Ciencias de la Computación I

Máquinas de Turing

Autómatas Linealmente Acotados

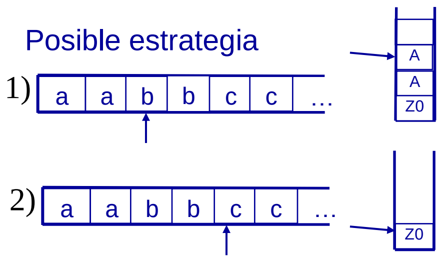
Motivación

-¿Es posible diseñar un AP que reconozca el lenguaje L_1?

$L_1 = \{ a^n b^n c^n / n > 0 \}$

abc
aabbcc
aaabbbccc
…

Posible estrategia



Apilamos una A con cada a

Desapilamos una A con cada b

No se pueden comparar las c´s, ya que la pila quedo vacía

No existe estrategia para reconocer este tipo de lenguajes con un AP

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA - 2012

Máquinas de Turing

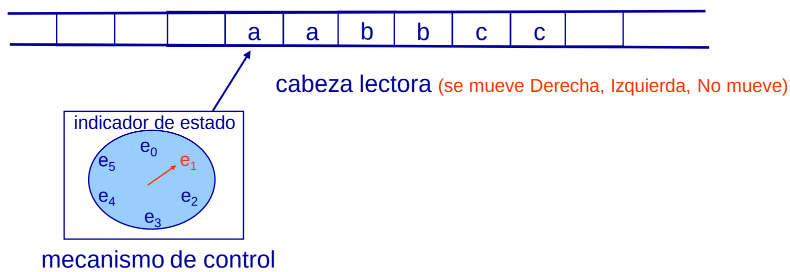
Es necesario agregar algo a los AP para incrementar
su poder computacional

1) Leer y reemplazar símbolos en la cinta de entrada

2) Agregar movimientos a la cabeza lectora (Izq., Der., o No moverse)

Máquinas de Turing

cinta de entrada (espacio infinito a izquierda y derecha, o sólo a derecha) contiene cadena a ser leída



<u>Estados de MT</u>

✓ Cantidad finita.

✓ Un estado inicial.

✓ Estados finales o de aceptación.

Dada una cadena x en la cinta de entrada, si la MT <u>lee toda la cadena</u> y:

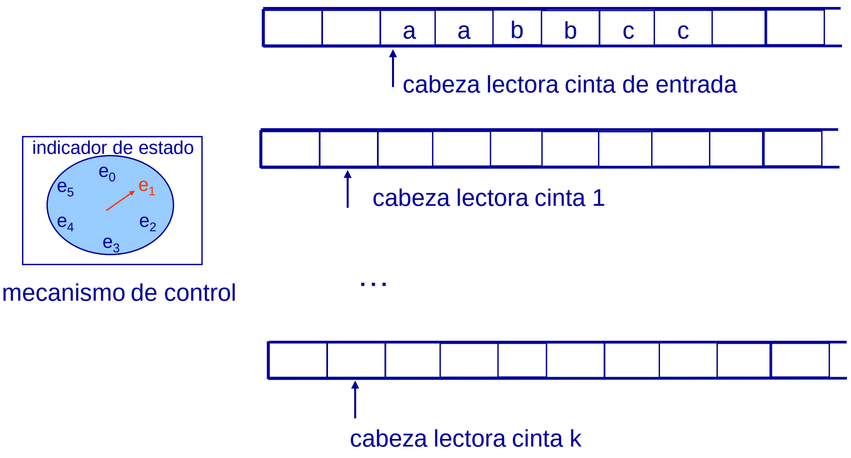
➢ **termina en estado final → cadena aceptada**

