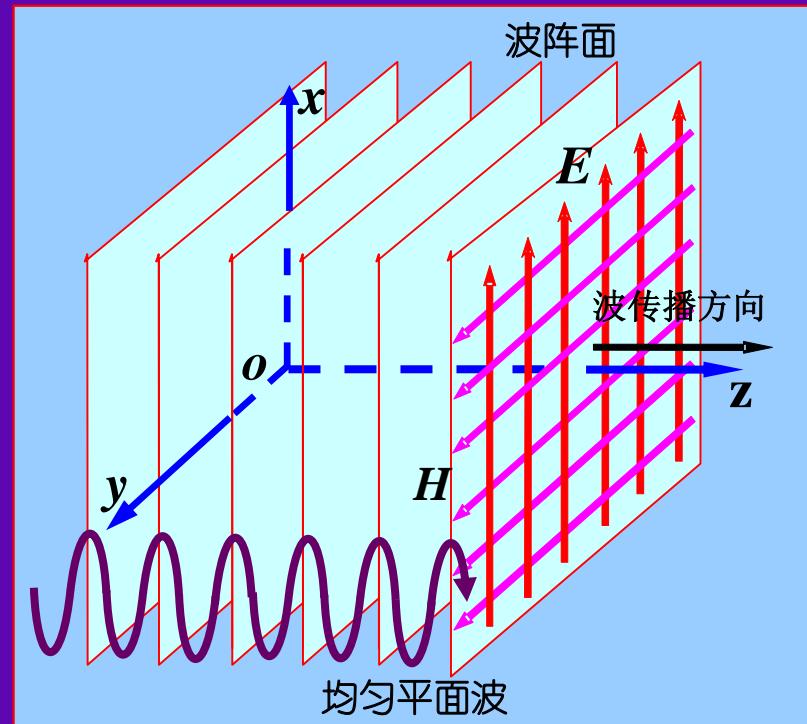


第5章 均匀平面波在无界空间中的传播

■ 均匀平面波的概念

- 波阵面：空间相位相同的点构成的曲面，即等相位面
 - 平面波：等相位面为无限大平面的电磁波
 - 均匀平面波：电磁波的场矢量只沿着它的传播方向变化，在与波传播方向垂直的等位面上电场和磁场的方向、振幅和相位都保持不变的平面波
- 均匀平面波是电磁波的一种理想情况，其分析方法简单，但又表征了电磁波的重要特性。



本章内容

- 5.1 理想介质中的均匀平面波
- 5.2 均匀平面波在导电媒质中的传播
- 5.3 电磁波的极化

5.1 理想介质中的均匀平面波

5.1.1 理想介质中的均匀平面波函数

设在无限大的无源空间中，充满线性、各向同性的均匀理想介质。时谐电磁场满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

假设均匀平面波沿 z 轴传播，则电场强度和磁场强度只是坐标变量 z 的函数，而与坐标变量 x 和 y 的函数无关，即

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{d^2 \vec{E}}{dz^2} + k^2 \vec{E} = 0, \quad \frac{d^2 \vec{H}}{dz^2} + k^2 \vec{H} = 0$$

由于 $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

$\left. \frac{d^2 E_z}{dz^2} + k^2 E_z = 0 \right\} \rightarrow E_z = 0$

$$\text{同理 } \nabla \cdot \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

$$\left. \frac{d^2 H_z}{dz^2} + k^2 H_z = 0 \right\} \rightarrow H_z = 0$$

结论：均匀平面波的电场强度和磁场强度都垂直于波的传播方向——横电磁波（TEM波）

对于沿z方向传播的电磁波，电场强度和磁场强度的分量满足标量亥姆霍兹方程

$$\frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + k^2 E_x(z) = 0$$

$$\frac{d^2 E_y(z)}{dz^2} + k^2 E_y(z) = 0$$

$$\frac{d^2 H_x(z)}{dz^2} + k^2 H_x(z) = 0$$

$$\frac{d^2 H_y(z)}{dz^2} + k^2 H_y(z) = 0$$

上述四个方程具有相同的形式，因而它们的解的形式也相同。

$\frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + k^2 E_x(z) = 0$ 的通解为

$$E_x(z) = A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{jkz} = E_{1m} e^{j\phi_1} e^{-jkz} + E_{2m} e^{j\phi_2} e^{jkz}$$

瞬时表达式为

$$E_x(z, t) = \text{Re}[E_x(z)e^{j\omega t}]$$

$$= E_{1m} \cos(\omega t - kz + \phi_1) + E_{2m} \cos(\omega t + kz + \phi_2)$$



沿 $+z$ 方向传播
的均匀平面波



沿 $-z$ 方向传播
的均匀平面波

5.1.2 理想介质中均匀平面波的传播特点

只考虑沿 $+z$ 方向传播的均匀平面波，即

$$E_x(z, t) = E_{xm} \cos(\omega t - kz + \phi_x)$$

时间和空间坐标的周期函数

1. 均匀平面波的传播参数

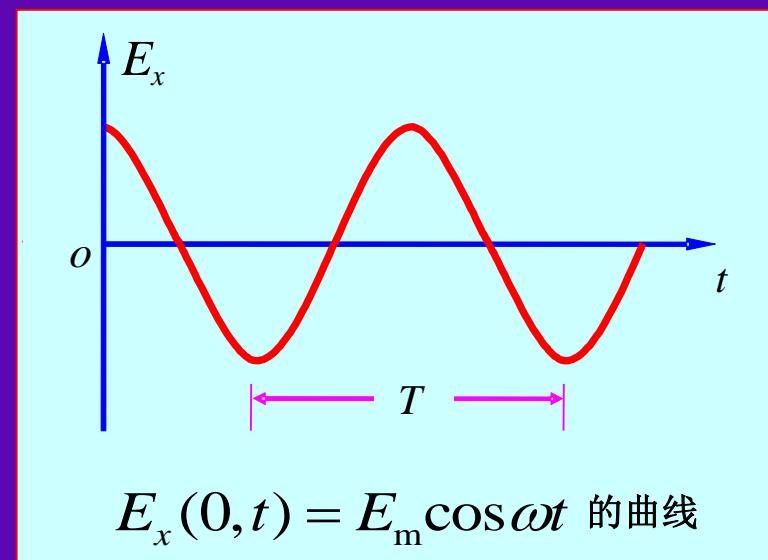
(1) 角频率、频率和周期

角频率 ω ：表示单位时间内的相位变化，单位为rad /s

周期 T ：时间相位变化 2π 的时间间隔，即

$$\omega T = 2\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ (s)}$$

$$\text{频率 } f : f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ (Hz)}$$



(2) 波长和相位常数

波长 λ ：空间相位差为 2π 的两个波阵面的间距，即

$$k\lambda = 2\pi \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (\text{m})$$

