UNIDAD 3

LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Cuando empezó a desarrollarse el cálculo la mayoría de las funciones con que se trabajaba eran continuas y no había necesidad de precisar sobre el concepto exacto de continuidad. En el Siglo XVIII con los trabajos de J.B. Fourier (1758-1850) aparecen algunas funciones discontinuas que obligan a los matemáticos del Siglo XIX a revisar cuidadosamente el significado del concepto de continuidad. Una definición satisfactoria del mismo fue formulada en 1821 por el matemático francés Agustín L. Cauchy (1789-1851), la que es usada todavía y puede ser expresada con mayor facilidad dando primero el concepto de límite.
Siguiendo esta línea analizaremos primero el concepto de límite de una función y posteriormente la continuidad.

Límite de una función

Sea $f(x)$ una función dada y a un número fijo. Para cada valor x en el dominio de $f(x)$ existe un y en el recorrido de $f(x)$ tal que el par ordenado (x, y) pertenece al gráfico de la función. Se quiere investigar el comportamiento de la función $f(x)$ cuando la variable x se aproxima al punto fijo a.

En ningún momento nos referimos al valor de $f(x)$ cuando x es igual al número a. Es más, generalmente en los casos de interés, ocurre que la función a estudiar ni siquiera está definida en el punto $x = a$.
Expresamos la aproximación de $f(x)$ cuando x se acerca al punto fijo a en tres formas diferentes siendo ellas equivalentes:

- El número $f(x)$ tiende al número L cuando x tiende al número fijo a.
- La distancia entre $f(x)$ y L tiende a cero cuando la distancia entre x y a tiende a cero.
- El número $f(x)$ resulta una buena aproximación del número L cuando x está suficientemente próximo al número a.

Cuando los enunciados se satisfacen para un cierto número L, diremos que L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende al número a.
En forma simbólica:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si no existe un número L para el cual se cumpla las afirmaciones anteriores se dice que $f(x)$ carece de límite cuando x tiende al valor a o que $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.

Puesto que los enunciados anteriores contienen expresiones ambiguas como "se aproxima", "tiende a cero", "buena aproximación" y "suficientemente próximo", resultan demasiado subjetivas para conformar una definición matemática. Por lo tanto, se requiere una definición más precisa que exprese matemáticamente dichos enunciados. Para lograr esta precisión, la validez de la aproximación de $f(x)$ al número L se puede medir mediante una tolerancia ε.

Dada una tolerancia ε, la diferencia entre $f(x)$ y el número L será menor que ε cuando x esté lo suficientemente próximo al número a sin llegar a tomar este valor.

Definición 3.1:

La función $f(x)$ tiene límite L cuando x tiende al número a si, para todo número positivo ε, por pequeño que este sea, puede encontrarse otro δ (también positivo y dependiente de ε), tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ para todo $x \neq a$ que satisfaga la desigualdad $|x-a|<\delta$. Es decir:

$f(x) \to L$ cuando $x \to a$ o $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ sí y sólo sí para todo número positivo real ε (tan pequeño como se quiera) se puede encontrar otro número real llamado δ que depende del número ε dado y tal que

$$|f(x)-L|<\varepsilon \text{ siempre que } |x-a|<\delta \text{ para } x \neq a$$

Supondremos en todos los casos, a menos que se aclare previamente, que $L \neq \pm\infty$, es decir, la existencia del límite será siempre finito.

Ejemplo 1:

Sea $f(x)$ una función de $\Re$ en $\Re$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & si \quad x \neq 1 \\ 1/2 & si \quad x=1 \end{cases}$$

El gráfico de $f(x)$ consiste en el punto aislado $(1, 1/2)$ y una recta de la cual se ha excluido el punto $(1,2)$.

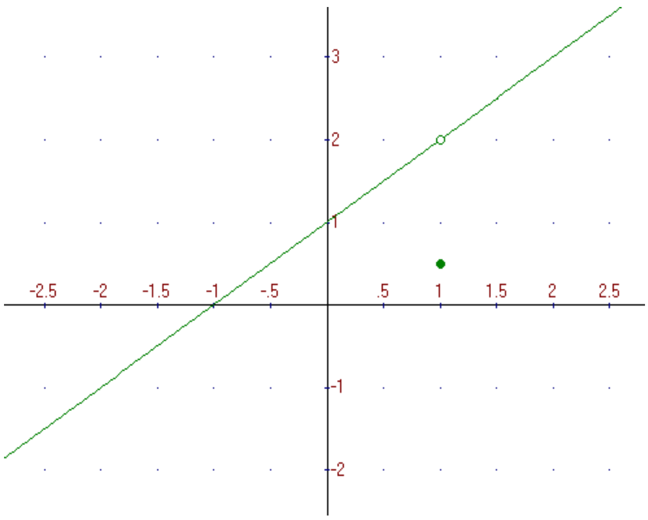


Fig. 1

Dando valores a x cerca del punto 1 se obtienen los valores de $f(x)$ sin preocuparnos lo que ocurra en el punto $x=1$.

x	0,8	0,9	0,99	0,999	...	1	…	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	1,8	1,9	1,99	1,999	…	xxx	…	2,001	2,01	2,1

Los valores de $f(x)$ se acercan al número 2 cuando los valores de x se acercan al número 1. Más aún, la función puede alcanzar cualquier valor próximo a 2 con tal de considerar x suficientemente próximo al número 1.

Si se quiere que el valor absoluto de la diferencia entre 2 y $f(x)$ sea menor que un diezmilésimo, es decir, dado el ε del orden 10^{-4}, se desea encontrar un δ que depende de ε $(\delta = \delta(\varepsilon))$ tal que

$$|f(x) - 2| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{para} \quad x \neq 1$$

$$|f(x) - 2| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |(x+1) - 2| < 0{,}0001 \quad \Leftrightarrow |x - 1| < 0{,}0001$$

por lo tanto, definiendo $\delta = \varepsilon = 0{,}0001$ se cumple $|x - 1| < \delta$.
Luego, invirtiendo el camino que nos permitió encontrar δ se tiene:

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |x - 1 - 1 + 1| < \delta \Rightarrow |(x+1) - 2| < \delta = \varepsilon = 0{,}0001$$

Ejemplo 2:

Sea $f(x)$ una función de $[0,10]$ en $\Re$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \neq 2 \\ 5 & si \quad x = 2 \end{cases}$$

La gráfica consiste en el punto aislado $(2\,,\,5)$ y una porción de parábola entre 0 y 10 de la cual se ha excluido el punto $(2\,,\,4)$.

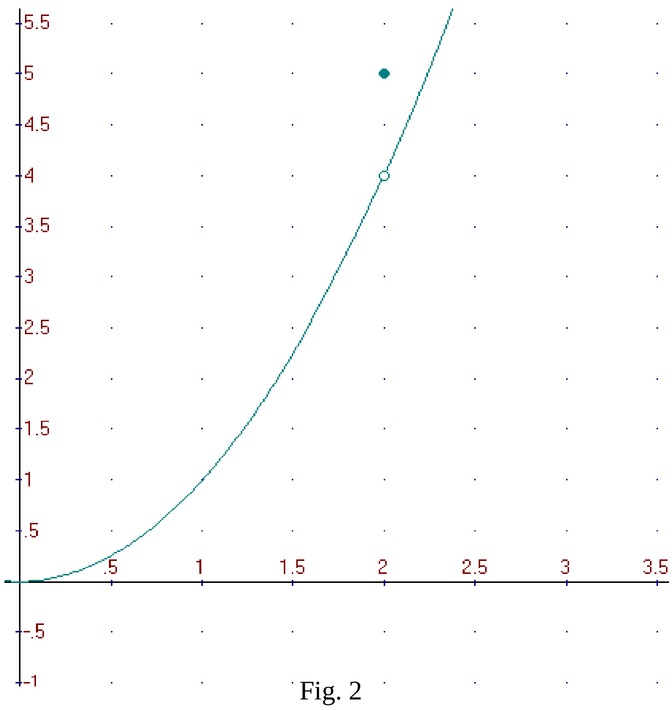


Fig. 2

Los valores de la función se acercan al número 4 cuando los valores de x se acercan al número 2. Dada una tolerancia $\varepsilon = 0{,}0001$ se quiere encontrar un δ que dependa de $\varepsilon = 0{,}0001$ tal que: si

$$|x-2| < \delta \quad \text{emtonces} \quad |f(x)-4| < 0{,}0001 \quad \text{para} \quad x \neq 2 .$$

$$|f(x)-4| < 0{,}0001 \quad \Leftrightarrow \quad \left|x^2-4\right| < 0{,}0001 \quad \Leftrightarrow |x-2| < \frac{0{,}0001}{|x+2|}$$

Como $x \in [0,10]$ entonces $0 \leq x \leq 10$.

Luego: $\quad 2 \leq x+2 \leq 12 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{12} \leq \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{0{,}0001}{12} \leq \frac{0{,}0001}{x+2} \leq \frac{0{,}0001}{2}$

Tomando $\delta < \frac{0{,}0001}{|x+2|}$ se tiene que:

Si $x = 0 \qquad \delta < \frac{0{,}0001}{2}$ y si $x = 10 \qquad \delta < \frac{0{,}0001}{12}$.

Como $\frac{0{,}0001}{12} < \frac{0{,}0001}{2}$, basta elegir $0 < \delta < \frac{0{,}0001}{12}$.

Invirtiendo el camino que nos permitió encontrar δ, obtenemos:

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x-2| < \frac{0{,}0001}{12} \Rightarrow |x+2| \cdot |x-2| < |x+2| \cdot \frac{0{,}0001}{12} \leq \frac{0{,}0001}{12} \cdot 12$$

Por consiguiente: $\left|x^2-4\right| < 0{,}0001 \quad |f(x)-4| < \varepsilon$ o sea

Con los ejemplos 1 y 2 se trata de mostrar la técnica de encontrar la aproximación de la variable x al punto de estudio conociendo la aproximación de $f(x)$.

La definición 3.1 también se puede expresar en término de entorno, entorno reducido y punto de acumulación. Antes de hacerlo veamos las siguientes definiciones:

Definición 3.2: Entorno de un punto

Se denomina entorno de un punto a a cualquier intervalo abierto que lo contenga, siendo a el punto medio del intervalo.

Notación: designaremos los entornos con $E(a)$. Puesto que un entorno $E(a)$ es un intervalo abierto simétrico respecto a a, consta de todos los números reales x que satisfacen $a-r < x < a+r$ para un cierto $r > 0$. El número positivo r se llama radio del entorno. Si queremos especificar el radio del entorno ponemos $E_r(a)$. Puesto que:

$$a-r < x < a+r \rightarrow -r < x-a < r \rightarrow |x-a| < r$$

$E_r(a)$ consta de todos los puntos x cuya distancia a a es menor que r.

