

第3章

静态电磁场及其边值问题的解

- **静态电磁场**：当场源（电荷、电流）不随时间变化时，所产生的电场、磁场也不随时间变化，包括：
静电场、恒定电场、恒定磁场
- 时变情况下，电场和磁场相互关联，构成统一的电磁场
- 静态情况下，电场和磁场由各自的源激发，且相互独立

本章内容

3.1 静电场分析

3.2 导电媒质中的恒定电场分析

3.3 恒定磁场分析

3.4 静态场的边值问题及解的唯一性定理

3.5 镜像法

3.6 分离变量法

3.1 静电场分析

本节内容

- 3.1.1 静电场的基本方程和边界条件
- 3.1.2 电位函数
- 3.1.3 导体系统的电容
- 3.1.4 静电场的能量
- 3.1.5 静电力

3.1.1 静电场的基本方程和边界条件

1. 基本方程

积分形式:
$$\begin{cases} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases}$$

微分形式:
$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

静电场是有源无旋场，静止电荷是静电场的通量源；电场线始于正电荷，终于负电荷。

在线性、各向同性的电介质中，本构关系为 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

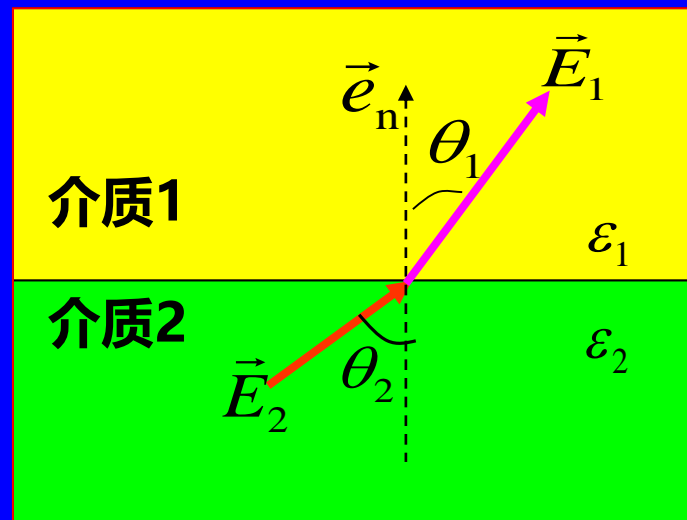
2. 边界条件
$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \\ \vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \\ E_{1t} - E_{2t} = 0 \end{cases}$$

若分界面上不存在面电荷，即 $\rho_s = 0$ ，则

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} D_{1n} = D_{2n} \\ E_{1t} = E_{2t} \end{cases}$$

■ 场矢量的折射关系

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{E_{1t} / E_{1n}}{E_{2t} / E_{2n}} = \frac{\varepsilon_1 / D_{1n}}{\varepsilon_2 / D_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$



■ 导体表面的边界条件

在静电平衡的情况下，导体内部的电场为0，则导体表面的边界条件为

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot \vec{D} = \rho_s \\ \vec{e}_n \times \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} D_n = \rho_s \\ E_t = 0 \end{cases}$$

在静电场中，导体表面上的电场强度总是垂直于导体表面的；导体表面上存在感应电荷，其电荷面密度等于导体表面外侧的电位移矢量的法向分量。

3.1.2 电位函数

1. 电位函数的定义

由 $\nabla \times \vec{E} = 0$ 和 $\nabla \times \nabla \varphi = 0 \implies \vec{E} = -\nabla \varphi$

即静电场可以用一个标量函数的梯度来表示，标量函数 φ 称为静电场的电位函数，简称为电位，单位为V（伏特）。

为了使静电场中每一点的电位具有一个确定的值，可选定场中某一固定点为电位的参考点，即规定该固定点的电位为零。

通常用等位面形象地描述电位的空间分布。根据标量函数梯度的性质可知，电场线垂直于等位面，且总是指向电位下降最快的方向。

2. 电位的表达式

在线性、各向同性的无界均匀媒质中，点电荷 q 的电场强度为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{R}}{R^3} \quad \leftarrow \boxed{\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'}$$

考虑到 $\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$ ，则有 $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\left(\frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{R}\right)$

故得 $\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon R} + C$ (选无穷远点为电位参考点，则 $C=0$)

应用叠加原理，可得

线电荷的电位: $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_C \frac{\rho_l(\vec{r}')}{R} dl' + C$

面电荷的电位: $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\rho_s(\vec{r}')}{R^3} dS' + C$

体电荷的电位: $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' + C$

3. 电位差

将 $\vec{E} = -\nabla \varphi$ 两端点乘 $d\vec{l}$, 则有

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\nabla \varphi \cdot d\vec{l} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz\right) = -d\varphi$$

上式两边从点 P 到点 Q 沿任意路径进行积分, 得

电场力做的功

$$\int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_P^Q d\varphi = \varphi(P) - \varphi(Q)$$

P 、 Q 两点间的电位差

选定无穷远点 Q 为电位参考点, 则 $\varphi(P) = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$

关于电位差的说明

- ➔ P 、 Q 两点间的电位差等于电场力将单位正电荷从 P 点移至 Q 点所做的功, 电场力使单位正电荷由高电位处移到低电位处。
- ➔ 电位差也称为电压, 可用 U 表示。
- ➔ 电位差有确定值, 只与首尾两点位置有关, 与积分路径无关。

4. 静电位的微分方程

在均匀、线性和各向同性的电介质中，有

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) &= \rho(\vec{r}) \\ \vec{E} &= -\nabla \varphi(\vec{r}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \nabla \cdot \varepsilon \vec{E}(\vec{r})$$

$$= -\varepsilon \nabla \cdot \nabla \varphi(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

故得 $\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon}$

标量泊松方程

在无源区域, $\rho = 0 \longrightarrow \nabla^2 \varphi = 0$

拉普拉斯方程

5. 静电位的边界条件

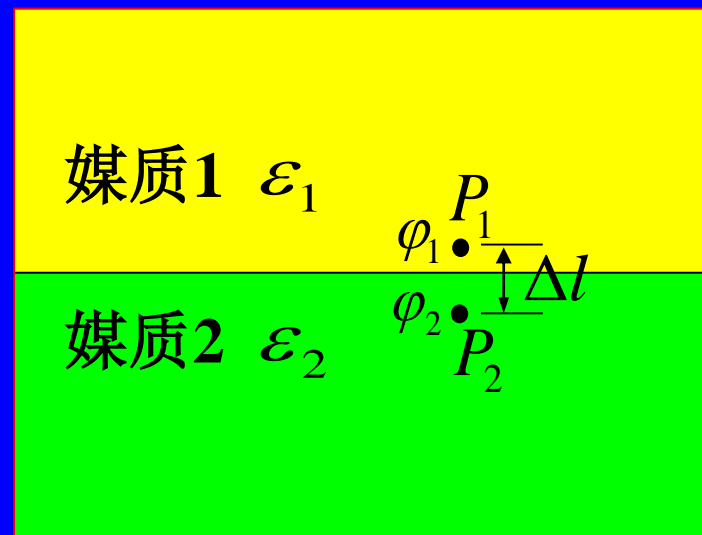
设 P_1 和 P_2 是介质分界面两侧紧贴界面的相邻两点，其电位分别为 φ_1 和 φ_2 。当两点间距离 $\Delta l \rightarrow 0$ 时

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

由 $\vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$ 和 $\vec{D} = -\varepsilon \nabla \varphi$

$$\longrightarrow \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \rho_s$$



- 若介质分界面上无自由面电荷，即 $\rho_s = 0 \longrightarrow \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$
- 导体内部场强为0，导体为等位体，导体表面为等位面。导体表面上电位的边界条件： $\varphi = \text{常数}, \quad \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\rho_s$

例 3.1.1 求电偶极子的电位.

解 空间任意一点 P 处的电位等于两个点电荷的电位叠加, 即

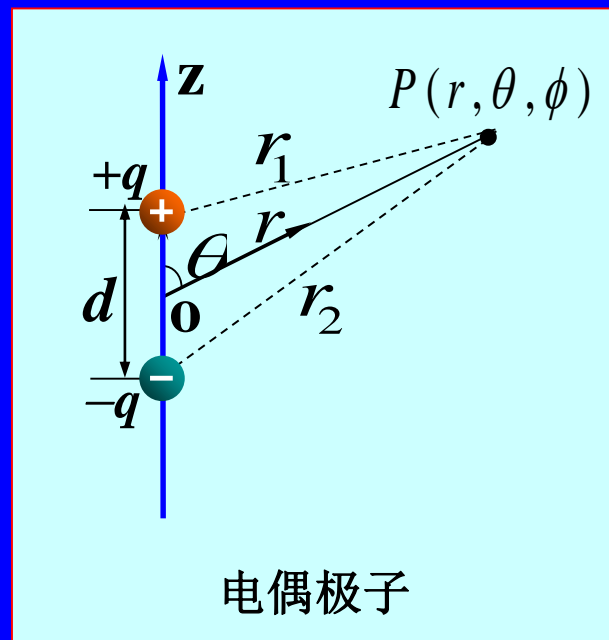
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$r_1 = \sqrt{r^2 + (d/2)^2 - rd \cos \theta}$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + (d/2)^2 + rd \cos \theta}$$

对远离电偶极子的场点, $r \gg d$, 则

$$r_1 \approx r - \frac{d}{2} \cos \theta, \quad r_2 \approx r + \frac{d}{2} \cos \theta, \quad r_2 - r_1 \approx d \cos \theta, \quad r_1 r_2 \approx r^2$$



代入上式，得
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$\vec{p} = q\vec{d}$ 表示电偶极矩，方向由负电荷指向正电荷。

由球坐标系中的梯度公式，可得到电偶极子的远区电场强度

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla \varphi = -(\vec{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}) \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\vec{e}_r 2 \cos \theta + \vec{e}_\theta \sin \theta) \end{aligned}$$

例3.1.2 求均匀电场的电位分布。

解 选定均匀电场空间中的一点 O 为坐标原点，而任意点 P 的位置矢量为 \vec{r} ，则

$$\varphi(P) - \varphi(O) = \int_P^O \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = - \int_O^P \vec{E}_0 \cdot d\vec{r} = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r}$$

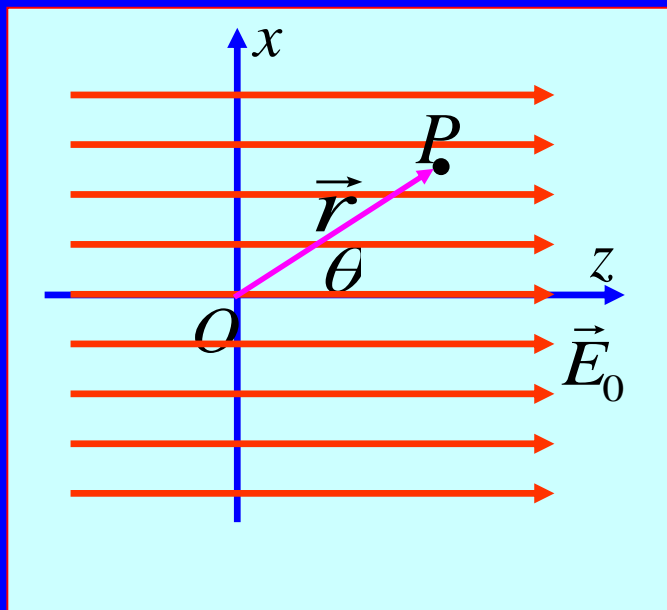
若选择点 O 为电位参考点，即 $\varphi(O) = 0$ ，则

$$\varphi(P) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r}$$

在球坐标系中，取极轴与 \vec{E}_0 的方向一致，即 $\vec{E}_0 = \vec{e}_z E_0$ ，则有

$$\varphi(P) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} = -\vec{e}_z \cdot \vec{r} E_0 = -E_0 r \cos \theta$$

在圆柱坐标系中，取 \vec{E}_0 与 x 轴方向一致，即 $\vec{E}_0 = \vec{e}_x E_0$ ，而 $\vec{r} = \vec{e}_\rho \rho + \vec{e}_z z$ ，故 $\varphi(P) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} = -\vec{e}_x \cdot E_0 (\vec{e}_\rho \rho + \vec{e}_z z) = -E_0 \rho \cos \phi$



例3.1.3 两块无限大接地导体平板分别置于 $x = 0$ 和 $x = a$ 处，在两板之间的 $x = b$ 处有一面密度为 ρ_{s0} 的均匀电荷分布，如图所示。求两导体平板之间的电位和电场。

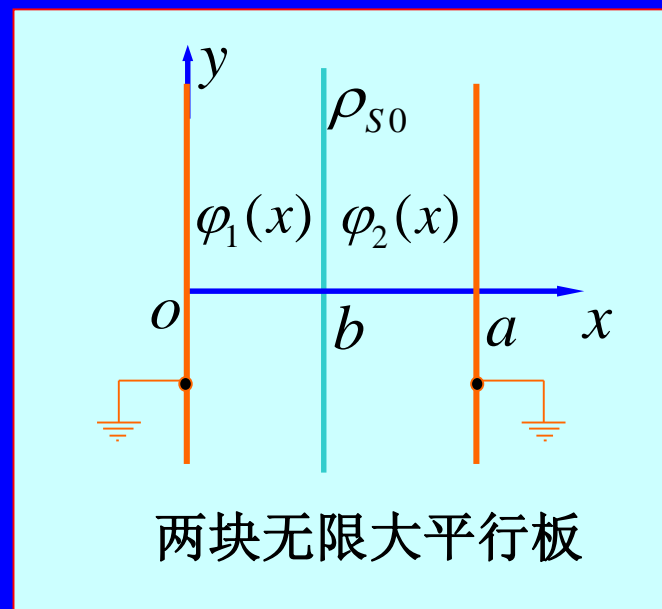
解 在两块无限大接地导体平板之间，除 $x = b$ 处有均匀面电荷分布外，其余空间均无电荷分布，故电位函数满足一维拉普拉斯方程

$$\frac{d^2 \varphi_1(x)}{dx^2} = 0, \quad (0 < x < b)$$

$$\frac{d^2 \varphi_2(x)}{dx^2} = 0, \quad (b < x < a)$$

方程的解为

$$\varphi_1(x) = C_1 x + D_1$$

$$\varphi_2(x) = C_2 x + D_2$$


利用边界条件, 有

$$x = 0 \text{ 处, } \varphi_1(0) = 0$$

$$x = a \text{ 处, } \varphi_2(a) = 0$$

$$x = b \text{ 处, } \varphi_1(b) = \varphi_2(b),$$

$$\left[\frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} \right]_{x=b} = -\frac{\rho_{s0}}{\varepsilon_0}$$

所以 $D_1 = 0$

$$C_2 a + D_2 = 0$$

$$C_1 b + D_1 = C_2 b + D_2$$

$$C_2 - C_1 = -\frac{\rho_{s0}}{\varepsilon_0}$$

由此解得

$$C_1 = -\frac{\rho_{s0}(b-a)}{\varepsilon_0 a}, \quad D_1 = 0$$

$$C_2 = -\frac{\rho_{s0}b}{\varepsilon_0 a}, \quad D_2 = \frac{\rho_{s0}b}{\varepsilon_0}$$

最后得

$$\varphi_1(x) = \frac{\rho_{s0}(a-b)}{\varepsilon_0 a} x, \quad (0 \leq x \leq b)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\rho_{s0}b}{\varepsilon_0 a} (a-x), \quad (b \leq x \leq a)$$

$$\vec{E}_1(x) = -\nabla \varphi_1(x) = -\vec{e}_x \frac{\rho_{s0}(a-b)}{\varepsilon_0 a}$$

$$\vec{E}_2(x) = -\nabla \varphi_2(x) = \vec{e}_x \frac{\rho_{s0}b}{\varepsilon_0 a}$$

3.1.3 导体系统的电容

1. 电容器的电容

电容是导体系统的一种基本属性，是描述导体系统储存电荷能力的物理量。

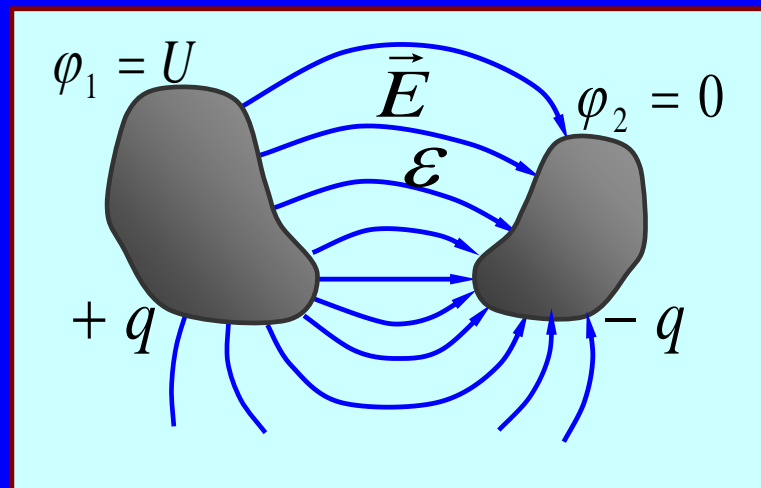
■ 孤立导体的电容

孤立导体的电容定义为所带电量 q 与其电位 φ 的比值，即

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

■ 两个带等量异号电荷 ($\pm q$) 的导体组成的电容器，其电容为

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{|\varphi_1 - \varphi_2|}$$



■ 电容的大小只与导体系统的几何尺寸、形状和及周围电介质的特性参数有关，而与导体的带电量和电位无关。

■ 计算电容的方法一：

- (1) 假定两导体上分别带电荷 $+q$ 和 $-q$ ；
- (2) 计算两导体间的电场强度 E ；
- (3) 由 $U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$ ，求出两导体间的电位差；
- (4) 求比值 $C = q/U$ ，即得出所求电容。

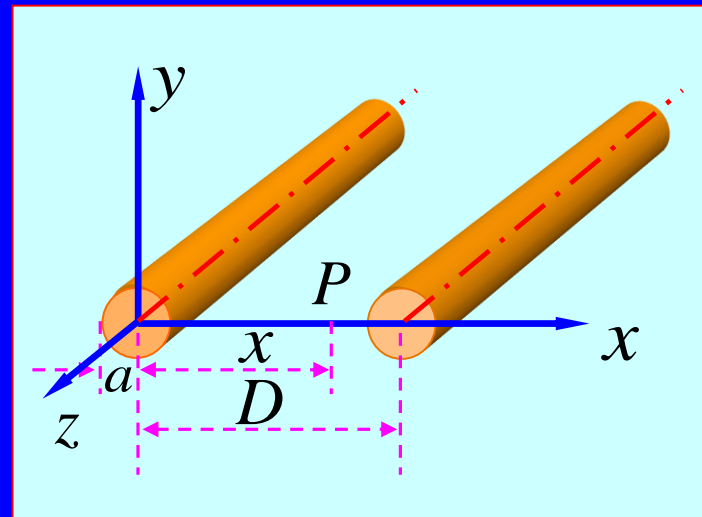
■ 计算电容的方法二：

- (1) 假定两电极间的电位差为 U ；
- (2) 计算两电极间的电位分布 φ ；
- (3) 由 $\vec{E} = -\nabla \varphi$ 得到 E ；
- (4) 由 $\rho_s = \varepsilon E_n$ 得到 ρ_s ；
- (5) 由 $q = \oint_S \rho_s dS$ ，求出导体的电荷 q ；
- (6) 求比值 $C = q/U$ ，即得出所求电容。

例 3.1.4 如图所示的平行双线传输线，导线半径为 a ，两导线的轴线距离为 D ，且 $D \gg a$ ，设周围介质为空气。求传输线单位长度的电容。

解 设两导线单位长度带电量分别为 $+\rho_l$ 和 $-\rho_l$ 。由于 $D \gg a$ ，故可近似地认为电荷分别均匀分布在两导线的表面上。应用高斯定理和叠加原理，可得到两导线之间的平面上任一点 P 的电场强度为

$$\vec{E}(x) = \vec{e}_x \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right)$$



两导线间的电位差

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \int_a^{D-a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right) dx = \frac{\rho_l}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{D-a}{a}$$

故单位长度的电容为 $C_1 = \frac{\rho_l}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln[(D-a)/a]} \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(D/a)} \quad (\text{F/m})$

例3.1.5 同轴线内导体半径为 a ，外导体半径为 b ，内外导体间填充的介电常数为 ε 的均匀介质，求同轴线单位长度的电容。

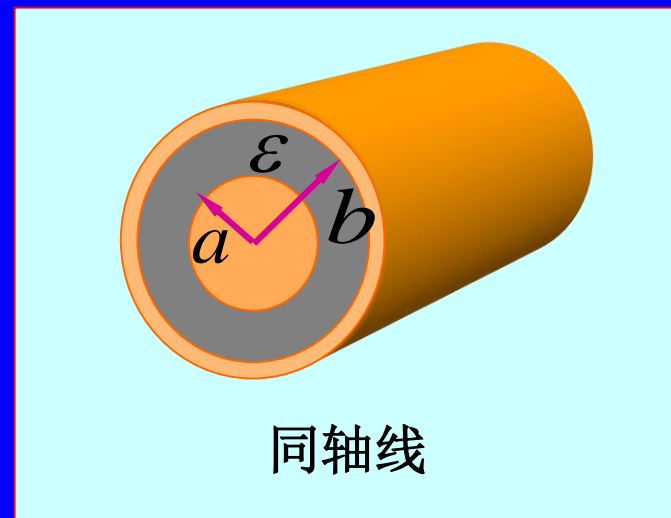
解 设同轴线的内、外导体单位长度带电量分别为 $+\rho_l$ 和 $-\rho_l$ ，应用高斯定理可得到内外导体间任一点的电场强度为

$$\vec{E}(\rho) = \vec{e}_\rho \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon\rho}$$

内、外导体间的电压为

$$\begin{aligned} U &= \int_a^b \vec{E}(\rho) \cdot \vec{e}_\rho d\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon} \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho \\ &= \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon} \ln(b/a) \end{aligned}$$

故得同轴线单位长度的电容为 $C_1 = \frac{\rho_l}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)} \quad (\text{F/m})$



例3.1.6 同心球形电容器的内导体半径为 a 、外导体半径为 b ，其间填充介电常数为 ε 的均匀介质。求此球形电容器的电容。

解： 设内导体的电荷为 q ，则由高斯定理可求得内外导体间的电场

$$\vec{D} = \vec{e}_r \frac{q}{4\pi r^2}, \quad \vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{4\pi \varepsilon r^2}$$

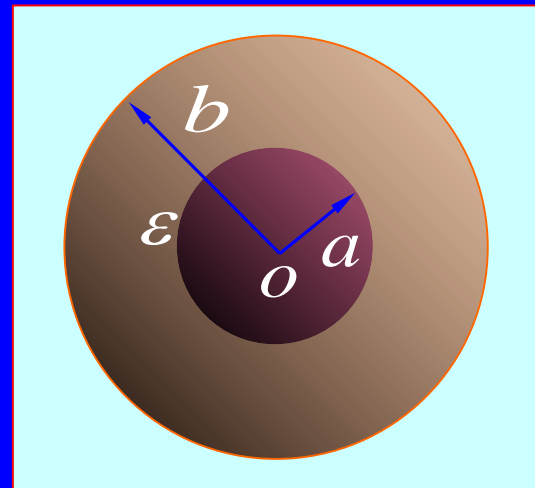
同心导体间的电压

$$U = \int_a^b E dr = \frac{q}{4\pi \varepsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{q}{4\pi \varepsilon} \cdot \frac{b-a}{ab}$$

球形电容器的电容

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi \varepsilon ab}{b-a}$$

当 $b \rightarrow \infty$ 时, $C = 4\pi \varepsilon a$ ← 孤立导体球的电容



3.1.4 静电场的能量

- 静电场最基本的特征是对电荷有作用力，这表明静电场具有能量。
- 静电场能量来源于建立电荷系统的过程中外源提供的能量。

任何形式的带电系统，都要经过从没有电荷分布到某个最终电荷分布的建立(或充电)过程。在此过程中，外加电源必须克服电荷之间的相互作用力而做功。

如果充电过程进行得足够缓慢，就不会有能量辐射，充电过程中外加电源所做的总功将全部转换成电场能量，或者说电场能量就等于外加电源在此电场建立过程中所做的总功。

1. 静电场的能量

设系统从零开始充电，最终电荷分布为 ρ 、电位为 φ 。如果充电过程中各点的电荷密度按最终值的同一比例因子 α ($0 \leq \alpha \leq 1$) 增加，充电过程中某一时刻的电荷分布为 $\alpha\rho$ 、电位为 $\alpha\varphi$ 。

