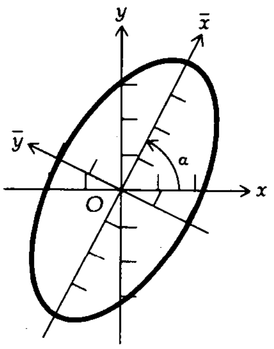

FIGURA 3

Substituindo $x = \bar{x}/\sqrt{5} - 2\bar{y}/\sqrt{5}$ e $y = 2\bar{x}/\sqrt{5} + \bar{y}/\sqrt{5}$ na equação dada obtemos

$$17\left(\frac{\bar{x}^2 - 4\bar{x}\bar{y} + 4\bar{y}^2}{5}\right) - 12\left(\frac{2\bar{x}^2 - 3\bar{x}\bar{y} - 2\bar{y}^2}{5}\right) + 8\left(\frac{4\bar{x}^2 + 4\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2}{5}\right) - 80 = 0$$

Simplificando, obtemos

$$\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 16$$

$$\frac{\bar{x}^2}{16} + \frac{\bar{y}^2}{4} = 1$$

Assim, o gráfico é uma elipse cujo eixo maior tem 8 unidades de comprimento e cujo eixo menor tem 4 unidades de comprimento. Um esboço da elipse com ambos os conjuntos de eixos está na Figura 3.

EXERCÍCIOS 10.4

Nos Exercícios de 1 a 4, para a equação dada, (a) encontre uma equação do gráfico em relação aos eixos $\bar{x}$ e $\bar{y}$, obtidos por uma rotação de um ângulo cuja medida é $\frac{\pi}{4}$ e (b) faça um esboço do gráfico e mostre os dois conjuntos de eixos.

1. $xy = 8$
2. $xy = -4$
3. $x^2 - y^2 = 8$
4. $y^2 - x^2 = 16$

Nos Exercícios de 5 a 12, remova da equação dada o termo xy por uma rotação de eixos. Faça um esboço do gráfico e mostre os dois conjuntos de eixos.

5. $24xy - 7y^2 + 36 = 0$
6. $4xy + 3x^2 = 4$
7. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y = 0$
8. $x^2 + xy + y^2 = 3$
9. $xy + 16 = 0$
10. $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 9$
11. $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 = 144$
12. $6x^2 + 20\sqrt{3}xy + 26y^2 = 324$

Nos Exercícios de 13 a 22, simplifique a equação dada com uma rotação e uma translação de eixos. Faça um esboço do gráfico e mostre os três conjuntos de eixos.

13. $x^2 + xy + y^2 - 3y - 6 = 0$
14. $19x^2 + 6xy + 11y^2 - 26x + 38y + 31 = 0$
15. $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y - 12 = 0$
16. $x^2 - 10xy + y^2 + x + y + 1 = 0$
17. $x^2 + 2xy + y^2 + x - y - 4 = 0$
18. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 400 = 0$
19. $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 30x + 40y - 45 = 0$
20. $3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0$
21. $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x + 12y = 0$
22. $x^2 + 2xy + y^2 - x - 3y = 0$

23. Mostre que o gráfico de $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ é um segmento de uma parábola por uma rotação de eixos de um ângulo cuja medida é $\frac{\pi}{4}$. (*Sugestão*: elimine os radicais na equação, antes de aplicar o Teorema 10.4.1.)

24. Dada a equação $(a^2 + b^2)xy = 1$, onde $a > 0$ e $b > 0$, ache uma equação do gráfico em relação aos eixos $\bar{x}$ e $\bar{y}$, obtidos por uma rotação de eixos cujo ângulo tem por medida $\text{tg}^{-1}(b/a)$.

25. Mostre que para a equação geral do segundo grau em duas variáveis, o discriminante $B^2 - 4AC$ é invariante sob uma rotação de eixos.

