$\boxed{5}$ Se f é definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, então $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \text{ então } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

Observe que se $n = 1$, então $\mathbf{x} = x$ e $\mathbf{a} = a$, e (5) é exatamente a definição do limite para as funções de uma única variável. Para o caso $n = 2$, temos $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b \rangle$ e $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, de modo que (5) se torna a Definição 1. Se $n = 3$, então $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b, c \rangle$, e (5) é a definição de limite de uma função de três variáveis. Em cada caso, a definição de continuidade pode ser escrita como

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

14.2 EXERCÍCIOS

1. Suponha que $\lim_{(x,y) \to (3,1)} f(x, y) = 6$. O que podemos dizer do valor de $f(3, 1)$? E se a função f for contínua?

2. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
   (a) A temperatura externa como função da latitude, da longitude e do tempo.
   (b) A altura acima do nível do mar como função da longitude, da latitude e do tempo.
   (c) O custo da tarifa do táxi como função da distância percorrida e do tempo gasto.

3-4 Utilize uma tabela de valores numéricos de $f(x, y)$ para (x, y) perto da origem para conjecturar sobre o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \to (0, 0)$. Em seguida, explique por que sua conjectura está correta.

3. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy}$

4. $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

5-22 Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

5. $\lim_{(x,y) \to (5,-2)} (x^5 + 4x^3y - 5xy^2)$

6. $\lim_{(x,y) \to (6,3)} xy \cos(x - 2y)$

7. $\lim_{(x,y) \to (2,1)} \dfrac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$

8. $\lim_{(x,y) \to (1,0)} \ln\left(\dfrac{1 + y^2}{x^2 + xy}\right)$

9. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{y^4}{x^4 + 3y^4}$

10. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^2 + \operatorname{sen}^2 y}{2x^2 + y^2}$

11. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy \cos y}{3x^2 + y^2}$

12. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{6x^3y}{2x^4 + y^4}$

13. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

14. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

15. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^2ye^y}{x^4 + 4y^2}$

16. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}^2 y}{x^2 + 2y^2}$

17. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

18. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy^4}{x^2 + y^8}$

19. $\lim_{(x,y,z) \to (3,0,1)} e^{-xy} \operatorname{sen}(\pi z/2)$

20. $\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \dfrac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

21. $\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \dfrac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$

22. $\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \dfrac{yz}{x^2 + 4y^2 + 9z^2}$

23-24 Utilize um gráfico feito por computador para explicar por que o limite não existe.

23. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$

24. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}$

25-26 Determine $h(x, y) = g(f(x, y))$ e o conjunto no qual h é contínua.

25. $g(t) = t^2 + \sqrt{t}$, $\quad f(x, y) = 2x + 3y - 6$

26. $g(t) = t + \ln t$, $\quad f(x, y) = \dfrac{1 - xy}{1 + x^2y^2}$

27-28 Trace o gráfico da função e observe onde ela é descontínua. Em seguida, utilize a fórmula para explicar o que você observou.

27. $f(x, y) = e^{1/(x-y)}$

28. $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$

29-38 Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

29. $F(x, y) = \dfrac{1}{x^2 - y}$

30. $F(x, y) = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

31. $F(x, y) = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{y})$

32. $F(x, y) = e^{x^2y} + \sqrt{x + y^2}$

33. $G(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

34. $G(x, y) = \operatorname{tg}^{-1}((x + y)^{-2})$

35. $f(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{y}}{x^2 - y^2 + z^2}$

36. $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$

37. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

38. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

39-41 Utilize coordenadas polares para determinar o limite. [Se (r, θ) são as coordenadas polares do ponto (x, y), com $r \geq 0$, observe que $r \to 0^+$ quando $(x, y) \to (0, 0)$.]

39. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

40. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

41. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$

42. No início desta seção consideramos a função

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

e conjecturamos que $f(x, y) \to 1$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ com base em evidências numéricas. Utilize coordenadas polares para comprovar o valor do limite. Em seguida, faça o gráfico da função.

43. Trace o gráfico e analise a continuidade da função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy} & \text{se } xy \neq 0 \\ 1 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

44. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \quad \text{ou} \quad y \geq x^4 \\ 1 & \text{se } 0 < y < x^4 \end{cases}$$

(a) Mostre que $f(x, y) \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ por qualquer caminho da forma $y = mx^a$ passando por $(0, 0)$ com $a < 4$.

(b) Apesar da parte (a), mostre que f é descontínua em $(0, 0)$.

(c) Mostre que f é descontínua em duas curvas inteiras.

45. Mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ é contínua em $\mathbb{R}^n$. [*Sugestão*: Considere $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$.]

46. Se $\mathbf{c} \in V_n$, mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ é contínua em $\mathbb{R}^n$.

14.3 DERIVADAS PARCIAIS

Em um dia quente, a umidade muito alta aumenta a sensação de calor, ao passo que, se o ar está muito seco, temos a sensação de temperatura mais baixa do que a indicada no termômetro. O Serviço Meteorológico do Canadá introduziu o *humidex* (ou índice de temperatura-umidade) para descrever os efeitos combinados da temperatura e umidade. O humidex I é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real for T e a umidade relativa for H. Deste modo, I é uma função de T e H e podemos escrever $I = f(T, H)$. A tabela de valores de I a seguir é a parte de uma tabela compilada pelo Serviço Meteorológico.

TABELA 1
Índice humidex I como função da temperatura e umidade

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°C) T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Se nos concentrarmos na coluna assinalada da tabela que corresponde à umidade relativa de $H = 60\%$, estaremos considerando o humidex como uma função de uma única variável T para um valor fixado de H. Vamos escrever $g(T) = f(T, 60)$. Então, $g(T)$ descreve como o humidex I aumenta à medida que a temperatura real T aumenta quando a umidade relativa é 60%. A derivada de g quando $T = 30$ °C é a taxa de variação de I com relação a T quando $T = 30$ °C:

$$g'(30) = \lim_{h \to 0} \frac{g(30 + h) - g(30)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30 + h, 60) - f(30, 60)}{h}$$