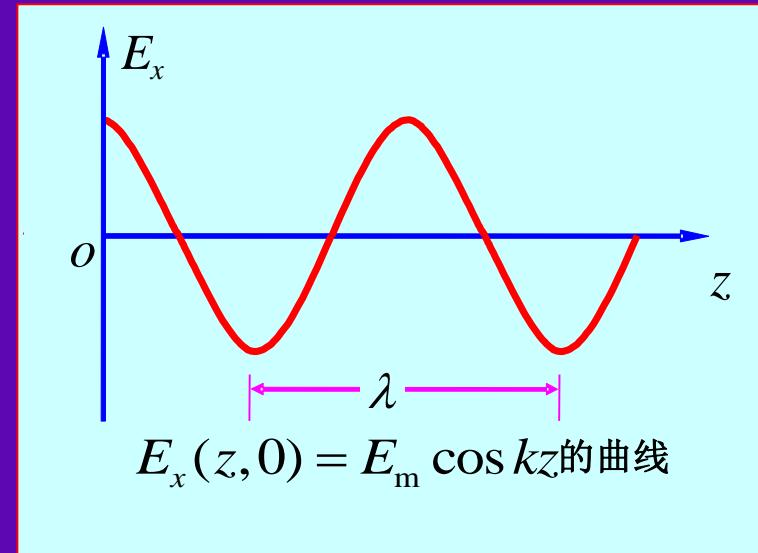
$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi f\sqrt{\mu\varepsilon}$$

电磁波的波长不仅与频率有关，还与媒质参数有关。

相位常数 k ：表示波传播单位距离的相位变化

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{rad/m})$$

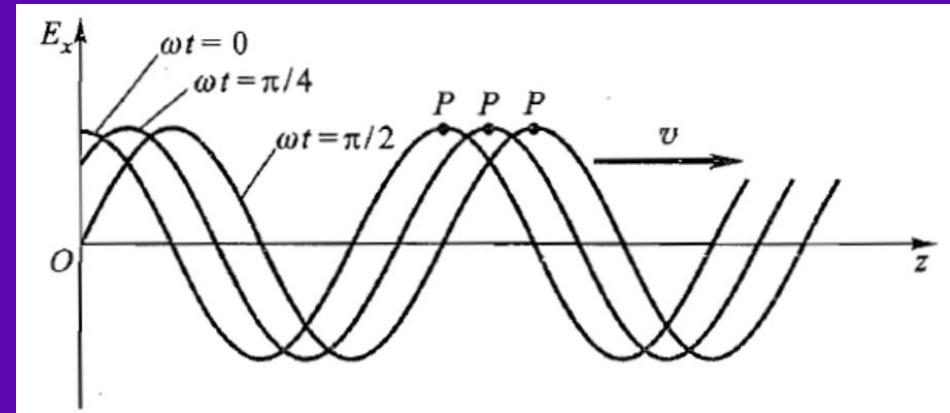
k 的大小等于空间距离 2π 内所包含的波长数目，因此也称为波数。



(3) 相速 (波速)

相速：电磁波的等相位面在空间中的移动速度

$$E_x(z, t) = E_{xm} \cos(\omega t - kz)$$



由于P点在不同时刻相位为恒定值

$$\omega t - kz = C \rightarrow \omega dt - kdz = 0$$

故得到均匀平面波的相速为

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

相速只与媒质参数有关，
而与电磁波的频率无关

真空中： $v_{p0} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}}} = 3 \times 10^8 \text{ (m/s)}$

2、能量密度与能流密度

相伴的磁场

由 $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$, 可得

$$\vec{H} = -\vec{e}_y \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} = \vec{e}_y \frac{k}{\omega\mu} E_{xm} e^{-j(kz-\phi_x)} = \vec{e}_y \frac{1}{\eta} E_{xm} e^{-j(kz-\phi_x)}$$

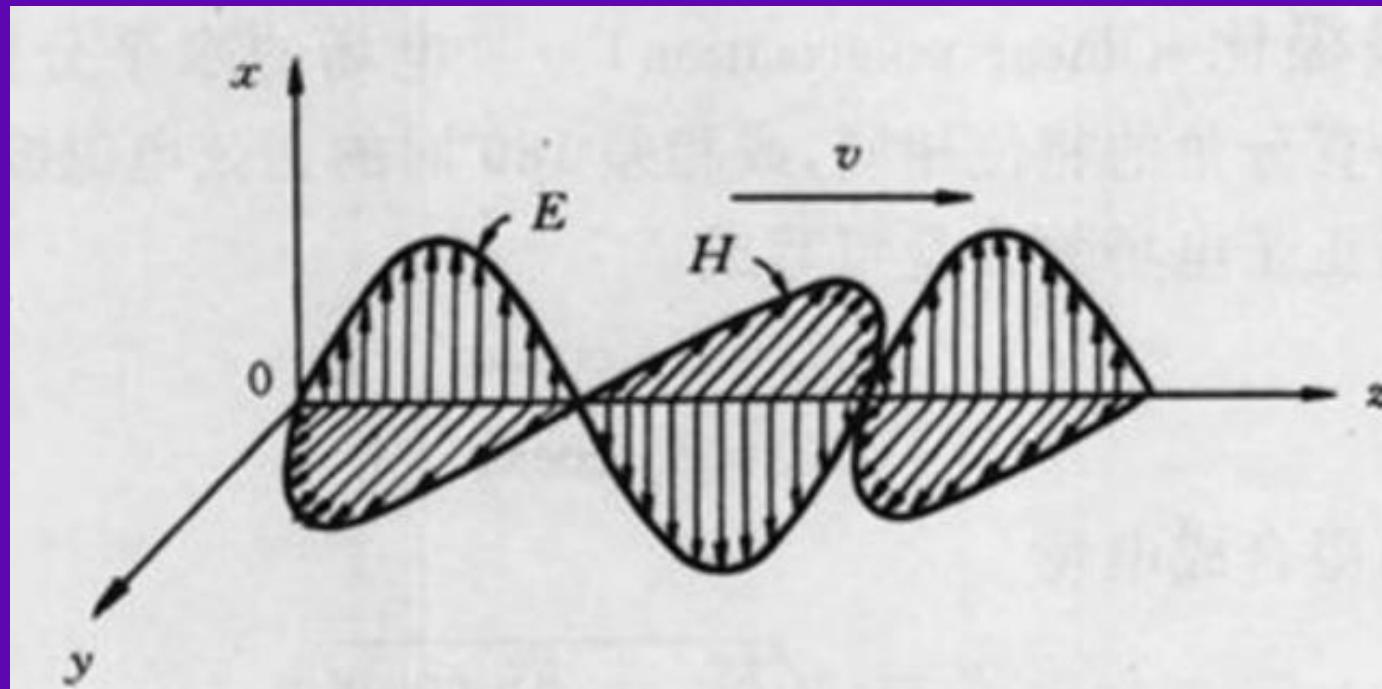
其中 $\eta = \frac{E_x}{H_y} = \frac{E_{xm}}{H_{ym}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (\Omega)$ 称为媒质的本征阻抗(特性阻抗)。

