

# 第2章 电磁场的基本规律

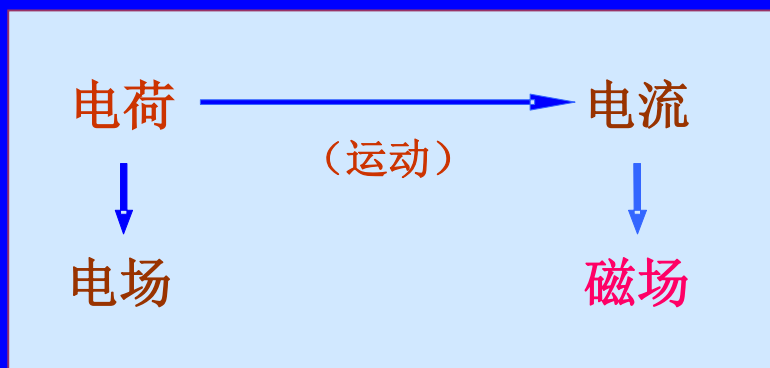
## 本章内容

- 2.1 电荷守恒定律
- 2.2 真空中静电场的基本规律
- 2.3 真空中恒定磁场的基本规律
- 2.4 媒质的电磁特性
- 2.5 电磁感应定律和位移电流
- 2.6 麦克斯韦方程组
- 2.7 电磁场的边界条件

## 2.1 电荷守恒定律

电磁场物理模型中的基本物理量可分为源量和场量两大类。

源量为电荷  $q(\vec{r}', t)$  和电流  $I(\vec{r}', t)$ ，分别用来描述产生电磁效应的两类场源。电荷是产生电场的源，电流是产生磁场的源。



## 本节内容

2.1.1 电荷与电荷密度

2.1.2 电流与电流密度

2.1.3 电荷守恒定律与电流连续性方程

## 2.1.1 电荷与电荷密度

- 电荷是物质基本属性之一，分为正电荷和负电荷。
- 1897年英国科学家**汤姆逊**(J.J.Thomson)在实验中发现了电子。

• 1907 — 1913年间，美国科学家**密立根**(R.A.Miliken)通过油滴实验，精确测定电子电荷的量值为

$$e = 1.602\,177\,33 \times 10^{-19} \quad (\text{单位: C})$$

确认了电荷的量子化概念。换句话说， $e$  是最小的电荷，而任何带电粒子所带电荷都是 $e$  的整数倍。

• 宏观分析电磁现象时，所观测到的是带电体上大量微观带电粒子的总体效应，而带电粒子尺寸远小于带电体尺寸。因此，认为电荷是以一定形式连续分布在带电体上，并用电荷密度描述这种分布。

理想化实际带电系统的电荷分布形态分为四种形式：

点电荷、体分布电荷、面分布电荷、线分布电荷

## 1. 电荷体密度

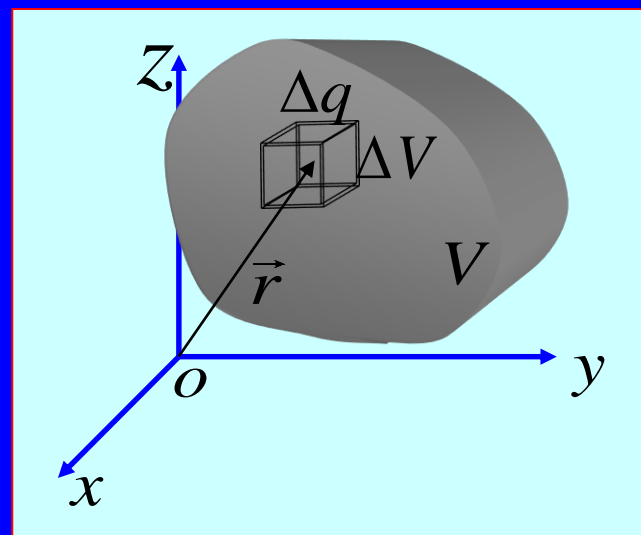
电荷连续分布于体积 $V$ 内，用电荷体密度来描述其分布

$$\rho(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r}, t)}{\Delta V} = \frac{dq(\vec{r}, t)}{dV}$$

单位：C/m<sup>3</sup> (库/米<sup>3</sup>)

根据电荷密度的定义，如果已知某空间区域 $V$ 中的电荷体密度，则区域 $V$ 中的总电荷 $q$ 为

$$q = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV$$



## 2. 电荷面密度

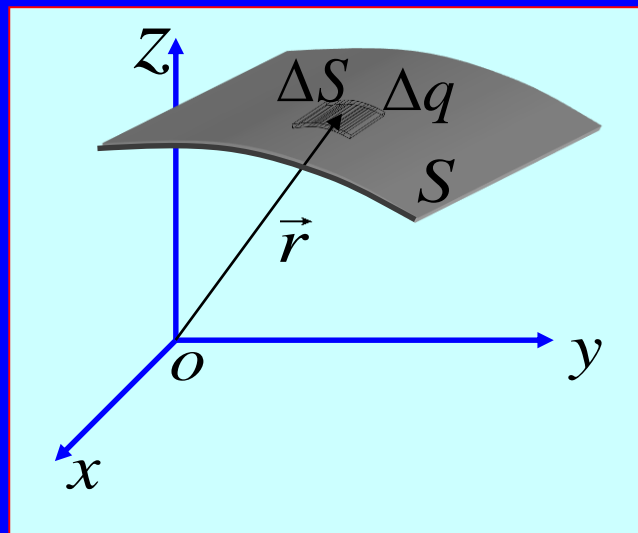
若电荷分布在薄层上，当仅考虑薄层外、距薄层的距离要比薄层的厚度大得多处的电场，而不分析和计算该薄层内的电场时，可将该薄层的厚度忽略，认为电荷是面分布。面分布的电荷可用电荷面密度表示。

$$\rho_s(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r}, t)}{\Delta S} = \frac{dq(\vec{r}, t)}{dS}$$

单位: C/m<sup>2</sup> (库/米<sup>2</sup>)

如果已知某空间曲面 $S$ 上的电荷面密度，则该曲面上的总电荷 $q$ 为

$$q = \int_S \rho_s(\vec{r}, t) dS$$



### 3. 电荷线密度

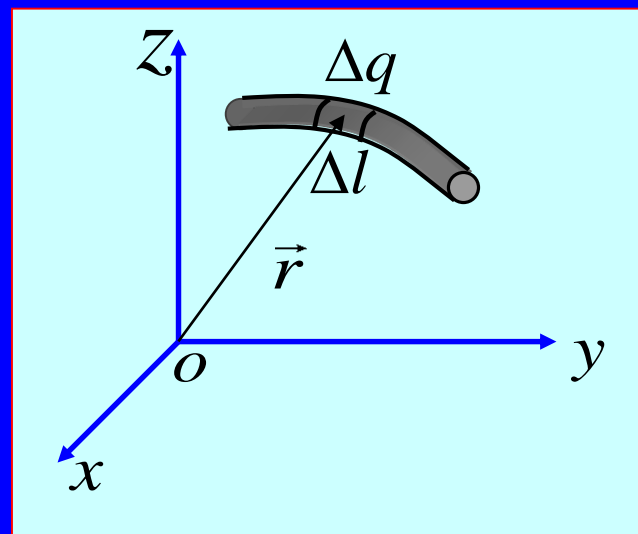
若电荷分布在细线上，当仅考虑细线外、距细线的距离要比细线的直径大得多处的电场，而不分析和计算线内的电场时，可将线的直径忽略，认为电荷是线分布。线分布的电荷可用电荷线密度表示。

$$\rho_l(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r}, t)}{\Delta l} = \frac{dq(\vec{r}, t)}{dl}$$

单位: C / m (库/米)

如果已知某空间曲线上的电荷线密度，则该曲线上的总电荷 $q$ 为

$$q = \int_l \rho_l(\vec{r}, t) dl$$





## 4. 点电荷

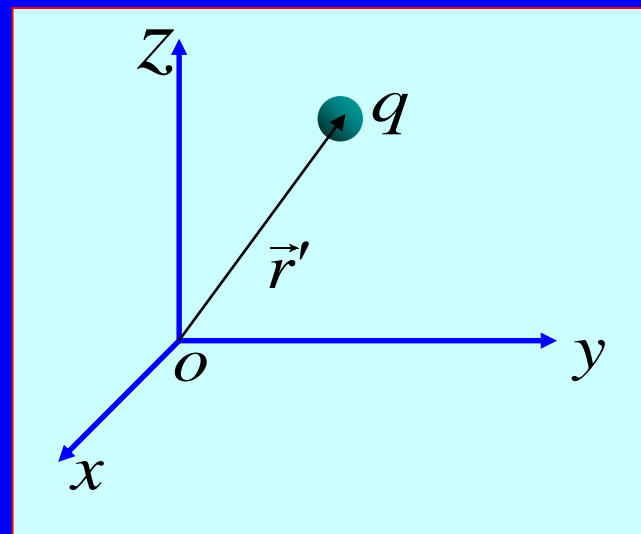
对于总电荷为  $q$  的电荷集中在很小区域  $V$  的情况，当不分析和计算该电荷所在的小区域中的电场，而仅需要分析和计算电场的区域又距离电荷区很远，即场点距源点的距离远大于电荷所在的源区的线度时，小体积  $V$  中的电荷可看作位于该区域中心、电荷为  $q$  的点电荷。

点电荷的电荷密度表示

$$\rho(\vec{r}, t) = q(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

式中 
$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \begin{cases} 0, & \vec{r} \neq \vec{r}' \\ \infty, & \vec{r} = \vec{r}' \end{cases}$$

且 
$$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV = \begin{cases} 0, & \text{积分区域不包括 } \vec{r} = \vec{r}' \text{ 点} \\ 1, & \text{积分区域包括 } \vec{r} = \vec{r}' \text{ 点} \end{cases}$$



## 2.1.2 电流与电流密度

**电流**——电荷的定向运动而形成，用*i* 表示，其大小定义为：  
单位时间内通过某一横截面*S* 的电荷量，即

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta q}{\Delta t} \right) = \frac{dq(t)}{dt}$$

单位: A (安)

电流方向: 正电荷的流动方向

形成电流的条件:

- 存在可以自由移动的电荷;
- 存在电场。

说明: 电流通常是时间的函数，不随时间变化的电流称为**恒定电流**，用*I*表示。

一般情况下，在空间不同的点，电流的大小和方向往往是不同的。在电磁理论中，常用体电流、面电流和线电流来描述电流的分别状态。

### 1. 电流密度矢量

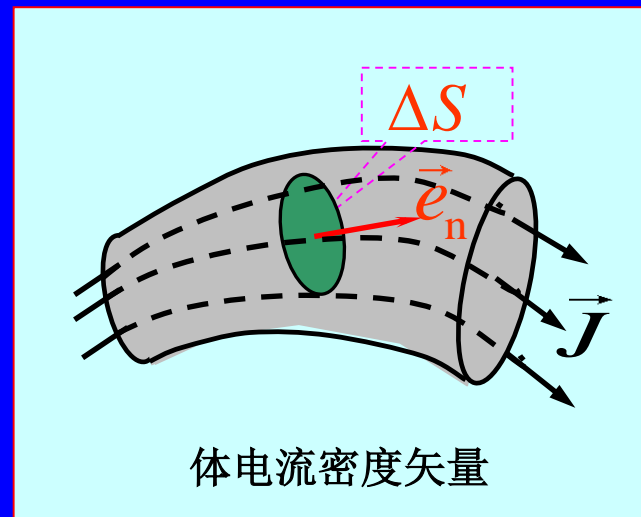
电荷在某一体积内定向运动所形成的电流称为体电流，用电流密度矢量来描述电流分布。在垂直于电荷运动方向上取一面积元  $\Delta \vec{S} = \vec{e}_n \Delta S$ ，流过的电流为  $\Delta i(t)$ ，则

$$\vec{J} = \vec{e}_n \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta S} = \vec{e}_n \frac{di}{dS}$$

单位：A / m<sup>2</sup>（安/米<sup>2</sup>）。

流过任意曲面  $S$  的电流为

$$i = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (\text{电流是电流密度矢量的通量})$$



正电荷运动的方向

空间中某点的电流密度与该点的电荷密度和电荷的运动速度有关。当体密度为  $\rho$  的电荷以速度  $\vec{v}$  运动时，在  $dt$  时间内通过垂直于速度方向的横截面元  $dS$  的电荷为  $dq(t) = \rho v dS dt$ ，于是得到电流密度为

$$J = \frac{dq(t)}{dS dt} = \rho v$$

即  $\vec{J} = \rho \vec{v}$

如果空间中同时存在多种不同的带电粒子，则该点的电流密度为

$$\vec{J} = \sum_i \vec{J}_i = \sum_o \rho_i \vec{v}_i$$

**注意：**当空间中同时存在多种不同的带电粒子时，可能会出现电荷体密度为零，但电流密度矢量却不为零的情况。例如，在均匀导体内，正负电荷的体密度的大小相同，但正负电荷的运动速度不同，所以电荷体密度为零，电流密度矢量不为零！

## 2. 面电流密度矢量

电荷在一个厚度可以忽略的薄层内定向运动所形成的电流称为面电流，用面电流密度矢量  $\vec{J}_S$  来描述其分布。在曲面  $S$  上垂直于电流流动方向取一线元  $\Delta l$ ，流过的电流为  $\Delta i(t)$ ，则

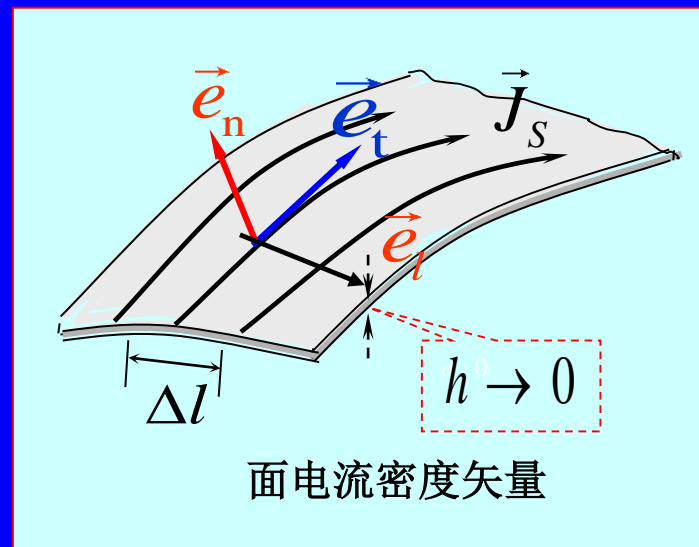
$$\vec{J}_S = \vec{e}_t \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta l} = \vec{e}_t \frac{di}{dl}$$

单位：A/m（安/米）。

正电荷运动的方向

当面密度  $\rho_S$  的电荷在曲面  $S$  上以速度  $\vec{v}$  运动时，其面电流密度矢量为

$$\vec{J}_S = \rho_S \vec{v}$$



在曲面 $S$ 上，通过任意有向曲线  $\vec{l}$  的电流则为

$$i = \int_l \vec{J}_S \cdot \vec{e}_t dl$$

式中  $\vec{e}_t$  为曲面 $S$ 上与曲线  $l$  垂直的方向单位矢量。若曲面 $S$ 的法向单位矢量为  $\vec{e}_n$ ，曲线  $l$  的切向单位矢量为  $\vec{e}_l$ ，由于  $\vec{e}_t = \vec{e}_n \times \vec{e}_l$  则

$$i = \int_l \vec{J}_S \cdot (\vec{e}_n \times \vec{e}_l) dl = \int_l \vec{J}_S \cdot (\vec{e}_n \times d\vec{l})$$

### 3. 线电流

当电荷在一个横截面可忽略的细线中运动时，或电荷束的横截面可忽略时，可把电流看作在一根无限细的线上流动，称为线电流

$$i = \rho_l v$$

### 4. 电流元

对于线电流  $i$ ，沿电流流动的方向取一个线元矢量  $d\vec{l}$ ，将  $i d\vec{l}$  称为电流元。对于体分布电流和面分布电流，其电流元分别为  $\vec{J} dV$  和  $\vec{J}_S dS$

## 2.1.3 电荷守恒定律与电流连续性方程

**电荷守恒定律:**电荷既不能被创造, 也不能被消灭, 只能从物体的一部分转移到另一部分, 或者从一个物体转移到另一个物体。

电荷守恒定律是电磁现象中的基本定律之一。

电流连续性方程

**积分形式** 
$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

流出闭合曲面 $S$ 的电流等于体积 $V$ 内单位时间所减少的电荷量

**微分形式** 
$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

恒定电流的连续性方程

恒定电流是无源场, 电流线是连续的闭合曲线, 既无起点也无终点

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0, \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

## 2.2 真空中静电场的基本规律

**静电场：**由静止电荷产生的电场。

**重要特征：**对位于电场中的电荷有电场力作用。

### 本节内容

2.2.1 库仑定律 电场强度

2.2.2 静电场的散度与旋度

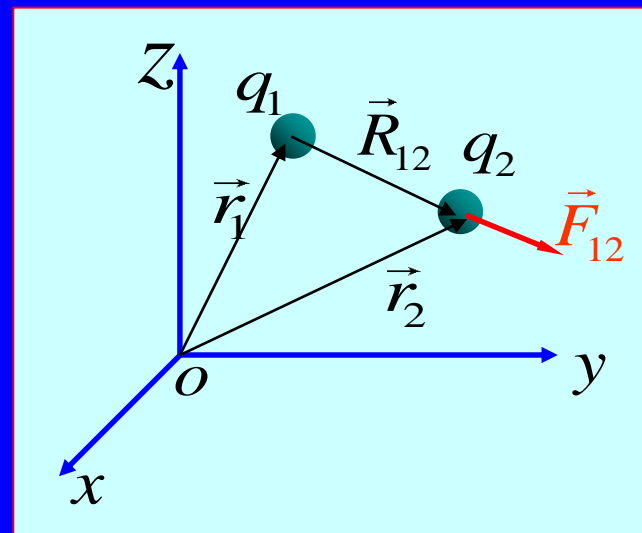


## 2.2.1 库仑定律 电场强度

### 1. 库仑 (Coulomb) 定律(1785年)

真空中静止点电荷  $q_1$  对  $q_2$  的作用力:

$$\vec{F}_{12} = \vec{e}_{12} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} = \frac{q_1 q_2 \vec{R}_{12}}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^3}$$



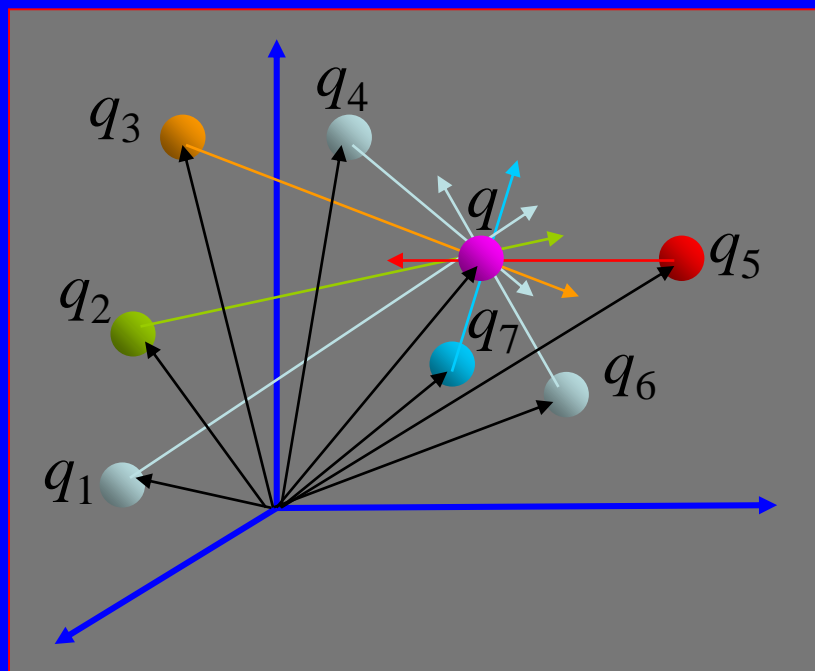
#### ■ 说明:

