MÓDULO 2

- **FUNCIONES VECTORIALES**
- **FUNCIONES ESCALARES**
- **LÍMITE**
- **CONTINUIDAD**

Funciones vectoriales

La introducción de este tipo de funciones está ligada a la necesidad de representar trayectorias en el espacio dependientes de una sola variable. Nuestro primer objetivo es describir la posición y luego la velocidad y la aceleración de un objeto en movimiento. En todos los casos necesitaremos funciones cuyos valores sean vectores; estas son las llamadas **funciones vectoriales**.

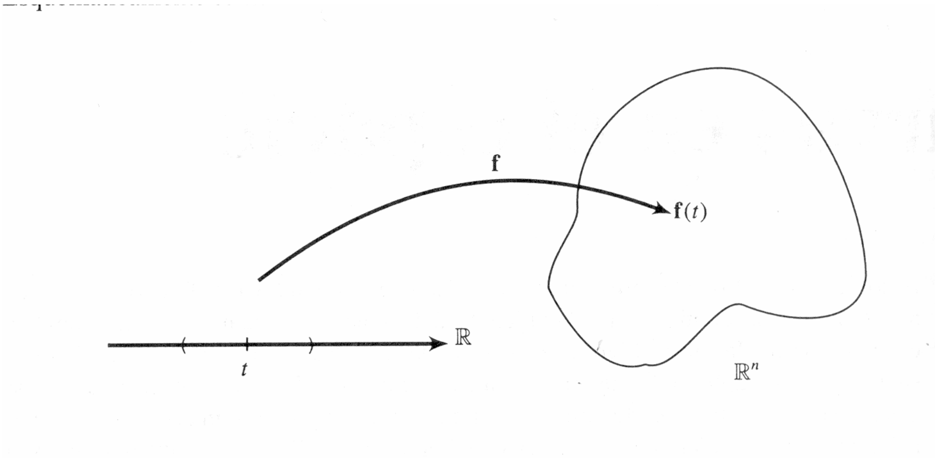
Definición

Una función vectorial de una variable real, es una función $\boldsymbol{f}: \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ la cual, a cada número real $t \in \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ le asocia un (y solamente un) valor $\boldsymbol{f}(t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Puesto que $\boldsymbol{f}(t)$ es un punto del espacio de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, éste tiene **n** coordenadas, las cuales son, en general, funciones de la variable *t*. Por lo tanto podemos escribir:

$$\boldsymbol{f}(t) = \left(f_1(t), f_2(t), \ldots\ldots\ldots\ldots, f_n(t)\right) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$$

donde $f_i: \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con i=1,2,….,n son funciones reales de la variable real *t*, llamadas ***funciones coordenadas*** de la variable *t*.

Esquemáticamente se tiene:



Ejemplo

Si $\boldsymbol{f}(t) = \left(t^3, \ln(3-t), \sqrt{t}\right)$ entonces las funciones coordenadas son:

$f_1(t)=t^3 \qquad f_2(t)=\ln(3-t) \qquad f_3(t)=\sqrt{t}$

El **dominio** de $\boldsymbol{f}(t)$ consiste de todos los valores de t para los que la expresión $\boldsymbol{f}(t)$ está definida, y se obtiene de la intersección de los dominios de las funciones coordenadas.

En el ejemplo anterior, la expresión t^3 está definida para todo $t\in\mathbb{R}$, ln(3-*t)* está definida cuando $3-t>0\rightarrow t<3$, y $\sqrt{t}$ está definida para todo $t\geq 0$. Por consiguiente el dominio de $\boldsymbol{f}(t)$ es el resultado de la intersección de dichos dominios:

$$Dom\ \boldsymbol{f}(t)=\ \mathbb{R}\cap(-\infty,3)\cap[0,+\infty)=[0,3)$$

Las funciones vectoriales que nos interesa estudiar son las que son **continuas** en su dominio I. Para establecer el concepto de continuidad antes tendremos que referirnos al concepto de **límite.**

Muchas de las técnicas y definiciones utilizadas en el estudio de funciones reales son aplicables a funciones vectoriales. Así, las funciones vectoriales se pueden sumar, restar, multiplicar por un escalar, tomar límite, estudiar su continuidad, etc. La idea consiste en aprovechar la linealidad de las operaciones vectoriales, extendiendo las definiciones a las funciones vectoriales componente a componente.

Definición

Sea $\boldsymbol{f}:\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ una función definida en el intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ y sea $t_o\in$ I. Decimos que el límite de la función $\boldsymbol{f}$ cuando t tiende a t_o es $\mathbf{L}\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, y lo escribimos:

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\mathbf{L}$$

si dado cualquier $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que

$$t\in\mathrm{I},\qquad 0<|t-t_0|<\delta\Rightarrow\|\boldsymbol{f}(t)-\mathbf{L}\|<\varepsilon$$

donde $\|\ \|$ es la norma euclídea de vectores de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

Teorema

Sea $\boldsymbol{f}:\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ una función vectorial, $\boldsymbol{f}(t)=(f_1(t),f_2(t),............,f_n(t))$.

Entonces:

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\mathbf{L}=(l_1,l_2,.....,l_n)\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}}\Leftrightarrow\forall i/1\leq i\leq n,\ \lim_{t\to t_o}f_i(t)=l_i$$

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\mathbf{L}\Rightarrow$ Para cualquier $\varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$ tal que:

$$\text{si } t\in \mathrm{I},\ 0<|t-t_0|<\delta \text{ entonces } \|\boldsymbol{f}(t)-\mathbf{L}\|<\varepsilon .$$

Pero como

$$\|\boldsymbol{f}(t)-\mathbf{L}\|=\|(f_1(t)-l_1,\, f_2(t)-l_2,\ldots\ldots,\, f_n(t)-l_n)\|=\left(\sum_{i=1}^{n}(f_i(t)-l_i)^2\right)^{1/2}<\varepsilon$$

se tiene que

$$|f_i(t)-l_i|\le\left(\sum_{i=1}^{n}(f_i(t)-l_i)^2\right)^{1/2}<\varepsilon$$

por lo tanto, dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $0<|t-t_0|<\delta \Rightarrow |f_i(t)-l_i|<\varepsilon$.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\lim\limits_{t\to t_o} f_i(t)=l_i$, i= 1,2,….n. Esto significa que:

Para cada $\varepsilon_i>0$ existe un $\delta_i>0$ tal que , si $t\in$ I, $0<|t-t_0|<\delta_i \Rightarrow |f_i(t)-l_i|<\varepsilon_i$

Sea $\varepsilon>0$ arbitrario y sea $\varepsilon_i=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Tomando $\delta=\text{mín}(\delta_1,\delta_2,\ldots..\delta_n)$, para cada δ se tiene

$$t\in \mathrm{I},\qquad 0<|t-t_0|<\delta \Rightarrow |f_i(t)-l_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\qquad \forall i=1,2,\ldots.,n .$$

Entonces $\|\boldsymbol{f}(t)-\mathbf{L}\|=\left(\sum_{i=1}^{n}(f_i(t)-l_i)^2\right)^{1/2}<\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^{1/2}=\varepsilon$.

Así hemos probado que para cualquier $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que:

$$t\in \mathrm{I},\qquad 0<|t-t_0|<\delta \Rightarrow \|\boldsymbol{f}(t)-\mathbf{L}\|<\varepsilon$$

Ejemplo

Sea $\boldsymbol{f}\!: \mathrm{I}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ la función antes mencionada: $\boldsymbol{f}(t)=\left(t^3,\ln(3-t),\sqrt{t}\right)$ Sea $t_0=1\in \mathrm{I}=[0,3)$ y queremos calcular $\lim\limits_{t\to 1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$.

