. En este caso los valores de x que anulan al numerador son: $x=-1$ y $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Teniendo en cuenta que $x=-1$ no pertenece al dominio de la función, los ceros de ésta se encuentran en $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

El caso más simple es la *función homográfica* definida como cociente de dos polinomios de grado uno:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\ ,\ c\neq 0$$

Un caso particular de esta función holográfica se tiene cuando $a=d=0$. Por lo tanto:

$$f(x)=\frac{b}{cx}\ \rightarrow\ f(x)=\frac{b/c}{x}\ \rightarrow\ f(x)=\frac{k}{x}\ \text{ siendo }\ k=\frac{b}{c}$$

La gráfica de esta función es una hipérbola llamada *hipérbola equilátera*.

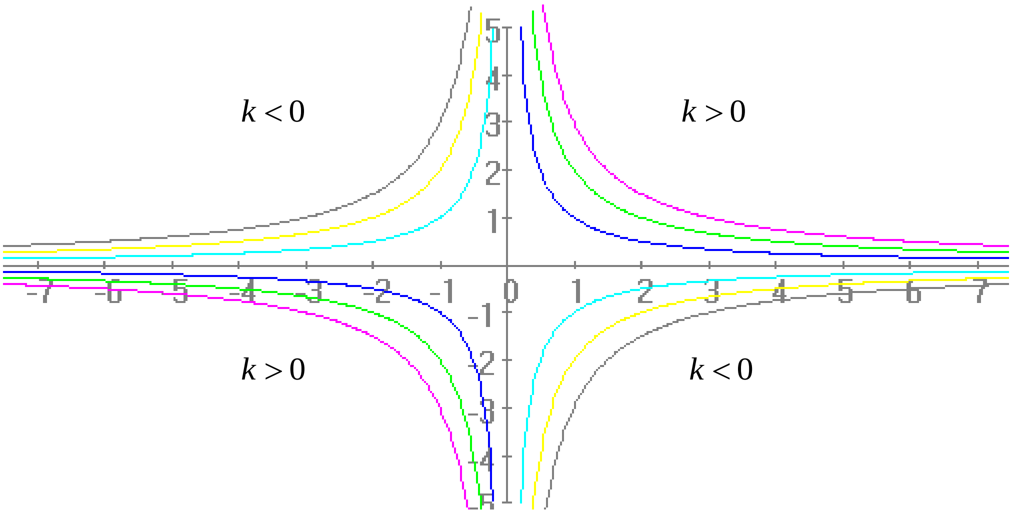

Fig. 20

5. *FUNCIÓN IRRACIONAL*

La función potencial x^{α} con α racional fraccionario recibe también el nombre de función *irracional*.. En general, toda expresión algebraica que contenga exponentes fraccionarios es llamada irracional.

Ejemplo:

Sea la función $f(x)=\dfrac{2x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^2}}$.

Para hallar el dominio de esta función debemos pedir que no se anule el denominador y además, que el radicando que figura en el numerador sea mayor o igual que cero, es decir, $1+5x^2 \neq 0$ y $x \geq 0$.

En este ejemplo, el radicando del denominador siempre es distinto de cero, luego: $Dom f(x)=\Re_{\geq 0}$

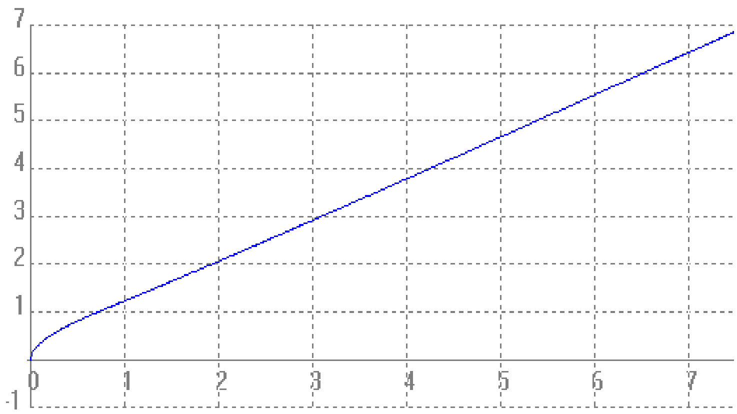

Fig. 21

6. *FUNCIÓN MÓDULO O VALOR ABSOLUTO*

Esta función tiene como dominio y codominio al conjunto de los números reales.

$$f:\Re \to \Re \ / \ f(x)=|x|=\begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x<0 \end{cases}$$

Por su definición, los puntos de su gráfica tienen ordenada mayor o igual que cero, por lo tanto: $\operatorname{Im} f(x)=\Re_{\geq 0}$

Características:

- No es inyectiva ni sobreyectiva.
- Es par
- Es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y estrictamente creciente en el intervalo $(0, \infty)$.

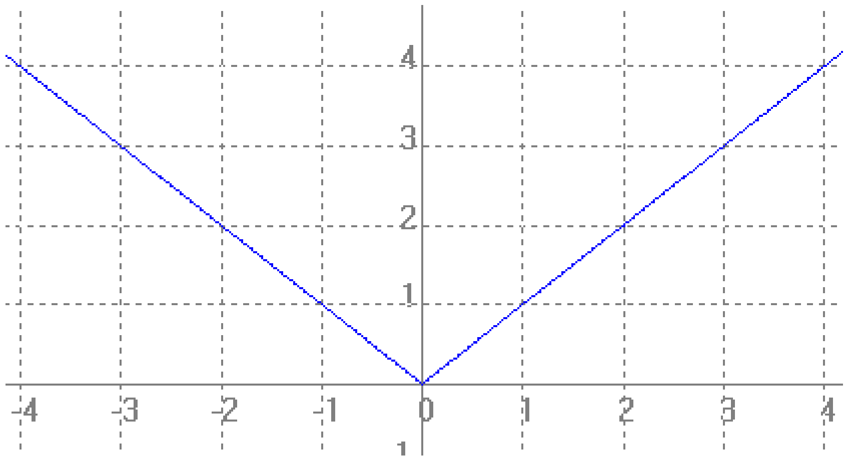

Fig. 22

7. *FUNCIÓN SIGNO DE X (sg x)*

Esta función tiene como dominio y codominio al conjunto de los números reales.

$$f:\Re \to \Re \ / \ f(x)=sgx=\begin{cases} 1 & si \quad x>0 \\ 0 & si \quad x=0 \\ -1 & si \quad x<0 \end{cases}$$

Características:

- No es inyectiva ni sobreyectiva.
- Es impar
- $\operatorname{Im} f(x)=\{1,0,-1\}$

