Laboratorio di Programmazione e Calcolo
Canale 2
Appunti del corso

Simone Cacace e Giuseppe Visconti
Dipartimento di Matematica
Sapienza Università di Roma

Anno Accademico 2025–2026

Laboratorio – Interpolazione di Lagrange

Esercizi

E0. Interpolazione di Lagrange con nodi equispaziati e analisi dell'errore

Costruire un programma completo per l'interpolazione di Lagrange, utilizzando come "mattoni" fondamentali le funzioni `lagrange_basis` e `lagrange_interpolate` presentate a lezione.

- Scrivere il `main()` che:
  - definisce un intervallo $[a, b]$ a scelta dell'utente;
  - costruisce un insieme di nodi equispaziati $x_0, \ldots, x_n$;
  - calcola i valori $f(x_i)$;
  - costruisce una griglia fitta di punti (100–200 punti) e vi valuta l'interpolante $P(x)$;
  - calcola l'errore punto-punto

$$E(x) = |f(x) - P(x)|.$$

- Salvare su file (ad esempio `lagrange_equisp.txt`) quattro colonne con i seguenti dati:

  `x f(x) P(x) E(x)`

- Generare grafici con `gnuplot`:
  1. $f(x)$ e $P(x)$ sullo stesso grafico;
  2. grafico di $E(x)$ con scala logaritmica sull'asse y.

Suggerimenti.

- Testare il programma con funzioni semplici, ad esempio

$$f(x) = \exp(x)\sin(\frac{3}{2}\pi x), \qquad x \in [-3, 3].$$

- Studiare cosa accade aumentando il numero di nodi n.

E1. Il fenomeno di Runge e il ruolo dei nodi di Chebyshev

Studiare il comportamento dell'interpolazione polinomiale su funzioni particolarmente sensibili, osservando come la scelta dei nodi influenzi la stabilità e l'accuratezza dell'interpolante (fenomeno di Runge).

Funzione di test (Funzione di Runge).

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \qquad x \in [-1, 1].$$

- **Interpolazione con nodi equispaziati.**
  - Scegliere $n = 10, 20, 30$.
  - Costruire i nodi equispaziati e calcolare l'interpolante $P_n(x)$.

- Salvare i dati su file come nell'esercizio E0.
  - Osservare le oscillazioni ai bordi dell'intervallo al variare di n.
- **Interpolazione con nodi di Chebyshev.**
  - Implementare i nodi di Chebyshev:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right), \qquad k = 0, \dots, n.$$

  - Ripetere l'interpolazione e salvare i risultati.
- **Confronto.**
  - Confrontare per ciascun n:
    * grafico $f(x)$ vs interpolante con nodi equispaziati,
    * grafico $f(x)$ vs interpolante con nodi di Chebyshev,
    * grafici dell'errore in scala logaritmica.
  - Evidenziare graficamente come i nodi di Chebyshev riducono drasticamente le oscillazioni.
  - Confrontare matematicamente la costante di Lebesgue

$$\Lambda_n = \max_{x_0 \le x \le x_n} \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)|$$

    sulle due griglie di nodi.

Spiegazione matematica. L'errore dell'interpolazione di Lagrange soddisfa

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

per un opportuno $\xi = \xi(x)$. Il fenomeno di Runge mostra che l'interpolazione polinomiale su nodi equispaziati può divergere agli estremi dell'intervallo. Il problema è la crescita del polinomio fondamentale

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

che può crescere rapidamente, soprattutto con nodi equispaziati, causando instabilità numerica e oscillazioni agli estremi. I nodi di Chebyshev minimizzano la norma di questo prodotto, migliorando la stabilità dell'interpolazione.