在真空中 $\eta = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377\Omega$

磁场的瞬时表达式为 $\vec{H} = \vec{e}_y \frac{1}{\eta} E_{xm} \cos(\omega t - kz + \phi_x)$

由此可见，磁场与电场之间满足 $\vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{e}_z \times \vec{E}$ 或 $\vec{E} = \eta \vec{H} \times \vec{e}_z$

结论：在理想介质中，均匀平面波的电场强度与磁场强度相互垂直，且同相位。



■ 能量密度和能流密度

由于 $\vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{e}_z \times \vec{E}$, 于是能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2 = \frac{1}{2} \mu |\vec{H}|^2 = w_m \quad \text{电场能量与磁场能量相同}$$

故 $w = w_e + w_m = \epsilon |\vec{E}|^2 = \mu |\vec{H}|^2$

瞬时坡印廷矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{E} \times (\vec{e}_z \times \vec{E}) = \vec{e}_z \frac{1}{\eta} |\vec{E}|^2$

平均能量密度 $w_{av} = \frac{1}{2} \epsilon E_m^2 = \frac{1}{2} \mu H_m^2$

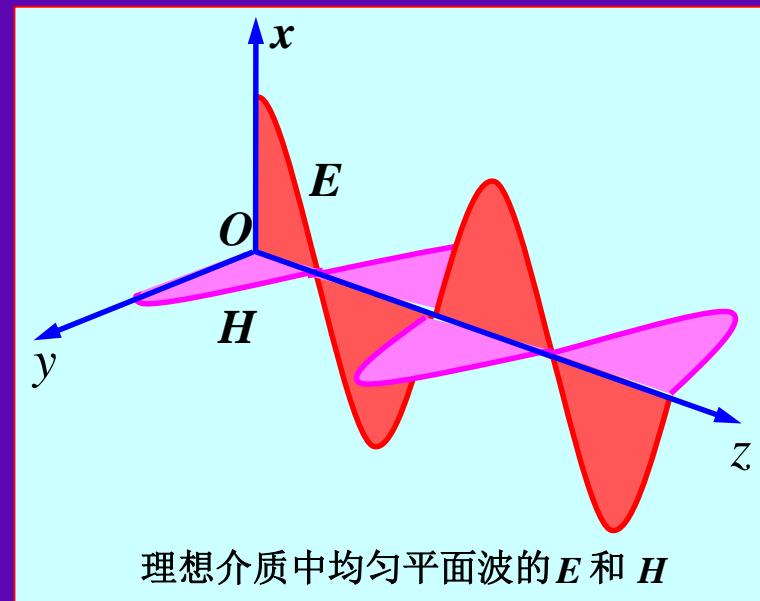
平均坡印廷矢量 $\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{1}{2\eta} \operatorname{Re}[\vec{E} \times (\vec{e}_z \times \vec{E}^*)]$

能量的传输速度等于相速 $= \vec{e}_z \frac{1}{2\eta} E_{xm}^2 = \vec{e}_z \frac{1}{2} \epsilon E_m^2 \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = w_{av} \vec{v}$

3、理想介质中的均匀平面波的传播特点

根据前面的分析，可总结出理想介质中的均匀平面波的传播特点为：

- 电场、磁场与传播方向之间相互垂直，是横电磁波（TEM波）。
- 无衰减，电场与磁场的振幅不变。
- 波阻抗为实数，电场与磁场同相位。
- 电磁波的相速与频率无关，无色散。
- 电场能量密度等于磁场能量密度，能量的传输速度等于相速。



例5.1.1 频率为100MHz的均匀电磁波，在一无耗媒质中沿 $+z$ 方向传播，其电场 $\vec{E} = \vec{e}_x E_x$ 。已知该媒质的相对介电常数 $\epsilon_r = 4$ 、相对磁导率 $\mu_r = 1$ ，且当 $t = 0$ 、 $z = 1/8$ m 时，电场幅值为 10^{-4} V/m。试求(1)电场强度和(2)磁场强度的瞬时表示式。

解：设电场强度的瞬时表示式为

$$\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x E_x = \vec{e}_x 10^{-4} \cos(\omega t - kz + \phi_x)$$

式中 $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^8$ rad/s

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = \frac{2\pi \times 10^8}{3 \times 10^8} \sqrt{4} = \frac{4}{3}\pi \text{ rad/m}$$

对于余弦函数，当相角为零时达振幅值。考虑条件 $t = 0$ 、 $z = 1/8$ m 时，电场达到幅值，得

$$\phi_x = kz = \frac{4\pi}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{6}$$

所以 $\vec{E}(z,t) = \vec{e}_x 10^{-4} \cos(2\pi \times 10^8 t - \frac{4\pi}{3} z + \frac{\pi}{6})$

$$= \vec{e}_x 10^{-4} \cos[2\pi \times 10^8 t - \frac{4\pi}{3}(z - \frac{1}{8})] \text{ V/m}$$

磁场强度的瞬时表示式为

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{e}_z \times \vec{E} = \vec{e}_y \frac{1}{\eta} E_x$$

式中 $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = 60\pi \text{ } \Omega$

因此 $\vec{H}(z,t) = \vec{e}_y \frac{10^{-4}}{60\pi} \cos[2\pi \times 10^8 t - \frac{4}{3}\pi(z - \frac{1}{8})] \text{ A/m}$

例5.1.2 已知聚乙烯的相对介电常数为 $\epsilon_r = 2.26$ ， 相对磁导率 $\mu_r = 1$ ， 电导率为0。频率为9.4GHz的均匀平面波在聚乙烯中传播，其磁场的振幅为7mA/m，求相速、波长、波阻抗和电场强度的幅值。

解：由题意 $\epsilon_r = 2.26, \mu_r = 1, f = 9.4 \times 10^9 \text{ Hz}$

因此 $v_p = \frac{v_{p0}}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{2.26}} = 1.996 \times 10^8 \text{ m/s}$