26. Deduza (3) de (2) desta secção resolvendo em x e y em termos de $\bar{x}$ e $\bar{y}$. (*Sugestão*: Para resolver em x, multiplique cada membro de (2) por cos α e cada membro da segunda equação por sen α, e então subtraia os membros correspondentes das equações resultantes. Use um procedimento similar para resolver em y.)

10.5 COORDENADAS POLARES

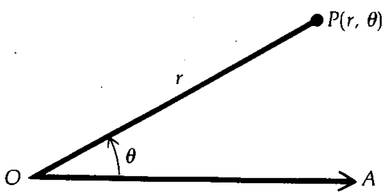

FIGURA 1

Até aqui localizamos um ponto no plano por suas coordenadas cartesianas retangulares. Há outros sistemas de coordenadas que dão a posição de um ponto em um plano. O **sistema de coordenadas polares** é um deles, e é importante, pois certas curvas têm equações mais simples quando esse sistema é usado. Nas coordenadas polares todas as três cônicas (a parábola, a elipse e a hipérbole) têm uma equação. Ela é aplicada na derivação das leis de Kepler em Física e no estudo do movimento de planetas em Astronomia.

No sistema cartesiano, as coordenadas são números chamados de abscissa e ordenada que são as medidas das distâncias orientadas a dois eixos fixos. No

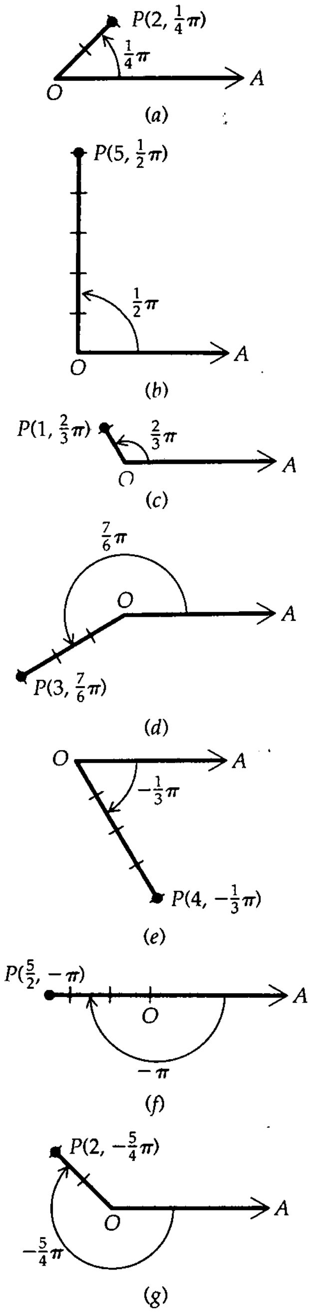

FIGURA 2

sistema polar, as coordenadas consistem em uma distância orientada e na medida de um ângulo relativo a um ponto fixo e a um semi-eixo fixo. O ponto fixo é chamado de **pólo** (ou origem), sendo designado pela letra O. O semi-eixo fixo é chamado de **eixo polar** (ou reta polar) e vamos designá-lo por OA. O semi-eixo OA é, normalmente colocado na horizontal, orientado para a direita e se estende indefinidamente. Veja a Figura 1.

Seja P um ponto qualquer do plano, distinto de O. Seja θ a medida em radianos do ângulo AOP, positiva quando considerada no sentido anti-horário e negativa quando no sentido horário, tendo como lado inicial OA e como lado final OP. Então, se r for a distância não orientada de O a P (isto é, $r = |\overline{OP}|$), o conjunto de coordenadas polares de P será dado por r e θ, e escrevemos essas coordenadas como (r, θ).

