3 －1.　一横截面积为 $S=20\,\mathrm{cm}^2$ 的空心螺绕环，每厘米长度上绕有 50 匝，环外绕有 5 匝的副线圆，副线圈与电流计串联，构成一个电阻为 $R=2.0\,\Omega$ 的闭合回路。今使螺绕环中的电流每秒减少 $20\,\mathrm{A}$，求副线圈中的感应电动势 $\mathscr{E}$ 和感应电流。

解：
$$\Phi=BS=\mu_0 nIS,\quad \therefore\ \mathscr{E}=-N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-N\mu_0 nS\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$
$$=-5\times4\times3.14\times10^{-7}\times50\times10^{2}\times20\times10^{-4}\times(-20)\,\mathrm{V}=1.3\times10^{-3}\,\mathrm{V}=1.3\,\mathrm{mV};$$
$$I=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{1.3\times10^{-3}}{2.0}\,\mathrm{A}=6.3\times10^{-4}\,\mathrm{A}=0.63\,\mathrm{mA}.$$

3－2. 一正方形线圈每边长 100 mm，在地磁场中转动，每秒转 30 圈；转轴通过中心并与一边平行，且与地磁场 $\boldsymbol{B}$ 垂直。

（1）线圈法线与地磁场 $\boldsymbol{B}$ 的夹角为什么值时，线圈中产生的感应电动势最大？

（2）设地磁场的 $B=0.55\,\mathrm{Gs}$，这时要在线圈中最大产生 10 mV 的感应电动势，求线圈的匝数 N.

解：（1）线圈法线与地磁场 $\boldsymbol{B}$ 的夹角 $\theta=\pi/2$ 或 $3\pi/2$ 时，线圈中产生的感应电动势最大。

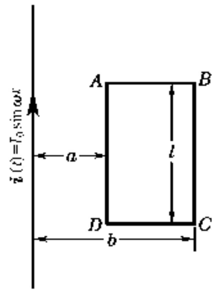
（2）
$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=NBS\omega\sin\omega t,$$

$$N=\frac{\mathscr{E}_{\mathrm{m}}}{BS\omega}=\frac{10\times10^{-3}}{0.55\times10^{-4}\times0.100^2\times2\times3.14\times30}=97.$$

3－3. 如本题图所示，一很长的直导线有交变电流 $i(t)=I_0\sin\omega t$，它旁边有一长方形线圈 $ABCD$，长为 l，宽为 $(b-a)$，线圈和导线在同一平面内。求：

（1）穿过回路 $ABCD$ 的磁通量 Φ；

（2）回路 $ABCD$ 中的感应电动势 $\mathscr{E}$.



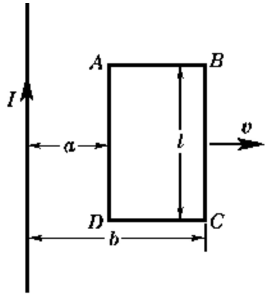
习题 3－3

解：（1）$B=\dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}=\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\sin\omega t$，

$$\Phi=\int_a^b \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi r}\mathrm{d}r\sin\omega t=\frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{b}{a}\right)\sin\omega t,$$

（2）
$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 l\omega}{2\pi}\left(\ln\frac{b}{a}\right)I_0\cos\omega t.$$

3－4. 一长直导线载有5.0A的直流电流，旁边有一个与它共面的矩形线圈，长 $l=20\,\mathrm{cm}$，如本题图所示，$a=10\,\mathrm{cm}$，$b=20\,\mathrm{cm}$ 线圈共有 $N=1000$ 匝，以 $v=3.0\,\mathrm{m/s}$ 的速度离开直导线。求图示位置的感应电动势的大小和方向。



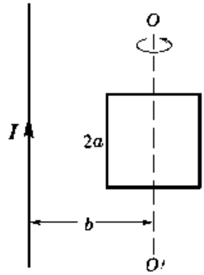
习题 3－4

解：设右边的矩形线圈的中心在 x 处，矩形线圈的短边为 $2c$，则 $a=x-c$，$b=x+c$，利用上题结果，

$$\Phi=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{x+c}{x-c},$$

$$\mathscr{E}=-N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 NIl}{2\pi}\cdot\frac{x-c}{x+c}\cdot\frac{x-c-(x+c)}{(x-c)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 NIl}{2\pi}\cdot\frac{b-a}{ab}\cdot v$$

$$=\frac{4\pi\times10^{-7}\times1000\times5.0\times0.20\times0.10\times3.0}{2\pi\times0.10\times0.20}\mathrm{V}=3.0\times10^{-3}\mathrm{V}=3.0\,\mathrm{mV}.$$



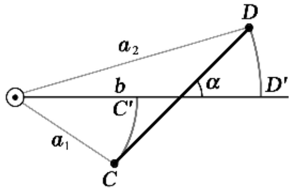
习题 3 －5

3 －5. 如本题图，电流为 I 的长直导线附近有正方形线圈绕中心轴 $\overline{OO'}$ 以匀角速度 ω 旋转，求线圈中的感应电动势。已知正方形边长为 $2a$，$\overline{OO'}$ 轴与长导线平行，相距为 b.

解：画出原题的顶视图如右，穿过 线圈 CD 的磁感应通量也就是穿过 $C'D'$ 的磁感应通量。设线圈方位角为 $\alpha=\omega t$，于是通过线圈的磁感应通量为

$$\Phi=\int_{a_1}^{a_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot 2a\cdot \mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I a}{\pi}\ \ln\frac{a_2}{a_1},$$

式中



$$a_1=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$$

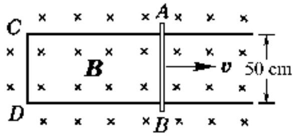
$$=a^2+b^2-2ab\cos\omega t,$$

$$a_2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha$$

$$=a^2+b^2+2ab\cos\omega t,$$

$$\therefore\ \ \Phi=\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ \ln\frac{a^2+b^2+2ab\cos\omega t}{a^2+b^2-2ab\cos\omega t},$$

$$\therefore\ \ \mathscr{E}=\frac{\mu_0 I a^2 b\omega}{\pi}\left(\frac{1}{a^2+b^2+2ab\cos\omega t}+\frac{1}{a^2+b^2-2ab\cos\omega t}\right)\sin\omega t.$$



