Tarea de Optimización

Adriana Boue

Noviembre 2025

Análisis teórico del problema de optimización

Consideremos el siguiente problema de optimización sin restricciones:

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = (x^2+1)\,\log(y^2+2)$$

1. Dominio y cota inferior (existencia del mínimo alcanzado)

Para todo $y \in \mathbb{R}$ se cumple que $y^2 + 2 \geq 2 > 0$, por lo que $\log(y^2+2)$ está bien definido para todo y.

Además, para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple que $x^2 + 1 \geq 1$.

Por tanto, el dominio de f es todo $\mathbb{R}^2$. Asimismo, se cumple:

$$f(x,y) = (x^2+1)\log(y^2+2) \geq 1 \cdot \log 2 = \log 2$$

En el punto $(x,y) = (0,0)$ se alcanza esa cota:

$$f(0,0) = (0^2+1)\log(0^2+2) = \log 2$$

Por lo tanto, el ínfimo de f es $\log 2$ y se alcanza en $(0,0)$.

2. Gradiente y puntos críticos

Calculamos las derivadas parciales de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\,\log(y^2+2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = (x^2+1)\frac{2y}{y^2+2}$$

El gradiente es:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\log(y^2+2) \\ (x^2+1)\cdot\frac{2y}{y^2+2} \end{pmatrix}$$

Para encontrar los puntos críticos resolvemos $\nabla f = 0$:

$$\begin{cases} 2x\,\log(y^2+2) = 0 \\ (x^2+1)\dfrac{2y}{y^2+2} = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación, dado que $\log(y^2+2) > 0$ siempre, se obtiene $x = 0$. Sustituyendo en la segunda, resulta $y = 0$. Por tanto, el único punto crítico es:

$$(x, y) = (0, 0)$$

En dicho punto, $f(0,0) = \log 2$, que coincide con la cota inferior encontrada, lo cual sugiere que es un **mínimo global**. Confirmamos esto con el análisis del Hessiano.

3. Hessiano y condición de curvatura

Calculamos las segundas derivadas parciales:

$$f_{xx}(x,y) = 2\log(y^2+2)$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{4xy}{y^2+2}$$

$$f_{yy}(x,y) = 2(x^2+1)\,\frac{2-y^2}{(y^2+2)^2}$$

La matriz Hessiana es:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2\log(y^2+2) & \dfrac{4xy}{y^2+2} \\ \dfrac{4xy}{y^2+2} & 2(x^2+1)\dfrac{2-y^2}{(y^2+2)^2} \end{bmatrix}$$

Evaluando en el punto crítico $(0,0)$:

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2\log 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como los valores propios son $2\log 2 > 0$ y $1 > 0$, el Hessiano es definido positivo en $(0,0)$. Por tanto, este punto es un **mínimo local estricto**.

Dado que $f(x,y) \geq \log 2$ para todo (x,y) y solo en $(0,0)$ se alcanza ese valor, el mínimo es también **global y único**.

4. Región de convexidad local

El signo de f_{yy} depende del término $2 - y^2$:

$$f_{yy} > 0 \quad \text{si } |y| < \sqrt{2}, \qquad f_{yy} < 0 \quad \text{si } |y| > \sqrt{2}$$

Así, la función es convexa en una vecindad del origen ($|y| < \sqrt{2}$), donde el Hessiano es definido positivo. Sin embargo, para valores grandes de $|y|$, f_{yy} se vuelve negativo, indicando regiones no convexas. Por tanto, f **no es convexa globalmente**, aunque sí **localmente convexa** cerca de $(0,0)$.

5. Consecuencias y propiedades

- **Dominio:** $D = \mathbb{R}^2$
- **Cota inferior:** $f(x, y) \geq \log 2$ para todo (x, y)
- **Punto crítico:** único en $(0, 0)$
- **Mínimo global:** $(x^*, y^*) = (0, 0)$ con $f(0, 0) = \log 2$
- **Convexidad:** no globalmente convexa; convexa solo en una región alrededor del mínimo

Geométricamente, $f(x, y)$ se comporta como un paraboloide en la dirección de x, escalado por el factor $\log(y^2 + 2)$, que crece lentamente con $|y|$. Para $|y|$ grandes, $\log(y^2 + 2) \sim 2 \log |y|$, lo que implica un crecimiento suave pero no lineal en esa dirección.

Resultados y Experimentos

Todos los experimentos, gráficos y comparaciones que se hicieron se pueden ver directamente en el cuaderno interactivo asociado a este trabajo. El archivo está en formato `.ipynb` (Jupyter Notebook) y contiene todo el desarrollo de los algoritmos y sus resultados visuales. Se puede consultar en el repositorio de GitHub:

https://github.com/abg555/tarea$_M O$ **Ver el cuaderno en GitHub — Tarea_MO**

Dentro del cuaderno se incluyen tres apartados principales:

Primero, una **descripción detallada de los algoritmos** que se usaron para resolver el problema de optimización, explicando cómo funcionan, por qué se eligieron, sus ventajas y limitaciones. Aquí se implementan dos métodos: el Gradiente Descendente y el método de Newton.

Segundo, una **comparación de resultados** donde se muestran los efectos de elegir distintos puntos de partida (en el rango $[-100, 100]$), diferentes tamaños de paso y criterios de parada. Se analiza cuántos pasos necesitan los algoritmos para converger, qué tan estables son y qué tan buenos son los mínimos que encuentran.

Y tercero, la **graficación de la función y de las trayectorias de los algoritmos**, en 2D y 3D, para que se pueda ver claramente cómo se comporta cada método y cómo se mueven los puntos por la superficie de la función.