UNIDAD 4

DERIVADA

La idea central del cálculo diferencial es la noción de *derivada*. La derivada surgió por un problema geométrico, el problema de hallar la tangente a una curva en un punto determinado. Este concepto se formuló en el siglo XVII, cuando el matemático Pierre de Fermat, trató de determinar los máximos y los mínimos de ciertas funciones.

Considérese la siguiente figura para comprender la idea de Fermat.

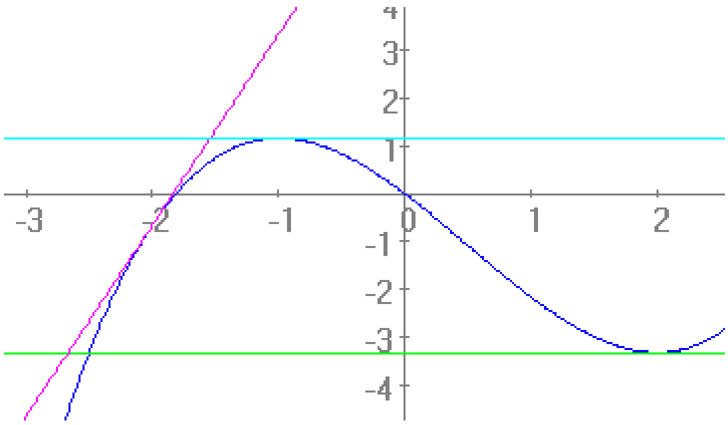


Fig. 1

Se supone que en cada uno de sus puntos, esta curva tiene una dirección que viene dada por la tangente. En aquellos puntos en que la curva tiene un máximo o un mínimo, de abscisas x_0, x_1 , la tangente es horizontal. Por lo tanto, el problema de localizar estos valores extremos se reduce al de la localización de las tangentes horizontales.

Esto conduce a la cuestión más general de la determinación de la tangente en un *punto arbitrario* de la curva.

Aunque la derivada se introdujo inicialmente para el estudio del problema de la tangente, pronto se vio que proporcionaba también un instrumento para el cálculo de velocidades y, en general para el estudio de la *variación* de una función.

Vamos a analizar un problema referido al cálculo de velocidad que conducirá a la definición de derivada.

Un problema relativo a la velocidad

Sea un proyectil lanzado verticalmente desde el suelo a una velocidad de $45\,m$ por segundo. Despreciando el rozamiento , se supone que sólo actúa la gravedad, por lo que el proyectil se mueve en línea recta. Sea $f(t)$ la altura en metros que alcanza el proyectil t segundos después del lanzamiento. Si la fuerza de gravedad no actuara , el proyectil continuaría subiendo a velocidad constante, recorriendo una distancia de $45\,m$ cada segundo, y en el tiempo t se tendría $f(t) = 45t$. Pero a causa de la gravedad, el proyectil va retardándose hasta que su velocidad llega a valor cero, momento en que comienza a caer. Experiencias físicas indican que, mientras el proyectil está en movimiento su altura $f(t)$ puede expresarse por una función cuadrática. Para el ejemplo,

(1) $$f(t) = 45t - 5t^2$$

El término $-5t^2$ es debido a la influencia de la gravedad. Se observa que las raíces de esta función cuadrática son $t=0$ y $t=9$, o sea, el proyectil regresará a la tierra luego de 9 segundos, por lo que la fórmula (1) sólo es válida para $0 \le t \le 9$.

El problema a considerar es el siguiente: *determinar la velocidad del proyectil en cada instante de su movimiento.*

Para poder comprender este problema es necesario precisar qué se entiende por velocidad en cada instante. Para ello, se introduce la noción de velocidad media durante un intervalo de tiempo, es decir, desde el instante t al $t+h$, definiéndola como el cociente:

$$\frac{\text{distancia en el intervalo de tiempo}}{\text{intervalo de tiempo}} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Este cociente, llamado cociente incremental, es un número posible de calcular siempre que t y $t+h$ pertenezcan al intervalo $[0,9]$. El número h puede ser positivo o negativo, pero no cero. Se dejará t fijo y se estudiará el cociente incremental, cuando h toma valores cada vez más pequeños en valor absoluto.

Por ejemplo, considérese $t=2$. La distancia recorrida después de 2 segundos es:

$$f(2) = 90 - 20 = 70$$

En el tiempo $t = 2+h$ la distancia recorrida es:

$$f(2+h) = 45\cdot(2+h) - 5\cdot(2+h)^2 = 70 + 25h - 5h^2$$

Por lo tanto, la velocidad media en el intervalo $t=2$ y $t=2+h$ es

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{25h-5h^2}{h} = 25-5h$$

Tomando valores de h cada vez más pequeños en valor absoluto, la velocidad media se acerca más y más a 25. Por ejemplo:

$$h = 0{,}1 \quad \rightarrow \quad \text{la velocidad media es } 24{,}5$$

$$h = 0{,}01 \quad \rightarrow \quad \text{la velocidad media es } 24{,}995$$

$$h = 0{,}00001 \quad \rightarrow \quad \text{la velocidad media es } 24{,}99995$$

$$h = -0{,}00001 \quad \rightarrow \quad \text{la velocidad media es } 25{,}00005$$

Lo importante es que se puede obtener la velocidad media tan próxima a 25 como se desee, basta tomar h *suficientemente pequeño.* Se dice que la velocidad media tiende al límite 25 cuando h tiende a cero. Al valor de este límite se lo llama *velocidad instantánea* en el instante $t=2$.

De la misma manera se puede proceder para cualquier otro instante. La velocidad media en un intervalo arbitrario entre t y $t+h$ está dada por el cociente:

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{\left[45\cdot(t+h) - 5\cdot(t+h)^2\right] - \left(45t - t^2\right)}{h} = 45 - 10t - 5h$$

Cuando h tiende a cero, el cociente tiende a $45-10t$ que define la *velocidad instantánea* en el instante *t*. Designando la velocidad instantánea por $v(t)$ se tiene:

(2) $$v(t)=45-10t$$

La fórmula (1) del espacio $f(t)$, define una función *f* que indica la altura a la que se encuentra el proyectil en cada instante de su movimiento; *f* se llama *función posición*. Su dominio es el intervalo $[0,9]$ y su gráfica es la siguiente:

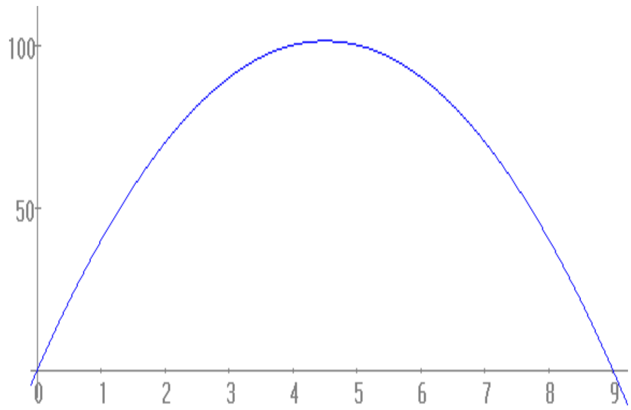


Fig. 2 $f(t)=45t-5t^2$

La fórmula (2) de la velocidad $v(t)$ define una nueva función *v* que indica la rapidez con que se mueve el proyectil en cada instante de su movimiento, se denomina *función velocidad* y su gráfica es:

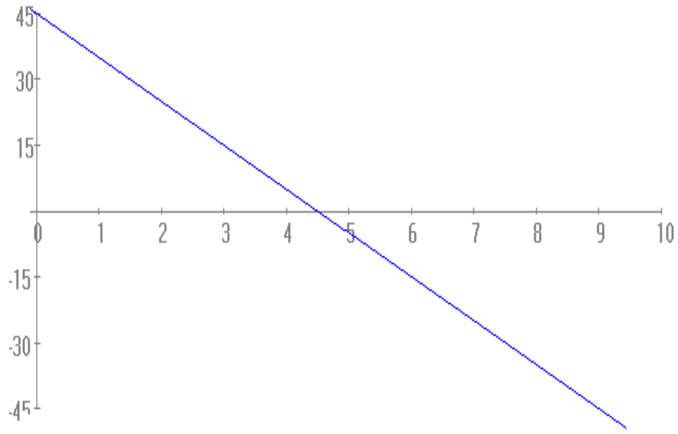


Fig..3 $v(t)=45-10t$

Para hallar el instante *t* en el cual $v(t)=0$ se resuelve la ecuación $45-10t=0$ obteniéndose $t=\frac{9}{2}$. Por lo tanto, en el punto central del movimiento la influencia de la gravedad reduce la velocidad a cero y el proyectil queda fijo por un instante. La altura en ese instante es $f\left(\frac{9}{2}\right)=101{,}25$ siendo ésta la altura máxima alcanzada.

El proceso por el cual se obtiene $v(t)$ a partir del cociente incremental se expresa simbólicamente:

(3) $$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Esta expresión utilizada para medir la velocidad, tiene un sentido más amplio y permite definir la velocidad en movimientos a lo largo de una línea recta, cuando se conoce la función de posición *f*, y siempre que el cociente incremental tienda a un límite cuando *h* tiende a cero.

Derivada de una función:

Sea *f* una función definida en un intervalo abierto $(a,b) \subseteq Dom f$. Se elige un punto *x* en el intervalo y se forma el cociente de diferencias (*cociente incremental*)

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

donde *h* puede ser positivo o negativo (pero no cero), y tal que $x + h \in (a,b)$. El cociente representa la *variación media* de *f* en el intervalo que une *x* a *x+h*.

Luego se hace tender *h* a cero y se estudia lo que ocurre a ese cociente. Si tiende a un cierto valor como límite, entonces ese límite se denomina *derivada de f en x* y se indica $f'(x)$ (se lee: "*f* prima de *x*").

Definición de derivada:

La derivada $f'(x)$ está definida por la igualdad:

(4) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Comparando (4) y (3) se ve que el concepto de velocidad instantánea es un ejemplo del concepto de derivada.
La velocidad $v(t)$ es igual a la derivada $f'(t)$ cuando *f* es la ley de espacios. En el ejemplo desarrollado la ley de espacios está dada por la ecuación

$$f(t) = 45t - 5t^2$$

y su derivada $f'(t)$ es una nueva función (velocidad) dada por

$$f'(t) = 45 - 10t$$

El proceso de paso al límite por el que se obtiene $f'(x)$ a partir de $f(x)$, permite obtener una nueva función f' a partir de una función dada *f*.
Este proceso se llama *derivación* y f' es la *primera derivada* de *f*.
Si f' a su vez está definida en un intervalo abierto se puede calcular su primera derivada, indicada por f'', que es la segunda derivada de *f*.
Análogamente la derivada *n*-ésima de *f*, que se indica por $f^{(n)}$, se define como la derivada primera de $f^{(n-1)}$. Convendremos que la derivada de orden cero de *f* es la

misma función $\left(f^{(0)} = f\right)$.