当 α 增加为 $(\alpha + d\alpha)$ 时，由外电源送入体积元 dV 的微分电荷为 $dq = \rho d\alpha dV$ ，外电源做功为 $\alpha\varphi (dq) = \alpha\varphi \rho d\alpha dV$

根据能量守恒定律，外电源做功转化为电场的能量，即

$$W_e = \int_0^1 \alpha d\alpha \int_V \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV$$

对于电荷以面密度 ρ_s 分布在曲面 S 上，则

$$W_e = \frac{1}{2} \int_S \rho_s \varphi dS$$

对于多导体组成的带电系统，则有

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{S_i} \rho_{S_i} \varphi_i dS = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \rho_{S_i} dS = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i$$

式中： q_i —— 第 i 个导体所带的电荷 φ_i —— 第 i 个导体的电位

例：双导体系统被充电后，导体1带电荷 $+q$ ，导体2 带电荷 $-q$ ，电位分别为 φ_1, φ_2 ，则电场能量为

$$W_e = \frac{1}{2} q \varphi_1 + \frac{1}{2} (-q) \varphi_2 = \frac{1}{2} q (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} q U = \frac{1}{2} C U^2$$

2. 用电场矢量表示的电场能量

$$\begin{aligned}
 W_e &= \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot \vec{D} \varphi dV & \boxed{\nabla \cdot (\varphi \vec{D}) = \varphi \nabla \cdot \vec{D} + \nabla \varphi \cdot \vec{D}} \\
 \boxed{\rho = \nabla \cdot \vec{D}} &= \frac{1}{2} \int_V [\nabla \cdot (\varphi \vec{D}) - \nabla \varphi \cdot \vec{D}] dV & \boxed{\int_V \nabla \cdot (\varphi \vec{D}) dV = \oint_S \varphi \vec{D} \cdot d\vec{S}} \\
 &= \frac{1}{2} \oint_S \varphi \vec{D} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV & \boxed{\vec{E} = -\nabla \varphi}
 \end{aligned}$$

由于体积 V 外的电荷密度 $\rho = 0$ ，若将式中的积分区域扩大到整个场空间，结果仍然成立。只要电荷分布在有限区域内，当闭合面 S 无限扩大时，则有

$$\varphi \propto \frac{1}{r}, \quad D \propto \frac{1}{r^2}$$

故 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \propto \frac{1}{r} \frac{1}{r^2} r^2 \propto \frac{1}{r} \rightarrow 0$

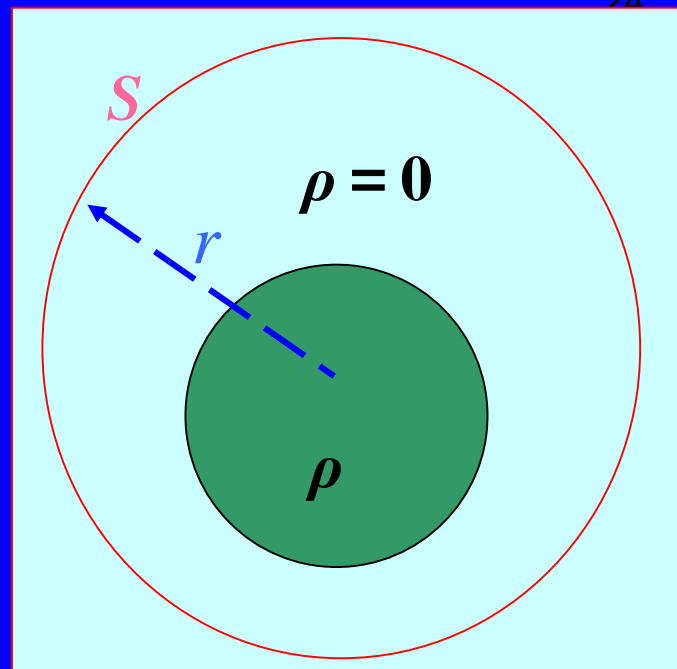
则得 $W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV$

积分区域为电场所在的整个空间

定义电场能量密度为 $w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \Rightarrow W_e = \int_V w_e dV$

对线性和各向同性介质，有 $w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon E^2 dV$$



例3.1.7 半径为 a 的球形空间内均匀分布有体电荷密度为 ρ 的电荷, 试求静电场能量。

解: 方法一: 利用 $W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV$ 计算

根据高斯定理求得电场强度

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_r \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (r < a)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_r \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad (r > a)$$

$$\begin{aligned} \text{故 } W_e &= \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \int_{V_1} \epsilon_0 E_1^2 dV + \frac{1}{2} \int_{V_2} \epsilon_0 E_2^2 dV \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\int_0^a \frac{\rho^2 r^2}{9\epsilon_0^2} \cdot 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty \frac{\rho^2 a^6}{9\epsilon_0^2 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr \right) = \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 a^5 \end{aligned}$$

方法二：利用 $W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV$ 计算

先求出电位分布

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \int_r^a \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_a^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \int_r^a \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr + \int_a^\infty \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) \quad (r \leq a)\end{aligned}$$

故 $W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi_1 dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{2\varepsilon_0} \int_0^a \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{15\varepsilon_0} \rho^2 a^5$

3.1.5 静电力

已知带电体的电荷分布，原则上，根据库仑定律可以计算带电体电荷之间的电场力。但对于电荷分布复杂的带电系统，根据库仑定律计算电场力往往是非常困难的，因此通常采用**虚位移法**来计算静电力。

虚位移法：假设第 i 个带电导体在电场力 F_i 的作用下发生位移 dg_i ，则电场力做功 $dA = F_i dg_i$ ，系统的静电能量改变为 dW_e 。根据能量守恒定律，该系统的功能关系为

$$dW_s = F_i dg_i + dW_e$$

其中 dW_s 是与各带电体相连接的外电源所提供的能量。

具体计算中，可假定各带电导体的电位不变，或假定各带电导体的电荷不变。

1. 各带电导体的电荷不变

此时，所有带电体都不和外电源相连接，则 $dW_s = 0$ ，因此

$$F_i dg_i = -dW_e \quad \longrightarrow \quad F_i = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial g_i} \right|_{q \text{ 不变}}$$

式中的 “ - ” 号表示电场力做功是靠减少系统的静电能量来实现的。

2. 各带电导体的电位不变

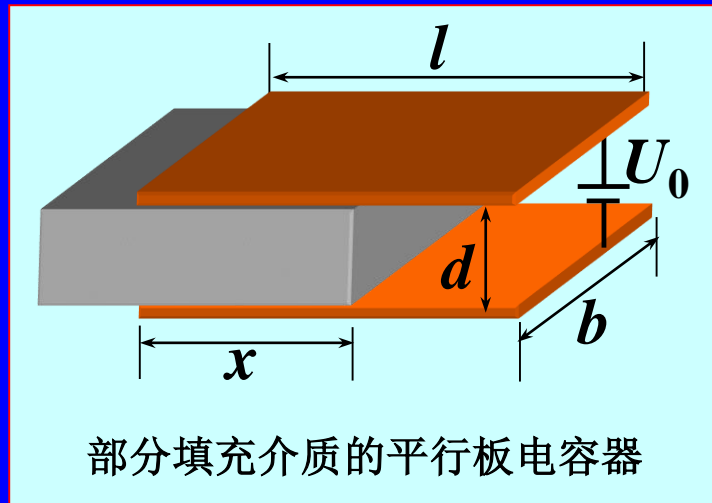
此时，各带电导体应分别与外电压源连接，外电压源向系统提供的能量

$$dW_s = \sum_{i=1}^N d(q_i \varphi_i) = \sum_{i=1}^N \varphi_i dq_i$$

系统所改变的静电能量 $dW_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N d(q_i \varphi_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i dq_i$

即 $dW_s = 2dW_e \quad \longrightarrow \quad F_i dg_i = dW_e \quad \longrightarrow \quad F_i = \left. \frac{\partial W_e}{\partial g_i} \right|_{\varphi \text{ 不变}}$

例3.1.8 有一平行金属板电容器，极板面积为 $l \times b$ ，板间距离为 d ，用一块介质片（宽度为 b 、厚度为 d ，介电常数为 ε ）部分填充在两极板之间，如图所示。设极板间外加电压为 U_0 ，忽略边缘效应，求介质片所受的静电力。



解 平行板电容器的电容为 $C = \varepsilon_0 \frac{(l-x)b}{d} + \varepsilon \frac{bx}{d}$

所以电容器内的电场能量为 $W_e = \frac{1}{2} C U_0^2 = \frac{b U_0^2}{2d} [\varepsilon_0 (l-x) + \varepsilon x]$

由 $F_i = \left. \frac{\partial W_e}{\partial g_i} \right|_{\varphi \text{ 不变}}$ 可求得介质片受到的静电力为

$$F_x = \left. \frac{\partial W_e}{\partial x} \right|_{U_0 \text{ 不变}} = \frac{b(\varepsilon - \varepsilon_0)U_0^2}{2d}$$

由于 $\varepsilon > \varepsilon_0$ ，所以介质片所受到的力有将其拉进电容器的趋势

此题也可用式 $F_i = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial g_i} \right|_{q \text{ 不变}}$ 来计算

设极板上保持总电荷 q 不变, 则

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{dq^2}{2b[\varepsilon_0(l-x) + \varepsilon x]}$$

由此可得

$$F_x = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial x} \right|_{q \text{ 不变}} = \frac{d(\varepsilon - \varepsilon_0)q^2}{2b[\varepsilon_0(l-x) + \varepsilon x]^2}$$

由于

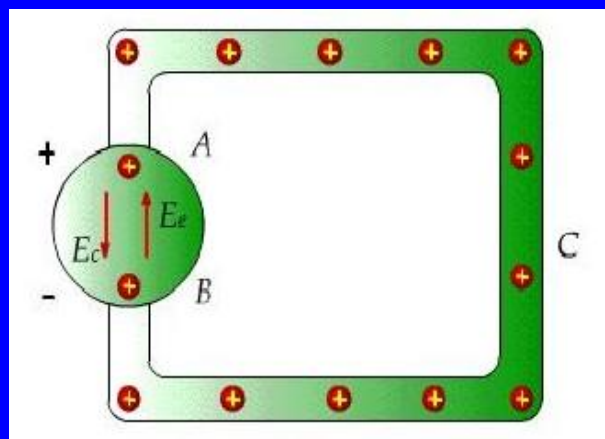
$$q = CU_0 = \frac{bU_0}{d}[\varepsilon_0(l-x) + \varepsilon x]$$

同样得到

$$F_x = \frac{b(\varepsilon - \varepsilon_0)U_0^2}{2d}$$

3.2 导电媒质中的恒定电场分析

将导电媒质与电源的两极相连接，且维持两电极间的电压不变，则导电媒质内将存在一个不随时间变化的电场，称为**恒定电场**。



本节内容

3.2.1 恒定电场的基本方程和边界条件

3.2.2 恒定电场与静电场的比拟

3.2.1 恒定电场的基本方程和边界条件

1. 恒定电场的基本方程

恒定电场分布不随时间变化，满足

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{电荷分布不随时间变化的运动电荷是产生恒定电场的源})$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{恒定电场是保守场})$$

恒定电场和静电场都是有源无旋场，具有相同的性质。

由于恒定电场不随时间变化，所以电荷的分布也不随时间变化，即 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 。根据电流连续性方程 $\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ ，得到

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

微分形式为 $\nabla \cdot \vec{J} = 0$

- 恒定电场的基本场矢量是电流密度 $\vec{J}(\vec{r})$ 和电场强度 $\vec{E}(\vec{r})$
- 恒定电场的基本方程为

$$\text{微分形式: } \begin{cases} \nabla \cdot \vec{J} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \text{积分形式: } \begin{cases} \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases}$$

- 线性各向同性导电媒质的本构关系 $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$
- 恒定电场的电位函数

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \longrightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi$$

$$\text{由 } \nabla \cdot \vec{J} = 0 \longrightarrow \nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) = 0 \longrightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$

- 恒定电场的电荷体密度

$$\rho = \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \nabla \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \vec{J} \right) = \frac{\varepsilon}{\sigma} \nabla \cdot \vec{J} + \vec{J} \cdot \nabla \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \right) = \vec{J} \cdot \nabla \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \right)$$

若媒质是均匀的，则电荷体密度处处为零。

2. 恒定电场的边界条件

• 场矢量的边界条件

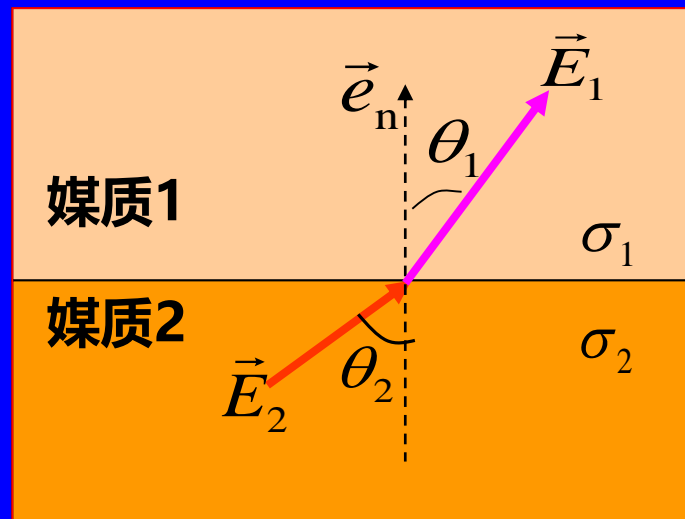
$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \longrightarrow \vec{e}_n \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0 \quad \text{即} \quad J_{1n} = J_{2n}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \longrightarrow \vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad \text{即} \quad E_{1t} = E_{2t}$$

• 场矢量的折射关系

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{E_{1t} / E_{1n}}{E_{2t} / E_{2n}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

• 导电媒质分界面上的自由电荷面密度



$$\rho_S = \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \vec{e}_n \cdot \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \vec{J}_1 - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \vec{J}_2 \right) = \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right) \vec{e}_n \cdot \vec{J}$$

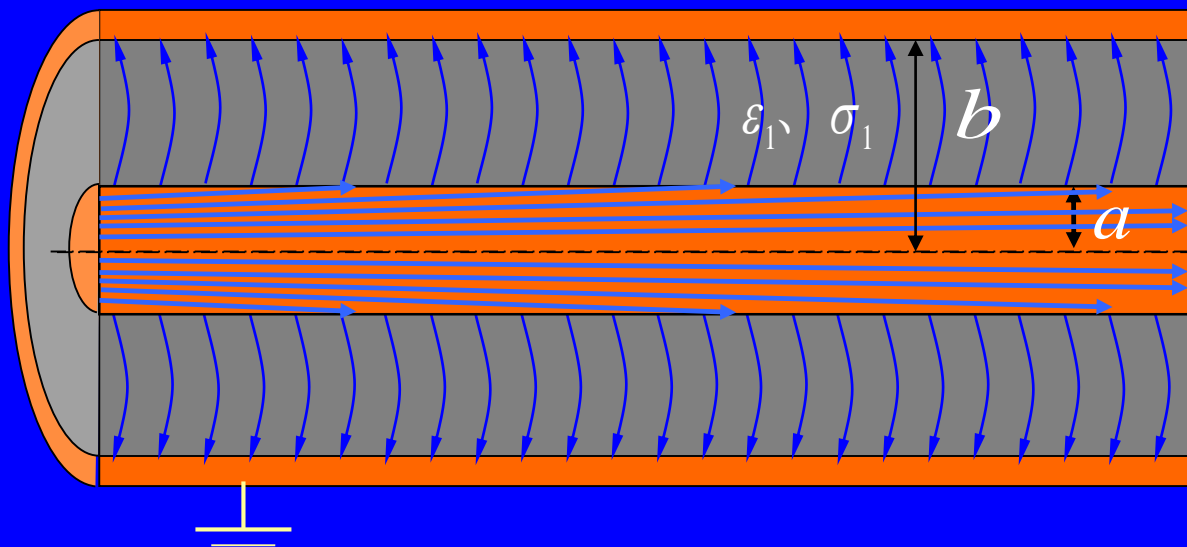
• 电位的边界条件

由于 $\vec{J} = \sigma \vec{E} = -\sigma \nabla \varphi$ ，所以电位函数的边界条件为

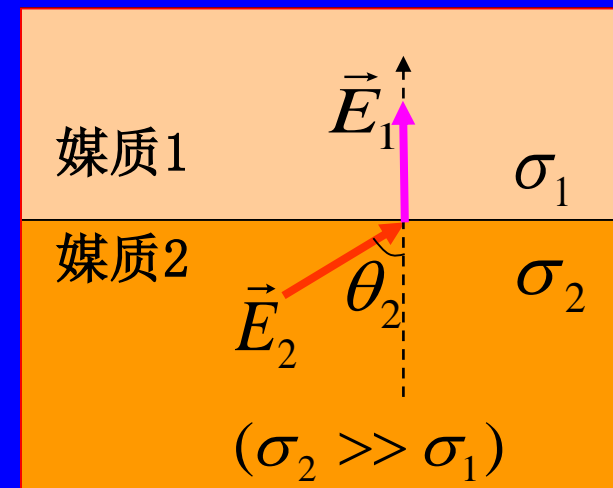
$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

■ 说明：

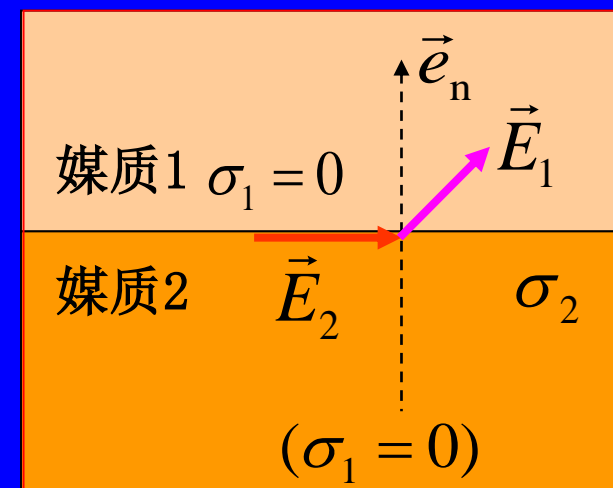
- 恒定电场同时存在于导体内部和外部，在导体表面上的电场既有法向分量又有切向分量，电场并不垂直于导体表面，因而导体表面不是等位面；



- 如 $\sigma_2 \gg \sigma_1$ 、且 $\theta_2 \neq 90^\circ$ ，则 $\theta_1 = 0$ ，即电场线近似垂直于与良导体表面。此时，导体表面可近似地看作为等位面；

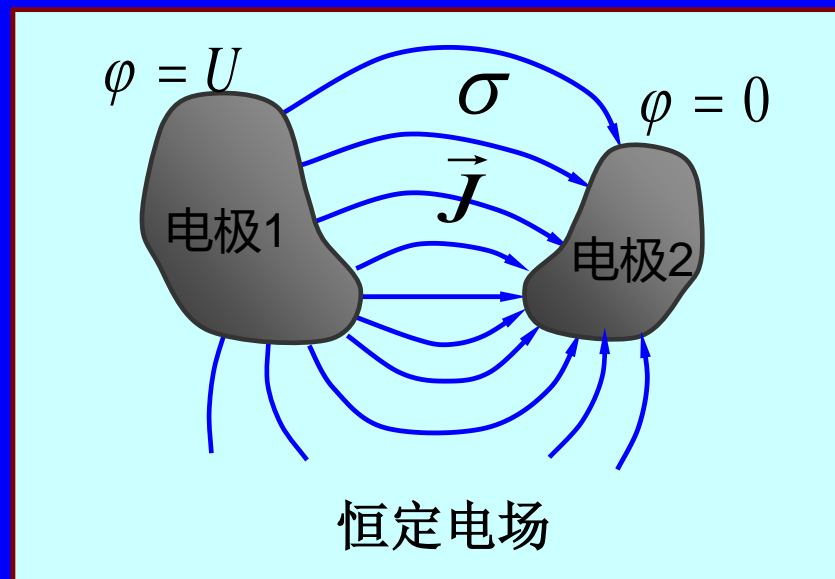
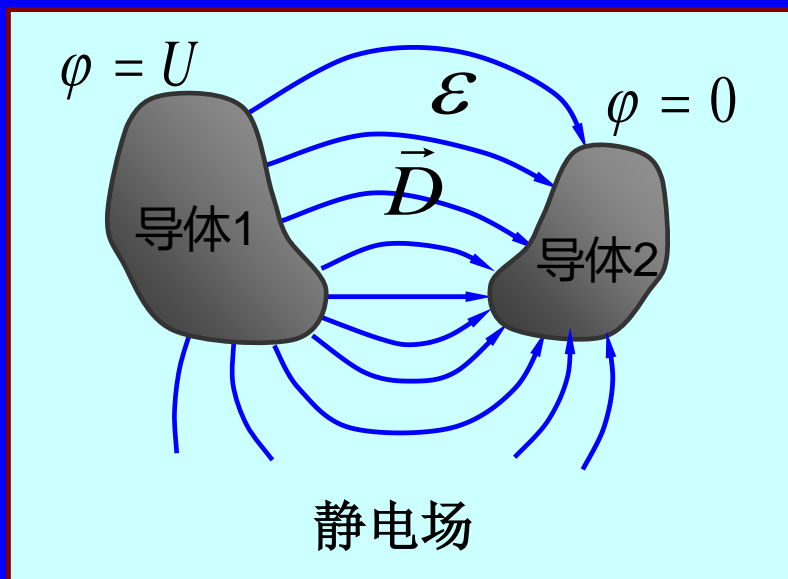


- 若媒质1为理想介质，即 $\sigma_1 = 0$ ，则 $J_1 = 0$ ，故 $J_{2n} = 0$ 且 $E_{2n} = 0$ ，即导体中的电流和电场与分界面平行。



3.2.2 恒定电场与静电场的比拟

如果两种场，在一定条件下，场方程有相同的形式，边界形状相同，边界条件等效，则其解也必有相同的形式，求解这两种场分布必然是同一个数学问题。只需求出一种场的解，就可以用对应的物理量作替换而得到另一种场的解。这种求解场的方法称为**比拟法**。



- 在静电场中，两导体间充满介电常数为 ε 的均匀电介质时的电容为

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}} = \frac{\varepsilon \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

- 在恒定电场中，两电极间充满电导率为 σ 的均匀导电媒质时的电导为

$$G = \frac{I}{U} = \frac{\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}} = \frac{\sigma \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

恒定电场与静电场的比拟

	静电场 ($\rho = 0$ 区域)	恒定电场 (电源外部)
基本方程	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
	$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = 0$	$\nabla \cdot \vec{J} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = 0$
本构关系	$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$
位函数	$\vec{E} = -\nabla \varphi, \quad \nabla^2 \varphi = 0$	$\vec{E} = -\nabla \varphi, \quad \nabla^2 \varphi = 0$
边界条件	$E_{1t} = E_{2t} \quad D_{1n} = D_{2n}$	$E_{1t} = E_{2t} \quad J_{1n} = J_{2n}$
	$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$	$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$

对应物理量	静电场	\vec{E}	\vec{D}	φ	q	ε	C
	恒定电场	\vec{E}	\vec{J}	φ	I	σ	G

例3.2.1 同轴线的内导体半径为 a ，外导体内半径为 b ，内外导体之间填充一种非理想介质（设其介电常数为 ε ，电导率为 σ ）。试计算同轴线单位长度的绝缘电阻。

解： 直接用恒定电场的计算方法

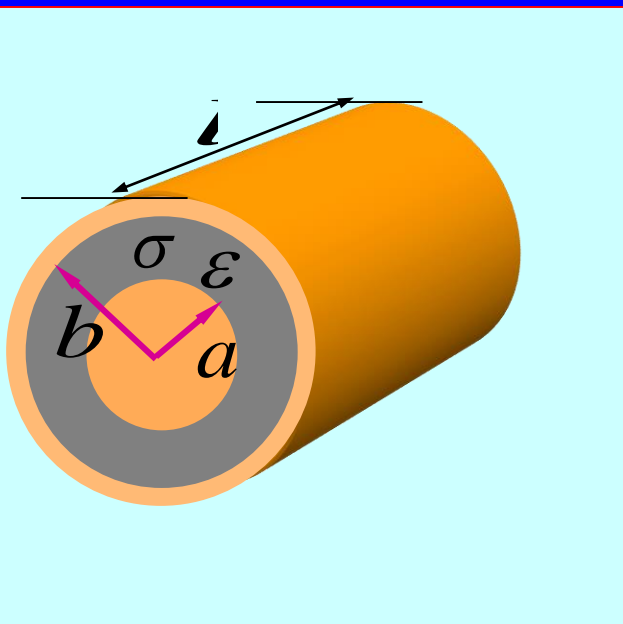
设由内导体流向外导体的径向电流为 I 。

$$\text{则 } \vec{J} = \vec{e}_\rho \frac{I}{2\pi\rho l} \longrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \vec{e}_\rho \frac{I}{2\pi\rho l\sigma}$$

