

7) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

verificar se B é inversa de A.

Solução

Para que a matriz B seja inversa da matriz A, é necessário que $AB = I$. Calculemos o produto AB:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Tendo em vista que $AB = I$, a matriz B, que se representa por A^{-1} , é inversa de A.

Observação

O produto BA também é igual a I, o que significa que $A = B^{-1}$ é inversa de B. Deixamos a cargo do estudante calcular o produto BA, a título de exercício.

8) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{bmatrix}$$

calcular m e n para que B seja inversa de A.

Solução

Efetuada o produto AB, vem:

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 + 5m & 9n + 45 \\ 28 + 4m & 7n + 36 \end{bmatrix}$$

Mas AB deve ser igual a I, isto é:

$$\begin{bmatrix} 36 + 5m & 9n + 45 \\ 28 + 4m & 7n + 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela definição de igualdade de matrizes, deve-se ter:

$$36 + 5m = 1 \quad \therefore m = -7$$

$$28 + 4m = 0 \quad \therefore m = -7$$

$$9n + 45 = 0 \quad \therefore n = -5$$

$$7n + 36 = 1 \quad \therefore n = -5$$

Para que B seja inversa de A, deve-se ter $m = -7$ e $n = -5$.

De fato:

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

A.8.1 Problemas Propostos

Nos problemas de 1 a 3, calcular os valores de m e n para que as matrizes A e B sejam iguais.

1)
$$A = \begin{bmatrix} 8 & 15n \\ 12 + m & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 8 & 75 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2) \quad A = \begin{bmatrix} m^2 - 40 & n^2 + 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 41 & 13 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3) \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & x^2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 10x - 25 \end{bmatrix}$$

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 4 & -1 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -9 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 8 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

- 4) Calcular $A + B$.
- 5) Calcular $B + C$.
- 6) Calcular $A + C$.
- 7) Calcular $A - B$.
- 8) Calcular $A - C$.
- 9) Calcular $B - C$.
- 10) Calcular $X = 4A - 3B + 5C$.
- 11) Calcular $X = 2B - 3A - 6C$.
- 12) Calcular $X = 4C + 2A - 6B$.

Nos problemas 13 a 15, efetuar a multiplicação das matrizes A e X .

$$13) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$14) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -5 & 7 \\ 3 & 9 & -8 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$15) \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ -2 & 4 & 5 & -7 \\ 9 & -9 & -8 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 7 & -4 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -7 \\ 6 & 2 & -8 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & -8 \\ -3 & -1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 9 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

- 16) Calcular AB .
- 17) Calcular $(AB)D$.
- 18) Calcular $A(BD)$.

19) Calcular BA .

20) Calcular $(BA)C$.

21) Calcular $B(AC)$.

Nos problemas de 22 a 26, verificar se a matriz B é inversa da matriz A .

22) $A = \begin{bmatrix} -0,5 & -1,5 & 1 \\ -0,5 & -2,5 & 0,5 \\ -0,5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -12 & -4 & 14 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

23) $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -4 & -6 & -6 \\ -4 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1,5 & 2 & -1,5 \\ 2 & -2,5 & 1,5 \\ -1 & 1 & -0,5 \end{bmatrix}$

24) $A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & -2 \\ 10 & -8 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -0,5 \\ 1,5 & -2 & 1 \\ -5,5 & 6,5 & -3,5 \end{bmatrix}$

25) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 \\ -7 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

26) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & 8 & -4 \\ -2 & -14 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0,5 & 0 \\ -0,5 & -0,5 & -0,5 \\ -1,5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Nos problemas 27 e 28, calcular m e n para que a matriz B seja inversa da matriz A .

27) $A = \begin{bmatrix} m & -22 \\ -2 & n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 22 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

28) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 8 & m \\ n & 2 \end{bmatrix}$

11) Calcular AB e classificar a matriz $AB = E$.

Solução

$$E = AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

A matriz $AB = E$ é uma matriz triangular superior.

12) Calcular CD e classificar $CD = F$.

Solução

$$F = CD = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ -10 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

A matriz $CD = F$ é uma matriz triangular inferior.

A.16.1 Problemas Propostos

1) Determinar a matriz A^T transposta da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -5 \\ 1 & -7 & 0 & -2 \\ 8 & -9 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 \\ -8 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$e D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 2 \\ -8 & 1 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2) Calcular $(AB)^T$.

3) Calcular $(AB)D^T$.

4) Calcular $A(BD^T)$.

5) Calcular B^TC .

6) $2(A^TB^T) + 3C^T$.

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & -9 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}, e C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -7 \\ 8 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

7) ~~Calcular~~ ~~Classificar~~ $A + A^T$.

8) ~~Calcular~~ ~~Classificar~~ $B + B^T$.

9) ~~Calcular~~ ~~Classificar~~ $A \cdot A^T$.

10) ~~Calcular~~ ~~Classificar~~ $A - A^T$.

11) ~~Calcular~~ ~~Classificar~~ $B - B^T$.

12) ~~Calcular~~ ~~Classificar~~ $C - C^T$.

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2\sqrt{6}}{5} \\ \frac{2\sqrt{6}}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ -9 & -12 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & -9 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- 13) Calcular AA^T e classificar a matriz A.
 14) Calcular BB^T e classificar a matriz B.
 15) Calcular CC^T e classificar a matriz C.

- 16) Calcular DD^T e classificar a matriz D.
 17) Calcular EE^T e classificar a matriz E.
 18) Calcular F^2 e classificar a matriz F.
 19) Calcular G^2 e classificar a matriz G.
 20) Calcular H^3 e classificar a matriz H.
 21) Calcular J^2 e classificar a matriz J.
 22) Calcular L^2 e classificar a matriz L.
 23) Calcular M^3 e classificar a matriz M.

Dadas as matrizes triangulares superiores (A e B) e inferiores (C e D):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

- 24) Calcular AB e classificar a matriz $AB = E$.
 25) Calcular CD e classificar a matriz $CD = F$.
 26) Dadas as matrizes diagonais:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

calcular AB e classificar esse produto.