EXEMPLO 1 Marque cada um dos seguintes pontos com o conjunto de coordenadas polares dado: (a) $(2, \frac{1}{4}\pi)$; (b) $(5, \frac{1}{2}\pi)$; (c) $(1, \frac{2}{3}\pi)$; (d) $(3, \frac{7}{6}\pi)$; (e) $(4, -\frac{1}{3}\pi)$; (f) $(\frac{5}{2}, -\pi)$; (g) $(2, -\frac{5}{4}\pi)$

Solução

(a) O ponto $(2, \frac{1}{4}\pi)$ é determinado primeiro ao desenharmos o ângulo com medida $\frac{\pi}{4}$ rad, tendo seu vértice na origem e seu lado lado inicial ao longo do eixo polar. O ponto no lado terminal que é 2 unidades da origem é o ponto $(2, \frac{\pi}{4})$. Veja a Figura 2(a).

Analogamente, obtemos os pontos mostrados na Figura 2(b) – (g).

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** A Figura 3 mostra o ponto $(4, \frac{5}{6}\pi)$. Outro conjunto de coordenadas polares para esse ponto é $(4, -\frac{7}{6}\pi)$; veja a Figura 4. Além disso, as coordenadas polares $(4, \frac{17}{6}\pi)$ também resultam o mesmo ponto, como mostra a Figura 5. ◀

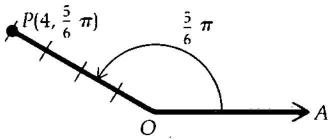

FIGURA 3

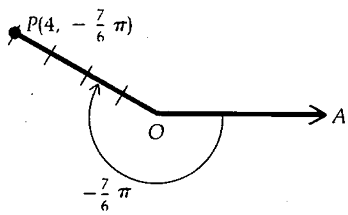

FIGURA 4

Na realidade, as coordenadas $(4, \frac{5\pi}{6} + 2n\pi)$, onde n é um inteiro qualquer são do mesmo ponto, designado com $(4, \frac{5\pi}{6})$. Assim, um dado ponto tem um número ilimitado de conjuntos de coordenadas polares. Nisso o sistema polar é diferente do sistema cartesiano retangular, onde existe uma correspondência biunívoca entre as coordenadas e os pontos do plano. Para as coordenadas polares tal correspondência inexiste. Outro exemplo é obtido considerando as coordenadas polares da origem. Se $r = 0$ e θ é qualquer número real, temos a origem, que é designada por $(0, \theta)$.

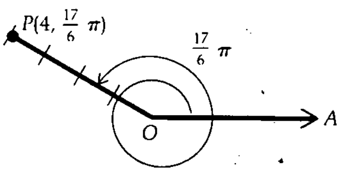

FIGURA 5

Podemos considerar coordenadas polares com r negativo. Nesse caso, o ponto estará no prolongamento do lado terminal do ângulo, que é a semi-reta que

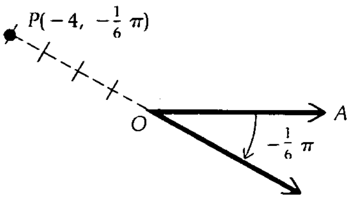

FIGURA 6

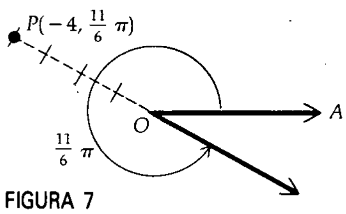

FIGURA 7

parte da origem, estendendo-se no sentido oposto ao lado terminal. Assim, se P estiver sobre o prolongamento do lado terminal do ângulo de medida θ rad, o conjunto de coordenadas polares de P será (r, θ), onde $r = -|\overline{OP}|$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** O ponto $(-4, -\frac{\pi}{6})$ da Figura 6 é o mesmo que o ponto $(4, \frac{5\pi}{6})$, $(4, -\frac{7\pi}{6})$ e $(4, \frac{17\pi}{6})$ da Ilustração 1. Outro conjunto de coordenadas polares para esse ponto é $(-4, \frac{11\pi}{6})$; veja a Figura 7. ◀

O ângulo é normalmente medido em radianos, assim um conjunto de coordenadas polares de um ponto é um par ordenado de números reais. Para cada par ordenado de números reais existe um único ponto no plano tendo-o como coordenadas polares. Entretanto vimos que cada ponto pode ser dado por um número ilimitado de pares ordenados de números reais. Se o ponto P não for a origem e se restringirmos r e θ de tal forma que $r > 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$, então existirá um único par ordenado de coordenadas polares para P.

