Observe que, pela Equação 8, se o trabalho e o capital são ambos aumentados por um fator m, temos

$$P(mL, mK) = b(mL)^\alpha(mK)^\beta = m^{\alpha+\beta}bL^\alpha K^\beta = m^{\alpha+\beta}P(L, K)$$

Se $\alpha + \beta = 1$, então $P(mL, mK) = mP(L, K)$, o que significa que a produção também é aumentada pelo fator m. Essa é a razão pela qual Cobb e Douglas supuseram que $\alpha + \beta = 1$ e, portanto,

$$P(L, K) = bL^\alpha K^{1-\alpha}$$

Essa é a função de produção de Cobb-Douglas, discutida na Seção 14.1.

14.3 EXERCÍCIOS

1. A temperatura T de uma localidade do Hemisfério Norte depende da longitude x, da latitude y e do tempo t, de modo que podemos escrever $T = f(x, y, t)$. Vamos medir o tempo em horas a partir do início de janeiro.

(a) Qual é o significado das derivadas parciais $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ e $\partial T/\partial t$?

(b) Honolulu tem longitude de 158° W e latitude de 21° N. Suponha que às 9 horas em 1º de janeiro esteja ventando para noroeste uma brisa quente, de forma que a oeste e a sul o ar esteja quente e a norte e leste o ar esteja mais frio. Você esperaria que $f_x(158, 21, 9)$, $f_y(158, 21, 9)$ e $f_t(158, 21, 9)$ fossem positivas ou negativas? Explique.

2. No começo desta seção discutimos a função $I = f(T, H)$, onde I era o humidex; T, a temperatura; e H, a umidade relativa. Utilize a Tabela 1 para estimar $f_T(34, 75)$ e $f_H(34, 75)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

3. O índice de sensação térmica W é a temperatura sentida quando a temperatura real é T e a velocidade do vento, v. Portanto, podemos escrever $W = f(T, v)$. A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1.

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C) T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

(a) Estime os valores de $f_T(-15, 30)$ e $f_v(-15, 30)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

(b) Em geral, o que se pode dizer sobre o sinal de $\partial W/\partial T$ e $\partial W/\partial v$?

(c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{v \to \infty} \frac{\partial W}{\partial v}$$

4. A altura h das ondas em mar aberto depende da velocidade v do vento e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela velocidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados em pés na tabela.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

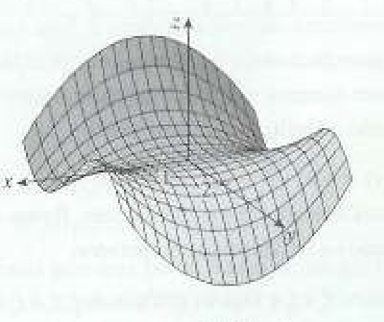
(a) Qual o significado das derivadas parciais $\partial h/\partial v$ e $\partial h/\partial t$?

(b) Estime os valores de $f_v(80, 15)$ e $f_t(80, 15)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

(c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

5-8 Determine os sinais das derivadas parciais da função f cujo gráfico está mostrado.



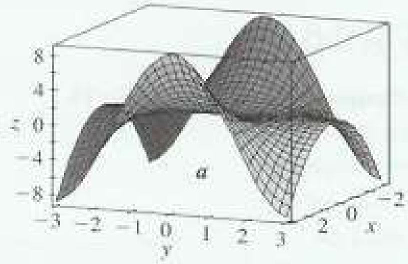
5. (a) $f_x(1, 2)$ (b) $f_y(1, 2)$

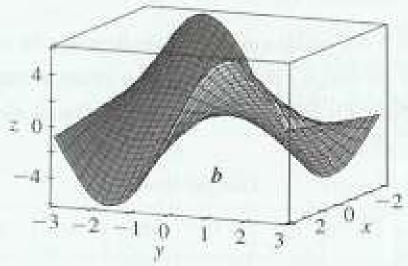
6. (a) $f_x(-1, 2)$ (b) $f_y(-1, 2)$

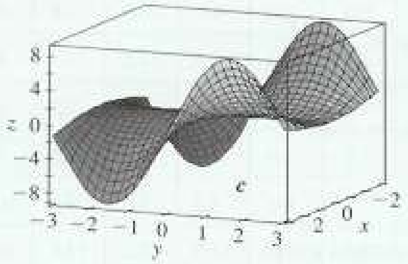
7. (a) $f_{xx}(-1, 2)$ (b) $f_{yy}(-1, 2)$

