

## 静电平衡时

- 场强：
- 导体内部场强处处为零  $\vec{E}_{\text{内}} = 0$
  - 表面场强垂直于导体表面  $\vec{E}_{\text{表面}} \perp \text{导体表面}$
- 电势：
- 导体为一等势体  $V=\text{常量}$
  - 导体表面是一个等势面

## 静电平衡时电荷分布

$$q_{\text{内}} = 0 \quad E_{\text{表面}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

## 计算有导体存在时的静电场分布的基本依据

- 导体静电平衡条件
- 电荷守恒
- 高斯定理

## 有介质时的静电场

- 根据介质中的高斯定理计算出电位移矢量
- 根据电场强度与电位移矢量的关系计算场强

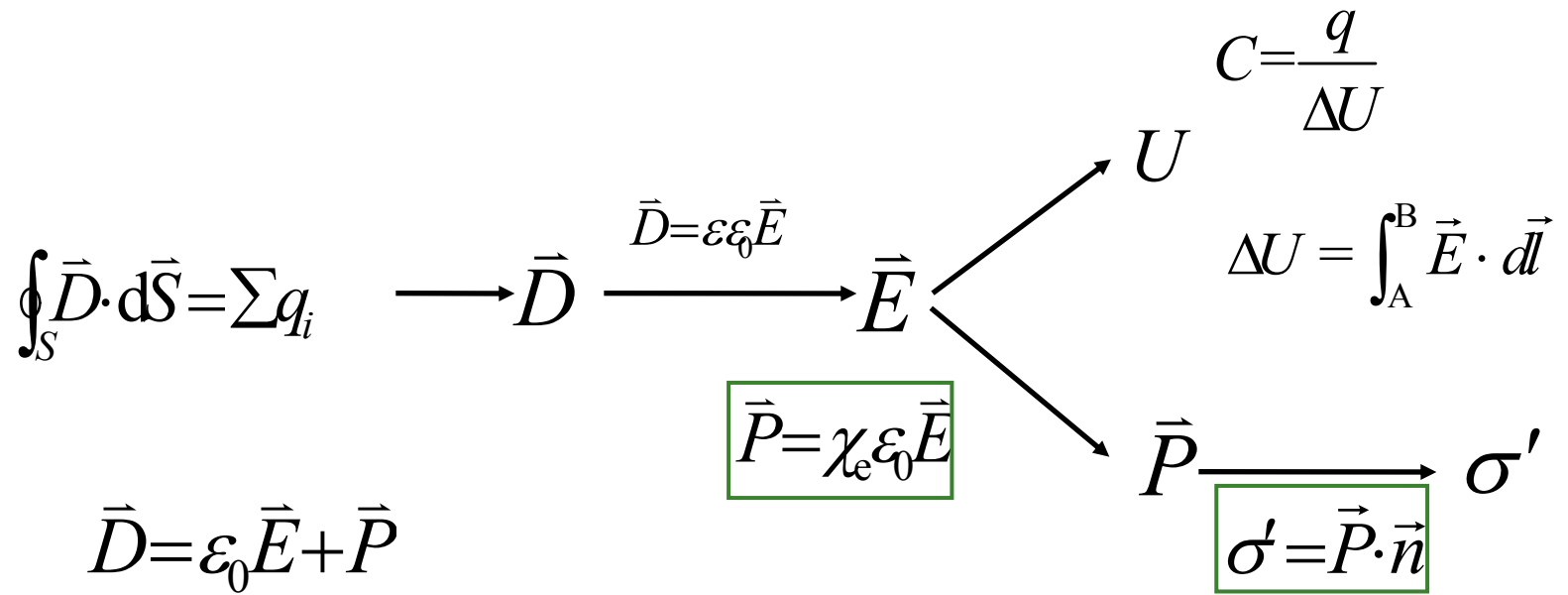
介质中的高斯定理：
$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \sum q_0$$

介质中的场强：
$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon\epsilon_0}$$

电位移矢量：
$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

极化电荷面密度：
$$\sigma' = P \cos \theta = P_n$$

**注意：**电位移矢量是一个辅助量，描写电场的基本物理量是电场强度。



电容的计算：（1）计算场强  $E$

$$\Delta U = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

（2）计算电势差

（3）计算电容

$$C = \frac{q}{\Delta U}$$

电容器的电能：

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q(U_A - U_B) = \frac{1}{2} C(U_A - U_B)^2$$

