Cálculo Diferencial e Integral II - Gabarito

22 de Junho de 2017

Questão 1 .... $\boxed{15}$

Uma função diferenciável $f(x,y)$ tem, no ponto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, derivada direcional igual a 5 na direção $3\vec{i}+\vec{j}$ e igual a -4 na direção $4\vec{i}-3\vec{j}$. Calcule:

(a) (5 points) $\nabla f\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Solution: Seja $\vec{\nabla f}\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) = (\alpha, \beta)$, $\vec{b_1} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}, \dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$, e $\vec{b_2} = \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{-3}{5}\right)$.

Temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial s}\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) & = & \left\langle \nabla f\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right), \vec{b_1} \right\rangle & = & 5 \\ \dfrac{\partial f}{\partial s}\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) & = & \left\langle \nabla f\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right), \vec{b_2} \right\rangle & = & -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{10}}\alpha & + & \dfrac{1}{\sqrt{10}}\beta & = & 5 \\ \dfrac{4}{5}\alpha & - & \dfrac{3}{5}\beta & = & -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha & + & \beta & = & 5\sqrt{10} \\ 4\alpha & - & 3\beta & = & -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9\alpha & + & 3\beta & = & 15\sqrt{10} \\ 4\alpha & - & 3\beta & = & -20 \end{cases}$$

Somando as duas equações, temos $13\alpha = 15\sqrt{10} - 20 \Rightarrow \alpha = \dfrac{15\sqrt{10}-20}{13}$.

Como $3\alpha + \beta = 5\sqrt{10}$, então $\beta = 5\sqrt{10} - 3\alpha = \dfrac{20\sqrt{10}+60}{13}$.

Portanto, $\nabla f\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) = \left(\dfrac{15\sqrt{10}-20}{13}, \dfrac{20\sqrt{10}+60}{13}\right)$

(b) (5 points) $\dfrac{\partial f}{\partial s}\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ na direção de $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$

Solution: Dado que $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, então $\vec{b} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) &= \left\langle \nabla f\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \vec{b} \right\rangle = \left\langle \frac{15\sqrt{10}-20}{13} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{20\sqrt{10}+60}{13} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \\ &= \frac{35\sqrt{10}+40}{13\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(c) (5 points) o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial s}\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Solution:

$$\begin{aligned} \max\left\{\frac{\partial f}{\partial s}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right\} &= \sqrt{\left(\frac{15\sqrt{10}-20}{13}\right)^2 + \left(\frac{20\sqrt{10}+60}{13}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{10.250 + 1800\sqrt{10}}}{13} \end{aligned}$$

Questão 2 25

Determinar os valores máximo e mínimo da função

$$z = \sin x + \sin y$$

na região $0 \leq x \leq \pi$ e $0 \leq y \leq \pi$.

Solution:

- Região do interior

  Temos $\nabla z(x,y) = \begin{bmatrix} \cos x \\ \sin y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

  E assim, chegamos que $H(x,y) = \begin{bmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & -\sin y \end{bmatrix}$, com $D(x,y) = \sin x \sin y$.

  Dado que o ponto crítico é $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, com $z_{xx} = -1 < 0$ e $D\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$, então temos um ponto de máximo.

- Borda R_1, com $\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ y = 0 \end{cases}$

  $z(x,0) = \sin x \Rightarrow \begin{cases} z' = \cos x \\ z'' - \sin x \end{cases}$

  Fazendo $z' = 0$ e a avaliando z'', encontramos o ponto crítico $(\frac{\pi}{2}, 0)$, ponto de máximo.

  Pontos de R_1:

Pto (x,y)	$z(x,y)$	Classificação
$(0,0)$	$z(0,0) = 0$	pto de mínimo
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$z(\frac{\pi}{2}, 0) = 1$	pto de máximo
$(\pi, 0)$	$z(\pi, 0) = 0$	pto de mínimo

- Borda R_2, com $\begin{cases} x = \pi \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$

  $z(\pi,y) = \sin y \Rightarrow \begin{cases} z' = \cos y \\ z'' - \sin y \end{cases}$

  Fazendo $z' = 0$ e a avaliando z'', encontramos o ponto crítico $(\pi, \frac{\pi}{2})$, ponto de máximo.