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{1.996 \times 10^8}{9.4 \times 10^9} = 2.12 \text{ m}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{377}{\sqrt{2.26}} = 251 \Omega$$

$$E_m = H_m \eta = 7 \times 10^{-3} \times 251 = 1.757 \text{ V/m}$$

例5.1.3 自由空间中平面波的电场强度

$$\vec{E} = \vec{e}_x 50 \cos(\omega t - kz) \text{ V/m}$$

求在 $z = z_0$ 处垂直穿过半径 $R = 2.5\text{m}$ 的圆平面的平均功率。

解：电场强度的复数表示式为 $\vec{E} = \vec{e}_x 50 e^{-jkz}$

自由空间的本征阻抗为 $\eta_0 = 120\pi \Omega$

故得到该平面波的磁场强度 $\vec{H} = \vec{e}_y \frac{E}{\eta_0} = \vec{e}_y \frac{5}{12\pi} e^{-jkz} \text{ A/m}$

于是，平均坡印廷矢量

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \vec{e}_z \frac{1}{2} \times 50 \times \frac{5}{12\pi} = \vec{e}_z \frac{125}{12\pi} \text{ W/m}^2$$

垂直穿过半径 $R = 2.5\text{m}$ 的圆平面的平均功率

$$P_{av} = \int_S \vec{S}_{av} \cdot d\vec{S} = \frac{125}{12\pi} \times \pi R^2 = \frac{125}{12\pi} \times \pi \times 2.5^2 = 65.1 \text{ W}$$

5.1.3 沿任意方向传播的均匀平面波

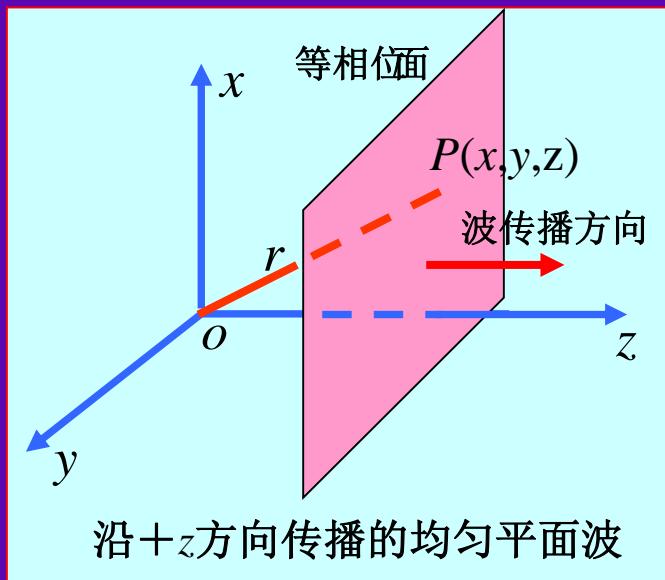
沿 $+z$ 方向传播的均匀平面波

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_m e^{-jkz} = \vec{E}_m e^{-jk\vec{e}_z \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{k} = \vec{e}_z k$$

$$\vec{e}_z \cdot \vec{E}_m = 0$$

$$\vec{H}(z) = \frac{1}{\eta} \vec{e}_z \times \vec{E}(z)$$



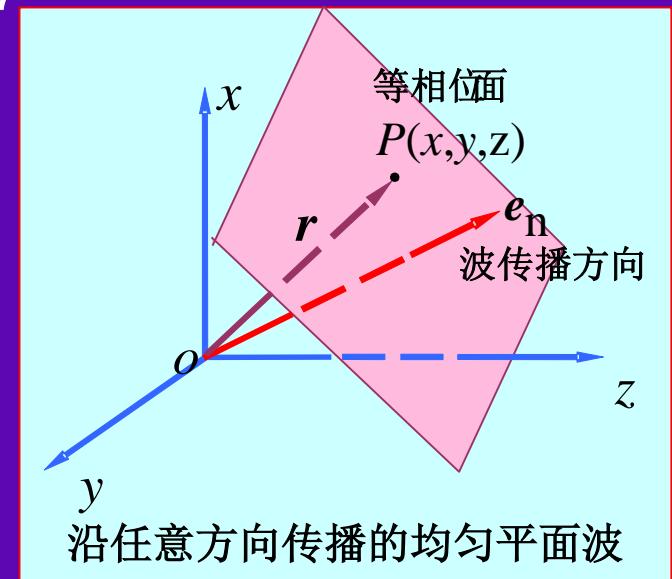
沿 \vec{e}_n 传播方向的均匀平面波

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_m e^{-jk\vec{e}_n \cdot \vec{r}} = \vec{E}_m e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$$\vec{k} = \vec{e}_n k = \vec{e}_x k_x + \vec{e}_y k_y + \vec{e}_z k_z$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_m = 0 \rightarrow \vec{e}_n \cdot \vec{E}_m = 0$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\eta} \vec{e}_n \times \vec{E}(\vec{r})$$



例 5.1.4 频率 $f = 500 \text{ kHz}$ 的均匀平面波, 在 $\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, $\sigma = 0$ 的无损耗媒质中传播。已知 $\mathbf{E}_m = e_x 2 - e_y + e_z \text{ kV/m}$, $\mathbf{H}_m = e_x 6 + e_y 9 - e_z 3 \text{ A/m}$ 。求:(1) 传播方向 e_n ; (2) ϵ_r 和 λ 。

$$\text{解: (1)} \quad e_n = e_E \times e_H = \frac{\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_m}{|\mathbf{E}_m| |\mathbf{H}_m|} = \frac{1}{\sqrt{21}} (-e_x + e_y 2 + e_z 4)$$

$$\text{(2) 由 } \eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{|\mathbf{E}_m|}{|\mathbf{H}_m|} = \frac{10^3}{\sqrt{21}}, \text{ 得到}$$

$$\epsilon_r = \frac{21 \eta_0^2}{10^6} = 2.98$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = 0.58 \frac{v_0}{f} = 347.3 \text{ m}$$

例5.1.5 在空气中传播的均匀平面波的磁场强度的复数表示式为

$$\vec{H} = (-\vec{e}_x A + \vec{e}_y 2 + \vec{e}_z 4) e^{-j\pi(4x+3z)}$$

式中A为常数。求：（1）波矢量 \vec{k} ；（2）波长和频率；（3）A的值；（4）相伴电场的复数形式；（5）平均坡印廷矢量。

解：（1）因为 $\vec{H} = \vec{H}_m e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$ ，所以

$$\vec{H}_m = -\vec{e}_x + \vec{e}_y 2 + \vec{e}_z 4, \quad \vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z = 4\pi x + 3\pi z$$

$$\text{则 } k_x = 4\pi, \quad k_y = 0, \quad k_z = 3\pi, \quad \vec{k} = \vec{e}_x 4\pi + \vec{e}_z 3\pi$$

$$k = \sqrt{(3\pi)^2 + (4\pi)^2} = 5\pi$$

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{k}}{k} = \vec{e}_x \frac{4}{5} + \vec{e}_z \frac{3}{5}$$

