$$\det C = -1\,(4 + 3) - 1\,(3 + 2) - 2\,(9 - 8) = -1\,(7) - 1\,(5) - 2\,(1)$$

$$\det C = -7 - 5 - 2 = -14$$

$$\det D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = +(-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (-2) \times \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det D = -1\,(1 - 2) - 0\,(3 + 2) - 2\,(-6 - 2) = -1\,(-1) - 0\,(5) - 2\,(-8)$$

$$\det D = 1 - 0 + 16 = 17$$

$$\det E = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det E = -1\,(3 + 8) - 0\,(9 - 8) + 1\,(-6 - 2)$$

$$\det E = -1\,(11) - 0\,(1) + 1\,(-8) = -11 - 0 - 8 = -19$$

Substituindo det B, det C, det D e det E em (a), vem:

$$\det A = -2\,(-21) + 3\,(-14) - 1\,(17) + 2\,(-19) = 42 - 42 - 17 - 38$$

$$\det A = -55$$

Observação

O cálculo desse determinante já foi feito no problema 3 pelo processo de triangulação e, como era de esperar, o resultado foi o mesmo. Os principais motivos pelos quais o mesmo determinante foi calculado novamente, por outro processo, são os seguintes:

a) mostrar que um determinante de ordem $n \geqslant 3$ pode ser calculado desenvolvendo-o por uma linha (coluna) e como fazê-lo;

b) chamar a atenção para o número de determinantes de ordem $n = 2$ que se deve calcular quando se faz o cálculo de um determinante de ordem $n \geqslant 3$ pelo processo de desenvolvê-lo por uma linha (coluna). Assim:

- o cálculo de um determinante de ordem 3 implica calcular 3 determinantes de ordem 2;
- o cálculo de um determinante de ordem 4 implica calcular $4 \times 3 = 12$ determinantes de ordem 2;
- o cálculo de um determinante de ordem 5 implica calcular $5 \times 4 \times 3 = 60$ determinantes de ordem 2;
- o cálculo de um determinante de ordem 6 implica calcular $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 36$ determinantes de ordem 2 etc.

c) Alertar para o fato de que quando $n \geqslant 4$, é muito natural que enganos sejam cometidos e que, portanto, o cálculo feito não corresponda ao valor do determinante. Por essa razão (e mesmo que o processo de triangulação seja menos trabalhoso), atualmente se calcula um determinante por computador, por meio de um PROGRAMA adequado previamente elaborado.

A.29.1 Problemas Propostos

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & -9 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 12 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

calcular, pelo processo de triangulação ou pelo desenvolvimento de uma linha (ou coluna):

1) det A

2) det B

3) det C

4) det (A + B)

5) det (A – B)

6) det (2A – 3B + 4C)

7) det (BC)

8) det (AC^T)

9) det (CB) A

10) det C(BA)

11) Verificar se det (A + B) = det A + det B

12) Verificar se det (BC) = det B × det C

Dada a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

13) Calcular det A pelo processo de triangulação

14) Calcular det A desenvolvendo-o pela 2ª linha

Nos problemas 15 a 22, resolver as equações:

15) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & x \\ 5 & 2 & -x \\ 7 & 4 & 2x \end{vmatrix} = -128$

16) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2x & x & 3x \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 39$

17) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3x & 0 & 1 \\ 7x & 2 & 1 \end{vmatrix} = 100$

18) $\begin{vmatrix} x+3 & x+1 & x+4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 9 & 10 & 7 \end{vmatrix} = -7$

19) $\begin{vmatrix} 12-x & 1 & 1 \\ 18-2x & 3 & 2 \\ 15-2x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10$

20) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 1 & 1 & x-2 \\ 2 & 1 & x-4 \end{vmatrix} = 0$

21) $\begin{vmatrix} 2 & x & 2 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -3$

22) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 4 & x & 2 \\ 2x & 8 & 4 \end{vmatrix} = 0$

ou:

$$XXC = XBC$$

b) Pré-multiplicando ambos os membros da equação por X^{-1}, vem:

$X^{-1}XXC = X^{-1}XBC$

$X^{-1}X = I$

$IXC = IBC$

$IX = X$

$IB = B$

$XC = BC$

c) Pós-multiplicando ambos os membros da equação por C^{-1}, vem:

$XCC^{-1} = BCC^{-1}$

$CC^{-1} = I$

$XI = BI$

$XI = X$

$BI = B$

$X = B.$

A.37.1 Problemas Propostos

Nos problemas de 1 a 3, transformar na matriz unidade as matrizes dadas.

1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

2) $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

3) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Nos problemas de 4 a 20, calcular a matriz inversa de cada uma das matrizes dadas.

4) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

5) $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

6) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

7) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

8) $E = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -10 \\ -2 & -4 & -4 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

9) $F = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & -3 \\ -6 & -9 & -24 \end{bmatrix}$

10) $G = \begin{bmatrix} -1 & 10 & -7 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

11) $H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

12) $J = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

13) $L = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

14)

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

15)

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

16)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

17)

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -4 \\ -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

18)

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

19)

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

20)

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

21) Calcular o valor de K para que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & k \end{bmatrix}$$

não tenha inversa.

Nos problemas de 22 a 26, supondo as matrizes A, B, C e D quadradas, de mesma ordem e inversíveis, resolver as equações matriciais nas quais X é a variável.

22) $ADX = ABC$

23) $DX^T = DC$

24) $ABCX^2D^2 = ABCXD$

25) $D^{-1}XD = AC$

26) $CX + 2B = 3B$