Análisis Vectorial

Abigail Nicolás Sayago

Índice general

Introducción **5**

1. Álgebra Vectorial **6**

1.1. Escalares y vectores 6

1.1.1. Cantidades escalares y vectoriales 6

1.1.2. Definición de vector 6

1.1.3. Representación en componentes cartesianas y magnitud de un vector 7

1.1.4. Vectores unitarios 7

1.1.5. Dependencia e independencia lineal 7

1.2. Álgebra Vectorial 8

1.2.1. Axiomas vectoriales 8

1.2.2. Adición y substracción de vectores y aplicaciones . . . 9

1.2.3. Producto escalar 11

1.2.4. Problemas Clásicos del producto escalar 13

1.2.5. Cálculo de los cosenos directores de un vector 20

1.2.6. Producto vectorial 20

1.2.7. Problemas Clásicos del producto vectorial 21

1.2.8. Triple producto escalar 27

1.2.9. Ecuación de la recta 27

1.2.10. Ecuación de un plano 28

2. Derivación vectorial 30

2.1. Derivación vectorial 30

2.1.1. Reglas de derivación 30

2.1.2. Notación 31

2.1.3. Ejercicios básicos de derivación 31

2.1.4. Resolviendo ecuaciones diferenciales 35

2.2. Velocidad y aceleración 41

2.2.1. Ejercicio de velocidad 41

2.3. Derivadas parciales de funciones vectoriales 42

2.3.1. Diferencial 42

2.3.2. Notación 42

2.3.3. Propiedades 43

2.3.4. Problemas 43

2.3.5. Ejercicio 4 45

3. Operador diferencial vectorial nabla 47

3.1. El operador diferencial vectorial Nabla 48

3.1.1. Definición en coordenadas cartesianas y propiedades . . 48

3.2. El gradiente 48

3.2.1. Interpretación geométrica 48

3.2.2. Aplicaciones y ejercicios 48

3.3. La divergencia 48

3.3.1. Interpretación geométrica y campos solenoidales 48

3.3.2. Aplicaciones y ejercicios 48

3.4. El rotacional 48

3.4.1. Interpretación geométrica y campos irrotacionales . . . 48

3.4.2. Aplicaciones y ejercicios 48

4. Cálculo integral vectorial 49

4.1. Coordenadas curvilíneas generalizadas 50

4.1.1. Ecuaciones de transformación 50

4.1.2. Curvas coordenadas y superficies de nivel 50

4.1.3. Elementos de línea, de superficie y de volumen 50

4.1.4. Gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano 50

4.1.5. Aplicación a coordenadas cilíndricas y esféricas 50

4.2. Integral de línea 50

4.2.1. Definición y ejercicios 50

4.2.2. Propiedades 50

4.2.3. Teorema de campos conservativos 50

4.3. Integrales dobles y triples 50

4.3.1. Integrales iteradas 50

4.4. Integrales de superficie 50

4.4.1. Integrales de superficie de un campo escalar 50

4.4.2. Integrales de superficie de un campo vectorial e interpretación geométrica 50

4.5. Integrales de volumen 50

4.5.1. Integrales de volumen de un campo escalar 50

4.5.2. Integrales de volumen de un campo vectorial 50

4.6. Teoremas integrales 50

4.6.1. Teorema de Stokes, interpretación física y aplicaciones 50

4.6.2. Teorema de Green en el plano y aplicaciones 50

4.6.3. Teorema de Gauss, interpretación física y aplicaciones . 50

Introducción

Este sencillo cuadernillo de apuntes ha sido creado con la finalidad de que disfrutes más de tu maravillosa clase de AnÃ¡lisis Vectorial. Los apuntes fueron tomados en la clase del profesor Miguel Olvera Aldana en la ESCOM, me he esforzado por evitar que tenga errores...

Capítulo 1

Álgebra Vectorial

1.1. Escalares y vectores

1.1.1. Cantidades escalares y vectoriales

Nosotros ya sabemos que existen ciertas cantidades que se pueden describir totalmente con un solo número, como por ejemplo la masa, densidad e incluso el tiempo, sin embargo también existen otras que deben tener una *dirección* como el desplazamiento o la velocidad por mencionar solo algunas.

Ahora bien, a las primeras cantidades se les llama **escalares** y a la segunda **vectoriales**, como nuestro curso es de Análisis vectorial por obvias razones utilizaremos cantidades vectoriales, entonces centrémonos en ellas. Estás cantidades incluyen una *magnitud* es decir "qué tan grande es".

