Minimizadores de Lagrange

Exemplo 1: Determinar o pto da curva $y^2=4x$, no 1º quadrante, cuja distância até o ponto $Q(4,0)$ seja mínima.

$$d=\sqrt{(x-4)^2+y^2} \Rightarrow d^2=(x-4)^2+y^2$$

Seja $f(x,y)=(x-4)^2+y^2$

Problema: $\min f(x,y)=(x+4)^2+y^2$
s.a $y^2-4x=0$

$$L(x,y)=(x-4)^2+y^2-\lambda(y^2-4x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}= \begin{cases} 2(x-4)-\lambda(-4)=0 \\ 2x-8+4\lambda=0 \end{cases} \Rightarrow ① \; x+2\lambda-4=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}= 2y-\lambda(2y)=0 \Rightarrow ② \; y-\lambda y=0$$

$$y^2=4x \Rightarrow ③ \; y^2=4x$$

De ②: $y(1-\lambda)=0 \begin{cases} y=0 \Rightarrow \text{De ③, } x=0 \\ \lambda=1 \Rightarrow \text{De ①, } x+2-4=0 \end{cases}$

$x-2=0$

$\begin{cases} x=2 \\ y=2\sqrt{2} \end{cases}$

Ptos obtidos:

$P_1 \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ f=d^2=16 \end{cases}$ pto máximo

$P_2 \begin{cases} x=2 \\ y=2\sqrt{2} \\ f=d^2=4+8=12 \end{cases}$ pto mínimo

Logo, a solução do problema é $P_2(2, 2\sqrt{2})$.

Exemplo 2: Determinar o pto do plano

$$2x + y + 3z = 6$$

mais próximo da origem.

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Problema:

$$\min \; f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{s.a} \; g(x,y,z) = 2x + y + 3z - 6$$

$$L(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(2x + y + 3z - 6)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda(2) = 0 & \Rightarrow x = \lambda \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda = 0 & \Rightarrow y = \dfrac{\lambda}{2} \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z - 3\lambda = 0 & \Rightarrow z = \dfrac{3\lambda}{2} \\ 2x + y + 3z - 6 = 0 & \Rightarrow 2\lambda + \dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{9\lambda}{2} - 6 = 0 \end{cases}$$

$$7\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{7}$$

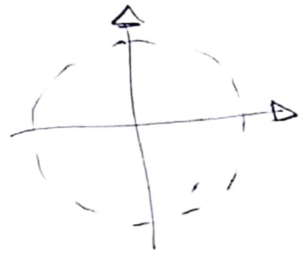
Scanned by CamScanner

$\therefore P^* = \left\{ x = \frac{6}{7}, \; y = \frac{3}{7}, \; z = \frac{9}{7} \right.$

Exemplo 3: A distribuição de temperatura na chapa circular $x^2 + y^2 \leq 1$ é

$$T(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 5y - 10$$

Encontrar as temperaturas máxima e mínima da chapa.



Teorema de Weierstrass:

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

resolver fronteira

$x^2 + y^2 = 1$

Prob: $\left| \begin{array}{l} \min \; T(x,y) \\ \text{s.a} \;\; x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$

$$L(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 5y - 10 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2 - \lambda(2x) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 5 - \lambda(2y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right.$$

resolver no interior

$x^2 + y^2 < 1$

Teste da 1ª derivada:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 2y + 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$$

O pto $(1, -5/2)$ é fora de $x^2 + y^2 < 1$, então não podemos considerar esse pto encontrado

Scanned by CamScanner

Continuando com minimizadores de Lagrange:

$$\begin{cases} 2x(1-\lambda) - 2 = 0 \\ 2y(1-\lambda) + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)\ 2x(1-\lambda) = 2 \\ (2)\ 2y(1-\lambda) = -5 \\ (3)\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

(1) : (2) $\quad \dfrac{2x(1-\lambda)}{2y(1-\lambda)} = \dfrac{2}{-5} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{-5} \Rightarrow 2y = -5x$

$y = -\dfrac{5x}{2}$

(3) $\quad x^2 + \dfrac{25x^2}{4} = 1 \Rightarrow \dfrac{29x^2}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = \dfrac{4}{29}$

$\Rightarrow x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{29}}$, $y = \dfrac{-5}{2}\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{29}}\right) = \mp\dfrac{5}{\sqrt{29}}$

$P_1 \begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{29}} \\ y = -\dfrac{5}{\sqrt{29}} \end{cases} \qquad P_2 \begin{cases} x = -\dfrac{2}{\sqrt{29}} \\ y = \dfrac{5}{\sqrt{29}} \end{cases}$

$T_1 = \dfrac{4}{29} + \dfrac{25}{29} - \dfrac{4}{\sqrt{29}} - \dfrac{25}{\sqrt{29}} - 10$

$= 1 - \dfrac{29}{\sqrt{29}} - 10 = -9 - \sqrt{29}$

$T_2 = \dfrac{4}{29} + \dfrac{25}{29} + \dfrac{4}{\sqrt{29}} + \dfrac{25}{\sqrt{29}} - 10$

$T_2 = 1 + \dfrac{29}{\sqrt{29}} - 10$

$T_2 = -9 + \sqrt{29}$