

1. Sono tutti single.
2. Supponiamo che alle prime proposte degli uomini, le donne accettano perché non è detto che riceveranno altre proposte da uomini di loro maggiore interesse.
3. Le donne potrebbero a questo punto ricevere proposte da uomini di loro maggiore interesse, creando così una rottura con il loro uomo attuale.
4. L'algoritmo termina quando nessuno è single; tutte le coppie che si sono formate fino a questo momento vengono dichiarate coppie finali e il perfect matching viene rivelato.

perfect matching (but unstable) : tutti impegnati.

stable matching: tutti impegnati con la persona di loro maggiore interesse.

- ~ Nonostante l'algoritmo G-S sia abbastanza semplice da definire, non è immediatamente ovvio che ci faccia ottenere un perfect matching o uno stable matching.
- 1.1 Una donna accetta sempre la prima proposta che le viene fatta (perchè le possibilità sono: o in seguito riceverà proposte migliori, che le faranno cambiare uomo, oppure proposte peggiori che saranno indifferenti); perciò la scelta più saggia da fare in un momento iniziale, è quella di accettare la prima proposta, e, in seguito, se riceverà altre proposte migliori, avrà la possibilità di cambiare uomo.

1.2 Ha sequenza di donne alle quali un uomo si propone peggiora progressivamente (considerando la sua lista di preferenze).

~ Adesso dimostriamo che l'algoritmo termina e stabiliamo il numero massimo di iterazioni necessarie a farlo terminare.

1.3 L'algoritmo G-S termina dopo al massimo n^2 iterazioni del ciclo while.

proof Nel caso dell'algoritmo G-S, ciascuna iterazione consiste in qualche uomo che si propone per la prima volta a qualche donna (alla quale non si è mai proposto prima).

Quindi se la funzione $p(t)$ rappresenta l'insieme di coppie (m, w) , tale che m si è proposto a w alla fine dell'iterazione t , possiamo vedere che per tutto t , la dimensione della funzione $p(t+1)$ è strettamente maggiore delle dimensioni della funzione $p(t)$.

Questo sta a significare che ad ogni iterazione del ciclo while, il numero delle coppie incrementa $(t+1)$.

1.4 Se un uomo m è single, allora, ad un certo punto nell'esecuzione dell'algoritmo, c'è una donna alla quale lui non si è mai proposto prima.

key lemma **proof** Si supponga che ad un determinato punto, m è single, ma si è già proposto a ciascuna donna.

contradiction Allora (considerando 1.1), ciascuna delle n donne è

impegnata in un determinato momento.

Dal momento che l'insieme di coppie fidanzate formano un matching, devono esserci per forza di cose anche n uomini fidanzati.

- 1.5 L'insieme S ottenuto al termine dell'algoritmo G-S, è un perfect matching.

proof L'insieme delle coppie fidanzate formano sempre un matching.

Supponiamo che l'algoritmo termina con un uomo single.

Al termine dell'algoritmo, sia il caso in cui m si è già proposto a ciascuna donna (altrimenti il ciclo while non si sarebbe concluso).

Ciò contraddice però 1.4, dove si afferma che non può esserci un uomo che continua a rimanere single dopo essersi proposto a tutte le donne.

- 1.6 Si consideri che in seguito all'esecuzione dell'algoritmo G-S, quest'ultimo ci ritorni un insieme di coppie S . L'insieme S è uno stable matching.

proof Abbiamo già visto a 1.5 che S è un perfect matching.

Per provare che S è un perfect matching, supponiamo che c'è un'instabilità nei confronti di S e generiamo una contraddizione.

Come definito precedentemente, tale instabilità comprenderebbe due coppie, (m, w) e (m', w') , facenti entrambe parte di S e tenendo conto delle

Seguenti considerazioni:

- m preferisce w' piuttosto che w e
- w' preferisce m piuttosto che m' .

Nell'esecuzione dell'algoritmo che ha generato l'insieme S , l'ultima proposta è stata rivolta a w .

Adesso ci domandiamo:

m si è proposto a w in un momento precedente durante l'esecuzione dell'algoritmo?

Se non lo ha fatto, allora w si trova in una posizione superiore rispetto a w' sulla lista di preferenze di m , contraddicendo così la nostra supposizione secondo la quale m preferisce w' piuttosto che w .

Invece, se m si è proposto a w' in un momento precedente durante l'esecuzione dell'algoritmo (prima di proporsi a w), allora m è stato rifiutato da w' a favore di m'' .

m' è il partner finale di w' , quindi $m'' = m'$ oppure, considerando 1.1, w' preferisce come suo partner finale m' piuttosto che m'' ; in ogni caso, ciò contraddice la nostra supposizione, secondo la quale w' preferisce m piuttosto che m' .

Ne segue che l'insieme S è uno stable matching.

1.7 Ciascuna esecuzione dell'algoritmo G-S risulta appartenente all'insieme S^* .

proof Supponiamo, per contraddizione, che qualche esecuzione

E dell'algoritmo G-S risulti in un matching S in cui qualche uomo è accoppiato con qualche donna che non è però quella che lui preferisce in assoluto.

Dal momento che gli uomini fanno le loro proposte in ordine di preferenza decrescente, significa che qualche uomo, durante l'esecuzione dell'algoritmo, viene rifiutato da un partner valido.

Di nuovo; dal momento che gli uomini fanno le loro proposte in ordine decrescente di preferenza, e dal momento che questa è la prima volta in cui un rifiuto del genere è accaduto, allora w è il partner che m preferisce in assoluto.

Il rifiuto di m da parte di w potrebbe essere accaduto o perché m si è proposto ma è stato rifiutato da w (a favore del suo partner attuale), oppure perché w ha spezzato il suo fidanzamento con m a favore di una proposta migliore.

Però, in ogni caso, in questo momento crea o continua un rapporto con un uomo m' che preferisce (al posto di m).

Dal momento che w è un partner valido per m , esiste uno stable matching S' contenente le coppie (m, w) .

Adesso ci chiediamo: con chi è accoppiato m' all'interno di questo matching (S')? Supponi che sia una donna $w' \neq w$.

Dato che il rifiuto di m da parte di w è stato il primo rifiuto per un uomo da parte di un partner valido durante l'esecuzione E, ciò significa

che m' non è mai stato rifiutato da alcun partner valido in un momento durante l'esecuzione E, in cui si è accoppiato con w.

Dato che si è proposto seguendo un decrescente di preferenze e dato che w' è sicuramente un partner valido per m', ciò significa che m' preferisce w piuttosto che w'.

Ma abbiamo già visto che w preferisce m' ad m, dato che durante l'esecuzione E ha rifiutato m per m'.

Dal momento che $(m', w) \notin S'$, ne segue che la coppia (m', w) è un'instabilità in S' .

Questo contraddice che S' è stabile che di conseguenza contraddice la suposizione iniziale.

- 1.8 Nello stable matching S^* , ogni donna è accoppiata con il partner che preferisce di meno.

proof Supponiamo che c'è una coppia (m, w) in S^* , tale che m non è il partner che w preferisce meno.

Allora c'è uno stable matching S' in cui w è accoppiata con un uomo m' che preferisce meno di m.

In S' , m è accoppiato con una donna $w' \neq w$; dato che w è la partner migliore per m, e w' è un partner valido per m, vediamo che m preferisce w piuttosto che w'.

Però, da questo, ne segue che la coppia (m, w) è un'instabilità in S' , contradicendo il fatto che S' è stabile e di conseguenza la nostra

Supposizione iniziale.