电场的能量密度：  $w_e = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2$

选择题1： 当一个带电导体达到静电平衡时，

(A) 导体表面上电荷密度较大处电势较高；

(B) 导体表面曲率较大处电势较高；

(C) 导体内部的电势比导体表面的电势高；

(D) 导体内任一点与表面任一点的电势差等于零。

选择题2：选无穷远处为电势零点，半径为R的导体球带电后，其电势为 $U_0$ ，则球外离球心距离为r处的电场强度的大小为

(A)  $\frac{R^2 U_0}{r^3}$

(B)  $\frac{U_0}{R}$

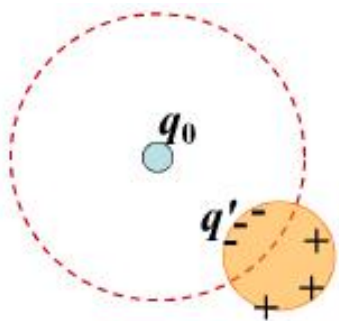
(C)  $\frac{R U_0}{r^2}$

(D)  $\frac{U_0}{r}$

$$U_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow q = \quad E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} =$$

选择题3：在一点电荷产生的静电场中，一块电介质如图放置，以点电荷所在处为球心做球形闭合面，则对此球形闭合面：

- (A) 高斯定理成立，且可用它求出闭合面上各点的场强；
- (B) 高斯定理成立，但不能用它求出闭合面上各点的场强；
- (C) 由于电介质不对称分布，高斯定理不成立；
- (D) 即使电介质对称分布，高斯定理也不成立。



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sum q_0 + \sum q')$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

选择题4：一平行板电容器，两极板相距为 $d$ ，对它充电后与电源断开，然后把电容器两极板之间的距离增大到 $2d$ ，如果电容器内电场的边缘效应忽略不计，则

- (A) 电容器的电容增大一倍；
- (B) 电容器所带的电量增大一倍；
- (C) 电容器两极板间的电场强度增大一倍；
- (D) 储存在电容器中的电场能量增大一倍。

$$C = \frac{q}{\Delta U} = \frac{q}{Ed} \quad w_e = \frac{\varepsilon E^2}{2} \quad W_e = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon E^2 dV$$

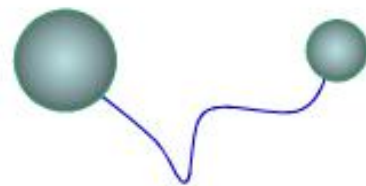
选择题5：两个半径不同带电量相同的导体球，相距很远。今用一细长导线将它们连接起来，两球带电量重新分配的结果是：

(A) 各球所带电量不变；

(B) 半径大的球带电量多；

(C) 半径大的球带电量少；

(D) 无法确定哪一个导体球带电量多。



$$\frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \qquad \frac{q'_1}{q'_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

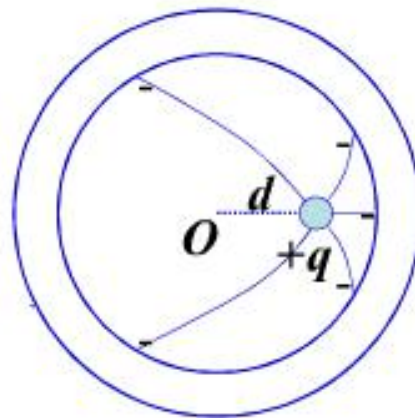
选择题6：一个未带电的空腔导体球壳，内半径为 $R$ ，在腔内离球心的距离为 $d$ 处（ $d < R$ ），固定一电量为 $+q$ 的点电荷，如图所示。用导线把球壳接地后，再把接地线撤去。选无穷远处为电势零点，则球心 $O$ 处电势为：

