

Aplicando esse teorema uma segunda vez, temos

$$\begin{aligned} D_u^2 f &= D_u(D_u f) = \frac{\partial}{\partial x}(D_u f)h + \frac{\partial}{\partial y}(D_u f)k \\ &= (f_{xx}h + f_{yx}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k \\ &= f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 \end{aligned}$$

(pelo Teorema de Clairaut)

Se completarmos os quadrados na expressão, obteremos

$$D_u^2 f = f_{xx} \left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}} k \right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}} (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)$$

Foi-nos dado que $f_{xx}(a, b) > 0$ e $D(a, b) > 0$. Mas f_{xx} e $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ são funções contínuas, portanto há uma bola aberta B com centro (a, b) e raio $\delta > 0$ tal que $f_{xx}(x, y) > 0$ e $D(x, y) > 0$ sempre que (x, y) está em B . Logo, ao olhar na Equação 10, vemos que $D_u^2 f(x, y) > 0$ sempre que (x, y) pertencer a B . Isso significa que se C é a curva obtida pela intersecção do gráfico de f com o plano vertical que passa por $P(a, b, f(a, b))$ na direção de \mathbf{u} , então C é côncava para cima no intervalo do comprimento 2δ . Isso é verdadeiro na direção de cada vetor \mathbf{u} , portanto se restringirmos (x, y) para ficar em B , o gráfico de f fica acima de seu plano horizontal tangente em P . Assim, $f(x, y) \geq f(a, b)$ sempre que (x, y) estiver em B . Isso mostra que $f(a, b)$ é um mínimo local.

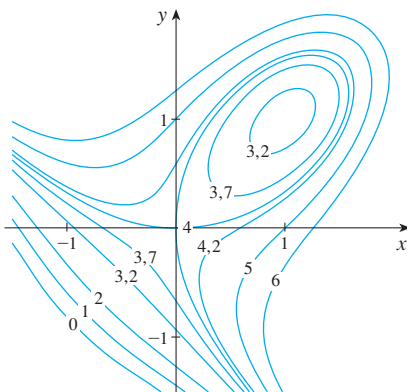
14.7 Exercícios

- Suponha que $(1, 1)$ seja um ponto crítico de uma função f com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre f ?
 - $f_{xx}(1, 1) = 4$, $f_{xy}(1, 1) = 1$, $f_{yy}(1, 1) = 2$
 - $f_{xx}(1, 1) = 4$, $f_{xy}(1, 1) = 3$, $f_{yy}(1, 1) = 2$

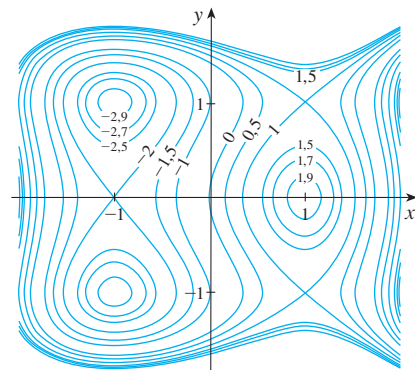
- Suponha que $(0, 2)$ seja um ponto crítico de uma função g com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre g ?
 - $g_{xx}(0, 2) = -1$, $g_{xy}(0, 2) = 6$, $g_{yy}(0, 2) = 1$
 - $g_{xx}(0, 2) = -1$, $g_{xy}(0, 2) = 2$, $g_{yy}(0, 2) = -8$
 - $g_{xx}(0, 2) = 4$, $g_{xy}(0, 2) = 6$, $g_{yy}(0, 2) = 9$

3–4 Utilize as curvas de nível da figura para prever a localização dos pontos críticos de f e se f tem um ponto de sela ou um máximo ou mínimo local em cada um desses pontos. Explique seu raciocínio. Em seguida, empregue o Teste da Segunda Derivada para confirmar suas predições.

- $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



- $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



5–18 Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Se você tiver um programa de computador para desenhar em três dimensões, trace o gráfico da função usando um ponto de vista e domínio convenientes para mostrar os aspectos importantes da função.

- $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$
- $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$
- $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$
- $f(x, y) = xe^{-2x^2 - 2y^2}$
- $f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$
- $f(x, y) = xy(1 - x - y)$
- $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

12. $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

13. $f(x, y) = e^x \cos y$

14. $f(x, y) = y \cos x$

15. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{y^2 - x^2}$


16. $f(x, y) = e^{y(y^2 - x^2)}$

17. $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x, \quad -1 \leq x \leq 7$

18. $f(x, y) = \sin x \sin y, \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi$

19. Mostre que $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$ em um número infinito de pontos críticos e que $D = 0$ em cada um. A seguir, mostre que f tem um mínimo local (e absoluto) em cada ponto crítico.