➢ **termina en estado no final → cadena rechazada**

Máquinas de Turing Multicinta

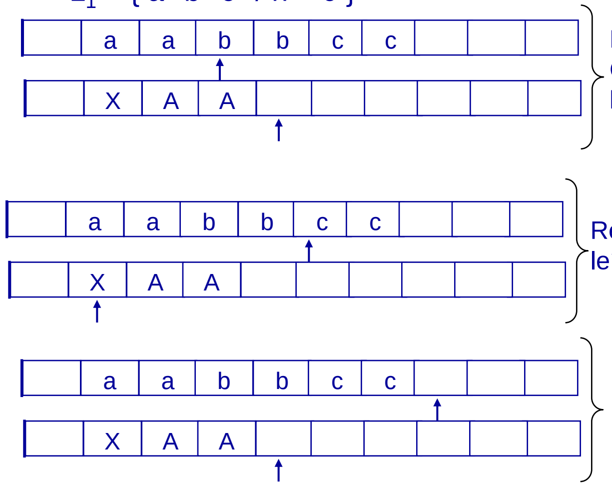
Varias cintas (cada una un espacio ilimitado)

Una cabeza lectora independiente para cada cinta



Uso de las cintas

$L_1 = \{ a^n\, b^n\, c^n \,/\, n > 0 \}$



Marco inicio con X
Copio una A con cada a leída hasta llegar a b y blanco

Retrocedo una A con cada b leída. Si |A| = |b| → se lee c y X

Avanza una A con cada c leída. Si |A| = |c| → se lee blanco y blanco

Máquina de Turing

Formalmente, una MT reconocedora determinística se define como una 7-upla

$MT= <E, A, C, \delta, e_0, B, F>$

- ✓ E es un conjunto finito de estados; $E \neq \varnothing$
- ✓ A es el alfabeto de entrada

Auxiliares $\cap$ A= $\varnothing$

$A \subseteq C$

- ✓ C es el alfabeto de la cinta $C = A \cup \{B\} \cup$ Auxiliares
- ✓ δ es la función de transición de estados

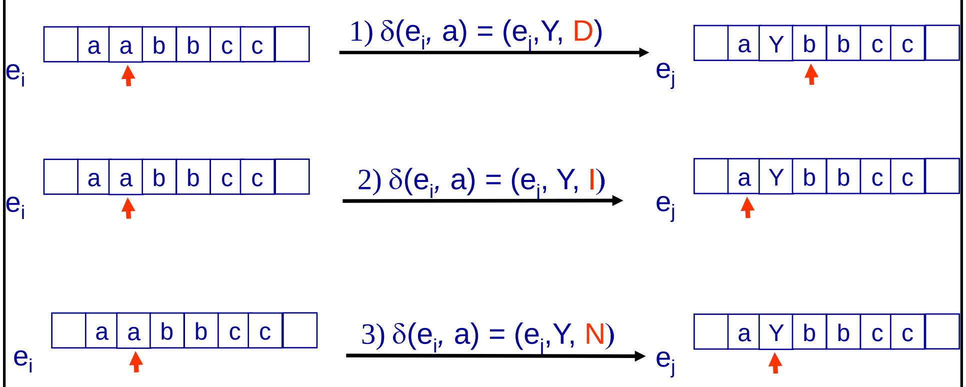
$\delta: E \times C \rightarrow E \times C \times \{I, D, N\}$ 1-cinta

$\delta: E \times C^k \rightarrow E \times (C \times \{I, D, N\})^k$ k-cintas

- ✓ e_0 es el estado inicial; $e_0 \in E$
- ✓ B es el símbolo blanco $B \in C$
- ✓ F es el conjunto de estados finales o de aceptación; $F \subseteq E$

Transiciones de MT (1 cinta)

✓ δ es la función de transición de estados $\delta: E \times C \rightarrow E \times C \times \{I,D,N\}$



donde a, b, c, *Y* $\in$ *C*; e_i , e_j $\in$ E

Relación de Transición formal

✓ δ es la función de transición de estados

δ: E x C $\rightarrow$ E x C x {I,D,N} (1 cinta)

