Risques extrêmes et dépendance entre risques

Année 2016-2017

Exercices pour le jeudi 16 mars 2017

Exercice 1

Travail sur deux fichiers concernant les distributions observées du nombre et du coût individuel de sinistre pour le risque cyclonique. Le fichier "risque cyclonique" concerne le nombre annuel et le fichier "couts_cyclones_USA" le coût individuel annuel.

1 - En utilisant graphiques et diagrammes appropriés, déterminer une loi de probabilité qui représente convenablement le coût (choix : normale, log-normale, Pareto, Weibull, exponentielle, gamma).

(a) Pour chaque loi, on présentera les histogrammes et les diagrammes quantiles-quantiles.

(b) Une fois déterminée la loi qui convient le mieux, on estimera son (ou ses) paramètre(s).

2 - On admet que le nombre annuel de cyclones est ajusté par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1{,}7$. À partir des résultats précédents, simuler les résultats pour dix années consécutives, à savoir nombre, coût individuel et coût cumulé. Les résultats seront présentés dans un tableau. On ne demande pas d'élaborer les algorithmes de simulation, mais plutôt d'utiliser ceux qui sont disponibles (en R ou en Python).

Exercice 2

Afin de représenter la sinistralité d'un groupe ou portefeuille de risques, on se base sur le modèle collectif sous les hypothèses habituelles. Des études antérieures ont montré que nombre N de sinistres sur une période donnée suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,1$. Par ailleurs, on admet que le coût individuel de sinistre, noté C, suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha = 0,01$. Le montant cumulé des sinistres sur la même période est noté X. L'unité monétaire n'est pas précisée.

1 - Déterminer les valeurs numériques de $E(X)$ et $\sigma(X)$ en utilisant les formules du modèle collectif, puis retrouver ces valeurs de manière approchée par simulation.

2 - Le responsable du portefeuille souhaite souscrire un traité de réassurance "stop-loss" dont la franchise (agissant sur X) est notée c. La valeur de c choisie est celle du quantile à 95%, autrement dit c vérifie $P(X > c) = 0,05$. On demande de déterminer par simulation une valeur approchée de c et du montant de la prime pure stop-loss correspondante. Afin d'évaluer la précision et la crédibilité de l'approximation, on construira un intervalle de confiance au niveau de risque 5%.

3 - Le responsable du portefeuille s'intéresse également au montant du plus gros sinistre de la période, soit $C_{N:N}$, et souhaite déterminer une valeur approchée de son espérance mathématique $E(C_{N:N})$ et de son écart-type $\sigma(C_{N:N})$. Répondre à cette question en procédant à la simulation de la sinistralité sur un grand nombre de périodes de même durée. Afin d'évaluer la précision et la crédibilité de l'approximation, on construira des intervalles de confiance au niveau de risque 5%.

4 - La loi exponentielle se révélant inappropriée pour représenter la loi du coût individuel de sinistre, le responsable procède à un ajustement par la loi de Pareto de paramètres x_0, β dont la fonction de répartition F est donnée par

$$F(x) = 1 - (x_0/x)^\beta \;\text{ si }\; x > x_0\,,\; F(x) = 0 \;\text{ sinon.}$$

Les valeurs des paramètres sont $x_0 = 80$ et $\beta = 5$, de sorte que les espérances mathématiques des deux lois (exponentielle et Pareto) sont égales. La loi de N restant inchangée, on demande de répondre aux trois questions précédentes.