习题 3－6

3－6. 本题图中导体棒 AB 与金属轨道 CA 和 DB 接触，整个线框放在 $B=0.50\,\mathrm{T}$ 的均匀磁场中，磁场方向与图画垂直。

（1）若导体棒以 4.0 m/s 的速度向右运动，求棒内感应电动势的大小和方向；

（2）若导体棒运动到某一位置时，电路的电阻为 0.20 Ω，求此时棒所受的力。摩擦力可不计。

（3）比较外力作功的功率和电路中所消耗的热功率。

解：（1）$\mathscr{E}=vBl=(4.0\times0.50\times0.50)\,\mathrm{V}=1.0\,\mathrm{V}$，

电动势的方向为导体棒上从 B 到 A；

（2）$I=\mathscr{E}/R=(1.0/0.20)\,\mathrm{A}=5.0\,\mathrm{A}$，

$f=IBl=(50\times0.50\times0.50)\,\mathrm{N}=1.3\,\mathrm{N}$；

（3）外力作功的功率和电路中所消耗的热功率分别为

$$P=fv=(1.3\times4.0)\,\mathrm{W}=5.0\,\mathrm{W},$$

$$P_{热}=I^2R=(5.0^2\times0.2)\,\mathrm{W}=5.0\,\mathrm{W};$$

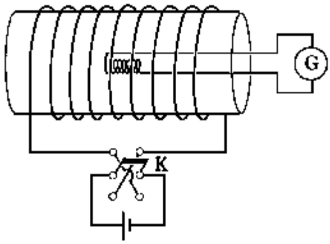
这表明，电路内消耗的焦耳热的能量来源是外力克服感应电流在磁场中受到的安培力所作的功。

3－7. **闭合线圈共有N匝，电阻为R. 证明：当通过这线圈的磁通量改变 $\Delta\Phi$ 时，线圈内流过的电量为**

$$\Delta q = \frac{N\Delta\Phi}{R}.$$

解： $|\mathscr{E}| = N\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = IR$， $\therefore\ N\mathrm{d}\Phi = IR\,\mathrm{d}t = R\,\mathrm{d}q$；

两边积分，得 $$\Delta q = \frac{N\Delta\Phi}{R}.$$



习题 3－8

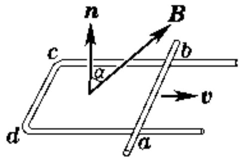
3－8. 本题图所示为测量螺线管中磁场的一种装置。把一个很小的测量线圈放在待测处，这线圈与测量电量的冲击电流计 G 串联。冲击电流计是一种可测量迁移过它的电量的仪器。当用反向开关 K 使螺线管的电流反向时，测量线圈中就产生感应电动势，从而产生电量 Δq 的迁移；由 G 测出 Δq 就可以算出测量线圈所在处的 B. 已知测量线圈有 2000 匝，它的直径为 2.5 cm，它和 G 串联回路的电阻为 1000 Ω，在 K 反向时测得 $\Delta q = 2.5\times10^{-7}$C. 求被测处的磁感应强度。

解：利用上一题的结果，得

$$\Delta q = \frac{N\Delta\Phi}{R} = \frac{N\cdot 2\Phi}{R} = \frac{2NBS}{R},$$

$$B = \frac{R\Delta q}{2NS} = \frac{1000\times2.5\times10^{-7}}{2\times2000\times3.14\times(2.5\times10^{-2}/2)^2}\,\mathrm{T} = 1.3\times10^{-4}\,\mathrm{T} = 1.3\,\mathrm{Gs}.$$

3 －9. 如本题图所示，线圈 $abcd$ 放在 $B=6.0\times10^3$ Gs 的均匀磁场中，磁场方向与线圈平面法线的夹角 $\alpha=60°$，ab 长 1.0 m，可左右运动。今使 ab 以 $v=5.0$ m/s 的速度向右运动，求感应电动势的大小及感应电流的方向。



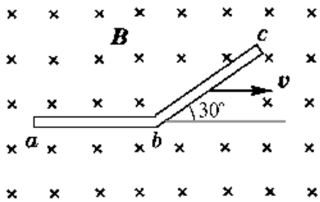
习题 3 －9

解：$\mathscr{E}=\int(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int vB\sin30°\mathrm{d}l=\frac{1}{2}vBl$

$$=\left(\frac{1}{2}\times5.0\times0.60\times1.0\right)\mathrm{V}=1.5\,\mathrm{V},$$

感应电流的方向沿 $badc$.

3-10. **两段导线** $ab=bc=10\,\mathrm{cm}$**，在** b **处相接而成** $30°$ **角。若使导线在匀强磁场中以速率** $v=1.5\,\mathrm{m/s}$ **运动，方向如本题图所示，磁场方向垂直图面向内，** $B=2.5\times10^2\,\mathrm{Gs}$**，问** ac **间的电势差是多少？哪一端的电势高？**



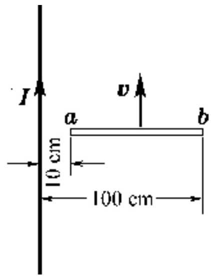
习题 3-10

解：$U_{ac}=-\mathscr{E}=-\int(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

$$=-\int_b^c vB\cos60°\mathrm{d}l=-\frac{1}{2}vBl=-\left(\frac{1}{2}\times1.5\times2.5\times10^{-2}\times0.10\right)\mathrm{V}=-1.9\,\mathrm{V},$$

c 点电势高。

3－11. **如本题图，金属棒** ab **以** $v=2.0\,\mathrm{m/s}$ **的速率平行于一长直导线运动，此导线内有电流** $I=40\,\mathrm{A}$. **求棒中感应电动势的大小。哪一端的电势高？**



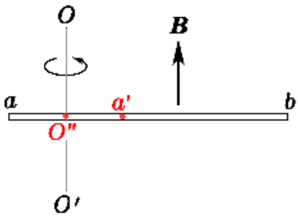
习题 3－11

解： $\mathscr{E}=\int_a^b(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_a^b v\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathrm{d}r=-\frac{\mu_0 vI}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$

$$=-\left(\frac{4\pi\times10^{-7}\times2.0\times40}{2\pi}\ln\frac{100}{10}\right)\mathrm{V}=-3.7\times10^{-5}\mathrm{V},$$

a **端电势高。**

3－12. 如本题图，一金属棒长为 0.50 m 水平放置，以长度的 1/5 处为轴，在水平面内旋转，每秒转两转。已知该处地磁场在竖直方向上的分量 $B_\perp = 0.50\,\mathrm{Gs}$，求 a、b 两端的电势差。