Cuando en $E_r(a)$ se excluye el punto *a*, el entorno se llama *entorno reducido de a* y lo notaremos $\left(E_r^*(a)\right)$.

Definición 3.3: Punto de acumulación

Un punto *a* de un conjunto *X* es de acumulación cuando en todo $E_r(a)$ existe un punto de *x* distinto de *a*.

La desigualdad $0<|x-a|<\delta$ con $x \neq a$ significa que la variable *x* pertenece al entorno reducido de *a* de radio δ $\left(E_\delta^*(a)\right)$. En forma similar, $|f(x)-L|<\varepsilon$ significa que la función $f(x)$ pertenece al entorno de centro *L* y radio ε $\left(E_\varepsilon(L)\right)$.
El punto *a* es un punto de acumulación de la función $f(x)$. Teniendo las equivalencias anteriores la definición 1 se puede expresar de la siguiente manera.

Definición 3.4:

Los valores de la función $f(x)$ tienen como límite al número real *L* en el punto *a* que es un punto de acumulación de su dominio, sí y sólo sí para todo entorno de *L* existe un entorno reducido de *a* tal que:

$$x \in \left(Df(x) \cap E_\delta^*(a)\right) \Rightarrow f(x) \in E_\varepsilon(L)$$

Geométricamente significa que para cualquier par de rectas horizontales l y l' con el punto (a,L) ubicado entre las dos rectas y a igual distancia de cada una de ellas, existen dos rectas verticales m y m' con el punto (a,L) ubicado entre ambas y a igual distancia de ambas, tales que todo punto del gráfico de $f(x)$ con abscisa distinta de *a* y ubicado entre m y m', también está entre l y l'.

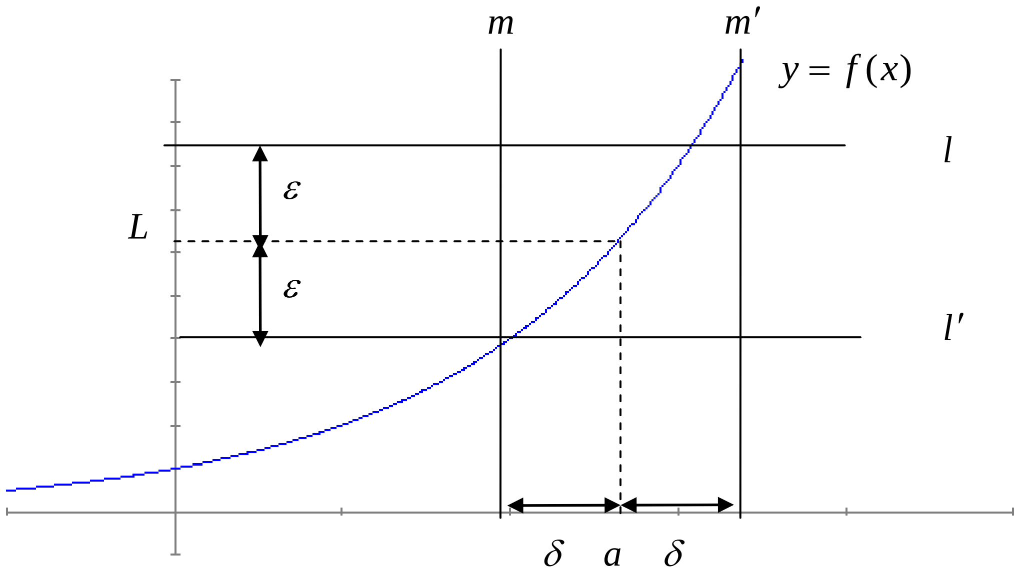


Fig. 3

Límites laterales

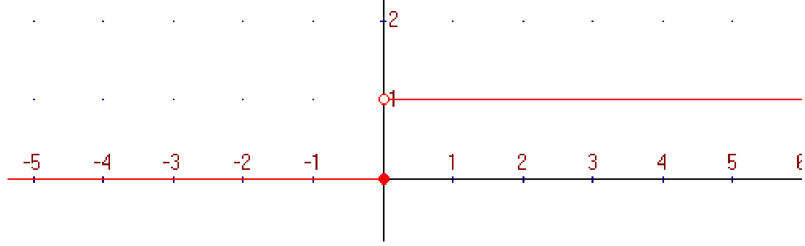
A veces interesa el comportamiento de los valores de la función en puntos del dominio a un solo lado del punto de acumulación *a*. Sea h una función de $\Re$ en $\Re$ definida por:

$$h(x)=\begin{cases}1 & si \quad x>0\\ 0 & si \quad x\leq 0\end{cases}$$

El $\underset{x\to 0}{lím}\ h(x)$ no existe. En efecto, probaremos que:

a) El número 1 no es el número buscado.
b) Ningún número real *L* es dicho límite.

Para demostrar que 1 no es el límite de $h(x)$ cuando *x* tiende a cero, consideremos un entorno de 1 de radio $\varepsilon=\frac{1}{3}$.



Fig, 4

a) En cualquier entorno reducido de centro 0, incluido en el eje *x*, hay puntos $x\in Dom\,h(x)$ *a* la izquierda de cero para los cuales $h(x)=0$. O sea, $h(x)$ está fuera del entorno $E_{1/3}(1)$.

b) Para demostrar que ningún número real $L\neq 1$ es el límite de los valores de $h(x)$ en 0, seleccionamos $\varepsilon=\frac{|1-L|}{3}>0$
En cualquier entorno reducido del origen, hay puntos *x* a la derecha del cero, para los cuales $h(x)=1$. Luego: $|h(x)-L|=|1-L|>\frac{1-L}{3}=\varepsilon$.

Por lo tanto, queda establecido que la función $h(x)$ no admite a ningún número real como límite en el punto 0.

Los puntos situados a la derecha del origen, es decir, los elementos de $\Re^+$ tienen al cero como punto de acumulación, entonces podemos considerar el límite de $h(x)$ cuando *x* tiende a cero solamente con valores positivos.
Para los $x>0$ si *x* se aproxima a cero el límite de $h(x)$ existe y el valor de ese límite es 1. Para indicar esta situación se utiliza la notación: $\underset{x\to 0^+}{lím}\ h(x)$. En este caso, $\underset{x\to 0^+}{lím}\ h(x)=1$ que se lee: " 1 es el límite de los valores de $h(x)$ cuando *x* tiende a 0 por la derecha".

Por procedimiento similar $\underset{x\to 0^-}{lím}\ h(x)=0$ es el límite por la izquierda.

Límite por la derecha

Definición 3.5:

Los valores de la función $f(x)$ tienen como límite por la derecha al número real L en el punto a sí y sólo sí

1) a es punto de acumulación del conjunto $A = \{x : x \in Df(x) \ \wedge \ x > a\}$.
2) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in Df(x)$ y $a < x < a + \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Se denota este límite como $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$

Límite por la izquierda

Definición 3.6:

Los valores de la función $f(x)$ tienen como límite por la izquierda al número real L en el punto a sí y sólo sí

1) a es punto de acumulación del conjunto $B = \{x : x \in Df(x) \ \wedge \ x < a\}$.
2) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in Df(x)$ y $a - \delta < x < a$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Se denota este límite como $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

Del ejemplo anterior se deduce que pueden existir los límites laterales en un mismo punto y no existir el límite de la función en él.

Si los valores de una función admiten al mismo número real como límite por la derecha y por la izquierda de un punto de acumulación *a*, entonces la función tiene límite finito en *a*. En efecto,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \text{ tal que si } a < x < a + \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \text{ tal que si } a - \delta < x < a \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Si $a < x < a + \delta$ y $a - \delta < x < a$ entonces, $a - \delta < x < a < a + \delta$, luego $a - \delta < x < a + \delta$, es decir, $|x - a| < \delta$.

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$ que implica la existencia del $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Algunos teoremas sobre límites

Teorema 3.1:

Sea $f(x)$ una función de $\Re$ en $\Re$, Si $f(x)$ tiene límite en el punto de acumulación *a*, entonces existe un entorno reducido de *a* donde la función está acotada.

Demostración:

Sabemos que si existe el límite de $f(x)$ este es finito.
Sea $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.
Por la definición de límite se tiene:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que si } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon = 1$, $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1$.
Por propiedad del módulo, $|f(x)| - |L| \leq |f(x) - L|$ y como $|f(x) - L| < 1$ por transitividad es $|f(x)| - |L| \leq 1$, luego $|f(x)| < |L| + 1$. Como $|L| + 1$ es un número fijo, se tiene que si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x)| < M$ donde $M = |L| + 1$ que es la cota en el entorno reducido de *a* de radio δ.
Como $f(x)$ es un elemento de $\Re$, el concepto de función acotada es el de conjunto acotado en $\Re$.

Teorema 3.2:

Sea $f(x)$ una función de $\Re$ en $\Re$. Si $f(x)$ tiene límite en el punto de acumulación *a* y existe un número real *k* tal que $k > L$, entonces existe un entorno reducido de *a* donde $f(x) < k$ para todo *x* en ese entorno

Demostración:

Sea $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. .

Como $k > L$ entonces $k - L > 0$.
Por definición de límite: $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.
Seleccionaremos el número ε tal que $0 < \varepsilon < \text{k - L}$ y en consecuencia

$$f(x) - L \leq |f(x) - L| < \varepsilon \leq k - L$$

Por lo tanto, si $|x - a| < \delta$ es *f(x)-L* < *k-L* es decir $f(x) < k$.

En forma análoga se puede demostrar que si $k < L$ entonces existe un entorno reducido de *a* donde $f(x) > k$.
Consecuentemente se puede afirmar que:

a) Si una función $f(x)$ de $\Re$ en $\Re$ tiene límite positivo en el punto de acumulación *a* entonces, existe un entorno reducido de *a* tal que $f(x) > 0$ en ese entorno, es decir, si

$$\lim_{x \to a} f(x) = L > 0 \text{ existe } E^*_{\delta}(a) \text{ tal que si } x \in E^*_{\delta}(a) \cap Df(x) \text{ entonces } f(x) > 0$$

Si una función $f(x)$ de $\Re$ en $\Re$ tiene límite positivo en el punto de acumulación *a* entonces, existe un entorno reducido de *a* tal que $f(x) < 0$ en ese entorno, es decir, si

$$\lim_{x \to a} f(x) = L < 0 \text{ existe } E^*_{\delta}(a) \text{ tal que si } x \in E^*_{\delta}(a) \cap Df(x) \text{ entonces } f(x) < 0$$

Propiedad :

Sea $A \subseteq \Re$, *f* y *g* funciones de *A* en $\Re$. Si *f* tiene límite *L* en el punto de acumulación *a* y *g* tiene límite *L´* en el mismo punto, entonces:

1) Si $L < L´$ existe un entorno reducido de *a* donde $f(x) < g(x)$ para todo *x* en ese entorno.
2) Si $L > L´$ existe un entorno reducido de *a* donde $f(x) > g(x)$ para todo *x* en ese entorno.

