CMB 301 - Agronomia - Matemática 2

5 de Setembro de 2017

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
GRR	x	x	x	x	9	8	7	6

Questão 1 .... $\boxed{15}$

Determine as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função

$$f(x) = \frac{-7x^2 + x + 1}{(x - d_5)(x - d_6)}$$

Solution:

- Assíntotas verticais: o domínio de $f(x)$ é $x \neq 9$ e $x \neq 8$. Calculando os limites laterais para $x = 8$ e $x = 9$, temos

$$\lim_{x \to 8^-} \frac{-7x^2 + x + 1}{(x-9)(x-8)} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 8^+} \frac{-7x^2 + x + 1}{(x-9)(x-8)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 9^-} \frac{-7x^2 + x + 1}{(x-9)(x-8)} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 9^+} \frac{-7x^2 + x + 1}{(x-9)(x-8)} = -\infty$$

Portanto, as assíntotas verticais são

$$x = 8, \quad x = 9$$

- Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-7x^2 + x + 1}{(x-9)(x-8)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-7x^2 + x + 1}{x^2 - 17x + 72} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(-7 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{17}{x} + \frac{72}{x^2}\right)} = \frac{-7}{1} = -7$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-7x^2 + x + 1}{(x-9)(x-8)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-7x^2 + x + 1}{x^2 - 17x + 72} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(-7 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{17}{x} + \frac{72}{x^2}\right)} = \frac{-7}{1} = -7$$

Portanto, a assíntota horizontal é $y = -7$.

Questão 2 .... $\boxed{40}$

Calcule os limites abaixo:

(a) (8 points) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 4x - x^2 + 4}{x^2 + 7x - 8}$

Solution:

Dada $g(x) = x^2 + 7x - 8$, chegamos que $g(x) = (x + 8)(x - 1)$ por Bhaskara.

Dada $f(x) = x^3 - 4x - x^2 + 4$, chegamos que

$$f(x) = x^3 - 4x - x^2 + 4 = x(x^2 - 4) - 1(x^2 - 4) = (x - 1)(x^2 - 4)$$

por Briot-Ruffini ou técnica de fatoração por agrupamento.
Assim, temos

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x-x^2+4}{x^2+7x-8}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-4)}{(x+8)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{x+8}=\frac{1-4}{1+8}=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3}$$

(b) (8 points) $\lim_{x\to -\infty}\frac{3+9x}{\sqrt{5+4x^2}}$

Solution: Note que para $x\to-\infty$, tem-se $f(x)=3+9x<0$ e $g(x)=\sqrt{5+4x^2}>0$. Logo, pela análise do sinal,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3+9x}{\sqrt{5+4x^2}}<0$$

Assim, temos

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{3+9x}{\sqrt{5+4x^2}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(\frac{3}{x}+9\right)}{\sqrt{x^2\left(\frac{5}{x^2}+4\right)}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(\frac{3}{x}+9\right)}{x\sqrt{\left(\frac{5}{x^2}+4\right)}}=\frac{9}{\sqrt{4}}=\frac{9}{2}$$

Portanto, com o resultado obtido no limite e na análise do sinal, chegamos que

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{3+9x}{\sqrt{5+4x^2}}=-\frac{9}{2}$$

(c) (8 points) $\lim_{t\to 0}\frac{t^4-2t^3-8t^2}{\sqrt{t^2+4}-2}$

Solution: Para calcular este limite, é preciso usar a técnica da racionalização no denominador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{t^4-2t^3-8t^2}{\sqrt{t^2+4}-2} &= \lim_{t\to 0}\frac{t^2(t^2-2t-8)}{\sqrt{t^2+4}-2}\cdot\frac{\sqrt{t^2+4}+2}{\sqrt{t^2+4}+2}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t^2(t^2-2t-8)(\sqrt{t^2+4}+2)}{(\sqrt{t^2+4})^2-2^2}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t^2(t^2-2t-8)(\sqrt{t^2+4}+2)}{(t^2+4)-4}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t^2(t^2-2t-8)(\sqrt{t^2+4}+2)}{t^2}\\
&= \lim_{t\to 0}(t^2-2t-8)(\sqrt{t^2+4}+2)\\
&= (0-0-8)(\sqrt{0+4}+2)=-8\cdot(2+2)=-32
\end{aligned}$$

(d) (8 points) $\lim_{t\to -1}\frac{3t^2-3t-5}{2t-5}$

Solution: Dada $f(x)=\frac{3t^2-3t-5}{2t-5}$, seu domínio é $x\neq\frac{5}{2}$. Como $x=-1\in Dom(f)$, então é só aplicar a técnica da substituição.

$$\lim_{t\to -1} \frac{3t^2-3t-5}{2t-5} = \frac{3(-1)^2-3(-1)-5}{2(-1)-5} = \frac{3+3-5}{-2-5} = \frac{1}{-7} = -\frac{1}{7}$$

