

2.1 电荷守恒定律

基本物理量：源、场

源：电荷 $q(\vec{r}', t)$ ，电流 $I(\vec{r}', t)$



2.1.1 电荷与电荷密度

- 自然界中最小的带电粒子是电子和质子
- 电子电荷的量值为 $e = 1.602 \ 177 \ 33 \times 10^{-19}$ (单位: C)
- 从微观上看, 电荷是以离散的方式出现在空间中的
- 从宏观电磁学的观点上看, 大量带电粒子密集出现在某空间范围内时, 可假定电荷是连续分布在这个范围中
- 电荷的几种分布方式: 空间中 - 体积电荷体密度 ρ

面上 - 电荷面密度 ρ_s

线上 - 电荷线密度 ρ_l

■ 电荷体密度

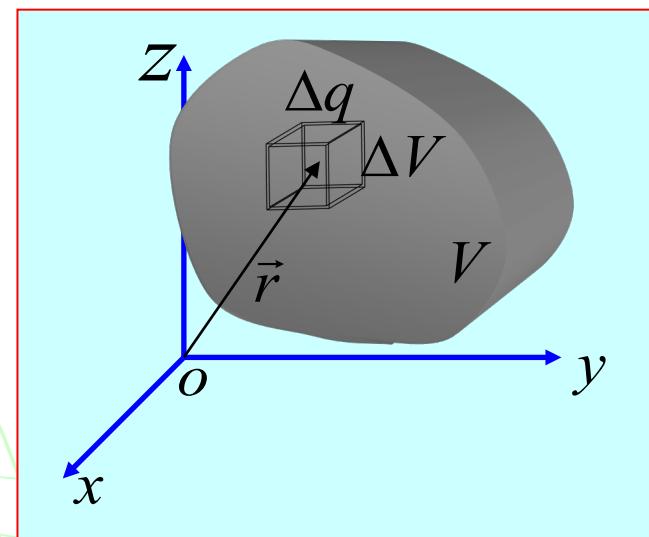
设分布于体积元 ΔV 中的电荷电量为 Δq , 则电荷体密度 ρ 的定义为

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r})}{\Delta V} = \frac{dq(\vec{r})}{dV}$$

单位: C/m³ (库/米³)

总电荷 q 与密度的关系:

$$q = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$



■ 电荷面密度

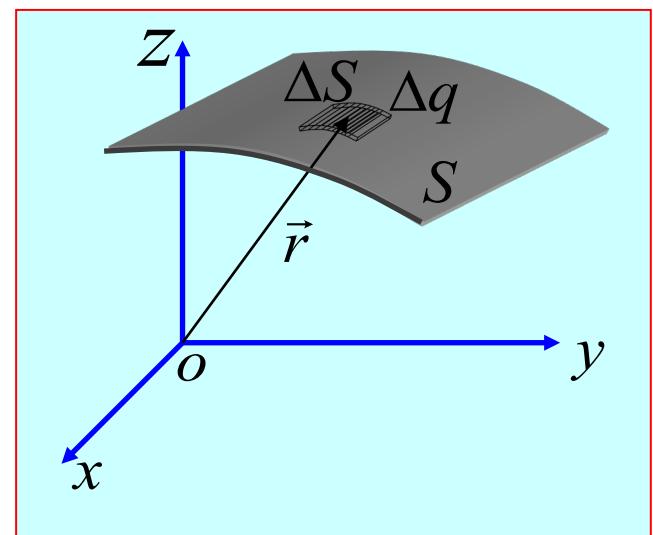
设分布于面积元 ΔS 中的电荷电量为 Δq , 则电荷面密度定义为

$$\rho_s(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r})}{\Delta S} = \frac{dq(\vec{r})}{dS}$$

单位: C/m² (库/米²)

如果已知某空间曲面 S 上的电荷面密度, 则该曲面上的总电荷 q 为

$$q = \int_S \rho_s(\vec{r}) dS$$



■ 电荷线密度

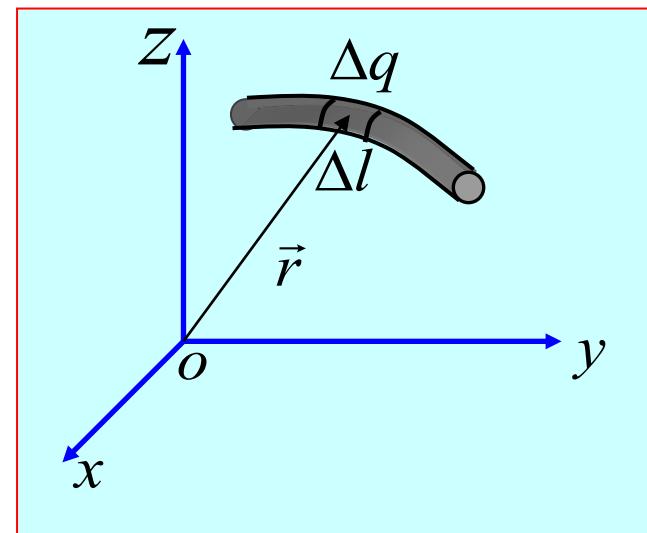
设分布于线元 Δl 中的电荷电量为 Δq , 则电荷线密度定义为

$$\rho_l(\vec{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r})}{\Delta l} = \frac{dq(\vec{r})}{dl}$$

单位: C/m (库/米)

如果已知某空间曲线上的电荷线密度, 则该曲线上的总电荷 q 为

$$q = \int_C \rho_l(\vec{r}) dl$$



■ 点荷线

电量为 q 、集中在体积为零的几何点上的电荷

点电荷的电荷密度表示

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$



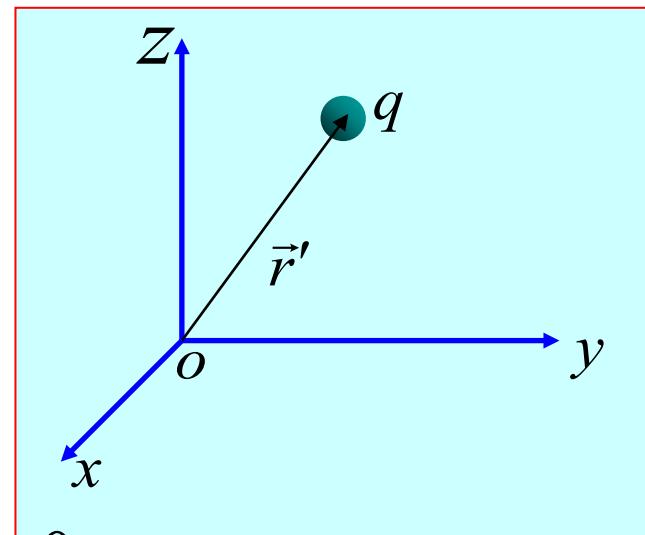
点电荷的 $\delta(\vec{r})$ 表示

→ 点电荷 q 位于坐标原点

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r}) \quad \delta(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \vec{r} \neq 0 \\ \infty & \vec{r} = 0 \end{cases}$$

→ 点电荷 q 位于 \vec{r}' (位置矢量)

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \begin{cases} 0 & \vec{r} \neq \vec{r}' \\ \infty & \vec{r} = \vec{r}' \end{cases}$$



2.1.2 电流与电流密度

电流由定向流动的电荷形成，通常用电流强度 I 表示，定义为单位时间内通过某一横截面 S 的电荷量，即

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

- 当电荷速度不随时间变化时，电流也不随时间变化，称为**恒定(稳恒)电流**
- 引入**电流密度**来描述电流的分布情况
- 电流的几种分布方式：空间中—**体积电流体密度** J
面上—**电流面密度** J_s
线上—**一线电流** I

■ 体电流密度

带电粒子密度为 N , 粒子电量 q , 运动速度 v , 选取如图柱体。

dt 时间内, 柱体中所有带电粒子经 dS 流出, 即 dt 时间内通过 dS 的电荷量为

$$dQ = Nq(\vec{v} dt) \cdot d\vec{S} = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} dt$$

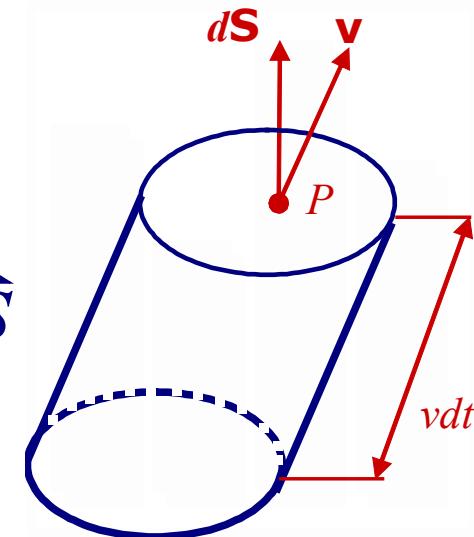
⇒ 通过 dS 的电流强度为: $dI = \frac{dQ}{dt} = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$

⇒ 电流密度: $\vec{J} = \frac{dI}{dS} \hat{n} = \rho \vec{v}$ (A / m²)

通过体积内任意截面积 S 的电流

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

其中: \hat{n} 为曲面 S 的法向单位矢量



面电流密度

电流在厚度趋于零的薄层中流动时，形成表面电流或面电流。

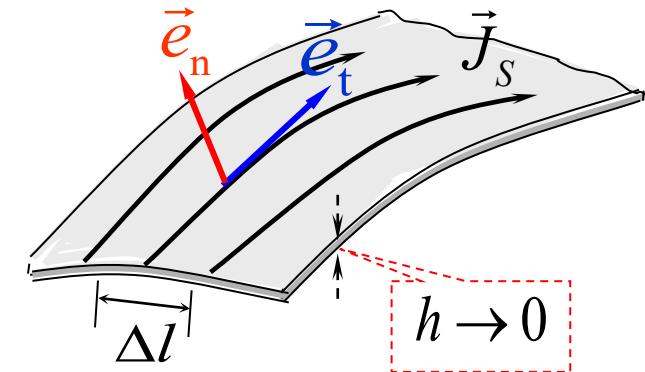
从体电流出发推导面电流密度定义。

设体电流密度为 \vec{J} ，薄层厚度为 h ，薄层横截面 ΔS ，则穿过截面的电流为

$$\Delta I = \vec{J} \cdot \Delta \vec{S} = \vec{J} \cdot \hat{n} h \Delta l = (\vec{J} h) \cdot \hat{n} \Delta l = \vec{J}_s \cdot \hat{n} \Delta l$$

$$|J_s| = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} = \frac{dI}{dl}$$

式中 $\vec{J}_s = \vec{J} h$ 即为面电流密度，单位为 A/m (安培/米)



面电流密度矢量



关于面电流密度的说明

体电流与面电流是两种不同类型电流分布，并不是有体电流就有面电流。

$$\vec{J}_s = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ J \rightarrow \infty}} h \vec{J} \neq 0$$

