第一章小节与习题

第一章　静电场

§1 静电的基本现象和基本规律

§2 库伦定理

§3 电场 电场强度

§4 高斯定理和环路定理

§5 电势及其梯度

电场的两个重要性质

（1）力学性质　　（2）能量性质

反映电场力学性质的物理量：

$$\boxed{\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}}$$

反映电场能量性质的物理量：

$$\boxed{U_a=\frac{W_a}{q_0}}$$

静电场的三个定律或定理

库仑定律：

$$\boxed{\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}_r}$$

高斯定理：

$$\boxed{\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i}$$

有源场

环路定理：

$$\boxed{\oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0}$$

保守场

计算场强的三种方法

1) 利用电场强度叠加原理： $\vec{E} = \int_V \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

2) 利用高斯定理计算场强： $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$

注：适用于场强分布具有高度的对称性

3) 利用电势与电场强度的关系： $\vec{E} = -\nabla U$

计算电势

1) 场强积分法： $U_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

有限体取无限远处为电势零点

2) 电势叠加法： $U_P = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \dfrac{\mathrm{d}q}{r}$

注意电荷元的选取：体、面、线

（利用了点电荷电势公式，这一结果已选无限远处为电势零点，即使用此公式的前提条件为有限大带电体且选无限远处为电势零点）

电势差：$$U_{ab}=U_a-U_b=\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

点电荷q_0在静电场中的电势能：

$$W_a=q_0U_a$$

移动电荷时电场力做的功：

$$A_{ab}=q_0\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=q_0(U_a-U_b)=q_0U_{ab}$$

选择题1：下列几个说法中哪一个是正确的：

（A）电场中某点电场强度的方向，就是将点电荷放在该点所受电场力的方向；

（B）在以点电荷为中心的球面上，由该点电荷所产生的电场强度处处相同；

（C）电场强度方向可由 $\vec{E}=\vec{F}/q$ 定出，其中 q 为试验电荷的电量，q 可正可负，$\vec{F}$ 为试验电荷所受的电场力；

（D）以上说法都不正确。

选择题2：点电荷Q被曲面S所包围，从无穷远处引入另一点电荷至曲面外一点，如图所示，则引入前后

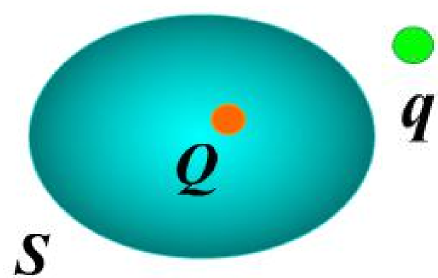
（A）曲面S上的电通量不变，各点场强也不变；

（B）曲面S上的电通量变化，而各点场强不变；

（C）曲面S上的电通量变化，各点场强也变化；

（D）曲面S上的电通量不变，而各点场强变化。

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



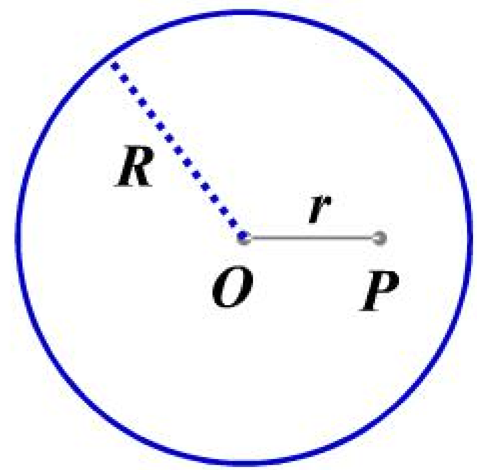
选择题3：半径为R的均匀带电球面，总带电量为Q，设无穷远处的电势为零，则距离球心为r（r<R）的P点的电场强度的大小和电势为：

（A） $E=0,\quad U=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

（B） $E=0,\quad U=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

（C） $E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\quad U=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

（D） $E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\quad U=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$



