TRABAJO PRACTICO Nº 1

LOGICA PROPOSICIONAL

1. Sea F el conjunto de fórmulas lógicas definido por la siguiente definición BNF:

   $< form\_\log >::=< form\_\log >\rightarrow< form\_or > \mid < form\_or >$

   $< form\_or >::=< form\_or > \vee < form\_and > \mid < form\_and >$

   $< form\_and >::=< form\_and > \wedge < factor\_\log > \mid < factor\_\log >$

   $< factor\_log >::= (< form\_\log >)|\neg < factor\_\log > \mid < var\_prop >$

   $< var\_prop >::= a|b|c|...|z$

   (a) Escriba 3 cadenas que no sean fórmulas de F, es decir que no sean reconocidas por esta gramática, y 3 que sí lo sean.

   (b) Para cada fórmula del ejercicio 2), determine usando árboles de derivación, si es una fórmula de F.

2. Sean p, q y r variables proposicionales. Determine cuáles de las siguientes fórmulas son tautologías. ¿Qué puede decir de las que no lo son?

   (a) $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$

   (b) $q \vee r \rightarrow (\neg r \rightarrow q)$

   (c) $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

3. Sean a, b y c variables proposicionales. Usando las leyes de equivalencias para fórmulas lógicas, determine cuáles de los siguientes pares de fórmulas son equivalencias lógicas

   (a) $a \rightarrow b$ y $\neg(a \wedge \neg b)$

   (b) $a \leftrightarrow b$ y $(\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$

   (c) $a \rightarrow (b \rightarrow c)$ y $(a \rightarrow b) \rightarrow c$

4. Sean x e y variables proposicionales. Simplifique cada una de las siguientes fórmulas hasta obtener alguna de las siguientes expresiones $1, 0, x, y, x \wedge y, x \vee y$.

   (a) $\neg y \rightarrow y$

   (b) $\neg y \rightarrow \neg y$

   (c) $x \vee (y \vee x) \vee \neg y$

   (d) $(x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$

   (e) $x \vee y \vee \neg x$

   (f) $\neg x \wedge y \vee x$

   (g) $\neg x \rightarrow x \wedge y$

5. Dadas tres fórmulas A, B y C, y sabiendo que B es una tautología. ¿Qué puede decir del valor de verdad de $((A \to B) \wedge B) \vee A$?

6. Dadas dos fórmulas A y B, y sabiendo que $A \to B$ es una tautología. Indicar cuáles de las siguientes opciones son válidas.

   (a) $A \vee B$ es una tautología

   (b) $A \wedge B$ es una tautología

   (c) $\neg A \longrightarrow \neg B$ es una tautología

   (d) $\neg B \longrightarrow \neg A$ es una tautología

   (e) $A \wedge \neg B$ es una tautología

   (f) $A \wedge \neg B$ es una contingencia

   (g) $A \wedge \neg B$ es una contradicción

7. Sean p, q, r y s variables proposicionales. Determine si cada uno de los siguientes conjuntos de fórmulas es o no satisfacible. Para las fórmulas mutuamente satisfacibles, dé una valuación v que las satisfaga.

   (a) $\{p \wedge q, \neg p \wedge q\}$

   (b) $\{p \wedge q, \neg p \vee q\}$

   (c) $\{p \to q, p \vee q, \neg q\}$

   (d) $\{p \to q, q \to r, r \to s, p \to s\}$

8. Determinar la opción correcta al formalizar las siguientes frases en lenguaje natural como fórmulas del cálculo proposicional

   (a) Un país va bien si y solo si hay crecimiento económico y no hay inflación.

      1. $p \longleftrightarrow (q \wedge r)$
      2. $(p \longrightarrow q \wedge \neg r) \wedge (q \wedge \neg r \longrightarrow p)$
      3. $p \longrightarrow q \wedge \neg r$
      4. $(q \wedge r \longrightarrow p) \wedge (p \longrightarrow q \wedge r)$

   (b) En Argentina hay inflación y no hay crecimiento económico, por tanto, Argentina no va bien.

