

Bachelorarbeit

Homologische Betrachtung des Alexanderpolynoms

Alexander Bentkamp

Betreuer: Prof. Dr. Thomas Schick

Georg-August-Universität Göttingen

Fakultät für Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
1.1 Motivation	3
1.2 Wichtige Definitionen und Konventionen	3
2 Der gruppentheoretische Weg zum Alexandermodul	4
2.1 Knotengruppe und Dehnpräsentation	4
2.2 Kommutatorgruppe und Abolisierung	7
2.3 Gruppentheoretische Definition des Alexandermoduls	11
3 Der homologische Weg zum Alexandermodul	13
3.1 Seifertflächen	14
3.2 Kurzzusammenfassung zu Überlagerungen	18
3.3 Konstruktion der Überlagerung C_∞	19
3.4 Homologische Definition des Alexandermoduls	21
4 Berechnung des Alexandermoduls über die Seifertfläche	24
4.1 Nähere Betrachtung der Seifertfläche	25
4.2 Verschlingungszahl	29
4.3 Seifertmatrix	33
5 Das Alexanderpolynom	37
5.1 Herleitung	37
5.2 Anwendung auf Bretzelknoten	44
6 Alexanders Methode zur Definition des Alexanderpolynoms	47

1 Einleitung

1.1 Motivation

Eine der wichtigsten Aufgaben in der Knotentheorie ist es, gute Knoteninvarianten zu finden. Das sind Größen, die einem Knoten zugeordnet werden können, aber nur vom Knotentyp abhängen und nicht von der Wahl eines Repräsentanten. Eine gute Invariante zeichnet sich durch die folgenden drei Eigenschaften aus:

Sie ist sensitiv: das heißtt, dass sie für verschiedene Knoten möglichst häufig verschiedene Werte hat. Ein Extremfall wäre beispielsweise die Anzahl der Zusammenhangskomponenten eines Knotens. Sie ist immer gleich 1, und daher zwar eine Invariante, aber völlig unbrauchbar.

Sie ist leicht zu berechnen. Manche Knoteninvarianten wie die minimale Kreuzungsanzahl in Knotenprojektionen sind leicht zu definieren, aber schwer zu bestimmen.

Sie ist vergleichbar: das heißtt, es sollte eine schnelle Möglichkeit geben, um festzustellen, ob zwei Werte der Invariante gleich sind. Das Extrembeispiel wäre der Knoten selbst, der zwar eine sehr sensitive Invariante ist, aber das Problem der Kategorisierung von Knoten nicht löst.

Es sind viele Knoteninvarianten bekannt, die diese drei Bedingungen ziemlich gut erfüllen, eine davon ist das Alexanderpolynom. Das Alexanderpolynom lässt sich aus einer anderen Knoteninvarianten, dem Alexandermodul herleiten. Die Abschnitte 2 und 3 beschreiben zwei verschiedene Herangehensweisen, um den Alexandermodul zu definieren. Der gruppentheoretische Ansatz aus Abschnitt 2 liefert zwar den Beweis, dass der Alexandermodul tatsächlich eine Invariante ist, aber der homologische Ansatz aus Abschnitt 3 gibt uns ein tieferes Verständnis dieses Moduls. Der homologische Ansatz ermöglicht auch eine einfachere Berechnung des Alexandermoduls, die in Abschnitt 4 vorgestellt wird. Der Alexandermodul selbst ist jedoch noch keine „gute“ Invariante, da sich zwei Moduln nur schwer vergleichen lassen. Daher leiten wir in Abschnitt 5 das Alexanderpolynom her und geben ein Beispiel für seine Anwendung. Im letzten Abschnitt stelle ich schließlich die ursprüngliche Definition des Alexanderpolynoms vor, wie sie 1927 von Alexander in [Ale28] zu finden ist und stelle den Bezug zu den moderneren Ansätzen her.

1.2 Wichtige Definitionen und Konventionen

Für die genaue Definition eines mathematischen Knotens existieren viele Varianten. Für die Fragestellungen dieser Arbeit kommt es nicht allzu sehr darauf an, dennoch halten wir uns im Zweifel an folgende Definitionen aus [BZ03], die den Begriff der ambienten Isotopie nutzen:

Definition 1.1. Ein *Knoten* ist eine Einbettung $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, d.h. eine stetige Abbil-

2 Der gruppentheoretische Weg zum Alexandermodul

dung, sodass K ein Homöomorphismus von S^1 auf $K(S^1)$ ist.

Definition 1.2. Zwei Einbettungen $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ heißen *ambient isotop*, wenn es eine stetige Abbildung $F : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ gibt, sodass:

- $F(\cdot, 0) = id_Y$
- $F(\cdot, t) : Y \rightarrow Y$ ist ein Homöomorphismus für alle $t \in [0, 1]$
- $F(\cdot, 1) \circ f_1 = f_2$.

Eine solche Abbildung F wird dann *ambiente Isotopie* genannt.

Definition 1.3. Zwei Knoten heißen *äquivalent*, wenn sie ambient isotop sind.

Der Begriff „Knoten“ und das Symbol K wird sowohl für die Abbildung $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gebraucht, als auch für das Bild $K(S^1)$ oder für eine Äquivalenzklasse von Knoten oder für die Bilder einer solchen Äquivalenzklasse. Zur besseren Unterscheidung wird eine Äquivalenzklasse von Knoten auch Knotentyp genannt.

Definition 1.4. Ein Knoten heißt *zahm*, wenn er äquivalent zu einem Knoten ist, dessen Bild ein geschlossener Polygonzug ist. Ein nicht zahmer Knoten heißt *wild*.

Definition 1.5. Eine Projektion $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$ in eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ heißt *reguläre Projektion* eines polygonalen Knotens K , falls sie folgende Bedingungen erfüllt:

- Es gibt nur endlich viele Punkte $x \in E$, für die das Urbild $p^{-1}(x)$ mehrere Punkte enthält. Diese x heißen Kreuzungen.
- Das Urbild $p^{-1}(x)$ einer Kreuzung $x \in E$ besteht aus genau zwei Punkten.
- Kein Eckpunkt des Polygonzugs wird auf eine Kreuzung abgebildet.

Wichtige Konventionen: In dieser Arbeit werden wir uns ausschließlich mit zahmen Knoten beschäftigen, mit einem Knoten ist im Folgenden immer ein zahmer Knoten gemeint. Genauso sind alle Abbildungen immer stetige Abbildungen, wenn nicht anders angegeben.

2 Der gruppentheoretische Weg zum Alexandermodul

2.1 Knotengruppe und Dehnpräsentation

Der erste Schritt zur gruppentheoretischen Herleitung des Alexandermoduls ist die so genannte Knotengruppe. Diese ist eine Knoteninvariante, die sehr viel Information über den Knoten in sich trägt.

Definition 2.1. Den Isomorphietyp $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ der Fundamentalgruppe des Komplements eines Knotens K nennen wir die *Knotengruppe* und bezeichnen sie mit G_K .

Die Knotengruppe ist genau genommen also nur ein Isomorphietyp von Gruppen und keine konkrete Gruppe.

Satz 2.2. Die Knotengruppe hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten des Knotens ab. Das bedeutet $G_K = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ ist eine Knoteninvariante.

Beweis. Seien K_1, K_2 zwei äquivalente Knoten. Dann gibt es per Definition eine Umgebungsisotopie $F : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ der beiden Knoten. Insbesondere ist $F(\cdot, 1)$ ein Homöomorphismus. Wegen $F(\cdot, 1) \circ K_1 = K_2$ ist $F(\cdot, 1)|_{\mathbb{R}^3 \setminus K_1}$ ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}^3 \setminus K_1$ nach $\mathbb{R}^3 \setminus K_2$. Da homöomorphe Räume isomorphe Fundamentalgruppen haben, hängt die Fundamentalgruppe also nicht von der Wahl des Repräsentanten ab. \square

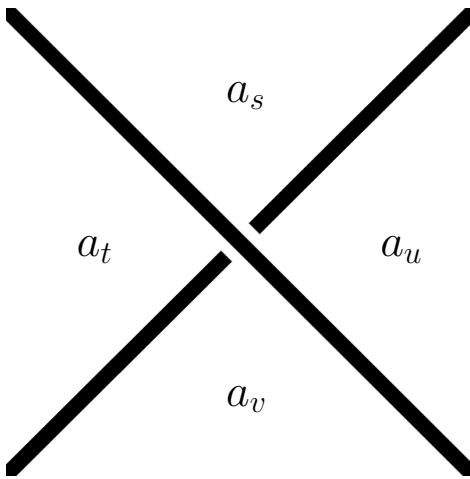


Abb. 1: Kreuzungen induzieren Relationen

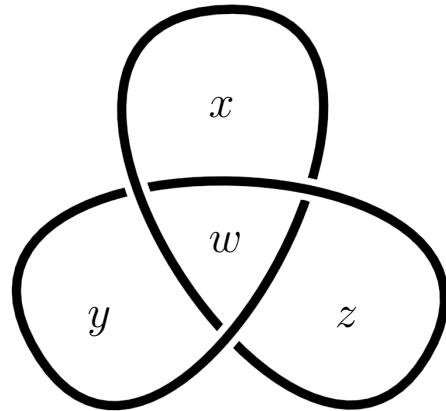


Abb. 2: Kleeblattschlinge

Satz 2.3. Gegeben sei ein Knoten mit einer regulären Projektion. Die Projektion unterteile die Ebene in n beschränkte Teilflächen und eine unbeschränkte. Die beschränkten Teilflächen bezeichnen wir mit a_1, \dots, a_n und die unbeschränkte mit a_0 . Die Knotengruppe G_K wird präsentiert durch Erzeuger

$$e_1, \dots, e_n$$

und einer Relation für jede Kreuzung in der Projektion. Jede beschränkte Teilfläche a_i entspricht einem e_i . Die unbeschränkte Teilfläche a_0 entspricht der $1 =: e_0$ in der Knotengruppe. Für eine Kreuzung wie in Abbildung 1 lautet die Relation

$$e_s e_t^{-1} = e_u e_v^{-1}.$$

Diese Präsentation der Knotengruppe nennen wir *Dehnpräsentation*.

2 Der gruppentheoretische Weg zum Alexandermodul

Beispiel 2.4. Als Beispiel berechnen wir die Knotengruppe der Kleeblattschlinge, die in Abbildung 2 zu sehen ist. In diesem Beispiel unterscheiden wir nicht zwischen a_i und e_i , beide werden gleich bezeichnet. Die Dehnpräsentation dieses Knotens ist die Gruppe mit Erzeugern x, y, z, w und Relationen

$$x = wy^{-1}, \quad y = wz^{-1}, \quad z = wx^{-1}.$$

Das lässt sich vereinfachen, indem wir die letzte Relation nach w umstellen und einsetzen:

$$x = zxy^{-1}, \quad y = zxz^{-1}.$$

Erneut können wir die zweite Relation in die erste einsetzen und erhalten die Gruppe

$$\langle x, z \mid x = zxzx^{-1}z^{-1} \rangle = G_K.$$

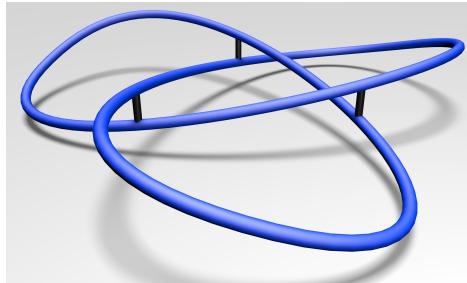


Abb. 3: Die Verbindungsstrecken S_j an jeder Kreuzung der Projektion

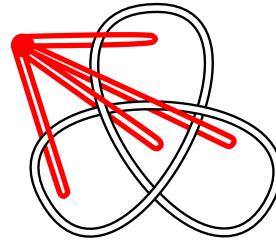


Abb. 4: Basis der Dehnpräsentation

Beweis von Satz 2.3. Wir wählen einen Basispunkt $x_0 \in \mathbb{R} \setminus K$, der in der Projektion in der Teilfläche a_0 liegt. Für jede Kreuzung in der regulären Projektion definieren wir eine Strecke S_j , die den oberen Teil der Kreuzung mit dem unteren Teil der Kreuzung verbindet. Die Endpunkte seien nicht in S_j enthalten. Diese Strecken sind in Abbildung 3 schwarz eingezeichnet. Sei m die Anzahl der Kreuzungen. Der Raum

$$X = \mathbb{R}^3 \setminus (K \cup S_1 \cup \dots \cup S_m)$$

ist damit homotopie-äquivalent zu $\bigvee_{i=1}^n S^1$. Daher ist $\pi_1(X, x_0)$ die frei erzeugte Gruppe der Elemente e_i , die in Abbildung 4 zu sehen sind: Jede Basiskurve e_i verläuft über den Knoten hinweg, dann innerhalb der Teilfläche a_i nach unten und schließlich unterhalb des Knotens wieder zurück.

Induktiv fügen wir nun die Strecken S_i wieder in X ein und erhalten dabei jeweils eine Relation. Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, wir hätten die Fundamentalgruppe von

$$X_k := \mathbb{R}^3 \setminus (K \cup S_1 \cup \dots \cup S_k)$$

2 Der gruppentheoretische Weg zum Alexandermodul

bereits berechnet. Der Induktionsanfang ist $X = X_m$. Wir leiten aus $\pi_1(X_k, x_0)$ nun $\pi_1(X_{k-1}, x_0)$ her. Sei dazu $S'_k \subset \mathbb{R} \setminus K$ eine offene Aufdickung von S_k . Wir wenden den Satz von Seifert und van Kampen auf $X_{k-1} = X_k \cup S'_k$ an: Die Fundamentalgruppe von S'_k ist trivial, deshalb kommen beim Übergang von X_k zu X_{k-1} keine neuen Erzeuger hinzu. Die Menge $X_k \cap S'_k$ ist homotopie-äquivalent zu einem Volltorus, also wird $\pi_1(X_k \cap S'_k)$ von einer Kurve erzeugt, die S_k einmal umläuft. Diese Kurve ist in S'_k nullhomotop und in X_k lässt sie sich schreiben als

$$e_s e_t^{-1} e_v e_u^{-1}$$

für s, t, v, u wie in Abbildung 1. Beim Übergang von X_k zu X_{k-1} entsteht also die neue Relation

$$e_s e_t^{-1} e_v e_u^{-1} = 1.$$

Da $X_0 = \mathbb{R}^3 \setminus K$, haben wir damit die Behauptung gezeigt. □

Der Beweis zeigt zusätzlich: Es muss nicht notwendigerweise die unbeschränkte Teilfläche mit der 1 identifiziert werden. Jede andere Teilfläche kann diese Rolle übernehmen.

2.2 Kommutatorgruppe und Abelsierung

Die Fundamentalgruppe des Knotenkomplements ist sehr sensitiv: im Wesentlichen charakterisiert sie den Knoten vollständig (siehe [BZ03, 3.15]). Das Problem ist die Vergleichbarkeit: Es gibt keinen Algorithmus, um in garantierter endlich vielen Schritten festzustellen, ob zwei Gruppen isomorph sind (Satz von Adian-Rabin, siehe [Rab58]). Daher versuchen wir nun, aus der Fundamentalgruppe andere Objekte abzuleiten, die zwar weniger Information über den Knoten tragen, aber dafür besser vergleichbar sind. Die erste Idee dazu ist, dass abelsche Gruppen einfacher zu klassifizieren sind als beliebige Gruppen. (Zumindest endlich erzeugte abelsche Gruppen können vollständig klassifiziert werden und die Fundamentalgruppe des Knotenkomplements ist tatsächlich endlich erzeugt.) Eine beliebige Gruppe lässt sich wie folgt mithilfe der sogenannten Kommutatorgruppe „abelsieren“:

Definition 2.5. Gegeben sei eine Gruppe G . Dann definiere die *Kommatorgruppe* G' als die von $\{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G\}$ erzeugte Untergruppe.

Die Kommutatorgruppe ist ein Maßstab dafür, wie weit eine Gruppe davon entfernt ist, abelsch zu sein. Ist G abelsch, dann ist stets $aba^{-1}b^{-1} = 1$ und die Kommutatorgruppe ist somit die triviale Gruppe.

Lemma 2.6. *Jeder Endomorphismus auf G bildet die Kommutatorgruppe G' in sich selbst ab. Das heißt, wenn $\varphi : G \rightarrow G$ ein Endomorphismus ist, dann gilt $\varphi(G') \subset G'$.*

2 Der gruppentheoretische Weg zum Alexandermodul

Beweis. Seien $a, b \in G$. Dann gilt per Definition der Kommutatorgruppe

$$\varphi(aba^{-1}b^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(a)^{-1}\varphi(b)^{-1} \in G'.$$

Das Lemma gilt also für ein Erzeugendensystem von G' und somit für alle Elemente in G' . \square

Als Spezialfall erhalten wir für $\varphi : x \mapsto uxu^{-1}$ mit $u \in G$, dass $uxu^{-1} \in G'$ für alle $x \in G'$ und $u \in G$. Das beweist das folgende Lemma:

Lemma 2.7. *Die Kommutatorgruppe G' ist Normalteiler in G .*

Wir können also die Faktorgruppe G/G' bilden. Dabei geschieht etwas Überraschendes: Aus der nicht notwendigerweise abelschen Gruppe G entsteht eine abelsche Gruppe G/G' . Der nicht abelsche Anteil wurde gewissermaßen „herausgeteilt“:

Lemma 2.8. *Sei G eine beliebige Gruppe. Dann ist G/G' abelsch.*

Beweis. Für $g \in G$ bezeichne $[g]$ die zugehörige Äquivalenzklasse in G/G' . Seien $[a], [b] \in G/G'$. Wegen $aba^{-1}b^{-1} \in G'$ ist $[aba^{-1}b^{-1}]$ eine Darstellung des neutralen Elements in G/G' . Daher:

$$[b][a] = [aba^{-1}b^{-1}][b][a] = [aba^{-1}b^{-1}ba] = [a][b]$$

\square

Diese Methode garantiert nicht nur eine abelsche Gruppe als Ergebnis, sondern erhält dabei so viel von der Ausgangsgruppe wie möglich. Am folgenden Lemma sieht man diese Tatsache: Die Kommutatorgruppe ist gewissermaßen die kleinste Untergruppe U , sodass G/U abelsch ist.

Lemma 2.9. *Sei G eine Gruppe und $U \subset G$ ein Normalteiler, sodass G/U abelsch ist. Dann gilt $G' \subset U$.*

Beweis. Seien $a, b \in G$ und $[a], [b] \in G/U$ die zugehörigen Äquivalenzklassen. Da G/U abelsch ist gilt $[a][b] = [b][a]$ und somit

$$1 = [a][b][a]^{-1}[b]^{-1} = [aba^{-1}b^{-1}].$$

Daraus folgt, dass $aba^{-1}b^{-1} \in U$. Da a, b beliebig waren, beweist das die Behauptung. \square

Aus Lemma 2.6 folgt zudem, dass die Kommutatorgruppe invariant unter Automorphismen ist. Daher hängt die Kommutatorgruppe nur vom Isomorphietyp der Gruppe und nicht von der konkreten Gruppe ab. Eine solche Untergruppe nennt sich *charakteristisch*. Aus diesem Grund können wir von der Kommutatorgruppe der Knotengruppe G_K sprechen, obwohl G_K nur bis auf Isomorphie definiert ist.

Beispiel 2.10. Wir berechnen die Kommutatorgruppe und die Abelsierung der Gruppe $G_K = \langle x, z \mid x = zxzx^{-1}z^{-1} \rangle$ aus Beispiel 2.4. Die Abelsierung zu bestimmen ist einfach: Alle Elemente der Form $aba^{-1}b^{-1}$ werden mit 1 identifiziert. Das ergibt also zu je zwei Elementen eine neue Relation $ab = ba$. Diese Relationen implizieren dann auch, dass die gesamte Kommutatorgruppe mit 1 identifiziert wird. Die Abelsierung hat also die gleiche Gruppenpräsentation, nur dass nun Kommutieren von Elementen erlaubt ist. Statt alle diese neuen Relationen anzuführen, können wir auch einfach angeben, dass es sich um eine Präsentation einer abelschen Gruppe handelt. Um das zu betonen, schreiben wir als Gruppenverknüpfung dann „+“:

$$G_K/G'_K = \langle x, z \mid x = z + x + z - x - z \rangle = \langle x, z \mid x = z \rangle \cong \langle x \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Wir können aber auch die Kommutatorgruppe bestimmen: Dazu verwenden wir folgenden Trick: Wir ersetzen den Erzeuger x durch $X := z^{-1}x$. Später werden wir sehen, warum diese Ersetzung sinnvoll ist. Damit erhalten wir durch Einsetzen von $x = zX$ folgende Beschreibung der Knotengruppe:

$$G_K = \langle X, z \mid zX = z(zX)z(zX)^{-1}z^{-1} \rangle = \langle X, z \mid X = (zX)z(zX)^{-1}z^{-1} \rangle$$

Da die Kommutatorgruppe die von den Elementen der Form $aba^{-1}b^{-1}$ erzeugte Untergruppe ist, liegt $X = (zX)z(zX)^{-1}z^{-1}$ in G'_K . Wir werden nun zeigen, dass die Kommutatorgruppe G'_K in G_K von Elementen der Form $z^k X z^{-k}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ erzeugt wird. Wir bezeichnen die von diesen Elementen erzeugte Untergruppe mit H . Die Untergruppe H besteht aus genau den Elementen, deren z -Exponenten sich zu Null aufaddieren. Daher ist H offensichtlich ein Normalteiler in G_K .