习题 3－12

解：在图中棒上轴的右边取一点 a'，使它到轴的距离等于 a 点到轴的距离。这两段导体棒旋转时速度方向相反。它们所产生的动生电动势大小相等，方向相反，相互抵消，因此

$$U_{ab} = -\mathscr{E}_{a'b} = -\int_{a'}^{b} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{1}{2}\omega B\left(\overline{O''b}^{\,2} - \overline{O''a'}^{\,2}\right)$$

$$= -\left[\frac{1}{2} \times 2\pi \times 2 \times 0.50 \times 10^{-4} \times (0.40^2 - 0.10^2)\right]\mathrm{V} = -4.7 \times 10^{-5}\,\mathrm{V}.$$

3 – 13. 只有一根辐条的轮子在均匀外磁场 $\boldsymbol{B}$ 中转动，轮轴与 $\boldsymbol{B}$ 平行，如本题图所示。轮子和辐条都是导体，辐条长为 R，轮子每秒转 N 圈。两根导线 a 和 b 通过各自的刷子分别与轮轴和轮边接触。

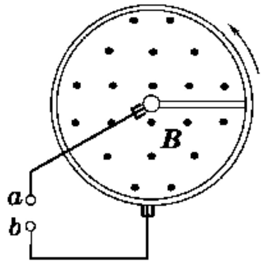
（1）求 a、b 间的感应电动势 $\mathscr{E}$ ；

（2）若在 a、b 间接一个电阻，使辐条中的电流为 I，问 I 的方向如何？

（3）求这时磁场作用在辐条上的力矩的大小和方向；

（4）当轮反转时，I 是否也会反向？

（5）若轮子的辐条是对称的两根或更多根，结果如何？



习题 3 – 13

解：（1） $\mathscr{E}=\int(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_0^R\omega lB\,\mathrm{d}l=\frac{1}{2}\omega BR^2=\pi NBR^2$，

（2） 辐条中电流的方向为从中心到边缘。

（3） $L=\int_0^R l\cdot IB\,\mathrm{d}l=\frac{1}{2}IBR^2$，　方向垂直图面向里。

（4） 电流也相反。

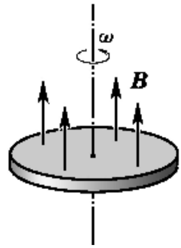
（5） 因为各辐条上的感应电动势为并联，故感应电动势与单根辐条情形相同。

3－14. 法拉第圆盘发电机是一个在磁场中转动的导体圆盘。设圆盘的半径为 R，它的轴线与均匀外磁场 $\boldsymbol{B}$ 平行，它以角速度 ω 绕轴线转动，如本题图所示。

（1）求盘边与盘心间的电势差 U；

（2）当 $R=15\,\mathrm{cm}$，$B=0.60\,\mathrm{T}$，转速为每秒 30 圈时，U 等于多少？

（3）盘边与盘心哪处电势高？当盘反转时，它们电势的高低是否也会反过来？



习题 3－14

解：（1）$U=\mathscr{E}=\int(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_0^R\omega lB\,\mathrm{d}l=\dfrac{1}{2}\omega BR^2$；

（2）$U=\dfrac{1}{2}\omega BR^2=\left(\dfrac{1}{2}\times2\pi\times30\times0.60\times0.15^2\right)\mathrm{V}=1.3\,\mathrm{V}$；

（3）盘边缘的电势高。盘反转时盘心的电势高。

3－15. 己知在电子感应加速器中，电子加速的时间是 4.2 ms，电子轨道内最大磁通量为 1.8 Wb，试求电子沿轨道绕行一周平均获得的能量。若电子最终获得的能量为 100 MeV，电子绕了多少周？若轨道半径为 84 cm，电子绕行的路程有多少？

解：设电子感应加速器中磁场的增加是线性的，电子加速 N 圈总的经历时间为 $N\mathrm{d}t=4.2\,\mathrm{ms}$，电子轨道内磁通量从 0 增加到最大 $\Phi_\mathrm{m}=1.8\,\mathrm{Wb}$，因此加速一圈经历的电动势为

$$\mathscr{E}=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\Delta\Phi/N}{\mathrm{d}t}=\frac{\Phi_\mathrm{m}}{N\mathrm{d}t}=\frac{1.8}{4.2\times10^{-3}}\,\mathrm{V}=4.3\times10^{2}\,\mathrm{V};$$

电子经一圈加速获得的能量则为 $4.3\times10^{2}\,\mathrm{eV}$.

于是，电子最终绕的圈数为

$$N=\frac{100\times10^{6}}{4.2\times10^{2}}=2.3\times10^{5},$$

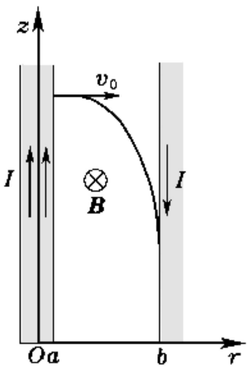
电子绕行的路径为

$$s=N\cdot2\pi R=(2.3\times10^{5}\times2\times3.14\times0.84)\,\mathrm{m}=1.2\times10^{6}\,\mathrm{m}.$$

3－16. 如本题图所示，一对同轴圆柱形导体，半径分别为 a 和 b，内柱载有沿柱轴 z 方向的电流 I，电流沿外柱流回。

（1）求两柱之间区域内的磁矢势表达式；

（2）一电子从内柱以速率 v_0 垂直于柱轴出发，这电子能达到外柱的最小 v_0 值为多少？



习题 3－16

解：（1）根据(2.52)式，$\oint \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，选择矩形回路，其四条边为 l_1、l_2、l_3、l_4，其中 l_1 在 r 处，l_2、l_4 垂直轴线，l_3 在 $r=a$ 处，回路绕行方向为 顺时针方向，并选定 $r=a$ 处 $A=0$，有

$$\oint \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{(l_1)}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{(l_2)}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{(l_3)}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{(l_4)}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=A l_1，$$

$$\iint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_a^r \frac{\mu_0 I}{2\pi r}l_1\ \mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I}{2\pi}l_1\ \ln\frac{r}{a}，$$

$$\therefore\ A=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r}{a}，\quad \boldsymbol{A}\text{ 的方向由上指向下。}$$

