课前介绍

1. 教学进度安排1–18周，72学时，4学分

2.考核方式：课程考核的成绩评定以百分制计分，最终成绩的构成为平时成绩占30%、期中考试占20%，期末考试占50%，注：平时分：作业、出勤、课堂表现等。

3. 课程内容介绍-电磁场，电磁波

4. 建立课程教学群

5. 理工楼E411（王坤坤)

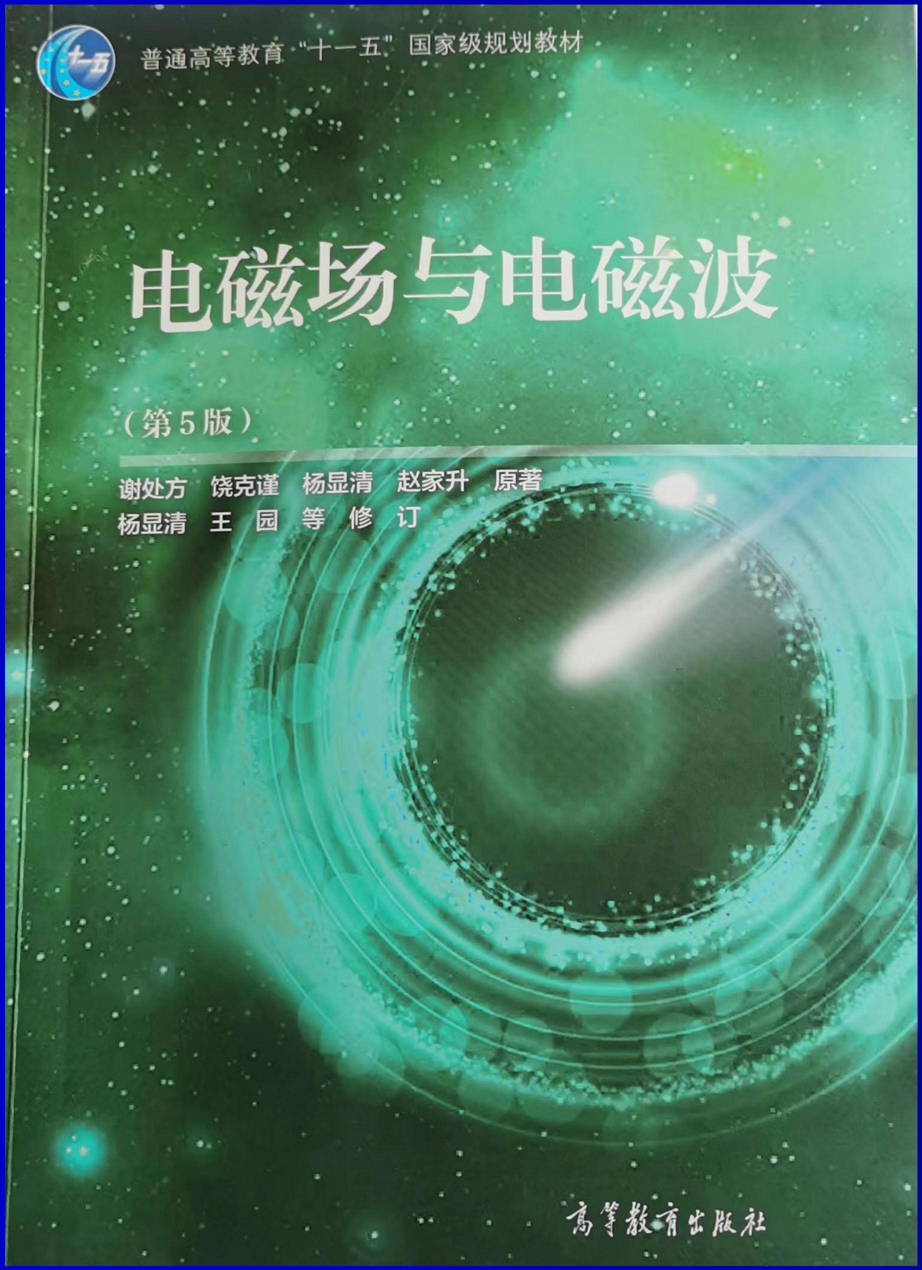
25年电磁场与电磁波-...
群号：614900614

扫一扫二维码，加入群聊

电磁场与电磁波——谢处方等
高等教育出版社

第1章 矢量分析 （1.1-1.8）
第2章 电磁场的基本规律 （2.1-2.7）

第3章 静态电磁场及其边值问题的解 （3.1-3.6）
第4章 时变电磁场（4.1-4.5）
第5章 平面波 （5.1-5.2）
第7章 导行电磁波 （7.1）



电磁场与电磁波——该怎么学?

一、基础准备阶段

1. 数学工具强化

- 重点掌握矢量分析（梯度、散度、旋度）
- 复习场论中的高斯定理、斯托克斯定理
- 熟悉坐标系转换（直角/柱/球坐标系）

2. 物理概念预热

- 静电场、恒定磁场基础
- 理解通量、环流等物理量的几何意义
- 制作物理量对照表（如E场与B场的类比关系）

电磁场与电磁波——该怎么学?

二、核心理论攻坚阶段

1. 麦克斯韦方程组深度解析
   - 逐方程拆解：从库仑定律到位移电流
   - 制作微分形式与积分形式的对比矩阵
   - 通过典型例题理解边界条件应用

2. 场分析专项训练
   - 静态场：镜像法解题的5步流程
   - 时变场：波动方程推导的数学路径

电磁场与电磁波——该怎么学？（DeepSeek）

常见误区规避指南

1. 数学依赖陷阱
   - 警惕"纯数学推导依赖症"，确保每个公式对应物理图景
   - 建立"数学-物理-工程"三位一体的理解模式

2. 静态场过渡障碍
   - 制定时变场分析的过渡路线图：从准静态到场波动
   - 设计时谐场分析的专项训练模块

第一章 矢量分析

本章内容

梯度、散度和旋度的计算

1.1 矢量代数

1. 标量和矢量

标量：**一个只用大小描述的代数量（物理单位：物理量）。**

矢量：**一个既有大小又有方向特性的量，常用黑体字母或带箭头的字母表示。**

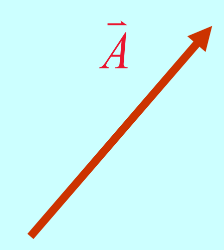
矢量的几何表示：**一个矢量可用一条有方向的线段来表示。**

线段的长度代表矢量的模，箭头指向表示矢量的方向。

矢量的代数表示：$\vec{A} = \vec{e}_A A = \vec{e}_A \left|\vec{A}\right|$

矢量的大小或模：$A = \left|\vec{A}\right|$

矢量的单位矢量：$\vec{e}_A = \dfrac{\vec{A}}{A}$



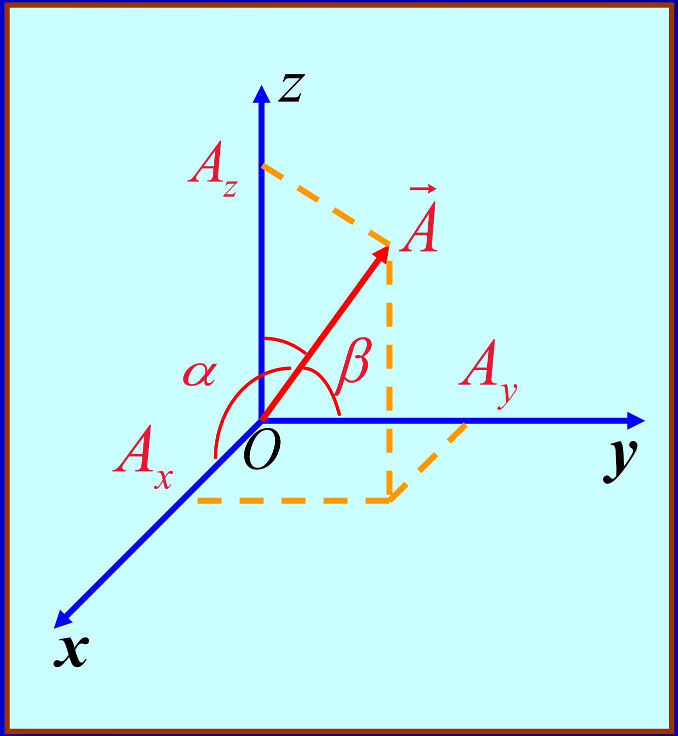
矢量的几何表示

常矢量：**大小和方向均不变的矢量。**

注意：**单位矢量不一定是常矢量。**

矢量用坐标分量表示

$$\boxed{\vec{A}=\vec{e}_xA_x+\vec{e}_yA_y+\vec{e}_zA_z}$$



$$A_x = A\cos\alpha$$
$$A_y = A\cos\beta$$
$$A_z = A\cos\gamma$$

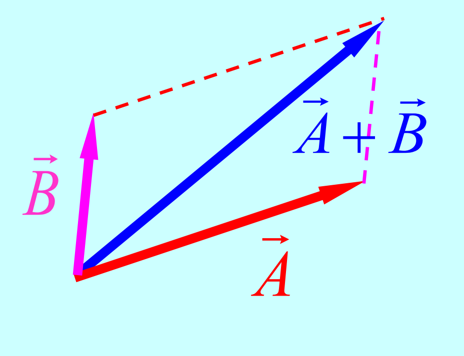
所以 $\vec{A}=A(\vec{e}_x\cos\alpha+\vec{e}_y\cos\beta+\vec{e}_z\cos\gamma)$

$$\vec{e}_A=\vec{e}_x\cos\alpha+\vec{e}_y\cos\beta+\vec{e}_z\cos\gamma$$

2. 矢量的代数运算

(1) 矢量的加减法

两矢量的加减在几何上是以这两矢量为邻边的平行四边形的对角线,如图所示。



矢量的加法

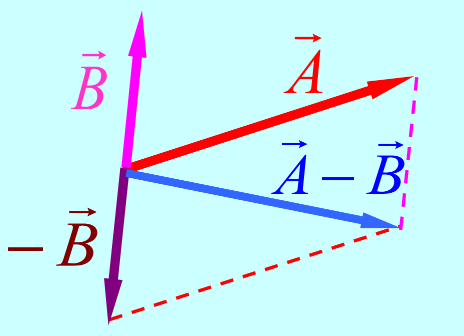
在直角坐标系中两矢量的加法和减法：

$$\vec{A}\pm\vec{B}=\vec{e}_x(A_x\pm B_x)+\vec{e}_y(A_y\pm B_y)+\vec{e}_z(A_z\pm B_z)$$