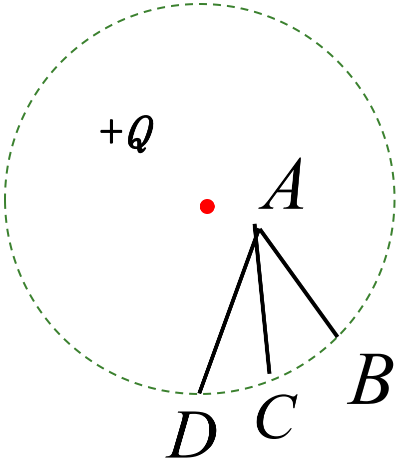
选择题4：在一个点电荷$+Q$的电场中，一个试验电荷$+q_0$从A点分别移到B、C、D点，B、C、D三点均在以$+Q$为圆心的圆周上，如图所示，则关于电场力所做的功：

（A）从A点到B点电场力做功最大；

（B）从A点到C点电场力做功最大；

（C）从A点到D点电场力做功最大；

（D）在这三个过程中电场力做功一样大。



选择题5：在静电场中，有关静电场的电场强度与电势之间的关系，下列说法中正确的是：

（A）场强大的地方电势一定高；

（B）场强相等的各点电势一定相等；

（C）场强为零的点电势不一定为零；

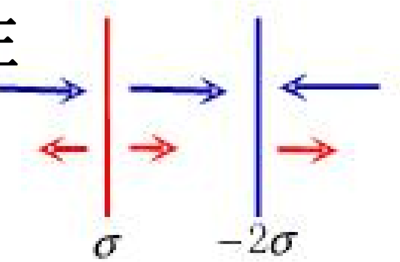
（D）场强为零的点电势必定为零。

填空题1：两块无限大的均匀带电平行平板，其电荷面密度分别为 $\sigma(\sigma>0)$及 -2σ，如图所示，试写出各区域的电场强度：

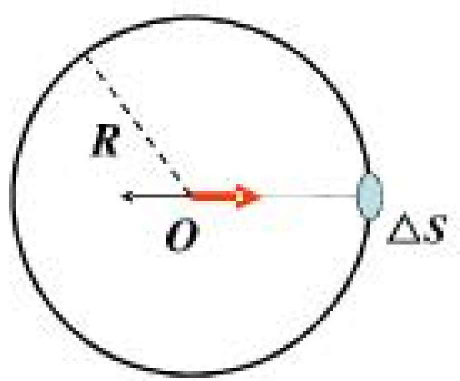
Ⅰ区 场强的大小 $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ，方向 向右

Ⅱ区 场强的大小 $\dfrac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$ ，方向 向右

Ⅲ区 场强的大小 $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ，方向 向左



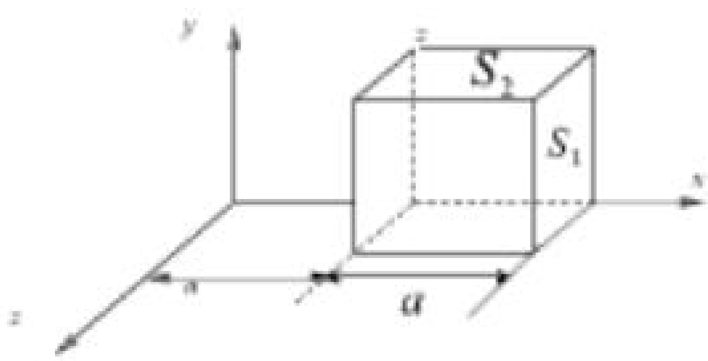
填空题2：如图所示，真空中有一半径为 R 的均匀带电球面，总带电量为Q（Q>0）。今在球面上挖去一小块的面积（连同电荷）ΔS，且假设挖去后不影响原来的电荷分布，则挖去后球心处电场强度的大小 $\dfrac{Q\cdot\Delta S}{16\pi^2\varepsilon_0 R^4}$ ，其方向为向右



$$E_{\Delta S}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q}{R^2}=\frac{Q\cdot\Delta S}{16\pi^2\varepsilon_0 R^4}$$

$$\vec{E}_{\Delta S}+\vec{E}=0$$

填空题3：真空中，沿x轴正方向分布着电场，电场强度为 $\vec{E}=bx\vec{i}$（b为正的常量）。如图所示，作一边长为a的正方形高斯面，则通过高斯面右侧面的电通量 $2a^3b$ ，通过上表面的电通量 0 ，立方体内的净电荷为$\varepsilon_0 a^3 b$