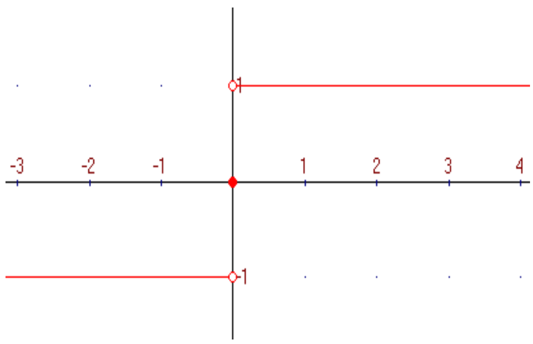

Fig. 23

8. *FUNCIÓN PARTE ENTERA*

Esta función tiene como dominio y codominio al conjunto de los números reales y asigna a los reales negativos el mayor entero menor o igual a él y a los reales positivos el entero sin su parte decimal.

$$f:\Re \to \Re \;/\; f(x)=[x]$$

Características:

- No es inyectiva ni sobreyectiva.
- No es par ni impar
- $\operatorname{Im} f(x)=\{\ldots,-3,-2,-1,0,-1,2,3,\ldots\}$
- Es creciente

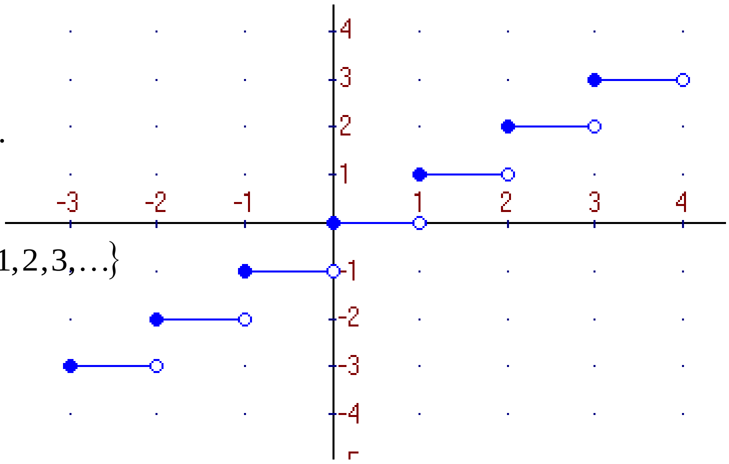

Fig. 24

Llamamos *función piso* al menor número de los dos *números enteros* entre los que está comprendido *x*. De esta forma, si *x* es un número entero, función piso es el mismo entero. Si $x={}^5\!/_2$ (siendo $\frac{5}{2}=2{,}5$), entonces su función piso es 2.

Llamamos *función techo* al mayor número de los dos *números enteros* entre los que está comprendido *x*. Si $x={}^5\!/_2$ su función techo es 3.

Siempre se tiene que: $\lfloor x\rfloor \le x < \lfloor x+1\rfloor$.

La igualdad se cumple sí y sólo sí *x* es entero.

9. *FUNCIÓN MANTISA*

Es una función definida de reales en reales tal que su gráfica representa la parte decimal de cada elemento del dominio.

$$f:\Re \to \Re \;/\; f(x)=x-[x]$$

Características:

- No es inyectiva ni sobreyectiva.
- Es par.
- $\operatorname{Im} f(x)=[0,1)$
- Es estrictamente creciente en los intervalos

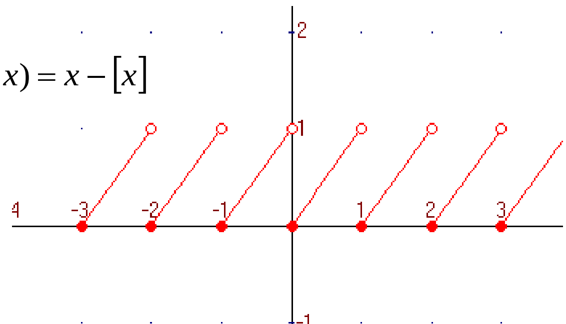

Fig. 25

$$\ldots,[-4,-3),[-3,-2),[-2,-1),[-1,0),[0,1)$$

10. *FUNCIÓN ESCALÓN*

Está definida de reales en reales siendo su ley de asignación:

$$f:\Re \to \Re \;/\; f(x) = E(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Características:

- No es inyectiva ni sobreyectiva
- No es par ni impar.
- $\operatorname{Im} f(x) = \{0, 1\}$

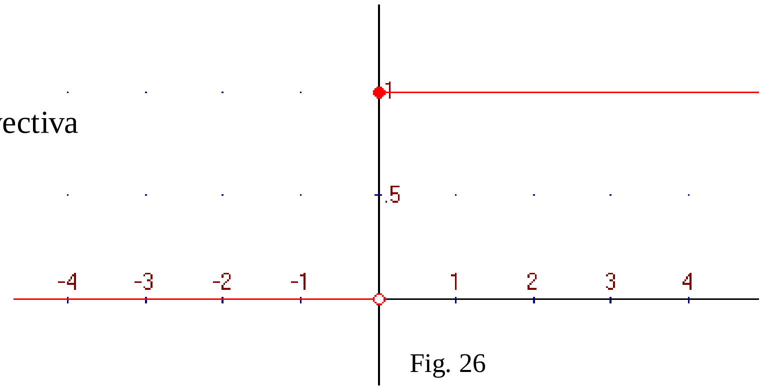

Fig. 26

11. *FUNCIÓN DIRICHLET*

Está definida de reales en reales de la siguiente manera:

$$f:\Re \to \Re \;/\; f(x) = D(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in Q \\ 0 & si \quad x \notin Q \end{cases}$$

Esta función no admite gráfica.

12. *FUNCIÓN EXPONENCIAL*

Se llama *función exponencial* a la función definida por $y = a^x$ donde a es una constante positiva distinta de 1.

Recordemos qué significa esto.

- Si $x = n$ un entero positivo, entonces

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\ factores}$$

- Si $x = 0$, entonces $a^0 = 1$ y, si $x = -n$, donde n es un entero positivo, entonces

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- Si x es un número racional, $x = p/q$, donde p y q son enteros y $q>0$, entonces

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

Pero para poder definir a^x para todo x perteneciente a los reales, falta considerar el caso donde x es un irracional, es decir, qué significado tiene por ejemplo $2^{\sqrt{3}}$ o 5^{π}.