■ 线电流密度

沿横截面可以忽略的曲线流动的电流，称为线电流。

长度元 $d1$ 上的电流 $Id1$ 称为电流元。

2.1.3 电荷守恒定律与电流连续方程

■ 电荷守恒定律

电荷是守恒的，既不能被创造，也不能被消灭，它只能从一个物体转移到另一个物体，或者从一个地方移动到另一个地方。

■ 电流连续性方程

由电荷守恒定律：在电流空间中，体积 V 内单位时间内减少的电荷量等于流出该体积总电流，即

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$



电流连续性方程积分形式

在等式的左端应用高斯散度定理，将闭合面上的面积分变为体积分，得

$$\int_V \left(\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

电流连续性方
程微分形式



对电荷守恒定律的进一步讨论

1、当体积 V 为整个空间时，闭合面 S 为无穷大界面，将没有电流经其流出，此式可写成

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = 0$$

即整个空间的总电荷是守恒的。

2、积分形式反映的是电荷变化与电流流动的宏观关系，而微分形式则描述空间各点电荷变化与电流流动的局部关系。

■ 恒定（稳恒）电流的连续性方程

所谓恒定（或称为稳恒），是指所有物理量不随时间变化。

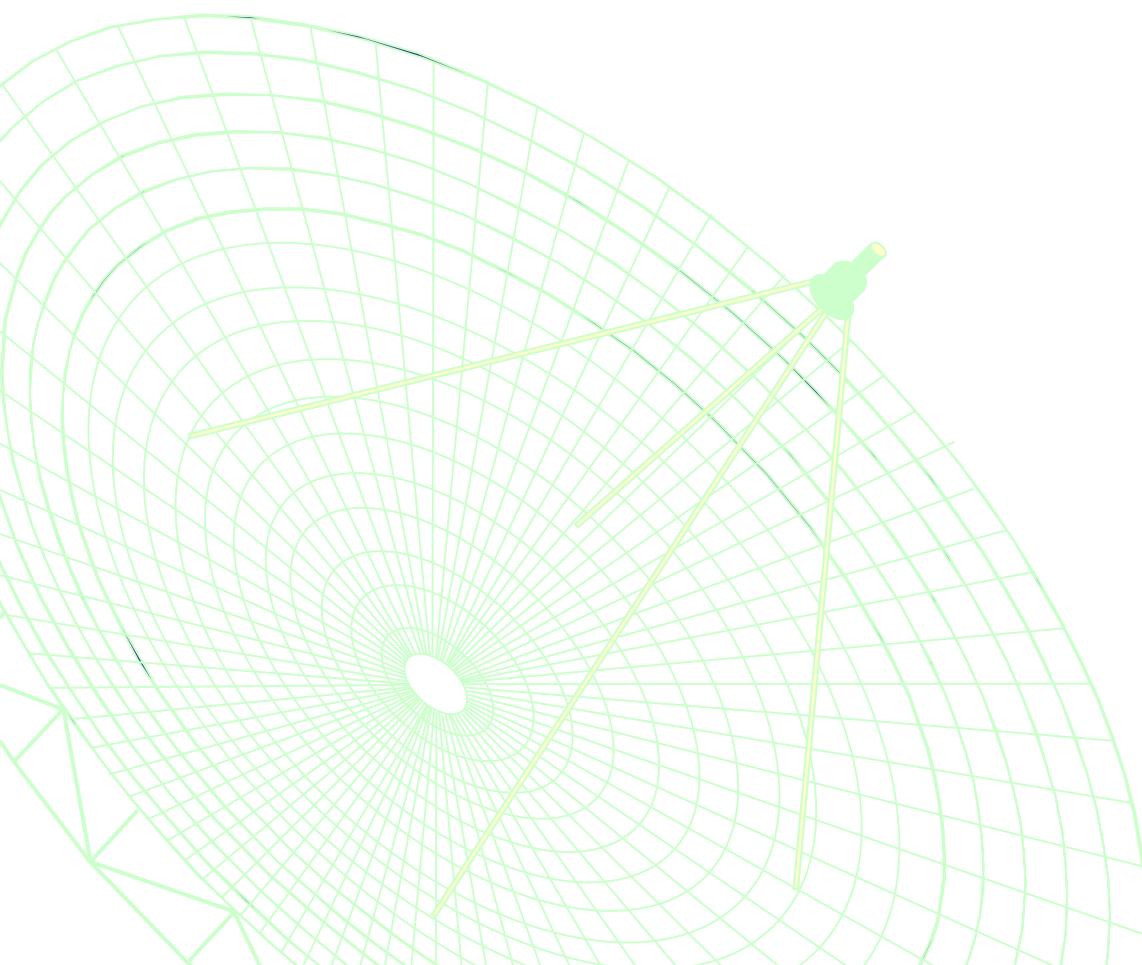
不随时间变化电流称为恒定电流（或稳恒电流）。

恒定电流空间中，电荷分布也恒定不变，即 ρ 对时间的偏导数为零，则电流连续性方程为

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

☞ 恒定电流连续性方程



2.2 真空中静电场的基本规律

静电场：由位置固定、电量恒定不变的静止电荷产生的电场。

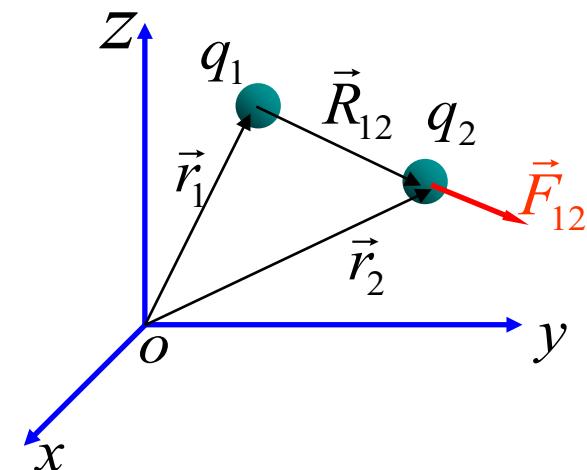
2.2.1 库仑定律 电场强度

■ 库仑定律

描述了真空中两个点电荷间相互作用力的规律，其数学表达式为

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \hat{e}_R = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^3} \vec{R}_{12}$$

式中： F_{12} 表示 q_1 作用在 q_2 上的静电力。



$$\vec{R}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

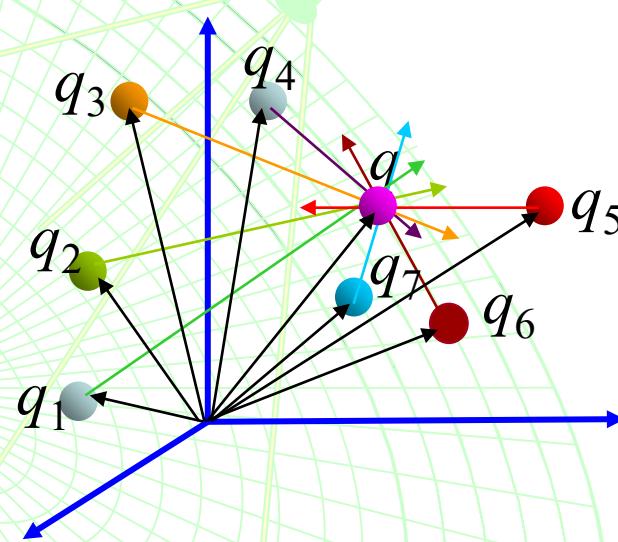
ϵ_0 为真空中介电常数。 $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} F/m$



对库仑定律的进一步讨论

- 大小与电量成正比、与距离的平方成反比，方向在连线上
- 静电力符合**矢量叠加**原理

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{R_i^3} \vec{R}_i$$



- 连续分布电荷系统的静电力须通过**矢量积分**进行求解

■ 电场的定义

- ▶ 电场是电荷周围形成的物质，当另外的电荷处于这个物质中时，会受到电场力的作用
- ▶ 静电荷产生的电场称为静电场
- ▶ 随时间发生变化的源产生的电场称为时变电场

■ 电场强度矢量

- ▶ 电场强度矢量 \vec{E} → 描述电场分布的基本物理量。
- ▶ 用电场强度矢量 \vec{E} 表示电场的大小和方向。
- ▶ 电场强度定义

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

$$\boxed{\vec{F} = q_0 \vec{E}}$$

■ 点电荷产生的电场

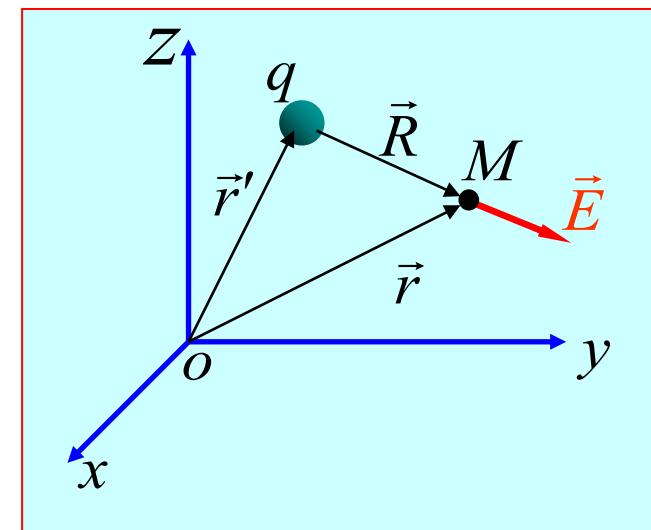
真空中静止单个点电荷 q 在空间任意点激发的电场为

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{R}$$

N 个点电荷组成的电荷系统在空间任意点激发的电场为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{R_i^3} \vec{R}_i$$

问题：连续分布电荷产生的电场该怎么求解呢？



连续分布的电荷系统产生的电场

连续分布于体积 V 中的电荷在空间任意点 r 产生的电场

→ 处理思路：

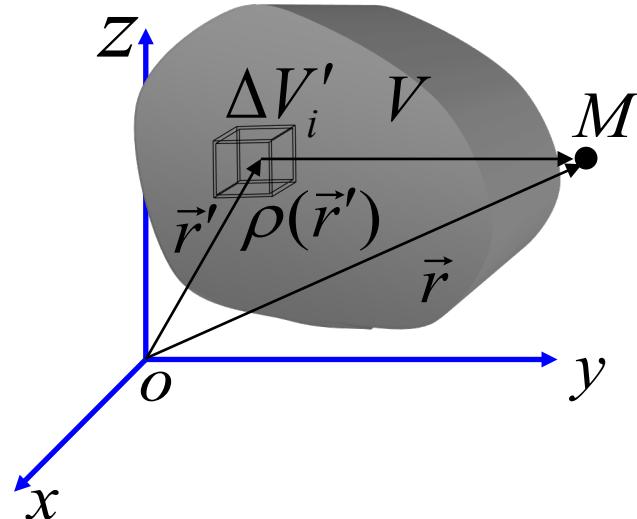
- 1) 无限细分区域
- 2) 考查每个区域
- 3) 矢量叠加原理

→ 设体电荷密度为 $\rho(\vec{r})$,

则整个体积 V 内电荷在 P 点处产生的电场为：

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i^N \frac{\rho(\vec{r}_i') \Delta V'_i \vec{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dV,$$

