第4章 时变电磁场

本章内容

4.1 波动方程

- 麦克斯韦方程 —— 一阶矢量微分方程组，描述电场与磁场间的相互作用关系。
- 波动方程 —— 二阶矢量微分方程，揭示电磁场的波动性。
- 麦克斯韦方程组 $\Rightarrow$ 波动方程。

在线性、各向同性的均匀无损耗媒质中，$\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 满足

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{H}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

对 $\nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ 两边取旋度，有 $\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=-\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{H})$

将 $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ 代入上式，得

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=-\mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}$$

利用恒等式 $\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}$ 和 $\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$，可得到

$$\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho$$

同理，对 $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ 两边取旋度，再将 $\nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ 代入。可得磁场强度矢量满足的波动方程

$$\nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\vec{J}$$

在无源空间中，电流密度和电荷密度处处为零，即 $\rho=0, \vec{J}=0$ 可得到无源区域的波动方程

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

波动方程的解是在空间中传播的电磁波，研究电磁波的传播问题可以归结为在给定的边界条件下求波动方程的解。

4.2 电磁场的位函数

4.2.1 矢量位和标量位

- 矢量位 $\nabla\cdot\vec{B}=0 \Longrightarrow \vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

- 标量位

把 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ **代入** $\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ **，有**

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{A}) \Longrightarrow \nabla\times(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})=0$$

这表明 $\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ **是无旋的，可以用一个标量函数（标量位）的梯度来表示，即**

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi \Longrightarrow \vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi$$

位函数的不确定性

满足下列变换关系的两组位函数（$\vec{A}$、φ）**和**（$\vec{A}'$、φ'）**能描述同一个电磁场问题。**

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi \\ \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial\psi}{\partial t} \end{cases}$$

ψ **为任意可微函数**

即
$$\begin{cases} \nabla\times\vec{A}' = \nabla\times(\vec{A}+\nabla\psi) = \nabla\times\vec{A} + \nabla\times\nabla\psi = \nabla\times\vec{A} = \vec{B} \\ -\dfrac{\partial\vec{A}'}{\partial t} - \nabla\varphi' = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{A}+\nabla\psi) - \nabla(\varphi - \dfrac{\partial\psi}{\partial t}) = -\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi = \vec{E} \end{cases}$$

也就是说，对一给定的电磁场可用不同的位函数来描述。不同位函数之间的上述变换称为规范变换。

- 原因：**未规定** $\vec{A}$ **的散度。**

位函数的规范条件

造成位函数的不确定性的原因就是没有规定$\vec{A}$的散度。利用位函数的不确定性，可通过规定$\vec{A}$的散度使位函数满足的方程得以简化。

在电磁理论中，通常采用洛仑兹条件，即

$$\nabla\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

除了利用洛仑兹条件外，另一种常用的是库仑条件，即

$$\nabla\cdot\vec{A}=0$$

4.2.2 达朗贝尔方程

在线性、各向同性的均匀媒质中，把 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ $\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi$

代入 $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$**，则有** $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ $\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu}$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\mu\vec{J}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\mu\varepsilon\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

利用矢量恒等式 $\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$**，可得到**

$$\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla(\nabla\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t})=-\mu\vec{J}$$

利用洛伦兹条件 $\nabla\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=0$**，上式简化为**

$$\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}$$

同样，将$\vec{E}=-\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi$代入$\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon}$，可得到

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A})=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

利用洛伦兹条件$\nabla\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=0$，可得到

$$\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

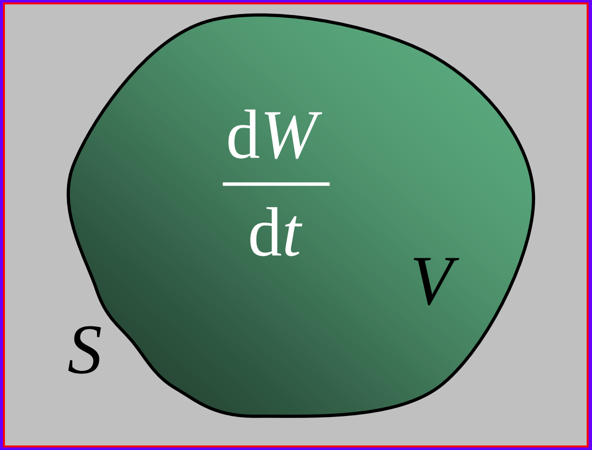
- 应用洛仑兹条件的特点：① 位函数满足的方程在形式上是对称的，且比较简单，易求解；② 解的物理意义非常清楚，明确地反映出电磁场具有有限的传递速度；③ 矢量位只决定于J，标量位只决定于ρ，这对求解方程特别有利。只需解出A，无需解出φ 就可得到待求的电场和磁场。

- **若应用库仑条件$\nabla \cdot \vec{A} = 0$，类似地，可得到矢量位和标量位满足的方程，但形式上不同于达朗贝尔方程，矢量位A和标量位 φ 的解也不相同，但最终由位函数求解出的电场强度E和磁感应强度B是相同的。**

电磁位函数只是简化时变电磁场分析求解的一种辅助函数。

4.3 电磁能量守恒定律

电磁能量及守恒关系



在线性、各向同性媒质中

电场能量密度：$w_e = \dfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$

磁场能量密度：$w_m = \dfrac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$

电磁能量密度：$w = w_e + w_m = \dfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \dfrac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$

空间区域 V 中的电磁能量：$W = \int_V w\mathrm{d}V = \int_V (\dfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \dfrac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B})\mathrm{d}V$

- 特点：**当场随时间变化时，空间各点的电磁场能量密度也要随时间改变，从而引起电磁能量流动。**

- 电磁能量守恒关系：

进入体积V的能量＝体积V内增加的能量＋体积V内损耗的能量

坡印廷定理（表征电磁能量守恒关系的定理）

微分形式： $$-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B})+\vec{E}\cdot\vec{J}$$

积分形式： $$-\oint_S(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B})\mathrm{d}V+\int_V\vec{E}\cdot\vec{J}\,\mathrm{d}V$$