Como el $\lim\limits_{t\to 1}t^3=1$, $\lim\limits_{t\to 1}\ln(3-t)=\ln 2$ y $\lim\limits_{t\to 1}\sqrt{t}=1$ se tiene según el teorema anterior

$$\lim_{t\to 1}\ \boldsymbol{f}(t)=\lim_{t\to 1}\left(t^3,\ln(3-t),\sqrt{t}\right)=\left(\lim_{t\to 1}t^3,\lim_{t\to 1}\ln(3-t),\lim_{t\to 1}\sqrt{t}\right)=(1,\ln 2,1).$$

2.1.-

Calcular, si existen, los siguientes límites:

$a)\lim_{t\to 2}\left(t\ \hat{i}+\frac{t^2-4}{t^2-2t}\ \hat{j}+\frac{1}{t}\hat{k}\right)$ $\qquad d)\ \lim_{t\to 1}\left(\sqrt{t}\ ,\ \frac{\ln t}{t-1}\ ,2t^2\right)$

$b)\lim_{t\to 0}\left(e^t\ \hat{i}+\frac{sen3t}{7t}\ \hat{j}+e^{-t}\ \hat{k}\right)$ $\qquad e)\ \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\ ,\cos t\ ,sent\right)$

$c)\ \lim_{t\to 0}\left(t^2\ \hat{i}+3t\ \hat{j}+\frac{1-\cos t}{t}\hat{k}\right)$ $\qquad f)\ \lim_{t\to\infty}\left(e^{-t}\ ,\frac{1}{t}\ ,\frac{t}{t^2+1}\ ,\frac{7t^2+t}{t-2t^2}\right)$

Sospechamos entonces que el comportamiento de la función vectorial ***f***(t) lo determina el comportamiento de las funciones coordenadas, hemos visto en el teorema anterior que el límite de la función vectorial ***f*** está determinado por los límites de las funciones coordenadas f_i.

Algo análogo ocurre con la continuidad.

<u>Definición</u>

Sea ***f:*** $I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ una función definida en $I\subset\mathbb{R}$, $t_0\in I$, ***f*** es **continua** en t_0 si

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{f}(t_0)$$

<u>Teorema</u>

Sea ***f:*** $I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ una función $\boldsymbol{f}(t)=\left(f_1(t),f_2(t),............,f_n(t)\right)$ definida en el intervalo abierto I de $\mathbb{R}$, $t_0\in I$. La función ***f*** es continua en t_0 si y sólo si sus funciones coordenadas lo son.

f: $I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ es **continua en todo el intervalo** I si lo es para cada *t* de I.

Ejemplos

a) La función ***f***$:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por ***f*** (t)=$\left(t^3+1,t^2-2t+1\right)$ es continua, pues sus funciones coordenadas son polinomiales y por lo tanto, continuas en todo su dominio.

b) La función ***f***: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ dada por:

$$\boldsymbol{f}(t)=\begin{cases}\left(t,t^2,\frac{\mathrm{sen}t}{t}\right) & \text{si } t\neq 0\\ (0,0,0) & \text{si } t=0\end{cases}$$

es **discontinua** en *t*=0 pues

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\lim_{t\to 0}\left(t,t^2,\frac{\mathrm{sen}t}{t}\right)=(0,0,1)\neq(0,0,0)=\boldsymbol{f}(0)$$

2.2.-

Analizar el mayor intervalo real en que es continua cada una de las siguientes funciones vectoriales:

$a)\ \boldsymbol{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 \,/\, \boldsymbol{r}(t)=t\,\hat{i}+\frac{1}{t}\,\hat{j}$ $c)\ \boldsymbol{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 \,/\, \boldsymbol{r}(t)=(t\ ,\operatorname{arcsen}t\,,\ t-1)$

$b)\ \boldsymbol{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 \,/\, \boldsymbol{r}(t)=\sqrt{t}\,\hat{i}+\sqrt{t-1}\,\hat{j}$ $d)\ \boldsymbol{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 \,/\, \boldsymbol{r}(t)=(\operatorname{sen}t\ ,\cos t\ ,\ln t)$

<u>Representación gráfica</u>

La **representación gráfica** de una función vectorial es una curva de $\mathbb{R}^n$ que se llama **camino** o **trayectoria** y que no se identifica solamente por los puntos de la gráfica, sino también por el sentido del recorrido, es decir, el sentido de valores crecientes de *t.*

Puede ocurrir entonces que dos trayectorias distintas tengan la misma gráfica. Usaremos $\boldsymbol{r}\ (t)$ para describir la posición de un objeto en movimiento.

Sea por ejemplo:

$\boldsymbol{r}_1(t)=(\operatorname{sen}t,\cos t)$ y $\boldsymbol{r}_2(t)=\left(\cos t,\operatorname{sen}t\right)$ con el parámetro *t* tal que $0\le t\le 2\pi$.

Si graficamos ambas funciones vectoriales obtenemos dos trayectorias distintas a pesar que en ambos casos obtenemos una circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas.

2.3.-

Explicar por qué se tienen dos trayectorias distintas a pesar de que ambas recorren la misma circunferencia. Indicar el punto inicial y final en cada caso, como así también el sentido del recorrido

2.4.-

Si pensamos que la función vectorial nos da la posición de un móvil en determinado tiempo *t*, indicar sobre cuál curvas se desplaza si la posición viene dada por la función $\boldsymbol{r}_1(t)=(t,t^2)$ con $0\le t\le 2$ ¿y si está dada por $\boldsymbol{r}_2(t)=\left(2t,4t^2\right)$ con $0\le t\le 1$?

En ambos casos indicar el punto inicial y el punto final. Explicar por que son trayectorias diferentes.

2.5.-

Dibujar las curvas representadas por las funciones vectoriales dadas a continuación:

$a)\ \boldsymbol{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 \,/\, \boldsymbol{r}(t)=(4\cos t\ ,\ -2\operatorname{sen}t)\qquad 0\le t\le 2\pi$

$b)\ \boldsymbol{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 \,/\, \boldsymbol{r}(t)=(3t\ ,\ t-1)\qquad 0\le t\le 2\pi$

$c)\ \boldsymbol{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 \,/\, \boldsymbol{r}(t)=(5\cos t\ ,5\operatorname{sen}t)\qquad 0\le t\le 2\pi$

$d)\ \boldsymbol{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3 \,/\, \boldsymbol{r}(t)=(4\operatorname{sen}t\ ,\ t\ ,\ 4\cos t)\qquad 0\le t\le 2\pi$

2.6.-

Dadas las siguientes ecuaciones, representarlas mediante una función vectorial:

a) $y = x^2 + 1$ desde (3,10) hasta (-1,2)

b) $y = 4 - x$ para $x \in [-2,3]$

c) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ recorrida en sentido antihorario desde (5,0)

2.7.-

Una partícula se mueve a lo largo de una recta desde (2,3,0) a (0,8,8). Hallar una función vectorial que describa su trayectoria.

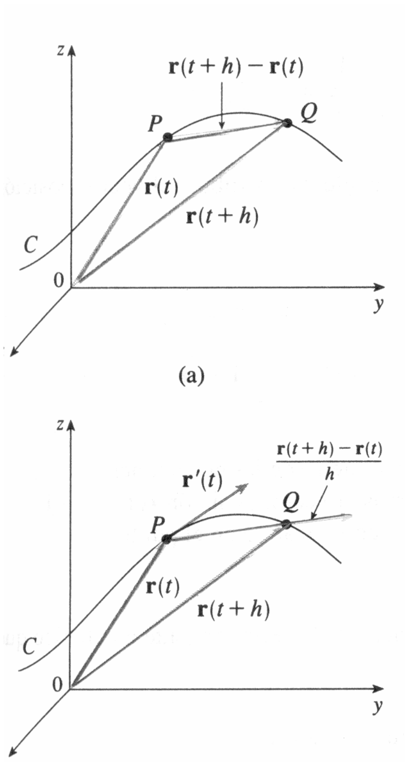
<u>Definición</u>

La **derivada** de una función vectorial ***r***(t) se define como

$$\boldsymbol{r}'(t) = \frac{dr}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)}{h}$$

si este límite existe.

El significado **geométrico** de esta definición se muestra en la siguiente figura.



