CMB 122 - Matemática 1

21 de Junho de 2017

Questão 1 20

Simplifique as expressões abaixo:

(a) (10 points) $\dfrac{64^{\frac{-2}{3}} \cdot (16^{\frac{5}{4}}) \cdot 9^{\frac{3}{2}}}{81^{\frac{-1}{4}}((243^{-2})^{-2})^{\frac{1}{5}} \cdot 4^2}$

Solution:

$$\frac{64^{\frac{-2}{3}} \cdot (16^{\frac{5}{4}}) \cdot 9^{\frac{3}{2}}}{81^{\frac{-1}{4}}((243^{-2})^{-2})^{\frac{1}{5}} \cdot 4^2} = \frac{(2^6)^{\frac{-2}{3}} \cdot (2^4)^{\frac{5}{4}} \cdot (3^2)^{\frac{3}{2}}}{(3^4)^{\frac{-1}{4}} \cdot ((3^5)^4)^{\frac{1}{5}} \cdot (2^2)^2} = \frac{2^{\frac{-12}{3}} \cdot 2^{\frac{20}{4}} \cdot 3^{\frac{6}{2}}}{3^{\frac{-4}{4}} \cdot 3^{\frac{20}{5}} \cdot 2^4}$$

$$= \frac{2^{-4} \cdot 2^5 \cdot 3^3}{3^{-1} \cdot 3^4 \cdot 2^4} = \frac{2 \cdot 3^3}{3^3 \cdot 2^4} = 2^{-3}$$

(b) (10 points) $\ln \dfrac{ab^3}{c^2} + \ln \dfrac{5a}{bc^2} - \ln \dfrac{ab}{c^3\sqrt[3]{a^2}}$

Solution: Existem pelo menos 2 maneiras de resolver essa questão, que estão descritas abaixo:

$$\ln \frac{ab^3}{c^2} + \ln \frac{5a}{bc^2} - \ln \frac{ab}{c^3\sqrt[3]{a2}} = \ln \frac{ab^3}{c^2} \cdot \frac{5a}{bc^2} - \ln \frac{ab}{c^3 a^{\frac{2}{3}}} = \ln \frac{5a^2b^3}{bc^4} - \ln \frac{ab}{c^3 a^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \ln \frac{\frac{5a^2b^3}{bc^4}}{\frac{ab}{c^3 a^{\frac{2}{3}}}} = \ln \frac{5a^2b^3}{bc^4}\frac{c^3 a^{\frac{2}{3}}}{ab} = \ln \frac{5a^{\frac{5}{3}}b}{c}$$

$$\ln \frac{ab^3}{c^2} + \ln \frac{5a}{bc^2} - \ln \frac{ab}{c^3\sqrt[3]{a2}} = \ln a + \ln b^3 - \ln c^2 + \ln 5 + \ln a - (\ln b + \ln c^2)$$

$$- [(\ln a + \ln b) - (\ln c + \ln a^{\frac{2}{3}})]$$

$$= \ln a + 4\ln b - 2\ln c + \ln 5 + \ln a - \ln b - 2\ln c$$

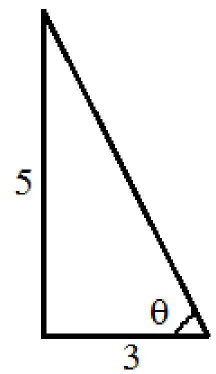
$$- \ln a - \ln b + \ln c + \frac{2}{3}\ln a$$

$$= \ln 5 + \frac{5}{3}\ln a + \ln b - \ln c$$

Questão 2 15

Sabendo que $\tan\theta = \dfrac{5}{3}$ e que $\pi \le \theta \le \dfrac{3\pi}{2}$, determine $\sin\theta$ e $\cos\theta$.

Solution: Como $\tan\theta = \dfrac{c.o.}{c.a.} = \dfrac{5}{3}$, temos o seguinte triângulo:



Usando Pitágoras, chegamos que

$$(hip)^2 = 5^2 + 3^2$$

$$(hip)^2 = 34 \Rightarrow hip = \sqrt{34}$$

Assim, chegamos que

$$\sin\theta = \frac{5}{\sqrt{34}}, \quad \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{34}}.$$

Dado que $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, então o ângulo θ está no terceiro quadrante, o que nos dá $\sin\theta = -\frac{5}{\sqrt{34}}$ e $\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{34}}$.

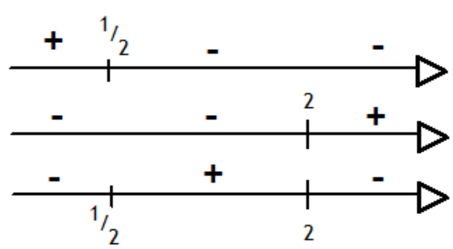
Questão 3 .... $\boxed{25}$

Seja $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+5x}{3x-6}}$, $g(x) = \sqrt{\frac{-2x+1}{2x-4}}$ e $h(x) = x^2+1$. Determine:

(a) (10 points) o domínio de f e g

Solution: Como $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+5x}{3x-6}}$, a única restrição é que o denominador $3x-6 \neq 0$. Assim, $D(f) = \{x \neq 2\}$.