其中： $-\oint_S(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ —— **单位时间内通过曲面S进入体积V的电磁场能量。**

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B})\mathrm{d}V$ —— **单位时间内体积V中所增加的电磁场能量。**

$\int_V\vec{E}\cdot\vec{J}\,\mathrm{d}V$ —— **单位时间内电磁场对体积V中的电荷做功而消耗的电磁场能量。**

坡印廷定理可由麦克斯韦方程组推证

由 $$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}=\vec{E}\cdot\vec{J}+\vec{E}\cdot\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}=-\vec{H}\cdot\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

将以上两式相减，得到

$$\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}-\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}=\vec{E}\cdot\vec{J}+\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

在线性、各向同性的媒质中，当参数都不随时间变化时，则有

$$\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial(\vec{E}\cdot\vec{E})}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D})$$

$$\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\mu\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\frac{1}{2}\mu\frac{\partial(\vec{H}\cdot\vec{H})}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B})$$

再利用矢量恒等式： $\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}-\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}=-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})$

即可得到坡印廷定理的微分形式

$$-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B})+\vec{E}\cdot\vec{J}$$

在任意闭曲面S 所包围的体积V上，对上式两端积分，并应用散度定理，即可得到坡印廷定理的积分形式

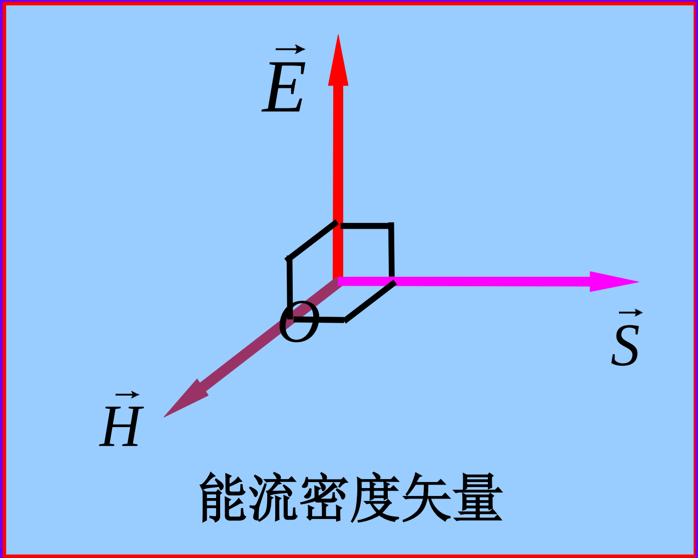
$$-\oint_S(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B})\mathrm{d}V+\int_V\vec{E}\cdot\vec{J}\,\mathrm{d}V$$

- 物理意义：**单位时间内，通过曲面S 进入体积V的电磁能量等于体积V 中所增加的电磁场能量与损耗的能量之和。**

坡印廷矢量（电磁能流密度矢量）

描述时变电磁场中电磁能量传输的一个重要物理量

- 定义：$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ （$\mathbf{W/m^2}$）

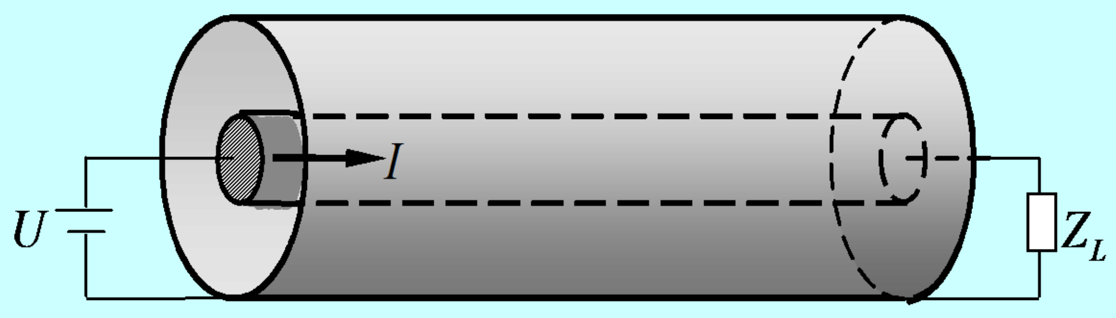


- 物理意义：

$\vec{S}$ 的方向 —— **电磁能量的流动方向**

$\vec{S}$ 的大小 —— **单位时间内穿过与能量流动方向相垂直的单位面积的电磁能量。**

例4.3.1 同轴线的内导体半径为a、外导体的内半径为b，其间填充均匀的理想介质。设内外导体间的电压为U，导体中流过的电流为I。（1）在导体为理想导体的情况下，计算同轴线中传输的功率；（2）当导体的电导率σ为有限值时，计算通过内导体表面进入每单位长度内导体的功率。



同轴线

解： (1) 在内、外导体为理想导体的情况下，电场和磁场只存在于内、外导体之间的理想介质中，内、外导体表面的电场无切向分量，只有电场的径向分量。利用高斯定理和安培环路定理，容易求得内外导体之间的电场和磁场分别为

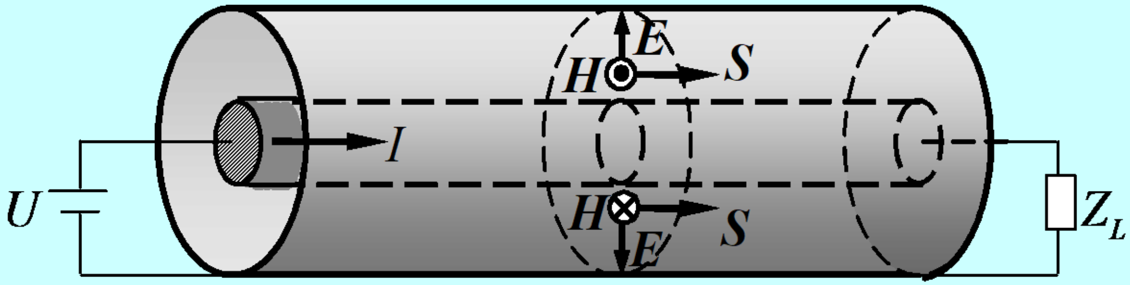
$$\vec{E} = \vec{e}_\rho \frac{U}{\rho \ln(b/a)}, \qquad \vec{H} = \vec{e}_\phi \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (a < \rho < b)$$

