2.8 Problemas Propostos

1) Determinar a extremidade do segmento que representa o vetor $\vec{v} = (2, -5)$, sabendo que sua origem é o ponto $A(-1, 3)$.

2) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-1, 2)$, determinar o vetor $\vec{w}$ tal que

   a) $4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{w}$

   b) $3\vec{w} - (2\vec{v} - \vec{u}) = 2(4\vec{w} - 3\vec{u})$

3) Dados os pontos $A(-1, 3)$, $B(2, 5)$ e $C(3, -1)$, calcular $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$ e $3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB}$.

4) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -4)$ e $\vec{v} = (-\frac{9}{4}, 3)$, verificar se existem números a e b tais que $\vec{u} = a\vec{v}$ e $\vec{v} = b\vec{u}$.

5) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (-5, 1)$ e $\vec{w} = (-12, 6)$, determinar k_1 e k_2 tal que $\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$.

6) Dados os pontos $A(-1, 3)$, $B(1, 0)$, $C(2, -1)$, determinar D tal que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$.

7) Dados os pontos $A(2, -3, 1)$ e $B(4, 5, -2)$, determinar o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$.

8) Dados os pontos $A(-1, 2, 3)$ e $B(4, -2, 0)$, determinar o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$.

9) Determinar o vetor $\vec{v}$ sabendo que $(3, 7, 1) + 2\vec{v} = (6, 10, 4) - \vec{v}$.

10) Encontrar os números a_1 e a_2 tais que $\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 0, -4)$ e $\vec{w} = (-4, -4, 14)$.

11) Determinar a e b de modo que os vetores $\vec{u} = (4, 1, -3)$ e $\vec{v} = (6, a, b)$ sejam paralelos.

12) Verificar se são colineares os pontos:

    a) $A(-1, -5, 0)$, $B(2, 1, 3)$ e $C(-2, -7, -1)$

    b) $A(2, 1, -1)$, $B(3, -1, 0)$ e $C(1, 0, 4)$

13) Calcular a e b de modo que sejam colineares os pontos $A(3, 1, -2)$, $B(1, 5, 1)$ e $C(a, b, 7)$.

14) Mostrar que os pontos A(4, 0, 1), B(5, 1, 3), C(3, 2, 5) e D(2, 1, 3) são vértices de um paralelogramo.

15) Determinar o simétrico do ponto P(3, 1, -2) em relação ao ponto A(-1, 0, -3).

2.8.1 Respostas dos Problemas Propostos

1) (1, -2)

2) *a*) $\vec{w} = (-\frac{15}{2}, \frac{15}{2})$; *b*) $\vec{w} = (\frac{23}{5}, -\frac{11}{5})$

3) (-4, 1), (2, 5), (-5, -30)

4) $a = -\frac{4}{3}$, $b = -\frac{3}{4}$

5) $k_1 = -1$ e $k_2 = 2$

6) D(4, -4)

7) $P(3, 1, -\frac{1}{2})$

8) (14, -10, -6)

9) $\vec{v} = (1, 1, 1)$

10) $a_1 = 2$, $a_2 = -3$

11) $a = \frac{3}{2}$ $b = -\frac{9}{2}$

12) *a*) sim *b*) não

13) $a = -3$ $b = 13$

15) (-5, -1, -4)

$\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = -1\vec{u} + 27\vec{v} = -(3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}) + 27(2\vec{i} - \vec{j})$

$\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} + 54\vec{i} - 27\vec{j} = 51\vec{i} - 25\vec{j} + 6\vec{k}$

Comparando $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ e $\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v})$, verifica-se que:

$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v})$.

3.16 Problemas Propostos

1) Dados os vetores $\vec{u} = (1, a, -2a - 1)$, $\vec{v} = (a, a - 1, 1)$ e $\vec{w} = (a, -1, 1)$, determinar *a* de modo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

2) Dados os pontos $A(-1, 0, 2)$, $B(-4, 1, 1)$ e $C(0, 1, 3)$, determinar o vetor $\vec{x}$ tal que $2\vec{x} - \overrightarrow{AB} = \vec{x} + (\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB})\overrightarrow{AC}$.

3) Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que

$$(3, 7, 1) + 2\vec{v} = (6, 10, 4) - \vec{v}.$$

4) Dados os pontos $A(1, 2, 3)$, $B(-6, -2, 3)$ e $C(1, 2, 1)$, determinar o versor do vetor $3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$.