En el ejemplo del movimiento rectilíneo, la primera derivada de la velocidad (segunda derivada del espacio) se denomina aceleración y la calculamos de la siguiente manera:

$$a(t) = v'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[45 - 10\cdot(t+h) - (45-10t)\right]}{h} = -10$$

Ejemplos de derivadas:

1. ***Derivada de una función constante***

Suponga que *f* es una función constante, por ejemplo, $f(x) = c$ para todo *x*.
El cociente incremental es

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = \frac{0}{h} = 0\,.$$

Puesto que el cociente es cero para todo *x*, su límite, $f'(x)$, es también 0 para todo *x*. Por lo tanto, una función constante tiene derivada nula para todo *x*.

$$f(x) = c \quad c = cte. \qquad \Leftrightarrow \qquad f'(x) = 0 \quad \forall x$$

2. ***Derivada de una función lineal.***

Sea *f* es una función lineal, por ejemplo, $f(x) = mx + b$ para todo real *x*.
El cociente incremental es

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{m\cdot(x+h)+b-(mx+b)}{h} = \frac{mh}{h} = m\,.$$

Como el cociente no depende de *h*, su límite cuando *h* tiende a cero es *m*, en consecuencia, $f'(x) = m$ para todo *x*.

$$f(x) = mx + b \qquad \Leftrightarrow \qquad f'(x) = m \quad \forall x$$

3. ***Derivada de una función potencial de exponente entero positivo***

Sea $f(x) = x^n$ siendo n un entero positivo. El cociente incremental es

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}\,.$$

Para estudiar este cociente incremental se descompone el numerador utilizando la identidad:

$$a^n - b^n = (a-b)\cdot\sum_{k=0}^{n-1} a^k \cdot b^{n-1-k}$$

Tomando $a = x + h$ y $b = x$ el cociente incremental queda

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{(x+h-x)\cdot \sum_{k=0}^{n-1} (x+h)^k \cdot x^{n-1-k}}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} (x+h)^k \cdot x^{n-1-k}$$

En la suma hay *n* términos. Cuando *h* tiende a 0, $(x+h)^k$ tiende a x^k. El *k*-ésimo término tiende a $x^k \cdot x^{n-1-k}$, y por lo tanto la suma de los *n* términos tiende a $n \cdot x^k \cdot x^{n-1-k} = n.x^{n-1}$. De esto resulta:

$$f(x) = x^n \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad \forall x$$

4. ***Derivada de la función seno.***

Sea $f(x) = senx$. El cociente incremental es:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{sen(x+h) - senx}{h}$$

Transformando en producto a la diferencia de senos utilizando la identidad trigonométrica

$$seny - senx = 2 \cdot sen\frac{y-x}{2} \cdot \cos\frac{y+x}{2}$$

y poniendo $y = x + h$, conduce a la fórmula

$$\frac{sen(x+h) - senx}{h} = \frac{2 \cdot sen\frac{x+h-x}{2} \cdot \cos\frac{x+h+x}{2}}{h} = \frac{sen\left(h/2\right)}{h/2} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

Cuando $h \to 0$, el factor $\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \to \cos x$ por la continuidad del coseno.

Es sabido que $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$. Haciendo $t = \frac{h}{2}$, cuando $h \to 0$ se tiene que $t \to 0$ y en consecuencia $\frac{sent}{t} \to 1$. (5)

Luego, el cociente incremental tiene como límite $\cos x$ cuando $h \to 0$. Dicho de otro modo, la derivada de la función $senx$ es la función $\cos x$.

$$f(x) = senx \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = \cos x \quad \forall x$$

5. ***Derivada de la función coseno.***

Sea $f(x) = \cos x$. El cociente incremental es:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

Se transforma en producto a la diferencia de cosenos utilizando la identidad trigonométrica

$$\cos y - \cos x = -2 \cdot sen\,\frac{y-x}{2} \cdot sen\,\frac{y+x}{2}$$

y poniendo $y = x + h$, conduce a la fórmula

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -2 \cdot sen\,\frac{x+h-x}{2} \cdot sen\,\frac{x+h+x}{2} = -\frac{sen\left(h/2\right)}{h/2} \cdot sen\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

Cuando $h \to 0$, el factor $sen\left(x + \frac{h}{2}\right) \to senx$ por la continuidad del seno. Teniendo en cuenta este hecho y (5) se concluye que el cociente incremental tiene como límite $-senx$ cuando $h \to 0$. Dicho de otro modo, la derivada de la función $\cos x$ es la función $-senx$.

$$f(x) = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = -senx \quad \forall x$$

6. *Derivada de la función logaritmo natural.*

Sea $f(x) = \ln x$. Aplicando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) =$$

.

$$= \frac{1}{x} \cdot \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{1}{x/h}\right)^{x/h}.$$

Haciendo $\frac{x}{h} = t$, $\frac{h}{x} = \frac{1}{t}$ y se tiene que $h \to 0$ entonces $t \to \infty$. Luego:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln\left[\lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right] = \frac{1}{x} \cdot \ln e = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

Continuidad de las funciones que admiten derivada.

Si una función *f* tiene derivada en un punto *x*, es también continua en *x*. Para demostrarlo, se emplea la identidad

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

válida para $h \neq 0$. Pasando al límite

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0} \left[f(x) + h \cdot \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)\right]$$

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0} f(x) + \lim_{h\to 0} h \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right)$$

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x) + 0 \cdot f'(x) = f(x)$$

Esto demuestra que $f(x+h) \to f(x)$ cuando $h \to 0$, y por lo tanto *f* es continua en *x*.

Este ejemplo proporciona un nuevo procedimiento para probar la continuidad de las funciones. Cada vez que existe la derivada de una función en un punto, queda establecida la continuidad de la función en dicho punto.

El recíproco no es cierto, la continuidad en un punto no implica la existencia de la derivada en él.

Por ejemplo, sea $f(x) = |x|$.

El punto $x = 0$ es de continuidad de *f* puesto que $f(x) \to 0$ cuando $x \to 0$.

El cociente incremental es

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-0}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & si \quad h > 0 \\ -1 & si \quad h < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, cuando $h \to 0$ el cociente incremental no tiene límite y la derivada de la función no existe.

Álgebra de derivadas.

Teorema 1:

Sean f y g dos funciones definidas en un intervalo. En cada punto en que f y g tienen derivadas, también las tienen la suma $f+g$, *la diferencia* $f-g$, *el producto* $f \cdot g$ *y el cociente* f/g *(siempre que g sea distinta de cero). Las derivadas de estas funciones están dadas por las siguientes fórmulas:*

i. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

ii. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

iii. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

iv. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ en puntos *x* donde $g(x) \neq 0$

Demostración de i.:

Sea *x* un punto en el que existen $f'(x)$ y $g'(x)$. Aplicando la definición de derivada a la función $f+g$.

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}$$

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h}$$

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$$

Demostración de ii : es análoga a la realizada para *i*.

Demostración de iii.:

El cociente incremental para el producto $f \cdot g$ es:

$$\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} = \frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

Para estudiar este cociente cuando $h \to 0$ se suma y se resta al numerador un término conveniente para que se pueda escribir al cociente incremental del producto como la suma de dos términos en los que aparezcan los cocientes incrementales de f y g. Sumando y restando $g(x)\cdot f(x+h)$ se tiene:

$$\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)+g(x)\cdot f(x+h)-g(x)\cdot f(x+h)}{h}$$

Aplicando propiedad conmutativa y asociativa :

$$\frac{[g(x)\cdot f(x+h)-f(x)\cdot g(x)]+[f(x+h)\cdot g(x+h)-g(x)\cdot f(x+h)]}{h}$$

Sacando factor común $g(x)$ y $f(x+h)$ respectivamente:

$$\frac{g(x)\cdot[f(x+h)-f(x)]+f(x+h)\cdot[g(x+h)-g(x)]}{h}$$

Por lo tanto, pasando al límite se tiene:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\cdot[f(x+h)-f(x)]+f(x+h)\cdot[g(x+h)-g(x)]}{h} =$$

$$= g(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$= g(x)\cdot f'(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

lo que demuestra que:

$$(f\cdot g)'(x) = g(x)\cdot f'(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Demostración de iv.:

Un caso particular del cociente de dos funciones se tiene cuando $f(x)=1$ para todo *x*. En este caso, por *i),* $f'(x)=0$ y *iv)* se reduce a la fórmula

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

Se probará que esta afirmación es verdadera:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{1}{g}\right)(x)}{h} = \frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h} = \frac{\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x)\cdot g(x+h)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{g(x+h)} = -\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)}$$

Siendo $g(x)$ continua en *x*, $g(x+h)\to g(x)$ cuando $h\to 0$. Por lo tanto:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -g'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{g(x)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

A partir de este caso particular, se puede deducir la fórmula general *iv)*:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)(x) + f(x)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Sacando denominador común en el último miembro se llega a la expresión buscada:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Observaciones:

Un caso particular de *iii.* Cuando una de las funciones es constante, por ejemplo , $g(x)=c$ para todo valor de *x, iii)* se transforma en $(c\cdot f)'(x) = c\cdot f'(x)$, es decir, la derivada del producto de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Combinando esta propiedad con la *i)* se tiene para constantes c_1 y c_2:

$$(c_1\cdot f + c_2\cdot g)'(x) \underset{por\ i}{=} (c_1\cdot f)'(x) + (c_2\cdot g)'(x) \underset{por\ iii}{=} c_1\cdot f'(x) + c_2\cdot g'(x)$$

Esta propiedad se denomina *propiedad lineal* de la derivada.

Interpretación geométrica de la derivada.

La derivada tiene una interesante interpretación geométrica que conduce por un camino natural a la idea de tangente a una curva. Considerese una parte de la gráfica de una función *f*.

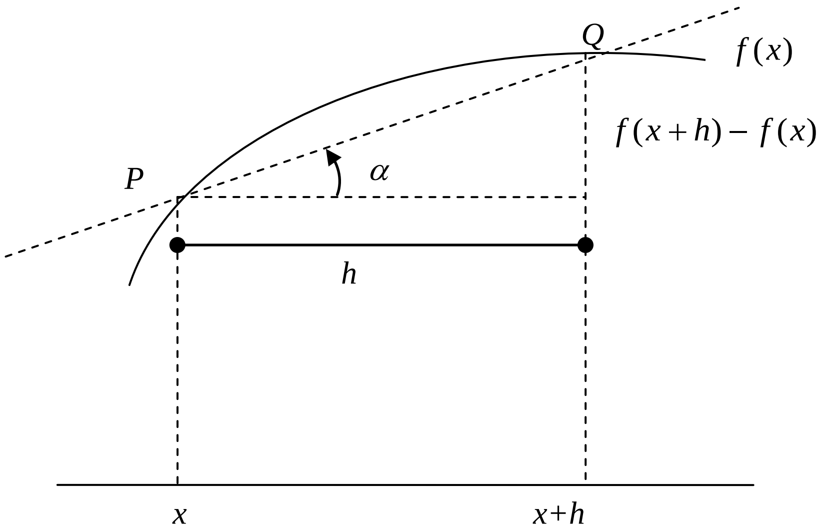


FIGURA 4

Las coordenadas de los puntos P y Q son, respectivamente $\left(x, f(x)\right)$ y $\left(x+h, f(x+h)\right)$. En el triángulo rectángulo de hipotenusa *PQ*, el cateto opuesto al ángulo α es $f(x+h)-f(x)$ y representa al incremento de la función $f(x)$ en tanto que, el cateto adyacente al mismo es *h* representando éste el incremento de la variable independiente. El cociente incremental

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

es la tangente trigonométrica del ángulo α que forma PQ con la horizontal. El número real $tg\alpha$ se denomina la pendiente de la recta que pasa por los puntos P y Q y proporciona un método para conocer la inclinación de la misma. Si $g(x)=mx+b$, el cociente incremental tiene el valor *m*, de manera que *m* es la pendiente de la curva.
Si se trata de una recta horizontal, $\alpha=0$ y la pendiente $tg\alpha$, es también 0.

Si $0<\alpha<\pi/2$, recorriendo la gráfica de izquierda a derecha, la ruta es ascendente y la pendiente está representada por un número entero positivo.

Si $\pi/2<\alpha<\pi$, yendo de izquierda a derecha la recta es descendnte y la pendiente es negativa.

Una recta en la que $\alpha=\pi/4$, tiene pendiente 1.

Si α crece de 0 a $\pi/2$, $tg\alpha$ crece infinitamente y las rectas correpondientes a tales pendientes se aproximan a la posición vertical.

Puesto que $tg\left(\pi/2\right)$ no está definida, se dice que las *rectas verticales no tienen pendiente*.

Sea f una función que tiene derivada en *x*, por lo que el cociente incremental tiende a cierto límite $f'(x)$ cuando *h* tiende a 0. En la interpretación geométrica, al tender *h* a cero, el punto *P* permanece fijo pero *Q* se mueve hacia *P* a lo largo de la curva y la recta *PQ* cambia su dirección de manera que la tangente del ángulo α tiende al límite $f'(x)$. Por esta razón, es natural tomar como *pendiente de una curva* en el punto *P* al número $f'(x)$. La recta por *P* que tiene esta pendiente se llama *tangente* a la curva en *P*.