于是可写成

$$\boldsymbol{A}=-\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r}{a}，$$

$\hat{\boldsymbol{z}}$ 为 z 方向的单位矢量，与 z 轴平行。

（2）电磁场中带电粒子的哈密顿量（柱坐标形式）为

$$H=\frac{1}{2m}\left[(p_r-eA_r)^2+\frac{1}{r^2}(p_\theta-eA_\theta)^2+(p_z-eA_z)^2\right]+e\varphi，$$

式中 $e<0$，由于只有磁场，标势 $\varphi=0$，而 $A_r=A_\theta=0$，$A_z=-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\dfrac{r}{a}$，哈密顿量与 z 无关。正则方程 $\dot{p}_z=-\dfrac{\partial H}{\partial z}=0$，相应的正则动量守恒，

$$p_z=mv_z+eA_z=mv_z-\frac{e\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r}{a}=\text{常量 }C，$$

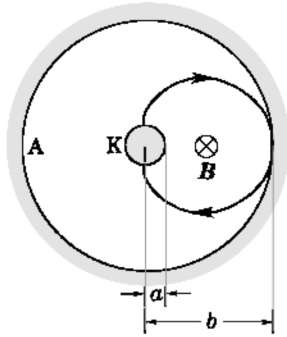
在 $r=a$ 处，$v_z=0$，$A_z=0$，故上式中常量 $C=0.$

对于刚好到达外柱面的电子，在 $r=b$ 处 $v_r=0$，存在唯一的速度 分量 $v_z=-v_0$（因为磁场对电荷的洛伦兹力不作功，电荷的动能守恒），代入上式得

$$v_0=\frac{|e|\mu_0 I}{2\pi m}\ln\frac{b}{a}.$$

3 – 17. **柱形磁控管如本题图所示,设内、外柱半径分别为 a 和 b. 两极间加电压 U_0,处于轴向匀强磁场 B 中。电子以可忽略的初速从阴极 K 出发,它一方面在径向电场的作用下加速,同时在磁场的作用下偏转,电子将沿心脏线轨迹运动。当磁场超过某临界值 B_c 时,电子不能达到阳极 A. 因 B_c 与荷质比 e/m 有关,1921 年 A. W. Hull 首先用此法测量了电子的荷质比。试证明电子的荷质比与临界磁场的关系为**

$$\frac{e}{m}=\frac{8U_0}{b^2B_c^{\ 2}}\frac{1}{\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)^2}.$$



习题 3 – 17

解：在本题中标势 $\varphi=\varphi(r)$**，**B **均匀沿轴向，因此由**(2. 52)**式**

$$A\cdot 2\pi r=B\cdot\pi r^2,\quad \therefore\ A=\frac{1}{2}Br,$$ **方向沿** $-\theta$ **方向。**

于是可写成

$$A_\theta=-\frac{1}{2}Br,\quad A_r=A_z=0.$$

由于哈密顿量 H **与** θ **无关，从而由正则方程** $\dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial\theta}=0$**，相应的正则动量守恒，**

$$p_\theta=r(mv_\theta+A_\theta)=r\left(mv_\theta-\frac{1}{2}eBr\right)=\text{常量 } C,$$

在 $r=a$ **处** $v_r=0$**，**$v_\theta=0$**，故上式中** $C=-\frac{1}{2}eBa^2$.

当磁场超过某一临界值 B_c **时，电子不再能达到阳极** A**，由此** $r=b$**，**$v_r=0$**，唯一的速度分量** $v_\theta=\sqrt{\frac{2|e|U}{m}}$**，代入上式,得**

$$b\left(m\sqrt{\frac{2|e|U}{m}}-\frac{1}{2}eB_cb\right)=-\frac{1}{2}eB_ca^2,\quad \therefore\ \frac{|e|}{m}=\frac{8U}{b^2B_c^2}\cdot\frac{1}{(1-a^2/b^2)^2}.$$

3 – 18. **证明 $E^2-c^2B^2$ 和 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}$ 是洛伦兹变换下的不变量。由此可以推论：**

（1）如果在一个参考系中 $E>cB$，则在任意其它参照系中也有 $E>cB$；

（2）如果在一个参考系中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 正交，则在任意其它参考系中，它们也正交；

（3）如果在一个参考系中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角为锐角（或钝角），则在任意其它参考系中，它们之间的夹角也是锐角（或钝角）。

解：利用电磁场的逆变换公式（3.55），并注意到 $\gamma^2(1-v^2/c^2)=1$，则

$$
\begin{aligned}
E^2-c^2B^2 &= E_x^2+E_y^2+E_z^2-c^2(B_x^2+B_y^2+B_z^2)\\
&= E_x'^2+\gamma^2(E_y'+vB_z')^2+\gamma^2(E_z'-vB_y')^2\\
&\quad -c^2\left[B_x'^2+\gamma^2\left(B_y'-\frac{v}{c^2}E_z'\right)^2+\gamma^2\left(B_z'+\frac{v}{c^2}E_y'\right)^2\right]\\
&= E_x'^2+\gamma^2(E_y'^2+2vE_y'B_z'+v^2B_z'^2)+\gamma^2(E_z'^2-2vE_z'B_y'+v^2B_y'^2)\\
&\quad -c^2\left[B_x'^2+\gamma^2\left(B_y'^2-2\frac{v}{c^2}B_y'E_z'+\frac{v^2}{c^4}E_z'^2\right)+\gamma^2\left(B_z'^2+2\frac{v}{c^2}B_z'E_y'+\frac{v^2}{c^4}E_y'^2\right)\right]\\
&= E_x'^2+\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)E_y'^2+\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)E_z'^2\\
&\quad -c^2\left[B_x'^2+\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)B_y'^2+\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)B_z'^2\right]\\
&= E_x'^2+E_y'^2+E_z'^2-c^2(B_x'^2+B_y'^2+B_z'^2)=E'^2-c^2B'^2.
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E} &= B_xE_x+B_yE_y+B_zE_z\\
&= B_x'E_x'+\gamma^2\left(B_y'-\frac{v}{c^2}E_z'\right)(E_y'+vB_z')+\gamma^2\left(B_z'+\frac{v}{c^2}E_y'\right)(E_z'-vB_y')\\
&= B_x'E_x'+\gamma^2\left(B_y'E_y'+vB_y'B_z'-\frac{v}{c^2}E_y'E_z'-\frac{v^2}{c^2}B_z'E_z'\right)\\
&\qquad +\gamma^2\left(B_z'E_z'-vB_y'B_z'+\frac{v}{c^2}E_y'E_z'-\frac{v^2}{c^2}B_z'E_z'\right)\\
&= B_x'E_x'+\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)B_y'E_y'+\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)B_z'E_z'\\
&= B_x'E_x'+B_y'E_y'+B_z'E_z'=\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{E}'.
\end{aligned}
$$