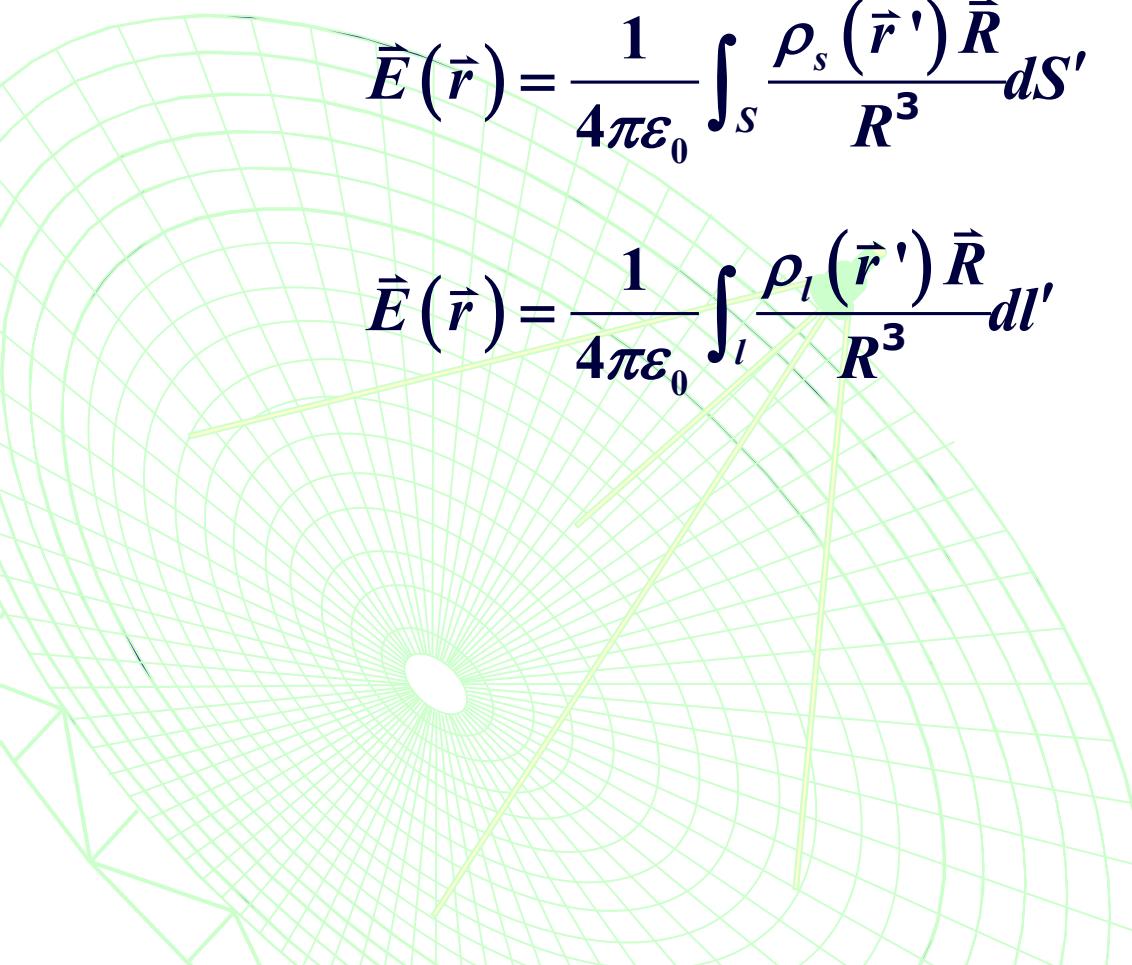
$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}';$$



■ 面电荷和线电荷产生的电场只需在上式中将电荷体密度、体积元和积分区域作相应替换即可，如

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dS' \quad \text{→ 面电荷}$$

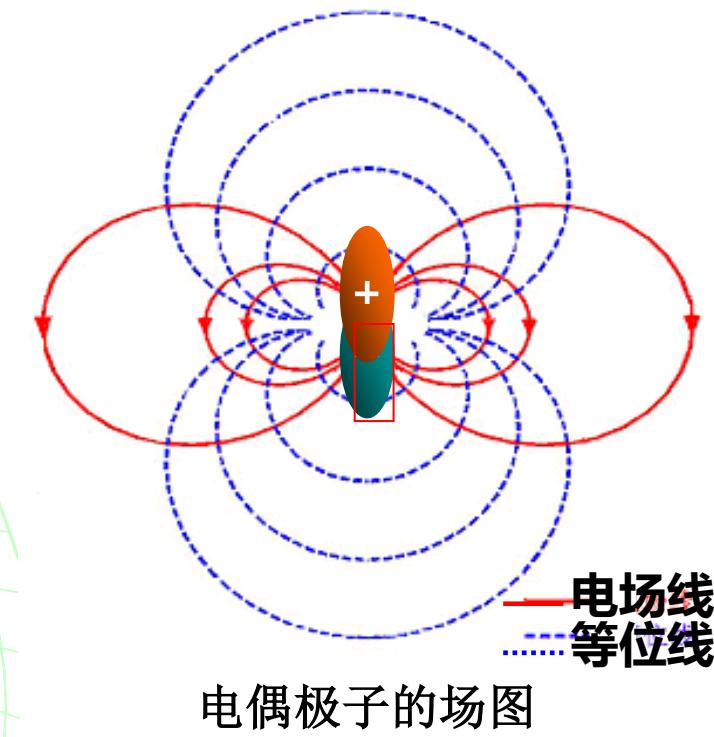
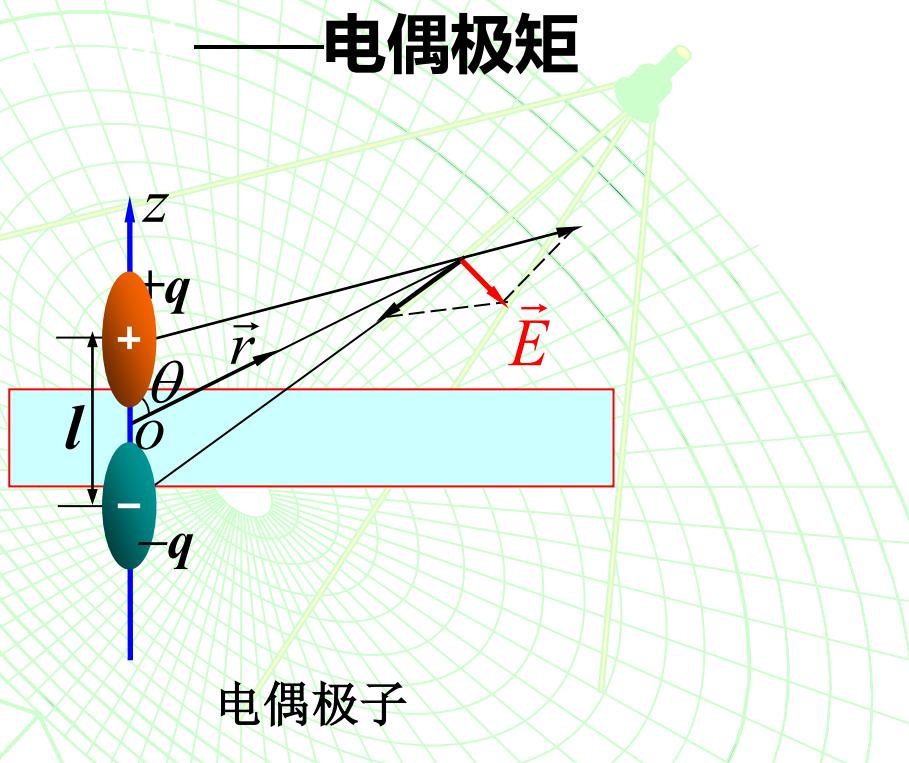
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\rho_l(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dl' \quad \text{→ 线电荷}$$



例2.2.1 电偶极子的电场强度：

电偶极子是由相距很近、带等值异号的两个点电荷组成的电荷系统，其远区电场强度为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right] = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\vec{e}_r 2\cos\theta + \vec{e}_\theta \sin\theta);$$



例 2.2.2 计算均匀带电的环形薄圆盘轴线上任意点的电场强度。

解：如图所示，环形薄圆盘的内半径为 a 、外半径为 b ，电荷面密度为 ρ_{S_0} 。在环形薄圆盘上取面积元

$dS' = \rho' d\rho' d\phi'$ ，其位置矢量为 $\vec{r}' = \vec{e}_\rho \rho'$ ，

它所带的电量为 $dq = \rho_S dS' = \rho_S \rho' d\rho' d\phi'$ ，

而薄圆盘轴线上的场点 $P(0, 0, z)$ 的位置

矢量为 $\vec{r} = \vec{e}_z z$ ，因此有

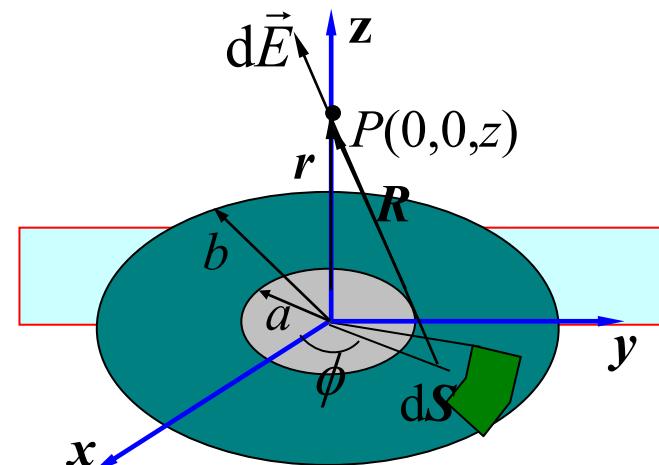
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_S}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_z z - \vec{e}_\rho \rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \rho' d\rho' d\phi';$$

由于

$$\int_0^{2\pi} \vec{e}_\rho d\phi' = \int_0^{2\pi} (\vec{e}_x \cos \phi' + \vec{e}_y \sin \phi') d\phi' = 0;$$

故

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{e}_z \frac{\rho_S z}{2\epsilon_0} \int_a^b \frac{\rho' d\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} = \vec{e}_z \frac{\rho_S z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{(z^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{1}{(z^2 + b^2)^{1/2}} \right];$$



均匀带电的环形薄圆盘



例3 图中所示为一个半径为 r 的带电细圆环，圆环上单位长度带电 ρ_l ，总电量为 q 。求圆环轴线上任意点的电场。

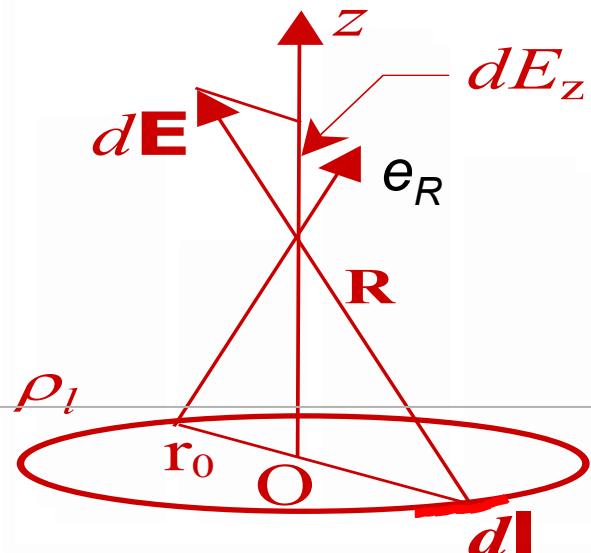
解：将圆环分解成无数个线元，每个线元可看成点电荷 $\rho_l(r) dl$ ，则线元在轴线任意点产生的电场为

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dl}{R^2} \hat{e}_R$$

由对称性和电场的叠加性，合电场只有 z 分量，则

$$\vec{E}(z) = \hat{e}_z \oint_L dE_z = \frac{\hat{e}_z \rho_l}{4\pi\epsilon_0} \oint_L \frac{\cos\theta}{R^2} dl =$$

$$= \frac{\hat{e}_z \rho_l}{4\pi\epsilon_0} \oint_L \frac{z}{R^3} dl = \frac{\hat{e}_z \rho_l}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{R^3} \oint_L dl = \frac{2\pi r \rho_l z}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{e}_z = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{e}_z$$

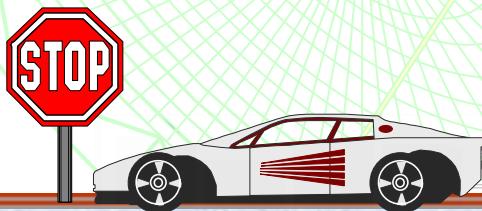


结果分析

(1) 当 $z \rightarrow 0$, 此时 P 点移到圆心, 圆环上各点产生的电场抵消,
 $E=0$

(2) 当 $z \rightarrow \infty$, R 与 z 平行且相等, $r \ll z$, 带电圆环相当于一个点电荷, 有

$$\vec{E}(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{e}_z$$



例4：求真空中半径为 a , 带电量为 Q 的空心球在球外空间中产生 E 。

由球体的对称性分析可知：

❖电场方向沿半径方向：

❖电场大小只与场点距离球心的距离相关。

解：在球面上取面元 ds , 该面元在P点处产生的电场径向分量为：

$$dE_r = \frac{\rho_s \cdot ds}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \cos\alpha$$