Consideremos el caso particular $2^{\sqrt{3}}$. El número irracional $\sqrt{3}$ satisface

$$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$$

$$2^{1{,}7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}8}$$

Puesto que 1,7 y 1,8 son números racionales, sabemos lo que significan $2^{1{,}7}$ y $2^{1{,}8}$. En forma análoga, considerando mejores aproximaciones para $\sqrt{3}$, obtenemos mejores aproximaciones para $2^{\sqrt{3}}$.

$$\begin{array}{lllllllll}
1{,}73 & < & \sqrt{3} & < & 1{,}74 & \Rightarrow & 2^{1{,}73} & < & 2^{\sqrt{3}} & < & 2^{1{,}74} \\
1{,}732 & < & \sqrt{3} & < & 1{,}733 & \Rightarrow & 2^{1{,}732} & < & 2^{\sqrt{3}} & < & 2^{1{,}733} \\
1{,}7320 & < & \sqrt{3} & < & 1.7321 & \Rightarrow & 2^{1{,}7320} & < & 2^{\sqrt{3}} & < & 2^{1{,}7321} \\
1{,}73205 & < & \sqrt{3} & < & 1{,}73206 & \Rightarrow & 2^{1{,}73205} & < & 2^{\sqrt{3}} & < & 2^{1{,}73206}
\end{array}$$

Se puede demostrar que existe exactamente un número mayor que todos los números

$$2^{1{,}7}, 2^{1{,}73}, 2^{1{,}732}, 2^{1{,}7320}, 2^{1{,}73205}, \cdots$$

y menor que todos los números

$$2^{1{,}8}, 2^{1{,}74}, 2^{1{,}733}, 2^{1{,}7321}, 2^{1{,}7320}, 2^{1{,}73206}, \cdots$$

Definimos $2^{\sqrt{3}}$ como ese número. Aplicando este proceso de aproximación podemos calcularlo con una exactitud de hasta seis cifras decimales

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}321997$$

Análogamente podemos definir 2^x $(o\ a^x,\ si\ a > 0)$, donde x es cualquier número irracional.

Habiendo definido a^x para todo x perteneciente a los reales, analicemos los distintos casos que se presentan.

La forma de la gráfica de esta función depende de que $a > 1$ ó $0 < a < 1$.

- $a > 1$. Por ejemplo: $f(x) = 2^x$ $\qquad f(x) = 4^x$

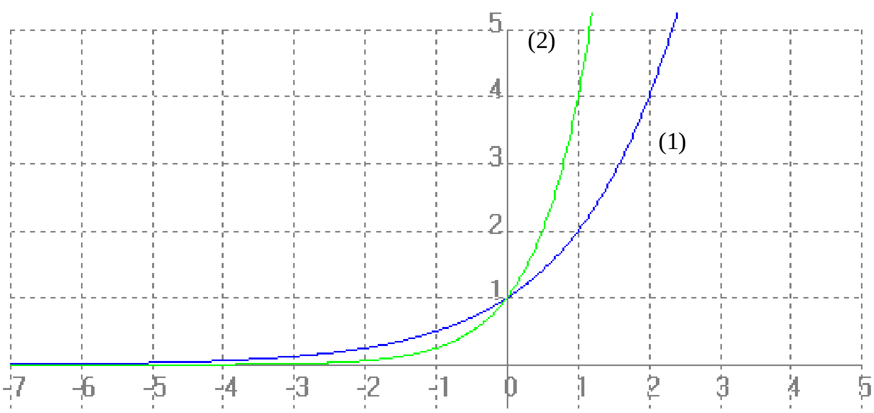

Fig. 27 (1): $f(x) = 2^x$ (2): $f(x) = 4^x$

Características:

i. $f(0)=1$ y $f(x)>0 \quad \forall x \in \Re$

iii. $f(x)$ crece al aumentar x por valores positivos.

iv. $f(x)$ tiende a anularse al disminuir x por valores negativos.

Estos resultados son válidos para cualquier función exponencial $f(x)=a^x$ con $a>1$.

- $0<a<1$. Por ejemplo: $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

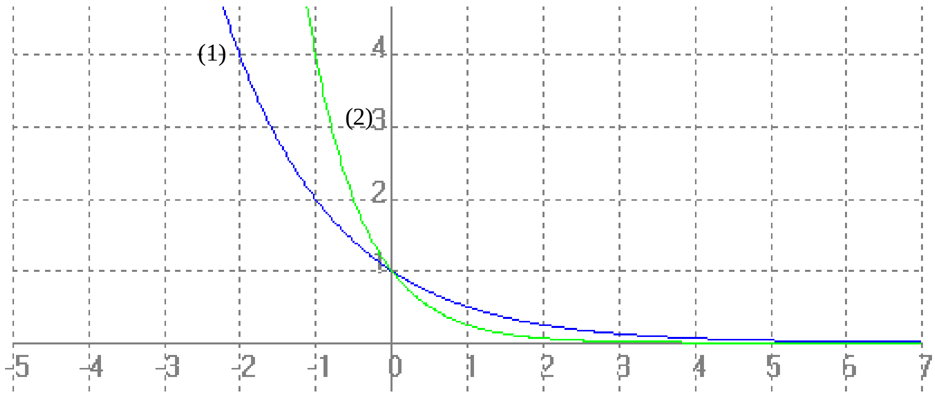

Fig. 28 (1): $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (2): $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

Características:

i. $f(0)=1$ y $f(x)>0 \quad \forall x \in \Re$

iii. $f(x)$ tiende a anularse al aumentar x por valores positivos

iv. $f(x)$ crece al disminuir x por valores negativos.

Estas conclusiones son válidas para cualquier función exponencial $f(x)=a^x$ con $0<a<1$.

Al observar las gráficas vemos por ejemplo, que $y=2^x$ e $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ son simétricas respecto al eje y

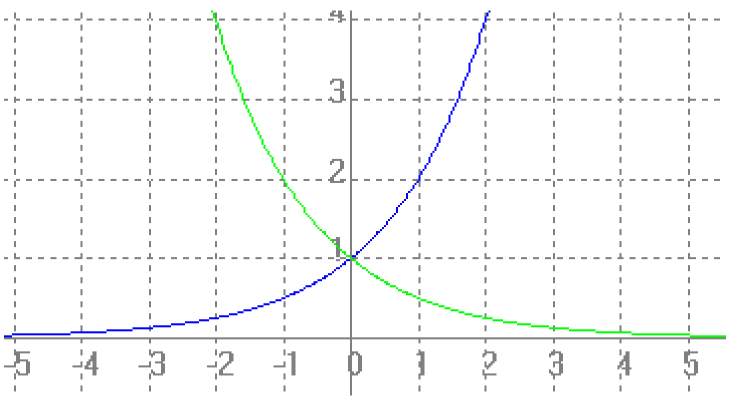

Fig. 29

En general, la gráfica de $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ es la reflexión de $y=a^x$ respecto al eje y.