由此可推论：

（1） 在 K 系中 $E^2-c^2B^2>0$，则在 K′ 系中 $E'^2-c^2B'^2>0$。

（2） 在 K 系中 $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}=0$，则在 K′ 系中 $\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{E}'=0$，$\boldsymbol{E}'\perp\boldsymbol{B}'$。

（3） 在 K 系中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 夹角为锐角，即 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}>0$，则在 K′ 系中 $\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{E}'>0$，即 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{B}'$ 夹角也为锐角；同样，由在 K 系中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 夹角为钝角，可推知在 K′ 系中 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{B}'$ 夹角也为钝角。

3－19. 在某一参考系K中有电场和磁场分别为$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$,它们满足什么条件时,可以找到另外的参考系 K′,使得（1）$\boldsymbol{E}'$和$\boldsymbol{B}'$垂直；（2）$\boldsymbol{B}'=0$；（3）$\boldsymbol{E}'=0$.

解：（1）使得在K′系中$\boldsymbol{E}'$和$\boldsymbol{B}'$垂直的条件是在K系中$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$垂直。

（2）使得在K′系中$\boldsymbol{B}'=0$的条件是在K系中$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$垂直，且$E^2-c^2B^2>0$，这是因为在K′系中$\boldsymbol{B}'=0$而$\boldsymbol{E}'$可以不为0，而$E^2-c^2B^2$是个不变量，它在K′系中等于E'^2，所以有$E^2-c^2B^2=E'^2>0$。

（3）使得在K′系中$\boldsymbol{E}'=0$的条件是在K系中$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$垂直，且$E^2-c^2B^2<0$，这是因为在K′系中$\boldsymbol{E}'=0$而$\boldsymbol{B}'$可以不为0，而$E^2-c^2B^2$是个不变量，它在K′系中等于$-c^2B'^2$，所以有$E^2-c^2B^2=-c^2B'^2<0$。

3－20. **已知在 K′ 系中一根无限长直带正电的细棒静止，且沿 x' 轴放置。其电荷线密度 η'_{e} 均匀。设 K′ 系相对于 K 系以速度 v 沿 x 轴正向运动。**

（1）求在 K 系中空间的电场；

（2）求在 K 系中空间的磁场；

（3）在 K 系中看来，运动的带电细棒相当于无限长直电流，它所产生的磁场服从毕奥－萨伐尔定律，由此证明 $\varepsilon_0\mu_0=1/c^2$.

解：在 K′ 系中带电细棒静止，只有电场，没有磁场，空间任意点的电场和磁场为轴对称的，对称轴为 x 轴。考虑 xy 平面内一点，电场和磁场 为

$$E'_x=0,\quad E'_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\eta'_{\mathrm{e}}}{y'},\quad E'_z=0;$$

$$B'_x=0,\quad B'_y=0,\quad B'_z=0.$$

（1） 根据电磁场的洛伦兹变换（3.55）式可得在 K 系中的电场为

$$E_x=E'_x=0,$$

$$E_y=\gamma(E'_y+vB'_z)=\gamma E'_y=\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\eta'_{\mathrm{e}}}{y},$$

$$E_z=\gamma(E'_z-vB'_y)=0.$$

电场对 x 轴呈轴对称性。

（2） 根据电磁场的洛伦兹变换（3.55）式可得在 K 系中的磁场为

$$B_x=B'_x=0,$$

$$B_y=\gamma\left(B'_y-\frac{v}{c^2}E'_z\right)=0,$$

$$B_z=\gamma\left(B'_z+\frac{v}{c^2}E'_y\right)=\gamma\frac{v}{c^2}E'_y=\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2v\eta'_{\mathrm{e}}}{c^2y}.$$

磁场也对 x 轴呈轴对称性。

（3）在 K 系中运动的带电细棒相当于无限长直电流，$I=\dfrac{\eta_{\mathrm{e}}\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\eta_{\mathrm{e}}v=\gamma\eta'_{\mathrm{e}}v$，根据毕奥－萨伐尔定律，此无限长直电流在 y 处产生的磁感应强度为

$$B_z=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{y}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\gamma\eta'_{\mathrm{e}}v}{y},\qquad \text{与上式比较得 } \mu=\frac{1}{\varepsilon_0c^2}.$$

3－21. 在无限大带正电的平面为静止的参考系中,观测到该平面的电荷面密度为$\sigma_e{}'$,当此带电平面平行于xz平面,且以速度v沿x轴方向匀速运动时,求空间的电场和磁场。

解:在 K′ 系中此无限大的带电面只产生电场,没有磁场,即

$$E_x'=0,\ E_y'=\frac{\sigma_e'}{2\varepsilon_0},\ E_z'=0;$$

$$B_x'=0,\ B_y'=0,\ B_z'=0.$$

通过洛伦兹变换到 K 系中

$$E_x=0,\ E_y=\gamma(E_y'+vB_z')=\frac{\gamma\sigma_e'}{2\varepsilon_0},\ E_z=0;$$

$$B_x=0,\ B_y=0,,\ B_z==\gamma\left(B_z'+\frac{v}{c^2}E_y'\right)=\frac{\gamma v}{c^2}\frac{\sigma_e'}{2\varepsilon_0}=\frac{\gamma\mu_0\sigma_e'v}{2}.$$

