14.1 EXERCÍCIOS

1. No Exemplo 2 consideramos a função $W = f(T, v)$, onde W era o índice de sensação térmica ocasionado pelo vento, T, a temperatura real e v, a velocidade do vento. A representação numérica foi fornecida pela Tabela 1.
   (a) Qual o valor de $f(-15, 40)$? Qual seu significado?
   (b) Descreva em palavras o significado da questão "Para quais valores de v é verdade que $f(-20, v) = -30$?". Em seguida, responda à questão.
   (c) Descreva o significado da questão "Para quais valores de T vale $f(T, 20) = -49$?". Em seguida, responda à questão.
   (d) Qual o significado da função $W = f(-5, v)$? Descreva o comportamento dessa função.
   (e) Qual o significado da função $W = f(T, 50)$? Descreva o comportamento dessa função.

2. *O índice I de temperatura-umidade* (ou simplesmente *humidex*) é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real é T e a umidade relativa é h, de modo que podemos escrever $I = f(T, h)$. A tabela seguinte com valores de I foi extraída de uma tabela do Environment Canada.

TABELA 3 Temperatura aparente como função da temperatura e da umidade

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°C): T \ h	20	30	40	50	60	70
20	20	20	20	21	22	23
25	25	25	26	28	30	32
30	30	31	34	36	38	41
35	36	39	42	45	48	51
40	43	47	51	55	59	63

   (a) Qual é o valor de $f(35, 60)$? Qual é o seu significado?
   (b) Para que valor de h temos $f(30, h) = 36$?
   (c) Para que valor de T temos $f(T, 40) = 42$?
   (d) Qual o significado de $I = f(20, h)$ e $I = f(40, h)$? Compare o comportamento dessas duas funções de h.

3. Verifique que, para a função de produção de Cobb-Douglas
$$P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$$
discutida no Exemplo 3, a produção dobrará se as quantidades de trabalho e a de capital investido forem dobradas. Determine se isto também é verdade para uma função de produção genérica
$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

4. O índice de sensação térmica W discutido no Exemplo 2 foi modelado pela seguinte função:
$$W(T, v) = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$
Verifique quão próximo este modelo está dos valores da Tabela 1 para alguns valores de T e v.

5. A altura das ondas h em mar aberto depende da velocidade do vento v e do intervalo de tempo t no qual está ventando com a mesma velocidade. Os valores da função $h = f(v, t)$, dados em pés, são apresentados na tabela a seguir.
   (a) Qual é o valor de $f(80, 15)$? Qual é o seu significado?
   (b) Qual o significado da função $h = f(60, t)$? Descreva seu comportamento.
   (c) Qual o significado da função $h = f(v, 30)$? Descreva seu comportamento.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h): v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

6. Seja $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$.
   (a) Calcule $f(1, 1)$.
   (b) Calcule $f(e, 1)$.
   (c) Determine e esboce o domínio de f.
   (d) Determine a imagem de f.

7. Seja $f(x, y) = x^2e^{3xy}$.
   (a) Calcule $f(2, 0)$.
   (b) Determine o domínio de f.
   (c) Determine a imagem de f.

8. Determine e esboce o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{1 + x - y^2}$. Qual é a imagem de f?

9. Seja $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z - x^2 - y^2}}$.
   (a) Calcule $f(2, -1, 6)$.
   (b) Determine o domínio de f.
   (c) Determine a imagem f.

10. Seja $g(x, y, z) = \ln(25 - x^2 - y^2 - z^2)$.
   (a) Calcule $g(2, -2, 4)$.
   (b) Determine o domínio de g.
   (c) Determine a imagem de g.

11-20 Determine e faça o esboço do domínio da função.

11. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

12. $f(x, y) = \sqrt{xy}$

13. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

14. $f(x, y) = \sqrt{y - x}\ln(y + x)$

15. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$

16. $f(x, y) = \sqrt{y} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

17. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

18. $f(x, y) = \text{arcsen}(x^2 + y^2 - 2)$

19. $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

20. $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

21-29 Esboce o gráfico da função.