内外导体之间任意横截面上的坡印廷矢量

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = [\vec{e}_\rho \frac{U}{\rho \ln(b/a)}] \times (\vec{e}_\phi \frac{I}{2\pi\rho}) = \vec{e}_z \frac{UI}{2\pi\rho^2 \ln(b/a)}$$

穿过任意横截面的功率为

$$P=\int_S \vec{S}\cdot\vec{e}_z \mathrm{d}S=\int_a^b \frac{UI}{2\pi\rho^2\ln(b/a)}2\pi\rho\mathrm{d}\rho=UI$$



同轴线中的电场、磁场和坡印廷矢量
（理想导体情况）

同轴线传输的功率是通过内外导体间的电磁场传递到负载，而不是经过导体内部传递的。

（2）当导体的电导率σ为有限值时，导体内部存在沿电流方向的电场

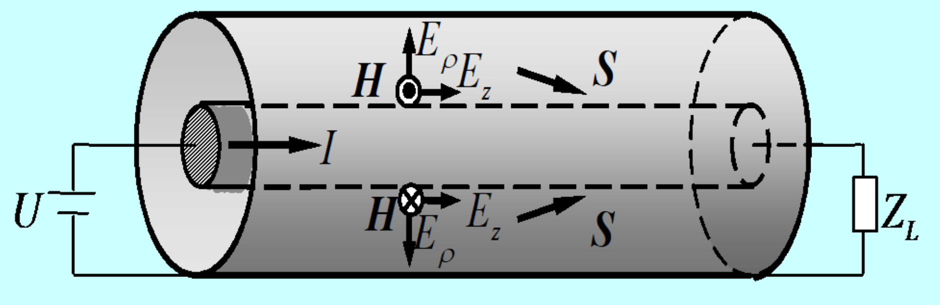
$$\vec{E}_{内}=\frac{\vec{J}}{\sigma}=\vec{e}_z\frac{I}{\pi a^2\sigma}$$

根据边界条件，在内导体表面上电场的切向分量连续，即 $\vec{E}_{外z}=\vec{E}_{内z}$

因此，在内导体表面外侧的电场为

$$\vec{E}_{外}\Big|_{\rho=a}=\vec{e}_\rho\frac{U}{a\ln(b/a)}+\vec{e}_z\frac{I}{\pi a^2\sigma}$$

磁场则仍为 $\vec{H}_{外}\Big|_{\rho=a}=\vec{e}_\phi\frac{I}{2\pi a}$

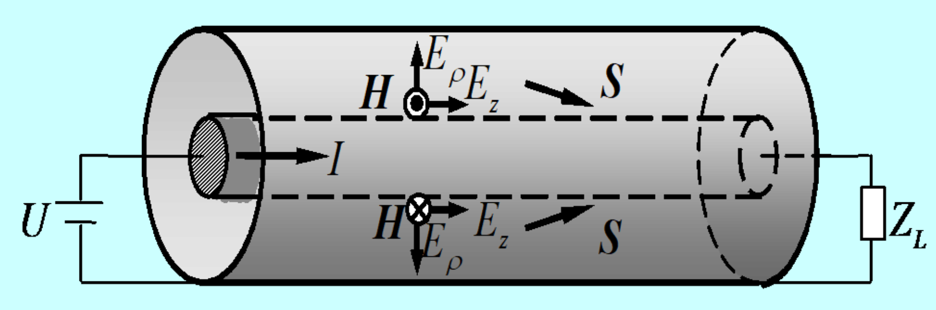


同轴线中的电场、磁场和坡印廷矢量
（非理想导体情况）

内导体表面外侧的坡印廷矢量为

$$\vec{S}_{外}\Big|_{\rho=a}=(\vec{E}_{外}\times\vec{H}_{外})\Big|_{\rho=a}=-\vec{e}_\rho\frac{I^2}{2\pi^2a^3\sigma}+\vec{e}_z\frac{UI}{2\pi a^2\ln(b/a)}$$

由此可见，内导体表面外侧的坡印廷矢量既有轴向分量，也有径向分量，如图所示。进入每单位长度内导体的功率为



同轴线中的电场、磁场和坡印廷矢量
（非理想导体情况）

$$P=\int_S \vec{S}_{外}\Big|_{\rho=a}\cdot(-\vec{e}_\rho)\mathrm{d}S=\int_0^1 \frac{I^2}{2\pi^2 a^3\sigma}2\pi a\mathrm{d}z=\frac{I^2}{\pi a^2\sigma}=RI^2$$

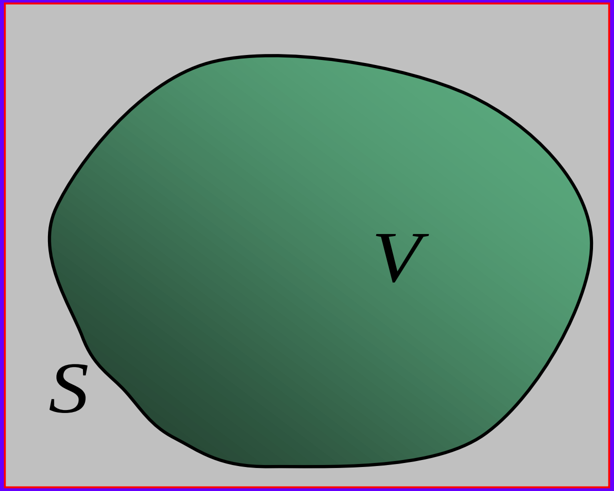
式中 $R=\dfrac{1}{\pi a^2\sigma}$ 是单位长度内导体的电阻。由此可见，进入内导体中功率等于这段导体的焦耳损耗功率。