EXEMPLO 2 (a) Marque num gráfico o ponto com coordenadas polares $(3, -\frac{2\pi}{3})$. Ache outro conjunto de coordenadas polares desse ponto para as quais (b) $r < 0$ e $0 < \theta < 2\pi$; (b) $r > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$; (c) $r < 0$ e $-2\pi < \theta < 0$.

Solução

(a) Para encontrar o ponto no gráfico, traçamos o ângulo cuja medida em radianos é $-\frac{2}{3}\pi$ na direção horária, a partir do eixo polar. Como $r > 0$, P está sobre o lado terminal do ângulo a três unidades da origem, veja a Figura 8(a).
As respostas a (b), (c) e (d) são, respectivamente, $(-3, \frac{1}{3}\pi)$, $(3, \frac{4}{3}\pi)$, e $(-3, -\frac{5}{3}\pi)$. Elas estão ilustradas na Figura 8(b), (c) e (d).

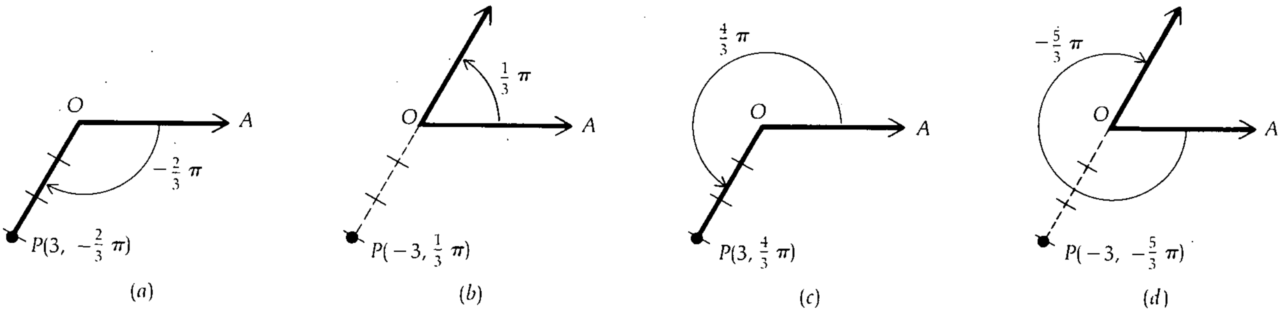

FIGURA 8

Freqüentemente, queremos nos referir às coordenadas de um ponto nos dois sistemas de coordenadas: cartesianas retangulares e polares. Para fazer isso, tomamos a origem do primeiro sistema coincidindo com a origem do segundo, o eixo polar como o semi-eixo x positivo e a semi-reta para a qual $\theta = \frac{\pi}{2}$ como o semi-eixo y positivo.

Suponha que P seja o ponto que tenha (x, y) como representação num sistema de coordenadas cartesianas retangulares e seja (r, θ) a representação de P em coordenadas polares. Distinguimos dois casos: $r > 0$ e $r < 0$. No primeiro caso, se $r > 0$, P está sobre o lado terminal do ângulo cuja medida é θ rad e $r = |\overline{OP}|$.