矢量的加减符合交换律和结合律

交换律 $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

结合律 $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$



矢量的减法

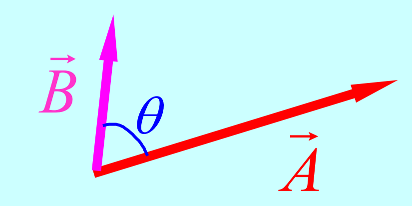
矢量的乘法

（2）标量乘矢量

$$k\vec{A} = \vec{e}_x kA_x + \vec{e}_y kA_y + \vec{e}_z kA_z$$

（3）矢量的标积（点积）--标量

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$



矢量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的夹角

$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$ ——矢量的标积符合**交换律**

$\vec{A}\perp\vec{B} \Longrightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$　　　$\vec{A}/\!/\vec{B} \Longrightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = AB$

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_z = \vec{e}_z\cdot\vec{e}_x = 0$$

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_y = \vec{e}_z\cdot\vec{e}_z = 1$$

(4) 矢量的矢积（叉积）--矢量

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{e}_n\boxed{AB\sin\theta}$$

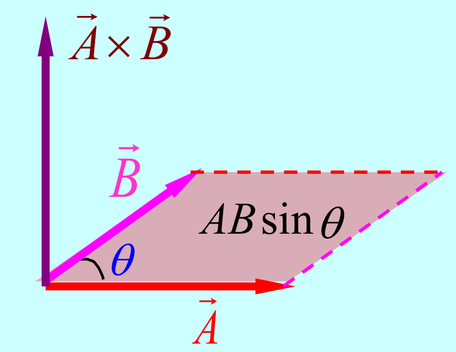
垂直于包含矢量*A* 和*B*的平面，大小是*AB*sin *θ*,方向**e**$_n$为当右手四个手指从矢量*A*到矢量*B* 旋转*θ*时大拇指的方向。

用坐标分量表示为

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{e}_x(A_yB_z-A_zB_y)+\vec{e}_y(A_zB_x-A_xB_z)+\vec{e}_z(A_xB_y-A_yB_x)$$

写成行列式形式为

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}}$$



矢量$\vec{A}$ 与$\vec{B}$ 的叉积

$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$ **矢量的叉积不符合交换律**

若 $\vec{A}\perp\vec{B}$ **，则** $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=AB$

若 $\vec{A}/\!/\vec{B}$ **，则** $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=0$

(5) 矢量的混合运算

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}$$ —— 矢量点积的**分配律**

$$(\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}$$ ——矢量叉积**分配律**

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$ —— **标量三重积**

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$ —— **矢量三重积**

1.2　三种常用的正交曲线坐标系

- **三维空间任意一点的位置可通过三条相互正交曲线的交点来确定。**
- **三条正交曲线组成的确定三维空间任意点位置的体系，称为正交曲线坐标系；三条正交曲线称为坐标轴；描述坐标轴的量称为坐标变量，如 x， y，z。**
- **在电磁场与波理论中，三种常用的正交曲线坐标系为：直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。**

1. 直角坐标系

坐标变量　x, y, z

坐标单位矢量　$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

位置矢量　$\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$

线元矢量　$\mathrm{d}\vec{l} = \vec{e}_x \mathrm{d}x + \vec{e}_y \mathrm{d}y + \vec{e}_z \mathrm{d}z$

面元矢量

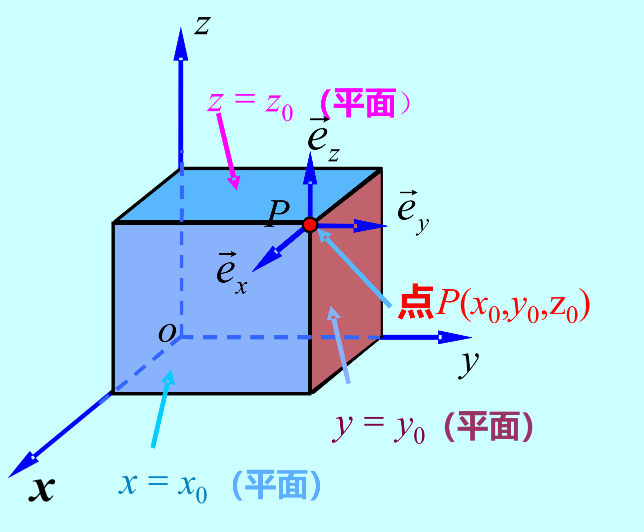
(与三个坐标单位矢量相垂直的三个面积元)

$$\mathrm{d}\vec{S}_x = \vec{e}_x \mathrm{d}l_y \mathrm{d}l_z = \vec{e}_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

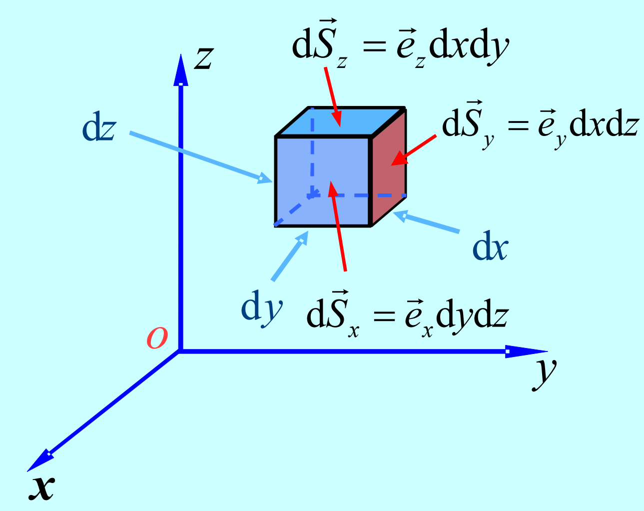
$$\mathrm{d}\vec{S}_y = \vec{e}_y \mathrm{d}l_x \mathrm{d}l_z = \vec{e}_y \mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\vec{S}_z = \vec{e}_z \mathrm{d}l_x \mathrm{d}l_y = \vec{e}_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

体积元　$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$



直角坐标系



直角坐标系的长度元、面积元、体积元

2. 圆柱坐标系

坐标变量　ρ, ϕ, z

坐标单位矢量　$\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$

位置矢量　$\vec{r} = \vec{e}_\rho \rho + \vec{e}_z z$　（从坐标原点出发的矢量）

线元矢量　$d\vec{l} = \vec{e}_\rho d\rho + \vec{e}_\phi \rho d\phi + \vec{e}_z dz$

面元矢量

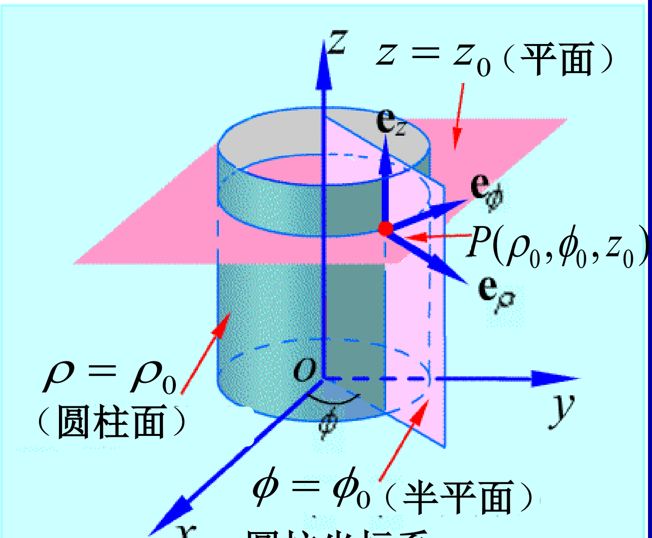
$$d\vec{S}_\rho = \vec{e}_\rho dl_\phi dl_z = \vec{e}_\rho \rho d\phi dz$$

$$d\vec{S}_\phi = \vec{e}_\phi dl_\rho dl_z = \vec{e}_\phi d\rho dz$$

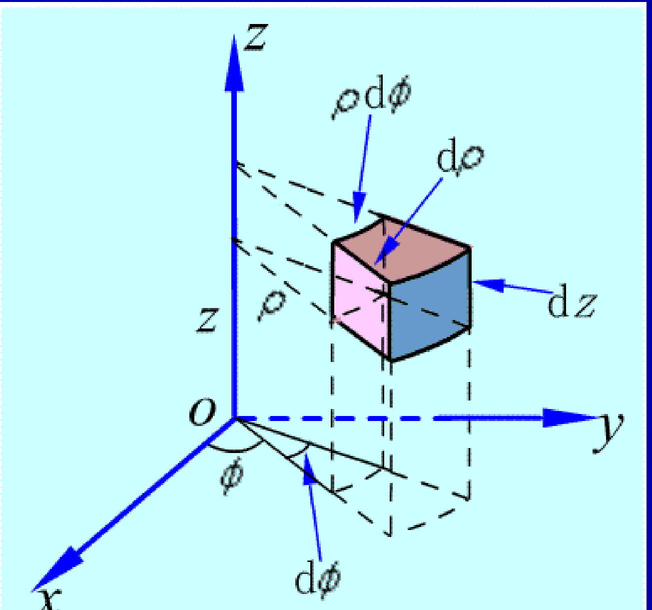
$$d\vec{S}_z = \vec{e}_z dl_\rho dl_\phi = \vec{e}_z \rho d\rho d\phi$$

$$dl_\rho = d\rho$$
$$dl_\phi = \rho d\phi$$
$$dl_z = dz$$

体积元　$dV = \rho d\rho d\phi dz$



圆柱坐标系



圆柱坐标系中的线元、面元和体积元

说明：圆柱坐标系下矢量运算方法：

位于同一点的两个矢量可以用对应分量进行加法和乘法运算。

现有 $\vec{A}=\vec{e}_\rho A_\rho+\vec{e}_\phi A_\phi+\vec{e}_z A_z \quad \vec{B}=\vec{e}_\rho B_\rho+\vec{e}_\phi B_\phi+\vec{e}_z B_z$