Wir zeigen zuerst $G'_K \subset H$ mithilfe von Lemma 2.9, indem wir beweisen, dass G_K/H abelsch ist. Die Gruppe G_K/H wird erzeugt von $[X]$ und $[z]$. In G_K/H gilt $[z^k X z^{-k}] = [1]$, insbesondere $[X] = [1]$. Daher können wir auf $[X]$ als Erzeuger verzichten. Durch Einsetzen von $[X] = [1]$ in die Relation bleibt nur noch $[1] = [1]$ übrig. Die Gruppe G_K/H ist also frei erzeugt von $[z]$. Somit ist $G_K/H \cong \mathbb{Z}$ und insbesondere kommutativ.

Nun zeigen wir $H \subset G'_K$. Das Einsetzen der Relation in einen Erzeuger von H liefert:

$$z^k X z^{-k} = z^k (zX)z(zX)^{-1}z^{-1}z^{-k} = z^{k+1} X z X^{-1} z^{-k-2} = (z^{k+1} X)z(z^{k+1} X)^{-1}z^{-1} \in G'_K.$$

Das zeigt $H \subset G'_K$, also $G'_K = H$. Die Kommutatorgruppe G_K ist also die von $z^k X z^{-k}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ in G_K erzeugte Untergruppe.

Eine Möglichkeit, mithilfe dieser Methode aus der Knotengruppe eine neue Invariante zu gewinnen, wäre natürlich die Knotengruppe selbst zu „abelisieren“. Leider gilt für jeden Knoten aber, dass $G_K/G'_K \cong \mathbb{Z}$, wie wir gleich sehen werden. Diese Invariante ist also alles andere als sensitiv. Anschließend werden wir sehen, wie wir mithilfe der Abelsierung trotzdem eine schöne Invariante gewinnen können.

Satz 2.11 (Hurewicz-Theorem, siehe [Bre97, IV 3.4]). *Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Dann ist die Abbildung $\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$, die jede Kurve auf den entsprechenden Zyklus abbildet, ein wohldefinierter Homomorphismus. Ist X wegzusammenhängend, dann induziert sie einen Isomorphismus $\Phi_* : \pi_1(X, x_0)/\pi'_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$.*

Satz 2.12 (siehe auch [BZ03, 3A]). *Für jeden zahmen Knoten K gilt: $G_K/G'_K \cong \mathbb{Z}$.*

Beweis. Sei U eine offene Aufdickung des Knotens K , genauer eine Tubenumgebung. Dann ist U homotopie-äquivalent zu S^1 und $U \setminus K$ ist homotopie-äquivalent zu einem Torus. Wir verwenden den Satz von Mayer-Vietoris und erhalten die folgende exakte Sequenz:

$$\underbrace{H_2(\mathbb{R}^3)}_{\cong 0} \rightarrow \underbrace{H_1(U \setminus K)}_{\cong \mathbb{Z}^2} \rightarrow H_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \oplus H_1(U) \xrightarrow{\cong \mathbb{Z}} \underbrace{H_1(\mathbb{R}^3)}_{\cong 0}$$

Daraus folgt $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$. Da $G_K = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$, ist nach dem Hurewicz-Theorem (Satz 2.11) die Abelsierung von G_K isomorph zu \mathbb{Z} , also $G_K/G'_K \cong \mathbb{Z}$. \square

Einfaches Abelsieren bringt uns an dieser Stelle also nicht weiter. Der Trick ist nun, die Kommutatorgruppe G'_K zu abelsieren. Dazu bildet man die Kommutatorgruppe der Kommutatorgruppe, welche wir die zweite Kommutatorgruppe nennen und mit G''_K bezeichnen. Spätestens hier sollten wir die Vorstellung der Kommutatorgruppe als „nicht abelscher Anteil“ einer Gruppe aufgeben. Dieser Vorstellung nach könnte man vermuten, dass die Kommutatorgruppe von G'_K wieder G'_K selbst ist. Das ist aber im Allgemeinen nicht der Fall. Durch das fortgesetzte Bilden der Kommutatorgruppe können immer wieder neue Untergruppen entstehen.

Beispiel 2.13. Diesen Trick wollen wir an der Gruppe aus Beispiel 2.10 ausprobieren. Dazu müssen wir aber erst einmal die oben berechnete Gruppe G'_K besser verstehen. Wir haben bisher nur die folgende Beschreibung als Untergruppe von G_K : Die Kommutatorgruppe G'_K ist die von $z^k X z^{-k}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ erzeugte Untergruppe in

$$G_K = \langle X, z \mid X = (zX)z(zX)^{-1}z^{-1} \rangle.$$

Hieraus eine Beschreibung als Gruppe mit Erzeugern und Relationen, also eine Gruppenpräsentation abzuleiten, ist gar nicht so einfach, denn die Gruppe G'_K kennt das Element z nicht. Machen wir uns also zunächst einmal klar, was eine Gruppenpräsentation bedeutet.

Es gibt ein konkretes Modell für eine Gruppenpräsentation $\langle S \mid R \rangle$ mit Erzeugern S und Relatoren R : Man bildet die freie Gruppe F_S mit Erzeugern S . Dann bildet man den kleinsten Normalteiler N in F_S , der die Relatoren R enthält. Dieser wird erzeugt von der Menge aller Konjugierten von R , also von

$$\{g r g^{-1} \mid g \in F_S, r \in R\}.$$

Dann gilt

$$\langle S \mid R \rangle = F_S / N.$$

Im Fall von G_K ist $F_S = \langle X, z \mid - \rangle$ und N wird darin erzeugt von

$$\{gX^{-1}(zX)z(zX)^{-1}z^{-1}g^{-1} \mid g \in F_S\}.$$

Da die Exponenten von z sich bei diesen Elementen immer zu 0 aufaddieren, liegt N vollständig in der freien Gruppe $F_{S'}$ von $S' := \{z^k X z^{-k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Somit ist dann

$$G'_K = F_{S'}/N.$$

Um dies als Gruppenpräsentation zu schreiben, nehmen wir als Erzeuger natürlich $S' = \{(z^k X z^{-k}) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Als Menge von Relatoren reicht nun $\{X^{-1}(zX)z(zX)^{-1}z^{-1}\}$ aber nicht mehr aus, denn $z \notin F_{S'}$. Wir sind gezwungen auch alle z -Konjugierten dieses Relators aufzunehmen, also

$$\begin{aligned} R' &= \{z^k X^{-1}(zX)z(zX)^{-1}z^{-1}z^{-k} \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(z^k X z^{-k})^{-1}(z^{k+1} X z^{-k-1})(z^{k+2} X z^{-k-2})^{-1} \mid k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Wir schreiben $(z^k X z^{-k})$ ab jetzt immer in Klammern, um zu betonen, dass dies in G'_K kein Produkt aus drei Faktoren mehr ist, sondern ein Erzeuger, der nur noch den Namen $(z^k X z^{-k})$ trägt. Als Gruppenpräsentation können wir also schreiben:

$$\begin{aligned} G'_K &= \langle (z^k X z^{-k}) \text{ für } k \in \mathbb{Z} \mid \\ &\quad (z^k X z^{-k})^{-1}(z^{k+1} X z^{-k-1})(z^{k+2} X z^{-k-2})^{-1} = 1 \text{ für } k \in \mathbb{Z} \rangle. \end{aligned}$$

Wie wir in Beispiel 2.10 gesehen haben, entsteht beim Heraustrennen der Kommutatorgruppe eine Gruppe mit der gleichen Präsentation, die dann aber abelsch ist. Wieder schrieben wir als Gruppenverknüpfung „+“, um das anzudeuten.

$$\begin{aligned} G'_K / G''_K &= \langle (z^k X z^{-k}) \text{ für } k \in \mathbb{Z} \mid \\ &\quad -(z^k X z^{-k}) + (z^{k+1} X z^{-k-1}) - (z^{k+2} X z^{-k-2}) = 0 \text{ für } k \in \mathbb{Z} \rangle. \end{aligned}$$

Die Präsentation von G'_K / G''_K ist also recht kompliziert. Sie hat abzählbar viele Erzeuger und abzählbar viele Relationen. Es gibt auf dieser Gruppe aber noch eine zusätzliche Struktur, die die Beschreibung vereinfacht. Diese Struktur wird vom Alexandermodul erfasst.

2.3 Gruppentheoretische Definition des Alexandermoduls

Definition 2.14 (Alexandermodul, siehe auch [BZ03, 8A]). Sei K ein zahmer Knoten. Dann nennen wir $M_K := G'_K / G''_K$ den *Alexandermodul*. Diese Gruppe soll ein Modul über

2 Der gruppentheoretische Weg zum Alexandermodul

$\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ werden. Der Ausdruck $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ bezeichnet den Ring der Laurent-Polynome über \mathbb{Z} . Die Laurent-Polynome sind eine Verallgemeinerung der Polynome: Es werden auch negative Exponenten zugelassen. Ein Element von $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ ist also von der Form

$$c_m t^m + c_{m+1} t^{m+1} + \cdots + c_{n-1} t^{n-1} + c_n t^n$$

mit $c_i \in \mathbb{Z}$ und $m \leq n \in \mathbb{Z}$.

Es genügt zu definieren, was Multiplikation mit 1, mit t und mit t^{-1} bedeuten soll, denn von diesen Elementen wird der Ring der Laurentpolynome erzeugt. Sei $a \in M_K$. Als Multiplikation mit 1 definieren wir einfach

$$1 \cdot a := a,$$

wodurch der Alexandermodul zu einem unitären Modul wird. Sei $T \in G_K$, sodass $[T] \in G_K/G'_K \cong \mathbb{Z}$ ein Erzeuger ist. Dann definiere die Multiplikation von $[a] \in G'_K/G''_K$ mit t bzw. t^{-1} als

$$t \cdot [a] := [TaT^{-1}] \text{ und } t^{-1} \cdot [a] := [T^{-1}aT]$$

Obwohl T nicht in G'_K liegt, gilt $TaT^{-1} \in G'_K$, denn G'_K ist Normalteiler. Daher liegt $[TaT^{-1}]$ und ebenso $[T^{-1}aT]$ also tatsächlich in G'_K/G''_K . Bei dieser Definition gibt es aber ein anderes Problem: Der entstehende Modul hängt von der Wahl des Erzeugers $[T] \in G_K/G'_K$ ab. Dieses Problem könnte gelöst werden, indem wir die Orientierung des Knotens nutzen und festlegen, welcher Erzeuger in Abhängigkeit dieser Orientierung gewählt werden soll. Zusätzlich ergibt sich dabei aber die Schwierigkeit, dass die Knotengruppe nur bis auf Isomorphie definiert ist. Wir müssten also zusätzlich einen kanonischen Basispunkt wählen. Wir ignorieren das Problem an dieser Stelle aber einfach. Später werden wir sehen, dass die Invarianten, die wir aus dem Alexandermodul extrahieren werden, diese Uneindeutigkeit umgehen.

Satz 2.15. *Abgesehen von der Wahl von T oder T^{-1} , ist der Alexandermodul ein wohldefinierter Modul.*

Beweis. Dass die obige Definition die Modul-Axiome erfüllt, ist leicht einzusehen. Wir müssen aber zweimal Wohldefiniertheit zeigen: Wir wollen zuerst zeigen, dass das Produkt nicht von der Wahl des Repräsentanten für $[T] \in G_K/G'_K$ abhängt. Sei $b \in G'_K$. Dann gilt in G'_K/G''_K :

$$\begin{aligned} & [bTa(bT)^{-1}] \\ &= [bTaT^{-1}b^{-1}] \\ &= [b][TaT^{-1}][b^{-1}] \quad (\text{denn } TaT^{-1} \in G'_K \text{ nach Lemma 2.7}) \\ &= [b][b^{-1}][TaT^{-1}] \quad (\text{denn } G'_K/G''_K \text{ ist abelsch nach Lemma 2.8}) \\ &= [TaT^{-1}] \end{aligned}$$

3 Der homologische Weg zum Alexandermodul

Wir zeigen schließlich, dass das Produkt auch nicht von der Wahl des Repräsentanten für $[a] \in G'_K/G''_K$ abhängt. Dazu stellen wir zunächst fest, dass G'' nicht nur Normalteiler in G' ist, sondern auch in G . Dazu wenden wir Lemma 2.6 auf $\varphi : G \rightarrow G, x \mapsto uxu^{-1}$ mit $u \in G$ an. Demnach ist φ auch ein Endomorphismus auf G' . Erneutes Anwenden des Lemmas sagt uns, dass $uxu^{-1} \in G''$ für alle $x \in G''$ und $u \in G$. Also ist G'' Normalteiler in G .

Sei nun $h \in G''_K$. Dann gilt in G'_K/G''_K :

$$\begin{aligned} & [ThaT^{-1}] \\ &= [ThT^{-1}TaT^{-1}] \\ &= [ThT^{-1}][TaT^{-1}] \quad (\text{denn } ThT^{-1}, TaT^{-1} \in G'_K \text{ nach Lemma 2.7}) \\ &= [TaT^{-1}] \quad (\text{denn } ThT^{-1} \in G''_K, \text{ weil } G''_K \text{ Normalteiler in } G_K \text{ ist}) \end{aligned}$$

□

Beispiel 2.16. Wenden wir diese Modulstruktur auf

$$G'_K/G''_K = \langle (z^k X z^{-k}) \mid -(z^k X z^{-k}) + (z^{k+1} X z^{-k-1}) - (z^{k+2} X z^{-k-2}) = 0 \rangle$$

aus Beispiel 2.13 an, dann vereinfacht das die Präsentation enorm. Aus Beispiel 2.10 wissen wir, dass $[z]$ die Gruppe G_K/G'_K erzeugt, also können wir $T := z$ wählen. Wenn wir G'_K/G''_K als Modul betrachten, können wir uns auf X als Erzeuger beschränken, denn Multiplikation mit t^k produziert alle anderen Erzeuger $(z^k X z^{-k}) = t^k X$ der Gruppenpräsentation. Wir brauchen auch nur noch eine Relation, wie etwa

$$-X + tX - t^2X = 0,$$

denn Multiplikation dieser Gleichung mit t^k liefert jede andere Relation der Gruppenpräsentation. Als Modulpräsentation genügt also

$$G'_K/G''_K = \langle X \mid -X + tX - t^2X = 0 \rangle.$$

Dies ist der Alexandermodul der Kleeblattschlinge.

3 Der homologische Weg zum Alexandermodul

Der im vorigen Abschnitt konstruierte Modul M_K kann auch auf eine ganz andere Weise definiert werden. Tatsächlich ist er die erste Homologie eines topologischen Raumes C_∞ , den wir im Folgenden konstruieren werden. Dieser Raum bildet eine Überlagerung $p : C_\infty \rightarrow \mathbb{R} \setminus K$ des Knotenkomplements. Einige wichtige Ergebnisse aus der Theorie der Überlagerungen werden wir daher in Abschnitt 3.2 zusammenfassen. Zunächst werden wir uns aber mit den Seifertflächen auseinandersetzen, die die Grundlage der Konstruktion von C_∞ bilden.

3.1 Seifertflächen

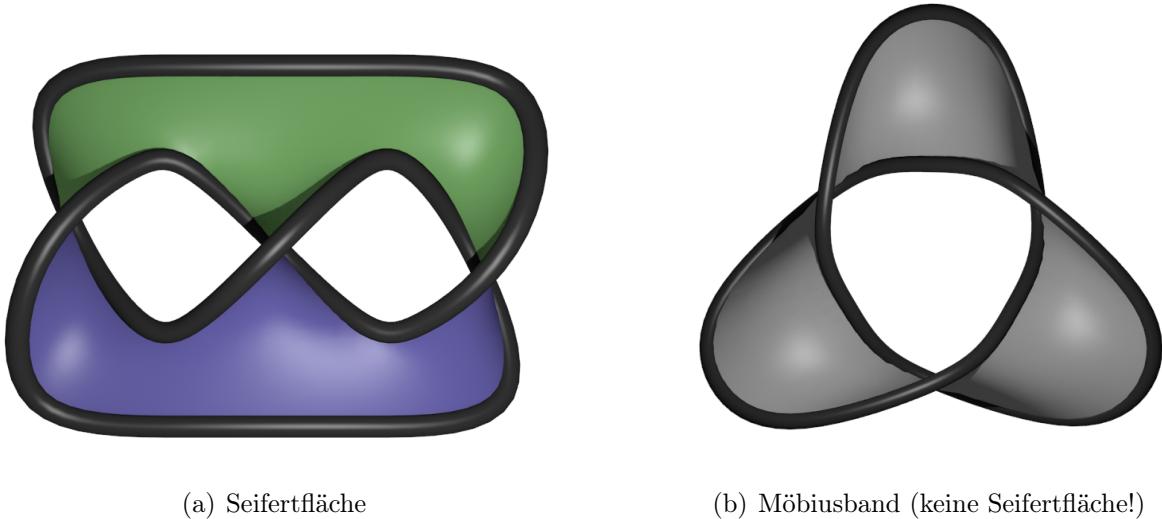


Abb. 5: Beispiele für Flächen mit der Kleeblattschlinge als Rand

Zur Konstruktion der Überlagerung des Knotenkomplements betrachten wir Flächen, deren Rand der Knoten ist. Wir werden sie später dazu nutzen, die einzelnen Blätter der Überlagerung C_∞ „zusammenzukleben“. In Abbildung 5 sind Beispiele für solche Flächen zu sehen. Die Abbildungen zeigen, dass solche Flächen zwei Seiten haben können, so wie in Abbildung 5(a), aber auch Flächen mit nur einer Seite wie in Abbildung 5(b) sind möglich. Wir brauchen zweiseitige Flächen, da nur diese sich zum „Zusammenkleben“ von zwei Räumen eignen. Um das Konzept der Zweiseitigkeit zu erfassen, kann man den Begriff der Orientierbarkeit nutzen. Für unsere Zwecke ist es aber nützlicher, die folgende Definition zu machen:

Definition 3.1. Ein *Doppelkragen* zu einer Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ ist eine Einbettung $n : S \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, sodass $n(s, 0) = s$ für $s \in S$.

Ein solcher Doppelkragen gibt der Fläche eine positive und eine negative Seite, sodass Flächen wie in Abbildung 5(b) ausgeschlossen werden.

Definition 3.2. Eine *Seifertfläche* eines Knotens K ist eine zusammenhängende, kompakte Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit Doppelkragern, deren Rand der Knoten ist, also $\partial S = K$.

Äquivalent kann man den geforderten Doppelkragern durch eine Orientierung auf S ersetzen: Nach dem Tubenumgebungssatz existiert für jede Fläche im \mathbb{R}^3 eine sogenannte Tubenumgebung, welche isomorph zum Normalenbündel der Fläche ist. Die Tubenumgebung ist ein Doppelkragen genau dann, wenn das Normalenbündel trivial ist und dies ist genau dann der Fall, wenn die Fläche orientierbar ist. Näheres zu Tubenumgebungen

findet sich in [BJ73, §12]. Wir werden aber explizit den Doppelkragen der Seifertfläche nutzen, weshalb für uns die obige Definition die sinnvollere ist.

Satz 3.3. *Jeder zahme Knoten hat eine Seifertfläche.*

Beweis. Gegeben sei eine reguläre Projektion und eine Orientierung des Knotens. Mit Hilfe des folgenden Algorithmus lässt sich daraus eine Seifertfläche konstruieren:

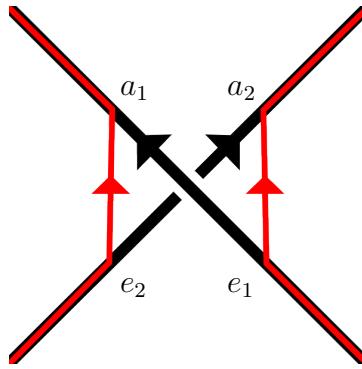


Abb. 6: Konstruktion der Seifertkreise

Schritt 1: Konstruiere geschlossene Kurven ohne Kreuzungen in der Projektionsebene, die bis auf kleine Umgebungen der Kreuzungen mit der Knotenprojektion übereinstimmen.