      1. $p \wedge \neg q \longrightarrow \neg r$
      2. $\neg r \longrightarrow p \wedge \neg q$
      3. $p \wedge q \longrightarrow r$
      4. $p \longrightarrow \neg r$

   (c) Cuando la economía no crece o el petróleo sube, el peso se devalúa a menos que la economía americana vaya peor.

      1. $\neg s \longrightarrow (\neg p \vee q \longrightarrow r)$
      2. $(\neg p \vee q \longrightarrow r) \longrightarrow s$
      3. $\neg s \longrightarrow (r \longrightarrow \neg p \vee q)$
      4. $s \longrightarrow (p \vee q \longrightarrow r)$

(d) Los trámites largos se realizan en la oficina de arriba o en la de abajo (no en ambas), sin embargo, los trámites largos se realizan en la oficina de abajo sólo si la de arriba está ocupada.

1. $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (q \longleftrightarrow r)$
2. $(p \vee q \vee \neg(p \wedge q)) \wedge (r \longrightarrow q)$
3. $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \wedge (q \longrightarrow r)$

9. Reescriba las siguientes oraciones en lenguaje natural como fórmulas del cálculo proposicional:

(a) Handel es un gran músico, y Vivaldi también.

(b) Si hay poco tránsito y salimos temprano, llegaremos más tarde de lo previsto.

(c) El tránsito y la lluvia lo han puesto de mal humor.

(d) Si M es negativo entonces Q es negativo. Si P es positivo, entonces Q es negativo. Por lo tanto, si M es negativo o P es positivo, luego Q es negativo.

(e) Si M es negativo entonces Q es negativo. Si P es positivo, entonces Q es negativo. Por lo tanto, si M es negativo y P es positivo, luego Q es negativo.

(f) Llevo piloto sólo si llueve.

(g) Llevo piloto sólo si no hay sol.

(h) No llevo piloto sólo si hay sol.

10. Determine si las siguientes oraciones en lenguaje natural son mutuamente satisfacibles:

(a) Llueve o está nublado. No llueve. Está nublado.

(b) Si me levanto temprano, estaré cansado. Me levanto temprano. No estoy cansado.

(c) Si hay sol, vamos al club. Si es sábado, vamos al club. Si hay sol y es sábado entonces vamos al club.

(d) La venta de casas cae si el interés sube. Los rematadores no están contentos si la venta de casas cae. El interés sube. Los rematadores están contentos.

11. Formalice en el lenguaje del cálculo proposicional y conteste las preguntas planteadas:
Tres personas A, B y C son acusadas de un asesinato. En el juicio ellos declaran lo siguiente:
- A dice: "Lo hizo B, C es inocente".
- B dice: "Si A es culpable, también lo es C".
- C dice: "Yo no lo hice, lo hizo uno de los otros dos".

(a) ¿Son consistentes sus declaraciones?

(b) Suponiendo que todos son inocentes, ¿quién miente?

(c) Suponiendo que toda declaración es verdadera, ¿quién es inocente y quién es culpable?

12. Buscando a Sir Morgan, un lógico encuentra a dos personajes. Junto a ellos, un caballo, una lanza y un escudo. El primer personaje dice, "Éste es el caballo de Sir Morgan, ésta es su lanza, pero éste no es su escudo". El segundo dice, "En efecto, éste es el caballo de Sir Morgan, pero, si ésta es su lanza, éste no es su escudo".

(a) Formalice el problema usando lógica proposicional.

(b) Sabiendo que uno de los personajes dice la verdad, y el otro miente, ¿qué personaje dice la verdad, y cuál miente?

(c) ¿Son en efecto estos 3 artículos de Sir Morgan?

