

1-1. 氢原子由一个质子(即氢原子核)和一个电子组成。根据经典模型，在正常状态下，电子绕核作圆周运动，轨道半径是 5.29×10^{-11} m。已知质子质量 $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg，电子质量 $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg，电荷分别为 $\pm e = \pm 1.60 \times 10^{-19}$ C，万有引力常量 $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg²。(1)求电子所受质子的库仑力和引力；(2)库仑力是万有引力的多少倍？(3)求电子的速度。

解：(1)

$$f_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12}} \frac{(1.60 \times 10^{-19})^2}{(5.29 \times 10^{-11})^2} N = 8.23 \times 10^{-8} N,$$

$$f_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{9.11 \times 10^{-31} \times 1.67 \times 10^{-27}}{(5.29 \times 10^{-11})^2} N = 3.63 \times 10^{-47} N.$$

$$(2) \frac{f_C}{f_G} = \frac{8.23 \times 10^{-8}}{3.63 \times 10^{-47}} = 2.27 \times 10^{39}.$$

$$(3) m_1 \frac{v^2}{r} = f_C,$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{f_C r}{m_1}} = \sqrt{\frac{8.23 \times 10^{-8} \times 5.29 \times 10^{-11}}{9.11 \times 10^{-31}}} m/s = 2.19 \times 10^6 m/s.$$

1-2. 卢瑟福实验证明:当两个原子核之间的距离小到 10^{-15} m时,它们之间的排斥力仍遵守库仑定律。金的原子核中有79个质子,氦的原子核(即 α 粒子)中有2个质子。已知每个质子带电 $e=1.60\times10^{-19}$ C, α 粒子的质量为 6.68×10^{-27} kg。当 α 粒子与金核相距为 6.9×10^{-15} m时(设这时它们都仍可当作点电荷),求(1) α 粒子所受的力;(2) α 粒子的加速度。

解:(1)

$$f_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{79 \times 1.60 \times 10^{-19} \times 2 \times 1.60 \times 10^{-19}}{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times (6.90 \times 10^{-15})^2} N = 7.64 \times 10^{-2} N,$$

$$(2) a = \frac{f}{m} = \frac{7.64 \times 10^{-2}}{6.68 \times 10^{-27}} m/s^2 = 1.14 \times 10^{29} m/s^2.$$

1 - 3. 铁原子核里两质子相距 $4.0 \times 10^{-15} \text{ m}$, 每个质子带电 $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$, (1) 求它们之间的库仑力; (2) 比较这力与每个质子所受重力的大小。

$$\text{解: (1)} f_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1.60 \times 10^{-19} \times 1.60 \times 10^{-19}}{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times (4.0 \times 10^{-15})^2} \text{ N} = 14.4 \text{ N};$$

$$\text{(2)} f_g = mg = (1.67 \times 10^{-27} \times 9.80) \text{ N} = 1.64 \times 10^{-26} \text{ N},$$

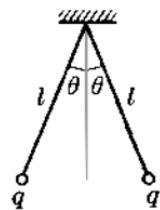
$$\frac{f_C}{f_g} = \frac{14.4}{1.64 \times 10^{-26}} = 8.8 \times 10^{26}.$$

1 - 4. 两小球质量都是 m , 都用长为 l 的细线挂在同一
点, 若它们带上相同的电量, 平衡时两线夹角为 2θ (见本题
图)。设小球的半径都可略去不计, 求每个小球上的电量。

$$\text{解: } r = l \sin \theta, \quad \frac{f_c}{f_g} = \frac{\frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{q \cdot q}{(2r)^2}}{mg} = \tan \theta,$$

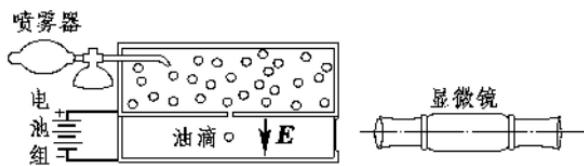
$$\therefore q = \pm 4l \sin \theta \sqrt{\pi \varepsilon_0 mg \tan \theta}$$

两个小球上的电荷或都正, 或都负。



习题 1 - 4

1 - 5. 电子所带的电荷量(基元电荷 $-e$) 最先是由密立根通过油滴实验测出的。密立根设计的实验装置如本题图所示。一个很小的带电油滴在电场 E 内。调节 E ,使作用在油滴上的电场力与油滴所受的重力平衡 ,如果油滴的半径为 1.64×10^{-4} cm ,在平衡时 , $E = 1.92 \times 10^5$ N/C. 求油滴上的电荷(已知油的密度为 0.851 g/cm³)。



习题 1 - 5

$$\text{解: } -qE = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g,$$

$$q = -\frac{4 \times 3.14 \times (1.64 \times 10^{-6})^3 \times 0.851 \times 10^3 \times 9.80}{3 \times 1.92 \times 10^5} \text{ C} = -8.02 \times 10^{-19} \text{ C.}$$

1 - 6. 在早期(1911年)的一连串实验中,密立根在不同时刻观察单个油滴上呈现的电荷,其测量结果(绝对值)如下:

$$\begin{array}{lll} 6.568 \times 10^{-19} \text{ C} & 13.13 \times 10^{-19} \text{ C} & 19.71 \times 10^{-19} \text{ C} \\ 8.204 \times 10^{-19} \text{ C} & 16.48 \times 10^{-19} \text{ C} & 22.89 \times 10^{-19} \text{ C} \\ 11.50 \times 10^{-19} \text{ C} & 18.08 \times 10^{-19} \text{ C} & 26.13 \times 10^{-19} \text{ C} \end{array}$$

根据这些数据,可以推得基元电荷 e 的数值为多少?

解:由于单个油滴上所带的电子数只能是整数,分析所给的数据,可以看出,它们大约是某个公约数 $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 的整数倍,这表明,此公约数可能正是一个电子所具有的基元电荷的数值。因此将这组数分别除以4、5、7、8、10、11、12、14、16,取它们的平均,得 $1.641 \times 10^{-19} \text{ C}$,此即密立根所得的基元电荷 e 的实验值。

1 - 7. 根据经典理论 , 在正常状态下 , 氢原子中电子绕核作圆周运动 , 其轨道半径为 5.29×10^{-11} m. 已知质子电荷为 $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C , 求电子所在处原子核(即质子) 的电场强度。

解 :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{1.60 \times 10^{-19}}{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times (5.29 \times 10^{-11})^2} \text{ V/m} = 5.14 \times 10^{11} \text{ V/m.}$$

1-8. 如本题图,一电偶极子的电偶极矩 $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$, P 点至偶极子中心 O 的距离为 r , \mathbf{r} 与 \mathbf{l} 的夹角为 θ . 设 $r \gg l$, 求 P 点的电场强度 \mathbf{E} 在 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ 方向的分量 E_r 和垂直于 \mathbf{r} 方向上的分量 E_θ .

解: $E_r = E_+ \cos\alpha_+ - E_- \cos\alpha_-$,

$$\text{式中 } E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_+^2}, \quad E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_-^2},$$

α_+ , α_- 分别为 \mathbf{r}_+ , \mathbf{r}_- 与 \mathbf{r} 之间的夹角, 而

$$\frac{1}{r_+^2} = \left(r - \frac{l}{2} \cos\theta \right)^{-2} \approx \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{l}{r} \cos\theta \right),$$

$$\frac{1}{r_-^2} = \left(r + \frac{l}{2} \cos\theta \right)^{-2} \approx \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{l}{r} \cos\theta \right),$$

$$\cos\alpha_+ \approx 1, \quad \cos\alpha_- \approx 1,$$

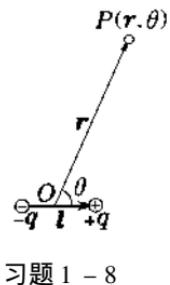
$$\therefore E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2l}{r^3} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos\theta}{r^3}.$$

$$\text{又 } E_\theta = E_+ \sin\alpha_+ + E_- \sin\alpha_-,$$

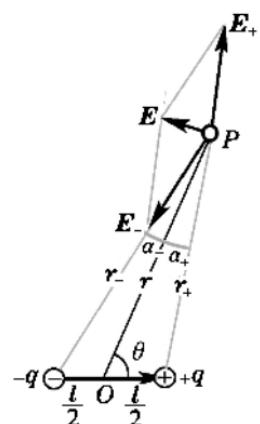
$$\text{式中 } \sin\alpha_+ \approx \sin\alpha_- \approx \frac{l}{2r} \sin\theta,$$

$$\begin{aligned} \therefore E_\theta &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{2r} \sin\theta \left(\frac{1}{r_+^2} + \frac{1}{r_-^2} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{r^3} \sin\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^3}. \end{aligned}$$

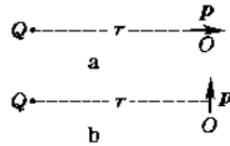
E_r , E_θ 表达式中的 $p = ql$ 为电偶极矩的大小。



习题 1-8



1-9. 把电偶极矩为 $\mathbf{p}=ql$ 的电偶极子放在点电荷 Q 的电场内， \mathbf{p} 的中心 O 到 Q 的距离为 r ($r \gg l$)。分别求(1) $\mathbf{p} \parallel \overrightarrow{QO}$ (本题图 a) 和(2) $\mathbf{p} \perp \overrightarrow{QO}$ (图 b) 时偶极子所受的力 \mathbf{F} 和力矩 \mathbf{L} 。



$$\text{解: (1)} \quad F = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(r-l/2)^2} - \frac{1}{(r+l/2)^2} \right] \quad \text{习题 1-9}$$

$$\approx \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[1 + \frac{l}{r} - \left(1 - \frac{l}{r} \right) \right] = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{2l}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Qp}{r^3},$$

\mathbf{F} 的方向指向 Q ； 力矩 $\mathbf{L} = 0$ 。

$$(2) F = \frac{qQ \sin\theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^2 + (l/2)^2} + \frac{1}{r^2 + (l/2)^2} \right] \approx \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{l/2}{r} \frac{2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qp}{r^3},$$

\mathbf{F} 的方向与 \mathbf{p} 的方向相同；

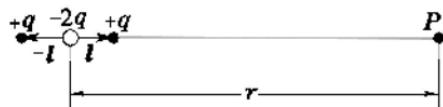
$$L = \frac{qQl}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2 + (l/2)^2} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qp}{r^2}, \quad \mathbf{L} \text{ 的方向垂直纸面向里。}$$

1 - 10. 本题图中所示是一种电四极子，它由两个相同的电偶极子 $\mathbf{p} = q \mathbf{l}$ 组成，这两个偶极子在一直线上，但方向相反，它们的负电荷重合在一起。试证明：在它们的延长线上离中心

