Foi-nos dado que $|\Delta x| \leqslant 0{,}2$, $|\Delta y| \leqslant 0{,}2$ e $|\Delta z| \leqslant 0{,}2$. Para determinar o maior erro no volume, usamos $dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}2$ e $dz = 0{,}2$ em conjunto com $x = 75$, $y = 60$ e $z = 40$:

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0{,}2) + (75)(60)(0{,}2) = 1\,980$$

Portanto, um erro de apenas 0,2 cm nas medidas de cada dimensão pode nos levar a um erro da ordem de 1 980 cm³ no cálculo do volume! Isso pode parecer um erro muito grande, mas, na verdade, é um erro de apenas cerca de 1% do volume da caixa. □

14.4 EXERCÍCIOS

1-6 Determine uma equação do plano tangente à superfície no ponto especificado.

1. $z = 4x^2 - y^2 + 2y$, $\quad(-1, 2, 4)$

2. $z = 3(x-1)^2 + 2(y+3)^2 + 7$, $\quad(2, -2, 12)$

3. $z = \sqrt{xy}$, $\quad(1, 1, 1)$

4. $z = y \ln x$, $\quad(1, 4, 0)$

5. $z = y\cos(x - y)$, $\quad(2, 2, 2)$

6. $z = e^{x^2 - y^2}$, $\quad(1, -1, 1)$

7-8 Desenhe a superfície e o plano tangente no ponto dado. (Escolha o domínio e o ponto de vista de modo a ver tanto a superfície quanto o plano tangente.) Em seguida, dê *zoom* até que a superfície e o plano tangente perto do ponto se tornem indistinguíveis.

7. $z = x^2 + xy + 3y^2$, $\quad(1, 1, 5)$

8. $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$, $\quad(1, 1, \pi/4)$

9-10 Desenhe o gráfico de f e de seu plano tangente no ponto dado. (Utilize um sistema de computação algébrica tanto para calcular as derivadas parciais quanto para traçar os gráficos da função e de seu plano tangente.) Em seguida, dê *zoom* até que a superfície e o plano tangente se tornem indistinguíveis.

9. $f(x, y) = \dfrac{xy\,\operatorname{sen}(x - y)}{1 + x^2 + y^2}$, $\quad(1, 1, 0)$

10. $f(x, y) = e^{-xy/10}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy})$, $\quad(1, 1, 3e^{-0{,}1})$

11-16 Explique por que a função é diferenciável no ponto dado. A seguir, encontre a linearização $L(x, y)$ da função naquele ponto.

11. $f(x, y) = x\sqrt{y}$, $\quad(1, 4)$

12. $f(x, y) = x^3y^4$, $\quad(1, 1)$

13. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$, $\quad(2, 1)$

14. $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}$, $\quad(3, 0)$

15. $f(x, y) = e^{-xy}\cos y$, $\quad(\pi, 0)$

16. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 3y)$, $\quad(-3, 2)$

17-18 Verifique a aproximação linear em $(0, 0)$.

17. $\dfrac{2x + 3}{4y + 1} \approx 3 + 2x - 12y$ $\qquad$ **18.** $\sqrt{y + \cos^2 x} \approx 1 + \frac{1}{2}y$

19. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ em $(2, 1)$ e use-a para aproximar $f(1{,}95, 1{,}08)$.

20. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \ln(x - 3y)$ em $(7, 2)$ e use-a para aproximar $f(6{,}9, 2{,}06)$. Ilustre, traçando o gráfico da função e do plano tangente.

21. Determine a aproximação linear da função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ em $(3, 2, 6)$ e use-a para aproximar o número $\sqrt{(3{,}02)^2 + (1{,}97)^2 + (5{,}99)^2}$.

22. A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados na seguinte tabela.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

Use a tabela para determinar uma aproximação linear da função altura da onda quando v está próximo de 80 km/h e t está próximo de 20 horas. Em seguida, estime a altura das ondas quando está ventando por 24 horas a 84 km/h.

23. Utilize a tabela do Exemplo 3 para encontrar a aproximação linear da função humidex quando a temperatura está próxima de 32 °C e a umidade relativa do ar é de aproximadamente 65%. Estime também o humidex quando a temperatura é de 33 °C e a umidade relativa, 63%.

24. O índice de sensação térmica W é a temperatura que se sente quando a temperatura real for T e a velocidade do vento, v; portanto, podemos escrever $W = f(T, v)$. A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1.