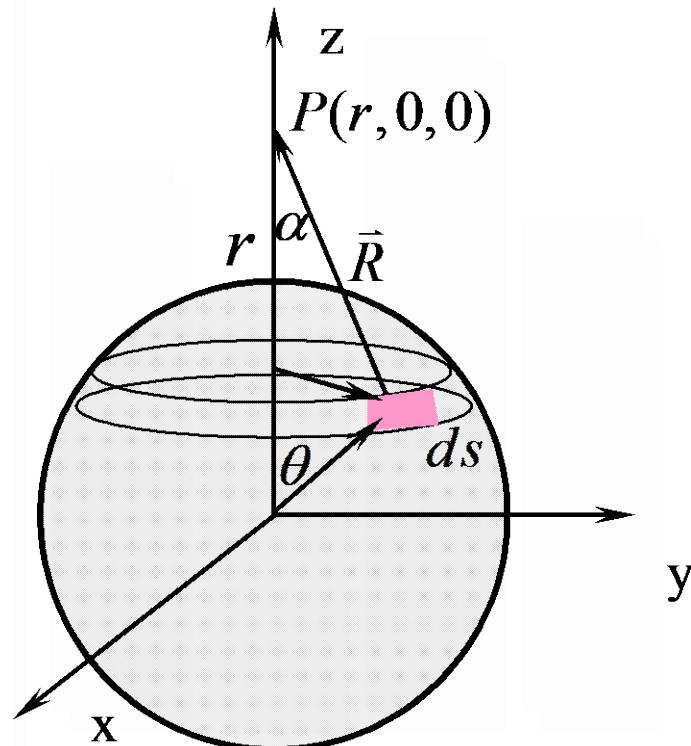
式中： $ds = ad\theta \cdot a \sin\theta d\varphi$

$$\rho_s = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{r - a \cos\theta}{R}$$

$$R = \sqrt{a^2 \sin^2\theta + (r - a \cos\theta)^2}$$

$$\therefore dE_r = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r - a \cos\theta}{R^3} \cdot a^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$



$$\Rightarrow E_r = \int_S dE_r$$

$$= \frac{\rho_s \cdot a^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{r - a \cos\theta}{R^3} \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{\rho_s \cdot a^2}{2\epsilon_0} \cdot \int_0^\pi \frac{r - a \cos\theta}{R^3} \sin\theta d\theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

结果分析

导体球上电荷均匀分布在导体表面，其在球外空间中产生的电场分布与位于球心的相同电量点电荷产生的电场等效。

2.2.2 静电场的散度和旋度

1. 静电场的散度和高斯定理

■ 真空中静电场的散度

可以证明：真空中静电场的散度为

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \vec{r} \text{ 处无电荷} \\ \rho(\vec{r}) / \epsilon_0 & \vec{r} \text{ 处电荷密度为 } \rho(\vec{r}) \end{cases}$$

静电场高斯定理微分形式



- 说明：1) 电场散度仅与该点处电荷密度相关，其大小 $\propto \rho(\vec{r})$
2) 对于真空中点电荷，有

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 \text{ 或 } \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = q / \epsilon_0$$

■ 真空中静电场的高斯定理

将高斯定理微分形式对体积V取积分，则得：

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV = \int_V \rho(\vec{r}) / \epsilon_0 dV \Rightarrow \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



静电场中的高斯定理

式中：S为高斯面，是一闭合曲面，
Q为高斯面所围的电荷总量。



对高斯定理的讨论

- 物理意义：静电场 \vec{E} 穿过闭合面S的通量只与闭合面内所围电荷量有关
- 静电场是有源场，静电荷是其散度源

2. 真空中静电场的旋度 环路定律

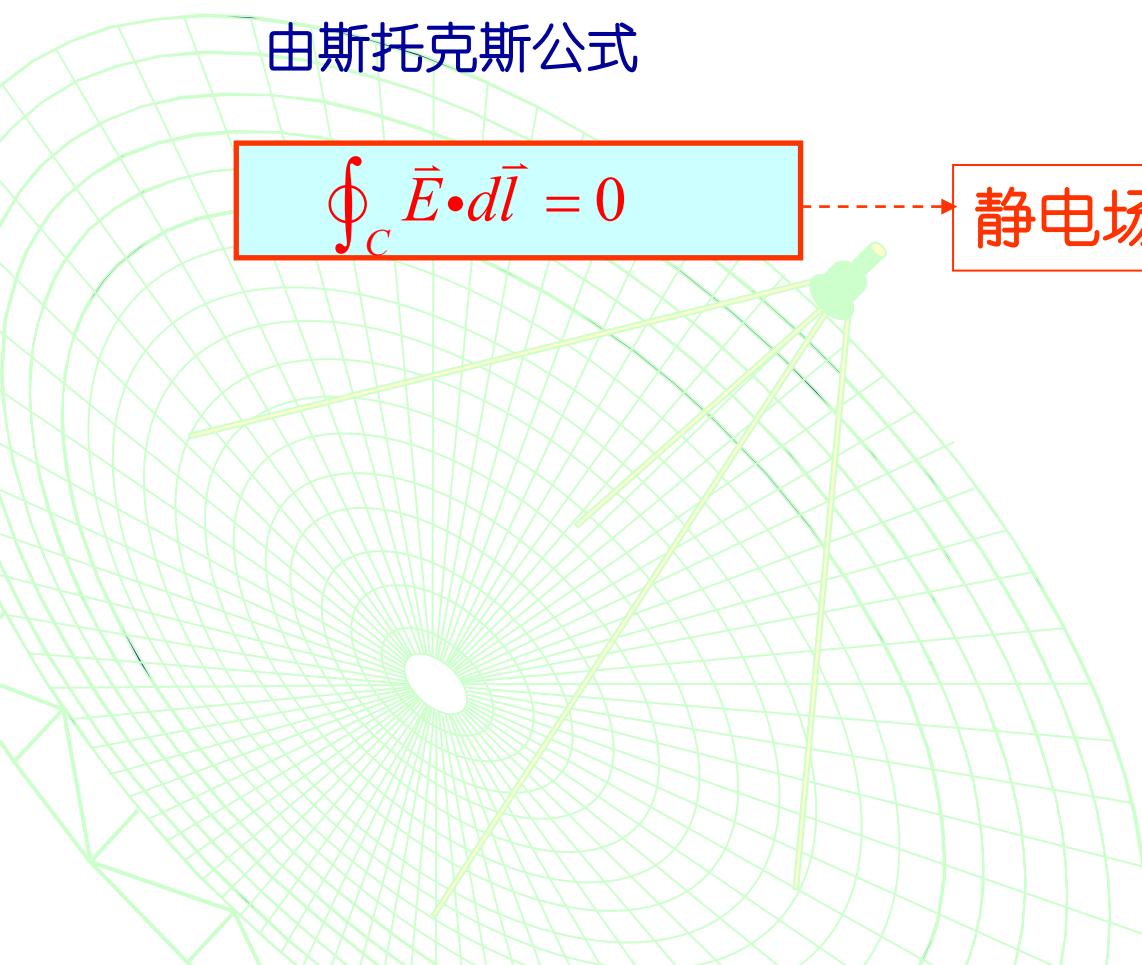
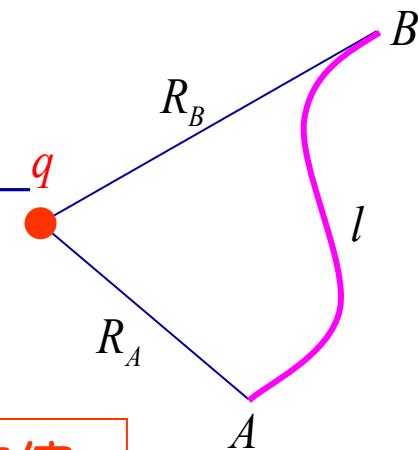
$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

静电场为无旋场（保守场）

由斯托克斯公式

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

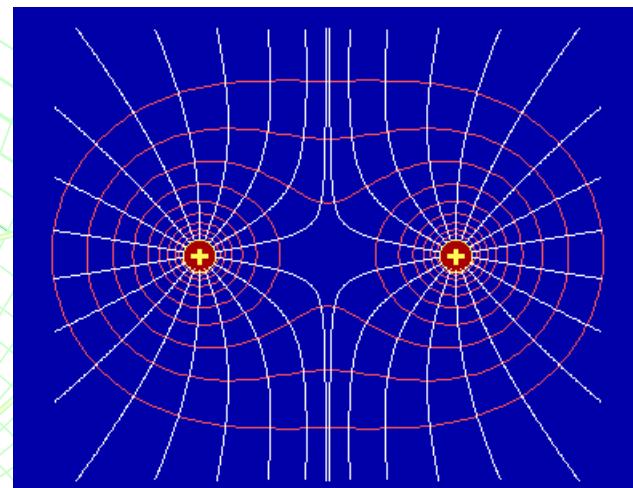
静电场环路定律





小结：静电场的性质

- 有散场。电力线由电荷发出，电荷是电场的散度源
- 无旋场。电力线不构成闭合回路
- 有散无旋的静电场矢量线呈现扩散状的分布形式



- 对静电场，恒有：

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \equiv 0$$

$$\because \nabla \times (\nabla \Phi) \equiv 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \Phi \quad \Phi \text{为标量函数}$$

故：静电场可以由一标量函数的梯度表示。



专题：利用高斯定理求解静电场

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

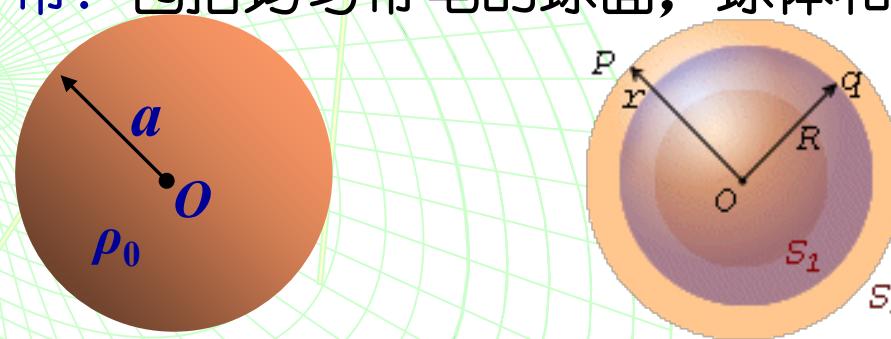
❖ 关键：高斯积分面的选择

❖ 高斯面的选择原则：

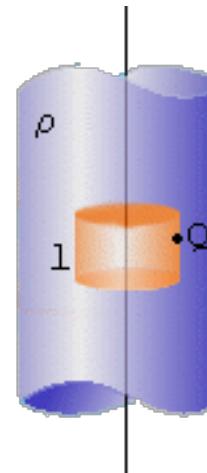
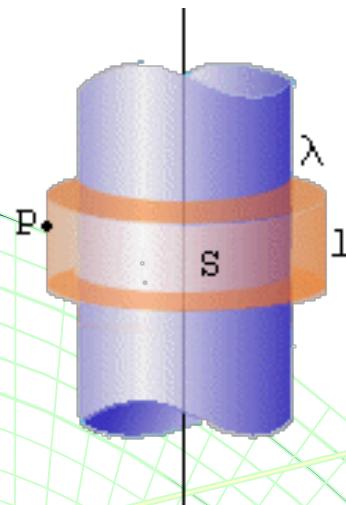
- 1) 场点位于高斯面上；
- 2) 高斯面为闭合面；
- 3) 在整个或分段高斯面上， \vec{E} 或 $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ 为恒定值。

