

《电磁场与电磁波》

教材：电磁场与电磁波（第5版）谢处方等著，高等教育出版社



预备知识：矢量分析，单/多变量微积分，电磁学

课程规则

- 课前打卡，按时上课，不迟到早退。如请假要履行请假手续（请假条+辅导员签字）
- 课程有点难度！课前预习，认真听课，课后要花时间复习巩固，掌握例题和课后习题
- 认真完成作业。作业提交方式：作业写在本子上，拍照上传到QQ群“作业”，方便批阅和成绩统计
- 成绩评定方法： $\text{平时成绩} \times 20\% + \text{期中考试成绩} \times 20\% + \text{期末考试成绩} \times 60\%$

平时成绩包括：出勤，作业，课堂表现，随堂测验等

第1章 矢量分析

本章内容

- 1.1 矢量代数
- 1.2 三种常用的正交曲线坐标系
- 1.3 标量场的方向导数与梯度
- 1.4 矢量场的通量与散度
- 1.5 矢量场的环流与旋度
- 1.6 无旋场的标量位
- 1.7 无散场的矢量位
- 1.8 格林定理
- 1.9 亥姆霍兹定理

1.1 矢量代数

1. 标量和矢量

标量：一个只用大小描述的物理量。

矢量：一个既有大小又有方向特性的物理量，常用黑体字母或带箭头的字母表示。

矢量的几何表示：一个矢量可用一条有方向的线段来表示

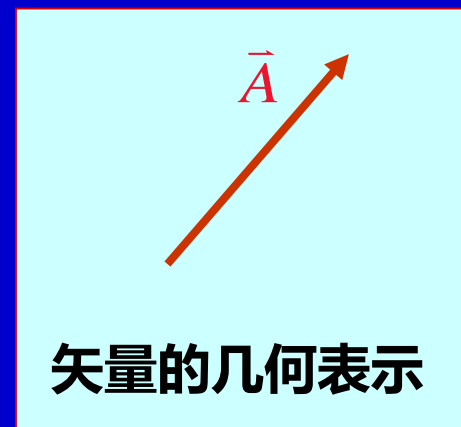
矢量的代数表示： $\vec{A} = \vec{e}_A A = \vec{e}_A |\vec{A}|$

矢量的大小或模： $A = |\vec{A}|$

矢量的单位矢量： $\vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{A}$

常矢量：大小和方向均不变的矢量。

注意：单位矢量不一定是常矢量。



矢量用坐标分量表示

$$\vec{A} = \vec{e}_x A_x + \vec{e}_y A_y + \vec{e}_z A_z$$

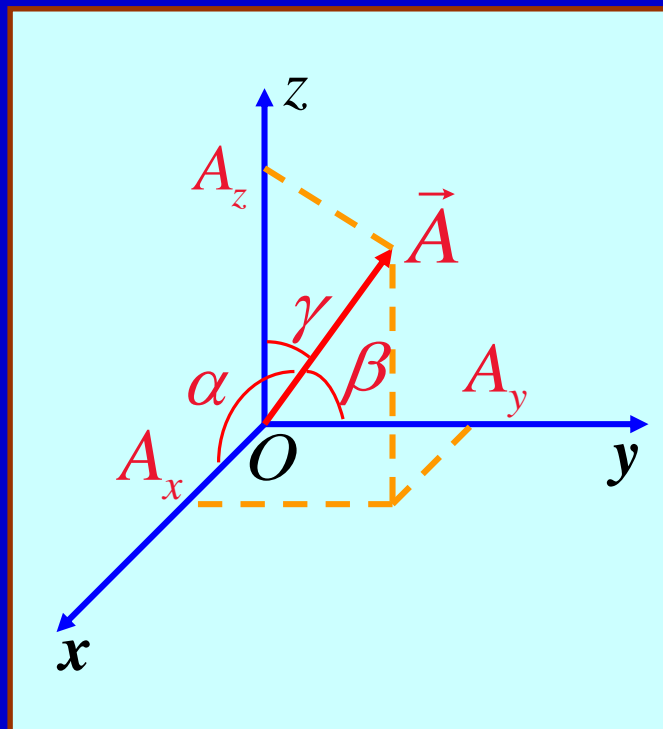
$$A_x = A \cos \alpha$$

$$A_y = A \cos \beta$$

$$A_z = A \cos \gamma$$

$$\vec{A} = A(\vec{e}_x \cos \alpha + \vec{e}_y \cos \beta + \vec{e}_z \cos \gamma) = A\vec{e}_A$$

$$\vec{e}_A = \vec{e}_x \cos \alpha + \vec{e}_y \cos \beta + \vec{e}_z \cos \gamma$$



2. 矢量的代数运算

(1) 矢量的加减法

两矢量的加减在几何上是以这两矢量为邻边的平行四边形的对角线,如图所示。

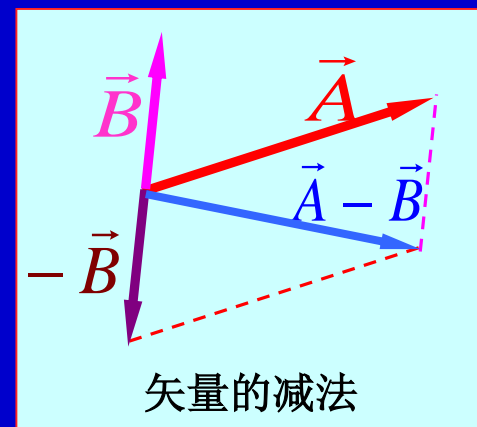
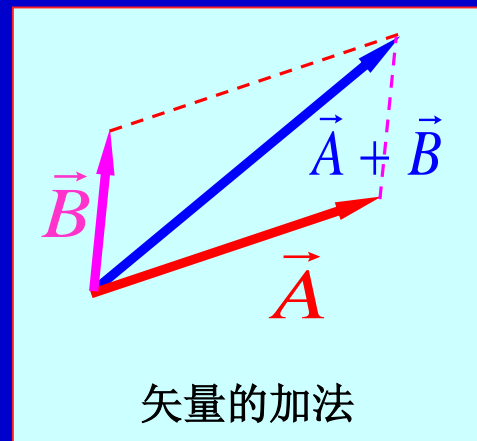
在直角坐标系中两矢量的加法和减法:

$$\vec{A} \pm \vec{B} = \vec{e}_x(A_x \pm B_x) + \vec{e}_y(A_y \pm B_y) + \vec{e}_z(A_z \pm B_z)$$

矢量的加减符合交换律和结合律

交换律 $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

结合律 $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$



(2) 标量乘矢量

$$k\vec{A} = \vec{e}_x kA_x + \vec{e}_y kA_y + \vec{e}_z kA_z$$

(3) 矢量的标积 (点积)

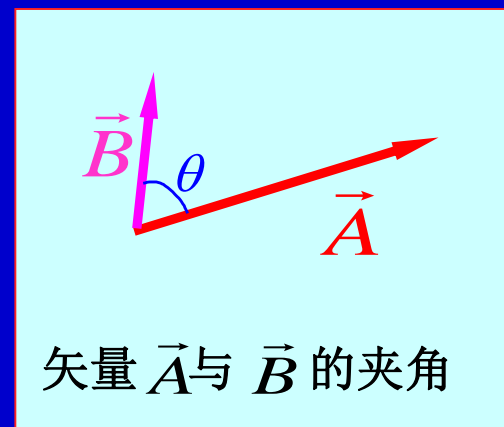
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \text{ —— 矢量的标积符合交换律}$$

$$\vec{A} \perp \vec{B} \longrightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{A} \parallel \vec{B} \longrightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = AB$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$$



(4) 矢量的矢积 (叉积)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{e}_n AB \sin \theta$$

用坐标分量表示为

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \vec{e}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \vec{e}_z (A_x B_y - A_y B_x)$$

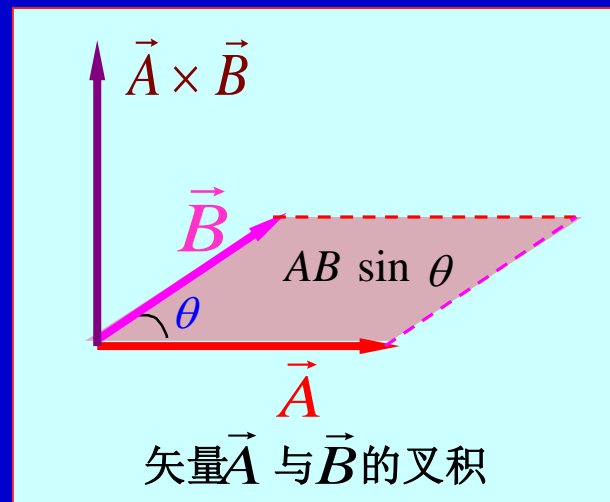
写成行列式形式为

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

若 $\vec{A} \perp \vec{B}$, 则 $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$

若 $\vec{A} \parallel \vec{B}$, 则 $|\vec{A} \times \vec{B}| = 0$



(5) 矢量的混合运算

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C} \quad \text{—— 分配律}$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C} \quad \text{—— 分配律}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad \text{—— 标量三重积}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad \text{—— 矢量三重积}$$