El signo de la derivada de una función es útil para precisar la forma de la gráfica. Si en un punto *x* de un intervalo abierto la derivada es *positiva*, la gráfica es *creciente* en la proximidad de *x*.
Si la derivada es *negativa* en un intervalo, la gráfica es *decreciente*.
Si la derivada es nula, significa una tangente horizontal.

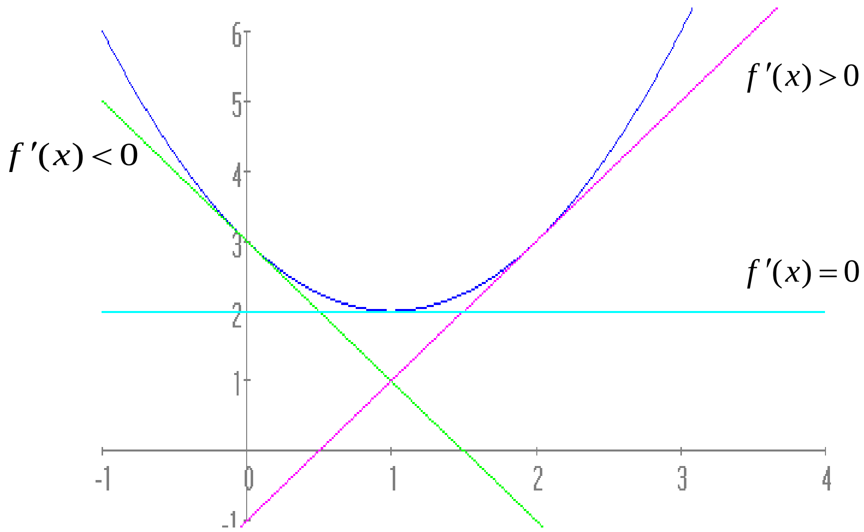


FIGURA 5

En un máximo o mínimo tales como los indicados en la figura, la pendiente debe ser cero. Fermat fue el primero que observó que puntos donde una función tiene un máximo o mínimo se han de encontrar entre las raíces de $f'(x)$. Es importante notar que $f'(x)$ puede ser cero en puntos donde no hay máximo ni mínimo.

Derivación de funciones compuestas.

Regla de la cadena

Las reglas de derivación vistas hasta el momento permiten hallar derivadas de funciones *f* para las cuales $f(x)$ es una suma finita de productos o cocientes de constantes multiplicadas por $sen x$, $\cos x$ y x^n. No se han tratado aún funciones como $f(x) = sen\left(x^2\right)$, cuyas derivadas se calculan a partir de la misma definición.

Se verá un teorema llamado *regla de la cadena*, que nos permitirá derivar funciones compuestas.
Recordemos que si *u* y *v* son dos funciones tal que $\operatorname{Im} v \subseteq Dom\, u$, se puede definir la función compuesta $f = u \circ v$ mediante la igualdad $f(x) = u[v(x)]$.

La regla de la cadena nos da la expresión de la derivada de *f* en función de las derivadas de *u* y *v*.

Teorema: Regla de la cadena

Sea f la función compuesta de dos funciones u y v, $f = u \circ v$. *Si existen las derivadas* $v'(x)$ *y* $u'(y)$ *donde* $y = v(x)$, *la derivada* $f'(x)$ *también existe y está dada por:*

(6) $$f'(x) = u'(y) \cdot v'(x) = u'[v(x)] \cdot v'(x)$$

Expresada como una igualdad entre funciones más que entre números, la regla de la cadena toma la forma:

$$(u \circ v)' = (u' \circ v) \cdot v'$$

Demostración:

Se supone que *v* tiene derivada en *x* y *u* tiene derivada en *v*(*x*) y se trata de demostrar que *f* tiene derivada en *x* dada por el producto $u'[v(x)] \cdot v'(x)$.
El cociente incremental para *f* es:

(7) $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u[v(x+h)] - u[v(x)]}{h}$$

Llamemos $y = v(x)$ y $k = v(x+h) - v(x)$. Se tiene entonces que $v(x+h) = k + y$ y la expresión anterior se transforma en:

(8) $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u[k+y] - u[y]}{h}$$

Si en el denominador del segundo miembro en lugar de *h* apareciera *k*, el segundo miembro de (8) representaría el cociente incremental cuyo límite define $u'(y)$.
Si $k \neq 0$ multiplicando y dividiendo por *k*, el segundo miembro toma la forma (9):

$$\frac{u[k+y] - u[y]}{h} = \frac{u[k+y] - u[y]}{h} \cdot \frac{k}{k} = \frac{u[k+y] - u[y]}{k} \cdot \frac{k}{h} = \frac{u[k+y] - u[y]}{k} \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

Dado que $k = v(x+h) - v(x)$ y *v* es continua en *x*, al tender *h* a cero también *k* tiende a cero, por lo cual, el primer cociente del último miembro de la igualdad (9) tiende a $u'(y)$.
El segundo cociente del último miembro de la igualdad (9) tiende a $v'(x)$ cuando *h* tiende a cero.
Luego: $f'(x) = u'[v(x)] \cdot v'(x)$ queda demostrada para $k \neq 0$.
Como $k = v(x+h) - v(x)$ puede ocurrir que $k = 0$ para infinitos valores de *h* cuando *h* tiende a cero, en cuyo caso no es válida la demostración anterior.

Retomando la ecuación (8) se expresa el cociente del segundo miembro de manera que no aparezca *k* en el denominador, para lo cual se introduce la diferencia entre $u'(y)$ y el cociente incremental de $u(y)$. Es decir, se define una nueva función *g* de la siguiente manera:

(10) $$g(t)=\frac{u(y+t)-u(y)}{t}-u'(y) \quad \text{si} \quad t\neq 0$$

Multiplicando por t y trasponiendo términos, (10) toma la forma:

$$t\cdot g(t)=u(y+t)-u(y)-t\cdot u'(y) \quad \text{si} \quad t\neq 0,$$

de donde:

(11) $$u(y+t)-u(y)=t\cdot\left[g(t)+u'(y)\right] \quad \text{si} \quad t\neq 0$$

Sustituyendo t en (11) por k

$$u(y+k)-u(y)=k\cdot\left[g(k)+u'(y)\right]$$

Llevando esta expresión a la (8) se tiene:

(12) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{k}{h}\cdot\left[g(k)+u'(y)\right],$$

fórmula que es válida aún cuando $k=0$.

Si $h\to 0$ el cociente $\frac{k}{h}=\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\to v'(x)$.

El valor que se asigne a $g(0)$ no es importante para esta demostración. Puesto que $g(t)\to 0$ cuando $t\to 0$, podemos definir $g(0)=0$.
Si $h\to 0$ entonces $g(k)\to 0$.
Por lo tanto, el segundo miembro de (12) tiende a $v'(x)\cdot u'(y)$ y queda completada la demostración de la regla de la cadena.

Aplicaciones de la regla de la cadena.

Ejemplo 1:

Dada $f(x)=sen\left(x^2\right)$ hallar $f'(x)$.

La función f es una composición, $f(x)=u[v(x)]$, donde $v(x)=x^2$ y $u(x)=senx$. Se tiene que $v'(x)=2x$ y $u'(x)=\cos x$. Aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x)=u'[v(x)]\cdot v'(x)=\cos(x^2)\cdot 2x$$

Ejemplo 2:

Si $f(x)=[v(x)]^n$ donde n es un entero positivo, calcular $f'(x)$ en función de $v(x)$ y $v'(x)$.

La función f es una composición, $f(x)=u[v(x)]$, donde $u(x)=x^n$. Puesto que $u'(x)=n\cdot x^{n-1}$, se tiene $u'[v(x)]=n\cdot[v(x)]^{n-1}$ y por la regla de la cadena:

$$f'(x)=u'\left[v(x)\right]\cdot v'(x)=n\cdot[v(x)]^{n-1}\cdot v'(x)$$

Si se escribe esta expresión como igualdad entre funciones se obtiene:

$$f = v^n \quad \Leftrightarrow \quad f' = n \cdot v^{n-1} \cdot v'$$

que indica cómo se deriva la potencia *n*-ésima de una función cuando existe su derivada. La fórmula también es válida para potencias racionales si v^n y v^{n-1} están definidas.

Ejemplo 3:

La ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ representa una circunferencia de radio *r* y centro en el origen. Expresando explícitamente a *y* en función de *x*, se obtienen dos soluciones ue sirven para definir dos funciones *f* y *g* dadas en el intervalo $[-r, r]$ por las fórmulas:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

Se buscan las derivadas de *f* y *g* mediante la regla de la cadena.

$$f(x) = \left(r^2 - x^2\right)^{1/2} \quad \to \quad f'(x) \underset{por\ II}{=} \frac{1}{2} \cdot \left(r^2 - x^2\right)^{-1/2} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{f(x)}$$

si $f(x) \neq 0$

El mismo procedimiento aplicado a *g* da:

$$g(x) = -\left(r^2 - x^2\right)^{1/2} \to g'(x) = \underset{por\ II}{=} -\frac{1}{2} \cdot \left(r^2 - x^2\right)^{-1/2} \cdot (-2x) = \frac{-x}{-\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{g(x)}$$

si $g(x) \neq 0$

Obsérvese que si se indica con *y* a cualquiera de las dos funciones, las dos fórmulas pueden combinarse en una sola: $y' = \dfrac{-x}{y}$

Otra aplicación útil de la regla de la cadena, se encuentra en el método de la *derivación implícita.* Para explicar el método y ver sus ventajas se buscará nuevamente el resultado del ejemplo III por un camino más sencillo.

Ejemplo 4.

La fórmula $y' = \dfrac{-x}{y}$ se puede deducir directamente de $x^2 + y^2 = r^2$ sin necesidad de resolverla respecto a *y*. Recordando que *y* es función de *x*, se pueden derivar ambos miembros de la ecuación y se tiene:

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

donde el término $2y \cdot y'$ es el resultado de derivar y^2 según el ejemplo 2. Resolviendo la ecuación respecto a y' se obtiene $y' = \dfrac{-x}{y}$.

La ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ se dice que define *y implícitamente* como función de *x* y el proceso por el cual se obtiene $2x + 2y \cdot y' = 0$ se llama *derivación implícita*.

Ejemplo 5: Derivación logarítmica..

Se verá una técnica conocida por *derivación logarítmica* que resulta muy útil para el cálculo de derivadas. El método se fundamenta en la regla de la cadena

Se toma la función compuesta de $\ln$ con una función derivable cualquiera $f(x)$, es decir,

$$g(x) = \ln\left(f(x)\right) \quad \forall x : f(x) > 0$$

Aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$g'(x) = \ln'\left(f(x)\right) \cdot f'(x) \quad \forall x : f(x) > 0$$

Puesto que:

$$\ln' x = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \ln'\left(f(x)\right) = \frac{1}{f(x)}$$

Reemplazando en $g'(x)$ queda:

$$g'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \forall x : f(x) > 0$$

Si la derivada $g'(x)$ se puede calcular de alguna otra forma, entonces se puede obtener $f'(x)$. Este método resulta útil en la práctica cuando $g'(x)$ es más fácil de calcular que $f'(x)$.

Ejemplo 6:

Calcular $f'(x)$ si $f(x) = x^3 \cdot \left(1 + x^2\right)^{-4} \cdot sen x$.

Se toma el logaritmo del valor absoluto de $f(x)$ y luego se deriva. Sea pues:

$$\ln |f(x)| = \ln \left| x^3 \cdot \left(1 + x^2\right)^{-4} \cdot sen x \right|$$

Aplicando propiedades del logaritmo se tiene:

$$\ln |f(x)| = \ln \left| x^3 \right| - 4 \cdot \ln \left| 1 + x^2 \right| + \ln |sen x|$$

Por lo tanto:

$$\ln' |f(x)| = \ln' \left| x^3 \right| - 4 \cdot \ln' \left| 1 + x^2 \right| + \ln' |sen x|$$

Luego,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3x^2}{x^3} - 4 \cdot \frac{\cdot 2x}{1 + x^2} + \frac{\cos x}{sen x}$$

Simplificando y multiplicando por $f(x)$ obtenemos la expresión de $f'(x)$.