- 大小与两电荷的电荷量成正比, 与两电荷距离的平方成反比;
- 方向沿 $q_1$ 和 $q_2$ 连线方向, 同性电荷相排斥, 异性电荷相吸引;
- $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ , 满足牛顿第三定律。

- 电场力服从叠加定理

真空中的 $N$ 个点电荷 $q_1$ 、 $q_2$ 、 $\cdots$ 、 $q_N$  (分别位于 $\vec{r}_1$ 、 $\vec{r}_2$ 、 $\cdots$ 、 $\vec{r}_N$ )  
对点电荷 $q$ (位于 $\vec{r}$ ) 的作用力为

$$\vec{F}_q = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{q_i q} = \sum_{i=1}^N \frac{qq_i \vec{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} \quad (\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i)$$



## 2. 电场强度

**电场强度矢量  $\vec{E}$ ——描述电场分布的基本物理量**

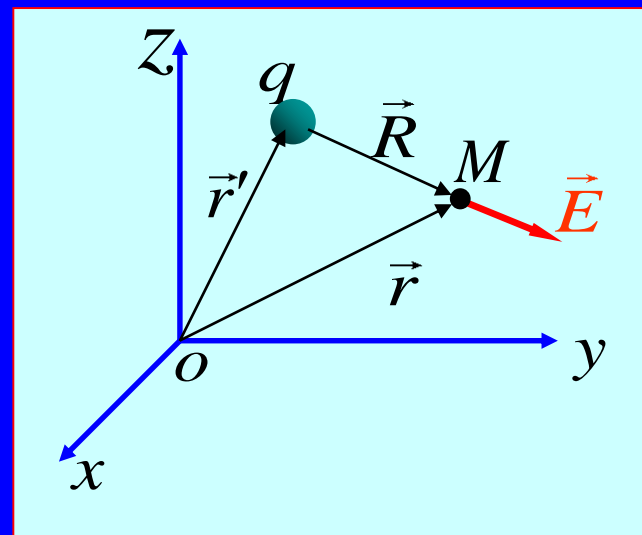
**空间某点的电场强度定义为置于该点的单位点电荷（又称试验电荷）受到的作用力，即**

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0} \quad q_0 \text{——试验正电荷}$$

**根据上述定义，真空中静止点电荷  $q$  激发的电场为**

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}')$$

如果电荷是连续分布呢？

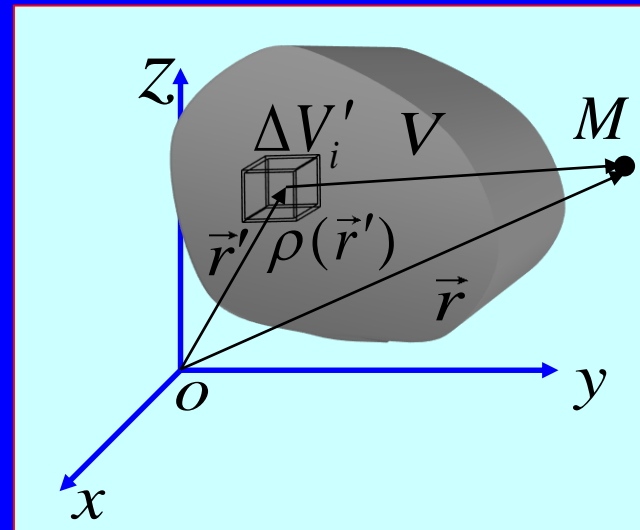


● 体密度为  $\rho(\vec{r})$  的体分布电荷产生的电场强度

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{\substack{\Delta V' \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_i^N \frac{\rho(\vec{r}'_i) \Delta V_i \vec{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dV'$$

小体积元中的电荷产生的电场



● 面密度为  $\rho_s(\vec{r})$  的面分布电荷的电场强度

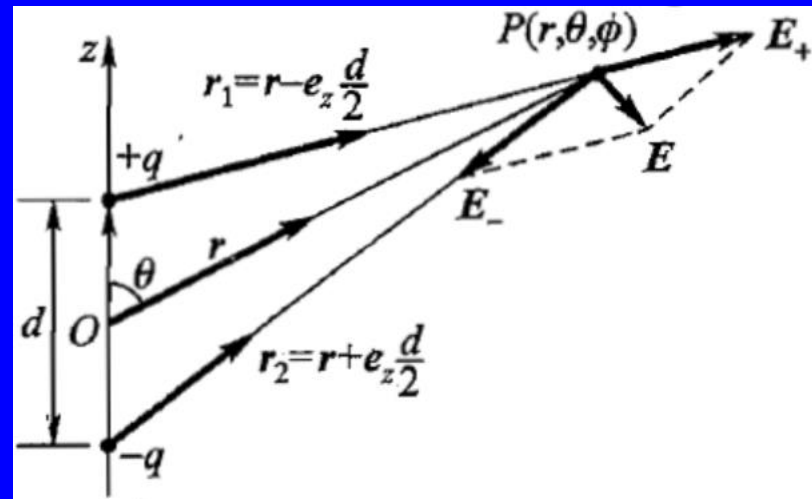
$$\vec{E}(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dS'$$

● 线密度为  $\rho_l(\vec{r})$  的线分布电荷的电场强度

$$\vec{E}(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\rho_l(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dl'$$

**例 2.2.1** 电偶极子是由相距很近、带等值异号的两个点电荷组成的电荷系统。计算其电场强度。

**解** 在球坐标系中，场点 $P$ 的位置矢量为  $\vec{r} = \vec{e}_r r$ ，两个点电荷的位置矢量为  $\vec{r}'_+ = \vec{e}_z \frac{d}{2}$ ,  $\vec{r}'_- = -\vec{e}_z \frac{d}{2}$ ，由叠加原理，得



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{R}_+}{R_+^3} - \frac{\vec{R}_-}{R_-^3} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{r} - \vec{e}_z d/2}{|\vec{r} - \vec{e}_z d/2|^3} - \frac{\vec{r} + \vec{e}_z d/2}{|\vec{r} + \vec{e}_z d/2|^3} \right)$$

当  $r \gg d$ ,  $\left| \vec{r} - \vec{e}_z \frac{d}{2} \right|^{-3} \approx r^{-3} \left( 1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{e}_z d}{r^2} \right)^{-3/2} \approx r^{-3} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\vec{r} \cdot \vec{e}_z d}{r^2} \right)$

$$\left| \vec{r} + \vec{e}_z \frac{d}{2} \right|^{-3} \approx r^{-3} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{\vec{r} \cdot \vec{e}_z d}{r^2} \right)$$

所以点 $P$ 处的电场强度近似为

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( 3 \frac{\vec{r} \cdot \vec{e}_z d}{r^2} \vec{r} - \vec{e}_z d \right)$$

引入电偶极矩  $\vec{P} = \vec{e}_z P = \vec{e}_z qd$  , 于是

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( 3 \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}}{r^2} \vec{r} - \vec{P} \right)$$

在球坐标系中,  $\vec{P} = \vec{e}_z P = P(\vec{e}_r \cos \theta - \vec{e}_\theta \sin \theta)$  , 于是

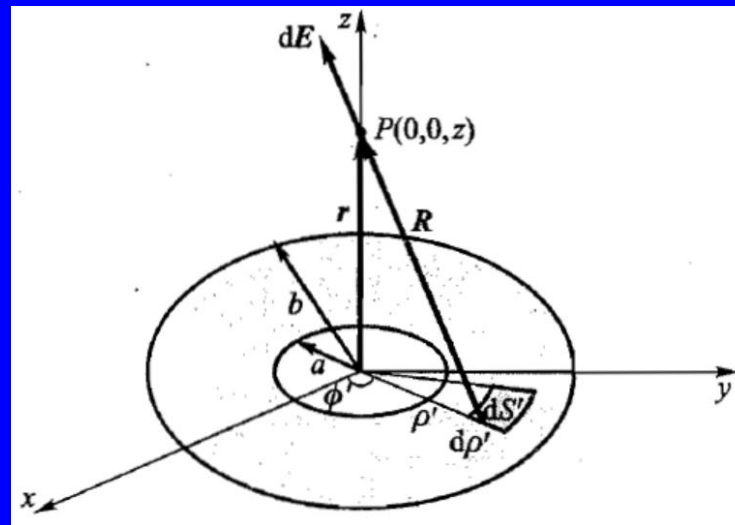
$$\vec{r} \cdot \vec{P} = \vec{e}_r r \cdot P(\vec{e}_r \cos \theta - \vec{e}_\theta \sin \theta) = rP \cos \theta$$

故

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\vec{e}_r 2 \cos \theta + \vec{e}_\theta \sin \theta)$$

**例 2.2.2** 计算均匀带电的环形薄圆盘轴线上任意点的电场强度。

**解：** 如图所示，环形薄圆盘的内半径为 $a$ 、外半径为 $b$ ，电荷面密度为 $\rho_s$ 。在环形薄圆盘上取面积元 $dS' = \rho' d\rho' d\phi'$ ，其位置矢量为 $\vec{r}' = \vec{e}_\rho \rho'$ ，它所带的电量为 $dq = \rho_s dS' = \rho_s \rho' d\rho' d\phi'$ 。而薄圆盘轴线上的场点 $P(0,0,z)$  的位置矢量为 $\vec{r} = \vec{e}_z z$ ，因此有



均匀带电的环形薄圆盘

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_z z - \vec{e}_\rho \rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \rho' d\rho' d\phi'$$

由于 
$$\int_0^{2\pi} \vec{e}_\rho d\phi' = \int_0^{2\pi} (\vec{e}_x \cos \phi' + \vec{e}_y \sin \phi') d\phi' = 0$$

故 
$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{e}_z \frac{\rho_s z}{2\epsilon_0} \int_a^b \frac{\rho' d\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} = \vec{e}_z \frac{\rho_s z}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(z^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{1}{(z^2 + b^2)^{1/2}} \right]$$

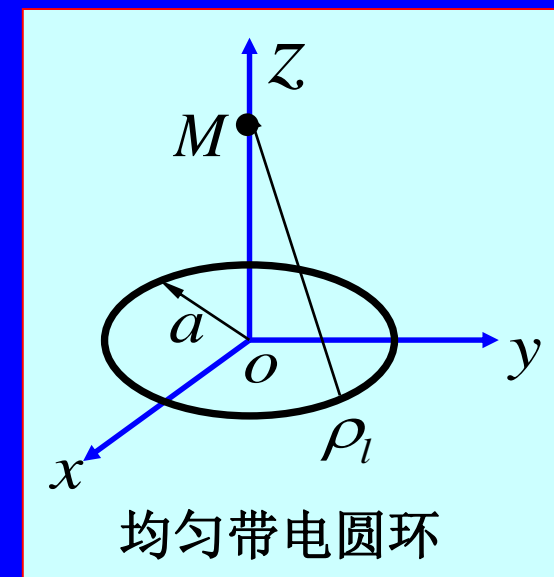
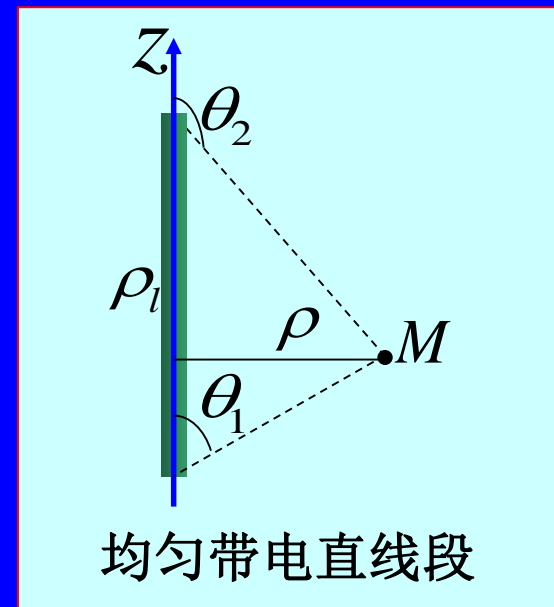
● 均匀带电直线段的电场强度：

$$\begin{cases} E_{\rho} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0\rho} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \\ E_z = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0\rho} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \end{cases} \quad (\text{有限长})$$

$$E_{\rho} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho} \quad (\text{无限长})$$

● 均匀带电圆环轴线上的电场强度：

$$E_z(0,0,z) = \frac{a\rho_l z}{2\epsilon_0(a^2 + z^2)^{3/2}}$$





## 2.2.2 静电场的散度与旋度

### 1. 静电场散度与高斯定理

#### (1) 静电场的散度 (微分形式)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{R}}{R^3} \rho(\vec{r}') dV'$$

利用  $\nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$  得 
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \nabla \left( \frac{1}{R} \right) dV'$$

两边取散度, 得 
$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \nabla \cdot \left[ -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \nabla \left( \frac{1}{R} \right) dV' \right]$$

由于微分算符时对场点  $\vec{r}$  的坐标求导, 积分是对源点  $\vec{r}'$  的坐标进行, 故两者可交换顺序, 所以

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \nabla \cdot \nabla \left( \frac{1}{R} \right) dV' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) dV'$$

利用  $\nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ , 上式变为

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV'$$

利用  $\delta$  函数的性质, 可得  $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & (\vec{r} \text{ 在区域 } V \text{ 外}) \\ \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} & (\vec{r} \text{ 在区域 } V \text{ 内}) \end{cases}$

由于电荷分布在区域  $V$  内, 故可将上式写为  $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$

## (2) 静电场的高斯定理 (积分形式)

对  $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$  两边同时取体积分, 则有

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV = \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} dV$$

由于  $\int_V \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$  得  $\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV$

高斯定理表明: 静电场是有源场, 电场线起始于正电荷, 终止于负电荷。

## 2. 静电场旋度与环路定理

### (1) 静电场的旋度 (微分形式)

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \nabla \left( \frac{1}{R} \right) dV' \longrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' \right]$$

两边取旋度, 有  $\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \times \nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' \right]$

由于任意一个标量函数的梯度的旋度恒为零, 则得

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (\text{静电场是无旋场})$$

### (2) 静电场的环路定理 (积分形式)

将上式对任意曲面 $S$ 求积分, 并利用斯托克斯定理, 得

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = 0$$

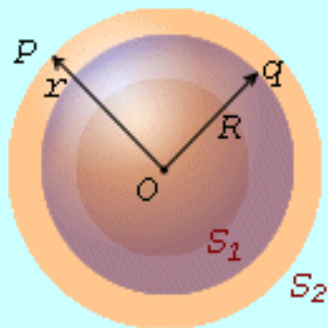
**环路定理表明: 静电场是无旋场, 是保守场, 电场力做功与路径无关。**

### 3. 利用高斯定理计算电场强度

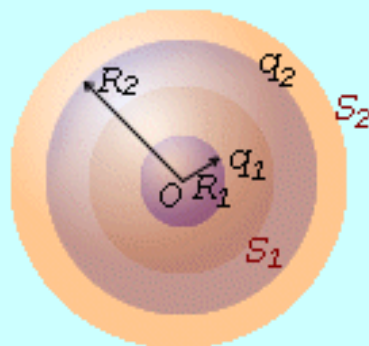
在电场分布具有一定对称性的情况下，可以利用高斯定理计算电场强度。

具有以下几种对称性的场可用高斯定理求解：

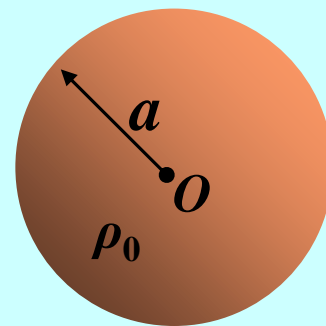
- 球对称分布：包括均匀带电的球面，球体和多层同心球壳等。



带电球壳

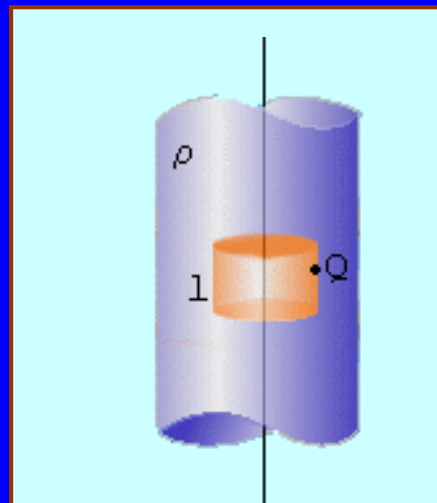
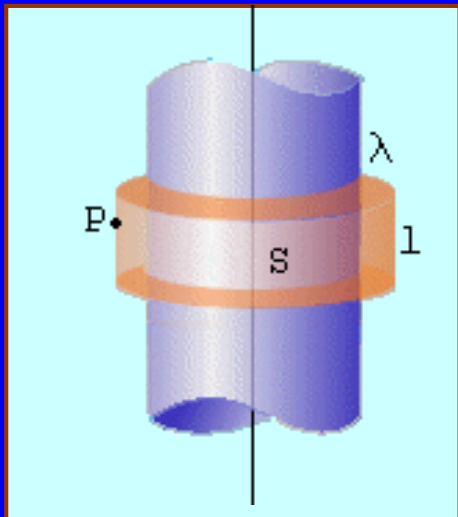


多层同心球壳

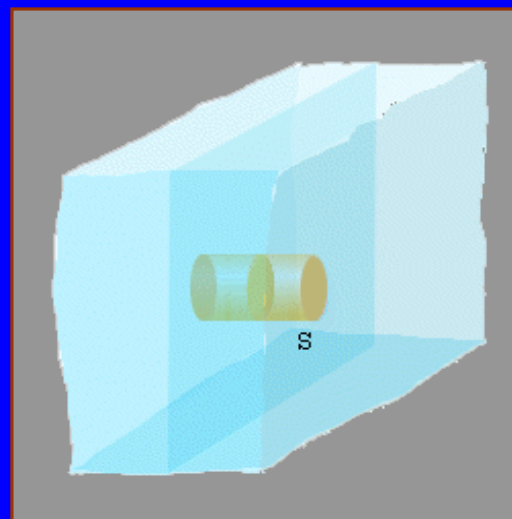
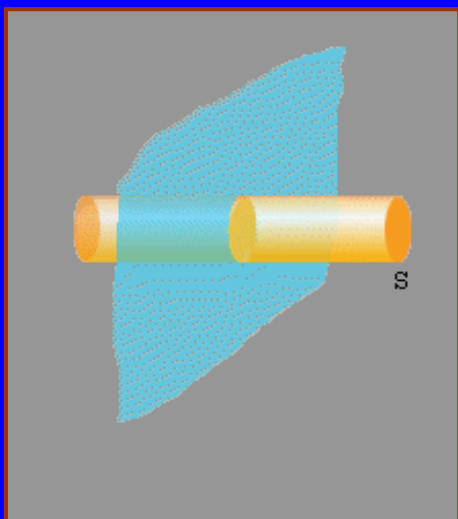