❖ 用高斯定理求解电场的方法只适用于一些呈对称分布的电荷系统

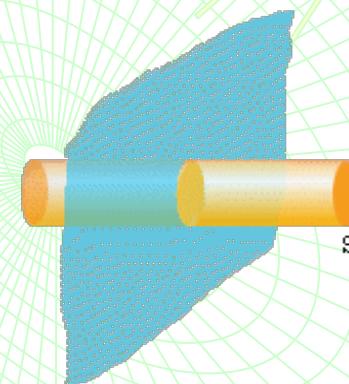
■ 球对称分布：包括均匀带电的球面，球体和多层次同心球壳等。



■ 轴对称分布：如无限长均匀带电的直线，圆柱面，圆柱壳等。



■ 无限大平面电荷：如无限大的均匀带电平面、平板等。





例题一

求电荷密度为 ρ_s 的无限大面电荷在空间中产生的电场。

分析：电场方向垂直表面。在平行电荷面的面上大小相等。

解：取如图所示高斯面。

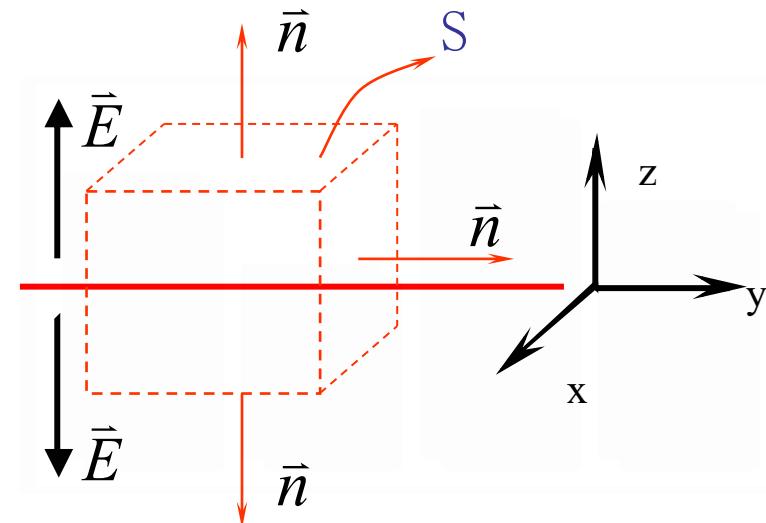
由高斯定律，有

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot \vec{e}_z S + \vec{E}_2(\vec{r}) \cdot (-\vec{e}_z) S = \frac{\rho_s \cdot S}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

$$\therefore \vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & (z > 0) \\ -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & (z < 0) \end{cases}$$





例题二

半径为a的球形带电体，电荷总量Q均匀分布在球体内。

- 求： (1) $\vec{E}(\vec{r})$ (2) $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r})$
 (3) $\nabla \times \vec{E}(\vec{r})$

分析：电场方向垂直于球面。

电场大小只与r有关。

解：1) 取如图所示高斯面。

在球外区域： $r \geq a$

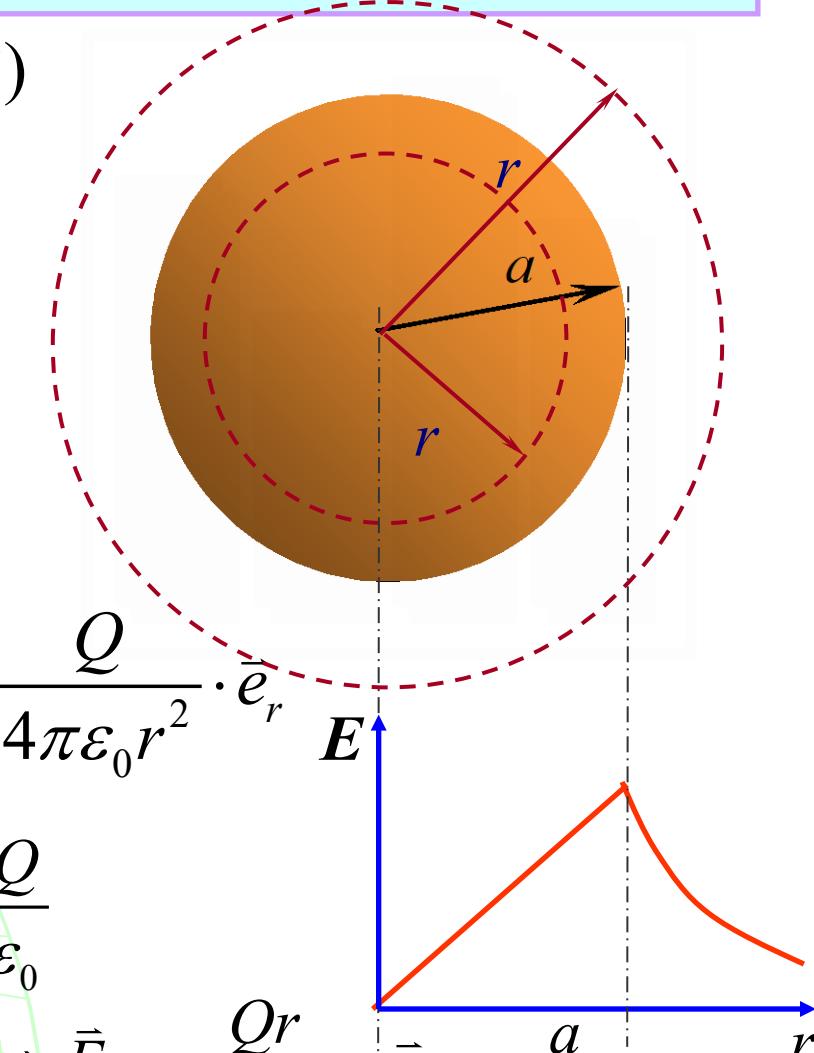
$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) \cdot (4\pi r^2 \cdot \hat{e}_r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cdot \hat{e}_r$$

在球内区域： $r \leq a$

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi a^3} \quad \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) \cdot (4\pi r^2 \cdot \hat{e}_r) = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Qr}{4\pi \epsilon_0 a^3} \cdot \hat{e}_r$$



2) 解为球坐标系下的表达形式。

$$\nabla \cdot \vec{E} = \begin{cases} \nabla \cdot \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r \right) & (r \geq a) \\ \nabla \cdot \left(\frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \cdot \vec{e}_r \right) & (r < a) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (r \geq a) \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \right) & (r < a) \end{cases}$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{E} = \begin{cases} 0 \\ \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases}$$

3)

$$\therefore \nabla \times \vec{E} = \begin{cases} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \nabla \times \vec{r} \end{cases} = 0$$

$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$

回顾总结：

1. 静电场散度与高斯定理

静电场的散度 (微分形式)

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0},$$

静电场的高斯定理 (积分形式)

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV,$$

高斯定理表明：静电场是有源场，电力线起始于正电荷，终止于负电荷。

2. 静电场旋度与环路定理

静电场的旋度 (微分形式)

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0,$$

静电场的环路定理 (积分形式)

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = 0,$$

环路定理表明：静电场是无旋场，是保守场，电场力做功与路径无关。

2.3 真空中恒定磁场的基本规律

本节内容

2.3.1 安培力定律 磁感应强度

2.3.2 恒定磁场的散度与旋度

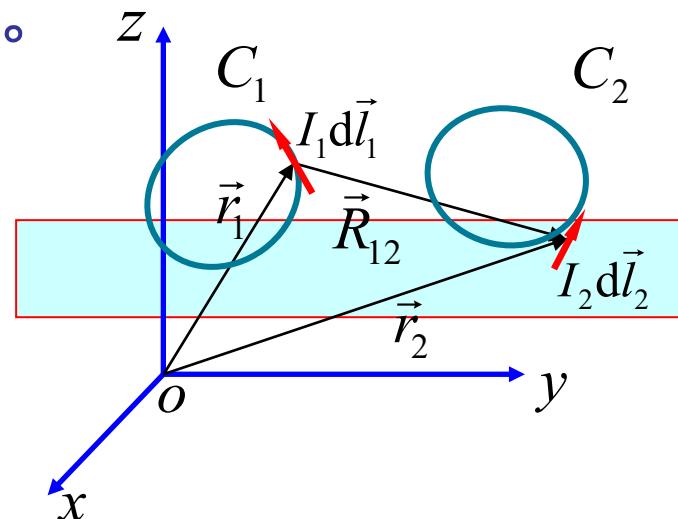
2.3.1 安培力定律 磁感应强度

恒定磁场（静磁场）：恒定电流产生的磁场。

1. 安培力定律

安培对电流的磁效应进行了大量的实验研究，在1821—1825年之间，设计并完成了电流相互作用的精巧实验，得到了电流相互作用力公式，称为安培力定律。

实验表明，真空中的载流回路 C_1 对载流回路 C_2 的作用力



$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{12})}{R_{12}^3},$$

- 载流回路 C_2 对载流回路 C_1 的作用力 $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$,

安培力定律

满足牛顿
第三定律

■ 磁感应强度矢量 \vec{B}

- ▶ 电流在其周围空间中产生磁场，描述磁场分布的基本物理量是磁感应强度 B ，单位为 T（特斯拉）。
- ▶ 电流或磁铁在其周围空间会激发磁场，当另外的电流或磁铁处于这个磁场中时，会受到力（磁力）的作用
- ▶ 处于磁场中的电流元 Idl 所受的磁场所力 $d\vec{F}$ 与该点磁场 B 、电流元强度和方向有关，即

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

■ 毕奥—萨伐尔定律

磁场的重要特征是对场中的电流磁场力作用，载流回路 C_1 对载流回路 C_2 的作用力是回路 C_1 中的电流 I_1 产生的磁场对回路 C_2 中的电流 I_2 的作用力。

根据安培力定律，有

$$\vec{F}_{12} = \oint_{C_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{12}}{R_{12}^3} \right) = \oint_{C_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2)$$

其中

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{12}}{R_{12}^3}$$

电流 I_1 在电流元 $I_2 d\vec{l}_2$ 处产生的磁感应强度

设闭合回路 C 上通有稳恒电流 I , 它在空间任意点 r 处产生的磁感应强度 B 为

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Id\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3}$$

电流元 产生的磁感应强度

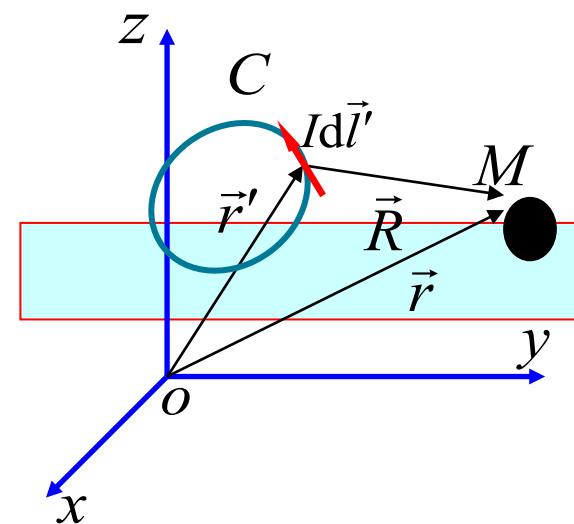
$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

体电流产生的磁感应强度

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dV'$$

面电流产生的磁感应强度

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{J_s(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dS'$$



3. 几种典型电流分布的磁感应强度

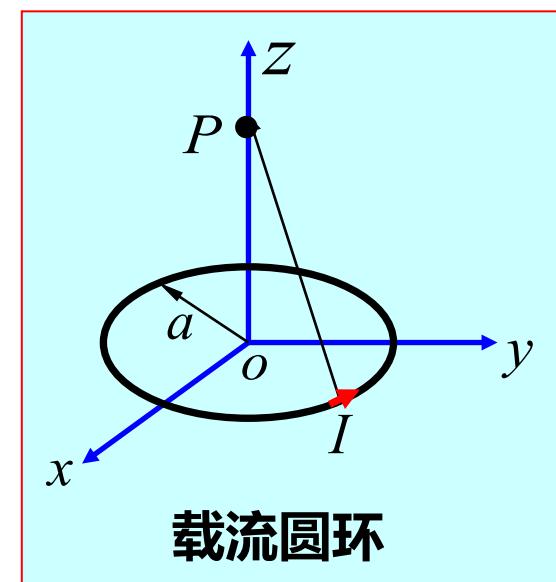
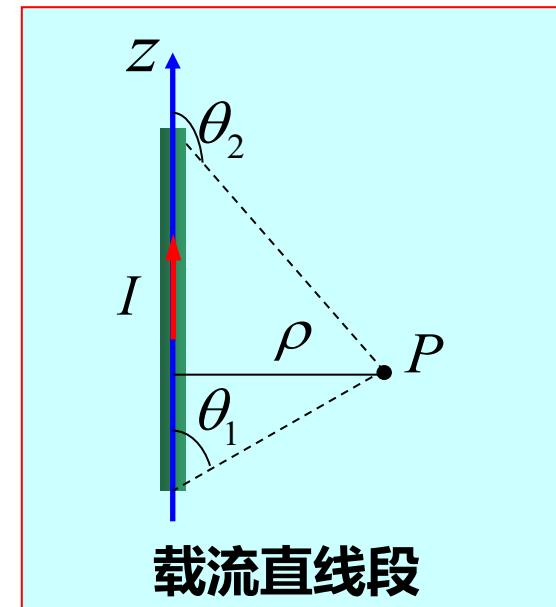
- 载流直线路段的磁感应强度：

$$\vec{B} = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2), \quad (\text{有限长})$$

$$\vec{B} = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}, \quad (\text{无限长})$$