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{3}{x} - 4 \cdot \frac{\cdot 2x}{1+x^2} + \frac{\cos x}{senx} \right)$$

$$f'(x) = \left(x^3 \cdot \left(1+x^2\right)^{-4} \cdot senx \right) \cdot \left(\frac{3}{x} - 4 \cdot \frac{\cdot 2x}{1+x^2} + \frac{\cos x}{senx} \right)$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 senx}{\left(1+x^2\right)^4} - 8 \cdot \frac{x^4 senx}{\left(1+x^2\right)^5} + \frac{x^3 \cos x}{\left(1+x^2\right)^4}$$

Derivadas de funciones inversas.

Teorema 2:

Supongamos f estrictamente creciente y continua en un intervalo $[a,b]$, *y sea g la inversa de f. Si existe la derivada* $f'(x)$ *y no es nula en un punto x de* (a,b), *entonces la derivada* $g'(y)$ *también existe y no es nula en el correspondiente punto y, siendo* $y = f(x)$. *Además las dos derivadas son recíprocas una de otra, esto es:*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Demostración:

Supóngase que *x* es un punto de (a,b) en el que $f'(x)$ existe y es distinta de cero y sea $y = f(x)$. Se trata de demostrar que el cociente incremental

$$\frac{g(y+k) - g(y)}{k}$$

tiende al límite $\frac{1}{f'(x)}$ cuando $k \to 0$.

Sea $h = g(y+k) - g(y)$, como $g(y) = x$ es $h = g(y+k) - x$ de donde $h + x = g(y+k)$: De aquí resulta que $y + k = f(x+h)$ y por lo tanto $k = f(x+h) - y = f(x+h) - f(x)$. Luego si $k \neq 0$ el cociente incremental es:

$$\frac{g(y+k) - g(y)}{k} = \frac{g(y+k) - g(y)}{f(x+k) - f(x)} = \frac{h}{f(x+k) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+k) - f(x)}{h}}$$

Dada la continuidad de *g* en *y*, cuando $k \to 0$ la diferencia $g(y+k) - g(y) \to 0$, es decir $h \to 0$ cuando $k \to 0$. Se sabe el cociente incremental del denominador del último miembro de la igualdad anterior tiende a $f'(x)$ cuando $h \to 0$. Por lo tanto, cuando $k \to 0$, el cociente incremental del primer miembro de la igualdad anterior tiende al límite $\frac{1}{f'(x)}$, con lo cual el teorema queda probado.

Ejemplo 1:

Dada $y = e^x$, hallar $y'(x)$.

$$y = e^x \quad \rightarrow \quad x = \ln y \quad \text{luego} \quad y'(x) = \left(e^x\right)' = \frac{1}{(\ln y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

$$y(x) = e^x \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = e^x$$

Ejemplo 2:

Calcular las derivadas de las funciones trigonométricas inversas:

a) $y = arc\,sen\,x$ para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

$$y = arc\,sen\,x \quad \rightarrow \quad x = sen y$$

$$(arc\,sen x)' = \frac{1}{(sen\,y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y(x) = arc\,sen\,x \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

b) $y = arc\cos x$ para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

$$y = arc\cos\ x \quad \rightarrow \quad x = \cos y$$

$$(arc\cos x)' = \frac{1}{(\cos\ y)'} = \frac{1}{-\,sen\,y} = \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y(x) = arc\cos x \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

c) $y = arc\ tg\,x$ para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

$$y = arc\ tg\,x \quad \rightarrow \quad x = tg\ y$$

$$(arc tg\ x)' = \frac{1}{(tg\,y)'} = \frac{1}{\sec^2\ y} = \cos^2\ y$$

Teniendo en cuenta que $x = tg\ y$ se tiene:

$$x^2 = tg^2 y \rightarrow 1 + x^2 = 1 + tg^2 y \rightarrow 1 + x^2 = 1 + \frac{sen^2 y}{\cos^2\ y} \rightarrow 1 + x^2 = \frac{\cos^2\ y + sen^2 y}{\cos^2\ y}$$

de donde:

$$\cos^2\ y = \frac{1}{1 + x^2} \quad \rightarrow \quad (arc\,tg\ x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$y(x) = arc tg\ x \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

d) $y = arc\ \cot g\, x$ para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

$$y = arc\ \cot g\, x \quad \to \quad x = \cot g\ y$$

$$(arc\ co\,tg\ x)' = \frac{1}{(\cot g\ y)'} = \frac{1}{-\cos ec^2 y} = -sen^2 y$$

Teniendo en cuenta que $x = \cot g\ y$ se tiene:

$$x^2 = \cot g^2 y \to 1 + x^2 = 1 + \cot g^2 y \to 1 + x^2 = 1 + \frac{\cos^2 y}{sen^2 y} \to$$

$$\to 1 + x^2 = \frac{sen^2 y + \cos^2 y}{sen^2 y}$$

de donde:

$$sen^2 y = \frac{1}{1+x^2} \quad \to \quad (arc\cot g\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$y(x) = arc\cot g\ x \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

e) $y = arc\ \sec x$ para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

$$y = arc\ \sec x \quad \to \quad x = \sec y$$

$$(arc\ \sec\ x)' = \frac{1}{(\sec y)'} = \frac{1}{\sec y \cdot tg\ y}$$

Teniendo en cuenta que $x = \sec y$ se tiene:

$$tg^2\ y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y} \to tg^2\ y = \sec^2\ y - 1 \to tg\ y = \sqrt{\sec^2\ y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

de donde:

$$\frac{1}{\sec y \cdot tg\ y} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \quad \to \quad (arc\sec x)' = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y(x) = arc\sec x \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$$

f) $y = arc\ \cos ec\, x$ para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

$$y = arc\ \cos ec\, x \quad \to \quad x = \cos ec\ y$$

$$(arc\ \cos ec\ x)' = \frac{1}{(\cos ec\ y)'} = -\frac{1}{\cos ec\ y \cdot \cot g\ y}$$

Teniendo en cuenta que $x = \cos ec\, y$ se tiene:

$$\cot g^2\, y + 1 = \frac{1}{sen^2\, y} \rightarrow \cot g^2\, y = \cos ec^2 y - 1 \rightarrow \cot g\, y = \sqrt{\cos ec^2\, y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

de donde:

$$\frac{1}{\cos ec\, y \cdot \cot g\, y} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \quad \rightarrow \quad (arc \cos ec\, x)' = -\frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y(x) = arc \cos ec\, x \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = -\frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$$

1. Derivación de una función dada paramétricamente

Sea *y* una función de *x* da por las ecuaciones paramétricas:

$$\left. \begin{array}{l} x = \ \ \varphi(t) \\ y = \ \ \psi(t) \end{array} \right\} \quad t_0 \leq t \leq T$$

Supongamos que estas funciones son derivables y que la función $x = \varphi(t)$ tiene por inversa $t = \theta(x)$ que, a su vez, es derivable. En este caso, la función $y = f(x)$, definida por las ecuaciones paramétricas, puede considerarse como una función compuesta:

$$y = \psi(t) = \psi[\theta(x)]$$

donde *t* es una variable intermedia.

Según la regla de derivación compuesta, tenemos:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \psi'_t(t) \cdot \theta'_x(x).$$

Por el teorema de derivación de funciones inversas, tenemos que:

$$\theta'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Reemplazando esta expresión en la correspondiente a y'_x, obtenemos:

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad \text{o sea} \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Diferencial:

Supongamos que la función $y = f(x)$ es derivable en el intervalo $[a, b]$. En un punto del mismo, la derivada de esta función se determina por la igualdad

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

donde Δy representa en incremento que sufre la función cuando se produce un incremento Δx en la variable independiente.

Cuando $\Delta x \to 0$, la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a un número determinado $f'(x)$ y, por lo tanto, se diferencia de la derivada $f'(x)$ en una magnitud infinitamente pequeña:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha \quad \text{donde} \quad \alpha \to 0 \quad \text{cuando} \quad \Delta x \to 0.$$

Multiplicando la igualdad anterior por Δx, obtenemos:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

Puesto que $f'(x) \neq 0$, cuando $\Delta x \to 0$el producto $f'(x) \cdot \Delta x$ es una magnitud infinitamente pequeña de primer orden respecto a Δx. El producto $\alpha \cdot \Delta x$ es siempre un infinitésimo, ya que

$$\underset{\Delta x \to 0}{lím} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{lím} \alpha = 0.$$

El incremento Δy de la función se compone de dos sumandos, de los cuales el primero (para $f'(x) \neq 0$) recibe el nombre de parte principal del incremento, que es lineal con relación a Δx. El producto $f'(x) \cdot \Delta x$ se denomina diferencial de la función y se designa por dy o $df(x)$.

De modo que, si la función $y = f(x)$ tiene derivada $f'(x)$, en un punto *x*, el producto de ésta por el incremento Δx de la variable independiente se llama diferencial de la función y se designa con el símbolo dy, es decir,

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

Hallemos la diferencial de la función $y = x$. En este caso,

$$y' = x' = 1,$$

y, por lo tanto, $dy = dx = \Delta x$, o $dx = \Delta x$. Así, la diferencial dx de la variable independiente x coincide con su incremento Δx. La igualdad $dx = \Delta x$ podría ser tomada como la definición de la diferencial de una variable independiente.

Ahora, la fórmula $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ se puede escribir:

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

De esta expresión se desprende que

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Por lo tanto, la derivada $f'(x)$ puede ser considerada como la razón de la diferencial de la función respecto a la variable independiente.

Teniendo en cuenta que $dy = f'(x) \cdot \Delta x$, la expresión $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ puede escribirse:

$$\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$$

Así, el incremento de la función difiere de la diferencial de ésta en un infinitésimo. Esto nos permite, a veces, la igualdad aproximada

$$\Delta y \approx dy.$$

Ejemplo 1:

Calcular la diferencial dy y el incremento Δy de la función $y = x^2$:

1) Para valores arbitrarios de x y Δx.
2) Para los valores $x = 20$ y $\Delta x = 0{,}1$.

1) $$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

$$dy = \left(x^2\right)' \cdot \Delta x = 2x\Delta x$$

2) Si $x = 20$ y $\Delta x = 0{,}1$,

$$\Delta y = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 4{,}01$$

$$dy = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 = 4$$

El error que resulta de la sustitución de Δy por dy es igual a 0,01. En muchos casos se puede despreciar por considerarlo pequeño en comparación con $\Delta y = 4{,}01$.

Ejemplo 2:

Calcular el valor aproximado de $sen\ 46^{\circ}$.

Utilizando la aproximación:

$$\Delta y \approx dy$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

para $y = sen\, x$, la aproximación toma la forma

$$sen(x + \Delta x) - senx \approx \cos x \cdot \Delta x$$

$$sen(x + \Delta x) \approx senx + \cos x \cdot \Delta x. \qquad (1)$$

Haciendo

$$sen\ 46^{\circ} = sen\left(45^{\circ} + 1^{\circ}\right) \text{ tenemos que } x = 45^{\circ} = \frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad \Delta x = 1^{\circ} = \frac{\pi}{180}$$

Reemplazando en (1)

$$sen\ 46^{\circ} \approx sen\ \frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$sen\,46^{\circ} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$sen\,46^{\circ} \approx 0{,}7071 + 0{,}7071 \cdot 0{,}017$$

$$sen\,46^{\circ} \approx 0{,}7194$$

El cálculo de la diferencial de una función se reduce en realidad al cálculo de la derivada, ya que al multiplicar la última por la diferencial de la variable independiente se obtiene la diferencial de la función.