8. (a) $f_{xy}(1, 2)$ (b) $f_{xy}(-1, 2)$

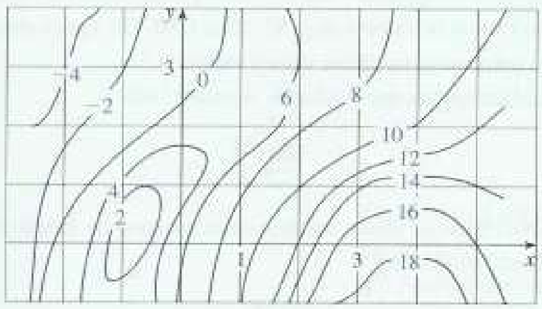
9. As seguintes superfícies, rotuladas a, b e c são gráficos de uma função f e de suas derivadas parciais f_x e f_y. Identifique cada superfície e dê razões para sua escolha.







10. É dado o mapa de contorno de uma função f. Use-o para estimar $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.



11. Se $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

12. Se $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$, determine $f_x(1, 0)$ e $f_y(1, 0)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

13-14 Determine f_x e f_y e faça os gráficos de f, f_x e f_y com domínios e pontos de vista que lhe permitam ver a relação entre eles.

13. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y$ 14. $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$

15-38 Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

15. $f(x, y) = 3x - 2y^4$

16. $f(x, y) = x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$

17. $z = xe^{3y}$ 18. $f(x, y) = \sqrt{x}\ln t$

19. $z = (2x + 3y)^{10}$ 20. $z = \operatorname{tg} xy$

21. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ 22. $f(x, y) = x^y$

23. $w = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$ 24. $w = e^v/(u + v^2)$

25. $f(r, s) = r\ln(r^2 + s^2)$ 26. $f(x, t) = \operatorname{arctg}(x\sqrt{t})$

27. $u = te^{w/t}$ 28. $f(x, y) = \int_y^x \cos(t)^2\,dt$

29. $f(x, y, z) = xz - 5x^2y^3z^4$ 30. $f(x, y, z) = x\operatorname{sen}(y - z)$

31. $w = \ln(x + 2y + 3z)$ 32. $w = ze^{xyz}$

33. $u = xy\operatorname{sen}^{-1}(yz)$ 34. $u = x^{y/z}$

35. $f(x, y, z, t) = xyz^2\operatorname{tg}(yt)$ 36. $f(x, y, z, t) = \dfrac{xy^2}{t + 2z}$

37. $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

38. $u = \operatorname{sen}(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

39-42 Determine as derivadas parciais indicadas.

39. $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; $f_x(3, 4)$

40. $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x/y)$; $f_x(2, 3)$

41. $f(x, y, z) = \dfrac{y}{x + y + z}$; $f_y(2, 1, -1)$

42. $f(x, y, z) = \sqrt{\operatorname{sen}^2x + \operatorname{sen}^2y + \operatorname{sen}^2z}$; $f_z(0, 0, \pi/4)$

43-44 Use a definição de derivadas parciais como limites (4) para encontrar $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

43. $f(x, y) = x^2y - x^3y$ 44. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y^2}$

45-48 Use a derivação implícita para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

45. $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ 46. $yz = \ln(x + z)$

47. $x - z = \operatorname{arctg}(yz)$ 48. $\operatorname{sen}(xyz) = x + 2y + 3z$

49-50 Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

49. (a) $z = f(x) + g(y)$ (b) $z = f(x + y)$

50. (a) $z = f(x)g(y)$ (b) $z = f(xy)$
(c) $z = f(x/y)$

51-56 Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem.

51. $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$ 52. $f(x, y) = \operatorname{sen}^2(mx + ny)$

53. $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ 54. $v = \dfrac{xy}{x - y}$

55. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x + y}{1 - xy}$ 56. $v = e^{xe^y}$

57-60 Verifique que a conclusão do Teorema de Clairaut é válida, isto é, $u_{xy} = u_{yx}$.

57. $u = x\,\text{sen}(x + 2y)$

58. $u = x^4y^2 - 2xy^5$

59. $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

60. $u = xye^y$

61-68 Determine as derivadas parciais indicadas.