Dazu lösen wir jede Kreuzung auf wie in Abbildung 6: Wir wählen vier Punkte e_1, a_1, e_2, a_2 auf der Knotenprojektion, sodass e_1/a_1 auf dem eingehenden/ausgehenden Teilstück des oberen Segments und e_2/a_2 auf dem eingehenden/ausgehenden Teilstück des unteren Segments liegen. Nun ersetzen wir die Verbindungen von e_1 nach a_1 und von e_2 nach a_2 durch Verbindungen von e_1 nach a_2 und von e_2 nach a_1 . Die Verbindungen können so gewählt werden, dass sie sich nicht überkreuzen. Die Orientierung der Knotenprojektion kann dann auf die neu entstandenen Kurven übertragen werden.

Ist dieser Schritt an allen Kreuzungen ausgeführt, erhalten wir disjunkte geschlossene Kurven, diese nennen sich *Seifertkreise*. Diese Seifertkreise können beliebig ineinander verschachtelt oder nebeneinander liegen.

Schritt 2: Finde eine Fläche mit Doppelkragens, deren Rand die Seifertkreise sind.

Zunächst heben wir die inneren Seifertkreise etwas von der Projektionsebene ab: Die innersten am weitesten nach vorne, die äußersten bleiben in der Ebene. Nun gibt es zur Projektionsebene parallele Flächen, deren Rand die Seifertkreise sind. Die Flächen besitzen offensichtlich einen Doppelkragen. Wir können jeweils sogar wählen, ob der positive Teil des Doppelkragens vor oder hinter der Fläche liegen soll. Wir wählen „davor“, falls die Kurve positiv orientiert ist, und „dahinter“, falls die Kurve negativ orientiert ist.

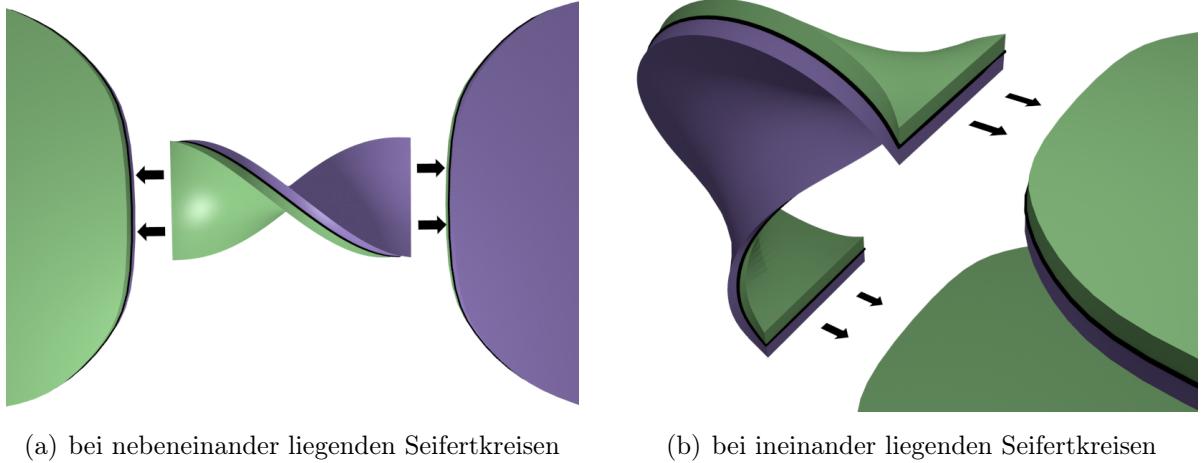


Abb. 7: Einfügen der Verbindungsstücke mit Doppelkragen.

Schritt 3: Ergänze Verbindungsstücke, deren Rand den entfernten Teilen der Knotenprojektion entspricht und deren Doppelkragen kompatibel ist mit dem Doppelkragen der bereits konstruierten Fläche.

An jeder Kreuzung in der Knotenprojektion gilt folgendes: Die Abschnitte von e_1 nach a_2 und von e_2 nach a_1 gehören zu verschiedenen Seifertkreisen, da der Seifert-Kreis sonst einen Kreuzungspunkt hätte. Nun gibt es zwei Fälle: Entweder liegen die beiden Seifertkreise nebeneinander, dann haben sie unterschiedliche Orientierungen. Oder sie liegen ineinander, dann haben sie gleiche Orientierungen. Abbildung 7 zeigt, wie die Flächen in beiden Fällen mit einem einfach verdrillten Band verbunden werden können. Der positive Teil des Doppelkragens ist blau, der negative Teil grün eingefärbt. Man sieht, dass der Doppelkragen sich auf dem Band fortsetzt.

□

Die Existenz von Seifertflächen für jeden zahmen Knoten bildet die Grundlage der homologischen Konstruktion des Alexandermoduls. Wir müssen aber bereits hier feststellen, dass die Konstruktion alles andere als eindeutig ist. Das Ergebnis des obigen Algorithmus hängt tatsächlich von der Wahl der Knotenprojektion ab, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 3.4. In Abbildung 8(a) ist eine Projektion des Unknotens zu sehen. Das ist der Knoten, der auch von der kanonischen Einbettung von S^1 in \mathbb{R}^3 repräsentiert wird. Natürlich ist es einfach, eine Seifertfläche für den Unknoten zu finden: Nehmen wir die kanonische Einbettung von S^1 in \mathbb{R}^3 als Repräsentanten, dann ist die kanonische Einbettung der D^2 in \mathbb{R}^3 eine Seifertfläche. Wir führen trotzdem den Seifert-Algorithmus für die in der Abbildung gegebene Projektion durch.

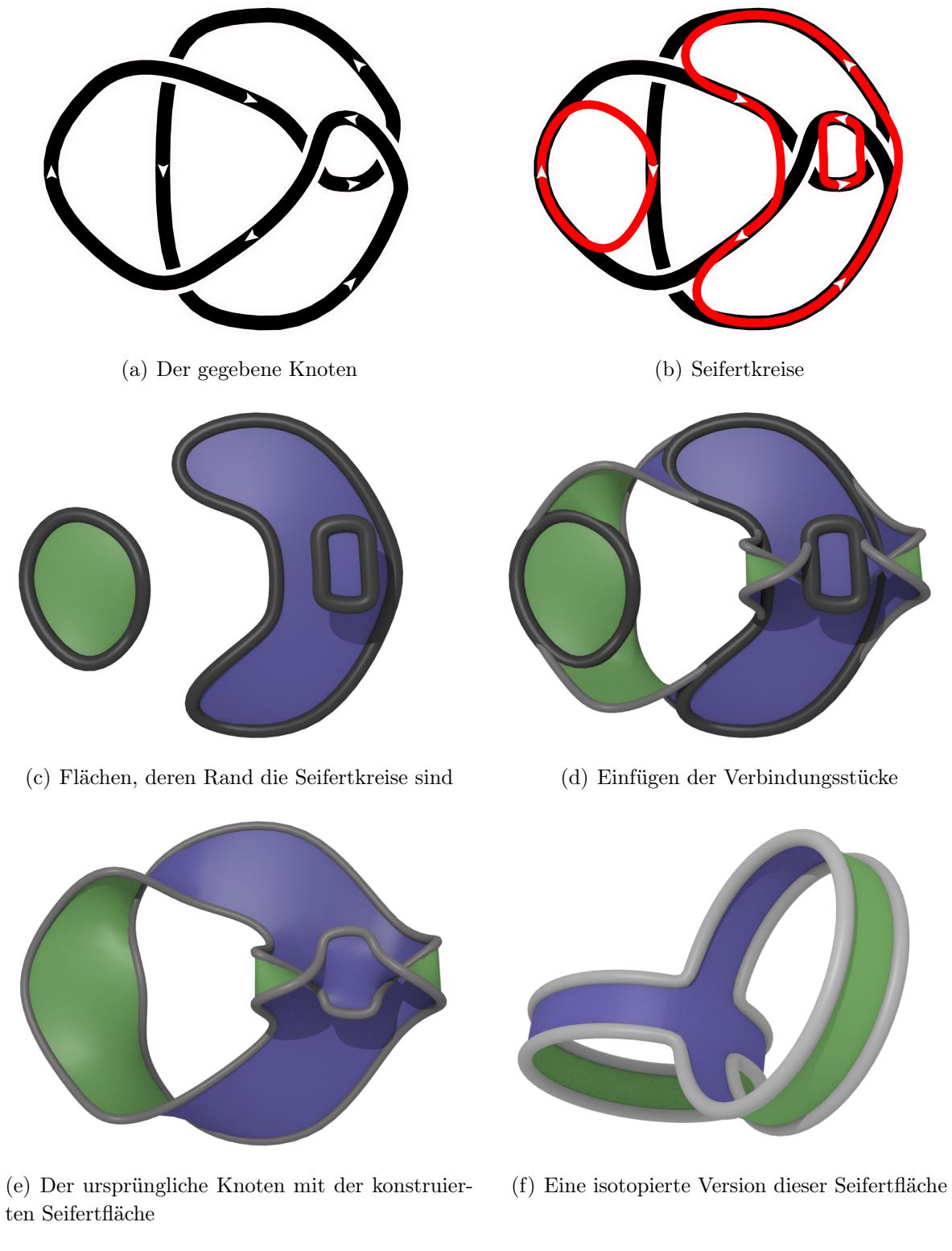


Abb. 8: Konstruktion einer Seifertfläche

Zunächst zeichnen wir die Seifertkreise ein, die die Orientierung vom Knoten übernehmen. Dabei entstehen zwei negativ orientierte und ein positiv orientierter Seifertkreis, wie Abbildung 8(b) zeigt. Die negativ orientierten Kreise liegen ineinander, deshalb wird der innere Kreis etwas aus der Ebene herausgehoben, um die Kreise dann jeweils mit Einbettungen von D^2 auszufüllen. Der Doppelkragen wird dabei entsprechend der Orientierung der Seifertkreise gewählt, siehe Abbildung 8(c). Die positive Seite des Doppelkragnens wird dort blau, die negative grün dargestellt. Für jede Kreuzung in der ursprünglichen Projektion fügen wir dann einfach verdrillte Bänder ein. In Abbildung 8(d) sieht man, dass diese Bänder den Doppelkragen fortsetzen. Es entsteht die Fläche aus Abbildung 8(e). Vergleicht man mit Abbildung 8(a), dann wird klar, dass der Rand der entstehenden Fläche genau dem ursprünglichen Knoten entspricht.

Durch eine ambiente Isotopie der konstruierten Seifertfläche entsteht die Fläche aus Abbildung 8(f). Diese Abbildung zeigt ganz klar, dass die konstruierte Seifertfläche nicht homöomorph zu D^2 ist. Es gibt also schon für den Unknoten verschiedene Seifertflächen und die vom Algorithmus produzierte Seifertfläche hängt stark von der gewählten Projektion ab.

3.2 Kurzzusammenfassung zu Überlagerungen

Mithilfe der Seifertfläche können wir nun den Raum C_∞ konstruieren. Wir möchten erreichen, dass $\pi_1(C_\infty) \cong G'_K$ gilt, denn dann gilt nach dem Hurewicz-Theorem (Satz 2.11) $H_1(C_\infty) \cong G'_K/G''_K = M_K$. Bevor wir aber mit der Konstruktion von C_∞ beginnen, erinnern wir uns an einige Ergebnisse aus der Theorie der Überlagerungen. Die Beweise zu den hier zitierten Sätzen und weitere Ausführungen dazu sind in [Hat02] zu finden.

Definition 3.5. Eine Überlagerung eines Raumes X ist eine Menge \tilde{X} zusammen mit einer Abbildung $p : \tilde{X} \rightarrow X$, die die folgende Bedingung erfüllt: Es gibt eine offene Überdeckung U_α von X , sodass $p^{-1}(U_\alpha)$ für jedes α eine disjunkte Vereinigung von offenen Mengen in \tilde{X} ist, von denen jede homöomorph auf U_α abgebildet wird.

Satz 3.6. Gegeben sei eine Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ und eine Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. Für jeden Startpunkt \tilde{x}_0 mit $p(\tilde{x}_0) = \gamma(0)$ gibt es dann eine eindeutige Kurve $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$, sodass $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Wir sagen dann, dass γ zu $\tilde{\gamma}$ hebt oder liftet.

Da p stetig ist, induziert p einen Homomorphismus $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$. Diese Abbildung ist in der Regel nicht surjektiv. Sie trifft nur die geschlossenen Kurven in X , die zu einer ebenfalls geschlossenen Kurve in \tilde{X} heben. Wegen der Eindeutigkeit des Lifts ist p_* stets injektiv. Das bedeutet, dass p_* ein Isomorphismus von $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ auf $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ ist. Unser Ziel ist also eine Überlagerung $p : C_\infty \rightarrow R^3 \setminus K$, sodass $p_*(\pi_1(C_\infty)) \cong G'_K$. Dann ist auch $\pi_1(C_\infty) \cong G'_K$. Das folgende Ergebnis versichert uns, dass eine solche Überlagerung tatsächlich existiert und sogar eindeutig ist:

Satz 3.7 (siehe [Hat02, Theorem 1.38]). *Sei X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semilokal einfach zusammenhängender Raum (z.B. das Knotenkomplement). Dann gibt es eine Bijektion zwischen der Menge der Basispunkt erhaltenen Isomorphieklassen wegzusammenhängender Überlagerungen $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ und der Menge der Untergruppen von $\pi(X, x_0)$. Diese assoziiert die Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ mit der Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.*

Ein weiteres wichtiges Konzept der Überlagerungstheorie sind die Decktransformationen. Dies sind Abbildungen $\phi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, für die $p \circ \phi = p$ gilt. Sie bilden über Verkettung eine Gruppe, die wir $\text{Aut}(\tilde{X})$ nennen. Wegen Satz 3.6 legt das Bild eines einzigen Punktes die Decktransformation bereits eindeutig fest.

3.3 Konstruktion der Überlagerung C_∞

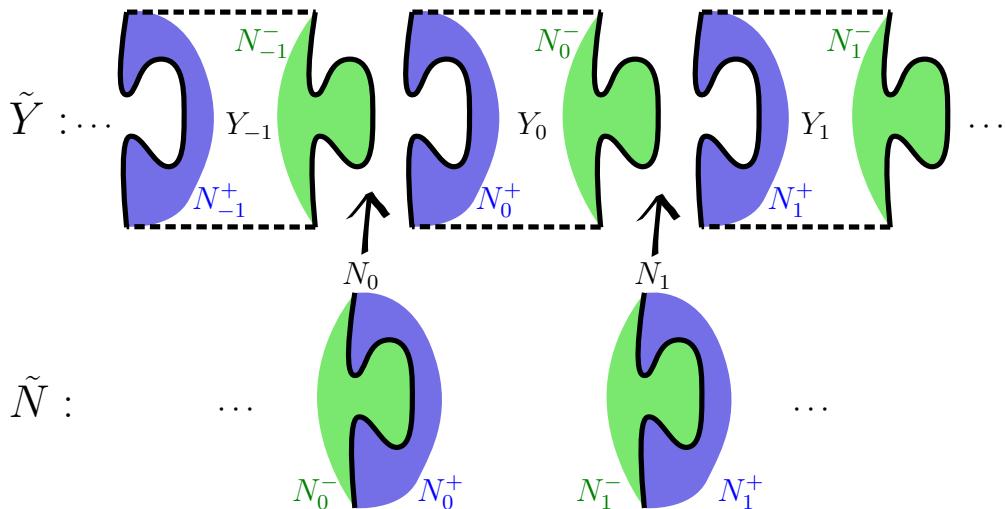


Abb. 9: Konstruktion von C_∞

Die folgende Konstruktion findet sich auch in [Rol76, 5.C]. Gegeben sei ein Knoten K und eine zugehörige Seifertfläche S mit Doppelkragen $n : S \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sei $N := n(S^\circ \times (-1, 1))$ der offene Bildbereich des Doppelkragens. Davon nennen wir den positiven Teil $N^+ := n(S^\circ \times (0, 1))$ und den negativen Teil $N^- := n(S^\circ \times (-1, 0))$. Mit $Y := \mathbb{R}^3 \setminus S$ bezeichnen wir das Komplement der Seifertfläche.

Nun haben wir zwei Tripel (N, N^+, N^-) und (Y, N^+, N^-) von jeweils einem größeren Raum mit zwei Teilräumen. Von diesen beiden Tripeln benötigen wir abzählbar viele Kopien. Diese nennen wir (N_i, N_i^+, N_i^-) und (Y_i, N_i^+, N_i^-) für $i \in \mathbb{Z}$. Aus diesen Kopien bilden wir disjunkte Vereinigungen $\tilde{N} := \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} N_i$ und $\tilde{Y} := \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} Y_i$. Schließlich setzen wir \tilde{N} und \tilde{Y} zusammen, indem wir jedes $N_i^+ \subset N_i$ mit $N_i^+ \subset Y_i$ und jedes $N_i^- \subset N_i$ mit $N_{i-1}^- \subset Y_{i-1}$ identifizieren. Den entstehenden Raum nennen wir C_∞ . Das Zusammensetzen von \tilde{N} und \tilde{Y} wird in Abbildung 9 veranschaulicht.

Lemma 3.8. Sei $p : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus K$ die Abbildung, die jedem Punkt aus N_i den entsprechenden Punkt in N und jedem Punkt in Y_i den entsprechenden Punkt in Y zuordnet. Dies ist eine Überlagerung und $p_*(\pi_1(\mathbb{C}_\infty)) \cong G'_K$.

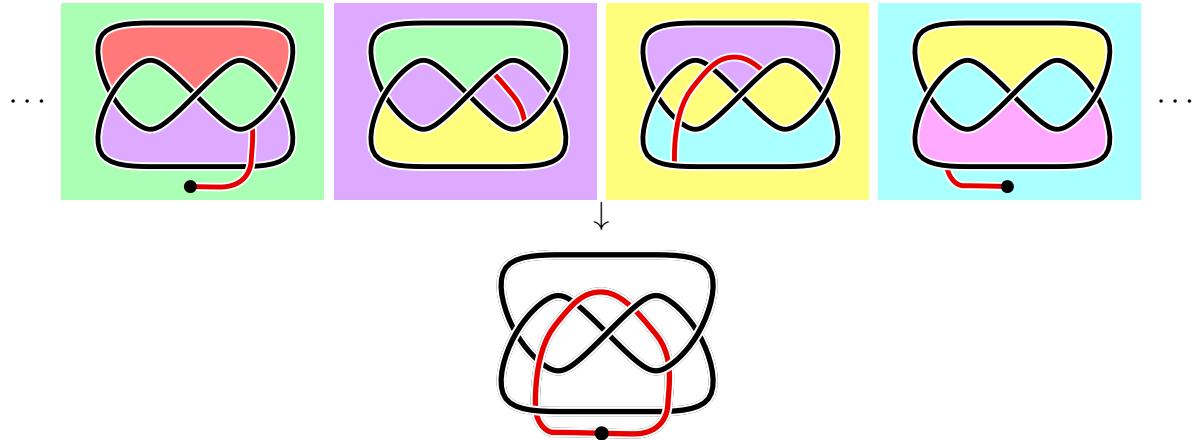


Abb. 10: Darstellung von C_∞

In Abbildung 10 wird diese Überlagerung dargestellt. Die Bilder sind so zu verstehen, dass in jeder Kopie Y_i des Knotenkomplements eine „Kamera“ steht. Um die Kopien unterscheiden zu können, hat jede Kopie eine andere Farbe im Hintergrund. Durch die Seifertfläche hindurch kann man in die benachbarten Räume schauen. Als Beispiel ist in Abbildung 10 eine Kurve in $\mathbb{R}^3 \setminus K$ und ihr Lift in C_∞ eingezeichnet.

Beweis von Lemma 3.8. Zunächst zeigen wir, dass p eine Überlagerung ist. Dazu müssen wir zeigen, dass jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ eine lokale Trivialisierung besitzt. Der Punkt x ist in jedem Fall in Y oder in N enthalten. Da die Mengen $p^{-1}(N) = \tilde{N}$ und $p^{-1}(Y) = \tilde{Y}$ disjunkte Vereinigungen von Kopien von N , bzw. Y sind, erfüllt eine der beiden die Definition einer lokalen Trivialisierung für x . Damit ist p tatsächlich eine Überlagerung.

Es bleibt zu zeigen, dass $p_*(\pi_1(C_\infty)) \cong G'_K$. Wähle einen Basispunkt $\tilde{x}_0 \in Y_0 \subset C_\infty$. Im folgenden bezeichnen wir mit G_K die konkrete Realisation $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p(\tilde{x}_0))$. Wir betrachten eine geschlossene Kurve γ in $\mathbb{R}^3 \setminus K$, die ein Element $[\gamma] \in G_K$ repräsentiert. Diese hebt zu einer Kurve $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow C_\infty$ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$. Die Kurve $\tilde{\gamma}$ muss aber nicht geschlossen sein. Der Punkt $\tilde{\gamma}(1)$ liege in $Y_m \subset C_\infty$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Wir definieren $\varphi_\gamma : C_\infty \rightarrow C_\infty$ als den Homöomorphismus, der auf kanonische Weise Y_i auf Y_{i+m} und N_i auf N_{i+m} abbildet. Dieser Homöomorphismus φ_γ erfüllt $p \circ \varphi_\gamma = p$, es ist also eine Decktransformation.