加减：$\vec{A}\pm\vec{B}=\vec{e}_\rho(A_\rho\pm B_\rho)+\vec{e}_\phi(A_\phi\pm B_\phi)+\vec{e}_z(A_z\pm B_z)$

标积：
$$\vec{A}\bullet\vec{B}=(\vec{e}_\rho A_\rho+\vec{e}_\phi A_\phi+\vec{e}_z A_z)\bullet(\vec{e}_\rho B_\rho+\vec{e}_\phi B_\phi+\vec{e}_z B_z)$$
$$=A_\rho B_\rho+A_\phi B_\phi+A_z B_z$$

矢积：
$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_\rho & \vec{e}_\phi & \vec{e}_z\\ A_\rho & A_\phi & A_z\\ B_\rho & B_\phi & B_z\end{vmatrix}=\vec{e}_\rho(A_\phi B_z-A_z B_\phi)+\vec{e}_\phi(A_z B_\rho-A_\rho B_z)$$
$$+\vec{e}_z(A_\rho B_\phi-A_\phi B_\rho)$$

3. 球坐标系

坐标变量 r, θ, ϕ

坐标单位矢量 $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$

位置矢量 $\vec{r} = \vec{e}_r r$

线元矢量 $\mathrm{d}\vec{l} = \vec{e}_r \mathrm{d}r + \vec{e}_\theta \underline{r\mathrm{d}\theta} + \vec{e}_\phi \underline{r\sin\theta\mathrm{d}\phi}$

面元矢量 $\mathrm{d}\vec{S}_r = \vec{e}_r \mathrm{d}l_\theta \mathrm{d}l_\phi = \vec{e}_r r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$

$\mathrm{d}l_r = dr$

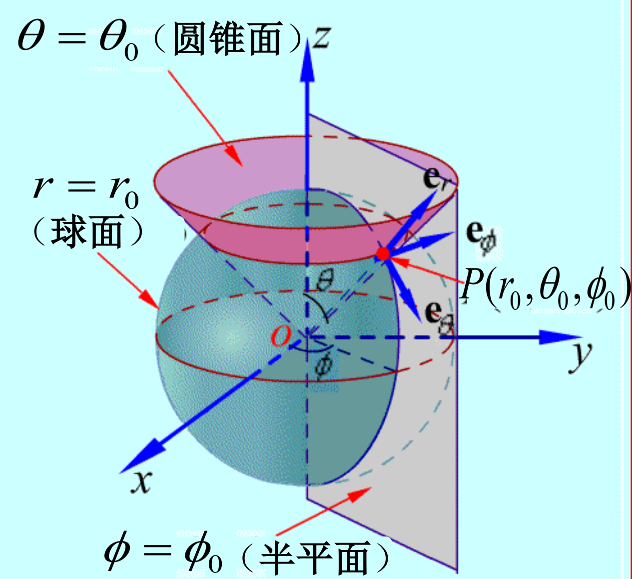
$\mathrm{d}l_\theta = rd\theta$

$\mathrm{d}l_\phi = r\sin\theta d\phi$

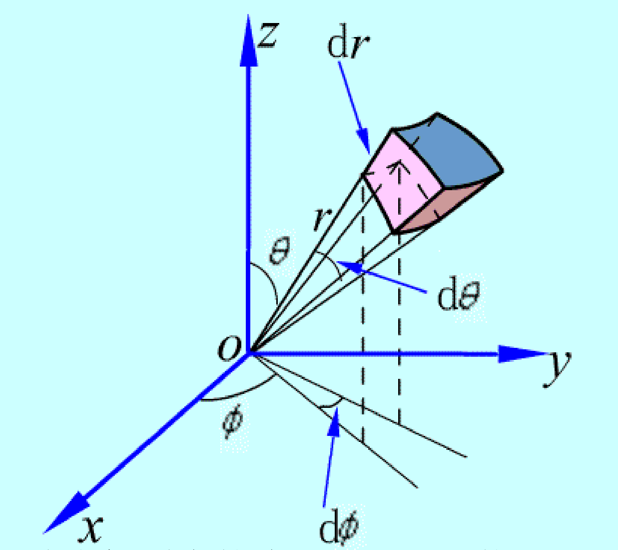
$\mathrm{d}\vec{S}_\theta = \vec{e}_\theta \mathrm{d}l_r \mathrm{d}l_\phi = \vec{e}_z r\sin\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi$

$\mathrm{d}\vec{S}_\phi = \vec{e}_\phi \mathrm{d}l_r \mathrm{d}l_\theta = \vec{e}_\phi r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$

体积元 $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$



球坐标系



球坐标系中的线元、面元和体积元

三种坐标系有不同适用范围：

1、直角坐标系适用于场呈面对称分布的问题求解，如无限大面电荷分布产生电场分布。

2、柱面坐标系适用于场呈轴对称分布的问题求解，如无限长线电流产生磁场分布。

3、球面坐标系适用于场呈点对称分布的问题求解，如点电荷产生电场分布。

说明：球面坐标系下矢量运算：

$$\vec{A}=\vec{e}_r A_r+\vec{e}_\theta A_\theta+\vec{e}_\phi A_\phi \quad \vec{B}=\vec{e}_r B_r+\vec{e}_\theta B_\theta+\vec{e}_\phi B_\phi$$

加减：$\vec{A}\pm\vec{B}=\vec{e}_r(A_r\pm B_r)+\vec{e}_\theta(A_\theta\pm B_\theta)+\vec{e}_\phi(A_\phi\pm B_\phi)$

标积：$\vec{A}\bullet\vec{B}=(\vec{e}_r A_r+\vec{e}_\theta A_\theta+\vec{e}_\phi A_\phi)\bullet(\vec{e}_r B_r+\vec{e}_\theta B_\theta+\vec{e}_\phi B_\phi)$

$$=A_r B_r+A_\theta B_\theta+A_\phi B_\phi$$

矢积：$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\phi\\ A_r & A_\theta & A_\phi\\ B_r & B_\theta & B_\phi\end{vmatrix}$

$$=\vec{e}_r(A_\theta B_\phi-A_\phi B_\theta)+\vec{e}_\theta(A_\phi B_r-A_r B_\phi)+\vec{e}_\phi(A_r B_\theta-A_\theta B_r)$$

4. 坐标单位矢量之间的关系（了解）

直角坐标与圆柱坐标系

右图+(1.2.15式)

	$\vec{e}_x$	$\vec{e}_y$	$\vec{e}_z$
$\vec{e}_\rho$	$\cos\phi$	$\sin\phi$	0
$\vec{e}_\phi$	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0
$\vec{e}_z$	0	0	1

圆柱坐标与球坐标系

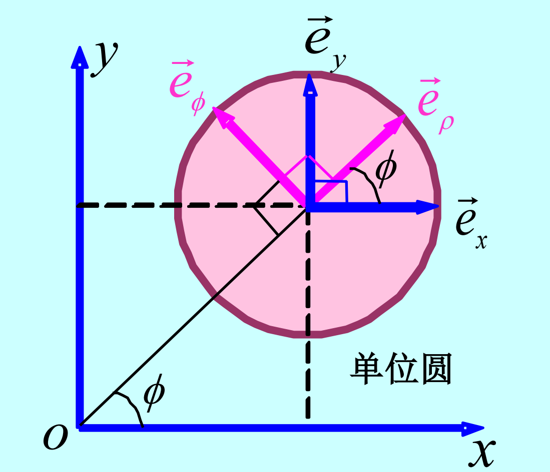
	$\vec{e}_\rho$	$\vec{e}_\phi$	$\vec{e}_z$
$\vec{e}_r$	$\sin\theta$	0	$\cos\theta$
$\vec{e}_\theta$	$\cos\theta$	0	$-\sin\theta$
$\vec{e}_\phi$	0	1	0

直角坐标与球坐标系

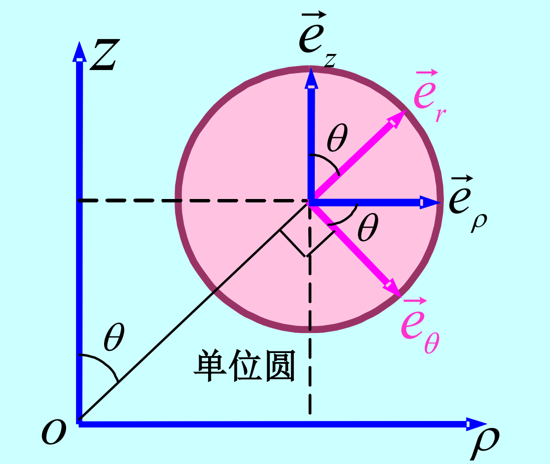
(1.2.32式)

	$\vec{e}_x$	$\vec{e}_y$	$\vec{e}_z$
$\vec{e}_r$	$\sin\theta\cos\phi$	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta$
$\vec{e}_\theta$	$-\cos\theta\sin\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$-\sin\theta$
$\vec{e}_\phi$	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0

明白不同坐标系间单位矢量的变换，任意矢量类似



直角坐标系与柱坐标系之间坐标单位矢量的关系



柱坐标系与球坐标系之间坐标单位矢量的关系

1.3 标量场的梯度

标量场和矢量场

确定空间区域上的每一点都有确定物理量与之对应，称在该区域上定义了一个场。

- 如果物理量是标量，称该场为标量场。

  例如：温度场、电位场、高度场等。

- 如果物理量是矢量，称该场为矢量场。

  例如：流速场、重力场、电场、磁场等。

- 如果场与时间无关，称为静态场，反之为时变场。

从数学上看，场是定义在空间区域上的函数：

直角坐标系

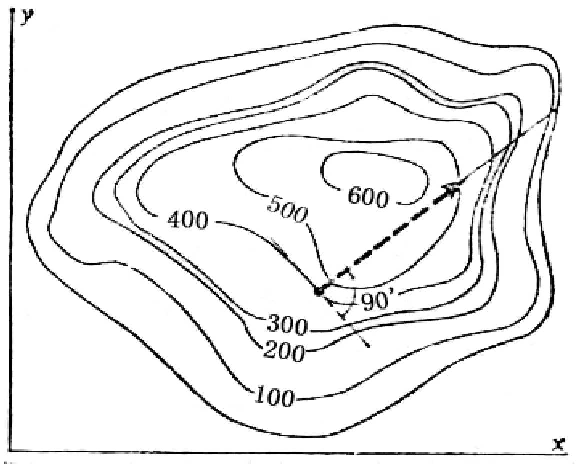
静态标量场和矢量场可分别表示为：$u(x, y, z)$、 $\vec{F}(x, y, z)$