(A) 0

(B)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$

(C)  $\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R}$

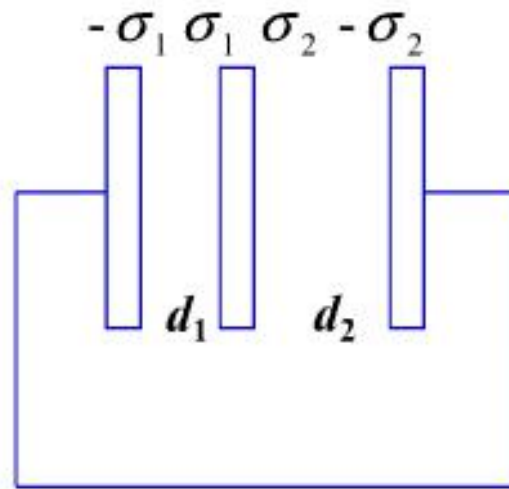
(D)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right)$



选择题7：三块相互平行的导体板，相互之间的距离 $d_1$ 和 $d_2$ ，比板的线度小得多，外面两板用导线连接起来。若中间板上带电，并假设其左右两面上电荷面密度分别为 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ ，如图所示。则比值 $\sigma_1/\sigma_2$ 为：

- (A)  $\frac{d_1}{d_2}$     (B)  $\frac{d_2}{d_1}$   
 (C) 1    (D)  $\frac{d_2^2}{d_1^2}$

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \cdot d_1 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \cdot d_2$$



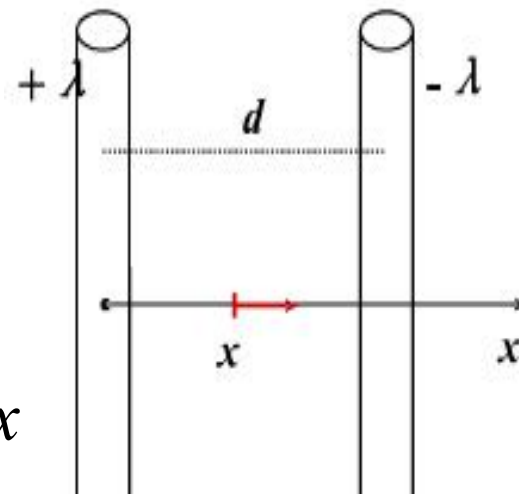
**1 - 59.** 半径都是  $a$  的两根平行长直导线相距为  $d$  ( $d \gg a$ ), 求单位长度的电容。

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (d - x)}$$

$$\Delta U = U_A - U_B = \int_a^{d-a} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{d-a} E dx$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a}{a} \approx \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a}$$

$$C = \frac{q}{\Delta U} = \frac{\lambda \times 1}{U_A - U_B} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{a}}$$



**1-5.** 三平行金属板A B和C，面积都要200厘米<sup>2</sup>，AB相距4.0毫米，AC相距2.0毫米，BC两板都接地。如果使A板带正电 $3.0 \times 10^{-7}$ 库仑，在略去边缘效应时，问B板和C板上感应电荷各是多少？以地的电势为零，问A板的电势是多少？

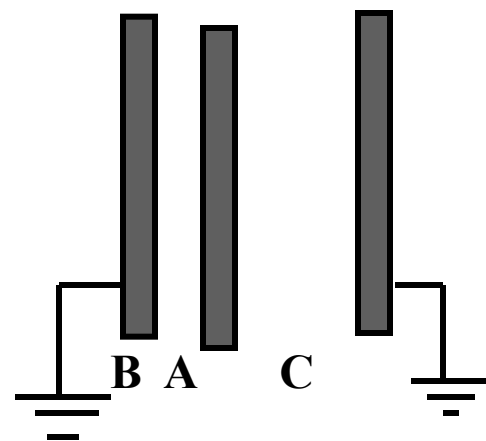
解：

(1) A板左边右边电荷分别为  $q_1, q_2$ ， 则：

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = q \\ E_1 d_1 = E_2 d_2 \end{cases} \quad \begin{cases} q_1 + q_2 = q \\ q_1 d_1 / (\epsilon_0 S) = q_2 d_2 / (\epsilon_0 S) \end{cases}$$

$$q_1 = q / (1 + d_1 / d_2) = q / (1 + 0.5) = 2.0 \times 10^{-7} \text{ (库仑)}$$

$$q_2 = q - q_1 = 1.0 \times 10^{-7} \text{ (库仑)}$$



(2) A板电势：  $U_A = E_1 d_1 = q_1 d_1 / (\epsilon_0 S)$

$$= 2.0 \times 10^{-7} \times 2.0 \times 10^{-3} / (8.85 \times 10^{-12} \times 200 \times 10^{-4})$$

