

Metody Numeryczne-Aproksymacja profilu wysokościowego

Adam Białek 193677

1.Wstęp

Celem projektu było zapoznanie się, analiza oraz implementacja dwóch metod aproksymacji interpolacyjnej: metodę wykorzystującą wielomian interpolacyjny Lagrange'a oraz metodę wykorzystującą funkcje sklepane trzeciego stopnia.

A. Metoda wykorzystująca wielomian interpolacyjny Lagrange'a

Metoda polegająca na wyznaczeniu wielomianu stopnia k dla $k+1$ węzłów interpolacji, czyli znanych wartościach funkcji (w przypadku tego projektu są to wartości wysokości) dla poszczególnych argumentów funkcji.

Wzór na wielomian interpolacyjny Lagrange'a:

$$L(x) = \sum_{j=0}^k y_j \ell_j(x).$$

Gdzie $\ell_j(x)$ czyli Baza Lagrange'a określona jest wzorem:

$$\ell_j(x) = \prod_{\substack{0 \leq m \leq k \\ m \neq j}} \frac{x - x_m}{x_j - x_m}.$$

Znajdowanie wartości aproksymowanej jest realizowane poprzez podstawienie współrzędnej x szukanej wartości funkcji do wielomianu $L(x)$.

B. Metoda wykorzystująca funkcje sklepane trzeciego stopnia

Interpolacja wykorzystująca funkcje sklepane trzeciego stopnia jest przykładem interpolacji lokalnej, w przeciwieństwie do interpolacji z wielomianem Lagrange'a, która jest przykładem interpolacji globalnej. Polega ona na wyznaczaniu wielomianów niskiego stopnia (w tym przypadku trzeciego) pomiędzy sąsiednimi węzłami, co zapobiega efektom, na które podatna jest interpolacja wielomianami Lagrange'a, które zostaną opisane w dalszej części sprawozdania. Dla $n+1$ węzłów będzie rozpatrywane n przedziałów. Wielomiany w danych przedziałach mają następującą formę:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

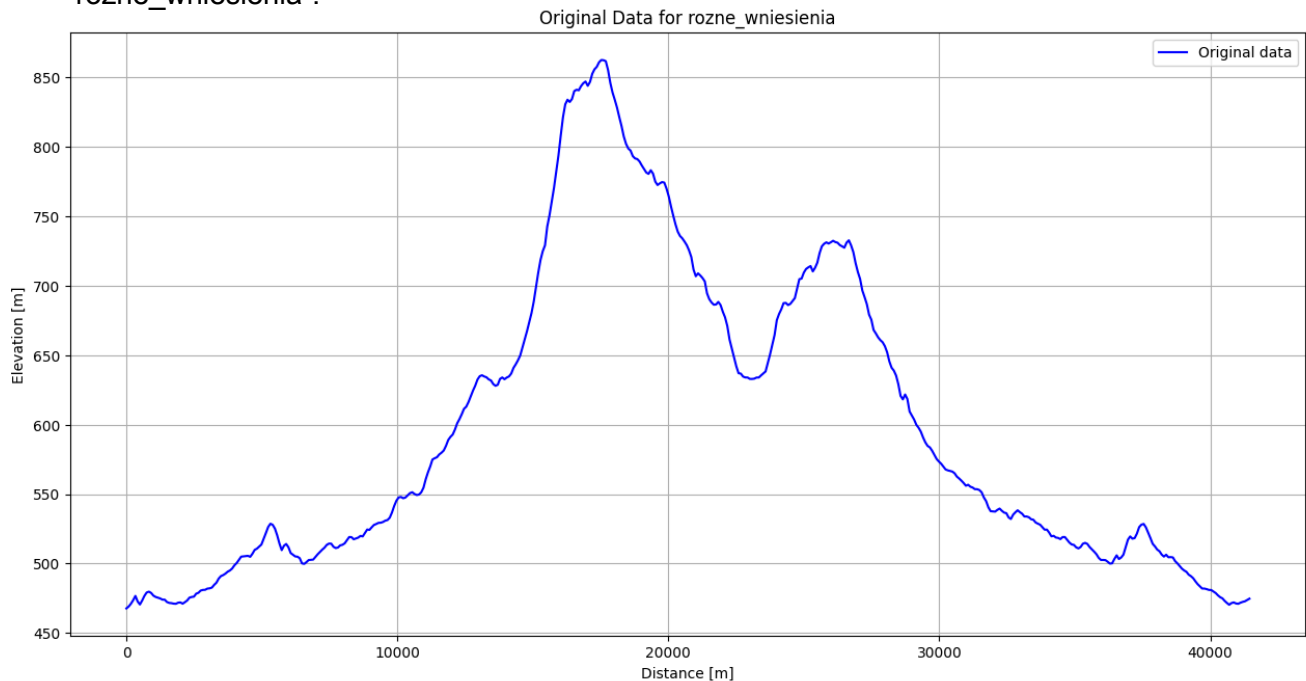
Aby obliczyć wszystkie współczynniki potrzebne do obliczenia wartości wielomianu będzie trzeba rozwiązać układ równań z następującymi równaniami:

- $S_j(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n-1$
- $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, n-1$
- Dla węzłów wewnętrznych x_j : $S'_{j-1}(x_j) = S'_j(x_j), \quad j = 1, \dots, n-1$
- Dla węzłów wewnętrznych x_j : $S''_{j-1}(x_j) = S''_j(x_j), \quad j = 1, \dots, n-1$
- Na krawędziach: $S''_0(x_0) = 0$ i $S''_{n-1}(x_n) = 0$

Do rozwiązania tego układu równań zastosowana zostanie metoda faktoryzacji LU z pivotingiem, mechanizmem poprawiającym dokładność i stabilność numeryczną podanej metody.

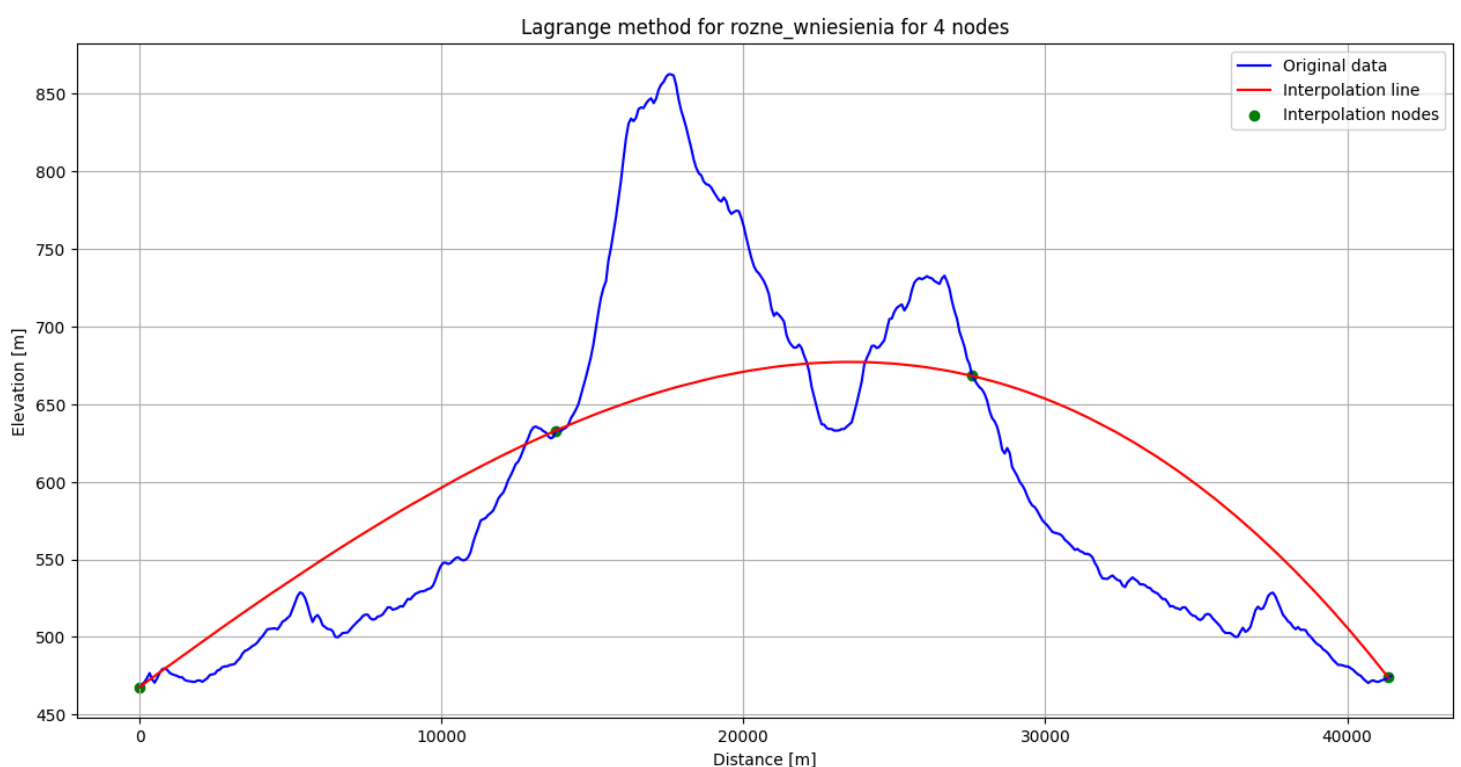
2. Analiza zadania

Pierwszą analizowaną funkcją jest funkcja przedstawiona poniżej, nazwana "rozne_wniesienia".