Por esta razón, los teoremas y fórmulas que se refieren a las derivadas siguen siendo válidos para las diferenciales. Por ejemplo:

- *Diferencial de la suma de dos funciones derivables.*

  Sean *u* y *v* funciones derivables y sea

$$y = u + v\,. \;\rightarrow\; dy = y' \cdot dx \;\rightarrow\; dy = (u+v)' \cdot dx \;\rightarrow\; dy = (u' + v') \cdot dx$$

$$dy = u' \cdot dx + v' \cdot dx \;\rightarrow\; dy = du + dv$$

La diferencial de la suma de dos funciones es igual a la suma de las diferenciales de estas funciones.

- *Diferencial del producto de dos funciones derivables*

  Sean *u* y *v* funciones derivables y sea $u \cdot v$.

$$y = u \cdot v\,. \;\rightarrow\; dy = y' \cdot dx \;\rightarrow\; dy = (u \cdot v)' \cdot dx \;\rightarrow\; dy = (u \cdot v' + v \cdot u') \cdot dx$$

$$dy = u \cdot v' \cdot dx + v \cdot u' dx \;\rightarrow\; dy = u \cdot dv + v \cdot du$$

- *Diferencial del cociente de dos funciones derivables*

  Sean *u* y *v* funciones derivables y sea $\frac{u}{v}$.

$$y = \frac{u}{v}\,. \;\rightarrow\; dy = y' \cdot dx \;\rightarrow\; dy = \left(\frac{u}{v}\right)' \cdot dx \;\rightarrow\; dy = \left(\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}\right) \cdot dx$$

$$dy = \frac{u' \cdot v \cdot dx - u \cdot v' \cdot dx}{v^2} \;\rightarrow\; dy = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$$

- *Diferencial de una función compuesta*

  Supongamos $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, es decir, $y = f(\varphi(x))$

Derivando la función compuesta tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = f'(u).u' \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \;\rightarrow dy = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \cdot dx$$

y por lo tanto:

$$dy = f'(u) \cdot du$$

Observemos que la diferencial de una función compuesta tiene la misma forma que tendría si la variable intermedia *u* fuera la variable independiente. Por lo tanto, *la expresión de la diferencial no depende de que la variable sea independiente o sea función de otra variable.* Esta propiedad se conoce como *invariancia de la diferencial.*

Significado geométrico de la diferencial:

Analicemos la función $y = f(x)$ y su correspondiente curva. Tomemos sobre la curva $y = f(x)$ un punto arbitrario *P* y tracemos la tangente a la curva en ese punto. Designemos por α, al ángulo formado por la tangente y la dirección positiva del eje

Ox. Este ángulo es distinto de $\pi/2$ ya que suponemos que la función $y = f(x)$ tiene derivada finita en el punto x. Designemos a la variable independiente un incremento Δx; entonces la función sufrirá un incremento $\Delta y = SR$.

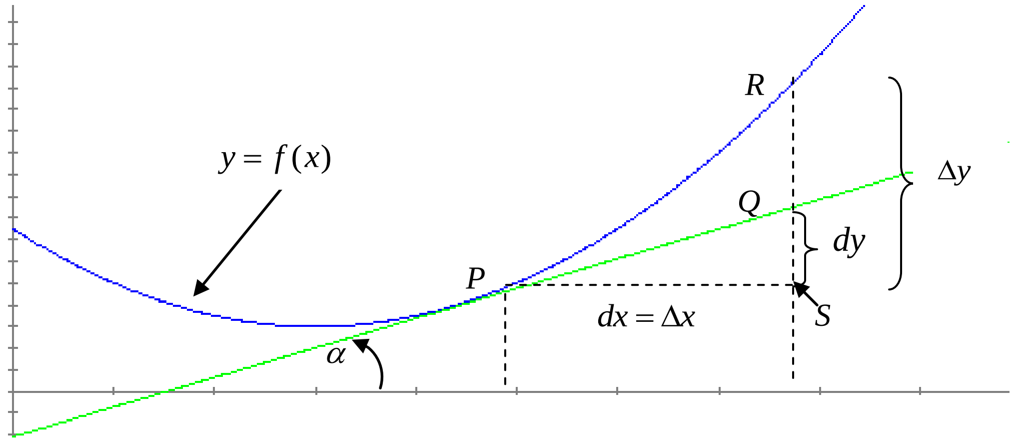


Fig. 6

En el triángulo PSQ encontramos

$$tg\,\alpha = \frac{QS}{PS} \rightarrow QS = PS \cdot tg\,\alpha$$

como

$$tg\,\alpha = f'(x), \quad PS = \Delta x$$

se tendrá

$$QS = f'(x) \cdot \Delta x$$

pero según la definición de diferencial $f'(x) \cdot \Delta x = dy$. Entonces,

$$QS = dy$$

Esta igualdad significa que la diferencial de la función $f(x)$ correspondiente a los valores dados de x y Δx es igual al incremento de la ordenada de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto dado x.

Derivadas de diversos órdenes:

Si la función $y = f(x)$ es derivable en un intervalo $[a, b]$, su derivada $f'(x)$ depende generalmente de x, es decir, la derivada $f'(x)$ es función de x.

La derivada de la primera derivada se denomina *derivada de segundo orden* o *derivada segunda* de la función inicial y se designa por el símbolo y'' o $f''(x)$:

$$y'' = (y')' = f''(x).$$

La derivada de la segunda derivada se denomina *derivada de tercer orden* o *derivada tercera* de la función inicial y se designa por el símbolo y''' o $f'''(x)$:

En general, la derivada de primer orden de la derivada de orden $(n-1)$ se denomina *derivada de n-ésimo orden* de la función $f(x)$ y se designa por el símbolo $y^{(n)}$ o $f^{(n)}(x)$, es decir, $y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]' = f^{(n)}(x)$.

El orden de la derivada se pone entre paréntesis para no confundirlo con un exponente de potencia.

A partir del cuarto orden, las derivadas también pueden designarse con números romanos: $y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, \cdots$. En este caso el orden de la derivada se puede escribir sin paréntesis ya que no hay lugar a confusión.

Ejemplo 1:

Sea $y = x^6$. Se tiene:

$$y' = 6 \cdot x^5, \quad y'' = 30 \cdot x^4, \quad y''' = 120 \cdot x^3, \quad y^{IV} = y^{(4)} = 360 \cdot x^2,$$

$$y^{V} = y^{(5)} = 720 \cdot x, \quad y^{VI} = y^{(6)} = 720, \quad y^{(7)} = y^{(8)} = \cdots = 0$$

Ejemplo 2:

Sea la función $y = e^{kx}$ (*k* constante). Hallar la expresión general de su deriva de orden *n*.

$$y' = k \cdot e^{kx}, \quad y'' = k^2.e^{kx}, \quad y''' = k^3.e^{kx}, \ldots, \quad y^{(n)} = k^n.e^{kx}$$

Diferenciales de diversos órdenes:

Supongamos tener la función $y = f(x)$ donde *x* es la variable independiente. La diferencial de esta función:

$$dy = f'(x)\,dx$$

es una función de *x*. Pero de *x* sólo depende el primer factor, $f'(x)$, puesto que el segundo factor dx, es un incremento de la variable independiente *x*, que no depende del valor de ésta.

La diferencial de la diferencial de una función se denomina *diferencial segunda* o *diferencial de segundo orden* de la función y se designa por d^2y:

$$d^2y = d(dy).$$

Teniendo en cuenta la definición general de la diferencial, encontremos la expresión de la diferencial segunda:

$$d^2y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) \underset{por\,ser\,dx\,cte.}{=} d(f'(x)) \cdot dx = f''(x) \cdot dx \cdot dx = f''(x) \cdot (dx)^2$$

En el exponente de dx suele omitirse el paréntesis. De esta manera, en lugar de $(dx)^2$ suele escribirse dx^2, sobreentendiéndose que se trata del cuadrado de la expresión dx.

La diferencial de la diferencial segunda de una función se denomina *diferencial tercera* o *diferencial de tercer orden* de la función y se designa por d^3y:

$$d^3y = d\left(d^2y\right).$$

$$d^3y = d\left(d^2y\right) = d\left(f''(x)dx^2\right) \underset{por\,ser\,dx\,cte.}{=} d(f'(x)) \cdot dx^2 = f'''(x) \cdot dx \cdot dx^2 = f'''(x) \cdot (dx)^3$$

En general, se llama *diferencial n-ésima* o *diferencial de n-ésimo orden*, a la diferencial primera de la diferencial de orden $(n-1)$:

$$d^n y = d\left(d^{n-1}y\right) = d\left(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}\right) = d(f^{(n-1)}(x))\cdot dx^{n-1} = f^{(n)}(x)\cdot dx \cdot dx^{(n-1)}$$

$$d^{(n)}y = f^{(n)}(x)\cdot dx^n$$

Utilizando las diferenciales de diversos órdenes, la derivada de un orden cualquiera puede ser expresada como cociente de las diferenciales del orden correspondiente:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Derivadas de diversos órdenes de funciones implícitas:

Retomamos el ejemplo utilizado para hallar la derivada de primer orden de la función implícita $x^2 + y^2 = r^2$ donde resultó:

$$2x + 2y\cdot y' = 0$$

es decir,

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Volvemos a derivar la última igualdad respecto a *x*, teniendo en cuenta que y es función de *x*:

$$y'' = -\frac{y + xy'}{y^2} = \frac{-y + xy'}{y^2}$$

Sustituyendo aquí y' por la expresión obtenida anteriormente, tenemos:

$$y'' = \frac{-y + x\cdot\left(-x/y\right)}{y^2} = \frac{-y - \frac{x^2}{y}}{y^2} = \frac{-y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-\left(y^2 + x^2\right)}{y^3}.$$

Teniendo en cuenta que $x^2 + y^2 = r^2$, la segunda derivada se puede expresar:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-r^2}{y^3}.$$

Derivando la última igualdad, hallaremos

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$$

y así sucesivamente.

Derivadas de diversos órdenes de funciones definidas paramétricamente::

Hemos visto que si una función *y* de *x* está dada paramétricamente por

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \quad t_0 \le t \le T$$

la derivada de primer orden está dada por la fórmula:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{o bien} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Para hallar la segunda derivada, $y''_x = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, derivemos respecto a *x*, teniendo en cuenta que *t* es función de *x*.

$$y''_x = \frac{d}{dx}(y'_x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) \cdot \frac{dt}{dx}.$$

Pero

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^2} \quad \text{y} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{x'_t}$$

Sustituyendo estas dos expresiones e la fórmula de $y''_x = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, obtenemos:

$$y''_x = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^2} \cdot \frac{1}{x'_t}$$

$$y''_x = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^3}$$

En forma análoga, se pueden hallar las derivadas

$$\frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^4y}{dx^4}, \ \text{etc.}$$

Ejemplo:

Sea la función *y* de *x*, cuyas ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = 2 \cdot \cos t \\ y = 3 \cdot sent \end{cases}$

Hallar las derivadas $\dfrac{dy}{dx}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Tenemos que:

$$x'_t = -2 \cdot sent; \quad x''_t = -2 \cdot \cos t \qquad \text{e} \qquad y'_t = 3 \cdot \cos t; \quad y''_t = -3 \cdot sen\,t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot \cos t}{-2 \cdot sen\,t} = -\frac{3}{2} \cdot \cot g\, t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-3 \cdot sen\,t) \cdot (-2 \cdot sen\,t) - (3 \cdot \cos t) \cdot (-2 \cdot \cos t)}{(-2 \cdot sen\,t)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6 \cdot (sen^2 t + \cos^2 t)}{-8 \cdot sen^3 t} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{sen^3 t}$$

Teoremas sobre las funciones derivables:

Teorema del valor medio para derivadas.

La importancia del teorema del valor medio radica en que muchas propiedades de las funciones pueden deducirse muy fácilmente a partir de él. Antes de establecerlo, examinemos uno de sus casos particulares a partir del cual puede deducirse el teorema general. Este caso particular fue descubierto en 1690 por Michel Rolle, matemático francés.

Teorema 3: TEOREMA DE ROLLE

Sea f una función continua en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a, b]$ *y derivable en cada punto del intervalo abierto* (a, b). *Supongamos también que*

$$f(a) = f(b)$$

Existe entonces por lo menos un punto c en el intervalo abierto tal que $f'(c) = 0$.

