6－1. 一平行板电容器的两极板都是半径为 5.0cm **的圆导体片，在充电时，其中电场强度的变化率为** $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=1.0\times10^{12}\mathrm{V/(m\cdot s)}$. **求：**

（1）两极板间的位移电流；

（2）极板边缘的磁感应强度。

解：（1）$I=\frac{\partial D}{\partial t}\cdot S=\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\cdot\pi R^2$

$=8.85\times10^{-12}\times1.0\times10^{12}\times\pi\times(5.0\times10^{-2})^2\mathrm{A}=7.0\times10^{-2}\mathrm{A}.$

（2）$2\pi rH=\frac{\partial D}{\partial t}\cdot S=\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\cdot\pi R^2$，

$$B=\mu_0H=\mu_0\cdot\frac{\varepsilon_0}{2\pi r}\frac{\partial E}{\partial t}\cdot\pi R^2=\frac{\varepsilon_0\mu_0}{2}r\frac{\partial E}{\partial t}$$

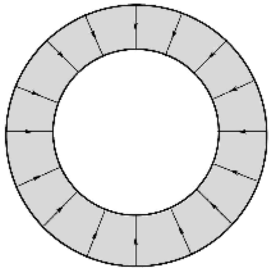
$$=\left(\frac{1}{2}\times8.85\times10^{-12}\times4\pi\times10^{-7}\times5.0\times10^{-2}\times1.0\times10^{12}\right)\mathrm{T}=2.8\times10^{-7}\mathrm{T}.$$

6 – 2. 设电荷在半径为 R 的圆形平行板电容器极板上均匀分布，且边缘效应可以忽略。把电容器接在角频率为 ω 的简谐交流电路中，电路中的传导电流为 I_0（峰值），求电容器极板间磁场强度（峰值）的分布。

解： $2\pi r H = \dfrac{\partial D}{\partial t}\cdot\pi R^2 = \varepsilon_0\dfrac{\partial E}{\partial t}\cdot\pi r^2 = \varepsilon_0\dfrac{\mathrm{d}(\sigma_e/\varepsilon_0)}{\mathrm{d}t}\cdot\pi r^2 = \dfrac{r^2}{R^2}I$，

$$\therefore\ H_0 = \frac{1}{2\pi r}\frac{r^2}{R^2}I_0 = \frac{rI_0}{2\pi R^2}.$$

6－3. 如本题图,同心球形电容器中有介电常量为 ε 和导电率为 σ 的漏电介质。电容器充电后遂即缓慢放电,这时在介质中有径向衰减电流通过。求此过程中的位移电流密度与传导电流密度的关系,以及磁场的分布。



习题 6－3

解：此同心球形电容器的放电可看成 RC 电路的放电,电荷

$$q=Q\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t},\qquad \text{其中}\qquad C=\frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0R_1R_2}{R_2-R_1},$$

$$R=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}r}{4\pi r^2}=\frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{R_2-R_1}{4\pi\sigma R_1R_2},$$

于是放电时间常量 $RC=\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma}$,从而

$$q=Q\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}t},\qquad i=\frac{dq}{dt}=-\frac{\sigma Q}{\varepsilon\varepsilon_0}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}t},\qquad j=\frac{i}{4\pi r^2}=-\frac{\sigma Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0r^2}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}t},$$

而位移电流密度为

$$j_D=\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{q}{4\pi r^2}\right)=\frac{i}{4\pi r^2}=-\frac{\sigma Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0r^2}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}t}=j,$$

位移电流密度与传导电流密度相等。

由于同心球形电容器中放电电流具有球对称性分布,电流产生的磁场分布也必定是球对称的;然而磁场是轴矢量,球对称的磁场只能处处为 0,即电容器中没有磁场。

6 –4. 太阳每分钟垂直射于地球表面上每 cm² 的能量约为 2 cal（1 cal≈4. 2 J），求地面上日光中电场强度 E 和磁场强度 H 的方均根值。

解：$S=\frac{1}{2}E_0H_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}E_0^2$，

$$\therefore\ E_0=\left(2S\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}\right)^{1/2}=\left(\frac{2\times2\times4.2}{60\times10^{-4}}\sqrt{\frac{4\pi\times10^{-7}}{8.85\times10^{-12}}}\right)^{1/2}\text{V/m}=1.01\times10^{3}\,\text{V/m}.$$

又　$\overline{E^2}=\frac{1}{T}\int_0^T E_0^2\cos^2\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}E_0^2$，　$\therefore\sqrt{\overline{E^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}E_0=7.3\times10^{2}\,\text{V/m}.$

同样

$$\sqrt{\overline{H^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}H_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sqrt{\overline{E^2}}=\left(\sqrt{\frac{8.85\times10^{-12}}{4\pi\times10^{-7}}}\times7.3\times10^{2}\right)\text{A/m}=1.9\,\text{A/m}.$$