时变标量场和矢量场可分别表示为： $u(x, y, z, t)$、 $\vec{F}(x, y, z, t)$

1. 标量场的等值面

等值面：标量场取得同一数值的点在空间形成的曲面。

意义：**形象直观地描述了物理量在空间的分布状态。**

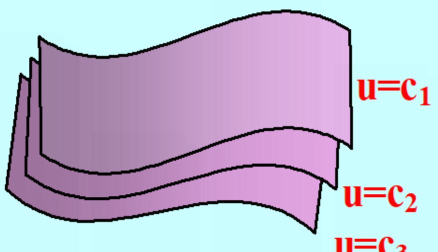


标量场的等值线(面)

等值面方程：$u(x, y, z) = C$ 常数

等值面的特点：

- **常数C取一系列不同的值，就得到一系列不同的等值面，形成等值面族；**
- **标量场的等值面族充满场所在的整个空间；**
- **标量场的等值面互不相交（一个点只能在一个等值面上）**



等值面族

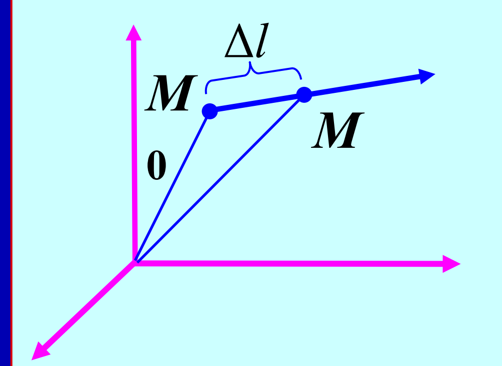
为了研究标量场在场中任一点的邻域内沿各个方向的变化规律

2. 方向导数

概念：$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{u(M)-u(M_0)}{\Delta l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta l}$$

意义：**方向导数表征标量场空间中，某点处场值沿特定方向变化的规律。**

特点：**方向导数既与点M_0有关，也与方向有关。方向导数与选取的考察方向有关**



方向导数的概念

■ 方向导数物理意义：

$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} > 0$ ，标量场u 在 M_0处沿 l方向增加率；

$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} < 0$ ，标量场u 在 M_0处沿 l方向减小率；

$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = 0$ ，标量场u 在 M_0处沿 l方向为等值面方向（无改变）

■ 方向导数的计算

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dl} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dl}$$

$$\boxed{= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma}$$

方向导数的定义与坐标系无关，但具体运算与坐标系有关

式中：α、β、γ 分别为$\Delta\vec{l}$ 与x,y,z坐标轴的夹角。

$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ —— $\Delta\vec{l}$的方向余弦。

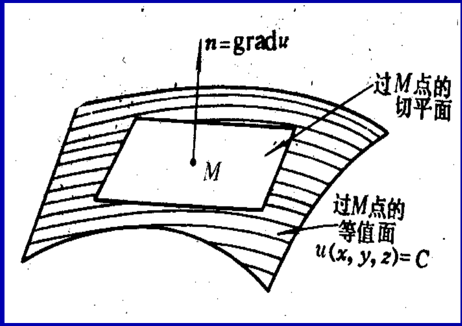
3. 标量场的梯度（ grad$u$ 或 ∇u ）

概念：$$\boxed{\nabla u = \vec{e}_l \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\max}}$$

其中 $\vec{e}_l$为场量u的变化率$\dfrac{\partial u}{\partial l}$取得最大值的方向上的单位矢量

意义：描述标量场在某点的最大变化率及其变化最大的方向

梯度的性质：



- 标量场的梯度为矢量，且是坐标位置的函数
- 标量场梯度的幅度表示标量场的最大增加率
- 标量场梯度的方向垂直于等值面，为标量场增加最快的方向
- 标量场的梯度总是指向标量函数增加的方向。
- 标量场在给定点M沿任意方向e_l的方向导数等于梯度在该方向投影

梯度的表达式：

直角坐标系

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z$$

哈密顿算符具有矢量和微分的双重性质，又称为“矢性微分算符”。

哈密顿算符∇

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)u \quad = \nabla u$$

标量场u的梯度可以认为是哈密顿算符作用于u的一种运算

圆柱坐标系

$$\nabla = \left(\vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\boxed{\nabla u = \vec{e}_\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}}$$

球坐标系

$$\nabla = \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \left(\frac{1}{r\sin\theta}\right)\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

$$\boxed{\nabla u = \vec{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}}$$

梯度运算的基本公式：
$$
\begin{cases}
\nabla C = 0 \\
\nabla(Cu) = C\nabla u \\
\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v \\
\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u \\
\nabla f(u) = f'(u)\nabla u
\end{cases}
$$

式中：C 为常数；

u, v 为坐标变量函数；

例1.2.1 设一标量函数$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$描述了空间标量场。试求：

(1) 该函数φ 在点 $P(1,1,1)$ 处的梯度，以及表示该梯度方向的单位矢量。

解 (1)由梯度计算公式，可求得P点的梯度为

$$\nabla\varphi\Big|_P = [(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z})(x^2 + y^2 - z)]_P$$

哈密顿作用算符！！！

$$= (\vec{e}_x 2x + \vec{e}_y 2y - \vec{e}_z)\Big|_{(1,1,1)} = \vec{e}_x 2 + \vec{e}_y 2 - \vec{e}_z$$

表征其方向的单位矢量

$$\vec{e}_l\Big|_P = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\Bigg|_P = \frac{\vec{e}_x 2x + \vec{e}_y 2y - \vec{e}_z}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2}}\Bigg|_{(1,1,1)} = \vec{e}_x\frac{2}{3} + \vec{e}_y\frac{2}{3} - \vec{e}_z\frac{1}{3}$$

(2) 求该函数φ沿单位矢量 $\vec{e}_l=\vec{e}_x\cos 60^{\circ}+\vec{e}_y\cos 45^{\circ}+\vec{e}_z\cos 60^{\circ}$ 方向的方向导数，并以点 $P(1,1,1)$ 处的方向导数值与该点的梯度值作以比较，得出相应结论。

解：由方向导数与梯度之间的关系式(1.3.7)可知，沿e_l方向的方向导数为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\nabla\varphi\cdot\vec{e}_l=(\vec{e}_x 2x+\vec{e}_y 2y-\vec{e}_z)\cdot(\vec{e}_x\frac{1}{2}+\vec{e}_y\frac{\sqrt{2}}{2}+\vec{e}_z\frac{1}{2})=x+\sqrt{2}y-\frac{1}{2}$$

对于给定的P点，上述方向导数在该点取值为

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_P=\left.x+\sqrt{2}y-\frac{1}{2}\right|_{(1,1,1)}=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$$

而**该点的梯度值**为

$$\left|\nabla\varphi\right|_P=\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(-1)^2}\Big|_{(1,1,1)}=3$$

显然，梯度 $\left|\nabla\varphi\right|_P$ 描述了P点处标量函数φ 的最大变化率，即最大的方向导数，故 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_P<\left|\nabla\varphi\right|_P$ 恒成立。

本章内容

1.4 矢量场的通量与散度

矢量场

概念：若研究的物理量是一个矢量，则该物理量所确定的场称为矢量场。

例如：力场，速度场，电场。

在矢量场中，各点的场量是随空间位置变化的矢量。可用矢量函数表示。

例如，直角坐标系中表示为 $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$ **或** $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$

(与时间无关)

1.4 矢量场的通量与散度

1. 矢量线

概念：矢量线是这样的曲线，其上每一点的切线方向代表该点矢量场的方向，则将此有向曲线定义为矢量场 $\vec{F}(\vec{r})$ 的矢量线。

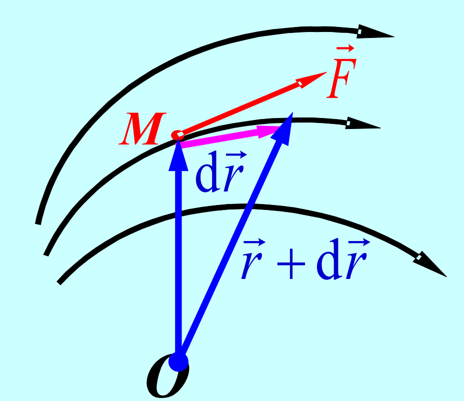
意义：形象直观地描述了矢量场的空间分布状态。

设M是矢量线上任一点，位置矢量为r, 则其微分矢量 $d\vec{r}$ 点M处与矢量线相切。在点M处 $d\vec{r}$ 和 $\vec{F}$ 平行，则有 $d\vec{r}\times\vec{F}=0$ (矢量线的微分方程)

（根据行列式展开得到）

矢量线方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{F_x(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}y}{F_y(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}z}{F_z(x,y,z)}$$



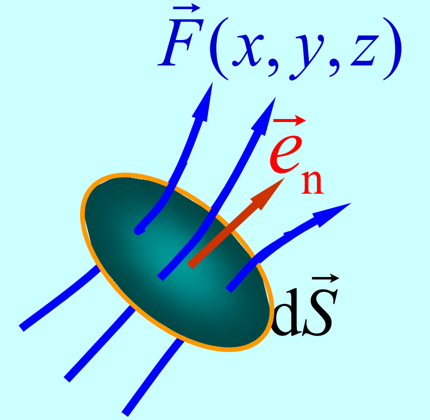
矢量线

2. 矢量场的通量 ϕ

问题：如何定量描述矢量场的大小？引入通量的概念。

若矢量场 $\vec{F}(\vec{r})$分布于空间中，在空间中存在任意曲面S，则定义：

矢量$\vec{F}$与面元矢量$d\vec{S}$的标量积$\vec{F}\cdot d\vec{S}$为矢量$\vec{F}$穿过面元矢量$d\vec{S}$的通量



面积元矢量

通量：

$$\phi=\int d\phi=\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\int_S \vec{F}\cdot\vec{e}_n dS$$

其中： $d\vec{S}=\vec{e}_n dS$ **——面积元矢量；**

$\vec{e}_n$ **——面积元的法向单位矢量；**

$d\phi=\vec{F}\cdot\vec{e}_n dS$ **——穿过面积元 $d\vec{S}$ 的通量。**

如果曲面 S 是闭合的，则规定曲面的法向矢量由闭合曲面内指向外，矢量场对闭合曲面的通量是

$$\phi=\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\oint_S \vec{F}\cdot\vec{e}_n dS$$

