

isto é:

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x = -\frac{3}{2}$$

que são duas retas paralelas.

2) A equação

$$y^2 = 0 \quad (\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1)$$

representa uma reta, no caso, o eixo dos x , isto é, $y = 0$.

3) A equação

$$3x^2 = -5 \quad (\lambda_1 = 3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 0)$$

representa o conjunto vazio.

As cônicas (elipse, hipérbole e parábola) e suas degenerações (um par de retas, uma só reta e um ponto) constituem as possíveis interseções de uma superfície cônica com um plano.

7.5 PROBLEMAS PROPOSTOS

1) Identificar as seguintes cônicas:

a) $x^2 + y^2 = 1$

h) $x^2 + y^2 = 0$

p) $x^2 - 4 = -y^2$

b) $x^2 - y^2 = 1$

i) $x^2 + y^2 + 1 = 0$

q) $y - 3x^2 = 0$

c) $x^2 - y^2 = 0$

j) $x^2 - 1 = 0$

r) $3x^2 - 4y^2 = 1$

d) $x^2 - y = 1$

l) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

s) $2x^2 + 3y^2 = 6$

e) $x^2 - y = 0$

m) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

f) $x - y^2 = 0$

n) $4y^2 - x^2 = 8$

g) $x + y = 1$

o) $5y^2 - 3x = 0$

2) Mostrar que as seguintes equações representam duas retas no plano:

a) $4x^2 - y^2 = 0$

b) $x^2 - 16y^2 = 0$

c) $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$

Nos problemas 3 a 15, determinar a equação reduzida referida ao sistema $XO'Y'$ e o gênero da cônica representada pela equação dada a seguir. Esboçar o gráfico.

3) $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 10x + 20y + 5 = 0$

4) $7x^2 + y^2 - 8xy - 17\sqrt{5}x + 11\sqrt{5}y + 41 = 0$

5) $4x^2 + y^2 + 4xy + 5\sqrt{5}x + 10\sqrt{5}y + 5 = 0$

6) $x^2 + y^2 + xy + 5\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y + 1 = 0$

7) $4x^2 + 6xy - 4y^2 + 20x - 20y - 19 = 0$

8) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 15x - 20y + 50 = 0$

9) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y - 1 = 0$

10) $xy + 4\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y + 30 = 0$

11) $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 4x = 0$

12) $x^2 + y^2 + 2xy - 4\sqrt{2}x = 0$

13) $16x^2 + 9y^2 - 96x + 72y + 144 = 0$

14) $4x^2 - 5y^2 + 8x + 30y - 21 = 0$

15) $x^2 - 6x + 8y + 1 = 0$

Nos problemas 16 a 24, efetuar uma rotação nos eixos coordenados a fim de eliminar o termo em xy . Identificar a cônica e escrever sua equação no sistema $x'Oy'$ obtido após a rotação. Esboçar o gráfico.

16) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4 = 0$

17) $2x^2 + y^2 + 2\sqrt{6}xy = 16$

18) $2x^2 + 4xy + 2y^2 - 16 = 0$

19) $7x^2 - 8xy + y^2 + 36 = 0$

20) $xy = 2$

21) $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 12 = 0$

22) $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy - 16 = 0$

23) $x^2 + y^2 + 4xy - 3 = 0$

24) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4 = 0$

As equações dos problemas 25 a 35 representam cônicas degeneradas. Identificá-las e esboçar o gráfico, quando possível.

25) $x^2 - y^2 - 2x - 2y = 0$

26) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$

27) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$

28) $2x^2 + 2\sqrt{2}xy + y^2 = 12$

29) $x^2 + y^2 + 2xy - 8 = 0$

30) $x^2 + y^2 + 2xy = 0$

31) $x^2 + y^2 + 2xy + 5 = 0$

32) $x^2 + y^2 + 4xy = 0$

33) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4 = 0$

34) $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 0$

35) $x^2 + y^2 + 2xy + 4 = 0$

7.5.1 Respostas de Problemas Propostos

1. a) Circunferência.
b) Hipérbole.
c) Duas retas: $y = x$ e $y = -x$.
d) Parábola.
e) Parábola.
f) Parábola.
g) Reta.
h) O ponto $(0, 0)$.
i) O conjunto vazio.
2. a) $y = 2x$ e $y = -2x$
b) $y = \frac{1}{4}x$ e $y = -\frac{1}{4}x$
c) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 3) $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{1} = 1$, elipse
- 4) $\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{9} = 1$, hipérbole
- 5) $Y^2 = 3X$, parábola
- 6) $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{27} = 1$, elipse
7. $Y^2 - X^2 = 1$, hipérbole
8. $X^2 = Y$, parábola
- 9) $\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{6} = 1$, elipse
- 10) $\frac{X^2}{36} - \frac{Y^2}{36} = 1$, hipérbole
- 11) $Y^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}X$, parábola
- j) Duas retas: $x = 1$ e $x = -1$.
l) Elipse.
m) Reta.
n) Hipérbole.
o) Parábola.
p) Circunferência.
q) Parábola.
r) Hipérbole.
s) Elipse.
- 12) $Y^2 = 4X$, parábola
- 13) $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{16} = 1$, elipse
- 14) $\frac{Y^2}{4} - \frac{X^2}{5} = 1$, hipérbole
- 15) $X^2 = -8Y$, parábola
- 16) $x'^2 + \frac{y'^2}{2} = 1$, elipse
- 17) $4x'^2 - y'^2 = 16$, hipérbole
- 18) $y' = 2$ ou $y' = -2$, duas retas
- 19) $\frac{y'^2}{36} - \frac{x'^2}{4} = 1$, hipérbole
- 20) $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{4} = 1$, hipérbole
- 21) $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{6} = 1$, elipse
- 22) $x'^2 + 4y'^2 - 4 = 0$, elipse
- 23) $3x'^2 - y'^2 = 3$, hipérbole

24) $x'^2 + \frac{y'^2}{2} = 1$, elipse

30) A reta $y' = 0$.

25) Duas retas: $y = \pm(x - 1) - 1$.

31) Vazio.

26) Nenhum ponto do plano.

32) Duas retas concorrentes:
 $y' = \sqrt{3}x'$ e $y' = -\sqrt{3}x'$.

27) O ponto $(3, -2)$.

33) Vazio.

28) Duas retas paralelas: $x' = \pm 2$.

34) O ponto $(0, 0)$.

29) Par de retas paralelas: $y' = \pm 2$.

35) Vazio.

7.6 FORMA QUADRÁTICA NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

A matriz simétrica real

$$A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

associa ao vetor $v_S = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, referido à base canônica $S = \{e_1, e_2, e_3\}$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, o polinômio

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

que é um polinômio homogêneo do 2º grau em x , y e z chamado *forma quadrática do espaço tridimensional*.

Na forma matricial esse polinômio é representado por:

$$v_S^t A v_S = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

sendo a matriz simétrica A a matriz da forma quadrática.