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{\rho} = \int_a^b \frac{I}{2\pi\rho l\sigma} d\rho = \frac{I}{2\pi\sigma l} \ln \frac{b}{a}$$

单位长度的绝缘电阻为

$$R = \frac{U}{Il} = \frac{1}{2\pi\sigma} \ln \frac{b}{a}$$



例3.2.2 计算半球形接地器的接地电阻。

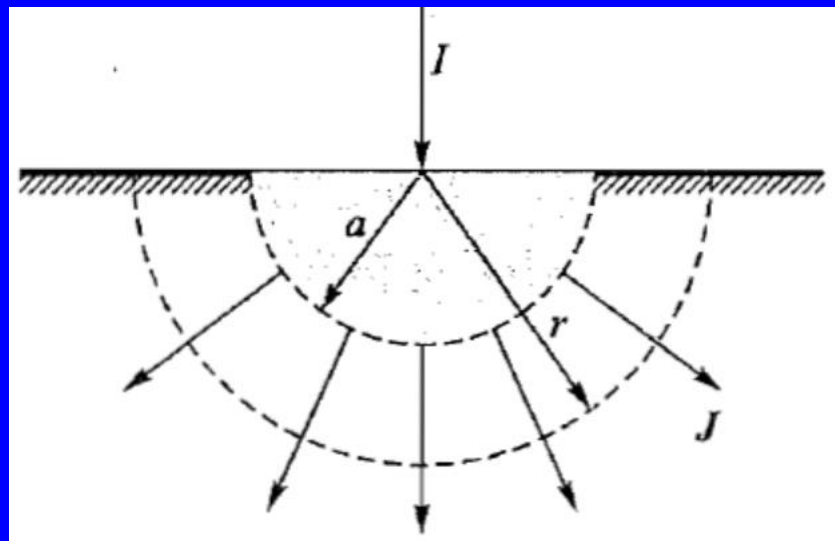
解： 设大地的电导率为 σ ，
流过接地器的电流为 I ，则大地中的
电流密度为

$$\vec{J} = \vec{e}_r \frac{I}{2\pi r^2}$$

故
$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \vec{e}_r \frac{I}{2\pi\sigma r^2}$$

$$U = \int_a^\infty E dr = \frac{I}{2\pi\sigma} \int_a^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{I}{2\pi\sigma a}$$

则接地电阻为
$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma a}$$



3.3 恒定磁场分析

本节内容

- 3.3.1 恒定磁场的基本方程和边界条件
- 3.3.2 矢量磁位和标量磁位
- 3.3.3 电感
- 3.3.4 恒定磁场的能量
- 3.3.5 磁场力

3.3.1 恒定磁场的基本方程和边界条件

1. 基本方程

恒定磁场的源（恒定电流）和场量（B, H）不随时间变化

$$\text{积分形式: } \begin{cases} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \end{cases} \quad \text{微分形式: } \begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

恒定磁场是无源有旋场，恒定电流是产生恒定磁场的涡旋源，磁力线是与源电流相交链的闭合曲线。

线性、各向同性磁介质的本构关系： $\vec{B} = \mu \vec{H}$

2. 边界条件

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} B_{1n} - B_{2n} = 0 \\ H_{1t} - H_{2t} = J_S \end{cases}$$

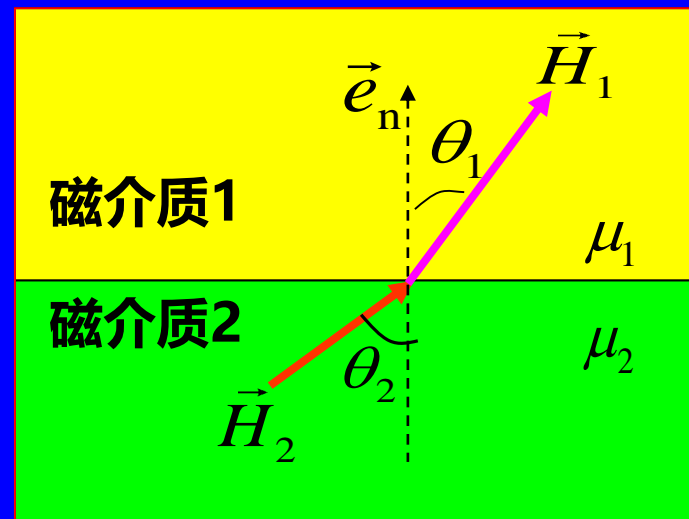
若分界面上不存在自由面电流, 即 $J_S = 0$, 则

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} B_{1n} - B_{2n} = 0 \\ H_{1t} - H_{2t} = 0 \end{cases}$$

分界面上磁场矢量的突变

$$\begin{cases} B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \\ H_{1t} = H_{2t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{H_{1t} / H_{1n}}{H_{2t} / H_{2n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$



3.3.2 矢量磁位和标量磁位

1. 恒定磁场的矢量磁位

■ 矢量磁位的定义

由 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

矢量磁位或磁矢位

即恒定磁场可以用一个矢量函数的旋度来表示。

■ 磁矢位的任意性

与电位一样，磁矢位也不是唯一确定的，它加上任意一个标量 ψ 的梯度以后，仍然表示同一个磁场，即

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla \psi) = \nabla \times \vec{A}$$

磁矢位的任意性是因为只规定了它的旋度，没有规定其散度造成的。为了得到确定的 A ，可以对 A 的散度加以限制，在恒定磁场中通常规定 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ，并称为**库仑规范**。

■ 磁矢位的微分方程

$$\left. \begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu \vec{J} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \vec{J} \longrightarrow \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \longrightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad \text{——磁矢位的泊松方程}$$

$$\text{在无源区: } \vec{J} = 0 \longrightarrow \nabla^2 \vec{A} = 0 \quad \text{——磁矢位的拉普拉斯方程}$$

■ 磁矢位的表达式

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dV' = -\frac{\mu}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dV' \\ &= \nabla \times \left[\frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV' \right] \end{aligned}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) = \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') + \frac{1}{R} \nabla \times \vec{J}(\vec{r}') = -\vec{J}(\vec{r}') \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right)$$

由此可得出 $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV'$ (可以证明满足 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$)

对于面电流和细导线电流回路, 磁矢位分别为

面电流: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_s(\vec{r}')}{R} dS'$ 细线电流: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \oint_C \frac{Id\vec{l}'}{R}$

■ 利用磁矢位计算磁通量: $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$

■ 磁矢位的边界条件

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 &\longrightarrow \vec{e}_n \times \vec{A}_1 = \vec{e}_n \times \vec{A}_2 \longrightarrow A_{1t} = A_{2t} \\ \nabla \cdot \vec{A} = 0 &\longrightarrow \vec{e}_n \cdot \vec{A}_1 = \vec{e}_n \cdot \vec{A}_2 \longrightarrow A_{1n} = A_{2n} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \vec{A}_1 = \vec{A}_2$$

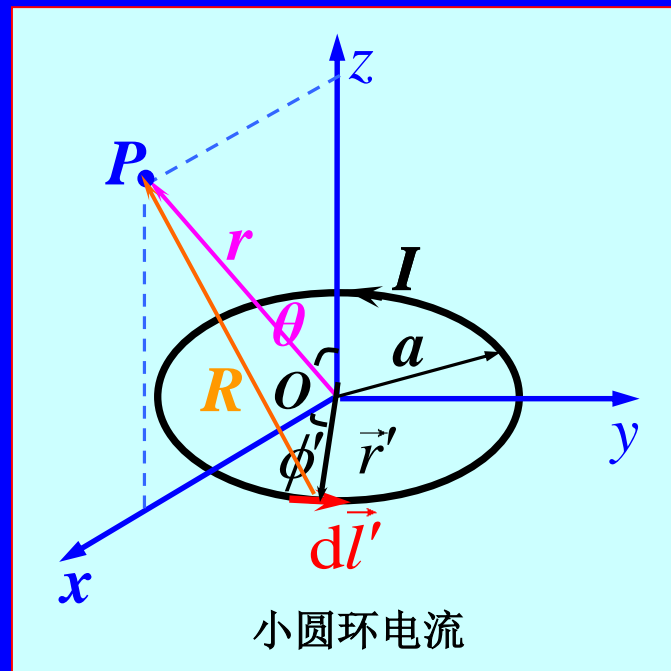
$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) &= \vec{J}_s \\ \vec{H} &= \nabla \times \vec{A} / \mu \end{aligned} \right\} \longrightarrow \vec{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \vec{A}_1 - \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \vec{A}_2 \right) = \vec{J}_s$$

例 3.3.1 小圆形回路的半径为 a ，回路中的电流为 I 。求小圆环电流回路的远区矢量磁位与磁场。

解 如图所示，由于场具有轴对称性，矢量磁位和磁场均与 ϕ 无关，计算 xOz 平面上的矢量磁位与磁场将不失一般性。

$$\vec{r} = \vec{e}_r r = r(\vec{e}_x \sin \theta + \vec{e}_z \cos \theta)$$

$$\vec{r}' = \vec{e}'_r a = a(\vec{e}_x \cos \phi' + \vec{e}_y \sin \phi')$$



$$d\vec{l}' = \vec{e}'_\phi a d\phi' = (-\vec{e}_x \sin \phi' + \vec{e}_y \cos \phi') a d\phi'$$

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= [(r \sin \theta - a \cos \phi')^2 + a^2 \sin^2 \phi' + r^2 \cos^2 \theta]^{1/2} \\ &= [r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi']^{1/2} \end{aligned}$$

对于远区, 有 $r \gg a$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 - \frac{2a}{r} \sin \theta \cos \phi' \right]^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left[1 - \frac{2a}{r} \sin \theta \cos \phi' \right]^{-1/2} \\ &\approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \phi' \right) \end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \phi' \right) (-\vec{e}_x \sin \phi' + \vec{e}_y \cos \phi') d\phi' \\ &= \vec{e}_y \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi r^2} \sin \theta \end{aligned}$$

由于在 $\phi = 0$ 面上 $\vec{e}_y = \vec{e}_\phi$, 所以上式可写成

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi r^2} \sin \theta = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I S}{4\pi r^2} \sin \theta$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = \vec{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \\ &= \frac{\mu_0 I S}{4 \pi r^3} (\vec{e}_r 2 \cos \theta + \vec{e}_\theta \sin \theta)\end{aligned}$$

式中 $S = \pi a^2$ 是小圆环的面积。

载流小圆环可看作磁偶极子, $\vec{p}_m = I\vec{S}$ 为磁偶极子的磁矩
(或磁偶极矩), 则

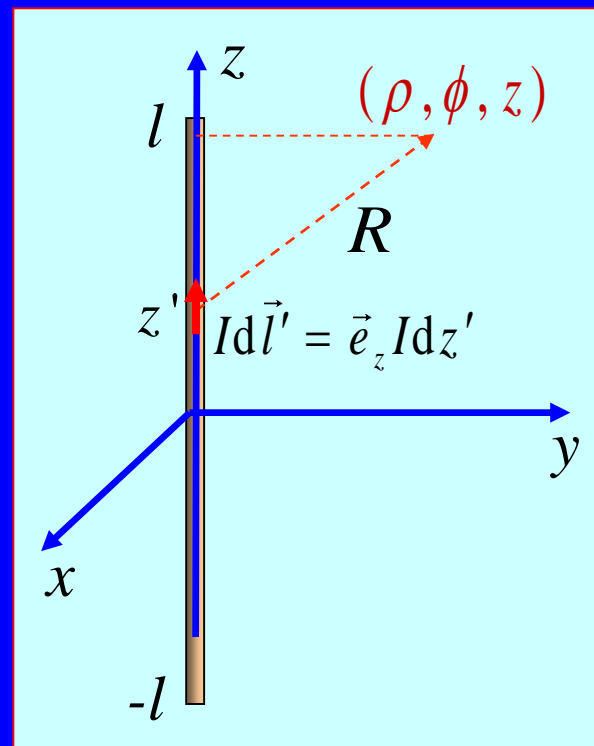
$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 p_m}{4 \pi r^2} \sin \theta \quad \text{或} \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4 \pi r^3} \vec{p}_m \times \vec{r}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 p_m}{4 \pi r^3} (\vec{e}_r 2 \cos \theta + \vec{e}_\theta \sin \theta)$$

例 3.3.2 求无限长直线电流 I 的磁矢位，设电流沿 $+z$ 方向流动。

解：先求长度为 $2l$ 的直线电流的磁矢位。电流元 $Id\vec{l}' = \vec{e}_z Idz'$ 到点 $P(\rho, \phi, z)$ 的距离 $R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$ 。则

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} dz' \\ &= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln[z' - z + \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}] \Big|_{-l}^l \\ &= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{(l - z) + \sqrt{\rho^2 + (z - l)^2}}{-(l + z) + \sqrt{\rho^2 + (z + l)^2}}\end{aligned}$$



当 $l \rightarrow \infty$ 时

$$\vec{A} \approx \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{l + \sqrt{\rho^2 + l^2}}{-l + \sqrt{\rho^2 + l^2}} \approx \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{2l}{\rho} \right)$$

将 $A=0$ 的点选取在 $\rho = \rho_0$ 处，即令

$$\vec{A} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2l}{\rho_0} + C = 0$$

故有
$$C = -\vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2l}{\rho_0}$$

因此
$$\vec{A} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2l}{\rho} - \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2l}{\rho_0} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)$$

相应的磁感应强度为

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\vec{e}_\phi \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}$$

2. 恒定磁场的标量磁位

■ 标量磁位的引入

一般情况下，恒定磁场只能引入磁矢位来描述，但在无传导电流 ($J=0$) 的空间中，则有

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \longrightarrow \vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

标量磁位或磁标位

即在没有传导电流 ($J=0$) 的空间中，可以引入一个标量位函数来描述磁场。

■ 磁标位的微分方程

在线性、各向同性的均匀媒质中

$$\vec{B} = -\mu \vec{H}, \quad \vec{H} = -\nabla \varphi_m, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \nabla^2 \varphi_m = 0$$

标量磁位的拉普拉斯方程

■ 标量磁位的边界条件

在没有自由电流的两种不同媒质的分界面上，由边界条件

$\vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0$ 和 $\vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$ 可导出标量磁位的边界条件为

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2} \quad \text{和} \quad \mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n}$$

3.3.3 电感

1. 磁通与磁链

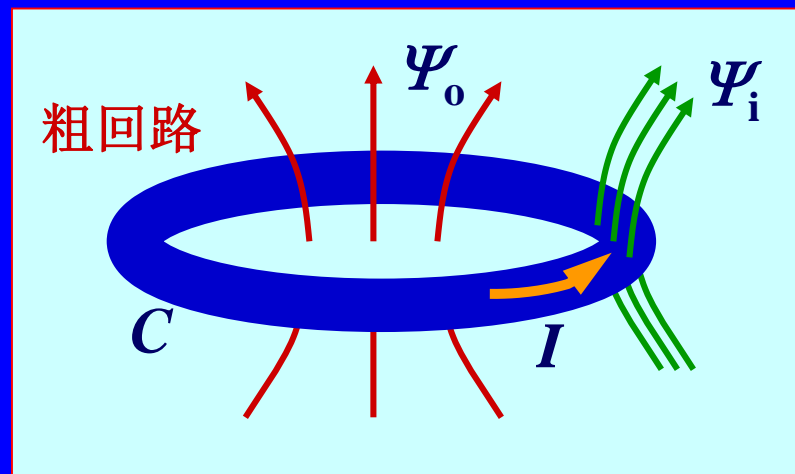
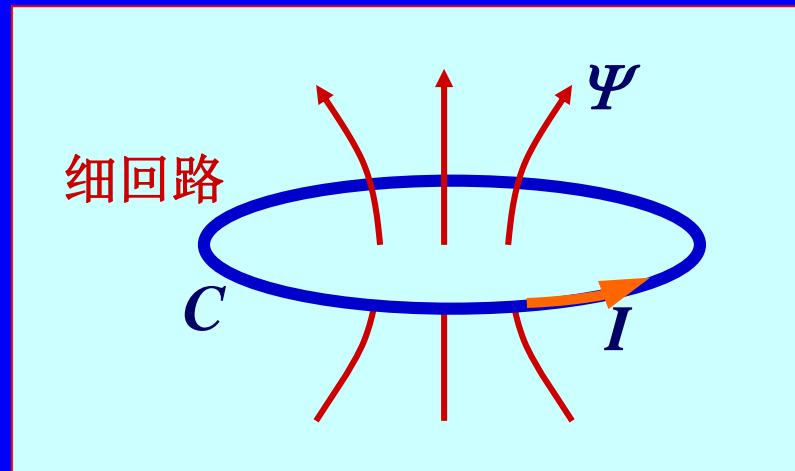
- 单匝线圈形成的回路的磁链定义为穿过该回路的磁通量

$$\Psi = \Phi$$

- 多匝线圈形成的导线回路的磁链定义为所有线圈的磁通总和

$$\Psi = \sum_i \Phi_i$$

- 粗导线构成的回路，磁链分为两部分：一部分是粗导线包围的、磁力线不穿过导体的外磁链 Ψ_0 ；另一部分是磁力线穿过导体、只有粗导线的一部分包围的内磁链 Ψ_i



2. 自感

设回路 C 中的电流为 I ，所产生的磁场与回路 C 交链的磁链为 Ψ ，则磁链 Ψ 与回路 C 中的电流 I 有正比关系，其比值

$$L = \frac{\Psi}{I}$$

称为回路 C 的自感系数，简称自感。

粗导体回路的自感： $L = L_i + L_o$

$$L_i = \frac{\Psi_i}{I} \text{ —— 内自感; } L_o = \frac{\Psi_o}{I} \text{ —— 外自感}$$

■ 自感的特点：

自感只与回路的几何形状、尺寸以及周围的磁介质有关，与电流无关。

例3.3.3 求同轴线单位长度的自感。设内导体半径为 a ，外导体厚度可忽略不计，其半径为 b ，空气填充。

解：先求内导体的内自感。设同轴线中的电流为 I ，由安培环路定理

$$\oint_C \vec{H}_i \cdot d\vec{l} = I' = \frac{I}{\pi a^2} \pi \rho^2 = \frac{I}{a^2} \rho^2$$

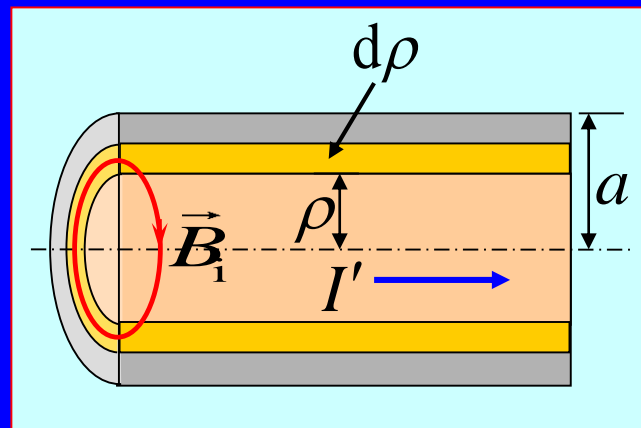
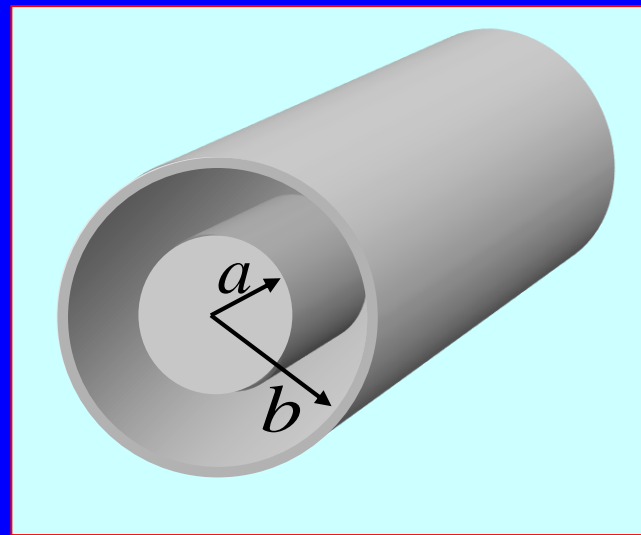
得 $H_i = \frac{I}{2\pi a^2} \rho$, $B_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \rho$ ($0 \leq \rho \leq a$)

穿过沿轴线单位长度的矩形面积元 $dS = d\rho$ 的磁通为

$$d\Phi_i = B_i \cdot dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \rho d\rho$$

与 $d\Phi_i$ 交链的电流为 $I' = \frac{I}{a^2} \rho^2$

则与 $d\Phi_i$ 相应的磁链为 $d\Psi_i = \frac{I'}{I} d\Phi_i = \frac{\mu_0 I \rho^3}{2\pi a^4} d\rho$



因此内导体中总的内磁链为

$$\Psi_i = \int d\Psi_i = \int_0^a \frac{\mu_0 I \rho^3}{2\pi a^4} d\rho = \frac{\mu_0 I}{8\pi}$$

故单位长度的内自感为 $L_i = \frac{\Psi_i}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi}$

再求内、外导体间的外自感。

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \quad \longrightarrow \quad d\Psi_o = d\Phi_o = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} d\rho$$

则 $\Psi_o = \int d\Psi_o = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} d\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$

故单位长度的外自感为 $L_o = \frac{\Psi_o}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$

单位长度的总自感为 $L = L_i + L_o = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$

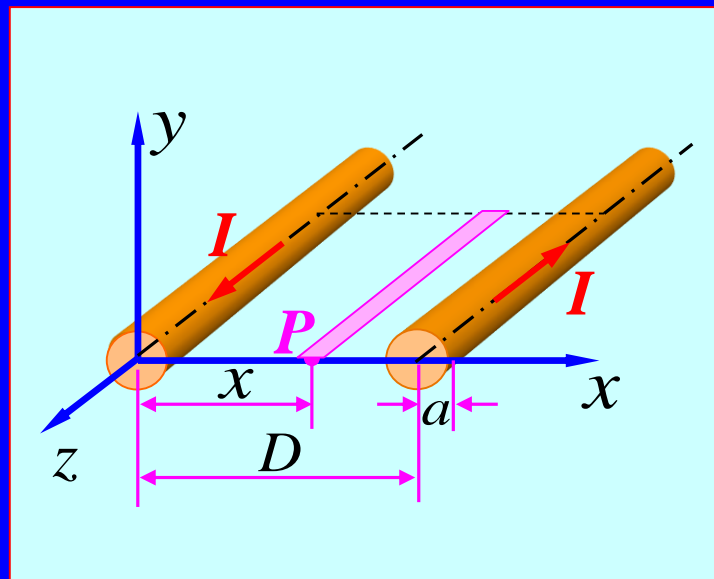
例3.3.4 计算平行双线传输线单位长度的自感。设导线的半径为 a ，两导线的间距为 D ，且 $D \gg a$ 。导线及周围媒质的磁导率为 μ_0 。

解 设两导线流过的电流为 I 。由于 $D \gg a$ ，故可近似地认为导线中的电流是均匀分布的。应用安培环路定理和叠加原理，可得到两导线之间的平面上任一点 P 的磁感应强度为

$$\vec{B}(x) = \vec{e}_y \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right)$$

穿过两导线之间沿轴线方向为单位长度的面积的外磁链为

$$\Psi_o = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^{D-a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right) dx = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{D-a}{a}$$



于是得到平行双线传输线单位长度的外自感

$$L_o = \frac{\Psi_o}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D-a}{a} \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{a}$$

两根导线单位长度的内自感为

$$L_i = 2 \times \frac{\mu_0}{8\pi} = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

故得到平行双线传输线单位长度的自感为

$$L = L_i + L_o = \frac{\mu_0}{4\pi} + \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{a}$$