- 若S 为闭合曲面

$$\Psi = \oint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

物理意义：表示穿入和穿出闭合面S的通量的代数和。

说明：1）面元矢量$d\vec{S}$定义：面积很小的有向曲面；

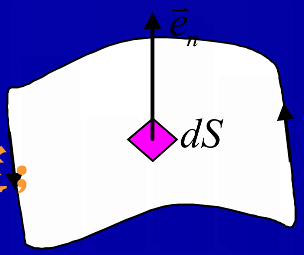
dS：面元面积，为微分量，无限小；

$\vec{e}_n$：面元法线方向，垂直于面元平面。

2）面元法向 $\vec{e}_n$ 的确定方法：

①对非闭合曲面：由曲面边线绕向按右手螺旋法则确定；

②对闭合曲面：闭合面外法线方向

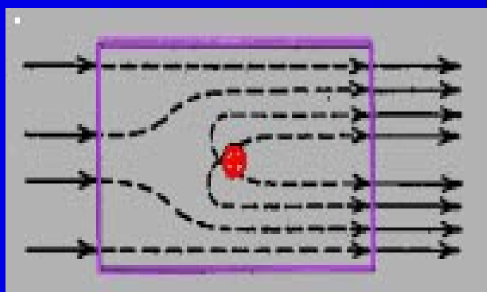


3）如果$\vec{F}$与$\vec{e}_n$呈一定夹角时

- $\Psi = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{e}_n dS = \oint_S \left|\vec{F}\right| \cos\theta(\vec{r}) dS$

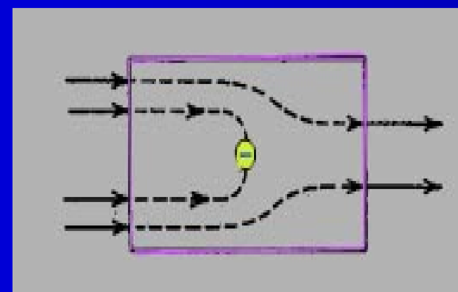
通过闭合面S通量的物理意义

矢量场通过闭合曲面通量的三种可能结果：



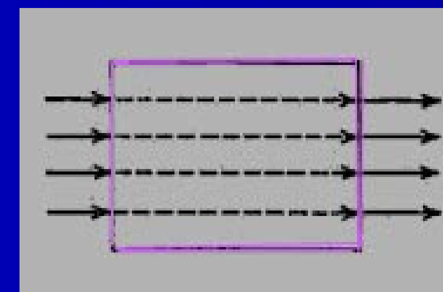
$\psi > 0$

通过闭合曲面有净的矢量线穿出



$\psi < 0$

有净的矢量线进入



$\psi = 0$

进入与穿出闭合曲面的矢量线相等

闭合曲面的通量从宏观上建立了矢量场通过闭合曲面的通量与曲面内产生矢量场的源的关系。

3. 矢量场的散度 $\nabla \cdot \vec{F}$

为了研究矢量场在某点附近的通量特性，引入矢量场的散度。

在场空间 $\vec{F}(\vec{r})$ 中任意点M 处作一个闭合曲面，所围的体积为 ΔV（可取极限），则定义场矢量 $\vec{F}(\vec{r})$ 在M 点处的散度为：

$$\boxed{div\overleftarrow{F} = \nabla \cdot \vec{F}(x,y,z) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \vec{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V}}$$

称为矢量场的散度。

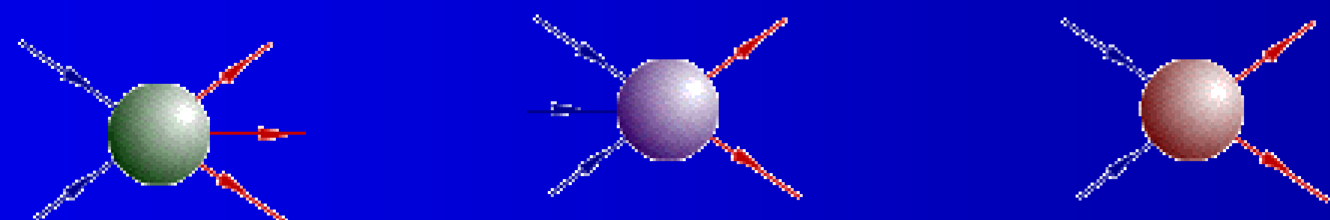
散度是矢量通过包含该点的任意闭合小曲面的通量与曲面元体积之比的极限。

散度的物理意义

- 矢量场的散度表征了矢量场的通量源的分布特性（体密度）

通量的空间变化率）；

- 矢量场的散度是标量；
- 矢量场的散度是空间坐标的函数，但与体积元ΔV的形状无关；
- 矢量场的散度值表征空间中某点处通量源的密度。



（$div\vec{F}(\vec{r})=\rho>0$ 正源） $div\vec{F}(\vec{r})=\rho<0$负源） （ $div\vec{F}(\vec{r})=0$无源）

图1.4.4

讨论：在矢量场中，

$$div\vec{F}(\vec{r})=\rho\neq 0$$

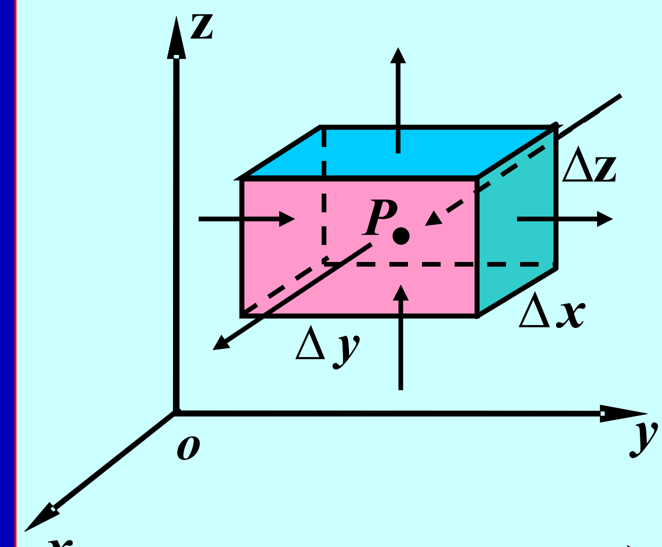
- 若 $div\vec{F}(\vec{r})=0$ 处处成立，则该矢量场称为无散场

直角坐标系下散度表达式的推导：

不失一般性，令包围P点的微体积ΔV为一直平行六面体，如图所示。则

$$F_x(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)\approx F_x(x_0,y_0,z_0)+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x}\bigg|_{x_0,y_0,z_0}$$

$$F_x(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)\approx F_x(x_0,y_0,z_0)-\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x}\bigg|_{x_0,y_0,z_0}$$



在直角坐标系中计算 $\nabla\cdot\vec{F}$

由此可知，穿出前、后两侧面的净通量值为

$$[F_x(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)-F_x(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)]\Delta y\Delta z=\frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\left[\int_{前}+\int_{后}\right]\vec{F}\cdot d\vec{S}\approx\frac{\partial F_x(x,y,z)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\left[\int_{左}+\int_{右}\right]\vec{F}\cdot d\vec{S}\approx\frac{\partial F_y(x,y,z)}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\left[\int_{上}+\int_{下}\right]\vec{F}\cdot d\vec{S}\approx\frac{\partial F_z(x,y,z)}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

合成之，即得由点P 穿出该六面体的净通量为

$$\oint_S\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z+\frac{\partial F_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z+\frac{\partial F_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

根据定义，则得到直角坐标系中的散度 表达式为

$$div\vec{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

散度的表达式：

$$div\vec{F}=(\overleftarrow{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\overleftarrow{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\overleftarrow{e}_z\frac{\partial}{\partial z})\cdot(\overleftarrow{e}_xF_x+\overleftarrow{e}_yF_y+\overleftarrow{e}_zF_z)=\nabla\cdot\overleftarrow{F}$$

直角坐标系

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

圆柱坐标系

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\rho\partial\rho}+\frac{\partial F_\phi}{\rho\partial\phi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

球坐标系

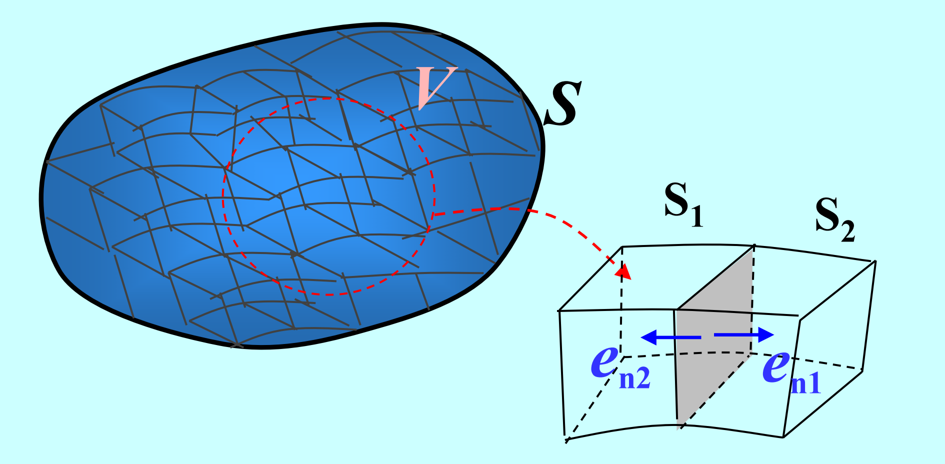
$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(F_\phi)$$

散度的有关公式：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{C}=\nabla\cdot\vec{C}=0\ (\vec{C}\text{□ □ □ □})\\ \nabla\cdot(\vec{C}f)=\vec{C}\cdot\nabla f\\ \nabla\cdot(k\vec{F})=k\nabla\cdot\vec{F}\ (k\text{□ □ □})\\ \nabla\cdot(f\vec{F})=f\nabla\cdot\vec{F}+\vec{F}\cdot\nabla f\\ \nabla\cdot(\vec{F}\pm\vec{G})=\nabla\cdot\vec{F}\pm\nabla\cdot\vec{G}\end{cases}$$

