

静电平衡时

- 场强:
- 导体内部场强处处为零 $\vec{E}_{\text{内}} = 0$
 - 表面场强垂直于导体表面 $\vec{E}_{\text{表面}} \perp$ 导体表面
- 电势:
- 导体为一等势体 $V=$ 常量
 - 导体表面是一个等势面

静电平衡时电荷分布

$$q_{\text{内}} = 0 \quad E_{\text{表面}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

计算有导体存在时的静电场分布的基本依据

- 导体静电平衡条件
- 电荷守恒
- 高斯定理

有介质时的静电场

- 根据介质中的高斯定理计算出电位移矢量
- 根据电场强度与电位移矢量的关系计算场强

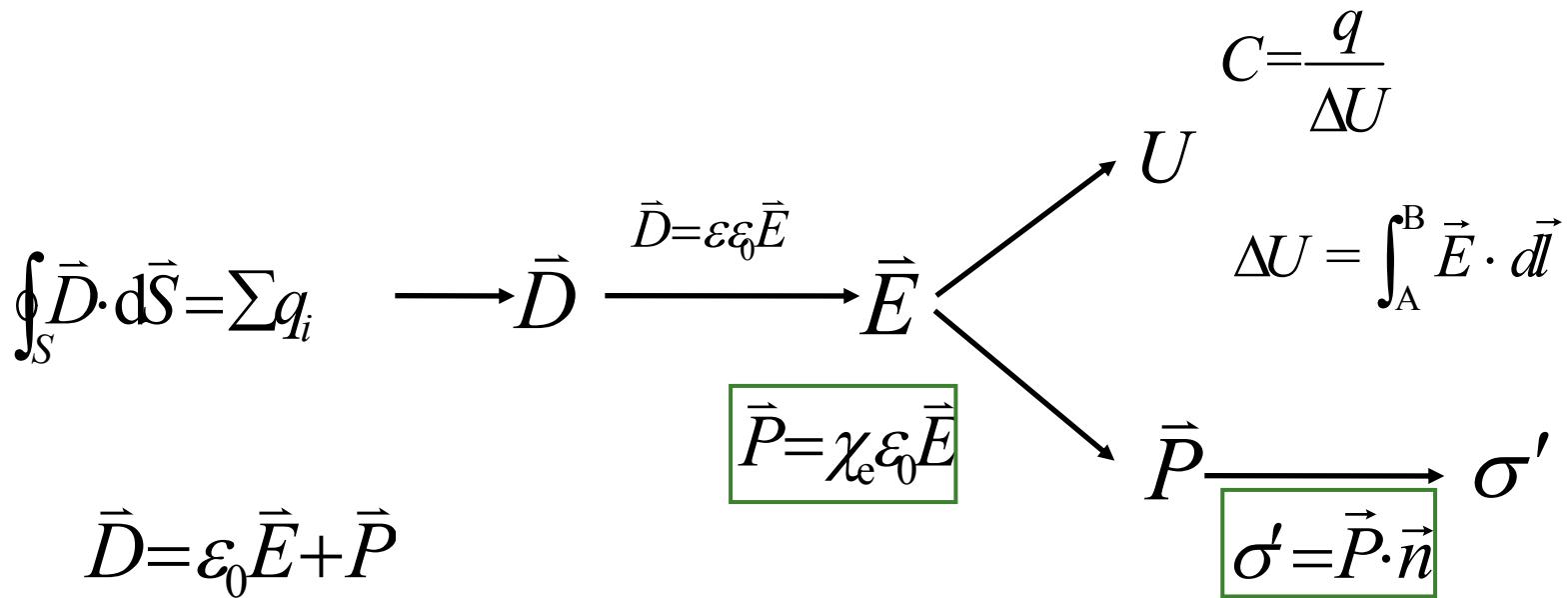
介质中的高斯定理: $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \sum q_0$

介质中的场强: $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon \epsilon_0}$

电位移矢量: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

极化电荷面密度: $\sigma' = P \cos \theta = P_n$

注意: 电位移矢量是一个辅助量, 描写电场的基本物理量是电场强度。



电容的计算： (1) 计算场强 E $\Delta U = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$
(2) 计算电势差
(3) 计算电容 $C = \frac{q}{\Delta U}$