1.1.2. Definición de vector

En pocas y reducidas palabras un vector es un ente matemático que *vive* en un espacio vectorial.

Los vectores se expresan con una flecha y eso no es porque a alguien se le ocurrió, sino más bien porque es necesario diferenciarlos de las cantidades escalares puesto que tienen propiedades diferentes. Entonces en este documento veremos algo así: $\vec{A}$.

JAMÁS lo olvides, los vectores llevan flecha.

Tipos de Vectores

Así es, existen diferentes tipos de vectores, ahora veamos algunos vectores que muy probablemente tú ya habías visto pero no sabías que era un vector.
Matrices:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$$

Polinomios:
Con $a \epsilon \mathbb{R}$

$$\vec{P} = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a$$

Funciones:

$$F\vec{(x)} = A \sin x + B \cos x$$

Vector n-ada:
Con $X \epsilon \mathbb{R}$

$$\vec{X} = (X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$$

1.1.3. Representación en componentes cartesianas y magnitud de un vector

El último tipo de vector que vimos, llamado n-ada solo se puede dibujar hasta $\mathbb{R}^3$.

1.1.4. Vectores unitarios

1.1.5. Dependencia e independencia lineal

Definición. Sean $\left\{\vec{X}_1, \vec{X}_2, ..., \vec{X}_n\right\}$ un conjunto de vectores, entonces:

$$\alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2 + ... + \alpha_n \vec{X}_n = \vec{0}$$

es un conjunto de vectores linealmente independientes (*l.i*) si:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$$

Ejemplo. Demostrar que $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ es *l.i*
Sabemos que:

$$\hat{\imath} = (1,0,0) \qquad \hat{\jmath} = (0,1,0) \qquad \hat{\jmath} = (0,0,1)$$

Sustituyendo en la definición tenemos que:

$$\begin{aligned} \alpha\hat{\imath} + \beta\hat{\jmath} + \gamma\hat{k} &= (\alpha,0,0) + (0,\beta,0) + (0,0,\gamma) \\ &= (\alpha,\beta,\gamma) \\ &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Recuerda... **"Dos vectores son iguales, si y solo si componente a componente son iguales"** por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$\alpha = 0 \qquad \beta = 0 \qquad \gamma = 0$$

$\therefore \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ son *l.i*

1.2. Álgebra Vectorial

1.2.1. Axiomas vectoriales

- Cerradura bajo la suma

  Si $\vec{x} \epsilon \vec{V}$ y $\vec{y} \epsilon \vec{V}$,entonces $\vec{x} + \vec{y} \epsilon \vec{V}$

- Ley asociativa de la suma de Vectores

  Para todo $\vec{x}$, $\vec{y}$ y $\vec{z}$ en $\vec{V}$, entonces $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$

- Ley conmutativa de la suma de Vectores

  Si $\vec{x}$ y $\vec{y}$ en $\vec{V}$, entonces $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

- Vector cero o Idéntico aditivo

  Si existe un $\vec{0} \epsilon \vec{V}$ tal que para todo $\vec{x} \epsilon \vec{V}$, $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

- Inverso aditivo

  Si existe un $\vec{x} \epsilon \vec{V}$ tal que para todo $\vec{-x} \epsilon \vec{V}$, $\vec{x} + (\vec{-x}) = \vec{0}$

- Cerradura bajo la multiplicación por un escalar

  Si existe un $\vec{x} \epsilon \vec{V}$ y α es un escalar, entonces $\alpha\vec{V} \epsilon \vec{V}$

- Primera Ley distributiva

  Si $\vec{x} \epsilon \vec{V}$ y α es un escalar, entonces $\alpha\ (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\ \vec{x} + \alpha\ \vec{y}$

- Segunda Ley distributiva

  Si $\vec{x} \epsilon \vec{V}$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)\ \vec{x} = \alpha\ \vec{x} + \beta\ \vec{x}$

- Ley asociativa de la multiplicación por escalares

  Si $\vec{x} \epsilon \vec{V}$ y α y β son escalares, entonces $\alpha\ (\beta\ \vec{x}) = \beta\ (\alpha\ \vec{x})$

- Para cada vector $\vec{x} \epsilon \vec{V}$ existe $(1)\ \vec{x} = \vec{x}$

1.2.2. Adición y substracción de vectores y aplicaciones

Definición Suma de vectores

Sean $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ y $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$ Con x_i & $y_i \epsilon \mathbb{R}$ entonces

$$\vec{X} + \vec{Y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

Ejemplo

Sumar $\vec{A} + \vec{B}$, $\vec{A} + \vec{C}$, $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$, si:

$\vec{A} = (1, 1)$ $\qquad$ $\vec{B} = (3, -5)$ $\qquad$ $\vec{C} = (-1, -2)$

Solución:

- Ejercicio 1 Por definición tenemos que:

  $$\vec{A}+\vec{B}=(1,1)+(3,-5)=(1+3,3+(-5))=(4,-4)$$

  Obteniendo el módulo:

  $$|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{(4)^2+(-4)^2}=\sqrt{2\cdot 16}=4\sqrt{2}$$

  Obteniendo el argumento:

  $$\theta=\frac{3}{2}\pi+\alpha=\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{4}\pi=\frac{7}{4}\pi$$

- Ejercicio 2 Por definición tenemos que:

  $$\vec{A}+\vec{C}=(1,1)+(-1,-2)=(1+(-1),1+(-2))=(0,-1)$$

  Obteniendo el módulo:

  $$|\vec{A}+\vec{C}|=\sqrt{(0)^2+(-1)^2}=1$$

  Obteniendo el argumento:

  $$\theta=\frac{3}{2}\pi$$

- Ejercicio 3 Por definición tenemos que:

  $$\begin{aligned}\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}&=(1,1)+(3,-5)+(-1,-2)\\&=(1+3+(-1),1+(-5)+(-2))\\&=(3,-6)\end{aligned}$$

  Obteniendo el módulo:

  $$|\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}|=\sqrt{(3)^2+(-6)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

  Obteniendo el argumento:

  $$\theta=\frac{3}{2}\pi+\alpha=\frac{3}{2}\pi+\arctan\frac{1}{2}$$

Ejemplo

Un solido de 100 N de pero tiende del centro de una cuerda como se observa en la figura. Hallar T de la figura.
Solución:
Recuerda observar el dibujo, de ahí podemos concluir:

$$\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{W} = \vec{0}$$

De igual forma por la figura podemos obtener las componentes de $\vec{T_1}$ y $\vec{T_2}$:

$$\vec{T_1} = (-T_1 \cos 30°, T_1 \sin 30°)$$
$$\vec{T_2} = (T_2 \cos 30°, T_2 \sin 30°)$$

Ahora por definición de la suma de vectores:

$$\Rightarrow (-T_1 \cos 30° + T_2 \cos 30° + 0, T_1 \sin 30° + T_2 \sin 30° + 100)$$

Por ser la misma cuerda podemos decir:

$$(0, 2T \sin 30° - 100) = (0, 0)$$

Y como, dos vectores son iguales si y solo si componente a componente son iguales, entonces:

$$2T \sin 30 - 100 = 0$$

Obtenemos T:

$$T = \frac{100}{2 \sin 30°} = 100$$

1.2.3. Producto escalar

Antes de dar la definición oficial, debo decir que el producto punto, también es conocido como producto punto. Ahora sí...
Definición 1.
Sea $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores distintos del vector cero, entonces

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos \theta$$

donde θ es en ángulo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Definición 2.

Sea $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ & $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$
Entonces:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

Delta de Kronecker

Ahora observemos lo siguiente, anteriormente vimos los vectores unitarios, entonces, sea:

$$\vec{A} = A_1 \hat{\imath} + A_2 \hat{\jmath} + A_3 \hat{k}$$
$$\vec{B} = B_1 \hat{\imath} + B_2 \hat{\jmath} + B_3 \hat{k}$$

Presta atención a lo siguiente:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \Rightarrow \hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$$

Y haciendo:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \Rightarrow \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\imath} \cdot \hat{k} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0$$

A lo anterior es conocido como la *Delta de Kronecker*, básicamente es:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Propiedad

Aplicando la definición del producto escalar:

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A^2$$

Por otro lado:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A^2}$$

Elevando al cuadrado la expresión anterior:

$$|\vec{A}|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

Por lo tanto, concluimos:

$$|\vec{A}|^2 = A^2$$

1.2.4. Problemas Clásicos del producto escalar

Deducción de la Ley de los cosenos

Deducir la Ley de los cosenos
Solución:
Observando la imagen tenemos:

$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$$

Para este problema utilizaremos el $\vec{c}$ por lo tanto:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

Multiplicamos por $\vec{c}$:

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = c^2$$

Sustituyendo el valor de $\vec{c}$ Tenemos que:

$$\begin{aligned} c_2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Sabemos que el producto interno conmuta, entonces:

$$c^2 = a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2$$

Por la definición 1:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Proyección de vectores

Encuentre la proyección $\vec{A} = (\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k})$ sobre el vector $(\vec{B} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k})$
Solución:
Recordando la Definición:

$$\vec{X} = |\vec{X}|\hat{x}$$

Obtenemos $\hat{b}$:

$$\hat{b} = \frac{(1,2,2)}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{(1,2,2)}{(3)}$$

Ahora que tenemos $\hat{b}$, para la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$

$$Proy_{\vec{B}}\vec{A} = \vec{A} \cdot \hat{b} = (1,-2,3) \cdot \frac{1,2,2}{3} = \frac{(1-4+6)}{3} = 1$$

Demostracion 1

Demuestra que $\cos(\theta - \beta) = \cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta$
Solución:
Observando el dibujo sabemos que:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (A\cos\theta, A\sin\theta) \\ \vec{B} &= (B\cos\beta, B\sin\beta) \end{aligned} \tag{1.1}$$

De la definición 1 del producto escalar, tenemos:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos(\theta - \beta) \tag{1.2}$$

De la definición 2 del producto escalar, tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (A\cos\theta\hat{\imath} + A\sin\theta\hat{\jmath}) \\ \vec{B} &= (B\cos\beta\hat{\imath} + B\sin\beta\hat{\jmath}) \end{aligned}$$

Haciendo el producto escalar de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= AB\cos\theta\cos\beta + AB\sin\theta\sin\beta \\ &= AB(\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Con las ecuaciones 1.2 = 1.3:

$$\begin{aligned} AB\cos(\theta - \beta) &= AB(\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta) \\ \Rightarrow \cos(\theta - \beta) &= \cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta \end{aligned}$$

Demostracion 2

Demuestra que $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
Solución:
Observando el dibujo sabemos que:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (A\cos\alpha, A\sin\alpha) \\ \vec{B} &= (B\cos\beta, -B\sin\beta) \end{aligned}$$

De la definición 1 del producto escalar, tenemos:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos(\alpha+\beta) \tag{1.4}$$

De la definición 2 del producto escalar, tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (A\cos\alpha\hat{\imath} + A\sin\alpha\hat{\jmath}) \\ \vec{B} &= (B\cos\beta\hat{\imath} - B\sin\beta\hat{\jmath}) \end{aligned}$$

Haciendo el producto escalar de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{A}\cdot\vec{B} &= AB\cos\alpha\cos\beta - AB\sin\alpha\sin\beta \\ &= AB(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Con las ecuaciones 1.4 = 1.5:

$$\begin{aligned} AB\cos(\alpha+\beta) &= AB(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\ \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

IMPORTANTE:
Considero importante la siguiente conclusión porque, por lo menos en mi opinión, es un hermoso ejemplo de lo maravillosas que son las matemáticas. De las dos demostraciones anteriores podemos concluir lo siguiente:

$$\boxed{\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta}$$

Ahora supongamos que $\alpha = \beta = \theta$

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ 1 = \cos(0) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ 1 + \cos(2\theta) &= 2\cos^2\theta\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ -1 &= -\cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \cos(2\theta) - 1 &= -2\sin^2\theta\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos^2\theta}{2}$$

Ángulo agudo en un cubo

Calcule el ángulo agudo que formas dos diagonales de un cubo.
Solución:
De la figura tenemos:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (3,3,3) \\ \vec{B} &= (-3,-3,3)\end{aligned}$$

Obtenemos el módulo de $\vec{A}$ y $\vec{B}$

$$\begin{aligned}|\vec{A}| &= \sqrt{(3^2)+(3^2)+(3^2)} \\ &= \sqrt{9+9+9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{B}| &= \sqrt{(-3^2)+(-3^2)+(3^2)} \\ &= \sqrt{9+9+9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

Por la definición 1 del producto escalar:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 27\cos\alpha \tag{1.6}$$

Por la definición 2 del producto escalar:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = -9-9+9 = -9 \tag{1.7}$$

Igualando los resultados de las ecuaciones 1.6 y 1.7 tenemos:

$$\begin{aligned}27\cos\alpha &= -9 \\ \cos\alpha &= -\frac{9}{27} = -\frac{1}{3} \\ &\Rightarrow \alpha = \arccos(-\frac{1}{3})\end{aligned}$$