6－5.（1）作为典型的原子内部电场强度，试计算氢原子核在玻尔轨道处产生电场强度的数量级。（玻尔半径 $a_B=0.053\,\mathrm{nm}$）

（2）若要激光束中的电场强度达到此数量级，其能流密度应为多少？

解：（1）氢原子核在玻尔轨道处产生的电场强度为

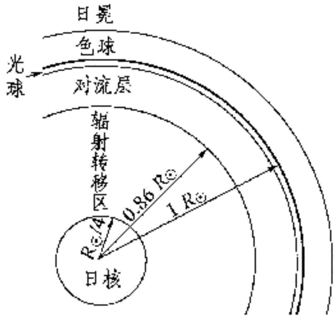
$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}=\frac{1}{4\pi\times 8.85\times10^{-12}}\times\frac{1.6\times10^{-19}}{(0.53\times10^{-10})^2}\,\mathrm{V/m}=5.1\times10^{11}\,\mathrm{V/m}.$$

（2）$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E^2=\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{8.85\times10^{-12}}{4\pi\times10^{-7}}}\times(5.1\times10^{11})^2\,\mathrm{W/m^2}$$

$$=3.5\times10^{20}\,\mathrm{W/m^2}.$$

6－6. 本题图所示为太阳的结构模型，中心核约占 $0.25R_\odot$，是聚变反应区，密度为 $160\,\mathrm{g/cm^3}$（太阳平均密度的114倍），温度为 $1.5\times10^7\,\mathrm{K}$. 日核外面 $(0.25\sim0.86)R_\odot$ 是辐射转移区，能量靠辐射和扩散向外传输。再外面是对流层、光球、色球和日冕。各层的辐射光压可用斯特藩–玻耳兹曼定律算出：

$$p=\frac{1}{3}aT^4,$$



习题6－6

式中斯特藩–玻耳兹曼常量 $a=7.566\times10^{-16}\,\mathrm{J/(m^3\cdot K^4)}$。

（1）估算太阳中心的光压和电磁辐射中电场强度；

（2）在辐射转移区内取半径为 $0.4R_\odot$ 处的温度为 $4.8\times10^6\,\mathrm{K}$，求该处的光压和电磁辐射中电场强度；

（3）将以上两问的电场强度与原子内部电场强度作数量上的比较。

解：（1）太阳中心的光压

$$p=\frac{1}{3}aT^4=\frac{1}{3}7.566\times10^{-16}\times(1.5\times10^7)^4\,\mathrm{N/m^2}=1.3\times10^{13}\,\mathrm{N/m^2},$$

又
$$p=\frac{1}{c}EH=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E^2=\varepsilon_0E^2,$$

太阳中心的电磁辐射里的电场强度

$$E=\sqrt{\frac{p}{\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{1.3\times10^{13}}{8.85\times10^{-12}}}\,\mathrm{V/m}=1.2\times10^{12}\,\mathrm{V/m}.$$

（2）在辐射转移区内取半径为 $0.4R_\odot$ 处，光压的电场强度为

$$p=\frac{1}{3}aT^4=\frac{1}{3}\times7.566\times10^{-16}\times(4.8\times10^6)^4\,\mathrm{N/m^2}=1.3\times10^{11}\,\mathrm{N/m^2},$$

$$E=\sqrt{\frac{p}{\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{1.3\times10^{11}}{8.85\times10^{-12}}}\,\mathrm{V/m}=1.2\times10^{11}\,\mathrm{V/m}.$$

（3）氢原子内部的场强为 $5.1\times10^{11}\,\mathrm{V/m}$，太阳中心的电磁辐射里的电场强度为氢原子内部的场强的2倍有余，在太阳辐射转移区内的场强约为氢原子内部场强的1/4有余。

6 －7. 设 100 W 的电灯泡将所有能量以电磁波的形式沿各方向均匀地辐射出去,求：

（1）20 m 以外的地方电场强度和磁场强度的方均根值；

（2）在该处对理想反射面产生的光压。

解：（1）$S=\dfrac{100}{4\pi r}=\dfrac{1}{2}E_0H_0=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2$，　$\therefore\ E_0=\left(2S\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\right)^{1/2}$，

$$\sqrt{\overline{E^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}E_0=\left(S\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\right)^{1/2}=\left(\frac{100}{4\pi\times20^2}\sqrt{\frac{4\pi\times10^{-7}}{8.85\times10^{-12}}}\right)^{1/2}\mathrm{V/m}=2.7\,\mathrm{V/m},$$

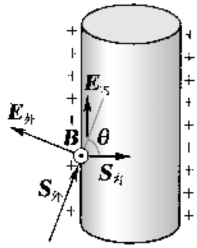
$$\sqrt{\overline{H^2}}==\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sqrt{\overline{E^2}}=\left(\sqrt{\frac{8.85\times10^{-12}}{4\pi\times10^{-7}}}\times2.7\right)\mathrm{A/m}=7.3\times10^{-3}\,\mathrm{A/m}.$$

（2） 由书上第六章 3.4 节（6.58）式

$$p=\frac{2}{c}EH=\left(\frac{2}{3\times10^8}\times2.7\times7.3\times10^{-3}\right)\mathrm{N/m^2}=1.3\times10^{-10}\,\mathrm{N/m^2}.$$

6 – 8. 设图 6 – 21b 或 c 中圆柱形导线长为 l，电阻为 R，载有电流 I. 求证：电磁场通过表面 Σ 输入导线的功率 $\iint \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$ 等于焦耳热功率 I^2R.