5) Verificar se são unitários os seguintes vetores:

$$\vec{u} = (1, 1, 1) \quad e \quad \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

6) Determinar o valor de *n* para que o vetor $\vec{v} = (n, \frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ seja unitário.

7) Seja o vetor $\vec{v} = (m + 7)\vec{i} + (m + 2)\vec{j} + 5\vec{k}$. Calcular *m* para que $|\vec{v}| = \sqrt{38}$.

8) Dados os pontos $A(1, 0, -1)$, $B(4, 2, 1)$ e $C(1, 2, 0)$, determinar o valor de *m* para que $|\vec{v}| = 7$, sendo $\vec{v} = m\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

9) Dados os pontos $A(3, m - 1, -4)$ e $B(8, 2m - 1, m)$, determinar *m* de modo que $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{35}$.

10) Calcular o perímetro do triângulo de vértices $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 0, -1)$ e $C(2, -1, 0)$.

11) Obter um ponto P do eixo das abscissas eqüidistante dos pontos A(2, -3, 1) e B(-2, 1, -1).

12) Seja o triângulo de vértices A(-1, -2, 4), B(-4, -2, 0) e C(3, -2, 1). Determinar o ângulo interno ao vértice B.

13) Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo eqüilátero cujo lado mede 10 cm. Calcular o produto escalar dos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$.

14) Os lados de um triângulo retângulo ABC (reto em A) medem 5, 12 e 13. Calcular $\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BA} \cdot \vec{BC} + \vec{CA} \cdot \vec{CB}$.

15) Determinar os ângulos do triângulo de vértices A(2, 1, 3), B(1, 0, -1) e C(-1, 2, 1).

16) Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, m+2)$ é $\frac{\pi}{3}$, determinar m.

17) Calcular n para que seja de 30° o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, n, 2)$ e $\vec{j}$.

18) Dados os vetores $\vec{a} = (2, 1, \alpha)$, $\vec{b} = (\alpha + 2, -5, 2)$ e $\vec{c} = (2\alpha, 8, \alpha)$, determinar o valor de α para que o vetor $\vec{a} + \vec{b}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{c} - \vec{a}$.

19) Determinar o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u} = (1, -1, 2)$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = -18$.

20) Determinar o vetor $\vec{v}$ ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2, -3, -12)$ e colinear ao vetor $\vec{w} = (-6, 4, -2)$.

21) Determinar o vetor $\vec{v}$, colinear ao vetor $\vec{u} = (-4, 2, 6)$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{w} = -12$, sendo $\vec{w} = (-1, 4, 2)$.

22) Provar que os pontos A(5, 1, 5), B(4, 3, 2) e C(-3, -2, 1) são vértices de um triângulo retângulo.

23) Qual o valor de α para que os vetores $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$ e $\vec{b} = (\alpha + 1)\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ sejam ortogonais?

24) Verificar se existe ângulo reto no triângulo ABC, sendo A(2, 1, 3), B(3, 3, 5) e C(0, 4, 1).

25) Os ângulos diretores de um vetor podem ser de 45°, 60° e 90°? Justificar.

26) Os ângulos diretores de um vetor são 45°, 60° e γ. Determinar γ.

27) Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = 5$, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Oz, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6$ e $\vec{w} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

28) Sabe-se que $|\vec{v}| = 2$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ e $\cos\beta = -\frac{1}{4}$. Determinar $\vec{v}$.

29) Determinar um vetor unitário ortogonal ao vetor $\vec{v} = (2, -1, 1)$.

30) Determinar um vetor de módulo 5 paralelo ao vetor $\vec{v} = (1, -1, 2)$.

31) O vetor $\vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, -1, 3)$ e $\vec{w} = (1, 0, -2)$ e forma ângulo agudo com o vetor $\vec{j}$. Calcular $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = 3\sqrt{6}$

32) Determinar o vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo Oz, que satisfaz as condições $\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 10$ e $\vec{v} \cdot \vec{v}_2 = -5$, sendo $\vec{v}_1 = (2, 3, -1)$ e $\vec{v}_2 = (1, -1, 2)$.

33) Determinar o vetor projeção do vetor $\vec{u} = (1, 2, -3)$ na direção de $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

34) Qual o comprimento do vetor projeção de $\vec{u} = (3, 5, 2)$ sobre o eixo dos x?

35) Se o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem co-senos diretores p, q e r e ângulos diretores α, β e γ, quais são os co-senos e os ângulos diretores de $\overrightarrow{BA}$?

