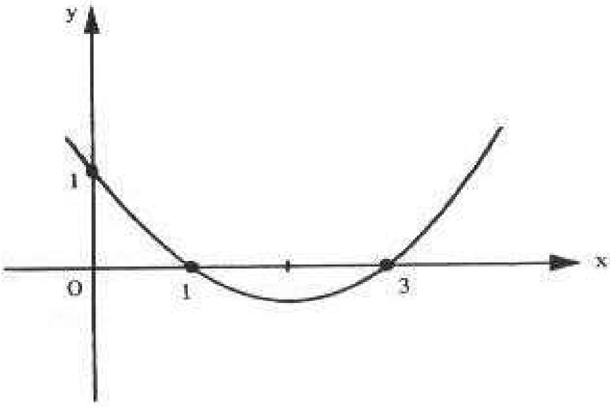

As coordenadas dos pontos devem satisfazer a equação desta parábola, isto é:

$$\begin{cases} 1 = a(0)^2 + b(0) + c \\ 0 = a(1)^2 + b(1) + c \\ 0 = a(3)^2 + b(3) + c \end{cases}$$

ou:

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0, \end{cases}$$

sistema cuja solução é $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{4}{3}$ e $c = 1$.

Logo, a equação da parábola é:

$$y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$$

7.1.6 Problemas Propostos

Em cada um dos problemas 1 a 18, estabelecer a equação de cada uma das parábolas, sabendo que:

1) vértice: $V(0, 0)$; diretriz d: $y = -2$

2) foco: $F(2, 0)$; diretriz d: $x + 2 = 0$

3) vértice: $V(0, 0)$; foco: $F(0, -3)$

4) vértice: $V(0, 0)$; foco: $F(-3, 0)$

5) foco: $F(0, -1)$; d: $y - 1 = 0$

6) vértice: $V(0, 0)$; simetria em relação ao eixo dos y e passando pelo ponto $P(2, -3)$.

7) vértice: $V(-2, 3)$; foco: $F(-2, 1)$

8) vértice: $V(2, -1)$; foco: $F(5, -1)$

9) vértice: $V(4, 1)$; diretriz d: $x + 4 = 0$

10) vértice: $V(0, 0)$; eixo $y = 0$; passa por $(4, 5)$.

11) vértice: $V(-4, 3)$; foco: $F(-4, 1)$.

12) foco: $F(2, 3)$; diretriz: $y = -1$

13) foco: $F(6, 4)$; diretriz: $y = -2$

14) foco: $F(3, -1)$; diretriz: $x = \frac{1}{2}$

15) vértice: $V(1, 3)$; eixo paralelo ao eixo dos x, passando pelo ponto $P(-1, -1)$.

16) eixo de simetria paralelo ao eixo dos y e passa pelos pontos $A(0, 0)$, $B(1, 1)$ e $C(3, 1)$.

17) eixo de simetria paralelo ao eixo dos y e passa pelos pontos $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 0)$ e $P_3(2, 0)$.

18) eixo paralelo a $y = 0$ e passa por $P_1(-2, 4)$, $P_2(-3, 2)$ e $P_3(-11, -2)$.

Em cada um dos problemas 19 a 34, determinar o vértice, o foco, uma equação para a diretriz e uma equação para o eixo da parábola de equação dada. Esboçar o gráfico.