Teorema 3.3:

Unicidad del límite

Sea $f(x)$ una función de $\Re$ en $\Re$. Si $f(x)$ tiene límite *L* en el punto de acumulación *a* entonces, es único.

Demostración:

Supongamos que la función $f(x)$ tenga dos límites L y L' distintos en el mismo punto *a*, es decir

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{y} \quad L' = \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{con} \quad L \neq L'$$

Si $L \neq L'$ entonces $L < L'$ o $L > L'$.

Si $L < L'$ por propiedad anterior existe un entorno reducido de *a* donde se verifica $f(x) < f(x)$ lo cual es una contradicción.

Si $L > L'$ por propiedad anterior existe un entorno reducido de *a* donde se verifica $f(x) > f(x)$ lo cual es una contradicción.

Teorema 3.4:

Sea $A \subseteq \Re$; f, g y h funciones de A en $\Re$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $\lim_{x \to a} h(x) = L$ y para todo x tal que $x \in A,\ x \neq a$ se verifica $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ entonces $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Demostración:

Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $0 < |\, x - a \,| < \delta \;\Rightarrow |\, f(x) - L \,| < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta' > 0$ tal que si $0 < |\, x - a \,| < \delta \;\; \Rightarrow |\, h(x) - L \,| < \varepsilon$

Seleccionando $\delta < \delta'$ se tiene que:

$$|\, x - a \,| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; L - \varepsilon < g(x) \le h(x) < L + \varepsilon$$

Por lo tanto

$$0 < |\, x - a \,| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

lo que significa $|\, g(x) - L \,| < \varepsilon$.

En consecuencia:

Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $0 < |\, x - a \,| < \delta \;\; \Rightarrow |\, g(x) - L \,| < \varepsilon$, es decir,

$$\underset{x \to a}{lím} \; g(x) = L$$

Una aplicación de este teorema es que $\underset{x \to 0}{lím} \; \dfrac{senx}{x} = 1$.

En efecto, para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ se tiene que $senx < x < tgx.$. Puesto que en el intervalo considerado $sen\,x \ne 0$, podemos dividir a la expresión anterior por $sen\,x$, obteniendo

$$\frac{senx}{sen\,x} < \frac{x}{sen\,x} < \frac{tgx}{sen\,x}..$$

Invirtiendo la desigualdad

$$1 > \frac{sen\,x}{x} > \cos x..$$

Como: $\underset{x \to 0}{lím} \; 1 = 1$ y $\underset{x \to 0}{lím} \; \cos x = 1$ por el teorema 3.4 se concluye que $\underset{x \to 0}{lím} \; \dfrac{senx}{x} = 1$.

ALGEBRA DE LÍMITES

Suma y resta de límites

Sea $A \subseteq \Re$, f, g funciones definidas de A en $\Re$ que tienen límite en el mismo punto de acumulación *a*, entonces las funciones $f \pm g$ tienen como límite en dicho punto a la suma o diferencia (según la operación que se efectúe) de los límites, es decir

$$\underset{x \to a}{lím} \; (f \pm g)(x) = \underset{x \to a}{lím} \; (f)(x) \pm \underset{x \to a}{lím} \; (g)(x)$$

Prueba:

Sean $L = \underset{x \to a}{lím} \; f(x)$ y $L' = \underset{x \to a}{lím} \; g(x)$

$$L = \underset{x \to a}{lím} \; f(x) \;\; \Leftrightarrow \;\; \text{Dado } \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \text{tal que si } \; 0 < |\, x - a \,| < \delta \Rightarrow |\, f(x) - L \,| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$L' = \lim_{x \to a} g(x) \iff$ Dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta' > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |g(x) - L'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Las condiciones $0 < |x-a| < \delta$ y $x \neq a$ son equivalentes a indicar que existe un entorno reducido de centro *a* y radio δ $\left(E^*_\delta(a)\right)$.

En la intersección de los entornos $E^*_\delta(a)$ y $E^*_{\delta'}(a)$ las relaciones anteriores se verifican simultáneamente, es decir , si $x \in \left(E^*_\delta(a) \cap E^*_{\delta'}(a)\right)$ entonces $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $|g(x) - L'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Luego,

$|f(x) + g(x) - (L + L')| = |(f(x) - L) + (g(x) - L')| \leq |f(x) - L| + |g(x) - L'|$ y

$|f(x) - g(x) - (L + L')| = |(f(x) - L) + (-g(x) - L')| \leq |f(x) - L| + |-g(x) - L'|$.

Usando la definición de suma de funciones y la propiedad transitiva se tiene:
Si $x \in \left(E^*_\delta(a) \cap E^*_{\delta'}(a)\right)$ entonces

$$|(f+g)(x) - (L + L')| = |(f(x) - L) + (g(x) - L')| \leq |f(x) - L| + |g(x) - L'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto: $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = L + L'$

En forma análoga se procede con la definición de resta de funciones:

$$|(f-g)(x) - (L - L')| = |(f(x) - L) + (-g(x) - (-L'))| \leq |f(x) - L| + |-g(x) - (-L')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto: $\lim_{x \to a} (f-g)(x) = L - L'$

Producto de límites

Sea $A \subseteq \Re$, $f(x)$, $g(x)$ funciones definidas de A en $\Re$ que tienen límite en el mismo punto de acumulación *a*, entonces la función $f(x) \cdot g(x)$ tiene como límite en dicho punto al producto de los límites.

Demostración:

Sean $L = \lim_{x \to a} f(x)$ y $L' = \lim_{x \to a} g(x)$

$$|(f \cdot g)(x) - L \cdot L'| = |(f \cdot g)(x) - L \cdot L' + f \cdot L' - f \cdot L'| = |(g(x) - L') \cdot f + (f(x) - L) \cdot L'| \leq$$
$$\leq |g(x) - L'| \cdot |f(x)| + |f(x) - L| \cdot |L'|$$

Por teorema 3.1 $f(x)$ es una función acotada en un entorno reducido de a. luego existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$

Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $0 < |\ x - a\ | < \delta \ \Rightarrow |\ g(x) - L'\ | < \dfrac{\varepsilon}{2M}$

Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta' > 0$ tal que si $0 < |\ x - a\ | < \delta' \ \Rightarrow |\ f(x) - L\ | < \dfrac{\varepsilon}{2 \cdot |L'|}$ para $L' \neq 0$

En la intersección de los entornos se verifica que

$$|\,(f \cdot g)(x) - L \cdot L'\,| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2 \cdot |L'|} \cdot |L'| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto: $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = L \cdot L'$

Por el teorema 3.1, $f(x)$ y $g(x)$ son funciones acotadas en un entorno reducido del punto de acumulación *a*.
Si $L' = 0$ entonces $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, luego

Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $0 < |\ x - a\ | < \delta \ \Rightarrow |\ g(x)\ | < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ con $M > 0$

La función $f(x)$ es acotada en un entorno reducido del punto *a*, luego existe una constante $M > 0$ tal que $|\ f(x)| \leq M$ si $|x - a| < \delta'$ con $x \neq a$.
Seleccionando $\delta' < \delta$ se tiene que

si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|\,(f \cdot g)(x)| = |\ f(x) \cdot g(x)\,| = |\cdot f(x)| \cdot |\ g(x)\,| \leq M \cdot \left| g(x) < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} \right| = \varepsilon$

por lo tanto: si $L' = 0$, $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = L \cdot 0 = 0$

Infinitésimos

Sea $f(x)$ una función de $\Re$ en $\Re$. F(x) es infinitésimo en *a* sí y sólo sí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Si $f(x) = x - 3$ entonces $f(x)$ es infinitésimo en 3 puesto que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$

Se cumplen las siguientes propiedades:

a) La suma de dos infinitésimos (ambos aplicados en el mismo punto) es un infinitésimo, en efecto si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos en *a* entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ luego $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = 0$.

b) El producto de un infinitésimo en *a*, por un número real, o por una función acotada en un entorno de *a* es un infinitésimo.

Teorema 3.5

Si *g(x)* es una función acotada en un entorno de *a*, entonces $\lim\limits_{x \to a} [\ f(x) \cdot g(x)\ ] = 0$ siendo *f* un infinitésimo en *a*.

Demostración:

Si g está acotada en $E^*_\delta(a)$ entonces existe $M > 0$ tal que si $x \in \left(A \cap E^*_\delta(a)\right)$ entonces $|g(x)| \leq M$ donde A es el conjunto donde están definidas las funciones *f(x)* y *g(x)*.

Como $\underset{x\to a}{lím} \left[M \cdot f(x)\right] = 0$

Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta' > 0$ tal que si $x \in \left[A \cap E^*_{\delta'}(a)\right] \Rightarrow |f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$

Si $\delta < \delta'$ en el entorno $E^*_\delta(a)$ se cumple simultáneamente:

$$|g(x)| \leq M \quad \text{y} \quad |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M} \ ,$$

por lo tanto $|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \varepsilon$ y así

$$\underset{x\to a}{lím} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = 0$$

Cociente de límites

Sea $A \subseteq \Re,\ f(x),\ g(x)$ funciones definidas de A en $\Re$ que tienen límite en el mismo punto de acumulación a y el límite de *g(x)* no es nulo, entonces lel límite del cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es el cociente de los límites.

Demostración:

Sean $L = \underset{x\to a}{lím}\ f(x)$ y $L' = \underset{x\to a}{lím}\ g(x)$

Se demostrará en primer lugar que $\underset{x\to a}{lím}\ \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{L'}$ con $L' \neq 0$.

Siendo $L' \neq 0$ existe un entorno reducido de a tal que para todo x en la intersección de A con dicho entorno, $g(x) \neq 0$.

$L' = \underset{x\to a}{lím}\ g(x) \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - L'| < \varepsilon$, además $\left(g(x) - L'\right)$ es un infinitésimo en a.

Demostrar que $\underset{x\to a}{lím}\ \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{L'}$ es equivalente a demostrar que $\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{L'}$ es un infinitésimo en a.

Como $\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{L'} = \left[L' - g(x)\right] \cdot \dfrac{1}{L'} \cdot \dfrac{1}{g(x)}$ y $L' - g(x)$ es un infinitésimo, basta demostrar que existe un entorno reducido de a donde la función $\dfrac{1}{g}$ está acotada.