而$\gamma\sigma_e'=\sigma_e$,$\gamma\sigma_e'v=\sigma_e v=\iota$**(单位长度的电流),由此上面的结果化为**

$$E_y=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0},\quad B_z=\frac{\mu_0\iota}{2}.$$

与直接从 K 系中按电场和磁场的计算的结果相同。

3－22. 在一个充电电容器为静止的参考系中观测到电容器极板上电荷面密度分别为 $+\sigma_e'$ 和 $-\sigma_e'$. 设此电容器极板平行于 xz 平面，且以速度 v 沿 x 轴方向匀速运动,求空间的电场和磁场。

解：在电容器静止的 K′ 系中 两极板间有电场,无磁场,即

$$E_x' = 0,\ E_y' = \frac{\sigma_e'}{\varepsilon_0},\ E_z' = 0;$$

$$B_x' = 0,\ B_y' = 0,\ B_z' = 0.$$

在两极板的外侧,电场和磁场都恒为 0。通过洛伦兹变换,变到 K 系中，在两运动极板之间

$$E_x = 0,\ E_y = \gamma(E_y' + vB_z') = \frac{\gamma\sigma_e'}{\varepsilon_0},\ E_z = 0;$$

$$B_x = 0,\ B_y = 0,\ B_z = \gamma\left(B_z' + \frac{v}{c^2}E_y'\right) = \frac{\gamma\sigma_e' v}{c^2\varepsilon_0} = \mu_0\sigma_e v = \mu_0\iota.$$

式中 $\sigma_e = \gamma\sigma_e'$ 为 K 系中观测到的电荷面密度，$\iota = \sigma_e v$ 为极板单位长度上的电流。在两极板外侧,电磁场均为 0。所有结果与直接从 K 系中计算的结果相同。

3 – 23. 两个正的点电荷 q，相距为 r，并排平行运动，速度为 v. 求它们之间的相互作用力。这力是斥力还是吸引力？

解：在两电荷静止的 K′ 系中 只有静电场，无磁场，即

$$E'_x=0,\quad E'_y==\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\quad E'_z=0;$$

$$B'_x=0,\quad B'_y=0,\quad B'_z=0.$$

运用电磁场的洛伦兹变换(3.55)式，在 K 系中的电场和磁场为

$$E_x=0,\quad E_y=\gamma E'_y=\frac{\gamma q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\quad E_z=0;$$

$$B_x=0,\quad B_y=0,\quad B_z=\gamma\frac{v}{c^2}E'_y=\frac{\gamma\sigma_e' v}{c^2\varepsilon_0}=\frac{\gamma q v}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2}.$$

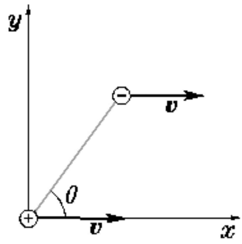
再根据洛伦兹力公式(3.50)得电荷 1 对电荷 2 的作用力为

$$f_y=q\left(E_y+v_zB_x-v_xB_z\right)=q\left(\gamma E'_y-\gamma\frac{v^2}{c^2}E'_y\right)=\frac{q}{\gamma}E'_y=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}>0,$$

$$f_x=f_z=0.$$

这表明，两并排平行运动的正电荷之间的作用力比静电荷间的库仑力小了，但仍是排斥力。

3 －24. 如本题图所示，一对正负电荷以速度 v 沿 x 方向运动。试论证这对电荷的相互作用力虽不沿联线，但两个电荷的加速度却沿它们之间的联线。



习题 3 －24

解：设随两电荷运动的参考系（即它们的固有系）为 K′ 系，图中所示的参考系为 K 系。在 K′ 系内负电荷相对于正电荷的方位角 θ' 满足关系 $\tan\theta'=\dfrac{y'}{x'}$，它们之间的库仑力的方向以及在此力作用下的加速度的方向均满足

$$\frac{f_y'}{f_x'}=\tan\theta',\qquad \frac{a_y'}{a_x'}=\tan\theta'.$$

这表明在 K′系中静止电荷之间的库仑力和它们所产生的加速度的方向均在电荷连线方向上。电荷之间的相互作用力不会引起电荷系统的转动。

下面考虑在 K 系中的情形。由于在 K′系内 $v_x'=v_y'=v_z'=0$。两参考系的相对速度为 v. 由此 $\mathrm{d}t'$ 为固有时间隔，即$\dfrac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}\tau}=1$，功率 $P'=0$，从而根据书上(3.49)式前面的那组公式，四维力的分量 $F_x'=f_x'$，$F_y'=f_y'$，$F_t'=0$. 将 K′系内的力变换到 K 系，利用书上四维力矢量相对论变换公式(3.49)：

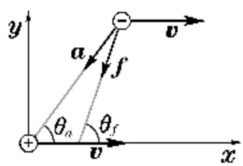
$$\begin{cases} f_x=\dfrac{F_x}{\gamma}=F_x'-\mathrm{i}\beta F_t'=F_x'=f_x', \\ f_y=\dfrac{F_y}{\gamma}=\dfrac{F_y'}{\gamma}=\dfrac{f_y'}{\gamma}. \end{cases}$$

∴ K 系中力的方向

$$\tan\theta_f=\frac{f_y}{f_x}=\frac{1}{\gamma}\frac{f_y'}{f_x'}=\frac{1}{\gamma}\tan\theta'.$$

式中 $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$，$\beta=v/c$，式中还用到$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\gamma$. 将 K′系内的速度变换到 K 系：

$$\begin{cases} v_x=\dfrac{v_x'+v}{1+v_x'v/c^2}, \\ v_y=\dfrac{v_y'}{\gamma(1+v_x'v/c^2)}. \end{cases}$$



加速度变换为

$$\begin{cases} a_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t'}\dfrac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}=\left[\dfrac{1}{1+v_x'v/c^2}-\dfrac{(v_x'+v)v}{(1+v_x'v/c^2)^2c^2}\right]\dfrac{\mathrm{d}v_x'}{\mathrm{d}t'}\dfrac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \\ \quad=\dfrac{c^2+v_x'v-v_x'v-v^2}{(1+v_x'v/c^2)^2c^2}\dfrac{a_x'}{\gamma}=\dfrac{a_x'}{\gamma^3}, \\ a_y=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t'}\dfrac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}=\left[\dfrac{1}{\gamma(1+v_x'v/c^2)}-\dfrac{v_y'v}{\gamma(1+v_x'v/c^2)^2c^2}\right]\dfrac{\mathrm{d}v_y'}{\mathrm{d}t'}\dfrac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}=\dfrac{a_y'}{\gamma^2}. \end{cases}$$