Die Abbildung $\psi : [\gamma] \mapsto \varphi_\gamma$ ist ein Homomorphismus von G_K in die Gruppe der Decktransformationen $\text{Aut}(C_\infty)$: Es gilt $\varphi_{\gamma^-} = \varphi_\gamma^{-1}$ und $\varphi_{\gamma_1 * \gamma_2} = \varphi_{\gamma_1} \circ \varphi_{\gamma_2}$. Der Kern dieses Homomorphismus ist $p_*(\pi_1(C_\infty, \tilde{x}_0))$, denn φ_γ ist genau dann die Identität, wenn γ zu einer geschlossenen Kurve $\tilde{\gamma} \subset C_\infty$ gehört. Nach Homomorphiesatz gilt somit

$$G_K/p_*(\pi_1(C_\infty, \tilde{x}_0)) = G_K/\ker(\psi) \cong \text{im}(\psi) = \text{Aut}(C_\infty) \cong \mathbb{Z}$$

In Lemma 2.9 haben wir gesehen, dass die Kommutatorgruppe G'_K die kleinste Untergruppe U ist, sodass G_K/U abelsch ist. Daraus folgt, dass $G'_K \subset p_*(\pi_1(C_\infty, \tilde{x}_0)) = \ker(\psi)$. Deswegen induziert ψ einen wohldefinierten Homomorphismus $\bar{\psi} : G_K/G'_K \rightarrow \text{Aut}(C_\infty)$ mit Kern $p_*(\pi_1(C_\infty, \tilde{x}_0))/G'_K$. Wegen Surjektivität von ψ ist auch $\bar{\psi}$ surjektiv. Da $\text{Aut}(C_\infty) \cong \mathbb{Z}$ und $G_K/G'_K \cong \mathbb{Z}$ (Satz 2.12), ist $\bar{\psi}$ ein surjektiver Homomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ und somit ein Isomorphismus. Der Kern $p_*(\pi_1(C_\infty, \tilde{x}_0))/G'_K$ ist also trivial, was bedeutet, dass $p_*(\pi_1(C_\infty, \tilde{x}_0)) \cong G'_K$. \square

Dieser Beweis liefert noch ein zusätzliches Ergebnis, das später nützlich sein wird:

Lemma 3.9. *Die Abelsierung der Knotengruppe ist isomorph zur Gruppe der Decktransformationen von C_∞ . Genauer: Die Abbildung $\psi : G_K \rightarrow \text{Aut}(C_\infty)$, die eine repräsentierende Kurve auf die von ihrem Lift eindeutig bestimmte Decktransformation abbildet, induziert einen Isomorphismus $\bar{\psi} : G_K/G'_K \rightarrow \text{Aut}(C_\infty)$.*

Wie am Anfang dieses Abschnitts besprochen, können wir nun beweisen, dass diese homologische Konstruktion mit der gruppentheoretischen Konstruktion aus Definition 2.14 übereinstimmt:

Satz 3.10. *Die Gruppen $M_K = G'_K/G''_K$ und $H_1(C_\infty)$ sind isomorph.*

Beweis. Wir betrachten die eben konstruierte Überlagerung $p : C_\infty \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus K$. Wegen Injektivität von p_* ist $\pi_1(C_\infty) \cong p_*(\pi_1(C_\infty))$. Nach Lemma 3.8 gilt also $\pi_1(C_\infty) \cong G'_K$. Wir verwenden das Hurewicz-Theorem (Satz 2.11) und erhalten $H_1(C_\infty) \cong G'_K/G''_K = M_K$. \square

3.4 Homologische Definition des Alexandermoduls

Da die Gruppen G'_K/G''_K und $H_1(C_\infty)$ isomorph sind, lässt sich natürlich auch die in Definition 2.14 erklärte Modulstruktur auf $H_1(C_\infty)$ übertragen. Wir werden jetzt diskutieren, wie diese Modulstruktur homologisch gedeutet werden kann. Wieder schauen wir uns zunächst nur an, was Multiplikation mit 1, t und t^{-1} bedeutet, denn das definiert den Modul vollständig.

Sei $\alpha \in H_1(C_\infty)$. Als Multiplikation mit 1 haben wir einfach die Identität gewählt. Also gilt auch hier:

$$1 \cdot \alpha := \alpha.$$

Damit steht fest, was allgemeiner eine Multiplikation mit einer ganzen Zahl c_0 (einem konstanten Laurent-Polynom) bedeuten soll, nämlich c_0 -fache Addition von α bzw. $-c_0$ -fache Addition von $-\alpha$, falls $c_0 < 0$.

3 Der homologische Weg zum Alexandermodul

Was bedeutet diese Multiplikation nun anschaulich? Die (singuläre) Homologiegruppe $H_1(C_\infty)$ entsteht aus $C_1^{\text{sing}}(C_\infty)$, der freien abelschen Gruppe aller singulären 1-Simplizes in C_∞ . Jedes Element aus $H_1(C_\infty)$ ist eine Äquivalenzklasse von Elementen aus $C_1^{\text{sing}}(C_\infty)$, also von formalen Linearkombinationen von 1-Simplizes. Sei $\sigma \in C_1^{\text{sing}}(C_\infty)$ ein Repräsentant für α . Wenn Multiplikation mit c_0 eine c_0 -fache Addition von α bedeutet, dann entspricht das in $C_1^{\text{sing}}(C_\infty)$ einer Multiplikation jedes Koeffizienten in σ mit c_0 . Das hilft bisher zur Veranschaulichung allerdings nur wenig.

Geht man vom singulären Kettenkomplex aber zur Homologiegruppe über, betrachtet man nur noch Äquivalenzklassen von solchen Linearkombinationen mit $\partial(\sigma) = 0$. Diese Bedingung bedeutet, dass die Simplizes geschlossene Kurven in C_∞ bilden, die auch Zykeln genannt werden. Mit dieser Vorstellung kann man die Multiplikation von α mit c_0 auch so interpretieren, dass der Zyklus c_0 -fach durchlaufen wird. Bei dieser Veranschaulichung muss man jedoch beachten, dass α durchaus auch aus mehreren disjunkten Teilzykeln bestehen kann. Diese müssen dann einzeln c_0 -fach durchlaufen werden.

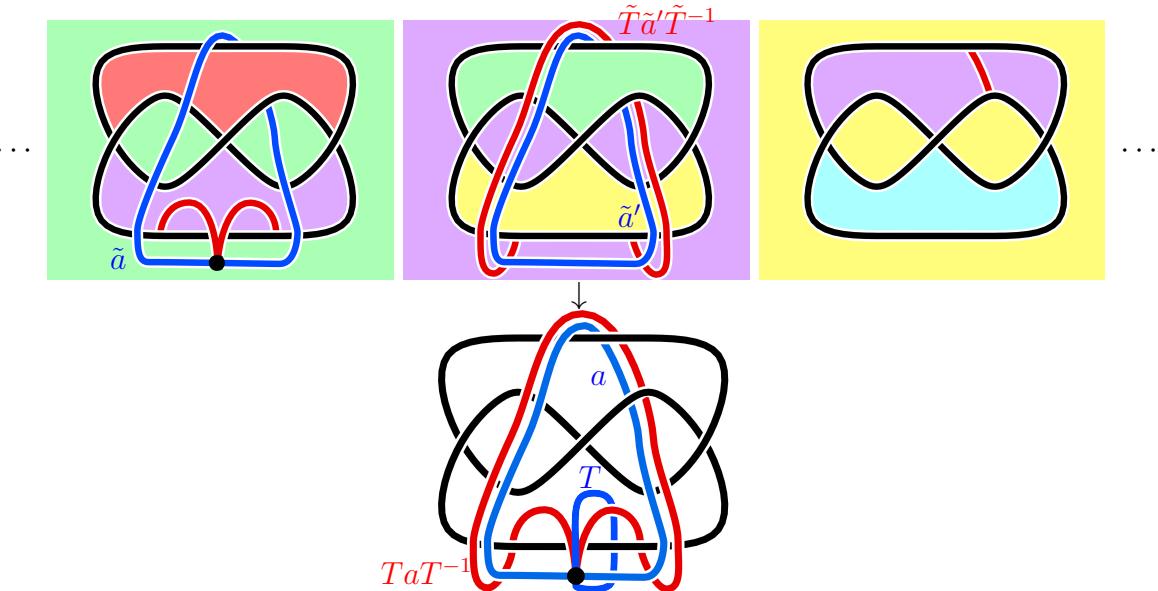


Abb. 11: Die Multiplikation mit t in $H_1(C_\infty)$

Nun kommen wir zu der Frage, wie die Multiplikation mit t und t^{-1} veranschaulicht werden kann. In Definition 2.14 haben wir ein Element $T \in G_K$ gewählt, sodass $[T] \in G_K/G'_K \cong \mathbb{Z}$ ein Erzeuger ist. Die Multiplikation von $[a] \in G'_K/G''_K$ mit t bzw. t^{-1} haben wir dann definiert als

$$t \cdot [a] := [TaT^{-1}] \text{ und } t^{-1} \cdot [a] := [T^{-1}aT].$$

Das Element $[T]$ ist ein Erzeuger von $G_K/G'_K \cong H_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$. Aus dem Beweis von Satz 2.12 lässt sich ablesen, dass $[T]$ dann einem kleinen Kreis um den Knoten wie in Abbildung 11 unten entspricht. Der Lift \tilde{T} von T ist also eine Kurve, die von Y_0 nach

3 Der homologische Weg zum Alexandermodul

Y_1 führt. Die Kurve TaT^{-1} umkreist also einmal den Knoten, folgt dann der Kurve a und umkreist dann den Knoten wieder in der umgekehrten Richtung. Abbildung 11 zeigt diese Kurve in rot im unteren Bild.

Um diese Definition auf $H_1(C_\infty)$ zu übertragen, verfolgen wir die einzelnen Schritte aus dem Beweis von Satz 3.10. Zuerst schauen wir uns an, was beim Übergang von $p_*(\pi_1(C_\infty))$ zu $\pi_1(C_\infty)$ passiert. Der Lift der Kurve TaT^{-1} startet in Y_0 , folgt \tilde{T} nach Y_1 und dann durchläuft er den Lift \tilde{a} von a , allerdings komplett um ein Blatt höher verschoben. Anschließend läuft er über \tilde{T}^{-1} wieder zurück. Diesen verschobenen Lift von a nennen wir \tilde{a}' . Die Multiplikation mit t macht in $\pi_1(C_\infty)$ aus \tilde{a} also $\tilde{T}\tilde{a}'\tilde{T}^{-1}$. Diese Kurve ist im oberen Teil der Abbildung 11 rot eingezeichnet.

Der zweite Schritt ist der Übergang von $\pi_1(C_\infty)$ zu $H_1(C_\infty)$ über Abelsierung. In der Homologie können wir ausnutzen, dass $\tilde{T}\tilde{a}'\tilde{T}^{-1}$ homotop zu \tilde{a}' ist, denn die Homologiezykel müssen nicht unbedingt durch den Basispunkt laufen. In $H_1(C_\infty)$ macht die Multiplikation mit t aus $[\tilde{a}]$ also $[\tilde{a}']$. Mit anderen Worten verschiebt die Multiplikation mit t also jeden Zyklus ein Blatt höher.

Der Isomorphismus $\bar{\psi} : G_K/G'_K \rightarrow \text{Aut}(C_\infty)$ aus Lemma 3.9 liefert zu dem gewählten Erzeuger $[T]$ einen Erzeuger $\tau := \bar{\psi}([T])$ von $\text{Aut}(C_\infty)$. Mit diesem können wir die Multiplikation auch wie folgt beschreiben:

$$t \cdot \alpha = \tau(\alpha).$$

Entsprechend gilt natürlich

$$t^{-1} \cdot \alpha = \tau^{-1}(\alpha).$$

Auf diese Weise hätten wir die Modulstruktur des Alexandermoduls auch weitgehend ohne den gruppentheoretischen Ansatz definieren können. Schwierig zu zeigen wäre lediglich, dass die Homologie von C_∞ nicht von der gewählten Seifertfläche abhängt.

Wie der gruppentheoretische Alexandermodul von der Wahl des Erzeugers $[T] \in G_K/G'_K$ abhängt, so hängt auch der homologische Alexandermodul von der Wahl des Erzeugers $\tau \in \text{Aut}(C_\infty)$ ab.

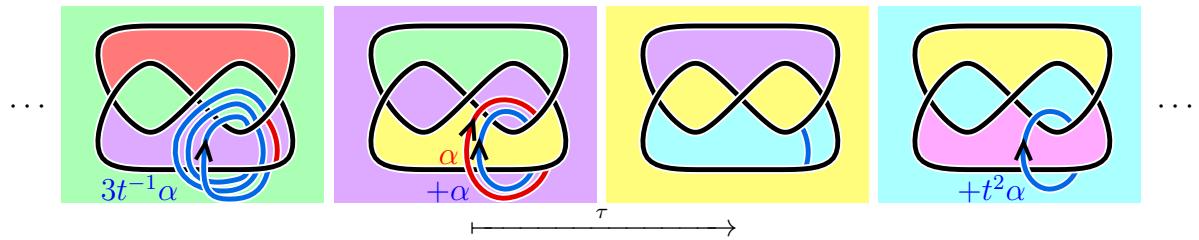


Abb. 12: Multiplikation im Alexandermodul

Beispiel 3.11. Wir schauen uns nun an einem konkreten Beispiel an, wie die Multiplikation im homologischen Alexandermodul $H_1(C_\infty)$ funktioniert. Wir nehmen die

Homologieklassse α aus Abbildung 12. Multiplizieren wir diese mit dem Laurentpolynom $3t^{-1} + 1 + t^2$, dann entsteht die Homologieklassse, die in der Abbildung blau eingezeichnet ist.

4 Berechnung des Alexandermoduls über die Seifertfläche

Nachdem wir den Alexandermodul nun auch als Homologie eines topologischen Raumes betrachten können, beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt damit, inwiefern dies neue Möglichkeiten bietet, den Alexandermodul eines Knotens zu bestimmen. Genau wie Gruppen lassen sich Moduln beschreiben als eine Menge von Erzeugern mit einer Menge von Relationen, die diese Erzeuger erfüllen. Diese Präsentationen kann man wie folgt in einer Matrix darstellen:

Definition 4.1 (siehe [Rol76, 8B]). Sei R ein kommutativer Ring mit Eins (später $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$) und

$$M \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid \rho_1 = 0, \dots, \rho_m = 0 \rangle$$

ein endlich präsentierter Modul über R . Jeder Relator ist dabei eine Linearkombination der Erzeuger:

$$\rho_i = r_{i1}\alpha_1 + \dots + r_{in}\alpha_n \text{ mit } r_{ij} \in R.$$

Wir nennen die Matrix $(r_{ij})_{i,j}$ eine *Präsentationsmatrix* von M .

Kennt man die Präsentationsmatrix eines Moduls, kennt man seine Präsentation aus Erzeugern und Relationen. Die Präsentationsmatrix charakterisiert den Modul also vollständig. Wir werden im folgenden eine Präsentationsmatrix für den Alexandermodul herleiten.

Definition 4.2. Jede Präsentationsmatrix des Alexandermoduls nennen wir eine *Alexandermatrix*.

Diese Definition folgt [Rol76, 8C.1]. Dort wird ausdrücklich betont, dass manche Autoren den Begriff „Alexandermatrix“ anders definieren. Wir haben bereits ein Beispiel für eine Alexandermatrix in unserem Sinne: In Beispiel 2.16 haben wir den Alexandermodul der Kleeblattschlinge bestimmt, es ist

$$\langle X \mid -X + tX - t^2X = 0 \rangle.$$

Da wir nur einen Erzeuger und nur eine Relation haben, ist die zugehörige Alexandermatrix eine 1×1 -Matrix, nämlich

$$(-1 + t - t^2).$$

Dies ist also eine Alexandermatrix der Kleeblattschlinge.

Um eine Alexandermatrix eines beliebigen Knotens zu bestimmen, verwenden wir die Erkenntnis aus dem vorhergehenden Abschnitt: Der Alexandermodul ist die erste Homologiegruppe der Überlagerung C_∞ . Ein gutes Werkzeug, um die Homologiegruppen dieses Raumes auszurechnen, ist der Satz von Mayer-Vietoris. Schauen wir uns die Konstruktion von C_∞ in Abschnitt 3.3 noch einmal an, so bemerken wir, dass es tatsächlich eine schöne Zerlegung dieses Raumes gibt, auf die wir den Satz von Mayer-Vietoris anwenden können: Der Raum wurde definiert als die Vereinigung der Mengen $\tilde{Y} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} Y_i$ und $\tilde{N} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} N_i$, wobei Y_i und N_i jeweils Kopien des Komplements der Seifertfläche bzw. des Doppelkragens der Seifertfläche sind. Da der Doppelkragen homotopie-äquivalent zur Seifertfläche selbst ist, bestimmen wir zunächst die Homologie der Seifertfläche und deren Komplements.

4.1 Nähere Betrachtung der Seifertfläche

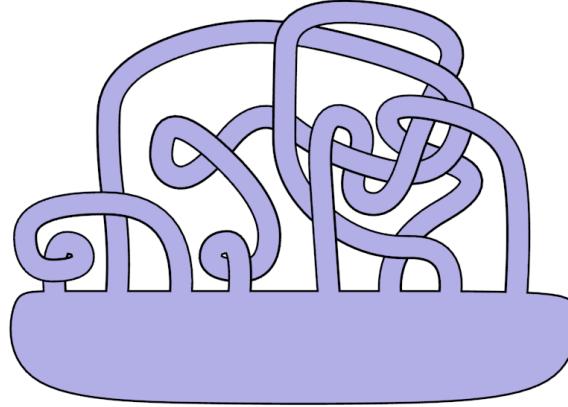


Abb. 13: Eine Seifertfläche in Bandprojektion

Lemma 4.3 (vgl. [BZ03, 8.2]). *Jede Seifertfläche S lässt sich über eine ambiente Isotopie darstellen wie in Abbildung 13: eine Kreisscheibe D , an der eine gerade Anzahl von nicht verdrillten Bändern B_1, \dots, B_{2g} angeklebt ist.*

In Formeln: $S = D \cup B_1 \cup \dots \cup B_{2g}$ mit Kreisscheiben D, B_1, \dots, B_{2g} . Die Mengen B_1, \dots, B_{2g} und das Innere von D sind paarweise disjunkt. Die Ränder lassen sich wie folgt aufteilen:

$$\begin{aligned}\partial B_i &= \alpha_i \gamma_i \beta_i \gamma_i'^{-1} \\ D \cap B_i &= \alpha_i \cup \beta_i \\ \partial D &= \alpha_1 \delta_1 \beta_2^{-1} \delta_2 \beta_1^{-1} \delta_3 \alpha_2 \delta_4 \dots \alpha_{2g-1} \delta_{4g-3} \beta_{2g}^{-1} \delta_{4g-2} \beta_{2g-1}^{-1} \delta_{4g-1} \alpha_{2g} \delta_{4g}\end{aligned}$$

4 Berechnung des Alexandermoduls über die Seifertfläche

Eine solche Darstellung eines Knotens und seiner Seifertfläche nennt sich Bandprojektion.

Beweis. Zum Beweis der allgemeinen Aussage von Lemma 4.3 ist eine Klassifikation von abgeschlossenen, orientierbaren Mannigfaltigkeiten der Dimension 2 notwendig, wie sie etwa in [Rol76, 5.A] zu finden ist. Der entsprechende Beweis ist in [BZ03, 8.B] nachzulesen. Wir werden den Beweis auf die in Satz 3.3 konstruierten Seifertflächen beschränken.

Die in Satz 3.3 konstruierte Seifertfläche besteht bereits aus endlich vielen Kreisscheiben (die ausgefüllten Seifertkreise), die mit endlich vielen Bändern (den Verbindungsstücken) verbunden sind. Wir wählen eine der Kreisscheiben aus und nennen sie D_0 . Dann wählen wir induktiv eine Kreisscheibe aus, die über ein Band mit D_i verbunden ist. Zwei Kreisscheiben, die über ein Band verbunden sind, sind wieder homöomorph zu einer Kreisscheibe. Die aus D_i und der verbundenen Kreisscheibe bestehende Kreisscheibe nennen wir D_{i+1} .

Der Prozess endet, wenn D_n alle Seifertkreise enthält. Wahrscheinlich sind noch einige Bänder übrig, die mit beiden Enden an D_n angeklebt sind.



Abb. 14: Jede doppelte Verdrillung kann über eine ambiente Isotopie zu einer Schleife deformiert werden.