1.2 三种常用的正交曲线坐标系

三维空间任意一点的位置可通过三条相互正交曲线的交点来确定。

三条正交曲线组成的确定三维空间任意点位置的体系，称为正交曲线坐标系；三条正交曲线称为坐标轴；描述坐标轴的量称为坐标变量。

在电磁场与波理论中，三种常用的正交曲线坐标系为：

直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

1. 直角坐标系

坐标变量 x, y, z

坐标单位矢量 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

位置矢量 $\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$

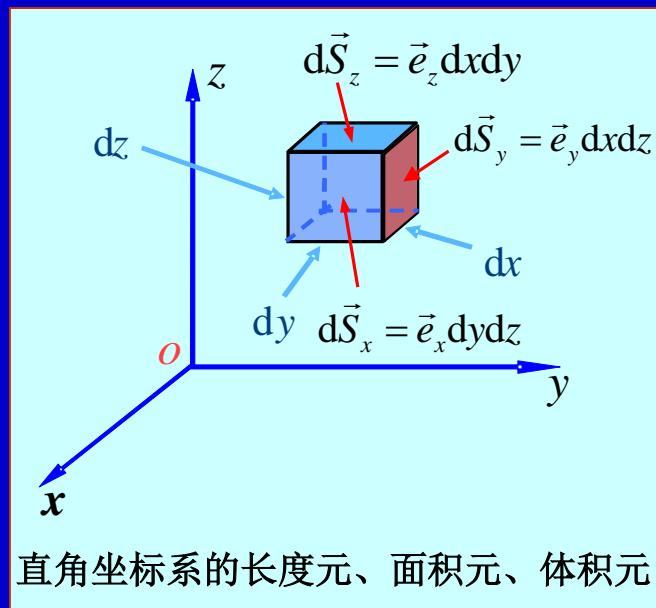
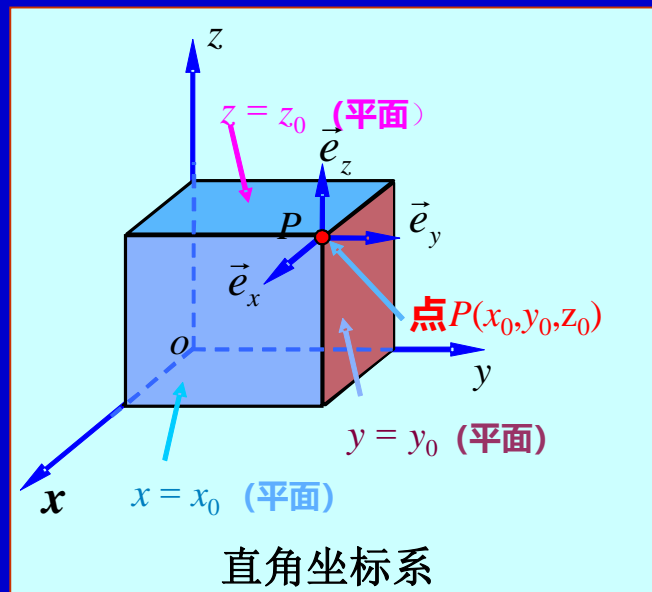
线元矢量 $d\vec{l} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz$

面元矢量 $d\vec{S}_x = \vec{e}_x dl_y dl_z = \vec{e}_x dy dz$

$$d\vec{S}_y = \vec{e}_y dl_x dl_z = \vec{e}_y dx dz$$

$$d\vec{S}_z = \vec{e}_z dl_x dl_y = \vec{e}_z dx dy$$

体积元 $dV = dx dy dz$



两个矢量 $\vec{A} = \vec{e}_x A_x + \vec{e}_y A_y + \vec{e}_z A_z$ 有

$$\vec{B} = \vec{e}_x B_x + \vec{e}_y B_y + \vec{e}_z B_z$$

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{e}_x (A_x + B_x) + \vec{e}_y (A_y + B_y) + \vec{e}_z (A_z + B_z)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \vec{e}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \vec{e}_z (A_x B_y - A_y B_x)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

2. 圆柱坐标系

坐标变量

$$\rho, \phi, z$$

坐标单位矢量

$$\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$$

位置矢量

$$\vec{r} = \vec{e}_\rho \rho + \vec{e}_z z$$

线元矢量

$$d\vec{l} = \vec{e}_\rho d\rho + \vec{e}_\phi \rho d\phi + \vec{e}_z dz$$

面元矢量

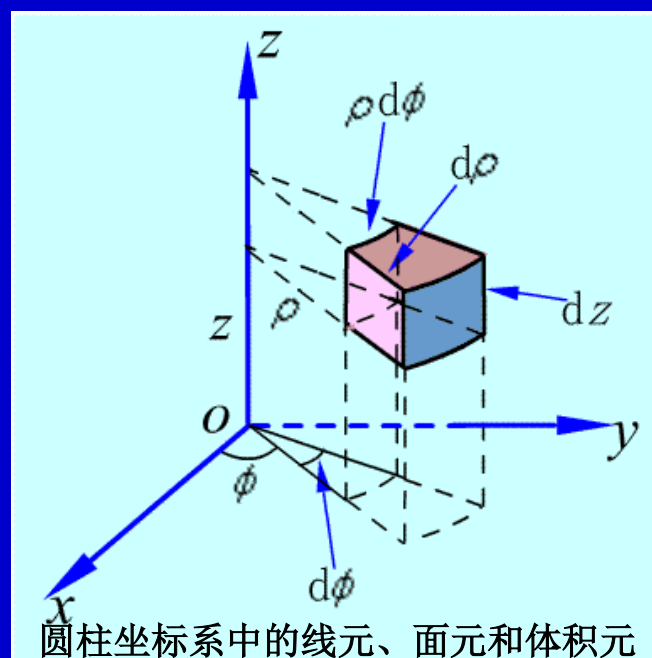
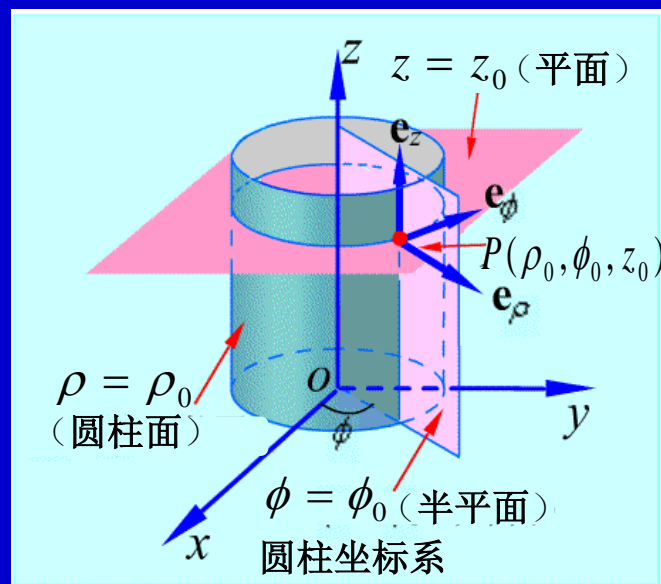
$$d\vec{S}_\rho = \vec{e}_\rho dl_\phi dl_z = \vec{e}_\rho \rho d\phi dz$$

$$d\vec{S}_\phi = \vec{e}_\phi dl_\rho dl_z = \vec{e}_\phi d\rho dz$$

$$d\vec{S}_z = \vec{e}_z dl_\rho dl_\phi = \vec{e}_z \rho d\rho d\phi$$

体积元

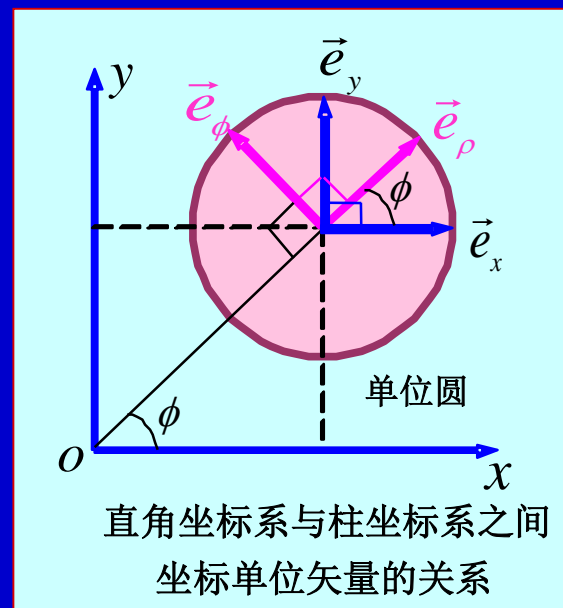
$$dV = \rho d\rho d\phi dz$$



圆柱坐标系中的线元、面元和体积元

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \phi} = -\vec{e}_x \sin \phi + \vec{e}_y \cos \phi = \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} = -\vec{e}_x \cos \phi - \vec{e}_y \sin \phi = -\vec{e}_\rho \end{cases}$$



注意：单位矢量 \vec{e}_ρ 和 \vec{e}_ϕ 都不是常矢量。

矢量 $\vec{A} = \vec{e}_\rho A_\rho + \vec{e}_\phi A_\phi + \vec{e}_z A_z$ 它与直角坐标系之间的变换关系为

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

所以位于不同点的矢量一般不能直接用对应分量进行加法和乘法运算！但对于同一点的两个矢量或同一个 ϕ 的平面上的两个矢量可以进行加法和乘法运算。

例：已知在点 $P(2, \pi/6, 5)$ 的矢量 $\vec{A} = 2\vec{e}_\rho + 4\vec{e}_\phi + 5\vec{e}_z$ 和点 $Q(3, \pi/3, 3)$ 的矢量 $\vec{B} = -4\vec{e}_\rho + 2\vec{e}_\phi + \vec{e}_z$ ，求在点 $M(4, \pi/4, 2)$ 的矢量 $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

解：先变换到直角坐标系

$$\vec{A} = 2\vec{e}_\rho + 4\vec{e}_\phi + 5\vec{e}_z \Rightarrow \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}-2 \\ 2\sqrt{3}+1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{B} = -4\vec{e}_\rho + 2\vec{e}_\phi + \vec{e}_z \Rightarrow \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-\sqrt{3} \\ 1-2\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}$$

于是在直角坐标系中得到 $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = -4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$

变换到柱坐标系的点 M ，得

$$\begin{bmatrix} C_\rho \\ C_\phi \\ C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \\ 4 \end{bmatrix}$$

3. 球坐标系

坐标变量

$$r, \theta, \phi$$

坐标单位矢量

$$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$$

位置矢量

$$\vec{r} = \vec{e}_r r$$

线元矢量

$$d\vec{l} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\theta r d\theta + \vec{e}_\phi r \sin \theta d\phi$$