21. $f(x, y) = 3$

22. $f(x, y) = y$

23. $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$

24. $f(x, y) = \cos x$

25. $f(x, y) = y^2 + 1$

26. $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$

27. $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

28. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$

29. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

30. Faça uma correspondência entre a função e seu gráfico (indicado por I-VI). Dê razões para sua escolha.

(a) $f(x, y) = |x| + |y|$

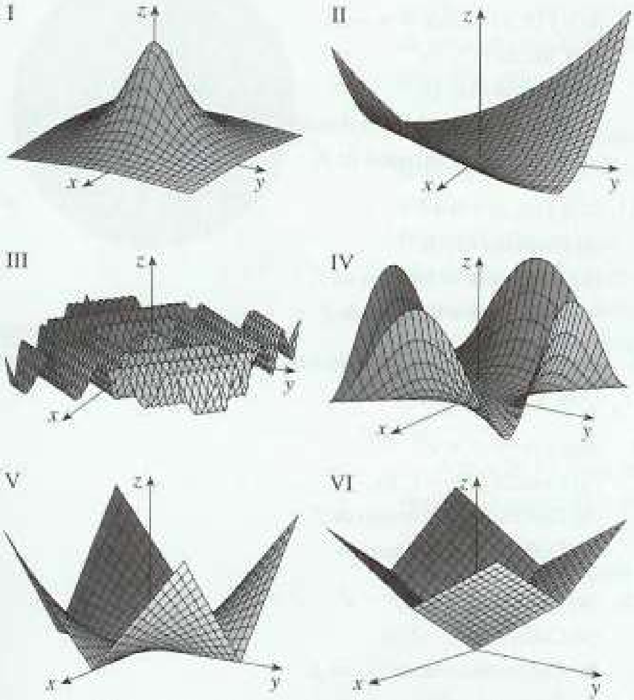
(b) $f(x, y) = |xy|$

(c) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$

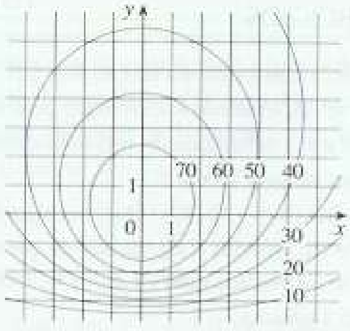
(d) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$

(e) $f(x, y) = (x - y)^2$

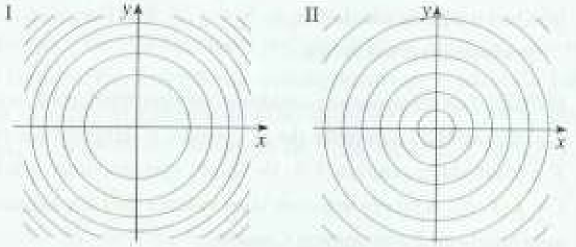
(f) $f(x, y) = \text{sen}(|x| + |y|)$



31. É mostrado um mapa de contorno da função f. Use-o para estimar o valor de $f(-3, 3)$ e $f(3, -2)$. O que você pode dizer sobre a forma do gráfico?

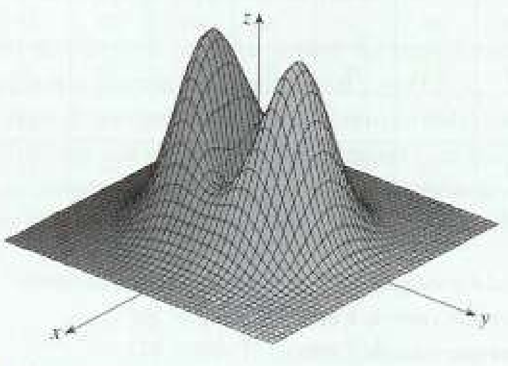


32. Dois mapas de contorno são mostrados na figura. Um é de uma função f cujo gráfico é um cone. O outro é de uma função g cujo gráfico é um paraboloide. Qual é qual? Por quê?



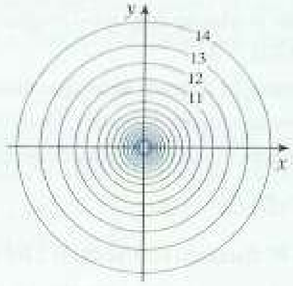
33. Localize os pontos A e B no mapa da Montanha Solitária (Figura 12). Como você descreveria o terreno perto de A? E perto de B?

34. Faça um esboço do diagrama de contorno da função cujo gráfico é mostrado.

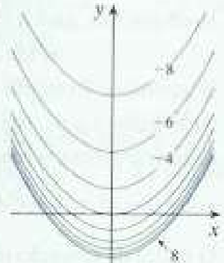


35-38 Um mapa de contorno de uma função é mostrado. Use-o para fazer um esboço do gráfico da f.

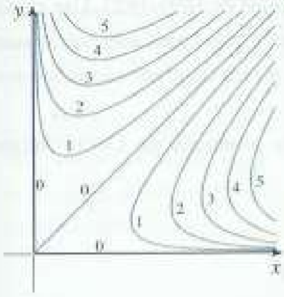
35.



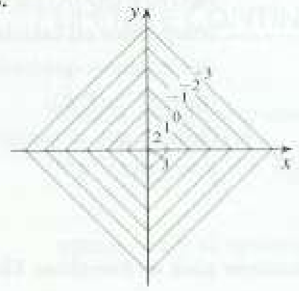
36.



37.



38.



39-46 Faça o mapa de contorno da função mostrando várias curvas de nível.