13. Un rey somete a un prisionero a la siguiente prueba: lo enfrenta a dos puertas, de las que el prisionero debe elegir una, y entrar en la habitación correspondiente. Se informa al prisionero que hay un tigre y una dama, cada uno ubicado en una de las habitaciones. Como es natural, el prisionero debe elegir la puerta que lo lleva a la dama (entre otras cosas, para no ser devorado por el tigre). Para ayudarlo, en cada puerta hay un cartel:

    Puerta 1: en esta habitación hay una dama y en la otra un tigre.

    Puerta 2: en una de estas habitaciones hay una dama sí y sólo sí en la otra hay un tigre.

    (a) Formalice el problema usando lógica proposicional.
    (b) Sabiendo que uno de los carteles dice la verdad y el otro no, determinar qué puerta debe elegir el prisionero.

1. Sean p, q y r variables proposicionales. Muestre por tabla de verdad que las siguientes consecuencias semánticas no son válidas:

   (a) $\neg p \vee (q \to p) \models \neg p \wedge q$

   (b) $p \to (q \to r) \models p \to (r \to q)$

   (c) $\{\neg p, p \vee q\} \models \neg q$

2. Sean $A, B, C \in F_m$. Pruebe las siguientes consecuencias semánticas:

   (a) $\{\neg B, A \to (\neg B \to C)\} \models A \to C$

   (b) $\{A \to B, A \to C\} \models A \to B \wedge C$

   (c) $\{A \to C, B \to C\} \models A \wedge B \to C$

   (d) $A \to (\neg B \to C) \models A \to (\neg C \to \neg\neg B)$

   (e) $\{A, \neg B\} \models \neg(A \to \neg(B \to (\neg A \to A)))$

   (f) $\models \neg((\neg A \to A) \wedge (A \to \neg A))$

   (g) $\models (A \wedge \neg A) \to B$

3. Determine cuáles de las siguientes fórmulas son consecuencia semántica de la fórmula $A \wedge B$ y cuáles de la fórmula $A \vee \neg B$:
   A, $\neg B \longrightarrow A$, $\neg A \vee B$, $B \longrightarrow \neg A$

4. Sean $A, B, C \in F_m$.

   (a) Pruebe la siguiente consecuencia semántica: $\{B, A \to (B \to C)\} \models A \to C$

   (b) Si se agrega al conjunto de hipótesis la fórmula $\neg B \wedge A$, el conjunto de hipótesis resultante ¿es satisfacible o insatisfacible?

   (c) ¿Qué puede decir sobre la validez de $\{B, A \to (B \to C), \neg B \wedge A\} \models A \to C$?

5. Sean p, q y r variables proposicionales. Para cada una de las siguientes consecuencias semánticas no válidas, dar ejemplos de sentencias declarativas en lenguaje natural para p, q y r tales que las premisas sean verdaderas, pero la conclusión sea falsa.

   (a) $p \vee q \models p \wedge q$

   (b) $\neg p \to \neg q \models \neg q \to \neg p$

   (c) $p \to q \models p \vee q$

6. Formalizar y determinar la validez de los siguientes argumentos. Para los razonamientos que no sean válidos, dar una valuación que lo demuestre.

   (a) Si el mercado es totalmente libre, una sola empresa no puede alterar los precios. Si una sola empresa no puede alterar los precios es que hay un gran número de empresas. En consecuencia, el mercado es totalmente libre o no hay un gran número de empresas.

   (b) Si aumentan los precios, aumentan los salarios. Los precios aumentan si el gobierno no los controla. Si el gobierno los controla, no hay inflación. Pero hay inflación. En consecuencia, aumentan los salarios.