3. 互感

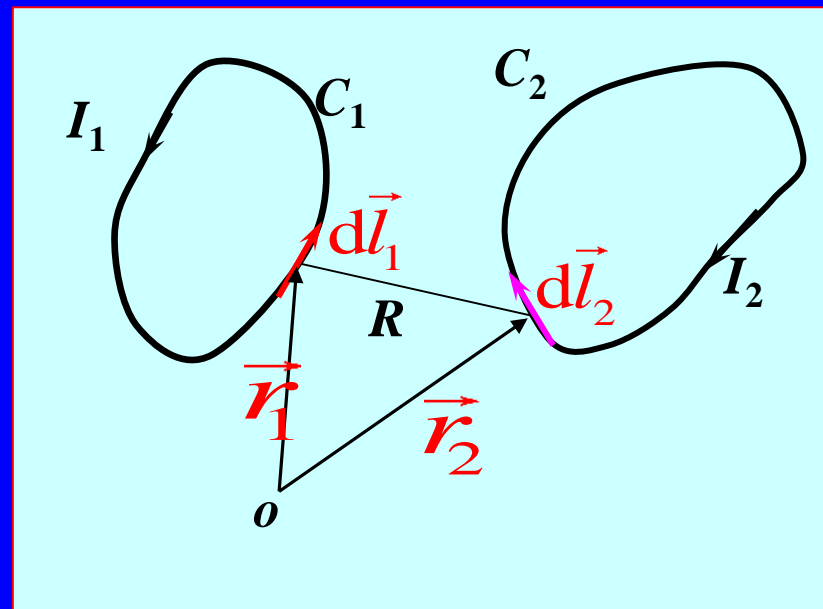
对两个彼此邻近的闭合回路 C_1 和回路 C_2 ，当回路 C_1 中通过电流 I_1 时，不仅与回路 C_1 交链的磁链与 I_1 成正比，而且与回路 C_2 交链的磁链 Ψ_{12} 也与 I_1 成正比，其比例系数

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1}$$

称为回路 C_1 对回路 C_2 的互感系数，简称互感。

同理，回路 C_2 对回路 C_1 的互感为

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_2}$$



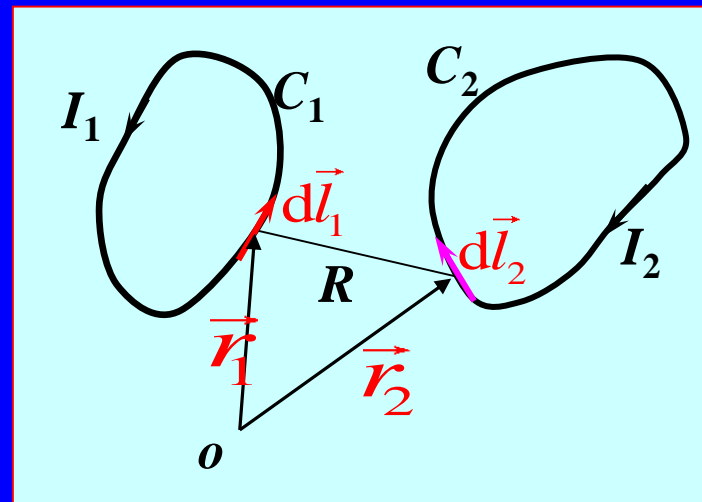
■ 互感的特点：

- 互感只与回路的几何形状、尺寸、两回路的相对位置以及周围磁介质有关，而与电流无关。
- 满足互易关系，即 $M_{12} = M_{21}$
- 当与回路交链的互感磁通与自感磁通具有相同的符号时，互感系数 M 为正值；反之，则互感系数 M 为负值。

4. 纽曼公式

如图所示的两个回路 C_1 和回路 C_2 ,
回路 C_1 中的电流 I_1 在回路 C_2 上的任一点产生的矢量磁位

$$\vec{A}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$



回路 C_1 中的电流 I_1 产生的磁场与回路 C_2 交链的磁链为

$$\Psi_{12} = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

故得 $M_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$

同理 $M_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$

$\Rightarrow M_{21} = M_{12} = M = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$

纽曼公式

例3.3.5 如图所示，长直导线与三角形导体回路共面，求它们之间的互感。

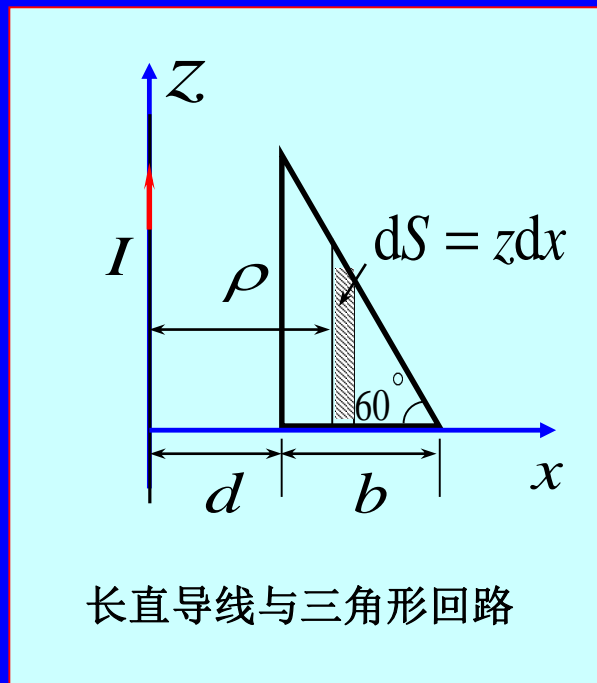
解 设长直导线中的电流为 I ，根据安培环路定理，得到

$$\vec{B} = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

穿过三角形回路面积的磁通为

$$\Psi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_d^{d+b} \frac{z}{x} dx$$

由图中可知 $z = [(b + d) - x] \tan(\pi/3) = \sqrt{3}[(b + d) - x]$



因此

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi} \int_d^{d+b} \frac{1}{x} [(b+d) - x] dx \\ &= \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi} \left[(b+d) \ln\left(1 + \frac{b}{d}\right) - b \right]\end{aligned}$$

故长直导线与三角形导体回路的互感为

$$M = \frac{\Psi}{I} = \frac{\sqrt{3}\mu_0}{2\pi} \left[(b+d) \ln\left(1 + \frac{b}{d}\right) - b \right]$$

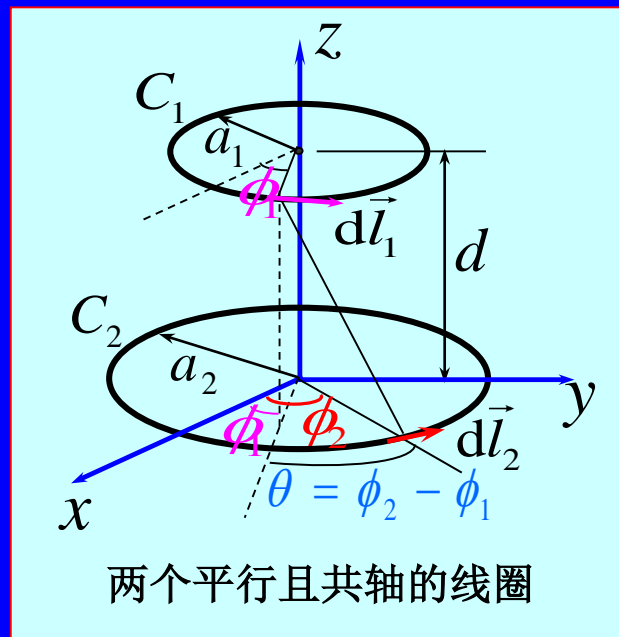
例3.3.6 如图所示，两个互相平行且共轴的圆线圈 C_1 和 C_2 ，半径分别为 a_1 和 a_2 ，中心相距为 d 。求它们之间的互感。

解 利用纽曼公式来计算，则有

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\cos \theta dl_1 dl_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

式中 $\theta = \phi_2 - \phi_1$ 为 $d\vec{l}_1$ 与 $d\vec{l}_2$ 之间的夹角， $dl_1 = a_1 d\phi_1$ 、 $dl_2 = a_2 d\phi_2$ ，且

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = [d^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)]^{1/2}$$



于是有

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a_1 a_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) d\phi_2 d\phi_1}{[d^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)]^{1/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 a_1 a_2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{[d^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \theta]^{1/2}}$$

一般情况下，上述积分只能用椭圆积分来表示。但是若 $d \gg a_1$ 或 $d \gg a_2$ 时，可进行近似计算。

若 $d \gg a_1$ ，则

$$\begin{aligned} [d^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos \theta]^{-1/2} &\approx [d^2 + a_2^2]^{-1/2} \left[1 - \frac{2a_1a_2 \cos \theta}{d^2 + a_2^2}\right]^{-1/2} \\ &\approx [d^2 + a_2^2]^{-1/2} \left[1 + \frac{a_1a_2 \cos \theta}{d^2 + a_2^2}\right] \end{aligned}$$

于是

$$M \approx \frac{\mu_0 a_1 a_2}{2\sqrt{d^2 + a_2^2}} \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{a_1 a_2 \cos \theta}{d^2 + a_2^2}\right] \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 \pi a_1^2 a_2^2}{2[d^2 + a_2^2]^{3/2}}$$

3.3.4 恒定磁场的能量

1. 磁场能量

- **电流回路在恒定磁场中受到磁场力的作用而运动，表明恒定磁场具有能量。**
- **磁场能量是在建立电流的过程中，由电源供给的。当电流从零开始增加时，回路中的感应电动势要阻止电流的增加，因而必须有外加电压克服回路中的感应电动势。**
- **假定所有的电流回路都固定不动，即没有机械功。假定建立并维持恒定电流时，没有热损耗。假定在恒定电流建立过程中，电流的变化足够缓慢，没有辐射损耗。**

在恒定磁场建立过程中，电源克服感应电动势做功所供给的能量，就全部转化成磁场能量。

设回路从零开始充电，最终的电流为 I 、交链的磁链为 Ψ 。
在时刻 t 的电流为 $i = \alpha I$ 、磁链为 $\psi = \alpha \Psi$ 。 ($0 \leq \alpha \leq 1$)

当 α 增加为 $(\alpha + d\alpha)$ 时，回路中的感应电动势： $\varepsilon_{\text{in}} = -\frac{d\Psi}{dt}$

外加电压应为 $u = -\varepsilon_{\text{in}} = \frac{d\Psi}{dt}$

所做的功 $dW = u dq = \frac{d\psi}{dt} i dt = i d\psi = \alpha I \Psi d\alpha$

对 α 从 0 到 1 积分，即得到外电源所做的总功为

$$W = \int dW = \int_0^1 \alpha I \Psi d\alpha = \frac{1}{2} I \Psi$$

根据能量守恒定律，此功也就是电流为 I 的载流回路具有的
磁场能量 W_{m} ，即

$$W_{\text{m}} = \frac{1}{2} I \Psi = \frac{1}{2} I \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} L I^2$$

对于 N 个载流回路, 则有 $W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j \Psi_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j \oint_{C_j} \vec{A}_j \cdot d\vec{l}_j$

例如, 对于两个电流回路 C_1 和回路 C_2 , 有

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \oint_{C_1} (\vec{A}_{11} + \vec{A}_{21}) \cdot I_1 d\vec{l}_1 + \frac{1}{2} \oint_{C_2} (\vec{A}_{12} + \vec{A}_{22}) \cdot I_2 d\vec{l}_2 \\ &= \frac{1}{2} I_1 \Psi_{11} + \frac{1}{2} I_1 \Psi_{12} + \frac{1}{2} I_2 \Psi_{21} + \frac{1}{2} I_2 \Psi_{22} \\ &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \end{aligned}$$

C_1 和 C_2 的互能

回路 C_1 的自有能

回路 C_2 的自有能

对于体分布电流, 则有

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j \oint_{C_j} \vec{A}_j \cdot d\vec{l}_j \xrightarrow{I_j d\vec{l}_j \rightarrow \vec{J} dV} W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV$$

2. 磁场能量密度

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{H}$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{H}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV = \frac{1}{2} \int_V \nabla \times \vec{H} \cdot \vec{A} dV = \int_V \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) dV = \oint_S (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{1}{2} \int_V [\nabla \times \vec{A} \cdot \vec{H} - \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H})] dV$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

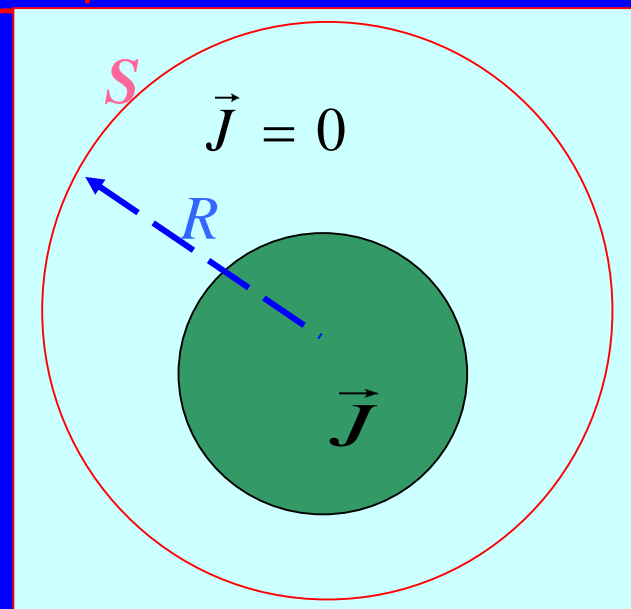
$$= \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV - \frac{1}{2} \oint_S (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}$$

若电流分布在有限区域内，当闭合面S无限扩大时，则有

$$A \sim O\left(\frac{1}{R}\right), H \sim O\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

故

$$\oint_S (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} \sim O\left(\oint_S \frac{1}{R} \frac{1}{R^2} dS\right) \sim O\left(\frac{1}{R}\right) \rightarrow 0$$



- **磁场能量密度:** $w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$
- **磁场的总能量:** $W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV$
- **对于线性、各向同性介质, 则有**

积分区域为电场
所在的整个空间

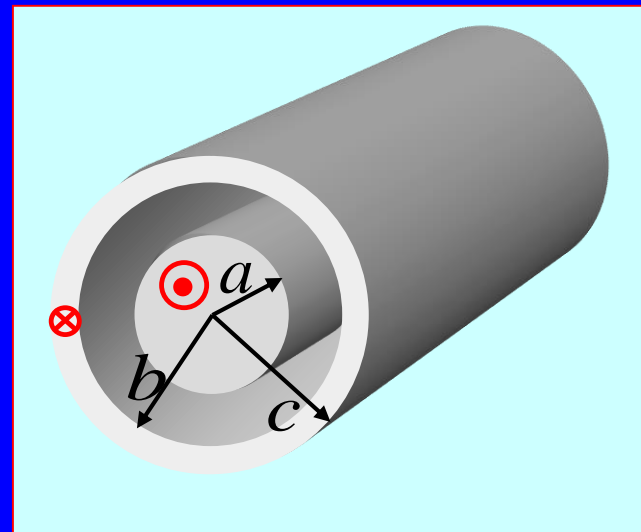
$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu \vec{H} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu H^2$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \int_V \mu \vec{H} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \int_V \mu H^2 dV$$

例3.3.7 同轴电缆的内导体半径为 a ，外导体的内、外半径分别为 b 和 c ，如图所示。导体中通有电流 I ，试求同轴电缆中单位长度储存的磁场能量。

解： 由安培环路定理求出磁场分布

$$\vec{H} = \begin{cases} \vec{e}_\phi \frac{\rho I}{2\pi a^2} & 0 < \rho < a \\ \vec{e}_\phi \frac{I}{2\pi \rho} & a < \rho < b \\ \vec{e}_\phi \frac{I}{2\pi \rho} \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} & b < \rho < c \\ 0 & \rho > c \end{cases}$$



三个区域单位长度内的磁场能量分别为

$$W_{m1} = \frac{\mu_0}{2} \int_0^a \left(\frac{\rho I}{2\pi a^2} \right)^2 2\pi \rho d\rho = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

$$W_{m2} = \frac{\mu_0}{2} \int_a^b \left(\frac{I}{2\pi \rho} \right)^2 2\pi \rho d\rho = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} W_{m3} &= \frac{\mu_0}{2} \int_b^c \left(\frac{I}{2\pi \rho} \right)^2 \left(\frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} \right)^2 2\pi \rho d\rho \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[\frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{c}{b} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right] \end{aligned}$$

单位长度内总的磁场能量为

$$\begin{aligned}
 W_m &= W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} \\
 &= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[\frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{c}{b} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right]
 \end{aligned}$$

单位长度的总自感

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{c}{b} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right]$$

内导体的内自感

内外导体间的外自感

外导体的内自感

3.3.5 磁场力

虚位移原理

假定第 i 个回路在磁场力的作用下产生一个虚位移 dg_i 。此时，磁场力做功 $dA = F_i dg_i$ ，系统的能量增加 dW_m 。根据能量守恒定律，有

$$dW_s = F_i dg_i + dW_m$$

式中 dW_s 是与各电流回路相连接的外电源提供的能量。

具体计算过程中，可假定各回路电流维持不变，或假定与各回路交链的磁链维持不变。

1. 各回路的磁链不变

若假定各回路的磁链不变，则各回路中的电流必定发生改变。由于各回路的磁链不变，回路中都没有感应电动势，故与回路相连接的电源不对回路输入能量，即 $dW_s = 0$ ，因此

$$F_i dg_i = -dW_m$$

故得到

$$F_i = - \left. \frac{\partial W_m}{\partial g_i} \right|_{\Psi \text{ 不变}}$$

式中的 “ - ” 号表示磁场力做功是靠减少系统的磁场能量来实现的。

2. 各回路电流维持不变

若假定各回路中电流不改变，则回路中的磁链必定发生改变，因此两个回路都有感应电动势。此时，外接电源必然要做功来克服感应电动势以保持各回路中电流不变。此时，电源所提供的能量

$$dW_s = \sum_{i=1}^N d(I_i \Psi_i) = \sum_{i=1}^N I_i d\Psi_i$$

系统增加的磁能

$$dW_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N d(I_i \Psi_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i d\Psi_i$$

即

$$dW_s = 2dW_m$$

于是有

$$F_i dg_i = dW_m$$

故得到

$$F_i = \left. \frac{\partial W_m}{\partial g_i} \right|_{I \text{ 不变}}$$

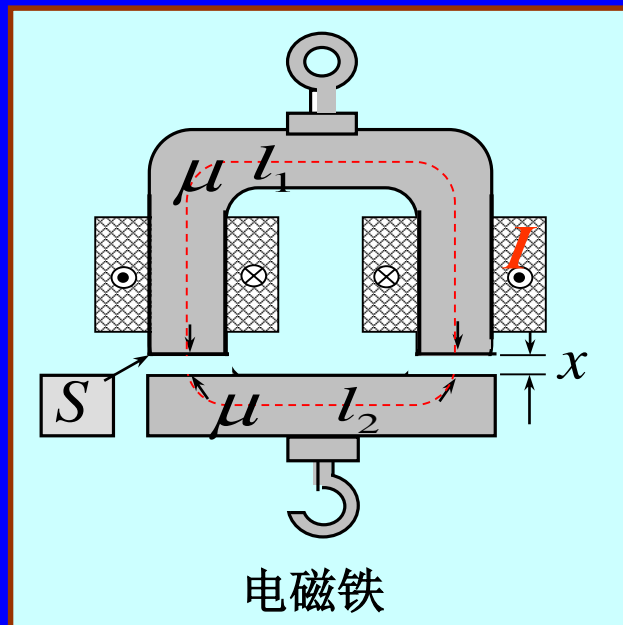
例3.3.8 如图所示的一个电磁铁，由铁轭（绕有 N 匝线圈的铁心）和衔铁构成。铁轭和衔铁的横截面积均为 S ，平均长度分别为 l_1 和 l_2 。铁轭与衔铁之间有一很小的空气隙，其长度为 x 。设线圈中的电流为 I ，铁轭和衔铁的磁导率为 μ 。若忽略漏磁和边缘效应，求铁轭对衔铁的吸引力。

解 在忽略漏磁和边缘效应的情况下，若保持磁通 Ψ 不变，则 B 和 H 不变，储存在铁轭和衔铁中的磁场能量也不变，而空气隙中的磁场能量则要变化。于是作用在衔铁上的磁场力为

$$F_i = - \frac{\partial W_m}{\partial x_i} \Big|_{\Psi \text{ 不变}} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \int_{\text{气隙}} \vec{B}_0 \cdot \vec{H}_0 dV \right]$$

$$= - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x 2S \frac{B_0^2}{\mu_0} dx = - \frac{SB_0^2}{\mu_0}$$

空气隙中的
磁场强度



根据安培环路定理，有 $H(l_1 + l_2) + 2H_0x = NI$

由于 $H = \frac{B}{\mu}$ 和 $H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}$ ，考虑到 $B = B_0$ ，可得到

$$B_0 = \frac{\mu_0 \mu NI}{(l_1 + l_2)\mu_0 + 2\mu x} \longrightarrow F_x = -\frac{SB_0^2}{\mu_0} = -\frac{\mu_0 \mu^2 N^2 I^2 S}{[(l_1 + l_2)\mu_0 + 2\mu x]^2}$$

若采用式 $F_i = \frac{\partial W_m}{\partial x_i} \Big|_{I \text{ 不变}}$ 计算，由储存在系统中的磁场能量

$$W_m = \frac{1}{2} NISB_0 = \frac{\mu_0 \mu SN^2 I^2}{2[(l_1 + l_2)\mu_0 + 2\mu x]}$$

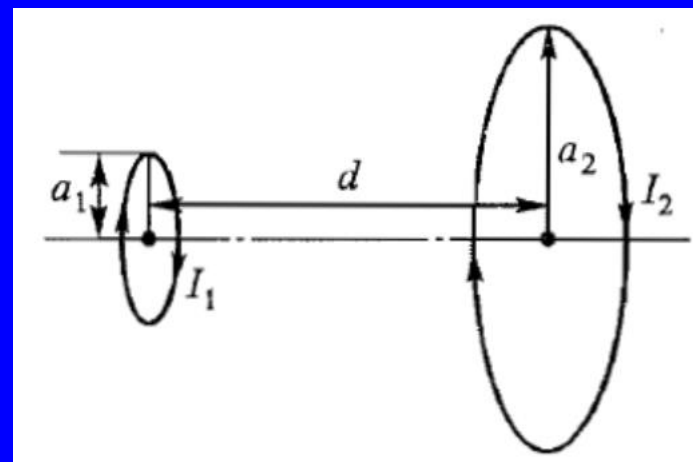
同样得到铁轭对衔铁的吸引力为

$$F_x = \frac{\partial W_m}{\partial x} \Big|_{I \text{ 不变}} = -\frac{\mu_0 \mu^2 N^2 I^2 S}{[(l_1 + l_2)\mu_0 + 2\mu x]^2}$$

例3.3.9 两个互相平行且共轴的圆形线圈，距离为 d ，半径分别为 a_1 和 a_2 ，期中 $a_1 \ll d$ ，两线圈分中分别载有电流 I_1 和 I_2 。求两线圈间的磁场力。

解 当 $a_1 \ll d$ 时，两线圈的互感为

$$M = \frac{\pi \mu_0 a_1^2 a_2^2}{2(a_2^2 + d^2)^{3/2}}$$



两线圈间的磁场力为

$$F_{21} = I_1 I_2 \left. \frac{\partial M}{\partial d} \right|_{I=\text{常数}} = - \frac{3\pi I_1 I_2 \mu_0 a_1^2 a_2^2 d}{2(a_2^2 + d^2)^{5/2}}$$

式中的负号表示当 I_1 与 I_2 的方向相同时, F_{21} 为吸引力; 当 I_1 与 I_2 方向相反时, F_{21} 为排斥力。

3.4 静态场的边值问题及解的唯一性定理

边值问题：在给定的边界条件下，求解位函数的泊松方程或拉普拉斯方程

本节内容

3.4.1 边值问题的类型

3.4.2 静电场的唯一性定理

3.4.1 边值问题的类型

- **第一类边值问题（或狄里赫利问题）**

已知电位函数在场域边界面 S 上各点的值，
即

$$\varphi|_S = f_1(S)$$

- **第二类边值问题（或纽曼问题）**

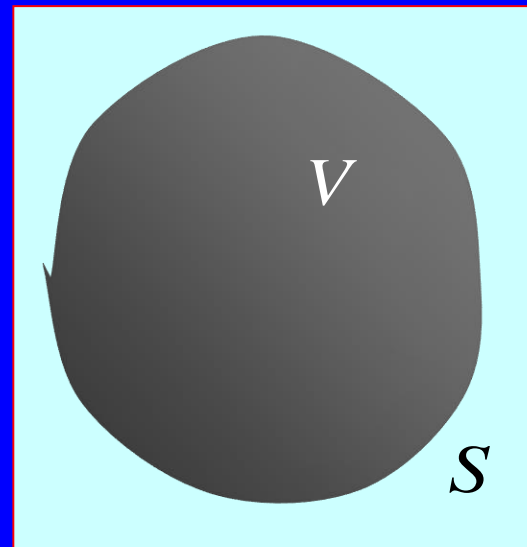
已知电位函数在场域边界面 S 上各点的法向导数值，即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S = f_2(S)$$