以上分析表明电磁能量是由电磁场传输的，导体仅起着定向引导电磁能流的作用。当导体的电导率为有限值时，进入导体中的功率全部被导体所吸收，成为导体中的焦耳热损耗功率。

4. 4 时变电磁场的唯一性定理

唯一性问题

在分析有界区域的时变电磁场问题时，常常需要在给定的初始条件和边界条件下，求解麦克斯韦方程。那么，在什么定解条件下，有界区域中的麦克斯韦方程的解才是唯一的呢？这就是麦克斯韦方程的解的唯一性问题。



唯一性定理的表述

在以闭曲面S为边界的有界区域V内，如果给定$t=0$时刻的电场强度和磁场强度的初始值，并且在$t\geq 0$时，给定边界面S上的电场强度的切向分量或磁场强度的切向分量，那么，在$t>0$时，区域V内的电磁场由麦克斯韦方程唯一地确定。

唯一性定理的证明

利用反证法对唯一性定理给予证明。假设区域内的解不是唯一的，那么至少存在两组解 $\vec{E}_1$、$\vec{H}_1$ **和** $\vec{E}_2$、$\vec{H}_2$ **满足同样的麦克斯韦方程，且具有相同的初始条件和边界条件。**

令 $\vec{E}_0 = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$ $\quad$ $\vec{H}_0 = \vec{H}_1 - \vec{H}_2$

则在区域 V **内** $\vec{E}_0$ **和** $\vec{H}_0$ **的初始值为零；在边界面** S **上电场强度** $\vec{E}_0$ **的切向分量为零或磁场强度** $\vec{H}_0$ **的切向分量为零，且** $\vec{E}_0$ **和** $\vec{H}_0$ **满足麦克斯韦方程**

$$\nabla\times\vec{H}_0 = \sigma\vec{E}_0 + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}_0}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{E}_0 = -\mu\frac{\partial\vec{H}_0}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot(\mu\vec{H}_0) = 0 \qquad \nabla\cdot(\varepsilon\vec{E}_0) = 0$$

根据坡印廷定理，应有

$$-\oint_S (\vec{E}_0 \times \vec{H}_0)\cdot \vec{e}_{\mathrm{n}} \mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \left(\frac{1}{2}\mu\left|\vec{H}_0\right|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\left|\vec{E}_0\right|^2\right)\mathrm{d}V + \int_V \sigma\left|\vec{E}_0\right|^2 \mathrm{d}V$$

根据 $\vec{E}_0$ 和 $\vec{H}_0$ 的边界条件，上式左端的被积函数为

$$(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0)\cdot \vec{e}_{\mathrm{n}}\Big|_S = (\vec{e}_{\mathrm{n}} \times \vec{E}_0)\cdot \vec{H}_0\Big|_S = (\vec{H}_0 \times \vec{e}_{\mathrm{n}})\cdot \vec{E}_0\Big|_S = 0$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \left(\frac{1}{2}\mu\left|\vec{H}_0\right|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\left|\vec{E}_0\right|^2\right)\mathrm{d}V + \int_V \sigma\left|\vec{E}_0\right|^2 \mathrm{d}V = 0$$

由于 $\vec{E}_0$ 和 $\vec{H}_0$ 的初始值为零，将上式两边对 t 积分，可得

$$\int_V \left(\frac{1}{2}\mu\left|\vec{H}_0\right|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\left|\vec{E}_0\right|^2\right)\mathrm{d}V + \int_0^t \left(\int_V \sigma\left|\vec{E}_0\right|^2 \mathrm{d}V\right)\mathrm{d}t = 0$$

上式中两项积分的被积函数均为非负的，要使得积分为零，必有

$$\vec{E}_0 = 0, \quad \vec{H}_0 = 0$$

即 $\vec{E}_1 = \vec{E}_2, \quad \vec{H}_1 = \vec{H}_2$ （证毕）

- **唯一性定理指出了获得唯一解所必须满足的条件，为电磁场问题的求解提供了理论依据，具有非常重要的意义和广泛的应用。**

4. 5　时谐电磁场

4.5.1　时谐电磁场的复数表示

- 时谐电磁场的概念

如果场源以一定的角频率随时间呈时谐（正弦或余弦）变化，则所产生电磁场也以同样的角频率随时间呈时谐变化。这种以一定角频率作时谐变化的电磁场，称为时谐电磁场或正弦电磁场。

- 研究时谐电磁场具有重要意义

- **在工程上，应用最多的就是时谐电磁场。广播、电视和通信的载波等都是时谐电磁场。**
- **任意的时变场在一定的条件下可通过傅里叶分析方法展开为不同频率的时谐场的叠加。**

时谐电磁场的复数表示

时谐电磁场可用复数方法来表示，使得大多数时谐电磁场问题的分析得以简化。

设 $u(\vec{r},t)$ 是一个以角频率 ω 随时间 t 作时谐变化的标量函数，它可以是电场和磁场的任意一个分量，也可以是电荷或电流等变量，它与时间的瞬时关系可以表示成

$$u(\vec{r},t)=u_{\mathrm{m}}\cos[\omega t+\phi(\vec{r})]$$

实数表示法或
瞬时表示法

式中的 u_{m} 为振幅、$\phi(\vec{r})$ 为与坐标有关的初相位。

利用三角公式

$$u(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left\{u_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega t+\phi(\vec{r})]}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\boxed{u_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\vec{r})}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}=\mathrm{Re}[\dot{u}(\vec{r})\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}]$$

复数表示法

时间因子

其中

$$\boxed{\dot{u}(\vec{r})}=u_{\mathrm{m}}\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\vec{r})}}$$

复振幅

初相位

照此法，任意时谐矢量函数的各分量 F_i（i 表示x、y 或 z）都是时谐标量函数，即

$$F_i(\vec{r},t)=F_{im}(\vec{r})\cos[\omega t+\phi_i(\vec{r})]$$

复数表示为

$$F_i(\vec{r},t)=\mathrm{Re}[F_{im}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_i(\vec{r})}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