Als nächstes beseitigen wir alle Verdrillungen der Bänder. Wegen des Doppelkragens muss jedes Band eine gerade Anzahl von Verdrillungen haben. Zwei Verdrillungen können zu einer Schlaufe deformed werden, wie Abbildung 14 zeigt.

Nun müssen die Bänder noch in die richtige Reihenfolge gebracht werden: Wir nennen das ganz links angeklebte Band B_1 . Zwischen den beiden Enden von B_1 muss ein Band B_2 angeklebt sein, dessen zweites Ende nicht zwischen den beiden Enden von B_1 liegt, denn sonst hätte der Rand der Seifertfläche zwei Zusammenhangskomponenten. Die Bänder sind also in der Reihenfolge

$$B_1, ???, B_2, ???, B_1, ???, B_2, ???.$$

Wir verschieben die Bänder zwischen den rechten beiden Enden von B_1 und B_2 entlang B_2 , sodass die Form

$$B_1, ???, B_2, ???, ???, B_1, B_2, ???$$

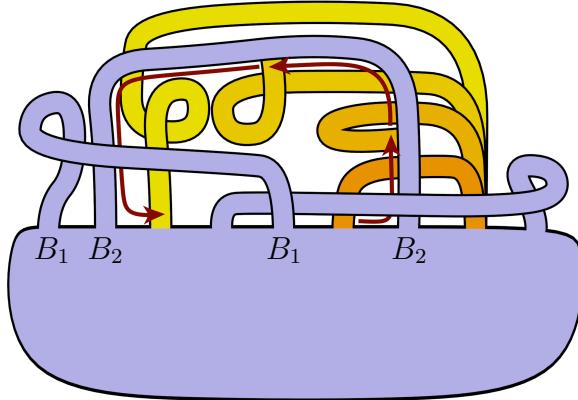


Abb. 15: Bänder verschieben

entsteht. Abbildung 15 zeigt, wie die Bänder durch eine ambiente Isotopie verschoben werden können. Die Gruppe von Bändern, die sich zwischen dem linken Ende von B_2 und dem rechten Ende von B_1 befinden, verschieben wir über B_1 nach links und erhalten

$$B_1, ???, ???, ???, B_2, B_1, B_2, ???.$$

Dann verschieben wir alle Bänder zwischen den linken beiden Enden von B_1 und B_2 über B_2 nach rechts und bekommen die Form

$$B_1, B_2, B_1, B_2, ???, ???, ???, ???.$$

Induktiv setzen wir diesen Prozess fort. Dabei ist klar, dass einmal zusammengeführte Paare von zwei Bändern nicht mehr auseinander gerissen werden. Da die Bänder sich hierbei immer in Paaren zusammenfinden, muss die Anzahl der Bänder gerade sein. Das rechtfertigt die Bezeichnung der Anzahl der Bänder mit $2g$ in der Formulierung des Lemmas. Die Zahl g wird auch Genus der Seifertfläche genannt. \square

Satz 4.4. Für jede Seifertfläche S gilt:

$$H_1(S) \cong \mathbb{Z}^{2g} \text{ und } H_1(\mathbb{R}^3 \setminus S) \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

Beweis. Aus Lemma 4.3 folgt, dass jede Seifertfläche homotopie-äquivalent zu einer Einpunktvereinigung $S^1 \vee \dots \vee S^1$ von $2g$ 1-Sphären ist. Für diese ist die Homologie bekannt:

$$H_k(S) \cong H_k(S^1 \vee \dots \vee S^1) \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

Für das Komplement der Seifertfläche verwenden wir den Satz von Mayer-Vietoris. Wir zerlegen die Seifertfläche $S = D \cup B_1 \cup \dots \cup B_{2g}$ wie in Lemma 4.3 und setzen $B := B_1 \cup \dots \cup B_{2g}$. Wir benutzen die Mengen $\mathbb{R}^3 \setminus B$ und $\mathbb{R}^3 \setminus D$ mit Schnitt

$$(\mathbb{R}^3 \setminus B) \cap (\mathbb{R}^3 \setminus D) = \mathbb{R}^3 \setminus S$$

4 Berechnung des Alexandermoduls über die Seifertfläche

und Vereinigung

$$(\mathbb{R}^3 \setminus B) \cup (\mathbb{R}^3 \setminus D) = \mathbb{R}^3 \setminus (B \cap D).$$

Da B und D in \mathbb{R}^3 abgeschlossen sind, sind ihre Komplemente offen in \mathbb{R}^3 und damit auch offen in $\mathbb{R}^3 \setminus (B \cap D)$. Somit ist die Bedingung für den Satz von Mayer-Vietoris erfüllt. Wir erhalten die exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow H_2(\mathbb{R}^3 \setminus B) \oplus H_2(\mathbb{R}^3 \setminus D) \rightarrow H_2(\mathbb{R}^3 \setminus (B \cap D)) \\ &\rightarrow H_1(\mathbb{R}^3 \setminus S) \rightarrow H_1(\mathbb{R}^3 \setminus B) \oplus H_1(\mathbb{R}^3 \setminus D) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Die Homologiegruppen von $\mathbb{R}^3 \setminus B$, $\mathbb{R}^3 \setminus D$ und $\mathbb{R}^3 \setminus (B \cap D)$ sind einfach zu bestimmen, denn diese Mengen sind Komplemente von $2g$, einer, bzw. $4g$ disjunkten zusammenziehbaren Mengen in \mathbb{R}^3 . Daher sind sie homotopie-äquivalent zu Einpunkt-Vereinigungen von 2-Sphären:

$$\mathbb{R}^3 \setminus B \simeq \bigvee_{i=1}^{2g} S^2, \quad \mathbb{R}^3 \setminus D \simeq S^2, \quad \mathbb{R}^3 \setminus (B \cap D) \simeq \bigvee_{i=1}^{4g} S^2.$$

Damit wird aus unserer exakten Sequenz folgendes:

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}^{2g} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{(i_1)_* + (i_2)_*} \mathbb{Z}^{4g} \xrightarrow{\delta} H_1(\mathbb{R}^3 \setminus S) \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow \dots,$$

wobei $i_1 : \mathbb{R}^3 \setminus B \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (B \cap D)$ und $i_2 : \mathbb{R}^3 \setminus D \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (B \cap D)$ die Inklusionsabbildungen bezeichnen. Das Element $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{2g} \cong H_2(\mathbb{R}^3 \setminus B)$ steht für einen 2-Zyklus in $\mathbb{R}^3 \setminus B$, der B_i einfach umhüllt und die anderen Bänder nicht. Dieser wird von i_1 auf einen Zyklus in $\mathbb{R}^3 \setminus (B \cap D)$ abgebildet, der Anfang und Ende von B_i einfach umhüllt. Dieser entspricht $(0, \dots, 0, 1, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{4g} \cong H_2(\mathbb{R}^3 \setminus (B \cap D))$. Die induzierte Abbildung ist also

$$(i_1)_* : \mathbb{Z}^{2g} \rightarrow \mathbb{Z}^{4g}, (a_1, a_2, \dots, a_{2g}) \mapsto (a_1, a_1, a_2, a_2, \dots, a_{2g}, a_{2g}).$$

Genauso steht $1 \in \mathbb{Z} = H_2(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ für einen 2-Zyklus in $\mathbb{R}^3 \setminus D$, der D einfach umhüllt. Dieser wird von i_2 auf einen Zyklus in $\mathbb{R}^3 \setminus (B \cap D)$ abgebildet, der alle Anfänge und Enden der Bänder einfach umhüllt. Dieser entspricht $(1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^{4g} \cong H_2(\mathbb{R}^3 \setminus (B \cap D))$. Die induzierte Abbildung ist also

$$(i_2)_* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^{4g}, b \mapsto (b, \dots, b).$$

Das Bild von $(i_1)_* + (i_2)_*$ ist somit

$$\begin{aligned} &\text{im}((i_1)_* + (i_2)_*) \\ &= \{(a_1 + b, a_1 + b, a_2 + b, a_2 + b, \dots, a_{2g} + b, a_{2g} + b) \mid a_1, \dots, a_{2g}, b \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(a_1, a_1, a_2, a_2, \dots, a_{2g}, a_{2g}) \mid a_1, \dots, a_{2g} \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

4 Berechnung des Alexandermoduls über die Seifertfläche

Wegen Exaktheit ist dies auch der Kern von δ . Mit Homomorphiesatz folgt

$$\text{im}(\delta) \cong \mathbb{Z}^{4g} / \ker(\delta) \cong \mathbb{Z}^{4g} / \text{im}((i_1)_* + (i_2)_*) \cong \mathbb{Z}^{2g}.$$

Wegen Exaktheit in $H_1(R^3 \setminus S)$ ist δ surjektiv und somit $H_1(R^3 \setminus S) = \text{im}(\delta) \cong \mathbb{Z}^{2g}$.

□

4.2 Verschlingungszahl

Es ist kein Zufall, dass die erste Homologie der Seifertfläche und die erste Homologie ihres Komplements beide isomorph zu \mathbb{Z}^{2g} sind. Die beiden Homologien lassen sich über die sogenannte Verschlingungszahl miteinander in Verbindung bringen. Die Verschlingungszahl weist zwei disjunkten geschlossenen Kurven J und K im R^3 eine ganze Zahl zu.

Definition 4.5. Sei $[J]$ die Klasse in $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$, die J repräsentiert. Wähle einen Erzeuger $[\sigma]$ von $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$, der die Rechte-Hand-Regel erfüllt (Daumen Richtung K , andere Finger Richtung σ). Es gibt ein eindeutiges $n \in \mathbb{Z}$, sodass $[J] = n[\sigma]$. Definiere die Verschlingungszahl als $\text{lk}(J, K) = n$.

An der Definition können wir sehen, dass die Verschlingungszahl auch für beliebige Homologieklassen aus $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ im ersten Argument wohldefiniert ist. In [Rol76, 5D] wird beschrieben, wie man auch in beiden Argumenten Homologieklassen zulassen kann, solange die Homologieklassen aus zwei disjunkten Räumen kommen. Die Verschlingungszahl wird dann zu einer bilinearen Abbildung.

Außerdem ist die Verschlingungszahl invariant unter ambienten Isotopien, denn die Homologie ist invariant unter Homöomorphismen und die Rechte-Hand-Regel bleibt unter ambienten Isotopien auch dieselbe.

Es gibt noch viele andere mögliche Definitionen. Eine davon wäre die folgende, in der wir K als Repräsentant für einen Knoten in $\mathbb{R}^3 \setminus J$ betrachten.

Lemma 4.6. Sei S eine Seifertfläche mit Doppelkragen für K , wie wir sie in Satz 3.3 konstruiert haben. Wir nennen den positiven Teil des Doppelkrags N^+ und den negativen N^- . Wegen Isotopieinvarianz der Verschlingungszahl können wir annehmen, dass J die Fläche S nur in endlich vielen Punkten schneidet. Lokal durchläuft J die Seifertfläche an diesen Punkten entweder von N^- nach N^+ , was wir mit +1 gewichten, oder von N^+ nach N^- , was wir mit -1 gewichten. Die Summe dieser Zahlen ergibt die Verschlingungszahl $\text{lk}(J, K)$.

Beweis. Wir nennen die oben definierte Summe m . Die Behauptung ist also

$$m = \text{lk}(J, K).$$

Wähle σ wie in Definition 4.5. Lemma 3.9 sagt uns, dass die Abbildung ψ , die eine Kurve auf die von ihrem Lift eindeutig bestimmte Decktransformation abbildet, einen Isomorphismus $\bar{\psi} : G_K/G'_K \rightarrow \text{Aut}(C_\infty)$ induziert. So wie der Doppelkragen in Satz 3.3 gewählt wird, muss σ die Seifertfläche von N^- nach N^+ durchdringen, denn es erfüllt die Rechte-Hand-Regel. Daher liftet σ zu einer Kurve, die von Y_0 nach Y_1 verläuft. Somit ist $\psi(\sigma)$ die Decktransformation, die Y_i kanonisch auf Y_{i+1} abbildet.

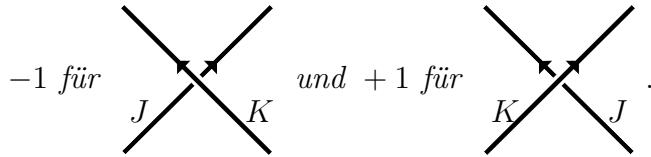
Die Überlagerung C_∞ besteht aus abzählbar vielen Kopien von $Y = \mathbb{R}^3 \setminus S$, die jeweils an der Seifertfläche zusammengeklebt sind. Der Lift J' von J wechselt also jedes Mal von Y_i nach Y_{i+1} , wenn J die Seifertfläche von N^- nach N^+ durchdringt und von Y_{i+1} nach Y_i , wenn J in umgekehrter Richtung die Seifertfläche durchdringt. Startet J' also in einem Punkt in Y_0 , dann endet J' in Y_m . Daher ist $\psi(J)$ die Decktransformation, die Y_i kanonisch auf Y_{i+m} abbildet. Also gilt

$$\bar{\psi}([J]) = \psi(J) = m \cdot \psi(\sigma) = m \cdot \bar{\psi}([\sigma])$$

und deshalb $[J] = m[\sigma]$. Damit ist per Definition $m = \text{lk}(J, K)$. \square

Wir schauen uns noch eine weitere alternative Definition an, die es ermöglicht, die Verschlingungszahl direkt an einer regulären Projektion abzulesen:

Lemma 4.7. *Gegeben sei eine reguläre Projektion von $J \cup K$. Für jeden Punkt, wo J unter K verläuft, zählen wir*



Die Summe dieser Zahlen ergibt die Verschlingungszahl $\text{lk}(J, K)$.

Beweis. Sei S eine Seifertfläche für K wie in Satz 3.3 konstruiert. Wir isotopieren J so, dass J außer an den Unterkreuzungen immer oberhalb von S ist und an jeder Unterkreuzung S nur einmal durchdringt. Jede Unterkreuzung entspricht nun einem Schnittpunkt mit der Seifertfläche und die Abbildung 16 zeigt, dass die Konvention für ± 1 mit der Konvention aus Lemma 4.6 übereinstimmt. \square

Dieses Lemma zeigt zusätzlich, dass die Verschlingungszahl symmetrisch ist: Wenn man die Projektion von der gegenüberliegenden Seite betrachtet, wird jede Kreuzung von J unter K zu einer Kreuzung von K unter J . Die Zuordnung von $+1$ und -1 bleibt aber erhalten.

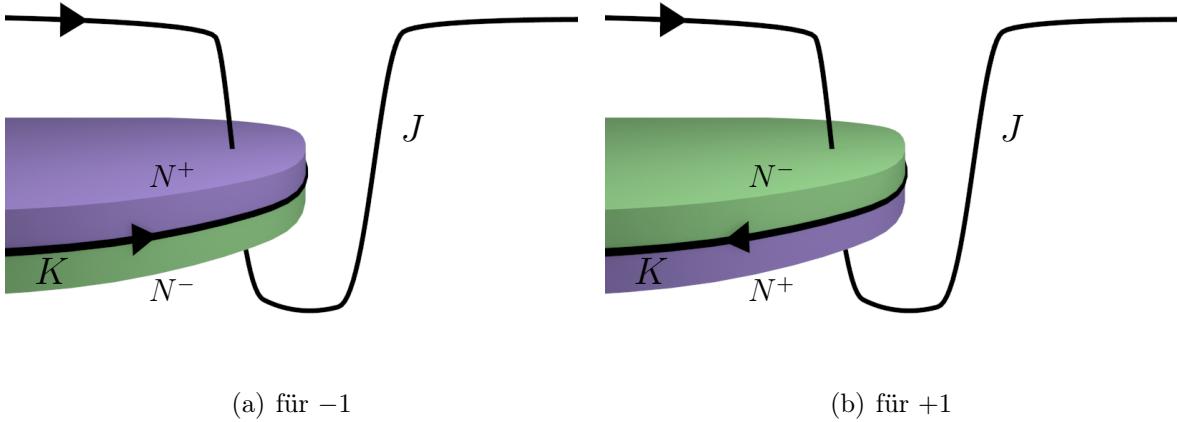


Abb. 16: Darstellung von J an einer Unterkreuzung

Lemma 4.8 (siehe [Rol76, 8C.14]). *Sei S eine Seifertfläche. Sei b_1, \dots, b_{2g} eine Basis für $H_1(S)$. Dann gibt es eine Basis $\beta_1, \dots, \beta_{2g}$ für $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus S)$, sodass*

$$\text{lk}(b_i, \beta_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (*)$$

Diese Basis nennen wir die zu b_1, \dots, b_{2g} duale Basis.

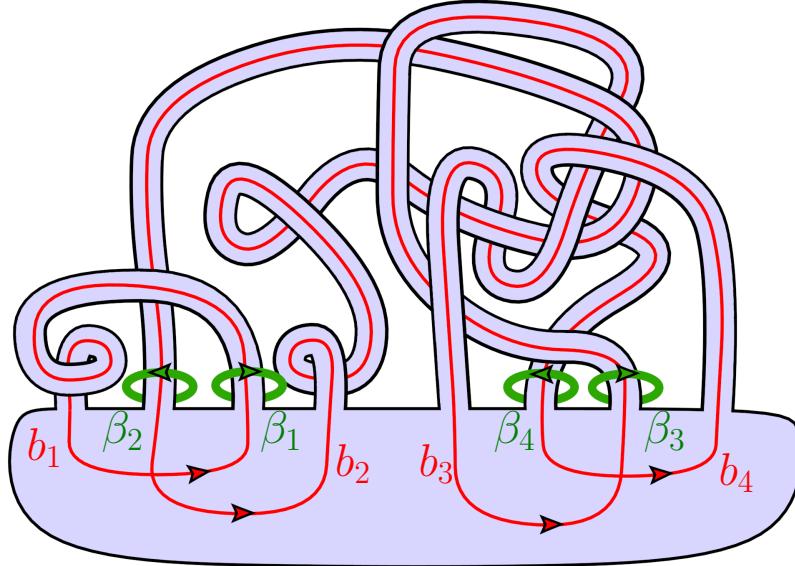


Abb. 17: Ein Beispiel für eine solche Basis

Beweis. Zunächst zeigen wir das Lemma für eine spezielle Basis von $H_1(S)$: Wir schreiben $S = D \cup B_1 \cup \dots \cup B_{2g}$ wie in Lemma 4.3. Sei b_i jeweils der Zyklus, der das Band

B_i genau einmal durchläuft und die anderen Bänder nicht. Wegen $S \simeq \bigvee S^1$ sehen wir, dass b_1, \dots, b_{2g} eine Basis von $H_1(S) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ ist. Nun definieren wir $\beta_i \in H_1(\mathbb{R}^3 \setminus S)$ als den Zyklus, der das Band B_i genau einmal umkreist, und zwar so, dass $\text{lk}(b_i, \beta_i) = +1$. Dann ist $\beta_1, \dots, \beta_{2g}$ eine Basis für $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus S) \cong \mathbb{Z}^{2g}$, denn jeder Zyklus in $\mathbb{R}^3 \setminus S$ lässt sich in Teilzykel zerlegen, die jeweils nur eines der Bänder umkreisen. Eine solche Basis ist in Abbildung 17 exemplarisch dargestellt. Aus der Abbildung wird auch klar, dass $\beta_1, \dots, \beta_{2g}$ die im Lemma geforderte Bedingung (*) erfüllt.