Si P y Q tienen vectores posición $\boldsymbol{r}(t)$ y $\boldsymbol{r}(t+h)$, entonces $\overrightarrow{PQ}$ representa al vector $\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)$ que puede considerarse como un vector secante. Si *h*>0, el múltiplo escalar : $\frac{1}{h}.(\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t))$ tiene la misma dirección que $\boldsymbol{r}(t+h)-\boldsymbol{r}(t)$. Cuando $h \to 0$ este vector secante se acerca a la recta tangente. Por esta razón al vector $\boldsymbol{r}'(t)$ se denomina **vector tangente** a la curva definida por $\boldsymbol{r}(t)$ en el punto P, siempre que $\boldsymbol{r}'(t)$ exista y $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$.

La **recta tangente** a la curva en P se define como la recta a través de P que es paralela al vector tangente $\boldsymbol{r}'(t)$.

El **vector tangente unitario** se define como: $\mathrm{T}(\mathrm{t}) = \dfrac{\boldsymbol{r}'(\mathrm{t})}{\|\boldsymbol{r}'(\mathrm{t})\|}$

<u>Teorema</u>

Sea $\boldsymbol{f} : \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial, $\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots\ldots\ldots\ldots, f_n(t))$ donde cada $f_i(t)$ es una función derivable , entonces:

$$\boldsymbol{f}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \ldots\ldots\ldots\ldots f_n'(t)) = \boldsymbol{r}'(\mathrm{t})$$

Ejemplo 1

a) Dado el vector posición $\boldsymbol{r}(\mathrm{t}) = (\mathrm{t}^3 + 1, \mathrm{t.e}^{-\mathrm{t}}, \mathrm{sen}\ 2\mathrm{t})$, el vector velocidad es $\boldsymbol{r}'(\mathrm{t}) = (3\mathrm{t}^2, \mathrm{e}^{-\mathrm{t}} - \mathrm{te}^{-\mathrm{t}}, 2\cos 2\mathrm{t})$.

El vector aceleración es $\boldsymbol{r}''(\mathrm{t}) = (6t, t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}, -4\,\mathrm{sen}2t)$

b) El vector tangente unitario en t=0 es $\mathrm{T}(0) = \dfrac{\boldsymbol{r}'(0)}{\|\boldsymbol{r}'(0)\|} = \dfrac{(0,1,2)}{\sqrt{5}} = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

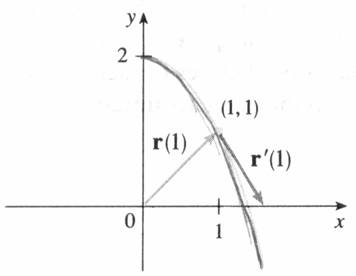
Ejemplo 2

Dada la curva cuyo vector posición es $\boldsymbol{r}(\mathrm{t}) = \left(\underbrace{\sqrt{t}}_{x(t)}, \underbrace{2-t}_{y(t)}\right)$, $0 \le t \le 3$, queremos hallar la ecuación de la curva en coordenadas cartesianas, para ello resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = 2 - t \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 - y \Rightarrow y = 2 - x^2$$ (observar que ahora $0 \le x \le \sqrt{3}$)

Si queremos graficar en dicha curva el vector posición en t=1 es $\boldsymbol{r}(1) = (1,1)$ y el vector tangente

$\boldsymbol{r}'(\mathrm{t}) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{t}}, -1\right)$ y en dicho valor resulta $\Rightarrow \boldsymbol{r}'(1) = \left(\dfrac{1}{2}, -1\right)$ y $\mathrm{T}(1) = \dfrac{\left(\frac{1}{2}, -1\right)}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$



2.8.-

Determinar el dominio, la derivada de la función vectorial y el vector tangente unitario en cada caso:

a) $\boldsymbol{r}(\mathrm{t}) = \left(t^2 - 4, \sqrt{t-4}, \sqrt{6-t}\right)$

b) $\boldsymbol{r}(\mathrm{t}) = \left(t.e^{2t}, \dfrac{t-1}{t+1}\right)$

La **integral definida** de una función continua $\boldsymbol{r}(\mathrm{t})$ puede definirse igual que para las funciones reales, excepto que el integrando ahora es un vector. Pero entonces podemos expresar la integral de $\boldsymbol{r}(\mathrm{t})$ en términos de las integrales de sus funciones coordenadas :

$(f_1(t), f_2(t), \ldots\ldots\ldots\ldots, f_n(t))$ continuas en $[a,b]$

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(\mathrm{t})dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt, \ldots\ldots\int_a^b f_n(t)dt\right)$$

Esto significa que podemos evaluar la integral de una función vectorial al integrar cada una de sus funciones componentes.

Ejemplo

Si conocemos $\boldsymbol{r}'(\mathrm{t}) = \left(2\mathrm{t}, \sqrt{\mathrm{t}}\right)$ y $\boldsymbol{r}(0) = (1,1) \Rightarrow$ hallar $\boldsymbol{r}(\mathrm{t})$

$$\boldsymbol{r}(\mathrm{t}) = \int \boldsymbol{r}'(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \left(\int 2\mathrm{tdt}, \int \sqrt{\mathrm{t}}dt\right) = \left(t^2 + \mathrm{C}_1, \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + \mathrm{C}_2\right)$$

La condición inicial $\boldsymbol{r}(0)$ nos permite determinar el valor de las constantes $\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_2 = 1$ siendo entonces $\boldsymbol{r}(\mathrm{t}) = \left(t^2 + 1, \dfrac{2}{3}\sqrt{t^3} + 1\right)$ el vector posición buscado.

2.9.-

Las siguientes funciones vectoriales dan la posición de un objeto. Dibujar la trayectoria y los vectores velocidad y aceleración en los puntos indicados:

a) $\boldsymbol{r}(\mathrm{t}) = (3t, t-1)$ en $(3,0)$

b) $\boldsymbol{r}(\mathrm{t}) = (t^2, t)$ en (4,2)

c) $\boldsymbol{r}(\mathrm{t}) = (t, 2t-5, 3t)$ en (3,1,9)

Se denomina **rapidez o velocidad instantánea** al módulo del vector velocidad ¿alguno de los objetos del ejercicio anterior se mueve con rapidez constante? ¿En dicho caso cómo son los vectores velocidad y aceleración?

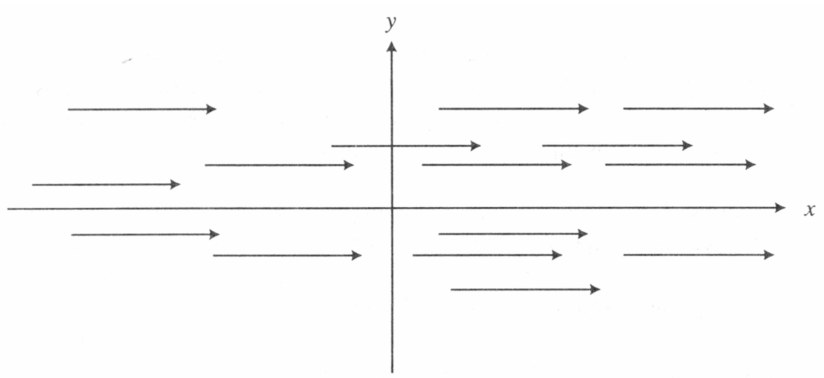
Campos vectoriales

Una función **F:** $U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se llama **campo vectorial.** Asocia a cada vector $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$ un vector **F**(x)= $(F_1(\boldsymbol{x}), F_2(x), \ldots, F_n(x))$ donde cada F_i (x) es un número real, F_i: $U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son las funciones coordenadas de **F**.

La idea para tener una visualización del campo **F** es colocar una flecha **F**(x)$\in \mathbb{R}^n$ de manera que su punto inicial sea $\boldsymbol{x} \in U$.