Trabajo

Cálcule el trabajo realizado para mover un objeto a lo largo de un vector $\vec{r} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 5\hat{k}$, si se le aplica la $\vec{F} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$.
Solución:
Del enunciado tenemos:

$$\vec{F} = (2, -1, -1)$$
$$\vec{r} = (3, 1, -5)$$

Ahora calculando el trabajo:

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = (6 - 1 + 5) = 10$$

Demostración 3

Sea $\vec{A} = A_1\hat{\imath} + A_2\hat{\jmath} + A_3\hat{k}$ cualquier vector. Demuestre que

$$\vec{A} = (\vec{A} \cdot \hat{\imath})\hat{\imath} + (\vec{A} \cdot \hat{\jmath})\hat{\jmath} + (\vec{A} \cdot \hat{k})\hat{k}$$

Solución:
Sabemos que

$$\vec{A} = A_1\hat{\imath} + A_2\hat{\jmath} + A_3\hat{k} \tag{1.8}$$

Hacemos:

$$\vec{A} \cdot \hat{\imath} = A_1$$
$$\vec{A} \cdot \hat{\jmath} = A_2$$
$$\vec{A} \cdot \hat{\imath} = A_3$$

Sustituyendo A_1, A_2 y A_3 en 1.8:

$$\vec{A} = (\vec{A} \cdot \hat{\imath})\hat{\imath} + (\vec{A} \cdot \hat{\jmath})\hat{\jmath} + (\vec{A} \cdot \hat{k})\hat{k}$$

Diagonales de un rombo

Demuestre que las diagonales de un rombo son perpendiculares.
Solución:

Lo primero que hacemos es observar la figura, para demostrar que las diagonales del rombo son perpendiculares, tenemos que llegar a que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

Observando la figura tenemos que:

$$\begin{aligned} \vec{L_4} + \vec{A} &= \vec{L_1} \\ \therefore \vec{A} &= \vec{L_1} - \vec{L_4} \\ \vec{B} &= \vec{L_4} + \vec{L_3} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Sustituyendo los resultados de la ecuación 1.9:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (\vec{L_1} - \vec{L_4}) \cdot (\vec{L_4} + \vec{L_3}) \\ &= (\vec{L_1} \cdot \vec{L_4}) + (\vec{L_1} \cdot \vec{L_3}) - (\vec{L_4})^2 - (\vec{L_4} \cdot \vec{L_3}) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Por la figura sabemos que:

$$\begin{aligned} \vec{L_1} &= \vec{L_3} \\ \vec{L_4} &= \vec{L_2} \end{aligned}$$

Sustituimos $\vec{L_1}$ y $\vec{L_4}$ en las ecuaciones 1.10:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{L_1} \cdot \vec{L_2}) + (\vec{L_1} \cdot \vec{L_1}) - (\vec{L_4})^2 - (\vec{L_2} \cdot \vec{L_1})$$

Por la propiedad conmutativa:

$$\vec{L_1} \cdot \vec{L_2} = \vec{L_2} \cdot \vec{L_1}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (\vec{L_1} \cdot \vec{L_2}) + (\vec{L_1} \cdot \vec{L_1}) - (\vec{L_4^2}) - (\vec{L_1} \cdot \vec{L_2}) \\ &= (\vec{L_1} \cdot \vec{L_1}) - (\vec{L_4^2}) \end{aligned}$$

Recordando la propiedad:

$$\begin{aligned} \vec{L_1} \cdot \vec{L_1} &= |\vec{L_1}|^2 = (L_1)^2 \\ \vec{L_2} \cdot \vec{L_2} &= |\vec{L_2}|^2 = (L_2)^2 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (L_1)^2 - (L_2)^2$$

Y de la figura, sabemos que:

$$L_1 = L_2$$

Finalmente:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

$\because$ las diagonales de un rombo son perpendiculares.