$$(2) \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5} \text{ m} , \quad f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{2/5} = 7.5 \times 10^8 \text{ Hz}$$

$$(3) \quad \vec{k} \cdot \vec{H}_{\text{m}} = 4\pi(-A) + 0 \times 2 + 3\pi \times 4 = 0 \rightarrow A = 3$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \vec{E}(\vec{r}) &= \eta_0 \vec{H}(\vec{r}) \times \vec{e}_{\text{n}} \\ &= 120\pi(-\vec{e}_x 3 + \vec{e}_y 2 + \vec{e}_z 4) e^{-j\pi(4x+3z)} \times (\vec{e}_x \frac{4}{5} + \vec{e}_z \frac{3}{5}) \\ &= 120\pi(\vec{e}_x 1.2 + \vec{e}_y 5 - \vec{e}_z 1.6) e^{-j\pi(4x+3z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad \vec{S}_{\text{av}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{E} \times \vec{H}^*] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ 120\pi(\vec{e}_x 1.2 + \vec{e}_y 5 - \vec{e}_z 1.6) e^{-j\pi(4x+3z)} \right. \\ &\quad \left. \times [(-\vec{e}_x 3 + \vec{e}_y 2 + \vec{e}_z 4) e^{-j\pi(4x+3z)}]^* \right\} \\ &= 12\pi \times 29 \times (\vec{e}_x 4 + \vec{e}_z 3) \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

5.2 均匀平面波在导电媒质中的传播

- 导电媒质的典型特征是电导率 $\sigma \neq 0$ 。
- 电磁波在导电媒质中传播时，有传导电流 $J = \sigma E$ 存在，同时伴随着电磁能量的损耗。
- 电磁波的传播特性与非导电媒质中的传播特性有所不同。

5.2.1 导电媒质中的均匀平面波

在均匀的导电媒质中，由

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \epsilon \vec{E} = j\omega \left(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E} = j\omega \epsilon_c \vec{E}$$

可得到 $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{j\omega \epsilon_c} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0$

因此可见，在均匀的导电媒质中，虽然传导电流不为 $J=0$ ，但不存在自由电荷密度 $\rho = 0$ 。

在均匀的导电媒质中，电场和磁场满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \vec{E} + k_c^2 \vec{E} = 0 \quad \nabla^2 \vec{H} + k_c^2 \vec{H} = 0 \quad (k_c = \omega \sqrt{\mu \epsilon_c}) \quad (\text{复数})$$

假定均匀平面波沿 $+z$ 轴传播且电场只有 E_x 分量，则解为

$$\vec{E}(z) = \vec{e}_x E_x(z) = \vec{e}_x E_{xm} e^{-jk_c z} e^{j\phi_x}$$

振幅有衰减

令 $\gamma = jk_c = \alpha + j\beta$ ，则均匀平面波解为

$$\vec{E}(z) = \vec{e}_x E_{xm} e^{-\gamma z} e^{j\phi_x} = \vec{e}_x [E_{xm} e^{-\alpha z}] e^{-j\beta z} e^{j\phi_x}$$

瞬时值形式 $\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x E_{xm} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi_x)$

γ 称为电磁波的传播常数，单位：1/m

$e^{-\alpha z}$ 是衰减因子， α 称为衰减常数，单位：Np/m (奈培/米)

$e^{-j\beta z}$ 是相位因子， β 称为相位常数，单位：rad/m (弧度/米)

相伴的磁场 $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$ \Rightarrow

$$\vec{H}(z) = \vec{e}_y \sqrt{\frac{\epsilon_c}{\mu}} E_{xm} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\phi_x} = \vec{e}_y \frac{1}{\eta_c} E_{xm} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\phi_x} \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\eta_c} \vec{e}_z \times \vec{E}$$

$$\vec{H}(z, t) = \operatorname{Re}[\vec{H}(z) e^{j\omega t}] = \vec{e}_y \frac{E_{xm}}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi_x - \phi)$$

本征阻抗 $\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} = |\eta_c| e^{j\phi}$

本征阻抗为复数
磁场滞后于电场

将 $\epsilon_c = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$ 代入上式，可得

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\sigma/\omega}} = \left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{1/2} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{-1/4} e^{j\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)}$$

即 $|\eta_c| = \left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{1/2} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{-1/4}$ $\phi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)$

■ 传播参数

$$\begin{cases} \gamma^2 = (jk_c)^2 = -k_c^2 = -\omega^2 \mu (\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}) \\ \gamma^2 = (\alpha + j\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + j2\alpha\beta \end{cases} \xrightarrow{\text{ }} \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon \\ 2\alpha\beta = \omega \mu \sigma \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{ }} \alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} - 1 \right]}, \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} + 1 \right]}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 1 \left/ \left\{ f \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} + 1 \right]} \right\} \right.$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = 1 \left/ \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} + 1 \right]} \right.$$

相速不仅与媒质参数有关,
而且与电磁波的频率有关

色散!

- **平均电场能量密度** $w_{\text{eav}} = \frac{1}{4} \text{Re}[\epsilon_c \vec{E} \cdot \vec{E}^*] = \frac{\epsilon}{4} E_{\text{xm}}^2 e^{-2\alpha z}$
- **平均磁场能量密度** $w_{\text{mav}} = \frac{1}{4} \text{Re}[\mu \vec{H} \cdot \vec{H}^*] = \frac{\mu}{4} \frac{E_{\text{xm}}^2}{|\eta_c|^2} e^{-2\alpha z}$
 $= \frac{\epsilon}{4} E_{\text{xm}}^2 e^{-2\alpha z} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right]^{1/2}$

在导电媒质中，平均磁场能量密度大于平均电场能量密度。

- **平均坡印廷矢量**

$$\begin{aligned}\vec{S}_{\text{av}} &= \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E}(z) \times \vec{H}^*(z)] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\vec{E}(z) \times \left(\frac{1}{\eta_c} \vec{e}_z \times \vec{E} \right)^* \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\vec{e}_z |\vec{E}|^2 \frac{1}{|\eta_c|} e^{j\phi} \right] = \vec{e}_z \frac{1}{2|\eta_c|} |\vec{E}|^2 \cos \phi\end{aligned}$$

- 导电媒质中均匀平面波的传播特点：
 - 电场强度 E 、磁场强度 H 与波的传播方向相互垂直，是横电磁波（TEM波）；
 - 媒质的本征阻抗为复数，电场与磁场不同相位，磁场滞后于电场 ϕ 角；
 - 在波的传播过程中，电场与磁场的振幅呈指数衰减；
 - 波的传播速度（相度）不仅与媒质参数有关，而且与频率有关（有色散）；
 - 平均磁场能量密度大于平均电场能量密度。

