TRABAJO PRACTICO Nº 4

ÁRBOLES DE REFUTACIÓN - MODELOS - MODELOS DE HERBRAND

1. Usando árboles de refutación determine cuáles de las siguientes fómulas son lógicamente válidas. En todos los casos a y b son constantes

   (a) $\exists x((P(x) \to P(a)) \wedge (P(x) \to P(b)))$
   (b) $\forall z(Q(z) \to P(z)) \to \exists x((Q(x) \to P(a)) \wedge (Q(x) \to P(b)))$
   (c) $\exists x \exists y(P(f(x)) \wedge Q(f(b)) \to (P(f(a)) \wedge P(y) \wedge Q(y)))$
   (d) $\exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)$
   (e) $\forall x(P(x) \wedge (Q(a) \vee Q(b))) \to \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

2. Usando árboles de refutación determine si los siguientes razonamientos son válidos

   (a) $\forall x A(x), \forall x(A(x) \to B(x) \wedge C(x)), \exists x \neg B(x) \vDash \exists x C(x)$
   (b) $\forall x \forall y(A(x) \wedge B(a,y) \to C(x,y)), \forall x(A(x) \to B(a,x)), A(b), B(a,c) \vDash \exists y C(b,y)$
   siendo a, b, c constantes

3. Convierta cada una de las siguientes fómulas a la forma prenexa:

   (a) $\forall x A(x) \to \exists x \forall y(B(x) \wedge C(x,y))$
   (b) $\forall z(\exists x \forall y(A(x,y) \vee B(y,z)) \to \exists x C(x,z))$
   (c) $\forall x(\forall y(A(x,y) \to \exists z B(y,z)) \to \forall z \exists x C(x,z))$

4. Convierta las fórmulas del ejercicio anterior a forma clausular partiendo de las formas prenexas obtenidas.

5. Convierta las siguientes fórmulas a la forma clausular (sin pasar por la forma prenexa) y escriba el resultado como un conjunto de cláusulas:

   (a) Cada una de las fórmulas del ejercicio 3 (compare con las fórmulas obtenidas en el ejercicio 4)
   (b) $\forall x \forall z \exists y \exists w(A(z) \to (B(x) \wedge \neg C(y) \wedge D(w)))$
   (c) $\exists x A(x) \to \exists x \exists y(B(x) \wedge C(x,y))$
   (d) $\forall x \forall y \exists z(A(x,y,z) \vee (\exists u C(x,u) \to \exists v(C(x,v) \wedge B(v,z))))$

6. Determine si los siguientes conjuntos de claúsulas son o no satisfacibles, usando Modelos de Herbrand

   (a) $S = \{A(x) \vee \neg B(y,x), \neg A(y) \vee C(c)\}$ c constante
   (b) $S = \{A(f(x)) \vee \neg B(y,x), \neg A(c) \vee C(x)\}$ c constante
   (c) $S = \{\neg A(x) \vee B(x), A(b), C(x,a), \neg B(y) \vee \neg C(a,y)\}$ a, b constantes
   (d) $S = \{A(x), \neg A(x) \vee B(f(x)), \neg B(f(a))\}$ a constante
   (e) $S = \{\neg A(x) \vee B(x,b), A(f(y)), A(a) \vee \neg B(y,a)\}$ a, b constantes

7. Dado el siguiente conjunto de cláusulas, determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas, justificando cada respuesta.
$S = \{\neg A(f(x)) \vee \neg B(x), A(f(a)) \vee A(c), B(b)\}$ a, b, c constantes
   (a) S no tiene Modelos de Herbrand
   (b) $Y = \{A(f(a)), B(b)\}$ es un Modelo de Herbrand para S
   (c) $Y = \{A(f(a)), B(b), A(f(b))\}$ es un Modelo de Herbrand para S
   (d) $Y = \{A(f(a)), B(b), B(a)\}$ es un Modelo de Herbrand para S
   (e) $Y = \{A(f(a)), B(b), A(c), B(f(a))\}$ es un Modelo de Herbrand para S

8. Determine cuáles de las siguientes fórmulas son fórmulas lógicamente válidas:
   (a) Usando Modelos de Herbrand
   (b) Usando la noción de p-satisfacible
      1. Fórmulas del ejercicio 5.
      2. $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x))$
      3. $\forall x \exists y \exists z((P(y, x) \wedge \neg R(y)) \vee ((R(x) \vee P(z, x) \rightarrow R(z))))$
      4. $\exists x(A(x, a) \rightarrow A(a, x)) \rightarrow (\forall x A(x, a) \rightarrow \exists x A(a, x))$ siendo a una constante
      5. $\exists x A(f(x)) \wedge \exists x B(x) \rightarrow \forall x A(f(x)) \wedge \forall x B(x)$
      6. $\forall x(B(x, b) \rightarrow B(b, x)) \rightarrow (\exists x B(b, x) \rightarrow \exists x B(b, x))$ siendo b una constante
      7. $\forall z \exists x \exists y(\neg P(x) \wedge Q(x, z) \vee (P(z) \vee Q(y, z) \rightarrow P(y)))$

   Para cada fórmula no lógicamente válida, dé un modelo en el que la fórmula sea falsa.

9. Determine usando Modelos de Herbrand si las siguientes deducciones son válidas:
   (a) $\Gamma \vDash \forall x(E(x) \rightarrow \neg B(x))$ donde
   $\Gamma = \{\forall x(\neg A(x) \rightarrow \neg B(x)), \forall x(C(x) \rightarrow D(x)), \forall x(E(x) \rightarrow \neg D(x)), \forall x(A(x) \rightarrow C(x))\}$
   (b) $\Gamma \vDash \exists x(P(x, a) \wedge (P(f(x), b)))$, siendo a, b constantes y
   $\Gamma = \{\forall x(P(a, x) \rightarrow P(b, f(x))), \forall x(P(f(x), x) \rightarrow \forall z(P(z, b))), P(a, f(a)) \wedge P(f(b), b)\}$

10. Dadas las sentencias
$A = \forall x \forall y \forall z(P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z))$
$B = \forall x \forall y(P(x, y) \rightarrow P(y, x))$
$C = \forall x \forall y \forall z(P(x, y) \wedge P(z, y) \rightarrow P(x, z))$
probar que $\{A, B\} \vDash C$

11. Usando modelos (no de Herbrand), estudie si las siguientes son o no fórmulas lógicamente válidas:
   (a) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
   (b) $\forall x(A(x) \vee B(x) \rightarrow A(a))$ a constante

12. Usando modelos (no de Herbrand), determine si las siguientes consecuencias semánticas son o no válidas. En los casos donde no se cumplan, construya un contraejemplo.
   (a) $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \vDash \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
   (b) $\forall x \exists y D(x, y) \vDash \exists y \forall x D(x, y)$
   (c) $\{\forall x(A(x) \rightarrow \neg B(x)), \exists x(A(x) \wedge C(x))\} \vDash \exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$
   (d) $\{\forall x(\neg(\neg Q(x) \vee \neg R(x))), \exists x(P(x) \rightarrow R(x)), \exists x(\neg R(x) \vee S(x))\} \vDash \exists x S(x)$