Vector unitario paralelo

Solución:
Encuentre un vector unitario paralelo al plano x, y y perpendicular al vector $\vec{A} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$
Para que $\vec{r}$ sea paralelo al plano x y y debe tener las componentes:

$$\vec{r} = \alpha\hat{\imath} + \beta\hat{\jmath}$$

para que sea perpendicular a $\vec{A}$ debe cumplir:

$$\vec{A}\cdot\vec{r} = 0$$

Entonces sustituimos $\vec{A}$ y $\vec{r}$:

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{r} &= (4,-3,1)\cdot(\alpha,\beta,0)\\ &= 4\alpha - 3\beta = 0\\ \Rightarrow 4\alpha &= 3\beta\\ \alpha &= \frac{3}{4}\beta\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor que obtuvimos de α en $\vec{r}$ entonces:

$$\vec{r} = \frac{3}{4}\beta\hat{\imath} + \beta\hat{\jmath}$$

Sin embargo, el problema nos pide un vector unitario, entonces:

$$\hat{e_r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\frac{3}{4}\beta\hat{\imath} + \beta\hat{\jmath}}{\sqrt{\frac{9}{16}\beta^2 + \beta^2}} = \frac{\frac{3}{4}\beta\hat{\imath} + \beta\hat{\jmath}}{\sqrt{\frac{25}{16}\beta^2}} = \pm\frac{\beta(\frac{3}{4}\hat{\imath} + \hat{\jmath})}{\beta\frac{5}{4}} = \pm\frac{4(\frac{3}{4}\hat{\imath} + \hat{\jmath})}{5} = \pm\frac{3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}}{5}$$

1.2.5. Cálculo de los cosenos directores de un vector

Antes de empezar con el cálculo, es importante observar la figura para que sepas a que argumento se va refiriendo. Del dibujo sabemos que $\vec{a}$ tiene tres componentes: (a_1, a_2, a_3).
Entonces hacemos:

$$\vec{a} \cdot \hat{i} = a \cdot 1 \cos\alpha$$
$$a_1 = a \cos\alpha$$

Tenemos que:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{a}$$

$$\vec{a} \cdot \hat{j} = a \cdot 1 \cos\beta$$
$$a_2 = a \cos\beta$$

Tenemos que:

$$\cos\beta = \frac{a_2}{a}$$

$$\vec{a} \cdot \hat{k} = a \cdot 1 \cos\gamma$$
$$a_3 = a \cos\gamma$$

Tenemos que:

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{a}$$

1.2.6. Producto vectorial

Definición 1.
Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ diferentes del $\vec{0}$, entonces:

$$\vec{A} X \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta \hat{u}$$

donde:
θ se mide en sentido antihorario.
$\hat{u}$ es un vector unitario o perpendicular formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Definición 2.
Si

$$\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k}$$

entonces:

$$\vec{A} X \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Esa es la definición, pero veamos como se resuelve. Existen varios métodos para obtener el determinante, el que veremos aquí se llama *"Por menores"*. Entonces...

$$\vec{A}X\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = (+)\hat{\imath}\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} + (-)\hat{\jmath}\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}$$

Y lo anterior hace que el problema de obtener el determinante sea menor, porque recordando:

$$det\bar{C} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Entonces:

$$\vec{A}X\vec{B} = \hat{\imath}(A_2B_3 - A_3B_2) + (-)\hat{\jmath}(A_1B_3 - A_3B_1) + \hat{k}(A_1B_2 - A_2B_1)$$

Ahora que ya sabemos qué es el prodcuto vectorial, prestemos atención a la figura: Es importante notar ciertos detalles con respecto a el producto cruz.

$$\vec{A}X\vec{B} \neq \vec{B}X\vec{A}$$

De igual forma tenemos lo siguiente:

$$\vec{A}X\vec{A} = A^2 \sin\theta\hat{u} = \vec{0}$$

1.2.7. Problemas Clásicos del producto vectorial

Ejercicio básico

Suponga que $\vec{A} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ y $\vec{B} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}$, calcule $|\vec{A}X\vec{B}|$ y $|(\vec{A} + 2\vec{B})X(2\vec{A} - \vec{B})|$.
Solución:

- $|\vec{A}X\vec{B}|$
  Primero hacemos el producto cruz:

$$\vec{A}X\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = +\hat{\imath}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 13\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 7\hat{k}$$

Finalmente:

$$|\vec{A}X\vec{B}| = \sqrt{(13)^2 + (-4)^2 + (7)^2} = \sqrt{169 + 16 + 49} = \sqrt{234}$$

- $|(\vec{A} + 2\vec{B})X(2\vec{A} - \vec{B})|$
  Para facilitar las cosas primero haremos:

$$\begin{aligned}
\vec{A} + 2\vec{B} &= \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 3\hat{k} + 2(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}) \\
&= \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 3\hat{k} + 4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 4\hat{k} \\
&= 5\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 7\hat{k} \\
2\vec{A} - \vec{B} &= 2(\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}) - (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}) \\
&= 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 6\hat{k} - 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k} \\
&= -7\hat{\jmath} - 4\hat{k}
\end{aligned}$$