El significado geométrico de este teorema es que la curva debe tener una tangente horizontal en algún punto entre *a* y *b* hecho que está representado en la siguiente gráfica.

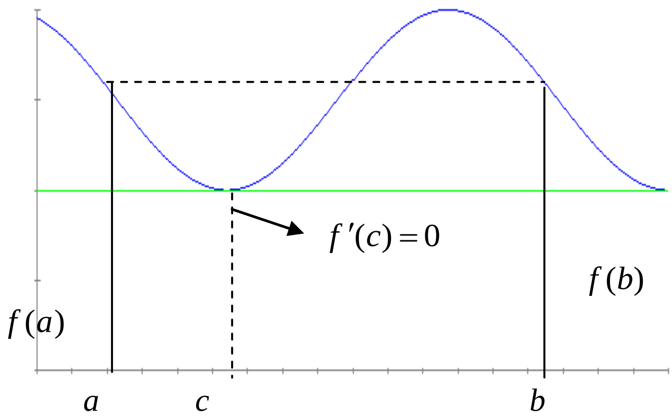


Fig. 7

Demostración:

Supongamos que $f'(x) \neq 0$ para todo *x* en el intervalo abierto (a, b). Según el teorema de los valores extremos para funciones continuas, *f* debe alcanzar su máximo absoluto *M* y su mínimo absoluto *m* en algún punto del intervalo $[a, b]$. Ningún extremo debe ser alcanzado en puntos interiores (de otro modo sería nula la derivada). Luego, ambos valores extremos son alcanzados en los extremos *a* y *b*. Pero como $f(a) = f(b)$, esto significa que $M = m$, y por lo tanto *f* es constante en $[a, b]$. Esto contradice el hecho de que $f'(x) \neq 0$ para todo *x* en (a, b). Resulta entonces que $f'(c) = 0$ por lo menos en un *c* que satisfaga $a < c < b$, lo que demuestra el teorema.

El teorema de Rolle se puede utilizar para establecer el teorema del valor medio para derivadas.

Antes de enunciar el teorema del valor medio, analicemos su significado geométrico. Cada una de las siguientes curvas es la gráfica de una función continua f con tangente en cada punto del intervalo (a, b).

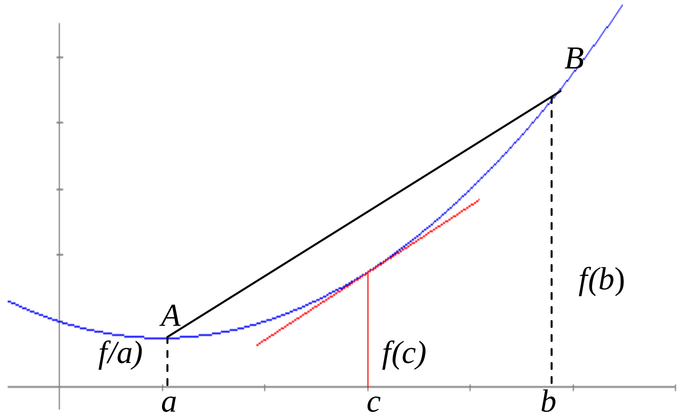


Fig. 8

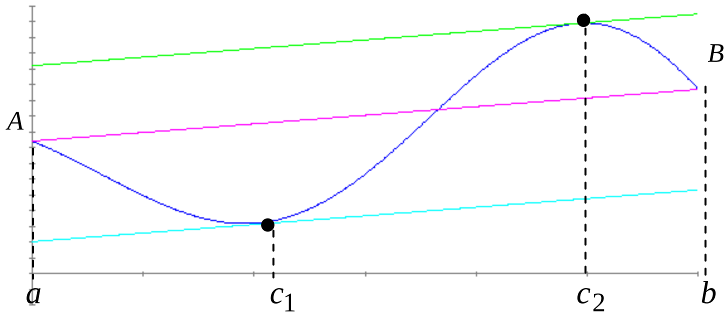


Fig. 9

En el punto $(c, f(c))$ indicado en la figura 8, la tangente es paralela a la cuerda *AB*. En la figura 9, existen dos puntos en los que la tangente es paralela a la cuerda *AB*. El teorema del valor medio asegura que existirá *por lo menos un punto* con esta propiedad.

Tengamos en cuenta que el paralelismo de dos rectas significa la igualdad de sus pendientes. Puesto que la pendiente de la cuerda *AB* es el cociente $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ y ya que la pendiente de la tangente en c es la derivada $f'(c)$, la afirmación anterior se puede expresar:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

para *algún c* en el intervalo abierto (a, b).

Teorema 4: TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS.

Si f es una función continua en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a, b]$ *que tiene derivada en cada punto del intervalo abierto* (a, b), *existe por lo menos un punto c interior al intervalo abierto para el que*

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Demostración:

Para aplicar el teorema de Rolle construimos una función que tenga valores iguales en los extremos *a* y *b*. Sea esta función:

$$h(x) = f(x)\cdot(b-a) - x\cdot[f(b) - f(a)]$$

Entonces $h(b) = h(a) = b\cdot f(a) - a\cdot f(b)$. También *h* es continua en $[a, b]$ y tiene derivada en el abierto (a, b).

Aplicando el teorema de Rolle a *h*, se tiene que $h'(c) = 0$ para un cierto *c* de (a, b). Pero

$$h'(x) = f'(x)\cdot(b-a) - [f(b) - f(a)]$$

Cuando $x = c$, se obtiene

$$h'(c) = f'(c)\cdot(b-a) - [f(b) - f(a)]$$

$$0 = f'(c)\cdot(b-a) - [f(b) - f(a)]$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Teorema 5: TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE CAUCHY

Sean f y g dos funciones continuas en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a, b]$ *y que admitan derivadas en todo el intervalo abierto* (a, b)*: Entonces, para un cierto c interior al intervalo abierto, tenemos:*

(1)
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demostración:

Definamos el número *Q* por la igualdad

(2)
$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

En primer lugar observemos que $g(b) - g(a) \neq 0$, ya que, en caso contrario $g(b) = g(a)$ y, según el teorema de Rolle, $g'(x)$ se anularía en el interior del intervalo, en contra de la hipótesis del teorema.

Construyamos una función auxiliar

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q\cdot[g(x) - g(a)]$$

Es evidente que $F(a) = F(b) = 0$ (se deduce de la definición de $F(x)$).
Teniendo en cuenta que la función $F(x)$ satisface en el intervalo $[a, b]$ todas las condiciones del teorema de Rolle, deducimos que entre *a* y *b* existe un valor *c* tal que $F'(c) = 0$. Luego

$$F'(c) = f'(c) - Q\cdot g'(c) = 0$$

de donde

$$Q = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Sustituyendo el valor de Q en (2), obtenemos (1) que es lo que se quería probar.

Aplicaciones del teorema del valor medio.

Con el teorema del valor medio se pueden deducir propiedades de las funciones conociendo el signo de su derivada.

Teorema 6:

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ que admite derivada en cada punto del intervalo abierto (a, b). Tenemos entonces:

i) $f'(x) > 0$ *para todo x de* (a, b), *f es estrictamente creciente en* $[a, b]$.

ii) $f'(x) < 0$ *para todo x de* (a, b), *f es estrictamente decreciente en* $[a, b]$.

iii) $f'(x) = 0$ *para todo x de* (a, b), *f es constante en* $[a, b]$.

Demostración de i:

Tenemos que demostrar que si $a \le x < y \le b$ entonces $f(x) < f(y)$.
Supongamos $x < y$ y apliquemos el teorema del valor medio en el intervalo cerrado $[x, y]$.

$$f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x)$$

Tenemos por hipótesis que $f'(c) > 0$. Además, al ser $x < y$ la diferencia $y - x$ es positiva. Por lo tanto $f(y) - f(x) > 0$ y esto significa $f(x) < f(y)$.

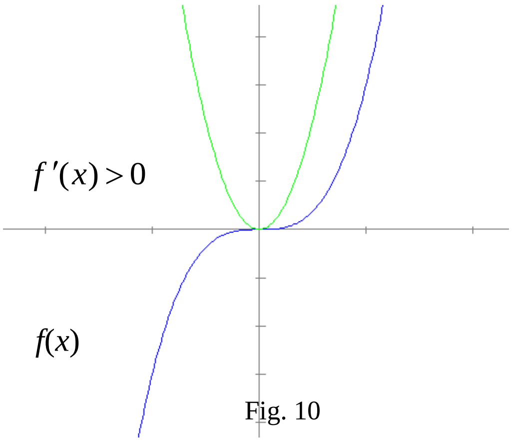


Fig. 10

Demostración de ii:

Tenemos que demostrar que si $a \le x < y \le b$ entonces $f(x) > f(y)$.
Supongamos $x < y$ y apliquemos el teorema del valor medio en el intervalo cerrado $[x, y]$.

$$f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x)$$

Al ser la diferencia $y-x$ positiva y $f'(c)<0$,. Tenemos que $f(y)-f(x)<0$ y esto significa $f(x)>f(y)$.

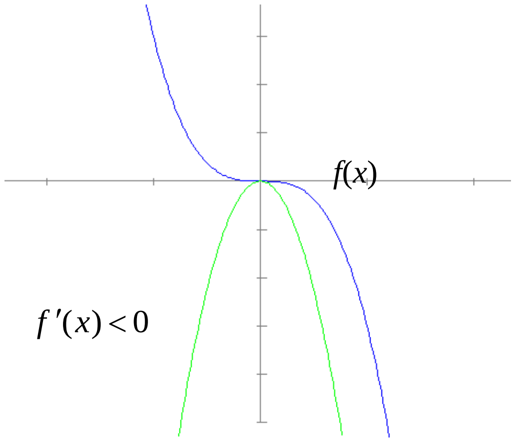


Fig. 11

Demostración de iii:

$f'(x)=0 \quad \forall x \in (a,b) \rightarrow f(y)-f(x)=0 \rightarrow f(y)=f(x) \; \forall x \in (a,b) \rightarrow f$ es constante en $[a,b]$.

El teorema 6 puede emplearse para demostrar que se presenta un extremo siempre que la derivada cambie de signo.

Teorema 7:

Supongamos f continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y que existe la derivada f' en todo punto del intervalo (a,b), excepto acaso en un punto c.

a) Si $f'(x)>0$ para todo $x<c$ y $f'(x)<0$ para todo $x>c$, f tiene un máximo relativo en c.

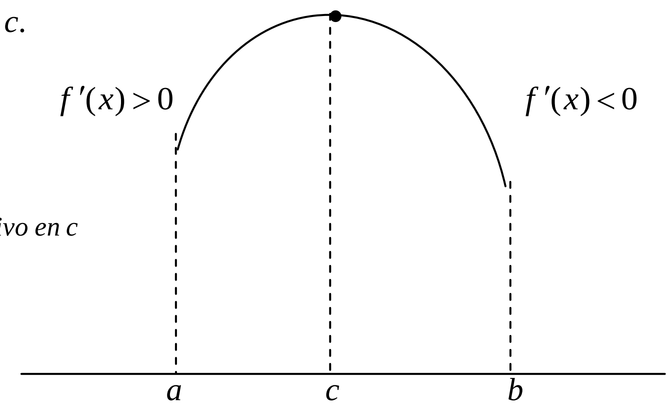
b) Si $f'(x)<0$ para todo $x<c$ y $f'(x)>0$ para todo $x>c$, f tiene un mínimo relativo en c.