36) Mostrar que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores, tal que $\vec{u} + \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u} - \vec{v}$, então $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

37) Mostrar que, se $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$, $\vec{u}$ é também ortogonal a $\vec{v} + \vec{w}$.

38) Calcular o módulo dos vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$, sabendo que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60°.

39) Sabendo que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam um ângulo de $\frac{3\pi}{4}$ rad, determinar $|(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})|$.

40) Determinar $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$, sabendo que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $|\vec{w}| = \sqrt{5}$.

41) O vetor $\vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{a} = (1, 2, 0)$ e $\vec{b} = (1, 4, 3)$ e forma ângulo agudo com o eixo dos x. Determinar $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = 14$.

42) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (-1, 2, 2)$, calcular:

a) $\vec{w} \times \vec{v}$

b) $\vec{v} \times (\vec{w} - \vec{u})$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$

d) $(2\vec{u}) \times (3\vec{v})$

e) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

f) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ e $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

g) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ e $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

h) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$

43) Dados os vetores $\vec{a} = (1, 2, 1)$ e $\vec{b} = (2, 1, 0)$, calcular:

a) $2\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b})$

b) $(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})$

44) Dados os pontos $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$ e $C(3, 2, 1)$, determinar o vetor $\overrightarrow{CB} \times (\overrightarrow{BC} - 2\,\overrightarrow{CA})$.

45) Determinar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $2\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{b} - \vec{a}$, sendo $\vec{a} = (3, -1, -2)$ e $\vec{b} = (1, 0, -3)$.

46) Dados os vetores $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (3, 4, -2)$ e $\vec{c} = (-5, 1, -4)$, mostrar que $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

47) Determinar o valor de m para que o vetor $\vec{w} = (1, 2, m)$ seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{v}_1 = (2, -1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (1, -3, -1)$.

48) Dados os vetores $\vec{v} = (a, 5b, -\frac{c}{2})$ e $\vec{w} = (-3a, x, y)$, determinar x e y para que $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$.

49) Determinar um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (2, -1, 3)$. Nas mesmas condições, determinar um vetor de módulo 5.

50) Mostrar num gráfico um representante de cada um dos seguintes vetores:

a) $\vec{j} \times 2\vec{i}$

b) $3\vec{i} \times 2\vec{k}$

51) Sabendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ e 45° é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, calcular $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

52) Se $|\vec{u} \times \vec{v}| = 3\sqrt{3}$, $|\vec{u}| = 3$ e 60° é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, determinar $|\vec{v}|$.

53) Dados os vetores $\vec{a} = (3, 4, 2)$ e $\vec{b} = (2, 1, 1)$, obter um vetor de módulo 3 que seja ao mesmo tempo ortogonal aos vetores $2\vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{a} + \vec{b}$.

54) Calcular a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u} = (3; 1, 2)$ e $\vec{v} = (4, -1, 0)$.

55) Mostrar que o quadrilátero cujos vértices são os pontos A(1, -2, 3), B(4, 3, -1), C(5, 7, -3) e D(2, 2, 1) é um paralelogramo e calcular sua área.

56) Calcular a área do paralelogramo cujos lados são determinados pelos vetores $2\vec{u}$ e $-\vec{v}$, sendo $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (1, -3, 2)$.

57) Calcular a área do triângulo de vértices

a) A(-1, 0, 2), B(-4, 1, 1) e C(0, 1, 3)

b) A(1, 0, 1), B(4, 2, 1) e C(1, 2, 0)

c) A(2, 3, -1), B(3, 1, -2) e C(-1, 0, 2)

d) A(-1, 2, -2), B(2, 3, -1) e C(0, 1, 1)

58) Calcular a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto A(3, 2, 1) e uma diagonal de extremidades B(1, 1, -1) e C(0, 1, 2).

59) Calcular x, sabendo que A(x, 1, 1), B(1, -1, 0) e C(2, 1, -1) são vértices de um triângulo de área $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

60) Dado o triângulo de vértices A(0, 1, -1), B(-2, 0, 1) e C(1, -2, 0), calcular a medida da altura relativa ao lado BC.

61) Determinar $\vec{v}$ tal que $\vec{v}$ seja ortogonal ao eixo dos y e $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$, sendo $\vec{u} = (1, 1, -1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 1)$.

62) Dados os vetores $\vec{u} = (0, 1, -1)$, $\vec{v} = (2, -2, -2)$ e $\vec{w} = (1, -1, 2)$, determinar o vetor $\vec{x}$, paralelo a $\vec{w}$, que satisfaz à condição: $\vec{x} \times \vec{u} = \vec{v}$.