解：如右图所示， $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$， $S_{\perp}=EH\cos\theta$，



$$E\cos\theta=E_{内}=\frac{j}{\sigma}=\frac{I}{\sigma A},\quad H=\frac{I}{2\pi r},$$

$$S_{\perp}=E_{内}H=\frac{I}{\sigma A}\cdot\frac{I}{2\pi r},$$（A —— 导线横截面积）

电磁场通过侧面输入的功率为

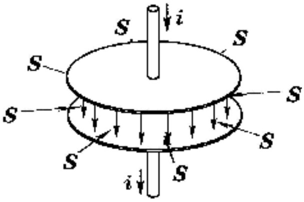
$$P=S_{\perp}\cdot 2\pi rl=I^2\cdot\frac{1}{\sigma}\frac{l}{A}=I^2R,$$

式中 R 是长为 l 的导线的电阻。此式表明，电磁场通过侧面能流输入的功率等于导线内产生的焦耳热功率。

6 －9. 本题图是一个正在充电的圆形平行板电容器，设边缘效应可以忽略，且电路是准恒的。求证：

（1）坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 处处与两极板间圆柱形空间的侧面垂直；

（2）电磁场输入的功率 $\iint \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$ 等于电容器内静电能的增加率，即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{q^2}{2C}\right)$，式中 C 是电容量，q 是极板上的电量。



习题6 －9

解：（1） 由于 $\boldsymbol{E}$ 竖直向下，$\boldsymbol{H}$ 与板间圆柱形空间的侧面相切，因此能流密度矢量 $\boldsymbol{S}$ 垂直于侧面指向电容器内部。

（2） 能流通过侧面输入的功率为　$P=S\cdot 2\pi Rl=EH\cdot 2\pi Rl$

$$=\frac{q}{\varepsilon_0 A}\cdot\frac{I}{2\pi R}\cdot 2\pi Rl=\frac{q}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2C}\frac{\mathrm{d}(q^2)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{q^2}{2C}\right),$$

它等于电容器内静电能的增加率。

6－10. **利用第一章习题**1－59**和第三章习题**3－31**的结果证明：在真空中沿平行双线传输线传播的电磁波速度为** c.

解： $C^*=\dfrac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{d}{a}}$，　$L^*=\dfrac{\mu_0\ln\dfrac{d}{a}}{\pi}$，　$\therefore\ v=\dfrac{1}{\sqrt{L^*C^*}}=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=c.$

6－11. 利用电报方程证明：长度为 l 的平行双线（损耗可以忽略）两端开启时电压和电流分别形成如下形式的驻波：

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{U}&=\widetilde{U_0}\cos\frac{p\pi x}{l}\exp(\mathrm{i}\omega_p t),\\ \widetilde{I}&=\widetilde{I}_0\sin\frac{p\pi x}{l}\exp(\mathrm{i}\omega_p t),\end{aligned}\right\}\quad(p=1,2,3,\cdots)$$

其中谐振角频率为 $\omega_p=\dfrac{p\pi}{l\sqrt{L^*C^*}}$. 指出电压、电流的波腹和波节的位置，以及波长的大小。

【提示：假设电报方程的解是入射波和反射波的叠加，利用两端的边界条件确定驻波的谐振频率。】

解：根据书上第六章 6.3 节(6.76) 式，无损耗传输线上的电流满足

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}-L^*C^*\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}=0,$$

这表明传输线上的电流为一波动过程，传播的速度为 $v=\dfrac{1}{\sqrt{L^*C^*}}$. 上述方程的通解为

$$I=I_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kx)}+I_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+kx)},\qquad ①$$

式中两项分别为朝 $\pm x$ 方向传播的波。两端开启的条件是 $x=0$ 和 $x=l$ 处 $I=0$，代入 ① 式得

$$\begin{cases}I_1+I_2=0, & ②\\ I_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kl}+I_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kl}=0, & ③\end{cases}$$

I_1 和 I_2 的这一齐次方程组的非零解条件是其系数组成的行列式为 0，即

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kl} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}kl}\end{vmatrix}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kl}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kl}=2\mathrm{i}\sin kl=0,$$

$$\therefore\ kl=p\pi,\ \text{式中}\ p=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

因此传输线上电流波的波长 λ 和角频率 ω 分别为

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2l}{p},\quad \omega=2\pi\nu=2\pi\frac{v}{\lambda}=\frac{p\pi}{l\sqrt{L^*C^*}},\qquad ④$$