  Pontos de R_2:

Pto (x,y)	$z(x,y)$	Classificação
$(\pi,0)$	$z(\pi,0) = 0$	pto de mínimo
$(\pi, \frac{\pi}{2})$	$z(\pi, \frac{\pi}{2}) = 1$	pto de máximo
(π, π)	$z(\pi, \pi) = 0$	pto de mínimo

- Borda R_3, com $\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ y = \pi \end{cases}$

  $z(x,0) = \sin x \Rightarrow \begin{cases} z' = \cos x \\ z'' - \sin x \end{cases}$

  Fazendo $z' = 0$ e a avaliando z'', encontramos o ponto crítico $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, ponto de máximo.

  Pontos de R_3:

Pto (x, y)	$z(x, y)$	Classificação
$(0, \pi)$	$z(\pi, 0) = 0$	pto de mínimo
$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$z(\frac{\pi}{2}, \pi) = 1$	pto de máximo
(π, π)	$z(\pi, \pi) = 0$	pto de mínimo

- Borda R_4, com $\begin{cases} x = 0 \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$

  $z(\pi, y) = \sin y \Rightarrow \begin{cases} z' = \cos y \\ z'' - \sin y \end{cases}$

  Fazendo $z' = 0$ e a avaliando z'', encontramos o ponto crítico $(0, \frac{\pi}{2})$, ponto de máximo.

  Pontos de R_2:

Pto (x, y)	$z(x, y)$	Classificação
$(0, 0)$	$z(0, 0) = 0$	pto de mínimo
$(0, \frac{\pi}{2})$	$z(, \frac{\pi}{2}) = 1$	pto de máximo
$(0, \pi)$	$z(0, \pi) = 0$	pto de mínimo

- Conclusão

Pto (x, y)	$z(x, y)$	Classificação
$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$z(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 2$	pto de máximo global
$(0, 0)$	$z(0, 0) = 0$	pto de mínimo global
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$z(\frac{\pi}{2}, 0) = 1$	
$(\pi, 0)$	$z(\pi, 0) = 0$	pto de mínimo global
$(\pi, \frac{\pi}{2})$	$z(\pi, \frac{\pi}{2}) = 1$	
(π, π)	$z(\pi, \pi) = 0$	pto de mínimo global
$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$z(\frac{\pi}{2}, \pi) = 1$	
$(0, \pi)$	$z(0, \pi) = 0$	pto de mínimo global
$(0, \frac{\pi}{2})$	$z(0, \frac{\pi}{2}) = 1$	

Questão 3 .... $\boxed{20}$

Ache o volume de maior paralelepípedo que pode ser inscrito no elipsoide $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$, se os lados forem paralelos ao eixos coordenados. *Dica: Resolva o problema para o primeiro octante e ajuste o valor do volume obtido.*

Solution:

- Resolvendo o problema para o 1^o octante:

$$\begin{cases} \max & V = xyz \\ s.a & 36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36 \end{cases}$$

  Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, temos o sistema abaixo:

$$\begin{cases} yz = \lambda(72x) \\ xz = \lambda(18y) \\ xy = \lambda(8z) \\ 36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xyz = \lambda(72x^2) \\ xyz = \lambda(18y^2) \\ xyz = \lambda(8z^2) \\ 36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36 \end{cases}$$

Temos $\lambda(18y^2) = xyz = \lambda(72x^2) \Rightarrow y^2 = 4x^2$.

Temos $\lambda(8z^2) = xyz = \lambda(72x^2) \Rightarrow z^2 = 9x^2$.