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C) T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

Use essa tabela para determinar a aproximação linear da função de sensação térmica quando T estiver a -15 °C e v estiver próximo de 50 km/h. Estime, a seguir, a sensação térmica quando a temperatura estiver a -17 °C e a velocidade do vento for de 55 km/h.

25-30 Determine a diferencial da função.

25. $z = x^3 \ln(y^2)$

26. $v = y \cos xy$

27. $m = p^5 q^3$

28. $T = \dfrac{v}{1 + uvw}$

29. $R = \alpha\beta^2 \cos \lambda$

30. $w = xye^{xz}$

31. Se $z = 5x^2 + y^2$ e (x, y) varia de $(1, 2)$ a $(1{,}05, 2{,}1)$, compare os valores de Δz e dz.

32. Se $z = x^2 - xy + 3y^2$ e (x, y) varia de $(3, -1)$ a $(2{,}96, -0{,}95)$, compare os valores de Δz e dz.

33. O comprimento e a largura de um retângulo foram medidos como 30 cm e 24 cm, respectivamente, com um erro de medida de, no máximo, 0,1 cm. Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da área do retângulo.

34. As dimensões de uma caixa retangular fechada foram medidas como 80 cm, 60 cm e 50 cm, respectivamente, com erro máximo de 0,2 cm em cada dimensão. Utilize os diferenciais para estimar o erro máximo no cálculo da área da superfície da caixa.

35. Utilize diferenciais para estimar a quantidade de estanho em uma lata cilíndrica fechada com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura se a espessura da folha de estanho for de 0,04 cm.

36. Use diferenciais para estimar a quantidade de metal em uma lata cilíndrica fechada de 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro se o metal das tampas de cima e de baixo possui 0,1 cm de espessura e o das laterais tem espessura de 0,05 cm.

37. Uma faixa interna de 8 cm de largura é pintada na borda de um retângulo de dimensões 30 m por 60 m. Utilize os diferenciais para aproximar a área, em metros quadrados, da faixa pintada.

38. A pressão, o volume e a temperatura de um mol de um gás ideal estão relacionados pela equação $PV = 8{,}31T$, onde P é medida em quilopascals, V em litros e T em kelvins. Utilize diferenciais para determinar a variação aproximada da pressão se o volume aumenta de 12 L para 12,3 L e a temperatura diminui de 310 K para 305 K.

39. Se R é a resistência equivalente de três resistores conectadas em paralelo, com resistências R_1, R_2 e R_3, então

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Se as resistências medem em ohms $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$ e $R_3 = 50\ \Omega$, com margem de erro de 0,5% em cada uma, estime o erro máximo no valor calculado de R.

40. Quatro números positivos, cada um menor que 50, são arredondados até a primeira casa decimal e depois multiplicados. Utilize os diferenciais para estimar o máximo erro possível no cálculo do produto que pode resultar do arredondamento.

41. Um modelo para a área da superfície do corpo humano é dado por $S = 72{,}09w^{0{,}425}\,h^{0{,}725}$, onde w é o peso (em quilogramas), h é a altura (em centímetros) e S é medida em centímetros quadrados. Se os erros nas medidas de w e h forem no máximo de 2%, use diferenciais para estimar a porcentagem de erro máxima na área da superfície calculada.

42. Suponha que você precise saber uma equação do plano tangente à superfície S no ponto $P(2, 1, 3)$. Você não tem uma equação para S, mas sabe que as curvas

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle 2 + 3t,\ 1 - t^2,\ 3 - 4t + t^2 \rangle$$

$$\mathbf{r}_2(u) = \langle 1 + u^2,\ 2u^3 - 1,\ 2u + 1 \rangle$$

estão ambas em S. Encontre uma equação para o plano tangente em P.

43-44 Mostre que a função é diferenciável achando valores ε_1 e ε_2 que satisfaçam à Definição 7.

43. $f(x, y) = x^2 + y^2$

44. $f(x, y) = xy - 5y^2$

45. Demonstre que, se f é uma função de duas variáveis diferenciável em (a, b), então f é contínua em (a, b). *Sugestão*: Mostre que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b)$$

46. (a) A função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

corresponde ao gráfico da Figura 4. Mostre que $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ existem, mas f não é diferenciável em $(0, 0)$. [*Sugestão*: Utilize o resultado do Exercício 45.]

(b) Explique por que f_x e f_y não são contínuas em $(0, 0)$.