$$= 300 \text{ (伏)}$$

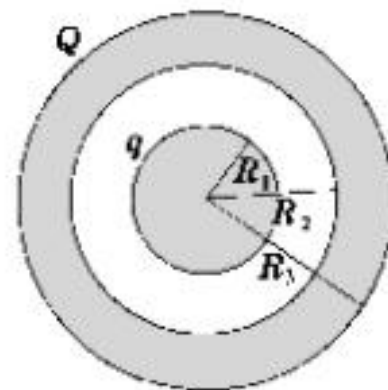
**1-8.** 半径为 $R_1$ 的导体球带有电荷 $q$ 球内有一个内外半径为 $R_2, R_3$ 的同心导体球壳，壳上带有电荷 $Q$ 。(1)求两球的电势 $U_1$ 和 $U_2$ ；(2)两球的电势差  $\Delta U$  ；(3)以导线把球和壳联接在一起后， $U_1, U_2$ 和  $\Delta U$  分别是多少？(4)在情形(1)(2)中，若外球接地， $U_1, U_2$ 和  $\Delta U$  为多少？(5) 设外球离地面很远，若内球接地，情况如何？

由高斯定理  $\oiint E ds = \sum q_i / \varepsilon_0$  求得电场分布：  
 $E = 0 \quad r < R_1$

$$E = q / (4 \pi \varepsilon_0 r^2) \quad R_1 < r < R_2$$

$$E = 0 \quad R_2 < r < R_3$$

$$E = (Q + q) / (4 \pi \varepsilon_0 r^2) \quad r > R_3$$



内球电势：

外球电势：

(5) 内球接地, 则内球电势为 0, 三个球面上的电荷分布发生变化。设内球表面电荷为  $q_1$ , 球壳内表面电荷为  $q_2$ , 球壳外表面电荷为  $q_3$ , 根据导体静电平衡条件, 有

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} + \frac{q_3}{R_3} \right) = 0,$$

此外还有

$$q_1 + q_2 = 0, \quad q_2 + q_3 = Q,$$

由此三式解出

$$q_1 = -q_2 = \frac{-R_1 R_2 Q}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_3 R_1},$$
$$q_3 = \frac{(R_2 - R_1) R_3 Q}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_3 R_1},$$

于是

$$U_1 = 0, \quad U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(R_2 - R_1) Q}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_3 R_1},$$
$$\Delta U = U_1 - U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(R_1 - R_2) Q}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_3 R_1}.$$

**2-33** 一平行板电容器极板面积为 $S$ ，间距为 $d$ ，带电 $Q$ ，将极板的距离拉开一倍。

(1) 静电能改变多少？

(2) 抵抗电场做了多少功？

解：(1) 拉开前电容器储能：
$$W_1 = \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S / d} = \frac{dQ^2}{2\varepsilon_0 S}$$

拉开后电容器储能：

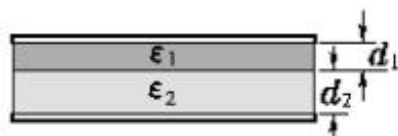
$$W_2 = \frac{Q^2}{2C_2} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S / 2d} = \frac{dQ^2}{\varepsilon_0 S}$$

能量改变：
$$\Delta W = W_2 - W_1 = dQ^2 / 2\varepsilon_0 S$$

(2) 依能量守恒，外力的功等于静电能的增加：

$$A = \Delta W = dQ^2 / 2\varepsilon_0 S$$

**3-4** 平行板电容器(极板面积为  $S$ , 间距为  $d$ ) 中间有两层厚度各为  $d_1$  和  $d_2$  ( $d_1+d_2=d$ )、介电常量各为  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  的电介质层(见本题图)。试求:



习题 4-2

(1) 电容  $C$ ;

(2) 当金属板上带电面密度为  $\pm\sigma_{e0}$  时, 两层介质的分界面上的极化电荷面密度  $\sigma_e'$ ;