各分量合成以后，于是矢量函数的复矢量表示为

$$\vec{F}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}[\boxed{\dot{\vec{F}}_{\mathrm{m}}(\vec{r})}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$\boxed{\dot{\vec{F}}_{\mathrm{m}}(\vec{r})=\vec{e}_x\dot{F}_{x\mathrm{m}}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_x(\vec{r})}+\vec{e}_y\dot{F}_{y\mathrm{m}}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_y(\vec{r})}+\vec{e}_z\dot{F}_{z\mathrm{m}}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_z(\vec{r})}}$$

- 有关复数表示的进一步说明
  - **复矢量只是一种数学表示方式，只与空间有关，与时间无关。**
  - **复矢量并不是真实的场矢量，真实的场矢量是与之相应的瞬时矢量。**
  - **只有频率相同的时谐场之间才能使用复矢量的方法进行运算。**

例4.5.1 将下列场矢量的瞬时值形式写为复数形式

（1） $\vec{E}(z,t)=\vec{e}_x E_{xm}\cos(\omega t-kz+\phi_x)+\vec{e}_y E_{ym}\sin(\omega t-kz+\phi_y)$

（2） $\vec{H}(x,z,t)=\vec{e}_x H_0 k(\frac{a}{\pi})\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(kz-\omega t)$

$$+\vec{e}_z H_0\cos(\frac{\pi x}{a})\cos(kz-\omega t)$$

解： **(1) 由于**

$$\vec{E}(z,t)=\vec{e}_x E_{xm}\cos(\omega t-kz+\phi_x)+\vec{e}_y E_{ym}\cos(\omega t-kz+\phi_y-\frac{\pi}{2})$$

$$=\mathrm{Re}[\vec{e}_x E_{xm}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kz+\phi_x)}+\vec{e}_y E_{ym}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kz+\phi_y-\pi/2)}]$$

所以 $\dot{\vec{E}}_{\mathrm{m}}(z)=\vec{e}_x E_{xm}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-kz+\phi_x)}+\vec{e}_y E_{ym}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-kz+\phi_y-\pi/2)}$

$$=(\vec{e}_x E_{xm}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_x}-\vec{e}_y \mathrm{j}E_{ym}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_y})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

(2) 因为 $\cos(kz-\omega t)=\cos(\omega t-kz)$

$$\sin(kz-\omega t)=\cos(kz-\omega t-\frac{\pi}{2})=\cos(\omega t-kz+\frac{\pi}{2})$$

所以 $$\vec{H}(x,z,t)=\vec{e}_x H_0 k(\frac{a}{\pi})\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(kz-\omega t)+\vec{e}_z H_0\cos(\frac{\pi x}{a})\cos(kz-\omega t)$$

$$=\vec{e}_x H_0 k(\frac{a}{\pi})\sin(\frac{\pi x}{a})\cos(\omega t-kz+\frac{\pi}{2})+\vec{e}_z H_0\cos(\frac{\pi x}{a})\cos(\omega t-kz)$$

故 $$\dot{\vec{H}}_{\mathrm{m}}(x,z)=\vec{e}_x H_0 k(\frac{a}{\pi})\sin(\frac{\pi x}{a})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz+\mathrm{j}\pi/2}+\vec{e}_z H_0\cos(\frac{\pi x}{a})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

例4.5.2 已知电场强度复矢量

$$\dot{\vec{E}}_{\mathrm{m}}(z)=\vec{e}_x \mathrm{j} E_{x\mathrm{m}} \cos(k_z z)$$

其中k_z和$E_{x\mathrm{m}}$为实常数。写出电场强度的瞬时矢量。

解

$$\vec{E}(z,t)=\mathrm{Re}[\vec{e}_x \mathrm{j} E_{x\mathrm{m}} \cos(k_z z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$=\mathrm{Re}[\vec{e}_x E_{x\mathrm{m}} \cos(k_z z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\frac{\pi}{2})}]$$

$$=\vec{e}_x E_{x\mathrm{m}} \cos(k_z z)\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$$

$$=-\vec{e}_x E_{x\mathrm{m}} \cos(k_z z)\sin(\omega t)$$

4.5.2 复矢量的麦克斯韦方程

以电场旋度方程 $\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ **为例，代入相应场量的矢量，可得**

$$\nabla\times[\mathrm{Re}(\dot{\vec{E}}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})]=-\frac{\partial}{\partial t}[\mathrm{Re}(\dot{\vec{B}}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})]$$

将 ∇ **、** $\dfrac{\partial}{\partial t}$ **与Re交换次序，得**

$$\mathrm{Re}[\nabla\times(\dot{\vec{E}}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})]=-\mathrm{Re}[\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\vec{B}}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})]=\mathrm{Re}[-\mathrm{j}\omega\dot{\vec{B}}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

上式对任意 t **均成立。令** $t=0$ **，得** $\mathrm{Re}[\nabla\times\dot{\vec{E}}_{\mathrm{m}}]=-\mathrm{Re}[\mathrm{j}\omega\dot{\vec{B}}_{\mathrm{m}}]$

令 $\omega t=\pi/2$ **，得** $\mathrm{Re}[\mathrm{j}\nabla\times\dot{\vec{E}}_{\mathrm{m}}]=\mathrm{Re}[\mathrm{j}(-\mathrm{j}\omega\dot{\vec{B}}_{\mathrm{m}})]$

即 $\mathrm{Im}[\nabla\times\dot{\vec{E}}_{\mathrm{m}}]=\mathrm{Im}[(-\mathrm{j}\omega\dot{\vec{B}}_{\mathrm{m}})]$ $\Longrightarrow$ $\nabla\times\dot{\vec{E}}_{\mathrm{m}}=-\mathrm{j}\omega\dot{\vec{B}}_{\mathrm{m}}$

从形式上讲，只要把微分算子 $\frac{\partial}{\partial t}$ 用 $\mathrm{j}\omega$ 代替，就可以把时谐电磁场的场量之间的关系，转换为复矢量之间关系。因此得到复矢量的麦克斯韦方程

