CMB 122 - MatemÃ¡tica 1

30 de Junho de 2017

Questão 1 .... $\boxed{20}$

Simplifique as expressões abaixo:

(a) (10 points) $\dfrac{32^{\frac{-2}{5}} \cdot (16^{\frac{5}{4}}) \cdot 9^{\frac{3}{2}}}{81^{\frac{-3}{4}}((243^{-3})^{-2})^{\frac{1}{5}} \cdot 4^3}$

Solution:

$$\frac{32^{\frac{-2}{5}} \cdot (16^{\frac{5}{4}}) \cdot 9^{\frac{3}{2}}}{81^{\frac{-3}{4}}((243^{-3})^{-2})^{\frac{1}{5}} \cdot 4^3} = \frac{(2^5)^{\frac{-2}{5}} \cdot (2^4)^{\frac{5}{4}} \cdot (3^2)^{\frac{3}{2}}}{(3^4)^{\frac{-3}{4}} \cdot (((3^5)^{-3})^{-2})^{\frac{1}{5}} \cdot (2^2)^3}$$
$$= \frac{2^{-2} \cdot 2^5 \cdot 3^3}{3^{-3} \cdot 3^{\frac{30}{5}} \cdot 2^6} = \frac{2^{-2} \cdot 2^5 \cdot 3^3}{3^{-3} \cdot 3^6 \cdot 2^6} = \frac{2^3 \cdot 3^3}{2^6 \cdot 3^3} = 2^{-3}$$

(b) (10 points) $\ln \dfrac{ab^4}{c^2} + \ln \dfrac{4a}{b^2c^2} - \ln \dfrac{ab}{c^3\sqrt[3]{a^4}}$

Solution: Existem pelo menos 2 maneiras de resolver essa questão, que estão descritas abaixo:

$$\ln \frac{ab^4}{c^2} + \ln \frac{4a}{b^2c^2} - \ln \frac{ab}{c^3\sqrt[3]{a^4}} = \ln \frac{ab^4}{c^2} \cdot \frac{4a}{b^2c^2} - \ln \frac{ab}{c^3a^{\frac{4}{3}}} = \ln \frac{4a^2b^4}{b^2c^4} - \ln \frac{ab}{c^3a^{\frac{4}{3}}}$$
$$= \ln \frac{\frac{4a^2b^4}{b^2c^4}}{\frac{ab}{c^3a^{\frac{4}{3}}}} = \ln \frac{4a^2b^4}{b^2c^4}\frac{c^3a^{\frac{4}{3}}}{ab} = \ln \frac{4a^{\frac{7}{3}}b}{c}$$

$$\ln \frac{ab^4}{c^2} + \ln \frac{4a}{b^2c^2} - \ln \frac{ab}{c^3\sqrt[3]{a^4}} = \ln a + \ln b^4 - \ln c^2 + \ln 8 + \ln a - (\ln b + \ln c^2)$$
$$- [(\ln a + \ln b) - (\ln c + \ln a^{\frac{4}{3}})]$$
$$= \ln a + 4\ln b - 2\ln c + \ln 8 + \ln a - \ln b - 2\ln c$$
$$- \ln a - \ln b + \ln c + \frac{4}{3}\ln a$$
$$= \ln 4 + \frac{7}{3}\ln a + \ln b - \ln c$$

Questão 2 .... $\boxed{25}$

Em um silo de armazenamento, os grãos de cereais armazenados, com o tempo, começam a estragar, sendo que, a quantidade de grãos ainda em consumo começa a decair segundo um modelo exponencial. A tabela a seguir relaciona dois instantes e respectivas quantidades de grãos ainda em condições de consumo.

Tempo após estocagem (anos)	x	1	5
Qtdd aproveitável (ton)	y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{162}$

(a) (10 points) Obtenha a função exponencial que fornece a quantidade aproveitável de cereais como uma função do ano após a estocagem.

Solution: Seja a função exponencial $y = ca^x$. Assim, comas informações da tabela, temos as equações $ca = \frac{1}{2}$ e $ca^5 = \frac{1}{162}$.

$$\begin{cases} ca = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2a} ca^5 = \frac{1}{162} \Rightarrow c = \frac{1}{2a} \cdot a^5 = \frac{1}{162} \Rightarrow a^4 = \frac{2}{162} = \frac{1}{81} \Rightarrow a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Como $a = \frac{1}{3}$, então $c = \frac{1}{2a} = \frac{3}{2}$. Portanto, chegamos que $y = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

(b) (5 points) Qual a quantidade inicial de grãos armazenados?

Solution:

$$y(0) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{3}{2} \text{ ton}$$

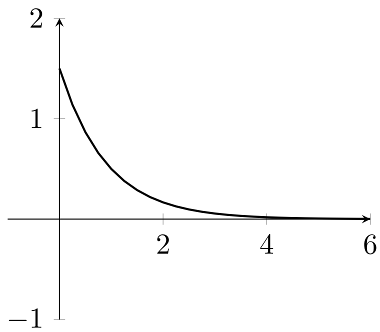
(c) (5 points) Escreva a expressão que determina a quantidade de grãos consumíveis após 7 anos.

Solution:

$$y(0) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^7$$

(d) (5 points) Esboce o gráfico da função obtida.

Solution:



Questão 3 15

Classifique em *Verdadeiro* ou *Falso*. Justifique suas respostas.

(a) (5 points) O valor inicial de $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$ é 0.

Solution: Falso pois $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$.

(b) (5 points) O gráfico de $f(x) = x^2 - x + 1$ não tem raiz.

Solution: Verdadeiro pois $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (1) = 1 - 4 = -3 < 0$. Como $\Delta < 0$, então f(x) não tem raiz real.

(c) (5 points) A função $f(x) = mx + b$ que passa em $f(1) = 2$ e $f(5) = 7$ possui vértice.

Solution: Falso pois somente funções quadráticas possuem vértice.

Questão 4 25

Para a função $f(x)$ cujo gráfico é dado, determine o valor dos limites, se ele existir, ou justifique por que não existem.

(a) (5 points) $\lim_{x\to 2} f(x)$

Solution: $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe pois o limite lateal $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$ é diferente do limite lateral $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$.

(b) (5 points) $f(2)$

Solution: $f(2) = 1$

(c) (5 points) $\lim_{x\to 0} f(x)$.

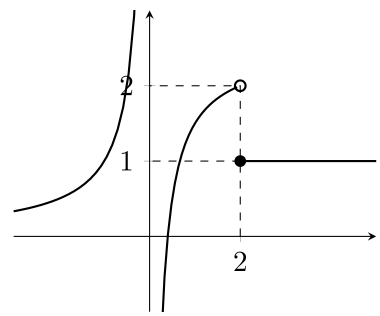
Solution: $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe pois o limite lateal $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ é diferente do limite lateral $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

(d) (5 points) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

Solution: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

(e) (5 points) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

Solution: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$.



Questão 5 15

Encontre $\cos\theta$ e $\tan\theta$ sabendo que $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ e $\tan\theta < 0$. *Dica: use* $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Solution: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + cos^2 = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \dfrac{5}{9} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{2}{3}$

Como temos $\sin\theta > 0$ e $\tan\theta < 0$, então o ângulo θ se localiza no 3º quadrante, que significa que $\cos\theta < 0$. Assim, chegamos que

$$\cos\theta = -\frac{2}{3}, \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$