DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

TALLER N$^{\text{o}}$ 2

Cuadrados Minimos

Métodos Numéricos

Primer cuatrimestre 2017

Integrante	LU	Correo electrónico
Ingani Bruno	50/13	chino117@hotmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

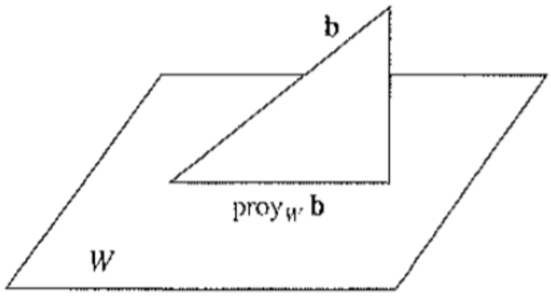
Tel/Fax: (54 11) 4576-3359

http://www.fcen.uba.ar

Índice

1. Soluciones

1. **Gráficamente. ¿Qué solución encuentra cuadrados mínimos lineales?**



W = Espacio columna de A

La solucion de cuadrados minimos nos busca un X para minimizar $\|b - Ax\|$.
Como podemos ver en el grafico b = $proy_w$ b + b2, siendo b2 el une el vector b con la proyeccion que pertenece a $Im(A)^{\perp}$ y la proyeccion en el espacio Columna de A.

2. **¿Cuando es posible usar ecuaciones normales?**
Es posible usar las ecuaciones normales para resolver el sistema cuando rango(A^tA) = col(A^tA). Osea, si A^tA es inversible

3. **¿Cuando tiene cuadrados mínimos lineales una solución única?**
Cuadrados mínimos lineales tiene solución única cuando rango(A) = col(A).

4. **Sea un Subespacio S $\in \mathbb{R}^m$, b $\in \mathbb{R}^m$ e y la proyección ortogonal de b sobre S.**

   a) **probar que b-Y $\in S^{\perp}$**
   Sabemos que $b = b1 + b2$ donde donde b1 es la proyección ortogonal de b en S y b2 es la proyección ortogonal de b en $S^{\perp}$, por lo tanto podemos decir que $b - b1 = b2$, como b1 $\in$ S, y por enunciado Y $\in$ S podemos reemplazar b1 por Y quedándonos $b - Y = b2$ y por lo dicho anteriormente b2 $\in S^{\perp} \;\Rightarrow\; b - y \in S^{\perp}$

   b) **usar pitágoras para verificar que y es el único vector de S tal que $\|b - y\|_2 = min_{s\in S}$ $\|b - s\|_2$.**
   Para resolver este ejercicio, utilizaremos la siguiente propiedad y la demostraremos a continuación: Sean u,v $\in \mathbb{R}$ si $u \perp v \;\Rightarrow\; \|u + v\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2$
   Demostración: Sabemos que $u \perp v \;\Rightarrow\; u^tv = 0$.
   Partimos de $\|u + v\|_2^2 = (u + v)^t(u + v) = (u^t + v^t)(u + v) = u^tu + v^tu + u^tv + v^tv$.
   Como $v^tu = 0$ y $u^tv = 0 \;\Rightarrow\; u^tu + v^tv = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2$

Como mencionamos en el inciso a) $b = b1 + b2$ y $Y = b1$ entonces planteamos la siguiente igualdad:

$\|b - Y\|_2 = min_{s\in S}\ \|b - s\|_2 = 0 \iff \|b1 + b2 - b1\|_2 = min_{s\in S}\ \|b1 + b2 - s\|_2$

Tomamos el cuadrado de los módulos, ya que no afecta a la igualdad y me permite utilizar la propiedad antes demostrada.

$\|b1 + b2 - b1\|_2^2 = min_{s\in S}\ \|b1 + b2 - s\|_2^2 \iff \|b2\|_2^2 = min_{s\in S}\ \|b2 + (b1 - s)\|_2^2$

Como $(b1 - s) \in S$ y $b2 \in S^{\perp} \Rightarrow (b1 - s) \perp b2$. Entonces aplicando esto a la igualdad que teníamos:

$\|b2\|_2^2 = min_{s\in S}\|b2\|_2^2 + \|(b1 - s)\|_2^2$

Como buscamos el mínimo de s, ya que b2 no pertenece a S sino a $S^{\perp}$ podemos sacar a s afuera del mínimo.

$\|b2\|_2^2 = \|b2\|_2^2 + min_{s\in S}\|(b1 - s)\|_2^2$

Por último, tomando el mínimo de $s \in S$ como $s = b1$. Luego

$\|b2\|_2^2 = \|b2\|_2^2$

5. *a)* **Probar que x^* es tal que $\|b - Ax^*\|_2 = min\{\|b - Aw\|_2$: w $\in \mathbb{R}^n$ } si y solo si $b - Ax^*$ $\in Im(A)^{\perp}$.**

   Demostracion:

   $\Rightarrow$)

   si $\|b - Ax^*\|_2$ tal que $\|b - Aw^*\|_2$, w $\in R^n$. Sabemos que $Ax^* = y$, con y vector,entonces si reemplazamos en la primera ecuacion $\|b - y\|_2$ luego por el ejercicio 4)A sabemos que $\|b - y\|_2$ $\in Im(A)^{\perp}$

   Demostracion:

   $\Leftarrow$)

   Sabemos que $b - Ax^* \in Im(A)^{\perp}$. Razonando igual que el punto anterior $Ax^* = y$, con y vector, por el ejercicio 4)B sabemos que $\|b - y\|_2 = min_{s\in S}\ \|b - s\|_2$. Luego $\|b - Ax^*\|_2 = min\{\|b - Aw\|_2$: w $\in \mathbb{R}^n\}$.

   b) **Usar el item anterior para demostrar que $x \in \mathbb{R}^n$ resuelve el problema de cuadrados mínimos para el sistema Ax = b si y sólo si $A^tAx = A^tb$ (ecuaciones normales).**

   Sea x, tal que resuelve cuadrados mínimos para Ax=b $\iff \|Ax - b\|_2^2 = min_{w\in\mathbb{R}}(\|Aw - b\|_2^2)$ $\iff$ por propiedad anterior $b - Ax \in Im(A)^{\perp} \iff b - Ax \in \text{Nu}(A^t) \iff A^t(b - Ax) = 0 \iff$ $A^tAx = A^tb$.

6. **Completar el codigo de resolverEN.m y resolverQR.m**