5.2.2 弱导电媒质中的均匀平面波

弱导电媒质: $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon})^{1/2} \approx j\omega\sqrt{\mu\epsilon} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon})^{-1/2} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}(1 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon})$$

$$(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \\ \beta \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon} \end{array} \right.$$

$$(1-x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{x}{2}$$

■ 弱导电媒质中均匀平面波的特点

- 衰减小;
- 相位常数和非导电媒质中的相位常数大致相等;
- 电场和磁场之间存在较小的相位差。

5.2.3 良导体中的均匀平面波

良导体: $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$

■ 良导体中的参数

金、银、铜、铁、铝等金属对于无线电波均是良导体。

例如铜: $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{1.04 \times 10^{18}}{f}$

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon})^{1/2} \approx \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{\omega\mu\sigma}e^{j45^\circ} = (1 + j)\sqrt{\pi f \mu\sigma}$$

$$\rightarrow \alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \approx \sqrt{\pi f \mu\sigma}$$

相速: $v_p = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{\omega}{\sqrt{\pi f \mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$

波长: $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \approx \frac{2\pi}{\sqrt{\pi f \mu\sigma}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{f \mu\sigma}}$

$\propto \sqrt{f}$

$\propto 1/\sqrt{f}$

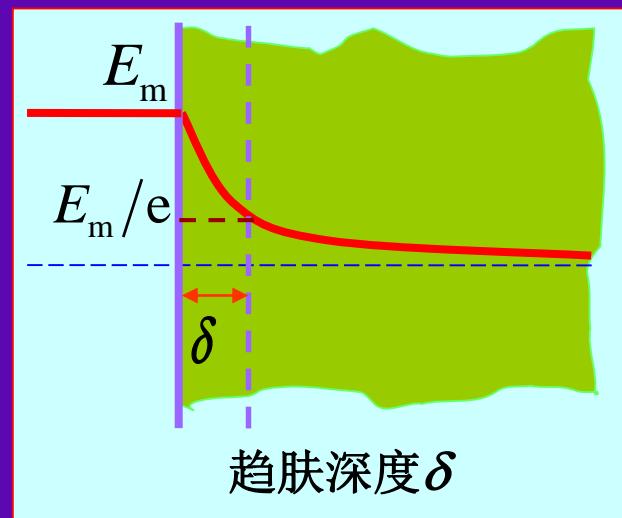
$$\text{本征阻抗 } \eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \approx \sqrt{\frac{2\pi f \mu}{\sigma}} e^{j45^\circ} = (1+j) \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$$

良导体中电磁波的磁场强度的相位滞后于电场强度45°。

趋肤效应：电磁波的频率越高，衰减系数越大，高频电磁波只能存在于良导体表面附近得区域，这种现象称为趋肤效应。

趋肤深度 (δ) : 电磁波进入良导体后，其振幅下降到表面处振幅的 $1/e$ (或0.368) 时所传播的距离。即

$$E_m e^{-\alpha\delta} = \frac{E_m}{e} \longrightarrow \delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$



铜: $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$

$$f = 50 \text{ Hz}, \quad \delta = \frac{6.6 \times 10^{-2}}{\sqrt{50}} = 9.33 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$f = 1 \text{ MHz}, \quad \delta = \frac{6.6 \times 10^{-2}}{\sqrt{10^6}} = 6.6 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$f = 10 \text{ GHz}, \quad \delta = \frac{6.6 \times 10^{-2}}{\sqrt{10 \times 10^9}} = 6.6 \times 10^{-7} \text{ m}$$

良导体的本征阻抗 (表面阻抗) $\eta_c \approx (1 + j) \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} = R_s + jX_s$

具有相等的表面电阻和表面电抗 $R_s = X_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} = \frac{1}{\sigma \delta}$

表5.2.1一些金属材料的趋肤深度和表面电阻

材料名称	电导率 $\sigma /(\text{S/m})$	趋肤深度 δ / m	表面电阻 R_s / Ω
银	6.17×10^7	$0.064 / \sqrt{f}$	$2.52 \times 10^{-7} \sqrt{f}$
紫铜	5.8×10^7	$0.066 / \sqrt{f}$	$2.61 \times 10^{-7} \sqrt{f}$
铝	3.72×10^7	$0.083 / \sqrt{f}$	$3.26 \times 10^{-7} \sqrt{f}$
钠	2.1×10^7	$0.11 / \sqrt{f}$	
黄铜	1.6×10^7	$0.13 / \sqrt{f}$	$5.01 \times 10^{-7} \sqrt{f}$
锡	0.87×10^7	$0.17 / \sqrt{f}$	
石墨	0.01×10^7	$1.6 / \sqrt{f}$	

例5.2.1 一沿 x 方向极化的线极化波在海水中传播，取 $+z$ 轴方向为传播方向。已知海水的媒质参数为 $\epsilon_r = 81$ 、 $\mu_r = 1$ 、 $\sigma = 4 \text{ S/m}$ ，在 $z = 0$ 处的电场 $E_x = 100\cos(10^7\pi t) \text{ V/m}$ 。求：

- (1) 衰减常数、相位常数、本征阻抗、相速、波长及趋肤深度；
- (2) 电场强度幅值减小为 $z = 0$ 处的 $1/1000$ 时，波传播的距离
- (3) $z = 0.8 \text{ m}$ 处的电场强度和磁场强度的瞬时表达式；
- (4) $z = 0.8 \text{ m}$ 处穿过 1 m^2 面积的平均功率。

解： (1) 根据题意，有

$$\omega = 10^7 \pi \text{ rad/s} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 5 \times 10^6 \text{ Hz}$$

所以

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{4}{10^7 \pi \times \left(\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\right) \times 80} = 180 \gg 1$$

此时海水可视为良导体。

故衰減常数 $\alpha = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \sqrt{\pi \times 5 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4} = 8.89 \text{ Np/m}$

相位常数 $\beta = \alpha = 8.89 \text{ rad/m}$

本征阻抗 $\eta_c = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{10^7 \pi \times 4\pi \times 10^{-7}}{4}} e^{j\frac{\pi}{4}} = \pi e^{j\frac{\pi}{4}} \Omega$

相速 $v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{10^7 \pi}{8.89} = 3.53 \times 10^6 \text{ m/s}$

波长 $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{8.89} = 0.707 \text{ m}$

趋肤深度 $\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{8.89} = 0.112 \text{ m}$

