Mas, $\qquad \dfrac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \qquad$ e $\qquad \dfrac{\partial}{\partial x}(y) = 0$

portanto, essa equação se torna

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Se $\partial F/\partial z \neq 0$, resolvemos para $\partial z/\partial x$ e obtemos a primeira fórmula das Equações 7. A fórmula para $\partial z/\partial y$ é obtida de uma maneira semelhante.

7
$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}}$$

Novamente, uma versão do **Teorema da Função Implícita** estipula condições sob as quais nossa suposição é válida: se F é definida dentro de uma esfera contendo (a, b, c), onde $F(a, b, c) = 0$, $F_z(a, b, c) \neq 0$ e F_x, F_y e F_z são contínuas dentro da esfera, então a equação $F(x, y, z) = 0$ define z como uma função de x e y perto do ponto (a, b, c), e as derivadas parciais dessa função são dadas por $\boxed{7}$.

EXEMPLO 9 Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

SOLUÇÃO Seja $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Então, das Equações 7, temos

A solução do Exemplo 9 deve ser comparada com a do Exemplo 4 na Seção 14.3.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

14.5 Exercícios

1–6 Use a Regra da Cadeia para achar dz/dt ou dw/dt.

1. $z = x^2 + y^2 + xy, \quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = e^t$

2. $z = \cos(x + 4y), \quad x = 5t^4, \quad y = 1/t$

3. $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2},, \quad x = \ln t, \quad y = \cos t$

4. $z = \operatorname{tg}^{-1}(y/x), \quad x = e^t, \quad y = 1 - e^{-t}$

5. $w = xe^{y/z}, \quad x = t^2, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + 2t$

6. $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t, \quad z = \operatorname{tg} t$

7–12 Use a Regra da Cadeia para achar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

7. $z = x^2y^3, \quad x = s\cos t, \quad y = s \operatorname{sen} t$

8. $z = \operatorname{arcsen}(x - y), \quad x = s^2 + t^2, \quad y = 1 - 2st$

9. $z = \operatorname{sen}\theta\cos\phi, \quad \theta = st^2, \quad \phi = s^2t$

10. $z = e^{x+2y}, \quad x = s/t, \quad y = t/s$

11. $z = e^r\cos\theta, \quad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

12. $z = \operatorname{tg}(u/v), \quad u = 2s + 3t, \quad v = 3s - 2t$

13. Se $z = f(x, y)$, onde f é diferenciável, e

$x = g(t)$	$y = h(t)$
$g(3) = 2$	$h(3) = 7$
$g'(3) = 5$	$h'(3) = -4,$
$f_x(2, 7) = 6$	$f_y(2, 7) = -8$

determine dz/dt quando $t = 3$.

14. Seja $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$, onde F, u e v são diferenciáveis, e

$u(1, 0) = 2$	$v(1, 0) = 3$
$u_s(1, 0) = -2$	$v_s(1, 0) = 5$
$u_t(1, 0) = 6$	$v_t(1, 0) = 4$
$F_u(2, 3) = -1$	$F_v(2, 3) = 10$

Encontre $W_s(1, 0)$ e $W_t(1, 0)$.

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

15. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(u, v) = f(e^u + \text{sen}\, v, e^u + \cos v)$. Use a tabela de valores para calcular $g_u(0, 0)$ e $g_v(0, 0)$.

	f	g	f_x	f_y
(0, 0)	3	6	4	8
(1, 2)	6	3	2	5

16. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$. Use a tabela de valores do Exercício 15 para calcular $g_r(1, 2)$ e $g_s(1, 2)$.

17–20 Utilize um diagrama em árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso dado. Suponha que todas as funções sejam diferenciáveis.

17. $u = f(x, y)$, onde $x = x(r, s, t)$, $y = y(r, s, t)$

18. $R = f(x, y, z, t)$, onde $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, $t = t(u, v, w)$

19. $w = f(r, s, t)$, onde $r = r(x, y)$, $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$

20. $t = f(u, v, w)$, onde $u = u(p, q, r, s)$, $v = v(p, q, r, s)$, $w = w(p, q, r, s)$

21–26 Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas.