解: (1) 设上极板带正电, 面电荷密度为  $\sigma_{e0}$ , 下极板带负电, 面电荷密度为  $-\sigma_{e0}$ , 则可得

$$D = \sigma_{e0}, \quad E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} = \frac{\sigma_{e0}}{\varepsilon_1 \varepsilon_0}, \quad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{\sigma_{e0}}{\varepsilon_2 \varepsilon_0};$$

从而

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{(\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2) \sigma_{e0}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0},$$

$$C = \frac{Q_e}{U} = \frac{\sigma_{e0} S}{(\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2) \sigma_{e0} / \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 S}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}.$$

$$(2) \quad \sigma_e' = \sigma_{e1}' + \sigma_{e2}' = P_1 - P_2 = (\varepsilon_1 - 1) \varepsilon_0 E_1 - (\varepsilon_2 - 1) \varepsilon_0 E_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \sigma_{e0},$$

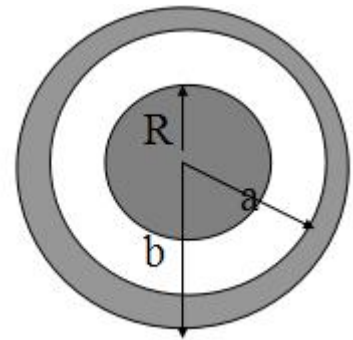
若上极板带负电, 则

$$\sigma_e' = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \sigma_{e0}.$$

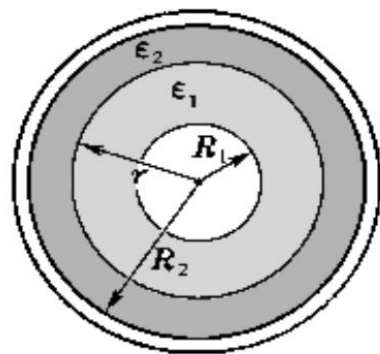
$$(3) \quad U = \frac{(\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2) \sigma_{e0}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0}, \quad (4) \quad D_1 = D_2 = \sigma_{e0}.$$

**3-19** 一半径为 $R$ 的导体球带电荷 $Q$ ，球外有一层同心球壳的均匀电介质，其内外半径分别为 $a$ 和 $b$ ，介电常数为  $\epsilon$  ，求：

- (1) 介质内外的电场强度 $E$ 和电位移 $D$ ；
- (2) 介质内的极化强度 $P$ 和表面上的极化电荷密度 ；
- (3) 介质内的极化电荷体密度  $\rho_e$  为多少？



**4 - 12.** 球形电容器由半径为  $R_1$  的导体球和与它同心的导体球壳构成, 壳的内半径为  $R_2$ , 其间有两层均匀电介质, 分界面的半径为  $r$ , 介电常量分别  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  (见本题图)。



习题 4 - 12

(1) 求电容  $C$ ;

(2) 当内球带电  $-Q$  时, 求各介质表面上极化电荷的面密度  $\sigma'_e$ 。

解: (1)

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad \begin{cases} E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_1 \varepsilon_0 r^2}, & R_1 < r < R \\ E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_2 \varepsilon_0 r^2}, & R < r < R_2 \end{cases}$$

极板间 电势差为

$$U = \int_{R_1}^R E_1 dr + \int_R^{R_2} E_2 dr = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon_1 R_1} - \frac{1}{\varepsilon_1 R} \right) + \left( \frac{1}{\varepsilon_2 R} - \frac{1}{\varepsilon_2 R_2} \right) \right],$$

$$\therefore C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 R R_1 R_2}{\varepsilon_2 R_2 (R - R_1) + \varepsilon_1 R_1 (R_2 - R_1)}.$$

$$(2) \sigma'_e(R_1) = P_1 = \chi_e \varepsilon_0 E_1 = \frac{(\varepsilon_1 - 1)Q}{4\pi \varepsilon_1 R_1^2},$$

$$\sigma'_e(R) = \frac{(\varepsilon_2 - 1)Q}{4\pi \varepsilon_2 R^2} - \frac{(\varepsilon_1 - 1)Q}{4\pi \varepsilon_1 R^2} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)Q}{4\pi \varepsilon_1 \varepsilon_2 R^2},$$

$$\sigma'_e(R_2) = -\frac{(\varepsilon_2 - 1)Q}{4\pi \varepsilon_2 R_2^2}.$$