19) $x^2 = -12y$

20) $y^2 = -100x$

21) $x^2 = 10y$

22) $y^2 - x = 0$

23) $y^2 = -3x$

24) $x^2 + 4x + 8y + 12 = 0$

25) $x^2 - 2x - 20y - 39 = 0$

26) $y^2 + 4y + 16x - 44 = 0$

27) $y^2 + 2y - 16x - 31 = 0$

28) $y^2 - 16x + 2y + 49 = 0$

29) $y^2 - 12x - 12 = 0$

30) $y = x^2 - 4x + 2$

31) $x^2 = 12(y - 6)$

32) $y = 4x - x^2$

33) $8x = 10 - 6y + y^2$

34) $6y = x^2 - 8x + 14$

7.1.6.1 *Respostas dos problemas propostos*

1) $x^2 = 8y$

2) $y^2 = 8x$

3) $x^2 = -12y$

4) $y^2 = -12x$

5) $x^2 = -4y$

6) $3x^2 + 4y = 0$

7) $x^2 + 4x + 8y - 20 = 0$

8) $y^2 + 2y - 12x + 25 = 0$

9) $y^2 - 2y - 32x + 129 = 0$

10) $4y^2 - 25x = 0$

11) $x^2 + 8x + 8y - 8 = 0$

12) $(x - 2)^2 = 8(y - 1)$

13) $(x - 6)^2 = 12(y - 1)$

14) $(y + 1)^2 = 5(x - \frac{7}{4})$

15) $(y - 3)^2 = -8(x - 1)$

16) $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$

17) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$

18) $x = -\frac{1}{4}y^2 + 2y - 6$

19) $V(0, 0)$, $F(0, -3)$, $y = 3$, $x = 0$

20) $V(0, 0)$, $F(-25, 0)$, $x = 25$, $y = 0$

21) $V(0, 0)$, $F(0, \frac{5}{2})$, $y = -\frac{5}{2}$, $x = 0$

22) $V(0, 0)$, $F(\frac{1}{4}, 0)$, $x = -\frac{1}{4}$, $y = 0$

23) V(0, 0), $F(-\frac{3}{4}, 0)$, $x = \frac{3}{4}$, y = 0

24) V(-2, -1), F(-2, -3), y = 1, x = -2

25) V(1, -2), F(1, 3), y = -7, x = 1

26) V(3, -2), F(-1, -2), x = 7, y = - 2

27) V(-2, -1), F(2, -1), x = -6, y = -1

28) V(3, -1), F(7, -1), x = -1, y = -1

29) V(-1, 0), F(2, 0), x = -4, y = 0

30) V(2, -2), $F(2, -\frac{7}{4})$, $y = -\frac{9}{4}$, x = 2

31) V(0, 6), F(0, 9), y = 3, x = 0

32) V(2, 4), $F(2, \frac{15}{4})$, 4y - 17 = 0, x - 2 = 0

33) $V(\frac{1}{8}, 3)$, $F(\frac{17}{8}, 3)$, 8x + 15 = 0, y - 3 = 0

34) $V(4, -\frac{1}{3})$, $F(4, \frac{7}{6})$, 6y + 11 = 0, x - 4 = 0

7.2 A Elipse

Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.

Consideremos no plano dois pontos distintos, F_1 e F_2, tal que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$. Seja um número real a tal que $2a > 2c$.

Ao conjunto de todos os pontos P do plano tais que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

ou:

$$|\overrightarrow{PF_1}| + |\overrightarrow{PF_2}| = 2a$$

dá-se o nome de elipse (Fig. 7.2-a).

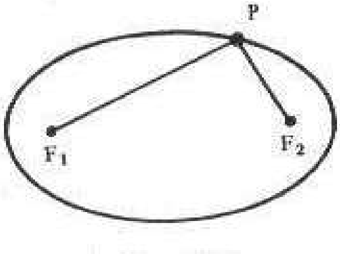

Figura 7.2-a

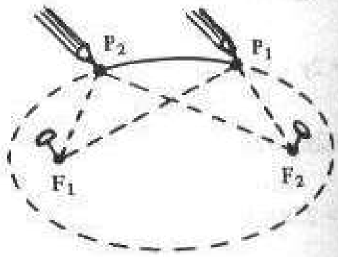

Figura 7.2-b

Para determinar os focos precisamos do valor de c:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$9 = 4 + c^2$$
$$c^2 = 5$$
$$c = \sqrt{5}$$

Portanto, os focos são:

$F_1(1-\sqrt{5}, 2)$ e $F_2(1+\sqrt{5}, 2)$

Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

7.2.4 Problemas Propostos

Em cada um dos problemas 1 a 8, determinar os vértices A_1 e A_2, os focos e a excentricidade das elipses dadas. Esboçar o gráfico.

1) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

2) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{100} = 1$

3) $x^2 + 25y^2 = 25$

4) $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$

5) $4x^2 + 9y^2 = 25$

6) $4x^2 + y^2 = 1$

7) $4x^2 + 25y^2 = 1$

8) $9x^2 + 25y^2 = 25$

Em cada um dos problemas 9 a 22, determinar a equação da elipse que satisfaz as condições dadas.

9) eixo maior mede 10 e focos $(\pm 4,0)$.