均匀带电球体

- 轴对称分布：如无限长均匀带电的直线，圆柱面，圆柱壳等。



- 无限大平面电荷：如无限大的均匀带电平面、平板等。



**例2.2.3** 半径为 $a$ 的球形区域内充满分布不均匀的体电荷，其体密度为 $\rho(\vec{r})$ 。已知电场强度矢量为  $\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{e}_r(r^3 + Ar^2), & r < a \\ \vec{e}_r(a^5 + Aa^4)r^{-2}, & r > a \end{cases}$  式中 $A$ 为常数，试求电荷体密度。

**解：**由  $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$  得  $\rho(\vec{r}) = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r})$

在球坐标系中  $\rho(\vec{r}) = \varepsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_r)$

在 $r < a$ 的区域内  $\rho(\vec{r}) = \varepsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 (r^3 + Ar^2)] = \varepsilon_0 (5r^2 + 4Ar)$

在 $r > a$ 的区域内  $\rho(\vec{r}) = \varepsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 (a^5 + Aa^4)r^{-2}] = 0$

可见，体密度电荷只分布在 $r < a$ 的球形区域内，球外无电荷分布。

## 2.3 真空中恒定磁场的基本规律

### 本节内容

2.3.1 安培力定律 磁感应强度

2.3.2 恒定磁场的散度与旋度

## 2.3.1 安培力定律 磁感应强度

### 1. 安培力定律

安培对电流的磁效应进行了大量的实验研究，在 1820 年设计并完成了电流相互作用的精巧实验，得到了电流相互作用力公式，称为安培力定律。

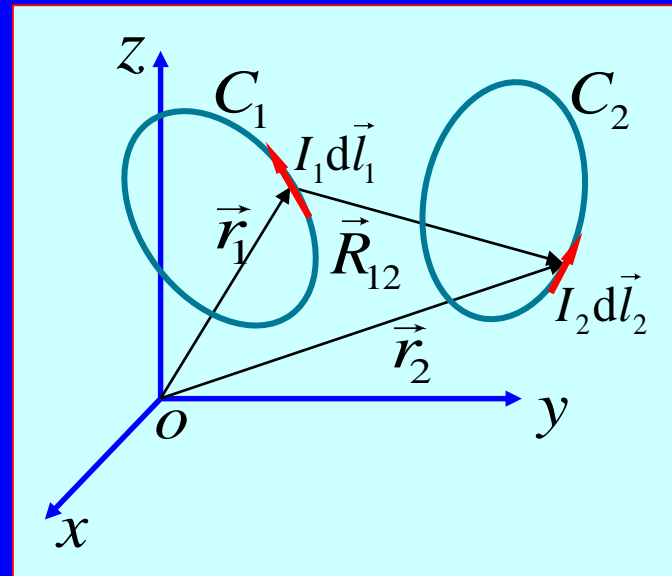
实验表明，真空中的载流回路  $C_1$  对载流回路  $C_2$  的作用力

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{12})}{R_{12}^3}$$

式中  $\vec{R}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$      $R_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$

- 载流回路  $C_2$  对载流回路  $C_1$  的作用力  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

满足牛顿  
第三定律



安培力定律



## 2. 磁感应强度 $\vec{B}$

电流在其周围空间中产生磁场，描述磁场分布的基本物理量是磁感应强度  $\vec{B}$ ，单位为T（特斯拉）。

磁场的重要特征是对场中的电流有磁场力作用，载流回路  $C_1$  对载流回路  $C_2$  的作用力是回路  $C_1$  中的电流  $I_1$  产生的磁场对回路  $C_2$  中的电流  $I_2$  的作用力。

根据安培力定律，有

$$\vec{F}_{12} = \oint_{C_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{12}}{R_{12}^3} \right) = \oint_{C_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{12}(\vec{r}_2)$$

其中  $\vec{B}_{12}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{12}}{R_{12}^3}$

电流  $I_1$  在电流元  $I_2 d\vec{l}_2$  处产生的磁感应强度

## 任意电流回路 $C$ 产生的磁感应强度

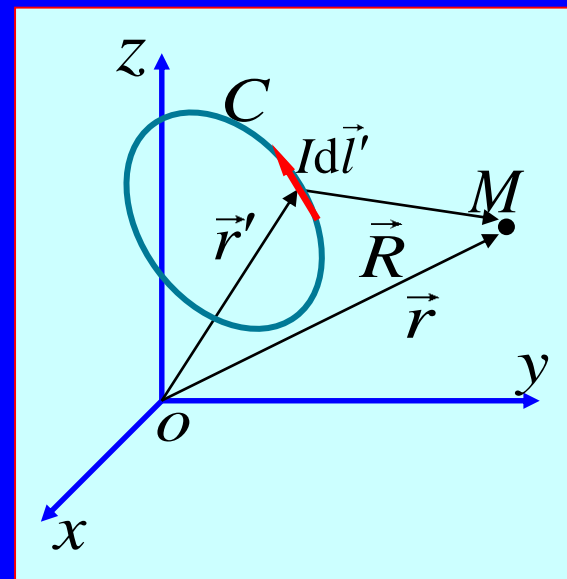
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Id\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3} \quad (\text{毕奥-萨伐尔定律})$$

## 体电流产生的磁感应强度

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dV'$$

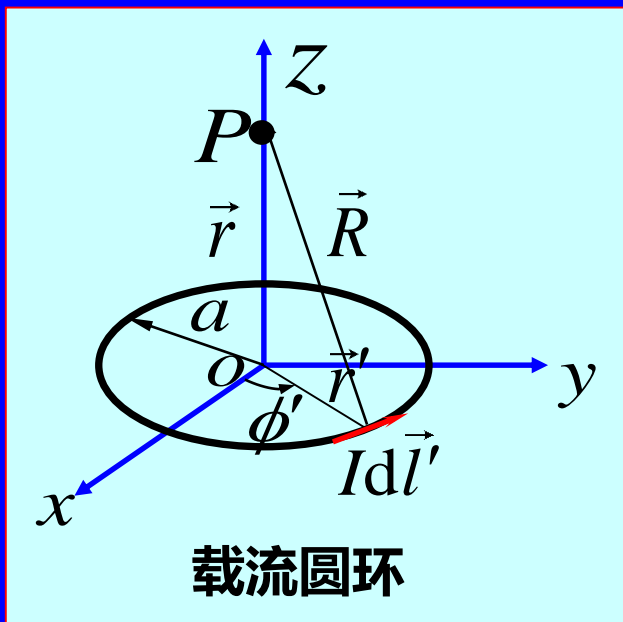
## 面电流产生的磁感应强度

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_S(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dS'$$



**例 2.3.1** 计算线电流圆环轴线上任一点的磁感应强度。

**解：** 设圆环的半径为  $a$ ，流过的电流为  $I$ 。为计算方便取线电流圆环位于  $xOy$  平面上，则所求场点为  $P(0, 0, z)$ ，如图所示。采用圆柱坐标系，圆环上的电流元为  $I d\vec{l}' = \vec{e}_\phi I a d\phi'$ ，其位置矢量为  $\vec{r}' = \vec{e}_\rho a$ ，而场点  $P$  的位置矢量为  $\vec{r} = \vec{e}_z z$ ，故得



$$\vec{r} - \vec{r}' = \vec{e}_z z - \vec{e}_\rho a, \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = (z^2 + a^2)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') &= \vec{e}_\phi I a d\phi' \times (\vec{e}_z z - \vec{e}_\rho a) \\ &= \vec{e}_\rho I a z d\phi' + \vec{e}_z I a^2 d\phi' \end{aligned}$$

轴线上任一点  $P(0, 0, z)$  的磁感应强度为

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_\rho z + \vec{e}_z a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\phi'$$

由于  $\int_0^{2\pi} \vec{e}_\rho d\phi' = \int_0^{2\pi} (\vec{e}_x \cos \phi' + \vec{e}_y \sin \phi') d\phi' = 0$  , 所以

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_z a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\phi' = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

可见, 线电流圆环轴线上的磁感应强度只有轴向分量, 这是因为圆环上各对称点处的电流元在场点 $P$ 产生的磁感应强度的径向分量相互抵消。

在圆环的中心点上,  $z = 0$ , 磁感应强度最大, 即

$$\vec{B}(0) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2a}$$

当场点 $P$  远离圆环, 即 $z \gg a$  时, 因 $(z^2 + a^2)^{3/2} \approx z^3$  , 故

$$\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3}$$

### 3. 几种典型电流分布的磁感应强度

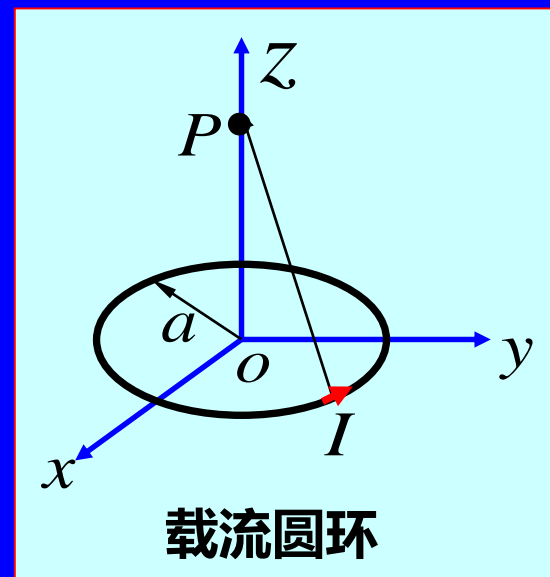
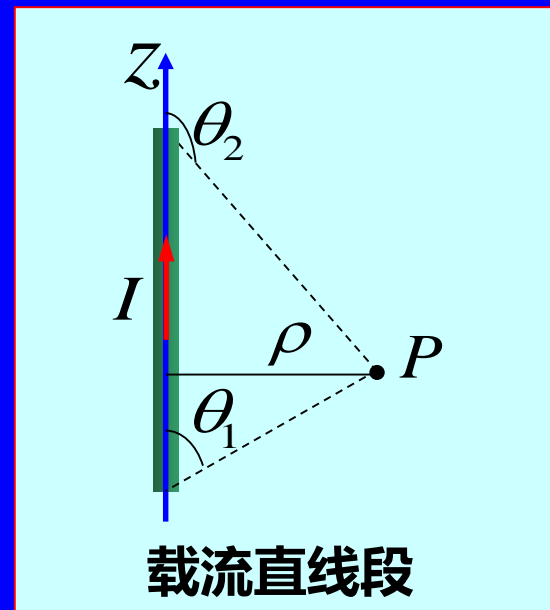
- 载流直线段的磁感应强度：

$$\vec{B} = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \quad (\text{有限长})$$

$$\vec{B} = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \quad (\text{无限长})$$

- 载流圆环轴线上的磁感应强度：

$$\vec{B}(0,0,z) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$



## 2.3.2 恒定磁场的散度和旋度

### 1. 恒定磁场的散度与磁通连续性原理

**利用**  $\frac{\vec{R}}{R^3} = -\nabla\left(\frac{1}{R}\right)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dV'$  **改写为**

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \nabla\left(\frac{1}{R}\right) dV'$$

**利用矢量恒等式**  $\nabla \times (u\vec{F}) = \nabla u \times \vec{F} + u\nabla \times \vec{F}$ , **上式可写为**

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \nabla \times \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} - \frac{1}{R} \nabla \times \vec{J}(\vec{r}') \right] dV'$$

**由于**  $\nabla \times \vec{J}(\vec{r}') = 0$ , **于是有**

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV' = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV'$$

对上式两端取散度，由于对任意矢量函数有  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ ，故得

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad \text{恒定磁场的散度 (微分形式)}$$

对上式在体积  $V$  上积分，并利用散度定理  $\int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$  得

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{磁通连续性原理 (积分形式)}$$

磁通连续性原理表明：恒定磁场是无源场，磁感应线是无头无尾的闭合曲线。

## 2. 恒定磁场的旋度与安培环路定理

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV' \quad \text{两端取旋度，利用 } \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

$$\begin{aligned} \text{得} \quad \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left( \nabla \times \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V \nabla \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) dV' \end{aligned}$$

利用  $\nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$  和  $\delta$  函数的挑选性, 上式右边第二项表

示为 
$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

利用  $\nabla \cdot (u\vec{F}) = u\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla u$ ,  $\nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\nabla' \left( \frac{1}{R} \right)$ ,  $\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}') = 0$ ,  $\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}') = 0$

得 
$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right] &= \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}') = -\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) \\ &= \frac{1}{R} \nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}') - \nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right] = -\nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right] \end{aligned}$$

代入

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V \nabla \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V \nabla' \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \oint_S \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \cdot d\vec{S}' = 0$$

式中S是区域V的边界面。



由于电流分布在区域 $V$ 内，在边界 $S$ 上，电流没有法向分量，故

$$\vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}' = 0$$

利用上面的结果，得  $\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$

恒定磁场的旋度（微分形式）

两端取面积分  $\int_S \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$

应用斯托克斯定理  $\int_S \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$ ，所以得

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

安培环路定理（积分形式）

安培环路定理表明：恒定磁场是有旋场，是非保守场、恒定电流是恒定磁场的旋涡源。

### 3. 利用安培环路定理计算磁感应强度

在磁场分布具有一定对称性的情况下，可以利用安培环路定理计算磁感应强度。

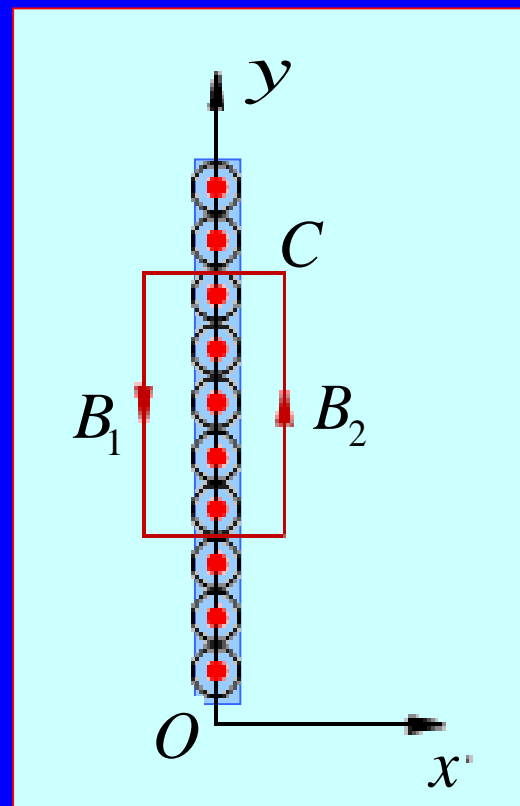
**例2.3.2** 求电流面密度为  $\vec{J}_s = \vec{e}_z J_{s0}$  的无限大电流薄板产生的磁感应强度。

**解：** 分析场的分布，取安培环路如图，则

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_1 l + B_2 l = \mu_0 J_{s0} l$$

根据对称性，有  $B_1 = B_2 = B$ ，故

$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{e}_y \frac{\mu_0 J_{s0}}{2} & x > 0 \\ -\vec{e}_y \frac{\mu_0 J_{s0}}{2} & x < 0 \end{cases}$$



**例2.3.3 求载流无限长同轴电缆产生的磁感应强度。**

**解** 选用圆柱坐标系, 则  $\vec{B} = \vec{e}_\phi B(\rho)$

(1)  $0 \leq \rho < a$

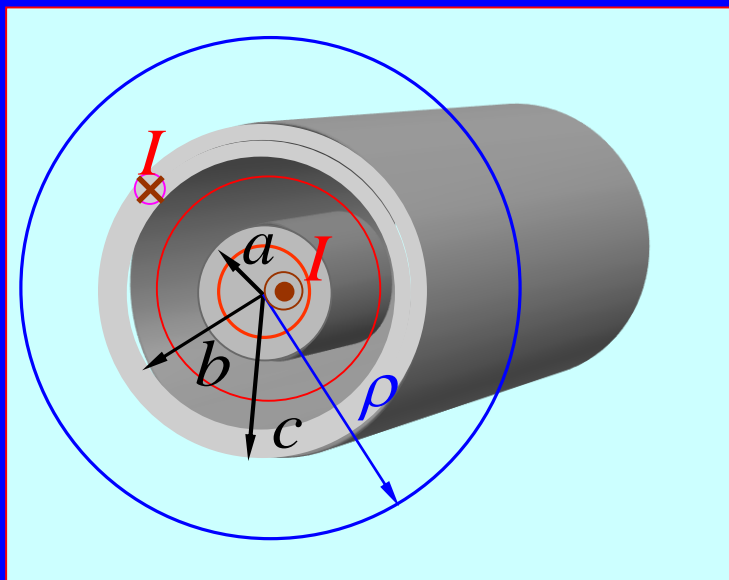
**取安培环路 ( $\rho < a$ ), 穿过环路所围面积的电流为**

$$I_1 = \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi \rho^2 = I \frac{\rho^2}{a^2}$$

**应用安培环路定理, 得**

$$2\pi\rho B_1 = \mu_0 \frac{I\rho^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_1 = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}$$



$$(2) \quad a \leq \rho < b$$

$$2\pi\rho B_2 = \mu_0 I \quad \longrightarrow \quad \vec{B}_2 = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

$$(3) \quad b \leq \rho < c$$

$$I_3 = I - I \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2} = I \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2}$$