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}=\vec{\boldsymbol{J}}+\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=-\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0 \\ \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}=\rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla\times\dot{\vec{H}}_{\mathrm{m}}=\dot{\vec{J}}_{\mathrm{m}}+\mathrm{j}\omega\dot{\vec{D}}_{\mathrm{m}} \\ \nabla\times\dot{\vec{E}}_{\mathrm{m}}=-\mathrm{j}\omega\dot{\vec{B}}_{\mathrm{m}} \\ \nabla\cdot\dot{\vec{B}}_{\mathrm{m}}=0 \\ \nabla\cdot\dot{\vec{D}}_{\mathrm{m}}=\dot{\rho}_{\mathrm{m}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\mathrm{j}\omega\vec{D} \\ \nabla\times\vec{E}=-\mathrm{j}\omega\vec{B} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho \end{cases}$$

$\boxed{\dfrac{\partial}{\partial t} \text{——} \mathrm{j}\omega}$

$\boxed{\text{略去“.”和下标m}}$

例题：已知正弦电磁场的电场瞬时值为 $\vec{E}(z,t)=\vec{E}_1(z,t)+\vec{E}_2(z,t)$

式中

$$\begin{cases}\vec{E}_1(z,t)=\vec{e}_x 0.03\sin(10^8\pi t-kz) \\ \vec{E}_2(z,t)=\vec{e}_x 0.04\cos(10^8\pi t-kz-\pi/3)\end{cases}$$

试求：（1）电场的复矢量；（2）磁场的复矢量和瞬时值。

解：（1）因为

$$\vec{E}(z,t)=\vec{e}_x 0.03\sin(10^8\pi t-kz)+\vec{e}_x 0.04\cos(10^8\pi t-kz-\pi/3)$$

$$=\vec{e}_x 0.03\cos(10^8\pi t-kz-\frac{\pi}{2})+\vec{e}_x 0.04\cos(10^8\pi t-kz-\pi/3)$$

$$=\mathrm{Re}[\vec{e}_x 0.03\mathrm{e}^{\mathrm{j}(10^8\pi t-kz-\pi/2)}]+\mathrm{Re}[\vec{e}_x 0.04\mathrm{e}^{\mathrm{j}(10^8\pi t-kz-\pi/3)}]$$

$$=\mathrm{Re}\left[\left(\vec{e}_x 0.03\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz+\pi/2)}+\vec{e}_x 0.04\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz+\pi/3)}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}10^8\pi t}\right]$$

故电场的复矢量为 $\vec{E}(z)=\vec{e}_x[0.03\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}+0.04\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3}]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$

（2）由复数形式的麦克斯韦方程，得到磁场的复矢量

$$\vec{H}(z) = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\nabla\times\vec{E}(z) = \vec{e}_y\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$= \vec{e}_y\frac{k}{\omega\mu_0}[0.03\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} + 0.04\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$= \vec{e}_y k[7.6\times10^{-5}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}} + 1.01\times10^{-4}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{3}}]\mathrm{e}^{-jkz}$$

磁场强度瞬时值

$$\vec{H}(z,t) = \mathrm{Re}[\vec{H}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \vec{e}_y k[7.6\times10^{-5}\sin(10^8\pi t - kz) +$$

$$1.01\times10^{-4}\cos(10^8\pi t - kz - \frac{\pi}{3})]$$

4.5.3 复电容率和复磁导率

实际的媒质都存在损耗：

- 导电媒质——**当电导率有限时，存在欧姆损耗。**
- 电介质——**受到极化时，存在电极化损耗。**
- 磁介质——**受到磁化时，存在磁化损耗。**
- **损耗的大小与媒质性质、随时间变化的频率有关。一些媒质的损耗在低频时可以忽略，但在高频时就不能忽略。**

- 导电媒质的等效复电容率

对于介电常数为ε、电导率为σ的导电媒质，有

$$\nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}+\mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{E}=\mathrm{j}\omega(\varepsilon-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega})\vec{E}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_{\mathrm{c}}\vec{E}$$

其中$\varepsilon_c=\varepsilon-\mathrm{j}\sigma/\omega$、称为导电媒质的等效复介电常数（等效复电容率）。

电介质的复介电常数

对于存在电极化损耗的电介质，有 $\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon''$**，称为复介电常数或复电容率。其虚部为大于零的数，表示电介质的电极化损耗。在高频情况下，实部和虚部都是频率的函数。**

同时存在电极化损耗和欧姆损耗的介质

对于同时存在电极化损耗和欧姆损耗的电介质，复介电常数为

$$\varepsilon_c = \varepsilon' - j(\varepsilon'' + \frac{\sigma}{\omega})$$

磁介质的复磁导率

对于磁性介质，复磁导率数为 $\mu_c = \mu' - j\mu''$**，其虚部为大于零的数，表示磁介质的磁化损耗。**

损耗角正切

工程上通常用损耗角正切来表示介质的损耗特性，其定义为复介电常数或复磁导率的虚部与实部之比，即有

电介质 $\tan\delta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$，磁介质 $\tan\delta_\mu = \dfrac{\mu''}{\mu'}$，导电媒质 $\tan\delta_\sigma = \dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}$

导电媒质导电性能的相对性

导电媒质的导电性能具有相对性，在不同频率情况下，导电媒质具有不同的导电性能。

$\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} << 1$—— 弱导电媒质和良绝缘体

$\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} \approx 1$—— 一般导电媒质

$\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1$—— 良导体

例 4.5.3 海水的电导率 $\sigma=4\ \mathrm{S/m}$，相对电容率 $\varepsilon_r=81$。求海水在频率 $f=1\ \mathrm{kHz}$ 和 $f=1\ \mathrm{GHz}$ 时的等效复电容率 ε_c。

解： 当 $f=1\ \mathrm{kHz}$ 时

$$\varepsilon_c=\varepsilon-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}=81\times\frac{10^{-9}}{36\pi}-\mathrm{j}\frac{4}{2\pi\times10^{3}}$$

$$=7.16\times10^{-10}-\mathrm{j}6.37\times10^{-4}\approx-\mathrm{j}6.37\times10^{-4}\ \mathrm{F/m}$$