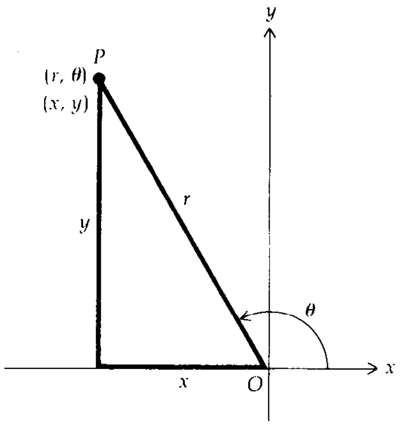

FIGURA 9

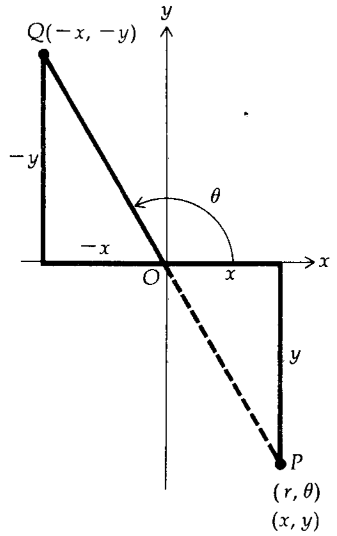

FIGURA 10

Tal caso está na Figura 9. Então,

$$\cos\theta = \frac{x}{|\overline{OP}|} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{-y}{|\overline{OP}|}$$
$$= \frac{x}{r} \qquad\qquad = \frac{y}{r}$$

Assim,

$$\boxed{x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\operatorname{sen}\theta} \tag{1}$$

No segundo caso, se $r < 0$, então o ponto P estará sobre o prolongamento do lado terminal e $r = -|\overline{OP}|$. Veja a Figura 10. Então, se Q for o ponto $(-x, -y)$,

$$\cos\theta = \frac{-x}{|\overline{OQ}|} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{-y}{|\overline{OQ}|}$$
$$= \frac{-x}{|\overline{OP}|} \qquad = \frac{-y}{|\overline{OP}|}$$
$$= \frac{-x}{-r} \qquad = \frac{-y}{-r}$$
$$= \frac{x}{r} \qquad = \frac{y}{r}$$

Logo,

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\operatorname{sen}\theta$$

Essas equações são as mesmas que (1); assim, as equações (1) são válidas em todos os casos.

Das equações (1) podemos obter as coordenadas cartesianas retangulares de um ponto cujas coordenadas polares são conhecidas. Também, dessas equações podemos obter a equação polar de uma curva, conhecendo a sua equação cartesiana retangular.

Para obter as equações que dão um conjunto de coordenadas polares de um ponto quando as coordenadas cartesianas retangulares são conhecidas, vamos elevar ao quadrado ambos os membros de cada equação em (1), obtendo

$$x^2 = r^2\cos^2\theta \quad \text{e} \quad y^2 = r^2\operatorname{sen}^2\theta$$

Somando membro a membro teremos

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta$$
$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\boxed{r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{2}$$

Dividindo as equações (1), teremos

$$\frac{r\operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}} \tag{3}$$

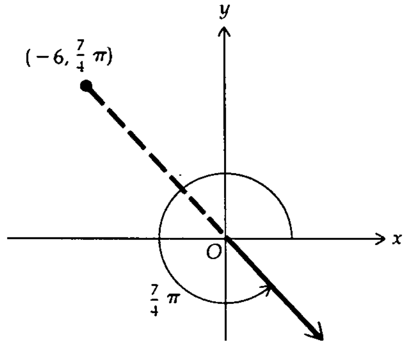

FIGURA 11

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** O ponto cujas coordenadas polares são $(-6, \frac{7}{4}\pi)$ está colocado no gráfico da Figura 11. Vamos encontrar suas coordenadas cartesianas retangulares. De (1),

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta & y &= r \operatorname{sen}\theta \\ &= -6\cos\tfrac{7}{4}\pi & &= -6\operatorname{sen}\tfrac{7}{4}\pi \\ &= -6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} & &= -6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -3\sqrt{2} & &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Assim, o ponto é $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$. ◀

O gráfico de uma equação em coordenadas polares r e θ consiste em todos aqueles pontos e somente aqueles pontos P que têm pelo menos um par de coordenadas que satisfaçam a equação. Se a equação de um gráfico for dada em coordenadas polares, ela será chamada de **equação polar** para podermos distingui-la da **equação cartesiana** que é o termo usado quando uma equação é dada em coordenadas cartesianas retangulares. Na Secção 11.6 discutiremos métodos para obter o gráfico de uma equação polar.