Da das Lemma für diese spezielle Basis b_1, \dots, b_{2g} gilt, gilt es auch für jede andere Basis b'_1, \dots, b'_{2g} : Wir haben zueinander inverse Basiswechselmatrizen, also

$$b_i = \sum_{j=1}^{2g} s_{ij} b'_j, \quad b'_k = \sum_{l=1}^{2g} t_{kl} b_l \quad \text{mit } \sum_{i=1}^{2g} s_{ij} t_{ki} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setze

$$\beta'_j := \sum_{i=1}^{2g} s_{ij} \beta_i.$$

Da (s_{ij}) invertierbar ist, ist $\beta'_1, \dots, \beta'_{2g}$ eine Basis. Dann gilt wegen Linearität von $\text{lk}(\cdot, \cdot)$ und der Eigenschaft (*) von $\text{lk}(b_l, \beta_i)$:

$$\text{lk}(b'_k, \beta'_j) = \sum_{i=1}^{2g} s_{ij} \text{lk}(b'_k, \beta_i) = \sum_{i,l=1}^{2g} s_{ij} t_{kl} \text{lk}(b_l, \beta_i) = \sum_{i=1}^{2g} s_{ij} t_{ki} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daher erfüllt auch $\beta'_1, \dots, \beta'_{2g}$ mit b'_1, \dots, b'_{2g} die Eigenschaft (*) und somit gilt das Lemma für jede beliebige Basis. \square

Beispiel 4.9. Mithilfe einer dualen Basis kann man die Basisdarstellung eines Elements $\xi \in H_1(\mathbb{R}^3 \setminus S)$ bestimmen, indem man Verschlingungszahlen berechnet. Wir nehmen als Beispiel das ξ in Abbildung 18. Wir möchten ξ als Linearkombination der Basiselemente β_j schreiben, also

$$\xi = \sum_{j=1}^4 x_j \cdot \beta_j \text{ mit } x_i \in \mathbb{Z}.$$

Da $\text{lk}(b_i, \beta_j) = 0$ für $i \neq j$, gilt wegen Bilinearität von lk :

$$\text{lk}(\xi, b_i) = \sum_{j=1}^4 x_j \cdot \text{lk}(\beta_j, b_i) = x_i \cdot \text{lk}(\beta_i, b_i) = x_i \text{ für jedes } i$$

Wir müssen also nur die Verschlingungszahlen bestimmen. Dazu schauen wir uns gemäß Lemma 4.7 alle Punkte an, wo ξ unter den b_i verläuft. Es gibt eine Unterkreuzung mit b_1 , die das Lemma mit $+1$ bewertet, und zwei mit b_2 , die jeweils mit -1 bewertet werden. Daher ist

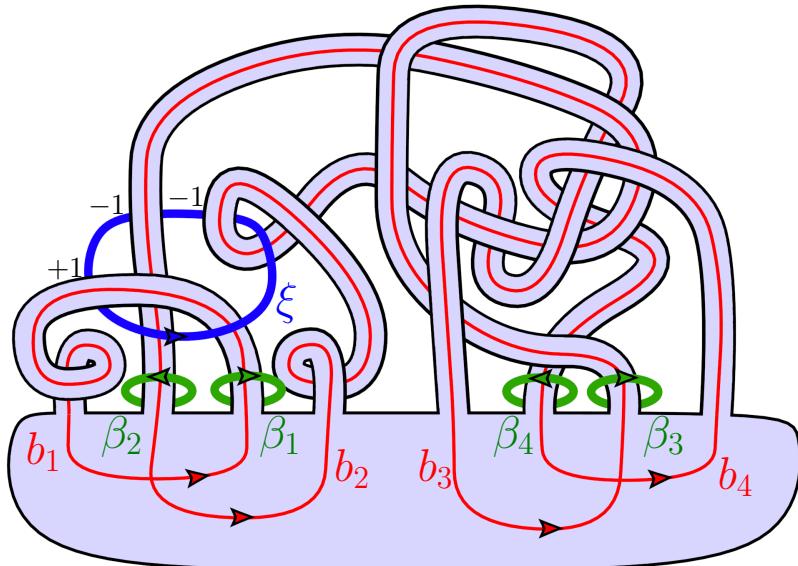


Abb. 18: Bestimmen der Basisdarstellung von ξ

$$\text{lk}(\xi, b_1) = 1, \quad \text{lk}(\xi, b_2) = -2, \quad \text{lk}(\xi, b_3) = \text{lk}(\xi, b_4) = 0$$

und deshalb $\xi = \beta_1 - 2\beta_2$, was mit etwas Mühe auch direkt in der Abbildung zu sehen ist.

4.3 Seifertmatrix

Jetzt können wir den Satz von Mayer-Vietoris auf C_∞ anwenden. Wie bereits besprochen, besteht der Raum per Konstruktion aus zwei offenen Mengen \tilde{Y} und \tilde{N} . Die Menge $\tilde{Y} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} Y_i$ besteht aus abzählbar vielen Kopien des Komplements der Seifertfläche. Die Menge $\tilde{N} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} N_i$ besteht aus abzählbar vielen Kopien der aufgedickten Seifertfläche, genauer gesagt aus Kopien des Bildbereichs des Doppelkragens.

Die Vereinigung der beiden Mengen ergibt ganz C_∞ . Schneiden wir N_i mit Y_i , dann bleibt nur der positive Hälften N_i^+ des Doppelkragens übrig. Schneiden wir N_i mit Y_{i-1} , dann bleibt nur der negative Hälften N_i^- des Doppelkragens. Beide Hälften sind jeweils wieder homotopie-äquivalent zur Seifertfläche. Da alle anderen Schnitte leer sind, gilt

$$\tilde{N} \cap \tilde{Y} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} N_i^+ \cup N_i^-.$$

Der hintere Teil der Sequenz von Mayer-Vietoris lautet also:

$$\dots \rightarrow H_1(C_\infty) \rightarrow H_0(\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} N_i^+ \cup N_i^-) \xrightarrow[\text{||}\mathcal{R}]{(\kappa_1)_* \oplus (\kappa_2)_*} H_0(\tilde{N}) \oplus H_0(\tilde{Y}) \rightarrow \dots$$

$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \qquad \qquad \qquad \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}$

4 Berechnung des Alexandermoduls über die Seifertfläche

Hier bezeichnen $\kappa_1 : \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} N_i^+ \cup N_i^- \rightarrow \tilde{N}$ und $\kappa_2 : \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} N_i^+ \cup N_i^- \rightarrow \tilde{Y}$ die Inklusionsabbildungen. Die Abbildung κ_1 bettet N_i^+ und N_i^- in $N_i \subset \tilde{N}$ ein, während κ_2 die Menge N_i^+ in $Y_i \subset \tilde{Y}$ und die Menge N_i^- in $Y_{i-1} \subset \tilde{Y}$ abbildet. Dadurch wird folgende Abbildung induziert:

$$(\kappa_1)_* \oplus (\kappa_2)_* : \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}, \quad (x_i, y_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto ((x_i + y_i)_{i \in \mathbb{Z}}, (x_i + y_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}})$$

Wir berechnen den Kern dieser Abbildung. Ist $((x_i + y_i), (x_i + y_{i+1})) = 0$, dann ist $y_i = -x_i = y_{i+1}$. Da in einer direkten Summe nur endlich viele Elemente ungleich 0 sein dürfen, folgt daraus $y_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Somit ist auch $x_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Deshalb besteht der Kern von $(\kappa_1)_* \oplus (\kappa_2)_*$ nur aus der Null. Die Abbildung links daneben in der Mayer-Vietoris-Sequenz ist also die Nullabbildung. Die Sequenz sieht etwas weiter vorne daher wie folgt aus:

$$\dots \rightarrow H_1\left(\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} N_i^+ \cup N_i^-\right) \xrightarrow{(\varphi_1)_* \oplus (\varphi_2)_*} H_1(\tilde{N}) \oplus H_1(\tilde{Y}) \xrightarrow{f} H_1(C_\infty) \xrightarrow{0} \dots$$

Hier sind φ_1 und φ_2 die Inklusionsabbildungen. Wegen Exaktheit ist f surjektiv. Um den Alexandermodul $H_1(C_\infty)$ zu berechnen, müssen wir also noch das Bild von $(\varphi_1)_* \oplus (\varphi_2)_*$ bestimmen, denn dann gilt nach Homomorphiesatz:

$$H_1(C_\infty) = \text{im}(f) \cong H_1(\tilde{N}) \oplus H_1(\tilde{Y}) / \ker(f) = H_1(\tilde{N}) \oplus H_1(\tilde{Y}) / \text{im}((\varphi_1)_* \oplus (\varphi_2)_*). \quad (*)$$

Dazu wählen wir eine Basis b_1, \dots, b_{2g} der ersten Homologie der Seifertfläche und eine dazu duale Basis $\beta_1 \dots \beta_{2g}$ der Homologie ihres Komplements wie in Lemma 4.8. Da N_0 homotopie-äquivalent zur Seifertfläche ist, können wir b_1, \dots, b_{2g} als Basis für $H_1(N_0)$ verwenden und $\beta_1 \dots \beta_{2g}$ als Basis für $H_1(Y_0)$. Genauso wie wir es in $H_1(C_\infty)$ bereits definiert haben, schreiben wir $t^i b_k$ und $t^i \beta_k$ für die entsprechenden Zykeln in $H_1(N_i)$ und in $H_1(Y_i)$. Alle $t^i b_k$ zusammen bilden dann eine Basis für \tilde{N} und alle $t^i \beta_k$ bilden zusammen eine Basis für \tilde{Y} .

Diese Notation legt bereits nahe, $H_1(\tilde{N})$ und $H_1(\tilde{Y})$ auch als $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -Moduln aufzufassen. Da diese beiden Räume Überlagerungen von N_0 bzw. Y_0 sind, können wir die Multiplikation mit t genauso über die Decktransformationen definieren wie für C_∞ . Als Modulbasen betrachtet, ist dann schon b_1, \dots, b_{2g} eine Basis von $H_1(\tilde{N})$ und $\beta_1, \dots, \beta_{2g}$ eine Basis von $H_1(\tilde{Y})$.

Nun brauchen wir noch eine Basis für $H_1(\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} N_i^+ \cup N_i^-)$. Dazu verschieben wir die Zykel b_k etwas in positiver Richtung des Doppelkragens und nennen sie b_k^+ . Die etwas in negativer Richtung verschobenen b_k nennen wir entsprechend b_k^- . Da die N_i^+ und N_i^- jeweils homotopie-äquivalent zur Seifertfläche sind, ist b_1^+, \dots, b_{2g}^+ eine Basis für N_0^+ und b_1^-, \dots, b_{2g}^- eine Basis für N_0^- . Somit ist dann $b_1^+, \dots, b_{2g}^+, b_1^-, \dots, b_{2g}^-$ eine Basis für $H_1(\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} N_i^+ \cup N_i^-)$ als $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -Modul.

4 Berechnung des Alexandermoduls über die Seifertfläche

Wie wird diese Basis unter $(\varphi_1)_* \oplus (\varphi_2)_*$ abgebildet? Offensichtlich gilt

$$(\varphi_1)_*(b_k^+) = (\varphi_1)_*(b_k^-) = b_k,$$

denn wir haben für N_0 , N_0^+ und N_0^- jeweils die gleiche Basis gewählt, nur etwas verschoben, damit die Zyklen tatsächlich in der entsprechenden Menge liegen.

Um $(\varphi_2)_*(b_k^+)$ und $(\varphi_2)_*(b_k^-)$ bestimmen, verwenden wir den Trick aus Beispiel 4.9: Das Bild von $b_k^+ \in H_1(N_0^+)$ unter der Inklusionsabbildung ist natürlich b_k^+ selbst, aber als Zyklus in \tilde{Y} , genauer in Y_0 . Wollen wir diesen Zyklus als Linearkombination der Basiselemente β_k schreiben, müssen wir die Verschlingungszahl mit den b_k bestimmen. Wie im Beispiel erhalten wir:

$$(\varphi_2)_*(b_k^+) = \sum_{l=1}^{2g} \text{lk}(b_k^+, b_l) \cdot \beta_l$$

Denselben Trick wenden wir für $(\varphi_2)_*(b_k^-)$ an, mit einem kleinen Unterschied: Die Inklusionsabbildung bildet N_0 auf Y_{-1} ab. Deshalb müssen wir b_k^- als Zyklus in Y_{-1} betrachten. Die Basis von $H_1(Y_{-1})$ ist $t^{-1}\beta_1, \dots, t^{-1}\beta_{2g}$. Daher:

$$(\varphi_2)_*(b_k^-) = \sum_{l=1}^{2g} \text{lk}(b_k^-, b_l) \cdot t^{-1}\beta_l$$

Damit haben wir es fast geschafft: Aus Satz 4.4 folgt

$$H_1(\tilde{N}) \oplus H_1(\tilde{Y}) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{2g} \oplus \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{2g}.$$

Wie wir gesehen haben, können wir diese Menge als $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -Modul auffassen. Eine Basis dieses Moduls ist $(b_1, 0), \dots, (b_{2g}, 0), (0, \beta_1), \dots, (0, \beta_{2g})$. Nach den obigen Überlegungen wird das Bild von $(\varphi_1)_* \oplus (\varphi_2)_*$ in diesem Modul erzeugt von

$$\left(b_k, \sum_{l=1}^{2g} \text{lk}(b_k^+, b_l) \cdot \beta_l \right), \left(b_k, \sum_{l=1}^{2g} \text{lk}(b_k^-, b_l) \cdot t^{-1}\beta_l \right) \text{ mit } k = 1, \dots, 2g$$

Nach (*) gilt $H_1(C_\infty) = H_1(\tilde{N}) \oplus H_1(\tilde{Y}) / \text{im}((\varphi_1)_* \oplus (\varphi_2)_*)$. Also können wir $H_1(C_\infty)$ beschreiben als den von $(b_1, 0), \dots, (b_{2g}, 0), (0, \beta_1), \dots, (0, \beta_{2g})$ erzeugten Modul mit Relationen

$$(b_k, 0) = - \sum_{l=1}^{2g} \text{lk}(b_k^+, b_l) \cdot (0, \beta_l) \text{ und } (b_k, 0) = - \sum_{l=1}^{2g} \text{lk}(b_k^-, b_l) \cdot t^{-1}(0, \beta_l)$$

für $k = 0, \dots, 2g$. Diese Beschreibung lässt sich aber noch weiter vereinfachen: Die Erzeuger $(b_1, 0), \dots, (b_{2g}, 0)$ sind nicht notwendig, da sie sich als Linearkombination der $(0, \beta_l)$ schreiben lassen.

4 Berechnung des Alexandermoduls über die Seifertfläche

Vereinfacht können wir $H_1(C_\infty)$ also beschreiben als den von $\beta_1, \dots, \beta_{2g}$ erzeugten $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -Modul mit Relationen

$$\sum_{l=1}^{2g} \text{lk}(b_k^+, b_l) \cdot \beta_l = \sum_{l=1}^{2g} \text{lk}(b_k^-, b_l) \cdot t^{-1} \beta_l \text{ für } k = 1, \dots, 2g$$

oder äquivalent

$$\sum_{l=1}^{2g} \text{lk}(b_k^+, b_l) \cdot t \beta_l = \sum_{l=1}^{2g} \text{lk}(b_k^-, b_l) \cdot \beta_l \text{ für } k = 1, \dots, 2g.$$

Die Verschlingungszahlen $\text{lk}(b_k^\pm, b_l)$ der Basiszykel der Seifertfläche mit den entlang des Doppelkragens verschobenen Basiszykeln spielen also eine wichtige Rolle für den Alexandermodul $H_1(C_\infty)$. Daher bekommen sie einen eigenen Namen:

Definition 4.10. Sei S die Seifertfläche eines Knotens und b_1, \dots, b_n eine Basis von $H_1(S)$. Wir bezeichnen diese Zykel in den positiven Bereich N^+ des Doppelkragens verschoben mit $b_1^+, \dots, b_n^+ \in H_1(N^+)$ und in den negativen Bereich N^- verschoben mit $b_1^-, \dots, b_n^- \in H_1(N^-)$. Die Matrix

$$V := (\text{lk}(b_k^\pm, b_l))_{k,l \in 1, \dots, 2g}$$

heißt dann *Seifertmatrix*.

Wegen der Isotopieinvarianz der Verschlingungszahl gilt offenbar, dass $\text{lk}(b_k^+, b_l) = \text{lk}(b_k^-, b_l^-) = \text{lk}(b_k, b_l^-)$, denn die Zykel können so im Doppelkragen verschoben werden, ohne sich zu durchkreuzen. Wegen Symmetrie von lk folgt $\text{lk}(b_k^+, b_l) = \text{lk}(b_l^-, b_k)$. Haben wir eine Seifertmatrix $V = (v_{kl})$ gegeben, können wir die oben berechneten Relationen des Alexandermoduls also umschreiben zu

$$\sum_{l=0}^{2g} v_{kl} t \beta_l = \sum_{l=0}^{2g} v_{lk} \beta_l \text{ oder äquivalent } \sum_{l=0}^{2g} (v_{kl} t - v_{lk}) \beta_l = 0 \text{ für } k = 0, \dots, 2g.$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 4.11 (siehe [Rol76, 8C.3]). *Ist V eine Seifertmatrix eines Knotens K , dann ist $tV - V^T$ eine Alexandermatrix, also eine Präsentationsmatrix für den Alexandermodul von K .*

5 Das Alexanderpolynom

5.1 Herleitung

Da die Knotengruppe eine Knoteninvariante ist, ist auch der Alexandermodul G'_K/G''_K eine Knoteninvariante – zumindest bis auf Vertauschen von t und t^{-1} . Diese Invariante lässt sich mithilfe der Alexandermatrix beschreiben. Hier ergibt sich nun dasselbe Problem wie bei der Knotengruppe: Woher wissen wir, ob zwei Matrizen isomorphe Moduln präsentieren? Nicht einmal die Größe der Matrix ist eindeutig bestimmt, denn wie Beispiel 3.4 zeigt, lassen sich für einfache Knoten beliebig komplizierte Seifertflächen finden. Diese haben dann auch eine Bandprojektion mit vielen Bändern und die Höhe und Breite der Alexandermatrix entspricht der Anzahl dieser Bänder.

Daher entwickeln wir nun aus der Alexandermatrix eine Invariante, die sich ganz einfach vergleichen lässt. Wir wissen aus Satz 4.11, dass es für jeden Knoten eine quadratische Alexandermatrix gibt. Von dieser Matrix bilden wir die Determinante. Die Einträge der Alexandermatrix sind Laurentpolynome, daher ist die Determinante also auch ein Laurentpolynom. Dieses nennen wir das *Alexanderpolynom* $\Delta(t)$ des Knotens. Es gilt also

$$\Delta = \det(tV - V^T),$$

wenn V eine Seifertmatrix ist. Das Alexanderpolynom ist bis auf Multiplikation mit $\pm t^k$, den Einheiten des Rings der Laurentpolynome, eindeutig bestimmt. Dass es bis auf Einheiten nicht von der Wahl der Alexandermatrix abhängt, soll im Folgenden bewiesen werden.

Dazu verallgemeinern wir die Definition des Alexanderpolynoms zunächst, denn so erhalten wir noch weitere interessante Invarianten mit gleichem Aufwand.

Definition 5.1 (siehe [BZ03, 8D]). Sei R ein kommutativer Ring mit Eins (z. B. die Laurentpolynome) und A eine $m \times n$ -Matrix mit Einträgen in R (z. B. eine Alexandermatrix). Dann definiere das k -te Elementarideal $E_k(A) \subset R$ als das von allen $(n-k) \times (n-k)$ -Minoren erzeugte Ideal. Falls $n-k > m$, setze $E_k(A) := 0$, und falls $n-k \leq 0$, setze $E_k(A) := R$.

Insbesondere ist das 0-te Elementarideal einer quadratischen Matrix A das von $\det(A)$ erzeugte Ideal.

Definition 5.2. Sei A eine Alexandermatrix eines Knotens. Dann nennen wir den größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $E_k(A)$ das k -te Alexanderpolynom $\Delta_k(t)$ des Knotens. Da der größte gemeinsame Teiler nur bis auf Multiplikation mit den Einheiten $\pm t^k$ aus dem Ring der Laurentpolynome eindeutig ist, gilt dies auch für die Alexanderpolynome.

Das 0-te Alexanderpolynom wird auch das Alexanderpolynom $\Delta(t)$ genannt.

5 Das Alexanderpolynom

Haben wir ein Erzeugendensystem von $E_k(A)$ gegeben, wie etwa die $(n-k) \times (n-k)$ -Minoren von A , dann reicht es aus, den größten gemeinsamen Teiler der Erzeuger zu bilden: Dieser ist ein Teiler aller Erzeuger, daher muss er auch ein Teiler von allen Elementen in $E_k(A)$ sein. Das 0-te Alexanderpolynom ist daher tatsächlich einfach die Determinante einer quadratischen Alexandermatrix, denn das 0-te Elementarideal wird von $\det(A)$ erzeugt.

Wir zeigen nun, dass die Elementarideale nicht von der Wahl der Präsentationsmatrix abhängen. Damit folgt dann, dass die Alexanderpolynome bis auf Multiplikation mit den Einheiten nicht von der Alexandermatrix abhängen, denn das gilt für den größten gemeinsamen Teiler. Dazu untersuchen wir zunächst, wann zwei Matrizen den selben Modul präsentieren und zeigen später, dass solche Matrizen die gleichen Elementarideale haben.

Lemma 5.3. *Zwei Matrizen mit Werten in einem kommutativen Ring R mit Eins präsentieren genau dann isomorphe R -Moduln, wenn sie durch eine endliche Anzahl der folgenden Transformationen ineinander überführt werden können:*

- (1) *Zwei Zeilen oder Spalten tauschen*
- (2) *Zu einer Zeile eine R -Linearkombination von anderen Zeilen addieren*
- (3) *Zu einer Spalte eine R -Linearkombination von anderen Spalten addieren*
- (4) *Eine Zeile oder Spalte mit einer Einheit von R multiplizieren.*
- (5) *Eine Matrix M folgendermaßen vergrößern:*

$$\begin{pmatrix} 1 & ? & \dots & ? \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

oder eine Matrix dieser Form auf M reduzieren.