Formalmente se define una relación de transición $\vdash$

$x_1x_2\ldots x_{k-1}e_i\, x_k\, x_{k+1}\ldots.\, x_n \vdash x_1x_2\ldots x_{k-1}Y\, e_j\, x_{k+1}\ldots.\, x_n$ **si $\delta(e_i, x_k) = (e_j,Y, D)$**

$x_1x_2\ldots x_{k-1}e_i\, x_k\, x_{k+1}\ldots.\, x_n \vdash x_1x_2\ldots e_j\, x_{k-1}Y\, x_{k+1}\ldots.\, x_n$ **si $\delta(e_i, x_k) = (e_j,Y, I)$**

$x_1x_2\ldots x_{k-1}e_i\, x_k\, x_{k+1}\ldots.\, x_n \vdash x_1x_2\ldots x_{k-1}\, e_j\, Y\, x_{k+1}\ldots.\, x_n$ **si $\delta(e_i, x_k) = (e_j,Y, N)$**

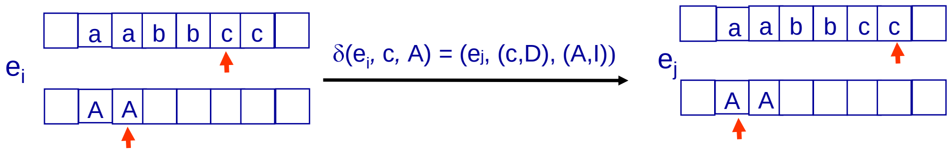
donde $x_1, \ldots, x_n$, $Y \in C$; e_i, $e_j \in E$

Transiciones de MT (k-cintas)

✓ δ es la función de transición de estados δ: E x $C^k \rightarrow$ E x (C x {I,D,N}$)^k$

En cada cinta: se lee la celda apuntada por la cabeza lectora, se reemplaza el símbolo leído y se hace un movimiento

<u>Ejemplo 2-cintas</u>



donde a, b, c, A $\in$ C; e_i , e_j $\in$ E

Máquinas de Turing Reconocedoras

Cadena aceptada por MT

Una cadena $\omega \in A^*$ es aceptada por MT = <E, *A* , *C*, δ, e_0, B, F> sí y sólo sí

$e_0\, \omega \; \vdash^{*} \alpha_1\, e_f\, \alpha_2$

$\vdash^{*}$ MT empezando en e_0 con la cabeza lectora apuntando al primer símbolo de ω, luego de varias transiciones termina de leer toda la cadena ω, y <u>llega a un estado $e_f \in F$</u>; en la cinta pueden quedar las cadenas $\alpha_1, \alpha_2 \in C^*$ con la cabeza lectora apuntando al primer símbolo de α_2

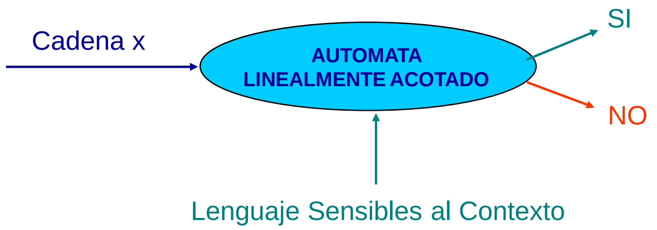
Luego, el lenguaje aceptado por MT es:

$L(MT) = \{ \omega \;\; / \;\; e_0\, \omega \vdash^{*} \alpha_1\, e_f\, \alpha_2 \;\text{ y }\; \omega \in A^* \;\text{ y }\; e_f \in F \text{ y } \alpha_1, \alpha_2 \in C^* \}$

Los lenguajes aceptados por las **Máquinas de Turing** se denominan **Lenguajes Estructurados por frases o Recursivos enumerables** o de **Tipo 0**.