39. $f(x, y) = (y - 2x)^2$

40. $f(x, y) = x^3 - y$

41. $f(x, y) = y - \ln x$

42. $f(x, y) = e^{y/x}$

43. $f(x, y) = ye^x$

44. $f(x, y) = y \sec x$

45. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

46. $f(x, y) = y/(x^2 + y^2)$

47-48 Faça o esboço do mapa de contorno e do gráfico da função e compare-os.

47. $f(x, y) = x^2 + 9y^2$

48. $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

49. Uma placa fina de metal, localizada no plano xy, tem temperatura $T(x, y)$ no ponto (x, y). As curvas de nível de T são chamadas *isotérmicas* porque todos os pontos em uma isotérmica têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função temperatura for dada por

$$T(x, y) = 100/(1 + x^2 + 2y^2)$$

50. Se $V(x, y)$ é o potencial elétrico de um ponto (x, y) do plano xy, as curvas de nível de V são chamadas *curvas equipotenciais*, porque nelas todos os pontos têm o mesmo potencial elétrico. Esboce algumas curvas equipotenciais de $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, onde c é uma constante positiva.

51-54 Use um computador para traçar o gráfico da função utilizando vários pontos de vista. Imprima a que, em sua opinião, oferece a melhor visão. Se seu programa também produz curvas de nível, trace o mapa de contorno da mesma função e compare.

51. $f(x, y) = e^{-x^2} + e^{-2y^2}$

52. $f(x, y) = (1 - 3x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2}$

53. $f(x, y) = xy^2 - x^3$ (sela do macaco)

54. $f(x, y) = xy^3 - yx^3$ (sela do cachorro)

55-60 Faça uma correspondência entre a função (a) e seu gráfico (indicado por A-F na página 828), (b) e seus mapas de contorno (indicado por I-VI). Justifique sua escolha.

55. $z = \operatorname{sen}(xy)$

56. $z = e^x \cos y$

57. $z = \operatorname{sen}(x - y)$

58. $z = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y$

59. $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$

60. $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

61-64 Descreva as superfícies de nível da função.

61. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

62. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

63. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$

64. $f(x, y, z) = x^2 - y^2$

65-66 Descreva como o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f.

65. (a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$ (b) $g(x, y) = 2f(x, y)$
(c) $g(x, y) = -f(x, y)$ (d) $g(x, y) = 2 - f(x, y)$

66. (a) $g(x, y) = f(x - 2, y)$ (b) $g(x, y) = f(x, y + 2)$
(c) $g(x, y) = f(x + 3, y - 4)$

67-68 Utilize um computador para traçar o gráfico da função, utilizando vários pontos de vista e tamanhos de janela. Imprima aquela que apresente melhor os "picos e vales". Você acha que essa função tem um valor máximo? Você poderia identificar os pontos do gráfico correspondentes aos "máximos locais"? E aos "mínimos locais"?

67. $f(x, y) = 3x - x^4 - 4y^2 - 10xy$

68. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

69-70 Utilize um computador para traçar o gráfico da função, usando vários pontos de vista e tamanhos de janela. Comente o comportamento da função no limite. O que acontece quando x e y se tornam muito grandes? O que acontece quando (x, y) se aproxima da origem?

69. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$

70. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

71. Utilize um computador para estudar o comportamento da família de funções $f(x, y) = e^{cx^2+y^2}$. Como a forma da função é afetada por uma mudança do valor de c?

72. Use um computador para investigar a família de superfícies

$$z = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$$

Como a forma do gráfico depende dos números a e b?

73. Use um computador para investigar a família de superfícies $z = x^2 + y^2 + cxy$. Em particular, você deve determinar os valores de transição para os quais a superfície muda de um tipo de superfície quádrica para outro.

74. Esboce o gráfico das funções

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} \qquad f(x, y) = \operatorname{sen}(\sqrt{x^2 + y^2})$$

e

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Em geral, se g é uma função de uma variável, como obter o gráfico de

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$$

a partir do gráfico de g?

75. (a) Mostre que, tomando logaritmos, a função geral de Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ pode ser expressa como

$$\ln\frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln\frac{L}{K}$$

(b) Se tomarmos $x = \ln(L/K)$ e $y = \ln(P/K)$, a equação da parte (a) se tornará uma equação linear $y = \alpha x + \ln b$. Utilize a Tabela 2 (do Exemplo 3) para fazer uma tabela de valores de $\ln(L/K)$ e $\ln(P/K)$ para os anos de 1899-1922. Use então um computador ou calculadora gráfica para achar, pelo método dos mínimos quadrados, a reta de regressão pelos pontos $(\ln(L/K), \ln(P/K))$.

(c) Deduza que a função de produção de Cobb-Douglas é $P = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$.

Gráficos e Mapas de Contorno para os Exercícios 55–60