- **第三类边值问题（或混合边值问题）**

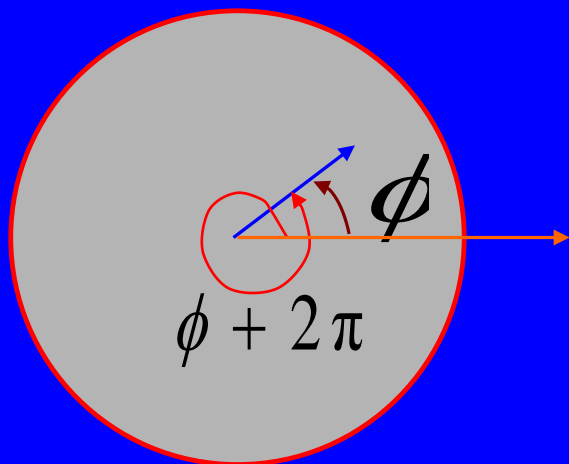
已知场域一部分边界面 S_1 上的电位函数值，而在另一部分边界面 S_2 上已知电位函数的法向导数值，即

$$\varphi|_{S_1} = f_1(S_1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{S_2} = f_2(S_2)$$



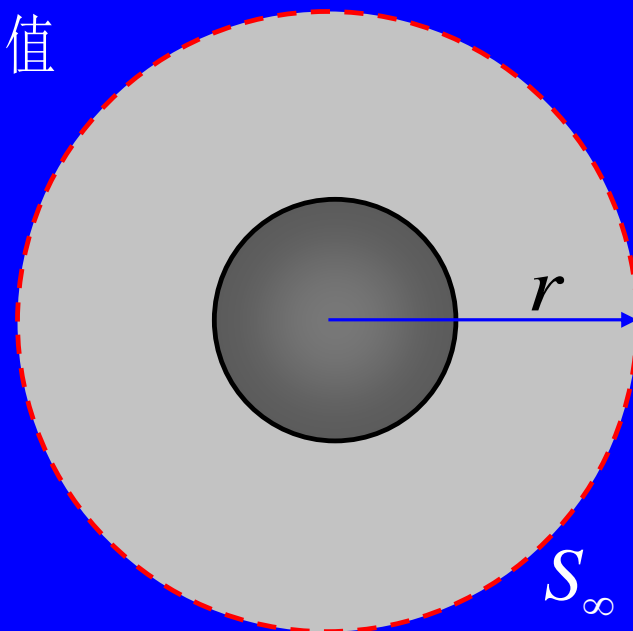
周期边界条件

$$\varphi|_{\phi} = \varphi|_{(\phi+2\pi)}$$



自然边界条件 (无界空间)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r\varphi = \text{有限值}$$



衔接条件

不同媒质分界面上的边界条件，如

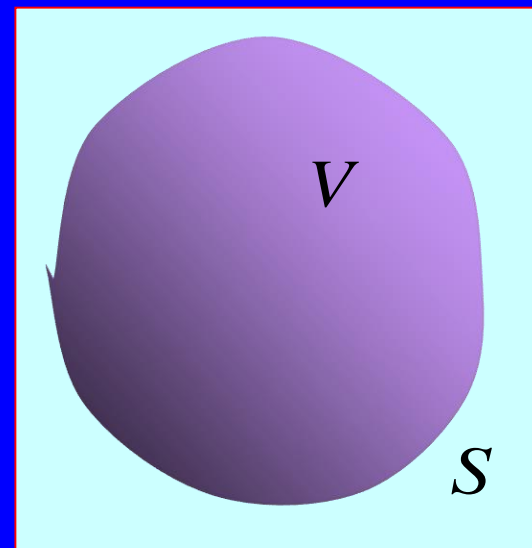
$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

ε_1	φ_1
ε_2	φ_2

3.4.2 唯一性定理

■ 唯一性定理的表述

在场域 V 的边界面 S 上给定电位函数的值 φ
或电位函数的法向导数的值 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, 则泊松方程或拉普拉斯方程在场域 V 内具有唯一值。



■ 唯一性定理的重要意义

- 给出了静态场边值问题具有唯一解的充分必要条件
- 为静态场边值问题的各种求解方法提供了理论依据
- 为求解结果的正确性提供了判据

■ 唯一性定理的证明

反证法：假设解不唯一，则有两个位函数 φ_1 和 φ_2 在场域 V 内满足同样的泊松方程，即

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\frac{1}{\varepsilon} \rho, \quad \nabla^2 \varphi_2 = -\frac{1}{\varepsilon} \rho$$

且在边界面 S 上满足同样的边界条件。

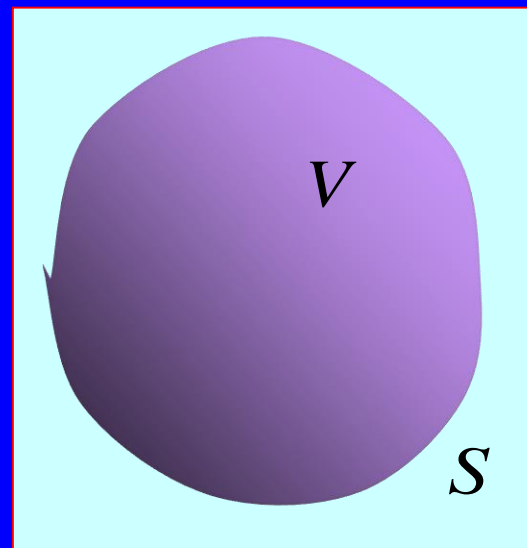
令 $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2$ ，则在场域 V 内

$$\nabla^2 \varphi_0 = \nabla^2 \varphi_1 - \nabla^2 \varphi_2 = 0$$

且在边界面 S 上有

$$\varphi_0 \Big|_S = \varphi_1 \Big|_S - \varphi_2 \Big|_S = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \Big|_S = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_S - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_S = 0$$

$$\text{或} \quad \varphi_0 \Big|_{S_1} = \varphi_1 \Big|_{S_1} - \varphi_2 \Big|_{S_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \Big|_{S_2} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{S_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{S_2} = 0$$

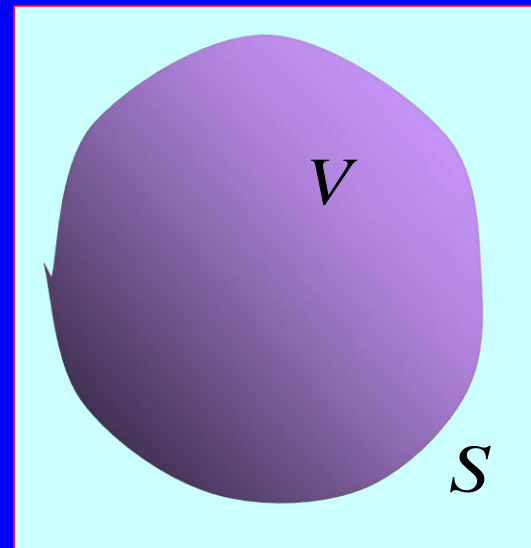


由格林第一恒等式

$$\int_V (\psi \nabla^2 \varphi + \nabla \psi \cdot \nabla \varphi) dV = \oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

可得到
$$\int_V (\nabla \varphi_0)^2 dV = \oint_S \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} dS = 0$$

$\longrightarrow (\nabla \varphi_0)^2 = 0 \longrightarrow \nabla \varphi_0 = 0 \longrightarrow \varphi_0 = C$



对于第一类边界条件: $\varphi_0|_S = 0 \longrightarrow C = 0 \longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2$

对于第二类边界条件: 若 φ_1 和 φ_2 取同一点 Q 为参考点, 则

$\varphi_0|_Q = 0 \longrightarrow C = 0 \longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2$

对于第三类边界条件: $\varphi_0|_{S_1} = 0 \longrightarrow C = 0 \longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2$

3.5 镜像法

本节内容

3.5.1 接地导体平面的镜像

3.5.2 导体球面的镜像

3.5.3 导体圆柱面的镜像

3.5.4 介质平面的镜像

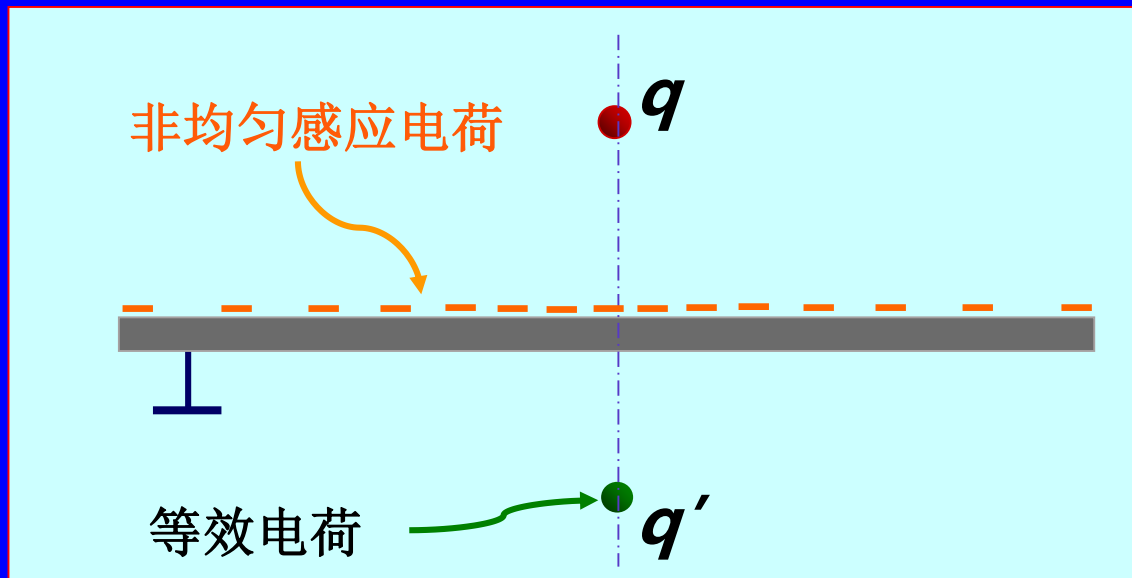
• 镜像法的基本原理

1. 问题的提出

当有电荷存在于导体或介质表面附近时，导体和介质表面会出现感应电荷或极化电荷，而感应电荷或极化电荷将影响场的分布。

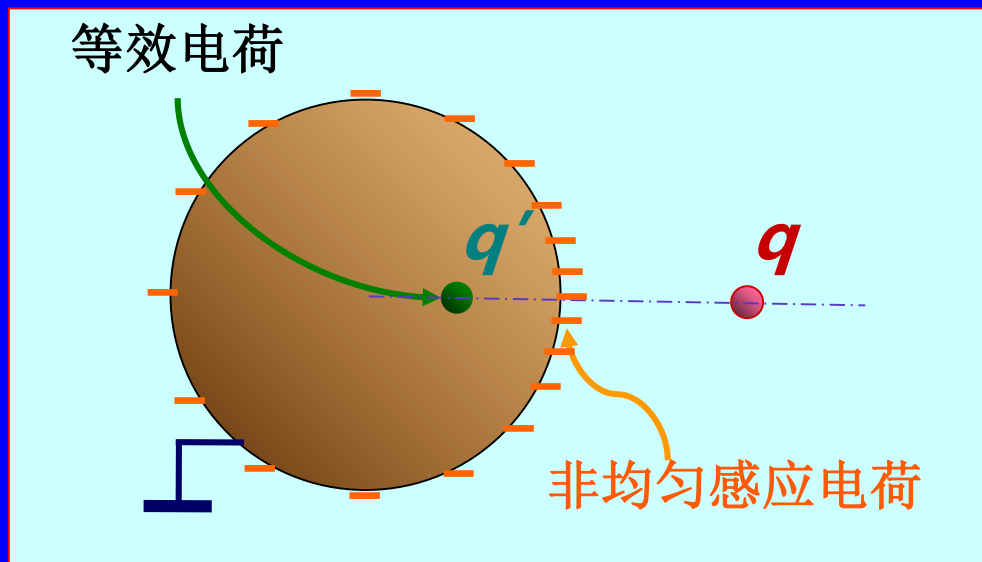
■ 几个实例

● 接地导体板附近有一个点电荷，如图所示。



非均匀感应电荷产生的电位很难求解，可以用等效电荷的电位替代

● 接地导体球附近有一个点电荷，如图。



非均匀感应电荷产生的电位很难求解，可以用等效电荷的电位替代

● 接地导体柱附近有一个线电荷。情况与上例类似，但等效电荷为线电荷。

■ 结论：所谓镜像法是将不均匀电荷分布的作用等效为点电荷或线电荷的作用。

■ 问题：这种等效电荷是否存在？ 这种等效是否合理？

- 镜像法的原理

用位于场域边界外虚设的较简单的镜像电荷分布来等效替代该边界上未知的较为复杂的电荷分布，从而将原含该边界的非均匀媒质空间变换成无限大单一均匀媒质的空间，使分析计算过程得以明显简化的一种间接求解法。

- 镜像法的理论基础——解的唯一性定理

在导体形状、几何尺寸、带电状况和媒质几何结构、特性不变的前提条件下，根据唯一性定理，只要找出的解满足在同一泛定方程下问题所给定的边界条件，那就是该问题的解，并且是唯一的解。镜像法正是巧妙地应用了这一基本原理、面向多种典型结构的工程电磁场问题所构成的一种有效的解析求解法。

- 镜像法应用的关键点

- 镜像电荷的确定

像电荷的个数、位置及其电量大小——“三要素”。

- 等效求解的“有效场域”。

- 确定镜像电荷的两条原则

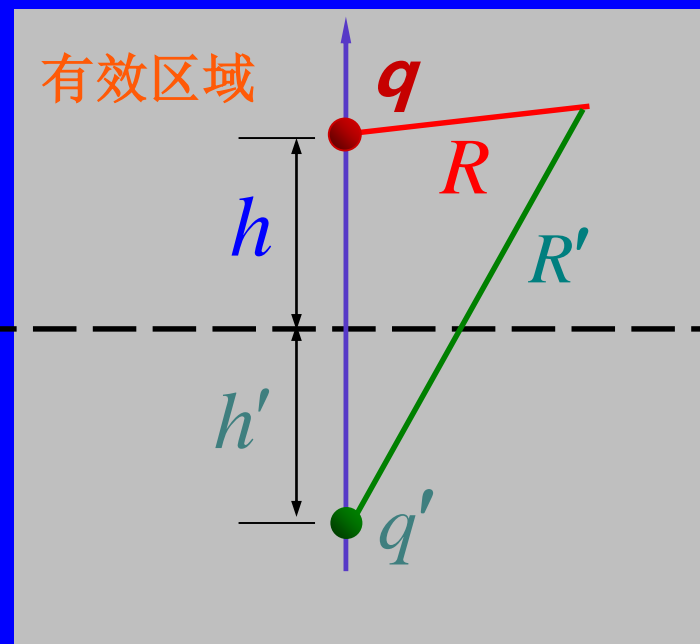
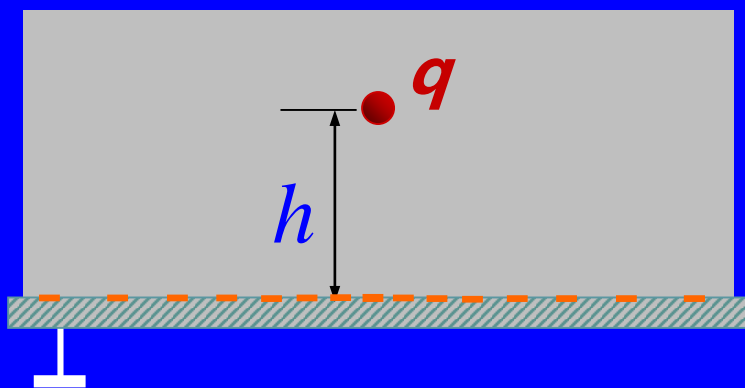
- 像电荷必须位于所求解的场区域以外的空间中。

- 像电荷的个数、位置及电荷量的大小以满足所求解的场区域的边界条件来确定。

3.5.1 接地导体平面的镜像

1. 点电荷对无限大接地导体平面的镜像

原问题 $\nabla^2 \varphi = 0, z > 0$, 点电荷处除外; $\varphi|_{z=0} = 0$



镜像电荷 $q' = -q, h' = h$

电位函数 $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) \quad (z \geq 0)$

因 $z = 0$ **时**, $R = R' \Rightarrow \varphi|_{z=0} = 0$

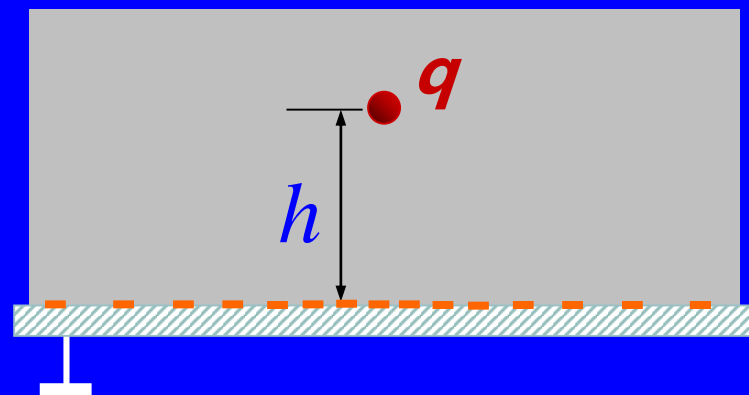
满足原问题的边界条件, 所得的结果是正确的。

上半空间($z \geq 0$) 的电位函数

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} \right] \quad (z \geq 0)$$

导体平面上的感应电荷密度为

$$\rho_s = -\varepsilon \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{qh}{2\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}$$



导体平面上的总感应电荷为

$$\begin{aligned} q_{\text{in}} &= \int_S \rho_s dS = -\frac{qh}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{qh}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho d\phi}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = -q \end{aligned}$$

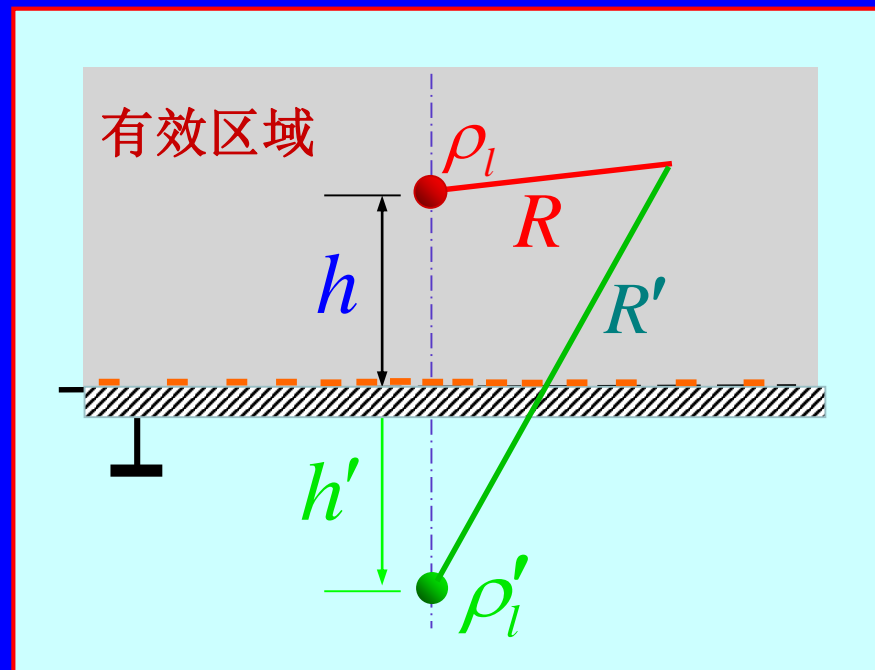
2. 线电荷对无限大接地导体平面的镜像

原问题 $\nabla^2 \varphi = 0, z > 0$, 线电荷处除外; $\varphi|_{z=0} = 0$

镜像线电荷: $\rho'_l = -\rho_l, h' = h$

电位函数 $\varphi = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R'}{R} \quad (z \geq 0)$

当 $z = 0$ 时, $R' = R \longrightarrow \varphi = 0$



满足原问题的边界条件, 所得的解是正确的。

电位函数 $\varphi = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\sqrt{x^2 + (z+h)^2}}{\sqrt{x^2 + (z-h)^2}} \quad (z \geq 0)$

3. 点电荷对相交半无限大接地导体平面的镜像

如图所示，两个相互垂直相连的半无限大接地导体平板，点电荷 q 位于 (d_1, d_2) 处。

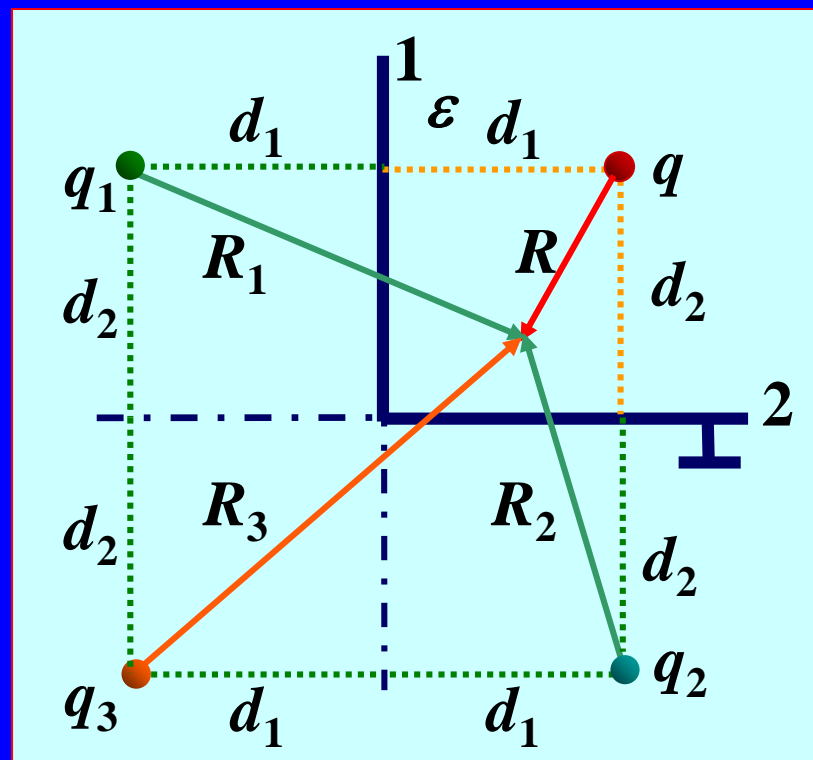
对于平面1，有镜像电荷 $q_1 = -q$ ，位于 $(-d_1, d_2)$

对于平面2，有镜像电荷 $q_2 = -q$ ，位于 $(d_1, -d_2)$

显然， q_1 对平面2以及 q_2 对平面1均不能满足边界条件。

只有在 $(-d_1, -d_2)$ 处再设置一镜像电荷 $q_3 = q$ ，所有边界条件才能得到满足。

电位函数
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$



例 3.5.1 真空中, 电量为 $1 \mu\text{C}$ 的点电荷位于点 $P(0,0,1)$ 处, xOy 平面是一个无限大的接地导体板。(1) 求 z 轴上电位为 10^4 V 的点的坐标; (2) 计算该点的电场强度。

解: (1) 根据镜像法可知上半空间的电位

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+1)^2}} \right]$$

由

$$\varphi(0, 0, z) = \frac{10^{-6}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z-1|} - \frac{1}{|z+1|} \right] = 10^4$$

可解得

$$z_1 = 1.67 \text{ m}, \quad z_2 = 0.45 \text{ m}$$

即在 z 轴上的 $z_1 = 1.67 \text{ m}$ 、 $z_2 = 0.45 \text{ m}$ 两个点的电位皆为 10^4 V 。

(2) 当 $z > 1$ 时, z 轴上的电场强度

$$\mathbf{E}(0, 0, z) = e_z \frac{10^{-6}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z+1)^2} \right]$$

将 $z_1 = 1.67 \text{ m}$ 代入上式,得

$$\mathbf{E}(0,0,z_1) = e_z \frac{10^{-6}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(1.67-1)^2} - \frac{1}{(1.67+1)^2} \right] = e_z 1.88 \times 10^4 \text{ V/m}$$

