Projet IMI

Contexte

L'objectif du projet est d'approcher une cible en orbite géostationnaire avec un satellite à propulsion faible (électrique) en minimisant le Delta-v.

Dynamique du satellite

On note $\mathcal{I}$ le référentiel de la cible. L'état du système est décrit par le vecteur $\boldsymbol{s} = [\boldsymbol{r}^\top, \boldsymbol{v}^\top, \boldsymbol{q}^\top, \boldsymbol{w}^\top]$ où, dans le référentiel $\mathcal{I}$:

- $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ correspond à la position du centre de masse,
- $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ représente la vitesse du centre de masse,
- $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^4$ est le quaternion de rotation du chasseur,
- $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ la vitesse angulaire du chasseur.

Le vecteur de contrôle du système est $\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{F}^\top, \boldsymbol{L}^\top]$ où $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ est la poussée du chasseur engendrée par propulseur à l'arrière du satellite et $\boldsymbol{L}$ est le couple exercé par la roue de réaction.

Les équations de Clohessy-Wiltshire décrivent un modèle simplifié du mouvement relatif du chasseur par rapport à la cible :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 3n^2 x + 2n\dot{y} + \frac{F_x}{m} \\ \ddot{y} = -2n\dot{x} + \frac{F_y}{m} \\ \ddot{z} = -n^2 z + \frac{F_z}{m} \end{cases}$$

où n est la vitesse circulaire de la cible dans le référentiel terrestre et m est la masse du chasseur. Dans notre cas, comme la cible suit une orbite géostationnaire, $n = 7.292 \times 10^{-5}$ rad s^{-1}. La masse du chasseur est fixé à $m = 3$ tonnes.

On a ainsi une équation évolution pour $\boldsymbol{r}$. On a ensuite : $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$. Les équations décrivant la rotation du satellite se formulent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}) \end{cases}$$

où $\boldsymbol{J}$ est le tenseur d'inertie du chasseur et $\boldsymbol{\Omega}$ est la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -q_x & -q_y & -q_z \\ q_w & -q_z & q_y \\ q_z & q_w & -q_x \\ -q_y & q_x & q_w \end{pmatrix}$$

Contraintes sur le vecteur de contrôle

Le modèle du chasseur est un satellite à propulsion faible avec une tuyère orientable avec un angle $\alpha = 60°$. La propulsion électrique n'est arrêtée qu'une fois que l'objectif est atteint. Ainsi, dans le référentiel du satellite $\mathcal{B}$, la force $\boldsymbol{F}^{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^3$:

- $\|\boldsymbol{F}^{\mathcal{B}}\| \leq p$,
- $-F_z^{\mathcal{B}} \leq \|\boldsymbol{F}^{\mathcal{B}}\| \arccos(\alpha)$

On relie la poussée dans le référentiel du chasseur à la poussée dans le référentiel de la cible par l'équation suivante :

$$\boldsymbol{F}^{\mathcal{B}} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{q})^\top \boldsymbol{F},$$

où $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q})$ est la matrice de rotation paramétrisée par le quaternion $\boldsymbol{q}$.

Concernant le couple $\boldsymbol{L}$, il est créé par une roue de réaction. On a la contrainte suivante : $\|\boldsymbol{L}\| \leq 0.3\ Nm$. La limite de poussée est de $p = 0.3\ N$.

Contrainte d'observabilité

Pour connaître l'état du système, le satellite doit pointer sa caméra fixée à l'avant dans la direction de la cible à tout instant. L'angle de champ de la caméra monoculaire utilisée est égale à $\beta = 20°$. Cette contrainte se traduit par la condition suivante :

$$-\frac{\langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{r} \rangle}{\|\boldsymbol{r}\|} \leq \cos(\beta)$$

où $\boldsymbol{d}$ est le vecteur unitaire indiquant l'orientation du chasseur.

Grâce à cette contrainte, on a accés à l'état du système avec une précision d'environ 2% :

$$o_i = (1 + \nu_i) s_i$$

où $(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_{12})$ est un vecteur Gaussien centré. On suppose donc que la norme de Frobenius de la matrice de covariance $\boldsymbol{\Gamma}$ du vecteur Gaussien $\boldsymbol{\nu}$ est inférieure à 0.02.