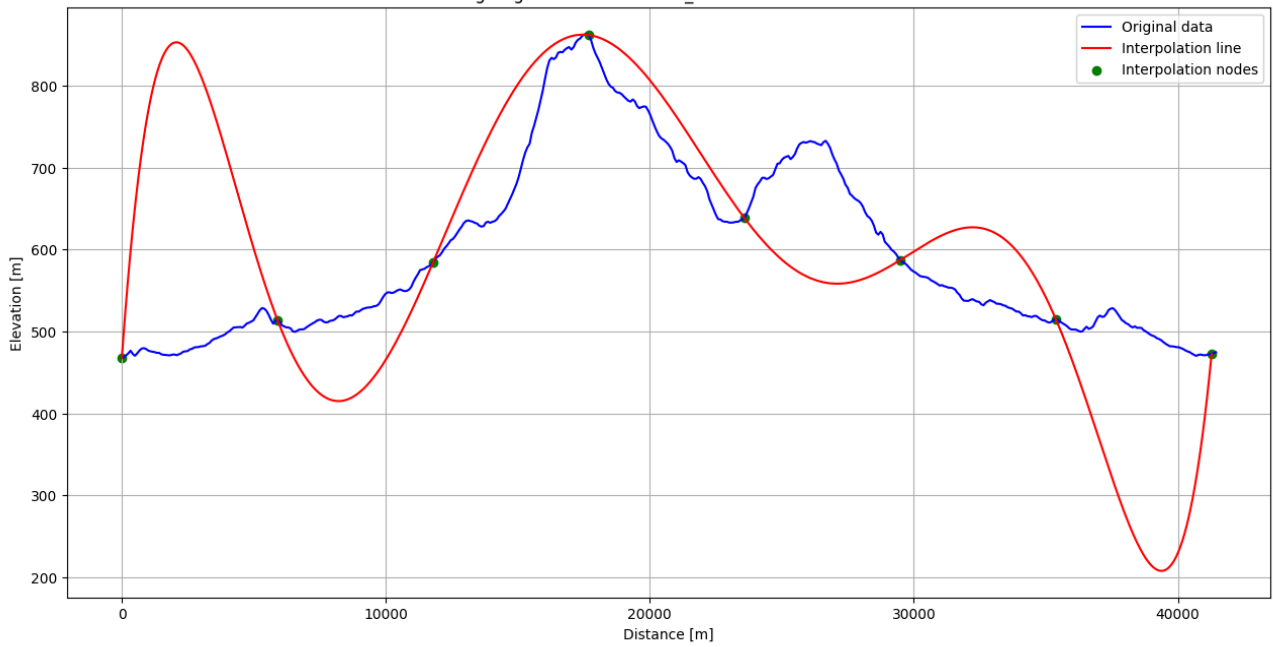


Funkcja ta nie zawiera nagłych zmian w wysokościach oraz zawiera ona 2 wzniesienia z minimum lokalnym między nimi.

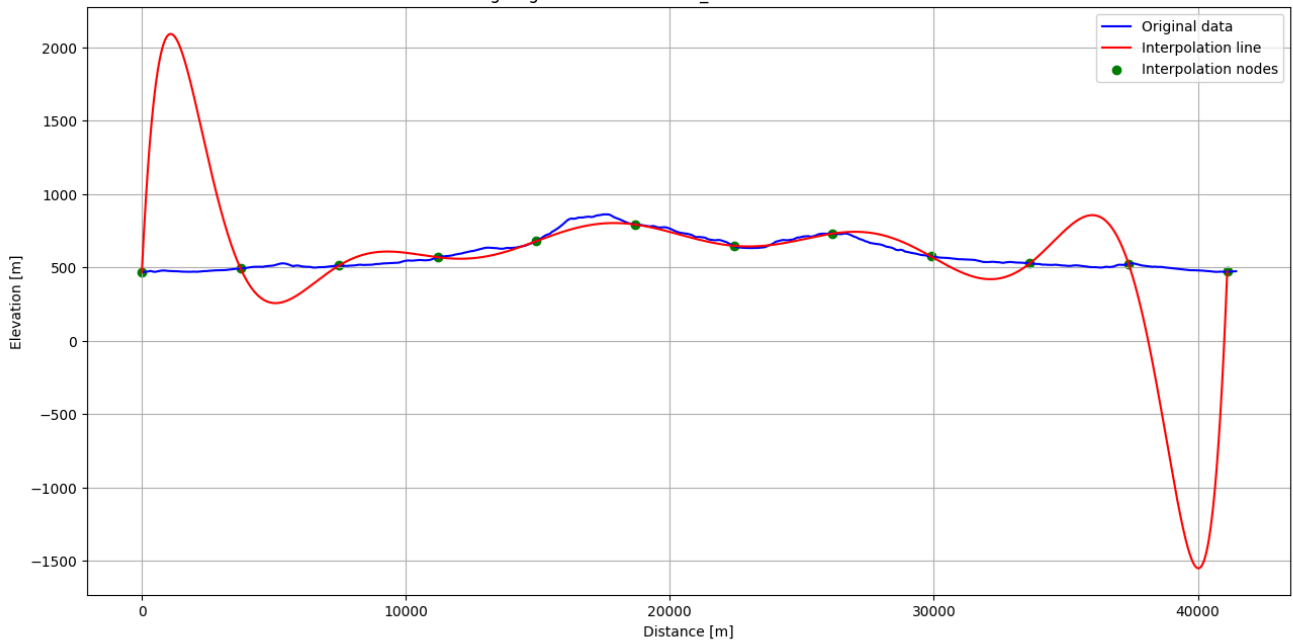
Metoda z wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a



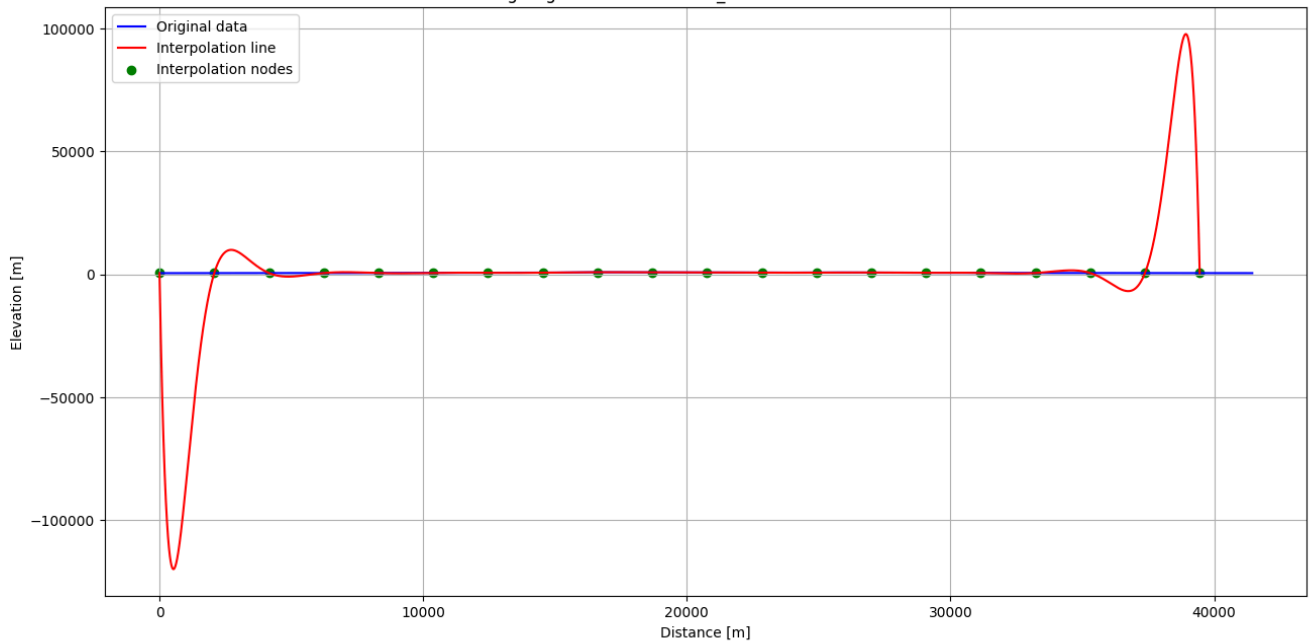
Lagrange method for rozne_wniesienia for 8 nodes