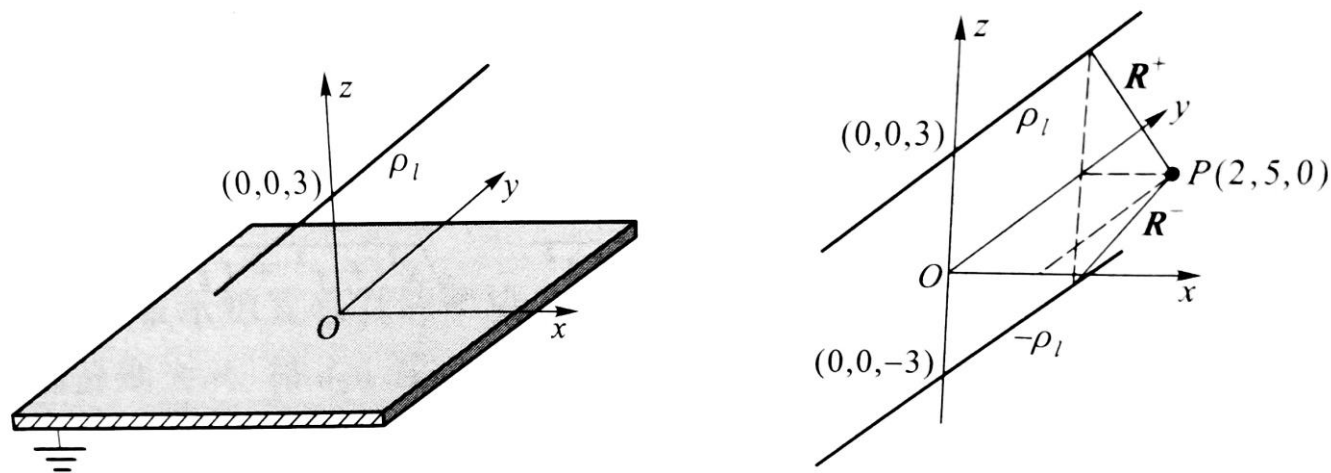
当 $z < 1$ 时, z 轴上任意一点的电场强度

$$\mathbf{E}(0,0,z) = -e_z \frac{10^{-6}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z+1)^2} \right]$$

将 $z_2 = 0.45 \text{ m}$ 代入上式,得

$$\mathbf{E}(0,0,z_2) = -e_z \frac{10^{-6}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(0.45-1)^2} + \frac{1}{(0.45+1)^2} \right] = -e_z 3.41 \times 10^4 \text{ V/m}$$

例 3.5.2 线电荷密度为 $\rho_l = 30 \text{ nC/m}$ 的无限长直导线位于无限大导体平板($z=0$ 处)的上方 $z=3 \text{ m}$ 处,沿 y 轴方向,如图 3.5.7 所示。试求该导体板上的点 $P(2,5,0)$ 处的感应电荷密度。



解: 去掉导体平板,在 $z = -3 \text{ m}$ 处放置线电荷密度为 $\rho'_l = -30 \text{ nC/m}$ 的镜像线电荷替代其作用,如图 3.5.8 所示。这样,点 P 的电场强度为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_+ &= e_{R^+}^+ \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 R^+} = \frac{30 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{2^2 + 3^2}} \left(e_x \frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2}} - e_z \frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \right) \\ &= \frac{30 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0 \times 13} (e_x 2 - e_z 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_- &= e_R^- \frac{\rho'_l}{2\pi\epsilon_0 R^-} = \frac{-30 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{2^2 + 3^2}} \left(e_x \frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2}} + e_z \frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \right) \\
 &= \frac{30 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0 \times 13} (-e_x 2 - e_z 3)
 \end{aligned}$$

故

$$\mathbf{E} = -e_z \frac{30 \times 10^{-9} \times 6}{2\pi\epsilon_0 \times 13}$$

点 P 处的感应电荷面密度则为

$$\rho_S = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D}|_{(2,5,0)} = e_z \cdot (-e_z \epsilon_0 E) = -\frac{180 \times 10^{-9}}{2\pi \times 13} = -2.2 \text{ nC/m}^2$$

3.5.2 导体球面的镜像

1. 点电荷对接地导体球面的镜像

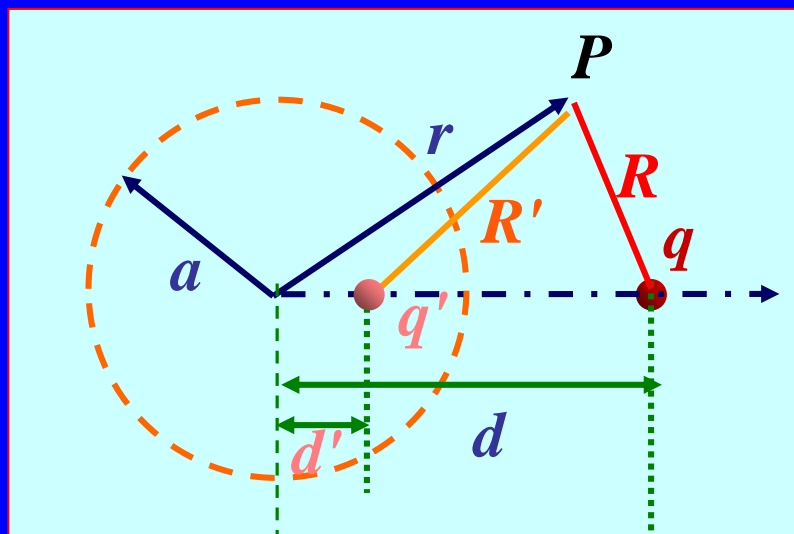
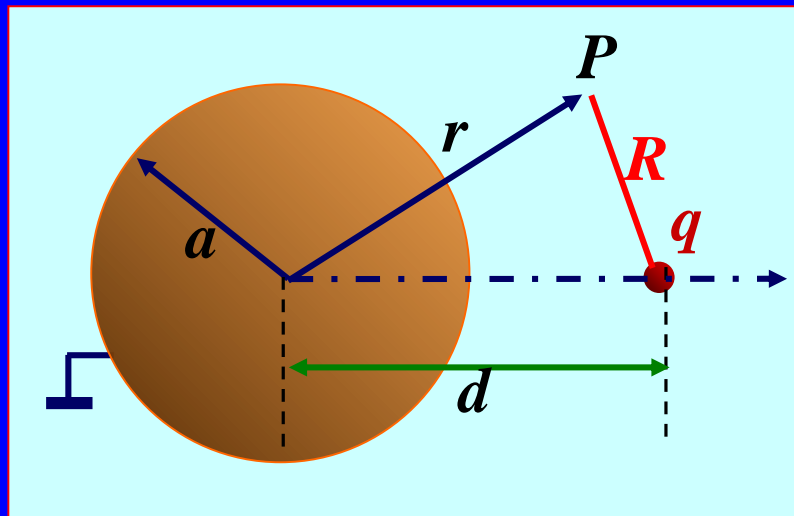
如图所示，点电荷 q 位于半径为 a 的接地导体球外，距球心为 d 。

球面上的感应电荷可用镜像电荷 q' 来等效。 q' 应位于导体球内（显然不影响原方程），且在点电荷 q 与球心的连线上，距球心为 d' 。则有

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q}{R} + \frac{q'}{R'} \right)$$

问题： $d' = ?$ $q' = ?$

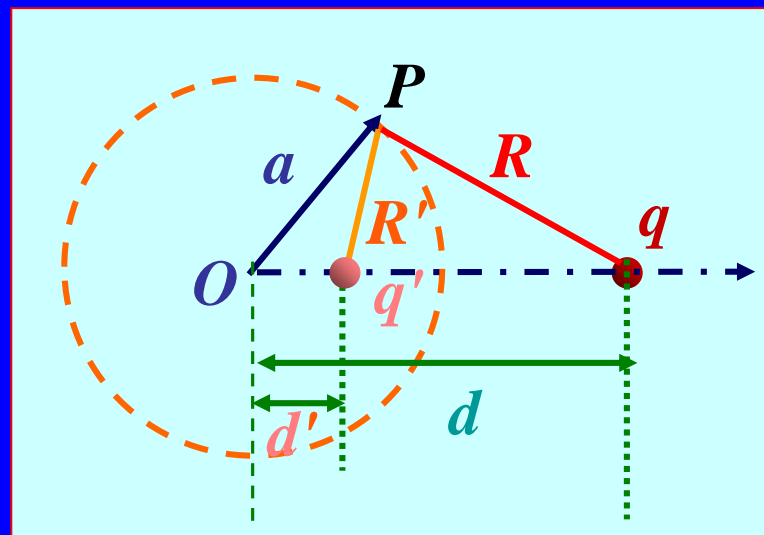
方法：利用导体球面上电位为零确定 d' 和 q' 。



令 $r = a$, 由球面上电位为零,
即 $\varphi = 0$, 得

$$\frac{q}{R} + \frac{q'}{R'} = 0 \rightarrow \frac{R'}{R} = -\frac{q'}{q} = \text{常数}$$

此式应在整个球面上都成立。



条件: 若 $\triangle OqP \sim \triangle Oq'P \rightarrow \frac{R'}{R} = \frac{d'}{a} = \frac{a}{d} = \text{常数}$

$$\Rightarrow d' = \frac{a^2}{d} \quad \leftarrow \text{镜像电荷的位置}$$

$$\frac{q'}{R'} + \frac{q}{R} = 0 \Rightarrow q' = -\frac{R'}{R}q = -\frac{a}{d}q \quad \leftarrow \text{镜像电荷的电量}$$

由于 $\frac{a}{d} < 1 \rightarrow |q'| < |q|$

球外的电位函数为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} - \frac{a}{d\sqrt{r^2 + (a^2/d)^2 - 2r(a^2/d) \cos \theta}} \right] \quad (r \geq a)$$

球面上的感应电荷面密度为

$$\rho_s = -\varepsilon \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{q(d^2 - a^2)}{4\pi a(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}}$$

导体球面上的总感应电荷为

$$q_{\text{in}} = \int_s \rho_s dS = -\frac{q(d^2 - a^2)}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^2 \sin \theta d\theta d\phi}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} = -\frac{a}{d} q$$

可见，导体球面上的总感应电荷也与所设置的镜像电荷相等。

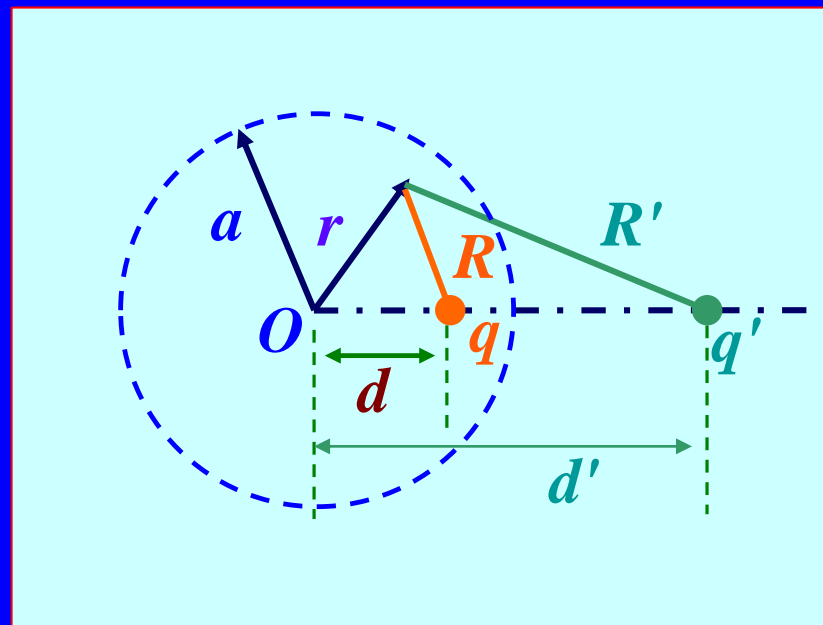
■ 点电荷对接地空心导体球壳的镜像

如图所示接地空心导体球壳的内半径为 a 、外半径为 b ，点电荷 q 位于球壳内，与球心相距为 d ($d < a$)。

由于球壳接地，感应电荷分布在球壳的内表面上。镜像电荷应位于导体球壳外，且在点电荷 q 与球心的连线的延长线上。

与点荷位于接地导体球外同样的分析，可得到

$$q' = -\frac{a}{d}q, \quad d' = \frac{a^2}{d}$$



● $|q'| > |q|$ ，可见镜像电荷的电荷量大于点电荷的电荷量

● 像电荷的位置和电量与外半径 b 无关（为什么？）

球壳内的电位

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} - \frac{a}{d\sqrt{r^2 + (a^2/d)^2 - 2r(a^2/d) \cos \theta}} \right] \quad (r \leq a)$$

感应电荷分布在导体球面的内表面上，电荷面密度为

$$\rho_s = \varepsilon \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = - \frac{q(a^2 - d^2)}{4\pi a(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}}$$

导体球面的内表面上的总感应电荷为

$$q_{\text{in}} = \int_S \rho_s dS = - \frac{q(a^2 - d^2)}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^2 \sin \theta d\theta d\phi}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} = -q$$

可见，在这种情况下，镜像电荷与感应电荷的电荷量不相等。

2. 点电荷对不接地导体球的镜像

点电荷 q 位于一个半径为 a 的不接地导体球外，距球心为 d 。

■ 导体球不接地时的特点：

● 导体球面是电位不为零的等位面；

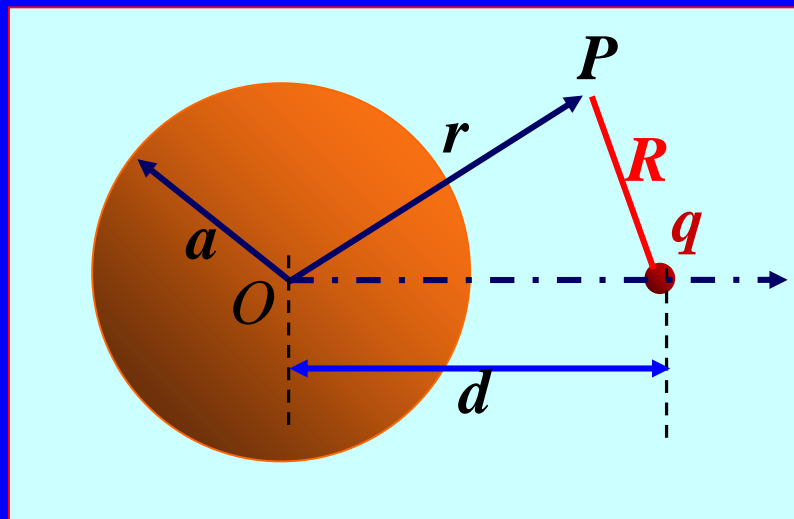
● 球面上既有感应负电荷分布也有感应正电荷分布，但总的感应电荷为零。

■ 采用叠加原理来确定镜像电荷

先设想导体球是接地的，则球面上只有总电荷量为 q' 的感应电荷分布，则

$$q' = -\frac{a}{d}q, \quad d' = \frac{a^2}{d}$$

注意：在这种情况下，点电荷 q 和镜像电荷 q' 使得导体球的电位为零，不满足电位条件，且球上的总感应电荷也不为零。

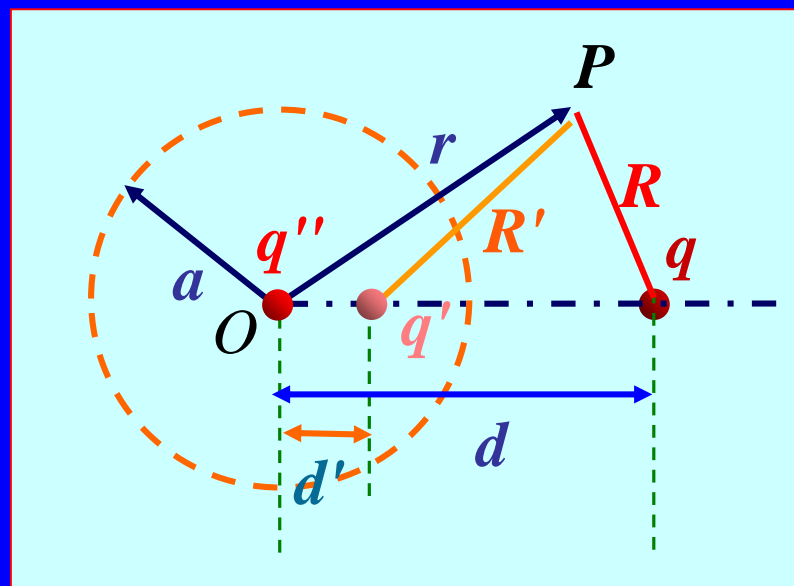


然后断开接地线，并将电荷 $-q'$ 加于导体球上，从而使总电荷为零。为保持导体球面为等位面，所加的电荷 $-q'$ 可用一个位于球心的镜像电荷 q'' 来替代，即

$$q'' = -q' = \frac{a}{d} q$$

则球外任意点的电位为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} + \frac{q'}{R'} + \frac{q''}{r} \right)$$



3.5.3 导体圆柱面的镜像

1. 线电荷对接地导体圆柱面的镜像

问题：如图 1 所示，一根电荷线密度为 ρ_l 的无限长线电荷位于半径为 a 的无限长接地导体圆柱面外，与圆柱的轴线平行且到轴线的距离为 d 。

特点：在导体圆柱面上有感应电荷，圆柱外的电位由线电荷与感应电荷共同产生。

分析方法：镜像电荷是圆柱面内部与轴线平行的无限长线电荷，如图2所示。

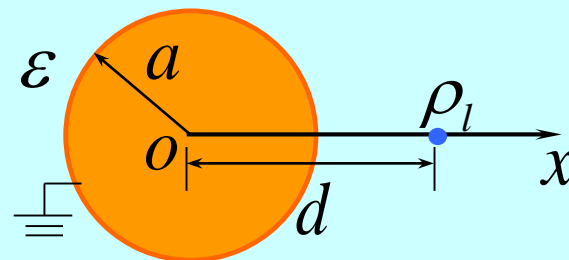


图1 线电荷与导体圆柱

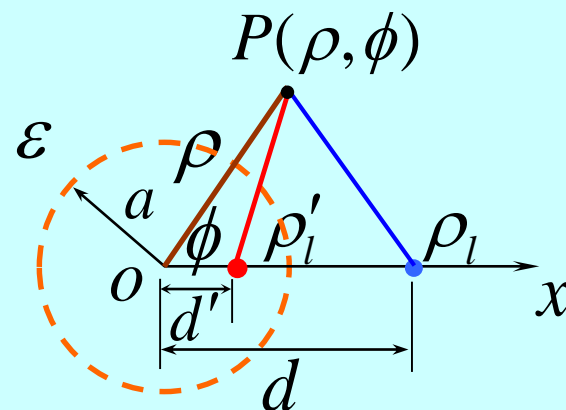


图2 线电荷与导体圆柱的镜像

设镜像电荷的线密度为 ρ'_l ，且距圆柱的轴线为 d' ，则由 ρ'_l 和 ρ_l 共同产生的电位函数

$$\varphi = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + d^2 - 2\rho d \cos \phi}} - \frac{\rho'_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + d'^2 - 2\rho d' \cos \phi}} + C$$

由于导体圆柱接地，所以当 $\rho = a$ 时，电位应为零，即

$$\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{a\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \phi}} - \frac{\rho'_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{\sqrt{a^2 + d'^2 - 2ad' \cos \phi}} + C = 0$$

由于上式对任意的 ϕ 都成立，因此，将上式对 ϕ 求导，可以得到

$$\rho_l d (a^2 + d^2) + \rho'_l d' (a^2 + d'^2) - 2ad d' (\rho_l + \rho'_l) \cos \phi = 0$$

所以有
$$\begin{cases} \rho_l d (a^2 + d^2) + \rho'_l d' (a^2 + d'^2) = 0 \\ \rho_l + \rho'_l = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \rho'_l = -\rho_l \\ d' = \frac{a^2}{d} \end{cases}$$

根据唯一性定理，导体圆柱面外的电位函数为

$$\varphi = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\sqrt{d^2 \rho^2 + a^4 - 2\rho da^2 \cos \phi}}{d \sqrt{\rho^2 + d^2 - 2\rho d \cos \phi}} + C$$

由 $\rho = a$ 时, $\varphi = 0 \longrightarrow C = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{d}{a}$

故
$$\varphi = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\sqrt{d^2 \rho^2 + a^4 - 2\rho da^2 \cos \phi}}{\sqrt{a^2 \rho^2 + a^2 d^2 - 2\rho da^2 \cos \phi}} \quad (\rho \geq a)$$

导体圆柱面上的感应电荷面密度为

$$\rho_s = -\epsilon \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = -\frac{\rho_l (d^2 - a^2)}{2\pi a (a^2 + d^2 - 2ad \cos \phi)}$$

导体圆柱面上单位长度的感应电荷为

$$\rho_{in} = \int_S \rho_s dS = -\frac{\rho_l (d^2 - a^2)}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{a d \phi}{a^2 + d^2 - 2ad \cos \phi} = -\rho_l$$

导体圆柱面上单位长度的感应电荷与所设置的镜像电荷相等。

2. 两平行圆柱导体的电轴

问题：如图1所示，两平行导体圆柱的半径均为 a ，两导体轴线间距为 $2h$ ，单位长度分别带电荷 ρ_l 和 $-\rho_l$ 。

特点：由于两圆柱带电导体的电场互相影响，使导体表面的电荷分布不均匀，相对的一侧电荷密度大，而相背的一侧电荷密度较小。

分析方法：将导体表面上的电荷用线密度分别为 $\pm\rho_l$ 、且相距为 $2b$ 的两根无限长带电细线来等效替代，如图2所示。

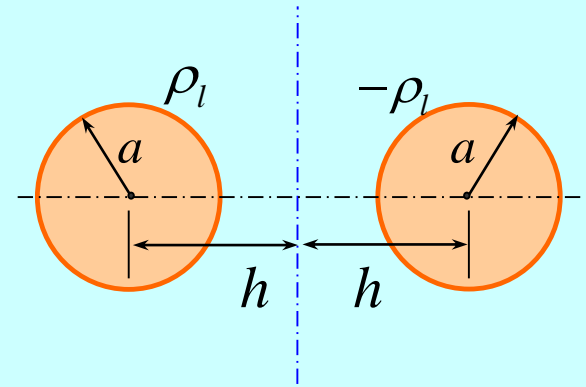


图1 两平行圆柱导体

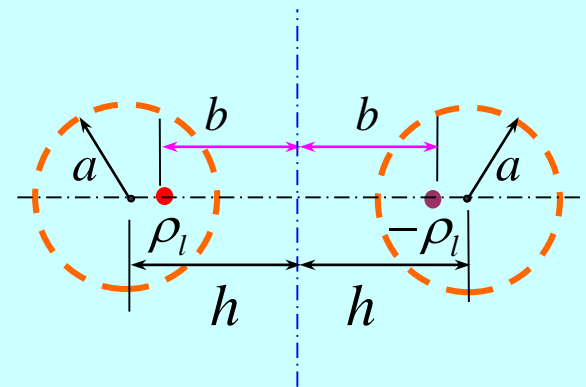


图2 两平行圆柱导体的电轴

利用线电荷与接地导体圆柱面的镜像确定 b 。

由 $d'd = a^2 \longrightarrow (h-b)(h+b) = a^2$

$\longrightarrow b = \sqrt{h^2 - a^2}$

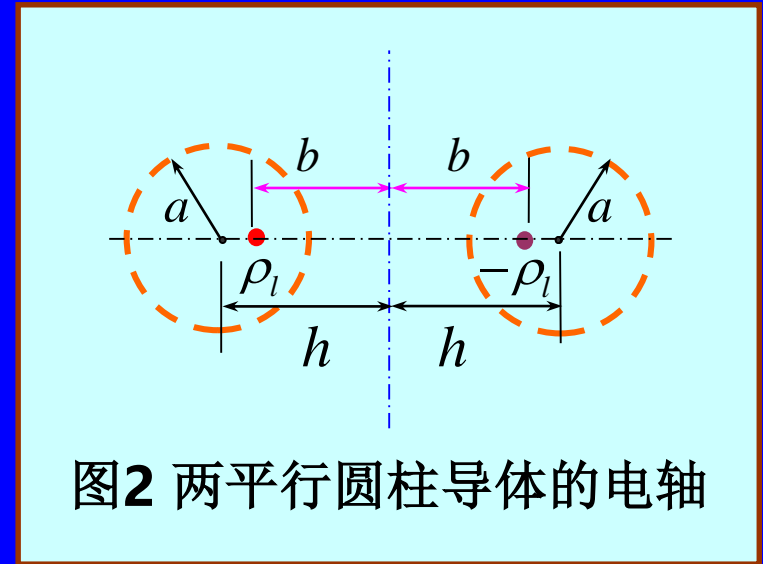


图2 两平行圆柱导体的电轴

通常将带电细线所在的位置称为圆柱导体的电轴，因而这种方法又称为电轴法。

思考：能否用电轴法求解两个带等量异号电荷但不同半径的平行无限长圆柱导体间的电位函数求解问题？（可以！）

例 3.5.3 一根与地面平行架设的圆柱导体, 半径为 a , 悬挂高度为 h , 如图 3.5.16 所示。(1) 证明: 单位长度上圆柱导线与地面间的电容为 $C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\operatorname{arccosh}(h/a)}$; (2) 若导线与地面间的电压为 U_0 , 证明: 地面对单位长度导线的作用力 $F_0 = \frac{\pi\epsilon_0 U_0^2}{[\operatorname{arccosh}(h/a)]^2 (h^2 - a^2)^{1/2}}$ 。