Demostración de a:

Puesto que $f'(x)>0 \quad \forall x \in (a,c)$, *f* es estrictamente creciente en $[a,c]$Además, al ser $f'(x)>0 \quad \forall x \in (c,b)$, *f* es estrictamente decreciente en $[c,b]$. Luego

$$\left.\begin{array}{l} x<c \rightarrow f(x)<f(c) \quad \forall x \in [a,c) \\ c>x \rightarrow f(x)<f(c) \quad \forall x \in (c,b] \end{array}\right\} \rightarrow f(x)<f(c) \quad \forall x \neq c \text{ en } (a,b)$$

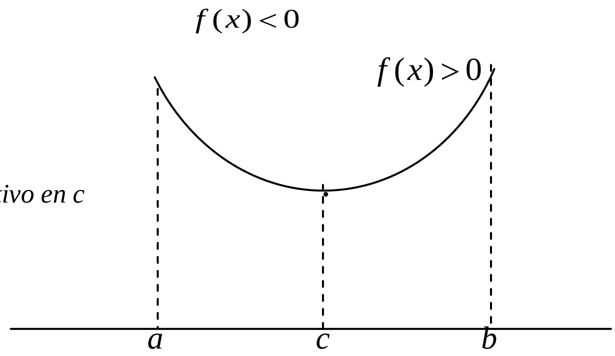
, con lo que *f* tiene un máximo relativo en *c*.



Máximo relativo en c

Fig. 12

La demostración de b) es análoga y la situación está representada en la siguiente figura.



Mínimo relativo en c

Fig. 13

Criterio de la derivada segunda para los extremos

Si una función *f* es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, el teorema de los valores extremos nos dice que tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en algún punto de $[a, b]$. Si *f* tiene derivada en cada punto interior, entonces los únicos puntos en los que pueden presentarse los extremos son:

1) en los extremos del intervalo *a* y *b*.
2) en aquellos puntos interiores en los que $f'(x)=0$.

Los puntos que cumplen 2) se llaman *puntos críticos* de *f*.

Para decidir si en un punto *c* existe un máximo o un mínimo (o ni uno ni otro), necesitamos más información acerca de *f*.

El comportamiento de *f* en un punto crítico puede determinarse a partir del signo de la derivada en las proximidades de *f*. El siguiente teorema nos proporciona otro método donde el estudio se realiza considerando el signo de la deriva segunda en un entorno de *c*

Teorema 8: CRITERIO DE LA DERIVADA SEGUNDA PARA EXTREMOS EN UN PUNTO CRÍTICO.

Sea c *un punto crítico de f en un intervalo abierto* (a, b)*, esto es, supongamos* $a<c<b$ *y que* $f'(c)=0$*. Supongamos también que exista la derivada segunda* f'' *en* (a, b)*. Tenemos entonces :*

a) Si f'' *es negativa en* (a, b)*, f tiene un máximo relativo en c.*

b) Si f'' *es positiva en* (a, b)*, f tiene un mínimo relativo en c.*

Demostración de a:

Por hipótesis $f''<0$ en (a, b), luego la función f' es estrictamente decreciente en (a, b) (por teorema….). Pero $f'(c)=0$, entonces cambia de signo de positivo a negativo en *c* (figura). Luego, por teorema , *f* tiene un máximo relativo en *c*

La demostración de *b)* es análoga.

Si f'' es continua en *c*, y si $f''(c)\neq 0$, existirá un entorno de *c* en el cual f''

tendrá el mismo signo que $f''(c)$. Por consiguiente, si $f'(c)=0$, la función *f* tiene un máximo relativo en *c* si $f''(c)$ es negativa, y un mínimo relativo si $f''(c)$ es positiva.

CRITERIO DE LA DERIVADA SEGUNDA PARA LA CONVEXIDAD

El signo de la derivada segunda también está relacionado con la concavidad o la convexidad de *f*.

Definición:

1. *Diremos que una función derivable en el intervalo abierto (a,b) es cóncava hacia arriba en dicho intervalo sí y sólo sí la función derivada es creciente en (a,b). Es decir:*

$$f(x) \text{ es cóncava hacia arriba en } (a,b) \Leftrightarrow \left(\forall x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2) \right)$$

2. *Diremos que una función derivable en el intervalo abierto (a,b) es cóncava en dicho intervalo sí y sólo sí la función derivada es decreciente en (a,b). Es decir:*

$$f(x) \text{ es cóncava hacia abajo en } (a,b) \Leftrightarrow \left(\forall x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f('x_1) > f'(x_2) \right)$$

Si $f'(x)$ es derivable, podemos aplicar el mismo criterio que aplicamos para crecimiento y decrecimiento de una función.

Si $f'(x)$ es creciente en un intervalo , su derivada ($f''(x)$) será positiva en el mismo y si $f'(x)$ es decreciente en un intervalo, su derivada ($f''(x)$) será negativa.

Este hecho nos permite aplicar el siguiente criterio para analizar la concavidad de una función:

a) Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces $f(x)$ es cóncava hacia arriba.

b) Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces $f(x)$ es cóncava hacia abajo.

Las siguientes figuras nos permiten visualizar lo expuesto anteriormente.

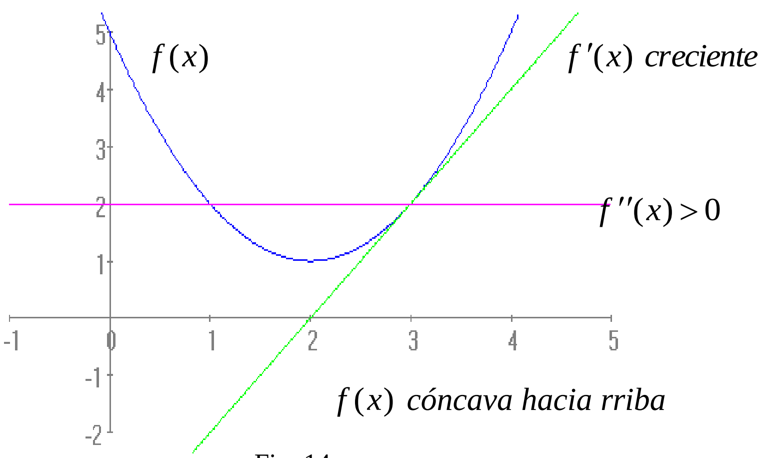


Fig. 14

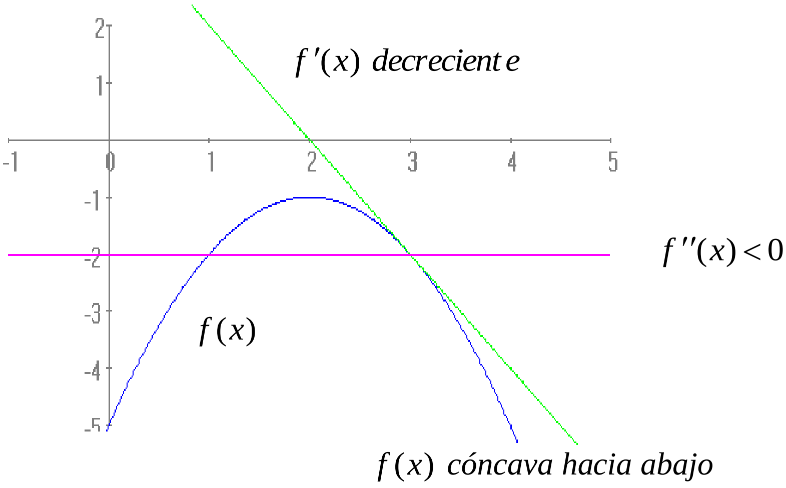


Fig.15

Puntos de inflexión:

Una función derivable $f(x)$ tiene un punto de inflexión en x_0 si existen dos intervalos $[a, x_0]$ y $[x_0, b]$ tales que $f(x)$ es convexa en uno de ellos y cóncava en el otro.

Para analizar la existencia de un punto de inflexión en x_0, podemos ver qué ocurre con el signo de la derivada segunda en un extorno de x_0 cuando $f''(x_0)=0$.
Si el signo de la derivada segunda cambia, esto nos indica un cambio en la concavidad y por lo tanto, x_0 es un punto de inflexión.

Ejemplo:

Sea $f(x)=3x^3+2x$. Observemos las gráficas de $f(x)$ y $f''(x)$.

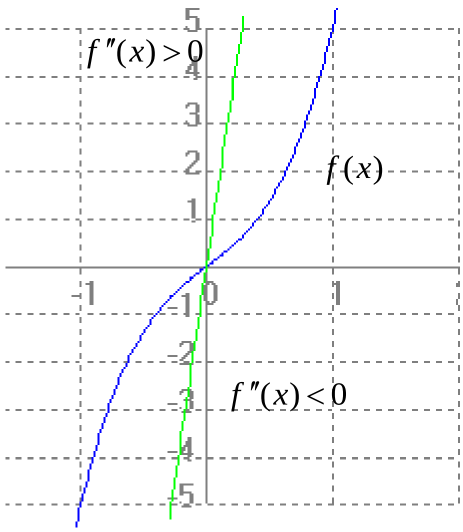


Fig. 16

Vemos que la derivada segunda se anula en $x=0$ y en un entorno de 0 cambia de signo. Además $f(x)$ cambia su concavidad. Por lo tanto, $x=0$ es un punto de inflexión de la función.

Veamos ahora un ejemplo de estudio completo de una función, en el cual aplicaremos algunos conceptos estudiados hasta el momento.

Ejemplo:

Dada la función $f:\Re \to \Re$ definida por $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$:

a) Determinar el dominio.
b) Determinar la imagen.
c) Analizar: inyectividad, suryectividad y biyectividad.
d) Hallar intersección con los ejes.
e) Estudiar la paridad.
f) Investigar la existencia de asíntotas.
g) Encontrar los puntos críticos.
h) Analizar la existencia de máximos y mínimos relativos.
i) Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
j) Hallar el o los puntos de inflexión.
k) Determinar intervalos de concavidad hacia arriba y concavidad hacia abajo.
l) Trazar la gráfica correspondiente.

Solución:

a) La única restricción para la existencia de la función es que el denominador sea distinto de cero. Puesto que el denominador es suma de un cuadrado con un número positivo, siempre será distinto de cero y por lo tanto:

$$Dom\, f(x)=\Re$$

b) Para hallar la imagen, debemos encontrar los $y \in \Re$ para los que existe un $x \in \Re$ tal que $y=f(x)$. Para ello, despejamos *x* de $y=f(x)$.

$$y=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$x^2\cdot y+y-2x=0$$

$$y\cdot x^2-2x+y=0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática en *x:*

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4y^2}}{2y}=\frac{2\pm 2\cdot\sqrt{1-y^2}}{2y}$$

Para que $x\in\Re$, se deberá cumplir:

$$1-y^2\geq 0 \;\;\rightarrow\;\; y^2\leq 1 \;\;\rightarrow\;\; \sqrt{y^2}\leq 1 \;\;\rightarrow\;\; |y|\leq 1 \;\;\rightarrow\;\; -1\leq y\leq 1$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{Im} f(x)=[-1,1]$$

c) *Inyectividad:*

Recordemos que $f(x)$ es inyectiva, si cada vez que $f(x_1)=f(x_2)$ se tiene que $x_1=x_2$. Tomemos $f(x_1)=f(x_2)$ y veamos a qué conclusión llegamos respecto a x_1 y x_2.

$$\frac{2x_1}{x_1^2+1}=\frac{2x_2}{x_2^2+1}$$

$$2x_1\cdot\left(x_2^2+1\right)=2x_2\cdot\left(x_1^2+1\right)$$

$$2x_1\cdot x_2^2+2x_1=2x_2\cdot x_1^2+2x_2$$

$$2x_1\cdot x_2^2+2x_1-2x_2\cdot x_1^2-2x_2=0$$

Sacando factor común x_2 y ordenando al polinomio en x_2 en forma decreciente obtenemos:

$$2x_1\cdot x_2^2+(-2x_1^2-2)\cdot x_2+2x_1=0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática en x_2:

$$x_{2\,1,2}=\frac{-\left(-2x_1^2-2\right)\pm\sqrt{\left(-2x_1^2-2\right)^2-4\cdot 2x_1\cdot 2x_1}}{2.2x_1}$$

$$x_{2\,1,2}=\frac{2x_1^2+2\pm\sqrt{4x_1^4+8x_1^2+4-16x_1^2}}{4x_1}$$

$$x_{2\,1,2}=\frac{2x_1^2+2\pm\sqrt{4(x_1^4-x_1^2+1)}}{4x_1}$$

$$x_{2\,1,2}=\frac{2x_1^2+2\pm 2\cdot\sqrt{x_1^4-x_1^2+1}}{4x_1}$$

$$x_{2\,1,2}=\frac{x_1^2+1\pm\sqrt{x_1^4-x_1^2+1}}{2x_1}$$

Resulta ser $x_1\neq x_2$. Tomando el caso particular $x_1=1$, vemos que $x_2=\dfrac{2\pm 1}{2}\neq x_1$. Concluimos que la función no es inyectiva.