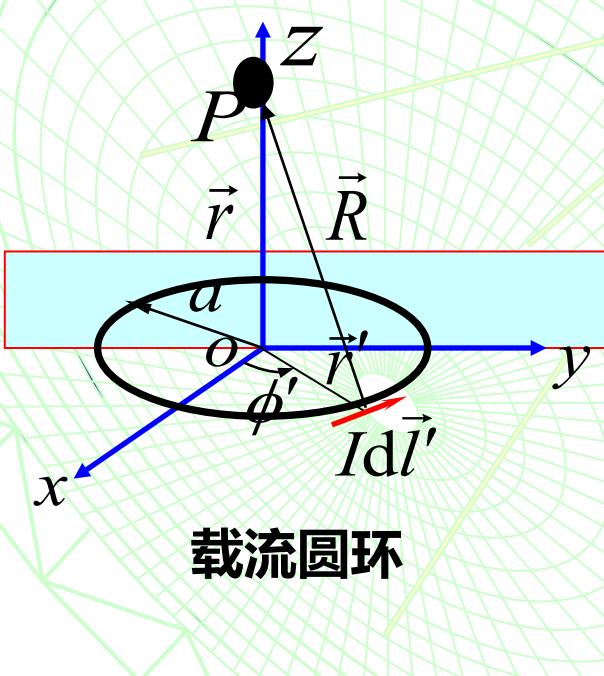
- 载流圆环轴线上的磁感应强度：

$$\vec{B}(0, 0, z) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}},$$



例 2.3.1 计算线电流圆环轴线上任一点的磁感应强度。

解：设圆环的半径为 a ，流过的电流为 I 。为计算方便取线电流圆环位于 xOy 平面上，则所求场点为 $P(0, 0, z)$ ，如图 所示。采用圆柱坐标系，圆环上的电流元为 $Id\vec{l}' = \vec{e}_\phi Ia d\phi'$ ，其位置矢量为 $\vec{r}' = \vec{e}_\rho a$ ，而场点 P 的位置矢量为 $\vec{r} = \vec{e}_z z$ 故得



$$\begin{aligned}\vec{r} - \vec{r}' &= \vec{e}_z z - \vec{e}_\rho a, \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = (z^2 + a^2)^{1/2} \\ I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') &= \vec{e}_\phi I a d\phi' \times (\vec{e}_z z - \vec{e}_\rho a) \\ &= \vec{e}_\rho I a z d\phi' + \vec{e}_z I a^2 d\phi',\end{aligned}$$

轴线上任一点 $P(0, 0, z)$ 的磁感应强度为

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_\rho z + \vec{e}_z a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\phi',$$

由于 $\int_0^{2\pi} \vec{e}_\rho d\phi' = \int_0^{2\pi} (\vec{e}_x \cos \phi' + \vec{e}_y \sin \phi') d\phi' = 0$, 所以

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_z a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\phi' = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

可见, 线电流圆环轴线上的磁感应强度只有轴向分量, 这是因为圆环上各对称点处的电流元在场点P产生的磁感应强度的径向分量相互抵消。

在圆环的中心点上, $z = 0$, 磁感应强度最大, 即

$$\vec{B}(0) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2a},$$

当场点P远离圆环, 即 $z \gg a$ 时, 因 $(z^2 + a^2)^{3/2} \approx z^3$, 故

$$\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3}.$$

2.3.2 真空中恒定磁场的散度与旋度

■ 恒定磁场的散度 磁通连续性原理

在恒定磁场中，磁感应强度矢量穿过任意闭合面的磁通量为0，即：

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$



磁通连续性定律（积分形式）

由矢量场的散度定理，可推得：

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$



磁场散度定理微分形式



关于恒定磁场散度的讨论：

静磁场的散度处处为零，说明恒定磁场是无散场，自然界中无孤立磁荷存在，磁感应线是无起点和终点的闭合曲线。

恒定磁场的旋度 安培环路定律

在恒定磁场中，磁感应强度在任意闭合回路 C 上的环量等于穿过回路 C 所围面积的电流的代数和与 μ_0 的乘积，即：

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k = \mu_0 I_{\text{总}}$$



安培环路定理积分形式

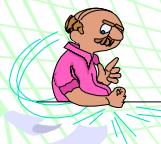
若电流分布为体电流分布，有 $I_{\text{总}} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ 代入上式，得

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

利用斯托克斯公式，得

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

安培环路定理微分形式



对恒定磁场旋度的讨论

- 静磁场的旋度反映了静磁场漩涡源（电流）的分布情况
- 空间任意点磁场的旋度只与所处位置的电流密度有关

2.3.2 恒定磁场的散度和旋度

1. 恒定磁场的散度与磁通连续性原理

恒定场的散度 (微分形式)

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0,$$

磁通连续性原理 (积分形式)

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0,$$

磁通连续性原理表明：**恒定磁场是无源场，磁感应线是无起点和终点的闭合曲线。**

2. 恒定磁场的旋度与安培环路定理

恒定磁场的旋度 (微分形式)

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}),$$

安培环路定理 (积分形式)

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I,$$

安培环路定理表明：**恒定磁场是有旋场，是非保守场、电流是磁场的旋涡源。**



专题：利用安培环路定律求解静磁场分布

当电流呈轴对称分布时，可利用安培环路定律求解空间磁场分布。

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

若存在一闭合路径C，使得在其上 $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ 整段或分段为定值，则可以用安培环路定律求解。



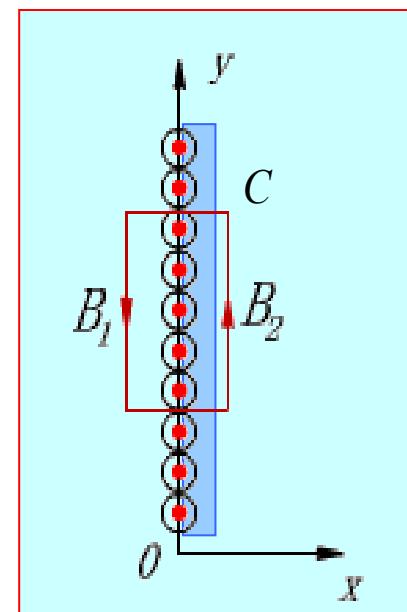
例1 求电流面密度为 $\vec{J}_S = \vec{e}_z J_{S0}$ 的无限大电流薄板产生的 \vec{B} 。

解：分析场的分布，取安培环路如图

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_1 l + B_2 l = \mu_0 J_{S0} l$$

根据对称性，有 $B_1 = B_2 = B$ ，故

$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{e}_y \frac{\mu_0 J_{S0}}{2} & x > 0 \\ -\vec{e}_y \frac{\mu_0 J_{S0}}{2} & x < 0 \end{cases}$$





专题：利用安培环路定律求解静磁场分布

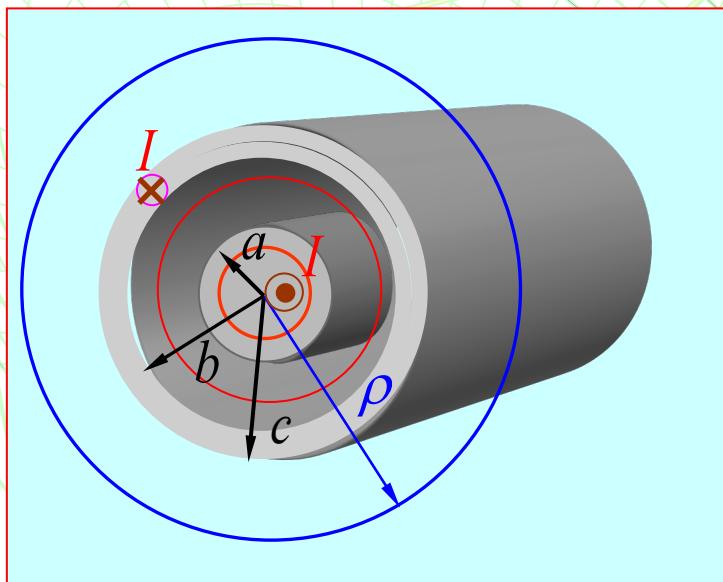
例2.3.3 求载流无限长同轴电缆产生的磁感应强度。

解 选用圆柱坐标系，则 $\vec{B} = \vec{e}_\phi B(\rho)$,

$$(1) \quad 0 \leq \rho < a,$$

取安培环路 ($\rho < a$), 交链的电流为

$$I_1 = \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi \rho^2 = I \frac{\rho^2}{a^2},$$



$$2\pi\rho B_1 = \mu_0 \frac{I\rho^2}{a^2},$$

$$\vec{B}_1 = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2},$$

(2) $a \leq \rho < b$,

$$2\pi\rho B_2 = \mu_0 I, \quad \rightarrow \quad \vec{B}_2 = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho},$$

(3) $b \leq \rho < c$,

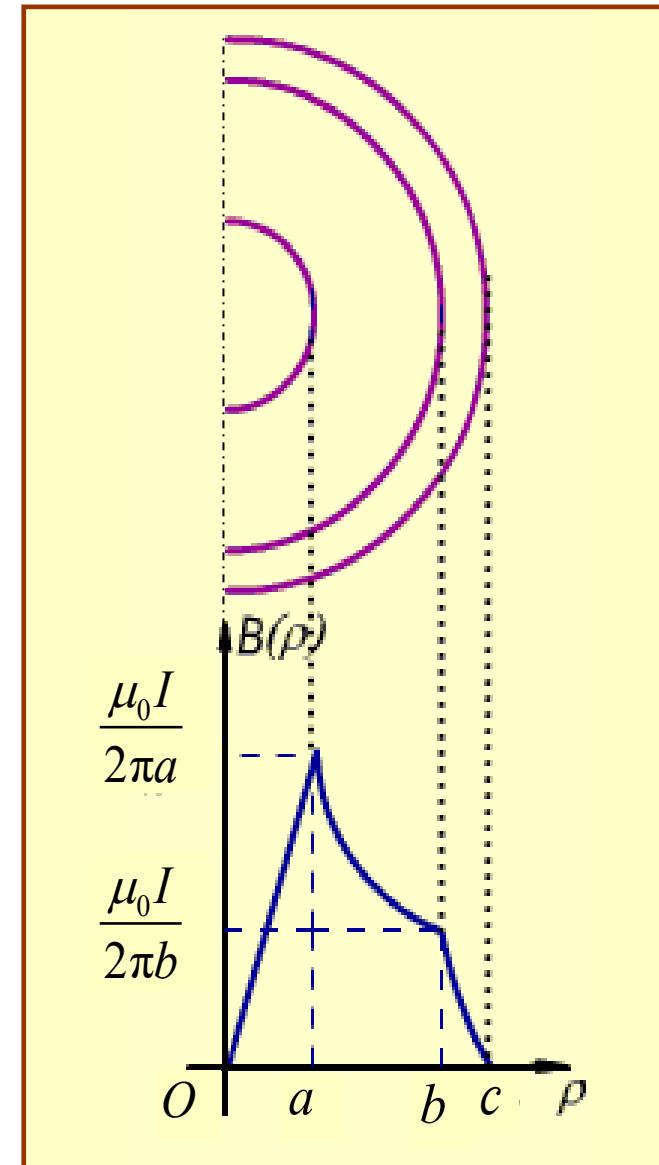
$$I_3 = I - I \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2} = I \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2},$$