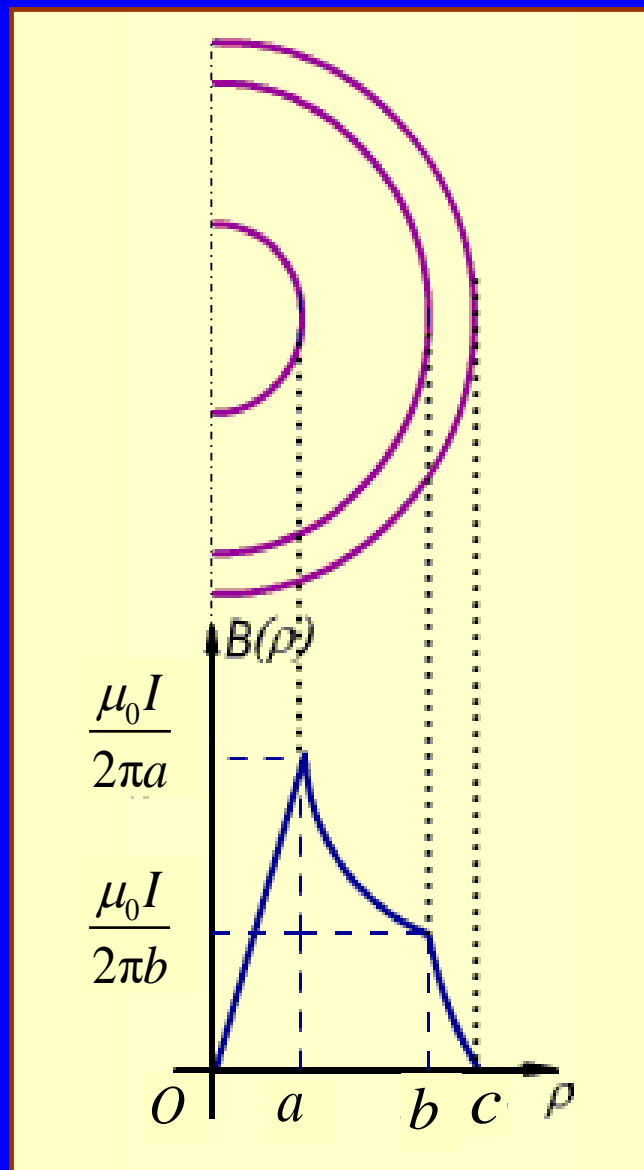
应用安培环路定理，得

$$2\pi\rho B_3 = \frac{\mu_0 I (c^2 - \rho^2)}{c^2 - b^2}$$

$$\longrightarrow \vec{B}_3 = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \cdot \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2}$$

$$(4) \quad c \leq \rho < \infty$$

$$I_4 = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{B}_4 = 0$$



## 2.4 媒质的电磁特性

- 媒质对电磁场的响应可分为三种情况：极化、磁化和传导。
- 描述媒质电磁特性的参数为：介电常数、磁导率和电导率。

### 本节内容

2.4.1 电介质的极化 电位移矢量

2.4.2 磁介质的磁化 磁场强度

2.4.3 媒质的传导特性

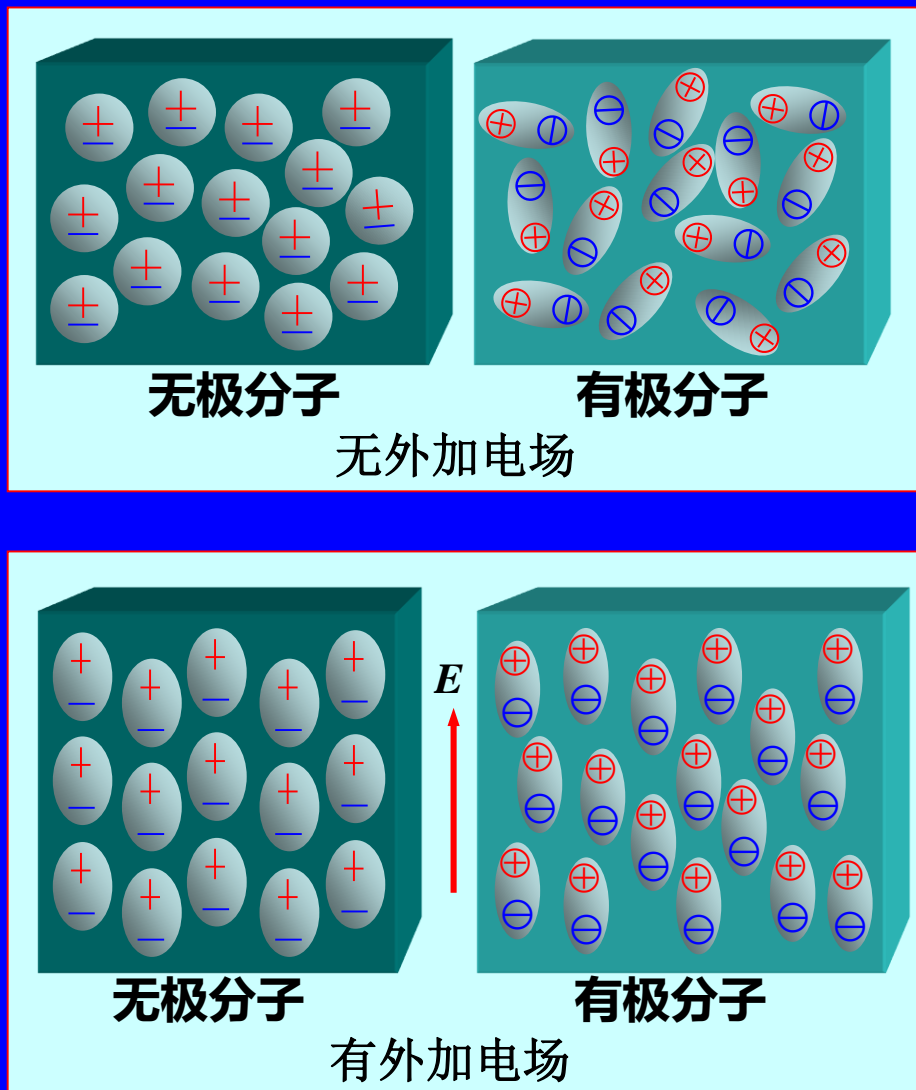
## 2.4.1 电介质的极化 电位移矢量

### 1. 电介质的极化现象

电介质的分子分为无极分子和有极分子。

在电场作用下，介质中无极分子的束缚电荷发生位移，有极分子的固有电偶极矩的取向趋于电场方向，这种现象称为电介质的极化。

无极分子的极化称为位移极化，有极分子的极化称为取向极化。



## 2. 极化强度矢量 $\vec{P}$ (C/m<sup>2</sup>)

- 极化强度矢量 是描述介质极化程度的物理量，定义为

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V} = N\vec{p}$$

$\vec{p} = q\vec{l}$  —— 分子的平均电偶极矩

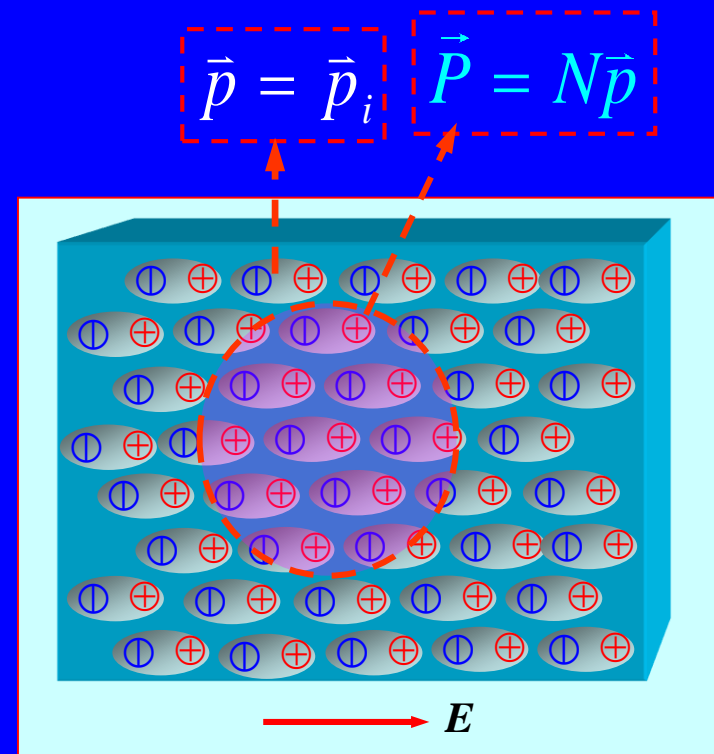
- $\vec{P}$  的物理意义：单位体积内分子电偶极矩的矢量和。

- 极化强度与电场强度有关，其关系一般比较复杂。

在线性、各向同性的电介质中， $\vec{P}$  与电场强度成正比，即

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$\chi_e (> 0)$  —— 电介质的电极化率



### 3. 极化电荷

由于极化，正、负电荷发生位移，在电介质内部可能出现净余的极化电荷分布，同时在电介质的表面上有面分布的极化电荷。

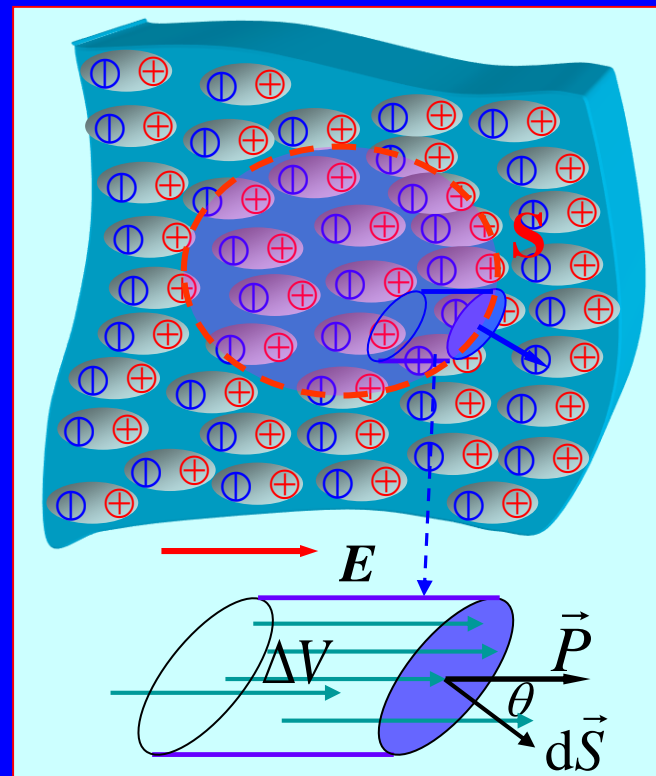
#### (1) 极化电荷体密度

在电介质内任意作一闭合面 $S$ ，只有电偶极矩穿过 $S$ 的分子对 $S$ 内的极化电荷有贡献。取面元 $dS$ ，由于负电荷位于斜柱体内的电偶极矩才穿过小面元 $dS$ ，因此 $dS$ 内的极化电荷量为

$$dq_p = -Nql dS \cos \theta = -P dS \cos \theta = -\vec{P} \cdot d\vec{S}$$

$S$  所围的体积内的极化电荷 $q_p$  为

$$q_p = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\int_V \nabla \cdot \vec{P} dV = \int_V \rho_p dV \quad \Rightarrow \quad \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$





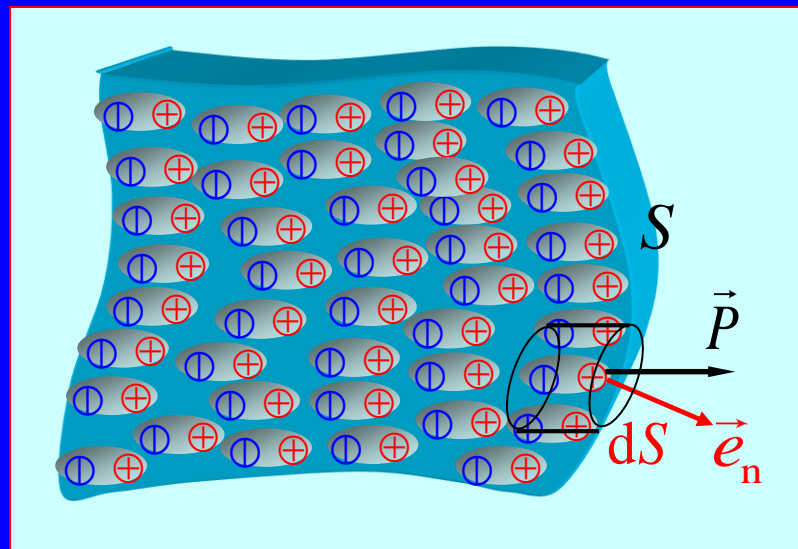
## (2) 极化电荷面密度

紧贴电介质表面取如图所示的闭合曲面，则穿过面积元  $d\vec{S}$  的极化电荷为

$$dq_p = Nql dS \cos \theta = P dS \cos \theta = \vec{P} \cdot d\vec{S} = \vec{P} \cdot \vec{e}_n dS$$

故得到电介质表面的极化电荷面密度为

$$\rho_{sp} = \frac{dq_p}{dS} = \vec{P} \cdot \vec{e}_n$$



#### 4. 电介质中的静电场基本方程

介质的极化过程包括两个方面：

- 外加电场的作用使介质极化，产生极化电荷；
- 极化电荷反过来激发电场，两者相互制约，并达到平衡状态。无论是自由电荷，还是极化电荷，它们都激发电场，服从同样的库仑定律和高斯定理。

介质中的电场应该是外加电场和极化电荷产生的电场的叠加，应用高斯定理得到：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V (\rho + \rho_p) dV \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho + \rho_p$$

自由电荷和极化电荷共同激发的结果

将极化电荷体密度表达式  $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$  代入  $\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho + \rho_p$  , 有

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho - \nabla \cdot \vec{P}$$

引入电位移矢量 (单位:  $\text{C/m}^2$ )

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

则有

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

其积分形式为  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$

任意闭合曲面电位移矢量  $D$  的通量等于该曲面包含自由电荷的代数和

小结: 静电场是有源无旋场, 电介质中的基本方程为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases} \text{ (微分形式) }, \begin{cases} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases} \text{ (积分形式)}$$

## 5. 电介质的本构关系

极化强度 $\vec{P}$ 与电场强度 $\vec{E}$ 之间的关系由介质的性质决定。

- 对于线性各向同性介质,  $\vec{P}$  和  $\vec{E}$  有简单的线性关系  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$

在这种情况下  $\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$

其中  $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) = \varepsilon_r \varepsilon_0$  称为介质的介电常数,  $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$  称为介质的相对介电常数 (无量纲)。

- 各向异性电介质:  $\vec{P}$  与  $\vec{E}$  的方向不相同。

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \bar{\chi}_e \cdot \vec{E} \quad \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{exx} & \chi_{exy} & \chi_{exz} \\ \chi_{eyx} & \chi_{eyy} & \chi_{eyz} \\ \chi_{ezx} & \chi_{ezy} & \chi_{ezz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{D} = \bar{\varepsilon} \cdot \vec{E} \quad \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

**例 2.4.2** 半径为  $a$ 、介电常数为  $\epsilon$  的球形电介质内的极化强度为  $\mathbf{P} = e_r \frac{k}{r}$ , 式中的  $k$  为常数。(1) 计算极化电荷体密度和面密度; (2) 计算电介质球内自由电荷体密度。

解: (1) 电介质球内的极化电荷体密度为

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 P_r) = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{k}{r}\right) = -\frac{k}{r^2}$$

在  $r=a$  处的极化电荷面密度为

$$\rho_{SP} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n = e_r \frac{k}{r} \cdot e_r \Big|_{r=a} = \frac{k}{a}$$

(2) 因  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ , 故

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P} = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} + \nabla \cdot \mathbf{P}$$

即

$$\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{P}$$

而  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ , 故电介质球内的自由电荷体密度为

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\epsilon}{\epsilon - \epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\epsilon}{\epsilon - \epsilon_0} \frac{k}{r^2}$$

例：已知半径为  $a_1$  的导体球带电荷量为  $q$ ，该导体球被内半径为  $a_2$  外半径为  $a_3$  的导体球壳所包围，球与球壳间填充介电常数为  $\varepsilon_1$  的均匀电介质，球壳的外表面上敷有一层介电常数为  $\varepsilon_2$  的均匀电介质，介质层的外半径为  $a_4$ 。试求：(1) 各区域种的电场强度； (2) 导体表面的自由电荷面密度和介质表面的极化电荷面密度。

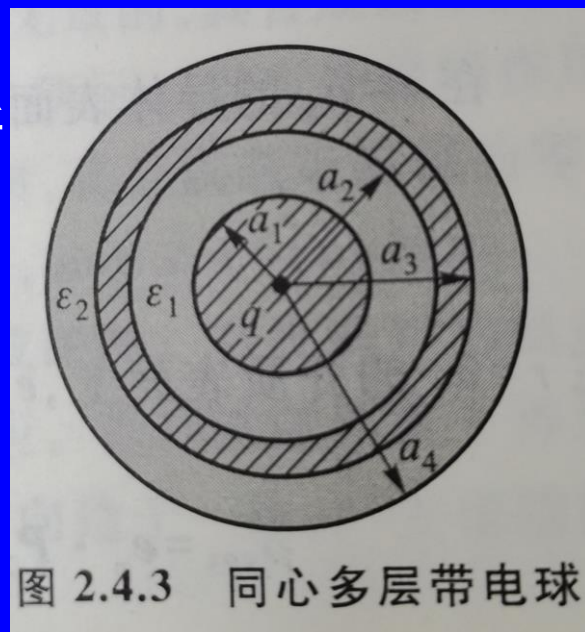
解：(1) 电场垂直于导体表面且成球对称分布，应用高斯定理求解，取半径为  $r$  的球面  $S$  为高斯面，由于导体中不存在静电场，所以在  $r < a_1$  和  $a_2 < r < a_3$  区域中  $\vec{E} = 0$

在  $a_1 < r < a_2$  区域中，由  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$  得到

$$\vec{D}_1 = \vec{e}_r \frac{q}{4\pi r^2} \quad \vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_1}{\varepsilon_1} = \vec{e}_r \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}$$

在  $a_3 < r < a_4$  区域中，可得到

$$\vec{D}_2 = \vec{e}_r \frac{q}{4\pi r^2} \quad \vec{E}_2 = \frac{\vec{D}_2}{\varepsilon_2} = \vec{e}_r \frac{q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}$$



在  $r > a_4$  区域中, 可得到  $\vec{D}_0 = \vec{e}_r \frac{q}{4\pi r^2}$   $\vec{E}_0 = \frac{\vec{D}_0}{\varepsilon_0} = \vec{e}_r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

(2) 在  $r = a_1$  的导体球面上,  $\vec{e}_n = \vec{e}_r$ , 所以自由电荷面密度为

$$\rho_{S1} = \vec{e}_n \cdot \vec{D}_1|_{r=a_1} = \frac{q}{4\pi a_1^2}$$

在  $r = a_1$  的介质表面上,  $\vec{e}_n = -\vec{e}_r$ , 所以极化电荷面密度为

$$\rho_{SP1} = \vec{e}_n \cdot \vec{P}_1|_{r=a_1} = -\vec{e}_r \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \vec{E}_1|_{r=a_1} = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)q}{4\pi\varepsilon_1 a_1^2}$$

在  $r = a_2$  的导体球面上,  $\vec{e}_n = -\vec{e}_r$ , 所以自由电荷面密度为

$$\rho_{S2} = -\vec{e}_r \cdot \vec{D}_1|_{r=a_2} = -\frac{q}{4\pi a_2^2}$$

在  $r = a_2$  的介质表面上,  $\vec{e}_n = \vec{e}_r$ , 所以极化电荷面密度为

$$\rho_{SP2} = \vec{e}_n \cdot \vec{P}_1|_{r=a_2} = \vec{e}_r \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \vec{E}_2|_{r=a_2} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)q}{4\pi\varepsilon_1 a_2^2}$$

在  $r = a_3$  的导体球面上,  $\vec{e}_n = \vec{e}_r$ , 所以自由电荷面密度为

$$\rho_{S2} = \vec{e}_r \cdot \vec{D}_2 |_{r=a_3} = -\frac{q}{4\pi a_3^2}$$

在  $r = a_3$  的介质表面上,  $\vec{e}_n = -\vec{e}_r$ , 所以极化电荷面密度为

$$\rho_{SP3} = \vec{e}_n \cdot \vec{P}_2 |_{r=a_3} = -\vec{e}_r \cdot (\epsilon_2 - \epsilon_0) \vec{E}_2 |_{r=a_3} = -\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)q}{4\pi\epsilon_2 a_3^2}$$

在  $r = a_4$  的介质表面上,  $\vec{e}_n = \vec{e}_r$ , 所以极化电荷面密度为

$$\rho_{SP4} = \vec{e}_n \cdot \vec{P}_2 |_{r=a_4} = \vec{e}_r \cdot (\epsilon_2 - \epsilon_0) \vec{E}_2 |_{r=a_4} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)q}{4\pi\epsilon_2 a_4^2}$$