Com $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$ e fazendo as devidas substituições, chegamos em

$$36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 3 \cdot 36x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

Assim, a solução encontrada é:

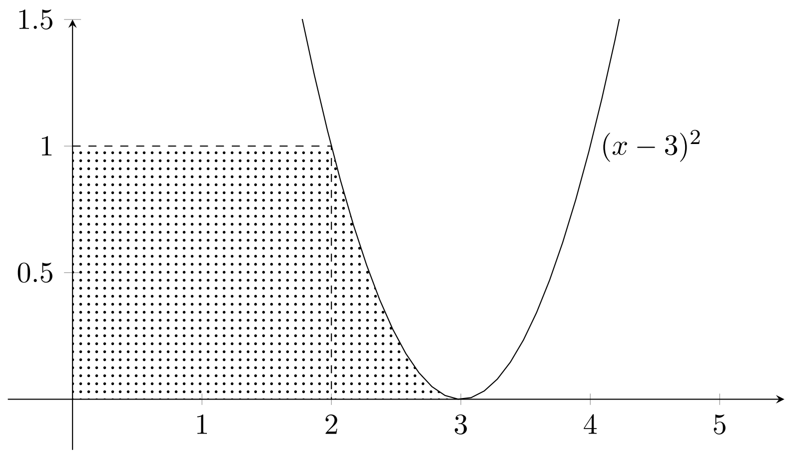
$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad z = \sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

- Resolvendo o problema considerando todos os octantes:

$$V_{TOTAL} = 8 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

Questão 4 .... $\boxed{20}$

Calcular $\iint_R (2x - y)dA$ onde R é a região dada pela figura abaixo:



Solution: $V = \iint_R (2x-y)dA = \int_0^1 \int_0^2 (2x-y)dxdy + \int_2^3 \int_0^{(x-3)^2} (2x-y)dxdy$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^2 (2x-y)dxdy &= \int_0^1 (x^2 - xy)\Big|_0^2 dy = \int_0^1 (4-2y)dy = 4y - y^2\Big|_0^1 = 3 \\
\int_2^3 \int_0^{(x-3)^2} (2x-y)dxdy &= \int_2^3 \left(2xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{(x-3)^2} dx \\
&= \int_2^3 2x(x-3)^2 dx - \int_2^3 \frac{(x-3)^4}{2} dx \\
&= 2\int_2^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^0 u^4 du, \text{ com } u = x-3 \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{10} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}
\end{aligned}$$

Assim, chegamos que $V = 3 + \frac{7}{5} = \frac{22}{5}$.

Questão 5 .... $\boxed{20}$

Resolva a equação separável

$$y' = \frac{3xy + 3x - 3y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$$

sabendo que $y(-3) = 0$.

Solution:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3xy + 3x - 3y - 3}{xy - 2x + 4y - 8} = \frac{3[x(y+1) - (y+1)]}{x(y-2) + 4(y-2)} = \frac{3(x-1)(y+1)}{(x+4)(y-2)} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3(x-1)(y+1)}{(x+4)(y-2)} \Rightarrow \frac{y-2}{y+1}dy = \frac{3(x-1)}{x+4}dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u-3}{u}du &= 3\frac{v-5}{v}dv, \text{ com } u = y+1 \text{ e } v = x+4 \\ \int \left(1 - \frac{3}{u}\right)du &= 3\int \left(1 - \frac{5}{v}\right)dv \Rightarrow u - \ln u = 3(v - 5\ln v) + k \end{aligned}$$

Como

$$y + 1 - 3\ln(y+1) = 3[x + 4 - 5\ln(x+4)] + k, \text{ com } y(-3) = 0$$

então chegamos que $1 = 3 + k \Rightarrow k = -2$. Logo, temos

$$y + 1 - 3\ln(y+1) = 3[x + 4 - 5\ln(x+4)] - 2 \Rightarrow (y+1)e^{y+1} = (x+4)^{15}e^{3(x+4)-2}$$