这表明此传输线上可传播的波长是 $2l$, l, $2l/3$, $l/2$, …, 而角频率是

$$\frac{\pi}{l\sqrt{L^*C^*}},\ \frac{2\pi}{l\sqrt{L^*C^*}},\ \frac{3\pi}{l\sqrt{L^*C^*}},\ \frac{4\pi}{l\sqrt{L^*C^*}},\ \cdots。$$

由 ② 式得 $I_2=-I_1$，代入 ① 式，得

$$I=I_1\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{p\pi x}{l}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p\pi x}{l}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=I_0\sin\frac{p\pi x}{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\qquad ⑤$$

式中 $I_0=-2\mathrm{i}I_1$. 由 ⑤ 式可知，传输线上的电流波形成驻波，波节在 $x=n\dfrac{\lambda}{2}$ 处，$n=0$, 1, 2, …, p.

将 ⑤ 式代入书上(6.73) 式或(6.74) 式，有

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-L^*\ \frac{\partial I}{\partial t}=-\mathrm{i}\omega L^* I_0 \sin\frac{p\pi x}{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

$$U=\int(-\mathrm{i}\omega L^*)I_0\sin\frac{p\pi x}{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}x=\frac{l}{p\pi}\mathrm{i}\omega L^* I_0\cos\frac{p\pi x}{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

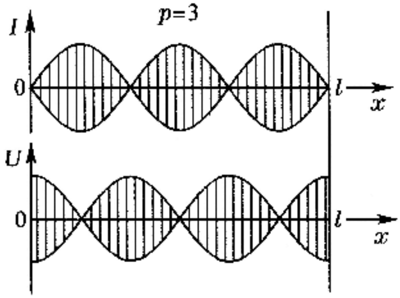
即
$$U=U_0\cos\frac{p\pi x}{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\qquad ⑥$$

式中
$$U_0=\frac{\mathrm{i}\omega L^* l}{p\pi}I_0=\frac{\mathrm{i}L^*}{\sqrt{L^*C^*}}I_0=\mathrm{i}\sqrt{\frac{L^*}{C^*}}I_0.$$

⑥ 式中还有一个不定积分的任意常数，它与 x 无关，因此与电磁波无关，可以不考虑。

⑥ 式表明横向电压也是一个驻波，电压波节在电流波腹处，传输线上的电压波长也由 ④ 式给出。

电流波和电压波的驻波如右图所示。



6 – 12. 上题中若传输双线两端短路,情况若何?

解:与6 – 11题解法类似。对于无损耗传输线上的电压书上第六章6.3节有(6.75)式,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-L^* C^* \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0,$$

这表明传输线上的横向电压为一波动过程,波的传播的速度为 $v=\frac{1}{\sqrt{L^* C^*}}$. 上述方程的通解为

$$U=U_1 e^{i(\omega t-kx)}+U_2 e^{i(\omega t+kx)}, \tag{①}$$

式中两项分别为朝 $\pm x$ 方向传播的波。两端开启的条件是 $x=0$ 和 $x=l$ 处 $U=0$,代入①式得

$$\begin{cases} U_1+U_2=0, & ② \\ U_1 e^{-ikl}+U_2 e^{ikl}=0, & ③ \end{cases}$$

U_1 和 U_2 的这一齐次方程组的非零解条件是其系数组成的行列式为0,即

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-ikl} & e^{ikl} \end{vmatrix}=e^{ikl}-e^{-ikl}=2i\sin kl=0,$$

$$\therefore\ kl=p\pi,\ \text{式中}\ p=1,2,3,4,\cdots$$

因此传输线上电压波的波长 λ 和角频率 ω 分别为

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2l}{p},\quad \omega=2\pi\nu=2\pi\frac{v}{\lambda}=\frac{p\pi}{l\sqrt{L^* C^*}}, \tag{④}$$

这表明此传输线上可传播的波长是 $2l$, l, $2l/3$, $l/2$, …,而角频率是

$$\frac{\pi}{l\sqrt{L^* C^*}},\ \frac{2\pi}{l\sqrt{L^* C^*}},\ \frac{3\pi}{l\sqrt{L^* C^*}},\ \frac{4\pi}{l\sqrt{L^* C^*}},\ \cdots。$$

由②式得 $U_2=-U_1$,代入①式,得

$$U_1=U_1\left(e^{-i\frac{p\pi x}{l}}-e^{i\frac{p\pi x}{l}}\right)e^{i\omega t}=U_0\sin\frac{p\pi x}{l}e^{i\omega t}, \tag{⑤}$$

式中 $U_0=-2iU_1$. 由⑤式可知,传输线上的横向电压波形成驻波,波节在 $x=n\frac{\lambda}{2}$ 处, $n=0,1,2,\cdots,p$.