- (6) *Eine Zeile hinzufügen, die eine Linearkombination der anderen Zeilen ist, oder eine solche Zeile entfernen.*

Beweis. Dass die Transformationen den Isomorphietyp des präsentierten Moduls nicht ändern, ist leicht einzusehen: Transformation (1) ändert nur die Reihenfolge der Erzeuger und der Relationen. Transformation (2) addiert eine Linearkombination von Relationen zu einer anderen Relation. Dies verändert den Modul nicht, da die alte Relation durch Subtrahieren derselben Linearkombination wiederhergestellt werden kann. Genau so wechselt Transformation (3) einen Erzeuger gegen ein anderes Element im Modul aus, sodass der Erzeuger aus dem neuen Erzeugendensystem wiederhergestellt werden kann. Transformation (4) ändert Erzeuger oder Relationen nur um eine Einheit, was den Modul nicht verändert. Transformation (5) fügt einen neuen Erzeuger ein, der als Linearkombination der anderen geschrieben werden kann oder entfernt einen solchen überflüssigen

5 Das Alexanderpolynom

Erzeuger. Transformation (6) fügt eine Relation ein, die aus den anderen folgt, oder entfernt eine solche.

Umgekehrt seien nun zwei Matrizen $(a_{ij}) \in R^{s \times n}$, $(b_{kl}) \in R^{t \times m}$ gegeben, die isomorphe Moduln präsentieren. Sei A der von (a_{ij}) präsentierte Modul mit Erzeugern $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und B der von (b_{kl}) erzeugte Modul mit Erzeugern β_1, \dots, β_m . Sei $h : A \rightarrow B$ ein Isomorphismus. Definiere $(x_{jl}) \in R^{n \times m}$ und $(y_{qj}) \in R^{m \times n}$ durch

$$h(\alpha_j) = \sum_{l=1}^m x_{jl} \cdot \beta_l \quad \text{und} \quad \beta_q = \sum_{j=1}^n y_{qj} \cdot h(\alpha_j). \quad (*)$$

Da sich jede Transformation auch rückgängig machen lässt, genügt es zu zeigen, dass sich die Matrizen (a_{ij}) und (b_{kl}) in eine gemeinsame Matrix überführen lassen. Wir werden zeigen, dass sich beide Matrizen in die folgende transformieren lassen:

$$Z := \left(\begin{array}{c|c} a_{ij} & 0 \\ \hline 0 & b_{kl} \\ \hline 1 & 0 \\ \ddots & x_{jl} \\ 0 & 1 \\ \hline y_{qj} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \ddots \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{array} \right)$$

Wegen der Symmetrien genügt es, die Transformation nur für eine der Matrizen zu zeigen, etwa für (b_{kl}) . Durch n -faches Anwenden von (5) auf (b_{kl}) und anschließendes Vertauschen der Zeilen mit (1) erhalten wir

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & b_{kl} \\ \hline 1 & 0 \\ \ddots & x_{jl} \\ 0 & 1 \end{array} \right).$$

Mithilfe von (6) machen wir Folgendes für jedes $i = 1, \dots, s$: Die unteren n Zeilen dieser Matrix werden mit a_{i1}, \dots, a_{in} multipliziert, die Ergebnisse aufsummiert

5 Das Alexanderpolynom

und dann als neue Zeile hinzugefügt. Es ergibt sich

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{ij} & c_{il} \\ \hline 0 & b_{kl} \\ \hline 1 & 0 \\ \ddots & \\ 0 & 1 \end{array} \right) \text{ mit } c_{il} = \sum_{j=1}^n x_{jl} \cdot a_{ij}.$$

Da (a_{ij}) den Modul A präsentiert, folgt mit (*) für jedes $i \in \{1, \dots, s\}$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \alpha_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot h^{-1} \left(\sum_{l=1}^m x_{jl} \cdot \beta_l \right) = h^{-1} \left(\sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^n x_{jl} \cdot a_{ij} \cdot \beta_l \right) \\ \Rightarrow 0 &= \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^n x_{jl} \cdot a_{ij} \cdot \beta_l = \sum_{l=1}^m c_{il} \cdot \beta_l \end{aligned}$$

Diese Darstellung der 0 als Linearkombination der β_l muss in den Relationen jeder Präsentation von B erfasst sein. Also muss dies insbesondere aus den Relationen folgen, die durch die Matrix (b_{kl}) dargestellt werden. Das bedeutet konkret, dass der Vektor (c_{i1}, \dots, c_{im}) für jedes i eine Linearkombination der Zeilen von (b_{kl}) ist. Daher können wir mit (2) die obige Matrix weiter transformieren zu

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{ij} & 0 \\ \hline 0 & b_{kl} \\ \hline 1 & 0 \\ \ddots & \\ 0 & 1 \end{array} \right).$$

Wieder mithilfe von (6) machen wir Folgendes für jedes $q = 1, \dots, m$: Die unteren n Zeilen dieser Matrix werden mit y_{q1}, \dots , bzw. y_{qn} multipliziert, die Ergebnisse aufsummiert und dann als neue Zeile hinzugefügt. Es ergibt sich

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{ij} & 0 \\ \hline 0 & b_{kl} \\ \hline 1 & 0 \\ \ddots & x_{jl} \\ 0 & 1 \\ \hline y_{qj} & d_{ql} \end{array} \right) \text{ mit } d_{ql} = \sum_{j=1}^n y_{qj} \cdot x_{jl}.$$

Weiter folgt aus (*):

$$\begin{aligned} \beta_q &= \sum_{j=1}^n y_{qj} \cdot h(\alpha_j) = \sum_{j=1}^n \left(y_{qj} \cdot \sum_{l=1}^m x_{jl} \cdot \beta_l \right) = \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^n y_{qj} \cdot x_{jl} \cdot \beta_l = \sum_{l=1}^m d_{ql} \cdot \beta_l \\ \Rightarrow 0 &= \left(\sum_{l=1}^m d_{ql} \cdot \beta_l \right) - \beta_q \end{aligned}$$

Auch diese Darstellung der 0 als Linearkombination der β_l muss in den Relationen jeder Präsentation von B erfasst sein. Also muss dies wieder aus den Relationen folgen, die durch die Matrix (b_{kl}) dargestellt werden. Das bedeutet also, dass der Vektor $(d_{q,1}, \dots, d_{q,q-1}, d_{q,q} - 1, d_{q,q+1}, \dots, d_{q,m})$ für jedes q eine Linearkombination der Zeilen von (b_{kl}) ist. Daher können wir mit (2) die obige Matrix in die am Anfang angegebene Matrix Z transformieren. \square

Wir wissen nun also, dass zwei Präsentationsmatrizen desselben Knotens durch die oben genannten Transformationen ineinander überführt werden können. Daher müssen wir nun zeigen, dass diese Transformationen die Elementarideale nicht verändern.

Lemma 5.4. *Die Elementarideale eines Moduls hängen nicht von der Wahl der Präsentationsmatrix ab.*

Beweis. Wir zeigen für jede der Transformationen aus Lemma 5.3, dass sie die Elementarideale nicht verändert:

Transformation (1) vertauscht nur die Anordnung der Minoren oder deren Vorzeichen: Jede Teilmatrix der alten Matrix lässt sich auch in der neuen Matrix wiederfinden, eventuell mit vertauschten Zeilen oder Spalten. Die Determinante der Teilmatrix wechselt dann höchstens das Vorzeichen.

5 Das Alexanderpolynom

Die Argumente für Transformation (2) und (3) sind sich sehr ähnlich, exemplarisch zeigen wir es für Transformation (3). Diese Transformation lässt sich in Teiloperationen zerlegen, in der nur ein R -Vielfaches einer einzigen Spalte auf eine andere Spalte addiert wird. Da Transformation (1) die Elementarideale nicht verändert, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass ein R -Vielfaches der zweiten Spalte auf die erste addiert wird. Sind etwa (a_1, \dots, a_n) die Spalten der alten Matrix M , dann ist $M' = (a_1 + ra_2, a_2, \dots, a_n)$ mit $r \in R$ die neue Matrix.

Wir zeigen zuerst $E_k(M) \subset E_k(M')$. Seien (b_1, \dots, b_{n-k}) die Spalten einer Teilmatrix von $M = (a_1, \dots, a_n)$. Überlappt die Teilmatrix nicht mit der ersten Spalte, dann bleibt sie unter der Transformation unverändert. Überlappt sie mit der ersten und der zweiten Spalte, dann ist die entsprechende Teilmatrix nach der Transformation $(b_1 + rb_2, b_2, \dots, b_{n-k})$. Diese hat dieselbe Determinante. Überlappt die Teilmatrix nur mit der ersten, aber nicht mit der zweiten Spalte, dann ist die entsprechende Teilmatrix nach der Transformation $(b_1 + ra'_2, b_2, \dots, b_{n-k})$, wobei a'_2 der entsprechende Teil der Spalte a_2 ist. Aber auch $(a'_2, b_2, \dots, b_{n-k})$ ist eine Teilmatrix von M' , denn die zweite Spalte bleibt unverändert. Deshalb liegt

$$\det(b_1, b_2, \dots, b_{n-k}) = \det(b_1 + ra'_2, b_2, \dots, b_{n-k}) - r \det(a'_2, b_2, \dots, b_{n-k})$$

auch im Elementarideal der neuen Matrix. Das zeigt $E_k(M) \subset E_k(M')$.

Jede Transformation vom Typ (3) kann mit einer weiteren Transformation vom Typ (3) wieder rückgängig gemacht werden. Daher funktioniert das Argument für $E_k(M') \subset E_k(M)$ ganz analog.

Transformation (4) verändert nur einige Minoren um Multiplikation mit einer Einheit. Die Minoren erzeugen also dasselbe Ideal wie vorher.

Transformation (5) verändert die Dimension der Matrix: aus einer $m \times n$ -Matrix M wird eine $(m+1) \times (n+1)$ -Matrix

$$M' := \begin{pmatrix} 1 & ? & \dots & ? \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

oder umgekehrt. Das k -te Elementarideal $E_k(M)$ wird von allen $(n-k)$ -Minoren von M erzeugt, während das $E_k(M')$ von allen $(n+1-k)$ -Minoren von M' erzeugt wird. Jede $(n+1-k) \times (n+1-k)$ -Teilmatrix von M' ist von der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & ? & \dots & ? \\ 0 & & & \\ \vdots & X & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & Y & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} ? & \dots & ? \\ & & \\ & Z & \end{pmatrix}$$

5 Das Alexanderpolynom

oder ist eine Teilmatrix von M , wobei X, Y, Z Teilmatrizen von M der passenden Dimension sind.

Die Determinante einer Teilmatrix des ersten Typs ist $\det(X)$ und deshalb entsprechen diese Determinanten genau den $(n-k)$ -Minoren von M . Es folgt, dass $E_k(M) \subset E_k(M')$. Um weiter zu folgern, dass $E_k(M) = E_k(M')$ gilt, müssen wir zeigen, dass die Determinanten der anderen Typen von Teilmatrizen auch in $E_k(M)$ liegen.

Die Determinante einer Teilmatrix des zweiten Typs ist 0, also in $E_k(M)$. Bei einer Teilmatrix des dritten Typs schreibe Z_i für die Teilmatrix von Z , der nur die i -te Spalte fehlt. Dann ist nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{n+1-k} \\ & Z & \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1-k} (-1)^{i+1} \cdot u_i \cdot \det(Z_i)$$

Die Z_i sind $(n-k) \times (n-k)$ -Teilmatrizen von M . Deshalb ist die Determinante einer Matrix des dritten Typs nach obiger Gleichung eine Linearkombination von $(n-k)$ -Minoren von M und somit in $E_k(M)$.

Der vierte Typ von $(n+1-k) \times (n+1-k)$ -Teilmatrizen von M' , nämlich die Teilmatrizen von M , sind eigentlich ein Spezialfall des dritten Typs. Somit gilt $E_k(M) = E_k(M')$.

Transformation (6) verändert ebenfalls die Größe der Matrix, aber die Breite bleibt unverändert. Daher betrachten wir in beiden Matrizen, der alten und der neuen, Minoren derselben Dimension. Sei M die Matrix ohne und M' die Matrix mit der zusätzlichen Zeile. Dann sind offensichtlich die Minoren von M auch Minoren von M' , somit $E_k(M) \subset E_k(M')$. Sei X eine Teilmatrix von M' , die keine Teilmatrix von M ist, die also mit der zusätzlichen Zeile überlappt. Sind x_1, \dots, x_{n-k} die Zeilen von X , dann ist eine dieser Zeilen daher eine Linearkombination der anderen, etwa $x_{n-k} = \sum_{i=1}^{n-k-1} v_i x_i$ mit $v_i \in R$. Dann gilt

$$\det(X) = \det \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-k} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-k-1} v_i \det \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-k-1} \\ x_i \end{pmatrix}.$$

In der Matrix auf der rechten Seite kommt immer eine Zeile doppelt vor, die Determinante ist also jeweils 0. Daher ist $\det(X) = 0$ und somit gilt auch hier $E_k(M) = E_k(M')$. \square

Damit haben wir bewiesen:

Satz 5.5. *Die Alexanderpolynome $\Delta_k(t)$ eines Knotens sind bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig. Die Alexanderpolynome sind also Knoteninvarianten.*

Was aber passiert, wenn wir in der Definition des Alexandermoduls die Rollen von t und t^{-1} vertauschen? Für eine Seifertmatrix V haben wir gesehen, dass die Matrix $tV - V^T$ eine Präsentationsmatrix des Alexandermoduls ist. Die Seifertmatrix selbst hängt nicht von der Wahl t oder t^{-1} ab. Für den dualen Alexandermodul ist also $t^{-1}V - V^T$ eine Präsentationsmatrix. Da Multiplikation mit Einheiten den präsentierten Modul nicht verändert, ist auch $-t \cdot (t^{-1}V - V^T) = tV^T - V$ eine Präsentationsmatrix des dualen Alexandermoduls. Dies ist die Transponierte der Präsentationsmatrix des ursprünglichen Alexandermoduls.

Da die Elementarideale und Alexanderpolynome für quadratische Matrizen durch Transponieren der Alexandermatrix nicht verändert werden, gilt folgender Satz:

Satz 5.6. *Die Alexanderpolynome sind unabhängig von der Wahl t oder t^{-1} in der Definition des Alexandermoduls.*

5.2 Anwendung auf Bretzelknoten

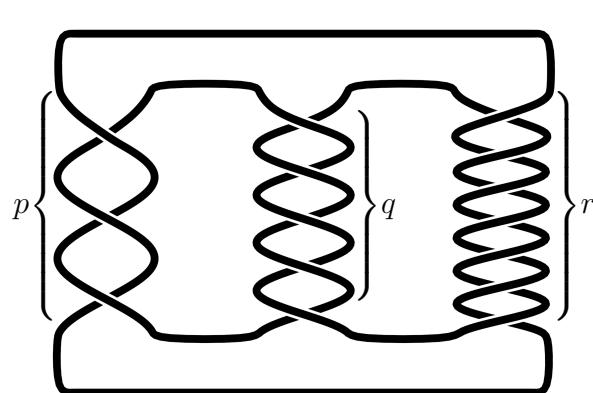


Abb. 19: Der Bretzelknoten $\mathfrak{p}(3, 5, -7)$

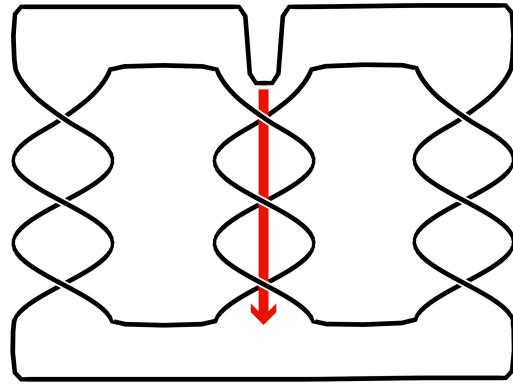


Abb. 20: Eine Schlaufe durch die Mitte des Knotens ziehen

Beispiel 5.7. Wir berechnen die Alexanderpolynome der sogenannten Bretzelknoten. Zu drei ungeraden Zahlen p, q, r gibt es einen Bretzelknoten $\mathfrak{p}(p, q, r)$. Abbildung 19 zeigt beispielsweise den Bretzelknoten $\mathfrak{p}(3, 5, -7)$. Die Vorzeichen der drei Zahlen geben dabei die Richtung der Verdrillung an. In den folgenden Abbildungen wird zur Vereinfachung exemplarisch der Knoten $\mathfrak{p}(3, 3, 3)$ dargestellt. Zunächst bringen wir den Knoten in Bandprojektion. Dazu ziehen wir eine Schlaufe durch die Mitte wie in Abbildung 20. Dadurch bekommen wir eine Form des Knotens, die die in Abbildung 21 eingezeichnete Seifertfläche S besitzt. Um eine Bandprojektion zu bekommen, müssen wir noch die Verdrillungen der Fläche beseitigen. Die Verdrillungen in der Mitte können wir wie in Abbildung 22 nach oben verschieben. Dadurch haben wir auf der linken Seite $p + q$ Verdrillungen und auf der rechten Seite $r + q$ Verdrillungen, auf beiden Seiten also eine

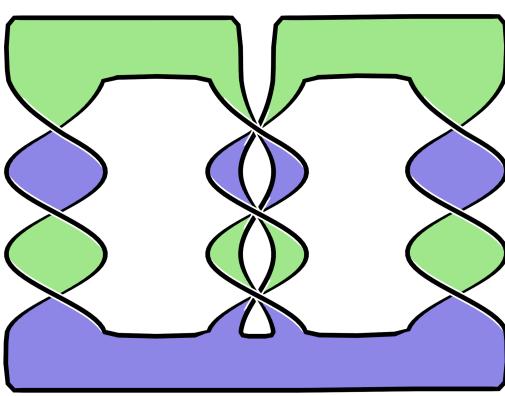


Abb. 21: Seifertfläche des Bretzelknotens

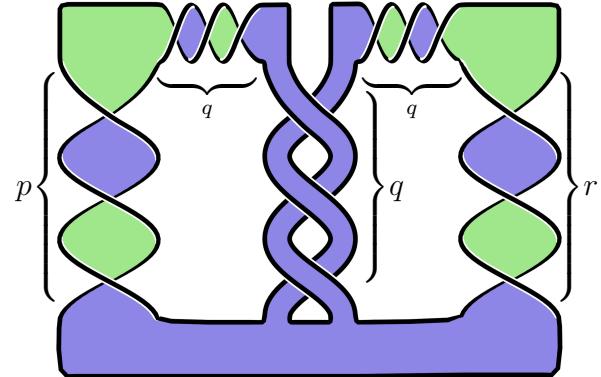


Abb. 22: Die Verdrillungen aus der Mitte nach oben verschieben

gerade Anzahl. In Abbildung 14 haben wir gesehen, dass sich jeweils zwei Verdrillungen zu einer Schlaufe deformieren lassen. Wir erhalten die Bandprojektion aus Abbildung 23.