(2) 令 $e^{-\alpha z} = 1/1000$, 即 $e^{\alpha z} = 1000$, 由此得到电场强度幅值减小为 $z = 0$ 处的 $1/1000$ 时, 波传播的距离

$$z = \frac{1}{\alpha} \ln 1000 = \frac{2.302}{8.89} = 0.777 \text{ m}$$

(3) 根据题意, 电场的瞬时表达式为

$$\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x 100 e^{-8.89z} \cos(10^7 \pi t - 8.89z)$$

故在 $z = 0.8 \text{ m}$ 处, 电场的瞬时表达式为

$$\begin{aligned} \vec{E}(0.8, t) &= \vec{e}_x 100 e^{-8.89 \times 0.8} \cos(10^7 \pi t - 8.89 \times 0.8) \\ &= \vec{e}_x 0.082 \cos(10^7 \pi t - 7.11) \quad \text{V/m} \end{aligned}$$

磁场的瞬时表达式为

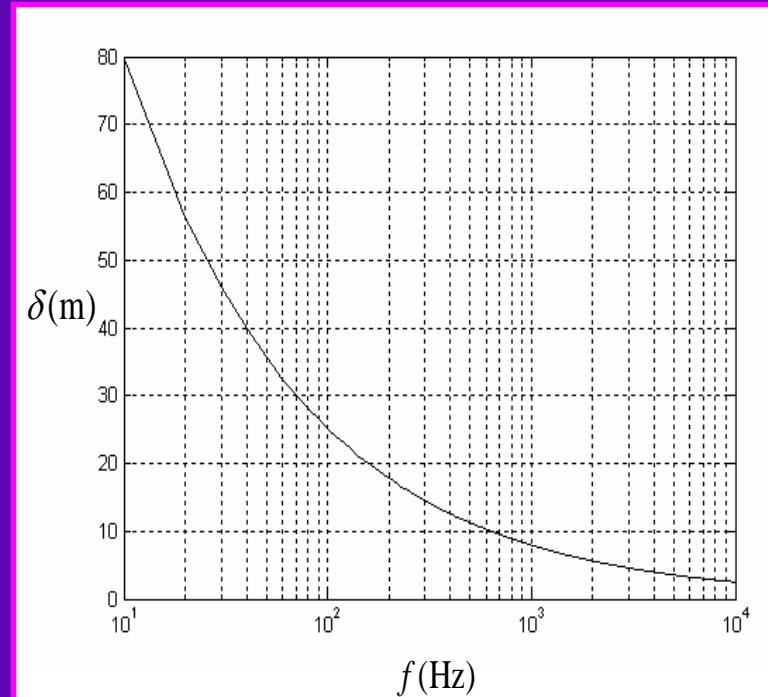
$$\begin{aligned} \vec{H}(0.8, t) &= \vec{e}_y \frac{100 e^{-8.89 \times 0.8}}{|\eta_c|} \cos(10^7 \pi t - 8.89 \times 0.8 - \frac{\pi}{4}) \\ &= \vec{e}_y 0.026 \cos(10^7 \pi t - 1.61) \quad \text{A/m} \end{aligned}$$

(4) 在 $z = 0.8 \text{ m}$ 处的平均坡印廷矢量

$$\begin{aligned}\vec{S}_{\text{av}} &= \vec{e}_z \frac{1}{2|\eta_c|} E_{xm}^2 e^{-2\alpha z} \cos \phi \\ &= \vec{e}_z \frac{100^2}{2\pi} e^{-2 \times 8.89 \times 0.8} \cos \frac{\pi}{4} \\ &= \vec{e}_z 0.75 \text{ mW/m}^2\end{aligned}$$

穿过 1m^2 的平均功率 $P_{\text{av}} = 0.75 \text{ mW}$

由此可知，电磁波在海水中传播时衰减很快，尤其在高频时，衰减更为严重，这给潜艇之间的通信带来了很大的困难。若为保持低衰减，工作频率必须很低，但即使在 1 kHz 的低频下，衰减仍然很明显。



海水中的趋肤深度随频率变化的曲线

例5.2.2 在进行电磁测量时，为了防止室内的电子设备受外界电磁场的干扰，可采用金属铜板构造屏蔽室，通常取铜板厚度大于 5δ 就能满足要求。若要求屏蔽的电磁干扰频率范围从10KHz到100MHz，试计算至少需要多厚的铜板才能达到要求。铜的参数为 $\mu=\mu_0$ 、 $\varepsilon=\varepsilon_0$ 、 $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m。

解：对于频率范围的低端 $f_L=10\text{kHz}$ ，有

$$\frac{\sigma}{\omega_L \varepsilon} = \frac{5.8 \times 10^7}{2\pi \times 10^4 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} = 1.04 \times 10^{14} \gg 1$$

对于频率范围的高端 $f_H=100\text{MHz}$ ，有

$$\frac{\sigma}{\omega_H \varepsilon} = \frac{5.8 \times 10^7}{2\pi \times 10^8 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} = 1.04 \times 10^{10} \gg 1$$

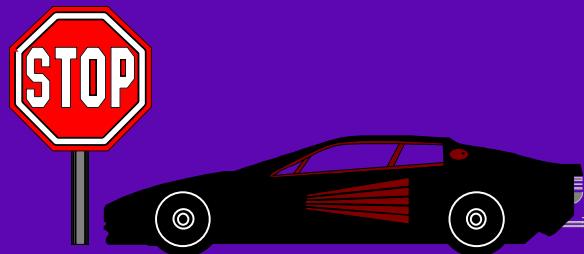
由此可见，在要求的频率范围内均可将铜视为良导体，故

$$\delta_L = \frac{1}{\sqrt{\pi f_L \mu \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \times 10^4 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = 0.66 \text{ mm}$$

$$\delta_H = \frac{1}{\sqrt{\pi f_H \mu \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \times 10^8 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = 6.6 \text{ } \mu\text{m}$$

为了满足给定的频率范围内的屏蔽要求，故铜板的厚度 d 至少应为

$$d = 5\delta_L = 3.3 \text{ mm}$$



5.2.4 色散与群速

色散现象：相速随频率变化

- 电磁波的传播特性与介质参数(ϵ 、 μ 和 σ)有关，当这些参数和传播常数随频率变化时，不同频率电磁波的传播特性就会有所不同，这就是色散效应，这种媒质称为色散媒质。
- 单一频率的电磁波不载有任何有用信息，只有由多个频率的正弦波叠加而成的电磁波才能携带有用信息。

群速：载有信息的电磁波通常是由一个高频载波和以载频为中心向两侧扩展的频带所构成的波包，波包包络传播的速度就是群速。

■ 不同频率电磁波的叠加

两个振幅均为 E_m 、角频率分别为 $\omega + \Delta\omega$ 和 $\omega - \Delta\omega$ 、相位常数分别为 $\beta + \Delta\beta$ 和 $\beta - \Delta\beta$ 的同向行波

$$\vec{E}_1(z, t) = \vec{e}_x E_m \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (\beta + \Delta\beta)z]$$

$$\vec{E}_2(z, t) = \vec{e}_x E_m \cos[(\omega - \Delta\omega)t - (\beta - \Delta\beta)z]$$