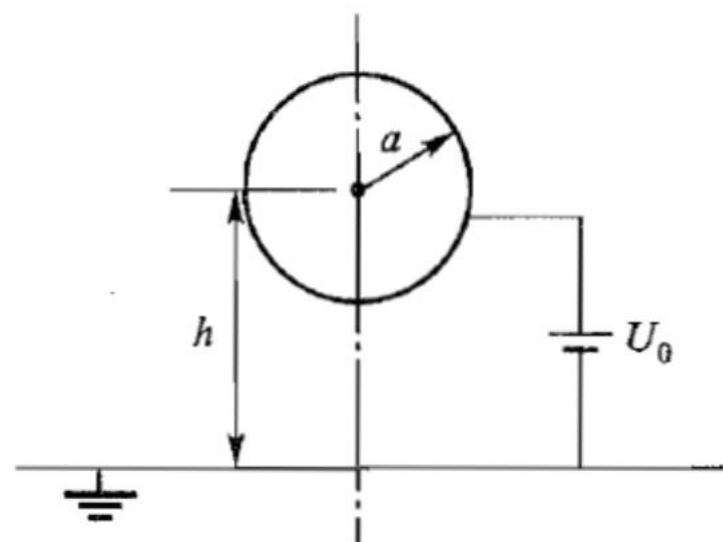


图 3.5.16 平行于地面的
圆柱导线

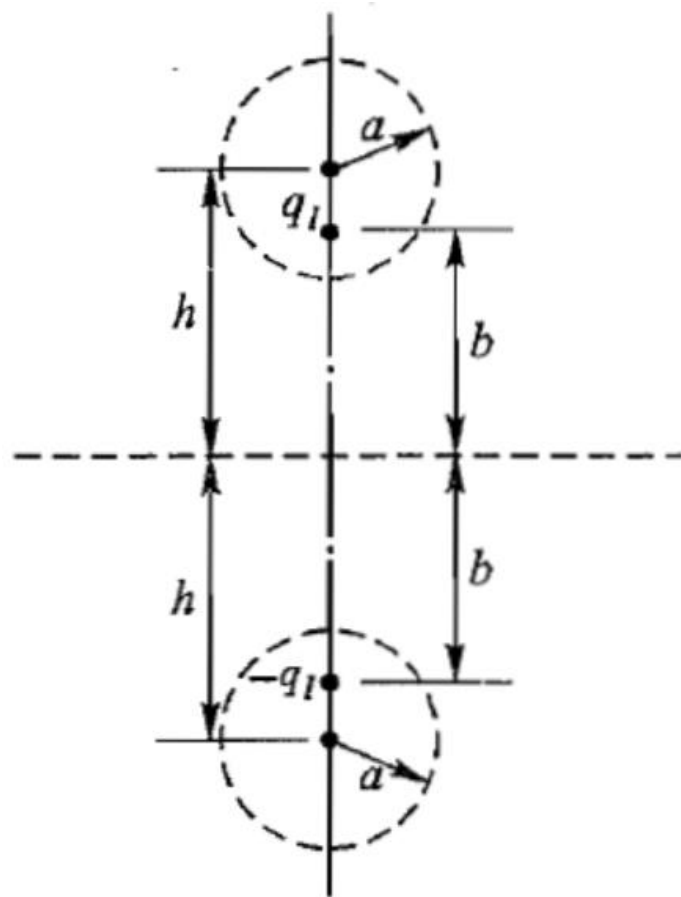


图 3.5.17 平行于地面的圆
柱导线的镜像

解：(1) 设地面为理想导体，地面的影响可用一个镜像圆柱来等效。设圆柱导线单位长度带电荷为 q_l ，则镜像圆柱单位长度带电荷为 $-q_l$ 。根据电轴法，电荷 q_l 和 $-q_l$ 可用位于电轴上的线电荷来等效代替，如图 3.5.17 所示。图中的 $b = \sqrt{h^2 - a^2}$ 。因此，圆柱导线与地面间的电位差为

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{a - (h - b)} - \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{b + (h - a)} \\ &= \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{h^2 - a^2} + (h - a)}{\sqrt{h^2 - a^2} - (h - a)} \\ &= \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{h^2 - a^2} + h}{a} = \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 - 1} + \frac{h}{a} \right]\end{aligned}$$

因 $x > 1$ 时，有 $\ln(\sqrt{x^2 - 1} + x) = \operatorname{arccosh}(x)$ ，故上式可改写为

$$\varphi_0 = \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{arccosh}\left(\frac{h}{a}\right)$$

则单位长度圆柱导线与地面间的电容为

$$C_0 = \frac{q_l}{\varphi_0} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\operatorname{arccosh}(h/a)}$$

(2) 导线单位长度上的电场能量为

$$W_e = \frac{1}{2} C_0 U_0^2 = \frac{\pi\epsilon_0 U_0^2}{\operatorname{arccosh}(h/a)}$$

利用虚位移法,可得地面对导线单位长度的作用力为

$$\begin{aligned} F_0 &= \left. \frac{\partial W_e}{\partial h} \right|_{U_0 \text{ 不变}} = \frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{\pi\epsilon_0 U_0^2}{\operatorname{arccosh}(h/a)} \right] \\ &= \frac{\pi\epsilon_0 U_0^2}{[\operatorname{arccosh}(h/a)]^2 (h^2 - a^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

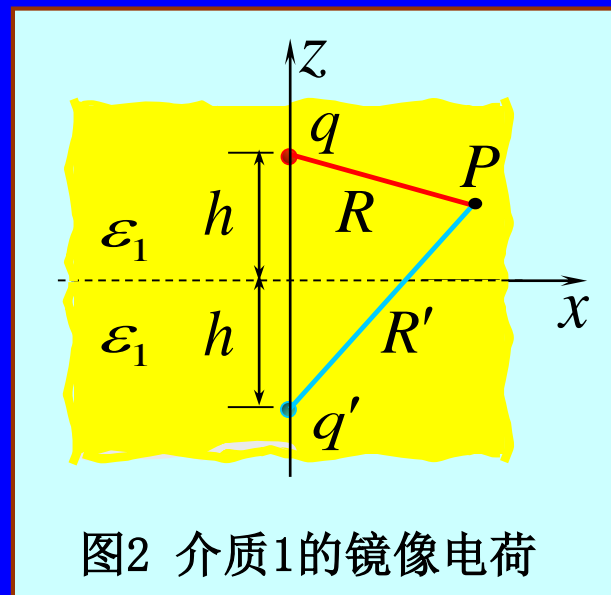
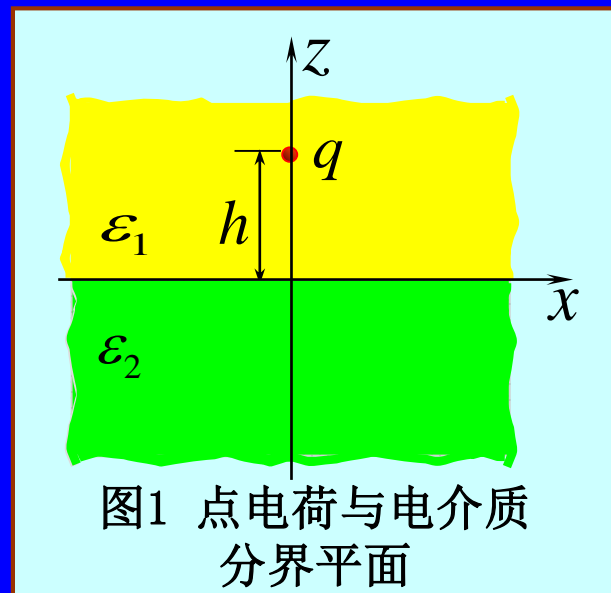
3.5.4 介质平面的镜像

1. 点电荷对电介质分界平面的镜像

问题：如图 1 所示，介电常数分别为 ε_1 和 ε_2 的两种不同电介质的分界面是无限大平面，在电介质 1 中有一个点电荷 q ，距分界平面为 h 。

特点：在点电荷的电场作用下，电介质产生极化，在介质分界面上形成极化电荷分布。此时，空间中任一点的电场由点电荷与极化电荷共同产生。

分析方法：计算电介质 1 中的电位时，用位于介质 2 中的镜像电荷来代替分界面上的极化电荷，并把整个空间看作充满介电常数为 ε_1 的均匀介质，如图 2 所示。

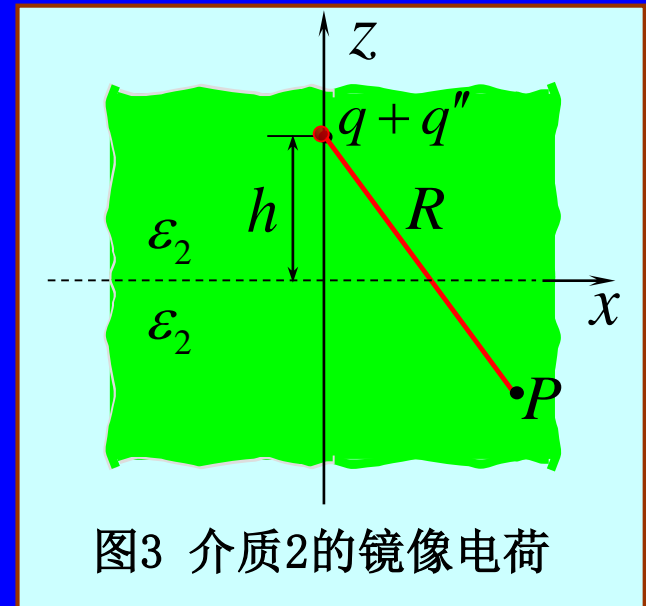


介质1中的电位为

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} \right] \quad (z \geq 0)$$

计算电介质 2 中的电位时，用位于介质 1 中的镜像电荷来代替分界面上的极化电荷，并把整个空间看作充满介电常数为 ϵ_2 的均匀介质，如图 3 所示。介质2中的电位为

$$\varphi_2(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q + q''}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} \quad (z \leq 0)$$



利用电位满足的边界条件

$$\varphi_1 \Big|_{z=0} = \varphi_2 \Big|_{z=0} \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

可得到

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_1} (q + q') = \frac{1}{\varepsilon_2} (q + q'') \\ q - q' = q + q'' \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \\ q'' = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \end{cases}$$

推广：对位于无限大平表面介质分界面附近、且平行于分界面的无限长**线电荷**（单位长度带），其镜像线电荷为

$$\rho'_l = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \rho_l, \quad \rho''_l = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \rho_l$$

2 线电流对磁介质分界平面的镜像

问题：如图1所示，磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种均匀磁介质的分界面是无限大平面，在磁介质1中有一根无限长直线电流平行于分界面，且与分界面相距为 h 。

特点：在直线电流 I 产生的磁场作用下，磁介质被磁化，在分界面上有磁化电流分布，空间中的磁场由线电流和磁化电流共同产生。

分析方法：在计算磁介质1中的磁场时，用置于介质2中的镜像线电流来代替分界面上的磁化电流，并把整个空间看作充满磁导率为 μ_1 的均匀介质，如图2所示。

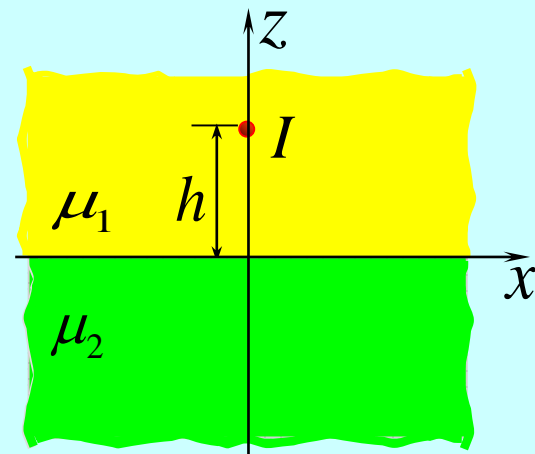


图1 线电流与磁介质分界面

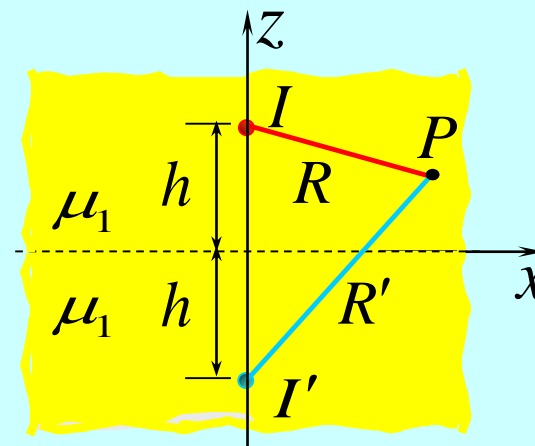


图2 磁介质1的镜像线电流

在计算磁介质2中的磁场时，用置于介质1中的镜像线电流来代替分界面上的磁化电流，并把整个空间看作充满磁导率为 μ_2 的均匀介质，如图3所示。

因为电流沿 y 轴方向流动，所以矢量磁位只有 y 分量，则磁介质1和磁介质2中任一点的矢量磁位分别为

$$A_1 = \frac{\mu_1 I}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z-h)^2}} + \frac{\mu_1 I'}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z+h)^2}} \quad (z \geq 0)$$

$$A_2 = \frac{\mu_2 (I + I'')}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z-h)^2}} \quad (z \leq 0)$$

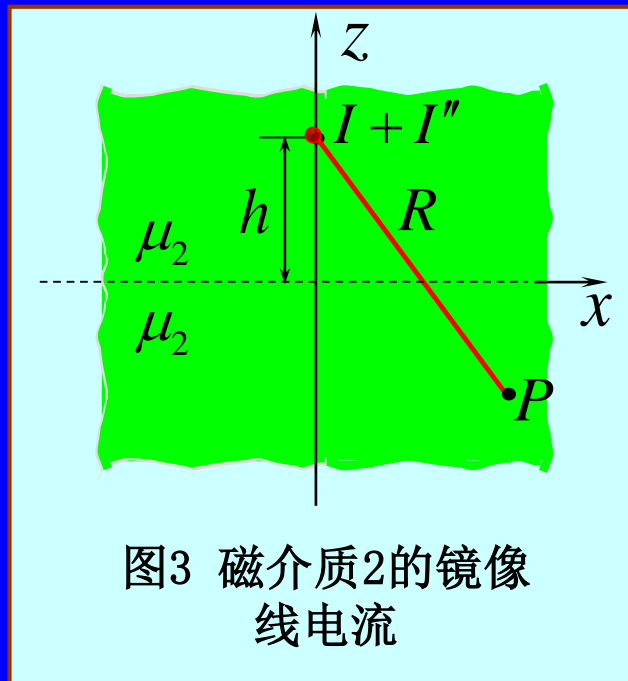


图3 磁介质2的镜像线电流

利用矢量磁位满足的边界条件

$$A_1|_{z=0} = A_2|_{z=0}, \quad \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

可得到

$$\begin{cases} \mu_1(I + I') = \mu_2(I + I'') \\ I - I' = I + I'' \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I \\ I'' = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I \end{cases}$$

故 $\vec{A}_1 = \vec{e}_y \left[\frac{\mu_1 I}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z-h)^2}} + \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)I}{2\pi(\mu_2 + \mu_1)} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z+h)^2}} \right] \quad (z \geq 0)$

$$\vec{A}_2 = \vec{e}_y \left[\frac{\mu_1 \mu_2 I}{\pi(\mu_2 + \mu_1)} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z-h)^2}} \right] \quad (z \leq 0)$$

相应的磁场可由 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 求得。

例 3.5.4 空气中有一根通有电流 I 的直导线平行于铁板平面, 与铁表面距离为 h , 如图 3.5.24 所示。求空气中任意一点的磁场。

解: 设铁板的磁导率 $\mu_2 = \infty$, 则铁板内的磁场 $\mathbf{H}_2 = 0$, 由 $H_{1t} = H_{2t} = 0$, 说明磁感应线垂直于铁板平面。根据镜像法的基本思想, 原场问题可以用直线电流 I 和它的镜像电流 I' 来求得。将 $\mu_2 = \infty$ 代入式(3.5.29)求得镜像电流 $I' = I$, 如图 3.5.25 所示。这样, 上半空间任意一点 $P(x, y)$ 的磁场可以直接将两根直线电流的磁场相加求得; 也可以通过矢量磁位来计算, 但需注意 $y = 0$ 的平面不是等矢位面。

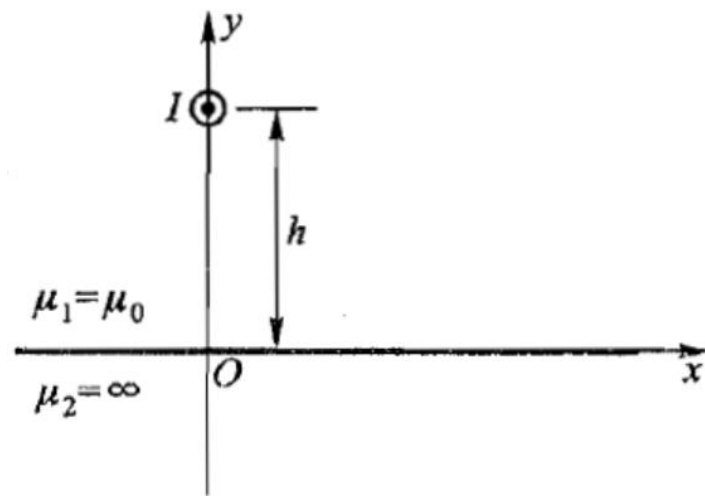


图 3.5.24 直线电流与铁板平面

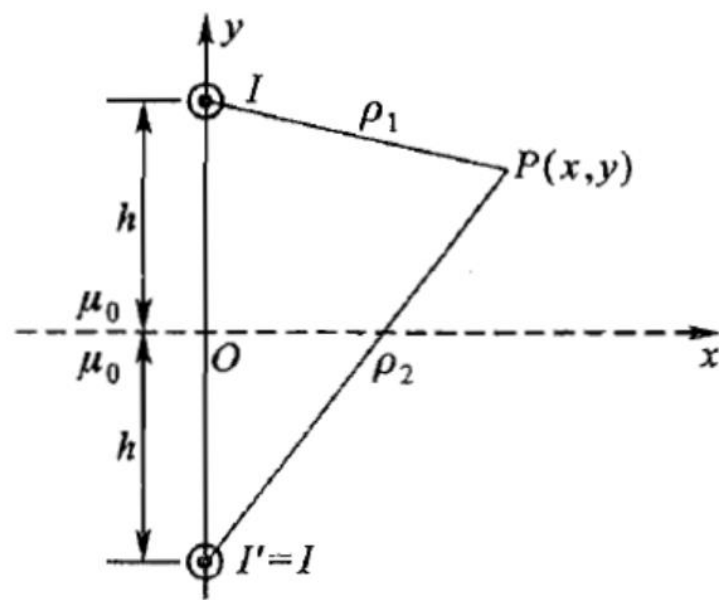


图 3.5.25 直线电流对无限大铁板平面的镜像

利用例 3.3.2 得出的一根无限长直线电流的矢量磁位计算公式(3.3.26)

$$\mathbf{A} = e_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

得到任意一点 $P(x, y)$ 的矢量磁位为

$$\mathbf{A} = e_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right) + e_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho_2}\right) = e_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_0^2}{\rho_1 \rho_2}$$

式中

$$\rho_1 = [x^2 + (y - h)^2]^{1/2}, \quad \rho_2 = [x^2 + (y + h)^2]^{1/2}$$

因此, 点 $P(x, y)$ 的磁感应强度为

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = e_x \frac{\partial A_z}{\partial y} - e_y \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ &= -e_x \frac{\mu I_0}{2\pi} \left[\frac{y+h}{x^2 + (y+h)^2} + \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} \right] + \\ &\quad e_y \frac{\mu I_0}{2\pi} \left[\frac{x}{x^2 + (y+h)^2} + \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} \right] \end{aligned}$$

3.6 分离变量法

本节内容

3.6.1 直角坐标系中的分离变量法

3.6.2 圆柱坐标系中的分离变量法

3.6.3 球坐标系中的分离变量法

分离变量法解题的基本原理

- 分离变量法是求解边值问题的一种经典方法

- 分离变量法解题的基本思路：

将偏微分方程中含有 n 个自变量的待求函数表示成 n 个各自只含一个变量的函数的乘积，代入偏微分方程进行变量分离，把偏微分方程分解成 n 个常微分方程，求出各常微分方程的通解后，把它们线性叠加起来，得到级数形式解，并利用给定的边界条件确定待定常数。

- 分离变量法的理论依据是唯一性定理

- 应用分离变量法求解时，所求场域的边界面应与某一正交曲面坐标系的坐标面重合（坐标系选择原则）。

3.6.1 直角坐标系中的分离变量法

在直角坐标系中，若位函数是 x, y 的函数，沿 z 方向没有变化（与 z 无关），则拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

将 $\varphi(x, y)$ 表示为两个一维函数 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 的乘积，即

$$\varphi(x, y) = X(x)Y(y)$$

将其代入拉普拉斯方程，得

$$Y(y) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0$$

再除以 $X(x)Y(y)$ ，有

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = \lambda = -k^2$$

分离常数

则

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k^2 X(x) = 0 \quad \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} - k^2 Y(y) = 0$$

当 $k = 0$ \longrightarrow $X(x) = X_0(x) = A_0 x + B_0$ $Y(y) = Y_0(y) = C_0 y + D_0$

$\longrightarrow \varphi(x, y) = (A_0 x + B_0)(C_0 y + D_0)$ (1)

当 $k \neq 0$ \longrightarrow $X(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$

$$Y(y) = C \sinh(ky) + D \cosh(ky)$$

于是 $\varphi(x, y) = [A \sin(kx) + B \cos(kx)][C \sinh(ky) + D \cosh(ky)]$ (2)

由于拉普拉斯方程是线性的，所以 (1) 和 (2) 的线性叠加也是拉普拉斯方程的解。

在求解边值问题时，为了满足给定的边界条件，分离常数 k 通常取一系列特定的值 $k_n (n=1,2,\dots)$ ，待求位函数 $\varphi(x, y)$ 则由所有可能的解的线性组合构成，称为位函数的通解。即

$$\varphi(x, y) = (A_0 x + B_0)(C_0 y + D_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)][C_n \sinh(k_n y) + D_n \cosh(k_n y)]$$

若取 $\lambda = k^2$ ，同理可得到

$$\varphi(x, y) = (A_0 x + B_0)(C_0 y + D_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sinh(k_n x) + B_n \cosh(k_n x)][C_n \sin(k_n y) + D_n \cos(k_n y)]$$

通解中的分离常数的选取以及待定系数均由给定的边界条件确定。

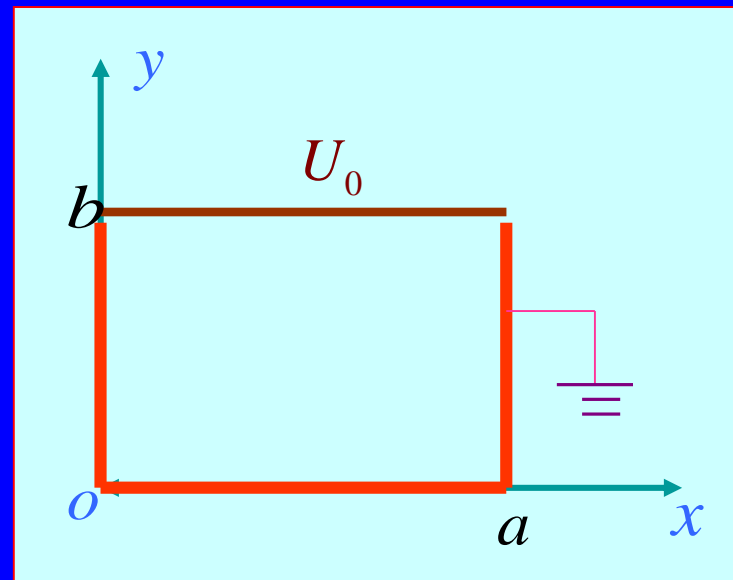
例3.6.1 横截面为矩形的无限长接地金属导体槽，上部有电位为 U_0 的金属盖板；导体槽的侧壁与盖板间有非常小的间隙以保证相互绝缘。试求此导体槽内的电位分布。