10) centro $C(0,0)$, um foco $F(\frac{3}{4},0)$ e um vértice $A(1,0)$.

11) centro $C(0,0)$, um foco $F(0,-\sqrt{5})$ e eixo menor mede 4.

12) centro $C(0,0)$, eixo menor mede 6, focos no eixo dos x e passa pelo ponto $P(-2\sqrt{5},2)$.

13) centro $C(0,0)$, focos no eixo dos x, excentricidade $e=\frac{2}{3}$ e passa pelo ponto $P(2,-\frac{5}{3})$.

14) vértices $A(0,\pm 6)$ e passando por $P(3,2)$.

15) centro $C(2,4)$, um foco $F(5,4)$ e excentricidade $\frac{3}{4}$.

16) eixo maior mede 10 e focos $F_1(2,-1)$ e $F_2(2,5)$.

17) centro $C(-3,0)$, um foco $F(-1,0)$ e tangente ao eixo dos y.

18) centro $C(-3,4)$, semi-eixos de comprimento 4 e 3 e eixo maior paralelo ao eixo dos x.

19) mesmos dados do problema anterior mas com eixo paralelo ao eixo dos y.

20) vértices $A_1(-1,2)$, $A_2(-7,2)$ e a medida do eixo menor igual a 2.

21) centro $C(2,-1)$, tangente aos eixos coordenados e eixos de simetria paralelos aos eixos coordenados.

22) vértices $A_1(1,-4)$ e $A_2(1,8)$, excentricidade $e=\frac{2}{3}$.

Em cada um dos problemas 23 a 28, determinar o centro, os vértices A_1 e A_2, os focos e a excentricidade das elipses dadas. Esboçar o gráfico.

23) $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$

24) $25x^2+16y^2+50x+64y-311=0$

25) $4x^2+9y^2-24x+18y+9=0$

26) $16x^2 + y^2 + 64x - 4y + 52 = 0$

27) $16x^2 + 9y^2 - 96x + 72y + 144 = 0$

28) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$

7.2.5.1 *Respostas de problemas propostos*

1) $C(0, 0)$, $A(\pm 10, 0)$, $F(\pm 8, 0)$, $e = \frac{4}{5}$

2) $C(0, 0)$, $A(0, \pm 10)$, $F(0, \pm 8)$, $e = \frac{4}{5}$

3) $C(0, 0)$, $A(\pm 5, 0)$, $F(\pm 2\sqrt{6}, 0)$, $e = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

4) $C(0, 0)$, $A(0, \pm 3)$, $F(0, \pm 2)$, $e = \frac{2}{3}$

5) $C(0, 0)$, $A(\pm \frac{5}{2}, 0)$, $F(\pm \frac{5\sqrt{5}}{6}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

6) $C(0, 0)$, $A(0, \pm 1)$, $F(0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $C(0, 0)$, $A(\pm \frac{1}{2}, 0)$, $F(\pm \frac{\sqrt{21}}{10}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$

8) $C(0, 0)$, $A(\pm \frac{5}{3}, 0)$, $F(\pm \frac{4}{3}, 0)$, $e = \frac{4}{5}$

9) $9x^2 + 25y^2 = 225$

10) $7x^2 + 16y^2 = 7$

11) $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

12) $x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

13) $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$

14) $\frac{8x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$

15) $7x^2 + 16y^2 - 28x - 128y + 172 = 0$

16) $25x^2 + 16y^2 - 100x - 64y - 236 = 0$

17) $5x^2 + 9y^2 + 30x = 0$

18) $9x^2 + 16y^2 + 54x - 128y + 193 = 0$

19) $16x^2 + 9y^2 + 96x - 72y + 144 = 0$

20) $x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 43 = 0$

21) $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$

22) $9x^2 + 5y^2 - 18x - 20y - 151 = 0$

23) $C(2, -3)$, $A_1(-2, -3)$, $A_2(6, -3)$, $F(2 \pm \sqrt{7}, -3)$, $e = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

24) $C(-1, -2)$, $A_1(-1, -7)$, $A_2(-1, 3)$, $F_1(-1, -5)$, $F_2(-1, 1)$ $e = \dfrac{3}{5}$

25) $C(3, -1)$, $A_1(6, -1)$, $A_2(0, -1)$, $F(3 \pm \sqrt{5}, -1)$, $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

26) $C(-2, 2)$, $A_1(-2, -2)$, $A_2(-2, 6)$, $F(-2, 2 \pm \sqrt{15})$, $e = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

27) $C(3, -4)$, $A_1(3, -8)$, $A_2(3, 0)$, $F(3, -4 \pm \sqrt{7})$, $e = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

28) $C(1, 2)$, $A_1(-2, 2)$, $A_2(4, 2)$, $F(1 \pm \sqrt{5}, 2)$, $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

7.3 A Hipérbole

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é constante.