合成波电场

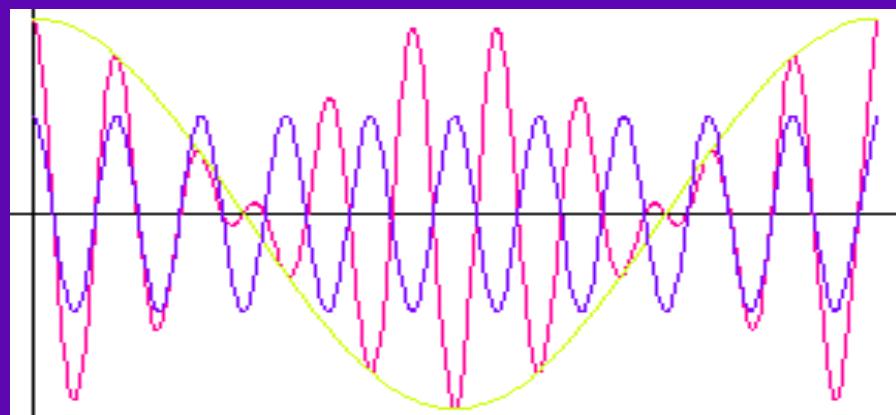
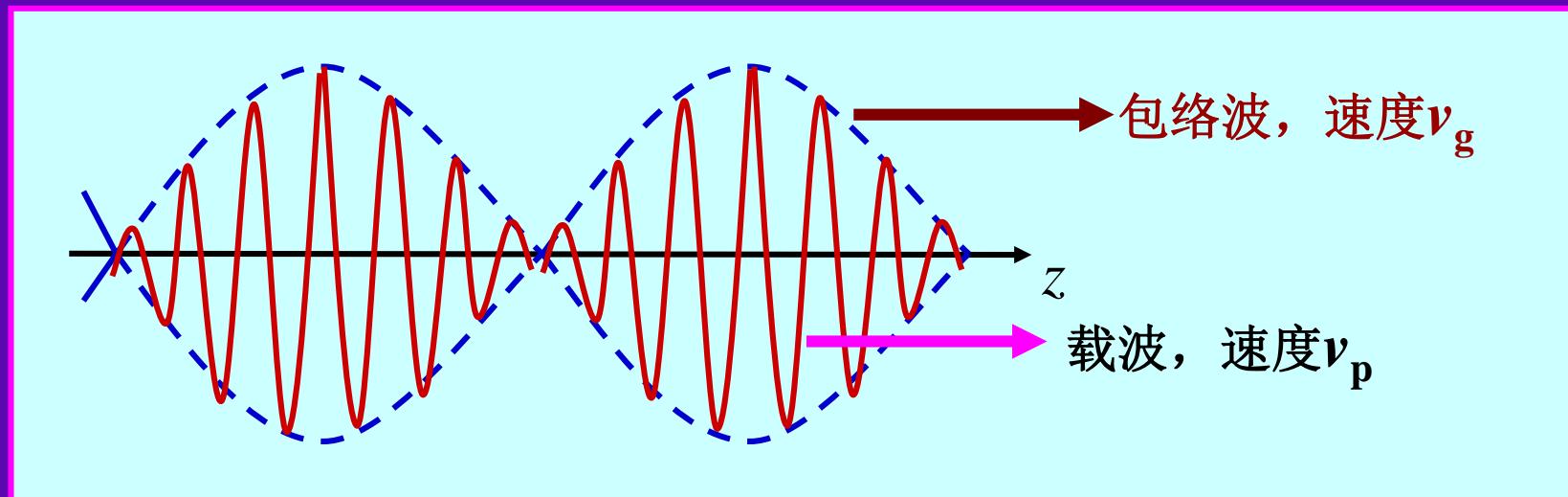
$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_1(z, t) + \vec{E}_2(z, t)$$

$$= \vec{e}_x [2E_m \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z)] \cos(\omega t - \beta z)$$

行波因子，代表沿 z 轴传播的行波

振幅，包络波，以角频率 $\Delta\omega$ 缓慢变化

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_1(z, t) + \vec{E}_2(z, t) = \vec{e}_x 2E_m \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) \cos(\omega t - \beta z)$$



■ 相速 v_p : 载波的恒定相位点推进速度

$$\omega t - \beta z = C \quad \rightarrow \quad v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

■ 群速 v_g : 包络波的恒定相位点推进速度

$$\Delta\omega t - \Delta\beta z = \text{常数} \quad \rightarrow \quad v_g = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{d\omega}{d\beta}$$

由 $v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{d(\beta v_p)}{d\beta} = v_p + \beta \frac{dv_p}{d\beta} = v_p + \frac{\omega}{v_p} \frac{dv_p}{d\omega} \frac{d\omega}{d\beta} = v_p + \frac{\omega}{v_p} \frac{dv_p}{d\omega} v_g$

$$\rightarrow v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p} \frac{dv_p}{d\omega}} \rightarrow \begin{cases} \frac{dv_p}{d\omega} = 0, v_g = v_p & \text{—— 无色散} \\ \frac{dv_p}{d\omega} < 0, v_g < v_p & \text{—— 正常色散} \\ \frac{dv_p}{d\omega} > 0, v_g > v_p & \text{—— 反常色散} \end{cases}$$

例5.2.3 载频为 $f=100$ kHz 的窄频带信号在海水中传播，试求群速。

解：海水的参数： $\sigma = 4$ S/m、 $\epsilon_r = 81$ 、 $\mu_r = 1$ ，当 $f = 100$ kHz 时，有

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1, \text{ 可视为良导体} \quad \rightarrow \begin{cases} \beta \approx 1.26 \text{ rad/m} \\ v_p = 5 \times 10^5 \text{ m/s} \end{cases}$$

由 $v_p(\omega) \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\sigma}} = 631\sqrt{\omega}$

得 $\frac{dv_p}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}(631\sqrt{\omega}) = \frac{631}{2} \frac{1}{\sqrt{\omega}}$

$v_g > v_p$ 反常色散媒质

群速： $v_g = \frac{5 \times 10^5}{1 - \frac{\omega}{v_p} \frac{631}{2} \frac{1}{\sqrt{\omega}}} = 10^6 \text{ m/s} > v_p = 5 \times 10^5 \text{ m/s}$

本章作业： 5.2, 5.3, 5.6, 5.10, 5.11

本章习题中5.1~5.15中，除了作业之外的其它
题目自己做练习！