O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ intercepta o plano $x - y + z = 1$ em uma elipse (Figura 6). O Exemplo 5 questiona o valor máximo de $f$ quando $(x, y, z)$ pertence a essa elipse.

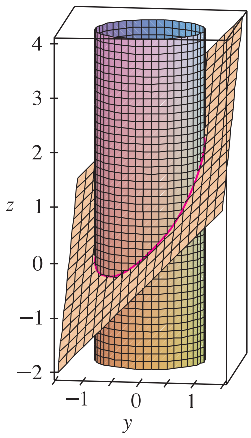


**FIGURA 6**

SOLUÇÃO Maximizamos a função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeita às restrições $g(x, y, z) = x - y + z = 1$ e $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$. A condição de Lagrange é $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, de modo que devemos resolver as equações

**17** $$1 = \lambda + 2x\mu$$

**18** $$2 = -\lambda + 2y\mu$$

**19** $$3 = \lambda$$

**20** $$x - y + z = 1$$

**21** $$x^2 + y^2 = 1$$

Substituindo $\lambda = 3$ [de $\boxed{19}$ em $\boxed{17}$], obtemos $2x\mu = -2$, e então $x = -1/\mu$. Analogamente, $\boxed{18}$ dá $y = 5/(2\mu)$. Substituindo em $\boxed{21}$, temos

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1$$

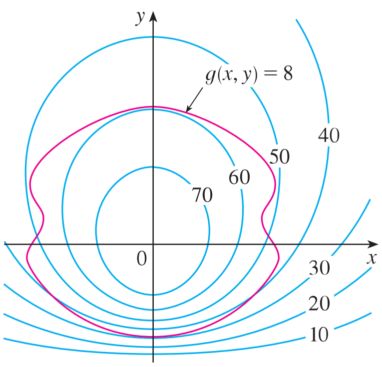
e $\mu^2 = \frac{29}{4}$, $\mu = \pm\sqrt{29}/2$. Então $x = \mp 2/\sqrt{29}$, $y = \pm 5/\sqrt{29}$, e, de $\boxed{20}$, $z = 1 - x + y = 1 \pm 7/\sqrt{29}$. Os valores correspondentes de $f$ são

$$\mp\frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

Portanto, o valor máximo de $f$ na curva dada é $3 + \sqrt{29}$.

## 14.8 Exercícios

**1.** Na figura estão um mapa de contorno de $f$ e a curva de equação $g(x, y) = 8$. Estime os valores máximo e mínimo de $f$ sujeita à restrição $g(x, y) = 8$. Explique suas razões.




**2.** (a) Use uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Na mesma tela, trace diversas curvas da forma $x^2 + y = c$ até que você encontre duas que apenas toquem o círculo. Qual o significado dos valores de $c$ dessas duas curvas?

(b) Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + y$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$. Compare sua resposta com a da parte (a).

**3–14** Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

**3.** $f(x, y) = x^2 + y^2$; $xy = 1$

**4.** $f(x, y) = 3x + y$; $x^2 + y^2 = 10$

**5.** $f(x, y) = y^2 - x^2$; $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$

**6.** $f(x, y) = e^{xy}$; $x^3 + y^3 = 16$

**7.** $f(x, y, z) = 2x + 2y + z$; $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

**8.** $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x + y + z = 12$

**9.** $f(x, y, z) = xyz$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

**10.** $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

**11.** $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x^4 + y^4 + z^4 = 1$

**12.** $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

**13.** $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$; $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$

**14.** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$; $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

**15–18** Determine os valores extremos de $f$ sujeita a ambas as restrições.

**15.** $f(x, y, z) = x + 2y$; $x + y + z = 1$, $y^2 + z^2 = 4$

**16.** $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$; $x + y - z = 0$, $x^2 + 2z^2 = 1$

**17.** $f(x, y, z) = yz + xy$; $xy = 1$, $y^2 + z^2 = 1$

**18.** $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x - y = 1$, $y^2 - z^2 = 1$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

**1.** As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

**19–21** Determine os valores extremos de $f$ na região descrita pela desigualdade.

**19.** $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 4y, \qquad x^2 + y^2 \leqslant 9$

**20.** $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5, \qquad x^2 + y^2 \leqslant 16$

**21.** $f(x, y) = e^{-xy}, \qquad x^2 + 4y^2 \leqslant 1$

---

**22.** Considere o problema de maximizar a função $f(x, y) = 2x + 3y$ sujeita à restrição $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$.

(a) Tente usar multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

(b) $f(25,0)$ dá um valor maior que o obtido na parte (a)?

(c) Resolva o problema traçando a equação da restrição e diversas curvas de nível de $f$.

(d) Explique por que o método dos multiplicadores de Lagrange falha em resolver o problema.

(e) Qual é o significado de $f(9, 4)$?