Dado que el dominio de definición de $f(x)=a^x$ con a positivo distinto de uno, son todos los reales y su imagen todos los reales positivos, se tiene que:

$$f:\Re\rightarrow\Re^+ \quad / \quad f(x)=a^x \quad a\in\Re^+\,, a\neq 1$$

es una función biyectiva y por lo tanto admite inversa.

El número e:

De todas las bases posibles para una función exponencial existe una que es la más conveniente para los fines del cálculo. La manera en que la gráfica de $y=a^x$ cruza el eje *y* influye en la selección de una base *a*. En las siguientes figuras se muestran las rectas tangentes a las gráficas de $y=2^x$ y $y=3^x$ en el punto $(0,1)$.
(Las rectas tangentes serán definidas con precisión en unidades posteriores. Por el momento consideremos que la recta tangente a una gráfica exponencial en un punto es la recta que toca a la gráfica sólo en ese punto). Las pendientes de estas rectas tangentes son: $m\approx 0{,}7$ para $y=2^x$ y $m\approx 1{,}1$ para $y=3^x$.

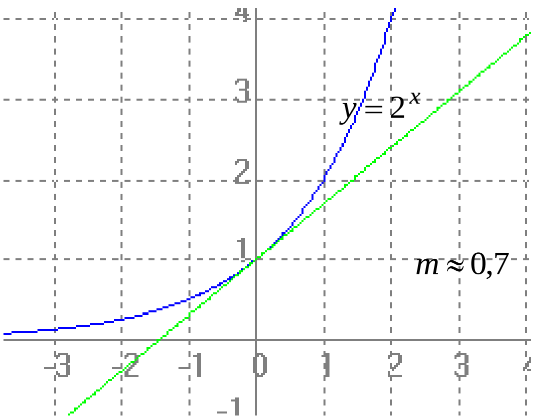

Fig. 30

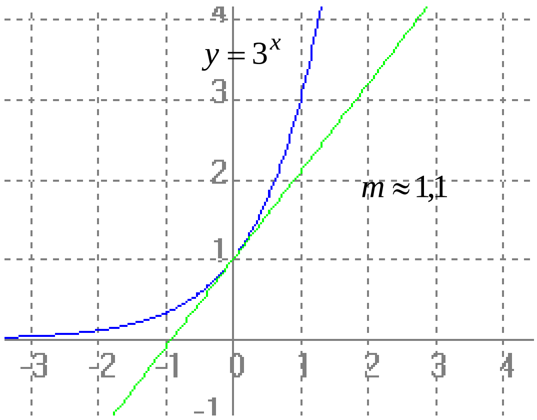

Fig. 31

La elección de una base *a* conveniente puede simplificar mucho las fórmulas del cálculo y lo ideal sería encontrar un número *a* de manera que la pendiente de la recta tangente a $y=a^x$ en $(0,1)$, sea *exactamente* 1. Ese número existe y se denota con la letra *e* (notación elegida por el matemático Leonhard Euler, en 1727).

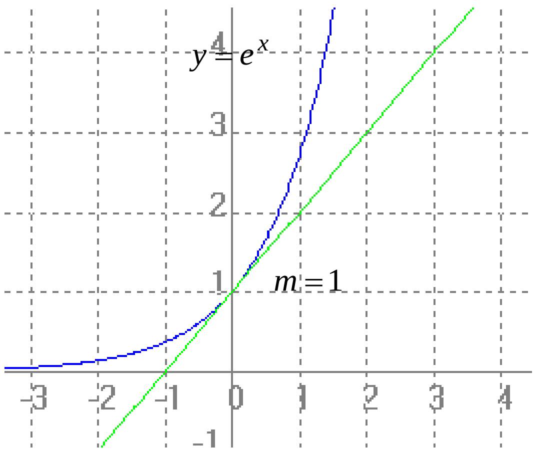

Fig. 32

Observando las gráficas de $y = 2^x$ e $y = 3^x$ podemos deducir que el número *e* se encuentra entre 2 y 3 y que la gráfica de $y = e^x$ quede entre estas gráficas.

El valor de *e* aproximado hasta cinco cifras decimales es

$$e \approx 2{,}71828$$

13. *FUNCIÓN LOGARÍTMICA*

Despejemos *x* de la función $y = a^x$. Para ello, apliquemos logaritmo en base *a* en ambos miembros de la igualdad:

$$\log_a y = x \cdot \log_a a \quad \rightarrow \quad x = \log_a y$$

$$f^{-1} : \Re^+ \rightarrow \Re \quad / \quad f^{-1}(x) = \log_a x$$

Veamos que ésta es la función inversa de la exponencial.

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}\left(a^x\right) = \log_a a^x = x$$

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$

Luego:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = \left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x \quad \forall x \in \Re^+$$

Por lo tanto, la función logaritmo es la inversa de la función exponencial.

El dominio de definición son los reales positivos.

Consideremos dos posibilidades:

- $a > 1$. Por ejemplo: $y = \log_2 x$

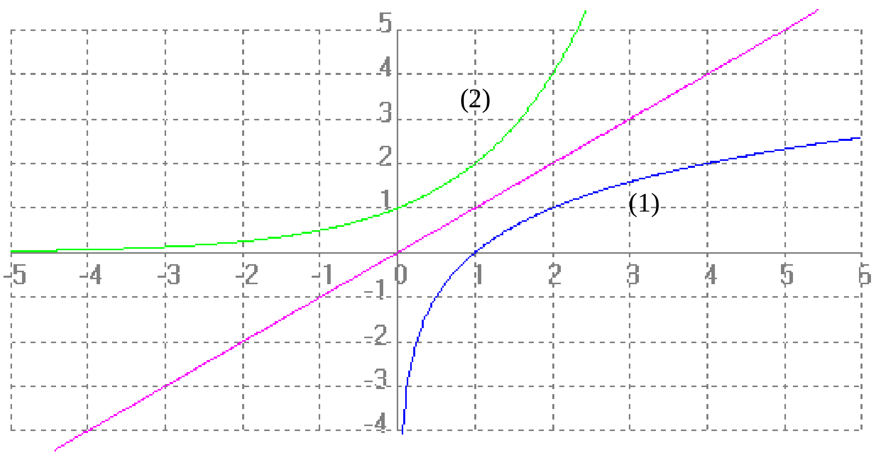

Fig. 33

(1): $f(x) = \log_2 x$ (2): $f(x) = 2^x$

Características:

i. $f(1)=0$

ii. $f(x)$ es ccreciemte,.

iii. La imagen son todos los números reales.