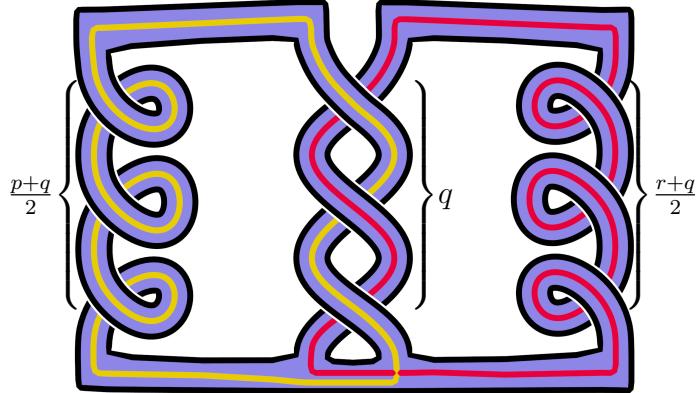


Abb. 23: Bandprojektion des Bretzelknotens

Um die Seifertmatrix V zu bestimmen, folgen wir Definition 4.10. Wir wählen eine Basis b_1, b_2 von $H_1(S)$. Wir bezeichnen diese Zyklen in den positiven Bereich N^+ des Doppelkragens verschoben mit $b_1^+, b_2^+ \in H_1(N^+)$. Diese Zyklen sind in Abbildung 24 zu sehen. Per Definition ist

$$V = \begin{pmatrix} \text{lk}(b_1^+, b_1) & \text{lk}(b_1^+, b_2) \\ \text{lk}(b_2^+, b_1) & \text{lk}(b_2^+, b_2) \end{pmatrix}.$$

Für $\text{lk}(b_1^+, b_1)$ schauen wir uns gemäß Lemma 4.7 alle Unterkreuzungen von b_1^+ unter b_1 an. Wir haben $\frac{p+q}{2}$ Unterkreuzungen von Typ -1 , also $\text{lk}(b_1^+, b_1) = -\frac{p+q}{2}$. Genauso berechnen wir die anderen Verschlingungszahlen und erhalten

$$V = \begin{pmatrix} -\frac{p+q}{2} & -\frac{q-1}{2} \\ -\frac{q+1}{2} & -\frac{r+q}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} p+q & q-1 \\ q+1 & r+q \end{pmatrix}.$$

5 Das Alexanderpolynom

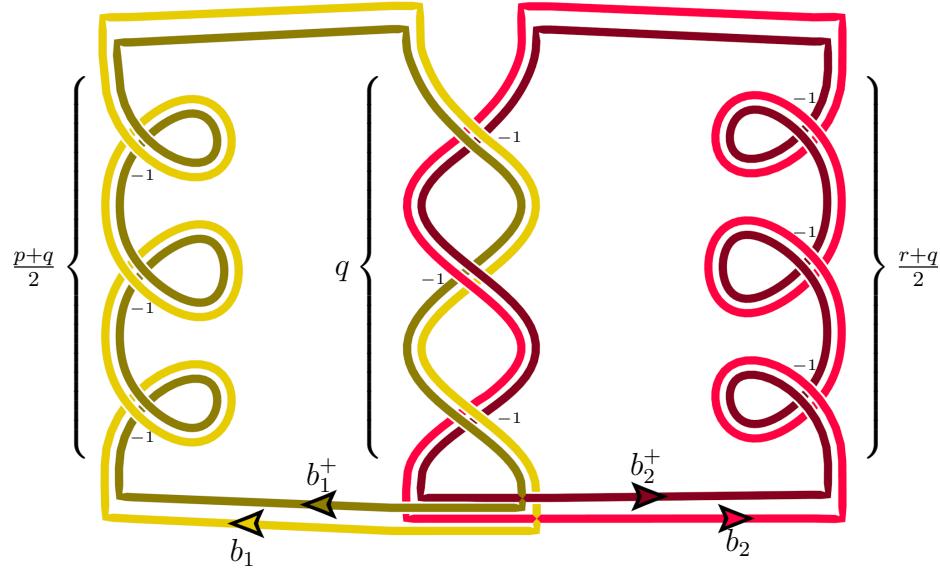


Abb. 24: Bestimmung der Seifertmatrix

Daher ist

$$\begin{aligned} tV - V^T &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (p+q)t - p - q & qt - t - q - 1 \\ qt + t - q + 1 & (r+q)t - r - q \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (t-1)(p+q) & (t-1)(q-1) - 2 \\ (t-1)(q+1) + 2 & (t-1)(r+q) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

nach Satz 4.11 eine Alexandermatrix des Bretzelknotens. Deren Determinante ist das Alexanderpolynom Δ des Knotens $\mathfrak{p}(p, q, r)$:

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \det(tV - V^T) \\ &= \frac{1}{4} ((1-t)^2(p+q)(r+q) - ((t-1)(q-1)-2)((t-1)(q+1)+2)) \\ &= \frac{1}{4} ((1-t)^2(p+q)(r+q) - (t-1)^2(q^2-1) + (t-1)(2(q+1)-2(q-1))+4) \\ &= \frac{1}{4} ((t-1)^2((p+q)(r+q)-q^2+1) + 4(t-1)+4) \\ &= \frac{1}{4} ((t-1)^2((p+q)(r+q)-q^2) + ((t-1)+2)^2) \\ &= \frac{1}{4} ((t-1)^2(pr+pq+qr) + (t+1)^2) \end{aligned}$$

Unterscheiden sich die Werte $p_1r_1 + p_1q_1 + q_1r_1$ und $p_2r_2 + p_2q_2 + q_2r_2$ für zwei Bretzelknoten $\mathfrak{p}(p_1, q_1, r_1)$ und $\mathfrak{p}(p_2, q_2, r_2)$, dann sind auch die Bretzelknoten unterschiedlich. Es gibt also unendlich viele unterschiedliche Bretzelknoten.

6 Alexanders Methode zur Definition des Alexanderpolynoms

In der ursprünglichen Arbeit von Alexander über das Alexanderpolynom ([Ale28]) befindet sich eine weitere einfache Möglichkeit, das Alexanderpolynom zu bestimmen.

Satz 6.1. *Gegeben sei ein Knoten K . Wie bei der Bestimmung der Dehnpräsentation nehmen wir eine reguläre Projektion von K und bezeichnen die abgegrenzten Teilflächen der Ebene mit a_0, a_1, \dots, a_n , sodass a_0 und a_1 benachbart sind. Dann definieren wir eine Matrix (c_{ij}) mit Einträgen aus $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, die für jede der Teilflächen eine Spalte und für jede Kreuzung eine Zeile hat. Ist die i -te Kreuzung von der Form wie in Abbildung 25, dann definiere*

$$c_{ij} := \begin{cases} 1, & j = s \\ -1, & j = t \\ -t, & j = u \\ t, & j = v \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lässt man die ersten beiden Spalten von (c_{ij}) weg, also die, die den benachbarten a_0 und a_1 entsprechen, dann entsteht eine quadratische Alexandermatrix. Insbesondere ist ihre Determinante das Alexanderpolynom von K .

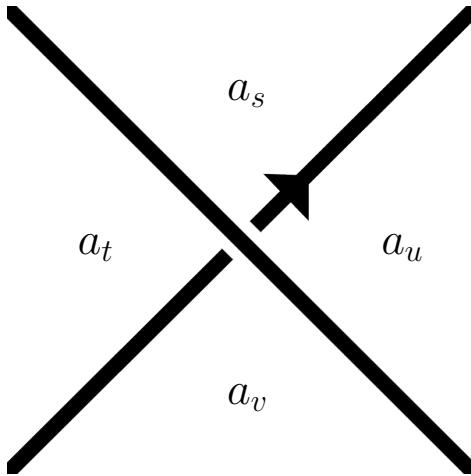


Abb. 25: Kreuzungen entsprechen den Zeilen der Matrix (c_{ij}) .

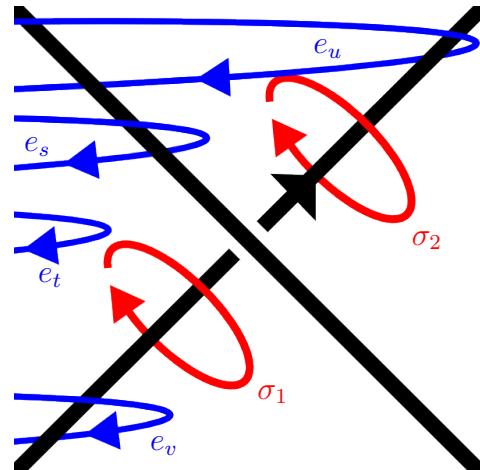


Abb. 26: Erzeuger der Dehnpräsentation

Dies verwendet Alexander als die Definition des Alexanderpolynoms. Wir werden nun zeigen, dass diese Definition mit unserer Definition übereinstimmt. Dieser Beweis folgt den Ausführungen von [Kau87, S. 245ff].

6 Alexanders Methode zur Definition des Alexanderpolynoms

Beweis. Wir verwenden die Dehnpräsentation des Knotens, die in Satz 2.3 beschrieben wird. Diese ist eine Beschreibung der Knotengruppe G_K , also der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$. Um die Kommutatorgruppe G'_K zu bestimmen, müssen wir nach Lemma 3.8 diejenigen Elemente aus $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ heraussuchen, deren Repräsentanten zu geschlossenen Kurven in C_∞ liften. Eine Kurve liftet genau dann zu einer geschlossenen Kurve, wenn sie die Seifertfläche genauso oft in eine Richtung durchläuft wie in die andere. Das ist nach Lemma 4.6 äquivalent dazu, dass die Verschlingungszahl des Knotens mit der Kurve 0 ist.

Wir suchen also die Untergruppe von $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$, die Verschlingungszahl 0 mit dem Knoten hat. Dazu tauschen wir zunächst alle bis auf einen Erzeuger der Dehnpräsentation durch Erzeuger mit Verschlingungszahl 0 aus. Seien e_1, \dots, e_n die Erzeuger der Dehnpräsentation, die jeweils den Teilflächen a_1, \dots, a_n der Knotenprojektion entsprechen. Da a_0 und a_1 nach Voraussetzung benachbart sind, hat e_1 Verschlingungszahl 1 oder -1 mit dem Knoten. Durch Vertauschen der Indizes 0 und 1 kann man sich diese Verschlingungszahl aussuchen. Die Wahl dieser Verschlingungszahl entspricht der Wahl von T in Definition 2.14, denn am Ende dieser Ausführungen übernimmt e_1 die Rolle von T . Wir nehmen an, dass die Verschlingungszahl 1 ist, der Beweis funktioniert aber genauso für -1 . Dann definieren wir:

$$E_i := e_1^{-\text{lk}(e_i, K)} e_i \text{ für } i = 2, \dots, n.$$

Die Elemente e_1, E_2, \dots, E_n bilden dann wieder ein Erzeugendensystem der Knotengruppe G_K . Wegen Linearität der Verschlingungszahl gilt $\text{lk}(E_i, K) = 0$. Deshalb ist die Verschlingungszahl eines Elementes $\gamma \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ gleich der Summe der Exponenten von e_1 , wenn man γ in dieser neuen Basis schreibt. Die Kommutatorgruppe $G'_K \cong p_*(\pi_1(C_\infty))$ ist also die Untergruppe der Elemente, für die die Summe der Exponenten von e_1 gleich 0 ist. Diese Untergruppe wird von Kurven der Form $e_1^k E_i e_1^{-k}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ erzeugt.

Genau dasselbe haben wir übrigens auch in Beispiel 2.10 schon gemacht. Für dieses Beispiel haben wir auf gruppentheoretischem Weg gezeigt, dass die Kommutatorgruppe von den Elementen der Form $e_1^k E_i e_1^{-k}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ erzeugt wird. Mithilfe der Überlagerungstheorie ist dies jetzt noch einsichtiger.

Nun versuchen wir wie in Beispiel 2.13, die Gruppe G'_K mit einer Gruppenpräsentation zu beschreiben. In diesem Beispiel haben wir schon beschrieben, wie man eine Gruppenpräsentation $\langle S \mid R \rangle$ modellieren kann: Die freie Gruppe mit Erzeugern S bezeichnen wir mit F_S . Die darin von $\{grg^{-1} \mid g \in F_S, r \in R\}$ erzeugte Untergruppe nennen wir N . Dann ist $\langle S \mid R \rangle \cong F_S/N$.

Nach dem Satz über die Dehnpräsentation 2.3 können wir G_K mit Erzeugern e_1, \dots, e_n und einem Relator $e_s e_t^{-1} e_v e_u^{-1}$ für jede Kreuzung wie in Abbildung 25 beschreiben. Wir können die Erzeuger durch $S := \{e_1, E_2, \dots, E_n\}$ ersetzen und erhalten als Relatoren

$$R := \{(e_1^{\text{lk}(e_s, K)} E_s)(e_1^{\text{lk}(e_t, K)} E_t)^{-1}(e_1^{\text{lk}(e_v, K)} E_v)(e_1^{\text{lk}(e_u, K)} E_u)^{-1} \mid s, t, v, u \text{ wie in Abb. 25}\},$$

6 Alexanders Methode zur Definition des Alexanderpolynoms

wobei wir $E_0 := E_1 := 1$ definieren und $\text{lk}(e_0, K) = 0$ ist. Damit können wir also $G_K = \langle S \mid R \rangle$ schreiben.

Die beiden Kurven σ_1 und σ_2 aus Abbildung 26 haben jeweils Verschlingungszahl 1 mit dem Knoten. Die Abbildung zeigt außerdem, dass für diese Kurven als Homotopiezykel $[e_t] + [\sigma_1] = [e_v]$ und $[e_s] + [\sigma_2] = [e_u]$ gilt. Wegen Linearität von lk können wir die Elemente aus R daher auch schreiben als

$$\begin{aligned} & e_1^{\text{lk}(e_s, K)} E_s E_t^{-1} e_1^{-\text{lk}(e_t, K) + \text{lk}(e_v, K)} E_v E_u^{-1} e_1^{-\text{lk}(e_u, K)} \\ &= e_1^{\text{lk}(e_s, K)} E_s E_t^{-1} e_1 E_v E_u^{-1} e_1^{-\text{lk}(e_s, K) - 1} \end{aligned}$$

Im oben beschriebenen Modell für eine Gruppenpräsentation ist $G_K = \langle S \mid R \rangle = F_S / N$, wobei die Untergruppe N erzeugt wird von

$$g^k e_1^{\text{lk}(e_s, K)} E_s E_t^{-1} e_1 E_v E_u^{-1} e_1^{-\text{lk}(e_s, K) - 1} g^{-k} \text{ mit } g \in F_S, k \in \mathbb{Z}, s, t, v, u \text{ wie in Abb. 25.}$$

Man sieht, dass sich die Exponenten von e_1 bei diesen Elementen stets zu 0 aufaddieren. Deshalb liegt N vollständig in der freien Gruppe $F_{S'}$ von $S' := \{e_1^k E_i e_1^{-k} \mid k \in \mathbb{Z}, i \geq 2\}$. Somit ist dann

$$G'_K = F_{S'} / N.$$

Um dies als Gruppenpräsentation zu schreiben, nehmen wir als Erzeuger natürlich S' . Als Menge von Relatoren reicht nun R aber nicht mehr aus, denn $e_1 \notin F_{S'}$ und N ist deshalb nicht der kleinste Normalteiler von $F_{S'}$, der R enthält. Wir sind gezwungen, auch alle e_1 -Konjugierten der Relatoren aus R aufzunehmen, also

$$\begin{aligned} R' &:= \{e_1^k e_1^{\text{lk}(e_s, K)} E_s E_t^{-1} e_1 E_v E_u^{-1} e_1^{-\text{lk}(e_s, K) - 1} e_1^{-k} \mid k \in \mathbb{Z}, s, t, v, u \text{ wie in Abb. 25}\} \\ &= \{e_1^m E_s E_t^{-1} e_1 E_v E_u^{-1} e_1^{-m-1} \mid m \in \mathbb{Z}, s, t, v, u \text{ wie in Abb. 25}\} \\ &= \{(e_1^m E_s e_1^{-m})(e_1^m E_t e_1^{-m})^{-1} (e_1^{m+1} E_v e_1^{-m-1})(e_1^{m+1} E_u e_1^{-m-1})^{-1} \\ &\quad \mid m \in \mathbb{Z}, s, t, v, u \text{ wie in Abb. 25}\}. \end{aligned}$$

Wir schreiben $(e_1^m E_i e_1^{-m})$ ab jetzt immer in Klammern, um zu betonen, dass dies in G'_K kein Produkt aus drei Faktoren mehr ist, sondern ein Erzeuger, der nur noch den Namen $(e_1^m E_i e_1^{-m})$ trägt. Als Gruppenpräsentation können wir also schreiben:

$$G'_K = \langle (e_1^m E_i e_1^{-m}) \text{ für } i \geq 2 \mid r = 1 \text{ für alle } r \in R' \rangle.$$

Durch Abelisieren erhalten wir die Gruppe

$$\begin{aligned} G'_K / G''_K &= \langle (e_1^m E_i e_1^{-m}) \text{ für } i \geq 2 \mid (e_1^m E_s e_1^{-m}) - (e_1^m E_t e_1^{-m}) \\ &\quad + (e_1^{m+1} E_v e_1^{-m-1}) - (e_1^{m+1} E_u e_1^{-m-1}) = 0 \\ &\quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z}, s, t, v, u \text{ wie in Abb. 25} \rangle. \end{aligned}$$

6 Alexanders Methode zur Definition des Alexanderpolynoms

Diese Präsentation können wir vereinfachen, indem wir diese Gruppe als Alexandermodul beschreiben. Dazu setzen wir $T := e_1$ für das T in Definition 2.14. Dabei garantiert uns $\text{lk}(e_1, K) = 1$, dass $[T]$ tatsächlich ein Erzeuger von G_K/G'_K ist. Dadurch ergibt sich

$$G'_K/G''_K = \langle E_i \text{ für } i \geq 2 \mid E_s - E_t + tE_v - tE_u = 0 \text{ für alle } s, t, v, u \text{ wie in Abb. 25} \rangle.$$

Damit haben wir bewiesen, dass die in Satz 6.1 beschriebene Matrix (c_{ij}) eine Präsentationsmatrix des Alexandermoduls ist. □

In seiner Arbeit von 1927 beschreibt Alexander aber nicht nur diesen Ansatz, das Alexanderpolynom herzuleiten. Interessanterweise lassen sich auch die anderen beiden hier vorgestellten Ansätze in seiner Arbeit wiederfinden, wenn auch nicht in allen Details.

Die gruppentheoretische Beschreibung von Alexander ähnelt der Darstellung in dieser Arbeit sehr. Sie unterscheidet sich im Wesentlichen dadurch von dem hier vorgestellten Ansatz, dass der Begriff der Kommutatorgruppe umgangen wird. Die Gruppe G'_K wird stattdessen dadurch charakterisiert, dass sie diejenige Untergruppe der Knotengruppe $G_K = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ ist, die aus den Elementen besteht, die Verschlingungszahl 0 mit dem Knoten haben. Genauso wird der Erzeuger $[T] \in G_K/G'_K$ dadurch charakterisiert, dass er Verschlingungszahl 1 mit dem Knoten hat. Die entsprechende Modulstruktur wird auch nicht als solche bezeichnet, sondern als „abridged notation“ eingeführt. Dennoch entspricht die Beschreibung sehr genau dem hier dargelegten gruppentheoretischen Ansatz.

Auch die homologische Herangehensweise zum Alexandermodul lässt sich in der Originalarbeit wiederfinden, allerdings in einer völlig anderen Form. Alexander beschreibt einen topologischen Raum Σ^n , der dem hier konstruierten Raum C_∞ sehr ähnlich ist. Der erste wichtige Unterschied besteht darin, dass C_∞ abzählbar viele Blätter hat, während Σ^n nur aus n Blättern besteht. Unsere Konstruktion von C_∞ lässt sich aber leicht so umgestalten, dass eine n -blättrige Überlagerung entsteht: Dazu verwenden wir nur n Kopien der Tripel (N, N^+, N^-) und (Y, N^+, N^-) und identifizieren schließlich $N_1^- \subset N_1$ mit $N_n^- \subset Y_n$, sodass eine endlich zyklische Überlagerung entsteht. Diese Konstruktion wird in [BZ03, 4A] näher ausgeführt. Wir nennen den entstehenden topologischen Raum C_n .

Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass es sich bei Σ^n nicht um eine Überlagerung handelt, wie wir sie definiert haben. Es ist eine sogenannte verzweigte Überlagerung, die Alexander einen „Riemann spread“ nennt. Diese verzweigte Überlagerung Σ^n lässt sich aus C_n folgendermaßen konstruieren: Wir wählen eine Tubenumgebung U des Knotens K . Dann vereinigen wir C_n und U , wobei wir alle Punkte aus $U \setminus K$ mit den entsprechenden Punkten in Y_1, \dots, Y_n identifizieren. Offensichtlich ist der entstehende Raum keine Überlagerung mehr, da der Knoten nur einmal vorhanden ist und das Knotenkomplement n -mal. Trotzdem lässt sich die erste Homologie von Σ^n genau wie die erste

6 Alexanders Methode zur Definition des Alexanderpolynoms

Homologie von C_∞ mit der Alexandermatrix in Verbindung bringen. Insofern sind die Ideen von Alexander den hier vorgestellten Konstruktionen sehr ähnlich.

Man kann also behaupten, dass alle drei der hier dargelegten Herangehensweisen Alexander zumindest im Ansatz bereits bekannt waren, und das, obwohl sich die Werkzeuge der Topologie innerhalb des letzten Jahrhunderts sehr viel weiter entwickelt haben.

Literatur

- [Ale28] J. W. Alexander, *Topological invariants of knots and links*, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), no. 2, 275–306. MR 1501429
- [BJ73] Theodor Bröcker and Klaus Jänich, *Einführung in die Differentialtopologie*, Springer-Verlag, Berlin, 1973, Heidelberger Taschenbücher, Band 143. MR 0358848 (50 #11307)
- [Bre97] Glen E. Bredon, *Topology and geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 139, Springer-Verlag, New York, 1997, Corrected third printing of the 1993 original. MR 1700700 (2000b:55001)
- [BZ03] Gerhard Burde and Heiner Zieschang, *Knots*, second ed., de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 5, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2003. MR 1959408 (2003m:57005)
- [Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR 1867354 (2002k:55001)
- [Kau87] Louis H. Kauffman, *On knots*, Annals of Mathematics Studies, vol. 115, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987. MR 907872 (89c:57005)
- [Rab58] Michael O. Rabin, *Recursive unsolvability of group theoretic problems*, Ann. of Math. (2) **67** (1958), 172–194. MR 0110743 (22 #1611)
- [Rol76] Dale Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish Inc., Berkeley, Calif., 1976, Mathematics Lecture Series, No. 7. MR 0515288 (58 #24236)

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Göttingen, den 14. August 2013