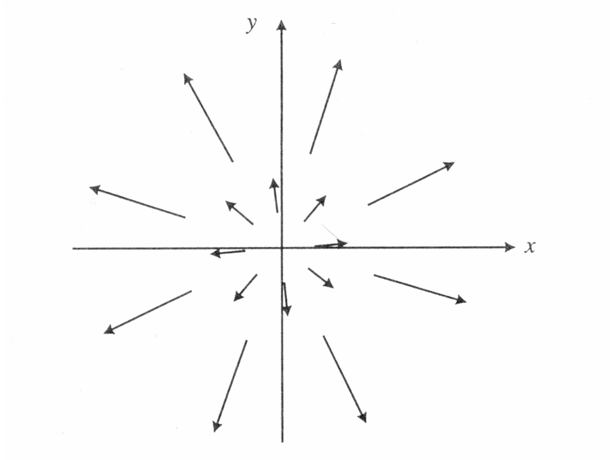
Ejemplo 1

El campo $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, **F**($x$,$y$) =(1,0) es un campo constante que asocia a cada punto (x,y) $\in \mathbb{R}^2$ el mismo vector (1,0). Su aspecto gráfico es :



Ejemplo 2

El campo **F:** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ asocia al punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ el vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se llama **campo radial** en $\mathbb{R}^2$. De manera análoga se tiene campos radiales en $\mathbb{R}^3$. La imagen geométrica de este campo es un conjunto de flechas en dirección radial, como lo muestra el siguiente dibujo



2.10.-

Representar gráficamente los siguientes campos vectoriales:

$a)\ \mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, \mathbf{F}(x,y)=(-2,0)$ $\quad c)\ \mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, \mathbf{F}(x,y)=(-y,x)$

$b)\ \mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, \mathbf{F}(x,y)=(-x,y)$ $\quad d)\ \mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, \mathbf{F}(x,y)=(2x,y)$

2.11.-

Analizar la mayor región en que es continua cada una de las siguientes funciones:

$a)\mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, \mathbf{F}(x,y)=(xy,\ x+y)$ $\quad c)\mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, \mathbf{F}(x,y)=\left(\dfrac{1}{x}\ ,\cos y\right)$

$b)\mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, \mathbf{F}(x,y)=\left(\dfrac{5}{x+y}\ ,\ x-y^2\right)$ $\quad d)\mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, \mathbf{F}(x,y)=\left(\dfrac{1}{y}\ ,\dfrac{1}{x}\right)$

<u>Funciones Escalares</u>

Hemos trabajado en Análisis Matemático I, con funciones que dependen de una sola variable independiente, sin embargo gran cantidad de problemas deben plantearse usando más de una variable. Por ejemplo el volumen de un cilindro circular depende de la altura y del radio de la base, es decir de dos variables: $\mathrm{V}(r,h)=\pi\, r^2 h$, si se quiere representar el volumen de un paralelepípedo de base rectangular éste será una función que dependerá de tres variables: ancho (x) , largo (y) y alto (z) $\mathrm{V}(x,y,z)=x.y.z$.

<u>Definición de una función de dos variables</u>

Sea ***D*** un conjunto de pares ordenados de números reales. Si a cada par $(x,y)\in \boldsymbol{D}$ le corresponde un único número real $f(x,y)$, se dice que *f* es **función** de *x e y.*

El conjunto ***D*** es el **dominio** de *f,* y el conjunto de valores *f (x,y)*es la **imagen** o **recorrido** de *f.*

De igual manera pueden definirse funciones de tres, cuatro , …, n variables, donde los dominios son ternas, cuádruplas,..,n-úplas de números reales. En todos los casos el recorrido está formado por números reales.

El **dominio** es el conjunto de todos los puntos en los que la ecuación que representa a la función tiene sentido.

Ejemplo 1

Concentración de un medicamento en la sangre.

Cuando se inyecta un medicamento en el tejido muscular, "este se difunde en el torrente sanguíneo. La concentración del medicamento en la sangre aumenta hasta que alcanza su máximo y luego decrece. La concentración C (en mg/l) del medicamento en la sangre es una función de dos variables: $\boldsymbol{x}$, la cantidad (en mg) del medicamento dado en la inyección, y $\boldsymbol{t}$, el tiempo (en horas) desde que se administró. Los datos nos indican que

$$C = f(x,t) = t\,e^{-t(5-x)} \qquad \text{para } 0 \le x \le 4 \text{ y } t \ge 0$$

En términos de la concentración de un medicamento en la sangre:

$f(4,t)$ significa que al mantener x fija en 4 estamos considerando una inyección de 4 mg de medicamento; permitir que t varíe, significa que estamos observando el efecto de esta dosis a medida que el tiempo transcurre. Por lo tanto, la función $f(4,t)$ describe la concentración del medicamento en la sangre que resulta de una inyección de 4 mg como función del tiempo. Su fórmula es $f(4,t) = t\,e^{-t}$

$f(x,1) = e^{\,x-5}$ significa evaluar la concentración de medicamento en la sangre, una hora después de la inyección para valores diferentes de cantidad inyectada. Nótese que $f(x,1) = e^{\,x-5}$ es una función creciente, es decir si administramos más del medicamento, la concentración en el torrente sanguíneo es más alta.

Ejemplo 2

Dada la función $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ queremos hallar el mayor dominio, representarlo y deducir su imagen.

La función $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ está definida para todos los pares $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$1-x^2-y^2 \ge 0 \Rightarrow x^2+y^2 \le 1$$

por lo tanto:

$$Dom\, f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \le 1 \right\}$$

que corresponde al interior y frontera de un circulo de radio 1.

La imagen, recorrido o rango de $f(x,y)$ es el conjunto $Imag\, f = \{z \in \mathbb{R} \ / \ 0 \le z \le 1\}$

¿Por qué?

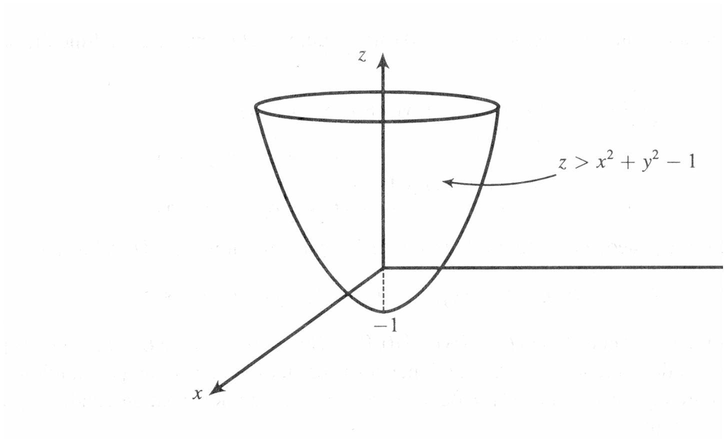
Ejemplo 3

La función $f(x,y,z) = \ln(1 - x^2 - y^2 + z)$ tiene por dominio al conjunto:

$$Dom\ f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 1 - x^2 - y^2 + z > 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z > x^2 + y^2 - 1\}$$

La ecuación $z = x^2 + y^2 - 1$ representa un paraboloide boca arriba con vértice en $(0,0,-1)$

La región de $\mathbb{R}^3$, $z > x^2 + y^2 - 1$ corresponde a todas las ternas que están en el interior del paraboloide.