Lagrange method for rozne_wniesienia for 12 nodes

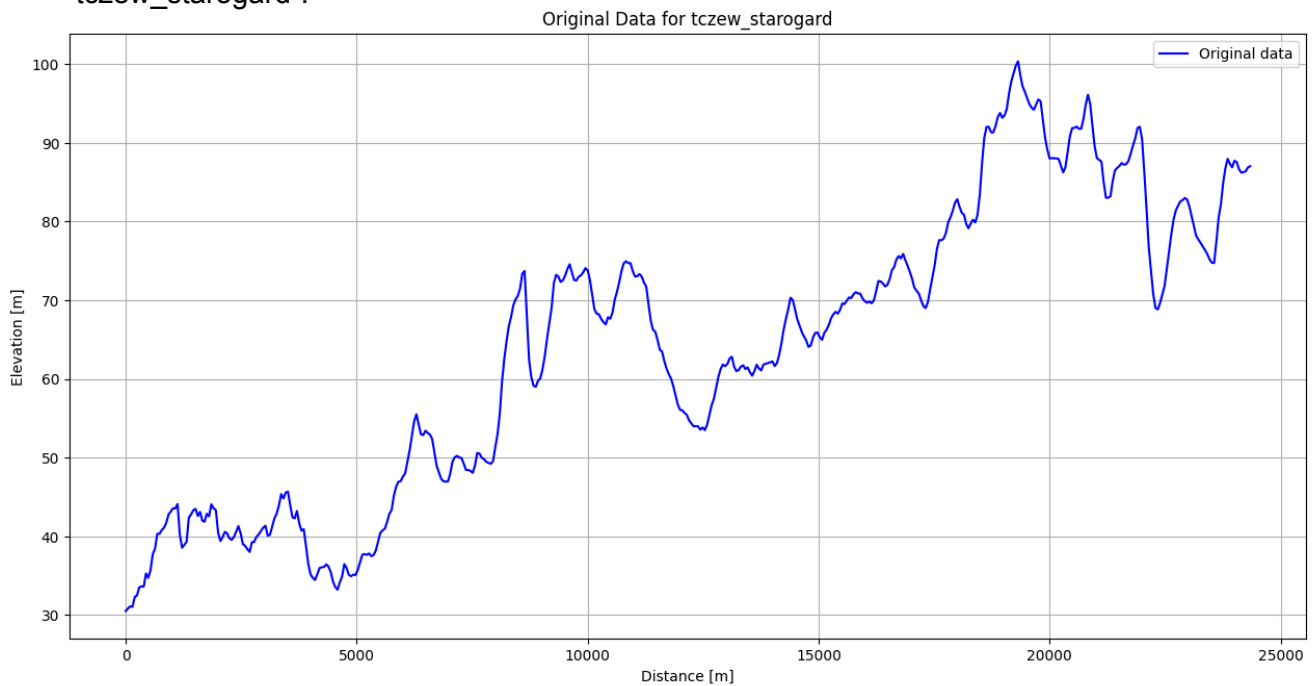


Lagrange method for rozne_wniesienia for 20 nodes

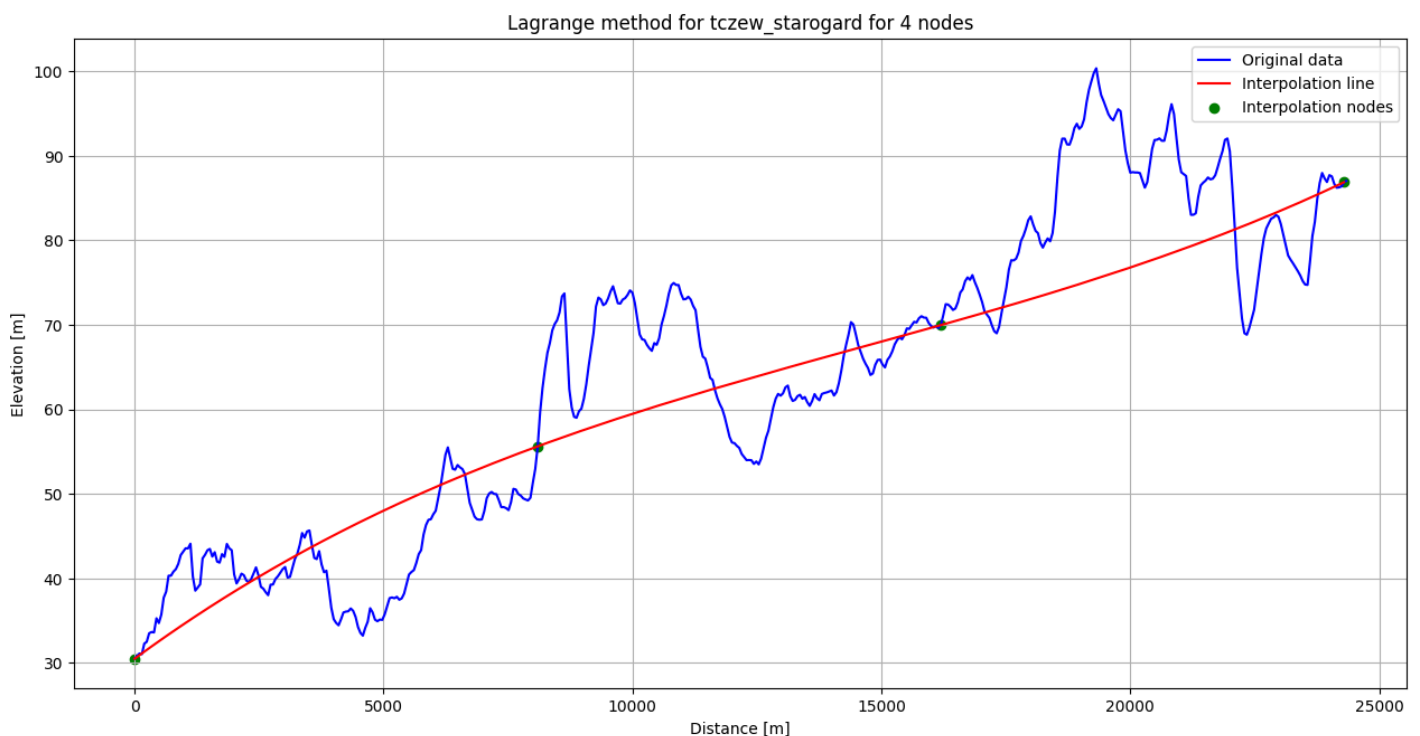


Interpolacje zostały przeprowadzone na 4, 8, 12 i 20 równo rozmieszczonych węzłach. Wraz ze wzrostem liczby węzłów rośnie dokładność interpolacji w środkowej części wykresu. Na krańcach przedziału już od 8 węzłów widoczne są gwałtowne zmiany wartości interpolacji znane efektem Rungego. Są one produktem stosowania wielomianu dużego stopnia do interpolacji funkcji. Pomimo dobrych wyników interpolacji od 12 węzłów wykres zaczyna być nieczytelny.

Drugą analizowaną funkcją jest przedstawiona poniżej funkcja opisana jako "tczew_starogard".



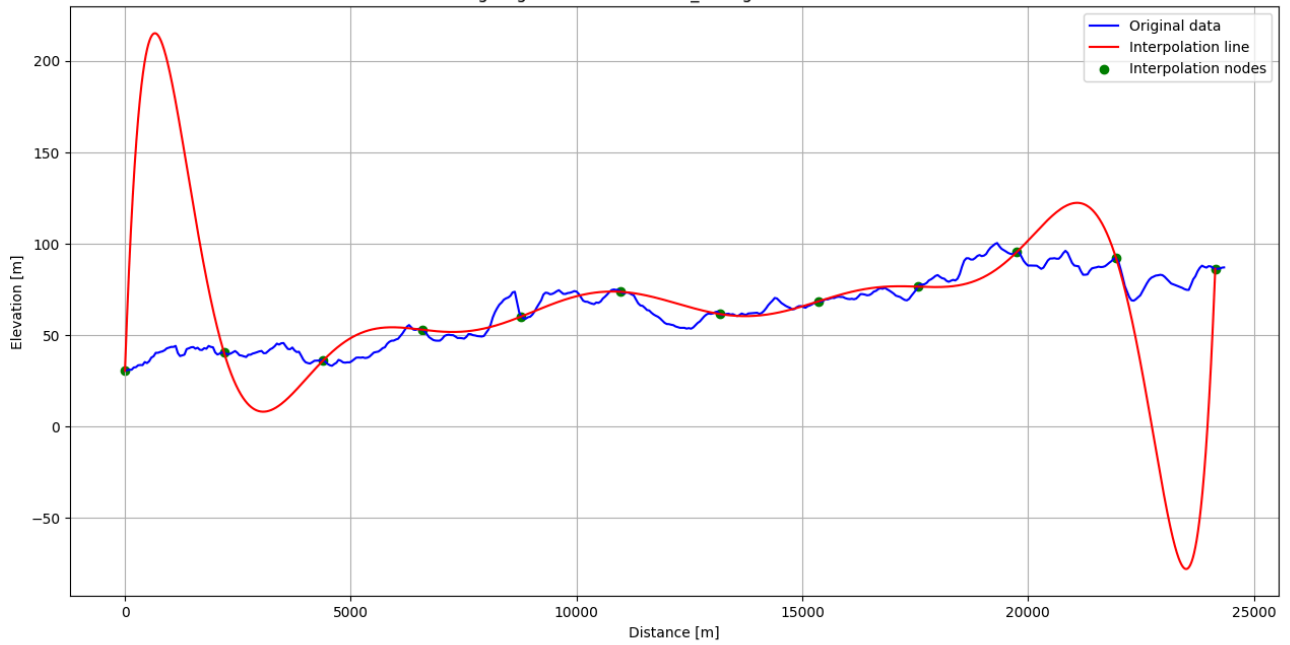
W porównaniu do pierwszej funkcji, ta funkcja zawiera dużo więcej spadków i wzrostów wysokości co pomoże zobrazować jak zachowa się ta metoda z wielomianem Lagrange'a dla funkcji o takim charakterze.