Ahora hacemos el producto vectorial:

$$\begin{aligned}
(\vec{A} + 2\vec{B})X(2\vec{A} - \vec{B}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 5 & 4 & -7 \\ 0 & -7 & -4 \end{vmatrix} &= \hat{\imath}\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ -7 & -4 \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} \\
&= 65\hat{\imath} - 20\hat{\jmath} + 35\hat{k} \\
&= 5(13\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 7\hat{k})
\end{aligned}$$

Y finalmente:

$$\begin{aligned}
|(\vec{A} + 2\vec{B})X(2\vec{A} - \vec{B})| &= 5\sqrt{(13)^2 + (4)^2 + (-7)^2} \\
&= 5\sqrt{169 + 16 + 49} \\
&= 5\sqrt{234}
\end{aligned}$$

Ley de Senos

Demostrar la Ley de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Solución:
De la figura tenemos que:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow \vec{a}=-\vec{b}-\vec{c}$$

Hacemos el producto vectorial de $\vec{a}$:

$$\vec{a}X\vec{a}=\vec{a}X(-\vec{b}-\vec{c})$$

Como el producto vectorial es distributivo:

$$\vec{0}=\vec{a}X\vec{a}=-(\vec{a}X\vec{b})-(\vec{a}X\vec{c})$$

Usando la *Definición 1* del producto vectorial:

$$\vec{0}=-(ab\operatorname{sen}\gamma\hat{u}_1)-(ac\operatorname{sen}\beta\hat{u}_2)$$

Pero $\hat{u}_1=-\hat{u}_2$ entonces sustituimos $\hat{u}_1$

$$\vec{0}=-ab\operatorname{sen}\gamma(-\hat{u}_2)-ac\operatorname{sen}\beta(\hat{u}_2)$$
$$0\hat{u}_2=(ab\operatorname{sen}\gamma-ac\operatorname{sen}\beta)\hat{u}_2$$

Recuerda... **"Dos vectores son iguales, si y solo si componente a componente son iguales"**, por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$0=(ab\operatorname{sen}\gamma-ac\operatorname{sen}\beta)$$
$$ab\operatorname{sen}\gamma=ac\operatorname{sen}\beta$$
$$b\operatorname{sen}\gamma=c\operatorname{sen}\beta$$
$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Demostración 1

Demuestra que $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
Solución:
Observando el dibujo sabemos que:

$$\vec{A}=A\cos\beta\hat{i}+A\sin\beta\hat{j}$$
$$\vec{B}=B\cos\alpha\hat{i}+B\sin\alpha\hat{j}$$

De la definición 1 del producto vectorial, tenemos:

$$\vec{A}X\vec{B} = AB\,\mathrm{sen}(\alpha - \beta)\hat{k} \tag{1.11}$$

De la definición 2 del producto vectorial, tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{A}X\vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A\cos\beta & A\sin\beta & 0 \\ B\cos\alpha & B\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\begin{vmatrix} A\cos\beta & A\sin\beta \\ B\cos\alpha & B\sin\alpha \end{vmatrix} \\ &= \hat{k}(AB\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta - AB\cos\alpha\sin\beta) \\ &= AB\hat{k}(\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Igualando las ecuaciones 1.13 y 1.14:

$$AB\,\mathrm{sen}(\alpha - \beta)\hat{k} = AB(\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)\hat{k}$$

Recuerda... **"Dos vectores son iguales, si y solo si componente a componente son iguales"**, por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} AB\,\mathrm{sen}(\alpha - \beta) &= AB(\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) \\ \mathrm{sen}(\alpha - \beta) &= (\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) \end{aligned}$$

Demostración 2

Demuestra que $\mathrm{sen}(\alpha + \beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
Solución:
Observando el dibujo sabemos que:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A\cos\beta\hat{i} - A\sin\beta\hat{j} \\ \vec{B} &= B\cos\alpha\hat{i} + B\sin\alpha\hat{j} \end{aligned}$$

De la definición 1 del producto vectorial, tenemos:

$$\vec{A}X\vec{B} = AB\,\mathrm{sen}(\alpha + \beta)\hat{k} \tag{1.13}$$

De la definición 2 del producto vectorial, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\vec{A} X \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A\cos\beta & -A\sin\beta & 0 \\ B\cos\alpha & B\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \begin{vmatrix} A\cos\beta & -A\sin\beta \\ B\cos\alpha & B\sin\alpha \end{vmatrix} \\
&= \hat{k}(AB \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + AB\cos\alpha\sin\beta) \\
&= AB\hat{k}(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Igualando las ecuaciones 1.13 y 1.14:

$$AB\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\hat{k} = AB(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\hat{k}$$