(e) (8 points) $\lim_{t\to 1} \frac{5-\sqrt{t+24}}{\sqrt{t}-1}$

Solution: Para calcular este limite, é preciso usar a técnica da racionalização, tanto no numerador quanto no denominador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 1} \frac{5-\sqrt{t+24}}{\sqrt{t}-1} &= \lim_{t\to 1} \frac{5-\sqrt{t+24}}{\sqrt{t}-1}\cdot\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+1}\cdot\frac{5+\sqrt{t+24}}{5+\sqrt{t+24}} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{5-\sqrt{t+24}}{\sqrt{t}-1}\cdot\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+1}\cdot\frac{5+\sqrt{t+24}}{5+\sqrt{t+24}} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{5-\sqrt{t+24}}{\sqrt{t}-1}\cdot\frac{5+\sqrt{t+24}}{\sqrt{t}+1}\cdot\frac{\sqrt{t}+1}{5+\sqrt{t+24}} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{5^2-(\sqrt{t+24})^2}{(\sqrt{t})^2-1^2}\cdot\frac{\sqrt{t}+1}{5+\sqrt{t+24}} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{25-(t+24)}{t-1}\cdot\frac{\sqrt{t}+1}{5+\sqrt{t+24}} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{1-t}{t-1}\cdot\frac{\sqrt{t}+1}{5+\sqrt{t+24}} = \lim_{t\to 1} \frac{-1(t-1)}{t-1}\cdot\frac{\sqrt{t}+1}{5+\sqrt{t+24}} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{(-1)(\sqrt{t}+1)}{5+\sqrt{t+24}} = \frac{(-1)(\sqrt{1}+1)}{5+\sqrt{1+24}} = \frac{(-1)(\sqrt{1}+1)}{5+5} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Questão 3 15

Encontre a equação da reta tangente da função $f(x) = -4x^2$ no ponto $(2, -16)$.

Solution: Dado $f(x) = -4x^2$, $x_0 = a = 2$ e $y_0 = f(a) = -16$, a primeira etapa é determinar a inclinação da reta e a segunda etapa é determinar a reta tangente.

- Calculando a inclinação da reta:

$$\begin{aligned}
m = \lim_{x\to 2} \frac{-4x^2+16}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{-4(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{-4(x+2)(x-2)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} -4(x+2) = -4\cdot(2+2) = -16
\end{aligned}$$

- Determinando a reta tangente usando $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$$y-(-16) = -16(x-2) \quad\Rightarrow\quad y+16 = -16x+32 \quad\Rightarrow\quad y = -16x+16$$

Questão 4 30

Seja $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < -3 \\ x^2-4 & , -3 \leq x < 3 \\ x-(d_7+1)p & , \quad x \geq 3 \end{cases}$.

(a) (10 points) Calcule p de modo que a função seja contínua em $x = 3$.

Solution:
Para que a função seja contínua em $x = 3$, então $x^2 - 4 = x - (7+1)p \Rightarrow x^2 - 4 = x - 8p$. Para resolver a equação, temos $x = 3$, daí temos

$$3^2 - 4 = 3 - 8p \quad \Rightarrow \quad 5 = 3 - 8p \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{1}{4}$$

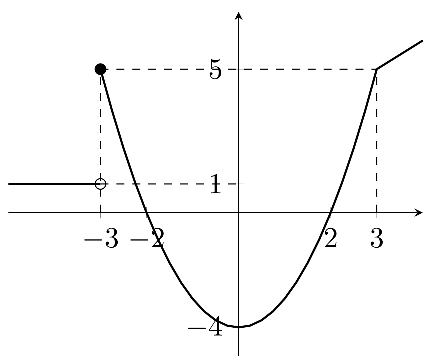
Isto é, a "última função" fica

$$x - 8p = x - 2 \cdot (\frac{-1}{4}) = x - 2$$

Logo, obtemos $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < -3 \\ x^2 - 4 & , -3 \leq x < 3 \\ x - 2 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$.

(b) (10 points) Esboce o gráfico.

Solution:



(c) (10 points) Calcule:

i. $\lim_{x \to -3} f(x)$

Solution: Pelo gráfico, vemos que $\lim_{x \to -3^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to -3^+} f(x) = 5$. Como os limites laterais são diferentes então $\lim_{x \to -3} f(x)$ não existe.

ii. $\lim_{x \to 3} f(x)$

Solution: Pelo gráfico, vemos que $\lim_{x \to -3^-} f(x) = 5$.

iii. $\lim_{x \to \infty} f(x)$

Solution: Pelo gráfico, vemos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$.

iv. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

Solution: Pelo gráfico, vemos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$.