EXEMPLO 3 Dado que a equação polar de um gráfico é

$$r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$$

ache a equação cartesiana.

Solução Como $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$, temos que $\operatorname{sen} 2\theta = 2(y/r)(x/r)$. Com essa substituição e $r^2 = x^2 + y^2$, obtemos da equação polar dada

$$x^2 + y^2 = 4(2)\frac{y}{r}\cdot\frac{x}{r}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{8xy}{r^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{8xy}{x^2 + y^2}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 8xy$$

EXEMPLO 4 Ache (r, θ) se $r > 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$ para o ponto cuja representação cartesiana é $(-\sqrt{3}, -1)$.

Solução O ponto $(-\sqrt{3}, -1)$ está colocado no gráfico da Figura 12. De (2), como $r > 0$,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{3+1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

De (3), $\operatorname{tg}\theta = -1/(-\sqrt{3})$, e como $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$,

$$\theta = \tfrac{7}{6}\pi$$

Assim, o ponto é $(2, \frac{7\pi}{6})$.

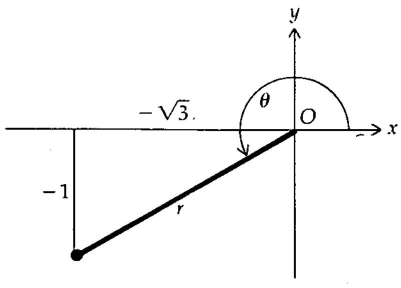

FIGURA 12

EXEMPLO 5 Ache a equação polar do gráfico cuja equação cartesiana é

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

Solução Substituindo $x = r \cos \theta$ e $y = \text{sen}\, \theta$ em

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

temos

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \text{sen}^2 \theta - 4r \cos \theta = 0$$

$$r^2 - 4r \cos \theta = 0$$

$$r(r - 4 \cos \theta) = 0$$

Logo,

$$r = 0 \quad \text{ou} \quad r - 4 \cos \theta = 0$$

O gráfico de $r = 0$ é a origem, contudo, ela é um ponto do gráfico de $r - 4 \cos \theta = 0$ pois $r = 0$ quando $\theta = \frac{\pi}{2}$. Logo, a equação polar do gráfico é

$$r = 4 \cos \theta$$

O gráfico de $x^2 + y^2 - 4x = 0$ é uma circunferência. A equação pode ser escrita na forma

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4$$

que é a equação de uma circunferência com centro em (2, 0) e raio 2.

EXERCÍCIOS 10.5

Nos Exercícios de 1 à 4, marque o ponto com o conjunto de coordenadas polares dadas.

1. (a) $(3, \frac{1}{6}\pi)$; (b) $(2, \frac{2}{3}\pi)$; (c) $(1, \pi)$; (d) $(4, \frac{5}{4}\pi)$; (e) $(5, \frac{11}{6}\pi)$
2. (a) $(4, \frac{1}{3}\pi)$ (b) $(3, \frac{3}{4}\pi)$; (c) $(1, \frac{7}{6}\pi)$; (d) $(2, \frac{3}{2}\pi)$; (e) $(5, \frac{5}{3}\pi)$
3. (a) $(1, -\frac{1}{4}\pi)$; (b) $(3, -\frac{5}{6}\pi)$; (c) $(-1, \frac{1}{4}\pi)$; (d) $(-3, \frac{5}{6}\pi)$; (e) $(-2, -\frac{1}{2}\pi)$
4. (a) $(5, -\frac{2}{3}\pi)$; (b) $(2, -\frac{7}{6}\pi)$; (c) $(-5, \frac{2}{3}\pi)$; (d) $(-2, \frac{7}{6}\pi)$; (e) $(-4, -\frac{5}{4}\pi)$

Nos Exercícios de 5 a 10, marque num gráfico o ponto com as coordenadas polares dadas; ache então outro conjunto de coordenadas polares para o mesmo ponto para o qual (a) $r < 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$; (b) $r > 0$ e $-2\pi < \theta \leqslant 0$; (c) $r < 0$ e $-2\pi < \theta \leqslant 0$.