Seleccionando $\varepsilon = \dfrac{|L'|}{2} > 0$ se tiene

$$0 < |\, x - a \,| < \delta \;\Rightarrow\; |\, g(x) - L' \,| < \frac{|L'|}{2}$$

Además,

$$|\, g(x) \,| - |\, L' \,| \le |\, g(x) - L' \,| < \frac{|L'|}{2} \quad \text{entonces} \quad |\, g(x) \,| - |\, L' \,| < \frac{|L'|}{2}$$

luego,

$$-\frac{|L'|}{2} < |\, g(x) \,| - |\, L' \,| < \frac{|L'|}{2} \quad \text{y} \quad \frac{|L'|}{2} < |\, g(x) \,| < \frac{3}{2} \cdot |L'|$$

Por lo tanto:

$$0 < |\, x - a \,| < \delta \;\Rightarrow\; |\, g(x) \,| > \frac{|L'|}{2} \quad \text{es decir} \quad \frac{1}{|\, g(x) \,|} < \frac{2}{|L'|}$$

En consecuencia, la función $\dfrac{1}{g}$ está acotada en el entorno reducido de *a*.

Como $\dfrac{1}{L'}$ es un número real, $\dfrac{1}{g}$ función acotada y $|\, L' - g(x) \,|$ es un infinitésimo de *a*, entonces $\dfrac{1}{g} - \dfrac{1}{L'}$ es un infinitésimo de *a*, es decir, $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{1}{g} - \dfrac{1}{L'} \right) = 0$.

El caso general se demuestra considerando $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ como el producto $f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$ y luego, usando la propiedad del límite de un producto

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{L'} = \frac{L}{L'}$$

LÍMITE INFINITO

Sea *f* una función de $\Re$ en $\Re$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |\, x - a \,| < \delta \;\Rightarrow\; |\, f(x) - L \,| < \varepsilon$.

En todo momento el número L es finito, puede existir o no.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe, es decir, *f* no tiene límite en el punto *a* significa que para todo *L*, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x \in Dom f(x)$ y $0 < |\, x - a \,| < \delta$ entonces $|\, f(x) - L \,| \ge \varepsilon$.

Si la función *f* no tiene límite puede ocurrir

a) que existan los límites laterales
b) que la función oscile
c) que los valores de la función superan en valor absoluto a cualquier número prefijado.

En todos los casos cuando *x* se aproxime al punto de acumulación *a*.

Definición 3.7:

Sea *f* una función de $\Re$ en $\Re$. Los valores de la función *f* tienen límite infinito en el punto de acumulación *a* sí y sólo sí para cualquier número positivo ε existe un número δ tal que si $x \in Df$ y $0 < |x-a| < \delta$ entonces $|f(x)| > \varepsilon$.

La definición anterior a veces se expresa por convención a través del simbolismo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Considerando el signo de los valores de la función se puede decir que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in Df \text{ y } 0 < |x-a| < \delta \text{ entonces } f(x) > \varepsilon$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in Df \text{ y } 0 < |x-a| < \delta \text{ entonces } f(x) < -\varepsilon$$

Ejemplo:

Sea *f* una función de $\Re$ en $\Re$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$Domf(x) = \Re - \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe

Dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|x-0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)| > \varepsilon$.

Para encontrar el δ observamos que si $|f(x)| > \varepsilon$ entonces $\left|\dfrac{1}{x}\right| > \varepsilon$ luego $|x| < \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Seleccionando $\delta = \dfrac{1}{\varepsilon}$ se tiene que $0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |x| < \dfrac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{|x|} > \varepsilon$.

Por lo tanto $|f(x)| > \varepsilon$.

Luego $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$

Límite en infinito

Se quiere estudiar los límites de funciones cuando la variable *x* tiende a valores muy grandes.

Consideremos el gráfico de la siguiente función $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

Puesto que $x^2 < 1 + x^2$ los valores de la función siempre serán menores que 1.

En particular:

$$f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(10) = \frac{100}{101}, \quad f(100) = \frac{10000}{10001}, \quad f(1000) = \frac{1000000}{1000001}$$

Gráficamente sería

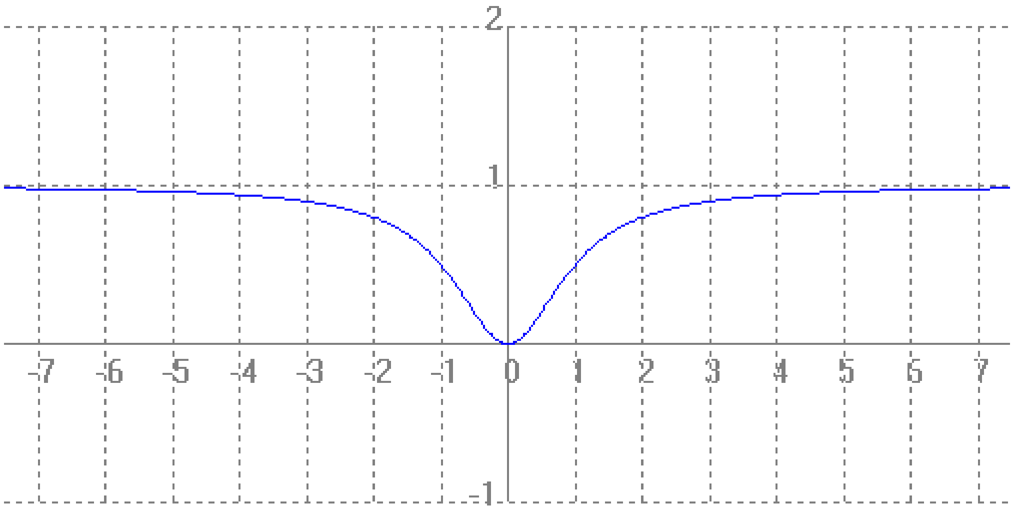


Fig. 5

Usamos la expresión "*x* tiende al infinito" para indicar que *x* toma valores muy grandes. Si los valores que toma *x* son grandes y positivos los indicamos con $x \to +\infty$ y similarmente para los negativos $x \to -\infty$.

El símbolo $x \to \infty$ significa que $|x|$ crece sin ser acotada. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ podemos decir que *f(x)* tiende al número 1 cuando $x \to \infty$.

En forma general se tiene la siguiente definición:

Definición .3.8:

Se dice que *f(x)* tiende al número *L* cuando $x \to \infty$ sí y sólo sí para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo *x* para el cual $|x| > A$.

La definición anterior también se puede aplicar para los casos $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

- $f(x) \to L$ cuando $x \to +\infty$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists A > 0\ (A \in \Re)$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo *x* positivo tal que $x > A$.
- $f(x) \to L$ cuando $x \to -\infty$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists A > 0\ (A \in \Re)$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo *x* para el cual $x < -A$

Teorema 3.6:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Demostración de a)

Dado $\varepsilon > 0$ se demostrará que existe un número $A > 0$ tal que si $|x| > A$ entonces $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$ ..

Seleccionando $A = \frac{1}{\in}$; entonces $A > 0$ y

$|x| > A \Rightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$

El número e:

Consideremos la expresión variable $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y veamos entre que números está comprendida cuando $n = 1, 2, 3, \ldots$.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37
4	2,441
5	2,488
…	…
12	2,613
…	…
120	2,20
…	…
210	2,711

Observamos que : $2 \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le 3$.

La expresión está acotada y es creciente y por lo tanto tiene límite.

Definición 3.9:

Se llama número *e* al límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

El número *e* es irracional y su valor con diez cifras decimales es $(e = 2{,}7182818284\ldots)$.

Hemos definido al número *e* como $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ si n toma valores enteros positivos. Supongamos ahora que *x* tiende a infinito tomando valores tanto fraccionarios como negativos.

Teorema 3.7:

La función $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ tiende al límite *e* cuando *x* tiende a infinito, es decir:

$$\underset{n\to\infty}{lím}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Demostración:

1. Tomemos $x\to\infty$

Cada valor *x* se halla entre dos valores enteros positivos n y $n+1$.

$$n\le x\le n+1$$

$$\frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}\ge\frac{1}{n+1}$$

$$1+\frac{1}{n}\ge 1+\frac{1}{x}\ge 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\ge\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\ge\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Si *x* tiende a infinito, también *n* tiende a infinito. Hallemos el límite de las variables entre la cuales se encuentra $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$.

$$\underset{n\to\infty}{lím}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\underset{n\to\infty}{lím}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\underset{n\to\infty}{lím}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\underset{n\to\infty}{lím}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1}=e\cdot 1=e$$

$$\underset{n\to\infty}{lím}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\underset{n\to\infty}{lím}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{\underset{n\to\infty}{lím}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\underset{n\to\infty}{lím}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e$$

Puesto que $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ tanto $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$ como $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

tienen el mismo límite *e* cuando *n* tiende a infinito, podemos asegurar que $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ tiene el mismo límite cuando *x* tiende a infinito, es decir:

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

2. Tomemos $x\to-\infty$.

Introduzcamos una nueva variable $t=-(x+1)$, o sea, $x=-(t+1)$. Cuando $t\to+\infty$, tendremos que $x\to-\infty$. Entonces:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=$$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)=e\cdot 1=e$, y así, el teorema queda demostrado.

Si en la igualdad (1) ponemos $\frac{1}{x}=t$, entonces tenemos $t\to 0$ (pero $t\neq 0$) cuando $x\to\infty$ y $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e$

Ejemplos:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3}=e^{3}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}=??$. Haciendo $\frac{4}{x}=t$ se tiene que si $x\to\infty$, entonces $t\to 0$ y por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x}$

puesto que $\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{3}=1$.

Haciendo: $\frac{4}{x-1}=\frac{1}{t}$ se tiene que cuando $x\to\infty$, también $t\to\infty$ y además, $x=\frac{4}{t}+1$.

Reemplazando obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{4t+1} = \left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{4} = e^{4}$$

Continuidad de funciones

Sea f una función de $\Re$ en $\Re$. La idea de límite de *f(x)* cuando *x* tiende al punto *a* es independiente del valor de *f(a)*. La función *f* puede estar definida en el punto *a* y no tener límite en dicho punto.
Puede ocurrir que exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y no exista $f(a)$, o que ambos existan y sean diferentes. También puede ocurrir que existan $f(a)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y que ambos valores sean iguales.

Definición 3.10:

Sea f una función de $\Re$ en $\Re$ y x_0 punto de acumulación de su dominio. La función *f* es continua en x_0 sí y sólo sí

a) existe $f(x_0)$
b) existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
c) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

En términos de ε y δ esta definición se puede expresar de la siguiente forma:

F es continua en x_0 $\Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si $x\in Dom\, f$ y $|x-x_0|<\delta$ entonces $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$).

Esta definición de continuidad difiere de la de límite dada en 3..1 en que en este caso no se exige que $x\neq x_0$ puesto que la función está definida en dicho punto y además $f(x)-f(x_0)=0<\varepsilon$ si $x=x_0$.

Si la función no es continua se dice que es discontinua. Es decir, una función es discontinua si no se cumple alguna de las condiciones a, b o c de la definición 3.9.

Ejemplo 1

Sea $f(x)=|x|$.

$f(x)$ es continua en $x=0$, en efecto:

a) $f(0)=0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe puesto que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$

Ejemplo 2:

Sea f una función de $\Re$ en $\Re$ definida por $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x-5}$. Se desea estudiar la continuidad de $f(x)$ en el punto $x=5$.
La función no existe en $x=5$ $\left(5 \notin Dom\, f(x)\right)$ sin embargo, $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=10$.

Luego esta función no es continua en $x=5$. Este tipo de discontinuidad puede salvarse redefiniendo la función *f* a través de otra función *g* de la siguiente forma:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & si \quad x\neq 5 \\ 10 & si \quad x=5 \end{cases}$$

Luego, $Dom\, g(x)=Dom\, f(x)\cup\{5\}$ e $\operatorname{Im}(x)=\operatorname{Im} f(x)\cup\{10\}$

La función g es continua en $x=5$ pero $g\neq f$ puesto que el par $(5{,}10)\in g(x)$ en cambio $(5{,}10)\notin f(x)$.

El tipo de discontinuidad que presenta la función *f* se dice que es *evitable* pues es posible evitar la discontinuidad redefiniendo la función. En general se dice que *f* tiene una discontinuidad evitable cuando existe el límite de $f(x)$. Puede ser que $f(x_0)$ no exista o bien, que exista y no coincida con el límite de $f(x)$ cuando *x* tiende a x_0.

Ejemplo

Sea *h* una función de $\Re$ en $\Re$ definida por:

$$h(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x>0 \\ 0 & si \quad x\leq 0 \end{cases}$$

El $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ no existe, sin embargo la función *h* está definida en el origen es decir $h(0)=0$.

Como la función *h* no tiene límite en el origen es discontinua en $x=0$ pero como $h(0)$ existe a este tipo de discontinuidad se la llama *esencial*.

La condición b) pide la existencia del límite de $f(x)$ cuando *x* tiende a x_0 para que *f* sea continua.
La existencia del $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ pide que existan los límites laterales de $f(x)$ y que ambos sean iguales.
Cuando ambos límites existen pero son distintos, la discontinuidad se llama de *"primera especie"*. Ésta se dice finita cuando son distintos ambos límites y se dice infinita cuando es infinito alguno de ellos.

Se dice que la discontinuidad de una función es de *"segunda especie"* cuando no es evitable ni de primera especie, es decir, cuando al menos uno de los límites laterales no existe.

Ejemplo:

La función $f(x) = sen\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ tiene en el origen una discontinuidad de segunda especie, no tiene límites laterales pues el seno oscila infinitas veces entre los valores -1 y 1.

Álgebra de las funciones continuas

Sea $A \subseteq \Re$, f, g funciones definidas de A en $\Re$. Si f y g son continuas en el punto x_0, entonces se cumplen:

a) $f \pm g$ es continua en x_0

b) $f\,.\,g$ es continua en x_0

c) $f\,/\,g$ es continua en x_0 si $g(x_0) \neq 0$

Demostraremos la propiedad b)

Demostración:

Sea $h = f \cdot g$. Se demostrará que:

1) $h(x_0)$ existe.

2) $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$ existe.

3) $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = h(x_0)$.

Como f y g son continuas en x_0 entonces $f(x_0)$ y $g(x_0)$ existen. Luego $\cdot\, h(x_0) = f(x_0) \cdot g(x_0)$ existe.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existen por ser continuas entonces

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$ existe.

Por otra parte $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ luego

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0) = (f \cdot g)(x_0) = h(x_0)$$

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS EN UN ENTORNO DE UN PUNTO DE ACUMULACIÓN

Usando los teoremas .3.1, 3.2 y 3.3 se puede asegurar:

a) Si f es una función continua en un punto de acumulación x_0, entonces existe un entorno de x_0 donde la función está acotada, es decir:

Si *f* es continua en x_0, entonces existe un entorno $E_\delta(x_0)$ y un número real positivo *M* tal que si $x \in \left(E_\delta(x_0) \cap Domf\right)$ entonces $|\, f(x) \,| \le M$.

b) Sea f continua en un punto de acumulación x_0.

b1) Si $f(x_0) > M$ entonces existe un entorno de x_0, $E_\delta(x_0)$ tal que si $x \in \left(E_\delta(x_0) \cap Dom\, f\right)$ entonces $f(x) > M$..

b2) Si $f(x_0) < M$ entonces existe un entorno de x_0, $E_\delta(x_0)$ tal que si $x \in \left(E_\delta(x_0) \cap Dom\, f\right)$ entonces $f(x) < M$..

El caso en que $f(x) = 0$ no se puede asegurar nada del signo que tiene en un entorno de x_0.

Teorema 3.8:

Sean *f, g* funciones de $\Re$ en $\Re$. Si *f* es continua en x_0 y *g* es continua en $f(x_0)$ entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en x_0., es decir:

a) $(g \circ f)(x_0)$ existe.

b) $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x)$ existe

c) $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0)$

CONTINUIDAD EN UN CONJUNTO

Una función *f* se dice continua en un conjunto de puntos sí y sólo sí es continua en cada punto de ese conjunto.

Se trabajará con funciones definidas en intervalos o en unión de intervalos (acotados o no) de números reales.

Sea *A* un intervalo en $\Re$, entonces

$$f \text{ es continua en } A \iff (\ \forall x : x \in A \Rightarrow f \text{ es continua.}).$$

En un intervalo cerrado intuitivamente una función continua es aquella cuya gráfica no presenta saltos ni puntos aislados

Teorema 3.9: DEL VALOR INTERMEDIO

Sea *f* una función continua definida en $[a,b]$, M un valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces existe un punto x_0 interior al intervalo $[a,b]$ donde la función alcanza el valor *M*

Hipótesis

1) *f* continua en $[a,b]$

2) $f(a) < M < f(b)$

Tesis

$\exists x_0 \in (a,b) \ / \ f(x_0)=M$

.

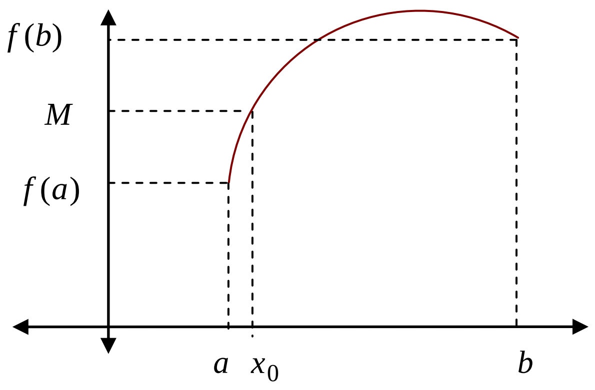


Fig.6

Demostración

Sea $A=\{x : x\in[a,b] \text{ y } f(x)\le M \ , \ f(a)<M<f(b)\}$.
A es subconjunto de $[a,b]$.
$a\in A$, puestoque $a\in[a,b]$ y $f(a)<M$ luego A es un subconjunto distinto de vacío .
Por otra parte, b es cota superior del conjunto A y $b\notin A$ (puestoque $f(b)>M$) , Luego el conjunto A verifica que

i) Es distinto de vacío.
ii) Es acotado superiormente

Por el axioma de completitud el conjunto A tiene extremo superior x_0 y es $a \le x_0 \le b$. Se demostrará que $f(x_0)=M$.
Supongamos que $f(x_0)\ne M$ entonces

a) Si $f(x_0) < M$ existe un entorno con centro en x_0 y radio δ tal que si $x\in E_\delta(x_0)$ entonces $f(x) < M$. Es decir, existe x tal que $x\in A$ y $x>x_0$. Esto contradice el hecho de que x_0 sea el supremo de A.

b) Si $f(x_0) > M$, existe un entorno con centro en x_0 y radio δ' tal que si $x\in E_{\delta'}(x_0)$ entonces $f(x) > M$. Es decir, existe x tal que $x\in A$ y $x>x_0$. Esto contradice el hecho de que x_0 sea el supremo de A. Esto significa que ningún punto de A está a la derecha de $x_0-\delta'$, es decir, para todo $x\in A$ es $x\le x_0-\delta'$. Por lo tanto, $x_0-\delta'$ es una cota superior de A, menor que el supremo (contradicción).

De a) y b) se deduce que $f(x_0)=M$.
El punto x_0 es interior al intervalo $[a,b]$, es decir, no puede ser a ni b. En efecto,
si $x_0=a$ entonces sería $f(x_0)=f(a)<M$
si $x_0=b$ entonces sería $f(x_0)=f(b)>M$
y por procedimiento similar al anterior en ambos casos se llega a una contradicción.
Si ocurriera que hay varios puntos x donde $f(x)=M$, el punto x_0 correspondiente a esta demostración es el que está a la izquierda de todos ellos.

El caso $f(a) > M > f(b)$ se demuestra análogamente.

El teorema que se acaba de probar indica que una función continua en un intervalo cerrado con extremos *a* y *b* alcanza en dicho intervalo, al menos una vez, todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

Teorema 3.10: de Bolzano

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y supongamos que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces hay por lo menos un x_0 en el intervalo abierto (a,b) tal que $f(x_0)=0$.

Demostración

Basta usar el teorema del valor intermedio para el caso particular $M=0$.

La demostración del Teorema de Bolzano también se puede hacer directamente por un método similar con el que se demostró el teorema del valor intermedio (ver ejercicio resuelto Nº7).

Observación:

Tanto en el Teorema de Bolzano como el Teorema del valor intermedio se supone que f es continua en todos los puntos del intervalo $[a,b]$ incluyendo los extremos *a* y *b*. La continuidad en los extremos es necesaria como se observa en el siguiente gráfico:

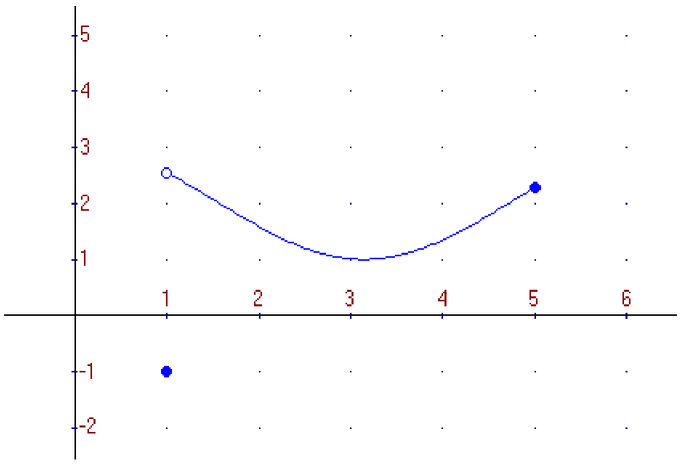


Fig. 7

Esta es una función continua en todos los puntos del intervalo $[1,5]$ excepto en el punto $x=1$.

A pesar de ser $f(1)$ negativa y $f(5)$ positiva no existe ningún $x\in[1,5]$ para el cual $f(x)=0$.

EXTREMOS DE FUNCIONES

Definición 3.11:

Sea f una función de $\Re$ en $\Re$ y sea $A\subseteq Df$

El valor $f(x_0)$ es el máximo absoluto de la función *f* en el conjunto *A* sí y sólo sí

$f(x_0)$ no es superado por ninguno de los valores $f(x)$ que toma la función *f* en el conjunto *A*. O sea,
$f(x_0)$ es el máximo absoluto de *f* en *A* $\Leftrightarrow \forall x \in A$ se verifica que $f(x) \leq f(x_0)$.

Ejemplo 1:

Sea *f* una función de $\Re$ en $\Re$ definida por $f(x) = 1 - x^2$.
Sea $A = \{ x \in \Re : 0 \leq x \leq 1 \}$.
El dominio de *f* es el conjunto de los números reales, luego $A \subseteq Df$.
El gráfico de $f(x)$ es

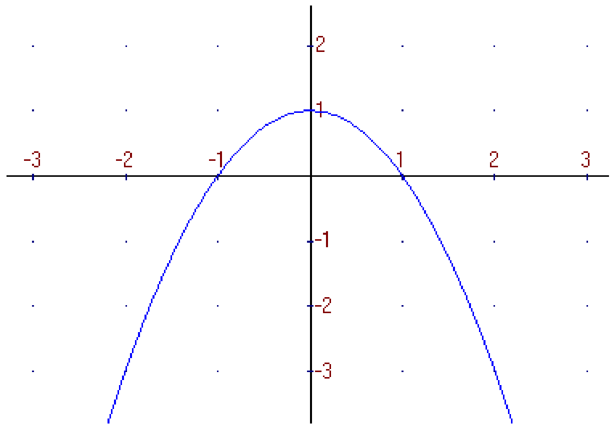


Fig. 8

En el conjunto *A* el valor $f(0)$ es el máximo absoluto de la función *f*, ya que $f(0) \geq f(x)$ para todo *x* en *A*.
En general el valor $f(x_0)$ es el máximo absoluto de *f* si se cumple la definición 4.7.1 con $A = Dom\, f$.

Definición 3.12

Sea *f* una función de $\Re$ en $\Re$ y sea $A \subseteq Domf$

El valor $f(x_0)$ es el mínimo absoluto de la función *f* en el conjunto *A* sí y sólo sí $f(x_0)$ no supera ninguno de los valores $f(x)$ que toma la función *f* en el conjunto *A*. O sea, $f(x_0)$ es el mínimo absoluto de *f* en *A* $\Leftrightarrow \forall x \in A$ se verifica que $f(x) \geq f(x_0)$.

Ejemplo 2

Sea *f* una función de $\Re$ en $\Re$ definida por $f(x) = x^2$ si $x \geq 0$ -
El $Dom\, f = \Re_+ \cup \{0\}$. Para todo $x \in Dom\, f$ se verifica que $f(0) \leq f(x)$ luego el valor $f(0)$ es el mínimo absoluto de *f*.

Definición 3.13

Sea f una función de $\Re$ en $\Re$, *B* dominio de *f*, x_0 punto interior de *B*. El valor $f(x_0)$ es un máximo local o máximo relativo de *f*, sí y sólo sí, existe un entorno del punto x_0, tal que los valores que toma *f* en los puntos de dicho entorno no superan al valor $f(x_0)$. O sea:

$f(x_0)$ es un máximo local $\Leftrightarrow \exists E_\delta(x_0) \subseteq B \,/\, \forall x \in E_\delta(x_0)$ se verifica que $f(x) \leq f(x_0)$.

Ejemplo 3:

Sea f una función de $\Re$ en $\Re$ cuyo gráfico es el siguiente

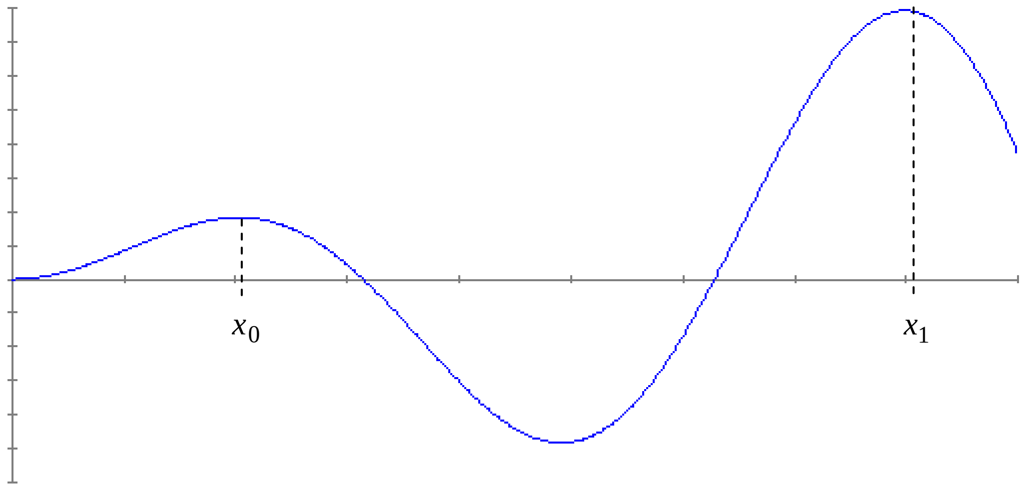


Fig. 9

El valor $f(x_0)$ es un máximo local o relativo de *f* porque es posible encontrar un entorno reducido de x_0 en el cual se verifica que $f(x) \leq f(x_0)$.
En el conjunto $A = \{x \in \Re : 0 \leq x \leq b\}$ el valor $f(x_0)$ no es un máximo absoluto, pues existe otro valor $f(x_1)$ tal que $f(x_1) > f(x_0)$.

Definición 3.14:

Sea f una función de $\Re$ en $\Re$, *B* dominio de *f*, x_0 punto interior de *B*. El valor $f(x_0)$ es un mínimo local o mínimo relativo de *f*, sí y sólo sí, existe un entorno del punto x_0, tal que el valor $f(x_0)$ no supera a ninguno de los valores que toma *f* en los puntos de dicho entorno. O sea:

$f(x_0)$ es un mínimo local $\Leftrightarrow \exists E_\delta(x_0) \subseteq B \,/\, \forall x \in E_\delta(x_0)$ se verifica que $f(x_0) \leq f(x)$.

Ejemplo 4:

Sea f una función de $\Re$ en $\Re$ cuyo gráfico es

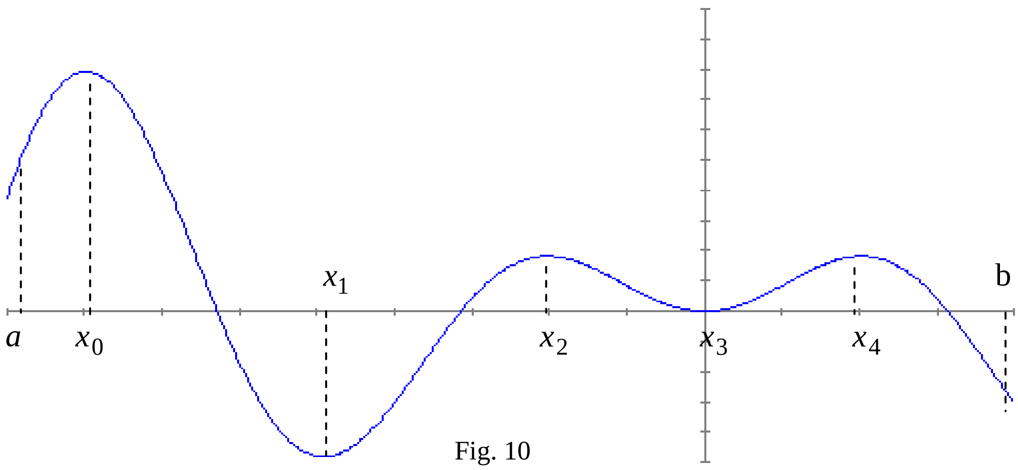


Fig. 10

Del gráfico se deduce que:

$f(x_0)$ es un máximo absoluto en $[a,b]$ y también es máximo local.

$f(x_1)$ es un mínimo local en $[a,b]$ y también es mínimo absoluto.

$f(x_2)$ es un máximo local en $[a,b]$ pero no es máximo absoluto.

$f(x_3)$ es un mínimo local en $[a,b]$ pero no es mínimo absoluto.

$f(x_4)$ es un máximo local en $[a,b]$ pero no es máximo absoluto.

Si una función tiene máximo o mínimo absoluto en un conjunto, entonces es único.

Puede ocurrir que la función alcance el máximo o el mínimo absoluto en más de un punto del conjunto (tal como ocurre en la función seno) pero dicho valor es único.

Teorema 3.11: DE WEIERSTRAS

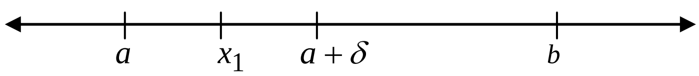
Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f está acotada en dicho intervalo.

Demostración:

Sea $A=\{x: x\in[a,b] \text{ y } f \text{ es acotada en } [a,x]\}$. Como $a\in A$ entonces $A\neq\emptyset$.
A es un subconjunto de $[a,b]$ y b es una cota superior de A luego A es un conjunto acotado.
Al ser $A\neq\emptyset$ y acotado superiormente, por el axioma de completitud, existe el extremo superior que lo designaremos x_0,

$x_0 = \text{extremo superior de } A = Sup(A)$ y se cumple que $x_0\leq b$.