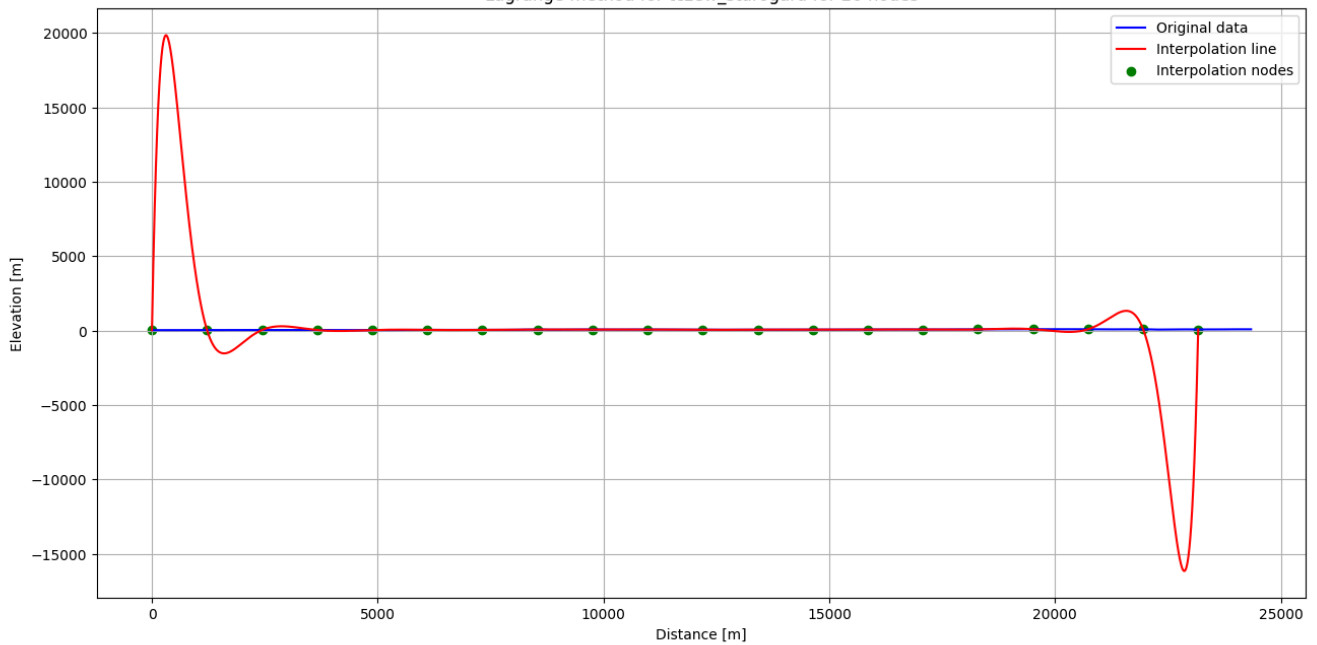
Lagrange method for tczew_starogard for 8 nodes



Lagrange method for tczew_starogard for 12 nodes



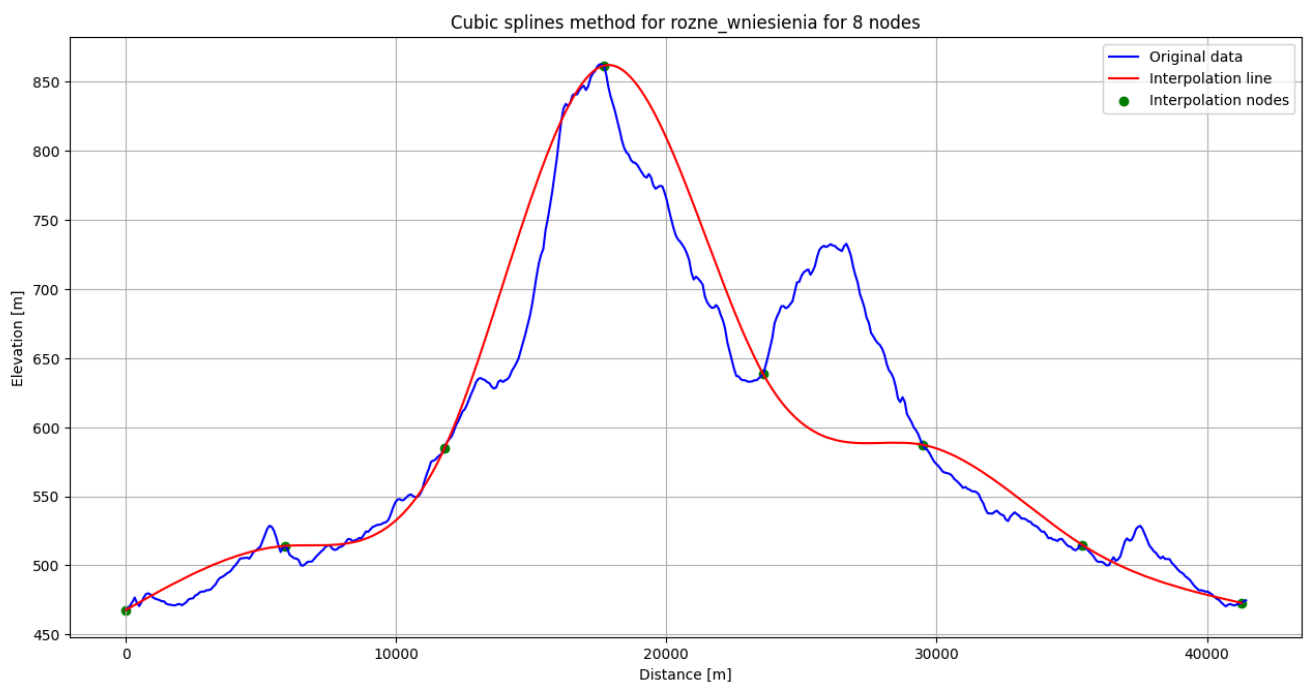
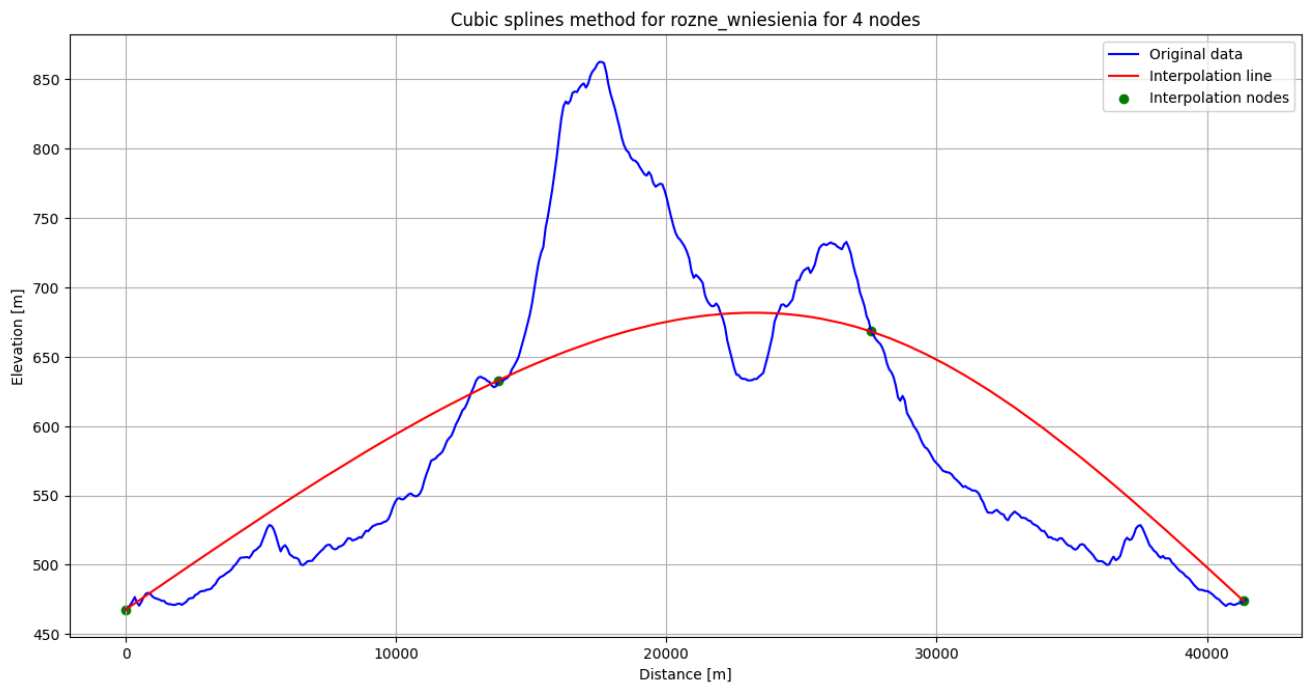
Lagrange method for tczew_starogard for 20 nodes