(即负电荷)为 $r(r \gg l)$ 处，

$$(1) \text{ 场强为 } E = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^4},$$

$$(2) \text{ 电势为 } U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

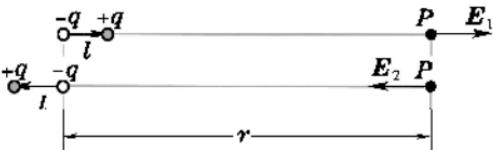


习题 1 - 10

式中 $Q = 2ql^2$ 叫做它的电四极矩。

解：(1) 题中的四极子可看成

右图所示的两个偶极子组成，它们在 P 点所产生的场强分别为 E_1 和 E_2 ，由 1 - 8 题的结果可知



$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{(r-l/2)^3}, \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{(r+l/2)^3};$$

P 点的场强为

$$\begin{aligned} E &= E_1 - E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \left[\frac{1}{(1-l/2r)^3} - \frac{1}{(1+l/2r)^3} \right] \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \left[1 + \frac{3l}{2r} - \left(1 - \frac{3l}{2r} \right) \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql \cdot 3l}{r^4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q}{r^4}; \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 电势 } U = U_1 - U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p}{(r-l/2)^2} - \frac{p}{(r+l/2)^2} \right]$$

$$\approx \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[1 + \frac{l}{r} - \left(1 - \frac{l}{r} \right) \right] = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0} \frac{2l}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3}.$$

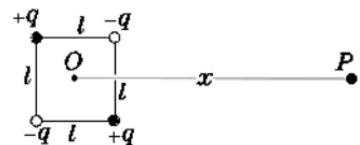
1 - 11. 本题图中所示是另一种电四极子, 设 q 和 l 都已知, 图中 P 点到电四极子中心 O 的距离为 x ($x \gg l$) , \overrightarrow{OP} 与正方形的一对边平行, 求 P 点的电场强度 E .

解: 本题中的四极子可看成左右一对竖直反向偶极子组成, 它们在 P 点所产生的场强分别为 E_1 和 E_2 , 由 1 - 8 题的结果可知

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{(x-l/2)^3}, \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{(x+l/2)^3};$$

P 点的场强为

$$\begin{aligned} E &= E_1 - E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3} \left[\frac{1}{(1-l/2x)^3} - \frac{1}{(1+l/2x)^3} \right] \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3} \left[1 + \frac{3l}{2x} - \left(1 - \frac{3l}{2x} \right) \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot 3l}{x^4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3pl}{x^4}. \end{aligned}$$



习题 1 - 11

1-12. 两条平行的无限长直均匀带电线 相距为 a , 电荷线密度分别为 $\pm\eta_e$. (1) 求这两线构成的平面上任一点(设这点到其中一线的垂直距离为 x) 的场强 ;(2) 求每线单位长度上所受的相互吸引力。

解 : 设两平行线中左边一条带负电 , 右边一条带正电 , 原点取在二者中间 , 场点 P 的坐标为 x .

(1) 利用书上例题 3 的结果 , 有

$$(1) \quad E = \frac{\eta_e}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x-a/2} - \frac{1}{x+a/2} \right) = \frac{\eta_e a}{2\pi\epsilon_0(x^2 - a^2/4)};$$

$$(2) \quad F = \eta_e \cdot \frac{2\eta_e}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{\eta_e^2}{2\pi\epsilon_0 a}.$$

1 - 13. 均匀电场与半径为 a 的半球面的轴线平行 , 试用面积分计算通过此半球面的电通量。

解 :
$$\begin{aligned}\Phi_E &= \iint E \cos\theta dS = E \iint \cos\theta a d\theta \cdot a \sin\theta d\varphi \\ &= E a^2 \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = E \pi a^2.\end{aligned}$$

可见 , 在这种情形下 , 均匀电场通过半球面的电通量等于 E 与大圆面积的乘积。

1 - 14. 根据量子理论, 氢原子中心是个带正电 e 的原子核(可看成点电荷), 外面是带负电的电子云。在正常状态(核外电子处在 s 态)下, 电子云的电荷密度分布球对称:

$$\rho_e = -\frac{e}{\pi a_B^3} e^{-2r/a_B},$$

式中 a_B 为一常量(它相当于经典原子模型中电子圆形轨道的半径, 称为玻尔半径)。求原子内的电场分布。

解: 原子核在距中心 r 处的场强为

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2};$$

电子在距中心 r 处的场强可用高斯定理计算:

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 E_- &= \frac{1}{\epsilon_0} \iint \rho_e dV \\ E_- &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_0^r \left(-\frac{e}{\pi a_B^3} e^{-2r/a_B} \right) r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \frac{e}{\pi a_B^3} \left[\left(\frac{a_B r^2}{2} + \frac{a_B^2 r}{2} + \frac{a_B^3}{4} \right) e^{-2r/a_B} - \frac{a_B^3}{4} \right], \end{aligned}$$

因此原子内的场强为

$$E = E_+ + E_- = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[2 \left(\frac{r}{a_B} \right)^2 + 2 \frac{r}{a_B} + 1 \right] e^{-2r/a_B},$$

方向由中心指向外。

1 - 15. 实验表明 在靠近地面处有相当强的电场 E 垂直于地面向下 , 大小约为 100 V/m ; 在离地面 1.5 km 高的地方 E 也是垂直于地面向下的 , 大小约为 25 V/m .

(1) 试计算从地面到此高度大气中电荷的平均体密度 ;

(2) 如果地球上的电荷全部均匀分布在表面 , 求地面上电荷的面密度。

解 (1) 在地球表面取一底面积为 S 、高为 $h = 1.5 \times 10^3 \text{ m}$ 的柱体 , 据高斯定理 :

$$E_1 S - E_2 S = \frac{1}{\epsilon_0} Sh \rho_e ,$$

$$\therefore \rho_e = \frac{\epsilon_0}{h} (E_1 - E_2) = \frac{8.85 \times 10^{-12}}{1.5 \times 10^3} \times (100 - 25) \text{ C/m}^3 = 4.4 \times 10^{-13} \text{ C/m}^3.$$

(2) 据高斯定理 :

$$E_1 \cdot (-1) \cdot 4\pi R^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot 4\pi R^2 \cdot \sigma_e ,$$

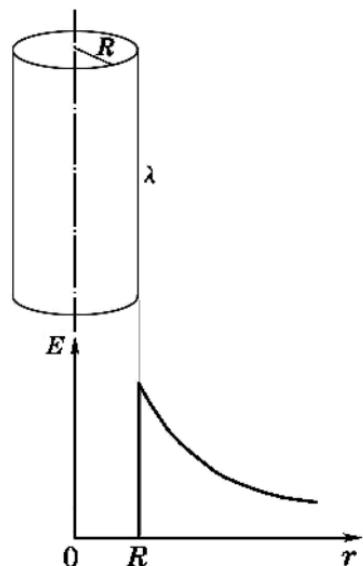
$$\therefore \sigma_e = -\epsilon_0 E_1 = -(8.85 \times 10^{-12} \times 100) \text{ C/m}^2 = -8.9 \times 10^{-10} \text{ C/m}^2.$$

1 - 16. 半径为 R 的无穷长直圆筒面上均匀带电 , 沿轴线单位长度的电量为 λ . 求场强分布 , 并画出 $E-r$ 曲线。

解 : 电荷分布具有轴对称性 , 运用高斯定理可得场强分布 :

$$E = \begin{cases} 0, & r < R \\ \lambda / 2 \pi \varepsilon_0 r, & r > R \end{cases}$$

$E-r$ 分布曲线如右。



0 R r

1 - 17. 两无限大的平行平面均匀带电 , 电荷的面密度分别为 $\pm\sigma_e$, 求各区域的场强分布。

解 : 此题所给电荷分布的对称性 , 不足以一次使用高斯定理求总场强 , 但对于每一 无穷大带电平面可运用高斯定理 , 然后再用场强叠加原理求总场强。最后结果为

$$E = \begin{cases} 0, & \text{两带电平面外侧;} \\ \sigma_e/\epsilon_0, & \text{两带电平面之间 , 方向由正电荷指向负电荷。} \end{cases}$$

1 - 18. 两无限大的平行平面均匀带电, 电荷的面密度都是 σ_e , 求各处的场强分布。

解: 本题可用高斯定理一次性求解。结果为

$$E = \begin{cases} \sigma_e / \epsilon_0, & \text{两带电平面外侧} \\ 0, & \text{两带电平面之间} \end{cases}$$

1 - 19. 三个无限大的平行平面都均匀带电 , 电荷的面密度分别为 σ_{e1} 、 σ_{e2} 、 σ_{e3} . 求下列情况各处的场强 :

- (1) $\sigma_{e1} = \sigma_{e2} = \sigma_{e3} = \sigma_e$;
- (2) $\sigma_{e1} = \sigma_{e3} = \sigma_e$; $\sigma_{e2} = -\sigma_e$;
- (3) $\sigma_{e1} = \sigma_{e3} = -\sigma_e$; $\sigma_{e2} = \sigma_e$;
- (4) $\sigma_{e1} = \sigma_e$, $\sigma_{e2} = \sigma_{e3} = -\sigma_e$.

解 : 对于单个无限大均匀带电面运用高斯定理 , 然后用场强叠加原理求总场强。各区域内 E (以 σ_e/ϵ_0 为单位) 为 :

	σ_{e1}	σ_{e2}	σ_{e3}
(1)	-3/2	-1/2	+1/2
(2)	-1/2	+1/2	-1/2
(3)	+1/2	-1/2	+1/2
(4)	+1/2	+3/2	+1/2

+ 号表示场强方向向右 , - 号表示场强方向向左。

1 - 20. 一厚度为 d 的无限大平板, 平板体内均匀带电, 电荷的体密度为 ρ_0 . 求板内、外场强的分布。

解: 运用高斯定理可解出

$$E_x = \begin{cases} \rho_0 x / \epsilon_0, & \text{板内} \\ \rho_0 d / \epsilon_0, & \text{板外} \end{cases}$$

式中 x 为场点到带电板中间面的距离。

1 - 21. 在夏季雷雨中 ,通常一次闪电里两点间的电势差约为 100 MV ,通过的电量约为 30 C. 问一次闪电消耗的能量是多少 ?如果用这些能量来烧水 ,能把多少水从 0 °C 加热到 100 °C ?

解 : 一次闪电消耗能量

$$W = q U = (30 \times 100 \times 10^6) J = 3.0 \times 10^9 J,$$

水的比热容为 $c = 4.19 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$,用这些能量来烧水 ,可从 0 °C 加热到 100 °C 的水的质量为

$$m = \frac{W}{c(T_2 - T_1)} = \frac{3.0 \times 10^9}{4.19(100 - 0)} \text{ kg} = 7.2 \times 10^3 \text{ kg}.$$

1-22. 已知空气的击穿场强为 $2 \times 10^6 \text{ V/m}$, 测得某次闪电的火花长 100 m, 求发生这次闪电时两端的电势差。

解 :
$$U = El = (2 \times 10^6 \times 100) \text{ V} = 2 \times 10^8 \text{ V.}$$

1 - 23. 求一对等量同号点电荷联线中点的场强和电势 ,设电荷都是 q ,两者之间距离为 $2l$.