将⑤式代入书上(6.73)式或(6.74)式,有

$$\frac{\partial I}{\partial x}=-C^*\frac{\partial U}{\partial t}=-i\omega C^* U_0\sin\frac{p\pi x}{l}e^{i\omega t},$$

$$I=\int(-i\omega C^*)U_0\sin\frac{p\pi x}{l}e^{i\omega t}dx=\frac{l}{p\pi}i\omega C^* U_0\cos\frac{p\pi x}{l}e^{i\omega t}$$

即
$$I=I_0\cos\frac{p\pi x}{l}e^{i\omega t}, \tag{⑥}$$

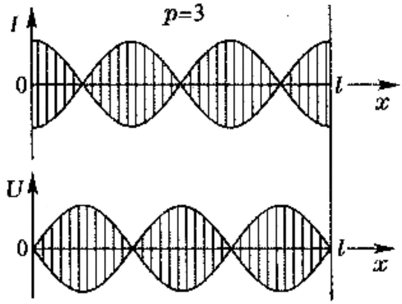
式中
$$I_0=\frac{i\omega C^* l}{p\pi}U_0=\frac{iC^*}{\sqrt{L^* C^*}}I_0=i\sqrt{\frac{C^*}{L^*}}U_0.$$

⑥式中还有一个不定积分的任意常数,它与 x 无关,因此与电磁波无关,可

以不考虑。

⑥ 式表明电流也是一个驻波，电流波节在电压波腹处，传输线上的电流波长也由 ④ 式给出。

电压波和电流波的驻波如右图所示。



6 － 13. 上题中若传输双线一端开启、一端短路，情况若何？

解：无损耗传输线的电报方程对于横向电压和电流满足的方程为［见书上第六章 6.3 节有（6.75）式和（6.75）式］

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-L^*C^*\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}-L^*C^*\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}=0,$$

这表明传输线上的横向电压和电流是波动过程，波的传播速度为 $v=\frac{1}{\sqrt{L^*C^*}}$. 上述方程的通解为

$$U=U_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kx)}+U_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+kx)},\tag{①}$$

$$I=I_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kx)}+I_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+kx)},\tag{②}$$

将 ①、② 两式代入（6.74）式，得

$$\mathrm{i}k\left(-U_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+U_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right)=-\mathrm{i}\omega L^*\left(I_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+I_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right).\tag{③}$$

一端开启一端短路的边界条件为 $x=0$ 处 $I=0$，$x=l$ 处 $U=0$. 由 ①、② 两式可得

$$\begin{cases} I_2=-I_1, & (④)\\ U_2=U_1\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kx}. & (⑤)\end{cases}$$

将 ④、⑤ 两式代入 ③ 式，得

$$kU_1\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-2l)}\right]=\omega L^*I_1\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right).\tag{⑥}$$

此式适用于任何 x. 令 $x=0$，有

$$kU_1\left(1+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kl}\right)=0.\tag{⑦}$$

U_1 有非零解的条件是

$$1+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kl}=0,\quad \therefore\ \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kl}=-1=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\pi},$$

$$\therefore\ 2kl=p\pi,\quad k=\frac{p\pi}{2l},\qquad \text{其中 } p=1,3,5,\cdots。$$

由此得横向电压波和电流波的波长和角频率分别为

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{4l}{p},\quad \omega=2\pi\nu=\frac{2\pi v}{\lambda}=\frac{p\pi}{2l\sqrt{L^*C^*}},$$

于是将 ④ 式代入 ② 式

$$I=I_1\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=-2\mathrm{i}I_1\sin\frac{p\pi x}{2l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=I_0\sin\frac{p\pi x}{2l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\tag{⑧}$$

其中 $I_0=-2\mathrm{i}I_1$。将 ⑤ 式代入 ① 式，且考虑到 ⑦ 式

$$\begin{aligned}U&=U_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kx)}-U_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+kx)}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kl}\\&=U_1\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=2U_1\cos\frac{p\pi x}{2l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=U_0\cos\frac{p\pi x}{2l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\end{aligned}\tag{⑨}$$

其中 $U_0=2U_1$. 可见传输线上横向电压和电流也都形成驻波。电流驻波波节如下确定。由 ⑧ 式，

$$\frac{p\pi x}{2l}=n\pi,\quad n=0,1,2,\cdots。$$

由于 x 最大为 l，即 $x\leqslant l$，因此

$$x=\frac{2nl}{p}\leqslant l,\ \therefore\ n\leqslant\frac{p}{2},$$

即最大的整数 n 应小于$\frac{p}{2}$。例如当 $p=3$ 时，则 $n=0,1$，波节在 $x=0$ 和$\frac{2l}{3}$处,如右图上所示。