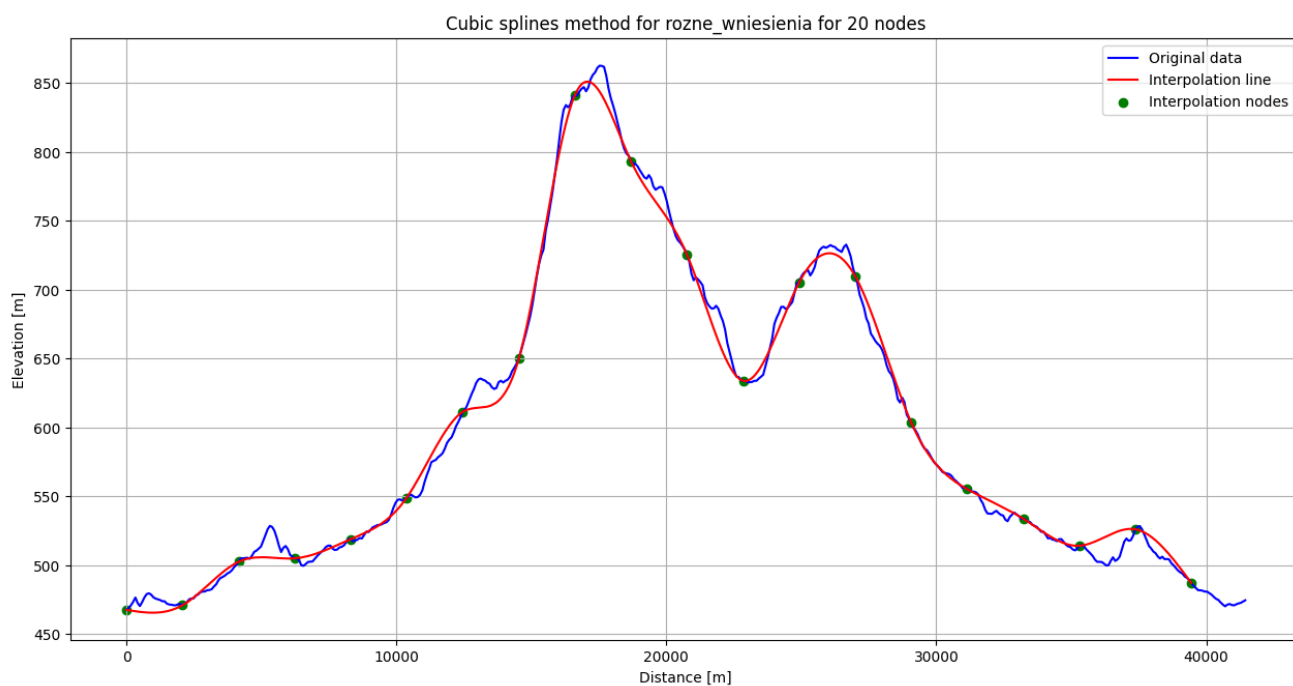
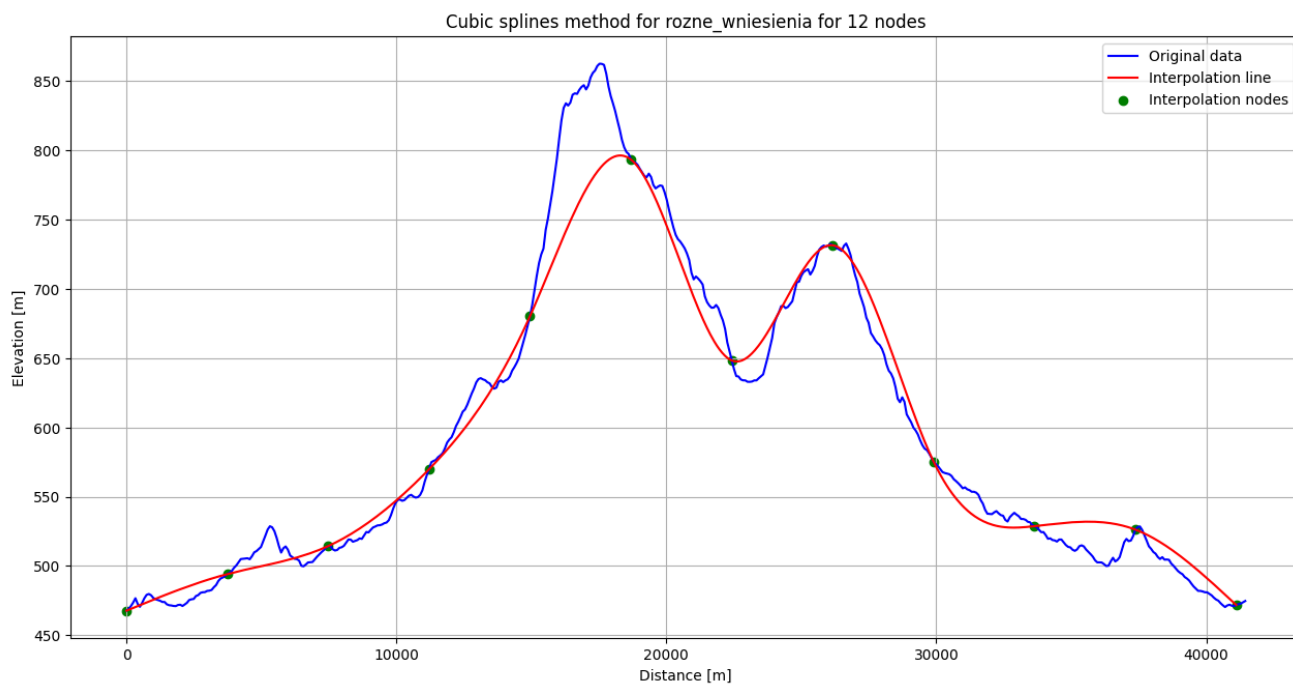


Dla 4 węzłów interpolacja jedynie przedstawia generalny kierunek funkcji. Dla 8 węzłów widoczny jest delikatny efekt Rungego początku interpolacji i wyznaczana jest niedokładna interpolacja. Dla 12 węzłów już dobrze widoczny jest efekt Rungego a dla 20 węzłów efekt Rungego jest tak duży, że sprawia iż wykres jest nieczytelny tak samo jak w przypadku 20 węzłów dla funkcji "rozne_wniesienia".

Metoda wykorzystująca funkcje sklejane trzeciego stopnia

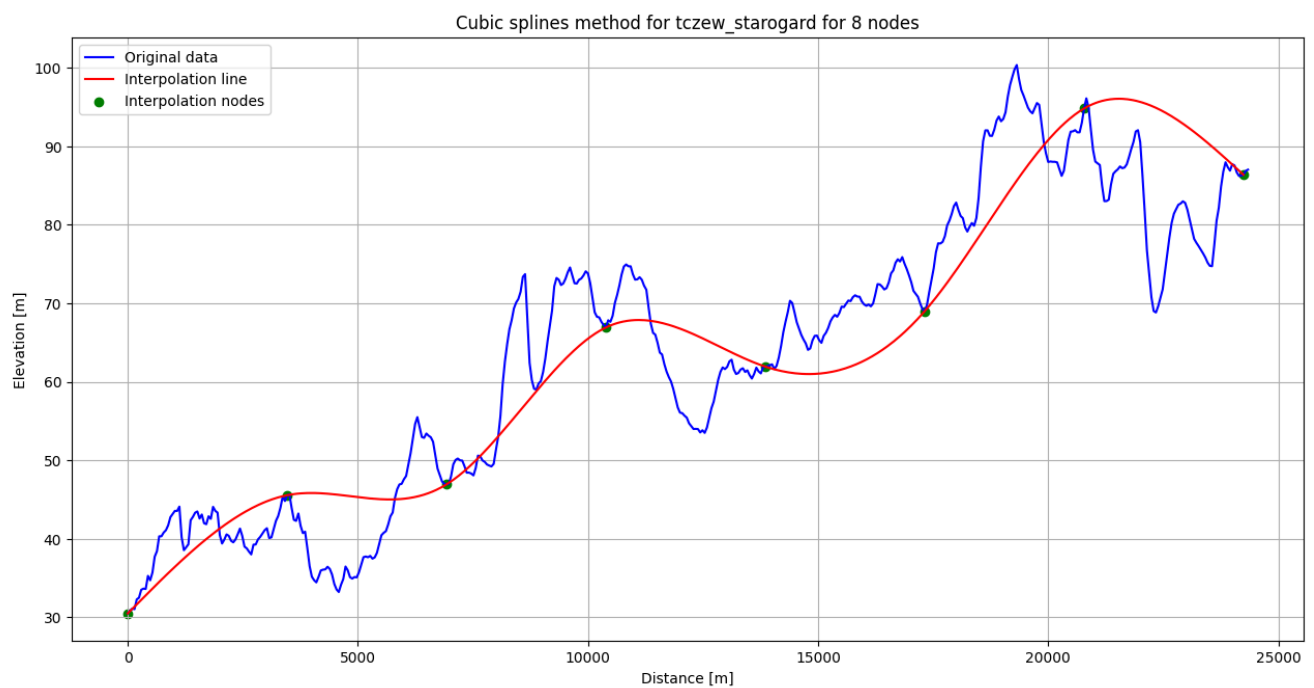
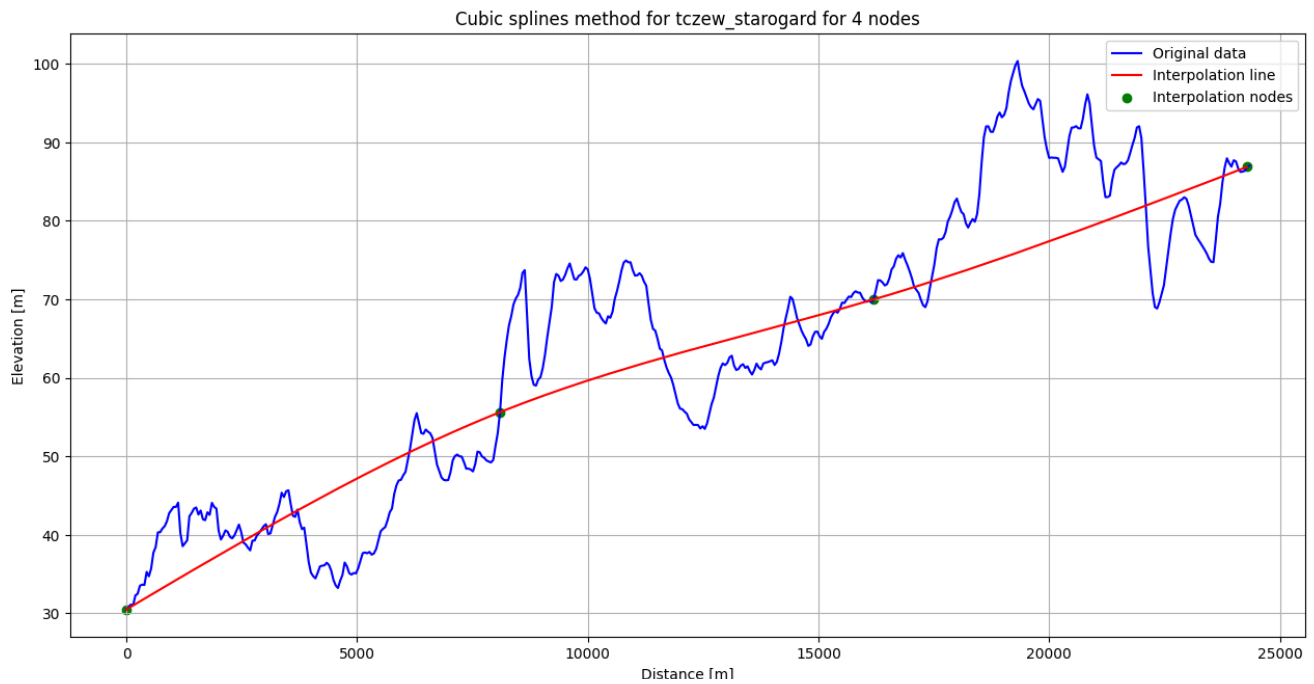
Poniżej przedstawione są wykresy interpolacji funkcji "rozne_wniesienia" przy użyciu funkcji sklejanych trzeciego stopnia opisanych we wstępie.