当 $f=1\ \mathrm{GHz}$ 时

$$\varepsilon_c=\varepsilon-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}=81\times\frac{10^{-9}}{36\pi}-\mathrm{j}\frac{4}{2\pi\times10^{9}}=7.16\times10^{-10}-\mathrm{j}6.37\times10^{-10}\ \mathrm{F/m}$$

4.5.4 亥姆霍兹方程

在时谐时情况下，将 $\frac{\partial}{\partial t} \to j\omega$、$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \to -\omega^2$，即可得到复矢量的波动方程，称为亥姆霍兹方程。

	瞬时矢量		复矢量
无损耗媒质（无源空间）	$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial^2 t} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial^2 t} = 0 \end{cases}$	$\Rightarrow$	$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{cases}$ $(k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon})$
损耗媒质	$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \mu\sigma \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial^2 t} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \mu\sigma \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial^2 t} = 0 \end{cases}$	$\Rightarrow$	$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k_c^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k_c^2 \vec{H} = 0 \end{cases}$ $(k_c = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c})$ $(k_c = \omega\sqrt{\mu_c\varepsilon})$

4.5.5 时谐场的位函数

在时谐情况下，矢量位和标量位以及它们满足的方程都可以表示成复数形式。

瞬时矢量

$$\begin{cases} \vec{H} = \dfrac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A} \\ \vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \end{cases}$$

复矢量

$$\begin{cases} \vec{H} = \dfrac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A} \\ \vec{E} = -\mathrm{j}\omega\vec{A} - \nabla\varphi \end{cases}$$

洛仑兹条件 $\nabla\cdot\vec{A} = -\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} \Rightarrow \nabla\cdot\vec{A} = -\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\varphi \Rightarrow \varphi = \dfrac{\nabla\cdot\vec{A}}{-\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon}$

达朗贝尔方程

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J} \\ \nabla^2\varphi - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2\vec{A} + k^2\vec{A} = -\mu\vec{J} \\ \nabla^2\varphi + k^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

4.5.6 平均坡印廷矢量和复坡印廷矢量

1. 平均坡印廷矢量

$$\vec{S}_{\mathrm{av}} = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^T (\vec{E}\times\vec{H})\,\mathrm{d}t$$

平均坡印廷矢量可以直接由场矢量的复数形式来计算。对于时谐场，坡印廷矢量可写为

*** 表示共轭复数**

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \mathrm{Re}[\vec{E}\mathrm{e}^{j\omega t}]\times\mathrm{Re}[\vec{H}\mathrm{e}^{j\omega t}]$$

$$= \frac{1}{2}[\vec{E}\mathrm{e}^{j\omega t} + (\vec{E}\mathrm{e}^{j\omega t})^*]\times\frac{1}{2}[\vec{H}\mathrm{e}^{j\omega t} + (\vec{H}\mathrm{e}^{j\omega t})^*]$$

$$= \frac{1}{4}[\vec{E}\times\vec{H}\mathrm{e}^{j2\omega t} + \vec{E}^*\times\vec{H}^*\mathrm{e}^{-j2\omega t}] + \frac{1}{4}[\vec{E}^*\times\vec{H} + \vec{E}\times\vec{H}^*]$$

$$= \frac{1}{4}[\vec{E}\times\vec{H}\mathrm{e}^{j2\omega t} + (\vec{E}\times\vec{H}\mathrm{e}^{j2\omega t})^*] + \frac{1}{4}[(\vec{E}\times\vec{H}^*)^* + \vec{E}\times\vec{H}^*]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}\times\vec{H}\mathrm{e}^{j2\omega t}] + \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}\times\vec{H}^*]$$

代入，得

$$\vec{S}_{av} = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^T \left\{\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}\times\vec{H}e^{j2\omega t}] + \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}\times\vec{H}^*]\right\}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}\times\vec{H}^*]$$

类似地，可得到

平均电场能量密度

$$w_{eav} = \frac{1}{T}\int_0^T w_e\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\mathrm{Re}(\varepsilon_c\vec{E}\cdot\vec{E}^*) = \frac{1}{4}\varepsilon'\vec{E}\cdot\vec{E}^*$$

平均磁场能量密度

$$w_{mav} = \frac{1}{T}\int_0^T w_m\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\mathrm{Re}(\mu_c\vec{H}\cdot\vec{H}^*) = \frac{1}{4}\mu'\vec{H}\cdot\vec{H}^*$$

关于$\vec{S}(\vec{r},t)$和$\vec{S}_{\text{av}}(\vec{r})$的几点说明

- **$\vec{S}(\vec{r},t)$具有普遍意义，不仅适用于余弦电磁场，也适用于其他时变电磁场；而 $\vec{S}_{\text{av}}(\vec{r})$只适用于时谐电磁场。**
- **在 $\vec{S}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)$中，$\vec{E}(\vec{r},t)$ 和 $\vec{H}(\vec{r},t)$ 都是实数形式且是时间的函数，所以$\vec{S}(\vec{r},t)$ 也是时间的函数，反映的是能流密度在某一个瞬时的取值；而 $\vec{S}_{\text{av}}(\vec{r})=\text{Re}[\frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}^*(\vec{r})]$中的$\vec{E}(\vec{r})$和$\vec{H}(\vec{r})$都是复矢量，与时间无关，所以 $\vec{S}_{\text{av}}(\vec{r})$ 也与时间无关，反映的是能流密度在一个时间周期内的平均取值。**
- **利用 $\vec{S}_{\text{av}}(\vec{r})=\frac{1}{T}\int_0^T\vec{S}(\vec{r},t)\mathrm{d}t$，可由 $\vec{S}(\vec{r},t)$ 计算$\vec{S}_{\text{av}}(\vec{r})$，但不能直接由$\vec{S}_{\text{av}}(\vec{r})$计算 $\vec{S}(\vec{r},t)$ ，也就是说 $\vec{S}(\vec{r},t)\neq\text{Re}[\vec{S}_{\text{av}}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$**

2. 复坡印廷定理

■ **对于时谐场，定义复坡印廷矢量为**

$$\vec{S}_{\mathrm{c}}=\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^{*}$$