## 2.4.2 磁介质的磁化 磁场强度

### 1. 磁介质的磁化

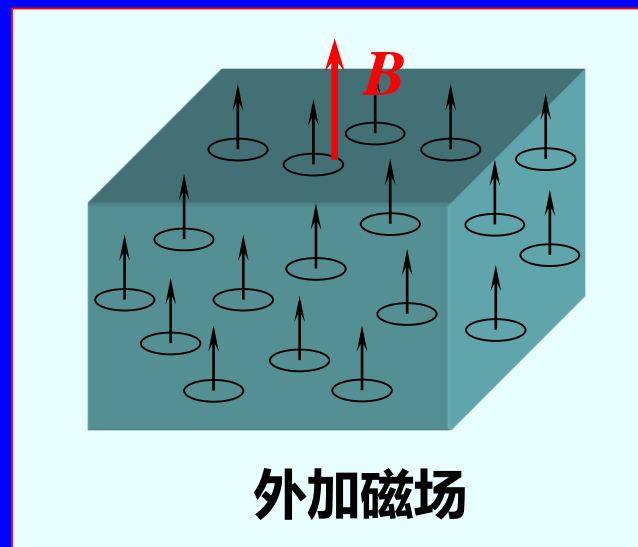
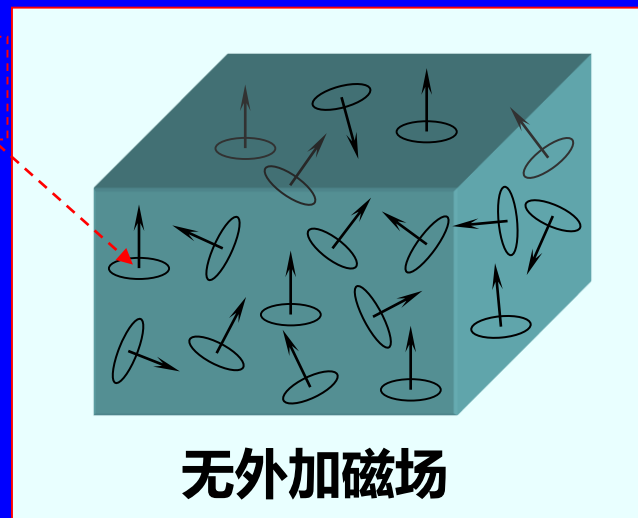
介质中分子或原子内的电子运动形成分子电流，形成分子磁矩

$$\vec{p}_m = i\Delta\vec{S}$$

无外磁场作用时，分子磁矩不规则排列，宏观上不显磁性。

在外磁场作用下，分子磁矩定向排列，宏观上显示出磁性，这种现象称为磁介质的**磁化**。

$$\vec{p}_m = i\Delta\vec{S}$$



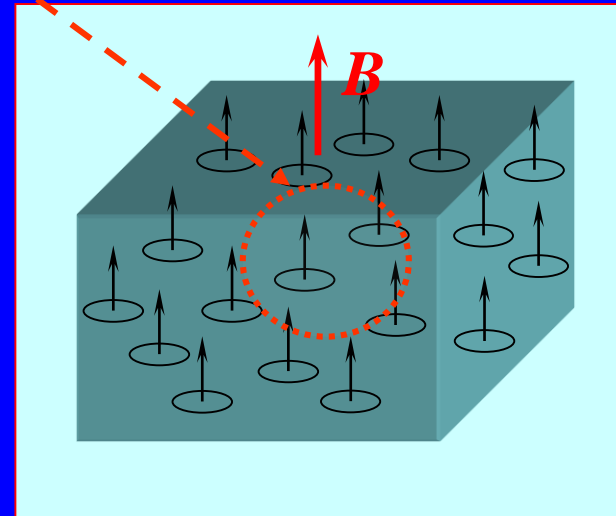
## 2. 磁化强度矢量 $\vec{M}$

磁化强度  $\vec{M}$  是描述磁介质磁化程度的物理量，定义为单位体积中的分子磁矩的矢量和，即

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V} = N\vec{p}_m$$

单位为A/m。

$$\vec{M} = N\vec{p}_m$$



### 3. 磁化电流

磁介质被磁化后，在其内部与表面上可能出现宏观的电流分布，称为磁化电流。

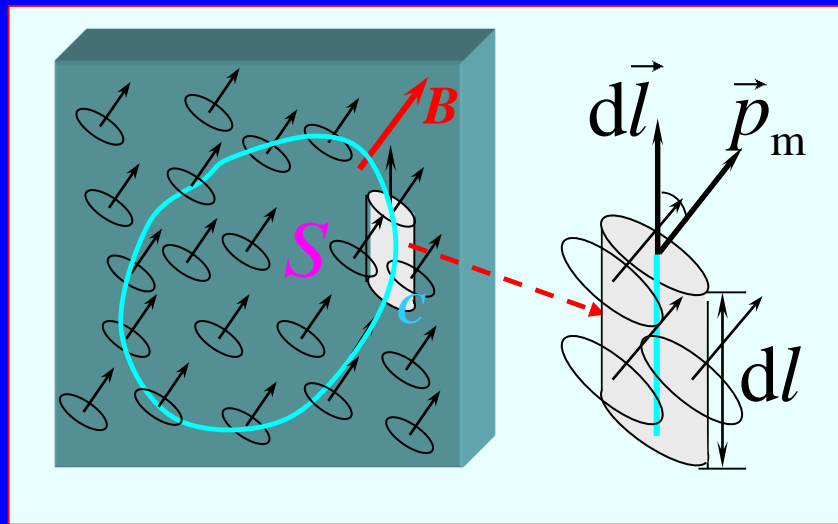
#### (1) 磁化电流体密度 $\vec{J}_M$

考察穿过任意围线 $C$ 所围曲面 $S$ 的电流。只有分子电流与围线相交链的分子才对电流有贡献。与线元 $d\vec{l}$ 相交链的分子，中心位于如图所示的斜圆柱内，所交链的电流

$$dI_M = Ni\Delta\vec{S} \cdot d\vec{l} = N\vec{p}_m \cdot d\vec{l} = \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

穿过曲面 $S$ 的磁化电流为

$$I_M = \oint_C dI_M = \oint_C \vec{M} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{M} \cdot d\vec{S}$$



由  $I_M = \int_S \vec{J}_M \cdot d\vec{S}$  , 即得到磁化电流体密度

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$$

(2) 磁化电流面密度  $\vec{J}_{SM}$

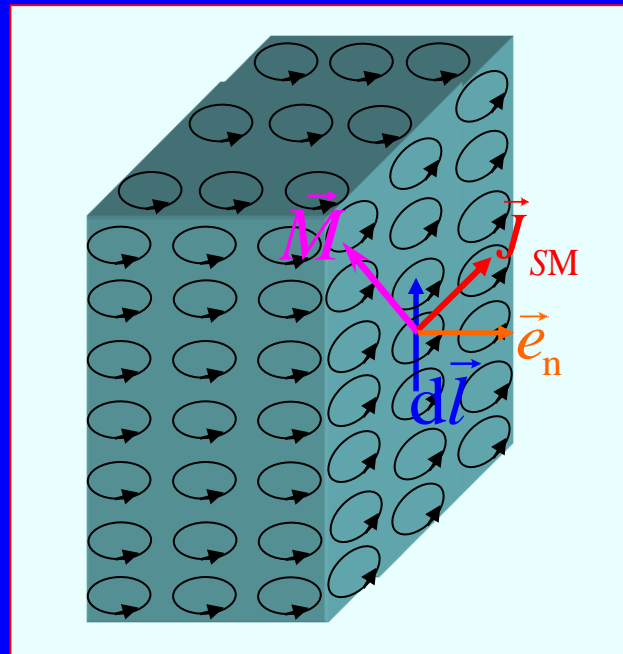
在紧贴磁介质表面取一长度元  $d\vec{l}$  ,  
与此交链的磁化电流为

$$dI_M = \vec{M} \cdot d\vec{l} = \vec{M} \cdot \vec{e}_l dl$$

设磁介质表面上与  $d\vec{l}$  垂直的切向单位矢量为  $\vec{e}_t$  , 有  $\vec{e}_l = \vec{e}_n \times \vec{e}_t$

所以  $dI_M = \vec{M} \cdot (\vec{e}_n \times \vec{e}_t) dl = (\vec{M} \times \vec{e}_n) \cdot \vec{e}_t dl = \vec{J}_{SM} \cdot \vec{e}_t dl$

故磁化面电流密度矢量为  $\vec{J}_{SM} = \vec{M} \times \vec{e}_n$



#### 4. 磁场强度 介质中安培环路定理

外加磁场使介质发生磁化，磁化导致磁化电流。磁化电流同样也激发磁感应强度，两种相互作用达到平衡，介质中的磁感应强度 $B$  应是所有电流源激励的结果：

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_M) \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S (\vec{J} + \vec{J}_M) \cdot d\vec{S}$$

$\vec{J}$ 、 $\vec{J}_M$  分别是传导电流密度和磁化电流密度。

将极化电荷体密度表达式  $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$  代入  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_M)$  ，  
有

$$\nabla \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}$$

定义磁场强度  $\vec{H}$  为：  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$  ， 即  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$

则得到介质中的安培环路定理为：

$$\oint_C \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r})$$

磁通连续性定理为  $\oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$

小结：恒定磁场是有源无旋场，磁介质中的基本方程为

(微分形式)

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \end{cases}$$

(积分形式)

$$\begin{cases} \oint_C \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0 \end{cases}$$

## 5. 磁介质的本构关系

**磁化强度 $\vec{M}$ 和磁场强度 $\vec{H}$ 之间的关系由磁介质的物理性质决定，对于线性各向同性介质， $\vec{M}$ 与 $\vec{H}$ 之间存在简单的线性关系：**

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

**其中， $\chi_m$ 称为介质的磁化率（也称为磁化系数）。**

**这种情况下** 
$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$$

**其中 $\mu = \mu_0(1 + \chi_m) = \mu_r \mu_0$ 称为介质的磁导率， $\mu_r = 1 + \chi_m$ 称为介质的相对磁导率（无量纲）。**

### 磁介质的分类

$$\mu_r > 1$$

顺磁质

$$\mu_r < 1$$

抗磁质

$$\mu_r \gg 1$$

铁磁质

例 2.4.3 半径  $r = a$  的球形磁介质的磁化强度为  $\mathbf{M} = e_z(Az^2 + B)$ , 如图 2.4.5 所示。式中的  $A, B$  为常数, 求磁化电流密度。

解: 磁化电流体密度为

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_M &= \nabla \times \mathbf{M} \\ &= \left( e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times e_z (Az^2 + B) = 0 \end{aligned}$$

$r = a$  处的磁化电流面密度为

$$\mathbf{J}_{SM} = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n \big|_{r=a}$$

式中的  $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_r$ 。在球面上任一点, 有  $z = a \cos \theta$ , 而直角坐标系中的单位矢量  $e_z$  换成球坐标系中的单位矢量表示为

$$e_z = e_r \cos \theta - e_\theta \sin \theta$$

所以题目所给的磁化强度换成球坐标系表示为

$$\mathbf{M} = (e_r \cos \theta - e_\theta \sin \theta)(Aa^2 \cos^2 \theta + B)$$

故

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{SM} &= (e_r \cos \theta - e_\theta \sin \theta)(Aa^2 \cos^2 \theta + B) \times e_r \\ &= e_\phi (Aa^2 \cos^2 \theta + B) \sin \theta \end{aligned}$$

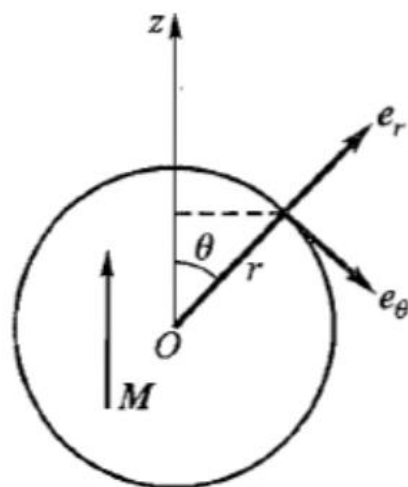


图 2.4.5 球形磁介质的磁化强度



**例 2.4.4** 内、外半径分别为  $\rho_{\text{内}} = a$  和  $\rho_{\text{外}} = b$  的圆筒形磁介质中,沿轴向有电流密度为  $\mathbf{J} = e_z J_0$  的传导电流,如图 2.4.6 所示。设磁介质的磁导率为  $\mu$ ,求磁化电流分布。

**解:** 设圆筒形磁介质为无限长,则其磁场分布具有轴对称性,可利用安培环路定理求各个区域内由传导电流  $\mathbf{J}$  产生的磁场分布。

在  $\rho < a$  的区域,根据式(2.4.25),得

$$2\pi\rho H_{1\phi} = 0$$

故

$$\mathbf{H}_1 = 0, \quad \mathbf{B}_1 = 0$$

在  $a < \rho < b$  的区域,得

$$2\pi\rho H_{2\phi} = J_0\pi(\rho^2 - a^2)$$

故

$$\mathbf{H}_2 = e_\phi H_{2\phi} = e_\phi \frac{J_0}{2\rho}(\rho^2 - a^2)$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu\mathbf{H}_2 = e_\phi \frac{\mu J_0}{2\rho}(\rho^2 - a^2)$$

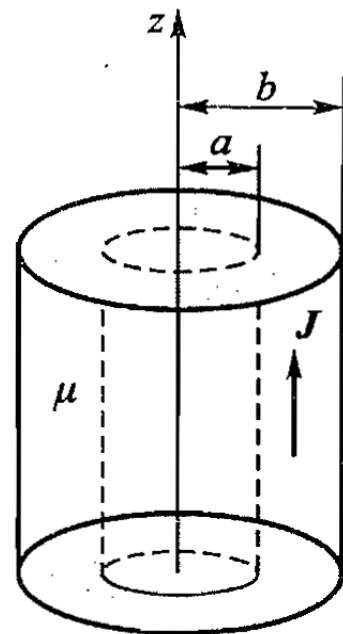


图 2.4.6  
圆筒形磁介质

在  $\rho > b$  的区域,得

$$2\pi\rho H_{3\phi} = J_0\pi(b^2 - a^2)$$

故

$$\mathbf{H}_3 = e_\phi H_{3\phi} = e_\phi \frac{J_0}{2\rho}(b^2 - a^2)$$

$$\mathbf{B}_3 = \mu_0 \mathbf{H}_3 = e_\phi \frac{\mu_0 J_0}{2\rho}(b^2 - a^2)$$

磁介质的磁化强度

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_0} - \mathbf{H}_2 = \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \mathbf{H}_2 = e_\phi \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 \rho} J_0 (\rho^2 - a^2)$$

$(a < \rho < b)$

则磁介质圆筒内的磁化电流密度为

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} e_\rho & \rho e_\phi & e_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M_\rho & \rho M_\phi & M_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} e_z \frac{d}{d\rho} (\rho M_\phi) = e_z \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} J_0$$

在磁介质圆筒内表面  $\rho = a$  上

$$\mathbf{J}_{SM} = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n \big|_{\rho=a} = \mathbf{M} \times (-\mathbf{e}_\rho) \big|_{\rho=a} = \mathbf{e}_z \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 a} J_0 (a^2 - a^2) = 0$$

在磁介质圆筒外表面  $\rho = b$  上

$$\mathbf{J}_{SM} = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n \big|_{\rho=b} = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_\rho \big|_{\rho=b} = -\mathbf{e}_z \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 b} J_0 (b^2 - a^2)$$

**例2.4.1** 有一磁导率为  $\mu$  , 半径为  $a$  的无限长导磁圆柱, 其轴线处有无限长的线电流  $I$ , 圆柱外是空气 ( $\mu_0$ ) , 试求圆柱内外的  $\vec{B}$ 、 $\vec{H}$  和  $\vec{M}$  的分布。

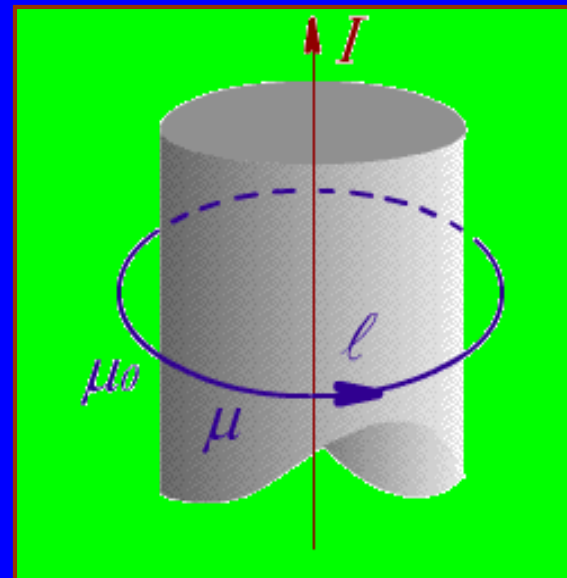
**解** 磁场为平行平面场, 且具有轴对称性, 应用安培环路定理, 得

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi\rho H_\phi = I$$

**磁场强度**  $\vec{H} = \vec{e}_\phi \frac{I}{2\pi\rho} \quad 0 < \rho < \infty$

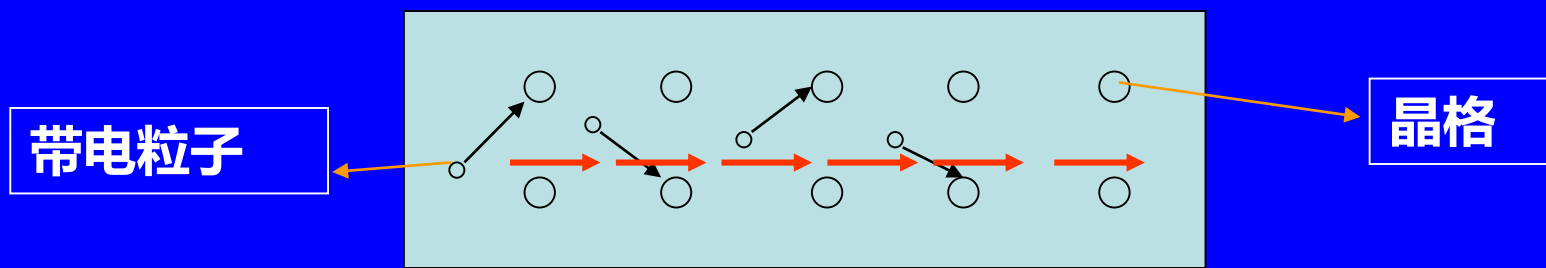
**磁感应强度**  $\vec{B} = \begin{cases} \vec{e}_\phi \frac{\mu I}{2\pi\rho} & 0 < \rho < a \\ \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} & a < \rho < \infty \end{cases}$

**磁化强度**  $\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \begin{cases} \vec{e}_\phi \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \cdot \frac{I}{2\pi\rho} & \rho < a \\ 0 & a < \rho < \infty \end{cases}$



### 2.4.3 媒质的传导特性

存在可以自由移动带电粒子的介质称为**导电媒质**。在外场作用下，导电媒质中将形成定向移动电流。



对于线性和各向同性导电媒质，媒质内任一点的电流密度矢量  $\vec{J}$  和电场强度  $\vec{E}$  成正比，表示为

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

这就是欧姆定律的微分形式。式中的比例系数  $\sigma$  称为媒质的电导率，单位是S/m（西/米）。

体密度为  $\rho$  的电荷在电场力作用下以平均速度  $\vec{v}$  运动，在  $dt$  时间内，电荷移动距离为  $d\vec{l}$ ，则电场力作功为

$$dW = d\vec{F} \cdot d\vec{l} = \rho dV \vec{E} \cdot \vec{v} dt = \vec{J} \cdot \vec{E} dV dt$$

单位体积的损耗功率：

$$p_L = \frac{dW}{dt dV} = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (\text{焦耳定律的微分形式})$$