- $0<a<1$. Por ejemplo: $y=f(x):\Re^{+}\rightarrow\Re \quad / \quad y=\log_{1/2} x$

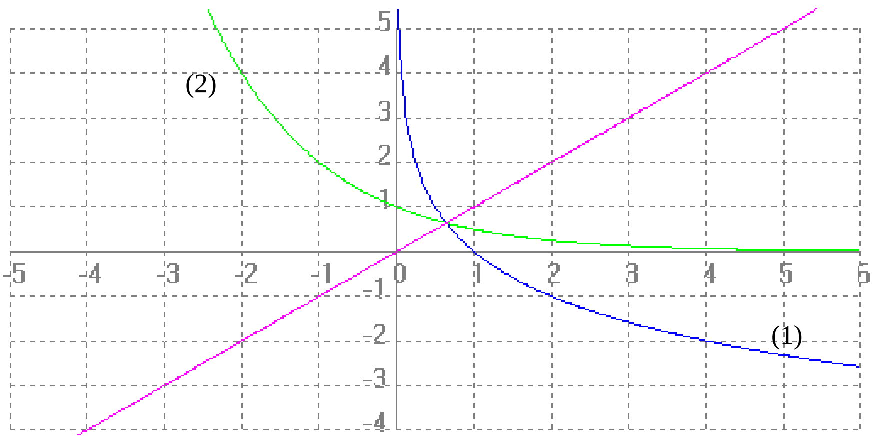

Fig. 34

(1): $f(x)=\log_{1/2} x$ (2): $f(x)=(1/2)^{x}$

.Características:

i. $f(1)=0$

ii. $f(x)$ es decreciente.

iii La imagen son todos los números reales.

14. *FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS*

Las funciones trigonométricas son importantes en el cálculo, no sólo por la relación con los lados y los ángulos de un triángulo, sino también por las propiedades que poseen como funciones.

Las seis funciones trigonométricas tienen en común una propiedad importante llamada *periodicidad.*

Definición 2.13:

Una función es periódica con período $P\neq 0$ si su dominio contiene $x+P$ siempre que contenga a x y si: $f(x+P)=f(x) \ \ \forall x\in Domf(x)$.

Las funciones $sen x$ y $\cos x$ son periódicas de período 2π puesto que:

$$sen(x+2\pi)=sen x \quad \text{y} \quad \cos(x+2\pi)=\cos x$$

Muchos problemas en Física e Ingeniería tratan fenómenos periódicos (tales como vibraciones, movimiento planetario y de ondas) y las funciones seno y coseno constituyen la base para el análisis matemático de tales problemas.

Otras características de estas funciones son:

- La *función seno* es impar ya que $sen(-x) = -senx$.
- $Dom(senx) = \Re$
- $\mathrm{Im}(senx) = [-1,1]$

La siguiente figura corresponde a la gráfica de la función $sen\,x$

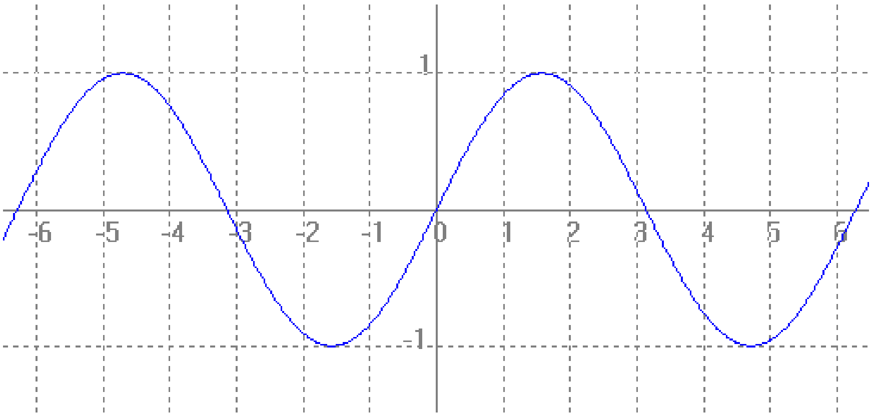

Fig. 35 $y = sen\ x$

- La *función coseno* es par ya que $\cos(-x) = \cos x$.
- $Dom(\cos x) = \Re$
- $\mathrm{Im}(\cos x) = [-1,1]$

La siguiente figura corresponde a la gráfica de la función $\cos x$

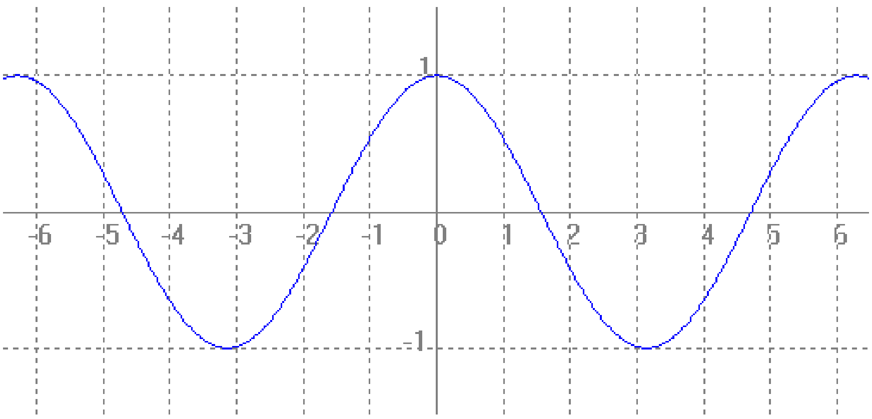

Fig. 36 $y = \cos\ x$

La curva de ambas gráficas se llama *sinusoide*.

A partir de las funciones seno y coseno definimos cuatro funciones trigonométricas:

$$tgx = \frac{senx}{\cos x} \qquad \cot gx = \frac{\cos x}{senx}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cos ecx = \frac{1}{senx}$$

Estas funciones están definidas para todos los valores reales de x excepto para los valores que anulan al denominador. También son funciones periódicas.