根据 $\vec{S}_{\mathrm{av}}=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}\times\vec{H}^{*}]$ **得** $\vec{S}_{\mathrm{av}}=\mathrm{Re}\,\vec{S}_{\mathrm{c}}$

■ **根据麦克斯韦方程组的复数形式可以导出复坡印廷定理。设媒质的介电常数** ε_{c} **和磁导率** μ_{c} **都是复数。由恒等式**

$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}^{*})=\vec{H}^{*}\cdot(\nabla\cdot\vec{E})-\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H}^{*})$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\mathrm{j}\omega\mu_{\mathrm{c}}\vec{H}\qquad\qquad\nabla\times\vec{H}^{*}=\sigma\vec{E}^{*}-\mathrm{j}\omega\varepsilon_{\mathrm{c}}^{*}\vec{E}^{*}$$

得 $$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}^{*})=-\mathrm{j}\omega\mu_{\mathrm{c}}\vec{H}\cdot\vec{H}^{*}+\mathrm{j}\omega\varepsilon_{\mathrm{c}}^{*}\vec{E}\cdot\vec{E}^{*}-\sigma\vec{E}\cdot\vec{E}^{*}$$

即 $$-\nabla\cdot\frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H}^{*})=\mathrm{j}\omega\frac{1}{2}\mu_{\mathrm{c}}\vec{H}\cdot\vec{H}^{*}\text{-}\mathrm{j}\omega\frac{1}{2}\varepsilon_{\mathrm{c}}^{*}\vec{E}\cdot\vec{E}^{*}+\frac{1}{2}\sigma\vec{E}\cdot\vec{E}^{*}$$

把上式对体积V积分，并应用散度定理将左边体积分变为面积分，得

$$-\oint_S \frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H}^*)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{j}\omega\int_V \left(\frac{1}{2}\mu_\mathrm{c}\vec{H}\cdot\vec{H}^* - \frac{1}{2}\varepsilon_\mathrm{c}^*\vec{E}\cdot\vec{E}^*\right)\mathrm{d}V + \int_V \frac{1}{2}\sigma\vec{E}\cdot\vec{E}^*\mathrm{d}V$$

由于

$$\mathrm{j}\frac{1}{2}\omega\mu_\mathrm{c}\vec{H}\cdot\vec{H}^* = \mathrm{j}\frac{1}{2}\omega(\mu' - \mathrm{j}\mu'')\vec{H}\cdot\vec{H}^* = \frac{1}{2}\omega\mu''\vec{H}\cdot\vec{H}^* + \mathrm{j}\frac{1}{2}\omega\mu'\vec{H}\cdot\vec{H}^*$$

$$-\mathrm{j}\frac{1}{2}\omega\varepsilon_\mathrm{c}^*\vec{E}\cdot\vec{E}^* = -\mathrm{j}\frac{1}{2}\omega(\varepsilon' + \mathrm{j}\varepsilon'')\vec{E}\cdot\vec{E}^* = \frac{1}{2}\omega\varepsilon''\vec{E}\cdot\vec{E}^* - \mathrm{j}\frac{1}{2}\omega\varepsilon'\vec{E}\cdot\vec{E}^*$$

于是得到复坡印廷定理

$$\begin{aligned}-\oint_S \frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H}^*)\cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \int_V \left(\frac{1}{2}\omega\mu''\vec{H}\cdot\vec{H}^* + \frac{1}{2}\omega\varepsilon''\vec{E}\cdot\vec{E}^* + \frac{1}{2}\sigma\vec{E}\cdot\vec{E}^*\right)\mathrm{d}V \\ &\quad + \mathrm{j}2\omega\int_V \left(\frac{1}{4}\mu'\vec{H}\cdot\vec{H}^* - \frac{1}{4}\varepsilon'\vec{E}\cdot\vec{E}^*\right)\mathrm{d}V \\ &= \int_V \left(p_\mathrm{eav} + p_\mathrm{mav} + p_\mathrm{jav}\right)\mathrm{d}V + \mathrm{j}2\omega\int_V (w_\mathrm{mav} - w_\mathrm{eav})\mathrm{d}V\end{aligned}$$

例4.5.4　在无源的自由空间中，已知电磁场的电场强度复矢量为 $\vec{E}(z)=\vec{e}_y E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$，式中$k$ 和 E_0 为常数。求：（1）磁场强度复矢量 $\vec{H}(z)$；（2）瞬时坡印廷矢量 $\vec{S}$；（3）平均坡印廷矢量 $\vec{S}_{\mathrm{av}}$。

解：（1）由 $\nabla\times\vec{E}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\vec{H}$ 得

$$\vec{H}(z)=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\nabla\times\vec{E}(z)=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}(\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z})\times(\vec{e}_y E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz})$$

$$=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}(-\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial z}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz})=-\vec{e}_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

（2）电场和磁场的瞬时值为

$$\vec{E}(z,t)=\mathrm{Re}\left[\vec{E}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=\vec{e}_y E_0\cos(\omega t-kz)$$

$$\vec{H}(z,t)=\mathrm{Re}\left[\vec{H}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=-\vec{e}_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-kz)$$

瞬时坡印廷矢量为

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\vec{e}_y E_0\cos(\omega t-kz)\times[-\vec{e}_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-kz)]$$

$$=\vec{e}_z\frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\cos^2(\omega t-kz)$$

(3）平均坡印廷矢量为

$$\vec{S}_{\mathrm{av}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{e}_y E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\times(-\vec{e}_x\frac{kE_0}{2\omega\mu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz})^*]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{e}_z\frac{kE_0^2}{\omega\mu_0})=\vec{e}_z\frac{k}{\omega\mu_0}E_0^2$$

或直接积分，得

$$\vec{S}_{\mathrm{av}}=\frac{1}{T}\int_0^T\vec{S}\,\mathrm{d}t=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\vec{S}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}[\vec{e}_z\frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\cos^2(\omega t-kz)]\mathrm{d}t=\vec{e}_z\frac{k}{2\omega\mu_0}E_0^2$$

本章作业：

4.3，4.7，4.10，4.12，4.14，4.15