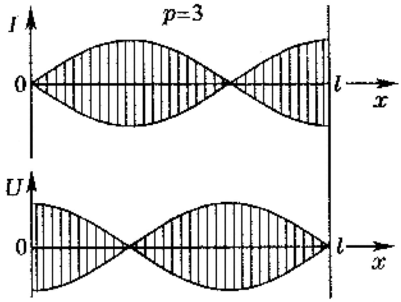
相应的电压驻波波节如下确定。由 ⑨ 式，

$$\frac{p\pi x}{2l}=n\pi+\frac{\pi}{2},\quad n=0,1,2,\cdots。$$

由于 x 最大为 l，即 $x\leqslant l$，因此

$$x=\frac{(2n+1)l}{p}\leqslant l,\ \therefore\ n\leqslant\frac{p-1}{2},$$

即最大的整数 n 应小于 $\frac{p-1}{2}$。例如当 $p=3$ 时，则 $n=0,1$，波节在 $x=\frac{l}{3}$ 和 l 处，如右图下所示。



6 －14. 推导高斯单位制中电能密度 w_e、磁能密度 w_m、坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}$ 和电磁动量密度 $\boldsymbol{g}$ 的表达式。

解：（1） **由书上第六章表** 6 －4，

$$1\,\mathrm{V/m}=\frac{10^6}{c}\,\mathrm{e.s.u.},\quad \therefore\ E_{\mathrm{MKSA}}=\frac{c}{10^6}E_{\mathrm{e.s.u.}},$$

$$1\,\mathrm{C/m^2}=\frac{4\pi c}{10^5}\,\mathrm{e.s.u.},\quad \therefore\ D_{\mathrm{MKSA}}=\frac{10^5}{4\pi c}D_{\mathrm{e.s.u.}},$$

$$1\,\mathrm{J/m^3}=10\,\mathrm{erg/cm^3},\quad \therefore\ w_{\mathrm{MKS}}=\frac{1}{10}w_{\mathrm{CGS}},$$

于是

$$\frac{1}{10}w_{\mathrm{CGS}}=w_{\mathrm{MKS}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}_{\mathrm{MKSA}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{MKSA}}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{10^5}{4\pi c}\boldsymbol{D}_{\mathrm{e.s.u.}}\cdot\frac{c}{10^6}\boldsymbol{E}_{\mathrm{e.s.u.}}=\frac{1}{80\pi}\boldsymbol{D}_{\mathrm{e.s.u.}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{e.s.u.}},$$

$$\therefore\ w_{\mathrm{CGS}}=\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{D}_{\mathrm{e.s.u.}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{e.s.u.}},$$

即是高斯单位制中电能密度的表达式为

$$w=\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}.$$

（2） **由书上第六章表** 6 －4，

$$1\,\mathrm{T}=10^4\,\mathrm{Gs},\quad \therefore\ B_{\mathrm{MKSA}}=\frac{1}{10^4}B_{\mathrm{e.m.u.}},$$

$$1\,\mathrm{A/m}=4\pi\times10^{-3}\,\mathrm{Oe},\quad \therefore\ H_{\mathrm{MKSA}}=\frac{1}{4\pi\times10^{-3}}H_{\mathrm{e.m.u.}},$$

于是

$$\frac{1}{10}w_{\mathrm{CGS}}=w_{\mathrm{MKS}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{\mathrm{MKSA}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{MKSA}}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{10^4}\boldsymbol{B}_{\mathrm{e.m.u.}}\cdot\frac{1}{4\pi\times10^{-3}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{e.m.u.}}=\frac{1}{80\pi}\boldsymbol{B}_{\mathrm{e.m.u.}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{e.m.u.}},$$

$$\therefore\ w_{\mathrm{CGS}}=\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{B}_{\mathrm{e.m.u.}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{e.m.u.}},$$

即是高斯单位制中磁能密度的表达式为

$$w=\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}.$$

（3） **由书上第六章表** 6 －4，

$$1\,\mathrm{V/m}=\frac{10^6}{c}\,\mathrm{e.s.u.},\quad \therefore\ E_{\mathrm{MKSA}}=\frac{c}{10^6}E_{\mathrm{e.s.u.}};$$

$$1\,\mathrm{A/m}=4\pi\times10^{-3}\,\mathrm{Oe},\quad \therefore\ H_{\mathrm{MKSA}}=\frac{1}{4\pi\times10^{-3}}H_{\mathrm{e.m.u.}};$$

$$1\,\mathrm{J/m^2\cdot s}=10^3\,\mathrm{erg/cm^2\cdot s},\quad \therefore\ S_{\mathrm{MKS}}=\frac{1}{10^3}S_{\mathrm{CGS}};$$

于是

$$\frac{1}{10^3}\boldsymbol{S}_{\mathrm{CGS}}=\boldsymbol{S}_{\mathrm{MKS}}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{MKSA}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{MKSA}}$$

$$=\frac{c}{10^6}\boldsymbol{E}_{\mathrm{e.s.u.}}\times\frac{1}{4\pi\times10^{-3}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{e.m.u.}}=\frac{c}{4\pi\times10^3}\boldsymbol{E}_{\mathrm{e.s.u.}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{e.m.u.}},$$

$$\therefore\ \boldsymbol{S}_{\text{CGS}}=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}_{\text{e. s. u.}}\times\boldsymbol{H}_{\text{e. m. u.}}$$