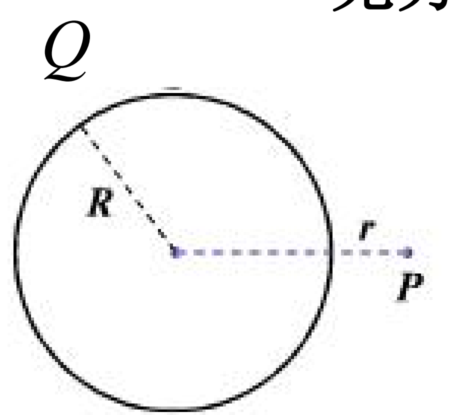
$$\Phi_1=\int\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$=b\cdot 2a\cdot a^2=2a^3b$$

$$\Phi=b\cdot 2a\cdot a^2-b\cdot a\cdot a^2$$

$$=a^3b=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

填空题4：一半径R的均匀带电球面，带电量为Q，若规定该球面上的电势为零，则球面外距球心r处的P点的电势为



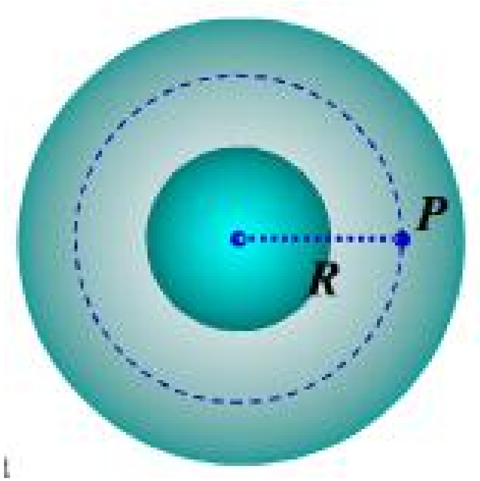
无穷远处零电势：$U_P = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $U_{面} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$$U_P - U_{面} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

规定球面电势为零电势差不变：

$$U(r) = \int_r^R \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^R \frac{Qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad U_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

填空题5：把一个均匀带电量为+Q的球形肥皂泡有半径r1吹到r2，则半径R（r1<R<r2）的高斯球面上任一点的场强大小E由　　　　变化为　　　　；电势U由　　　　变化为　　　　（选无穷远处为电势零点）。



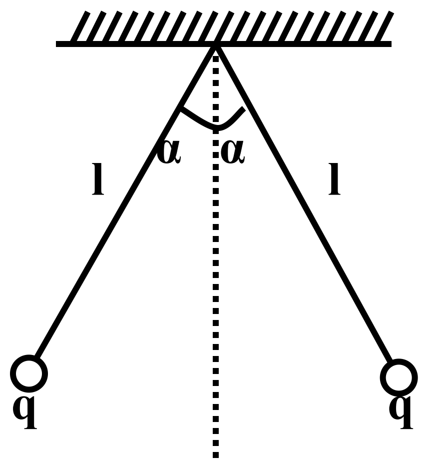
E	U
$\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$	$\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$
0	$\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$

1.1–10 两小球质量都是 m，都用长为 l 的细线挂在同一点；若它们带上相同的电荷量，平衡时两线夹角为 2θ（如题图）. 设小球的半径都可略去不计，求每个小球上的电荷量.

解：依题意可知，q受三个力处于平衡：

写成分量形式：

$$\vec{F}+\vec{T}+m\vec{g}=0$$



$$\begin{cases} T\cos\alpha = mg \\ T\sin\alpha = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2l\sin\alpha)^2} \end{cases}$$

$$\tan\alpha = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mg\,(2l\sin\alpha)^2}$$

$$q = \pm 2l\sin\alpha\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg\tan\alpha}$$

2-11. 两条平行的无线长直均匀带电导线,相距为a,电荷线密度分别为±η_e。（1）求这两线构成的平面上任一点（设这点到其中一线的垂直距离为x）的场强;（2）求两线单位长度间的相互吸引力。