4. 散度定理

从散度的定义出发，可以得到矢量场在空间任意闭合曲面S的通量等于该闭合曲面所包含体积V中矢量场的散度的体积分，即



体积的剖分

$$\oint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{F}\mathrm{d}V$$

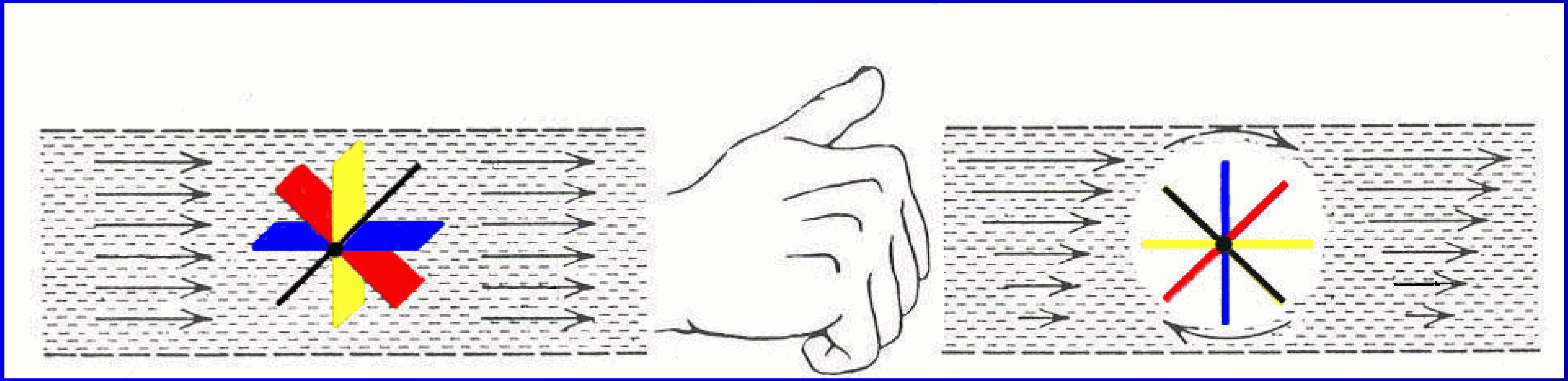
散度定理是闭合曲面积分与体积分之间的一个变换关系，在电磁理论中有着广泛的应用。

1.5 矢量场的环流与旋度

1. 矢量场的环流与旋涡源

不是所有的矢量场都由通量源激发。存在另一类不同于通量源的矢量源，<u>它所激发的矢量场的力线是闭合的，它对于任何闭合曲面的通量为零。但在场所定义的空间中闭合路径的积分不为零。</u>

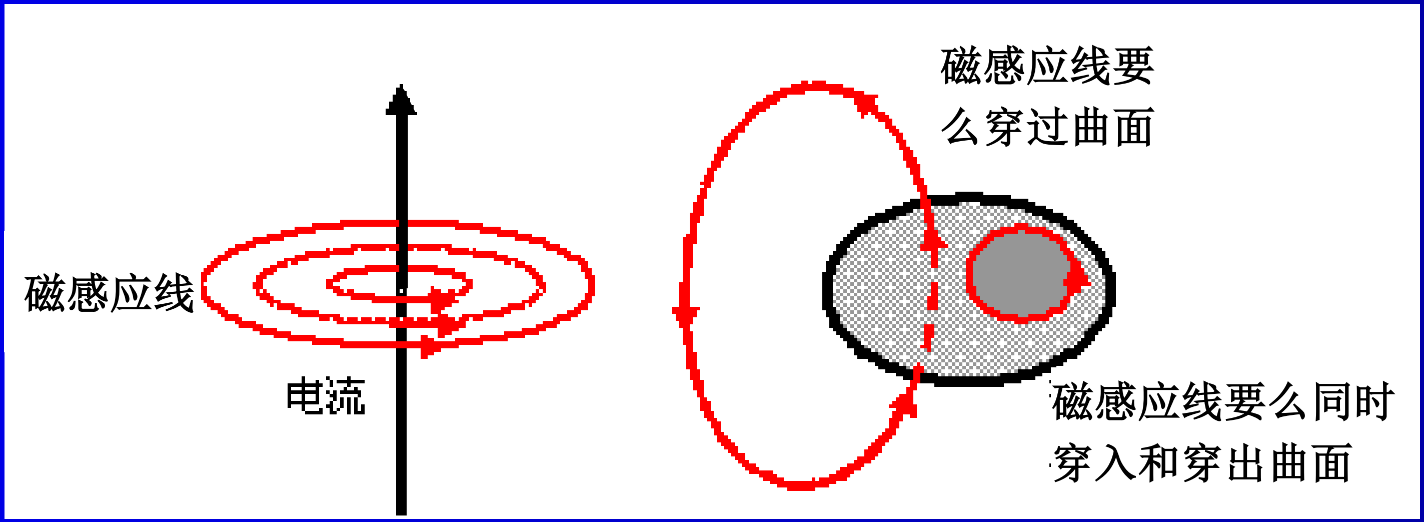
例如：流速场。



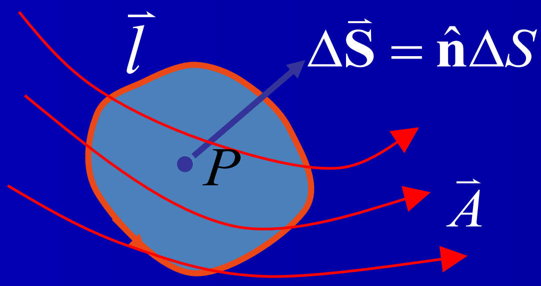
如磁场沿任意闭合曲线的积分与通过闭合曲线所围曲面的电流成正比，即

$$\oint_C \vec{B}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{J}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

上式建立了磁场的环流与电流的关系。



在场矢量 $\vec{F}(\vec{r})$ 空间中，取一有向闭合路径 $\vec{l}$，则称 $\vec{F}(\vec{r})$ 沿 $\vec{l}$ 积分的结果称为矢量 $\vec{F}(\vec{r})$ 沿 $\vec{l}$ 的环流。即：$\Gamma = \oint_l \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$

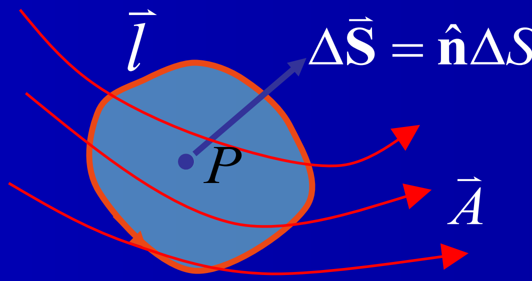


环量的定义

讨论：线元矢量 $d\vec{l}$：长度趋近于0，方向沿路径切线方向。

矢量的环流

在场矢量$\vec{F}(\vec{r})$ 空间中，取一有向闭合路径$\vec{l}$ ，则称 $\vec{F}(\vec{r})$ 沿 $\vec{l}$ 线积分的结果称为矢量 $\vec{F}(\vec{r})$沿 $\vec{l}$ 的环流。即：$\Gamma = \oint_l \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$



环量的定义

讨论：线元矢量$d\vec{l}$：长度趋近于0，方向沿路径切线方向。

- **如果矢量场的任意闭合回路的环流恒为零，称该矢量场为**无旋场**，又称为**保守场**。**
- **如果矢量场对于任何闭合曲线的环流不为零，称该矢量场为**有旋矢量场**，能够激发有旋矢量场的源称为**旋涡源**。电流是磁场的旋涡源。**

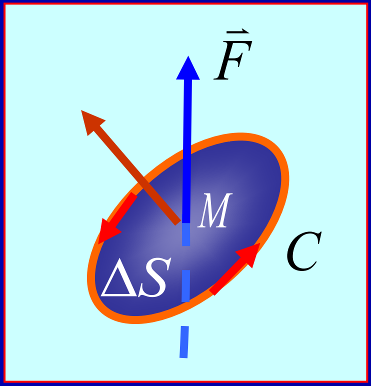
2. 矢量场的旋度（$\nabla\times\vec{F}$）

矢量场的环流给出了矢量场与积分回路所围曲面内旋涡源宏观联系。为了给出空间任意点矢量场与旋涡源的关系，引入矢量场的旋度。

（1）环流面密度

过点M作一微小曲面ΔS，它的边界曲线记为C，曲面的法线方向　与曲线的绕向成右手螺旋法则。当$\Delta S\to 0$时，极限

$$\boxed{\mathrm{rot}_{\mathrm{n}}\vec{F}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}}{\Delta S}}$$



称为矢量场$\vec{F}(\vec{r})$在点M处沿方向　的环流面密度。

注意1）环流面密度大小与所选取的单位面元方向$\vec{n}$有关。

2）任意取向面元的环流面密度与最大环流面密度的关系：

$$\mathrm{rot}_n\vec{F}=\vec{e}_n\bullet rot\vec{F}\text{（投影关系）}$$

■ 矢量场的旋度

研究在某一方向上，环流面密度可能取最大值

在点M处沿方向 $\vec{e}_n$ 的分量等于矢量场 $\vec{F}$ 在点M处沿方向 $\vec{e}_n$ 的环流面密度，即：

$$\boxed{\vec{e}_n \cdot \mathrm{rot}\,\vec{F} = \mathrm{rot}_n\,\vec{F}}$$

由定义可知，矢量场在M点的旋度为该点处环流面密度最大时对应的矢量，模值等于M点处最大环流面密度，方向为环流密度最大的方向，表示为 $\mathrm{rot}\,\vec{F}$，即：

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{e}_{nm}\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{l}}{\Delta S}\bigg|_{\max}}$$

式中：$\vec{e}_{nm}$ 表示矢量场旋度的方向；矢量场F在点M处取得最大环流面密度的方向的 单位矢量。

■ 旋度的物理意义：

- 矢量的旋度为矢量，是空间坐标的函数
- 矢量在空间某点处的旋度表征矢量场在该点处的漩涡源密度

旋度的计算

- 直角坐标系（P_{27}）：

$$rot\vec{F} = \vec{e}_x(\vec{e}_x \bullet rot\vec{F}) + \vec{e}_y(\vec{e}_y \bullet rot\vec{F}) + \vec{e}_z(\vec{e}_z \bullet rot\vec{F})$$

$$= \vec{e}_x \boxed{rot_x\vec{F}} + \vec{e}_y \boxed{rot_y\vec{F}} + \vec{e}_z \boxed{rot_z\vec{F}}$$