电容器的电能：

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q(U_A - U_B) = \frac{1}{2} C(U_A - U_B)^2$$

电场的能量密度： $w_e = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2$

选择题1：当一个带电导体达到静电平衡时，

- (A) 导体表面上电荷密度较大处电势较高；
- (B) 导体表面曲率较大处电势较高；
- (C) 导体内部的电势比导体表面的电势高；
- (D) 导体内任一点与表面任一点的电势差等于零。

选择题2：选无穷远处为电势零点，半径为R的导体球带电后，其电势为 U_0 ，则球外离球心距离为r处的电场强度的大小为

(A) $\frac{R^2 U_0}{r^3}$

(B) $\frac{U_0}{R}$

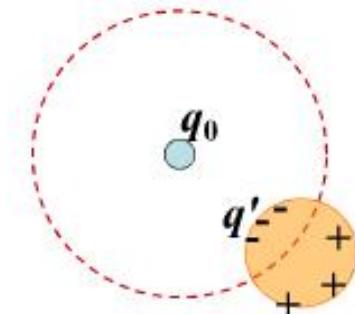
(C) $\frac{R U_0}{r^2}$

(D) $\frac{U_0}{r}$

$$U_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow q = 4\pi\epsilon_0 R U_0$$
$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 R U_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{R U_0}{r^2}$$

选择题3：在一点电荷产生的静电场中，一块电介质如图放置，以点电荷所在处为球心做球形闭合面，则对此球形闭合面：

- (A) 高斯定理成立，且可用它求出闭合面上各点的场强；
- (B) 高斯定理成立，但不能用它求出闭合面上各点的场强；**
- (C) 由于电介质不对称分布，高斯定理不成立；
- (D) 即使电介质对称分布，高斯定理也不成立。



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{\epsilon_0} (\sum q_0 + \sum q')$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

选择题4：一平行板电容器，两极板相距为d，对它充电后与电源断开，然后把电容器两极板之间的距离增大到2d，如果电容器内电场的边缘效应忽略不计，则

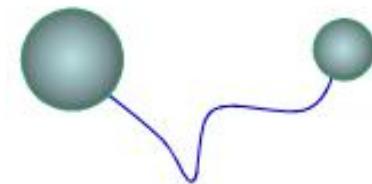
- (A) 电容器的电容增大一倍；
- (B) 电容器所带的电量增大一倍；
- (C) 电容器两极板间的电场强度增大一倍；
- (D) 储存在电容器中的电场能量增大一倍。

$$C = \frac{q}{\Delta U} = \frac{q}{Ed}$$

$$w_e = \frac{\varepsilon E^2}{2} \quad W_e = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon E^2 dV$$

选择题5：两个半径不同带电量相同的导体球，相距很远。今用一细长导线将它们连接起来，两球带电量重新分配的结果是：

- (A) 各球所带电量不变；
- (B) 半径大的球带电量多；
- (C) 半径大的球带电量少；
- (D) 无法确定哪一个导体球带电量多。



$$\frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$\frac{q'_1}{q'_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

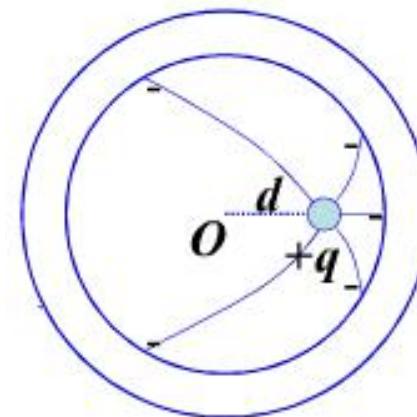
选择题6：一个未带电的空腔导体球壳，内半径为 R ，在腔内离球心的距离为 d 处（ $d < R$ ），固定一电量为 $+q$ 的点电荷，如图所示。用导线把球壳接地后，再把接地线撤去。选无穷远处为电势零点，则球心 O 处电势为：