解 : $E = 0$, $U = q/2 \pi \epsilon_0 l$.

1 - 24. 求一对等量异号点电荷联线中点的场强和电势 ,设电荷分别为 $\pm q$,两者之间距离为 $2l$.

解 : $E = q/2 \pi \epsilon_0 l^2$, $U = 0$.

1 - 25. 如本题图,一半径为 R 的均匀带电圆环,电荷总量为 q ($q > 0$). (1) 求轴线上离环中心 O 为 x 处的场强 E ; (2) 画出 $E-x$ 曲线; (3) 轴线上什么地方场强最大? 其值多少? (4) 求轴线上电势 $U(x)$ 的分布; (5) 画出 $U-x$ 曲线; (6) 轴线上什么地方场电势最高? 其值多少?

解 (1)

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{2\pi R} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\eta_e dl}{x^2 + R^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\eta_e x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}; \end{aligned}$$

(2) $E-x$ 曲线如右图所示;

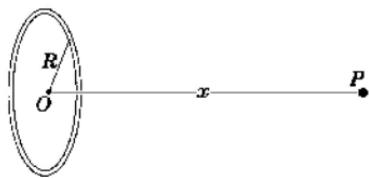
(3) 由 $\frac{dE}{dx} = 0$ 可求出 E 的极值位置在 $x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$ 处, 其值为

$$E = \pm \frac{\sqrt{3}q}{18\pi\epsilon_0 R^2};$$

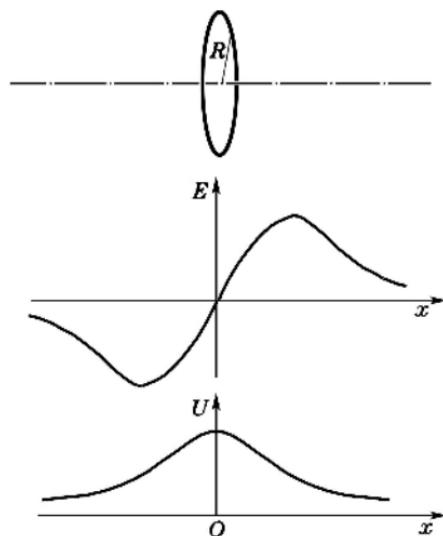
$$\begin{aligned} (4) U &= \int_0^{2\pi R} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\eta_e dl}{\sqrt{x^2 + R^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + R^2}}; \end{aligned}$$

(5) $U-x$ 曲线如右图所示;

(6) $x=0$ 处电势最高, 其值为 $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$.



习题 1 - 25



1-26. 半径为 R 的圆面均匀带电, 电荷的面密度为 σ_e .

(1) 求轴线上离圆心的坐标为 x 处的场强;

(2) 在保持 σ_e 不变的情况下, 当 $R \rightarrow 0$ 和 $R \rightarrow \infty$ 时结果各如何?

(3) 在保持总电荷 $Q = \pi R^2 \sigma_e$ 不变的情况下, 当 $R \rightarrow 0$ 和 $R \rightarrow \infty$ 时结果各如何?

(4) 求轴线上电势 $U(x)$ 的分布, 并画出 $U-x$ 曲线。

解:(1) 利用上题圆环结果 积分可得圆盘轴上一点场强:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{x \cdot \sigma_e \cdot 2\pi r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{2\pi\sigma_e x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma_e x}{2\epsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right]_0^R = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \left[\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right]; \end{aligned}$$

(2) 保持 σ_e 不变情形下 $R \rightarrow 0$ 时 $E = 0$; $R \rightarrow \infty$ 时 $E = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \frac{x}{|x|}$,

(3) 保持总电量 $Q = \pi R^2 \sigma_e$ 不变 场强公式化为

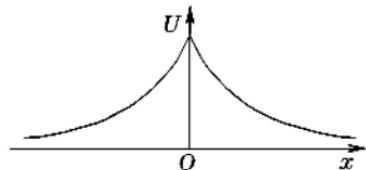
$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right],$$

$$R \rightarrow 0 \text{ 时 } E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|} \left[1 - \left(1 - \frac{R^2}{x^2} + \dots \right) \right] \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|} \frac{Q}{x^2},$$

$R \rightarrow \infty$ 时 $E = 0$;

$$\begin{aligned} (4) U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma_e \cdot 2\pi r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} \\ &= \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \sqrt{x^2 + r^2} \Big|_0^R = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - |x|). \end{aligned}$$

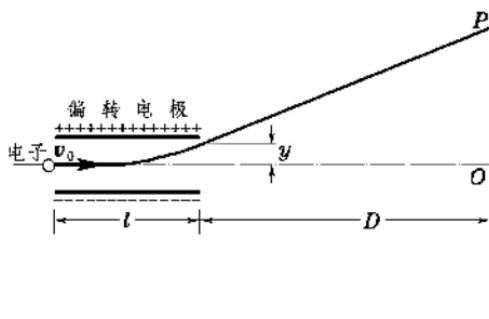
$U-x$ 曲线见右。



1 - 27. 如本题图, 一示波管偏转电极长度 $l = 1.5 \text{ cm}$, 两极间电压 120 V , 间隔 $d = 1.0 \text{ cm}$, 一个电子以初速 $v_0 = 2.6 \times 10^7 \text{ m/s}$ 沿管轴注入。已知电子质量 $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 电荷为 $-e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

(1) 求电子经过电极后所发生的偏转 y ;

(2) 若可以认为一出偏转电极的区域后, 电场立即为 0. 设偏转电极的边缘到荧光屏的距离 $D = 10 \text{ cm}$, 求电子打在荧光屏上产生的光点偏离中心 O 的距离 y' .



习题 1 - 27

解 (1) $ma = eE$,

$$y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{l^2}{v_0^2} = \frac{1.60 \times 10^{-19} \times 1.20 \times 10^4 \times (1.5 \times 10^{-2})^2}{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times (2.6 \times 10^7)^2} \text{ m}$$

$$= 3.5 \times 10^{-4} \text{ m};$$

$$(2) v_y = at = \frac{eE}{m} \frac{l}{v_0}, \quad \frac{v_y}{v_0} = \frac{y''}{D}, \quad \therefore y'' = \frac{v_y}{v_0} D = \frac{eE}{m} \frac{l}{v_0^2} D,$$

$$y' = y + y'' = \frac{eEl^2}{2mv_0^2} + \frac{eElD}{mv_0^2} = \frac{eEl}{mv_0^2} \left(\frac{l}{2} + D \right)$$

$$= \frac{1.60 \times 10^{-19} \times 1.20 \times 10^4 \times 1.5 \times 10^{-2}}{9.10 \times 10^{-31} \times (2.6 \times 10^7)^2} \left(\frac{1.5 \times 10^{-2}}{2} + 0.10 \right) \text{ m} = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

1 - 28. 有两个异号点电荷 ne 和 $-e$ ($n > 1$) 相距为 a .

(1) 证明电势为零的等电势面是一个球面。

(2) 证明球心在这两个点电荷的延长线上, 且在 $-e$ 点电荷的外边。

(3) 这球的半径为多少?

解 (1) 取坐标原点在 ne 电荷上, ne 和 $-e$ 联线为 x 轴, 电势为 0 的曲面满足的方程为

$$U = U_+ + U_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{ne}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{e}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} \right) = 0 ,$$

$$\therefore n^2[(x-a)^2 + y^2 + z^2] = x^2 + y^2 + z^2 ,$$

$$(n^2 - 1) \left[\left(x - \frac{n^2 a}{n^2 - 1} \right)^2 + y^2 + z^2 \right] = \frac{n^4 a^2}{n^2 - 1} - n^2 a^2 = \frac{n^2 a^2}{n^2 - 1} ,$$

$$\therefore \left(x - \frac{n^2 a}{n^2 - 1} \right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{n a}{n^2 - 1} \right)^2 ,$$

这表明, 电势为 0 的曲面是一球面。

(2) 该球面的球心坐标为 $\left\{ \frac{n^2 a}{n^2 - 1}, 0, 0 \right\}$, 它在两点电荷联线的延长线上, 在 $-e$ 的外侧。

(3) 该球面的半径为 $\frac{n a}{n^2 - 1}$.

1 - 29. (1) 金原子核可当作均匀带电球, 其半径约为 $6.9 \times 10^{-15} \text{ m}$, 电荷为 $Ze = 79 \times 1.60 \times 10^{-19} \text{ C} = 1.26 \times 10^{-17} \text{ C}$. 求它表面上的电势。

(2) 一质子(电荷为 $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$, 质量为 $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$)以 $1.2 \times 10^7 \text{ m/s}$ 的初速从很远的地方射向金原子核, 求它能达到金原子核的最近距离。

(3) α 粒子的电荷为 $2e$, 质量为 $6.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 以 $1.6 \times 10^7 \text{ m/s}$ 的初速度从很远的地方射向金原子核, 求它能达到金原子核的最近距离。

$$\text{解 (1)} \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{r} = \frac{79 \times 1.60 \times 10^{-19}}{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 6.9 \times 10^{-15}} \text{ V} = 1.6 \times 10^7 \text{ V};$$

$$(2) \frac{1}{2}m_p v^2 = eU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e \cdot Ze}{r} \quad \therefore r = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_p v^2} = 1.5 \times 10^{-13} \text{ m};$$

$$(3) \text{同(2)得} \quad r = \frac{4Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2} = 4.2 \times 10^{-14} \text{ m}.$$

1 - 30. 在氢原子中, 正常状态下电子到质子的距离为 $5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$, 已知氢原子核(质子)和电子带电各为 $\pm e$ ($e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$)。把氢原子中的电子从正常状态下拉开到无穷远处所需的能量, 叫做氢原子的电离能。求此电离能是多少 eV?

解: 氢原子中的电子处于正常状态下的能量为

$$E_1 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r},$$

式中电子速度 v 满足 $m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$, 因此将此式中的 v 代入上式, 得

$$E_1 = \frac{1}{8 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r} - \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{8 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r},$$

电子处于无穷远时的动能和势能均为 0, 因此氢原子的电离能为

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_\infty - E_1 = \frac{1}{8 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r} \\ &= \frac{(1.60 \times 10^{-19})^2}{8 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 5.29 \times 10^{-11}} \text{ J} = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J} = 13.6 \text{ eV}. \end{aligned}$$

1-31. 轻原子核(如氢及其同位素氘、氚的原子核)结合成为较重原子核的过程,叫做核聚变。核聚变过程可以释放出大量能量。例如,四个氢原子核(质子)结合成一个氦原子核(α 粒子)时,可释放出 28 MeV 的能量。这类核聚变就是太阳发光、发热的能量来源。如果我们能在地球上实现核聚变,就可以得到非常丰富的能源。实现核聚变的困难在于原子核都带正电,互相排斥,在一般情况下不能互相靠近而发生结合。只有在温度非常高时,热运动的速度非常大,才能冲破库仑排斥力的壁垒,碰到一起发生结合,这叫做热核反应。根据统计物理学,绝对温度为 T 时,粒子的平均平动动能为

$$\overline{\frac{1}{2}m v^2} = \frac{3}{2}k T,$$

式中 $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K 叫做玻耳兹曼常量。已知质子质量 $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, 电荷 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, 半径的数量级为 10^{-15} m。试计算:

(1) 一个质子以怎样的动能(以 eV 表示)才能从很远的地方达到与另一个质子接触的距离?