61. $f(x, y) = 3xy^4 + x^3y^2$; f_{xxy}, f_{yyy}

62. $f(x, t) = x^2e^{-ct}$; f_{ttt}, f_{txx}

63. $f(x, y, z) = \cos(4x + 3y + 2z)$; f_{xyz}, f_{yzz}

64. $f(r, s, t) = r\ln(rs^2t^3)$; f_{rss}, f_{rst}

65. $u = e^{r\theta}\,\text{sen}\,\theta$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2\,\partial\theta}$

66. $z = u\sqrt{v - w}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial u\,\partial v\,\partial w}$

67. $w = \dfrac{x}{y + 2z}$; $\dfrac{\partial^3 w}{\partial z\,\partial y\,\partial x}$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}$

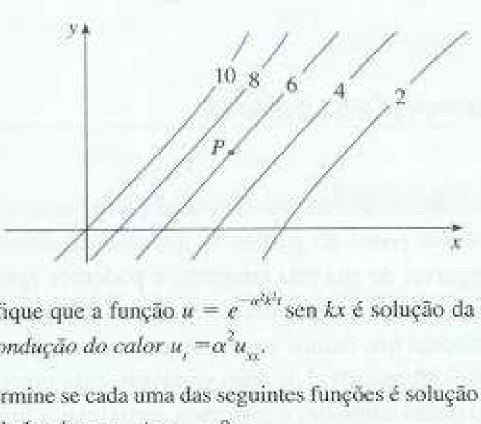
68. $u = x^ay^bz^c$; $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x\,\partial y^2\,\partial z^3}$

69. Use a tabela de valores de $f(x, y)$ para estimar os valores de $f_x(3, 2)$, $f_x(3, 2{,}2)$ e $f_{xy}(3, 2)$.

x \ y	1,8	2,0	2,2
2,5	12,5	10,2	9,3
3,0	18,1	17,5	15,9
3,5	20,0	22,4	26,1

70. São mostradas as curvas de nível de uma função f. Determine se as seguintes derivadas parciais são positivas ou negativas no ponto P.

(a) f_x (b) f_y (c) f_{xx}
(d) f_{xy} (e) f_{yy}



71. Verifique que a função $u = e^{-\alpha^2k^2t}\,\text{sen}\,kx$ é solução da *equação de condução do calor* $u_t = \alpha^2u_{xx}$.

72. Determine se cada uma das seguintes funções é solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(a) $u = x^2 + y^2$ (b) $u = x^2 - y^2$
(c) $u = x^3 + 3xy^2$ (d) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
(e) $u = \text{sen}\,x\cosh y + \cos x\,\text{senh}\,y$
(f) $u = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$

73. Verifique que a função $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é uma solução da equação de Laplace tridimensional $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

74. Mostre que cada uma das seguintes funções é uma solução da equação da onda $u_{tt} = a^2u_{xx}$.

(a) $u = \text{sen}(kx)\,\text{sen}(akt)$
(b) $u = t/(a^2t^2 - x^2)$
(c) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$
(d) $u = \text{sen}(x - at) + \ln(x + at)$

75. Se f e g são funções duas vezes diferenciáveis de uma única variável, mostre que a função

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

é solução da equação de onda dada no Exercício 74.

76. Se $u = e^{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}$, onde $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

77. Verifique que a função $z = \ln(e^x + e^y)$ é uma solução das equações diferenciais

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

e

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0$$

78. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas $P = bL^\alpha K^\beta$ satisfaz a equação

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

79. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas satisfaz $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^\alpha$ resolvendo a equação diferencial

$$\frac{dP}{dL} = \alpha\frac{P}{L}$$

(Veja a Equação 5.)

80. A temperatura em um ponto (x, y) de uma chapa de metal é dada por $T(x, y) = 60/(1 + x^2 + y^2)$, onde T é medido em °C e x, y em metros. Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $(1, 2)$ (a) com relação a x e (b) com relação a y.

81. A resistência total R produzida por três condutores com resistência R_1, R_2 e R_3 conectados em paralelo em um circuito elétrico é dada pela fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Determine $\partial R/\partial R_1$.

82. A lei dos gases para uma massa fixa m de um gás ideal à temperatura absoluta T, pressão P e volume V é $PV = mRT$, onde R é a constante do gás. Mostre que