面元矢量

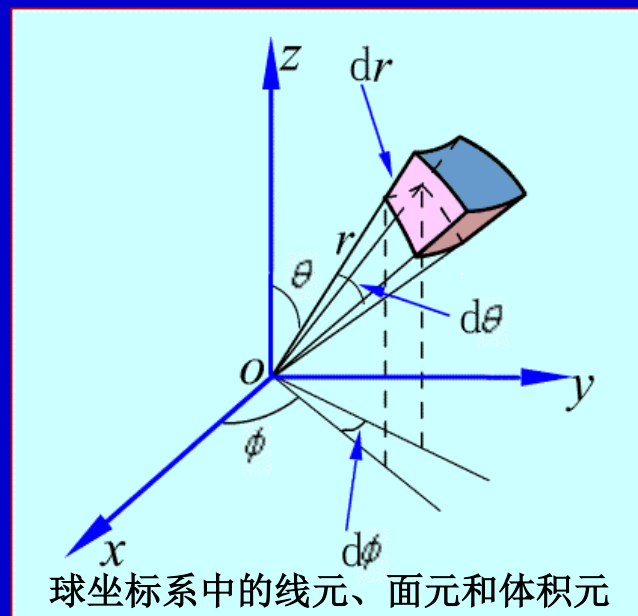
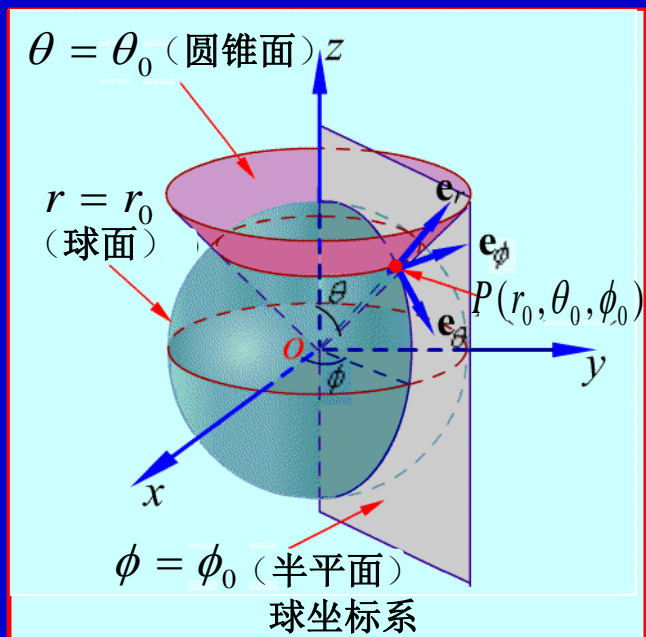
$$d\vec{S}_r = \vec{e}_r dl_\theta dl_\phi = \vec{e}_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$d\vec{S}_\theta = \vec{e}_\theta dl_r dl_\phi = \vec{e}_\theta r \sin \theta dr d\phi$$

$$d\vec{S}_\phi = \vec{e}_\phi dl_r dl_\theta = \vec{e}_\phi r dr d\theta$$

体积元

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$



$$\begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta, & \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} = \vec{e}_\phi \sin \theta \\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r, & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \phi} = \vec{e}_\phi \cos \theta \\ \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \theta} = 0, & \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} = -\vec{e}_r \sin \theta - \vec{e}_\theta \cos \theta \end{array} \right.$$

注意：单位矢量 \vec{e}_r , \vec{e}_θ 和 \vec{e}_ϕ 都不是常矢量。

矢量 $\vec{A} = \vec{e}_r A_r + \vec{e}_\theta A_\theta + \vec{e}_\phi A_\phi$ 它与直角坐标系之间的变换关系为

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

一般情况下，球坐标系下的任意两个矢量不能直接用对应分量进行加法和乘法运算。但是，对于同一点或在沿同一条半径线上的两个矢量可以进行加法和乘法运算。

4. 坐标单位矢量之间的关系

直角坐标与 圆柱坐标系

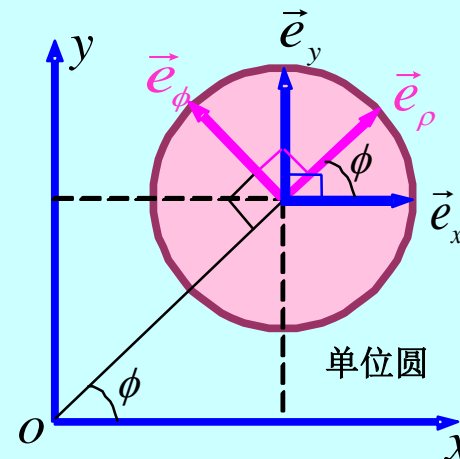
	\vec{e}_x	\vec{e}_y	\vec{e}_z
\vec{e}_ρ	$\cos \phi$	$\sin \phi$	0
\vec{e}_ϕ	$-\sin \phi$	$\cos \phi$	0
\vec{e}_z	0	0	1

圆柱坐标与 球坐标系

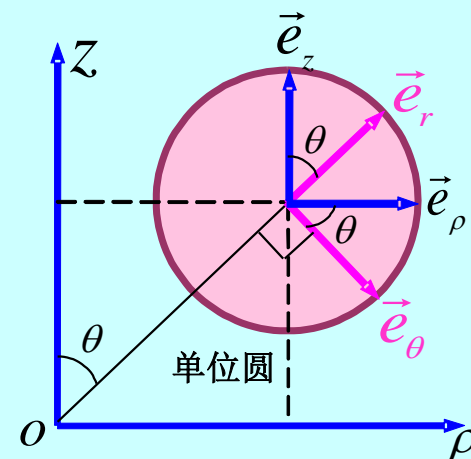
	\vec{e}_ρ	\vec{e}_ϕ	\vec{e}_z
\vec{e}_r	$\sin \theta$	0	$\cos \theta$
\vec{e}_θ	$\cos \theta$	0	$-\sin \theta$
\vec{e}_ϕ	0	1	0

直角坐标与 球坐标系

	\vec{e}_x	\vec{e}_y	\vec{e}_z
\vec{e}_r	$\sin \theta \cos \phi$	$\sin \theta \sin \phi$	$\cos \theta$
\vec{e}_θ	$-\cos \theta \sin \phi$	$\cos \theta \cos \phi$	$-\sin \theta$
\vec{e}_ϕ	$-\sin \phi$	$\cos \phi$	0



直角坐标系与柱坐标系之间
坐标单位矢量的关系



柱坐标系与球坐标系之间
坐标单位矢量的关系

三种坐标系有不同适用范围：

- 1、直角坐标系适用于场呈**面对称分布**的问题求解，如无限大面电荷分布产生电场分布。
- 2、柱面坐标系适用于场呈**轴对称分布**的问题求解，如无限长线电流产生磁场分布。
- 3、球面坐标系适用于场呈**点对称分布**的问题求解，如点电荷产生电场分布。

1.3 标量场的方向导数与梯度

标量场和矢量场

确定空间区域上的每一点都有确定物理量与之对应，称在该区域上定义了一个场。

□ 如果物理量是标量，称该场为标量场。

例如：温度场、电位（电势）场、高度场等。

□ 如果物理量是矢量，称该场为矢量场。

例如：流速场、重力场、电场、磁场等。

□ 如果场与时间无关，称为静态场，反之为时变场。

从数学上看，场是定义在空间区域上的函数：

静态标量场和矢量场可分别表示为： $u(x, y, z)$ 、 $\vec{F}(x, y, z)$

时变标量场和矢量场可分别表示为： $u(x, y, z, t)$ 、 $\vec{F}(x, y, z, t)$

1. 标量场的等值面

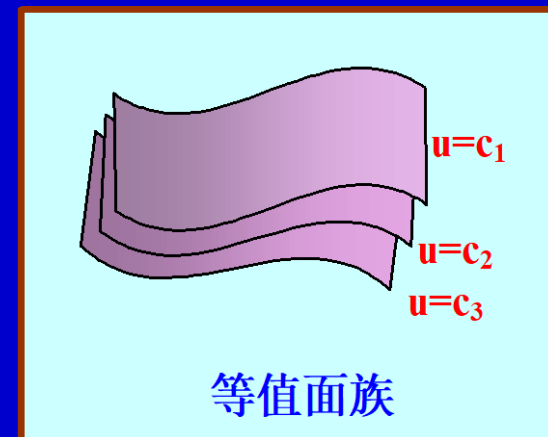
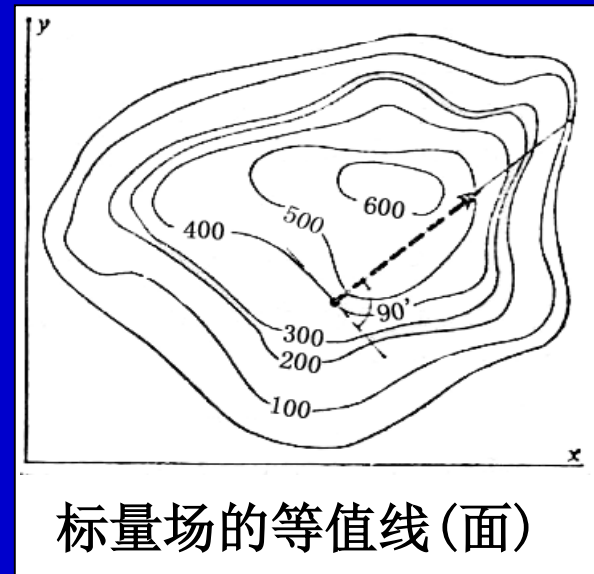
等值面：标量场取得同一数值的点在空间形成的曲面。

意义：形象直观地描述了物理量在空间的分布状态。

等值面方程： $u(x, y, z) = C$

等值面的特点：

- 常数 C 取一系列不同的值，就得到一系列不同的等值面，形成等值面族；
- 标量场的等值面充满场所在的整个空间；
- 标量场的等值面互不相交。



2. 方向导数

概念:
$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

式中: $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ —— $\Delta \vec{l}$ 的方向余弦。

意义: 方向导数表示场沿某方向的空间变化率。

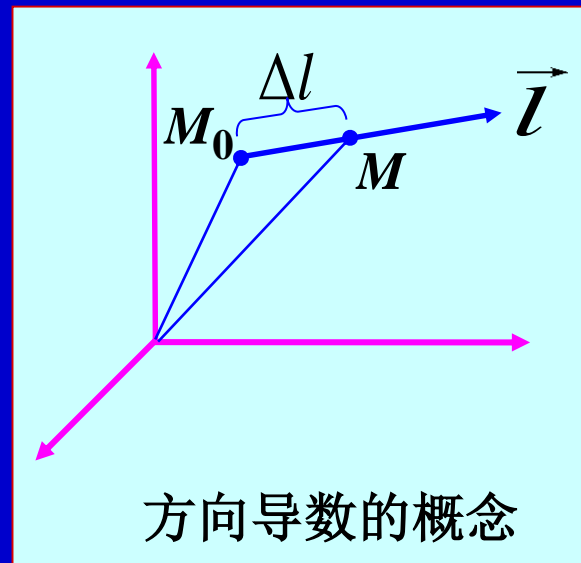
$\frac{\partial u}{\partial l} > 0$ —— $u(M)$ 沿 \vec{l} 方向增加;

$\frac{\partial u}{\partial l} < 0$ —— $u(M)$ 沿 \vec{l} 方向减小;

$\frac{\partial u}{\partial l} = 0$ —— $u(M)$ 沿 \vec{l} 方向无变化。

特点: 方向导数既与点 M_0 有关, 也与 \vec{l} 方向有关。

问题: 在什么方向上变化率最大、其最大的变化率为多少?