整个体积  $V$  中的的损耗功率：

$$P_L = \int_V p_L dV = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV \quad (\text{焦耳定律的积分形式})$$

线性和各向同性导体：  $p_L = \sigma \vec{E} \cdot \vec{E} = \sigma E^2$

$$P_L = \int_V \sigma E^2 dV$$

## 2.5 电磁感应定律和位移电流

- 电磁感应定律 —— 揭示时变磁场产生电场。
- 位移电流 —— 揭示时变电场产生磁场。
- 重要结论：在时变情况下，电场与磁场相互激励，形成统一的电磁场。

### 本节内容

2.5.1 电磁感应定律

2.5.2 位移电流

## 2.5.1 电磁感应定律

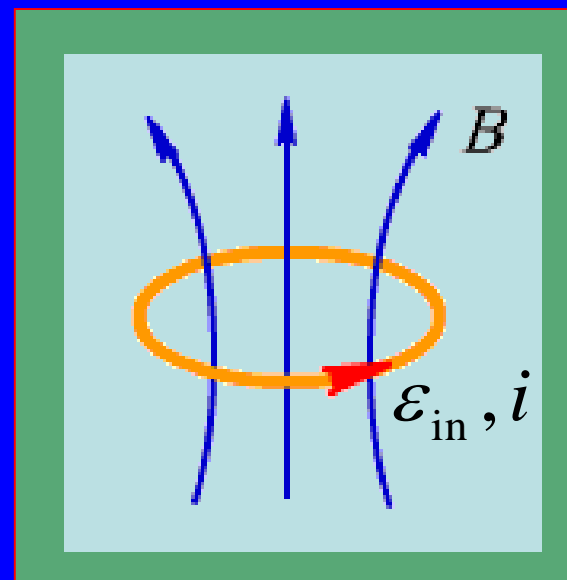
1881年法拉第发现，当穿过导体回路的磁通量发生变化时，回路中就会出现感应电流和电动势，且感应电动势与磁通量的变化有密切关系，由此总结出了著名的法拉第电磁感应定律。

### 1. 法拉第电磁感应定律的表述

当通过导体回路所围面积的磁通量  $\Psi$  发生变化时，回路中产生的感应电动势  $\mathcal{E}_{\text{in}}$  的大小等于磁通量的时间变化率的负值，方向是要阻止回路中磁通量的改变，即

$$\mathcal{E}_{\text{in}} = - \frac{d\Psi}{dt}$$

负号表示感应电流产生的磁场总是阻止磁通量的变化。

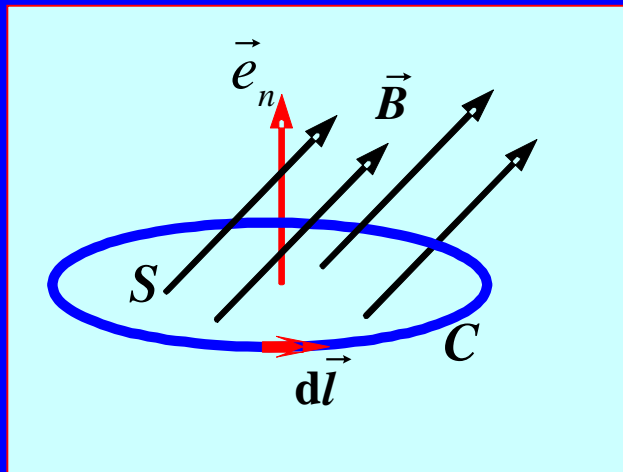




设任意导体回路  $C$  围成的曲面为  $S$ ,  
其单位法向矢量为  $\vec{e}_n$ , 则穿过回路的磁通  
为

$$\Psi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

→  $\varepsilon_{\text{in}} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$



导体回路中有感应电流, 表明回路中存在感应电场  $\vec{E}_{\text{in}}$ , 回路中的感应电动势可表示为

$$\varepsilon_{\text{in}} = \oint_C \vec{E}_{\text{in}} \cdot d\vec{l}$$

因有

$$\oint_C \vec{E}_{\text{in}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

## ■ 对感应电场的讨论：

- 感应电场是由变化的磁场所激发的电场。
- 感应电场是有旋场。
- 感应电场不仅存在于导体回路中，也存在于导体回路之外的空间。
- 对空间中的任意回路（不一定是导体回路） $C$ ，都有

$$\oint_C \vec{E}_{\text{in}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

若空间同时存在由电荷产生的电场  $\vec{E}_c$ ，则总电场  $\vec{E}$  应为  $\vec{E}_{\text{in}}$  与

$\vec{E}_c$  之和，即  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{in}} + \vec{E}_c$ 。由于  $\oint_C \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0$ ，故有

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

推广的法拉第  
电磁感应定律

## 2. 引起回路中磁通变化的几种情况

### (1) 回路不变，磁场随时间变化

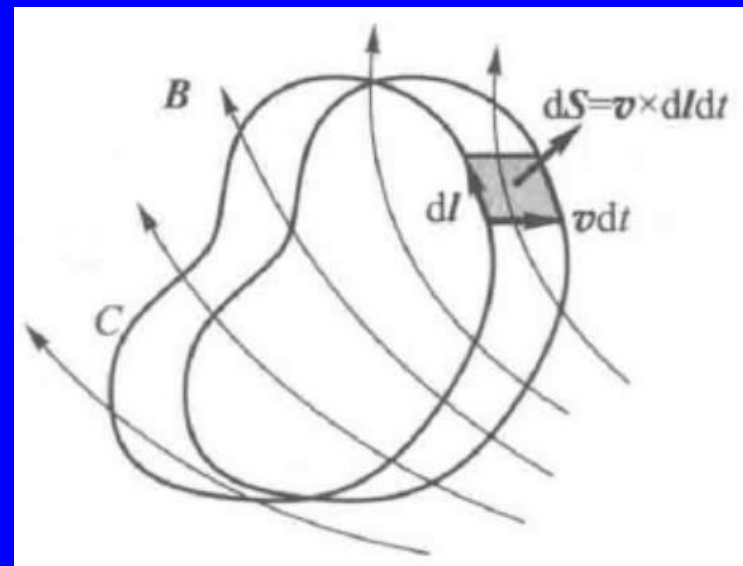
磁通量的变化由磁场随时间变化引起，因此有

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \longrightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

相应的微分形式为  $\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

### (2) 导体回路在恒定磁场中运动

$$\begin{aligned} d\Phi &= \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l}) dt \\ &= -(\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} dt \end{aligned}$$



## 回路运动所引起的感应电动势为

$$\varepsilon_{\text{in}} = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

于是得到  $\varepsilon_{\text{in}} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$  ———— 动生电动势

### (3) 回路在时变磁场中运动

$$\varepsilon_{\text{in}} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

微分形式  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$

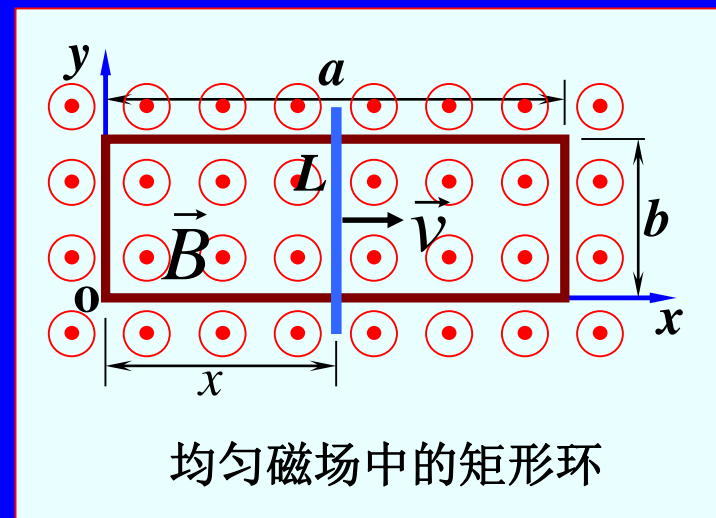
**例 2.5.1** 长为  $a$ 、宽为  $b$  的矩形环中有均匀磁场  $\vec{B}$  垂直穿过，如图所示。在以下三种情况下，求矩形环内的感应电动势。

(1)  $\vec{B} = \vec{e}_z B_0 \cos(\omega t)$ ，矩形回路静止；

(2)  $\vec{B} = \vec{e}_z B_0$ ，矩形回路的宽边  $b =$  常数，但其长边因可滑动导体  $L$  以匀速  $\vec{v} = \vec{e}_x v$  运动而随时间增大；

(3)  $\vec{B} = \vec{e}_z B_0 \cos(\omega t)$ ，且矩形回路上的可滑动导体  $L$  以匀速  $\vec{v} = \vec{e}_x v$  运动。

**解：**(1) 均匀磁场  $\vec{B}$  随时间作简谐变化，而回路静止，因而回路内的感应电动势是由磁场变化产生的，故



$$\varepsilon_{\text{in}} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial}{\partial t} [\vec{e}_z B_0 \cos(\omega t)] \cdot \vec{e}_z dS = \omega a b B_0 \sin(\omega t)$$

(2) 均匀磁场  $\vec{B}$  为恒定磁场，而回路上的可滑动导体以匀速运动，因而回路内的感应电动势全部是由导体  $L$  在磁场中运动产生的，故得

$$\varepsilon_{\text{in}} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{e}_x v \times \vec{e}_z B_0) \cdot \vec{e}_y d\vec{l} = -v b B_0$$

或

$$\varepsilon_{\text{in}} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} (b B_0 v t) = -b B_0 v$$

(3) 矩形回路中的感应电动势是由磁场变化以及可滑动导体  $L$  在磁场中运动产生的，故得

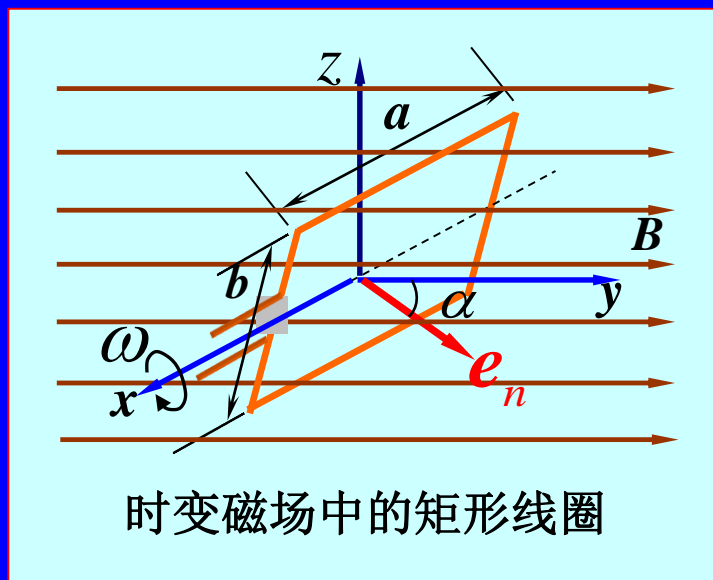
$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{in}} &= \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ &= \oint_C [\vec{e}_x v \times \vec{e}_z B_0 \cos(\omega t)] \cdot \vec{e}_y dl - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} [\vec{e}_z B_0 \cos(\omega t)] \cdot \vec{e}_z dS \\ &= v t \omega b B_0 \sin(\omega t) - v b B_0 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

**例 2.5.2** 在时变磁场  $\vec{B} = \vec{e}_y B_0 \sin(\omega t)$  中, 放置有一个  $a \times b$  的矩形线圈。初始时刻, 线圈平面的法向单位矢量  $\vec{e}_n$  与  $\vec{e}_y$  成  $\alpha$  角, 如图所示。试求:

(1) 线圈静止时的感应电动势;

(2) 线圈以角速度  $\omega$  绕  $x$  轴旋转时的感应电动势。

**解:** (1) 线圈静止时, 感应电动势是由时变磁场引起, 故



$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\text{in}} &= \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\
 &= - \int_S \frac{\partial}{\partial t} [\vec{e}_y B_0 \sin(\omega t)] \cdot \vec{e}_n dS \\
 &= - \int_S B_0 \omega \cos(\omega t) \cos \alpha dS \\
 &= -B_0 ab \omega \cos(\omega t) \cos \alpha
 \end{aligned}$$

(2) 线圈绕  $x$  轴旋转时,  $\vec{e}_n$  的指向将随时间变化。线圈内的感应电动势可以用两种方法计算。

方法一：利用式  $\varepsilon_{\text{in}} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  计算

假定  $t = 0$  时  $\alpha = 0$  , 则在时刻  $t$  时,  $\vec{e}_n$  与  $y$  轴的夹角  $\alpha = \omega t$  ,  
故

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{in}} &= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{e}_y B_0 \sin(\omega t) \cdot \vec{e}_n dS = -\frac{d}{dt} [ab B_0 \sin(\omega t) \cos(\omega t)] \\ &= -\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} B_0 ab \sin(2\omega t) \right] = -B_0 ab \omega \cos(2\omega t) \end{aligned}$$



## 方法二：利用式

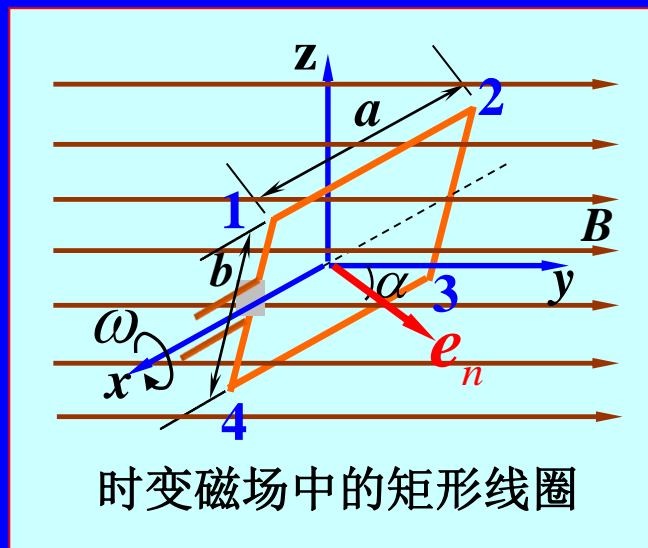
$$\varepsilon_{\text{in}} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

计算。

上式右端第一项与(1)相同，第二项

$$\begin{aligned} \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} &= \int_2^1 [(\vec{e}_n \frac{b}{2} \omega) \times \vec{e}_y B_0 \sin(\omega t)] \cdot \vec{e}_x dx + \\ &\quad \int_4^3 [(-\vec{e}_n \frac{b}{2} \omega) \times \vec{e}_y B_0 \sin(\omega t)] \cdot \vec{e}_x dx \\ &= \omega B_0 ab \sin(\omega t) \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{in}} &= -ab\omega B_0 \cos(\omega t) \cos \alpha + \omega B_0 ab \sin(\omega t) \sin \alpha \\ &= -B_0 ab \omega \cos^2(\omega t) + B_0 \omega ab \sin^2(\omega t) \\ &= -B_0 ab \omega \cos(2\omega t) \end{aligned}$$



## 2.5.2 位移电流

静态情况下的电场基本方程在非静态时发生了变化，即

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \text{👉} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

这不仅是方程形式的变化，而是一个本质的变化，其中包含了重要的物理事实，即 **时变磁场可以激发电场**。

**问题：**随时间变化的磁场要产生电场，那么随时间变化的电场是否会产生磁场？

在时变情况下，安培环路定理是否要发生变化？有什么变化？即

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

(恒定磁场)



$$\nabla \times \vec{H} = ?$$

(时变场)

# 1. 全电流定律

非时变情况下，电荷分布随时间变化，由电流连续性方程有

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$$

发生矛盾

而由  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \longrightarrow \nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0$

在时变的情况下不适用

■ 解决办法：对安培环路定理进行修正

由  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho \longrightarrow \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{D}) \longrightarrow \nabla \cdot (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0$

将  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$  修正为：  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

矛盾解决

时变电场会激发磁场

**全电流定律：**

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{—— 微分形式}$$

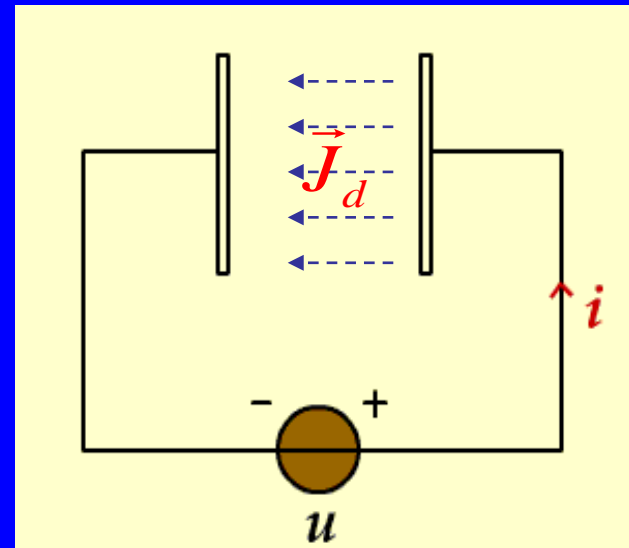
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad \text{—— 积分形式}$$

**全电流定律揭示不仅传导电流激发磁场，变化的电场也可以激发磁场。它与变化的磁场激发电场形成自然界的一个对偶关系。**

## 2. 位移电流密度 $\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

- 电位移矢量随时间的变化率，能像电流一样产生磁场，故称“位移电流”。
- 位移电流只表示电场的变化率，与传导电流不同，它不产生热效应。
- 位移电流的引入是建立麦克斯韦方程组的至关重要的一步，它揭示了时变电场产生磁场这一重要的物理概念。

**注：**在绝缘介质中，无传导电流，但有位移电流。  
在理想导体中，无位移电流，但有传导电流。  
在一般介质中，既有传导电流，又有位移电流。



**例 2.5.3** 海水的电导率为4 S/m，相对介电常数为 81，求频率为1 MHz 时，位移电流振幅与传导电流振幅的比值。

**解：**设电场随时间作正弦变化，表示为

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_m \cos \omega t$$

则位移电流密度为  $\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{e}_x \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r E_m \sin(\omega t)$

其振幅值为  $J_{dm} = \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r E_m = 4.5 \times 10^{-3} E_m$

传导电流的振幅值为  $J_{cm} = \sigma E_m = 4 E_m$

故  $\frac{J_{dm}}{J_{cm}} = 1.125 \times 10^{-3}$

### 例 2.5.4 自由空间的磁场强度为

$$\vec{H} = \vec{e}_x H_m \cos(\omega t - kz) \quad (\text{A/m})$$

式中的  $k$  为常数。试求：位移电流密度和电场强度。

**解** 自由空间的传导电流密度为0，故由式  $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ，得

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} = (\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}) \times \vec{e}_x H_x$$

$$= \vec{e}_y \frac{\partial H_x}{\partial z} = \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial z} [H_m \cos(\omega t - kz)]$$

$$= \vec{e}_y k H_m \sin(\omega t - kz) \quad (\text{A/m}^2)$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dt = \frac{1}{\epsilon_0} \int \vec{e}_y k H_m \sin(\omega t - kz) dt$$

$$= -\vec{e}_y \frac{k}{\omega \epsilon_0} H_m \cos(\omega t - kz) \quad (\text{V/m})$$