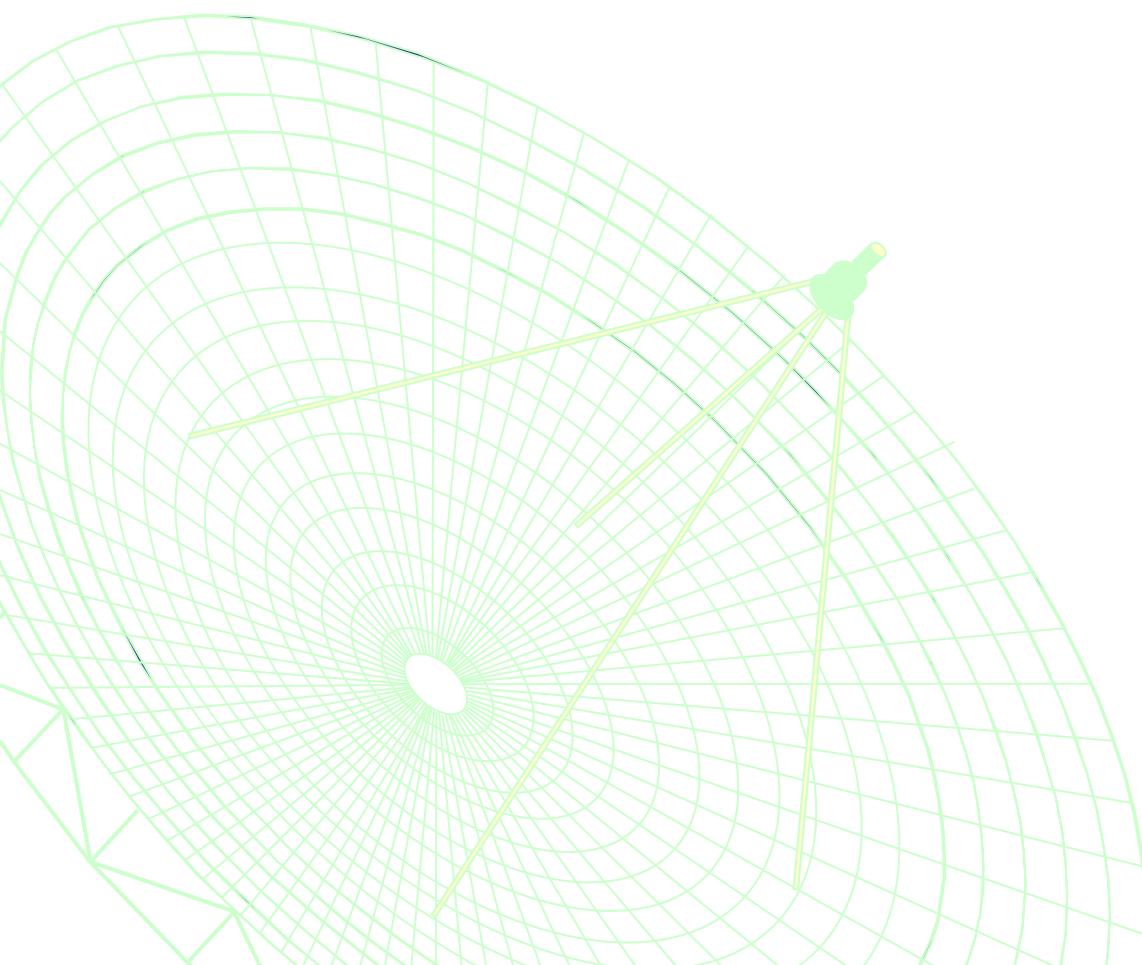
应用安培环路定理, 得

$$2\pi\rho B_3 = \frac{\mu_0 I(c^2 - \rho^2)}{c^2 - b^2},$$

$$\vec{B}_3 = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \cdot \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2},$$

$$I_4 = 0, \quad \rightarrow \quad \vec{B}_4 = 0.$$





2.4 媒质的电磁特性

有关概念：

在电磁场的作用下，物质会发生 极化，磁化，传导 三种现象。

导体 传导电流 自由电子 自由电荷

绝缘介质 束缚电荷

在电场力作用下，介质极化 电介质

磁介质 介质磁化

2.4 媒质的电磁特性

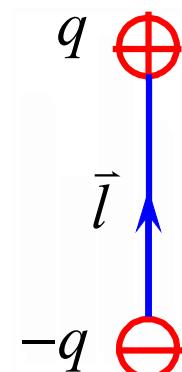
2.4.1 电介质的极化 电位移矢量

■ 有关概念

- 电介质：可看作由原子核（正）和电子（负）组成的带电系统
- 电偶极子和电偶极矩：

电偶极子：由两个相距很近的带等量异号电量的点电荷所组成的电荷系统。

电偶极矩 \vec{p} ：表示电偶极子。 $\vec{p} = q\vec{l}$



- 在热平衡时，分子无规则运动，取向各方向均等，介质在宏观上不显电特性

电介质的极化现象

→ 介质分子的分类：

无极分子：正负电荷中心重合，
无电偶极矩

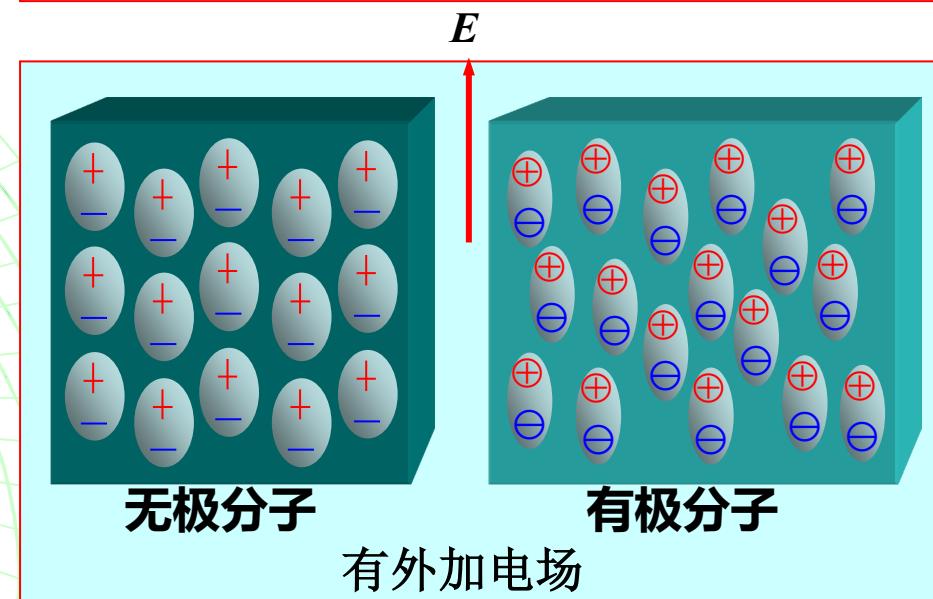
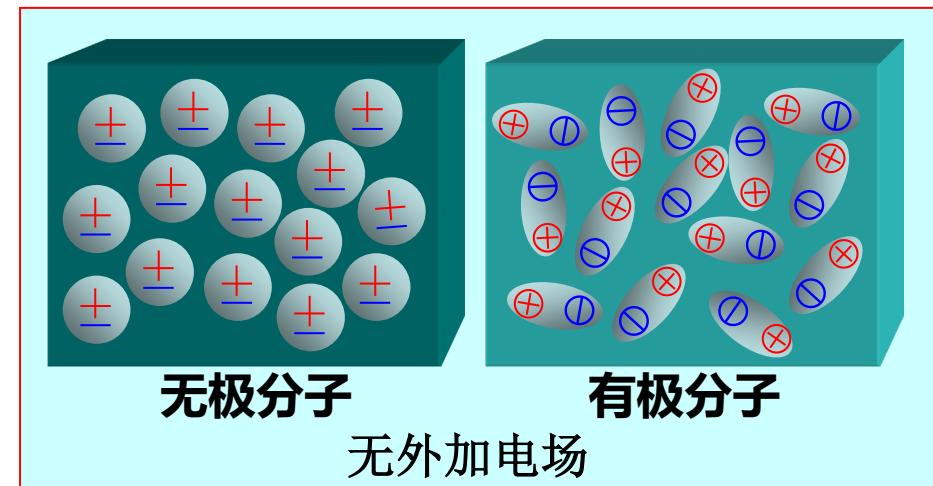
有极分子：正负电荷中心不重
合，有电偶极矩

在外加电场作用下：

→ 电介质中无极分子的束缚
电荷发生位移

→ 有极分子的固有电偶极矩
的取向趋于一致（指向电场
方向）

→ 电介质在宏观上出现电偶
极矩



■ 极化强度矢量 \vec{P}

- 极化强度矢量 \vec{P} 是描述介质极化程度的物理量，定义为

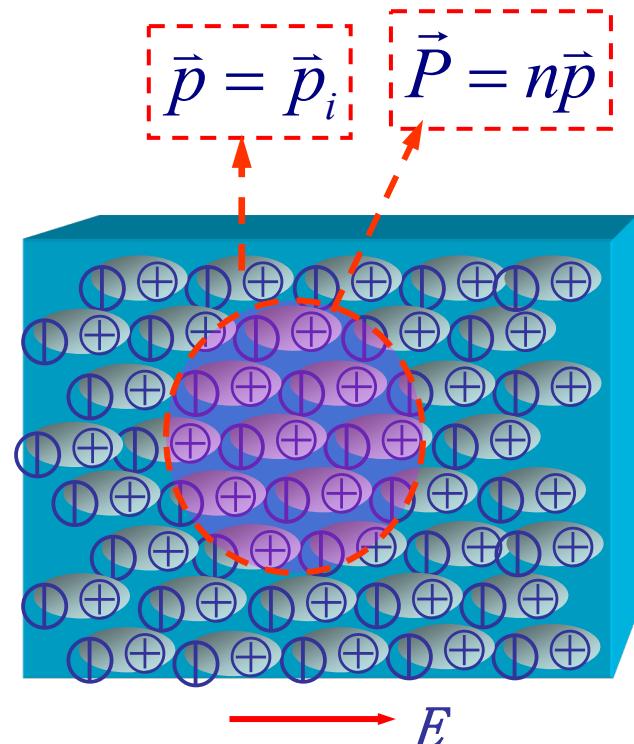
$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V} = n\vec{p}$$

$\vec{p} = q\vec{l}$ —— 分子的平均电偶极矩

- \vec{P} 的物理意义：单位体积内分子电偶极矩的矢量和。
- 极化强度与电场强度有关，其关系一般比较复杂。在线性、各向同性的电介质中， \vec{P} 与介质内合成电场强度成正比