20. Mostre que $f(x, y) = x^2 y e^{-x^2 - y^2}$ tem valores máximos em $(\pm 1, 1/\sqrt{2})$ e valores mínimos em $(\pm 1, -1/\sqrt{2})$. Mostre também que f tem infinitos outros pontos críticos e que $D = 0$ em cada um deles. Quais deles dão origem a valores máximos? E a valores mínimos? E a pontos de sela?


 21–24 Utilize um gráfico e/ou curvas de nível para estimar os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Em seguida, use o cálculo para determinar esses valores de modo preciso.

21. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^{-2}y^{-2}$

22. $f(x, y) = xye^{-x^2 - y^2}$

23. $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y),$
 $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$

24. $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y),$
 $0 \leq x \leq \pi/4, 0 \leq y \leq \pi/4$

 25–28 Utilize uma ferramenta gráfica como no Exemplo 4 (ou o Método de Newton ou um determinador de raízes) para encontrar os pontos críticos de f com precisão de três casas decimais. Em seguida, classifique o ponto crítico e determine o valor mais alto e o mais baixo do gráfico, se houver.

25. $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4x^2y + 2y$

26. $f(x, y) = y^6 - 2y^4 + x^2 - y^2 + y$

27. $f(x, y) = x^4 + y^3 - 3x^2 + y^2 + x - 2y + 1$

28. $f(x, y) = 20e^{-x^2 - y^2} \sin 3x \cos 3y, \quad |x| \leq 1, |y| \leq 1$

29–36 Determine os valores máximo e mínimo absolutos de f no conjunto D .

29. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x, \quad D$ é a região triangular fechada com vértices $(2, 0), (0, 2)$ e $(0, -2)$

30. $f(x, y) = x + y - xy, \quad D$ é a região triangular fechada com vértices $(0, 0), (0, 2)$ e $(4, 0)$

31. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4,$
 $D = \{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$


32. $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2,$
 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 5\}$

33. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2,$
 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$

34. $f(x, y) = xy^2, \quad D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$


35. $f(x, y) = 2x^3 + y^4, \quad D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$

36. $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y, \quad D$ é o quadrilátero cujos vértices são $(-2, 3), (2, 3), (2, 2)$ e $(-2, -2)$.

 37. Para as funções de uma variável, é impossível uma função contínua ter dois pontos de máximo local e nenhum de mínimo local. Para as funções de duas variáveis, esse caso existe. Mostre que a função

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

só tem dois pontos críticos, ambos de máximo local. Em seguida, utilize um computador com uma escolha conveniente de domínio e ponto de vista para ver como isso é possível.

 38. Se uma função de uma variável é contínua em um intervalo e tem um único ponto crítico, então um máximo local tem de ser um máximo absoluto. Mas isso não é verdadeiro para as funções de duas variáveis. Mostre que a função

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$

tem exatamente um ponto crítico, onde f tem um máximo local, porém este não é um máximo absoluto. Em seguida, utilize um computador com uma escolha conveniente de domínio e ponto de vista para ver como isso é possível.

39. Determine a menor distância entre o ponto $(2, 0, -3)$ e o plano $x + y + z = 1$.

40. Determine o ponto do plano $x - 2y + 3z = 6$ que está mais próximo do ponto $(0, 1, 1)$.

41. Determine os pontos do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que estão mais próximos do ponto $(4, 2, 0)$.

42. Determine os pontos da superfície $y^2 = 9 + xz$ que estão mais próximos da origem.

43. Determine três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

44. Encontre três números positivos cuja soma é 12 e cuja soma dos quadrados é a menor possível.

45. Encontre o volume máximo de uma caixa retangular que está inscrita em uma esfera de raio r .

46. Encontre as dimensões de uma caixa com volume de 1.000 cm^3 que tenha a área de sua superfície mínima.

47. Determine o volume da maior caixa retangular no primeiro octante com três faces nos planos coordenados e com um vértice no plano $x + 2y + 3z = 6$.

48. Determine as dimensões da caixa retangular de maior volume se a área total de sua superfície é dada por 64 cm^2 .

49. Determine as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo tal que a soma dos comprimentos de suas 12 arestas seja uma constante c .

50. A base de um aquário com volume V é feita de ardósia e os lados são de vidro. Se o preço da ardósia (por unidade de área) equivale a cinco vezes o preço do vidro, determine as dimensões do aquário para minimizar o custo do material.