**例 2.5.5** 铜的电导率  $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ 、相对介电常数  $\varepsilon_r = 1$ 。设铜中的传导电流密度为  $\vec{J} = \vec{e}_x J_m \cos(\omega t) \text{ A/m}^2$ 。试证明：在无线电频率范围内，铜中的位移电流与传导电流相比是可以忽略的。

**解：**铜中存在时变电磁场时，位移电流密度为

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \vec{e}_x \frac{J_m}{\sigma} \cos(\omega t) \right] = -\vec{e}_x \frac{\omega \varepsilon_r \varepsilon_0 J_m}{\sigma} \sin(\omega t)$$

位移电流密度的振幅值为  $J_{dm} = \omega \varepsilon_r \varepsilon_0 J_m / \sigma$

而传导电流密度的振幅值为  $J_m = \sigma E_m$

$$\longrightarrow \frac{J_{dm}}{J_m} = \frac{\omega \varepsilon_r \varepsilon_0}{\sigma} = \frac{2\pi f \times 1 \times 8.854 \times 10^{-12}}{5.8 \times 10^7} = 9.58 \times 10^{-13} f$$

通常所说的无线电频率是指  $f = 300 \text{ MHz}$  以下的频率范围，即使扩展到极高频段 ( $f = 30 \sim 300 \text{ GHz}$ )，从上面的关系式看出比值  $J_{dm}/J_m$  也是很小的，故可忽略铜中的位移电流。



## 2.6 麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组——宏观电磁现象所遵循的基本规律，是电磁场的基本方程。

### 本节内容

2.6.1 麦克斯韦方程组的积分形式

2.6.2 麦克斯韦方程组的微分形式

2.6.3 媒质的本构关系

## 2.6.1 麦克斯韦方程组的积分形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \end{array} \right.$$

- 积分形式描述的是电磁场量在空间区域上的规律，适用于任何情况。

## 2.6.2 麦克斯韦方程组的微分形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{array} \right.$$

麦克斯韦第一方程，表明传导电流和时变电场都能产生磁场，都是磁场的涡旋源

麦克斯韦第二方程，表明时变磁场产生电场，是电场的涡旋源

麦克斯韦第三方程表明磁场是无散场，磁感应线是闭合曲线

麦克斯韦第四方程，表明电荷产生电场，是电场的散度源

- 微分形式是关于“点”的方程，描述的是空间任意一点处电磁场的局部变化规律与该点的源密度之间的关系，只适用于电磁场量可导的区域。

## 2.6.3 媒质的本构关系

各向同性线性导电媒质的本构关系为

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

代入麦克斯韦方程组中，有

限定形式的麦克斯韦方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_e + \sigma \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \vec{E}) \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H}) \\ \nabla \cdot (\mu \vec{H}) = 0 \\ \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \rho \end{cases}$$

(均匀媒质)

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_e + \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon \end{cases}$$

**例 2.6.1** 在无源 ( $\vec{J} = 0$ 、 $\rho = 0$ ) 的理想介质 ( $\epsilon, \mu, \sigma = 0$ ) 中, 若已知时变电磁场的电场强度矢量  $\vec{E} = \vec{e}_x E_m \cos(\omega t - kz)$  V/m, 式中的  $E_m$  为振幅、 $\omega$  为角频率、 $k$  为相位常数。(1) 求出与  $\vec{E}$  相应的电位移矢量  $\mathbf{D}$ 、磁场应强度  $\mathbf{B}$  和磁场强度  $\mathbf{H}$ ; (2) 确定  $k$  与  $\omega$  之间所满足的关系。

**解:** (1)  $\vec{E}$  是电磁场的场矢量, 应满足麦克斯韦方程组。因此, 利用麦克斯韦方程组可以确定  $k$  与  $\omega$  之间所满足的关系, 以及与  $\vec{E}$  相应的其他场矢量。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E} = -(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}) \times \vec{e}_x E_x \\ &= -\vec{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\vec{e}_y \frac{\partial}{\partial z} [E_m \cos(\omega t - kz)] = -\vec{e}_y k E_m \sin(\omega t - kz) \end{aligned}$$

**对时间  $t$  积分, 得** 
$$\vec{B} = \vec{e}_y \frac{k E_m}{\omega} \cos(\omega t - kz)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \longrightarrow \quad \vec{H} = \vec{e}_y \frac{kE_m}{\mu\omega} \cos(\omega t - kz)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \longrightarrow \quad \vec{D} = \vec{e}_x \varepsilon E_m \cos(\omega t - kz)$$

(2) 以上各个场矢量都应满足麦克斯韦方程，将以上得到的  $H$  和  $D$  代入式

$$\nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -\vec{e}_x \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\vec{e}_x \frac{k^2 E_m}{\omega\mu} \sin(\omega t - kz)$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{e}_x \frac{\partial D_x}{\partial t} = -\vec{e}_x \varepsilon E_m \omega \sin(\omega t - kz)$$

代入  $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$

## 2.6.4 准静态电磁场

- 准静态电磁场：在时变的情况下，当电磁场随时间变化很缓慢时，可以忽略掉  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  或  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

### 1. 电准静态电磁场

若  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  可忽略，即感应电场远小于电荷产生的库伦电场，则

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} \approx 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{array} \right.$$

**例 2.6.2** 如图 2.6.1 所示, 缓变的正弦交流电压源  $u = U_m \sin \omega t$ , 连接到一圆形平行板电容器的两个极板上。设极板面积为  $S$ 、两极板的间距为  $d$ , 两极板间填充的介电常数为  $\varepsilon$  的电介质, 忽略边缘效应。(1) 求电容器中的电场强度和磁场强度; (2) 证明电容器两极板间的位移电流与连接导线中的传导电流相等。

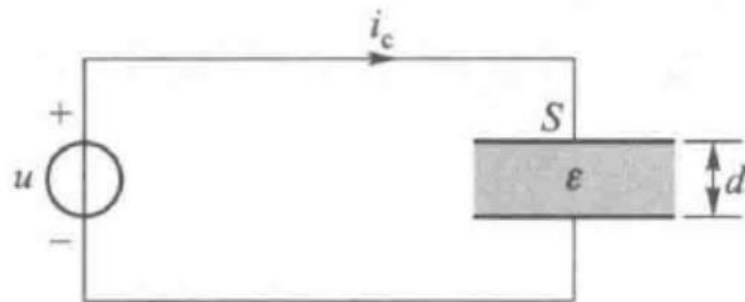


图 2.6.1 与交流电压源连接的平行板电容器

**解:** (1) 在电压随时间缓变的情况下, 忽略边缘效应时, 间距为  $d$  的两平行板之间的电场可以近似为均匀场, 故得到电容器中的电场强度

$$E = \frac{u}{d} = \frac{U_m}{d} \sin \omega t$$

由于轴对称性, 磁场强度  $\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi H(\rho, t)$ 。由  $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ , 得到电容器中的磁场强度

$$H(\rho, t) = \frac{\varepsilon \omega U_m}{2d} \rho \cos \omega t$$



## (2) 导线中的传导电流

$$i_c = \frac{dq}{dt} = \frac{d(\rho_s S)}{dt} = \frac{d}{dt}(\epsilon S E) = \frac{\omega \epsilon S U_m}{d} \cos \omega t$$

极板间的位移电流

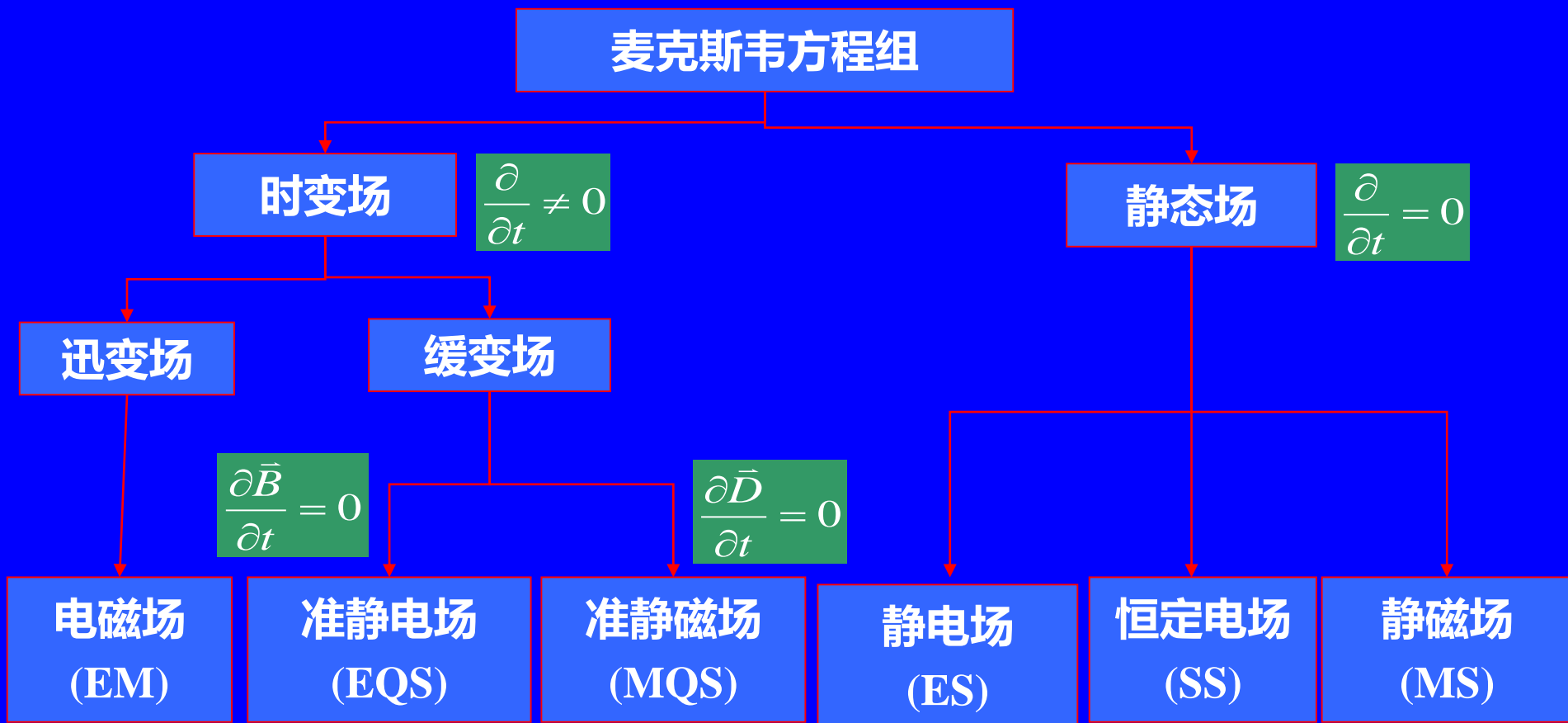
$$i_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} dS = \frac{\epsilon \omega S U_m}{d} \cos \omega t = i_c$$

## 2. 磁准静态电磁场

若  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  可忽略，即位移电流密度远小于传导电流密度，则

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} \approx \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{cases}$$

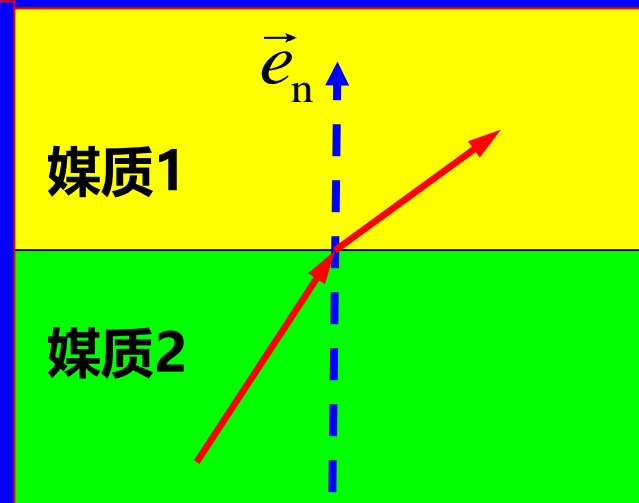
小结： 麦克斯韦方程适用范围：一切宏观电磁现象。



## 2.7 电磁场的边界条件

- 什么是电磁场的边界条件？

实际电磁场问题都是在一定的物理空间内发生的，该空间中可能是由多种不同媒质组成的。边界条件就是不同媒质的分界面上的电磁场矢量满足的关系，是在不同媒质分界面上电磁场的基本属性。



- 为什么要研究边界条件？

物理：由于在分界面两侧介质的特性参数发生突变，场在界面两侧也发生突变。麦克斯韦方程组的微分形式在分界面两侧失去意义，必须采用边界条件。

- 如何讨论边界条件？

数学：麦克斯韦方程组是微分方程组，其解是不确定的，边界条件起定解的作用。

麦克斯韦方程组的积分形式在不同媒质的分界面上仍然适用，由此可导出电磁场矢量在不同媒质分界面上的边界条件。

### 本节内容

2.7.1 边界条件一般表达式

2.7.2 理想导体表面上的边界条件

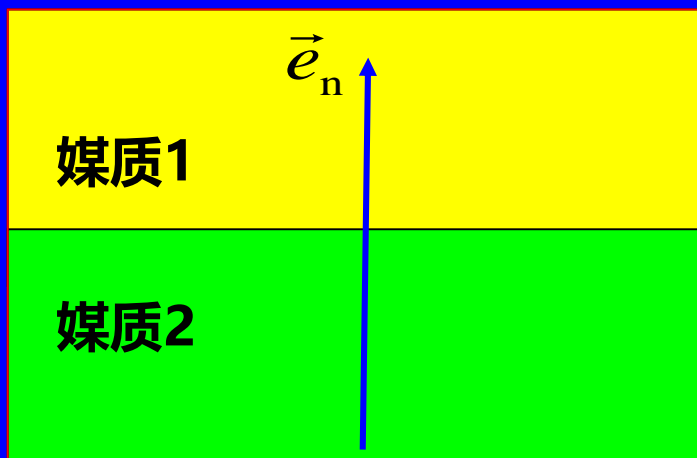
2.7.3 理想介质分界面上的边界条件

## 2.7.1 边界条件一般表达式

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \\ \vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \end{array} \right.$$



分界面上的电荷面密度

分界面上的电流面密度

## ■ 边界条件的推证

### (1) 电磁场量的法向边界条件

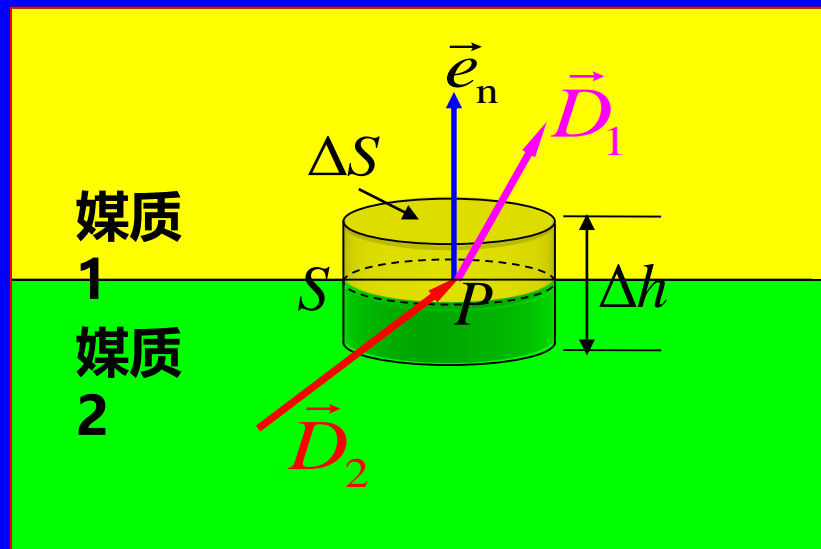
在两种媒质的交界面上任取一点 $P$ ，作一个包围点 $P$ 的扁平圆柱曲面 $S$ ，如图表示。

令 $\Delta h \rightarrow 0$ ，则由

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \xrightarrow{\Delta h \rightarrow 0} (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{e}_n \Delta S = \rho_s \Delta S$$

即  $\vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$       或       $D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$

同理，由  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \xrightarrow{\Delta h \rightarrow 0} \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$       或       $B_{1n} = B_{2n}$

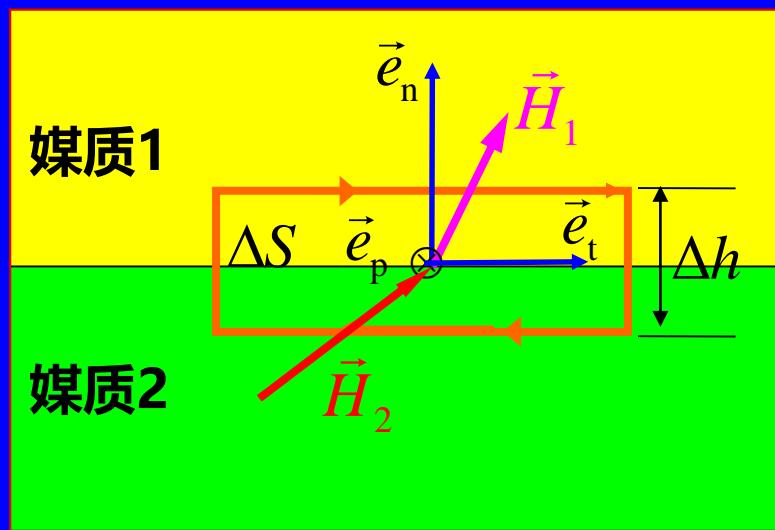


## (2) 电磁场量的切向边界条件

在媒质分界面两侧，选取如图所示的小环路，令 $\Delta h \rightarrow 0$ ，则由

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \longrightarrow (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \vec{e}_t = \vec{J}_S \cdot \vec{e}_p$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_t = \vec{e}_p \times \vec{e}_n &\longrightarrow (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \vec{e}_t = (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot (\vec{e}_p \times \vec{e}_n) \\ &= [\vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)] \cdot \vec{e}_p \end{aligned}$$



故得

$$\vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S$$

或

$$H_{1t} - H_{2t} = J_S$$

同理得

$$\vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

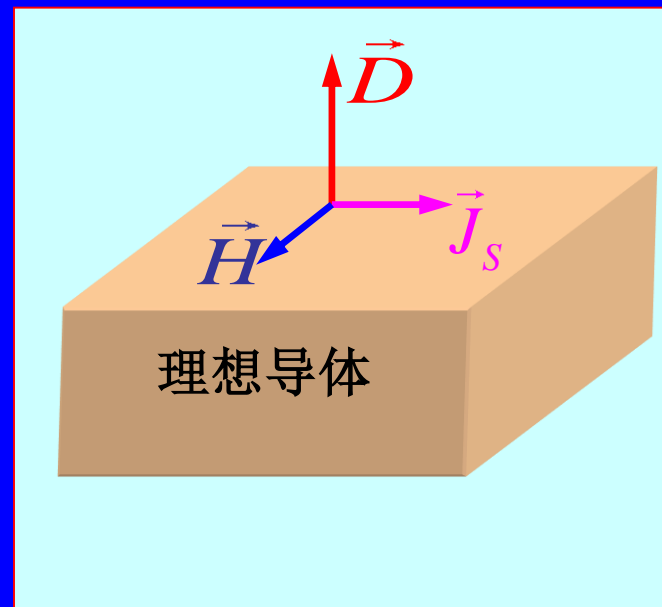
或

$$E_{1t} = E_{2t}$$

## 2.7.2 理想导体表面上的边界条件

- 理想导体：电导率为无限大的导电媒质
- 特征：电磁场不可能进入理想导体内
- 理想导体表面上的边界条件

设媒质2为理想导体，则 $E_2$ 、 $D_2$ 、 $H_2$ 、 $B_2$ 均为零，故

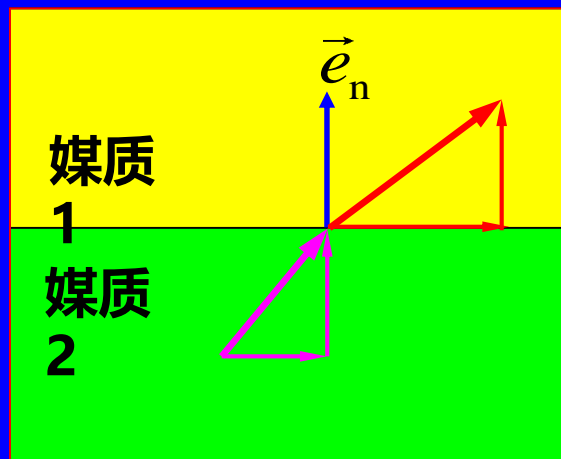


$\vec{e}_n \cdot \vec{D} = \rho_s$	👉 理想导体表面上的电荷密度等于 $\vec{D}$ 的法向分量
$\vec{e}_n \cdot \vec{B} = 0$	👉 理想导体表面上 $\vec{B}$ 的法向分量为0
$\vec{e}_n \times \vec{E} = 0$	👉 理想导体表面上 $\vec{E}$ 的切向分量为0
$\vec{e}_n \times \vec{H} = \vec{J}_s$	👉 理想导体表面上的电流密度等于 $\vec{H}$ 的切向分量