**23.** Considere o problema de minimizar a função $f(x, y) = x$ na curva $y^2 + x^4 - x^3 = 0$ (uma piriforme).

(a) Tente usar multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

(b) Mostre que o valor mínimo é $f(0, 0) = 0$ mas que a condição $\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$ não é satisfeita para nenhum valor de $\lambda$.

(c) Explique por que os multiplicadores de Lagrange falham em encontrar o mínimo neste caso.

SCA **24.** (a) Se seu sistema de computação algébrica traça o gráfico de curvas definidas implicitamente, use-o para estimar os valores mínimo e máximo de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ sujeita à restrição $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ por métodos gráficos.

(b) Resolva o problema da parte (a) com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange. Use um SCA para resolver as equações numericamente. Compare sua resposta com a da parte (a).

**25.** A produção total $P$ de certo produto depende da quantidade $L$ de trabalho empregado e da quantidade $K$ de capital investido. Nas Seções 14.1 e 14.3 discutimos como o modelo Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ segue a partir de determinadas suposições econômicas, onde $b$ e $\alpha$ são constantes positivas e $\alpha < 1$. Se o custo por unidade de trabalho for $m$ e o custo por unidade de capital for $n$, e uma companhia puder gastar somente uma quantidade $p$ de dinheiro como despesa total, então a maximização da produção $P$ estará sujeita à restrição $mL + nK = p$. Mostre que a produção máxima ocorre quando

$$L = \frac{\alpha p}{m} \qquad \text{e} \qquad K = \frac{(1 - \alpha)p}{n}$$

**26.** Em relação ao Problema 25, suponha agora que a produção seja fixada em $bL^{\alpha}K^{1-\alpha} = Q$, onde $Q$ é uma constante. Quais valores de $L$ e $K$ minimizam a função custo $C(L, K) = mL + nK$?

**27.** Utilize os multiplicadores de Lagrange para demonstrar que o retângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante $p$, é um quadrado.

**28.** Use multiplicadores de Lagrange para demonstrar que o triângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante $p$, é equilátero.
*Dica*: Utilize a fórmula de Heron para a área:

$$A = \sqrt{s(s - x)(s - y)(s - z)}$$

onde $s = p/2$ e $x$, $y$, $z$ são os comprimentos dos lados.

**29–41** Utilize os multiplicadores de Lagrange para dar uma solução alternativa aos exercícios da Seção 14.7 indicados.

| | |
|---|---|
| **29.** Exercício 39 | **30.** Exercício 40 |
| **31.** Exercício 41 | **32.** Exercício 42 |
| **33.** Exercício 43 | **34.** Exercício 44 |
| **35.** Exercício 45 | **36.** Exercício 46 |
| **37.** Exercício 47 | **38.** Exercício 48 |
| **39.** Exercício 49 | **40.** Exercício 50 |
| **41.** Exercício 53 | |

---

**42.** Determine os volumes máximo e mínimo da caixa retangular cuja superfície tem 1 500 cm² e cuja soma dos comprimentos das arestas é 200 cm.

**43.** O plano $x + y + 2z = 2$ intercepta o paraboloide $z = x^2 + y^2$ em uma elipse. Determine os pontos dessa elipse que estão mais próximo e mais longe da origem.

**44.** O plano $4x - 3y + 8z = 5$ intercepta o cone $z^2 = x^2 + y^2$ em uma elipse.

(a) Faça os gráficos do cone, do plano e da elipse.

(b) Use os multiplicadores de Lagrange para achar os pontos mais alto e mais baixo da elipse.

SCA **45–46** Ache os valores de máximo e mínimo da função $f$ sujeita às restrições dadas. Utilize um sistema de computação algébrica para resolver o sistema de equações proveniente do uso dos multiplicadores de Lagrange. (Se seu SCA achar somente uma solução, você pode precisar do uso de comandos adicionais.)

**45.** $f(x, y, z) = ye^{x-z}; \quad 9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36, \quad xy + yz = 1$

**46.** $f(x, y, z) = x + y + z; \quad x^2 - y^2 = z, \quad x^2 + z^2 = 4$

---

**47.** (a) Determine o valor máximo de

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

sendo que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números positivos e $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$, onde c é uma constante.

(b) Deduza do item (a) que se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números positivos, então

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Essa desigualdade diz que a média geométrica de $n$ números não pode ser maior que a média aritmética deles. Sob que circunstâncias as duas médias são iguais?

**48.** (a) Maximize $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ sujeita às restrições $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ e $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.

(b) Tome

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum a_j^2}} \qquad \text{e} \qquad y_i = \frac{b_i}{\sqrt{\sum b_j^2}}$$

para mostrar que

$$\sum a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum a_j^2}\,\sqrt{\sum b_j^2}$$

para todos os números $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Essa desigualdade é conhecida como a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.