2,12.-

Determinar el mayor dominio de la función dada y representarlo:

$a)\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ f(x,y) = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$

$b)\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - 4y^2}$

$c)\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ f(x,y) = \dfrac{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}{x}$

$d)\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ f(x,y) = \dfrac{\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}}{y}$

$e)\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}}$

$f)\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}}$

$g)\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$

$h)\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ f(x,y) = \dfrac{x}{|y|}$

$i)\ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ / \ f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{36 - x^2 - y^2 - z^2}}{x + y + z}$

$j)\ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ / \ f(x,y,z) = \dfrac{17}{\sqrt{36 - x^2 - y^2 - z^2}}$

<u>Gráfica de las funciones de varias variables</u>

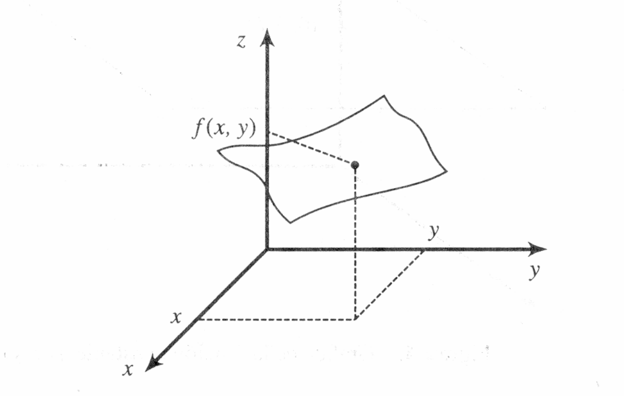
Sea f: $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos la **gráfica** de f como el conjunto:

$$\textit{Gráfica. } f = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}, (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathrm{Dom}f = \mathrm{I} \,/\, y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \right\}$$

Si n=1 entonces *Gráfica.* $f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in \mathrm{Dom}f, y = f(x) \right\}$

Si n=2 entonces *Gráfica.* $f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/ (x, y) \in \mathrm{Dom}f, z = f(x, y) \right\}$

Podemos visualizar este subconjunto de $\mathbb{R}^3$ como una “superficie en el espacio”, poniendo los puntos de $(x, y) \in$ Dom f en el plano z=0 y los valores de $z = f(x, y)$ correspondientes en el eje z.

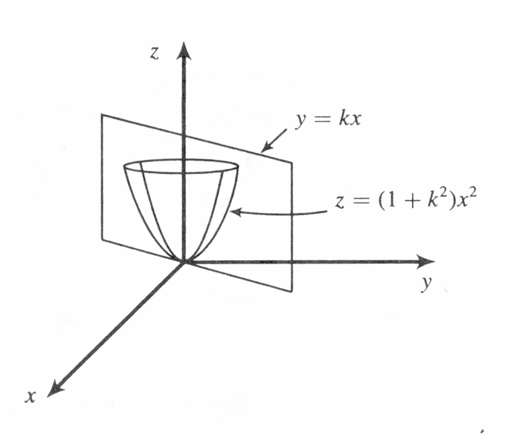


Para $n \geq 3$, la gráfica de la función no puede visualizarse, pues se encuentra en el espacio $n \geq 4$ dimensional. Es por este hecho que todos los conceptos importantes sobre funciones de varias variables se ejemplifican con funciones de 2 variables ya que tenemos representaciones geométricas concretas de la gráfica de ellas, donde es posibles “ver” el concepto estudiado.

Ejemplo 1

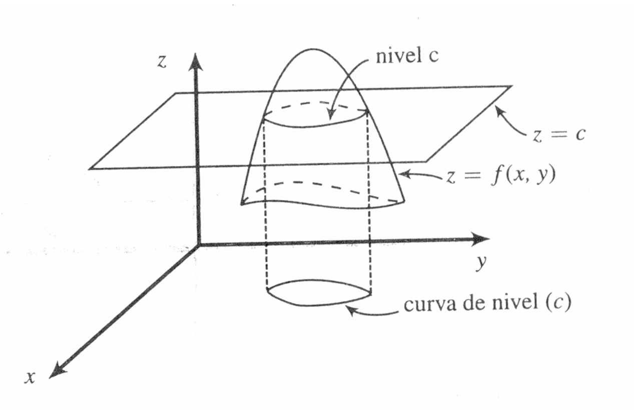
La gráfica de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = z = x^2 + y^2$ es un paraboloide

Cuando $y = 0$ nos queda la curva $z = x^2$ (en el plano zx) y cuando x=0 nos queda la curva $z = y^2$ (en el plano yz). Ambas son parábolas con vértice en el origen que abren hacia arriba. Más aún, si y=k x, nos queda $z = (1 + k^2)x^2$ que también es una parábola de las mismas características que las anteriores.



Esto nos permite ver que puede ser una ayuda tener representaciones geométricas parciales de gráficas de funciones de dos variables.

Sea $f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y el número $c \in \operatorname{Im} f$, se define el **nivel de la función** *f* como el conjunto de puntos de I que *f* manda a *c*. Es decir $\{(x, y) \in \mathrm{I} / \ f(x, y) = c\}$ y se denomina **curva de nivel** $z = c$



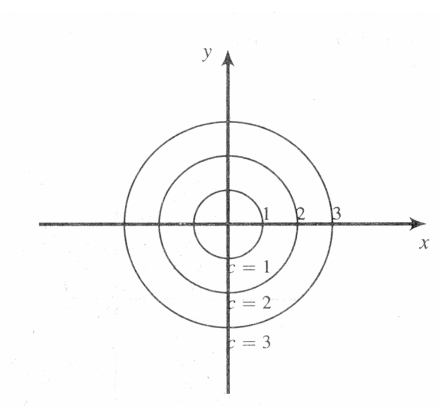
El nivel *c* de la superficie $z = f(x, y)$ se puede interpretar geométricamente como la intersección de dicha superficie con el plano $z = c$ la cual es una curva en el plano.

Consideremos nuevamente la función $f(x, y) = z = x^2 + y^2$.

Vemos que $f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ por lo tanto la Im *f* está formada por todos los reales no negativos.

Si c=0 La curva de nivel se reduce al punto (0,0)

Si c>0 Las curvas de nivel son círculos con centro en el origen y radio $\sqrt{c}$



2.13.-

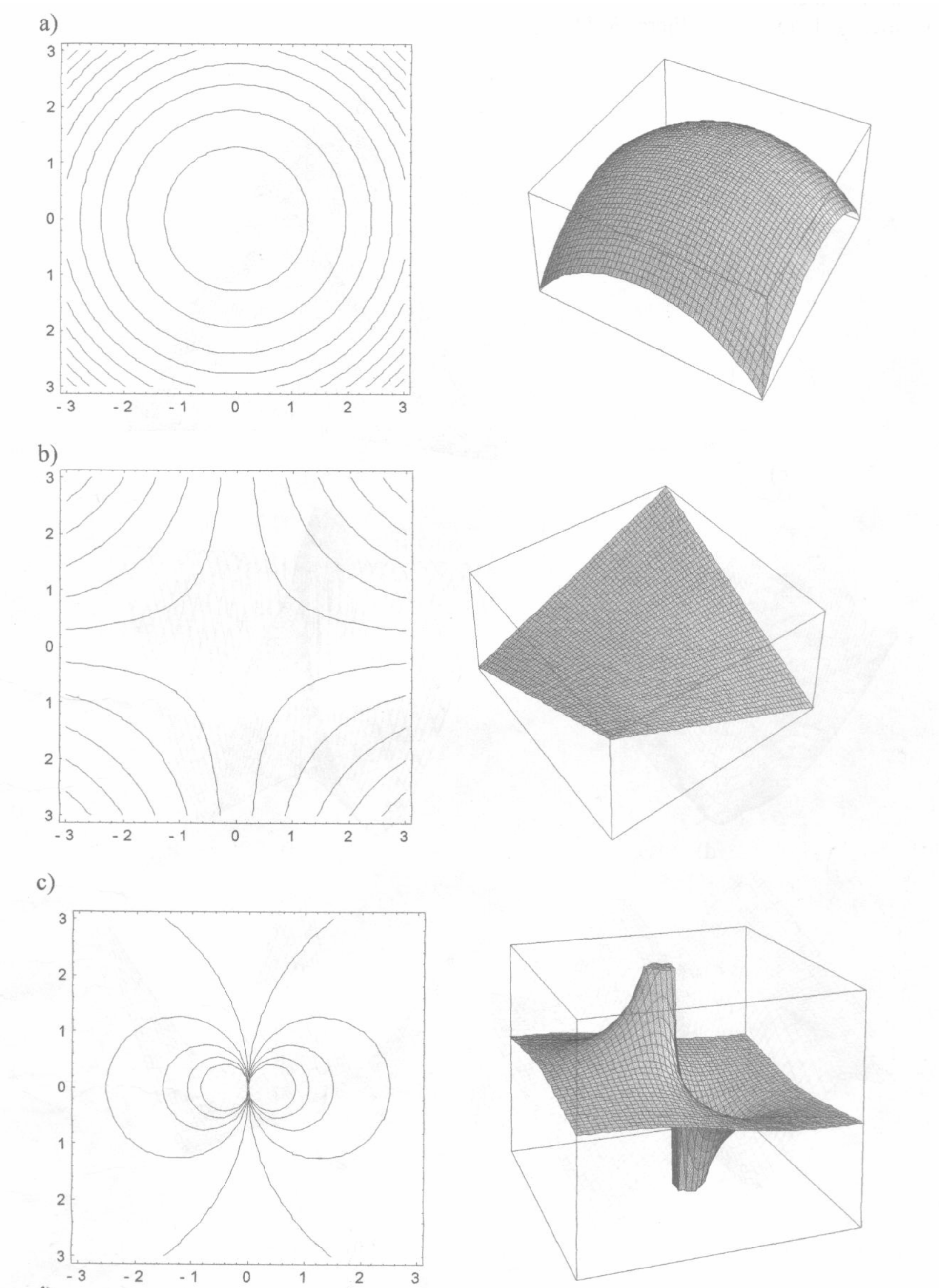
Dibujar las curvas de nivel para los valores propuestos de c y establecer la correspondencia entre las funciones y las gráficas dadas a continuación:

$a)\ f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}\ ;\ c=\pm\tfrac{1}{2};\pm 1;\pm\tfrac{3}{2};\pm 2$

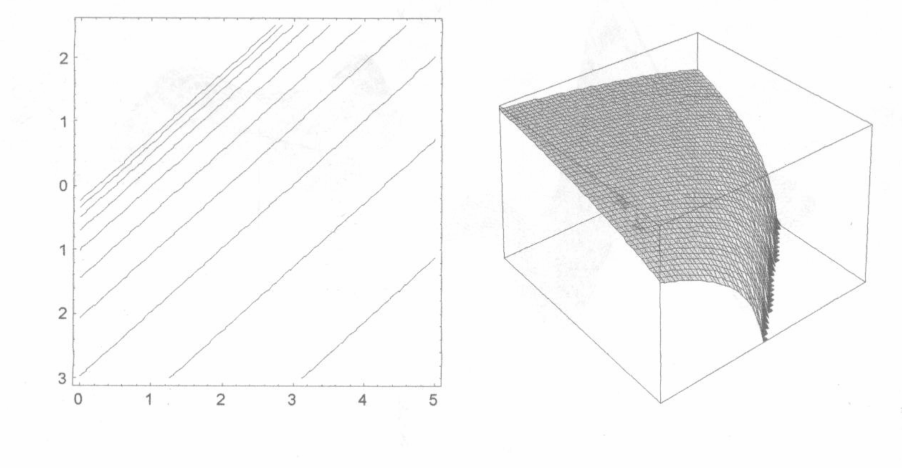
$b)\ f(x,y)=\ln(x-y);c=0;\tfrac{1}{2};1;\tfrac{3}{2};2$

$c)\ f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}\ ;c=0;1;2;3;4;5$

$d)\ f(x,y)=x.y;\ c=1;\ -1{,}3\ ;\ 3$



d)



Límite

Al encontrarnos con el estudio de los límites de las funciones de varias variables, se ponen al descubierto las grandes dificultades de pasar del cálculo de una al de varias variables.

Entornos en $\mathbb{R}^2$

Definimos **entorno centrado en un punto** P_0 de radio $\delta > 0$, al conjunto de puntos P que distan de P_0 en una cantidad menor que δ.

Se llaman entornos rectangulares del punto $P = (x_0, y_0)$ a los conjuntos del siguiente tipo, donde $\delta_1 > 0; \delta_2 > 0$

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \left|x - x_0\right| < \delta_1 \text{ y } \left|y - y_0\right| < \delta_2 \}$$

Análogamente un entorno circular de tal punto es

$$V = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}$$

2.14.-

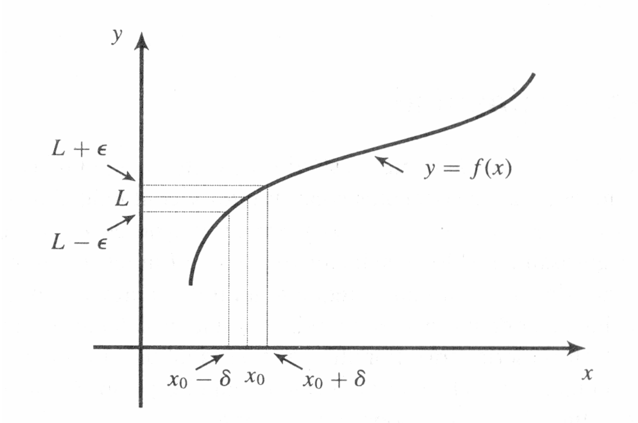
Comprobar que un entorno rectangular incluye a un entorno circular y recíprocamente.

Definición de límite

Para funciones de una variable

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_o \in D$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon : \varepsilon > 0, \ \exists \ \delta : \delta > 0 \ / \forall x, \text{ si } x \in D \ \ y \ \ 0 < \left|x - x_o\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - l\right| < \varepsilon$$



Para funciones de varias variables

Sea $f : \mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_o \in$ U ,

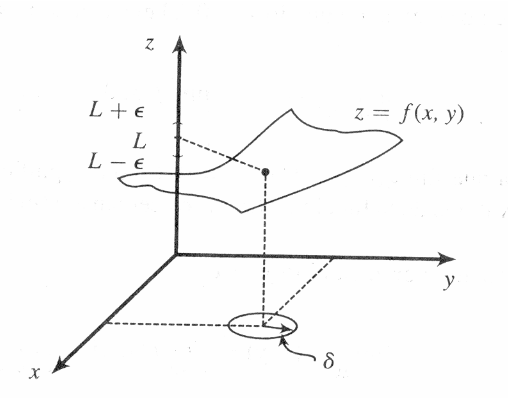
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon : \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta : \delta > 0 \, / \, \forall x, \text{ si } x \in \mathrm{U} \cap B(x_o, \delta), (x \neq x_o) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

<u>Caso</u>: $\mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^2$

Si $f : \mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$,

$$\lim_{(x,y) \to (x_o, y_o)} f(x, y) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \, \delta > 0 \, / \, \forall (x, y), (x, y) \in \mathrm{U} \text{ y } \begin{cases} |x - x_0| < \delta \text{ y } |y - y_0| < \delta \text{ y } (x, y) \neq (x_0, y_0) \\ 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon$$



Ejemplo:

Probemos que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x\,y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

En $(0,0)$ la función $\dfrac{x\,y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ no está definida, esto no importa porque no tocamos el punto $(0,0)$.

Demostraremos el límite por definición.

Sabemos que: $\forall \varepsilon, \varepsilon > 0,$ debemos hallar $\delta > 0 / \forall (x, y),\ 0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$$

Por propiedades de valor absoluto $\left| \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \dfrac{|x|.|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Pero $|x| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ y $|y| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, además $|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1$

entonces $\left| \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \underbrace{\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\le 1} \underbrace{|y|}_{<\delta} < 1.\delta = \delta$

Luego, dado $\varepsilon > 0,$ basta tomar $\delta = \varepsilon$

Entonces $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1 \\ |y| \le \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \end{cases}$$ multiplicando miembro a miembro

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}.|y| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \varepsilon$$

2.15.-

Demostrar, usando la definición de límite, que:

$a)\ \lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} (4x-3y) = 6$ $\quad b)\ \lim\limits_{(x,y)\to(-2,1)} (7x+2y) = -12$ $\quad c)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos(x+y) = 1$

$d)\ \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{5}{x+y} = \dfrac{5}{3}$ $\quad e)\ \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{2x}{y+3} = \dfrac{1}{2}$ $\quad f)\ \lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{3x+1}{2y+3} = \dfrac{7}{5}$

$g)\ \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \left(4x^2+4y^2\right) = 8$ $\quad h)\ \lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} \left(x^2+2x-3y\right) = -4$ $\quad i)\ \lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} \left(x^2+8x+y^2-12y\right) = 13$

Teorema:(unicidad del límite)

Si $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{lím} f(x,y)$ existe, entonces es **único**

Demostración:

Supongamos por el absurdo que no es único

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l_1$ (1) y $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l_2$ (2), con $l_1 \neq l_2$.