（借助1.5.13）

$$= \vec{e}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$= \left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\vec{e}_xF_x + \vec{e}_yF_y + \vec{e}_zF_z\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{F}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}_x\vec{F} &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \mathrm{rot}_y\vec{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \mathrm{rot}_z\vec{F} &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{aligned}}$$

- 直角坐标系中 $\mathrm{rot}_x\vec{F}$、$\mathrm{rot}_y\vec{F}$、$\mathrm{rot}_z\vec{F}$ 的表达式

推导 $\mathrm{rot}_x\vec{F}$ 的示意图如图所示。

$$\oint_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{\Delta l_1} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{\Delta l_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{\Delta l_{13}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{\Delta l_4} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= F_{y1}\Delta y + F_{z2}\Delta z + F_{y3}(-\Delta y) + F_{z4}(-\Delta z)$$

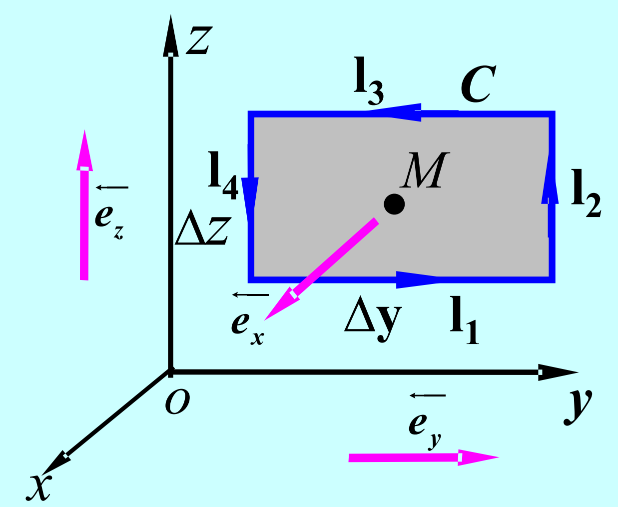
而

$$F_{y1} \approx F_y(x,y,z) - \frac{\partial F_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}$$

$$F_{z2} \approx F_z(x,y,x) + \frac{\partial F_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}$$

$$F_{y3} \approx F_y(x,y,z) + \frac{\partial F_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}$$

$$F_{z4} \approx F_z(x,y,z) - \frac{\partial F_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}$$



计算 $\mathrm{rot}_x\vec{F}$的示意图

于是 $$\oint_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\Delta y \Delta z$$

故得 $$\mathrm{rot}_x \vec{F} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}{\Delta S} = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

同理可得 $$\mathrm{rot}_y \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad \mathrm{rot}_z \vec{F} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

旋度的计算公式：

- **直角坐标系** $\nabla\times\vec{F}=\vec{e}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\vec{e}_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)+\vec{e}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$

$$=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

- **圆柱坐标系**

$$\nabla\times\vec{F}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\phi & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z\end{vmatrix}$$

- **球坐标系**

$$\nabla\times\vec{F}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\vec{e}_\phi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi}\\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\phi\end{vmatrix}$$

讨论：散度和旋度比较

旋度	散度
矢量	标量
矢量源（涡旋源）	标量源（散度源）
描述场分量在与其垂直方向上的变化情况	场分量沿各自方向上的变化情况

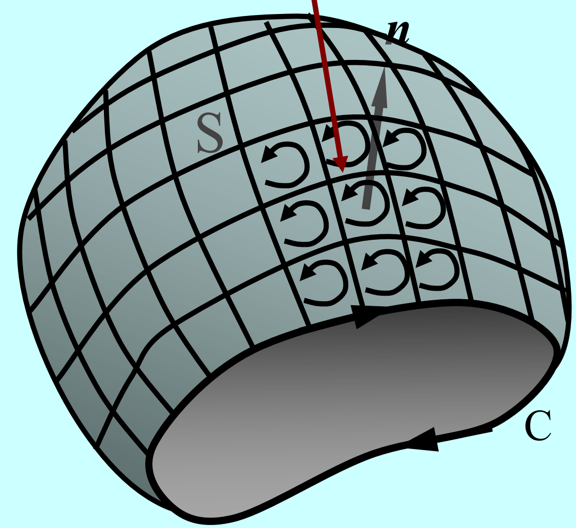
散度源产生的矢量场的旋度处处为0，是**无旋场**。$\nabla \times \vec{F} = 0$
其矢量线起止于散度源，是非闭合曲线；
仅由涡旋源产生的矢量场的散度处处为0，是**无散场**，$\nabla \cdot \vec{F} = 0$
矢量是闭合曲线

3. 斯托克斯定理

从旋度的定义出发，可以得到矢量场沿任意闭合曲线的环流等于矢量场的旋度在该闭合曲线所围的曲面的通量，即

$$\oint_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \nabla\times\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

方向相反大小相等结果抵消



曲面的剖分

斯托克斯定理是闭合曲线积分与曲面积分之间的一个变换关系式，也在电磁理论中有广泛的应用。

详细证明见课本

旋度的有关公式：

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\nabla\times\vec{C}=0\\
&\nabla\times(f\vec{C})=\nabla f\times\vec{C}\\
&\nabla\times(f\vec{F})=f\nabla\times\vec{F}+\nabla f\times\vec{F}\\
&\nabla\times(\vec{F}\pm\vec{G})=\nabla\times\vec{F}\pm\nabla\times\vec{G}\\
&\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G})=\vec{G}\cdot\nabla\times\vec{F}-\vec{F}\cdot\nabla\times\vec{G}\\
&\boxed{\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})\equiv 0}\\
&\boxed{\nabla\times(\nabla u)\equiv 0}
\end{aligned}
\right.
$$

矢量场的旋度的散度恒为零

标量场的梯度的旋度恒为零

本章内容

1.6-1.7 无旋场与无散场

1. 矢量场的源

散度源：**是标量，产生的矢量场在包围源的封闭面上的通量等于（或正比于）该封闭面内所包围的源的总和；源在一给定点的（体）密度等于（或正比于）矢量场在该点的散度；**

旋度源：**是矢量，产生的矢量场具有涡旋性质，穿过一曲面的旋度源等于（或正比于）沿此曲面边界的闭合回路的环量；在给定点上，这种源的（面）密度等于（或正比于）矢量场在该点的旋度。**

2. 矢量场按源的分类

(1) 无旋场

1.仅有散度源而无旋度源的矢量场，$\nabla \times \vec{F} \equiv 0$

性质：$\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ (stokes定理)

线积分与路径无关，是保守场。

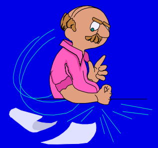
2.无旋场可以用标量场的梯度表示为

令$\vec{F} = -\nabla u$ (1.6.4) 标量位

则 $\nabla \times \vec{F} = -\nabla \times (\nabla u) \equiv 0$

例如：静电场

$$\nabla \times \vec{E} \equiv 0 \Rightarrow \quad \vec{E} = -\nabla \varphi$$



重要的矢量恒等式的证明：

①数学推导： $\boxed{\nabla\times\nabla u\equiv 0}$

$$证明：左边=(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z)\times[\frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial u}{\partial z}y\vec{e}_y+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z]$$

$$=[(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y})\vec{e}_x+(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z})\vec{e}_y+(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x})\vec{e}_z]=0$$

② stokes定理 证明：

$$\int_S(\nabla\times\nabla u)\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oint_C\nabla u\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$\oint_C\nabla u\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_C\nabla u\cdot\vec{e}_l\mathrm{d}l=\oint_C\frac{\partial u}{\partial l}\mathrm{d}l=\oint_C du=0$$

$$所以\int_S(\nabla\times\nabla u)\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$$

3. 拉普拉斯运算

- **标量拉普拉斯运算$\nabla^2 u$**

概念：$\nabla\cdot(\nabla u)=\nabla^2 u$ ∇^2 —— **拉普拉斯算符**

计算公式：

直角坐标系 $$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

圆柱坐标系 $$\nabla^2 u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

球坐标系 $$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}$$

1.7 无散场的矢量位

仅有旋度源而无散度源的矢量场，即 $\nabla \cdot \vec{F} \equiv 0$

性质：$\oint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$

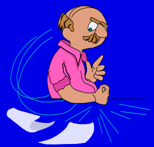
无散场可以表示为另一个矢量场的旋度

$$\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0}$$

例如，恒定磁场

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$



重要的矢量恒等式的证明：

①数学推导 $\nabla\bullet(\nabla\times\vec{F})\equiv 0$

证明：左边$=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\dfrac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\dfrac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)\bullet$

$$\left[\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z\right]$$

$$=\left[\left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 F_y}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 F_z}{\partial x\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 F_x}{\partial y\partial z}\right)\right]=0$$

② 散度定理 证明(1.7.4)

- 2. **矢量拉普拉斯运算** $\nabla^2\vec{F}$

概念： $\nabla^2\vec{F}=\nabla(\nabla\cdot\vec{F})-\nabla\times(\nabla\times\vec{F})$ (1.7.8)

直角坐标系中： $\nabla^2\vec{F}=\vec{e}_x\nabla^2F_x+\vec{e}_y\nabla^2F_y+\vec{e}_z\nabla^2F_z$ (1.7.11)

即 $(\nabla^2\vec{F})_i=\nabla^2F_i \quad (i=x,y,z)$

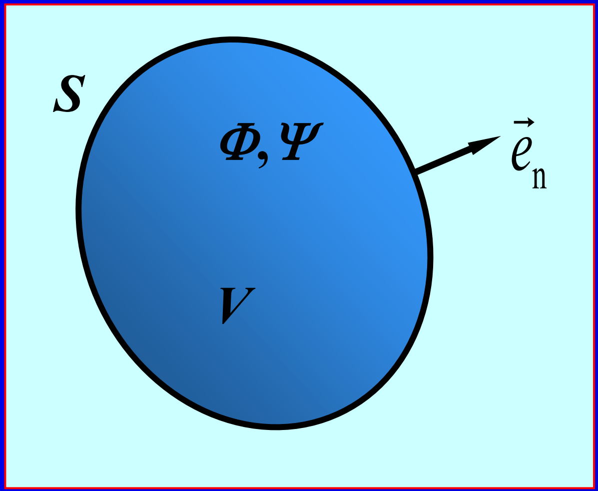
注意：**对于非直角分量，** $(\nabla^2\vec{F})_i\neq\nabla^2F_i$

