Na Figura 5.15, a parábola $z = y^2/1/2$ está assinalada com o número 1 e $z = x^2$, com o número 2. Observe que, para cada valor $z_0 > 0$, o parabolóide intercepta o plano $z = z_0$ segundo a elipse

$$z_0 = x^2 + \frac{y^2}{1/2} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{z_0} + \frac{y^2}{\frac{z_0}{2}} = 1.$$

Uma destas elipses está representada na figura (indicada com o número 3).

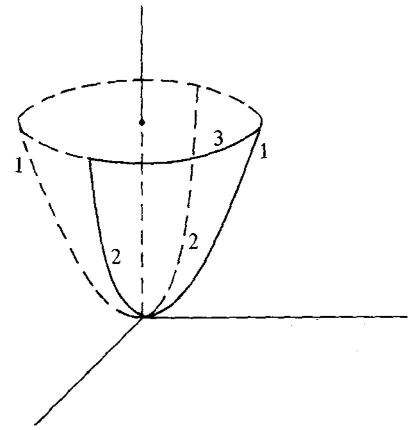

Fig. 5.15

Item (d)

$$x^2 + y + y^2 = 0 \quad \text{ou} \quad -y = x^2 + z^2.$$

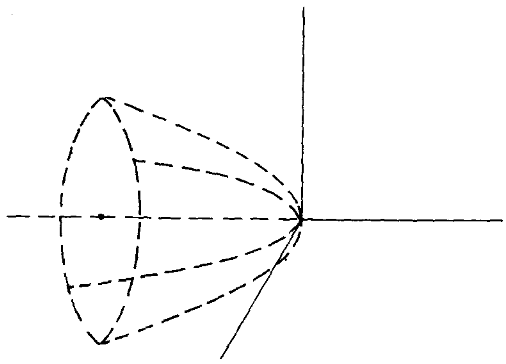

Fig. 5.16

A menos de um sinal, esta equação pode ser identificada com a forma canônica

$$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

do grupo (PE). O sinal de menos, que pode ser eliminado com uma mudança de coordenadas, indica apenas que o gráfico desta equação é o simétrico do parabolóide

$$y = x^2 + z^2,$$

em relação ao plano $y = 0$. Veja a Figura 5.16

Item (e)

$$x^2 + 2y^2 - z^2 = 0.$$

Forma canônica

$$z^2 = x^2 + \frac{y^2}{1/2}.$$

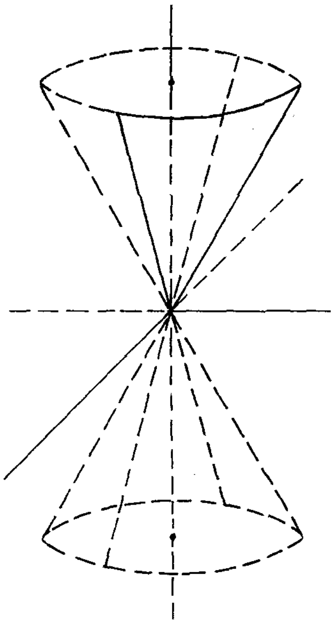

Fig. 5.17

Esta equação se identifica com

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

do grupo (C). Seu gráfico é um cone. A interseção deste cone com o plano xy é o ponto (0, 0, 0), que é o *vértice*. A interseção com os outros planos coordenados são retas. Por exemplo, com o plano $y = 0$ é o par de retas

$$z = \frac{x}{a} \qquad\qquad z = -\frac{x}{a}.$$

Observação

O gráfico da equação geral $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$ poderá representar quádricas degeneradas. Alguns exemplos são:

a) $x^2 - 16 = 0$; dois planos paralelos: $x = 4$ e $x = -4$.

b) $3y^2 = 0$; um plano: o plano $y = 0$.

c) $x^2 + 2y^2 = 0$; uma reta: o eixo dos z.

d) $2x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 0$; um ponto: a origem $(0, 0, 0)$.

e) $3x^2 + 2y^2 + z^2 = -3$; o conjunto vazio.