解（1）依题意,做如图所示，故x处电场：

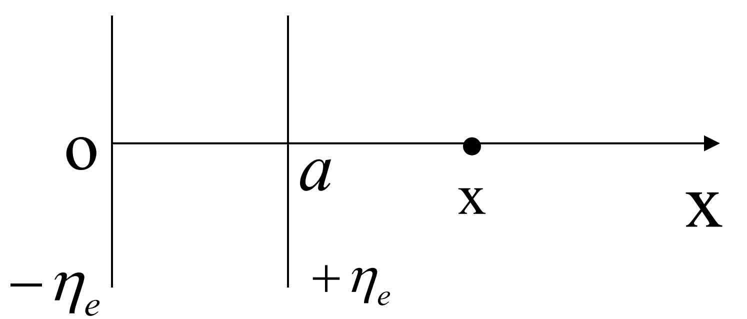
$$E=\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 x}-\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0(x-a)}=\frac{-\eta_e a}{2\pi\varepsilon_0 x(x-a)}$$

（2）第一直线电荷在第二直线电荷处的电场为：

$$E=\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

第二直线电荷单位长度受力为：

$$F=\frac{-\eta_e^{\,2}}{2\pi\varepsilon_0 a}\text{(负号表吸引力)}$$

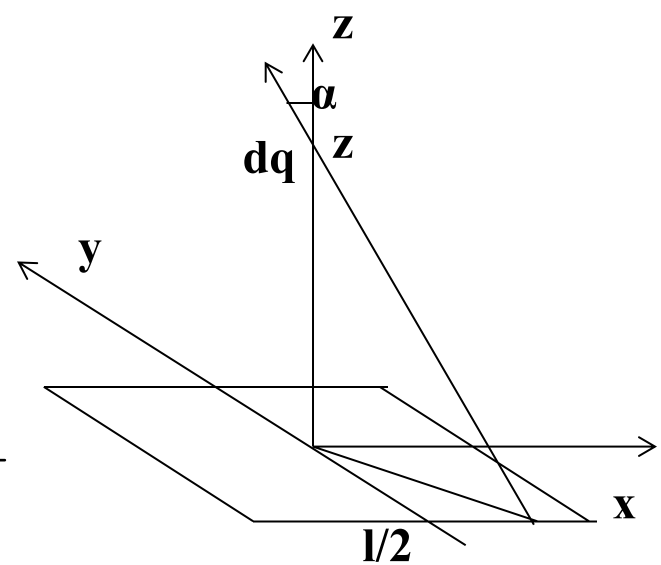


2-14 一均匀带电的正方形细框，边长为l，总电量为q。求这正方形轴线上离中心为x处的场强。

解：依题意作如图所示，线电荷密度为λ＝q/4l，其一个边上，x—x＋dx带电量为dq＝λdx。它在 z轴某点电场：

$$dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(l^2/4 + x^2 + y^2)}$$

由于对称性，z处总场强E为：

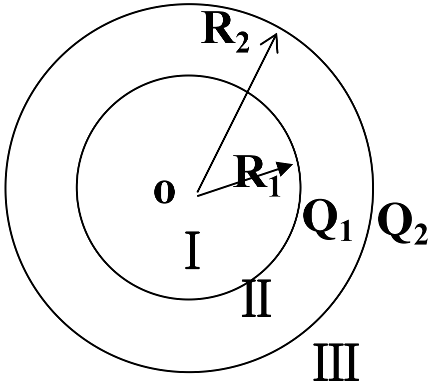


$$dE_z = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(l^2/4+x^2+y^2)}\frac{z}{\sqrt{l^2/4+x^2+y^2}}$$

$$E_z = 4\int dE_z = 4\int_{-l/2}^{l/2}\frac{z\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(l^2/4+x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(x^2+l^2/2)^{3/2}}$$

3-3 如附图所示，在半径为R_1和R_2的两个同心球面上，分别均匀地分布着电荷Q_1和Q_2，求：（1）Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三个区域内的场强分部；（2）若$Q_1=-Q_2$，情况如何？画出此情形的E－r曲线。