3. 标量场的梯度 ($\text{grad} u$ 或 ∇u)

概念： 方向沿标量场 u 变化率最大的方向，大小等于其最大变化率，即 $\nabla u = \vec{e}_n \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{\max}$ ，其中 \vec{e}_n —— $\frac{\partial u}{\partial l}$ 取得最大值的方向

意义： 描述标量场在某点的最大变化率及其变化最大的方向

梯度的表达式：

直角坐标系
$$\nabla u = \vec{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

圆柱坐标系
$$\nabla u = \vec{e}_\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

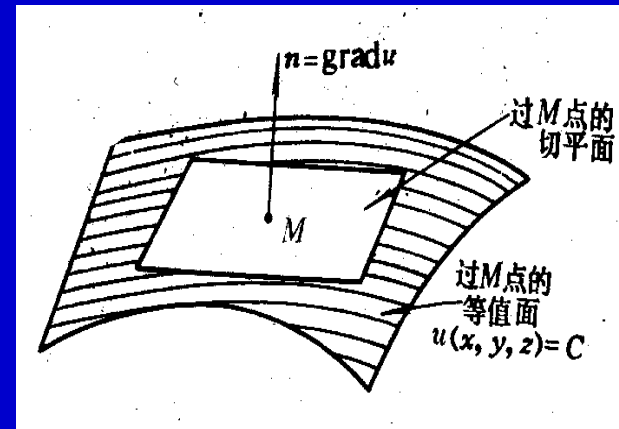
球坐标系
$$\nabla u = \vec{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi}$$

梯度的性质：

- 标量场的梯度是矢量场，它在空间某点的方向表示该点场变化最大（增大）的方向，其数值表示变化最大方向上场的空间变化率。

- 标量场在某个方向上的方向导数，是梯度在该方向上的投影。
$$\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{e}_l \cdot \nabla u$$

- 标量场的梯度垂直于通过该点的等值面（或切平面）



梯度运算的基本公式：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla C = 0 \\ \nabla(Cu) = C\nabla u \\ \nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v \\ \nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u \\ \nabla f(u) = f'(u)\nabla u \end{array} \right.$$

例1.3.0 设一标量函数 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ 描述了空间标量场。试求：

(1) 该函数 φ 在点 $P(1,1,1)$ 处的梯度，以及表示该梯度方向的单位矢量。

(2) 求该函数 φ 沿单位矢量 $\vec{e}_l = \vec{e}_x \cos 60^\circ + \vec{e}_y \cos 45^\circ + \vec{e}_z \cos 60^\circ$ 方向的方向导数，并以点 $P(1,1,1)$ 处的方向导数值与该点的梯度值作以比较，得出相应结论。

解 (1) 由梯度计算公式，可求得 P 点的梯度为

$$\begin{aligned}\nabla \varphi|_P &= \left[\left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x^2 + y^2 - z) \right]_P \\ &= \left(\vec{e}_x 2x + \vec{e}_y 2y - \vec{e}_z \right) \Big|_{(1,1,1)} = \vec{e}_x 2 + \vec{e}_y 2 - \vec{e}_z\end{aligned}$$

表征其方向的单位矢量

$$\vec{e}_l|_P = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|}\bigg|_P = \frac{\vec{e}_x 2x + \vec{e}_y 2y - \vec{e}_z}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2}}\bigg|_{(1,1,1)} = \vec{e}_x \frac{2}{3} + \vec{e}_y \frac{2}{3} - \vec{e}_z \frac{1}{3}$$

(2) 由方向导数与梯度之间的关系式可知, 沿 e_l 方向的方向导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial l} &= \nabla \varphi \cdot \vec{e}_l = (\vec{e}_x 2x + \vec{e}_y 2y - \vec{e}_z) \cdot (\vec{e}_x \frac{1}{2} + \vec{e}_y \frac{\sqrt{2}}{2} + \vec{e}_z \frac{1}{2}) \\ &= x + \sqrt{2}y - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

对于给定的 P 点, 上述方向导数在该点取值为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l}\bigg|_P = x + \sqrt{2}y - \frac{1}{2}\bigg|_{(1,1,1)} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$$

而该点的梯度值为

$$|\nabla \varphi|_P = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2} \Big|_{(1,1,1)} = 3$$

显然，梯度 $|\nabla \varphi|_P$ 描述了 P 点处标量函数 φ 的最大变化率，即最大的方向导数，故 $\frac{\partial \varphi}{\partial l} \Big|_P < |\nabla \varphi|_P$ 恒成立。

例 1.3.1 已知 $\mathbf{R} = e_x(x - x') + e_y(y - y') + e_z(z - z')$, $R = |\mathbf{R}|$ 。证明:

$$(1) \nabla R = \frac{\mathbf{R}}{R}; (2) \nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}; (3) \nabla f(R) = -\nabla' f(R)。$$

其中: $\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z}$ 表示对 x, y, z 的运算, $\nabla' = e_x \frac{\partial}{\partial x'} + e_y \frac{\partial}{\partial y'} + e_z \frac{\partial}{\partial z'}$ 表示对 x', y', z' 的运算。

解: (1) 将 $R = |\mathbf{R}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ 代入式(1.3.7), 得

$$\begin{aligned} \nabla R &= e_x \frac{\partial R}{\partial x} + e_y \frac{\partial R}{\partial y} + e_z \frac{\partial R}{\partial z} \\ &= \frac{e_x(x - x') + e_y(y - y') + e_z(z - z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} = \frac{\mathbf{R}}{R} \end{aligned}$$

(2) 将 $\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$ 代入式(1.3.7), 得

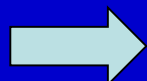
$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = e_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) + e_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R} \right) + e_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right)$$

$$= - \frac{e_x(x - x') + e_y(y - y') + e_z(z - z')}{[\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}]^3} = - \frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

(3) 根据梯度的运算公式(1.3.7),得到

$$\begin{aligned}\nabla f(R) &= e_x \frac{\partial f(R)}{\partial x} + e_y \frac{\partial f(R)}{\partial y} + e_z \frac{\partial f(R)}{\partial z} \\ &= e_x \frac{df(R)}{dR} \frac{\partial R}{\partial x} + e_y \frac{df(R)}{dR} \frac{\partial R}{\partial y} + e_z \frac{df(R)}{dR} \frac{\partial R}{\partial z} \\ &= \frac{df(R)}{dR} \nabla R = \frac{df(R)}{dR} \frac{\mathbf{R}}{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla' f(R) &= \frac{df(R)}{dR} \nabla' R \\ &= \frac{df(R)}{dR} \frac{-e_x(x - x') - e_y(y - y') - e_z(z - z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \\ &= - \frac{df(R)}{dR} \frac{\mathbf{R}}{R}\end{aligned}$$



$$\nabla f(R) = - \nabla' f(R)$$

1.4 矢量场的通量与散度

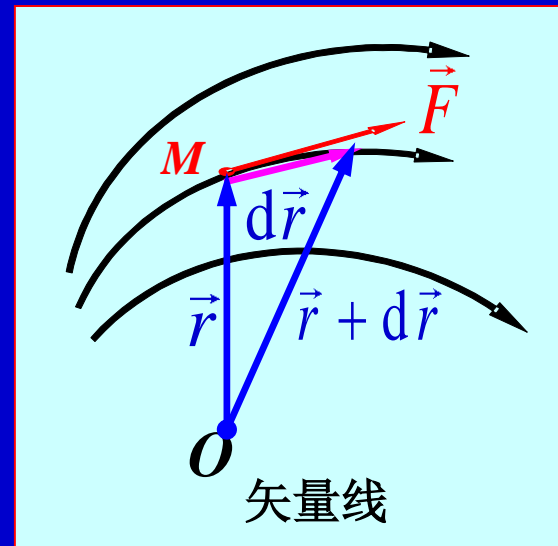
1. 矢量线

概念： 矢量线是这样的曲线，其上每一点的切线方向代表了该点矢量场的方向，疏密程度代表大小。

意义： 形象直观地描述了矢量场的空间分布状态。

矢量线方程： $d\vec{r} \times \vec{F} = 0$ (共线)

$$\Rightarrow \frac{dx}{F_x(x, y, z)} = \frac{dy}{F_y(x, y, z)} = \frac{dz}{F_z(x, y, z)}$$



例 1.4.1 设点电荷 q 位于坐标原点, 在周围空间任一点 $M(x, y, z)$ 处产生的电场强度矢量

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r}$$

式中, ϵ 为介电常数, $\mathbf{r} = e_x x + e_y y + e_z z$, $r = |\mathbf{r}|$, 求电场强度矢量 \mathbf{E} 的矢量线。

解: $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} (e_x x + e_y y + e_z z)$, 由式

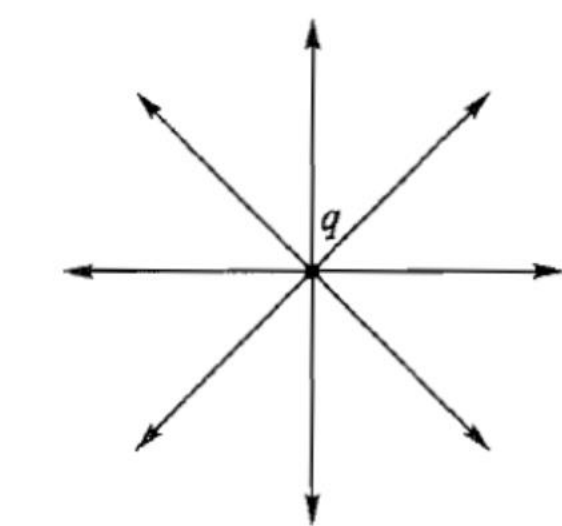


图 1.4.2 点电荷的矢量线

(1.4.3) 可得到矢量线的微分方程组为

$$\begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \\ \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \end{cases}$$

由此方程组可解得

$$\begin{cases} x = c_1 z \\ y = c_2 z \end{cases} \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意常数})$$

这是从点电荷 q 所在处(坐标原点)发出的射线束, 如图 1.4.2 所示。

2. 矢量场的通量

问题：如何定量描述矢量场的大小？

引入通量的概念。

通量的概念

$$\Phi = \int d\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{F} \cdot \vec{e}_n dS$$

