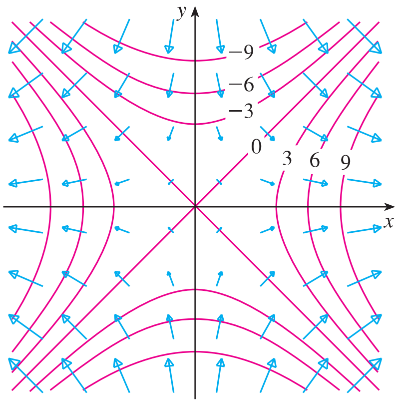
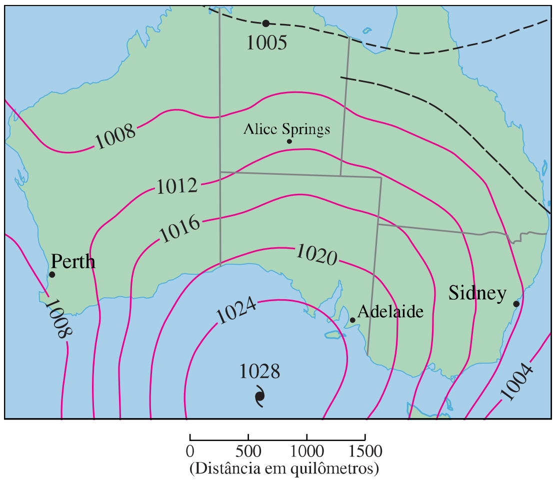


FIGURA 13

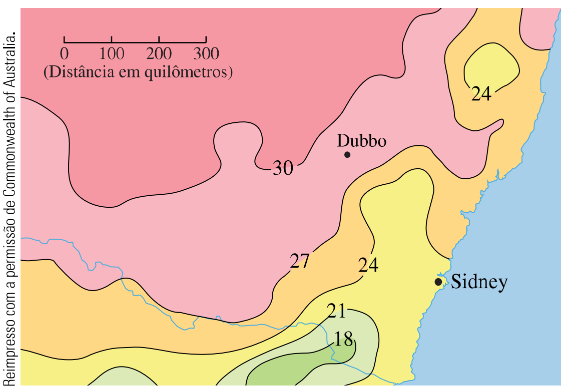
14.6 Exercícios

1. É dado o mapa de contornos mostrando a pressão barométrica em hectopascais (hPa) na Austrália em 28 de dezembro de 2004. Estime o valor da derivada direcional da função pressão em Alice Springs na direção de Adelaide. Quais são as unidades da derivada direcional?



Baseado em dados de Bureau of Meteorology. Commonwealth of Australia.

2. O mapa de contorno mostra a temperatura máxima média em novembro de 2004 (em ºC). Estime o valor da derivada direcional da função da temperatura em Dubbo, New South Wales, na direção de Sydney. Quais são as unidades?



Reimpresso com a permissão de Commonwealth of Australia.

3. Uma tabela de valores do índice de sensação térmica $W = f(T, v)$ é dada no Exercício 3 da Seção 14.3. Use-a para estimar o valor de $D_{\mathbf{u}} f(-20, 30)$, onde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$.

4–6 Determine a derivada direcional de f no ponto dado e na direção indicada pelo ângulo θ.

4. $f(x, y) = x^3y^4 - x^4y^3$, $(1, 1)$, $\theta = \pi/6$

5. $f(x, y) = ye^{-x}$, $(0, 4)$, $\theta = 2\pi/3$

6. $f(x, y) = e^x \cos y$, $(0, 0)$, $\theta = \pi/4$

7–10
(a) Determine o gradiente de f.
(b) Calcule o gradiente no ponto P.
(c) Determine a taxa de variação de f em P na direção do vetor $\mathbf{u}$.

7. $f(x, y) = \text{sen}(2x + 3y)$, $P(-6, 4)$, $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\mathbf{i} - \mathbf{j})$

8. $f(x, y) = y^2/x$, $P(1, 2)$, $\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \sqrt{5}\,\mathbf{j})$

9. $f(x, y, z) = xe^{2yz}$, $P(3, 0, 2)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$

10. $f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}$, $P(1, 3, 1)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right\rangle$

11–17 Determine a derivada direcional da função no ponto dado na direção do vetor $\mathbf{v}$.

11. $f(x, y) = e^x \text{sen}\, y$, $(0, \pi/3)$, $\mathbf{v} = \langle -6, 8 \rangle$

12. $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $(1, 2)$, $\mathbf{v} = \langle 3, 5 \rangle$

13. $g(p, q) = p^4 - p^2q^3$, $(2, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

14. $g(r, s) = \text{tg}^{-1}(rs)$, $(1, 2)$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

15. $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, -2 \rangle$

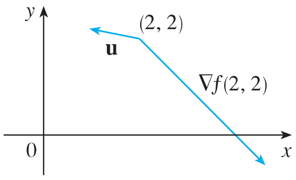
16. $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$, $(3, 2, 6)$, $\mathbf{v} = \langle -1, -2, 2 \rangle$

17. $h(r, s, t) = \ln(3r + 6s + 9t)$, $(1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

18. Use a figura para estimar $D_{\mathbf{u}} f(2, 2)$.



19. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = \sqrt{xy}$ em $P(2, 8)$ na direção de $Q(5, 4)$.