(A) 0

(B) $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$

(C) $\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R}$

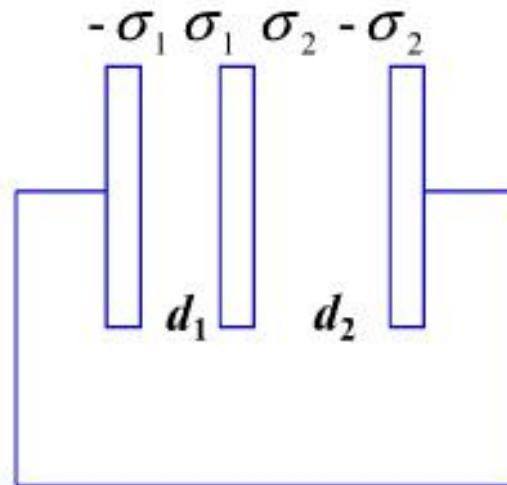
(D) $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right)$



选择题7：三块相互平行的导体板，相互之间的距离 d_1 和 d_2 ，比板的线度小得多，外面两板用导线连接起来。若中间板上带电，并假设其左右两面上电荷面密度分别为 σ_1 和 σ_2 ，如图所示。则比值 σ_1/σ_2 为：

- (A) $\frac{d_1}{d_2}$
- (B)** $\frac{d_2}{d_1}$
- (C) 1
- (D) $\frac{d_2^2}{d_1^2}$

$$\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \cdot d_1 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \cdot d_2$$



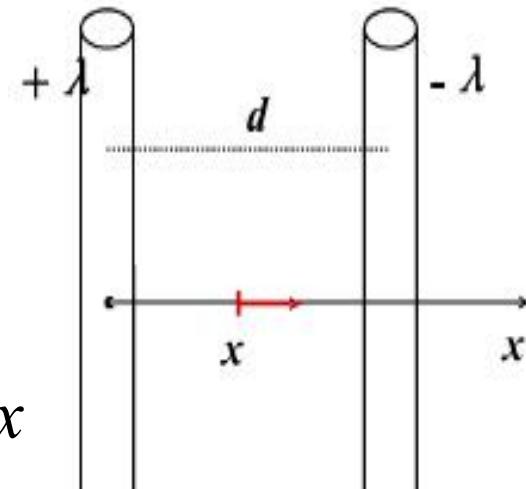
1 - 59. 半径都是 a 的两根平行长直导线相距为 d ($d \gg a$), 求单位长度的电容。

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d-x)}$$

$$\Delta U = U_A - U_B = \int_a^{d-a} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{d-a} E dx$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a}{a} \approx \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a}$$

$$C = \frac{q}{\Delta U} = \frac{\lambda \times 1}{U_A - U_B} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{a}}$$



1-5. 三平行金属板A B和C，面积都要200厘米²，AB相距4.0毫米，AC相距2.0毫米，BC两板都接地。如果使A板带正电 3.0×10^{-7} 库仑，在略去边缘效应时，问B板和C板上感应电荷各是多少？以地的电势为零，问A板的电势是多少？

解：

(1) A板左边右边电荷分别为 q_1, q_2 ，则：

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 + q_2 = q \\ E_1 d_1 = E_2 d_2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 + q_2 = q \\ q_1 d_1 / (\epsilon_0 S) = q_2 d_2 / (\epsilon_0 S) \end{array} \right.$$

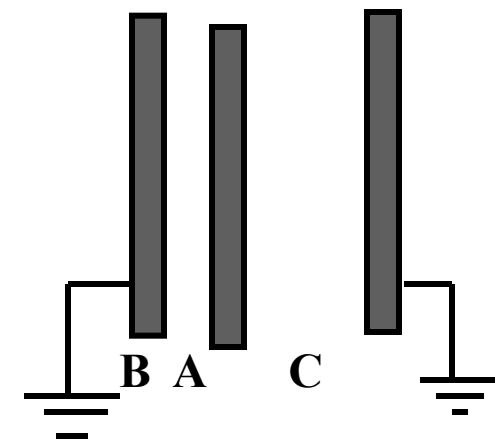
$$q_1 = q / (1 + d_1 / d_2) = q / (1 + 0.5) = 2.0 \times 10^{-7} \text{ (库仑)}$$