如：圆柱坐标系中 $(\nabla^2\vec{F})_\phi\neq\nabla^2F_\phi$

1.8 格林定理

设任意两个标量场Φ及Ψ，若在区域 V 中具有连续的二阶偏导数，那么，可以证明该两个标量场Φ及Ψ满足下列等式

(课本)



$$\boxed{\int_V (\nabla\Psi\cdot\nabla\Phi+\Psi\nabla^2\Phi)\mathrm{d}V=\oint_S \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}S}$$

式中S为包围V的闭合曲面，$\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}$为标量场 Φ在S表面的外法线 $\vec{e}_n$ 方向上的偏导数。

根据方向导数与梯度的关系，上式又可写成

$$\int_V (\nabla\Psi\cdot\nabla\Phi+\Psi\nabla^2\Phi)\mathrm{d}V=\oint_S (\Psi\nabla\Phi)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

以上两式称为标量第一格林定理。

基于上式还可获得下列两式：

$$\int_V (\Psi\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Psi)\mathrm{d}V = \oint_S (\Psi\nabla\Phi - \Phi\nabla\Psi)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\int_V (\Psi\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Psi)\mathrm{d}V = \oint_S (\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n})\mathrm{d}S$$

上两式称为标量第二格林定理。

格林定理说明了区域 V 中的场与边界 S 上的场之间的关系。因此，利用格林定理可以将区域中场的求解问题转变为边界上场的求解问题。

此外，格林定理反映了两种标量场之间满足的关系。因此，如果已知其中一种场的分布，即可利用格林定理求解另一种场的分布。格林定理广泛地用于电磁理论。

1.9 亥姆霍兹定理

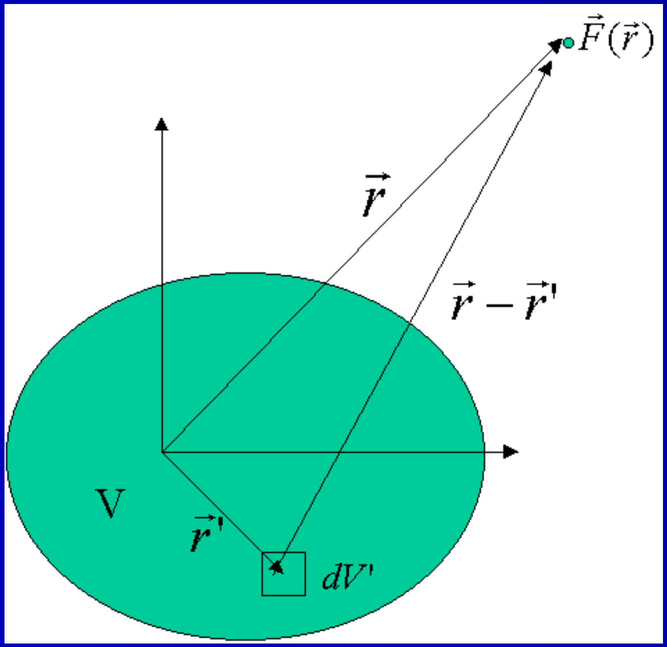
亥姆霍兹定理：

若矢量场在无限空间中处处单值，且其导数连续有界，源分布在有限区域中，则当矢量场的散度及旋度给定后，该矢量场可表示为

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla u(\vec{r}) + \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

式中： $$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

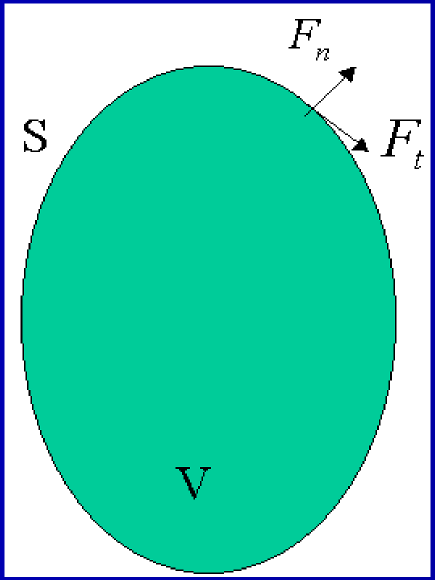


亥姆霍兹定理表明：在无界空间区域，矢量场可由其散度及旋度确定。

在有界区域，矢量场不但与该区域中的散度和旋度有关，还与区域边界上矢量场的切向分量和法向分量有关。

$$u(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\nabla'\cdot\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'-\frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{\vec{F}(\vec{r}')\cdot\mathrm{d}\vec{S}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\nabla'\times\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'-\frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{\vec{F}(\vec{r}')\times\mathrm{d}\vec{S}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$



有界区域

有散、有旋场

场可分解为两部分：无旋场部分和无散场部分

$$\vec{F}(\vec{r})=\vec{F}_l(\vec{r})+\vec{F}_C(\vec{r})=-\nabla u(\vec{r})+\nabla\times\vec{A}(\vec{r})$$

无旋场部分

无散场部分

习 题

一、关于矢量代数

1.3;1.5; 1.9

二、关于矢量分析

1.11 ； 1.12; 1.16; 1.20; 1.23;1.27

思考

1.1 如果 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$，是否意味着 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$？为什么？

1.2 如果 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$ 是否意味着 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$？为什么？

1.3 两个矢量的点积能是负的吗？如果是，必须是什么情况？

1.4 什么是单位矢量？什么是常矢量？单位矢量是否为常矢量？

1.5 在圆柱坐标系中，矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_\rho a+\boldsymbol{e}_\phi b+\boldsymbol{e}_z c$，其中 a、b、c 为常数，则 $\boldsymbol{A}$ 是常矢量吗？为什么？

1.6 在球坐标系中，矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_r a\cos\theta-\boldsymbol{e}_\theta a\sin\theta$，其中 a 为常数，则 $\boldsymbol{A}$ 能是常矢量吗？为什么？

1.7 什么是矢量场的通量？通量的值为正、负或 0 分别表示什么意义？

1.8 什么是散度定理？它的意义是什么？

思考

1.9 什么是矢量场的环流？环流的值为正、负或0分别表示什么意义？

1.10 什么是斯托克斯定理？它的意义是什么？斯托克斯定理能用于闭合曲面吗？

1.11 如果矢量场 $\boldsymbol{F}$ 能够表示为一个矢量函数的旋度，这个矢量场具有什么特性？

1.12 如果矢量场 $\boldsymbol{F}$ 能够表示为一个标量函数的梯度，这个矢量场具有什么特性？

1.13 只有直矢量线的矢量场一定是无旋场，这种说法对吗？为什么？

1.14 无旋场与无散场的区别是什么？

习题

1.3 求点 $P'(-3,1,4)$ 到点 $P(2,-2,3)$ 的距离矢量 $\boldsymbol{R}$ 及 $\boldsymbol{R}$ 的方向。

1.5 给定两矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y3-\boldsymbol{e}_z4$ 和 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{e}_x6-\boldsymbol{e}_y4+\boldsymbol{e}_z$，求 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$ 上的分量。

1.9 用球坐标表示的场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\dfrac{25}{r^2}$。

(1) 求在直角坐标中点 $(-3,4,-5)$ 处的 $|\boldsymbol{E}|$ 和 E_x；

(2) 求在直角坐标中点 $(-3,4,-5)$ 处 $\boldsymbol{E}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x2-\boldsymbol{e}_y2+\boldsymbol{e}_z$ 构成的夹角。

习题

1.11 已知标量函数 $u=x^2yz$，求 u 在点(2,3,1)处沿指定方向 $\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{e}_x\frac{3}{\sqrt{50}}+\boldsymbol{e}_y\frac{4}{\sqrt{50}}+\boldsymbol{e}_z\frac{5}{\sqrt{50}}$ 的方向导数。

1.12 已知标量函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+3x-2y-6z$。(1) 求 ∇u；(2) 在哪些点上 ∇u 等于 0？

1.16 已知矢量 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x(x^2+axz)+\boldsymbol{e}_y(xy^2+by)+\boldsymbol{e}_z(z-z^2+czx-2xyz)$，试确定常数 a、b、c 使 $\boldsymbol{E}$ 为无源场。

1.20 在球坐标系中，已知矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_r a+\boldsymbol{e}_\theta b+\boldsymbol{e}_\phi c$，其中 a、b 和 c 均为常数。(1) 问矢量 $\boldsymbol{A}$ 是否为常矢量；(2) 求 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{A}$。

习题

1.23 证明：(1) $\nabla \cdot \boldsymbol{r}=3$；(2) $\nabla \times \boldsymbol{r}=0$；(3) $\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{k}$。其中 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z$，$\boldsymbol{k}$ 为一常矢量。

⇓

例 1.3.1 已知 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{e}_x(x-x')+\boldsymbol{e}_y(y-y')+\boldsymbol{e}_z(z-z')$，$R=|\boldsymbol{R}|$。证明：

(1) $\nabla R=\dfrac{\boldsymbol{R}}{R}$；(2) $\nabla\left(\dfrac{1}{R}\right)=-\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3}$；(3) $\nabla f(R)=-\nabla' f(R)$。

$\boxed{求\nabla^2\frac{1}{R}。}$

其中：$\nabla=\boldsymbol{e}_x\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\dfrac{\partial}{\partial z}$ 表示对 x、y、z 的运算，$\nabla'=\boldsymbol{e}_x\dfrac{\partial}{\partial x'}+\boldsymbol{e}_y\dfrac{\partial}{\partial y'}+\boldsymbol{e}_z\dfrac{\partial}{\partial z'}$ 表示对 x'、y'、z' 的运算。

习题

1.27 现有三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 分别为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_r\sin\theta\cos\phi+\boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\cos\phi-\boldsymbol{e}_\phi\sin\phi$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_\rho z^2\sin\phi+\boldsymbol{e}_\phi z^2\cos\phi+\boldsymbol{e}_z 2\rho z\sin\phi$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_x(3y^2-2x)+\boldsymbol{e}_y x^2+\boldsymbol{e}_z 2z$$

（1）哪些矢量可以由一个标量函数的梯度表示？哪些矢量可以由一个矢量函数的旋度表示？

（2）求出这些矢量的源分布。