这里 $\mathrm{d}t'$ 为固有时间间隔，因此$\dfrac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{\gamma}$，于是 K 系中加速度的方向为

$\tan\theta_a = \dfrac{a_y}{a_x} = \gamma\dfrac{a_y'}{a_x'} = \gamma\tan\theta'.$

由于洛伦兹收缩，$x = x'\sqrt{1-\beta^2}$ ，$y = y'$，电荷 $-q$ 的方位角

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\frac{a_y}{a_x} = \gamma\tan\theta',$$

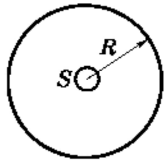
可见在 K系中，这对电荷的相互作用力不沿它们的联线，但加速度仍沿联线。也就是说，这对电荷的相互作用力虽然构成力偶，但不会引起电荷系统的转动。这是相对论力学与经典力学的一个重要区别。

3－25. **一螺绕环横截面的半径为 a，中心环线的半径为 R，$R \gg a$，其上由表面绝缘的导线均匀地密绕两个线圈，一个 N_1 匝，另一个 N_2 匝，求两线圈的互感 M.**

解：$\Psi_{12} = N_2 \Phi_{12} = N_2 B_1 S = N_2 \cdot \mu_0 \cdot \dfrac{N_1 I_1}{2\pi R} \cdot \pi a^2 = \dfrac{\mu_0 N_1 N_2}{2R} I_1 a^2$，

$$\therefore\ M = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{2R}\, a^2.$$

3－26. **一圆形线圈由** 50 **匝表面绝缘的细导线绕成，圆面积为** $S=4.0\,\mathrm{cm}^2$. **放在另一个半径** $R=20\,\mathrm{cm}$ **的大圆形线圈中心，两者同轴，如本题图所示，大圆形线圈由** 100 **匝表面绝缘的导线绕成。**



习题 3－26

（1）求这两线圈的互感 M**；**

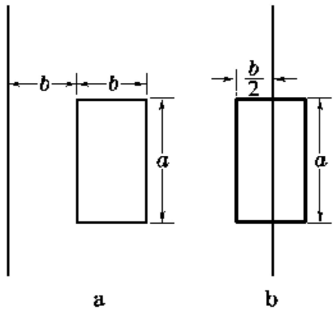
（2）当大圆形导线中的电流每秒减小 50 A **时，求小线圈中的感应电动势** $\mathscr{E}$.

解：（1）$\Psi_{12}=N_2\Phi_{12}=N_2B_1S=N_2\cdot N_1\cdot\dfrac{\mu_0 I_1}{2R}\cdot S=\dfrac{\mu_0 N_1N_2S}{2R}I_1$，

$$\therefore\ M=\frac{\Psi_{12}}{I_1}=\frac{\mu_0 N_1N_2S}{2R}=\frac{4\,\pi\times10^{-7}\times100\times50\times4.0\times10^{-4}}{2\times0.20}\,\mathrm{H}=6.3\times10^{-6}\mathrm{H}.$$

（2）$\mathscr{E}=-M\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}=-6.3\times10^{-6}\times(-50)\,\mathrm{V}=3.2\times10^{-4}\mathrm{V}.$

3－27. **如本题图，一矩形线圈长** $a=20$ cm，**宽** $b=10$ cm，**由** 100 **匝表面绝缘的导线绕成，放在一很长的直导线旁边并与之共面，这长直导线是一个闭合回路的一部分，其他部分离线圈都很远，影响可略去不计。求图中** a **和** b **两种情况下，线圈与长直导线之间的互感。**



习题 3－27

解：对于图 a **情形，**

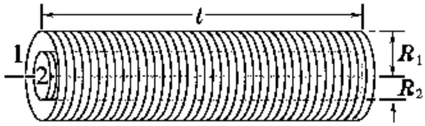
$$\Psi_{12}=N_2\Phi_{12}=N_2\int B_1\,\mathrm{d}S=N_2\int_b^{2b}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1}{r}a\,\mathrm{d}r$$

$$=\left(\frac{\mu_0N_2a}{2\pi}\ln 2\right)I_1$$

$$\therefore\ M=\frac{\Psi_{12}}{I_1}=\frac{\mu_0N_2a}{2\pi}\ln 2=\frac{4\pi\times10^{-7}\times100\times0.20}{2\pi}\times\ln 2\ \mathrm{H}=2.8\times10^{-6}\mathrm{H}.$$

对于图 b **情形，** $\Psi_{12}=0$，**所以** $M=0$.

3 －28. 如本题图，两长螺线管同轴，半径分别为 R_1 和 R_2（$R_1 > R_2$），长度为 l（$l \gg R_1$ 和 R_2），匝数分别为 N_1 和 N_2. 求互感系数 M_{12} 和 M_{21}，由此验证 $M_{12}=M_{21}$.



习题 3 －28

解：

$$\Psi_{12}=N_2\Phi_{12}=N_2B_{12}S=N_2\cdot\frac{\mu_0N_1I_1}{l}\cdot\pi R_2^2,\quad\therefore\ M_{12}=\frac{\Psi_{12}}{I_1}=\frac{\mu_0\pi N_1N_2R_2^2}{l};$$

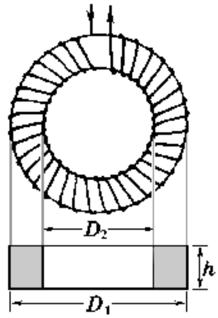
$$\Psi_{21}=N_1\Phi_{21}=N_1B_{21}S=N_1\cdot\frac{\mu_0N_2I_2}{l}\cdot\pi R_2^2,\quad\therefore\ M_{21}=\frac{\Psi_{21}}{I_2}=\frac{\mu_0\pi N_1N_2R_2^2}{l}=M_{12}.$$

3－29. **在长** 60 cm、**直径** 5.0 cm **的空心纸筒上绕多少匝导线，才能得到自感为** 6.0×10^{-3}H **的线圈？**

解： $\Psi=N\Phi=NBS=N\cdot\dfrac{\mu_0 NI}{l}\cdot\pi R^2$，　$L=\dfrac{\Psi}{I}=\dfrac{\mu_0\pi N^2R^2}{l}$，

$$N=\sqrt{\frac{Ll}{\mu_0\pi R^2}}=\left(\frac{6\times10^{-3}\times0.60}{4\pi\times10^{-7}\times\pi(2.5\times10^{-2})^2}\right)^{1/2}=1.2\times10^3.$$

3－30. **矩形截面螺绕环的尺寸如本题图，总匝数为** N.