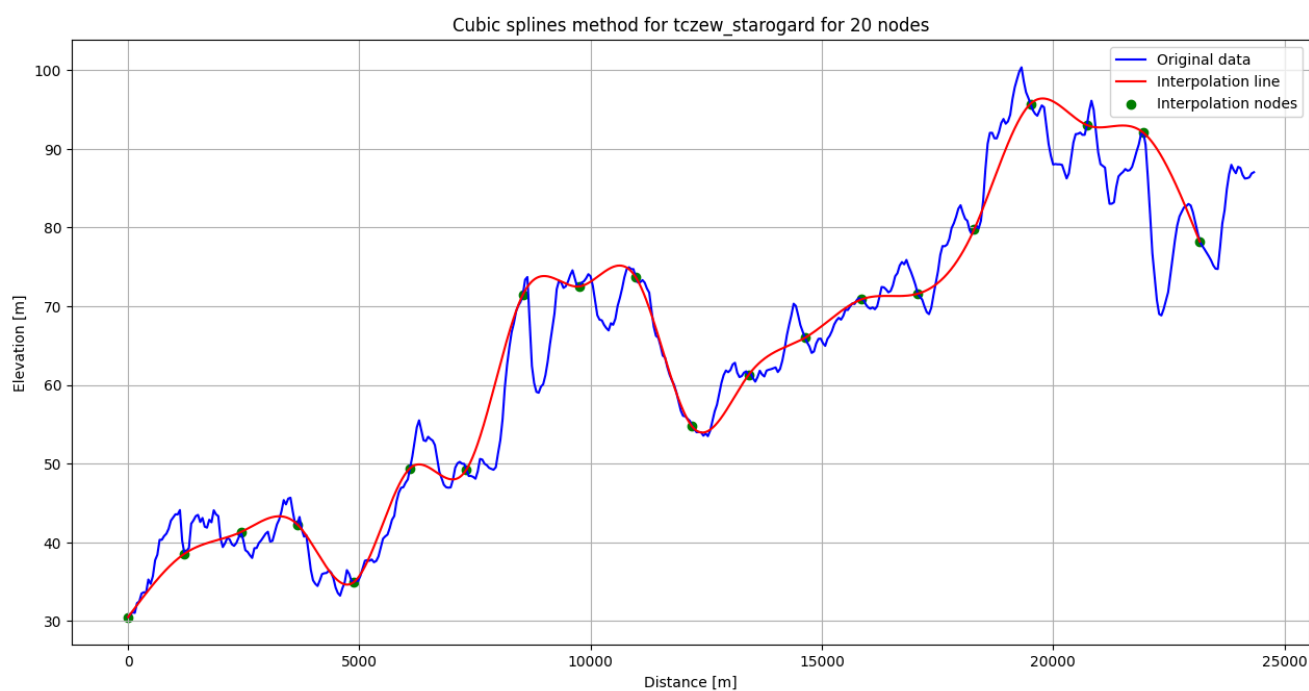
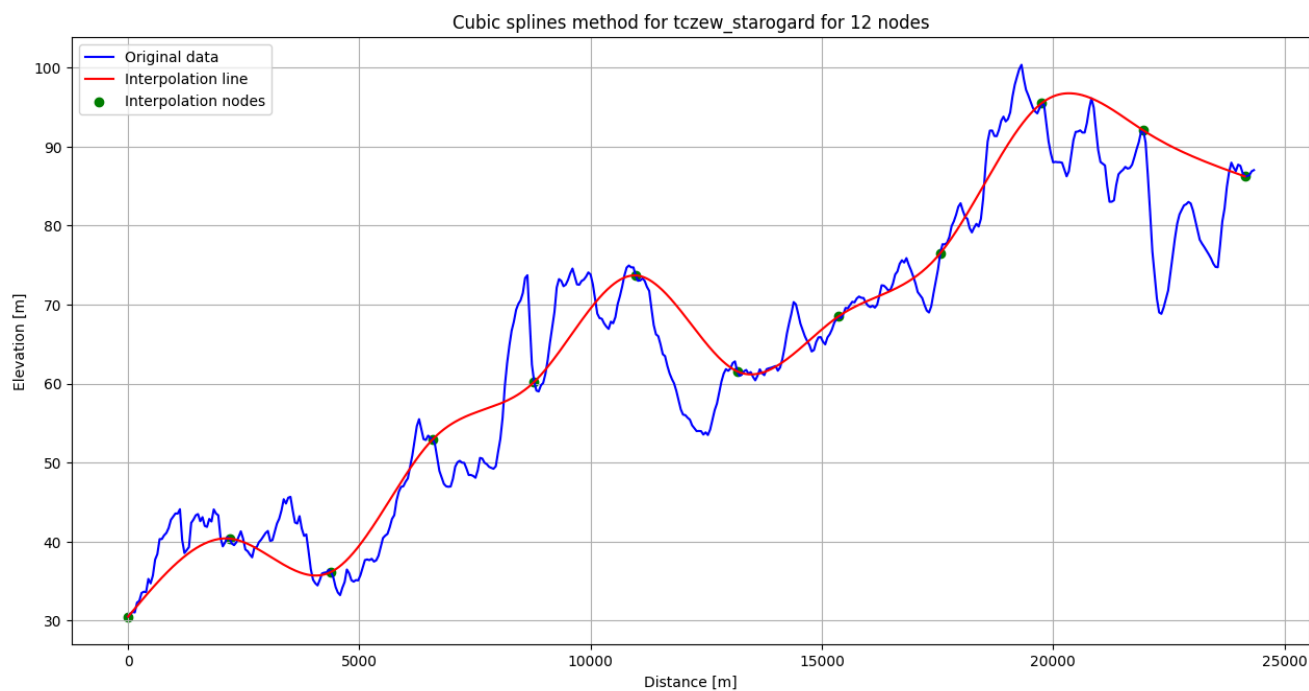




Podczas gdy dla 4 węzłów interpolacja funkcjami sklejanyymi nie różni się mocno od interpolacji wielomianem Lagrange'a, to dla większej liczby węzłów różnica jest znacząca. Dla żadnej liczby węzłów nie wystąpił efekt Rungego, a wraz ze wzrostem liczby węzłów rosła dokładność interpolacji. Szczególnie dla 20 węzłów dokładność interpolacji jest wysoka.

Poniżej znajdują się wykresy interpolacji funkcji “tczew starogard” przy użyciu funkcji sklejanych.

