Chapter -3 (आव्यूह)

★ महत्वपूर्ण सूत्र ★

☆ mn संख्याओं (वास्तविक अथवा काल्पनिक) को m पंक्तियों तथा n स्तम्भों में व्यवस्थित करने पर जो आयताकार सारणी प्राप्त होती है, उसे $m \times n$ क्रम अथवा $m \times n$ कोटि का आव्यूह कहते हैं।

☆ कोई आव्यूह जिन संख्याओं से निर्मित होता है, उन्हें उस आव्यूह के अवयव कहते हैं।

☆ i वीं पंक्ति तथा j वें स्तम्भ के अवयव को a_{ij} से निरूपित किया जाता है।

☆ आव्यूह का कोई संख्यात्मक मान नहीं होता है।

☆ क्षैतिज आव्यूह में : पंक्तियों की संख्या < स्तम्भों की संख्या

☆ ऊर्ध्वाधर आव्यूह में : पंक्तियों की संख्या > स्तम्भों की संख्या

☆ वर्ग आव्यूह में : पंक्तियों की संख्या = स्तम्भों की संख्या

☆ पंक्ति आव्यूह अथवा पंक्ति सदिश में : पंक्तियों की संख्या = 1

☆ स्तम्भ आव्यूह अथवा स्तम्भ सदिश में : स्तम्भों की संख्या = 1

☆ शून्य अथवा रिक्त आव्यूह में प्रत्येक अवयव शून्य होता है।

☆ आयताकार आव्यूह : पंक्तियों की संख्या ≠ स्तम्भों की संख्या

☆ वर्ग आव्यूह $[a_{ij}]_{n\times n}$ के वह अवयव जिनके लिए $i = j$, विकर्ण के अवयव कहलाते हैं तथा जिस रेखा के अनुगत यह स्थित होते हैं, वह आव्यूह का मुख्य विकर्ण कहलाती है।

☆ ऐसा वर्ग आव्यूह जिसके मुख्य विकर्ण का प्रत्येक अवयव 1 तथा शेष सभी अवयव शून्य होते हैं, इकाई अथवा तत्समक आव्यूह कहलाता है।

☆ ऐसा वर्ग आव्यूह जिसके मुख्य विकर्ण के अवयवों के अतिरिक्त शेष सभी अवयव शून्य होते हैं, विकर्ण आव्यूह कहलाता है।

☆ ऐसा वर्ग आव्यूह जिसके मुख्य विकर्ण के सभी अवयव समान तथा शेष सभी अवयव शून्य होते हैं, अदिश आव्यूह कहलाता है।

☆ ऐसा वर्ग आव्यूह जिसके मुख्य विकर्ण के नीचे सभी अवयव शून्य होते हैं, उपरित्रिभुजीय आव्यूह कहलाता है।

☆ ऐसा वर्ग आव्यूह जिसके मुख्य विकर्ण के ऊपर सभी अवयव शून्य होते हैं, निम्न त्रिभुजीय आव्यूह कहलाता है।

Imp

दो आव्यूह समान कहलाते हैं यदि दोनों आव्यूहों के क्रम समान तथा संगत अवयव बराबर हैं।

$$[a_{ij}]_{n\times n} = [b_{ij}]_{n\times n}$$

☆ यदि A तथा B समान क्रम के दो आव्यूह हैं तो इनका योगफल $(A + B)$ उसी क्रम का एक ऐसा आव्यूह होता है जो A तथा B के संगत अवयवों को जोड़ने पर प्राप्त होता है।

☆ यदि A तथा B समान क्रम के दो आव्यूह हैं तो इनका अन्तर $(A - B)$ उसी क्रम का एक ऐसा आव्यूह होता है जो A के अवयवों में से B के संगत अवयवों को घटाने पर प्राप्त होता है।

☆ यदि A एक आव्यूह तथा k एक अदिश है तो इनका गुणनफल kA, A के प्रत्येक अवयव में k की गुणा करने पर प्राप्त होता है।

☆ दो आव्यूहों A एवं B का गुणनफल AB केवल तभी ज्ञात किया जा सकता है जब आव्यूह A में स्तम्भों की संख्या = आव्यूह B में पंक्तियों की संख्या

☆ यदि A एवं B क्रमशः $m \times p$ एवं $p \times n$ क्रम के दो आव्यूह हैं तो गुणनफल AB, $m \times n$ क्रम का एक ऐसा आव्यूह है जिसमें (i, j) वाँ अवयव A की i वीं पंक्ति तथा B के j वें स्तम्भ के संगत अवयवों के गुणनफलों के योगफल के बराबर होता है।

Imp

परिवर्त आव्यूह:-

☆ किसी आव्यूह A की पंक्तियों को स्तम्भों में तथा स्तम्भों को पंक्तियों में बदलने पर प्राप्त आव्यूह को आव्यूह A का परिवर्त आव्यूह कहते हैं जिसे A^T से प्रदर्शित किया जाता है।

☆ आव्यूह A का (i,j) वाँ अवयव = आव्यूह A^T का (j,i) वाँ अवयव

$$[a_{ij}] = [a_{ji}]$$

☆ यदि आव्यूह A का क्रम $m \times n$ है तो A^T का क्रम $= n \times m$

$$[a_{ij}]_{m\times n} = [a_{ji}]_{m\times n}$$

परिवर्त आव्यूह के नियम:-

☆ $(A^T)^T = A$

☆ $(A+B)^T = A^T + B^T$

☆ $(kA)^T = kA^T$

☆ $(AB)^T = B^T A^T$

Imp

☆ वर्ग आव्यूह A को सममित आव्यूह कहते हैं यदि

$$A^T = A$$

☆ वर्ग आव्यूह A को विषम सममित आव्यूह कहते हैं यदि

$$A^T = -A$$

☆ विषम सममित आव्यूह के मुख्य विकर्ण पर सभी अवयव शून्य होते हैं।

☆ प्रत्येक वर्ग आव्यूह को एक सममित आव्यूह तथा एक विपम सममित आव्यूह के योग के रूप में अद्वितीयत: व्यक्त किया जा सकता है। यदि A एक वर्ग आव्यूह है तो $A = P + Q$ जहाँ $P = \frac{1}{2}(A + A^T)$ एक सममित आव्यूह तथा $Q = \frac{1}{2}(A - A^T)$ एक विषम सममित आव्यूह है।

Imp

व्युत्क्रमणीय आव्यूह :-

☆ m क्रम का वर्ग आव्यूह A व्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि m क्रम का एक वर्ग आव्यूह B इस प्रकार अस्तित्व में है कि

$$AB = BA = I_m$$

☆ $AB = BA = I_m \Rightarrow A^{-1} = B$ तथा $B^{-1} = A$

अर्थात

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_m$$

☆ प्रत्येक व्युत्क्रमणीय आव्यूह का व्युत्क्रम अद्वितीय होता है।

☆ यदि A तथा B एक ही क्रम के दो व्युक्रमणीय वर्ग आव्यूह हैं तो $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$