5. $(4, \frac{1}{4}\pi)$
6. $(3, \frac{5}{6}\pi)$
7. $(2, \frac{1}{2}\pi)$
8. $(3, \frac{3}{2}\pi)$
9. $(\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi)$
10. $(2, \frac{4}{3}\pi)$
11. Coloque num gráfico o ponto com coordenadas polares $(2, -\frac{1}{4}\pi)$. Ache outro conjunto de coordenadas polares para esse ponto sendo (a) $r < 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$; (b) $r < 0$ e $-2\pi < \theta \leqslant 0$; (c) $r > 0$ e $2\pi \leqslant \theta < 4\pi$.
12. Coloque num gráfico o ponto com coordenadas polares $(-3, -\frac{2}{3}\pi)$. Ache outro conjunto de coordenadas polares para esse ponto sendo (a) $r > 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$; (b) $r > 0$ e $-2\pi < \theta \leqslant 0$; (c) $r < 0$ e $2\pi \leqslant \theta < 4\pi$.

Nos Exercícios de 13 a 20, coloque num gráfico o ponto com coordenadas polares dadas; dê, então, dois outros conjuntos de coordenadas polares para o mesmo ponto; um com o mesmo valor de r e outro com o sinal oposto a r.

13. $(3, -\frac{2}{3}\pi)$
14. $(\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\pi)$
15. $(-4, \frac{5}{6}\pi)$
16. $(-2, \frac{4}{3}\pi)$
17. $(-2, -\frac{5}{4}\pi)$
18. $(-3, -\pi)$
19. $(2, 6)$
20. $(5, \frac{1}{6}\pi)$

Nos Exercícios 21 e 22, ache as coordenadas cartesianas retangulares dos pontos cujas coordenadas polares são dadas.

21. (a) $(3, \pi)$: (b) $(\sqrt{2}, -\frac{3}{4}\pi)$; (c) $(-4, \frac{2}{3}\pi)$; (d) $(-1, -\frac{7}{6}\pi)$
22. (a) $(-2, -\frac{1}{2}\pi)$; (b) $(-1, \frac{1}{4}\pi)$; (c) $(2, -\frac{7}{6}\pi)$; (d) $(2, \frac{7}{4}\pi)$

Nos Exercícios 23 e 24, ache um conjunto de coordenadas polares dos pontos cujas coordenadas cartesianas retangulares são dadas. Tome $r > 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

23. (a) $(1, -1)$; (b) $(-\sqrt{3}, 1)$; (c) $(2, 2)$; (d) $(-5, 0)$
24. (a) $(3, -3)$; (b) $(-1, \sqrt{3})$; (c) $(0, -2)$; (d) $(-2, -2\sqrt{3})$

Nos Exercícios de 25 a 34, ache a equação polar do gráfico dada a sua equação cartesiana.

25. $x^2 + y^2 = a^2$
26. $x + y = 1$
27. $y^2 = 4(x + 1)$
28. $x^3 = 4y^2$
29. $x^2 = 6y - y^2$
30. $x^2 - y^2 = 16$
31. $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$
32. $2xy = a^2$
33. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$
34. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

Nos Exercícios de 35 a 44, ache a equação cartesiana do gráfico tendo a sua equação polar.

35. $r^2 = 2 \operatorname{sen} 2\theta$
36. $r^2 \cos 2\theta = 10$
37. $r^2 = \cos \theta$
38. $r^2 = 4 \cos 2\theta$
39. $r^2 = \theta$
40. $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$
41. $r \cos \theta = -1$
42. $r^6 = r^2 \cos^2 \theta$
43. $r = \dfrac{6}{2 - 3 \operatorname{sen} \theta}$
44. $r = \dfrac{4}{3 - 2 \cos \theta}$

10.6 GRÁFICOS DE EQUAÇÕES EM COORDENADAS POLARES

Na Secção 10.5 estabelecemos que o gráfico de uma equação polar consiste naqueles e somente naqueles pontos tendo pelo menos um par de coordenadas polares, que satisfaçam a equação. Nesta secção mostraremos como obter um esboço de tal gráfico.