21. $z = x^2 + xy^3$, $x = uv^2 + w^3$, $y = u + ve^w$;

$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial w}$ quando $u = 2$, $v = 1$, $w = 0$

22. $u = \sqrt{r^2 + s^2}$, $r = y + x\cos t$, $s = x + y\,\text{sen}\, t$;

$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$ quando $x = 1$, $y = 2$, $t = 0$

23. $w = xy + yz + zx$, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = r\theta$;

$\dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ quando $r = 2$, $\theta = \pi/2$

24. $P = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, $u = xe^y$, $v = ye^x$, $w = e^{xy}$;

$\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}$ quando $x = 0$, $y = 2$

25. $N = \dfrac{p + q}{p + r}$, $p = u + vw$, $q = v + uw$, $r = w + uv$;

$\dfrac{\partial N}{\partial u}, \dfrac{\partial N}{\partial v}, \dfrac{\partial N}{\partial w}$ quando $u = 2$, $v = 3$, $w = 4$

26. $u = xe^{ty}$, $x = \alpha^2\beta$, $y = \beta^2\gamma$, $t = \gamma^2\alpha$;

$\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}, \dfrac{\partial u}{\partial \beta}, \dfrac{\partial u}{\partial \gamma}$ quando $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$

27–30 Utilize a Equação 6 para determinar dy/dx.

27. $y\cos x = x^2 + y^2$

28. $\cos(xy) = 1 + \text{sen}\, y$

29. $\text{tg}^{-1}(x^2y) = x + xy^2$

30. $e^y\,\text{sen}\, x = x + xy$

31–34 Utilize as Equações 7 para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

31. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

32. $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

33. $e^z = xyz$

34. $yz + x\ln y = z^2$

35. A temperatura em um ponto (x, y) é $T(x, y)$, medida em graus Celsius. Um inseto rasteja, de modo que sua posição após t segundos é dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, onde x e y são medidos em centímetros. A função da temperatura satisfaz $T_x(2, 3) = 4$ e $T_y(2, 3) = 3$. Quão rápido a temperatura aumenta no caminho do inseto depois de três segundos?

36. A produção de trigo W em um determinado ano depende da temperatura média T e do volume anual das chuvas R. Cientistas estimam que a temperatura média anual está crescendo à taxa de 0,15 °C/ano e a quantidade anual de chuva está decrescendo à taxa de 0,1 cm/ano. Eles também estimam que, no atual nível de produção, $\partial W/\partial T = -2$ e $\partial W/\partial R = 8$.

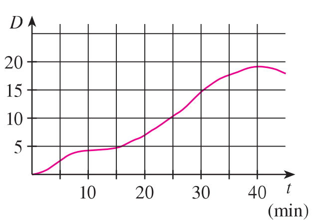
(a) Qual é o significado do sinal dessas derivadas parciais?

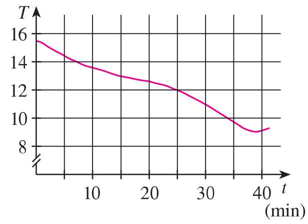
(b) Estime a taxa de variação corrente da produção de trigo dW/dt.

37. A velocidade da propagação do som através do oceano com salinidade de 35 partes por milhar foi modelada pela equação

$$C = 1449{,}2 + 4{,}6T - 0{,}055T^2 + 0{,}00029T^3 + 0{,}016D$$

onde C é a velocidade do som (em metros por segundo), T é a temperatura (em graus Celsius) e D é a profundidade abaixo do nível do mar (em metros). Um mergulhador começa um mergulho tranquilo nas águas oceânicas, e a profundidade do mergulho e a temperatura da água ao redor são registradas nos gráficos a seguir. Estime a taxa de variação (em relação ao tempo) da velocidade do som através do oceano experimentada pelo mergulhador 20 minutos depois do início do mergulho. Quais são as unidades?





38. O raio de um cone circular reto está aumentando em uma taxa de 4,6 cm/s enquanto sua altura está decrescendo em uma taxa de 6,5 cm/s. Em qual taxa o volume do cone está variando quando o raio é 300 cm e a altura é 350 cm?

39. O comprimento ℓ, a largura w e a altura h de uma caixa variam com o tempo. Em um determinado momento, as dimensões são $\ell = 1$ m e $w = h = 2$ m, ℓ e w estão aumentando em uma taxa de 2 m/s enquanto h está decrescendo em uma taxa de 3 m/s. Nesse instante, encontre as taxas em que as seguintes quantidades estão variando.

(a) O volume

(b) A área da superfície

(c) O comprimento da diagonal

40. A voltagem V em um circuito elétrico simples decresce lentamente à medida que a pilha se descarrega. A resistência R aumenta lentamente com o aumento de calor do resistor. Use a Lei de Ohm, $V = IR$, para achar como a corrente I está variando no momento em que $R = 400\ \Omega$, $I = 0{,}08$ A, $dV/dt = -0{,}01$ V/s e $dR/dt = 0{,}03\ \Omega$/s.