Consideremos no plano dois pontos distintos F_1 e F_2 tal que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$. Seja um número real a tal que $2a < 2c$.

Sendo:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 9 + 7$

$c = 4,$

os focos são: $F_1(-6, 3)$ e $F_2(2, 3)$.

7.3.4 Problemas Propostos

Em cada um dos problemas 1 a 10, determinar os vértices, os focos e a excentricidade das hipérboles dadas. Esboçar o gráfico.

1) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1$

2) $\frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{64} = 1$

3) $9x^2 - 16y^2 = 144$

4) $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0$

5) $x^2 - 2y^2 - 8 = 0$

6) $3x^2 - y^2 + 3 = 0$

7) $x^2 - y^2 = 1$

8) $x^2 - y^2 = 2$

9) $y^2 - 4x^2 = 1$

10) $2y^2 - 4x^2 = 1$

Em cada um dos problemas 11 a 24, determinar a equação da hipérbole que satisfaz as condições dadas.

11) focos $F(\pm 5, 0)$, vértices $A(\pm 3, 0)$

12) focos $F(0, \pm 3)$, vértices $A(0, \pm 2)$

13) vértices $A(\pm 4, 0)$, passando por $P(8, 2)$

14) centro $C(0, 0)$, eixo real sobre Oy, $b = 8$ e excentricidade $\frac{5}{3}$

15) focos $F(0, \pm 5)$, comprimento do eixo imaginário 4

16) vértices $A(\pm 3, 0)$, equações das assíntotas $y = \pm 2x$

17) vértices em $(5, -2)$ e $(3, -2)$, um foco em $(7, -2)$

18) vértices em $(5, 5)$ e $(5, -1)$, excentricidade $e = 2$

19) centro $C(5, 1)$, um foco em $(9, 1)$, eixo imaginário mede $4\sqrt{2}$

20) focos $F_1(-1, -5)$ e $F_2(5, -5)$, hipérbole eqüilátera

21) vértices $A_1(-3, -4)$ e $A_2(-3, 4)$, hipérbole eqüilátera

22) centro $C(2, -3)$, eixo real paralelo a Oy, passando por $(3, -1)$ e $(-1, 0)$

23) centro $C(-2, 1)$, eixo real paralelo a Ox, passando por $(0, 2)$ e $(-5, 6)$

24) focos em $(3, 4)$ e $(3, -2)$, excentricidade $e = 2$

Em cada um dos problemas 25 a 30, determinar o centro, os vértices, os focos e a excentricidade das hipérboles dadas. Esboçar o gráfico.

25) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$

26) $x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 31 = 0$

27) $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$

28) $4x^2 - y^2 - 32x + 4y + 24 = 0$

29) $9x^2 - y^2 + 36x + 6y + 63 = 0$

30) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$

31) Obter a equação reduzida resultante de uma translação de eixos, classificar, dar os elementos e representar graficamente as equações:

a) $x^2 + 4y^2 - 4x - 24y + 36 = 0$

b) $x^2 - y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$

c) $y^2 - 8x + 6y + 17 = 0$

d) $3x^2 + 2y^2 - 12x + 8y + 19 = 0$

e) $x^2 + 2x + 8y - 15 = 0$

f) $9x^2 - 4y^2 - 54x + 45 = 0$

g) $9y^2 - 25x^2 - 90y - 50x = 25$

7.3.4.1 *Respostas dos problemas propostos*

1) $A(\pm 10, 0)$, $F(\pm 2\sqrt{41}, 0)$, $e = \dfrac{\sqrt{41}}{5}$

2) $A(0, \pm 10)$, $F(0, \pm 2\sqrt{41})$, $e = \dfrac{\sqrt{41}}{5}$

3) $A(\pm 4, 0)$, $F(\pm 5, 0)$, $e = \dfrac{5}{4}$

4) $A(0, \pm 2)$, $F(0, \pm 3)$, $e = \dfrac{3}{2}$

5) $A(\pm 2\sqrt{2}, 0)$, $F(\pm 2\sqrt{3}, 0)$, $e = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