Objectif

V.1. Position finale

Le premier objectif est d'atteindre une trajectoire stable et sûre autour de la cible, c'est-à-dire, une trajectoire sans poussée qui reste proche de la cible mais ne s'en approche pas trop pour éviter une collision.

La solution des équations de Clohessy-Wiltshire avec $\boldsymbol{F} = 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} x(t) = a_1 + a_3 \cos(nt) + a_4 \sin(nt) \\ y(t) = a_2 - \frac{3}{2} a_1 nt + 2a_4 \cos(nt) - 2a_3 \sin(nt) \\ z(t) = a_5 \cos(nt) + a_6 \sin(nt) \end{cases}$$

Les a_i sont calculés à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} a_1 = 4x_T + 2\dot{y_T} \\ a_2 = y_T - 2\dot{x_T} \\ a_3 = -3x_T - 2\dot{y_T} \\ a_4 = \dot{x_T} \\ a_5 = z_T \\ a_6 = \dot{z_T} \end{cases}$$

On souhaite maintenir une position proche de la cible en désactivant le moteur de propulsion. On impose donc la condition finale

$$a_1 = 4x_T + 2\dot{y_T} = 0.$$

Ainsi on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha\cos(nt + \varphi) \\ y(t) = a_2 - 2\alpha\sin(nt + \varphi) \\ z(t) = \beta\cos(nt + \psi) \end{cases}$$

Ainsi, le chasseur a une trajectoire elliptique de centre $(0, a_2, 0)$ dans le référentiel qu'il parcourt en un jour sidéral (c'est-à-dire 23h 56min 04s).

Il faut choisir des conditions finales convenable pour éviter d'approcher trop la cible. Ainsi la trajectoire éliptique finale ne doit pas pénétrer la boule de rayon $20m$ centrée en 0.

V.2. Minimisation du delta-V

On cherche à minimiser le delta-V au cours de la manoeuvre. Comme la propulsion est électrique, on peut supposer la masse du chasseur constante. Ainsi, on cherche à minimiser :

$$\int_0^T \|F(s)\| ds$$

où T est le temps d'atteinte de l'objectif. On impose aussi d'atteindre la cible en moins d'une semaine :

$$T \leq 1 \quad \text{semaine.}$$

Modélisation

VI.1. Processus de décision Markovien partiellement observable

On modélise le système par un processus de décision Markovien partiellement observable. C'est un tuple $(S, \mathcal{A}, P, r, O, Q, \gamma)$.

- l'ensemble S est l'espace des états processus,
- l'ensemble $\mathcal{A}$ est l'espace des actions,
- P est la loi des probabilités conditionnelles entre les états,
- r est la fonction de récompense,
- O est l'espace des observations
- Q est la loi des probabilités conditionnelles des observations,
- γ est le facteur d'amortissement.

L'évolution du système étant déterministe, on peut remplacer la probabilité d'évolution P. Soit en effet $\phi : \mathbb{R}_+ \times S \times U \to S$ le semi-flot associé au système d'équations différentielles de la dynamique du satellite, *i.e.*, $\phi(t, s, u)$ est l'état du système à l'instant t en partant de l'état s à l'instant 0 et en appliquant le contrôle $u(s)$ pour $s \in [0, t]$. Ainsi, en prenant le pas de discrétisation Δt, on définit la fonction Ψ qui donne les transitions du système :

$$s_{t+1} = \Psi(s_t, a_t) = \phi(\Delta t, s_t, u),$$

où u_t est une fonction définie sur $[0, \Delta t]$ qui donne la réponse du moteur et de la roue de réaction à la commande a_t.

La probabilité d'être d'observer l'état o sachant que le système est dans l'état s est donné par $Q(o \mid s)$ donne la probabilité

VI.2. Mise à jour des croyances

Supposons que l'ont ait la croyance b à l'instant 0 et que l'on observe o' à l'instant 1. Quelle est la croyance à l'instant 1.

$$b'(\Psi(s, a)) \propto Q(o \mid \Psi(s, a)) b(s)$$

On peut réécrire l'équation précédente :

$$b'(s') = Q(o \mid s') b(\Psi^{-1}(s', a))$$

VI.3. La fonction de récompense