41. A pressão de 1 mol de um gás ideal está aumentando em uma taxa de 0,05 kPa/s e a temperatura está aumentando em uma taxa de 0,15 K/s. Use a equação no Exemplo 2 para determinar a taxa de variação do volume quando a pressão for 20 kPa e a temperatura for 320 K.

42. Um fabricante modelou sua função P da produção anual (o valor de toda essa produção em milhões de dólares) como uma função Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1{,}47\, L^{0{,}65}K^{0{,}35}$$

onde L é o número de horas trabalhadas (em milhares) e K é o capital investido (em milhões de dólares). Suponha que quando $L = 30$ e $K = 8$, a força de trabalho esteja decrescendo em uma taxa de 2.000 horas trabalhadas por ano e o capital esteja aumentando em uma taxa de \$ 500.000 por ano. Encontre a taxa de variação da produção.

43. Um lado de um triângulo está aumentando em uma taxa de 3cm/s e um segundo lado está decrescendo em uma taxa de 2 cm/s. Se a área do triângulo permanece constante, a que taxa varia o ângulo entre os lados quando o primeiro lado tem 20 cm de comprimento, o segundo lado tem 30 cm de comprimento e o ângulo é $\pi/6$?

44. Se um som com frequência f_s for produzido por uma fonte se movendo ao longo de uma reta com velocidade v_s e um observador estiver se movendo com velocidade v_o ao longo da mesma reta a partir da direção oposta, em direção à fonte, então a frequência do som ouvido pelo observador é

$$f_o = \left(\frac{c + v_o}{c - v_s}\right) f_s$$

onde c é a velocidade do som, cerca de 332m/s. (Este é o **efeito Doppler**.) Suponha que, em um dado momento, você esteja em um trem que se move a 34 m/s e acelera a 1,2 m/s^2. Um trem se aproxima de você da direção oposta no outro trilho a 40 m/s, acelerando a 1,4 m/s^2, e toca seu apito, com frequência de 460 Hz. Neste instante, qual é a frequência aparente que você ouve e quão rapidamente ela está variando?

45–48 Suponha que todas as funções dadas sejam diferenciáveis.

45. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$, (a) determine $\partial z/\partial r$ e $\partial z/\partial\theta$ e (b) mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

46. Se $u = f(x, y)$, onde $x = e^s \cos t$ e $y = e^s \operatorname{sen} t$, mostre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

47. Se $z = f(x - y)$, mostre que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

48. Se $z = f(x, y)$, onde $x = s + t$ e $y = s - t$, mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$$

49–54 Suponha que todas as funções dadas tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

49. Mostre que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é uma solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[*Dica*: Seja $u = x + at$, $v = x - at$.]

50. Se $u = f(x, y)$, onde $x = e^s \cos t$ e $y = e^s \operatorname{sen} t$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]$$

51. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$, determine $\partial^2 z/\partial r\,\partial s$. (Compare com o Exemplo 7.)

52. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$, e $y = r\operatorname{sen}\theta$, determine (a) $\partial z/\partial r$, (b) $\partial z/\partial\theta$ e (c) $\partial^2 z/\partial r\,\partial\theta$.

53. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$, e $y = r\operatorname{sen}\theta$, mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

54. Suponha que $z = f(x, y)$, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$.

(a) Mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

(b) Determine uma fórmula semelhante para $\partial^2 z/\partial s\,\partial t$.

55. Uma função f é chamada **homogênea de *n*-ésimo grau** se satisfaz a equação $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo t, onde n é um inteiro positivo e f tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

(a) Verifique se $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ é homogênea de grau 3.

(b) Mostre que, se f é homogênea de grau n, então

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$

[*Dica*: Utilize a Regra da Cadeia para derivar $f(tx, ty)$ com relação a t.]

56. Se f é homogênea de grau n, mostre que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)f(x, y)$$

57. Se f é homogênea de grau n, mostre que

$$f_x(tx, ty) = t^{n-1}f_x(x, y)$$

58. Suponha que a equação $F(x, y, z) = 0$ defina implicitamente cada uma das três variáveis x, y e z como funções das outras duas: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$. Se F for diferenciável e F_x, F_y e F_z forem todas não nulas, mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -1$$

59. A Equação 6 é uma fórmula para a derivada dy/dx de uma função definida implicitamente por uma equação $F(x, y) = 0$, sendo que F é diferenciável e $F_y \neq 0$. Comprove que se F tem derivadas contínuas de segunda ordem, então uma fórmula para a segunda derivada de y é

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$