即是高斯单位制中坡印亭矢量的表达式为

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}.$$

（4）由书上第六章表 6 – 4，

$$1\ \text{kg/m}^2\cdot\text{s}=10^{-1}\ \text{g/cm}^2\cdot\text{s}，\quad \therefore\ g_{\text{MKSA}}=10g_{\text{CGS}}；$$

于是

$$10\,\boldsymbol{g}_{\text{CGS}}=\boldsymbol{g}_{\text{MKS}}=\frac{1}{c_{\text{MKS}}^2}\boldsymbol{E}_{\text{MKSA}}\times\boldsymbol{H}_{\text{MKSA}}$$

$$=\frac{1}{10^{-4}c_{\text{CGS}}^2}\frac{c_{\text{CGS}}}{10^6}\boldsymbol{E}_{\text{e. s. u.}}\times\frac{1}{4\pi\times10^{-3}}\boldsymbol{H}_{\text{e. m. u.}}=\frac{10}{4\pi c}\boldsymbol{E}_{\text{e. s. u.}}\times\boldsymbol{H}_{\text{e. m. u.}}，$$

即在高斯单位制中电磁动量密度的表达式为

$$\boldsymbol{g}=\frac{1}{4\pi c}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}.$$

6 - 15. 推导高斯单位制中平行板电容器电容和螺线管自感的表达式。

解：(1) **由书上第六章表** 6 - 4，

$$1\,\mathrm{F}=\frac{c^2}{10^9}\mathrm{e.\,s.\,u.}，\quad \therefore\ C_{\mathrm{MKSA}}=\frac{10^9}{c^2}C_{\mathrm{e.\,s.\,u.}}；$$

$$1\,\mathrm{C/m^2}=\frac{4\pi c}{10^5}\mathrm{e.\,s.\,u.}，\quad \therefore\ D_{\mathrm{MKSA}}=\frac{10^5}{4\pi c}D_{\mathrm{e.\,s.\,u.}}；$$

$$1\,\mathrm{V/m}=\frac{10^6}{c}\mathrm{e.\,s.\,u.}，\quad \therefore\ E_{\mathrm{MKSA}}=\frac{c}{10^6}E_{\mathrm{e.\,s.\,u.}}；$$

$$\varepsilon_0=\frac{D_{\mathrm{MKSA}}}{E_{\mathrm{MKSA}}}=\frac{\dfrac{10^5}{4\pi c}D_{\mathrm{e.\,s.\,u.}}}{\dfrac{c}{10^6}E_{\mathrm{e.\,s.\,u.}}}=\frac{10^{11}}{4\pi c^2}\frac{D_{\mathrm{e.\,s.\,u.}}}{E_{\mathrm{e.\,s.\,u.}}}=\frac{10^{11}}{4\pi c^2}；$$

$$\therefore\ \frac{10^9}{c^2}C_{\mathrm{e.\,s.\,u.}}=C_{\mathrm{MKSA}}=\frac{\varepsilon_0 S_{\mathrm{MKS}}}{d_{\mathrm{MKS}}}=\frac{10^{11}}{4\pi c^2}\frac{10^{-4}S_{\mathrm{CGS}}}{10^{-2}d_{\mathrm{CGS}}}=\frac{10^9}{4\pi c^2}\frac{S_{\mathrm{CGS}}}{d_{\mathrm{CGS}}}，$$

$$\therefore\ C_{\mathrm{e.\,s.\,u.}}=\frac{S_{\mathrm{CGS}}}{4\pi d_{\mathrm{CGS}}}，$$

即在高斯单位制中平行板电容器电容的表达式为

$$C=\frac{S}{4\pi d}.$$

(2) **由书上第六章表** 6 - 4，

$$1\,\mathrm{H}=10^9\mathrm{e.\,m.\,u.}，\quad \therefore\ L_{\mathrm{MKSA}}=\frac{1}{10^9}L_{\mathrm{e.\,m.\,u.}}；$$

$$\therefore\ \frac{1}{10^9}L_{\mathrm{e.\,m.\,u.}}=L_{\mathrm{MKSA}}=\mu_0 n_{\mathrm{MKS}}^2 V_{\mathrm{MKS}}$$

$$=4\pi\times10^{-7}\times10^4 n_{\mathrm{CGS}}^2\times10^{-6}V_{\mathrm{CGS}}=\frac{4\pi}{10^9}n_{\mathrm{CGS}}^2 V_{\mathrm{CGS}}，$$

$$\therefore\ L_{\mathrm{e.\,m.\,u.}}=4\pi n_{\mathrm{CGS}}^2 V_{\mathrm{CGS}}，$$