- La *función tangente* es impar ya que $tg(-x) = -tg\,x$.
- $Dom(tgx) = \Re - \left\{x : x = \pi/2 + n\pi ,\ n \in Z \right\}$ (se excluyen los valores que anulan al denominador).
- Las funciones $senx$ y $\cos x$ están acotadas desde que $|senx| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$ luego, al ser $tgx = \dfrac{senx}{\cos x}$, ésta puede tomar cualquier valor real siendo $\operatorname{Im}(tg\,x) = \Re$
- Es una función periódica de período π, puesto que:

$$tg(x+\pi) = \frac{sen(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-senx}{-\cos x} = tgx$$

La gráfica de la función tangente es:

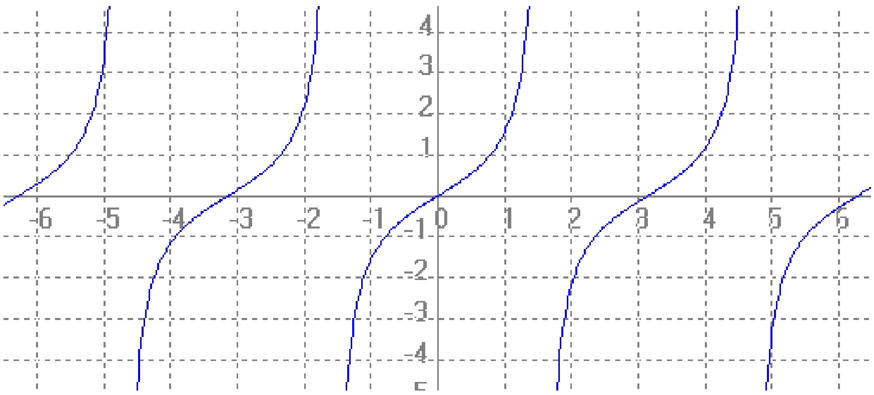

Fig. 37 $y = tg\ x$

Se deja al lector el análisis de las características de las siguientes funciones: $\cot g\,x, \sec x$ y $\cos ec\,x$.

15. *FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS*

Si restringimos el dominio de $f(x) = sen\,x$ al intervalo $\left[-\pi/2, \pi/2\right]$, donde es inyectiva, y el codominio al intervalo $[-1,1]$ donde es suryectiva, la función tiene inversa con dominio en $[-1,1]$ e imagen en $\left[-\pi/2, \pi/2\right]$ llamada *arcsenx* cuya gráfica es la siguiente:

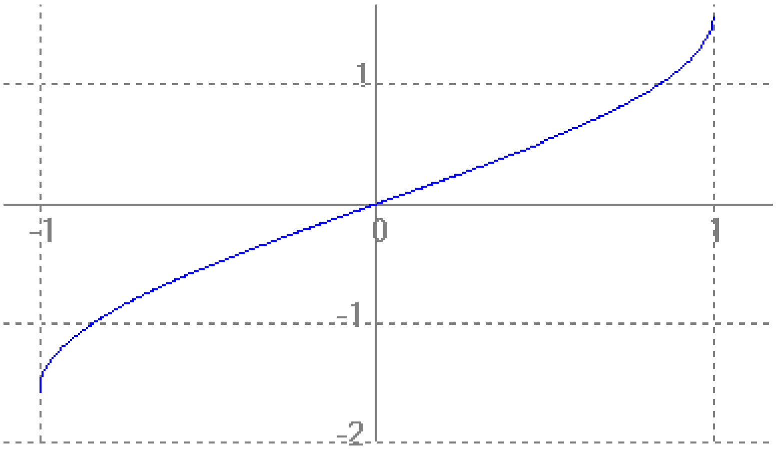

Fig. 38

$$x = arcsen\, y \quad \Leftrightarrow \quad y = sen\, x\,, \;\; x \in \left[-\pi/2, \pi/2\right]$$

En forma análoga, restringiendo el dominio y codominio de la función $y = \cos x$ a los intervalos $[0,\pi]$ y $[-1,1]$ respectivamente, se tiene la función inversa del coseno llamada *arc cosx*, con dominio en el $[-1,1]$ e imagen en el $[0,\pi]$.

La gráfica de esta función es:

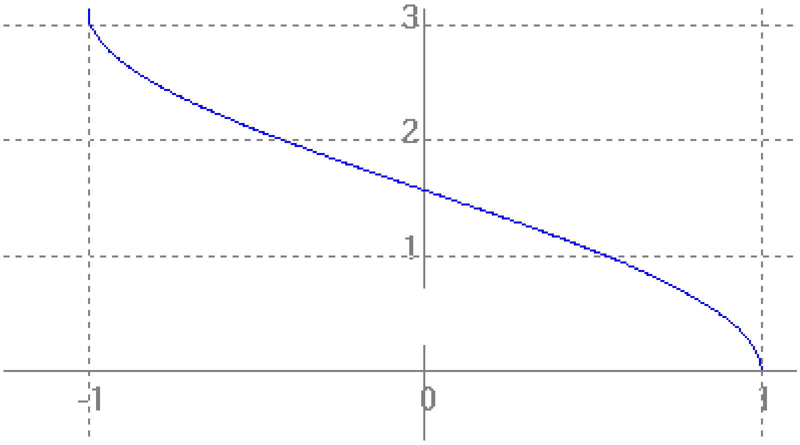

Fig. 39 $\quad y = arc\cos x$

$$x = arc\cos y \quad \Leftrightarrow \quad y = \cos x\,, \;\; x \in [0,\pi]$$

La función tangente es inyectiva en el intervalo $\left[-\pi/2, \pi/2\right]$ y suryectiva en $\Re$. La función inversa, definida de $\Re$ en $\left[-\pi/2, \pi/2\right]$, es el $arc\, tg\, x$.

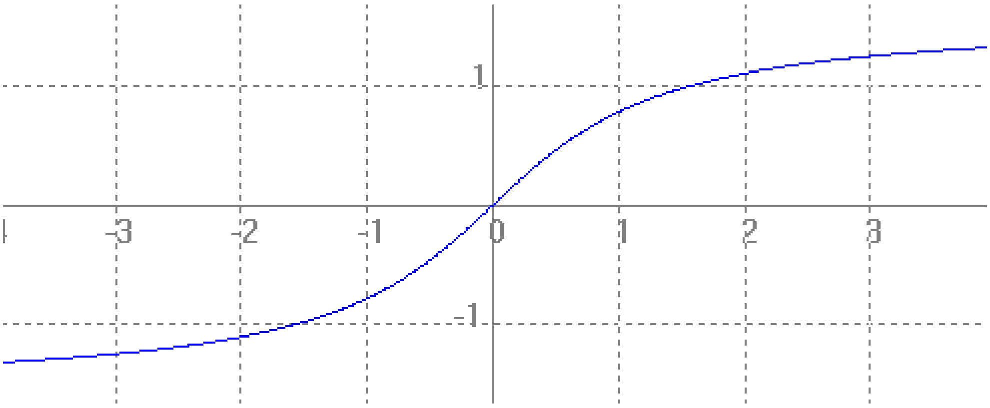

Fig. 40 $y = arctg\, x$

$$x = arctg\, y \quad \Leftrightarrow \quad y = tg\, x\,, \quad x \in \Re$$

Las restantes funciones trigonométricas inversas son:

- $y = arc\cot g\, x \qquad f : \Re \to (0, \pi)$
- $y = arc\sec x \qquad f : \Re - (-1,1) \to \left[\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)\right]$
- $y = arc\cos ec\, x \qquad f : \Re - (-1,1) \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

16. *FUNCIONES DEFINIDAS PARAMÉTRICAMENTE:*

Consideremos las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad (1)$$

donde t toma valores en el intervalo $[t_1, .t_2]$. A cada valor de t corresponden dos valores, uno de x y otro de y.