解： 位函数满足的方程和边界条件为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\varphi(0, y) = 0, \varphi(a, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq b)$$

$$\varphi(x, 0) = 0, \varphi(x, b) = U_0 \quad (0 \leq x \leq a)$$



因 $\varphi(0, y) = 0$ 、 $\varphi(a, y) = 0$ ，故位函数的通解应取为

$$\varphi(x, y) = (A_0 x + B_0)(C_0 y + D_0) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)][C_n \sinh(k_n y) + D_n \cosh(k_n y)]$$

确定待定系数

$$\varphi(0, y) = 0 \longrightarrow B_0(C_0 y + D_0) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n [C_n \sinh(k_n y) + D_n \cosh(k_n y)] = 0$$

$$\longrightarrow B_0 = 0, B_n = 0$$

$$\longrightarrow \varphi(x, y) = A_0 x(C_0 y + D_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) [C_n \sinh(k_n y) + D_n \cosh(k_n y)]$$

$$\varphi(a, y) = 0 \longrightarrow A_0 a(C_0 y + D_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n a) [C_n \sinh(k_n y) + D_n \cosh(k_n y)] = 0$$

$$\longrightarrow A_0 a = 0, A_n \sin(k_n a) = 0 \longrightarrow A_0 = 0, \sin(k_n a) = 0 \quad A_n \neq 0$$

$$\longrightarrow A_0 = 0, k_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$\longrightarrow \varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) [C_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + D_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)]$$

$$\varphi(x, 0) = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad D_n = 0$$

$$\longrightarrow \quad \varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

$$\varphi(x, b) = U_0 \quad \longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = U_0$$

将 U_0 在区间 $(0, a)$ 上按 $\left\{ \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right\}$ 展开为傅里叶级数, 即

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

其中
$$f_n = \frac{2}{a} \int_0^a U_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \begin{cases} \frac{4U_0}{n\pi} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

由
$$\sum_{n=1}^{\infty} A'_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

比较系数，可得到

$$A'_n = \frac{f_n}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} = \begin{cases} \frac{4U_0}{n\pi \sinh(n\pi b / a)} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

故得到
$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4U_0}{n\pi \sinh(n\pi b / a)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

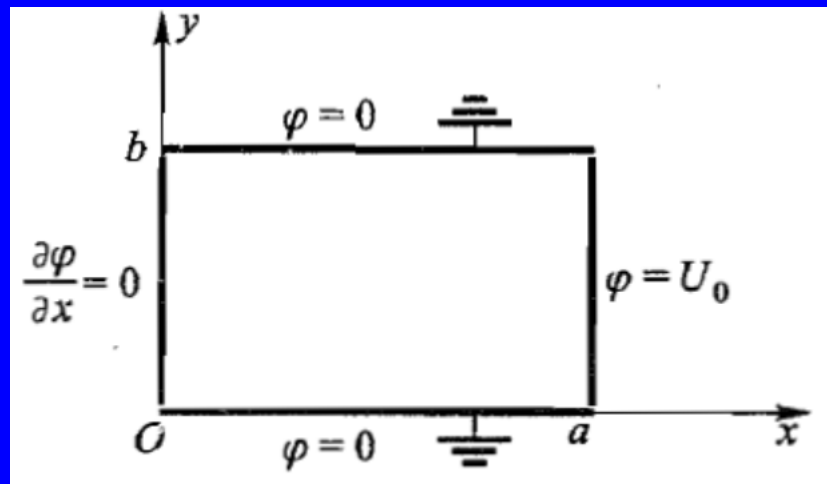
例3.6.2 由四块沿 z 轴方向放置的金属板围成的矩形长槽，四条棱线处有无限小间隙以保持相互绝缘。试求槽内空间的电位分布。

解： 位函数满足的方程和边界条件为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\varphi(x, 0) = 0, \varphi(x, b) = 0 \quad (0 < x < a)$$

$$\frac{\partial \varphi(0, y)}{\partial x} = 0, \varphi(a, y) = U_0 \quad (0 < y < b)$$



因 $\varphi(x, 0) = 0$ 、 $\varphi(x, b) = 0$ ，故位函数的通解应取为

$$\varphi(x, y) = (A_0 x + B_0)(C_0 y + D_0) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sinh(k_n x) + B_n \cosh(k_n x)][C_n \sin(k_n y) + D_n \cos(k_n y)]$$

确定待定系数

$$\varphi(x, 0) = 0 \longrightarrow (A_0 x + B_0)D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sinh(k_n x) + B_n \cosh(k_n x)]D_n = 0$$

$$\longrightarrow D_0 = 0, D_n = 0$$

$$\longrightarrow \varphi(x, y) = (A_0 x + B_0)C_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sinh(k_n x) + B_n \cosh(k_n x)]C_n \sin(k_n y)$$

$$\varphi(x, b) = 0 \longrightarrow (A_0 x + B_0)C_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sinh(k_n x) + B_n \cosh(k_n x)]C_n \sin(k_n b) = 0$$

$$\longrightarrow C_0 = 0, C_n \sin(k_n b) = 0 \quad \longrightarrow C_0 = 0, \sin(k_n b) = 0 \quad C_n \neq 0$$

$$\longrightarrow C_0 = 0, k_n = \frac{n\pi}{b}$$

$$\longrightarrow \varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[A_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b} x\right) + B_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$\frac{\partial \varphi(0, y)}{\partial x} = 0 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n A_n \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) = 0 \longrightarrow A_n = 0$$

$$\longrightarrow \varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n B_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$\varphi(a, y) = U_0 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) = U_0$$

将 U_0 在区间 $(0, b)$ 上按 $\left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \right\}$ 展开为傅里叶级数, 即

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

式中 $f_n = \frac{2}{b} \int_0^b U_0 \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy = \begin{cases} \frac{4U_0}{n\pi} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$

由
$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n \cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) = U_0 == \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

比较系数，可得到

$$E_n = \frac{f_n}{\cosh \frac{n\pi a}{b}} = \begin{cases} \frac{4U_0}{n\pi \cosh \frac{n\pi a}{b}} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

故得到
$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4U_0}{n\pi \cosh \frac{n\pi a}{b}} \cosh\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

3.6.2 圆柱坐标系中的分离变量法

在圆柱坐标系中，若位函数与 z 无关，则拉普拉斯方程为

$$\nabla^2 \varphi(\rho, \phi) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0$$

令其解为 $\varphi(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$

代入方程，可得到 $\Phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + R \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$

各项同乘 $\frac{\rho^2}{R\Phi}$ ，可得到

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = k^2 \quad \leftarrow \text{分离常数}$$

由此可将拉普拉斯方程分离为两个常微分方程

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 \Phi = 0 \qquad \rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} - k^2 R = 0$$

当 $k=0$ 时 $\longrightarrow \Phi(\phi) = A_0 + B_0\phi \quad R(\rho) = C_0 + D_0 \ln \rho$

于是 $\varphi(\rho, \phi) = (A_0 + B_0\phi)(C_0 + D_0 \ln \rho)$

当 $k \neq 0$ 时 $\longrightarrow \Phi(\phi) = A \cos(k\phi) + B \sin(k\phi)$

$$R(\rho) = C\rho^k + D\rho^{-k}$$

于是 $\varphi(\rho, \phi) = [A \cos(k\phi) + B \sin(k\phi)](C\rho^k + D\rho^{-k})$

对于具有圆柱面边界的问题，位函数 $\varphi(\rho, \phi)$ 是 ϕ 的周期函数，即

$$\varphi(\rho, \phi) = \varphi(\rho, \phi + 2\pi)$$

此时，分离常数应取整数值，即 $k=n$ ($n=0, 1, 2, \dots$), 且 $B_0 = 0$

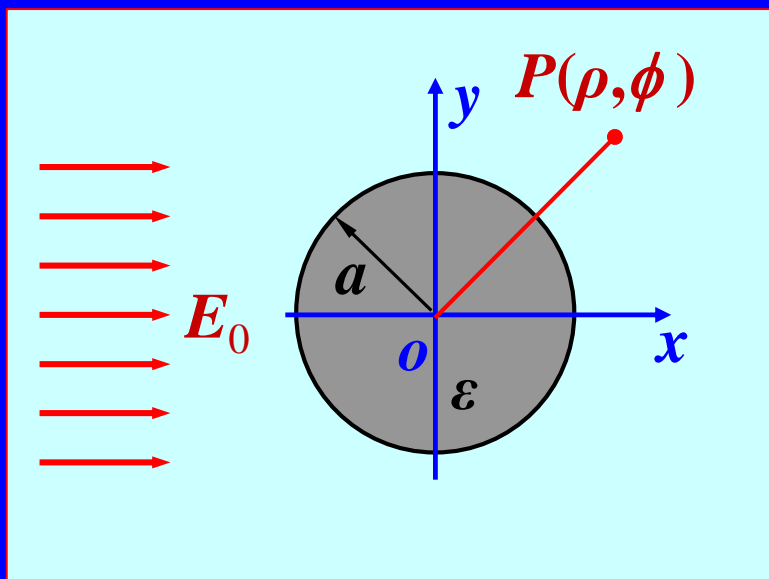
因此，圆柱形区域中二维拉普拉斯方程的通解为

$$\varphi(\rho, \phi) = A_0(C_0 + D_0 \ln \rho) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)](C_n \rho^n + D_n \rho^{-n})$$

式中的待定参数由具体问题所给定的边界条件确定。

例 3.6.3 均匀外电场 $\vec{E}_0 = \vec{e}_x E_0$ 中，有一半径为 a 、介电常数为 ε 的无限长均匀介质圆柱，其轴线与外电场垂直，圆柱外为空气，如图所示。试求介质圆柱内、外的电位函数和电场强度。

解 选取圆柱坐标系，令 z 轴为圆柱轴线，电场强度的方向与 x 轴一致，即 $\vec{E}_0 = \vec{e}_x E_0$



在外电场的作用下，介质圆柱被极化，空间任一点的电位是均匀外电场的电位与极化电荷产生的电位之和。因介质圆柱内外均不存在自由电荷的体密度，所以介质圆柱内外的电位函数都满足拉普拉斯方程。由于介质圆柱体是均匀无限长，而且外电场与圆柱的轴线垂直，所以电位函数与 z 无关。电位的通解为

$$\varphi(\rho, \phi) = C_0 + D_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)](C_n \rho^n + D_n \rho^{-n})$$

设介质圆柱内的电位函数为 φ_1 ，圆柱外的电位函数为 φ_2 ，满足以下边界条件：

① 在圆柱外，当 $\rho \rightarrow \infty$ 时，极化电荷的电场减弱为零，故这些地方的电位函数 φ_2 应与外电场的电位 φ_0 相同，即

$$\varphi_2(\rho, \phi) \rightarrow \varphi_0(\rho, \phi) = -E_0 x = -E_0 \rho \cos \phi \quad (\rho \rightarrow \infty)$$

② 在介质圆柱内的 $\rho = 0$ 处，电位应为有限值，即 $\varphi_1(0, \phi) < \infty$

③ 在介质圆柱的表面 $\rho = a$ 上，电位函数应满足

$$\varphi_1(a, \phi) = \varphi_2(a, \phi), \quad \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho}$$

在介质圆柱外，要满足边界条件①，通解中须取 $n=1$ ，且不含 $\sin n\phi$ 项，即 $C_0 = 0, D_0 = 0, B_n = 0 (n = 1, 2, \dots), A_n = 0 (n \neq 1)$ 且 $A_1 C_1 = -E_0$

于是介质圆柱外的电位函数可写为

$$\varphi_2(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + \frac{D'_2}{\rho} \cos \phi \quad (1)$$

介质圆柱内的电位函数具有与在圆柱外相同的函数形式，

即

$$\varphi_1(\rho, \phi) = C'_1 \rho \cos \phi + \frac{D'_1}{\rho} \cos \phi$$

代入边界条件②，可得 $D'_1 = 0$ ，于是 $\varphi_1(\rho, \phi) = C'_1 \rho \cos \phi \quad (2)$

把 (1) 和 (2) 式代入边界条件③，则有

$$\begin{cases} -E_0 a + D'_2 a^{-1} = C'_1 a \\ \varepsilon_0 E_0 a^2 + \varepsilon_0 D'_2 = -\varepsilon C'_1 a^2 \end{cases}$$

由此解得

$$C'_1 = -\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 \quad D'_2 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 a^2$$

故介质圆柱内、外的电位函数分别为

$$\varphi_1(\rho, \phi) = -\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 \rho \cos \phi \quad (\rho \leq a)$$

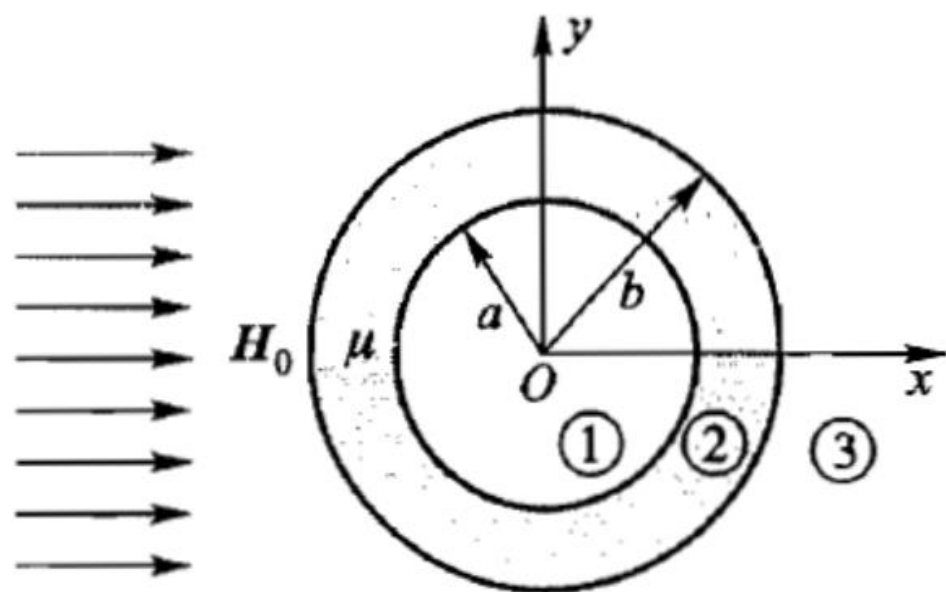
$$\varphi_2(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 a^2 \frac{1}{\rho} \cos \phi \quad (\rho \geq a)$$

介质圆柱内、外的电场强度分别为

$$\vec{E}_1 = -\nabla \varphi_1 = -\vec{e}_\rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} - \vec{e}_\phi \frac{\partial \varphi_1}{\rho \partial \phi} = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \vec{E}_0 \quad (\rho < a) \text{ (均匀场)}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= -\nabla \varphi_2 = -\vec{e}_\rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho} - \vec{e}_\phi \frac{\partial \varphi_2}{\rho \partial \phi} \\ &= \vec{E}_0 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 E_0 (\vec{e}_\rho \cos \phi + \vec{e}_\phi \sin \phi) \quad (\rho > a) \end{aligned}$$

例 3.6.4 在外加均匀恒定磁场 $\mathbf{H}_0 = e_x H_0$ 中, 有一用磁导率为 μ 的磁介质构成的无限长磁介质圆柱形空腔, 其内、外半径分别为 a 和 b , 如图 3.6.5 所示。试求该圆柱形空腔内的磁场分布。



解: 在均匀外磁场中放置一磁导率为 μ 的无限长磁介质圆柱体, 这是一个与前面的例题完全类似的磁场边值问题。由于不存在外加传导电流, 故可用标量磁位 φ_m 来求解磁场。又由于磁介质圆柱为无限长, 故标量磁位与坐标 z 无关, 且满足二维拉普拉斯方程。

按照介质的不同特性,将空间划分为①、②、③三个区域,相应的标量磁位分别为 φ_{m1} 、 φ_{m2} 和 φ_{m3} 。它们应满足的边界条件为:

(1) 在介质圆柱内的 $\rho=0$ 处, φ_{m1} 应为有限值,即

$$\varphi_{m1}(0, \phi) < \infty \quad (3.6.37)$$

(2) 在圆柱腔外,当 $\rho \rightarrow \infty$ 时, φ_{m3} 应趋于 φ_{m0} , 即

$$\varphi_{m3}(\rho, \phi) \rightarrow \varphi_{m0}(\rho, \phi) = -H_0 \rho \cos \phi \quad (3.6.38)$$

(3) 在圆柱空腔的内表面($\rho=a$)上,标量磁位应满足

$$\varphi_{m1}(a, \phi) = \varphi_{m2}(a, \phi), \quad \mu_0 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial \rho} = \mu \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial \rho} \quad (3.6.39)$$

在圆柱空腔的外表面($\rho=b$)上,标量磁位应满足

$$\varphi_{m2}(b, \phi) = \varphi_{m3}(b, \phi), \quad \mu \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial \rho} = \mu_0 \frac{\partial \varphi_{m3}}{\partial \rho} \quad (3.6.40)$$

$$\text{由此可知 } \varphi_{m1}(\rho, \phi) = F_1 \rho \cos \phi \quad (\rho \leq a)$$

$$\varphi_{m2}(\rho, \phi) = F_2 \rho \cos \phi + F_3 \rho^{-1} \cos \phi \quad (a \leq \rho \leq b)$$

$$\varphi_{m3}(\rho, \phi) = -H_0 \rho \cos \phi + F_4 \rho^{-1} \cos \phi \quad (\rho \geq b)$$

将上述表达式代入式(3.6.39)和式(3.6.40),可得到

$$\begin{cases} aF_1 = aF_2 + a^{-1}F_3 \\ \mu_0 F_1 = \mu F_2 - \mu a^{-2}F_3 \\ bF_2 + b^{-1}F_3 = -H_0 b + b^{-1}F_4 \\ \mu F_2 - \mu b^{-2}F_3 = -\mu_0 H_0 - \mu_0 b^{-2}F_4 \end{cases}$$

由此解得 $F_1 = -\frac{4\mu_0\mu H_0}{(\mu_0 + \mu)^2 - (\mu_0 - \mu)^2 a^2/b^2}$

所以,圆柱空腔内的标量磁位为

$$\varphi_{m1}(\rho, \phi) = -\frac{4\mu_0\mu H_0}{(\mu_0 + \mu)^2 - (\mu_0 - \mu)^2 a^2/b^2} \rho \cos \phi \quad (\rho \leq a)$$

故圆柱空腔内的磁场强度为 $\mathbf{H}_1 = -\nabla\varphi_{m1} = -e_\rho \frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial\rho} - e_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial\phi}$

$$= \frac{4\mu_0\mu}{(\mu_0 + \mu)^2 - (\mu_0 - \mu)^2 a^2/b^2} \mathbf{H}_0 \quad (\rho < a)$$

由上式可得到

$$\frac{|\mathbf{H}_1|}{|\mathbf{H}_0|} = \frac{4\mu_0\mu}{(\mu_0 + \mu)^2 - (\mu_0 - \mu)^2 a^2/b^2}$$

若腔体为铁磁材料,则因其相对磁导率 $\mu_r \gg 1$,上式可近似为

$$\frac{|\mathbf{H}_1|}{|\mathbf{H}_0|} \approx \frac{4}{\mu_r(1 - a^2/b^2)}$$

可见, μ_r 愈大,或 a/b 愈小,则空腔内的磁场相对于外部磁场愈小,即磁介质材料圆柱起到磁屏蔽作用。例如,采用低碳钢作磁介质材料, $\mu_r \approx 2\,000$, 取 $\frac{a}{b} = 0.9$, 则得 $\frac{|\mathbf{H}_1|}{|\mathbf{H}_0|} \approx 0.01$, 即空腔内的磁场强度仅为外加磁场的 1%。

3.6.3 球坐标系中的分离变量法

在球坐标系中，对于以极轴为对称轴的问题，位函数与坐标变量 ϕ 无关，则拉普拉斯方程为

$$\nabla^2 \varphi(r, \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0$$

令 $\varphi(r, \theta) = R(r)F(\theta)$

代入上式，得 $F(\theta) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + R(r) \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dF(\theta)}{d\theta} \right) = 0$

上式各项乘以 $\frac{r^2}{R(r)F(\theta)}$ ，可得到

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = - \frac{1}{F(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dF(\theta)}{d\theta} \right) = k^2$$

由此将拉普拉斯方程分解为两个常微分方程

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - k^2 R(r) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dF(\theta)}{d\theta} \right) + k^2 F(\theta) = 0 \quad (2) \text{ 勒让德方程}$$

若分离常数 k 的取值为 $k^2 = n(n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$, 则其解为

$$F(\theta) = A_n P_n(\cos \theta)$$

勒让德多项式 $P_n(\cos \theta)$ 的一般表达式为

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos \theta)^n} [(\cos^2 \theta - 1)^n] \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

当 $k^2 = n(n+1)$ 时, (1) 式的解为

$$R(r) = C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}$$

于是二维拉普拉斯方程的基本解为

$$\varphi(r, \theta) = [C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$$

由 n 取所有可能数值时各解的线性组合，即得到球形区域中二维拉普拉斯方程的通解为

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$$

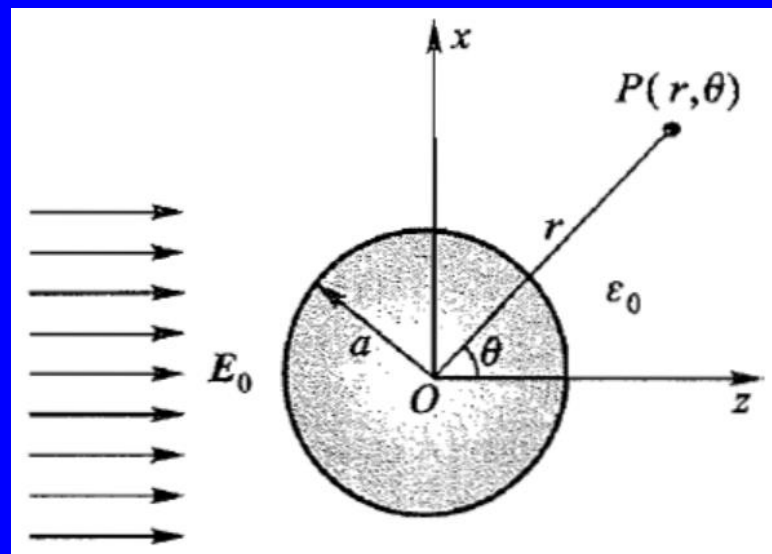
式中的待定参数由具体问题所给定的边界条件确定。

例 3.6.5 在均匀外电场 $\vec{E}_0 = \vec{e}_z E_0$ 中，放置一个半径为 a 的导体棒。设导体棒外介质为空气。试求导体球外的电位函数和电场强度。

解 在外电场作用下，导体球面上会出现感应电荷分布，空间任一点的电位是均匀外电场的电位与感应电荷产生的电位之和。因导体的电荷体密度为零，所以电位函数满足拉普拉斯方程。又由于问题是关于极轴对称的，所以电位函数与变量 ϕ 无关，通解为

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$$

在导体球外，感应电荷的电场随 r 的增加而逐渐减弱，当 $r \rightarrow \infty$ 时减弱为零，故这些地方电位函数与外电场的电位相同，即



$$\varphi(r, \theta) \rightarrow \varphi_0(r, \theta) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta \quad (r \rightarrow \infty)$$

把通解代入上式，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} [C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \rightarrow -E_0 r \cos \theta$$

所以得到 $C_n = 0, D_n = 0 (n \neq 1), C_1 = -E_0$

于是 $\varphi(r, \theta) = (-E_0 r + D_1 r^{-2}) P_1(\cos \theta) = (-E_0 r + D_1 r^{-2}) \cos \theta$

设导体电位为零，即 $r=a$ 时， $\varphi(a, \theta) = 0$ 得

$$(-E_0 a + D_1 a^{-2}) \cos \theta = 0$$

由此得到 $D_1 = a^3 E_0$

故导体球外的电位函数为 $\varphi(r, \theta) = (-r + a^3 r^{-2}) E_0 \cos \theta$

导体球外的电场强度为

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla \varphi = -\vec{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ &= \vec{E}_0 + \left(\frac{a}{r}\right)^3 E_0 (\vec{e}_r 2 \cos \theta + \vec{e}_\theta \sin \theta)\end{aligned}$$

球面上的感应电荷面密度为

$$\rho_s = \varepsilon_0 \vec{e}_r \cdot \vec{E} \big|_{r=a} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$$

球面上感应电荷分布是 θ 的函数，在导体球面的右侧有正的感应电荷，在导体球面的左侧有负的感应电荷。

本章作业:

3.6, 3.7, 3.11, 3.14, 3.15, 3.22,
3.23, 3.26, 3.28, 3.31