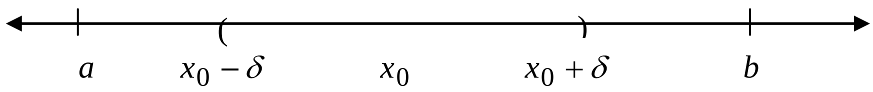
También se cumple que $a<x_0$. En efecto, al ser f continua a la derecha del punto a existe un semientorno de radio δ tal que $f(x)$ está acotada en dicho semientorno.
Luego es posible encontrar un punto x_1 entre a y $a+\delta$ tal que se verifique que f está acotada en $[a,x_1]$



Por lo tanto $x_1 \in A$ y $x_1 > a$ lo cual significa que $a < x_1 \leq x_0$ es decir $a < x_0 \leq b$.

Si se demuestra que $x_0 = b$ y además $x_0 \in A$ entonces, por el teorema 3.10 queda demostrado.

Falta demostrar que $x_0 \geq b$. Supongamos que $x_0 < b$. Como *f* es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ entonces, es continua en cada punto interior del intervalo. Al ser $x_0 < b$ se tiene que *f* es continua en x_0 y existe un entorno de x_0 de radio δ donde la función está acotada y $E_\delta(x_0) \subseteq [a,b]$



Por lo tanto, existe un número real $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in E_\delta(x_0)$.
Sean x_1 y x_2 dos puntos en $E_\delta(x_0)$ tales que $x_0 - \delta < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \delta$,
Al ser $x_1 < x_2$ entonces $x_1 \in A$ y por lo tanto la función *f* está acotada en $[a, x_1]$, es decir, existe $M' > 0$ tal que $|f(x)| \leq M'$ para todo $x \in [a, x_1]$.
Como $x_1, x_2 \in E_\delta(x_0)$ entonces $|f(x)| \leq M''$ para todo $x \in [x_1, x_2]$.
Si $M' > M''$ entonces *M* es cota para la función en ambos intervalos:

$$[a, x_1] \cup [x_1, x_2] = [a, x_2]$$

Entonces *f* está acotada en $[a, x_2]$, luego $x_2 \in A$ y $x_2 > x_0$. Esto es una contradicción ya que x_0 es el supremo del conjunto *A*, por lo tanto es $x_0 \geq b$.
Si $x_0 \leq b$ y $x_0 \geq b$ es $x_0 = b$.

Al ser *b* el supremo de *A* entonces para todo x_1 tal que $x_1 < b$, *f* es acotada en $[a, x_1]$. Usando la continuidad de *f* en el punto *b* y haciendo un razonamiento similar al anterior, es posible seleccionar x_1 en un semientorno a la izquierda de *b* y probar que *f* está acotada en $[a, x_1] \cup [x_1, b] = [a, b]$.
Luego *f* está acotada en $[a,b]$ y con esto queda demostrado el teorema.

Teorema 3.12:

Si *f* es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces alcanza en dicho intervalo máximos y mínimos relativos.

Demostración:

Por el teorema 3.10 la función *f* es acotada en $[a,b]$. Para demostrar la existencia de máximo absoluto basta considerar la acotación superior del recorrido.
Sabemos que $f(x_0)$ es el máximo absoluto de *f* sí y sólo sí es el máximo del recorrido de *f*.

Sea $B =$recorrido de *f*. Por ser *f* acotada , el conjunto *B* es acotado superiormente y además $B \neq \emptyset$. Por lo tanto, por el axioma de completitud de $\Re$, el conjunto *B* tiene supremo. Vale entonces que $| f(x)| \leq L$ para todo $x \in [a,b]$.

El número *L* puede pertenecer o no al conjunto *B*. Si $L \in B$ se trata del máximo absoluto, es decir, hay que demostrar que existe un $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = L$.

Supongamos que no existe dicho punto, o sea, para todo $x \in [a,b]$ se verifica $f(x) < L$. Luego $L - f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Sea $g(x) = \dfrac{1}{L - f(x)}$ la función definida en $[a,b]$. Tiene sentido puesto que $L - f(x) \neq 0$.

La función *g* es continua en $[a,b]$ por ser cociente de funciones continuas y $L - f(x) \neq 0$.

Por el teorema 3.10 la función *g* está acotada en $[a,b]$ es decir el recorrido de *g* es un conjunto acotado. Por el axioma de completitud este conjunto tiene supremo.

Sea L' el supremo del recorrido de *g* luego para todo $x \in [a,b]$ se verifica que $g(x) = \dfrac{1}{L - f(x)} \leq L'$ con $L' > 0$.

Por otra parte $L - \dfrac{1}{L'} < L$ ya que $\dfrac{1}{L'} > 0$ luego para todo $x \in [a,b]$ se tiene $f(x) \leq L - \dfrac{1}{L'} < L$.

De lo expresado anteriormente se deduce que el conjunto *B* (recorrido de *f*) admite una cota superior $L - \dfrac{1}{L'}$ que es menor que el supremo *L* lo cual es un absurdo.

El absurdo proviene de suponer que $\forall x \in [a,b]$ es $f(x) < L$.

Por lo tanto se concluye que existe por lo menos un punto $x_0 \in [a,b]$ para el cual se verifica que $f(x_0) = L$ y *L* es entonces el máximo absoluto de *f* en $[a,b]$.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Sea f una función de $\Re$ en $\Re$ definida por $f(x)=(x-c)^2$. Demostrar que $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$

De acuerdo con la definición de límite, dado $\varepsilon>0$ se trata de encontrar un $\delta=\delta(\varepsilon>0)$ tal que:

$$0<|x-c|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x)-0|<\varepsilon$$

Para encontrar $\delta(\varepsilon)$ observemos que:

$$\left|(x-c)^2-0\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|(x-c)^2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow (x-c)^2<\varepsilon \Leftrightarrow |x-c|<\sqrt{\varepsilon}$$

Esto nos da la pista para seleccionar el número $\delta(\varepsilon)$ que buscamos.
En efecto:
Si dado $\varepsilon>0$ seleccionamos $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ entonces se tiene que si $0<|x-c|<\sqrt{\varepsilon}$ es $|f(x)-0|<\varepsilon$ ya que:

$$0<|x-c|<\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |x-c|^2<\sqrt{\varepsilon}\cdot|x-c|<\sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\varepsilon}=\varepsilon$$

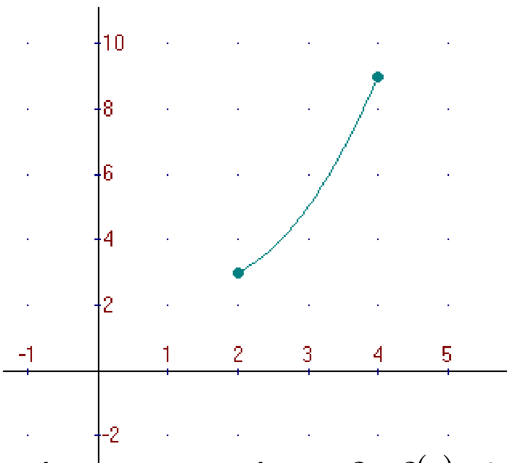
y puesto que:

$$|x-c|^2=\left|(x-c)^2\right|=\left|(x-c)^2-0\right|=|f(x)-0|$$

tenemos

$$0<|x-c|<\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |f(x)-0|<\varepsilon \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to c} f(x)=0$$

2) Sea f una función de $\Re$ en $\Re$ definida por $f(x)=x^2-3x+5$ para $x\in[2,4]$. Encontrar un número $\delta>0$ y demostrar que $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=5$.



Dado $\varepsilon>0$ se demostrará que existe un número $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que

$$0<\left|x-3\right|<\delta \ \Rightarrow \ \left|f(x)-5\right|<\varepsilon$$

Para elegir el δ observemos que

$$\left|f(x)-5\right|<\varepsilon \ \Leftrightarrow \left|\left(x^2-3x+5\right)-5\right|<\varepsilon \ \Leftrightarrow \left|x^2-3x\right|<\varepsilon \ \Leftrightarrow \left|x-3\right|<\frac{\varepsilon}{\left|x\right|}$$

Si $x=2$ entonces $\left|x-3\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Si $x=4$ entonces $\left|x-3\right|<\dfrac{\varepsilon}{4}$.

Como $\dfrac{\varepsilon}{4}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ con $\varepsilon>0$, luego cualquier $0<\delta\leq\dfrac{\varepsilon}{4}$ sirve.

En efecto:

$$0<\left|x-3\right|<\delta \ \Rightarrow \left|x-3\right|<\frac{\varepsilon}{4} \ \Rightarrow \left|x\right|\cdot\left|x-3\right|<\frac{\varepsilon}{4}\cdot\left|x\right|<\frac{\varepsilon}{4}\cdot 4=\varepsilon$$

Además, $\left|x\right|\cdot\left|x-3\right|=\left|x\cdot(x-3)\right|=\left|x^2-3x\right|=\left|x_2-3x+5-5\right|=\left|f(x)-5\right|$

Por lo tanto: $0<\left|x-3\right|<\delta \ \Rightarrow \ \left|f(x)-5\right|<\varepsilon$

3) Sea *f* una función de $\Re$ en $\Re$. Demostrar que para todo *n* número natural

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

Usando el método de inducción matemática:

Si $n=1$ $\quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ la proposición es válida.

Supongamos verdadera la proposición para *n* (hipótesis inductiva) y probemos su validez para $n+1$.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{n+1}=\lim_{x\to a}\left[f(x)^n\cdot f(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n\cdot\lim_{x\to a} f(x)$$

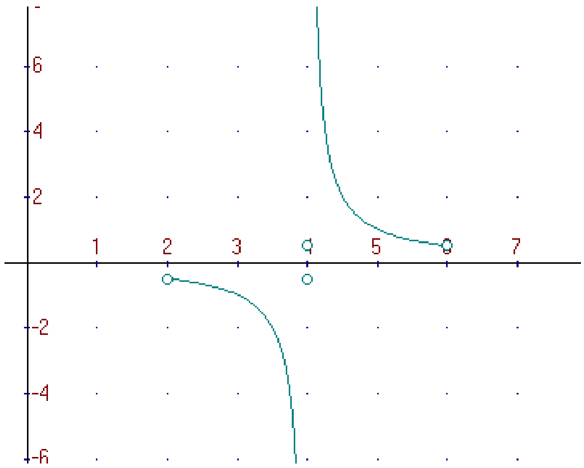
Por hipótesis inductiva tenemos:

$$\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n\cdot\lim_{x\to a} f(x)==\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{n+1}$$

que es lo que se quería demostrar.

4) Sea f una función de $\Re$ en $\Re$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\infty$.