Sea $\varepsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{2} > 0$

Para ese ε por (1)

$$\exists \delta_1 / 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_1 \Rightarrow |l_1 - f(x,y)| < \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

Para ese mismo ε por (2)

$$\exists \delta_2 / 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_2 \Rightarrow |f(x,y) - l_2| < \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

Sea $\delta = mín(\delta_1, \delta_2)$

$$\forall (x,y) / 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \begin{cases} \leq \delta_1 \Rightarrow |l_1 - f(x,y)| < \dfrac{|l_1 - l_2|}{2} \\ \leq \delta_2 \Rightarrow |f(x,y) - l_2| < \dfrac{|l_1 - l_2|}{2} \end{cases}$$

$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x,y) + f(x,y) - l_2| \leq |l_1 - f(x,y)| + |f(x,y) - l_2| < |l_1 - l_2|$ absurdo!

Por lo tanto, si existe el límite, **es único**, y $l_1 = l_2$

<u>Teorema</u>

Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l_1$ (I) y $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = l_2$ (II) entonces

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f+g)(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) + g(x,y)] = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) + \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = l_1 + l_2$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).\ g(x,y) = l_1 \,.\, l_2$

3) Si $l_2 \neq 0$ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{l_1}{l_2}$

Demostraremos 1) ya que todos los casos son similares a como se probaron en Análisis I.

Dado $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$

Por (I) $\exists\ \delta_1 > 0 / \forall(x,y),\ 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_1 \Rightarrow |f(x,y) - l_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Por (II) $\exists\ \delta_2 > 0 / \forall(x,y),\ 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_2 \Rightarrow |g(x,y) - l_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Sea $\delta = mín(\delta_1, \delta_2)$

$$\forall(x,y)/0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \begin{cases} \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x,y) - l_1| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \leq \delta_2 \Rightarrow |g(x,y) - l_2| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$|f(x,y) + g(x,y) - [l_1 + l_2]| \leq |f(x,y) - l_1| + |g(x,y) - l_2| < \varepsilon$$

2.16.-

Evaluar los siguientes límites, empleando las propiedades:

$a)\ \lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} \left(3x^2 + xy - 2y^2\right)$ $\quad b)\ \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$ $\quad c)\ \lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{x^3 + 8y^3}{x + 2y}$

$d)\ \lim\limits_{(x,y)\to(-2,4)} y\sqrt[3]{x^3 + 2y}$ $\quad e)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^x + e^y}{\cos x + \operatorname{sen} y}$ $\quad f)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^x - e^y}{e^{-x} - e^{-y}}$

Límites iterados

Teorema

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Para cada $x \in \mathbb{R}$ definimos:

$$f_1(x) = \lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

Para cada $y \in \mathbb{R}$ definimos:

$$f_2(y) = \lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

en caso de que estos límites existan.

Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ y existen $f_1(x)$ y $f_2(y)$ entonces también existen

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] \quad \text{y} \quad \lim_{y\to y_0} f_2(y) = \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right]$$

y vale que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] = \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right] = L$$

Demostración:

Probemos que: $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \mathrm{L}$

Sea $\varepsilon > 0$ **debemos hallar** $\delta > 0$ / si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_1(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon$

Por hipótesis:

$$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \mathrm{L}$$

$\therefore$ Dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ $\exists\ \delta_1 > 0 / 0 < |x - x_0| < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_1 \Rightarrow |f(x,y) - \mathrm{L}| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

Por hipótesis para cada x / 0< $|x - x_0| < \delta_1$ $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = f_1(x)$.

$\therefore$ Dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ $\exists\ \delta_2 > 0 / 0 < |y - y_0| < \delta_2 \Rightarrow |f_1(x) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

Sea $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$

$$\delta > 0 \text{ y } \forall (x,y)/\ |x - x_0| < \delta \text{ y } |y - y_0| < \delta \text{ y } (x,y) \neq (x_0,y_0) \begin{cases} \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x,y) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \leq \delta_2 \Rightarrow |f_1(x) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$|f_1(x) - \mathrm{L}| = |f_1(x) - f(x,y) + f(x,y) - \mathrm{L}| \leq |f_1(x) - f(x,y)| + |f(x,y) - \mathrm{L}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\therefore \quad \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\left[\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right] = \mathrm{L}$$

Análogamente se prueba para el otro límite.

<u>Importante</u>

Si los límites iterados no existen (ambos) o bien si existen son distintos entonces el límite doble **no existe**

<u>Límite por caminos</u>

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Sea $y = h(x)$ tal que $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = h(x_0)$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x, h(x))$

Nota: El límite por cualquier camino (continuo) que pasa por (x_0, y_0) es igual al límite doble

Hemos probado por definición que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ entonces el límite por cualquier camino continuo que pasa por $(0,0)$ también es igual a cero.

Estudiemos el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si nos acercamos al origen por una recta del tipo $y = k.x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=k.x}} \frac{x\,k\,x}{\sqrt{x^2+k^2.x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{k.x^2}{|x|.\sqrt{1+k^2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)(\pm x) = 0$$

Efectivamente el límite por el camino elegido da cero.

Nota: Si por dos caminos se obtienen distintos límites, el límite doble no existe.

Ejemplo 1

Consideremos la función: $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ definida en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Queremos estudiar el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, es decir queremos ver cómo se comportan los valores de $f(x,y)$ cuando (x,y) está cerca de $(0,0)$. Una manera de “conocer” el valor del límite (si existe) es hacer que (x,y) tienda a $(0,0)$ por medio de un camino $y = h(x)$
que pase por el origen.

Si el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ existe y vale L y el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,h(x))$ existe, éste debe valer L.

Observar bien la estructura lógica de la afirmación anterior.

Si elegimos $y = h(x) = 0$ (eje x) $\qquad \lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x.0}{x^2+0^2} = 0$.

Esto **no** significa que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ = 0, lo que significa es que si nos acercamos al origen por el eje x, los valores de la función se acercan a cero y, de existir el límite doble, debería valer cero.

Si elegimos $y = g(x) = x$ $\qquad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \dfrac{x.x}{x^2+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$

Como a lo largo de dos caminos da distinto resultado el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ no existe.

Ejemplo 2

Estudiemos el $\qquad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 y}{x^4+y^4}$

Si nos acercamos al origen por una recta del tipo $y = k.x$ obtenemos

$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{lím} \frac{x^4 y}{x^4 + y^4} = \underset{\substack{x\to 0 \\ y=k.x}}{lím} \frac{x^4 k.x}{x^4 + (k.x)^4} = \underset{x\to 0}{lím} \frac{k}{1+k^4}.x = 0$$

Esto no significa que el valor del límite doble sea cero. Esto sólo nos dice que de existir el límite doble valdría cero y la única manera de saberlo es probándolo por definición.

$\forall\varepsilon, \varepsilon > 0,$ **debemos hallar** $\delta > 0 / \forall(x, y),\ 0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^4\ y}{x^4 + y^4} - 0\right| < \varepsilon$

Observando la última desigualdad vemos que $\left|\frac{x^4\ y}{x^4 + y^4}\right| = \underbrace{\left|\frac{x^4}{x^4 + y^4}\right|}_{\leq 1}.|y| \leq 1.|y|$

Entonces , vemos que

$$0<|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^4\ y}{x^4 + y^4}\right| = \left|\frac{x^4}{x^4 + y^4}\right|.|y| \leq 1.|y| < \delta$$

$\therefore$ bastará tomar $\delta = \varepsilon$.