Autómatas Linealmente Acotados (ALA)

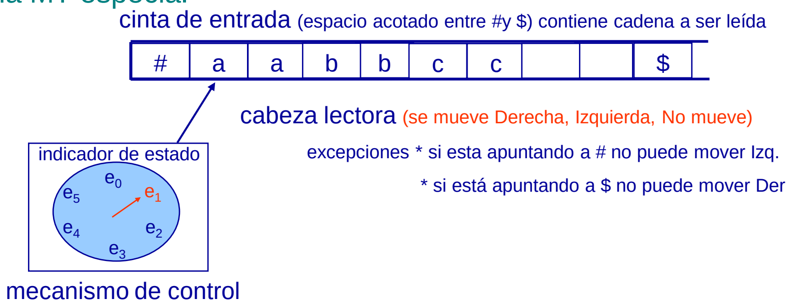
Dado un lenguaje L, sensible al contexto, definido sobre un alfabeto A y una cadena x arbitraria, determinar si $x \in L$ o $x \notin L$.



- Dos puntos de vista:
  - ➢ Como dispositivo **reconocedor** de la pertenencia de una cadena a un lenguaje sensible al contexto.
  - ➢ Como **traductor** de una cadena en otra (Ej. Cálculo de funciones)

Autómatas Linealmente Acotados (ALA)

ALA es una MT especial



Estados del ALA

✓ Cantidad finita.

✓ Un estado inicial.

✓ Estados finales o de aceptación.

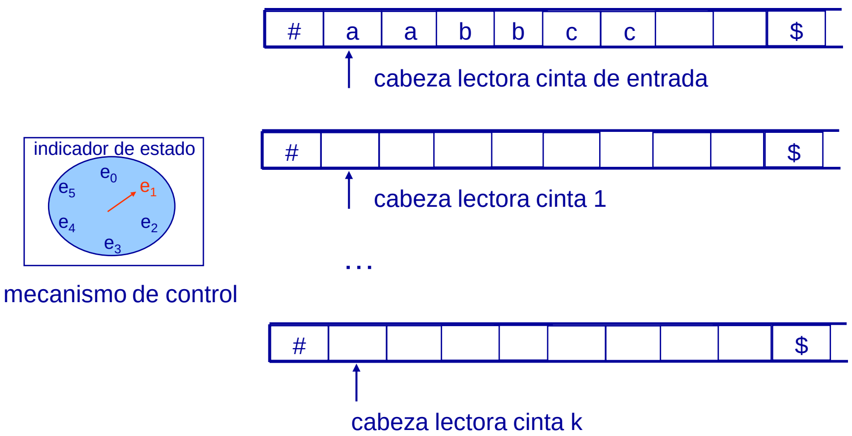
Dada una cadena x en la cinta de entrada, si el ALA lee toda la cadena y:

- **termina en el estado final → cadena aceptada**
- **termina en el estado no final → cadena rechazada**

Autómatas Linealmente Acotados Multicinta

Varias cintas (cada una en espacio acotado entre # y $)

Una cabeza lectora independiente para cada cinta



Autómata Linealmente Acotado

Formalmente, un ALA reconocedor determinístico se define como una 9-upla

ALA= <E, A, C, δ, e_0, B, F,#, $> donde #, $ inicio y fin de espacio

- ✓ E es un conjunto finito de estados; $E \neq \varnothing$
- ✓ A es el alfabeto de entrada

Auxiliares $\cap$ A= $\varnothing$

$A \subseteq C$

- ✓ C es el alfabeto de cinta. $C = A \cup \{B, \$, \#\} \cup$ Auxiliares
- ✓ δ es la función de transición de estados

$\delta: E \times C \rightarrow E \times C \times \{I,D,N\}$ 1-cinta (*)

$\delta: E \times C^k \rightarrow E \times (C \times \{I,D,N\})^k$ k-cintas (*)

(*) En ninguna de las cintas, se permiten movimientos a la izquierda de # ni a la derecha de $. Tampoco se permite reescribir los símbolos # y $.