La gráfica correspondiente a esta función es la siguiente:



$Dom\, f = \Re - \{4\}$. Dado $\varepsilon > 0$ vamos a encontrar un número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x \in Df$ y

$$0 < |x-4| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)| > \varepsilon$$

Seleccionando $\delta = \dfrac{1}{\varepsilon}$ se tiene

$$0 < |x-4| < \delta \;\Rightarrow |x-4| < \frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \frac{1}{|x-4|} > \varepsilon \;\Rightarrow \left|\frac{1}{x-4}\right| > \varepsilon$$

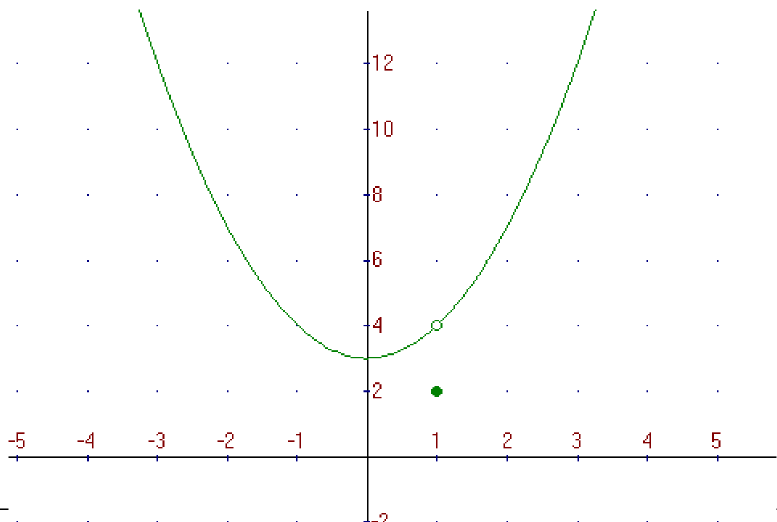
En consecuencia $f(x) > \varepsilon$, por lo tanto se concluye $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \infty$

5) Sea *f* una función de $\Re$ en $\Re$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & si \quad x \neq 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \end{cases}.$$

Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$.

La gráfica de $f(x)$ coincide con el de la parábola $g(x) = x^2 + 3$ con excepción del punto $(1, 4)$ que es reemplazado por el punto aislado $(1, 2)$.



$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=4$ y $f(1)=2$. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$.

Concluimos que la función no es continua en $x=1$. Esta discontinuidad se puede evitar cambiando el valor asignado a $f(1)$ por el valor del límite.

6) Sean *f* y *g* funciones de $\Re$ en $\Re$ definidas por $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=x-3$. Analizar la continuidad de $(g\circ f)$ en $x=3$.

$Dom\, f(x)=\Re-\{0\}$

$\mathrm{Im}\, f(x)=\Re-\{0\}$

$Dom\, g(x)=\Re$

$\mathrm{Im}\, f(x)\subseteq Dom\, g(x)$ y por lo tanto la composición está bien definida.

a) $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{8}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} g(f(x))=g\left(\lim\limits_{x\to 3} f(x)\right)$ por ser *g* continua.

Como $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to 3} g(f(x))$ existe y se tiene

$$\lim_{x\to 3} g(f(x))=\lim_{x\to 3} g\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x}-3\right)=-\frac{8}{3}$$

c) $\lim\limits_{x\to 3}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to 3} g(f(x))=-\dfrac{8}{3}=(g\circ f)(3)$

Por lo tanto. La composición es continua en $x=3$

7) Sea f una función de $\Re$ en $\Re$ definida por $f(x)=x^2-2x$. Para $x\in[-1,1]$ encontrar un número δ tal que si $|x_1-x_2|<\delta$ entonces $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

Si $x_1,x_2\in[-1,1]$ se tiene:

1) para $x_1=x_2$, seleccionando $\delta=\varepsilon$ se cumple $0<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

2) para $x_1\neq x_2$ es $|x_1|<1$ y $|x_2|<1$ luego

$$|x_1+x_2-2|\leq|x_1+x_2+2|\leq|x_1|+|x_2|+2<4$$

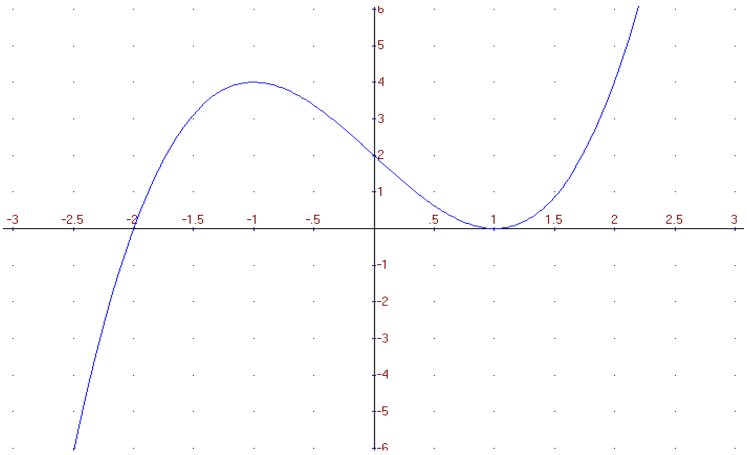
Seleccionando $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$ se tiene que

$$0<|x_1-x_2|<\delta=\frac{\varepsilon}{4} \quad\Leftrightarrow\quad 4\cdot|x_1-x_2|<\varepsilon$$

Como $\left|x_1+x_2-2\right|<4$ entonces $\left|x_1+x_2-2\right|\cdot\left|x_1-x_2\right|<4\cdot\left|x_1-x_2\right|<\varepsilon$.
Luego,

$$\left|(x_1+x_2-2)\cdot(x_1-x_2)\right|=\left|x_1^2-2\cdot x_1-x_2^2+2\cdot x_2\right|=\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon$$

8) Sea f una función de $\Re$ en $\Re$ definida por $f(x)=x^3-3x+2$. Encontrar en el intervalo cerrado $[-2,\ 2]$
a) máximos y mínimos absolutos.
b) Máximos y mínimos locales.



Podemos deducir de la gráfica que en el intervalo $[-2,\ 2]$ se verifica:

$f(-1)$ es máximo local y absoluto.

$f(1)$ es mínimo local y absoluto.

$f(2)$ es máximo local y absoluto.

$f(-2)$ es mínimo local y absoluto.

Como los máximos absolutos y mínimos absolutos son únicos se tiene

$$f(-1)=f(2) \quad \text{y} \quad f(1)=f(-2)$$

9) Sea f una función de $\Re$ en $\Re$ definida de la siguiente forma

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3 & si \quad -1<x<1 \\ 2x-4 & si \quad 1\le x<2 \\ 5-x^2 & si \quad 2\le x<3 \end{cases}$$

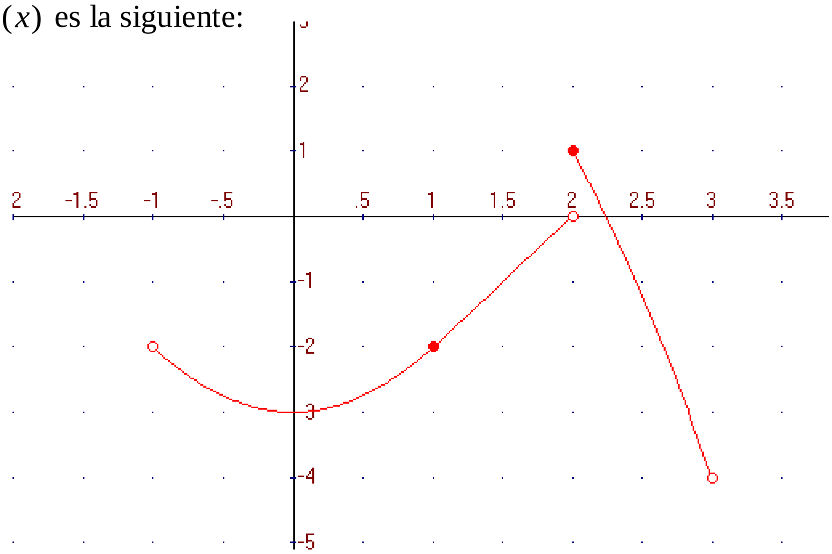
Investigar la continuidad de $f(x)$ en $x=1$ y $x=2$.

$Dom\, f(x)=\{x\in\Re : -1<x<3\}$

$f(1)=-2$ y $f(2)=1$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2 = f(1)$. Por lo tanto $f(x)$ es continua en $x = 1$

La gráfica de $f(x)$ es la siguiente:



Sea $E_\delta(2)$ un entorno de centro 2 y radio δ. Para los x tal que $x \in E_\delta(2)$ a la derecha de 2 se tiene que $f(x)$ tiende a 1 y para los valores de x tal que $x \in E_\delta(2)$ a la izquierda de 2 se tiene que $f(x)$ tiende a 0. Es decir,

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0$

luego los límites laterales existen y son distintos por lo tanto la función es discontinua en $x = 2$. Esta discontinuidad es de primera especie.

10). Sea f una función de $\Re$ en $\Re$ definida por $f(x) = \dfrac{x-4}{3 \cdot \left(\sqrt{x} - 2\right)}$ $si \quad x \neq 4$. Calcular

$\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

Observemos que la función $f(x)$ en $x = 4$ no está definida pues $f(4) = \dfrac{0}{0}$ que es una indeterminación.

La función $g(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 2}{3}$ que resulta de racionalizar $f(x)$, está definida en $x = 4$.

$Dom\, f(x) = \Re_{\geq 0} - \{4\}$

$Dom\, g(x) = \Re_{\geq 0}$

Luego $f(x) = g(x)$ excepto cuando $x = 4$.

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} g(x) = g(4) = \frac{\sqrt{4} + 2}{3} = \frac{4}{3}$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \dfrac{x-4}{3 \cdot \left(\sqrt{x} - 2\right)} = \dfrac{4}{3}$.

11) Sea f una función de $\Re$ en $\Re$ definida por $f(x)=\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}$ *si* $x\neq -1$. Calcular $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

Multiplicando y dividiendo por el factor $\sqrt{2+x}+1$ se obtiene que $f(x)=\dfrac{x+1}{(x+1)\cdot\left(\sqrt{2+x}+1\right)}$. Simplificando obtenemos una nueva función $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+x}+1}$ la cual tiene la propiedad que en $x=-1$ está definida.

La función f es igual a la función g en todo punto excepto en $x=-1$.

Luego: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1} g(x)=g(-1)=\dfrac{1}{\sqrt{2-1}+1}=\dfrac{1}{2}$

12) Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2}{5x+4}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{5x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(5+\frac{4}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{5+\frac{4}{x}}$$

Usando el álgebra de límites se tiene:

$$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}3-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}3=3$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{4}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}5-\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}=\lim_{x\to\infty}5=5$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{5x+4}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3x-2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(5x+4)}=\frac{3}{5}$$