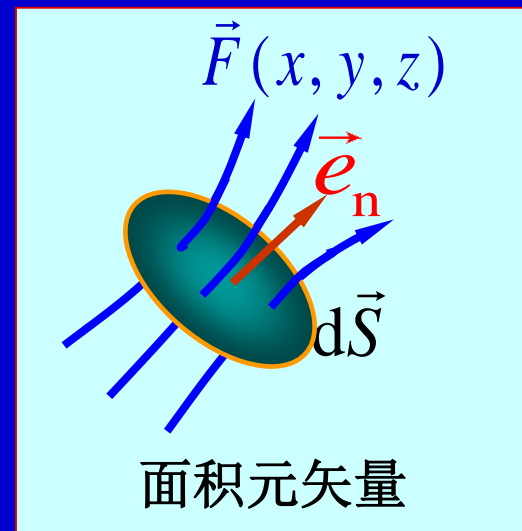
其中： $d\vec{S} = \vec{e}_n dS$ ——面积元矢量；

\vec{e}_n ——面积元的法向单位矢量；

$d\Phi = \vec{F} \cdot \vec{e}_n dS$ ——穿过面积元 $d\vec{S}$ 的通量。

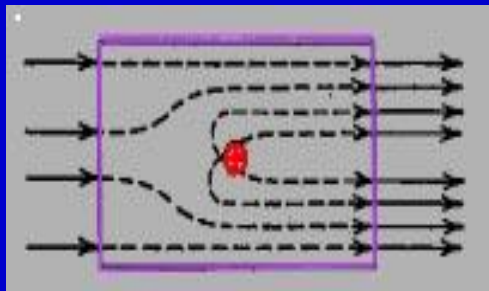
如果曲面 S 是闭合的，则规定曲面的法向矢量由闭合曲面内指向外，矢量场对闭合曲面的通量是

$$\Phi = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{e}_n dS$$



通量的物理意义

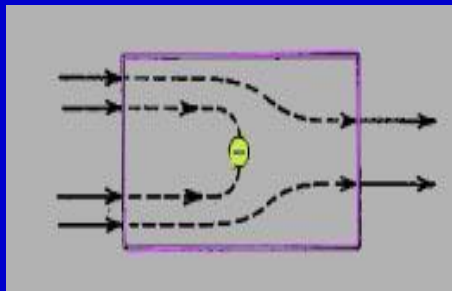
矢量场通过闭合曲面通量的三种可能结果



$$\Phi > 0$$

(正通量源)

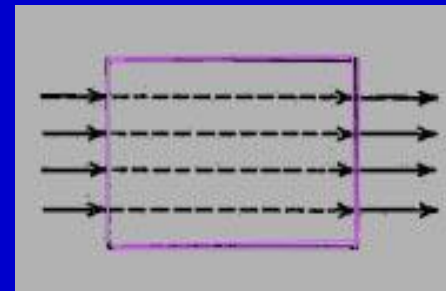
通过闭合曲面有
净的矢量线穿出



$$\Phi < 0$$

(负通量源)

有净的矢
量线进入



$$\Phi = 0$$

(无通量源)

进入与穿出闭合曲
面的矢量线相等

闭合曲面的通量从宏观上建立了矢量场通过闭合曲面的通量与曲面内产生矢量场的源的关系。

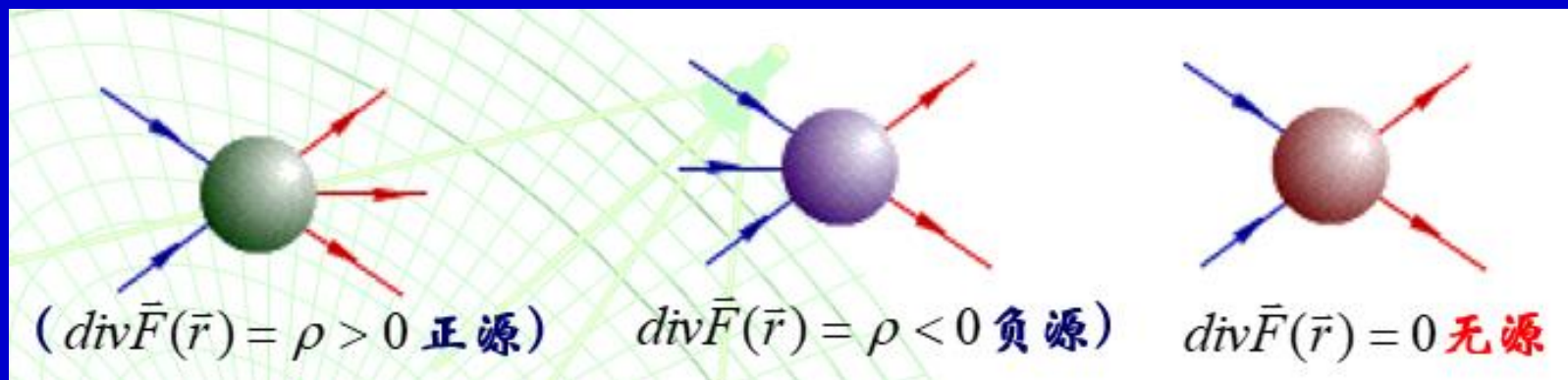
3. 矢量场的散度 $\nabla \cdot \vec{F}$ $\text{div } \vec{F}$

为了定量研究场与源之间的关系，需建立场空间**任一点M**（小体积元）的通量源与矢量场（小体积元曲面的通量）的关系。利用极限方法得到这一关系：

$$\text{div } \vec{F}(x, y, z) = \nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

称为矢量场在M点的**散度**。

散度是矢量通过包含M点的任意闭合小曲面的通量与曲面元体积之比的极限，表示在点M处的单位体积内散发出来的矢量场的通量（通量源密度）。



直角坐标系下散度表达式的推导

不失一般性，令包围 M 点的微体积 ΔV 为一直角六面体，则穿出六面体表面 S 的通量为

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \left[\int_{\text{前}} + \int_{\text{后}} + \int_{\text{左}} + \int_{\text{右}} + \int_{\text{上}} + \int_{\text{下}} \right] \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

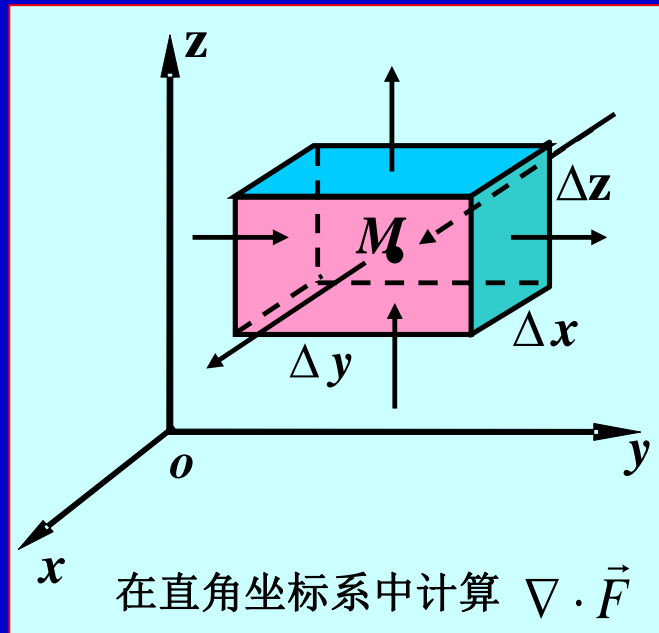
$$\int_{\text{前}} \vec{F} \cdot d\vec{S} \approx F_x(x + \Delta x / 2, y, z) \Delta y \Delta z$$

$$\int_{\text{后}} \vec{F} \cdot d\vec{S} \approx -F_x(x - \Delta x / 2, y, z) \Delta y \Delta z$$

由泰勒定理得

$$F_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \approx F_x(x, y, z) + \frac{\partial F_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

$$F_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \approx F_x(x, y, z) - \frac{\partial F_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$



由此可知，穿出前、后两侧面的净通量值为

$$\left[\int_{\text{前}} + \int_{\text{后}} \right] \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

同理，可得 $\left[\int_{\text{左}} + \int_{\text{右}} \right] \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$

$$\left[\int_{\text{上}} + \int_{\text{下}} \right] \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

因此，矢量场穿出该六面体的净通量为

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

根据定义，则得到直角坐标系中的散度表达式为

$$\nabla \cdot \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

散度的表达式:

直角坐标系 $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

圆柱坐标系 $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial F_\phi}{\rho \partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

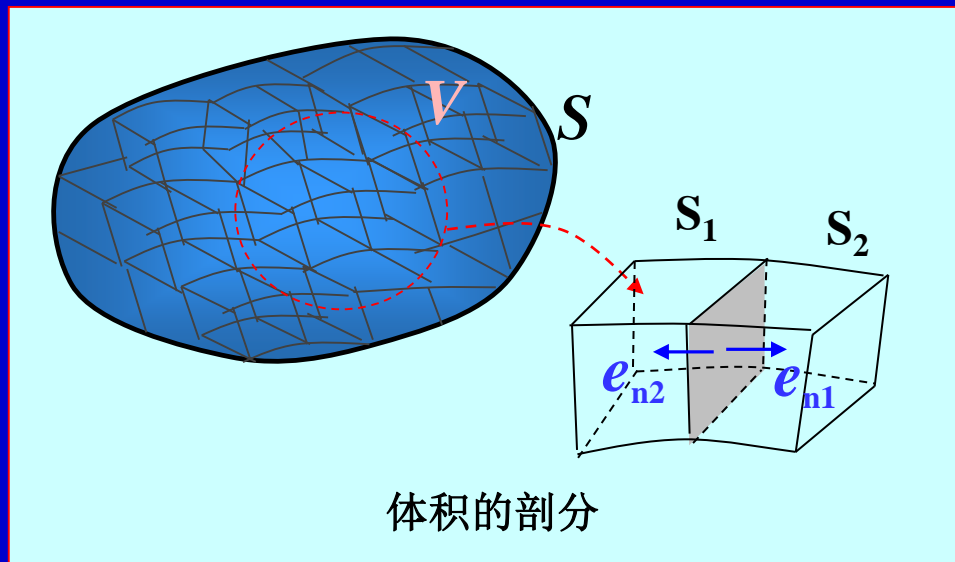
球坐标系 $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (F_\phi)$