Esto nos dice efectivamente que $\underset{(x,y)\to(0,0)}{lím} \frac{x^4 y}{x^4 + y^4}=0.$

Otra forma de acercarnos al origen de coordenadas por rectas: con coordenadas polares.

Otra manera de tender a (0,0) por rectas es usando las coordenadas polares.

Decir que $(x, y) \to (0,0)$ por caminos rectilíneos, equivale a decir en coordenadas polares $r \to 0$ (independientemente del valor de α) .

Volvamos al **Ejemplo 2**:

Expresando la función $f(x, y) = \frac{x^4 y}{x^4 + y^4}$ en coordenadas polares $: x = r.\cos\alpha, \quad y = r.\mathrm{sen}\alpha$

obtenemos:

$$g(r,\alpha) = \frac{\cos^4\alpha.\mathrm{sen}\alpha}{\cos^4\alpha + \mathrm{sen}^4\alpha}.r$$

Observamos que $g(r,\alpha)$ es el producto de una función acotada $h(\alpha) = \frac{\cos^4\alpha.\mathrm{sen}\alpha}{\cos^4\alpha + \mathrm{sen}^4\alpha}$

por otra $k(r) = r$ que tiende a cero cuando $r \to 0$, podemos concluir que, por todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas, el $\underset{r\to 0}{lím}\, g(r,\alpha) = 0$.

Esto no nos garantiza que el límite doble valga cero, debemos probarlo por definición como hicimos anteriormente.

Ejemplo 3

Usar coordenadas polares para probar que no existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}$$

Para resolver esto pasamos a coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - r^2 \cos^2 \alpha}{r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} = \lim_{r\to 0} \left(\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha \right)$$

Como este límite toma distintos valores para cada α, el límite doble **no existe**.

2.17.-

Probar que no existen los límites en (0,0) de:

$a)\ f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ $b)\ f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ $c)\ f(x,y) = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$ $d)\ f(x,y) = \dfrac{x^9 y}{\left(x^6 + y^2\right)^2}$

2.18.-

Analizar la existencia de los siguientes límites:

$a) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x^2 + e^y}$ $b) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ $c) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ $d) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$

$e) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4}$ $f) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$ $g) \lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$ $h) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

2.19.-

Usar el cambio a coordenadas polares para analizar la existencia de los límites siguientes, de conjeturar que existen, probar por definición.

$a) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}}$ $b) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ $c) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$ $d) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

$e) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $f) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y + xy^3}{x^2 + y^2}$

<u>Continuidad</u>

<u>Definición:</u>

Sea $f : \mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}$

f es continua en (x_0, y_0) si $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{lím} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 / \forall (x,y) \in \mathrm{D} \text{ y } \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow \left| f(x,y) - f(x_0, y_0) \right| < \varepsilon$$

Ejemplo1:

Analizaremos la continuidad de la siguiente función en (0,0)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y-2x^3}{x^2+y^4} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0 & si\,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$f(0,0)=0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3x^2y-2x^3}{x^2+y^4}=?$ de ser continua el límite doble debería valer cero, es decir, por definición:

Dado $\varepsilon>0,\exists\delta>0\,/\left|x-0\right|<\delta$ y $\left|y-0\right|<\delta$ y $(x,y)\neq(x_0,y_0)\Rightarrow\left|\dfrac{3x^2y-2x^3}{x^2+y^4}-0\right|<\varepsilon$

$$\left|\frac{3x^2y-2x^3}{x^2+y^4}\right|\leq\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^4}\right|+\left|\frac{2x^2.x}{x^2+y^4}\right|=3\underbrace{\left|\frac{x^2}{x^2+y^4}\right|}_{\leq1}.\left|y\right|+2\underbrace{\left|\frac{x^2}{x^2+y^4}\right|}_{\leq1}.\left|x\right|\leq3\left|y\right|+2\left|x\right|<\underbrace{5\delta}_{\varepsilon}$$

Dado $\varepsilon>0$ elegimos $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$,y con esto probamos que el límite vale cero, por lo tanto *f* es continua en (0,0).

Ejemplo 2:

Estudiaremos la continuidad de la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}y\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Para todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ excepto el origen, la función es continua.

Debemos analizar que ocurre en (0,0):

$f(0,0)=0$

Estudiaremos la existencia del límite doble en el origen usando coordenadas polares.

$\lim\limits_{r\to0}r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{r^2}\right)=0$, esto nos indica que, de existir el límite, vale 0. Para probarlo por definición basta observar que $\left|y\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\right|=\left|y\right|\underbrace{\left|\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\right|}_{\leq1}\leq\left|y\right|$

Por tanto la función es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

Continuidad en un conjunto

Definición:

f es continua en un conjunto $A \subseteq D$ si es continua en cada punto de A.

Teorema

Sean *f*, g tales que $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones definidas en el abierto U de $\mathbb{R}^2$.

Si *f* y *g* son funciones continuas en $(x_0, y_0) \in U$ entonces también lo son:

- $f+g$
- $f.g$
- si $g(x_0, y_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$

Las demostraciones son análogas a las de las propiedades de límite.

Teorema (Composición y continuidad)

Sea $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y *f*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, g continua en (x_0, y_0), *f* es continua en $g(x_0, y_0)$,entonces $(f \circ g)$ es continua en (x_0, y_0) donde $(f \circ g)(x, y) = f[g(x, y)]$ $\forall (x, y) \in \text{Dom}\, g$ tal que $g(x, y) \in$ Dom f.

Ejemplo

La función $F: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = sen\left(\dfrac{x^2 + y^2}{5x^4 + y^4 + 2}\right)$ es continua en $U \subseteq \mathbb{R}^2$, pues es la composición de la función $g(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{5x^4 + y^4 + 2}$ que es continua , con la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, que también lo es.

2.20.-

Hallar el mayor conjunto de puntos donde es continua cada una de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x.y} & si\ (x, y) \neq (0,0) \\ 1 & si\ (x, y) = (0,0) \end{cases} \qquad b)\ f(x, y) = \frac{6x - 2y}{9x^2 - y^2} \qquad c)\ g(x, y) = e^{xy}$$

$$d)\ f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \qquad e)\ f(x, y) = \operatorname{sen} x + \cos y$$

$$f)\ g(x, y) = 1 - \frac{\cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad g)\ f(x, y) = \frac{2}{y - x^2} \quad h)\ g(x, y) = \frac{x - 2y}{x^2 + y^2}$$

2.21.-

Estudiar la continuidad de la siguiente función real *f* en todos los puntos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad f(x,y)=\begin{cases} x^2+2y-1 & si\ \ x\geq 0 \\ 3x+y^2 & si\ \ x<0 \end{cases}$$

2.22.-

Estudiar la continuidad de la siguiente función real *f* en todos los puntos $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x(y-1)}{x^2+(y-1)^2} & si\ (x,y)\neq(0,1) \\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,1) \end{cases}$$

2.23.-

Idem para la función

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3\,y}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

2.24.-

Indicar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, justificando las respuestas:

$a)\ Si\ \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x,b)=L$

$b)\,Si\ \ \lim\limits_{x\to a} f(x,b)=L \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$

$c)\,Si\ f\ es\ continua\ para\ (x,y)\neq(0,0)\ y\ f(0,0)=0, entonces \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

$d)\,Si\ f(x,y)=g(x)+h(y)\ siendo\ h\ y\ g\ continuas, entonces\ f\ es\ continua.$

Problemas propuestos

Parcial 2001

Dada la función $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{5\ xy^2}{9\,x^2+7\,y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$ estudiar la continuidad de *f* en (0 , 0).

Primer Recuperatorio 2009

Demostrar, usando la definición que: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{2x+3y}{2y+1}=\dfrac{8}{5}$

Segundo Recuperatorio 2011

Probar, usando la definición que: $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} \dfrac{x-y}{x+y}=-\dfrac{1}{3}$

Final 25/02/14

Demostrar, usando la definición que: $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},3\right)} \dfrac{2x+y}{4x+y}=\dfrac{4}{5}$