EJERCICIOS ADICIONALES

1. Sean p, q y r variables proposicionales. Usando tablas de verdad, muestre si los siguientes pares de fórmulas son o no equivalentes:

   (a) $p \wedge (q \vee r)$ y $p \wedge q \vee p \wedge r$

   (b) $p \vee q \wedge r$ y $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

   (c) $p \vee p \wedge q$ y p

   (d) $p \wedge q \vee \neg q$ y $p \vee \neg q$

   (e) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ y p

2. Sean a, b y c variables proposicionales. Usando las leyes de equivalencias para fórmulas lógicas, determine cuáles de los siguientes pares de fórmulas son equivalencias lógicas

   (a) $(a \vee (b \leftrightarrow c))$ y $(a \vee b) \leftrightarrow (a \vee c)$

   (b) $(a \rightarrow (b \leftrightarrow c))$ y $(a \rightarrow b) \leftrightarrow (a \rightarrow c)$

3. Sean x e y variables proposicionales. Simplifique cada una de las siguientes fórmulas hasta obtener alguna de las siguientes expresiones $1, 0, x, y, x \wedge y, x \vee y$.

   (a) $1 \rightarrow (\neg x \rightarrow x)$

   (b) $x \rightarrow (y \rightarrow x \wedge y)$

   (c) $\neg x \rightarrow (\neg x \rightarrow \neg x \wedge y)$

   (d) $(x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$

   (e) $(x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$

4. Sean p, q, r y s variables proposicionales. Determine si cada uno de los siguientes conjuntos de fórmulas es o no satisfacible. Para las fórmulas mutuamente satisfacibles, dé una valuación v que las satisfaga.

   (a) $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow s, p \wedge \neg s\}$

   (b) $\{p \vee q, p \vee (q \wedge r), p \rightarrow \neg r\}$

   (c) $\{p \rightarrow q, (p \wedge q) \rightarrow r, q \rightarrow \neg p\}$

5. Sea G el conjunto de fórmulas lógicas definido por la siguiente definición BNF:

   $< form\_\mathrm{log} >::=< form\_\mathrm{log} >\rightarrow< form\_\mathrm{log} > \mid < form\_\mathrm{log} > \vee < form\_\mathrm{log} > \mid < form\_\mathrm{log} > \wedge < form\_\mathrm{log} > \mid\neg < form\_\mathrm{log} > \mid(< form\_\mathrm{log} >)\mid < var\_prop >$

   $< var\_prop >::= a|b|c|...|z$

   Sea $v(p) = 1$, $v(q) = 1$ y $v(r) = 1$, los valores de verdad asociados a las variables proposicionales p, q y r, respectivamente.

   (a) Usando árboles de derivación determine si la siguiente fórmula lógica es una fórmula de G. Si es posible construir más de un árbol de derivación, constrúyalos y determine el valor de verdad de la fórmula en cada caso.
   $\{p \rightarrow q \vee r \wedge \neg r\}$

   (b) Realice el mismo procedimiento que en el inciso anterior según la definición de BNF dada en el ejercicio 1) del práctico

   (c) Compare resultados y saque conclusiones

1. Leyes conmutativas
   (a) $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$
   (b) $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$
   (c) $(A \leftrightarrow B) \equiv (B \leftrightarrow A)$
2. Leyes asociativas
   (a) $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
   (b) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
3. Leyes distributivas
   (a) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   (b) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
4. Leyes de De Morgan
   (a) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
   (b) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
5. Ley de la doble negación
   $\neg(\neg A) \equiv A$
6. Leyes Inversas
   (a) $A \vee \neg A \equiv 1$
   (b) $A \wedge \neg A \equiv 0$
7. Ley de implicación
   $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
8. Leyes idempotentes
   (a) $A \vee A \equiv A$
   (b) $A \wedge A \equiv A$
9. Leyes de Absorción
   (a) $A \vee (A \wedge B) \equiv A$
   (b) $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
10. Leyes de identidad
    (a) $A \vee 0 \equiv A$
    (b) $A \wedge 1 \equiv A$
11. Leyes de Dominación

(a) $A \vee 1 \equiv 1$

(b) $A \wedge 0 \equiv 0$

12. $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$

13. $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$