8.6 Problemas Propostos

1) Identificar as quádricas representadas pelas equações:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

b) $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$

c) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 8$

d) $z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4$

e) $x^2 + z^2 - 4y = 0$

f) $x^2 + y^2 + 4z = 0$

g) $4x^2 - y^2 = z$

h) $z^2 = x^2 + y^2$

i) $z = x^2 + y^2$

j) $x^2 + y^2 = 9$

l) $y^2 = 4z$

m) $x^2 - 4y^2 = 16$

n) $4y^2 + z^2 - 4x = 0$

o) $-x^2 + 4y^2 + z^2 = 0$

p) $16x^2 + 9y^2 - z^2 = 144$

q) $16x^2 - 9y^2 - z^2 = 144$

r) $2y^2 + 3z^2 - x^2 = 0$

s) $4x^2 + 9y^2 = 36z$

2) Reduzir cada uma das equações à forma canônica, identificar e construir o gráfico da quádrica que ela representa.

a) $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$

b) $36x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 36$

c) $36x^2 - 9y^2 - 4z^2 = 36$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 36$

e) $x^2 + y^2 - 9z = 0$

f) $x^2 + 4z^2 - 8y = 0$

g) $4x^2 - 9y^2 - 36z = 0$

h) $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$

i) $x^2 - y^2 + 2z^2 = 4$

j) $y^2 = x^2 + z^2$

l) $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$

m) $x^2 + y + z^2 = 0$

n) $x^2 - 9y^2 = 9$

o) $x^2 - 4y^2 = 0$

3) Representar graficamente as seguintes superfícies cilíndricas:

a) $y = 4 - x^2$

b) $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

c) $x^2 + 4y^2 = 16$

d) $x^2 - 4y^2 = 16$ e $-3 \leqslant z \leqslant 3$

e) $x^2 + y^2 = 9$ e $0 \leqslant z \leqslant 4$

f) $z^2 = 4y$

g) $z = y^2 + 2$

h) $x - y = 0$

4) Determinar a equação de cada uma das superfícies esféricas definidas pelas seguintes condições:

a) Centro $C(2, -3, 1)$ e raio 4.

b) O segmento de extremos $A(-1, 3, -5)$ e $B(5, -1, -3)$ é um de seus diâmetros.

c) Centro $C(4, -1, -2)$ e tangente ao plano xOy.

d) Centro $C(-2, 3, 4)$ e tangente ao eixo dos z.

e) Centro $C(0, -4, 3)$ e tangente ao plano de equação: $x + 2y - 2z - 2 = 0$.

8.6.1 Respostas de Problemas Propostos

1) *a*) Superfície esférica

b) Elipsóide

c) Hiperbolóide de uma folha

d) Hiperbolóide de duas folhas

e) Parabolóide circular

f) Parabolóide circular

g) Parabolóide hiperbólico

h) Superfície cônica circular

i) Parabolóide circular

j) Superfície cilíndrica circular

l) Superfície cilíndrica parabólica

m) Superfície cilíndrica hiperbólica

n) Parabolóide elíptico

o) Superfície cônica elíptica

p) Hiperbolóide de uma folha

q) Hiperbolóide de duas folhas

r) Superfície cônica elíptica

s) Parabolóide elíptico

2) *a*) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1$, elipsóide

b) $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$, hiperbolóide de uma folha

c) $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$, hiperbolóide de duas folhas

d) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{36}=1$, superfície esférica de raio 6

e) $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1}=9z$, parabolóide circular

f) $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{1}=2y$, parabolóide elíptico

g) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z$, parabolóide hiperbólico

h) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=0$, superfície cônica

i) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1$, hiperbolóide de uma folha

j) $\frac{x^2}{1}+\frac{z^2}{1}-\frac{y^2}{1}=0$, superfície cônica

l) $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}+\frac{z^2}{1}=1$, elipsóide

m) $\frac{x^2}{1}+\frac{z^2}{1}=-y$, parabolóide circular

n) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1$, superfície cilíndrica hiperbólica

o) dois planos: $x=2y$ e $x=-2y$

4) *a*) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 2 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z + 7 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 4z + 17 = 0$

d) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z + 16 = 0$

e) $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 + 72y - 54z - 31 = 0$

Impressão e acabamento
Gráfica e Editora FCA
Tel. (011) 419-0200