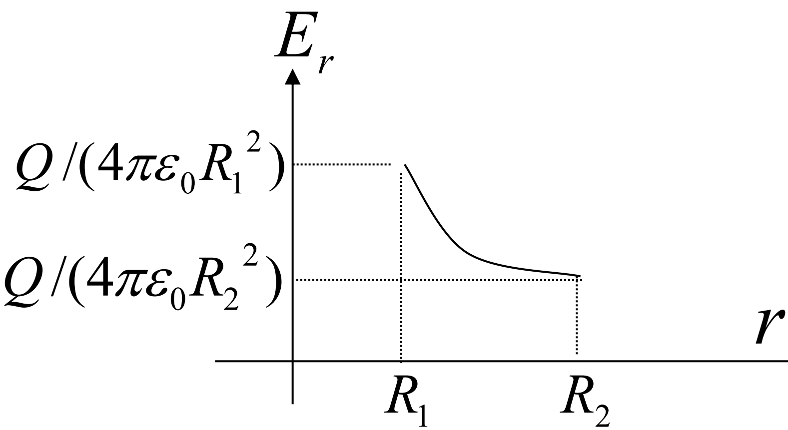


解：（1）高斯定理：$\oiint \vec{E}\,\vec{ds} = \dfrac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$

求E的分布：

$$E = \begin{cases} 0 & r<R_1 \\ Q_1/(4\pi\varepsilon_0 r^2) & R_1<r<R_2 \\ (Q_1+Q_2)/(4\pi\varepsilon_0 r^2) & r>R_2 \end{cases}$$

$$E = \begin{cases} 0 & r<R_1 \\ Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2) & R_1<r<R_2 \\ 0 & r>R_2 \end{cases}$$



拓展：一半径为R的带电球体，其电荷体密度分布为：

$$\rho = \frac{qr}{\pi R^4} \qquad (r \le R)$$

$$\rho = 0 \qquad (r > R)$$

q为一正的常数

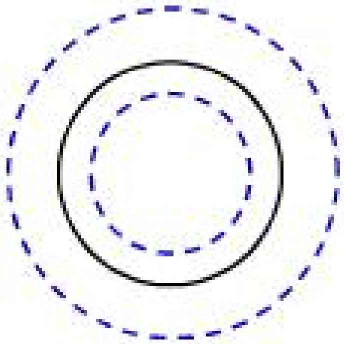
试求：（1）带电球体的总电量；（2）球内、球外各点的电场强度；（3）球内、外各点的电势。

解：（1）

$$dq = \rho dV = \rho 4\pi r^2 dr$$

$$Q = \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = q$$

（2）在r<R区域，



$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \frac{qr}{\pi R^4} 4\pi r^2 dr = \frac{qr^4}{\varepsilon_0 R^4}$$

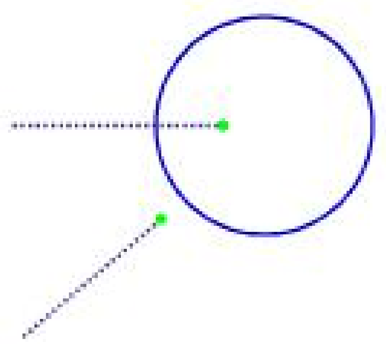
在r>R区域，

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \begin{cases} \dfrac{qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4} (r \le R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} (r > R) \end{cases}$$

（3）在r<R区域，

$$U=\int_0^R \vec{E}\cdot d\vec{r}+\int_R^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r}$$



$$=\int_0^R \frac{qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4}dr+\int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$=\frac{q}{12\pi\varepsilon_0 R}(4-\frac{r^3}{R^3})$$

在r>R区域，

$$U=\int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

3-7 一对无限长的共轴直圆筒，半径分别为R_1和R_2，筒面上都均匀带电。沿轴线单位长度的电量分别为λ_1和λ_2。（1）求各区域内的场强分布；（2）若$\lambda_1=-\lambda_2$情况如何？画出此情形的E－r曲线。

解：由高斯定理：

$$\oint\!\!\oint \vec{E}\,d\vec{s} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

（1）电场分布：

$$E = \begin{cases} 0 & r<R_1 \\ \lambda_1/(2\pi\varepsilon_0 r) & R_1<r<R_2 \\ (\lambda_1+\lambda_2)/(2\pi\varepsilon_0 r) & r>R_2 \end{cases}$$

$$E = \begin{cases} 0 & r<R_1 \\ \lambda_1/(2\pi\varepsilon_0 r) & R_1<r<R_2 \\ 0 & r>R_2 \end{cases}$$