$$q_2 = q - q_1 = 1.0 \times 10^{-7} \text{ (库仑)}$$

$$(2) A板电势： $U_A = E_1 d_1 = q_1 d_1 / (\epsilon_0 S)$$$

$$= 2.0 \times 10^{-7} \times 2.0 \times 10^{-3} / (8.85 \times 10^{-12} \times 200 \times 10^{-4})$$

$$= 300 \text{ (伏)}$$



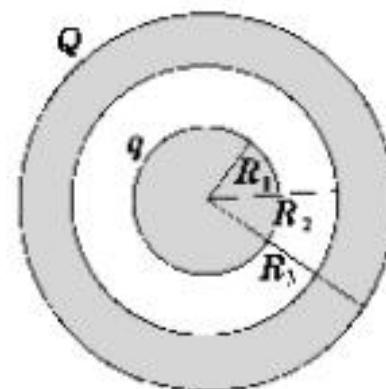
1-8. 半径为 R_1 的导体球带有电荷 q 球内有一个内外半径为 R_2 , R_3 的同心导体球壳，壳上带有电荷 Q 。 (1)求两球的电势 U_1 和 U_2 ; (2)两球的电势差 ΔU ; (3)以导线把球和壳联接在一起后, U_1 , U_2 和 ΔU 分别是多少? (4)在情形(1)(2)中, 若外球接地, U_1 , U_2 和 ΔU 为多少? (5) 设外球离地面很远, 若内球接地, 情况如何?

由高斯定理 $\oint E ds = \sum q_i / \epsilon_0$ 求得电场分布:
 $E = 0$ $r < R_1$

$$E = q / (4 \pi \epsilon_0 r^2) \quad R_1 < r < R_2$$

$$E = 0 \quad R_2 < r < R_3$$

$$E = (Q+q) / (4 \pi \epsilon_0 r^2) \quad r > R_3$$



内球电势:

外球电势:

(5) 内球接地, 则内球电势为 0, 三个球面上的电荷分布发生变化。设内球表面电荷为 q_1 , 球壳内表面电荷为 q_2 , 球壳外表面电荷为 q_3 , 根据导体静电平衡条件, 有

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} + \frac{q_3}{R_3} \right) = 0,$$

此外还有

$$q_1 + q_2 = 0, \quad q_2 + q_3 = Q,$$

由此三式解出

$$q_1 = -q_2 = \frac{-R_1 R_2 Q}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_3 R_1},$$

$$q_3 = \frac{(R_2 - R_1) R_3 Q}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_3 R_1},$$

于是

$$U_1 = 0, \quad U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(R_2 - R_1) Q}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_3 R_1},$$

$$\Delta U = U_1 - U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(R_1 - R_2) Q}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_3 R_1}.$$

2-33 一平行板电容器极板面积为S，间距为d，带电Q，将极板的距离拉开一倍。

(1) 静电能改变多少？

(2) 抵抗电场做了多少功？

解：(1) 拉开前电容器储能： $W_1 = \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 s/d} = \frac{dQ^2}{2\epsilon_0 s}$

拉开后电容器储能：

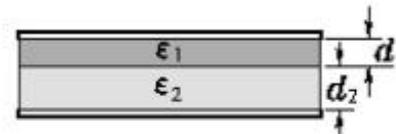
$$W_2 = \frac{Q^2}{2C_2} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 s/2d} = \frac{dQ^2}{\epsilon_0 s}$$

能量改变： $\Delta W = W_2 - W_1 = dQ^2 / 2\epsilon_0 s$

(2) 依能量守恒，外力的功等于静电能的增加：

$$A = \Delta W = dQ^2 / 2\epsilon_0 s$$

3-4 平行板电容器(极板面积为 S , 间距为 d) 中间有两层厚度各为 d_1 和 d_2 ($d_1+d_2=d$)、介电常量各为 ϵ_1 和 ϵ_2 的电介质层(见本题图)。试求:



(1) 电容 C ;

习题 4-2

(2) 当金属板上带电面密度为 $\pm\sigma_{e0}$ 时, 两层介质的分界面上的极化电荷面密度 σ'_e :