习题 3－30

(1) 求它的自感系数；

(2) 当 $N=1000$ **匝，** $D_1=20\,\mathrm{cm}$**，** $D_2=10\,\mathrm{cm}$**，** $h=1.0\,\mathrm{cm}$ **时，自感为多少？**

解： (1) 先求螺绕环内的 B，

$$B\cdot 2\pi r=\mu_0 NI,\quad \therefore\ B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r},$$

$$\Phi=\int B\cdot h\,\mathrm{d}r=\int_{D_2/2}^{D_1/2}\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}h\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 NhI}{2\pi}\ln\frac{D_1}{D_2},$$

$$\Psi=N\Phi=\left(\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{D_1}{D_2}\right)I,$$

$$\therefore\ L=\frac{\Psi}{I}=\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{D_1}{D_2};$$

(2) $$L=\frac{4\pi\times10^{-7}\times10^3\times10^3\times1.0\times10^{-2}}{2\pi}\times\ln\frac{0.20}{0.10}\,\mathrm{H}=1.4\times10^{-3}\,\mathrm{H}=1.4\,\mathrm{mH}.$$

3－31. **两根平行导线,横截面的半径都是 a,中心相距为 d,载有大小相等而方向相反的电流。设 $d \gg a$,且两导线内部的磁通量都可略去不计。证明：这样一对导线长为 l 的一段的自感为**

$$L=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d}{a}.$$

解：

$$\Phi=\int B\cdot l\,\mathrm{d}r=\int_a^{d-a}\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\right]l\,\mathrm{d}r$$

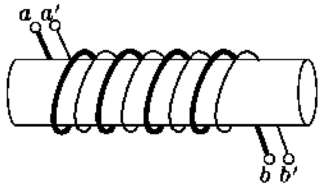
$$=\frac{\mu_0 I l}{2\pi}\Big[\ln r-\ln(d-r)\Big]_a^{d-a}\approx\left(\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d}{a}\right)\cdot I,$$

$$\therefore\ L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d}{a}.$$

3－32. 在一纸筒上密绕有两个相同的线圈 ab 和 $a'b'$，每个线圈的自感都是 0.050 H，如本题图所示。求：

（1）a 和 a' 相接时，b 和 b' 间的自感；

（2）a' 和 b 相接时，a 和 b' 间的自感。



习题 3－32

解：设线圈 ab 和 $a'b'$ 的自感 $L_1=L_2=0.050\,\mathrm{H}$，它们的互感为 $M=\sqrt{L_1L_2}=L_1=0.050\,\mathrm{H}$.

（1）$L=L_1+L_2-2M=0$，

（2）$L=L_1+L_2+2M=4L_1=0.20\,\mathrm{H}$.

3－33. 两线圈的自感分别为 $L_1 = 5.0\,\mathrm{mH}$，$L_2 = 3.0\,\mathrm{mH}$，当它们顺接串联时，总自感为 $L = 11.0\,\mathrm{mH}$.

（1）求它们之间的互感；

（2）设这两线圈的形状和位置都不改变，只把它们反接串联，求它们反接后的总自感。

解：（1）$L = L_1 + L_2 + 2M$，

$$\therefore\ M = \frac{1}{2}(L - L_1 - L_2) = \frac{1}{2}(11.0 - 5.0 - 3.0)\,\mathrm{mH} = 1.5\,\mathrm{mH}；$$

（2）$L = L_1 + L_2 - 2M = (5.0 + 3.0 - 2\times 1.5)\,\mathrm{mH} = 5.0\,\mathrm{mH}.$

3－34. 两线圈顺接后总自感为 1.00 H**，在它们的形状和位置都不变的情况下，反接后的总自感为** 0.40 H. **求它们之间的互感。**

解：$L=L_1+L_2+2M$，　$L'=L_1+L_2-2M$，

$$\therefore\ M=\frac{1}{4}(L-L')=\frac{1}{4}(1.00-0.40)\,\text{H}=0.15\,\text{H}.$$

3－35. **两根足够长的平行导线间的距离为 20 cm，在导线中保持一大小为 20 A 而方向相反的恒定电流。**

（1）求两导线间每单位长度的自感系数，设导线的半径为 1.0 mm；

（2）若将导线分开到相距 40 cm，求磁场对导线单位长度所做的功；

（3）位移时，单位长度的磁能改变了多少？是增加还是减少？说明能量的来源。

解：（1）$\Phi=\int B\cdot 1\cdot \mathrm{d}r=\int_a^{d-a}\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\right]\mathrm{d}r$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln r-\ln(d-r)\right]_a^{d-a}\approx\left(\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d}{a}\right)\cdot I,$$

$$\therefore\ L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}=\frac{4\pi\times10^{-7}}{\pi}\ln\frac{20}{0.10}=2.1\times10^{-6}\mathrm{H}.$$

（2）$A=\int F\mathrm{d}r=\int_d^{2d}\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln 2=\left(\frac{4\pi\times10^{-7}\times20^2}{2\pi}\times\ln 2\right)\mathrm{J}$

$$=5.5\times10^{-5}\mathrm{J}.$$

（3）**单位长度的磁能增加**

$$W=W_2-W_1=\frac{1}{2}L_2I^2-\frac{1}{2}L_1I^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{2d}{a}-\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}\right)I^2=\frac{\mu_0 I^2}{\pi}\ln 2$$

$$=5.5\times10^{-5}\mathrm{J},$$

移动过程中磁场所作的功与磁能的增加两者之和来自电源所作的功。