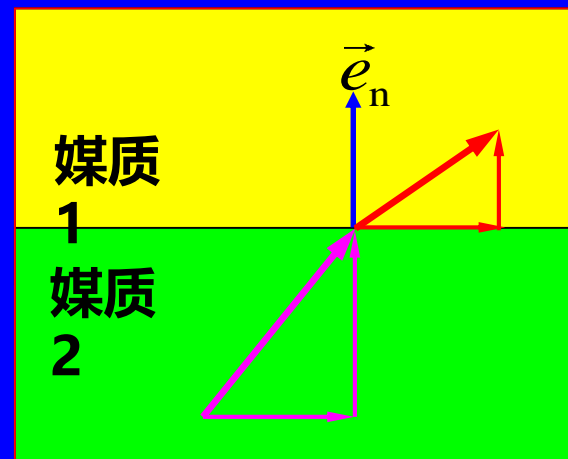


## 2.7.3 理想介质分界面上的边界条件

在两种理想介质分界面上，通常没有电荷和电流分布，即  $J_S = 0$ 、 $\rho_S = 0$ ，故



$\vec{D}$ 、 $\vec{B}$ 的法向分量连续



$\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 的切向分量连续

$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \end{cases}$	👉	$\vec{D}$ 的法向分量连续
	👉	$\vec{B}$ 的法向分量连续
	👉	$\vec{E}$ 的切向分量连续
	👉	$\vec{H}$ 的切向分量连续

**例2.7.1**  $z < 0$  的区域的媒质参数为  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ 、 $\mu_1 = \mu_0$ 、 $\sigma_1 = 0$ ， $z > 0$  区域的媒质参数为  $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_0$ 、 $\mu_2 = 20\mu_0$ 、 $\sigma_2 = 0$ 。若媒质1中的电场强度为  $\vec{E}_1(z, t) = \vec{e}_x [60 \cos(15 \times 10^8 t - 5z) + 20 \cos(15 \times 10^8 t + 5z)]$  V/m

媒质2中的电场强度为  $\vec{E}_2(z, t) = \vec{e}_x A \cos(15 \times 10^8 t - 50z)$  V/m

- (1) 试确定常数A的值; (2) 求磁场强度  $\vec{H}_1(z, t)$  和  $\vec{H}_2(z, t)$  ;  
 (3) 验证  $\vec{H}_1(z, t)$  和  $\vec{H}_2(z, t)$  满足边界条件。

**解：**(1) 这是两种电介质的分界面，在分界面  $z = 0$  处，有

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(0, t) &= \vec{e}_x [60 \cos(15 \times 10^8 t) + 20 \cos(15 \times 10^8 t)] \\ &= \vec{e}_x 80 \cos(15 \times 10^8 t) \quad \text{V/m} \end{aligned}$$

$$\vec{E}_2(0, t) = \vec{e}_x A \cos(15 \times 10^8 t) \quad \text{V/m}$$

利用两种电介质分界面上电场强度的切向分量连续的边界条件

$$E_1(0, t) = E_2(0, t)$$

得到

$$A = 80 \quad \text{V/m}$$

(2) 由  $\nabla \times \vec{E}_1 = -\mu_1 \frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t}$ , 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \vec{E}_1 = -\vec{e}_y \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E_{1x}}{\partial z} \\ &= -\vec{e}_y \frac{1}{\mu_0} [300 \sin(15 \times 10^8 t - 5z) - 100 \sin(15 \times 10^8 t + 5z)] \end{aligned}$$

将上式对时间  $t$  积分, 得

$$\vec{H}_1(z, t) = \vec{e}_y \frac{1}{\mu_0} [2 \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t - 5z) - \frac{2}{3} \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t + 5z)] \quad \text{A/m}$$

同样, 由  $\nabla \times \vec{E}_2 = -\mu_2 \frac{\partial \vec{H}_2}{\partial t}$ , 得

$$\vec{H}_2(z, t) = \vec{e}_y \frac{4}{3\mu_0} \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t - 5z) \quad \text{A/m}$$

**(3)  $z = 0$  时**

$$\begin{aligned} \vec{H}_1(0, t) &= \vec{e}_y \frac{1}{\mu_0} [2 \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t) - \frac{2}{3} \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t)] \\ &= \vec{e}_y \frac{4}{3\mu_0} \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t) \quad \text{A/m} \end{aligned}$$

$$\vec{H}_2(0, t) = \vec{e}_y \frac{4}{3\mu_0} \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t) \quad \text{A/m}$$

可见, 在  $z = 0$  处, 磁场强度的切向分量是连续的, 因为在分界面上 ( $z = 0$ ) 不存在面电流。

**例 2.7.2** 如图所示, 1区的媒质参数为 $\varepsilon_1 = 5\varepsilon_0$ 、 $\mu_1 = \mu_0$ 、 $\sigma_1 = 0$ , 2区的媒质参数为 $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ 、 $\mu_2 = \mu_0$ 、 $\sigma_2 = 0$ 。若已知2区的电场强度为  $\vec{E}_2 = \vec{e}_x 2y + \vec{e}_y 2x + \vec{e}_z (3+z)$  V/m

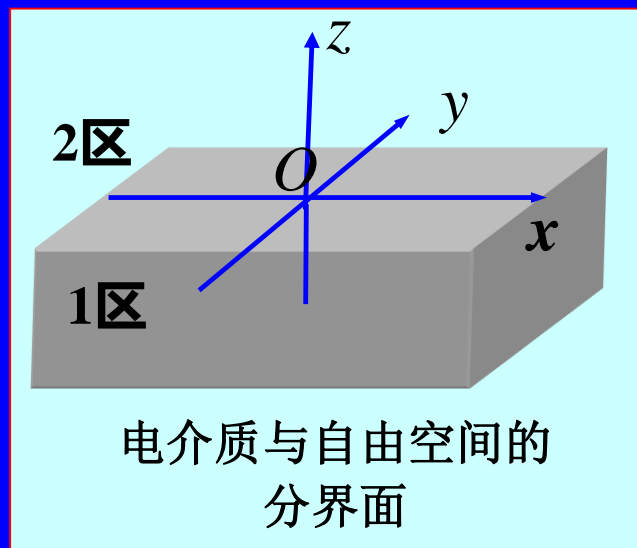
试问关于1区中的  $\vec{E}_1$  和  $\vec{D}_1$  能求得出吗?

**解** 根据边界条件, 只能求得边界面  $z=0$  处的  $\vec{E}_1$  和  $\vec{D}_1$ 。

由  $\vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)|_{z=0} = 0$ , 有

$$-\vec{e}_z \times \{ \vec{e}_x E_{1x} + \vec{e}_y E_{1y} + \vec{e}_z E_{1z} - [\vec{e}_x 2y + \vec{e}_y 2x + \vec{e}_z (3+z)] \} \Big|_{z=0} \\ = \vec{e}_y (E_{1x} - 2y) - \vec{e}_x (E_{1y} - 2x) = 0$$

则得  $E_{1x} = 2y, \quad E_{1y} = 2x$



$$D_{1x} = \varepsilon_1 E_{1x} = 10\varepsilon_0 y, \quad D_{1y} = \varepsilon_1 E_{1y} = 25\varepsilon_0 x$$

**又由**  $\vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0$  , **有**

$$\vec{e}_z \cdot [\vec{e}_x D_{1x} + \vec{e}_y D_{1y} + \vec{e}_z D_{1z} - (\vec{e}_x D_{2x} + \vec{e}_y D_{2y} + \vec{e}_z D_{2z})]_{z=0} = 0$$

**则得**

$$D_{1z} \Big|_{z=0} = D_{2z} \Big|_{z=0} = \varepsilon_0 (3 + z) \Big|_{z=0} = 3\varepsilon_0$$

$$E_{1z} \Big|_{z=0} = \frac{D_{1z}}{\varepsilon_1} \Big|_{z=0} = \frac{3\varepsilon_0}{5\varepsilon_0} = \frac{3}{5}$$

**最后得到**

$$\vec{E}_1(x, y, 0) = \vec{e}_x 2y + \vec{e}_y 2x + \vec{e}_z \frac{3}{5}$$

$$\vec{D}_1(x, y, 0) = \vec{e}_x 10\varepsilon_0 y + \vec{e}_y 10\varepsilon_0 x + \vec{e}_z 3\varepsilon_0$$

**例2.7.3** 两块无限大的理想导体平板分别置于 $z = 0$  和  $z = d$  处, 若平板之间的电场强度为

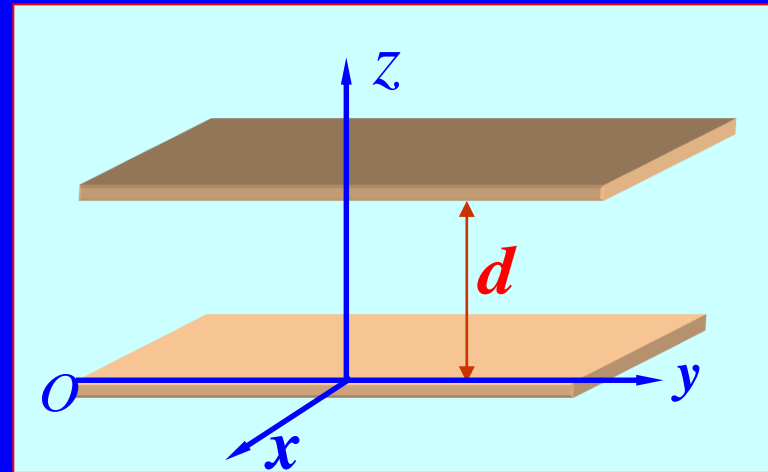
$$\vec{E} = \vec{e}_y E_0 \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos(\omega t - k_x x) \quad \text{V/m}$$

试求: (1) 磁场强度 $\vec{H}$ ; (2) 导体表面的电流密度 $\vec{J}_s$ 。

**解** (1) 由 $\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ , 有

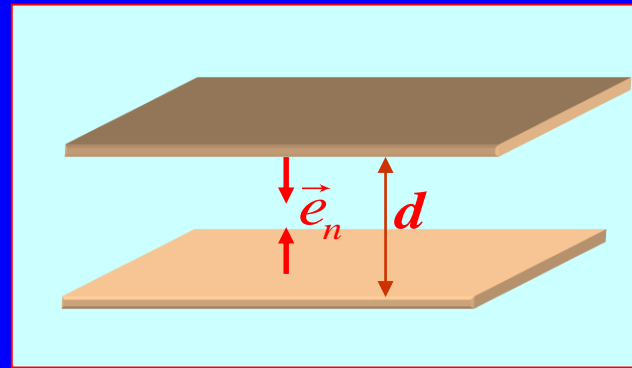
$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{E} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \left( -\vec{e}_x \frac{\partial E_y}{\partial z} + \vec{e}_z \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{E_0}{\mu_0} \left[ \vec{e}_x \frac{\pi}{d} \cos\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos(\omega t - k_x x) - \vec{e}_z k_x \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \sin(\omega t - k_x x) \right]$$



将上式对时间  $t$  积分, 得

$$\begin{aligned}\vec{H}(x, z, t) &= \int \frac{\partial \vec{H}(x, z, t)}{\partial t} dt \\ &= \vec{e}_x \frac{\pi E_0}{\omega \mu_0 d} \cos\left(\frac{\pi}{d} z\right) \sin(\omega t - k_x x) + \\ &\quad \vec{e}_z \frac{k_x E_0}{\omega \mu_0} \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos(\omega t - k_x x) \quad (\text{A/m})\end{aligned}$$



(2)  $z = 0$  处导体内表面的面电流密度和面电荷密度为

$$\vec{J}_S = \vec{e}_n \times \vec{H} \Big|_{z=0} = \vec{e}_z \times \vec{H} \Big|_{z=0} = \vec{e}_y \frac{\pi E_0}{\omega \mu_0 d} \sin(\omega t - k_x x) \quad (\text{A/m})$$

$$\rho_S = \vec{e}_n \cdot \vec{D} \Big|_{z=0} = \vec{e}_z \cdot \varepsilon_0 \vec{E} \Big|_{z=0} = 0$$

$z = d$  处导体内表面的面电流密度和面电荷密度为

$$\vec{J}_S = \vec{e}_n \times \vec{H} \Big|_{z=d} = (-\vec{e}_z) \times \vec{H} \Big|_{z=d} = \vec{e}_y \frac{\pi E_0}{\omega \mu_0 d} \sin(\omega t - k_x x) \quad (\text{A/m})$$

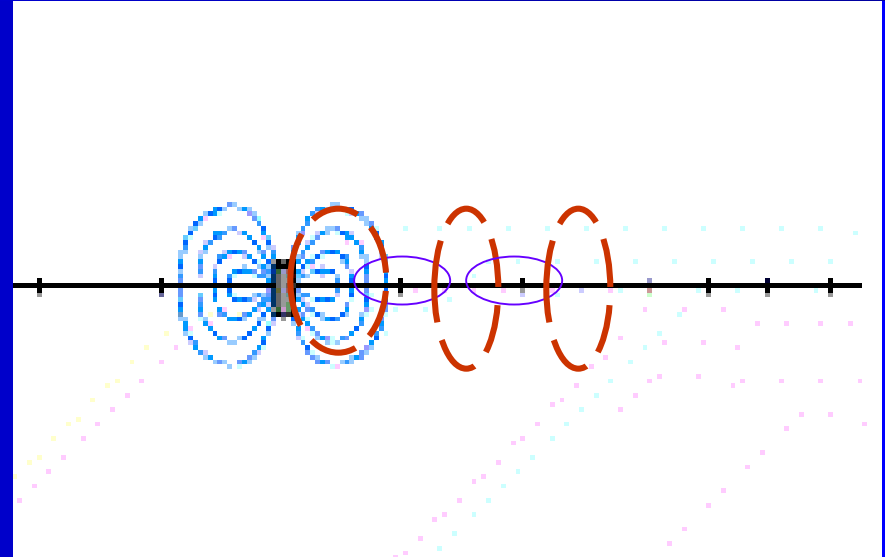
$$\rho_S = \vec{e}_n \cdot \vec{D} \Big|_{z=d} = -\vec{e}_z \cdot \varepsilon_0 \vec{E} \Big|_{z=d} = 0$$



本章作业:

2.20, 2.21, 2.23, 2.25, 2.26, 2.28

- 时变电场的激发源除了电荷以外，还有变化的磁场；而时变磁场的激发源除了传导电流以外，还有变化的电场。电场和磁场互为激发源，相互激发。
- 时变电磁场的电场和磁场不再相互独立，而是相互关联，构成一个整体——电磁场。电场和磁场分别是电磁场的两个分量。
- 在离开辐射源（如天线）的无源空间中，电荷密度和电流密度矢量为零，电场和磁场仍然可以相互激发，从而在空间形成电磁振荡并传播，这就是电磁波。



□ 在无源空间中，两个旋度方程分别为

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

可以看到两个方程的右边相差一个负号，而正是这个负号使得电场和磁场构成一个相互激励又相互制约的关系。当磁场减小时，电场的旋涡源为正，电场将增大；而当电场增大时，使磁场增大，磁场增大反过来又使电场减小。

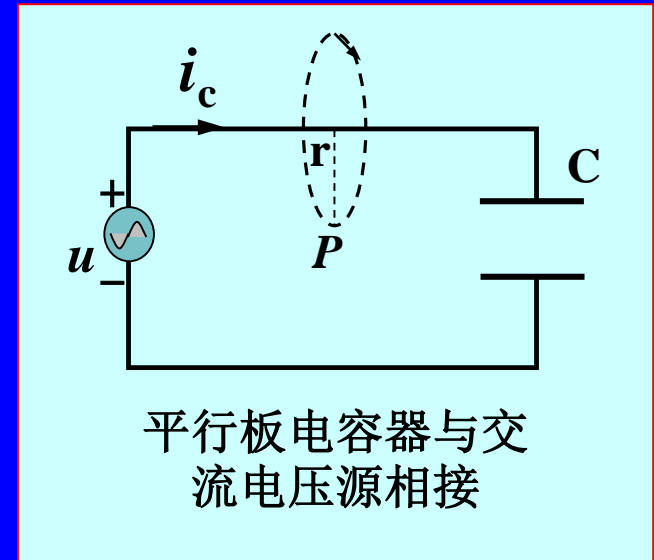
**例 2.6.1** 正弦交流电压源  $u = U_m \sin(\omega t)$  连接到平行板电容器的两个极板上，如图所示。(1) 证明电容器两极板间的位移电流与连接导线中的传导电流相等；(2) 求导线附近距离连接导线为  $r$  处的磁场强度。

**解：**(1) 导线中的传导电流为

$$\begin{aligned} i_c &= C \frac{du}{dt} = C \frac{d}{dt} [U_m \sin(\omega t)] \\ &= C \omega U_m \cos(\omega t) \end{aligned}$$

忽略边缘效应时，间距为  $d$  的两平行板之间的电场为  $E = u / d$ ，则

$$D = \varepsilon E = \frac{\varepsilon U_m \sin(\omega t)}{d}$$



则极板间的位移电流为

$$\begin{aligned} i_d &= \int_S \vec{J}_d \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} dS \\ &= \frac{\varepsilon U_m \omega}{d} \cos(\omega t) S_0 = C \omega U_m \cos(\omega t) = i_c \end{aligned}$$

式中的 $S_0$ 为极板的面积，而 $\frac{\varepsilon S_0}{d} = C$ 为平行板电容器的电容。

(2) 以 $r$ 为半径作闭合曲线 $C$ ，由于连接导线本身的轴对称性，使得沿闭合线的磁场相等，故

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H_\phi$$

与闭合线较链的只有导线中的传导电流 $i_c = C \omega U_m \cos(\omega t)$ ，故得

$$2\pi r H_\phi = C \omega U_m \cos(\omega t)$$

$$\longrightarrow \vec{H} = \vec{e}_\phi H_\phi = \vec{e}_\phi \frac{C \omega U_m}{2\pi r} \cos(\omega t)$$