3-13 一厚度为d的无限大平板，平板内均匀带电，电荷的体密度为ρ_e 。求板内外场强的分布。

解：板内：(x为场点到带电板中间面的距离)

由高斯定理得：

$$\oiint E \cdot dS = \sum q_i / \varepsilon_0$$

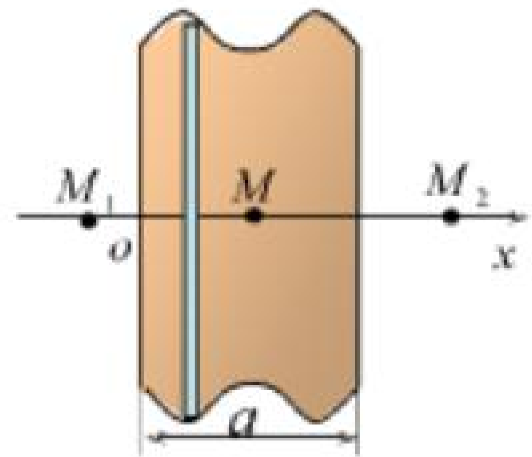
$$2ES = 2xS\rho / \varepsilon_0$$

$$E = \rho x / \varepsilon_0$$

板外：$2ES = dS\rho / \varepsilon_0$

$$E = \rho d / 2\varepsilon_0$$

拓展：如图所示，一厚为a的无限大带电平板，电荷体密度$\rho = kx(0 \le x \le a)$ k为一正常数。求（1）板外两侧任一点M1、M2的电场强度大小；（2）板内任一点M的电场强度；（3）场强最小的点在何处。



解: (1)在x处取厚为dx的平板，

此平板带电量

$$dq = \rho dx \cdot S$$

电荷面密度为

$$d\sigma = \frac{dq}{S} = \rho dx$$

则

$$dE = \frac{d\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho dx}{2\varepsilon_0} = \frac{kxdx}{2\varepsilon_0}$$

$$E = \int_0^a \frac{kxdx}{2\varepsilon_0} = \frac{ka^2}{4\varepsilon_0}$$

(2) 板内任一点M左侧产生的场强方向沿X轴正向

$$E_1=\int_0^x \frac{kxdx}{2\varepsilon_0}=\frac{kx^2}{4\varepsilon_0}$$

M右侧产生的场强方向沿X轴负向

$$E_2=\int_x^a \frac{kxdx}{2\varepsilon_0}=\frac{k(a^2-x^2)}{4\varepsilon_0}$$

$$\therefore E=\frac{kx^2}{4\varepsilon_0}-\frac{k(a^2-x^2)}{4\varepsilon_0}$$

$$=\frac{k}{4\varepsilon_0}(2x^2-a^2)$$

（3）E=0时最小

$$\therefore 2x^2-a^2=0$$

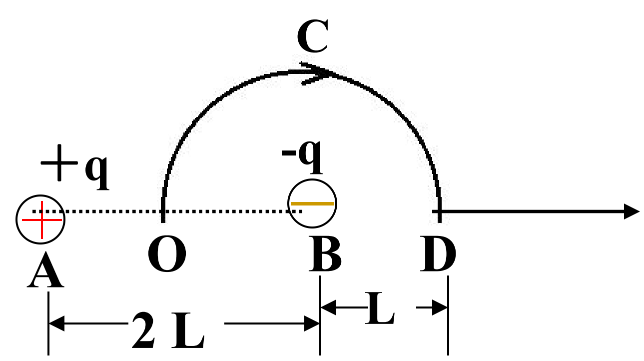
$$x=a/\sqrt{2}$$

4-8.如图所示，AB=2lL，OCD是以B为中心，为半径的半圆。A点有正点电荷+q，B点有负点电荷-q。

(1)把单位正电荷从O点沿OCD移到D点,电场力对它做了多少功?

(2)把单位负电荷从D点沿AB的延长线移到无穷远去，电场力对它做了多少功?