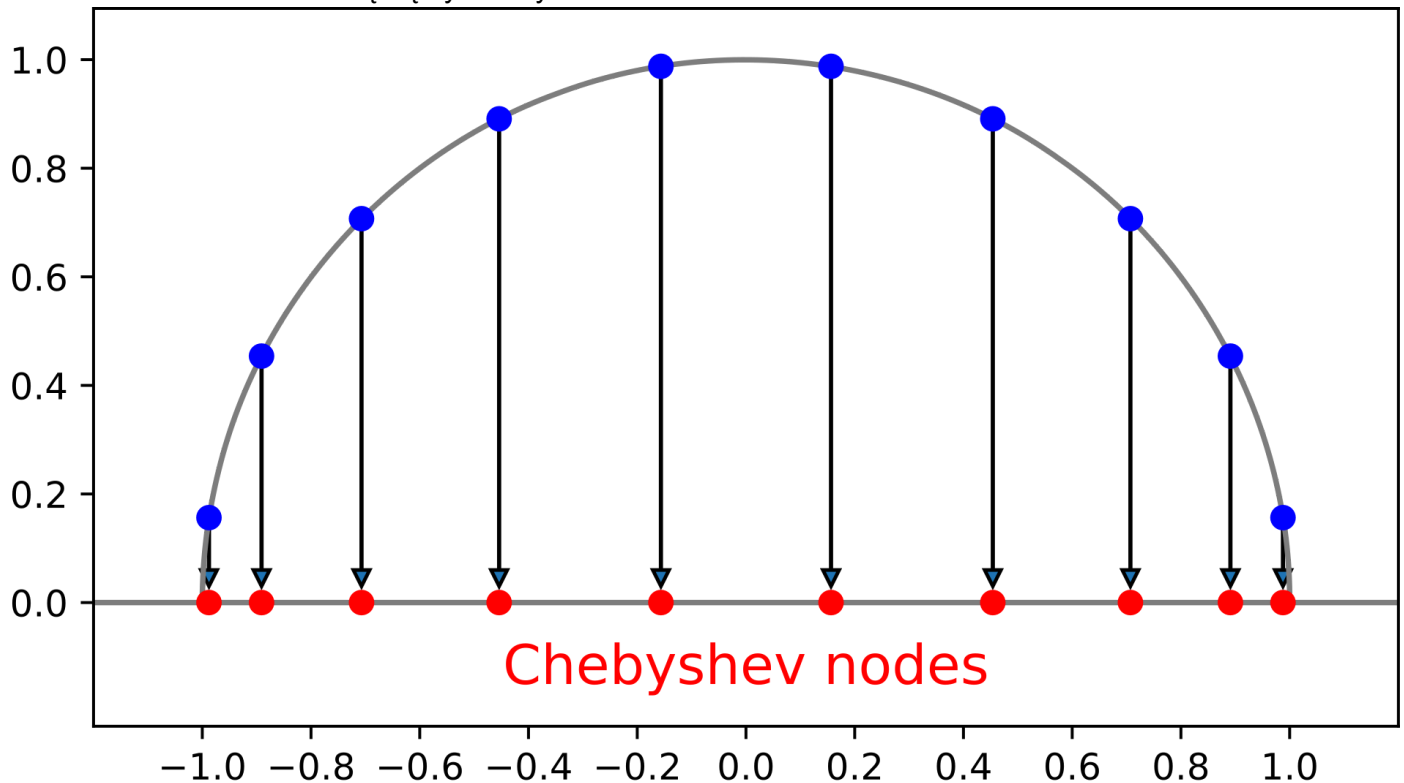




Podobnie jak w przypadku funkcji "rozne_wniesienia" dla 4 węzłów interpolacja nie różni się znacząco od interpolacji wyznaczonej przez wielomian Lagrange'a. Ponownie efekt Rungego nie jest obecny na żadnej z przedstawionych interpolacji, niezależnie od liczby węzłów. Funkcja jest gorzej aproksymowana niż "rozne_wniesienia". Spowodowane to może być charakterem funkcji, ma ona wiele minimów i maksimów lokalnych. Przez to aproksymacja niektórych miejsc funkcji nie przebiega poprawnie np. około 10000 m oraz 21500 m węzły wystąpiły jeden po drugim w okolicy lokalnych maksimów funkcji przez co funkcja interpolująca nie wyznaczała występujących tam lokalnych minimów.

Analiza dodatkowa

W ramach analizy dodatkowej zbadalem wpływ rozmieszczenia węzłów na interpolację przy użyciu wielomianu Lagrange'a. W podstawowej analizie zadania wszystkie węzły były rozmieszczone równomiernie. W tej sekcji zbadana zostanie sytuacja, w której na początku i na końcu przedziału znajduje się więcej węzłów niż na środku przedziału. W tym celu zastosowane zostaną węzły Czebyszewa.



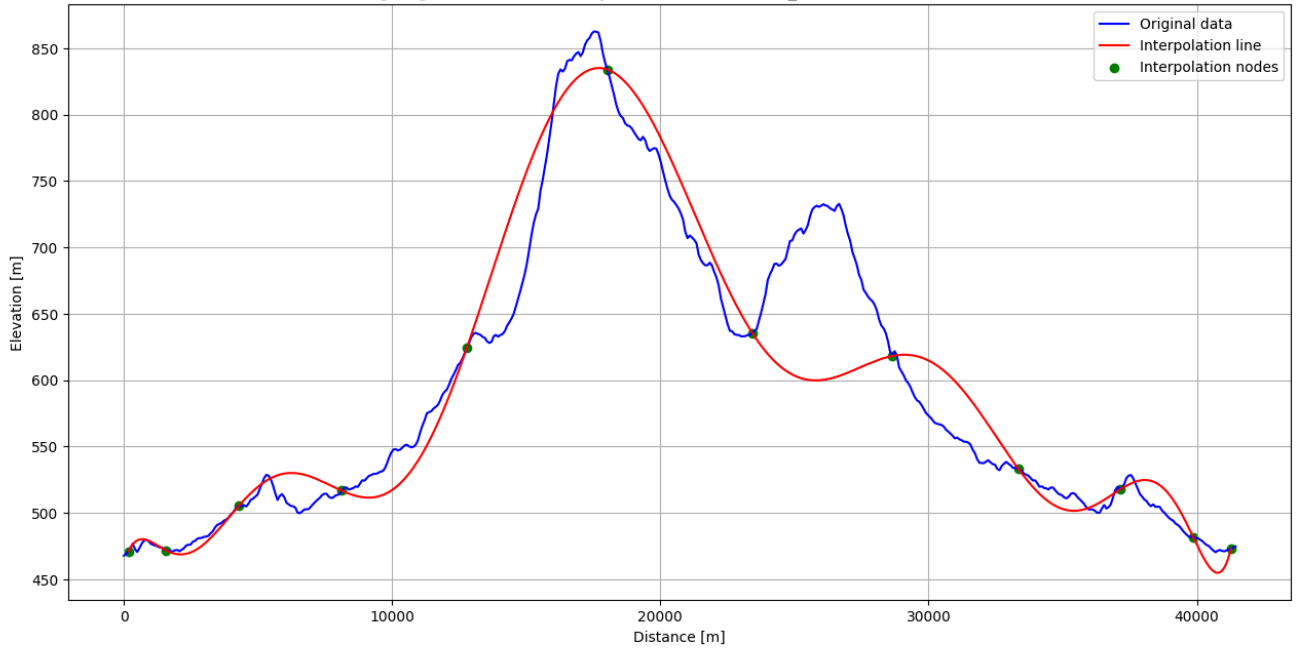
Węzły Czebyszewa znajdują się od siebie w równej odległości na półkolu. Jeżeli płaską ścianę półkola ustawi się na osi X, a następnie każdy węzeł rzutuje na oś X spowoduje to zagęszczenie węzłów na początku przedziału i przerzedzenie węzłów w środkowej części przedziału. Węzły Czebyszewa wyznaczane są przy użyciu poniższego wzoru:

$$x_k = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(b - a) \cos\left(\frac{2k - 1}{2n}\pi\right)$$

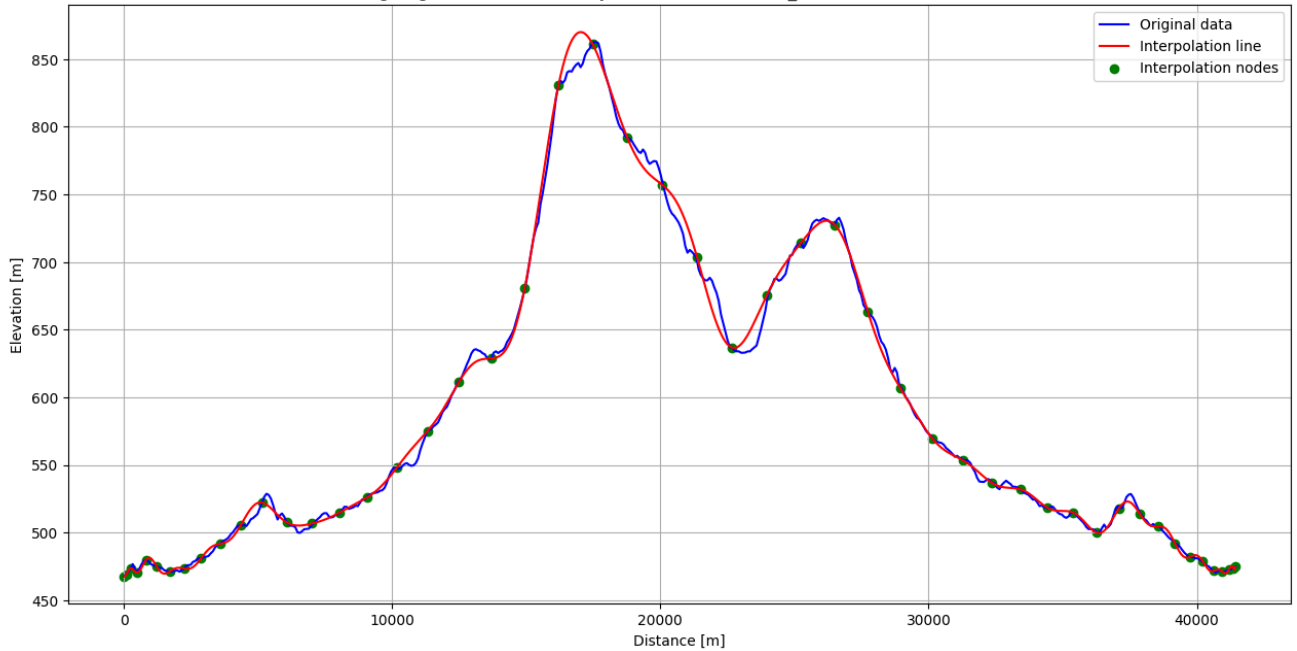
Gdzie a i b stanowią krańce przedziału, x_k współrzędną x kolejnego węzła, a k określa liczbę który to węzeł.