Como $g(x) = \sqrt{\frac{-2x+1}{2x-4}}$, então temos que $\frac{-2x+1}{2x-4} \geq 0$. Para isso, é necessário fazer o varal de sinais para determinar $D(g)$.



Ou seja, $D(g) = \left\{\frac{1}{2} \leq x < 2\right\}$

(b) (5 points) $\left(\frac{g}{h}\right)(x)$ e seu domínio

Solution:

$$\left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{\sqrt{\frac{-2x+1}{2x-4}}}{x^2+1}$$

Como $D(g) = \left\{\frac{1}{2} \leq x < 2\right\} e D(h) = \mathbb{R}$, então $D\left(\frac{g}{h}\right) = \left\{\frac{1}{2} \leq x < 2\right\}$

(c) (5 points) $f \circ h(x)$ e seu respectivo domínio

Solution: $f \circ h = f(g(x)) = f(x^2+1) = \sqrt[3]{\frac{1+5(x^2+1)}{3(x^2+1)-6}} = \sqrt[3]{\frac{5x^2+6}{3x^2-3}}$

Como temos que ter $3x^2 - 3 \neq 0$, então $D(f \circ h) = \{x \neq \pm 1\}$.

(d) (5 points) $f(0)$, $g(0)$, $f \circ h(-2)$

Solution:

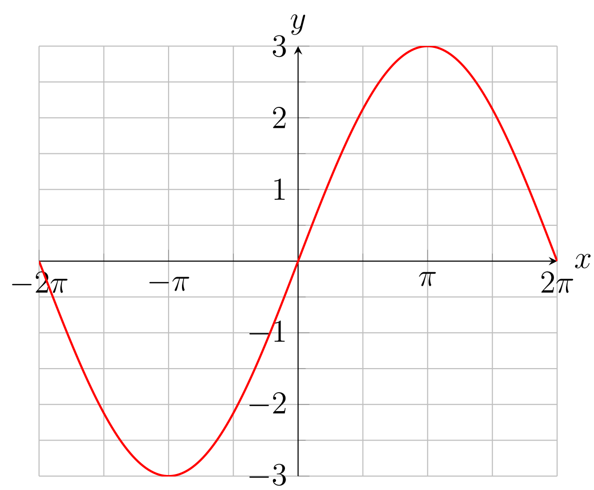
- $f(0) = \sqrt[3]{\frac{1+5\cdot 0}{3\cdot 0 - 6}} = \sqrt[3]{\frac{1}{-6}}$
- $g(0)$ não existe pois $x = 0$ não pertence a $D(g)$.
- $f \circ h(-2) = \sqrt[3]{\frac{5\cdot(-2)^2+6}{3\cdot(-2)^2-3}} = \sqrt[3]{\frac{26}{9}}$

Questão 4 .... $\boxed{20}$

Identifique os valores máximos, mínimos e as raízes da função $y = 3\sin\frac{x}{2}$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$:

Solution:

- Valor máximo: 3
- Valor mínimo: -3
- Raízes: $-2\pi, 0, 2\pi$



Questão 5 .... $\boxed{20}$

Considere os seguintes pontos (1,15) e $\left(4, \frac{60}{32}\right)$.

(a) (5 points) Obtenha a função exponencial que passa nos dois pontos fornecidos no enunciado.

Solution: Seja a função exponencial $y = ca^x$. Assim, comas informações da tabela, temos as equações $ca = 15$ e $ca^4 = \frac{60}{32}$.

$$\begin{cases} ca &= 15 \Rightarrow c = \dfrac{15}{a} \\ ca^4 &= \dfrac{60}{32} \Rightarrow c = \dfrac{15}{a} \cdot a^3 = \dfrac{60}{15 \cdot 32} \Rightarrow a^3 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Como $a = \frac{1}{2}$, então $c = \frac{15}{a} = 30$. Portanto, chegamos que $y = 30\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

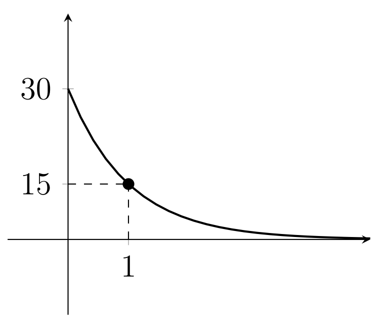
(b) (5 points) Escreva a expressão para $f(13)$.

Solution: $y = 30\left(\frac{1}{2}\right)^{13}$.

(c) (5 points) Determine x tal que $f(x) = 200$.

Solution:
$30\left(\frac{1}{2}\right)^x = 200 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{200}{30} = \frac{20}{3} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_{\frac{1}{2}}\frac{20}{3} \Rightarrow x = \log_{\frac{1}{2}}\frac{20}{3}$.

(d) (5 points) Esboce o gráfico da função obtida.



Solution: