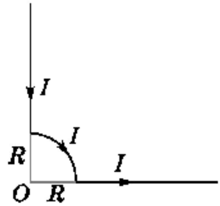
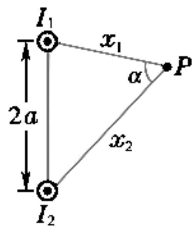
2－1. 如本题图所示，一条无穷长直导线在一处弯折成 1/4 圆弧，圆弧的半径为 R，圆心在 O，直线的延长线都通过圆心。已知导线中的电流为 I，求 O 点的磁感应强度。



习题 2－1

解：两条直的载流导线通过 O 点，在 O 点产生的磁感应强度应为0，中间1/4 圆弧在 O 点的磁感应强度为 $\mu_0 I/8R$，因此整个载流导线在 O 点产生的磁感应强度应 $B=\mu_0 I/8R$，方向垂直纸面向里。



习题 2 – 2

2 – 2. 如本题图所示，两条无穷长的平行直导线相距为 $2a$，分别载有方向相同的电流 I_1 和 I_2. 空间任一点 P 到 I_1 的垂直距离为 x_1、到 I_2 的垂直距离为 x_2，求 P 点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$.

解：根据无限长直载流导线产生磁场的结果：

$$B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x_1},\qquad B_2=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi x_2}.$$

设 P 点的磁感应强度为 B，有

$$B^2=B_1^2+B_2^2+2B_1B_2\cos\alpha,$$

另有

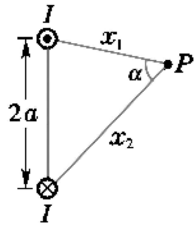
$$(2a)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\cos\alpha,$$

$$\therefore\ B^2=\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x_1}\right)^2+\left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi x_2}\right)^2+\frac{\mu_0^2 I_1 I_2}{4\pi^2 x_1 x_2}\cdot\frac{x_1^2+x_2^2-4a^2}{x_1x_2}$$

$$=\frac{\mu_0^2}{4\pi^2 x_1^2 x_2^2}\left[(I_1+I_2)(I_1x_2^2+I_2x_1^2)-4a^2 I_1 I_2\right],$$

$$\therefore\ B=\frac{\mu_0}{2\pi x_1 x_2}\left[(I_1+I_2)(I_1x_2^2+I_2x_1^2)-4a^2 I_1 I_2\right]^{1/2}.$$

2－3. 如本题图所示，两条无穷长的平行直导线相距为 $2a$，载有大小相等而方向相反的电流 I. 空间任一点 P 到两导线的垂直距离分别为 x_1 和 x_2，求 P 点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$.



习题 2－3

解：

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi x_1},\quad B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi x_2}.$$

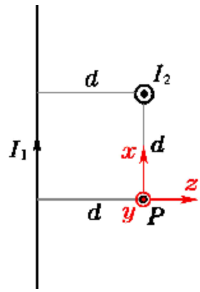
$$B^2=B_1^2+B_2^2-2B_1B_2\cos\alpha,$$

$$(2a)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\cos\alpha,$$

$$\therefore\ B^2=\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi x_1}\right)^2+\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi x_2}\right)^2-\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 x_1x_2}\cdot\frac{x_1^2+x_2^2-4a^2}{x_1x_2},$$

$$\therefore\ B=\frac{\mu_0 a I}{\pi x_1 x_2}.$$

2 - 4. 如本题图，两条无限长直载流导线垂直而不相交，其间最近距离为 $d=2.0\,\text{cm}$**，电流分别为** $I_1=4.0\,\text{A}$ **和** $I_2=6.0\,\text{A}$. P **点到两导线的距离都是** d**，求** P **点的磁感应强度** $\boldsymbol{B}$.

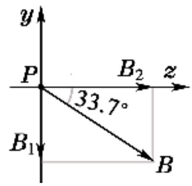


习题 2 - 4

解： $B=\dfrac{\mu_0}{2\pi d}\sqrt{I_1^2+I_2^2}$

$$=\frac{4\times3.14\times10^{-7}}{2\times3.14\times2.0\times10^{-2}}\sqrt{4.0^2+6.0^2}\ \text{T}=7.2\times10^{-5}\text{T}=0.72\,\text{Gs}.$$

$\boldsymbol{B}$ **的方向如下 设电流** I_1 **的方向为** $+x$ **轴方向，电流** I_2 **的方向为** $+y$ **轴方向，则** $\boldsymbol{B}_1$ **沿** $-y$ **方向，** $\boldsymbol{B}_2$ **沿** $+z$ **方向，** $\boldsymbol{B}$ **在** yz **平面内，它与** z **轴的夹角为** $\arctan\dfrac{4.0}{6.0}=33.7°$**（见右图）。**



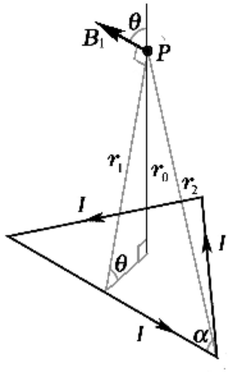
2 －5. 载流等边三角形线圈边长为 $2a$，电流为 I，

（1）求轴线上距中心为 r_0 处的磁感应强度。

（2）证明：当 $r_0 \gg a$ 时轴线上磁感应强度具有如下形式：

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi r_0^3},$$

式中 $m = IS$ 为三角形线圈的磁矩。



解：（1）三角形一边在 P 点产生的磁感应强度为

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r_1}\cos\theta,$$

式中 $r_1 = \sqrt{r_0^2 + \frac{1}{3}a^2}$，　$\cos\alpha = \dfrac{a}{r_2} = \dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3r_0^2 + 4a^2}}$；

另外

$$\cos\theta = \frac{a/\sqrt{3}}{r_1} = \frac{a}{\sqrt{3r_0^2 + a^2}}.$$

由于对称性，总的磁感应强度 B 沿对称轴方向，且有

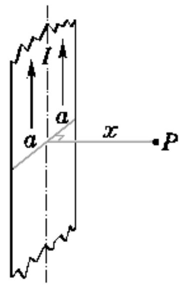
$$B = 3B_1\cos\theta = \frac{9\mu_0 I a^2}{2\pi(3r_0^2 + a^2)\sqrt{3r_0^2 + 4a^2}}.$$

（2）当 $r_0 \gg a$ 时，$B = \sqrt{3}\mu_0 I a^2/2\pi r_0^3$，而三角形线圈的面积 $S = \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\sqrt{3}a = \sqrt{3}a^2$，线圈的磁矩为 $m = IS = \sqrt{3}Ia^2$，因此有

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi r_0^3}.$$

2－6. 电流均匀地流过宽为 $2a$ 的无穷长平面导体薄板。电流大小为 I，通过板的中线并与板面垂直的平面上有一点 P，P 到板的垂直距离为 x（见本题图），设板厚可略去不计，(1) 求 P 点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$.

(2) 当 $a\to\infty$，但 $\iota=I/2a$（单位宽度上的电流，叫做面电流密度）为一常量时 P 点的磁感应强度。



习题 2－6

解：(1) 将载流薄板分割为一系列窄条，利用无限长直导线的磁感应强度公式和叠加原理可得

$$B=\int \mathrm{d}B\cos\alpha=\int_{-a}^{a}\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2(I/2a)\cdot\mathrm{d}l}{\sqrt{x^2+l^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+l^2}}$$

$$=\frac{\mu_0 I x}{2\pi a}\int_0^a\frac{\mathrm{d}l}{x^2+l^2}=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\arctan\frac{a}{x}.$$

P 点磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向在平行于导体薄板的平面内且与电流方向垂直。

(2) 在维持 $\iota=I/2a$ 为常量的条件下令 $a\to\infty$ 时，P 点的磁感应强度为

$$B=\mu_0\iota/2.$$

2－7. 如本题图，两无穷大平行平面上都有均匀分布的面电流，面电流密度（见上题）分别为 ι_1 和 ι_2，两电流平行。求：

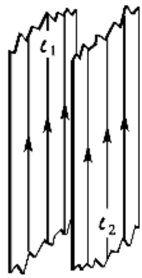
（1）两面之间的磁感应强度；

（2）两面之外空间的磁感应强度；

（3）$\iota_1=\iota_2=\iota$ 时结果如何？

（4）在情形（3）中电流反平行，情形如何？

（5）在情形（3）中电流方向垂直，情形如何？



习题 2－7

解：（1）利用习题 2－6 的结果，

$$B=\frac{\mu_0}{2}(\iota_2-\iota_1)\text{；}$$

（2）

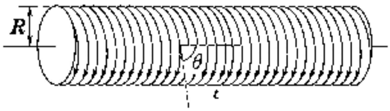
$$B=\frac{\mu_0}{2}(\iota_2+\iota_1)\text{；}$$

（3）两面之间 $B=0$，两面外侧 $B=\mu_0\iota$；

（4）两面之间 $B=\mu_0\iota$，两面外侧 $B=0$；

（5）磁感应强度的大小都是 $\mu_0\iota/\sqrt{2}$，但不同区域 $\boldsymbol{B}$ 的方向不同。

2－8. 半径为 R 的无限长直圆筒上有一层均匀分布的面电流，电流都环绕着轴线流动并与轴线方向成一角度 θ，即电流在筒面上沿螺旋线向前流动（见本题图）。设面电流密度为 ι，求轴线上的磁感应强度。



习题 2－8

解：可将螺线管上的面电流密度 ι 沿轴向和环向分解。轴向的面电流密度 $\iota\cos\theta$ 在轴线上产生的磁感应强度为 0，而环面上的面电流密度 $\iota\sin\theta$ 构成一无限长螺线管，它在轴上产生的磁感应强度 $B=\mu_0\iota\sin\theta$.

2－9. 一很长的螺线管，由外皮绝缘的细导线密绕而成，每厘米有 35 **匝。当导线中通过的电流为** 2.0 A **时，求这螺线管轴线上中心和端点的磁感强应强度。**

解：轴线上中心的磁感应强度

$$B=\mu_0 nI=(4\pi\times10^{-7}\times35\times10^{2}\times2.0)\,\mathrm{T}=8.8\times10^{-3}\,\mathrm{T}=88\,\mathrm{Gs},$$

轴线上端点的磁感应强度

$$B=\frac{1}{2}\mu_0 nI=44\,\mathrm{Gs}.$$

2 – 10. **一螺线管长** 1.0 m**，平均直径为** 3.0 cm**，它有五层绕组，每层有** 850 **匝，通过电流** 5.0 A**，中心的磁感应强度是多少** Gs**？**

解：$B=\mu_0 nI=(4\pi\times10^{-7}\times850\times5\times5.0)\,\mathrm{T}=2.7\times10^{-2}\,\mathrm{T}=2.7\times10^{2}\,\mathrm{Gs}.$

2－11. 用直径0.163 cm**的铜线绕在**6.0 cm**直径的圆筒上，做成一个单层螺线管。管长** 30 cm**，每厘米绕** 5 **匝。铜线在** 75°C **时每米电阻** 0.010 Ω**（假设通电后导线将达此温度）。将此螺线管接在** 2.0 V **的蓄电池上，其中磁感应强度和功率消耗各多少？**

解：线圈电阻

$$R = 0.010 \times 2 \times 3.14 \times 0.030 \times 5 \times 30 = 0.28\,\Omega,$$

线圈电流

$$I = \frac{U}{R} = \frac{2.0}{0.28}\,\mathrm{A} = 7.1\,\mathrm{A}$$

由此

$$B = \mu_0 n I = (4\pi \times 10^{-7} \times 500 \times 7.1)\,\mathrm{T} = 4.4 \times 10^{-3}\,\mathrm{T} = 44\,\mathrm{Gs},$$

$$P = I^2 R = (7.1^2 \times 0.28)\,\mathrm{W} = 14\,\mathrm{W}.$$

2－12. 球形线圈由表面绝缘的细导线在半径为 R 的球面上密绕而成，线圈的中心都在同一直径上，沿这直径单位长度内的匝数为 n，并且各处的 n 都相同，通过线圈的电流为 I. 设该直径上一点 P 到球心的距离为 x，求下列各处的磁感应强度 B：

（1）$x=0$（球心）；

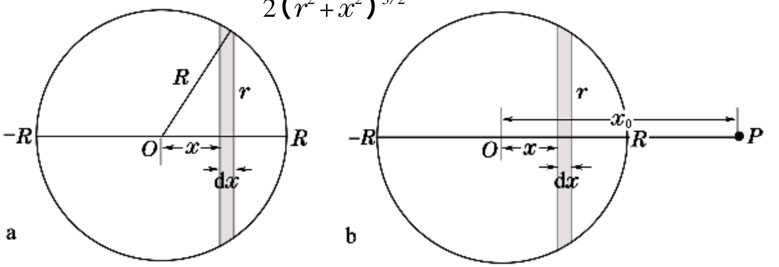
（2）$x=R$（该直径与球面的交点）；

（3）$x<R$（球内该直径上任一点）；

（4）$x>R$（球外该直径上任一点）。

解：（1）一圈电流在 x 处产生的磁感应强度

$$B=\frac{\mu_0 r^2 I}{2(r^2+x^2)^{3/2}},$$



球形线圈在球心处产生的磁感应强度为（参见图 a）

$$B=\int_{-R}^{R}\frac{\mu_0 r^2 n I\,\mathrm{d}x}{2(r^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0 n I}{2R^3}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\mu_0 n I.$$

（2）先导出一个一般公式，如图 b：

$$B=\int_{-R}^{R}\frac{\mu_0 n I}{2}\frac{(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{[r^2+(x_0-x)^2]^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0 n I}{2}\left[\int_{-R}^{R}\frac{R^2\,\mathrm{d}x}{(R^2+x_0^2-2x_0x)^{3/2}}-\int_{-R}^{R}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(R^2+x_0^2-2x_0x)^{3/2}}\right],$$

设 $R^2+x_0^2=a$，$2x_0=b$，则上述积分化为

$$B=\frac{\mu_0 n I}{2}\left[R^2\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{(a-bx)^{3/2}}-\int_{-R}^{R}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(a-bx)^{3/2}}\right]$$

其中 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a-bx)^{3/2}}=\frac{2}{b}\frac{1}{(a-bx)^{1/2}},$$

$$\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(a-bx)^{3/2}}=\frac{2x^2}{b(a-bx)^{1/2}}+\frac{8x}{b^2}(a-bx)^{1/2}+\frac{16}{3b^3}(a-bx)^{3/2},$$

$$\therefore\ B=\frac{\mu_0 n I}{2}\left[\frac{2R^2}{b(a-bx)^{1/2}}-\frac{2x^2}{b(a-bx)^{1/2}}-\frac{8x}{b^2}(a-bx)^{1/2}-\frac{16}{3b^3}(a-bx)^{3/2}\right]_{-R}^{R}$$

$$=-\frac{\mu_0 n I}{2}\left[2R(|R-x_0|+|R+x_0|)+\frac{2}{3x_0}(|R-x_0|^3-|R+x_0|^3)\right].$$

P 点在球面上，$x_0=\pm R$，则

$$B=-\frac{\mu_0 nI}{2R^2}\left[4R^2-\frac{2}{3R}(2R)^3\right]=-\frac{\mu_0 nI}{2R^2}\left(4R^2-\frac{16}{3}R^2\right)=\frac{2}{3}\mu_0 nI.$$

（3）P 点在球内，$|x_0|<R$，

$$B=-\frac{\mu_0 nI}{2x_0^2}\left\{4R^2+\frac{2}{3x_0}\left[(R-x_0)^3-(R+x_0)^3\right]\right\}$$

$$=-\frac{\mu_0 nI}{2x_0^2}\left(4R^2-4R^2-\frac{4}{3}x_0^2\right)=\frac{2}{3}\mu_0 nI.$$

（4）P 点在球外，$|x_0|>R$，

$$B=-\frac{\mu_0 nI}{2x_0^2}\left\{4Rx_0+\frac{2}{3x_0}\left[(x_0-R)^3-(x_0+R)^3\right]\right\}$$

$$=-\frac{\mu_0 nI}{2x_0^2}\left(4Rx_0-4Rx_0-\frac{4R^3}{3x_0}\right)=\frac{2}{3}\mu_0 nI\frac{R^3}{x_0^3}.$$

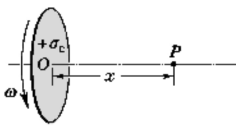
2 －13. 半径为 R 的球面上均匀分布着电荷,面密度为 σ_e. 当这球面以角速度 ω 绕它的直径旋转时,求转轴上球内和球外任一点的磁感应强度分布。

解：此带电球面绕它的直径旋转，面电荷的运动就形成电流。结果与上题情形类似,只要求出轴线上单位长度电流值,利用上题的结果即可求出球内、球外轴线上任一点的磁感应强度。

设轴线上 $\mathrm{d}x$ 宽度内的电流为 $q\nu=\sigma_e\cdot 2\pi r\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sin\alpha}\cdot\frac{\omega}{2\pi}=\sigma_e\cdot\frac{r}{\sin\alpha}\cdot\omega\cdot\mathrm{d}x=\sigma_e R\omega\,\mathrm{d}x$**，因此上题中单位长度内电流 nI 应代之以 $\sigma_e R\omega$，于是**

$$\begin{cases}\text{球内} & B=\dfrac{2}{3}\mu_0\sigma_e\omega R,\\ \text{球外} & B=\dfrac{2}{3}\mu_0\sigma_e\omega\dfrac{R^4}{x^3}.\end{cases}$$

2 －14. 半径为 R 的圆片上均匀带电，面密度为 σ_e. 令该片以匀角速度 ω 绕它的轴旋转，求轴线上距圆片中心 O 为 x 处的磁场（见本题图）。



习题 2 －14

解：利用书上（2. 29）式，P 点的磁感应强度可写成下列积分：

$$B=\int_0^R \frac{\mu_0}{2}\frac{r^2\cdot\sigma_e\cdot 2\pi r\,dr\cdot\omega/2\pi}{(r^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0\sigma_e\omega}{2}\int_0^R\frac{r^3\,dr}{(r^2+x^2)^{3/2}},$$

设 $r=x\tan\theta$，则 $dr=\dfrac{x\,d\theta}{\cos^2\theta}$，且 $\dfrac{r^3}{(r^2+x^2)^{3/2}}=\sin^3\theta$，我们有

$$B=\frac{\mu_0\sigma_e\omega x}{2}\int_0^\alpha\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{\mu_0\sigma_e\omega x}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta}+\cos\theta\right)\Bigg|_0^\alpha$$

$$=\frac{\mu_0\sigma_e\omega x}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\cos\alpha-2\right)=\frac{\mu_0\sigma_e\omega}{2}\left(\frac{R^2+2x^2}{\sqrt{R^2+x^2}}-2x\right).\ ,$$

2 – 15. 氢原子处在正常状态（基态）时，它的电子可看作是在半径为 $a=0.53\times10^{-8}\,\mathrm{cm}$ **的轨道（叫做玻尔轨道）上作匀速圆周运动，速率为** $v=2.2\times10^{8}\,\mathrm{cm/s}$. **已知电子电荷的大小为** $e=1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$**，求电子的这种运动在轨道中心产生的磁感强度** B **的值。**

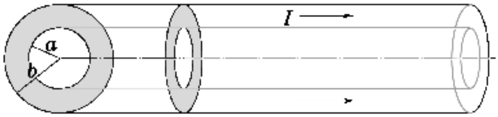
解： $B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$，　而 $I=e\cdot\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{ev}{2\pi R}$，

$$\therefore\ B=\frac{\mu_0 e v}{4\pi R^2}=\frac{10^{-7}\times1.6\times10^{-19}\times2.2\times10^{8}}{(0.53\times10^{-10})^2}\,\mathrm{T}=13\,\mathrm{T}=1.3\times10^{5}\,\mathrm{Gs}.$$

2－16. **一载有电流 I 的无穷长直空心圆筒，半径为 R（筒壁厚度可以忽略），电流沿它的轴线方向流动，并且是均匀分布的，分别求离轴线为 $r<R$ 和 $r>R$ 处的磁场。**

解：本题所给的情形有很好的对称性，可以用安培环路定理计算磁感应强度。根据对称性，可在空心圆筒内部作一同轴环路，穿过环路的电流为 0，可得圆筒内部的磁感应强度 $B_{内}=0$；在空心圆筒外部作一同轴圆形环路，由安培环路定理得 $B_{外}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

2 – 17. 有一很长的载流导体直圆管,内半径为 a, 外半径为 b, 电流为 I, 电流沿轴线方向流动,并且均匀分布在管壁的横截面上(见本题图)。空间某一点到管轴的垂直距离为 r,求:(1) $r<a$, (2) $a<r<b$,(3) $r>b$ 等处的磁感应强度。



习题 2 – 17

解:运用安培环路定理容易得出

(1) $B=0$,　　$r<a$

(2) $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\dfrac{r^2-a^2}{b^2-a^2}$,　$a<r<b$

(3) $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$,　$r>b$.

2 －18. 一很长的导体直圆管，管厚为 5.0 mm**，外直径为** 50 mm**，载有** 50 A **的直流电，电流沿轴向流动，并且均匀分布在管的横截面上。求下列几处磁感应强度的大小** B**：**

（1）管外靠近外壁；

（2）管内靠近内壁；

（3）内外壁之间的中点。

解：（1）$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R_2}=\dfrac{4\pi\times10^{-7}\times50}{2\pi\times25\times10^{-3}}\,\mathrm{T}=4.0\times10^{-4}\,\mathrm{T}=4.0\,\mathrm{Gs}$；

（2）$B=0$；

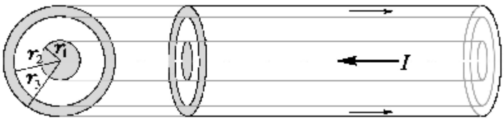
（3）$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\dfrac{r^2-R_1^2}{R_2^2-R_1^2}=\dfrac{4\pi\times10^{-7}\times50}{2\pi\times22.5\times10^{-3}}\cdot\dfrac{(22.5^2-20^2)\times10^{-6}}{(25^2-20^2)\times10^{-6}}\,\mathrm{T}$

$=2.1\times10^{-4}\,\mathrm{T}=2.1\,\mathrm{Gs}.$

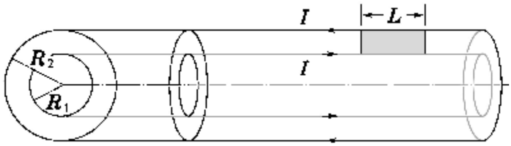
2－19. 电缆由一导体圆柱和一同轴的导体圆筒构成。使用时，电流 I 从一导体流去，从另一导体流回，电流都均匀分布在横截面上。设圆柱的半径为 r_1，圆筒的内外半径分别为 r_2 和 r_3（见本题图），r 为到轴线的垂直距离，求 r 从 0 到 ∞ 的范围内各处的磁感应强度 B.

解：分区运用安培环路定理可求得：

$$B=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2}, & r<r_1\\[2mm] \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r_1<r<r_2\\[2mm] \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\dfrac{r_3^2-r^2}{r_3^2-r_2^2}, & r_2<r<r_3\\[2mm] 0, & r>r_3\end{cases}$$



习题 2－19



习题 2 －20

2 －20. 一对同轴无穷长直的空心导体圆筒,内、外筒半径分别为 R_1 和 R_2(筒壁厚度可以忽略)。电流 I 沿内筒流去,沿外筒流回(见本题图),

(1) 计算两筒间的磁感应强度 B;

(2) 通过长度为 L 的一段截面(图中阴影区)的磁通量 Φ_B;

(3) 计算磁矢势 A 在两筒间的分布。

解:(1) 运用安培环路定理可得 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$,

(2) $\Phi_B=\int Bl\,\mathrm{d}r=\int_{R_1}^{R_2}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}l\,\mathrm{dr}=\dfrac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$,

(3) 考虑一 矩形回路,其一边在内筒处,另一边在 r 处,其它两边与轴线垂直。对此矩形回路运用(2.52)式,其中

$$\oint \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=A(R_1)l-A(r)l,$$

$$\iint \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{R_1}^{r}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}l\,\mathrm{dr}=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{r}{R_1},$$

$$A(r)-A(R_1)=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r}{R_1},$$

取 R_1 处为磁矢势的零点,$A(R_1)=0$,因此磁矢势的分布为

$$A(r)=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r}{R_1}.$$

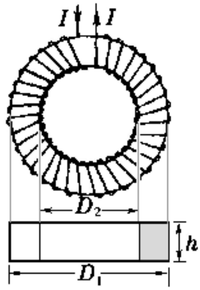
2 －21. 矩形截面的螺绕环，尺寸见本题图。

（1）求环内磁感应强度的分布；

（2）证明通过螺绕环截面（图中阴影区）的磁通量为

$$\Phi_B=\frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac{D_1}{D_2},$$

其中 N 为螺绕环总匝数，I 为其中电流的大小。



习题 2 －21

解：（1）在螺绕环内作一圆形回路，根据安培环路定理有

$$2\pi r\cdot B=\mu_0 NI,\qquad B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r},$$

（2）通过螺绕环截面的磁通量为

$$\Phi_B=\int_{R_2}^{R_1}Bh\,\mathrm{d}r=\int_{R_2}^{R_1}\frac{\mu_0 NIh}{2\pi r}\mathrm{d}r$$

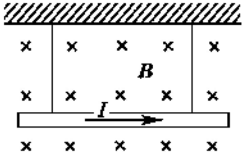
$$=\frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac{R_1}{R_2}=\frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac{D_1}{D_2}.$$

2－22. 用安培环路定理重新计算习题2－6(2)中无限大均匀载流平面外的磁感应强度。

解：无限大平面电流产生的磁感应强度方向与无限大平面平行。根据对称性分析，可作矩形回路，运用安培环路定理有

$$2l \cdot B = \mu_0 \iota l, \qquad \therefore\ B = \frac{1}{2}\mu_0 \iota.$$

2－23. 如本题图所示，有一根长为 l 的直导线，质量为 m，用细绳子平挂在外磁场 B 中，导线中通有电流 I，I 的方向与 B 垂直。



习题 2－23

（1）求绳子张力为 0 时的电流 I. 当 $l=50\,\mathrm{cm}$，$m=10\,\mathrm{g}$，$B=1.0\,\mathrm{T}$ 时，$I=$？

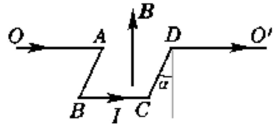
（2）在什么条件下导线会向上运动？

解：（1）绳子张力为 0 时，直导线所受的重力与安培力相等，因此

$$mg=IlB,\qquad \therefore\ I=\frac{mg}{lB}=\frac{10\times10^{-3}\times9.8}{0.50\times1.0}\mathrm{A}=0.20\,\mathrm{A}.$$

（2）当 $I>\dfrac{mg}{lB}$ 时，安培力大于重力，导线会向上运动。

2 - 24. 横截面积 $S=2.0\,\mathrm{mm}^2$ 的铜线弯成如本题图中所示形状，其中 OA 和 DO' 段固定在水平方向不动，$ABCD$ 段是边长为 a 的正方形的三边，可以绕 OO' 转动；整个导线放在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，$\boldsymbol{B}$ 的方向竖直向上。已知铜的密度 $\rho=8.9\,\mathrm{g/cm}^3$，当这铜线中的 $I=10\,\mathrm{A}$ 时，在平衡情况下，AB 段和 CD 段与竖直方向的夹角 $\alpha=15°$，求磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小。



习题 2 - 24

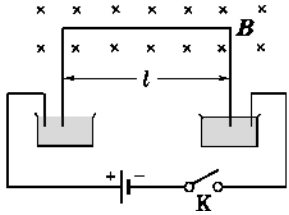
解：载流导线 AB 段、BC 段和 CD 段受的重力矩和 BC 段的磁力矩平衡，

$$mga\sin\alpha+2mg\frac{a}{2}\sin\alpha=IaB\cdot a\cos\alpha,$$

$$B=\frac{2mg}{Ia}\tan\alpha=\frac{2\rho Sg}{I}\tan\alpha$$

$$=\frac{2\times8.9\times10^3\times2.0\times10^{-6}\times9.8}{10}\mathrm{T}\times\tan15°=9.3\times10^{-3}\mathrm{T}=93\,\mathrm{Gs}.$$

2 －25. 一段导线弯成如本题图中所示的形状,它的质量为 m,上面水平一段的长度为 l,处在均匀磁场中,磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B}$ 与导线垂直 ;导线下面两端分别插在两个浅水银槽里,两槽水银与一带开关 K 的外电源联接。当 K 一接通,导线便从水银槽里跳起来。



习题 2 －25

（1）设跳起来的高度为 h,求通过导线的电量 q；

（2）当 $m=10\,\mathrm{g}$,$l=20\,\mathrm{cm}$,$h=3.0\,\mathrm{m}$,$B=0.10\,\mathrm{T}$ 时,求 q 的量值。

解：（1）根据动量定理,由 K 接通瞬间载流导线所受的安培力可计算出它向上运动的速度。再根据机械能守恒定律可找到它与跳起来高度之间的联系，

$$\int F\mathrm{d}t=\int I\mathrm{d}t\cdot l\cdot B=lBq=mv-0,\quad \therefore\ v=\frac{lBq}{m}$$

又 $\frac{1}{2}mv^2=mgh$，因此

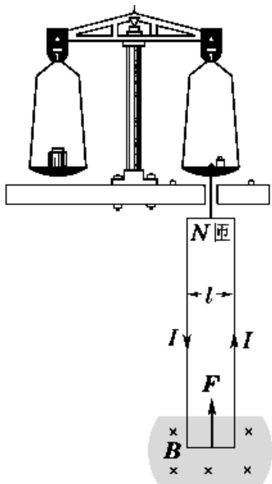
$$q=\frac{mv}{lB}=\frac{m}{lB}\sqrt{2gh};$$

（2）代入数值 $q=\frac{m}{lB}\sqrt{2gh}=\frac{10\times10^{-3}}{20\times10^{-2}\times0.10}\times\sqrt{2\times9.8\times3.0}\,\mathrm{C}=3.8\,\mathrm{C}.$

2－26. 安培秤如本题图所示，它的一臂下面挂有一个矩形线圈，线圈共有 N 匝，线圈的下部悬挂在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 内，下边一段长为 l，它与 $\boldsymbol{B}$ 垂直。当线圈的导线中通有电流 I 时，调节砝码使两臂达到平衡；然后使电流反向，这时需要在一臂上加质量为 m 的砝码，才能使两臂再达到平衡。

（1）求磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小 B；

（2）当 $N=9$，$l=10.0\,\text{cm}$，$I=0.100\,\text{A}$，$m=8.78\,\text{g}$ 时，设 $g=9.80\,\text{m/s}^2$，$B=$？



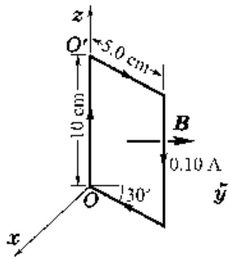
习题 2－26

解：（1）根据线圈所受的安培力与重力平衡，

$$2NIlB=\Delta m g,\qquad \therefore\ B=\frac{\Delta m g}{2NIl};$$

（2）$$B=\frac{\Delta m g}{2NIl}=\frac{8.78\times10^{-3}\times9.80}{2\times9\times0.100\times0.100}\,\text{T}=0.478\,\text{T}.$$

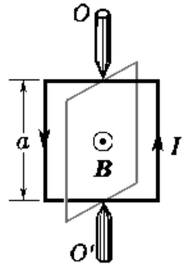
2－27. 一矩形载流线圈由20匝互相绝缘的细导线绕成，矩形边长为10.0 cm和5.0 cm，导线中的电流为0.10 A，这线圈可以绕它的一边OO'转动（见本题图）。当加上$B=0.50\,\mathrm{T}$的均匀外磁场、$\boldsymbol{B}$与线圈平面成30°角时，求这线圈受到的力矩。



习题2－27

解：力矩 $L=NIl_1B\cdot l_2\cos30°=20\times0.10\times10\times10^{-2}\times0.50\times5.0\times10^{-2}\times\cos30°=4.3\times10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m}$.

2－28. 一边长为 a 的正方形线圈载有电流 I，处在均匀外磁场 B 中，B 沿水平方向，线圈可以绕通过中心的竖直轴 OO' 转动（见本题图），转动惯量为 J. 求线圈在平衡位置附近作微小摆动的周期 T.



习题 2－28

解：

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-Ia^2B\sin\theta\approx-Ia^2B\theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{Ia^2B}{J}\theta=0,$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J}{Ia^2B}}.$$

2 －29. **一螺线管长** 30 cm，**横截面的直径为** 15 mm，**由表面绝缘的细导线密绕而成，每厘米绕有** 100 **匝。当导线中通有** 2.0 A **的电流后，把这螺线管放到** $B=4.0\,\mathrm{T}$ **的均匀磁场中，求：**

（1）螺线管的磁矩；

（2）螺线管所受力矩的最大值。

解：（1）$m=NIS=30\times100\times2.0\times\pi\times\left(\dfrac{15\times10^{-3}}{2}\right)^2\mathrm{A\cdot m^2}=1.1\,\mathrm{A\cdot m^2}$，

（2）$L=mB=(1.06\times4.0)\,\mathrm{kg\cdot m}=4.2\,\mathrm{kg\cdot m}.$

2 - 30. **两条很长的平行输电线相距** 20 mm，**都载有** 100 A **的电流，分别求电流方向相同和相反时，其中两段** 1 m **长的输电线之间的相互作用力。**

解：根据(2.63) **式**

$$f=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}l=\left(\frac{2\times10^{-7}\times100\times100}{20\times10^{-3}}\times1\right)\mathrm{N}=0.10\,\mathrm{N}.$$

电流方向相同时为吸引力，电流方向相反时为排斥力。

2 －31. 发电厂的汇流条是两条 3 m **长的平行铜棒，相距** 50 cm **;当向外输电时，每条棒中的电流都是** 10000 A. **作为近似，把两棒当作无穷长的细线，试计算它们之间的相互作用力。**

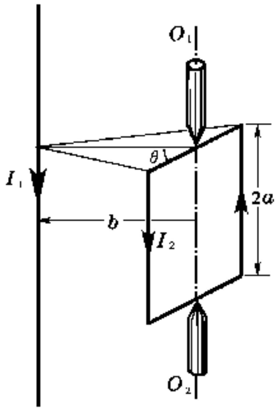
解： $f=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\,l=\left(\frac{2\times10^{-7}\times1.0\times10^{4}\times1.0\times10^{4}}{0.5}\times3.0\right)\mathrm{N}=1.2\times10^{2}\,\mathrm{N}.$

2 －32. 载有电流 I_1 的长直导线旁边有一正方形线圈，边长为 $2a$，载有电流 I_2，线圈中心到导线的垂直距离为 b，电流方向如本题图所示。线圈可以绕平行于导线的轴 O_1O_2 转动。求：

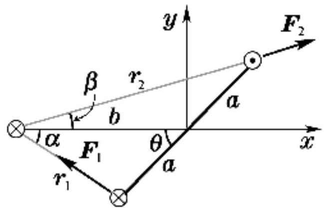
（1）线圈在 θ 角度位置时所受的合力 $\boldsymbol{F}$ 和合力矩 $\boldsymbol{L}$；

（2）线圈平衡时 θ 的值；

（3）线圈从平衡位置转到 $\theta=\pi/2$ 时，I_1 作用在线圈上的力作了多少功？



习题 2 －32



解：（1）坐标选取如图所示，图中的上下两条边所受的力大小相等方向相反，相互抵消，只有线圈的左右两条边受到的安培力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 对合力和合力矩有贡献。容易得出 F_1 和 F_2 的大小为

$$F_1=\frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi r_1},\qquad F_2=\frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi r_2};$$

余弦定理有

$$\begin{cases} r_1^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta, \\ r_2^2=a^2+b^2+2ab\cos\theta; \end{cases}$$

$\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 在 x 和 y 方向的分量分别为

$$\begin{cases} F_{1x}=-F_1\cos\alpha, \\ F_{1y}=F_1\sin\alpha; \end{cases}\qquad \begin{cases} F_{2x}=F_2\cos\beta, \\ F_{2y}=F_2\sin\beta. \end{cases}$$

由图中的几何关系可求出

$$\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{b-a\cos\theta}{r_1}, \\ \sin\alpha=\dfrac{a\sin\theta}{r_1}; \end{cases}\qquad \begin{cases} \cos\beta=\dfrac{b+a\cos\theta}{r_2}, \\ \sin\beta=\dfrac{a\sin\theta}{r_2}. \end{cases}$$

由此可得出线圈所受的合力在 x 和 y 方向的分量分别为

$$\begin{aligned} F_x&=F_{2x}+F_{1x}=F_2\cos\beta-F_1\cos\alpha \\ &=\frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi}\left(\frac{b+a\cos\theta}{a^2+b^2+2ab\cos\theta}-\frac{b-a\cos\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y&=F_{2y}+F_{1y}==F_2\sin\beta+F_1\sin\alpha \\ &=\frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi}\left(\frac{a\sin\theta}{a^2+b^2+2ab\cos\theta}+\frac{a\cos\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}\right); \end{aligned}$$

合力矩为

$$L=F_1 a\sin(\theta+\alpha)+F_2 a\sin(\theta-\beta)$$

$$=\frac{\mu_0 a^2 I_1 I_2}{\pi r_1}(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)+\frac{\mu_0 a^2 I_1 I_2}{\pi r_2}(\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta)$$

$$=\frac{\mu_0 a^2 I_1 I_2}{\pi r_1^2}[\sin\theta(b-a\cos\theta)+a\cos\theta\sin\theta]$$

$$+\frac{\mu_0 a^2 I_1 I_2}{\pi r_2^2}[\sin\theta(b+a\cos\theta)-a\cos\theta\sin\theta]$$

$$=\frac{\mu_0 a^2 I_1 I_2 b\sin\theta}{\pi}\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)$$

$$=\frac{\mu_0 a^2 I_1 I_2 b\sin\theta}{\pi}\left(\frac{1}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab\cos\theta}\right)$$

$$=\frac{2\mu_0 I_1 I_2 a^2 b(a^2+b^2)\sin\theta}{\pi[(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\cos^2\theta]}.$$

（2）线圈平衡时所受的力矩为 0，由上式可以看出

$$\theta=\begin{cases}0 & \textbf{稳定平衡，}\\ \pi & \textbf{不稳定平衡。}\end{cases}$$

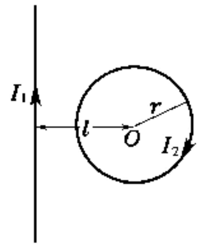
（3）功　$A=\int_0^{\pi/2} L\,\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2 a^2 b}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}+\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{a^2+b^2+2ab\cos\theta}\right]$$

$$=-\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}\left[-\ln(a^2+b^2-2ab\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2}+\ln(a^2+b^2+2ab\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2}\right]$$

$$=-\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{\pi}\ln\frac{b-a}{b+a}.$$

2－33. 载有电流 I_1 的长直导线旁边有一平面圆形线圈，线圈半径为 r，中心到直导线的距离为 l，线圈载有电流 I_2，线圈和直导线在同一平面内（见本题图）。求 I_1 作用在圆形线圈上的力。



习题 2－33

解：载流 I_1 的长直导线在圆形线圈上一电流元 $I_2\mathrm{d}L$ 处产生的 $\boldsymbol{B}$ 垂直图面向里，其值可表为

$$B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(l+r\cos\theta)}.$$

在 O 点处建立直角坐标系 Oxy，设 x 轴指向右，y 轴指向上，由于圆形载流线圈的对称性，它所受的安培力指向 $-x$ 方向，沿 y 方向的安培力为 0，因此圆线圈受到的总安培力为

$$F=\oint_{(L)}\frac{\mu_0 I_1 I_2\mathrm{d}L}{2\pi(l+r\cos\theta)}\cdot\cos\theta,$$

式中 $\mathrm{d}L$ 为圆弧元，$\mathrm{d}L=r\mathrm{d}\theta$，因此

$$F=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I_1 I_2 r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{2\pi(l+r\cos\theta)}=\frac{\mu_0 I_1 I_2 r}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{l+r\cos\theta}$$

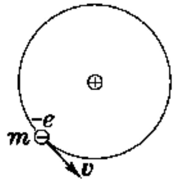
$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2 r}{2\pi}\left[\frac{\theta}{r}-\frac{2l}{r\sqrt{l^2-r^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{l-r}{l+r}}\tan\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$=\mu_0 I_1 I_2\left(1-\frac{l}{\sqrt{l^2-r^2}}\right).$$

2－34. 试证明电子绕原子核沿圆形轨道运动时磁矩与角动量大小之比为

$$\gamma = \frac{-e}{2m}（经典回旋磁比率），$$

式中 $-e$ 和 m 是电子的电荷与质量，负号表示磁矩与角动量的方向相反，如图。（它们各沿什么方向？）



习题2－34

【提示：计算磁矩时，可把在圆周上运动的电子看成是电流环。】

解：电子绕原子核沿圆形轨道运动的磁矩为

$$M = IS = -e \cdot \frac{v}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = -\frac{evr}{2},$$

角动量为 $L = mvr$，因此经典回旋磁比率为

$$\gamma = \frac{M}{L} = -\frac{e}{2m}.$$

电子绕核运动角动量 L 的方向垂直纸面向外，磁矩的方向垂直纸面向里。

2 － 35. 一磁电式电流计线圈长 $a=2.0\,\mathrm{cm}$**，宽** $b=1.0\,\mathrm{cm}$**，** $N=250$ **匝，磁极间隙内的磁感应强度** $B=2000\,\mathrm{Gs}$. **当通入电流** $I=0.10\,\mathrm{mA}$ **时，偏转角** $\theta=30°$**，求：**

（1）作用在线圈上的磁偏转力矩 $L_{磁}$**；**

（2）游丝的扭转常数 D.

解：（1） $L_{磁}=NIabB=250\times0.10\times10^{-3}\times2.0\times10^{-2}\times1.0\times10^{-2}\times0.20\,\mathrm{N\cdot m}$

$=1.0\times10^{-6}\,\mathrm{N\cdot m}$，

（2）$D=\dfrac{L_{磁}}{\varphi}=\dfrac{1.0\times10^{-6}}{30}\,\mathrm{N\cdot m}/(°)=3.3\times10^{-8}\,\mathrm{N\cdot m}/(°)$.

2－36. 带电粒子穿过过饱和蒸汽时，在它走过的路径上，过饱和蒸汽便凝结成小液滴，从而使得它运动的轨迹（径迹）显示出来，这就是云室的原理。今在云室中有 $B=10000\,\mathrm{Gs}$ 的均匀磁场，观测到一个质子的径迹是圆弧，半径 $r=20\,\mathrm{cm}$，已知这粒子的电荷为 $1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$，质量为 $1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$，求它的动能。

解：
$$f=evB=m\frac{v^2}{r},\quad \therefore\ mv=eBr\ ;$$

$$E_\mathrm{k}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{eBr}{m}\right)^2=\frac{1}{2m}(eBr)^2$$

$$=\frac{(1.6\times10^{-19}\times1.0\times0.20)^2}{2\times1.67\times10^{-27}}\,\mathrm{J}=3.07\times10^{-13}\,\mathrm{J}=1.9\,\mathrm{MeV}.$$

2－37. **测得一太阳黑子的磁场为** $B=4000\,\mathrm{Gs}$**，问其中电子以（1）**$5.0\times10^{7}\,\mathrm{cm/s}$**，（2）**$5.0\times10^{8}\,\mathrm{cm/s}$ **的速度垂直于** $\boldsymbol{B}$ **运动时，受到的洛伦兹力各有多大？回旋半径各有多大？已知电子电荷的大小为** $1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$**，质量为** $9.1\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

解：（1） $f=evB=(1.6\times10^{-19}\times5.0\times10^{5}\times0.40)\,\mathrm{N}=3.2\times10^{-14}\,\mathrm{N}$，

$$r=\frac{mv}{eB}=\frac{9.1\times10^{-31}\times5.0\times10^{5}}{1.6\times10^{-19}\times0.40}\,\mathrm{m}=7.1\times10^{-6}\,\mathrm{m}\text{；}$$

（2） $f=evB=(1.6\times10^{-19}\times5.0\times10^{6}\times0.40)\,\mathrm{N}=3.2\times10^{-13}\,\mathrm{N}$，

$$r=\frac{mv}{eB}=\frac{9.1\times10^{-31}\times5.0\times10^{6}}{1.6\times10^{-19}\times0.40}\,\mathrm{m}=7.1\times10^{-5}\,\mathrm{m}.$$

2－38. 一电子以 $v=3.0\times10^{7}\,\mathrm{m/s}$ **的速率射入匀强磁场** $\boldsymbol{B}$ **内，它的速度与** $\boldsymbol{B}$ **垂直，**$B=10\,\mathrm{T}$. **已知电子电荷** $-e=-1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$**，质量** $m=9.1\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$**，求这电子所受的洛伦兹力，并与它在地面所受的重力加以比较。**

解：

$$f=evB=(1.6\times10^{-19}\times3.0\times10^{7}\times10)\,\mathrm{N}=4.8\times10^{-11}\,\mathrm{N},$$

$$mg=(9.1\times10^{-31}\times9.8)\,\mathrm{N}=8.9\times10^{-30}\,\mathrm{N},$$

$$\frac{f}{mg}=\frac{4.8\times10^{-11}}{8.9\times10^{-30}}=5.4\times10^{18},$$

电子在磁场中所受的洛伦兹力为其重力的 5.4×10^{18} **倍。**

2－39. 已知质子质量 $m=1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$，电荷 $e=1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$，地球半径 $6370\,\mathrm{km}$，地球赤道上地面的磁场 $B=0.32\,\mathrm{Gs}$.

（1）要使质子绕赤道表面作圆周运动，其动量 p 和能量 E 应有多大？

（2）若要使质子以速率 $v=1.0\times10^{7}\,\mathrm{m/s}$ 环绕赤道表面作圆周运动，问地磁场应该有多大？

【提示 相对论中粒子的动量 $\boldsymbol{p}$ 和能量 E 的公式如下：

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v},$$

$$E=mc^2=c\sqrt{p^2+m_0^2c^2},$$

m 和 m_0 的关系见(2.79)式。】

解：(1)
$$p=mv=eBR$$

$$=(1.6\times10^{-19}\times0.32\times10^{-4}\times6.37\times10^{6})\,\mathrm{kg\cdot m/s}=3.3\times10^{-17}\,\mathrm{kg\cdot m/s},$$

此时质子的速度已经很接近光速 c，可估计如下：

$$p=\frac{m_0v}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

$$v=\frac{p}{\sqrt{m_0^2+(p/c)^2}}=\frac{3.3\times10^{-17}}{\sqrt{(1.67\times10^{-27})^2+\left(\dfrac{3.3\times10^{-17}}{3\times10^{8}}\right)^2}}\,\mathrm{m/s}\approx3\times10^{8}\,\mathrm{m/s},$$

因此需要考虑相对论效应

$$E=c\sqrt{p^2+(m_0c)^2}$$

$$=3.0\times10^{8}\times\left[(3.3\times10^{-17})^2+(1.67\times10^{-27}\times3.0\times10^{8})^2\right]^{1/2}\,\mathrm{J}$$

$$=9.9\times10^{-9}\,\mathrm{J}=62\,\mathrm{GeV};$$

(2)
$$B=\frac{m_0v}{eR}=\frac{1.67\times10^{-27}\times1.0\times10^{7}}{1.6\times10^{-19}\times6.37\times10^{6}}\,\mathrm{T}=1.6\times10^{-8}\,\mathrm{T}=1.6\times10^{-4}\,\mathrm{Gs}.$$

2－40. 在一个显像管里，电子沿水平方向从南到北运动，动能是 $1.2\times10^4\,\mathrm{eV}$. **该处地球磁场在竖直方向上的分量向下，$B$ 的大小是** $0.55\,\mathrm{Gs}$. **已知电子电荷** $-e=-1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$**，质量** $m=9.1\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

（1）电子受地磁的影响往哪个方向偏转？

（2）电子的加速度有多大？

（3）电子在显像管内走 $20\,\mathrm{cm}$ **时，偏转有多大？**

（4）地磁对看电视有没有影响？

解：（1）向东偏。

（2） $$E=\frac{1}{2}mv^2,$$

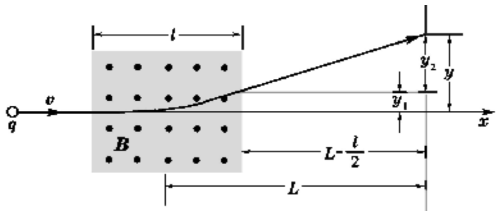
$$\therefore\ v=\sqrt{\frac{2E}{m}}=\sqrt{\frac{2\times1.2\times10^4\times1.6\times10^{-19}}{9.1\times10^{-31}}}\,\mathrm{m/s}=6.50\times10^7\,\mathrm{m/s};$$

又 $ma=evB$**，故**

$$a=\frac{evB}{m}=\frac{1.6\times10^{-19}\times6.50\times10^7\times0.55\times10^{-4}}{9.1\times10^{-31}}\,\mathrm{m/s^2}=6.3\times10^{14}\,\mathrm{m/s^2}.$$

（3） $$s=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}a\left(\frac{l}{v}\right)^2=\frac{1}{2}\times6.3\times10^{14}\times\left(\frac{20\times10^{-2}}{6.50\times10^7}\right)^2\,\mathrm{m}=2.98\times10^{-3}\,\mathrm{m},$$

（4） 地磁场仅使电子向东偏了 $3\,\mathrm{mm}$**，影响可忽略。**



习题 2 －41

2 －41. 如本题图所示，一质量为 m 的粒子带有电量 q，以速度 v 射入磁感应强度为 B 的均匀磁场，$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 垂直 粒子从磁场出来后继续前进。已知磁场区域在 $\boldsymbol{v}$ 方向(即 x 方向)上的宽度为 l，当粒子从磁场出来后在 x 方向前进的距离为 $L-l/2$ 时，求它的偏转 y.

解：由磁场的方向和粒子轨道的偏离方向可判定该粒子带负电。设该粒子受洛伦兹力偏转向上的加速度为 a，则

$$mv=qvB,\quad a=\frac{qvB}{m};\quad \therefore\ y_1=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\,\frac{qvB}{m}\left(\frac{l}{v}\right)^2=\frac{qBl^2}{2mv},$$

而

$$v_1=at=\frac{qvB}{m}\cdot\frac{l}{v}=\frac{qBl}{m},\quad \frac{y_2}{v_1}=\frac{L-l/2}{v},\quad \therefore\ y_2=\frac{v_1}{v}\left(L-\frac{l}{2}\right)=\frac{qBl}{mv}\left(L-\frac{l}{2}\right),$$

$$\therefore\ y=y_1+y_2=\frac{qBlL}{mv}.$$

2－42. **一氘核在** $B=1.5\,\mathrm{T}$ **的均匀磁场中运动，轨迹是半径为** $40\,\mathrm{cm}$ **的圆周。已知氘核的质量为** $3.34\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$**，电荷为** $1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$.

（1）求氘核的速度和走半圈所需的时间；

（2）需要多高的电压才能把氘核从静止加速到这个速度？

解：（1） $R=\dfrac{mv}{qB}$**，** $\therefore\ v=\dfrac{qBR}{m}=\dfrac{1.6\times10^{-19}\times1.5\times0.40}{3.34\times10^{-27}}\,\mathrm{m/s}=2.9\times10^{7}\,\mathrm{m/s}.$

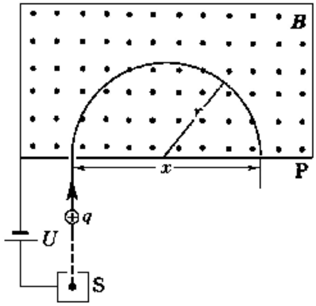
由于此速度值仅为光速 c **的十分之一，故可忽略相对论效应，**

$$T=\frac{\pi m}{qB}=\frac{3.14\times3.34\times10^{-27}}{1.6\times10^{-19}\times1.5}\,\mathrm{s}=4.4\,\mathrm{s}\text{；}$$

（2） $\dfrac{1}{2}mv^2=eU$**，**　$\therefore\ U=\dfrac{mv^2}{2e}=\dfrac{3.34\times10^{-27}\times(2.9\times10^{7})^2}{2\times1.6\times10^{-19}}\,\mathrm{V}=8.6\times10^{6}\,\mathrm{V}.$

2 – 43. **一种质谱仪的构造原理如本题图所示,离子源** S **产生质量为** m**、电荷为** q **的离子,离子产生出来时速度很小,可以看作是静止的;离子产生出来后经过电压** U **加速,进入磁感应强度为** B **的均匀磁场,沿着半圆周运动而达到记录它的照相底片** P **上,测得它在** P **上的位置到入口处的距离为** x. **证明这离子的质量为**

$$m = \frac{qB^2}{8U}x^2.$$



习题 2 – 43

解: $\frac{1}{2}mv^2 = qU$, $\therefore\ v^2 = \frac{2qU}{m}$;

$$R = \frac{x}{2} = \frac{mv}{qB},\quad \therefore\ \frac{x^2}{4} = \frac{m^2v^2}{q^2B^2} = \frac{2mqU}{q^2B^2},\quad \therefore\ m = \frac{qB^2x^2}{8U}.$$

2－44. 如上题，以钠离子做实验，得到数据如下：加速电压 $U=705\,\mathrm{V}$**，磁感应强度** $B=3\,580\,\mathrm{Gs}$**，**$x=10\,\mathrm{cm}$. **求钠离子的荷质比** q/m.

解：$\dfrac{q}{m}=\dfrac{8U}{B^2x^2}=\dfrac{8\times705}{0.358\,0^2\times0.10^2}\,\mathrm{C/kg}=4.4\times10^6\,\mathrm{C/kg}.$

2 －45. **一回旋加速器 D 形电极周围的最大半径 $R = 60\,\mathrm{cm}$，用它来加速质量为 $1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$、电荷为 $1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ 的质子，要把质子从静止加速到 $4.0\,\mathrm{MeV}$ 的能量。**

（1）求所需的磁感应强度 B；

（2）设两 D 形电极间的距离为 $1.0\,\mathrm{cm}$，电压为 $2.0\times10^4\,\mathrm{V}$，其间电场是均匀的，求加速到上述能量所需的时间。

解：（1）　$\frac{1}{2}mv^2 = E$，　$\therefore\ v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$；

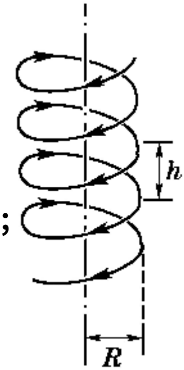
又　$R = \frac{mv}{qB}$，　$\therefore B = \frac{mv}{qR} = \frac{\sqrt{2mE}}{qR}$

$$= \frac{(2\times1.67\times10^{-27}\times4.0\times10^6\times1.6\times10^{-19})^{1/2}}{1.6\times10^{-19}\times0.60}\,\mathrm{T} = 0.48\,\mathrm{T}.$$

（2）加速到上述能量所需的时间主要是粒子在 D 形盒中回旋的时间。每经过一个 D 形盒回旋的半周期是固定的，等于 $\pi m/qB$，因此加速到上述能量所需的总时间为加速的次数 n 与半周期的乘积，而加速的次数 n 等于加速达到的能量除以每次加速获得的能量，因此

$$t = n\cdot\frac{\pi m}{qB} = \frac{4\times10^6}{2\times10^4}\cdot\frac{3.14\times1.67\times10^{-27}}{1.6\times10^{-19}\times0.48}\,\mathrm{s} = 1.4\times10^{-5}\,\mathrm{s}.$$

2－46. **一电子在** $B=20\,\mathrm{Gs}$ **的磁场里沿半径** $R=20\,\mathrm{cm}$ **的螺旋线运动。螺距** $h=5.0\,\mathrm{cm}$**，如本题图。已知电子的荷质比** $e/m=1.76\times10^{11}\,\mathrm{C/kg}$. **求这电子的速度。**



习题 2－46

解： $h=\dfrac{2\pi m v_{/\!/}}{qB}$，　　$\therefore\ v_{/\!/}=\dfrac{hB}{2\pi}\left(\dfrac{q}{m}\right)$

$$=\left(\frac{5.0\times10^{-2}\times20\times10^{-4}}{2\pi}\times1.76\times10^{11}\right)\mathrm{m/s}=2.8\times10^{6}\,\mathrm{m/s}\text{；}$$

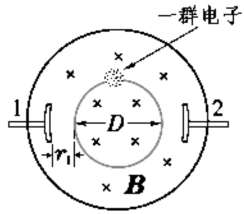
$R=\dfrac{m v_{\perp}}{qB}$，　　$\therefore\ v_{\perp}=\dfrac{q}{m}\cdot RB$

$$=(1.76\times10^{11}\times0.20\times20\times10^{-4})\,\mathrm{m/s}=7.04\times10^{7}\,\mathrm{m/s}\text{；}$$

$$\therefore\ v=\sqrt{v_{/\!/}^{2}+v_{\perp}^{2}}=7.05\times10^{7}\,\mathrm{m/s}.$$

2 －47. 本题图是微波技术中用的一种磁控管的示意图。一群电子在垂直于磁场 B 的平面内作圆周运动。在运行过程中它们时而接近电极 1，时而接近电极 2，从而使两电极间的电势差作周期性变化。试证明电压变化的频率为 $eB/2\pi m$，电压的幅度为

$$U_0 = \frac{Ne}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + D}\right),$$



习题 2 －47

式中 e 是电子电荷的绝对值，m 是电子的质量，D 是圆形轨道的直径，r_1 是电子群最靠近某一电极时的距离，N 是这群电子的数目。

解：电子群在磁场中的回旋运动造成两电极间的电压作周期性变化，电压变化的周期与电子群回旋运动的周期相同，因此电压变化的频率为

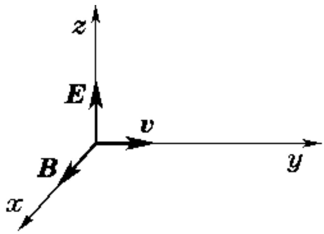
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{eB}{2\pi m}.$$

当电子群在图中左边处，它在电极 1 处产生的电势为 $U_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ne}{r_1}$，它在电极 2 处产生的电势为 $U_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ne}{r_1 + D}$，因此两极的电势差为

$$U_0 = \frac{Ne}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + D}\right),$$

它也就是电压变化的幅度。

2 －48. 在空间有互相垂直的均匀电场 $\boldsymbol{E}$ 和均匀磁场 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}$ 沿 x 方向，$\boldsymbol{E}$ 沿 z 方向，一电子开始时以速度 v 沿 y 方向前进（见本题图），问电子运动的轨迹如何？



习题 2 －48

解：如图，设电子质量为 m，电荷为 $-e$，电场和磁场分别为

$$\boldsymbol{E}=\{0,0,E\},\quad \boldsymbol{B}=\{B,0,0\}$$

初始条件为 $t=0$ 时电子在坐标原点处，有

$$x_0=y_0=z_0=0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_0=0,\qquad \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_0=v_0,\qquad \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)_0=0.$$

电子的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=-e\boldsymbol{E}-e\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B}$$

写出分量式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=0, \tag{①}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-eB\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}, \tag{②}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=eB\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-eE, \tag{③}$$

由 ① 式和初始条件得 $x=0$，表面电子始终在 yz 平面内运动。

将 ② 式对时间积分，并利用初始条件得

$$m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=mv_0-eBz, \tag{④}$$

将 ④ 式代入 ③ 式，得

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{e^2B^2}{m}\left(z+\frac{mE}{eB^2}-\frac{mv_0}{eB}\right),$$

由于$\left(\frac{mE}{eB^2}-\frac{mv_0}{eB}\right)$为常量，可另设变量 $\zeta=z+\frac{mE}{eB^2}-\frac{mv_0}{eB}$，则这一 ζ 满足的微分方程为一简谐振动方程，其解的形式为 $\zeta=A\cos\left(\frac{eB}{m}t+\varphi_0\right)$，利用初始条件可解出

$$z=\frac{m}{eB}\left(v_0-\frac{E}{B}\right)\left(1-\cos\frac{eB}{m}t\right), \tag{⑤}$$

将此式中的 z 代入 ④ 式，得

$$m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=m\left(v_0-\frac{E}{B}\right)\cos\frac{eB}{m}t+\frac{mE}{B},$$

积分之，并利用初始条件，得

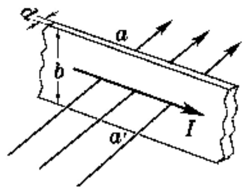
$$y=\frac{m}{eB}\left(v_0-\frac{E}{B}\right)\sin\frac{eB}{m}t+\frac{E}{B}t, \tag{⑥}$$

⑤ 式和 ⑥ 式表明，电子运动轨迹在 yz 平面内是一条摆线（旋轮线）。

2－49. 一铜片厚为 $d=1.0\,\mathrm{mm}$，放在 $B=1.5\,\mathrm{T}$ 的磁场中，磁场方向与铜片表面垂直（见本题图）。已知铜片里每立方厘米有 8.4×10^{22} 个自由电子，每个电子电荷的大小为 $e=1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$，当铜片中有 $I=200\,\mathrm{A}$ 的电流时，

（1）求铜片两边的电势差 $U_{aa'}$；

（2）铜片宽度 b 对 $U_{aa'}$ 有无影响？为什么？



习题 2－49

解：（1）$U_{aa'}=\dfrac{1}{-Ne}\dfrac{IB}{d}=-\dfrac{200\times1.5}{8.4\times10^{22}\times10^{6}\times1.6\times10^{19}\times1.0\times10^{-3}}\,\mathrm{V}$

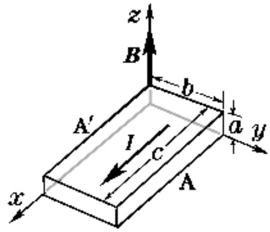
$=-2.2\times10^{-5}\,\mathrm{V}=-22\,\mu\mathrm{V}.$

（2）宽度 b 对 $U_{aa'}$ 无影响，在最后表达式中 $U_{aa'}$ 与 b 无关。

2－50. **一块半导体样品的体积为**$a\times b\times c$**,如本题图所示,沿**x**方向有电流**I**,在**z**轴方向加有均匀磁场**$\boldsymbol{B}$**. 实验数据为** $a=0.10\,\mathrm{cm}$, $b=0.35\,\mathrm{cm}$, $c=1.0\,\mathrm{cm}$, $I=1.0\,\mathrm{mA}$, $B=3000\,\mathrm{Gs}$**,片两侧的电势差** $U_{\mathrm{AA'}}=6.55\,\mathrm{mV}$.

(1) 问这半导体是正电荷导电(P 型) 还是负电荷导电(N 型)?

(2) 求载流子浓度(即单位体积内参加导电的带电粒子数)。



习题2－50

解:(1) 根据霍尔电压的极性可知半导体是 N **型的,负电荷导电。**

(2)
$$U_{AA'}=\frac{1}{ne}\frac{IB}{a},$$

$$n=\frac{IB}{eaU_{AA'}}=\frac{1.0\times10^{-3}\times0.30}{1.6\times10^{-19}\times0.10\times10^{-2}\times6.55\times10^{-3}}\frac{1}{\mathrm{m}^3}$$
$$=2.9\times10^{20}/\mathrm{m}^3=2.9\times10^{14}/\mathrm{cm}^3.$$