Poniżej przedstawione są wykresy interpolacji wielomianowej z zastosowaniem węzłów Czebyszewa. Analizowana będzie funkcja "rozne_wniesienia".

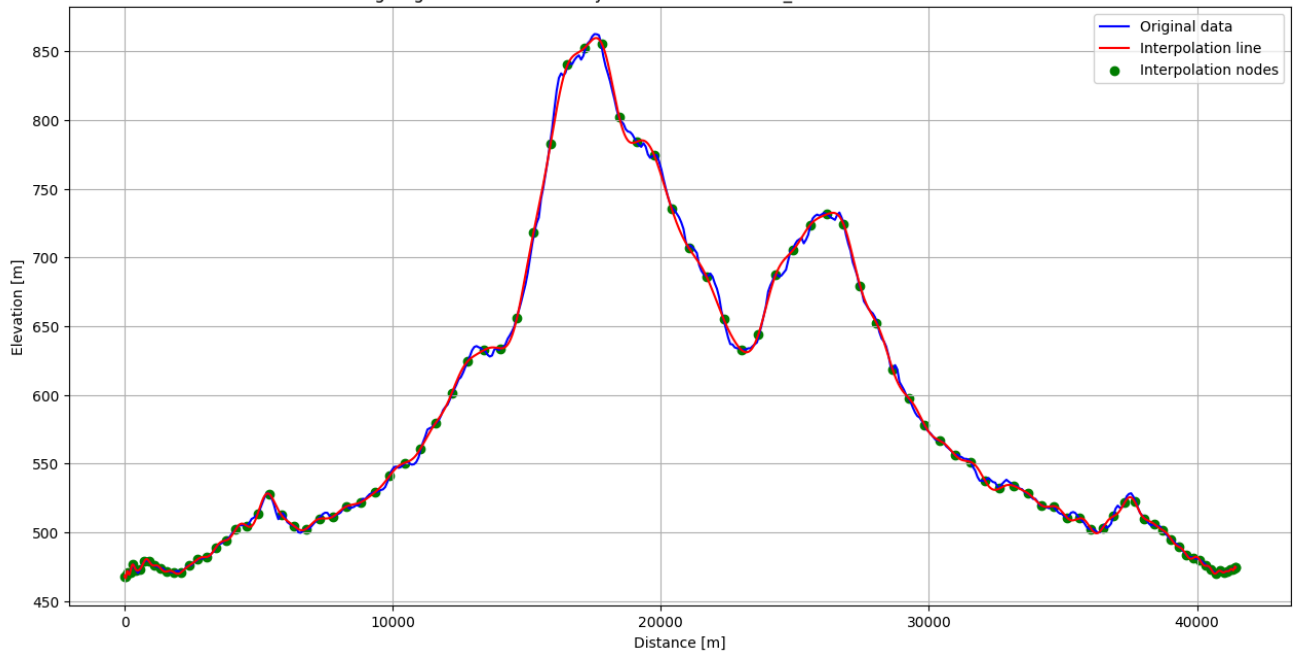
Lagrange method with chebyshev nodes for rozne_wniesienia for 12 nodes

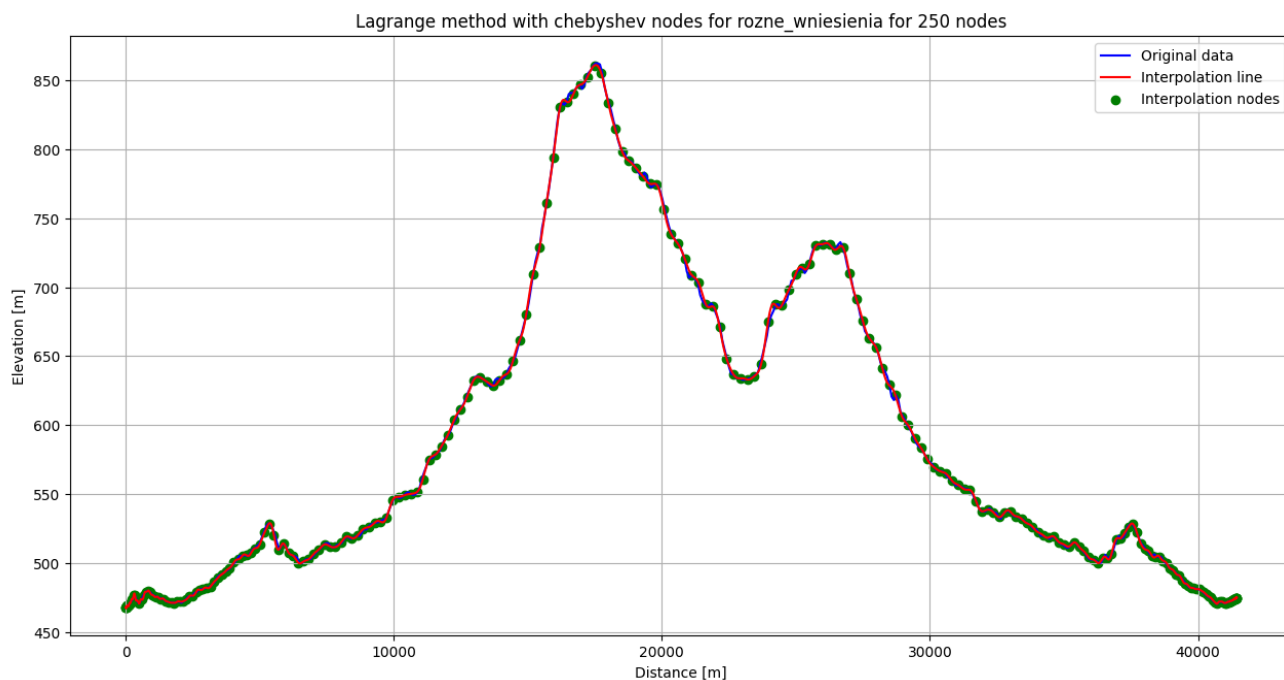


Lagrange method with chebyshev nodes for rozne_wniesienia for 50 nodes



Lagrange method with chebyshev nodes for rozne_wniesienia for 100 nodes





Dla mniejszej liczby węzłów interpolacja jest mniej dokładna w środkowej części funkcji, co można zobaczyć porównując aproksymację dla 12 równomiernie rozmieszczonych węzłów oraz 12 węzłów Czebyszewa. Dla węzłów Czebyszewa przez przesunięcie węzłów w środkowej części funkcji pomijane jest drugie ekstremum lokalne podczas interpolacji. Istotną różnicą jest również brak efektu Rungego. Zagęszczenie węzłów na krańcach przedziału uniemożliwia funkcji interpolującej wykonanie takiego ogromnego skoku jak w przypadku równomiernie rozmieszczonych węzłów. Wraz ze wzrostem liczby węzłów wzrasta dokładność aproksymacji funkcji, bez występowania efektu Rungego.

3.Podsumowanie

Zarówno metoda z użyciem wielomianu Lagrange'a oraz metoda wykorzystująca funkcje sklepane trzeciego stopnia ma swoje wady i zalety. Metoda Lagrange'a jest bardzo prosta w implementacji, co jest znaczącą zaletą jeżeli nie zależy nam na dużej dokładności aproksymacji, a zależy nam na krótkim czasie wykonywania zadania. Metoda Lagrange'a ma również znaczącą wadę w postaci efektu Rungego który powstaje dla wielomianów o wysokich stopniach. Da się w łatwy sposób temu zapobiec stosując węzły Czebyszewa zamiast równomiernie rozmieszczonych węzłów. Dzięki temu możemy uzyskać większą dokładność aproksymacji. Kolejnym rozwiązaniem byłoby "odcięcie" krańców interpolacji. Jeżeli zależy nam tylko na jakimś odcinku aproksymowanej funkcji to możemy interpolować większy (z obu stron) odcinek a następnie pominąć fragmenty w których występuje efekt Rungego. Metoda wykorzystująca funkcje sklepane trzeciego stopnia jest metodą cechującą się dobrą dokładnością i jest ona pozbawiona efektu Rungego. Jest ona trudniejsza w implementacji zatem jeżeli zależy nam na czasie lub osoba implementująca nie ma wystarczających umiejętności, to dobrym pomysłem może być rozważenie implementacji innej metody.

Charakter aproksymowanej funkcji ma również wpływ na jakość interpolacji. Na podstawie przedstawionych wykresów zauważalne jest, że funkcje pozbawione nagłych skoków i spadków w wartości są lepiej interpolowane. Może to być spowodowane tym, że niektóre minima i maksima lokalne mogą być pomijane przez zastosowany dobór węzłów.