Considerando que los valores de x y de y son coordenadas de un punto en el plano, a cada valor de t corresponderá un punto de dicho plano. Este punto describe cierta curva en el plano, cuando t varía de t_1 a t_2.

Las ecuaciones (1) se llaman *ecuaciones paramétricas* de esta curva, en la que t se denomina parámetro.

Supongamos ahora que la función $x = f(t)$ tenga su inversa $t = h(x)$. Entonces y es función de x a través de t:

$$y = g(t) = g[h(x)]$$

Por lo tanto, las ecuaciones (1) determinan y en función de x y se dice que la función y de x viene dada en forma paramétrica.

La expresión $y = f(x)$ de la dependencia directa de y se obtiene eliminando el parámetro t de entre las ecuaciones (1).

Ejemplo:

Nos proponemos trazar la gráfica e identificar la curva definida por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$$

Solución:

Cada valor de *t* da un punto sobre la curva, como se ve en la tabla.

t	y	x
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

En la siguiente figura marcamos los puntos obtenidos al variar el parámetro *t* y obtenemos una curva.

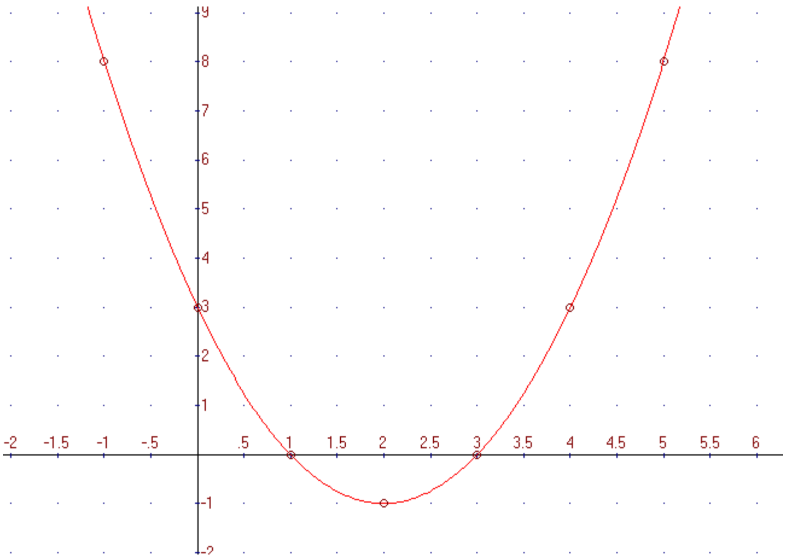

Fig. 41

La curva obtenida es una parábola. Esto puede confirmarse analíticamente eliminando el parámetro *t* como sigue:

$$x = t + 1 \quad \rightarrow \quad t = x - 1$$

Puesto que:

$$y = t^2 - 2t$$

se tiene:

$$y = (x-1)^2 - 2 \cdot (x-1) = x^2 - 4x + 3$$

que efectivamente corresponde a una parábola .

Transformaciones de funciones:

Al aplicar ciertas transformaciones a la gráfica de una función dada podemos obtener las gráficas de otras funciones relacionadas y así simplificar el trabajo al momento de trazarlas.

Vamos a considerar en primer lugar las *traslaciones*.

Desplazamientos horizontales y verticales:

Supongamos $c > 0$. Para obtener la gráfica de:

- $y = f(x) + c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia arriba.
- $y = f(x) - c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia abajo.
- $y = f(x - c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la derecha..
- $y = f(x + c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la izquierda..

Las siguientes gráficas corresponden a los desplazamientos de $f(x) = x^2$ tomando $c = 3$.

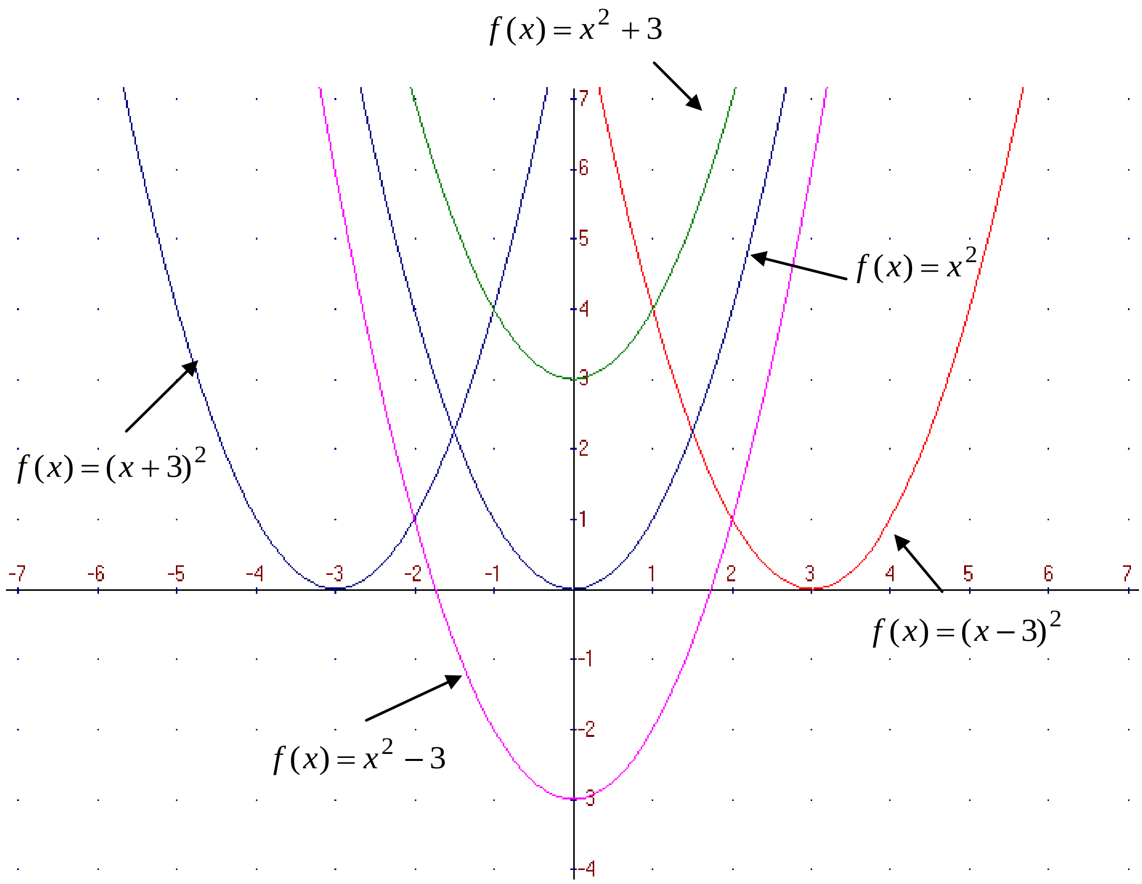

Fig. 42

Alargamientos y reflexiones:

Supongamos $c > 1$. Para obtener la gráfica de:

- $y = c \cdot f(x)$, alargamos verticalmente la gráfica de $f(x)$ en un factor *c*.
- $y = \frac{1}{c} \cdot f(x)$, comprimimos verticalmente la gráfica de $f(x)$ en un factor *c*.
- $y = f(c \cdot x)$, comprimimos horizontalmente la gráfica de $f(x)$ en un factor *c*.
- $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$, alargamos horizontalmente la gráfica de $f(x)$ un factor *c*.
- $y = -f(x)$, reflejamos la gráfica de $f(x)$ respecto al eje *y*.

Ejemplo 1:

En las siguientes gráficas se ilustran las transformaciones de alargamiento cuando se aplican a $f(x) = x^2$ con $c = 3$

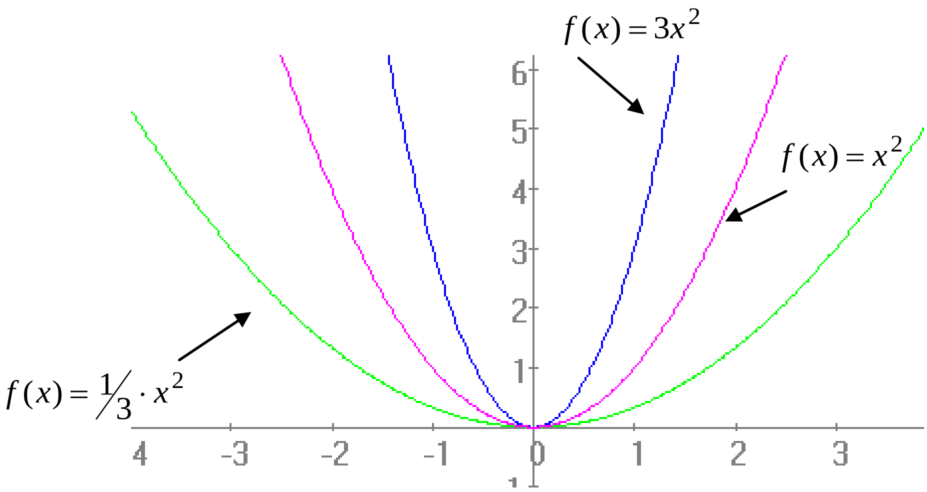

Fig. 43

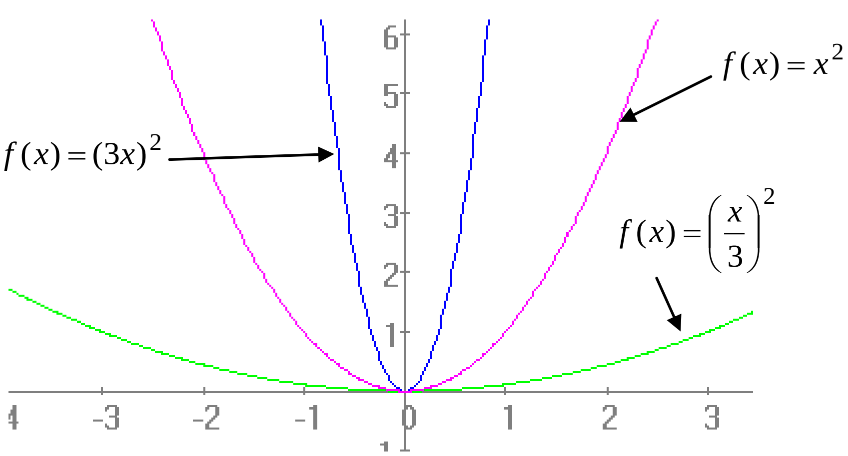

Fig. 44

Ejemplo 2:

Graficar la función $f(x) = \left| x^2 - 1 \right|$.

En primer lugar graficamos la parábola $y = x^2 - 1$ desplazando la parábola $y = x^2$ una unidad hacia abajo.

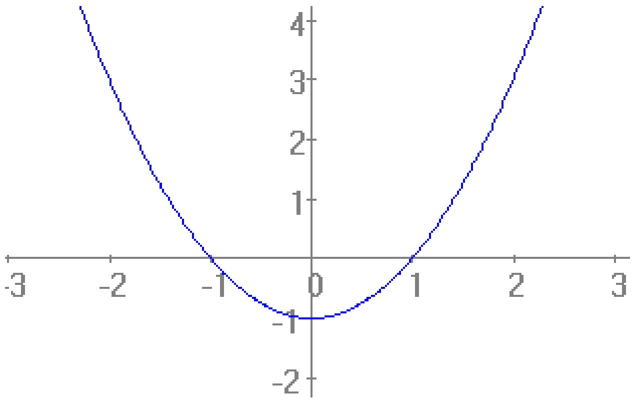

Fig. 45

Vemos que la gráfica se encuentra por debajo del eje x cuando $-1 < x < 1$, por lo tanto reflejamos esa parte de la gráfica respecto al eje x para obtener la gráfica de $y = \left| x^2 - 1 \right|$

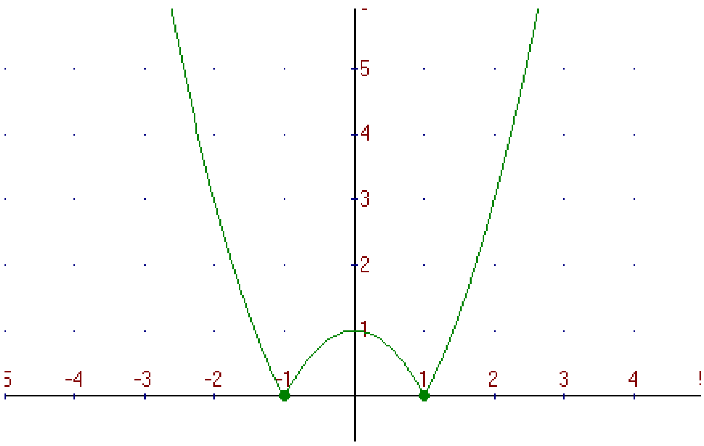

Fig. 46