散度的有关公式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{C} = \nabla \cdot \vec{C} = 0 \text{ (}\vec{C}\text{为常矢量)} \\ \nabla \cdot (\vec{C}f) = \vec{C} \cdot \nabla f \text{ (}f\text{为标量函数)} \\ \nabla \cdot (k\vec{F}) = k\nabla \cdot \vec{F} \text{ (}k\text{为常量)} \\ \nabla \cdot (f\vec{F}) = f\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f \\ \nabla \cdot (\vec{F} \pm \vec{G}) = \nabla \cdot \vec{F} \pm \nabla \cdot \vec{G} \end{array} \right.$$

4. 散度定理（高斯定理）

从散度的定义出发，可以得到矢量场在空间任意闭合曲面的通量等于该闭合曲面所包含体积中矢量场的散度的体积分，即



$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$

证明： $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \dots$

由散度的定义，得 $\oint_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \nabla \cdot \vec{F} dV_i \quad (i = 1, 2, \dots)$

故得到 $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \nabla \cdot \vec{F} dV_1 + \nabla \cdot \vec{F} dV_2 + \cdots = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV$

散度定理是闭合曲面积分与体积分之间的一个变换关系，在电磁理论中有着广泛的应用。

例 1.4.2 已知 $\mathbf{R} = e_x(x - x') + e_y(y - y') + e_z(z - z')$, $R = |\mathbf{R}|$ 。求矢量 $\mathbf{D} = \frac{\mathbf{R}}{R^3}$ 在 $R \neq 0$ 处的散度。

解：根据散度的计算公式(1.4.7), 有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x - x'}{R^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y - y'}{R^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z - z'}{R^3} \right) \\ &= \frac{1}{R^3} - \frac{3(x - x')^2}{R^5} + \frac{1}{R^3} - \frac{3(y - y')^2}{R^5} + \frac{1}{R^3} - \frac{3(z - z')^2}{R^5} \\ &= 0 \end{aligned}$$

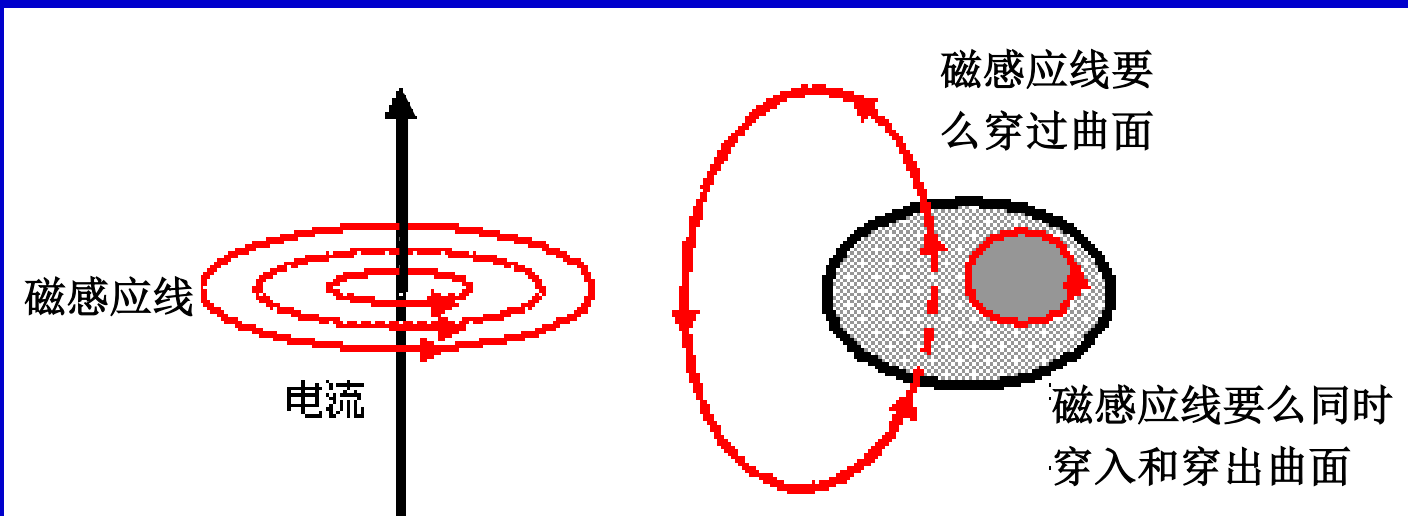
1.5 矢量场的环流与旋度

1. 矢量场的环流与环流面密度

不是所有的矢量场都由通量源激发。存在另一类不同于通量源的矢量源，它所激发的矢量线是闭合的，它对于任何闭合曲面的通量为零。但在场所定义的空间中闭合路径的积分不为零。

例如：磁场

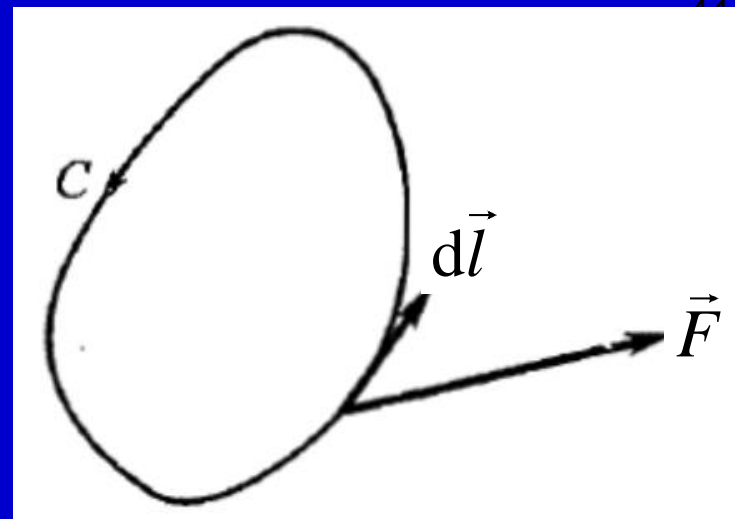
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



环流：

矢量场对于闭合曲线 C 的环流定义为该矢量对闭合曲线 C 的线积分，即

$$\Gamma = \oint_C \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{l}$$



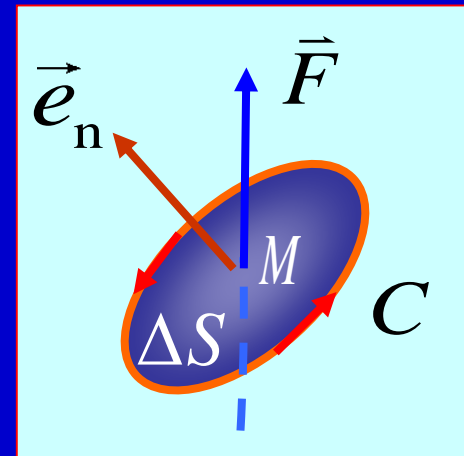
- 如果矢量场的任意闭合回路的环流恒为零，称该矢量场为无旋场，又称为保守场。
- 如果矢量场对于任何闭合曲线的环流不为零，称该矢量场为有旋矢量场，能够激发有旋矢量场的源称为旋涡源。电流是磁场的旋涡源。

环流面密度:

为了知道每一点的环流状态, 在矢量场中的点 M 作一微小曲面 ΔS , 它的边界曲线记为 C , 曲面的法线方向 \vec{e}_n 与曲线的绕向成右手螺旋定则。当 $\Delta S \rightarrow 0$ 时, 极限

$$\text{rot}_n \vec{F} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta S}$$

称为矢量场在点 M 处沿方向 \vec{e}_n 的环流面密度。



特点: 其值不仅与点 M 的位置有关, 还与面元矢量的法向 \vec{e}_n 有关。

2. 矢量场的旋度 ($\nabla \times \vec{F}$)

矢量场的环流给出了矢量场与积分回路所围曲面内旋涡源宏观联系。为了给出空间任意点矢量场与旋涡源的关系，引入矢量场的旋度。

概念： 矢量场在 M 点处的旋度为一矢量，其数值为 M 点的环流面密度最大值，其方向为取得环量密度最大值时面积元的法线方向，即

$$\text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \vec{e}_{n,\max} [\text{rot}_n \vec{F}]_{\max}$$

物理意义： 旋涡源密度矢量

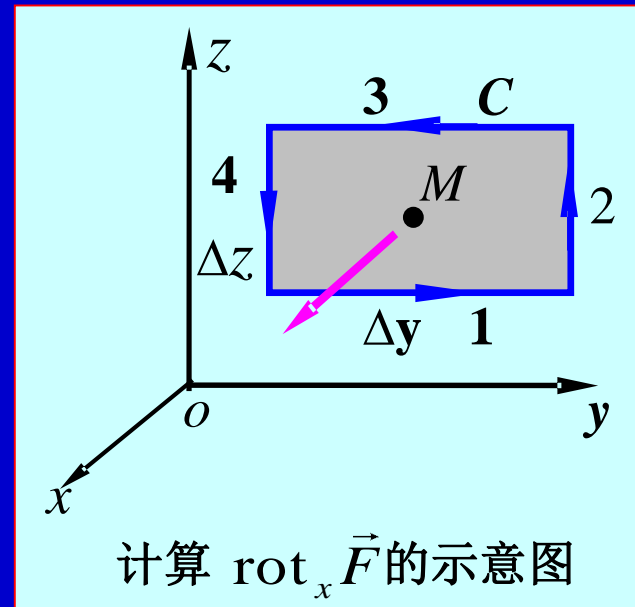
性质： $\text{rot}_n \vec{F} = \vec{e}_n \cdot \nabla \times \vec{F}$

- 直角坐标系中 $\text{rot}_x \vec{F}$ 、 $\text{rot}_y \vec{F}$ 、 $\text{rot}_z \vec{F}$ 的表达式

推导 $\text{rot}_x \vec{F}$ ，围绕点 M 取一个平行于 Oyz 平面的小矩形回路 C

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \int_{y-\Delta y/2}^{y+\Delta y/2} \vec{F}\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right) \cdot \vec{e}_y dy \\ &\quad + \int_{z-\Delta z/2}^{z+\Delta z/2} \vec{F}\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) \cdot \vec{e}_z dz \\ &\quad + \int_{y-\Delta y/2}^{y+\Delta y/2} \vec{F}\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right) \cdot (-\vec{e}_y) dy \\ &\quad + \int_{z-\Delta z/2}^{z+\Delta z/2} \vec{F}\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) \cdot (-\vec{e}_z) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\approx F_y\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right) \Delta y + F_z\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) \Delta z \\ &\quad - F_y\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right) \Delta y - F_z\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) \Delta z \end{aligned}$$