20. Determine a derivada direcional de $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ em $P(1, -1, 3)$ na direção de $Q(2, 4, 5)$.

21–26 Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

21. $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$, $(4, 1)$

22. $f(s, t) = te^{st}$, $(0, 2)$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$, $(1, 0)$

24. $f(x, y, z) = (x + y)/z$, $(1, 1, -1)$

25. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(3, 6, -2)$

26. $f(p, q, r) = \operatorname{arctg}(pqr)$, $(1, 2, 1)$

27. (a) Mostre que uma função diferenciável f decresce mais rapidamente em $\mathbf{x}$ na direção oposta à do vetor gradiente, ou seja, na direção de $-\nabla f(\mathbf{x})$.
(b) Utilize o resultado do item (a) para determinar a direção onde $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$ decresce mais rápido no ponto $(2, -3)$.

28. Determine as direções em que a derivada direcional de $f(x, y) = ye^{-xy}$ no ponto $(0, 2)$ tem valor 1.

29. Determine todos os pontos nos quais a direção de maior variação da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

30. Próximo a uma boia, a profundidade de um lago com coordenadas (x, y) é $z = 200 + 0{,}02x^2 - 0{,}001y^3$, onde x, y, e z são medidos em metros. Um pescador que está em um pequeno barco parte do ponto $(80, 60)$ em direção à boia, que está localizada no ponto $(0, 0)$. A água sob o barco está ficando mais profunda ou mais rasa quando ele começa a se mover? Explique.

31. A temperatura T em uma bola de metal é inversamente proporcional à distância do centro da bola, que tomamos como a origem. A temperatura no ponto $(1, 2, 2)$ é de 120º.
(a) Determine a taxa de variação de T em $(1, 2, 2)$ em direção ao ponto $(2, 1, 3)$.
(b) Mostre que em qualquer ponto da bola a direção de maior crescimento na temperatura é dada por um vetor que aponta para a origem.

32. A temperatura em um ponto (x, y, z) é dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$$

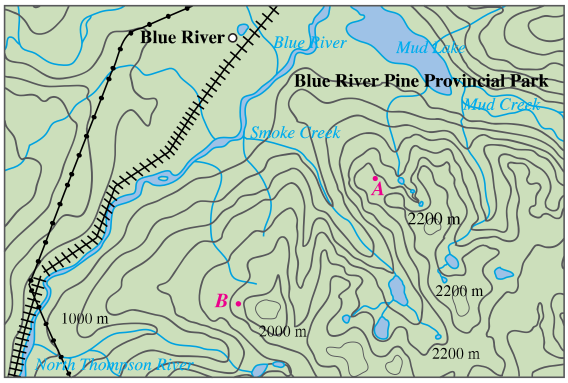
onde T é medido em ºC e x, y, z em metros.
(a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $P(2, -1, 2)$ em direção ao ponto $(3, -3, 3)$.
(b) Qual é a direção de maior crescimento da temperatura em P?
(c) Encontre a taxa máxima de crescimento em P.

33. Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.
(a) Determine a taxa de variação do potencial em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
(b) Em que direção V varia mais rapidamente em P?
(c) Qual a taxa máxima de variação em P?

34. Suponha que você esteja subindo uma montanha cuja forma é dada pela equação $z = 1\,000 - 0{,}005x^2 - 0{,}01y^2$, onde x, y e z são medidos em metros e você está em um ponto com coordenadas $(60, 40, 966)$. O eixo x positivo aponta para o leste e o eixo y positivo aponta para o norte.
(a) Se você andar exatamente para o Sul, começará a subir ou a descer? A que taxa?
(b) Se você caminhar em direção ao Noroeste, começará a subir ou a descer? A que taxa?
(c) Em que direção a inclinação é maior? Qual é a taxa de elevação nessa direção? Qual é o ângulo que o início desse caminho faz em relação à horizontal?

35. Seja f uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ e $D(6, 15)$. A derivada direcional de f em A na direção do vetor $\overrightarrow{AB}$ é 3, e a derivada direcional em A na direção $\overrightarrow{AC}$ é 26. Determine a derivada direcional de f em A na direção do vetor $\overrightarrow{AD}$.

36. Um mapa topográfico de Blue River Pine Provincial Park em British Columbia é mostrado. Desenhe as curvas da descida mais íngreme do ponto A (descendo até o Mud Lake) e do ponto B.



37. Mostre que a operação de calcular o gradiente de uma função tem a propriedade fornecida. Suponha que u e v sejam funções diferenciáveis de x e y e que a, b sejam constantes.

(a) $\nabla(au + bv) = a\nabla u + b\nabla v$ (b) $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$

(c) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}$ (d) $\nabla u^n = nu^{n-1}\nabla u$

38. Esboce o vetor gradiente $\nabla f(4, 6)$ para a função f cujas curvas de nível são mostradas. Explique como você escolheu a direção e sentido e o comprimento desse vetor.