- ✓ e_0 es el estado inicial; $e_0 \in E$
- ✓ B es el blanco $B \in C$
- ✓ F es el conjunto de estados finales o de aceptación; $F \subseteq E$

ALA y Máquina de Turing

- En la práctica vamos a usar MT para reconocer lenguajes Sensibles al Contexto (tipo 1). Sin embargo, se debe aclarar que lo correcto es diseñar un ALA para este tipo de lenguajes.

- La razón es que si modelaran con ALA se tendría que calcular el espacio de cinta necesario entre # y $ y no es un tema que se estudia en esta materia.

Máquinas de Turing

- MT multi-cinta y MT 1-cinta

  Son modelos equivalentes. Todo lo que se puede hacer con un modelo de k-cintas también se puede diseñar con un modelo de 1-cinta.

- En el modelo multi-cinta resulta más fácil el diseño del autómata

Reconocimiento de lenguajes

$L = \{ a^n b^n c^{2n} / n > 0 \}$

Estado actual	C1	C2	C1		C2		Nuevo estado
e0	a	B	a	N	X	D	e1
e1	a	B	a	D	A	D	e1
	b	B	b	N	B	I	e2
e2	b	A	b	D	A	I	e2
	c	X	c	N	X	D	e3
e3	c	A	c	D	A	N	e4
	B	B	B	N	B	N	e5
e4	c	A	c	D	A	D	e3
e5	-	-	-	-	-	-	-

$MT=<\{e_0,e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\},\{a, b, c\},\{X, A, B, a, b, c\},\delta, e_0, B, \{e_5\}>$

$L = \{ wcw \ / \ w \in \{a,b\}^* \}$ $\{c, abcab, bbcbb\ldots..\}$

Estado actual	C1	C2	C1		C2		Nuevo estado
e0	c	B	c	D	B	N	e4
	a	B	a	N	X	D	e1
	b	B	b	N	X	D	e1
e1	a	B	a	D	a	D	e1
	b	B	b	D	b	D	e1
	c	B	c	N	B	I	e2
e2	c	a	c	N	a	I	e2
	c	b	c	N	b	I	e2
	c	X	c	D	X	D	e3
e3	a	a	a	D	a	D	e3
	b	b	b	D	b	D	e3
	B	B	B	N	B	N	e5
e4	B	B	B	N	B	N	e5
e5	-	-	-	-	-	-	-

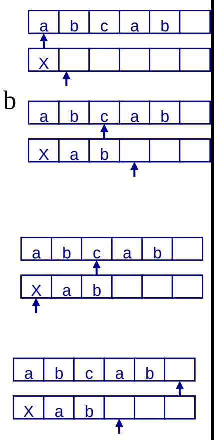
c
marca X
marca X

Copia a o b
hasta c

retrocede
a o b
hasta X

compara
igualdad

después de c hay blanco?



Máquina de Turing (determinística y no det.)

Formalmente, una MT se define como una 7-upla
MT= <E, A, C, δ, e_0, B, F>

- ✓ $\delta: E \times C^k \rightarrow E \times (C \times \{I,D,N\})^K$ k-cintas (determinística)
- ✓ $\delta: E \times C^k \rightarrow P_f(E \times (C \times \{I,D,N\})^k)$ k-cintas (no determinística)

P_f: subconjuntos finitos

Ejemplo no det $\delta(e_1, a, X, X) = \begin{cases} e_1 \ (a, D) \ (X, D) \ (X, D) \\ e_2 \ (A, N) \ (Y, D) \ (Y, D) \\ \ldots \end{cases}$

$a, A, X, Y \in C$ y $e_1, e_2 \in E$

Existe equivalencia entre el modelo MT determinístico y MT no determinístico $\rightarrow$ aceptan los mismos lenguajes.