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

$\chi_e (> 0)$ —— 电介质的电极化率



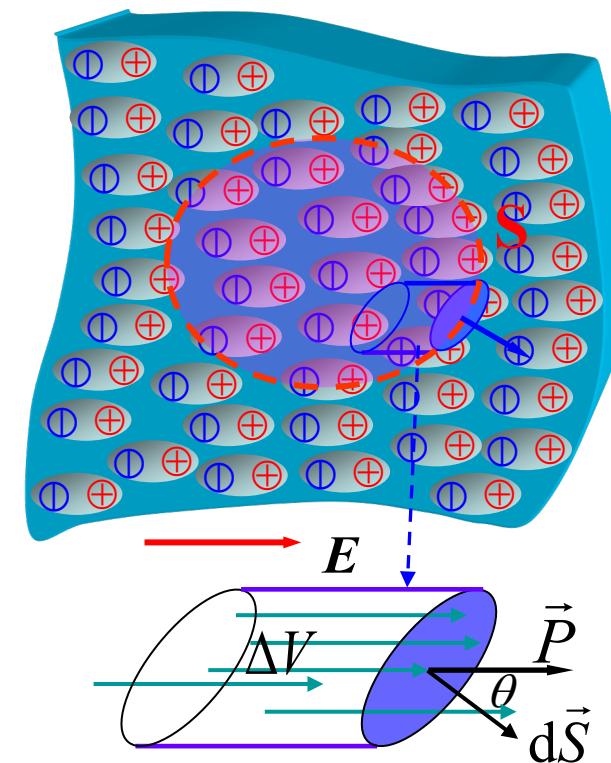
■ 极化电荷（束缚电荷）

媒质被极化后，在媒质体内和分界面上会出现电荷分布，这种电荷被称为极化电荷。由于相对与自由电子而言，极化电荷不能自由运动，故也称束缚电荷。

介质被极化后，每个分子可以看作是一个电偶极子。

设分子的电偶极矩 $\vec{p} = q\vec{l}$ 。

取如图所示体积元，则凡负电荷处于体积中的电偶极子必定穿过面元 $d\vec{S}$ ，则正电荷将穿出体积。



显然, 经 $d\mathbf{S}$ 穿出体积的正电荷总量为

$$nq\vec{l} \cdot d\vec{S} = n\vec{p} \cdot d\vec{S} = \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

在空间中任意取一个体积 V , 其边界为 S , 则经 S 穿出 V 的正电荷量为

$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$, 则 V 内出现的极化电荷 q_P 为

$$q_P = \int_V \rho_P dV = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\int_V \nabla \cdot \vec{P} dV \quad \text{👉}$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$

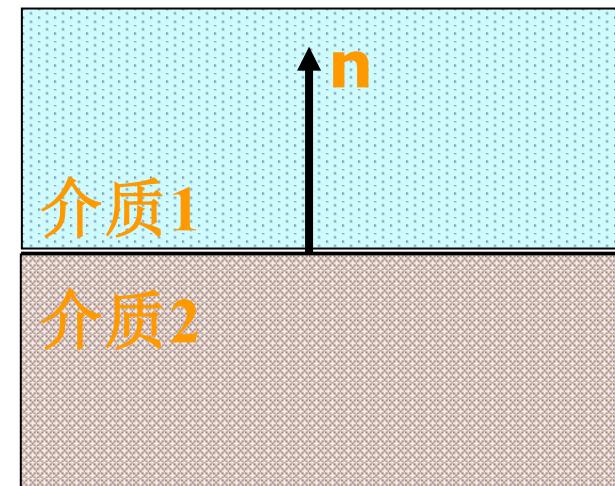
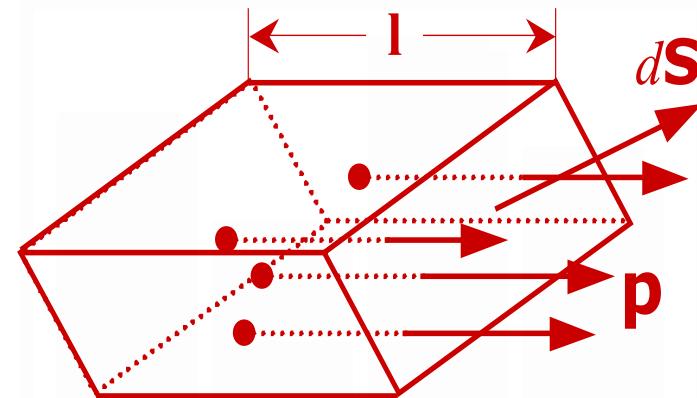
在介质表面上, 极化电荷面密度为

$$q_{sp} = \oint_S \rho_{sp} \cdot dS = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad \text{👉} \quad \boxed{\rho_{SP} = \vec{P} \cdot \hat{n}}$$



讨论: 若分界面两边均为媒质, 则

$$\boxed{\rho_{SP} = -\hat{n} \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)} \quad \text{👉} \quad \boxed{\rho_{SP} = -(\vec{P}_{1n} - \vec{P}_{2n})}$$





对介质极化问题的讨论

- $P=$ 常矢量时称媒质被均匀极化，此时介质内部无极化电荷，极化电荷只会出现在介质表面上
- 均匀介质内部一般不存在极化电荷
- 位于电介质内的自由电荷所在位置一定有极化电荷出现

介质的极化过程包括两个方面：

- 外加电场的作用使介质极化，产生极化电荷；
- 极化电荷反过来激发电场，两者相互制约，并达到平衡状态。

无论是自由电荷，还是极化电荷，它们都激发电场，服从同样的库仑定律和高斯定理。

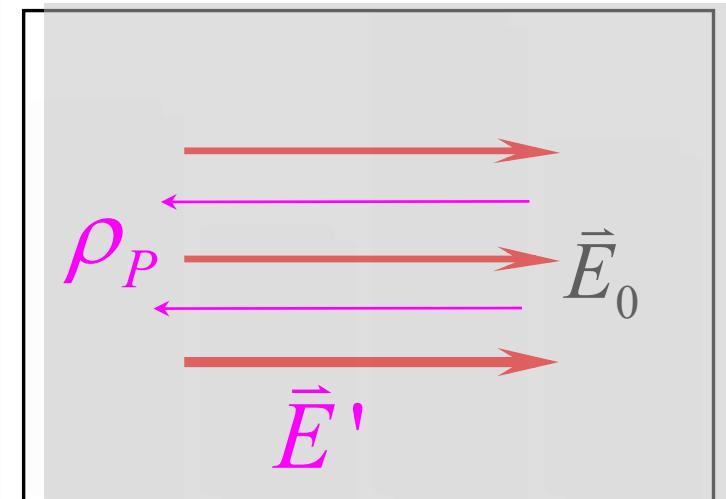
电位移矢量

自由电荷 ρ : \vec{E}_0

介质被极化 \rightarrow 极化电荷: ρ_P : \vec{E}'

介质空间中电场:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$



介质空间外加电场 \vec{E}_0 , 实际电场为 \vec{E} , 变化与介质性质有关。

将真空中的高斯定律推广到电介质中, 可得

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho + \rho_P}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot [\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})] = \rho$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

介质中高斯定理微分形式

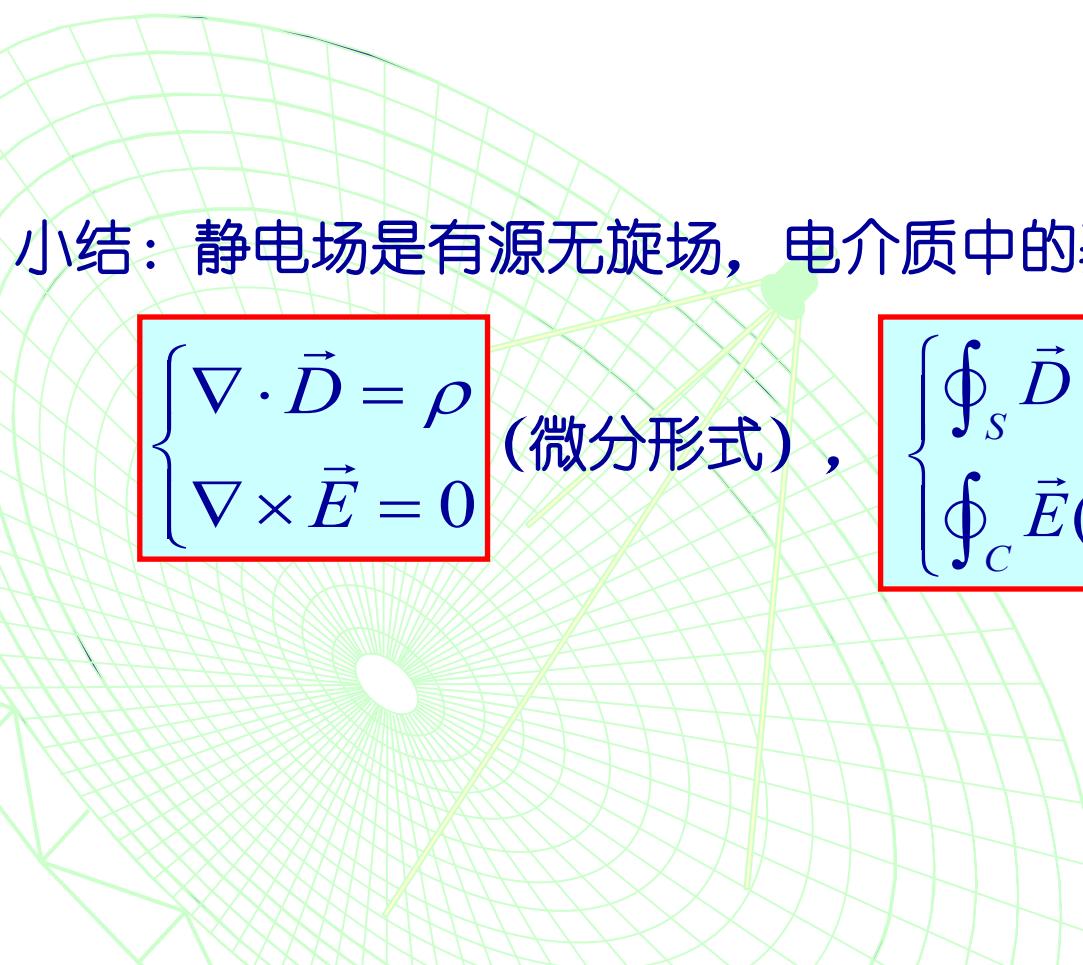
式中: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

电位移矢量

将介质中高斯定理微分形式对一定体积取积分, 得

$$\int_V \nabla \cdot \vec{D} dV = \int_V \rho dV \Rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \quad \text{→}$$

介质中高斯定
理积分形式



小结: 静电场是有源无旋场, 电介质中的基本方程为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

(微分形式),

$$\begin{cases} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \\ \oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases}$$

(积分形式)

电介质本构关系

极化强度 \vec{P} 与电场强度 \vec{E} 之间的关系由介质的性质决定。对于线性各向同性介质， \vec{P} 和 \vec{E} 有简单的线性关系

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

电介质本构关系



$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

媒质相对介电常数

媒质介电常数

* 介质有多种不同的分类方法，如：

- 均匀和非均匀介质
- 各向同性和各向异性介质
- 时变和时不变介质

线性和非线性介质
确定性和随机介质



例 半径为 a 的球形电介质体，其相对介电常数 $\epsilon_r = 4$ 若在球心处存在一点电荷 Q ，求极化电荷分布。

解：由高斯定律，可以求得

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q\vec{e}_r}{4\pi r^2}$$

在媒质内： $\vec{E} = \frac{Q\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_r r^2}$

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = 3\epsilon_0 \vec{E} = \frac{3Q\vec{e}_r}{16\pi r^2}$$

体极化电荷分布： $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) = 0$

面极化电荷分布： $\rho_{SP} = \vec{P} \cdot \vec{e}_r = \frac{3Q}{16\pi r^2}$





例 半径为 a 的球形真空区域内充满分布不均匀的体电荷 $\rho(\vec{r})$ ，若已知体电荷产生的电场分布为：

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{e}_r(r^3 + Ar^2) & r \leq a \\ \vec{e}_r(a^5 + Aa^4)r^{-2} & r > a \end{cases}$$

式中A为常数，求体电荷密度 $\rho(\vec{r})$

解：由高斯定理微分形式

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \Rightarrow \rho(\vec{r}) = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_r) \text{ (球坐标系)}$$

$$\therefore \rho(\vec{r}) = \begin{cases} \epsilon_0(5r^2 + 4Ar) & r \leq a \\ \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 \cdot (a^5 + Aa^4)r^{-2}] = 0 & r > a \end{cases}$$