利用泰勒定理, 可得

$$\begin{aligned}
 F_y(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}) &\approx F_y(x, y, z) - \frac{\partial F_y}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \\
 F_y(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) &\approx F_y(x, y, z) + \frac{\partial F_y}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \\
 F_z(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z) &\approx F_z(x, y, z) - \frac{\partial F_z}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \\
 F_z(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) &\approx F_z(x, y, z) + \frac{\partial F_z}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}
 \end{aligned}$$

于是

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} \approx (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}) \Delta y \Delta z$$

故得

$$\text{rot}_x \vec{F} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

同理可得

$$\text{rot}_y \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad \text{rot}_z \vec{F} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

旋度的计算公式:

● **直角坐标系** $\nabla \times \vec{F} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

● **圆柱坐标系**

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix}$$

● **球坐标系**

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & r F_\theta & r \sin \theta F_\phi \end{vmatrix}$$

旋度的有关公式：

矢量场的旋度
的散度恒为零

$$\nabla \times \vec{C} = 0$$

$$\nabla \times (f\vec{C}) = \nabla f \times \vec{C}$$

$$\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$$

$$\nabla \times (\vec{F} \pm \vec{G}) = \nabla \times \vec{F} \pm \nabla \times \vec{G}$$

$$\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \nabla \times \vec{F} - \vec{F} \cdot \nabla \times \vec{G}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) \equiv 0$$

标量场的梯度
的旋度恒为零

$$\nabla \times (\nabla u) \equiv 0$$

旋度与散度的比较

- (1) 矢量场的旋度是矢量函数；矢量场的散度是标量函数。
- (2) 矢量场的散度和旋度描述了产生矢量场的两种不同性质的源。散度描述的是标量场，即散度源；旋度描述的是矢量源，即涡旋源。不同性质的源产生的矢量场也有不同的性质，仅由散度源产生的矢量场的旋度处处为0，是无旋场，其矢量线起止于散度源，是非闭合曲线；而仅由涡旋源产生的矢量场的散度处处为0，是无散场，其矢量线是闭合曲线。
- (3) 在旋度公式中，矢量场的场分量分别只对与其垂直方向的坐标变量求偏导数，所以矢量场的旋度描述了场分量在与其垂直方向的变化情况。在散度公式中，场分量只对各自方向的坐标变量求偏导数，所以矢量场的散度描述了场分量沿各自方向上的变化情况。

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

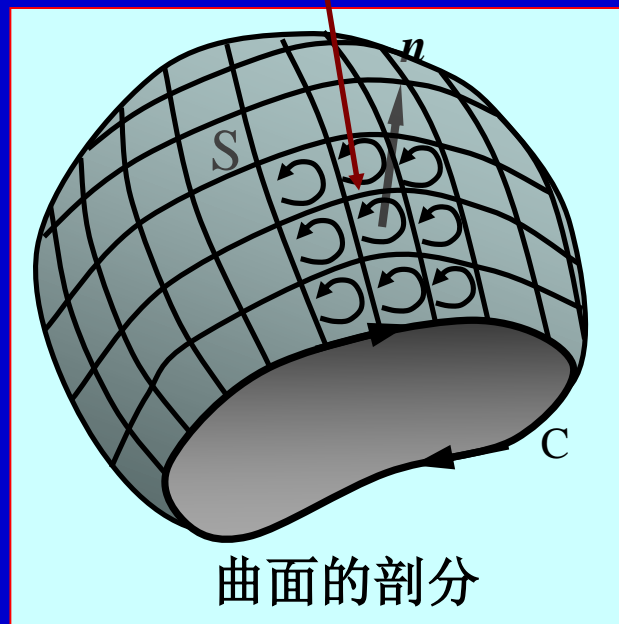
3. 斯托克斯定理（旋度定理）

从旋度的定义出发，可以得到矢量场沿任意闭合曲线的环流等于矢量场的旋度在该闭合曲线所围的曲面的通量，即

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

斯托克斯定理是闭合曲线积分与曲面积分之间的一个变换关系式，也在电磁理论中有广泛的应用。

方向相反大小
相等结果抵消



证明：将曲面 S 划分为许多小面元，如图所示。
对每一个小面元，沿包围它的闭合路径计算环流，
路径的方向与大回路 C 一致，将所有积分相加。

方向相反大小
相等结果抵消

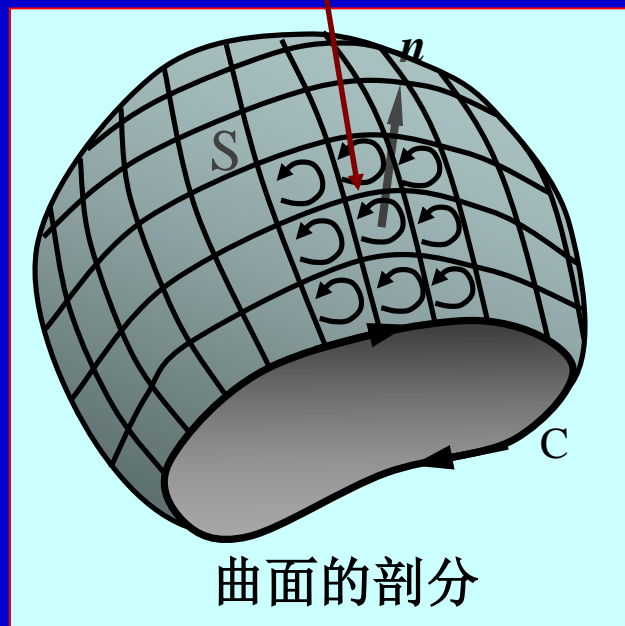
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \dots$$

$$\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \text{rot}_1 \vec{F} dS_1 = \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}_1$$

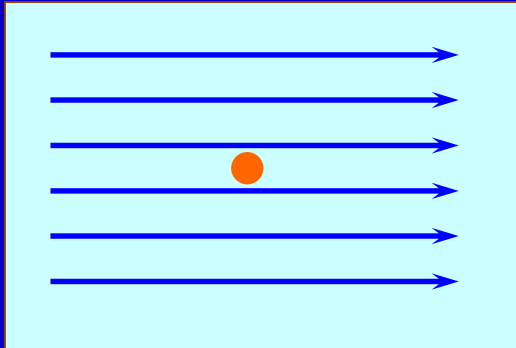
$$\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \text{rot}_2 \vec{F} dS_2 = \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}_2$$

.....

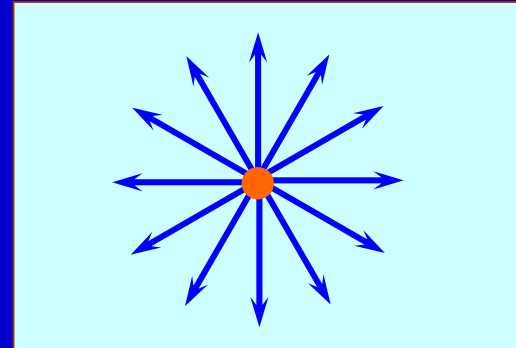
$$\Rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}_1 + \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}_2 + \dots = \int_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$



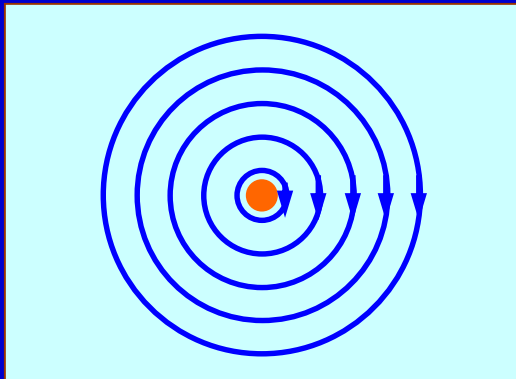
4. 散度和旋度的区别



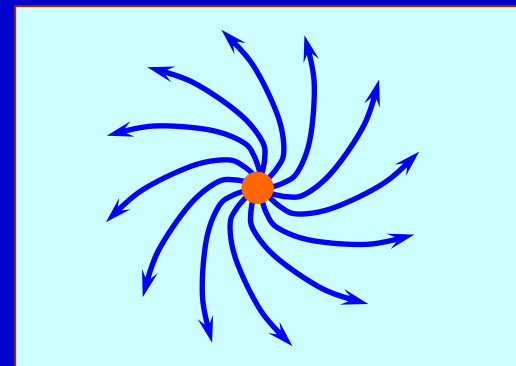
$$\nabla \cdot \vec{F} = 0, \nabla \times \vec{F} = 0$$



$$\nabla \cdot \vec{F} \neq 0, \nabla \times \vec{F} = 0$$



$$\nabla \cdot \vec{F} = 0, \nabla \times \vec{F} \neq 0$$



$$\nabla \cdot \vec{F} \neq 0, \nabla \times \vec{F} \neq 0$$

例 1.5.1 已知 $\mathbf{R} = e_x(x - x') + e_y(y - y') + e_z(z - z')$, $R = |\mathbf{R}|$ 。求矢量 $\mathbf{D} = \frac{\mathbf{R}}{R^3}$ 在 $R \neq 0$ 处的旋度。

解：根据旋度的计算公式(1.5.7), 有

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{D} &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x - x')/R^3 & (y - y')/R^3 & (z - z')/R^3 \end{vmatrix} \\ &= e_x \frac{3[(z - z')(y - y') - (z - z')(y - y')]}{R^5} + \\ &\quad e_y \frac{3[(z - z')(x - x') - (z - z')(x - x')]}{R^5} + \\ &\quad e_z \frac{3[(y - y')(x - x') - (y - y')(x - x')]}{R^5} \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.6 无旋场的标量位

1. 无旋场

如果一个矢量场的旋度处处为0，则该矢量场为无旋场，由散度源产生

$$\nabla \times \vec{F} \equiv 0$$

2. 无旋场沿闭合路径C的环流为0

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

3. 任何标量场的梯度场一定是无旋场 $\nabla \times (\nabla u) = 0$

任取一个闭合曲线C为边界的曲面S，进行积分

$$\int_S (\nabla \times \nabla u) \cdot d\vec{S} = \oint_C \nabla u \cdot d\vec{l} = \oint_C \nabla u \cdot \vec{e}_l dl = \oint_C \frac{\partial u}{\partial l} dl = \oint_C du = 0$$

曲面S是任意的 $\longrightarrow \nabla \times (\nabla u) = 0$

4. 一个旋度处处为0的矢量场，总可以表示为某一标量场的梯度

$$\nabla \times \vec{F} \equiv 0 \iff \vec{F} = -\nabla u \quad (u \text{ 为标量位})$$