A equação

$$\boxed{\theta = C}$$

onde C é uma constante, está satisfeita por todos os pontos tendo coordenadas polares (r, C), qualquer que seja o valor de r. Logo, o gráfico dessa equação é uma reta que passa pela origem e faz com o eixo polar um ângulo de medida C rad. Veja a Figura 1. A mesma reta é dada pela equação

$$\theta = C \pm k\pi$$

onde k é um inteiro qualquer.

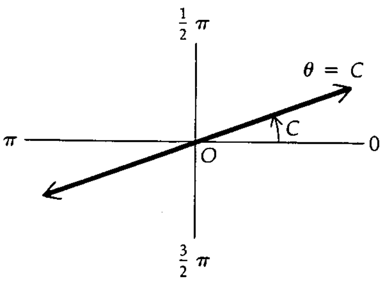

FIGURA 1

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** (a) O gráfico da equação

$$\theta = \tfrac{\pi}{4}$$

está na Figura 2. É uma reta passando pela origem e fazendo com o eixo polar um ângulo com medida $\frac{\pi}{4}$. A mesma reta é dada pelas equações

$$\theta = \tfrac{5}{4}\pi \qquad \theta = \tfrac{9}{4}\pi \qquad \theta = -\tfrac{3}{4}\pi \qquad \theta = -\tfrac{7}{4}\pi$$

e assim por diante.

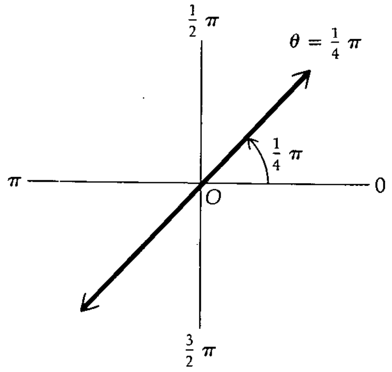

FIGURA 2

(b) O gráfico da equação

$$\theta = \tfrac{2}{3}\pi$$

está na Figura 3. É a reta que passa pela origem e forma com o eixo polar um ângulo com medida $\frac{2\pi}{3}$ rad. Outras equações dessa reta são

$$\theta = \tfrac{5}{3}\pi \qquad \theta = \tfrac{8}{3}\pi \qquad \theta = -\tfrac{1}{3}\pi \qquad \theta = -\tfrac{4}{3}\pi$$

e assim por diante. ◀

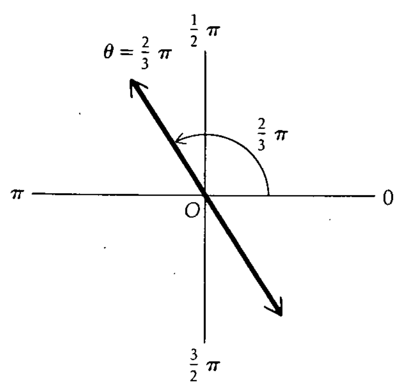

FIGURA 3

Em geral, a forma polar da equação de uma reta não é tão simples quanto a forma cartesiana. Contudo, se a reta for paralela ao eixo polar ou ao eixo $\frac{\pi}{2}$, a equação será razoavelmente simples.

Se uma reta for paralela ao eixo polar e contiver o ponto B cujas coordenadas cartesianas são $(0, b)$ e cujas coordenadas polares são $(b, \frac{\pi}{2})$, então a equação cartesiana será $y = b$. Substituindo y por r sen θ, temos

$$\boxed{r \operatorname{sen} \theta = b}$$