解：两电荷在O点,D点的电势为:



$$U_0=\frac{+q}{4\pi\varepsilon_0 l}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 l}=0$$

$$U_D=\frac{+q}{4\pi\varepsilon_0\times 3l}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 l}=-\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

(1)电场力的功: $A_{O\overset{\frown}{C}D}=q_0(U_0-U_D)=1\times(0-\frac{-q}{6\pi\varepsilon_0 l})=\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$

(2)电场力的功: $A_{D\infty}=q_0(U_D-U_\infty)=-1\times(-\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}-0)=\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$

4-15.求本章第二节习题13中均匀带电圆面轴线上的电势分布，并画U—x曲线。

解：在圆盘上r-r+dr取一圆环，带电量dq= $\sigma\cdot ds=\sigma\cdot 2\pi rdr$

它在中心轴的电势：

$$dU=\frac{dq}{4\pi\,\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{\sigma\cdot 2\pi rrdr}{4\pi\,\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{\sigma\cdot rdr}{4\pi\,\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$$

整个圆盘的电势为：

$$U=\int_0^R dU=\int_0^R\frac{\sigma\ rdr}{\varepsilon_0\sqrt{r+x^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+x^2}-x).$$

4-16. 求 本章第三节习题3中同心球在 三个区域内的电势分布.

解:

电场分布为:**E=** $\begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R_2 \end{cases}$

由电势分布公式: $U=\int_r^{\infty} E dr$

r<R$_1$:

$$U_I = \int_r^{\infty} E dr = \int_r^{R1} 0 dr + \int_{R1}^{R2} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{R2}^{\infty} \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1}+\frac{Q_2}{R_2}\right)$$

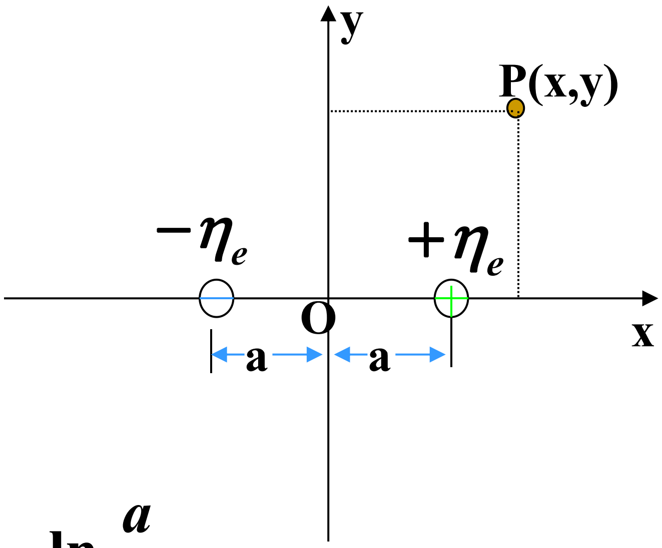
R$_1$<r<R$_2$:

$$U_{\text{II}} = \int_r^{R2} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{R2}^{\infty} \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r}+\frac{Q_2}{R_2}\right)$$

r>R$_2$:

$$U_{I\text{II}} = \int_r^{\infty} \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

4-27.如图所示，两条均匀带电的无限长直线(与图纸垂直),电荷的线密度分别为 $\pm\eta_e$ 相距2a，求空间任一点P（x,y）的电位。



解：如图所示，设O点电势为零，则：

$$+\eta_e\text{在}P\text{点电势}\quad U_1=\int_{r_1}^{a}\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 r}dr=\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{r_1}$$

$$-\eta_e\text{在}P\text{点电势}\quad U_2=\int_{r_2}^{a}\frac{-\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 r}dr=-\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{r_2}$$

$$\text{故}P\text{点电势}\ U=U_1+U_2=\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r_2-\ln r_1)=\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$=\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$

5-3.求均匀带电球体的电势能，设球的半径为R，带电总量为q。

解：由题18可得球内电势

$$U=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2-r^2)$$

由静电能公式：

$$W=\frac{1}{2}\iiint \rho\, U dv$$

$$=\frac{\rho}{2}\int\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2-r^2)4\pi r^2 dr$$

$$=\frac{\rho\, q\times 4\pi}{16\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\frac{3R^2r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^R$$

$$=\frac{3q\times q\times 4\pi}{4\pi\ R^3\times 16\pi\ \varepsilon_0 R^3}\left(R^5-\frac{1}{5}R^5\right)$$

$$=\frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$