例如：静电场 $\vec{E} = -\nabla \phi$

$$\int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\int_P^Q \nabla u \cdot d\vec{l} = -\int_P^Q \frac{\partial u}{\partial l} dl = \int_P^Q du = u(P) - u(Q)$$

若选定点 Q 为不动的固定点，则上式可看做是点 P 的函数，即

$$u(P) = \int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{l} + c = -\int_P^Q \nabla u \cdot d\vec{l} + c$$

这表明，一个标量场可由它的梯度完全确定。

5. 设无旋场 \vec{F} 的散度为 $\nabla \cdot \vec{F} = g$ (g 为已知标量函数)

$$\implies \nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u = -g \quad (\text{标量泊松方程})$$

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{拉普拉斯方程})$$

$$\nabla^2 \text{——拉普拉斯算符}$$

- **直角坐标系中的拉普拉斯运算**

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot \left(\vec{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

- **柱坐标系中的拉普拉斯运算**

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

- **球坐标系中的拉普拉斯运算**

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

1.7 无散场的矢量位

1. 无散场

如果一个矢量场的散度处处为0，则该矢量场为无散场，由涡旋源产生

$$\nabla \cdot \vec{F} \equiv 0$$

2. 无散场通过任何闭合曲面S的通量为0

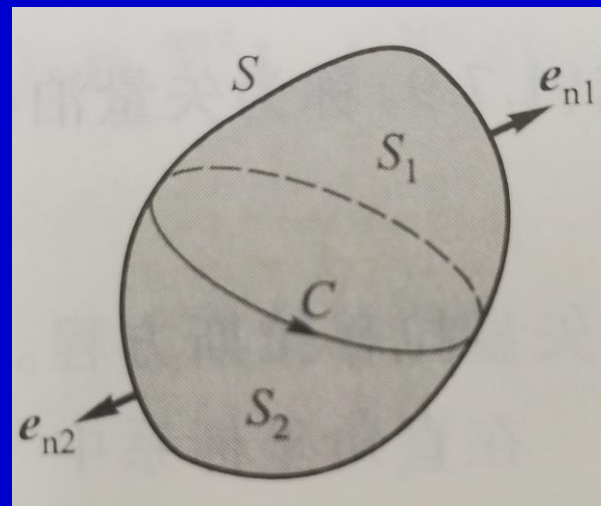
$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = 0$$

3. 旋度的散度恒等于0，即任何矢量场的旋度场一定是无散场

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

任取一个以闭合曲线S为边界的体积V，进行积分，利用散度定理，得

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) dV = \oint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$



在闭合曲面 S 上作一条有向闭合曲线 C ，将闭合曲面 S 分为两个曲面 S_1 和 S_2 ，由此可得

$$\begin{aligned}\oint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} &= \int_{S_1} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \\ &= \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} + \oint_{C^-} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} - \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0\end{aligned}$$

所以 $\int_V \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) dV = 0 \longrightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

4. 一个散度处处为0的矢量场，总可以表示为某一矢量场的旋度

$$\nabla \cdot \vec{F} \equiv 0 \iff \vec{F} = \nabla \times \vec{A} \quad (\vec{A} \text{ 为矢量位})$$

例如，恒定磁场 $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

5. 无散场 \vec{F} 的旋度为 \vec{G}

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{G} \longrightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \vec{G}$$

$$\longrightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - (\nabla \times \nabla) \vec{A}$$

定义矢量场的拉普拉斯运算 $\nabla^2 \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$

所以 $\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \vec{G}$

若令 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, **则** $\nabla^2 \vec{A} = -\vec{G}$ (矢量泊松方程)

$$\nabla^2 \vec{A} = 0 \quad (\text{矢量拉普拉斯方程})$$

• **直角坐标系中:** $\nabla^2 \vec{A} = \vec{e}_x \nabla^2 A_x + \vec{e}_y \nabla^2 A_y + \vec{e}_z \nabla^2 A_z$

即 $(\nabla^2 \vec{F})_i = \nabla^2 F_i \quad (i = x, y, z)$

注意: 对柱坐标系和球坐标系, $(\nabla^2 \vec{F})_i \neq \nabla^2 F_i$

1.8 格林定理

设任意两个标量场 u 和 v ，若在区域 V 中具有连续的二阶偏导数，对 $u\nabla v$ 应用散度定理，有

$$\int_V \nabla \cdot (u \nabla v) dV = \oint_S u \nabla v \cdot \vec{e}_n dS$$

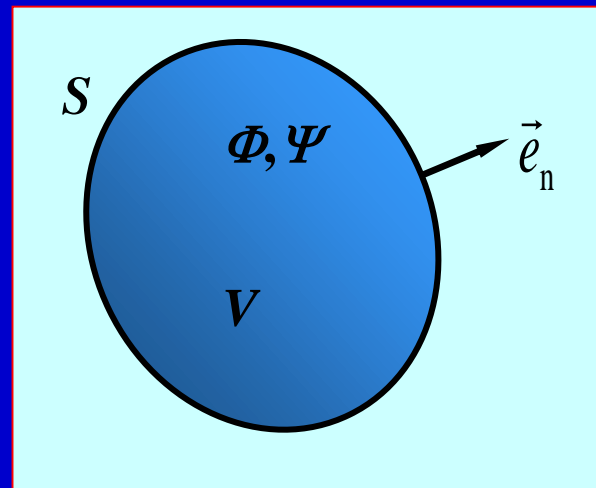
式中 S 为包围 V 的闭合曲面， \vec{e}_n 为曲面 S 的外法向单位矢量。由于

$$\nabla \cdot (u \nabla v) = u \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v$$

所以，

$$\int_V (u \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v) dV = \oint_S u \nabla v \cdot \vec{e}_n dS \quad (1)$$

此式称为格林第一恒等式。



根据方向导数与梯度的关系，有 $u \nabla v \cdot \vec{e}_n = u \frac{\partial v}{\partial n}$

式中 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 为标量函数 v 在闭合曲面 S 上得外法向导数，所以

$$\int_V (u \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v) dV = \oint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS$$

把 (1) 式中的 u 和 v 对调，则有

$$\int_V (v \nabla^2 u + \nabla v \cdot \nabla u) dV = \oint_S v \nabla u \cdot \vec{e}_n dS \quad (2)$$

由 (1) 式减去 (2) 式，得到

$$\int_V (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dV = \oint_S (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \vec{e}_n dS$$

也可写为
$$\int_V (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dV = \oint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

此式称为格林第二恒等式。

格林定理说明了区域 V 中的场与边界 S 上的场之间的关系。因此，利用格林定理可以将区域中场的求解问题转变为边界上场的求解问题。

此外，格林定理反映了两种标量场之间满足的关系。因此，如果已知其中一种场的分布，即可利用格林定理求解另一种场的分布。

格林定理广泛地用于电磁理论。

1.9 亥姆霍兹定理

亥姆霍兹定理：

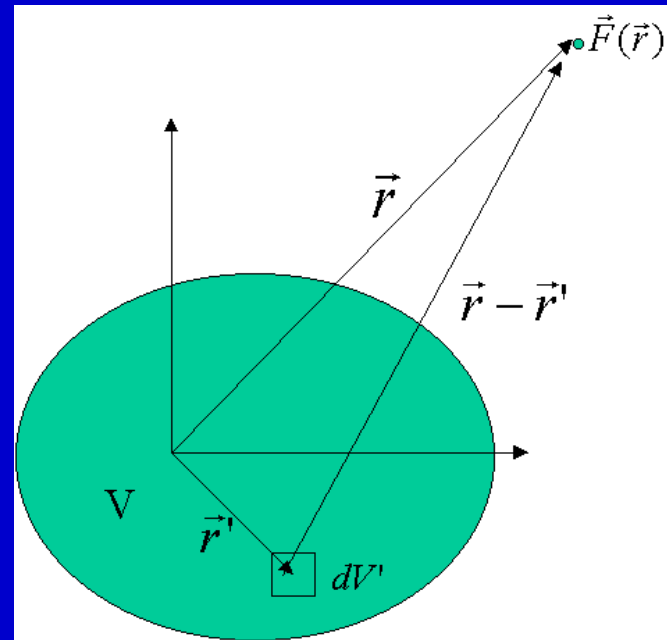
在有限区域内，任意矢量场由矢量场的散度、旋度和边界条件（即矢量场在有限区域边界上的分布）唯一确定，且任意矢量场可表示为

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla u(\vec{r}) + \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

式中

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{F}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



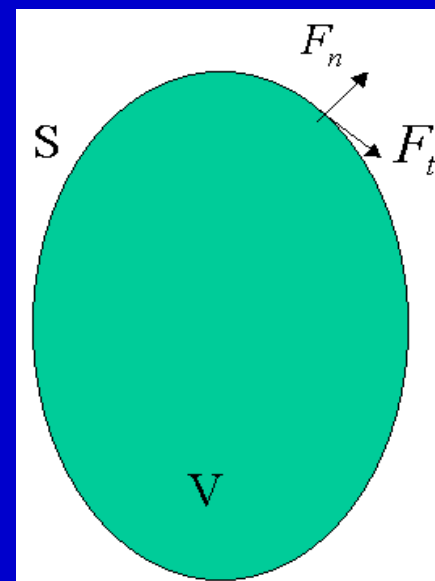
亥姆霍兹定理表明：

(1) 矢量场可以用一个标量函数的梯度和一个矢量函数的旋度之和来表示。标量函数由矢量场的散度和区域边界上矢量场的法向分量完全确定；矢量函数由矢量场的旋度和区域边界上矢量场的切向分量完全确定。

(2) 由于 $\nabla \times \nabla u(\vec{r}) \equiv 0, \nabla \cdot [\nabla \times \vec{A}(\vec{r})] \equiv 0$ ，因而一个矢量场可以表示为一个无旋场与无散场之和，即 $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_l(\vec{r}) + \vec{F}_c(\vec{r})$

其中

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{F}_l = \nabla \cdot \vec{F} \\ \nabla \times \vec{F}_l = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \vec{F}_c = 0 \\ \nabla \times \vec{F}_c = \nabla \times \vec{F} \end{cases}$$



有界区域

(3) 如果在有限区域内矢量场的散度和旋度均处处为0，则矢量场由其在边界面S上的场分布完全确定。

本章作业:

1.9, 1.11, 1.12, 1.20, 1.21, 1.27



亥姆霍兹定理在电磁理论中的意义：研究电磁场的一条主线。