即在高斯单位制中螺线圈自感的表达式为

$$L=4\pi n^2 V.$$

6 – 16. 实用中磁场强度的单位往往用 Oe，而电流的单位用 A，长度的单位用 cm（这是 MKSA 制和高斯制的混合）。试证明，在这种情况下螺线管磁场强度的公式为

$$H = 0.4\pi n I.$$

解： $1\,\mathrm{A/m} = 4\pi\times10^{-3}\,\mathrm{Oe}$，　$\therefore\ H_{\mathrm{MKSA}} = \dfrac{1}{4\pi\times10^{-3}}H_{\mathrm{e.\,m.\,u.}}$；

$$\frac{H_{\mathrm{e.\,m.\,u.}}}{4\pi\times10^{-3}} = H_{\mathrm{MKSA}} = n_{\mathrm{MKS}}I_{\mathrm{MKSA}} = 10^{2}n_{\mathrm{CGS}}I_{\mathrm{MKS}},$$

$$\therefore\ H_{\mathrm{e.\,m.\,u.}} = 0.4\pi n_{\mathrm{CGS}}I_{\mathrm{MKSA}}.\ n_{\mathrm{CGS}}I_{\mathrm{MKS}}.$$

6－17. 实用中磁通量的单位常常用 Mx**，电动势的单位用** V. **试证明：在这种情况下法拉第电磁感应定律的表达式为**

$$\mathscr{E}=-10^{-8}\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}.$$

解：$1\ \mathrm{Wb}=10^8\ \mathrm{Mx}$，　$\therefore\ \Phi_{\mathrm{MKSA}}=10^{-8}\Phi_{\mathrm{e.m.u.}}$；

$$\mathscr{E}_{\mathrm{MKSA}}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{MKSA}}}{\mathrm{d}t}=-10^{-8}\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e.m.u.}}}{\mathrm{d}t}.$$

D－1．计算下列复数的模和辐角。

(1) $(1+2\mathrm{i})+(2+3\mathrm{i})$；

(2) $(3+\mathrm{i})-[1+(1+\sqrt{3})\mathrm{i}]$；

(3) $(2+3\mathrm{i})-(3+4\mathrm{i})$；

(4) $(-2+7\mathrm{i})+(-1-2\mathrm{i})$.

解：(1) $(1+2\mathrm{i})+(2+3\mathrm{i})=3+5\mathrm{i}$，

$$A=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}，\quad \varphi=\arctan\frac{5}{3}=\arctan 1.67=59°.$$

(2) $(3+\mathrm{i})-[1+(1+\sqrt{3})\mathrm{i})]=2-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$，

$$A=\sqrt{2^2+3}=\sqrt{7}，\quad \varphi=\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=319°.$$

(3) $(2+3\mathrm{i})-(3+4\mathrm{i})=-1-\mathrm{i}$，

$$A=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}，\quad \varphi=\arctan\frac{-1}{-1}=225°.$$

(4) $(-2+7\mathrm{i})+(-1-2\mathrm{i})=-3+5\mathrm{i}$，

$$A=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}，\quad \varphi=\arctan\frac{5}{-3}=121°.$$

D－2. **计算下列复数的实部和虚部。**

(1) $(-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i})\times(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})$；

(2) $(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})^2$；

(3) $\dfrac{-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$；

(4) $\dfrac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$.

解：(1) $(-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i})\times(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})=2-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$， **实部**$=2$， **虚部**$=-2\sqrt{3}$.

(2) $(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})^2=-2-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$， **实部**$=-2$， **虚部**$=-2\sqrt{3}$.

(3) $\dfrac{-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\cdot\dfrac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$， **实部**$=1$， **虚部**$=-1$.

(4) $\dfrac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\dfrac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}$， **实部**$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， **虚部**$=-1$.

D－3. **用复数求两个简谐量**

$$a(t)=A\cos(\omega t+\varphi_a)\text{ 和 }b(t)=B\cos(\omega t+\varphi_b)$$

乘积的平均值 $\overline{a(t)b(t)}=\frac{1}{T}\int_0^T a(t)b(t)\,\mathrm{d}t\ (T=2\pi/\omega)$**：**

	A	φ_a	B	φ_b	平均值
(1)	2	$\pi/3$	1	$2\pi/3$	
(2)	6	$\pi/4$	2	0	
(3)	3	$\pi/3$	1	$-2\pi/3$	
(4)	0.2	$4\pi/5$	7	$6\pi/5$	

解：

$$\overline{a(t)b(t)}=\frac{1}{T}\int_0^T a(t)b(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{AB}{T}\int_0^T\cos(\omega t+\varphi_a)\cos(\omega t+\varphi_b)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{AB}{2T}\left[\int_0^T\cos(2\omega t+\varphi_a+\varphi_b)\,\mathrm{d}t+\int_0^T\cos(\varphi_a-\varphi_b)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{AB}{2}\cos(\varphi_a-\varphi_b).$$

(1) $\overline{a(t)b(t)}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0.5.$

(2) $\overline{a(t)b(t)}=6\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}=4.23.$

(3) $\overline{a(t)b(t)}=\frac{3}{2}\cos\pi=-1.5.$

(4) $\overline{a(t)b(t)}=0.7\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)=0.22.$