6) $A(0, \pm\sqrt{3})$, $F(0, \pm 2)$, $e = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

7) $A(\pm 1, 0)$, $F(\pm\sqrt{2}, 0)$, $e = \sqrt{2}$

8) $A(\pm\sqrt{2}, 0)$, $F(\pm 2, 0)$, $e = \sqrt{2}$

9) $A(0, \pm 1)$, $F(0, \pm \frac{\sqrt{5}}{2})$, $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$

10) $A(0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$, $F(0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$, $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$

11) $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$

12) $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0$

13) $x^2 - 12y^2 - 16 = 0$

14) $16y^2 - 9x^2 - 576 = 0$

15) $\frac{y^2}{21} - \frac{x^2}{4} = 1$

16) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

17) $8x^2 - y^2 - 64x - 4y + 116 = 0$

18) $x^2 - 3y^2 - 10x + 12y + 40 = 0$

19) $x^2 - y^2 - 10x + 2y + 16 = 0$

20) $2x^2 - 2y^2 - 8x - 20y - 51 = 0$

21) $x^2 - y^2 + 6x + 25 = 0$

22) $5x^2 - 8y^2 - 20x - 48y - 25 = 0$

23) $24x^2 - 5y^2 + 96x + 10y = 0$

24) $12y^2 - 4x^2 - 24y + 24x - 51 = 0$

25) $C(1, -2)$, $A_1(-1, -2)$, $A_2(3, -2)$, $F(1 \pm \sqrt{13}, -2)$, $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$

26) $C(-3, 3)$, $A_1(-5, 3)$, $A_2(-1, 3)$, $F(-3 \pm \sqrt{5}, 3)$, $e = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

27) $C(3, 1)$, $A_1(3, -2)$, $A_2(3, 4)$, $F(3, 1 \pm \sqrt{13})$, $e = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

28) $C(4, 2)$, $A_1(1, 2)$, $A_2(7, 2)$, $F(4 \pm 3\sqrt{5}, 2)$, $e = \sqrt{5}$

29) $C(-2, 3)$, $A_1(-2, -3)$, $A_2(-2, 9)$, $F(-2, 3 \pm 2\sqrt{10})$, $e = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$

30) $C(2, -1)$, $A_1(2, -5)$, $A_2(2, 3)$, $F_1(2, -6)$, $F_2(2, 4)$, $e = \dfrac{5}{4}$

31) *a*) $\dfrac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$, elipse, eixo maior 4, eixo menor 2, focos $F(2 \pm \sqrt{3}, 3)$

b) $x'^2 - y'^2 = 1$, hipérbole, eixo real 2, eixo imaginário 2, $F(4 \pm \sqrt{2}, -2)$

c) $y'^2 = 8x'$, parábola, $p = 4$, diretriz: $x = -1$, $F(3, -3)$

d) $3x'^2 + 2y'^2 = 1$, elipse, eixo maior $\sqrt{2}$, eixo menor $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $F(2, -2 \pm \dfrac{\sqrt{6}}{6})$

e) $x'^2 = -8y'$, parábola, $p = -4$, $F(-1, 0)$, diretriz: $y = 4$

f) $\dfrac{x'^2}{4} - \dfrac{y'^2}{9} = 1$, hipérbole, eixo real 4, eixo imaginário 6, $F(3 \pm \sqrt{13}, 0)$

g) $\dfrac{y'^2}{25} - \dfrac{x'^2}{9} = 1$, hipérbole, eixo real 10, eixo imaginário 6, $F(-1, 5 \pm \sqrt{34})$.

Observação – A equação geral do 2º grau a duas variáveis, $ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$, onde pelo menos um dos coeficientes a, b, c é diferente de zero, representa uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole e será estudada como aplicação das formas quadráticas no plano em **Álgebra Linear***.

---

* Ver Capítulo 7 de Álgebra Linear, **Editora McGraw-Hill**, dos autores.