Suryectividad:
Hemos visto que $\operatorname{Im} f(x)=[-1,1]$ y dado que $[-1,1]\neq\Re$, la función no es suryectiva.

Biyectividad:
La función no es biyectiva puesto que no es suryectiva. Esto alcanza para asegurar que no tiene inversa.

d) *Intersección con los ejes:*

Para hallar la intersección con el eje *y*, hacemos $x = 0$.

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0}{0^2 + 1} = 0$$

La función se interseca con el eje *y* en $y = 0$.

Para hallar la intersección con el eje *x*, hacemos $y = 0$.

$$y = \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

El valor obtenido es el cero o raiz de la función.

e) *Paridad:*

$$f(-x) = \frac{2 \cdot (-x)}{(-x)^2 + 1} = -\frac{2x}{x^2 + 1} = -f(x).$$

Por consiguiente es una función impar y por lo tanto simétrica respecto al origen de coordenadas.

f) Asíntotas:

Veamos si existen asíntotas verticales. Para ello recordemos que $x = a$ es una asíntota vertical si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Puesto que el denominador es siempre distinto de cero, no existe *a* tal que el límite sea infinito y por lo tanto, $f(x)$ no posee asíntotas verticales.

Analicemos la existencia de asíntotas oblicuas. Supongamos que la función tiene una asíntota oblicua cuya ecuación es:

$$y = mx + b$$

donde:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad y \quad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x^3 + x} = 0$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{2x}{x^2 + 1} - 0 \cdot x \right] = 0$$

Reemplazando los valores obtenidos en $y = mx + b$ tenemos que $y = 0$ es una asíntota oblicua (horizontal).

g) *Puntos críticos:*

Los puntos críticos son aquellos donde la derivada primera se anula o no existe. En dichos puntos la función puede alcanzar un valor máximo o mínimo.
Hallamos la derivada primera de la función:

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

La derivada primera existe para todo *x*, por lo tanto, sólo buscamos los puntos donde se anula.

$$\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad -2x^2+2=0 \quad \rightarrow \quad x^2=1 \quad \rightarrow \quad |x|=1$$

Los puntos críticos están en $x=1$, $x=-1$, es decir, $P_1 = (1, f(1)) = (1,1)$ y $P_2 = (-1, f(-1)) = (-1,-1)$.

h) *Máximos y mínimos relativos:*

Para analizar los máximos y mínimos relativos de la función, estudiamos el signo de la derivada segunda donde la función tiene un punto crítico, en nuestro caso, lo haremos en $x=1$, $x=-1$.
Hallamos la derivada segunda:

$$f'(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x \cdot (x^2+1)^2 - (-2x^2+2) \cdot 2 \cdot (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-4x \cdot (x^2+1) \cdot \left[x^2+1-2x^2+2\right]}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-4x \cdot (-x^2+3)}{(x^2+1)^3}$$

Evaluando la derivada segunda en los puntos críticos, tenemos:

$$f''(1) = \frac{-8}{8} = -1 \quad \rightarrow \quad f''(1) < 0 \quad \rightarrow \quad \text{el punto } (1,1) \text{ es un máximo relativo de } f(x)$$

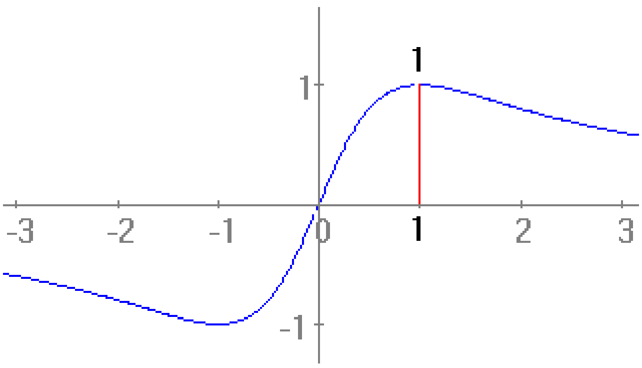


Fig. 17

$$f''(-1) = \frac{8}{8} = 1 \quad \rightarrow \quad f''(-1) > 0 \quad \rightarrow \quad \text{el punto}(-1,-1)\text{es un mínimo relativo de } f(x)$$

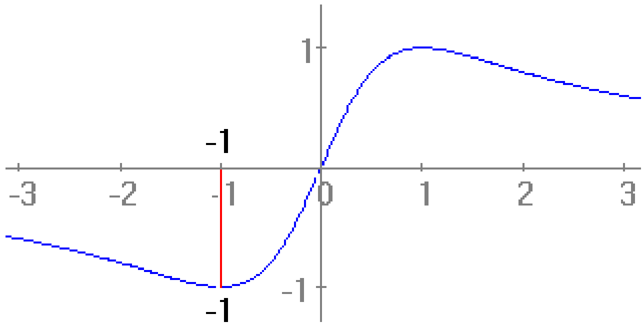


Fig. 18

i) *Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:*

Dividimos al eje real en intervalos tomando los valores para los cuales la derivada primera no existe o es cero. En este caso, dichos valores son $x = 1$, $x = -1$ y los intervalo correspondientes:

$$(-\infty,-1) \qquad (-1,1) \qquad (1,\infty)$$

Tomemos $x = -2$ perteneciente al intervalo $(-\infty,-1)$ y veamos qué ocurre con el signo de la derivada primera.

$f'(-2) = \dfrac{-8+2}{25} = -\dfrac{6}{25} < 0$ y por lo tanto la función es decreciente en dicho intervalo.

Procediendo en forma análoga con los otros dos intervalos, tenemos que: l a función es creciente en el intervalo $(-1,1)$

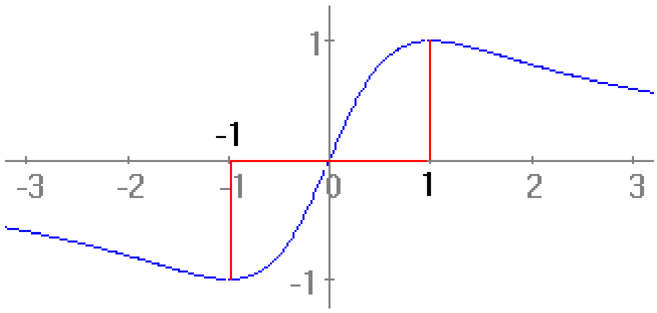


Fig.19

y decrece en $(1,\infty)$.

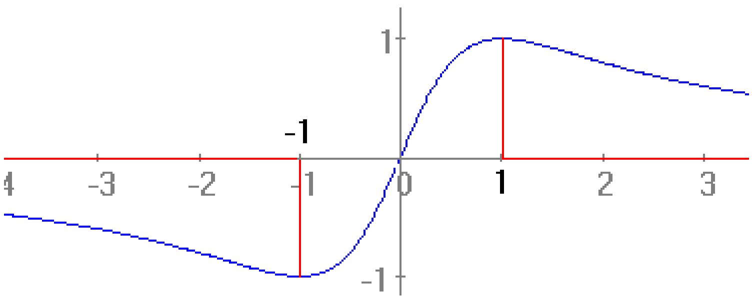


Fig. 20

j) *Puntos de inflexión:*

Para hallar los puntos de inflexión buscamos en qué puntos se anula la derivada segunda y analizamos qué ocurre con el signo de ésta en un entorno de ellos.

$$f''(x)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{4x\cdot\left(-x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=0 \quad \rightarrow \quad -4x^3+12x=0 \quad \rightarrow \quad -4x\cdot\left(x^2-3\right)=0$$

Por lo tanto:

$$-4x=0 \quad \rightarrow \quad x=0$$

$$x^2-3=0 \quad \rightarrow \quad x^2=3 \quad \rightarrow \quad |x|=\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad x=\sqrt{3}\,;\ x=-\sqrt{3}$$

Dividimos al eje real en intervalos según los valores obtenidos, para ver qué ocurre con el signo de la derivada segunda en un entorno de estos puntos.

$$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right) \quad \left(-\sqrt{3},0\right) \quad \left(0,\sqrt{3}\right) \quad \left(\sqrt{3},\infty\right)$$

Tomamos $x=-2$ perteneciente al intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ y $x=-1$ perteneciente al intervalo $\left(-\sqrt{3},0\right)$.
Realizando los cálculos correspondientes resulta que $f''(-2)>0$ y $f''(-1)<0$, luego $x=-\sqrt{3}$ es un punto de inflexión.
Por procedimiento similar se concluye que $x=0$ y $x=-\sqrt{3}$ son puntos de inflexión.

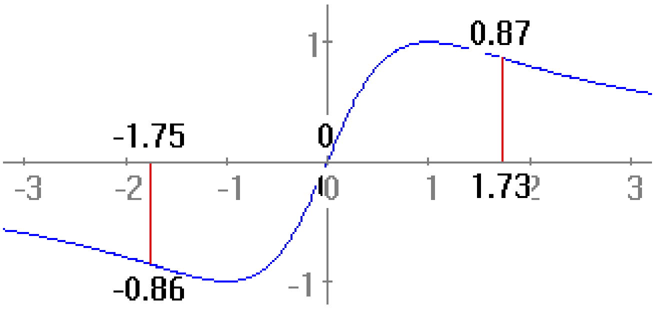


Fig.21

k) *Intervalos de concavidad hacia arriba y concavidad hacia abajo*

Puesto que los puntos de inflexión indican que en ese punto la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa, y además, el signo de la derivada segunda nos da información sobre la concavidad, los resultados obtenidos en j) nos permiten determinar los intervalos pedidos, resultando:
En los intervalos $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ y $\left(0,\sqrt{3}\right)$, la función es cóncava hacia abajo.

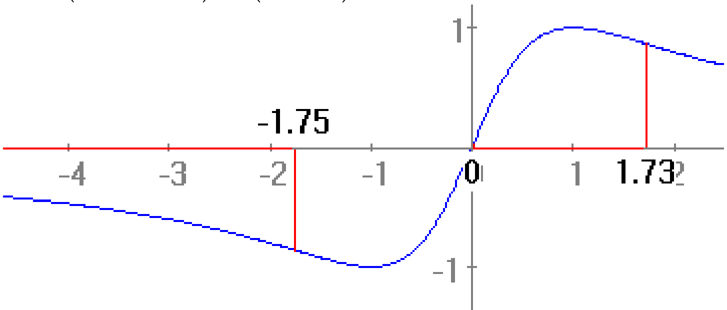


Fig. 22

En los intervalos $\left(-\sqrt{3}\,,\,0\,\right)$ y $\left(\sqrt{3}\,,\infty\,\right)$, la función es cóncava hacia arriba.

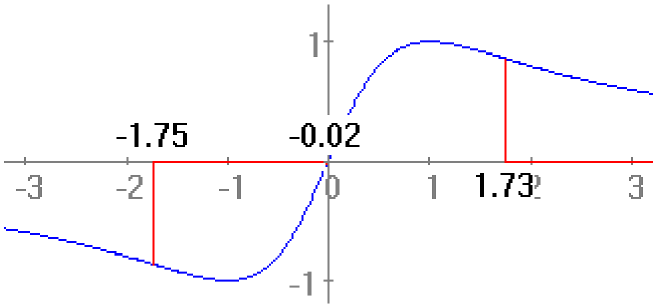


Fig.23

l) *Gráfica:*

En los distintos ítems del ejercicio, se ha mostrado la gráfica de la función para visualizar los resultados en los mismos.
Se propone al alumno, intente un bosquejo de la función, con la información aportada por las derivadas de distintos órdenes de la misma.