L = { ww / w ∈ {a,b}* }   {ε, abab,bbbb, abaaba…..}

Estado actual	C1	C2	C1		C2		Nuevo estado
e0	B	B	B	N	B	N	e4
	a	B	a	N	X	D	e1
	b	B	b	N	X	D	e1
e1	a	B	a	D	a	D	e1
	b	B	b	D	b	D	e1
	a	B	a	N	B	I	e2
	b	B	b	N	B	I	e2
e2	a	a	a	N	a	I	e2
	a	b	a	N	b	I	e2
	b	b	b	N	b	I	e2
	b	a	b	N	a	I	e2
	a	X	a	N	X	D	e3
	b	X	b	N	X	D	e3
e3	a	a	a	D	a	D	e3
	b	b	b	D	b	D	e3
	B	B	B	N	B	N	e4
e4	-	-	-	-	-	-	-

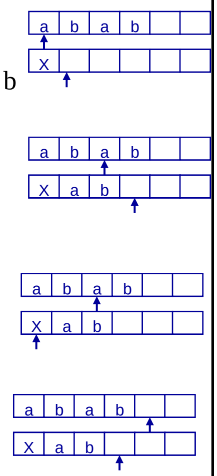
B
marca X
marca X

Copia a o b

No copia
mas

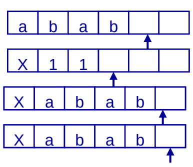
retrocede
a o b
hasta X

compara
igualdad

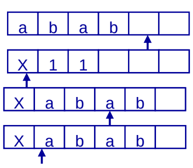


Solución con MT determinística para el ejemplo

L = { ww / w ∈ {a,b}* }   {ε, abab,bbbb, abaaba…..}



C1: la cadena de entrada ww
C2: Calcular en unario longitud=|ww| / 2
C3: Copiar la cadena ww
C4: Copiar la cadena ww



Usar la longitud unaria de C2 para posicionar al principio de la 2da w de C3 y al principio de la 1er w en C4

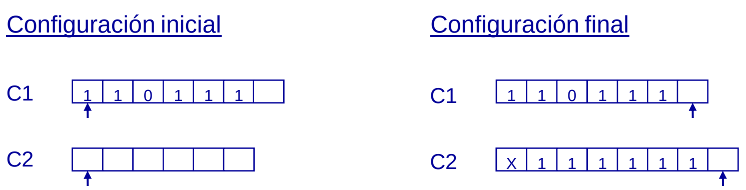
Comparar la 2da w en C3 y la 1er w en C4

Máquinas de Turing: Cálculo de Funciones

Ejemplo:

Diseñar una MT que calcule el producto de dos números naturales n, m mayores que 0, codificados en unario.

Inicialmente n y m se encuentran en la cinta de entrada C1, separados por un símbolo 0, en este orden.
El resultado n*m queda en C2.



Cálculo de n*m siendo n, m >0 y números unarios.

Estado actual	C1	C2	C1		C2		Nuevo estado
e0	1	B	1	N	X	D	e1
e1	1	B	Z	D	B	N	e2
	0	B	0	N	B	N	e6
e2	1	B	1	D	B	N	e2
	0	B	0	D	B	N	e3
e3	1	B	1	D	1	D	e4
e4	1	B	1	D	1	D	e4
	B	B	B	I	B	N	e5
e5	1	B	1	I	B	N	e5
	0	B	0	I	B	N	e5
	Z	B	Z	D	B	N	e1
e6	-	-	-	-	-	-	-

- e0: C1 empieza con 1 y marca C2
- e1: Marca un 1 de n con Z. Si marcó todo n con Z, termina
- e2: Avanza hasta fin de n
- e3: C2 empieza con 1, empieza a copiar m en C2
- e4: Copia resto de m en C2
- e5: Retrocede C1 hasta Z

MT=<$\{e_0,e_1,e_2,e_3,e_4,e_5, e_6\},\{0, 1\},\{B, X, Z, 0, 1\},\delta, e_0, B, \{e_6\}$>