(解: (1) 设上极板带正电, 面电荷密度为 σ_{e0} , 下极板带负电, 面电荷密度为 $-\sigma_{e0}$, 则可得

$$D = \sigma_{e0}, \quad E_1 = \frac{D}{\epsilon_1 \epsilon_0} = \frac{\sigma_{e0}}{\epsilon_1 \epsilon_0}, \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_2 \epsilon_0} = \frac{\sigma_{e0}}{\epsilon_2 \epsilon_0};$$

从而

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{(\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2) \sigma_{e0}}{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_0},$$

$$C = \frac{Q_e}{U} = \frac{\sigma_{e0} S}{(\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2) \sigma_{e0} / \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_0} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_0 S}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2}.$$

$$(2) \sigma'_e = \sigma'_{e1} + \sigma'_{e2} = P_1 - P_2 = (\epsilon_1 - 1) \epsilon_0 E_1 - (\epsilon_2 - 1) \epsilon_0 E_2 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_2} \sigma_{e0},$$

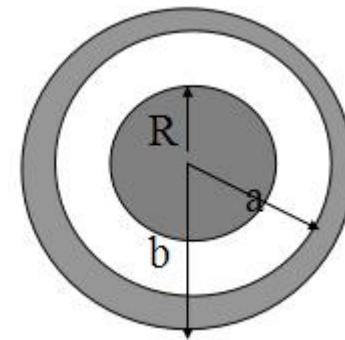
若上极板带负电, 则

$$\sigma'_e = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \sigma_{e0}.$$

$$(3) U = \frac{(\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2) \sigma_{e0}}{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_0}. \quad (4) D_1 = D_2 = \sigma_{e0}.$$

3-19一半径为R的导体球带电荷Q，球外有一层同心球壳的均匀电介质，其内外半径分别为a和b，介电常数为 ϵ ，求：

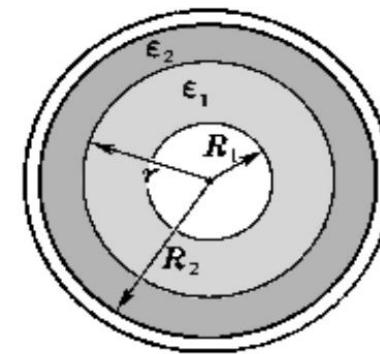
- (1) 介质内外的电场强度E和电位移D；
- (2) 介质内的极化强度P和表面上的极化电荷密度 σ_p ；
- (3) 介质内的极化电荷体密度 ρ_p 为多少？



4 - 12. 球形电容器由半径为 R_1 的导体球和与它同心的导体球壳构成, 壳的内半径为 R_2 , 其间有两层均匀电介质, 分界面的半径为 r , 介电常量分别 ϵ_1 和 ϵ_2 (见本题图)。

(1) 求电容 C ;

(2) 当内球带电 $-Q$ 时, 求各介质表面上极化电荷的面密度 σ'_e .



习题 4 - 12

解: (1)

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad \begin{cases} E_1 = \frac{D}{\epsilon_1 \epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_1 \epsilon_0 r^2}, & R_1 < r < R \\ E_2 = \frac{D}{\epsilon_2 \epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_2 \epsilon_0 r^2}, & R < r < R_2 \end{cases}$$

极板间 电势差为

$$U = \int_{R_1}^R E_1 dr + \int_R^{R_2} E_2 dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{\epsilon_1 R_1} - \frac{1}{\epsilon_1 R} \right) + \left(\frac{1}{\epsilon_2 R} - \frac{1}{\epsilon_2 R_2} \right) \right],$$

$$\therefore C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_0 R R_1 R_2}{\epsilon_2 R_2 (R - R_1) + \epsilon_1 R_1 (R_2 - R_1)}.$$

$$(2) \sigma'_e(R_1) = P_1 = \chi_e \epsilon_0 E_1 = \frac{(\epsilon_1 - 1)Q}{4\pi \epsilon_1 R_1^2},$$

$$\sigma'_e(R) = \frac{(\epsilon_2 - 1)Q}{4\pi \epsilon_2 R^2} - \frac{(\epsilon_1 - 1)Q}{4\pi \epsilon_1 R^2} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)Q}{4\pi \epsilon_1 \epsilon_2 R^2},$$

$$\sigma'_e(R_2) = -\frac{(\epsilon_2 - 1)Q}{4\pi \epsilon_2 R_2^2}.$$