(2) 平均热运动动能达到此数值时, 温度(以 K 表示)需高到多少?

解 (1)

$$E = \frac{1}{2}m_p v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

$$= \frac{(1.60 \times 10^{-19})^2}{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 10^{-15}} \times \frac{1}{1.60 \times 10^{-19}} \text{ eV} \approx 10^6 \text{ eV},$$

(2) $E = \frac{1}{2}m_p v^2 = \frac{3}{2}kT, \quad \therefore T = \frac{2E}{3k} = \frac{2 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}}{3 \times 1.38 \times 10^{-23}} \text{ K} \approx 10^{10} \text{ K}.$

1 - 32. 在绝对温度为 T 时,微观粒子热运动能量具有 kT 的数量级(玻耳兹曼常量 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$)。有时人们把能量 kT 折合成 eV,就说温度 T 为若干 eV. 问:

(1) $T = 1 \text{ eV}$ 相当于多少 K?

(2) $T = 50 \text{ keV}$ 相当于多少 K?

(3) 室温($T \approx 300 \text{ K}$)相当于多少 eV?

$$\text{解 (1)} \frac{1 \times 1.60 \times 10^{-19}}{1.38 \times 10^{-23}} \text{ K} = 1.16 \times 10^4 \text{ K},$$

$$\text{(2)} \frac{50 \times 10^3 \times 1.60 \times 10^{-19}}{1.38 \times 10^{-23}} \text{ K} = 5.8 \times 10^8 \text{ K},$$

$$\text{(3)} \frac{300 \times 1.38 \times 10^{-23}}{1.60 \times 10^{-19}} \text{ eV} = 2.6 \times 10^{-2} \text{ eV}.$$

1 - 33. 如本题图所示 ,两条均匀带电的无限长平行直线(与图纸垂直) ,电荷的线密度分别为 $\pm \eta_e$ 相距为 $2a$,

- (1) 求空间任一点 $P(x,y)$ 处的电势。
- (2) 证明在电势为 U 的等势面是半径为 $r = \frac{2ka}{k^2 - 1}$ 的圆筒面 ,筒的轴线与两

直线共面 ,位置在 $x = \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}a$ 处 ,其中 $k = \exp(2\pi\epsilon_0 U/\eta_e)$ 。

- (3) $U = 0$ 的等势面是什么形状?

解 (1) 因为带电体延伸到无限远 ,不能选无限远处为电势的零点。现选图中 O 点为电势零点 ,带正电直线在 P 点的电势为

$$U_{P+} = \int_P^O \frac{\eta_e}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\eta_e}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_O - \ln r_{P+}) ,$$

带负电直线在 P 点的电势为

$$U_{P-} = \int_P^O \frac{-\eta_e}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{-\eta_e}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_O - \ln r_{P-}) ,$$

两线同时存在时 P 点的电势为

$$U = U_{P+} + U_{P-} = \frac{\eta_e}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_{P-} - \ln r_{P+}) = \frac{\eta_e}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} ;$$

(2) 等势面的形状推导如下 :令 U 为常量 ,且令 $k^2 = \exp\left(\frac{4\pi\epsilon_0 U}{\eta_e}\right)$,
则

$$\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = k^2 ,$$

$$(k^2 - 1)x^2 - (k^2 + 1) \cdot 2ax + (k^2 - 1)a^2 + (k^2 - 1)y^2 = 0 ,$$

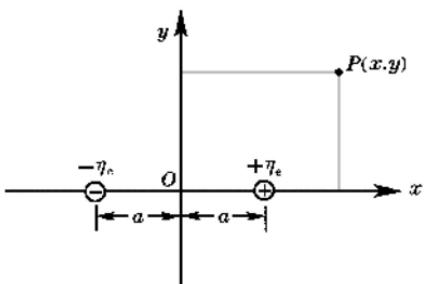
$$(k^2 - 1)[(x-b)^2 + y^2] = (k^2 - 1)b^2 - (k^2 - 1)a^2$$

其中 $b = \frac{(k^2 + 1)}{(k^2 - 1)}a$,由此

$$(x-b)^2 + y^2 = b^2 - a^2 = \left(\frac{2ka}{k^2 - 1}\right)^2 ,$$

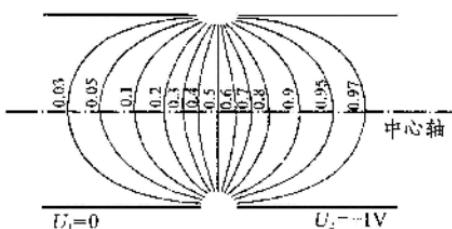
可见等势面是圆筒面 ,其轴线与两带电直线平行共面 ,位置在 $x = b$ 处 ,圆筒半径为 $r = \frac{2ka}{k^2 - 1}$;

(3) $U = 0$ 的等势面为 $k = 1$,也就是 $r \rightarrow \infty$ 的平面 ,即 yz 平面。



习题 1 - 33

1 - 34. 电视显像管的第二和第三阳极是两个直径相同的同轴金属圆筒。两电极间的电场即为显像管中的主聚焦电场。本题图中所示为主聚焦电场中的等势面，数字表示电势值。试用直尺量出管轴上各等势面间的距离，并求出相应的电场强度。



习题 1 - 34

解：用直尺量得管轴上各等势面间距从左到右分别为(4.0 , 4.5 , 3.6 , 2.5 , 2.0 , 2.5 , 2.5 , 2.0 , 2.2 , 4.0 , 4.2 , 4.0)mm 根据 $E = \left| \frac{\partial U}{\partial r} \right|$ 计算，各区间的平均场强分别(5.0 , 11 , 28 , 40 , 50 , 40 , 40 , 50 , 46 , 25 , 12 , 5.0)V/m.

1 - 35. 带电粒子经过加速电压加速后 ,速度增大。已知电子质量 $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 电荷绝对值 $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$.

(1) 设电子质量与速度无关 ,把静止电子加速到光速 $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ 要多高的电压 ΔU ?

(2) 对于高速运动的物体来说 ,上面的算法不对 ,因为根据相对论 ,物体的动能不是 $\frac{1}{2}mv^2$,而是

$$mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

按照这公式 静止电子经过上述电压 ΔU 加速后 ,速度 v 是多少 ?它是光速 c 的百分之几 ?

(3) 按照相对论 ,要把带电粒子从静止加速到光速 ,需要多高的电压 ?这可能吗 ?

解 (1) $\frac{1}{2}mv^2 = eU$,

$$\therefore U = \frac{1}{2e}mv^2 = \frac{1}{2 \times 1.60 \times 10^{-19}} \times 9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2 \text{ V} = 2.56 \times 10^5 \text{ V};$$

$$(2) mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = eU, \quad v = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{eU}{mc^2} + 1\right)^2}} \cdot c = 0.745c \\ = 2.24 \times 10^8 \text{ m/s}$$

即 v 等于光速 c 的 74.5%。

(3) 按照相对论 ,光速 c 是极限速度 ,要把带电粒子加速到光速 c ,需要无限大的电压 ,这当然是不可能的。

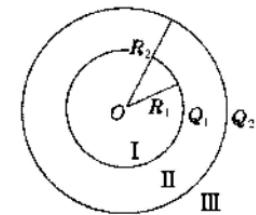
1-36. 如本题图所示, 在半径为 R_1 和 R_2 的两个同心球面上, 分别均匀地分布着电荷 Q_1 和 Q_2 ,

(1) 求 I、II、III 三个区域内的场强分布。

(2) 若 $Q_1 = -Q_2$, 情况如何? 画出此情形下的 $E-r$ 曲线。

(3) 按情形(2)求 I、II、III 三个区域内的电势分布, 并画出 $U-r$ 曲线。

习题 1-36



$$\text{解 (1)} E_I = 0, \quad E_{II} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2},$$

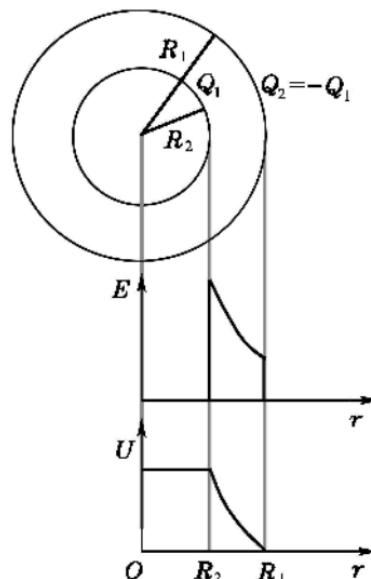
$$E_{III} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{r^2};$$

$$(2) E_I = 0, \quad E_{II} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2}, \quad E_{III} = 0; \\ E-r \text{ 曲线见右图。}$$

$$(3) U_I = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

$$U_{II} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right), \quad U_{III} = 0.$$

$U-r$ 曲线见右图。



1-37. 一对无限长的共轴直圆筒,半径分别为 R_1 和 R_2 ,筒面上都均匀带电。沿轴线单位长度的电量分别为 λ_1 和 λ_2 。

(1) 求各区域内的场强分布。

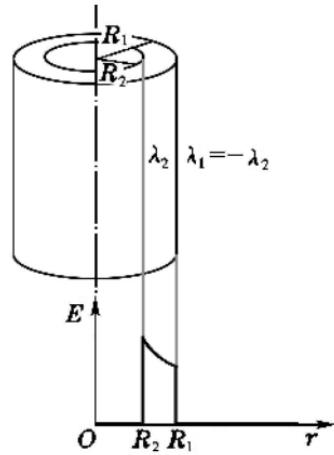
(2) 若 $\lambda_1 = -\lambda_2$,情况如何? 画出此情形的 $E-r$ 曲线。

(3) 按情形(2)求两筒间的电势差和电势分布。

$$\text{解 (1)} E_{\text{I}}=0, E_{\text{II}}=\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r}, E_{\text{III}}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r};$$

$$(2) E_{\text{I}}=0, E_{\text{II}}=\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r}, E_{\text{III}}=0, \text{ 曲线见右。}$$

$$(3) \Delta U = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}, U_{\text{I}} = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}, U_{\text{II}} = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{r}, U_{\text{III}} = 0.$$



1 - 38. 半径为 R 的无限长直圆柱体内均匀带电 , 电荷的体密度为 ρ_e .

(1) 求场强分布 , 并画出 $E-r$ 曲线。

(2) 以轴线为电势零点求电势分布。

解 (1) 根据对称性 , 作通过场点的柱形高斯面 , 运用高斯定理 , 有

$$2\pi r \cdot l \cdot E_{\text{外}} = \frac{1}{\epsilon_0} \pi R^2 \cdot l \cdot \rho_e ,$$

$$\therefore E_{\text{外}} = \frac{R^2 \rho_e}{2 \epsilon_0 r} , (r > R)$$

$$2\pi r \cdot l \cdot E_{\text{内}} = \frac{1}{\epsilon_0} \pi r^2 \cdot l \cdot \rho_e ,$$

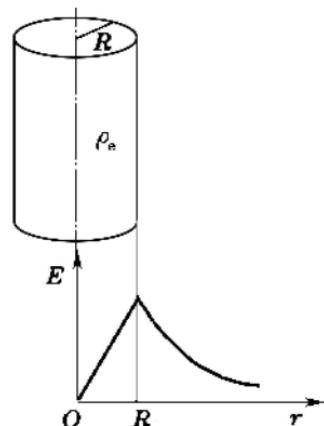
$$\therefore E_{\text{内}} = \frac{\rho_e}{2 \epsilon_0} r , (r < R)$$

$E-r$ 曲线见右。

$$(2) \Delta U = 0 - U_{\text{内}} = \int_0^r \frac{\rho_e}{2 \epsilon_0} r dr = \frac{\rho_e}{4 \epsilon_0} r^2 , \quad \therefore U_{\text{内}} = -\frac{\rho_e}{4 \epsilon_0} r^2 , (r < R)$$

$$\Delta U = 0 - U_{\text{外}} = \int_0^R \frac{\rho_e}{2 \epsilon_0} r dr + \int_R^r \frac{\rho_e R^2}{2 \epsilon_0 r} dr = \frac{\rho_e}{4 \epsilon_0} R^2 + \frac{\rho_e R^2}{2 \epsilon_0} \ln \frac{r}{R} ,$$

$$\therefore U_{\text{外}} = -\frac{\rho_e}{4 \epsilon_0} R^2 \left(1 + 2 \ln \frac{r}{R} \right) , (r > R)$$



1 - 39. 设气体放电形成的等离子体圆柱内的体电荷分布可用下式表示：

$$\rho_e(r) = \frac{\rho_0}{\left[1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^2},$$

式中 r 是到轴线的距离 ρ_0 是轴线上的 ρ_e 值， a 是个常量（它是 ρ_e 减少到 $\rho_0/4$ 处的半径）。

(1) 求场强分布。

(2) 以轴线为电势零点求电势分布。

解 (1) 根据对称性作柱状高斯面，运用高斯定理，有

$$2\pi r \cdot l \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \iint \rho_e \cdot r d\varphi \cdot dr \cdot l = \frac{l\rho_0}{\epsilon_0} \cdot 2\pi \int_0^r \frac{r dr}{\left[1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^2},$$

$$\therefore E = \frac{\rho_0 a^2 r}{2\epsilon_0 (a^2 + r^2)};$$

$$(2) \Delta U = 0 - U = \int_0^r E dr = \int_0^r \frac{\rho_0 a^2 r dr}{2\epsilon_0 (a^2 + r^2)} = \frac{\rho_0 a^2}{4\epsilon_0} \ln \frac{a^2 + r^2}{a^2},$$

$$\therefore U = \frac{\rho_0 a^2}{4\epsilon_0} \ln \frac{a^2}{a^2 + r^2}.$$

1 - 40. 一电子二极管由半径 $r = 0.50\text{ mm}$ 的圆柱形阴极 K 和套在阴极外同轴圆筒形的阳极 A 构成，阳极的半径 $R = 0.45\text{ cm}$ 。阳极电势比阴极高 300 V 。设电子从阴极发射出来时速度很小，可忽略不计。求：

(1) 电子从 K 向 A 走过 2.0 mm 时的速度。

(2) 电子到达 A 时的速度。

解 (1) 按圆柱形电极的场强公式计算两极间电势差：

$$\Delta U = \int_r^R \frac{\eta_e}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\eta_e}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r} ,$$

设电子从 K 极向 A 极走过 2.0 mm 到达 $R_1 = r + 2.0\text{ mm} = 2.50\text{ mm}$ 处，该处电压为 $\Delta U_1 = \frac{\ln(R_1/r)}{\ln(R/r)} \Delta U$ ，于是 $\frac{1}{2}mv_1^2 = e\Delta U_1 = \frac{\ln(R_1/r)}{\ln(R/r)} e\Delta U$ ，

$$\therefore v_1 = \sqrt{\frac{2e\Delta U \ln(R_1/r)}{m \ln(R/r)}} = \left(\frac{2 \times 1.60 \times 10^{-19} \times 300 \times \ln 5}{9.10 \times 10^{-31} \times \ln 9} \right)^{1/2} \text{ m/s} = 8.8 \times 10^6 \text{ m/s} ;$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}mv^2 = e\Delta U ,$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{2e\Delta U}{m}} = \left(\frac{2 \times 1.60 \times 10^{-19} \times 300}{9.10 \times 10^{-31}} \right)^{1/2} \text{ m/s} = 1.03 \times 10^7 \text{ m/s} .$$

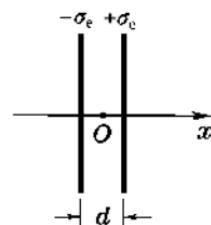
1 - 41. 如本题图所示,一对均匀、等量异号的平行带电平面。若其间距离 d 远小于带电平面的线度时,这对带电面可看成是无限大的。这样的模型可叫做电偶极层。求场强和电势沿垂直两平面的方向 x 的分布,并画出 $E-x$ 和 $U-x$ 曲线(取离两平面等距的 O 点为参考点,令该处电势为零)。

解:

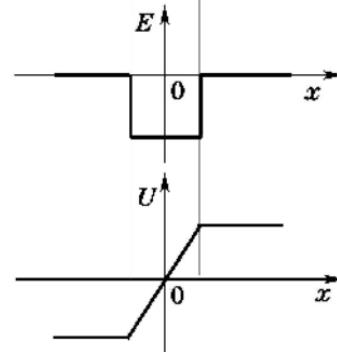
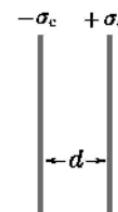
$$E = \begin{cases} 0, & x < -d/2 \\ -\sigma_e / \epsilon_0, & -d/2 < x < d/2 \\ 0, & x > d/2. \end{cases}$$

$$U = \begin{cases} -\sigma_e d / 2 \epsilon_0, & x < -d/2 \\ \sigma_e x / \epsilon_0, & -d/2 < x < d/2 \\ \sigma_e d / 2 \epsilon_0, & x > d/2. \end{cases}$$

曲线见右图。



习题 1 - 41



1-42. 在半导体 PN 结附近总是堆积着正、负电荷，在 N 区内有正电荷，P 区内有负电荷，两区电荷的代数和为零。我们把 PN 结看成是一对带正、负电荷的无限大平板，它们相互接触（见本题图）。取坐标 x 的原点在 P、N 区的交界面上，N 区的范围是 $-x_N \leq x \leq 0$ ，P 区的范围是 $0 \leq x \leq x_P$ 。设两区内电荷体分布都是均匀的：

$$\begin{cases} N \text{ 区} : \rho_e(x) = n_N e, \\ P \text{ 区} : \rho_e(x) = -n_P e. \end{cases} \quad (\text{突变结模型})$$

这里 n_N, n_P 是常量，且 $n_N x_N = n_P x_P$ （两区电荷数量相等）。试证明：

(1) 电场的分布为

$$\begin{cases} N \text{ 区} : E(x) = \frac{n_N e}{\epsilon_0} (x_N + x), \\ P \text{ 区} : E(x) = \frac{n_P e}{\epsilon_0} (x_P - x). \end{cases}$$

并画出 $\rho_e(x)$ 和 $E(x)$ 随 x 变化的曲线来。

(2) PN 结内的电势分布为

$$\begin{cases} N \text{ 区} : U(x) = -\frac{n_N e}{\epsilon_0} \left(x_N x + \frac{1}{2} x^2 \right), \\ P \text{ 区} : U(x) = -\frac{n_P e}{\epsilon_0} \left(x_P x - \frac{1}{2} x^2 \right). \end{cases}$$

这公式是以何处为电势零点的？PN 结两侧的电势差多少？

解 (1) 先计算一定厚度均匀体分布无限大带电板内外的场强分布。运用高斯定理可得

$$2S \cdot E_{\text{内}} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e \cdot S \cdot 2x' , \quad \therefore E_{\text{内}} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} x' ,$$

$$2S \cdot E_{\text{外}} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e \cdot S \cdot x_0 , \quad \therefore E_{\text{外}} = \frac{\rho_e}{2\epsilon_0} x_0 ;$$

这里的 x' 是从带电板的中间对称面算起的， x_0 是带电板的厚度，譬如 x_N 或 x_P 。现将上式分别运用于 P 区和 N 区，计算两区同时存在时的场强。在 N 区内：

$$E = E_N + E_P = \frac{\rho_N}{\epsilon_0} x' + \frac{\rho_P}{\epsilon_0} \frac{x_P}{2} , \quad \text{其中 } x' = \frac{x_N}{2} + x.$$

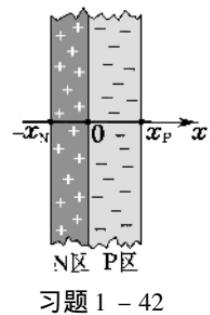
$$\text{因此 } E = \frac{\rho_N}{\epsilon_0} \left(\frac{x_N}{2} + x \right) + \frac{\rho_N}{\epsilon_0} \frac{x_P}{2} = \frac{n_N e}{\epsilon_0} (x_N + x).$$

在 P 区内：

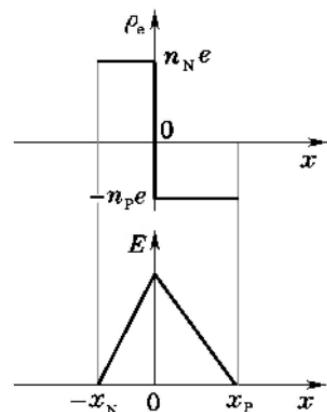
$$E = E_N + E_P = \frac{\rho_N}{\epsilon_0} \frac{x_N}{2} - \frac{\rho_P}{\epsilon_0} x' , \quad \text{其中 } x' = x - \frac{x_P}{2}.$$

$$\text{因此 } E = \frac{\rho_N}{\epsilon_0} \frac{x_N}{2} - \frac{\rho_P}{\epsilon_0} \left(x - \frac{x_P}{2} \right) = \frac{n_P e}{\epsilon_0} (x_P - x).$$

曲线见右图。



习题 1-42



$$(2) \Delta U = U_P - U_N = \int_0^x E dx = \int_0^x \frac{n_p e}{\epsilon_0} (x_p - x) dx = \frac{n_p e}{\epsilon_0} \left(x_p x - \frac{1}{2} x^2 \right),$$

$$\therefore U_P = -\frac{n_p e}{\epsilon_0} \left(x_p x - \frac{1}{2} x^2 \right).$$

$$\Delta U = U_N - U_P = \int_x^0 E dx = - \int_0^x \frac{n_n e}{\epsilon_0} (x_n + x) dx = -\frac{n_n e}{\epsilon_0} \left(x_n x + \frac{1}{2} x^2 \right),$$

$$\therefore U_N = -\frac{n_n e}{\epsilon_0} \left(x_n x + \frac{1}{2} x^2 \right).$$

电势零点选在 $x=0$ 处 即 P 区 N 区的交界面上。PN 结两侧的电势差为

$$\Delta U = U_P - U_N = -\frac{e}{\epsilon_0} (n_p x_p^2 + n_n x_n^2).$$

1 - 43. 如果在上题中电荷的体分布为

$$\text{PN 外 : } \rho(x) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \text{-}x_N \leq x \leq x_P : \rho(x) = -e a x. \end{array} \right\} \text{(线性缓变结模型)}$$

这里 a 是常量, $x_N = x_P$ (为什么?) 统一用 $x_m/2$ 表示。试证明:

(1) 电场的分布为

$$E(x) = \frac{ae}{8\varepsilon_0}(x_m^2 - 4x^2),$$

并画出 $\rho_e(x)$ 和 $E(x)$ 随 x 变化的曲线来。

(2) PN 结内的电势分布为

$$U(x) = \frac{ae}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x_m^2 x}{4}\right),$$

这公式是以何处为电势零点的? PN 结两侧的电势差多少?

解 (1) 由题中给的电荷分布, 两区的电荷数量相等要求 $x_N = x_P$, 统一用 $x_m/2$ 表示。因此得出 PN 结外的场强为 0 的结论。根据此对称性, 作垂直于带电面的柱形高斯面, 左底面在 PN 结外, 场强为 0; 右底面在 PN 结内, 场强为 $E(x)$ 。根据高斯定理,

$$E \cdot S = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho(x) dx \cdot S$$

$$\therefore E(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-x_m/2}^x (-e a x) dx = \frac{ea}{8\varepsilon_0}(x_m^2 - 4x^2).$$

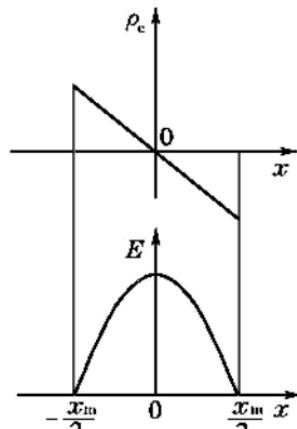
曲线见右。

(2) 以原点($x=0$)为电势零点, 则 x 点的电势为

$$\begin{aligned} U(x) &= - \int_0^x \frac{ea}{8\varepsilon_0}(x_m^2 - 4x^2) dx \\ &= -\frac{ea}{8\varepsilon_0} \left(x_m^2 x - \frac{4}{3} x^3 \right) = \frac{ea}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{x_m^2}{4} x \right). \end{aligned}$$

PN 结两侧的电势差为

$$\Delta U = U\left(\frac{x_m}{2}\right) - U\left(-\frac{x_m}{2}\right) = \frac{ea}{2\varepsilon_0} \left[\left(\frac{1}{24} x_m^3 - \frac{1}{8} x_m \right) - \left(-\frac{1}{24} x_m^3 + \frac{1}{8} x_m \right) \right] = -\frac{ea x_m^3}{12\varepsilon_0}.$$



1 - 44. 证明 在真空静电场中凡是电场线都是平行直线的地方 ,电场强度的大小必定处处相等 ;或者换句话说 ,凡是电场强度的方向处处相同的地方 ,电场强度的大小必定处处相等。

【提示 利用高斯定理和作功与路径无关的性质 ,分别证明沿同一电场线和沿同一等势面上两点的场强相等。】

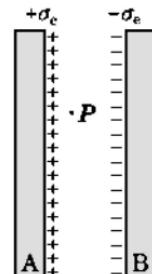
解 :在电场线平行区域内同一电场线上任取两点 A 和 B ,作无限细柱形高斯面使其两底分别通过这两点。此高斯面内无电荷 ,按高斯定理 ,穿过高斯面的通量为 0 ,因此穿入一底面的电通量等于穿入另一底面的电通量。因两底面面积相等 ,故 A 、 B 两点的场强相等。

在电场线平行区域内垂直电场线方向上任取两点 A 和 C ,作无限窄矩形环路使其平行于电场线的两短边分别通过这两点 ,而两长边与电场线垂直。由此环路积分为 0 可得 A 、 C 两点的场强相等。

在上面的论证中 , A 、 B 或 C 是任取的 ,故在电场线平行区域内电场大小处处相等得证。

1-45. 如本题图所示,一平行板电容器充电后,A、B两极板上电荷的面密度分别为 σ_e 和 $-\sigma_e$ 。设P为两板间任一点(略去边缘效应(即可把两板当作无限大)),

- (1) 求A板上的电荷在P点产生的电场强度 E_A ;
- (2) 求B板上的电荷在P点产生的电场强度 E_B ;
- (3) 求A、B两板上的电荷在P点产生的电场强度 E ;
- (4) 若把B板拿走,A板上电荷如何分布?A板上的电荷在P点产生的电场强度为多少?



习题 1-45

解(1)根据静电平衡条件,等量异号电荷只可能分布在两极板相对的侧面上,于是 $E_A = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0}$,方向指B;

$$(2) E_B = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0}, \text{方向指B,}$$

$$(3) E = E_A + E_B = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0}, \text{方向指B。}$$

(4)若把B板拿走,A板上的电荷重新分布。达到平衡时,由A板上的总电荷不变和其内部场强为0可知,其两表面上的电荷平分,面密度皆为 $\sigma_e/2$,两表面的电荷在P点的产生的合场强仍为 $\sigma_e/2\epsilon_0$.

1 - 46. 对于两个无限大的平行平面带电导体板来说 ,

(1) 证明 相向的两面(本题图中 2 和 3)上 ,电荷的面密度总是大小相等而符号相反 ;

(2) 证明 相背的两面(本题图中 1 和 4)上 ,电荷的面密度总是大小相等而符号相同 ;

(3) 若左导体板带电 $+3 \mu\text{C}/\text{m}^2$,右导体板带电 $+7 \mu\text{C}/\text{m}^2$ 求四个表面上的电荷。

解 (1) 设两板四表面的电荷面密度分别为 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 、 σ_4 根据导体内部场强为 0 的平衡条件 ,有

$$\frac{1}{2\epsilon_0}(\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4) = 0, \quad (\text{a})$$

$$\frac{1}{2\epsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4) = 0. \quad (\text{b})$$

两式相减 ,得

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0, \quad \therefore \quad \sigma_2 = -\sigma_3. \quad (\text{c})$$

即相对的两面上电荷面密度等量异号。

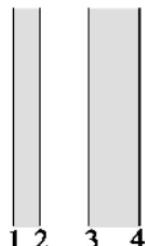
(2) 将(a) (b)两式相加 ,得

$$\sigma_1 - \sigma_4 = 0, \quad \therefore \quad \sigma_1 = \sigma_4. \quad (\text{d})$$

即相背的两面上电荷面密度等量同号。

(3) 按题中所给 $\sigma_1 + \sigma_2 = 3 \mu\text{C}/\text{m}^2$, $\sigma_3 + \sigma_4 = 7 \mu\text{C}/\text{m}^2$ 再加上(c) (d) 两式 ,可解得

$$\sigma_1 = 5 \mu\text{C}/\text{m}^2, \quad \sigma_2 = -2 \mu\text{C}/\text{m}^2, \quad \sigma_3 = 2 \mu\text{C}/\text{m}^2, \quad \sigma_4 = 5 \mu\text{C}/\text{m}^2.$$



习题 1 - 46

1 - 47. 两平行金属板分别带有等量的正负电荷。两板的电势差为 120 V ,两板的面积都是 3.6 cm^2 ,两板相距 1.6 mm. 略去边缘效应 ,求两板间的电场强度和各板上所带的电量。

解 : $E = \frac{U}{d} = \frac{120}{1.6 \times 10^{-3}} = 7.5 \times 10^4 \text{ V/m}$,

$$q = \epsilon_0 E S = (8.85 \times 10^{-12} \times 7.5 \times 10^4 \times 3.6 \times 10^{-4}) \text{ C} = 2.4 \times 10^{-10} \text{ C.}$$

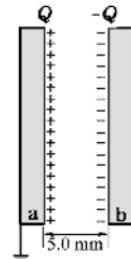
1 - 48. 两块带有等量异号电荷的金属板 a 和 b ,相距 5.0 mm ,两板的面积都是 150 cm^2 ,电量的数值都是 $2.66 \times 10^{-8} \text{ C}$, a 板带正电并接地(见本题图)。以地的电势为零 ,并略去边缘效应 ,问 :

(1)b 板的电势是多少 ?

(2)a、b 间离 a 板 1.0 mm 处的电势是多少 ?

$$\begin{aligned}\text{解 (1)} \quad U &= -Ed = -\frac{Qd}{\epsilon_0 S} = -\frac{2.66 \times 10^{-8} \times 5.0 \times 10^{-3}}{8.85 \times 10^{-12} \times 150 \times 10^{-4}} \text{ V} \\ &= -1.0 \times 10^3 \text{ V},\end{aligned}$$

$$(2) \quad U' = -Ed_1 = \frac{d_1}{d}U = \frac{1}{5}U = -2.0 \times 10^2 \text{ V}.$$



习题 1 - 48

1 - 49. 三平行金属板 A、B 和 C , 面积都是 200 cm^2 , AB 相距 4.0 mm , AC 相距 2.0 mm , BC 两板都接地(见本题图)。如果使 A 板带正电 $3.0 \times 10^{-7} \text{ C}$, 在略去边缘效应时 , 问 B 板和 C 板上感应电荷各是多少 ? 以地的电势为零 , 问 A 板的电势是多少 ?

解 : 设 A 板的两表面分别带电 q_1 和 q_2 , 则

$$q_1 + q_2 = 3.0 \times 10^{-7} \text{ C} ,$$

由 B、C 等电势知

$$E_1 d_1 = E_2 d_2 \quad \text{即} \quad \frac{q_1 d_1}{\epsilon_0 S} = \frac{q_2 d_2}{\epsilon_0 S} ,$$

由此解得

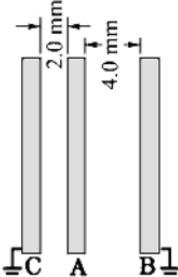
$$q_1 = 1.0 \times 10^{-7} \text{ C} , \quad q_2 = 2.0 \times 10^{-7} \text{ C} ;$$

故 B、C 板上的感应电荷分别为

$$q_B = -1.0 \times 10^{-7} \text{ C} , \quad q_C = -2.0 \times 10^{-7} \text{ C} .$$

A 板的电势为

$$U_A = \frac{q_1 d_1}{\epsilon_0 S} = \frac{q_2 d_2}{\epsilon_0 S} = \frac{1.0 \times 10^{-7} \times 4.0 \times 10^{-3}}{8.85 \times 10^{-12} \times 200 \times 10^{-4}} \text{ V} = 2.3 \times 10^3 \text{ V} .$$



习题 1 - 49

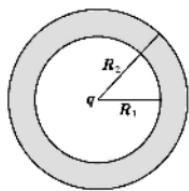
1 - 50. 点电荷 q 处在导体球壳的中心，壳的内外半径分别为 R_1 和 R_2 （见本题图）。求场强和电势的分布，并画出 $E-r$ 和 $U-r$ 曲线。

解：

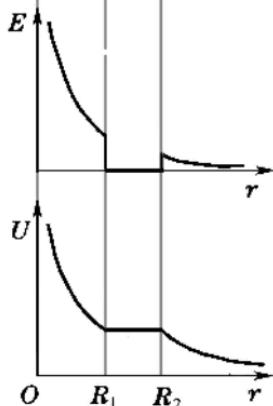
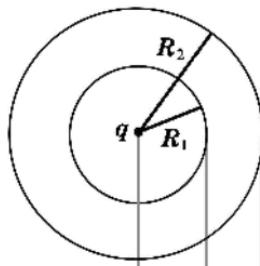
$$E = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, & r < R_1, \\ 0, & R_1 < r < R_2, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, & r > R_2. \end{cases}$$

$$U = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), & r < R_1, \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2}, & R_1 < r < R_2, \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}, & r > R_2. \end{cases}$$

曲线见右图。



习题 1 - 50



1 - 51. 在上题中 ,若 $q = 4.0 \times 10^{-10} \text{ C}$, $R_1 = 2.0 \text{ cm}$, $R_2 = 3.0 \text{ cm}$,

(1) 求导体球壳的电势 ;

(2) 求离球心 $r = 1.0 \text{ cm}$ 处的电势 ;

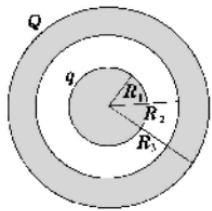
(3) 把点电荷移开球心 1.0 cm ,求导体球壳的电势。

$$\text{解 (1)} U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_2} = \frac{4.0 \times 10^{-10}}{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 3.0 \times 10^{-2}} \text{ V} = 1.2 \times 10^2 \text{ V} ;$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} U &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ &= \frac{4.0 \times 10^{-10}}{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12}} \left(\frac{1}{1.0 \times 10^{-2}} - \frac{1}{2.0 \times 10^{-2}} + \frac{1}{3.0 \times 10^{-2}} \right) \text{ V} = 3.0 \times 10^2 \text{ V} ; \end{aligned}$$

(3) 把电荷移开球心 ,球壳内表面电荷分布改变 ,它和点电荷 q 在球壳外产生的场强之和为 0 ,而球壳外表面电荷分布不变 ,仍为球对称分布 ,它决定了球壳的电势 ,仍为 $1.2 \times 10^2 \text{ V}$.

1-52. 半径为 R_1 的导体球带有电荷 q ，球外有一个内外半径为 R_2, R_3 的同心导体球壳，壳上带有电荷 Q （见本题图）。



习题 1-52

(1) 求两球的电势 U_1 和 U_2 ；

(2) 求两球的电势差 ΔU ；

(3) 以导线把球和壳联接在一起后， U_1, U_2 和 ΔU 分别是多少？

(4) 在情形(1)(2)中，若外球接地， U_1, U_2 和 ΔU 为多少？

(5) 设外球离地面很远，若内球接地，情况如何？

解 (1) 由于球对称性，内球表面、球壳内表面和球壳外表面上的电荷分布是均匀的，分别为 $q, -q$ 和 $Q+q$ ，因此，

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2} + \frac{Q+q}{R_3} \right), \quad U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q+q}{R_3};$$

$$(2) \quad \Delta U = U_1 - U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2} \right);$$

$$(3) \quad U_1 = U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q+q}{R_3}; \quad \Delta U = U_1 - U_2 = 0;$$

$$(4) \quad U_2 = 0, \quad U_1 = \Delta U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2} \right);$$

(5) 内球接地，则内球电势为 0，三个球面上的电荷分布发生变化。设内球表面电荷为 q_1 ，球壳内表面电荷为 q_2 ，球壳外表面电荷为 q_3 ，根据导体静电平衡条件，有

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} + \frac{q_3}{R_3} \right) = 0,$$

此外还有

$$q_1 + q_2 = 0, \quad q_2 + q_3 = Q,$$

由此三式解出

$$q_1 = -q_2 = \frac{-R_1 R_2 Q}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_3 R_1},$$

$$q_3 = \frac{(R_2 - R_1) R_3 Q}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_3 R_1},$$

于是

$$U_1 = 0, \quad U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(R_2 - R_1) Q}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_3 R_1},$$

$$\Delta U = U_1 - U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(R_1 - R_2) Q}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_3 R_1}.$$

1 - 53. 在上题中设 $q = 1.0 \times 10^{-10} \text{ C}$, $Q = 11 \times 10^{-10} \text{ C}$, $R_1 = 1.0 \text{ cm}$, $R_2 = 3.0 \text{ cm}$, $R_3 = 4.0 \text{ cm}$, 试计算各情形中的 U_1 、 U_2 和 ΔU , 并画出 $U-r$ 曲线来。

解 (1) $U_1 = 3.3 \times 10^2 \text{ V}$,

$U_2 = 2.7 \times 10^2 \text{ V}$;

(2) $\Delta U = 60 \text{ V}$;

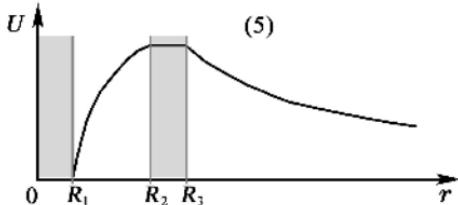
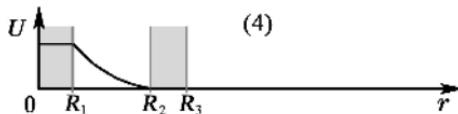
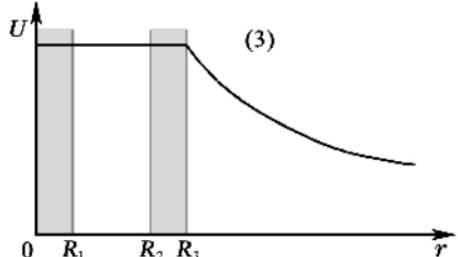
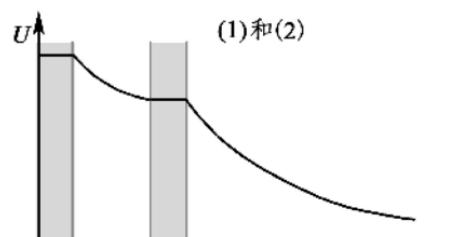
(3) $U_1 = U_2 = 2.7 \times 10^2 \text{ V}$, $\Delta U = 0$;

(4) $U_2 = 0$, $U_1 = \Delta U = 60 \text{ V}$;

(5) $U_1 = 0$, $U_2 = 180 \text{ V}$,

$\Delta U = U_1 - U_2 = -180 \text{ V}$.

$U-r$ 曲线见右。



1 - 54. 假设范德格拉夫起电机的球壳与传送带上喷射电荷的尖针之间的电势差为 $3.0 \times 10^6 \text{ V}$, 如果传送带迁移电荷到球壳上的速率为 $3.0 \times 10^{-3} \text{ C/s}$, 则在仅考虑电力的情况下, 必须用多大的功率来开动传送带?

解: $P = UQ = (3.0 \times 10^6 \times 3.0 \times 10^{-3}) \text{ W} = 9.0 \times 10^3 \text{ W}$.

1 - 55. 范德格拉夫起电机的球壳直径为 1.0 m , 空气的击穿场强为 30 kV/cm(即球表面的场强超过此值 , 电荷就会从空气中漏掉)。这起电机最多能达到多高的电势 ?

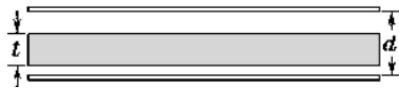
$$\text{解: } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2},$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} = ER = (30 \times 10^5 \times 0.50) \text{ V} = 1.5 \times 10^6 \text{ V}.$$

1 - 56. 地球的半径为 6370 km 把地球当作真空中的导体球 求它的电容。

解： $C = 4 \pi \epsilon_0 R = (4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 6.37 \times 10^6) \mu\text{F} = 7.08 \mu\text{F}$.

1 - 57. 如本题图所示 ,平行板电容器两极板的面积都是 S ,相距为 d ,其间有一厚为 t 的金属片。略去边缘效应。



习题 1 - 57

- (1) 求电容 C ;
 (2) 金属片离极板的远近有无影响?

解 (1) 设电容器极板上电荷为 $+q$ 和 $-q$,在金属片两边感应电荷为 $-q$ 和 $+q$,极板与金属片之间的场强仍为 $q/\epsilon_0 S$,电容器极板间电势差为

$$U = E(d-t) = \frac{q}{\epsilon_0 S}(d-t),$$

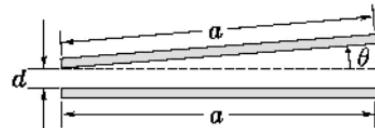
因此

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{d-t};$$

(2) 从上面的推导中可以看出 ,金属片离极板的远近对电容没有影响。

1 - 58. 如本题图所示,一电容器两极板都是边长为 a 的正方形金属平板,两板不严格平行,其间有一夹角 θ . 证明:当 $\theta \ll d/a$ 时,略去边缘效应,它的电容为

$$C = \varepsilon_0 \frac{a^2}{d} \left(1 - \frac{a\theta}{2d} \right).$$



习题 1 - 58

解: 将这极板不平行的电容器看成是许多不同间距的窄条电容器并联的结果。令水平向右为 x 坐标,原点取在左端点, x 处的窄条电容器的电容为

$$dC = \frac{\varepsilon_0 a dx}{d + \theta x}$$

总电容为

$$C = \int_0^a \frac{\varepsilon_0 a dx}{d + \theta x} = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta} \ln \frac{d + \theta a}{d}$$

由于 $\theta \ll d/a$, $\ln\left(1 + \frac{\theta a}{d}\right) = \frac{\theta a}{d} - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta a}{d}\right)^2 + \dots$,

$$\therefore C = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d} \left(1 - \frac{\theta a}{2d} \right).$$

1 - 59. 半径都是 a 的两根平行长直导线相距为 d ($d \gg a$) , 求单位长度的电容。

解 在两根平行长直导线的公共平面内, 正负带电导线产生的电场方向相同, 故总电场为

$$E = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0(d-r)}$$

这两根带电导线之间的电势差为

$$U = \int_a^{d-a} E dr = \int_a^{d-a} \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 r} dr + \int_a^{d-a} \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0(d-r)} dr = \frac{\eta}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a}{a},$$

单位长度带电导线的电容为

$$C = \frac{\eta}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d-a}{a}} \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{a}}.$$

1 - 60. 证明 : 同轴圆柱形电容器两极的半径相差很小(即 $R_B - R_A \ll R_A$) 时 , 它的电容公式(1.78) 趋于平行板电容公式(1.76)。

解 : 同轴圆柱形电容器的电容公式为

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_B/R_A)},$$

当 $R_B - R_A = \Delta R \ll R_A$ 时 , 可将 $\ln(R_B/R_A)$ 展开 , 取第一项 :

$$\ln \frac{R_B}{R_A} = \ln \left(1 + \frac{\Delta R}{R_A} \right) \approx \frac{\Delta R}{R_A},$$

$$\therefore C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\Delta R/R_A} = \frac{\epsilon_0 \cdot 2\pi R_A \cdot L}{\Delta R} = \frac{\epsilon_0 S}{d},$$

式中 $d = \Delta R$ 为两极板之间的距离 , 可见结果与平行板电容器公式相同。

1 - 61. 证明 : 同心球形电容器两极的半径相差很小(即 $R_B - R_A \ll R_A$) 时 , 它的电容公式(1.77) 趋于平行板电容公式(1.76)。

解 球形电容器的电容公式当 $R_B - R_A \ll R_A$ 时化为

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_A R_B}{R_B - R_A} \approx \frac{\epsilon_0 \cdot 4\pi R_A^2}{R_B - R_A} = \frac{\epsilon_0 S}{d},$$

与平行板电容器公式相同。

1 - 62. 一球形电容器内外两壳的半径分别为 R_1 和 R_4 , 现在两壳之间放一个内外半径分别为 R_2 和 R_3 的同心导体球壳(见本题图)。

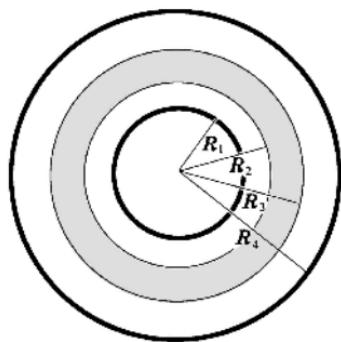
(1) 给内壳(R_1)以电量 Q , 求 R_1 和 R_4 两壳的电势差;

(2) 求以 R_1 和 R_4 为两极的电容。

$$\text{解 (1)} \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{r^2} dr + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_3}^{R_4} \frac{Q}{r^2} dr \\ = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right);$$

$$(2) \quad C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 R_3 R_4}{R_2 R_3 R_4 - R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_4 - R_1 R_2 R_3}.$$

此电容还可利用电容器串联公式加以计算得到。



习题 1 - 62

1-63. 半径为2.0cm的导体球外套有一个与它同心的导体球壳，壳的内外半径分别为4.0cm和5.0cm，球与壳间是空气。壳外也是空气，当内球的电量为 3.0×10^{-8} C时，

(1)这个系统储藏了多少电能？

(2)如果用导线把壳与球联在一起，结果如何？

解：(1) 系统可以看成两个电容器的串联，小球与大球内表面构成一个电容器，大球外表面与无穷远构成孤立导体的电容，它们的电容分别为

$$C_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \quad C_3 = 4\pi\epsilon_0 R_3;$$

当给内球电量 3.0×10^{-8} C时，导体球壳内外表面感应了电荷，整个系统储藏的电能为

$$W = \frac{Q^2}{2C_1} + \frac{Q^2}{2C_2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

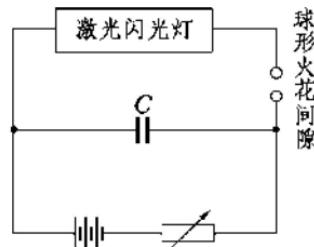
$$= \frac{(3 \times 10^{-8})^2}{8\pi \times 8.85 \times 10^{-12}} \left(\frac{1}{2.0 \times 10^{-2}} - \frac{1}{4.0 \times 10^{-2}} + \frac{1}{5.0 \times 10^{-2}} \right) J = 1.8 \times 10^{-4} J.$$

$$(2) W' = \frac{Q^2}{2C_2} = \frac{(3 \times 10^{-8})^2}{8\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 5.0 \times 10^{-2}} J = 8.1 \times 10^{-5} J.$$

用导线联接球壳与内球，内球电容器不带电，整个系统静电能减少，减少的静电能 $W - W'$ 在 C_1 短接的过程中转化为焦耳热。

1 - 64. 激光闪光灯的电源线路如本题图所示,由电容器 C 储存的能量,通过闪光灯线路放电,给闪光提供能量。电容 $C = 6000 \mu\text{F}$,火花间隙击穿电压为 2000 V ,问 C 在一次放电过程中,能放出多少能量?

$$\begin{aligned} \text{解: } W &= \frac{1}{2} C U^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 10^3 \times 10^{-6} \times (2 \times 10^3)^2 \text{ J} = 1.2 \times 10^4 \text{ J.} \end{aligned}$$



习题 1 - 64

1 - 65. 地面可看成是无穷大的导体平面, 一均匀带电无限长直导线平行地面放置(垂直于本题图), 求空间的电场强度、电势分布和地表面上的电荷分布。

解 此题可用电像法求解。电像法的精神是将静电问题中边界对场的影响用边界外部虚设的像电荷等效替代。像电荷放在边界外部, 它的存在并不改变原来问题的电荷分布, 只要像电荷的位置和大小使它产生的场满足所给的边界条件, 便找到了问题的解。这是由唯一性定理确保的。

设本题导体平面为 $y=0$ 平面, 在 $y=a$ 处有一无限长均匀带电线, 电荷线密度为 η . 本题的解是 $y=a$ 处有一无限长均匀带 $+\eta$ 的直线和 $y=-a$ 处有一无限长均匀带电且电荷线密度为 $-\eta$ 的直线(像电荷)在上半空间的场分布, 它们在 $y=0$ 平面处的电势为 0. 与题中所给的地面上的边界条件一致, 因此根据唯一性定理, 它就是本题的解。所以

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\eta_+}{2\pi\epsilon_0 r_+} \cos\theta_+ + \frac{\eta_-}{2\pi\epsilon_0 r_-} \cos\theta_- = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{(y-a)^2+x^2} - \frac{x}{(y+a)^2+x^2} \right) \\ &= \frac{2\eta axy}{\pi\epsilon_0 [(y-a)^2+x^2] [(y+a)^2+x^2]} \\ E_y &= \frac{\eta_+}{2\pi\epsilon_0 r_+} \sin\theta_+ + \frac{\eta_-}{2\pi\epsilon_0 r_-} \sin\theta_- = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{y-a}{(y-a)^2+x^2} - \frac{y+a}{(y+a)^2+x^2} \right), \\ U &= \frac{\eta}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(y+a)^2+x^2}{(y-a)^2+x^2}. \end{aligned}$$

此电势分布的结果在习题 1 - 33(1) 已计算过, 可参看之。电势零点在坐标原点。上面的 E_x 、 E_y 也可由电势梯度得到。

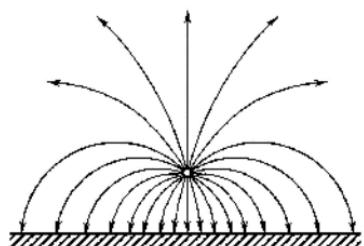
在地面处 $y=0$, 则 $E_x=0$, $E_y=\frac{-\eta a}{\pi\epsilon_0(x^2+a^2)}$, 根据导体静电平衡性质, 从表面外附近的电场可得导体表面电荷面密度为

$$\sigma = \epsilon_0 E_y = -\frac{\eta a}{\pi(x^2+a^2)},$$

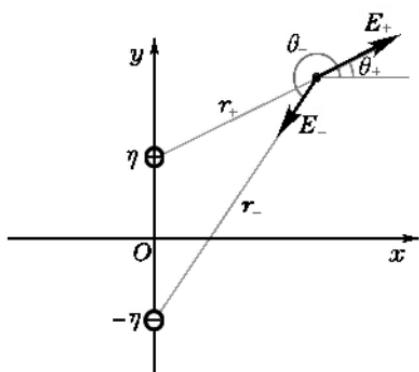
由此可算出 z 方向单位长度上地面的总电荷为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma \cdot 1 \cdot dx = -\frac{\eta a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2} dx = -\frac{2\eta a}{\pi} \cdot \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \Big|_0^{\infty} = -\eta,$$

与像电荷的线密度相等。



习题 1 - 65

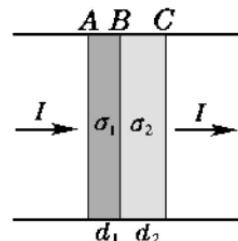


1 - 66. 本题图中两边为电导率很大的导体, 中间两层是电导率分别为 σ_1 、 σ_2 的均匀导电介质, 其厚度分别为 d_1 、 d_2 , 导体的截面积为 S , 通过导体的恒定电流为 I . 求:

- (1) 两层导电介质中的场强 E_1 和 E_2 ;
- (2) 电势差 U_{AB} 和 U_{BC} .

$$\text{解: (1)} j = \frac{I}{S} = \sigma E, \quad \therefore E_1 = \frac{I}{\sigma_1 S}, \quad E_2 = \frac{I}{\sigma_2 S}$$

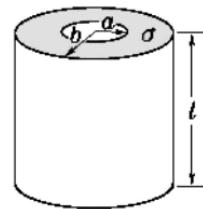
$$(2) U_{AB} = E_1 d_1 = \frac{Id_1}{\sigma_1 S}, \quad U_{BC} = E_2 d_2 = \frac{Id_2}{\sigma_2 S}$$



习题 1 - 66

1 - 67. 同轴电缆内、外半径分别为 a 和 b , 其间电介质有漏电阻, 电导率为 σ , 如本题图所示。求长度为 l 的一段电缆内的漏阻。

$$\text{解: } R = \int_a^b \frac{1}{\sigma} \frac{dr}{2\pi r l} = \frac{1}{2\pi\sigma l} \ln \frac{b}{a}.$$



习题 1 - 67