Recuerda... **"Dos vectores son iguales, si y solo si componente a componente son iguales"**, por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
AB\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= AB(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)
\end{aligned}
$$

Área del paralelogramo

Calcule el área del paralelogramo cuyas diagonales son:

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} \\
\vec{B} &= \hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}
\end{aligned}
$$

Solución:
De la figura tenemos que:

$$\vec{L_1} = \frac{1}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B} \qquad \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2}\vec{B} + \vec{L_2} &= \frac{1}{2}\vec{A} \\ \Rightarrow \vec{L_2} &= \frac{1}{2}\vec{A} - \frac{1}{2}\vec{B} \end{aligned}$$

Sustituimos lo valores de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en $\vec{L_1}$:

$$\vec{L_1} = \frac{(3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) + (\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k})}{2} = \frac{4\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}}{2} = 2\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$$

Sustituimos lo valores de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en $\vec{L_2}$:

$$\vec{L_2} = \frac{(3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) - (\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k})}{2} = \frac{2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}}{2} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

Para obtener el área del paralelogramo, hacemos el producto vectorial de $\vec{L_1}$ y $\vec{L_2}$:

$$\begin{aligned}\vec{L_1}X\vec{L_2} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 5\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k}\end{aligned}$$

Finalmente:

$$|\vec{L_1}X\vec{L_2}| = \sqrt{25+25+25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

Vector perpendicular

Suponga que $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ y $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$. Encuentre un vector de magnitud 5 que sea perpendicular tanto a $\vec{A}$ como a $\vec{B}$. *Solución:*
Para que el vector sea perpendicular hacemos el producto vectorial de $\vec{A}X\vec{B}$:

$$\begin{aligned}\vec{A}X\vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -5\hat{i} - 5\hat{j} - 5\hat{k}\end{aligned}$$

Etiquetamos al vector resultante como $\vec{R}$ y obtenemos el módulo:

$$|\vec{R}| = \sqrt{25+25+25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

Primero obtendremos un vector unitario, y ya sabemos la definición, por lo tanto:

$$\hat{e_r} = \frac{-5\hat{i} - 5\hat{j} - 5\hat{k}}{5\sqrt{3}} = \frac{5(-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})}{5\sqrt{3}} = \frac{-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{3}}$$

El problema nos pide que sea de magnitud 5, por lo tanto multiplicamos el vector unitario por 5 y de esa forma queda resuelto el problema, siendo $\vec{X}$ el vector perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$$\vec{X} = 5\hat{e_r} = 5\frac{-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{3}} \tag{1.15}$$

1.2.8. Triple producto escalar

Antes de empezar con la definición, debes saber que también es conocido como *Producto caja...*
Sean $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ vectores distintos del $\vec{0}$, entonces:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} X \vec{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

Cuando $\vec{A} \cdot \vec{B} X \vec{C} = 0$ se dice que los vectores son *coplanares*.
Cuando $\vec{A} \cdot \vec{B} X \vec{C} \neq 0$ se dice que los vectores son *linealmente independientes*.
Sabemos que 3 vectores cuyo producto caja es 0, definen un plano.

1.2.9. Ecuación de la recta

Tomando la vectorial de la recta y suponiendo que los puntos están en $\mathbb{R}^3$, calcular la ecuación de la recta.

$$\vec{a}(1-\alpha) + \alpha \vec{b} = \vec{r}$$

Con

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \qquad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \qquad \vec{r} = (x, y, z)$$

Empecemos... Lo primero que haremos es sustituir cada vector en la ecuación de la recta.

$$(x_1, y_1, z_1)(1-\alpha) + \alpha(x_2, y_2, z_2) = (x, y, z)$$

Multiplicando y distribuyendo tenemos que

$$(x_1, y_1, z_1) - (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2, \alpha z_2) = (x, y, z)$$

Recuerda... **"Dos vectores son iguales, si y solo si componente a componente son iguales"** lo anterior implica lo siguiente:

$$x_1 - \alpha x_1 + \alpha x_2 = x \tag{1.16}$$

$$y_1 - \alpha y_1 + \alpha y_2 = y \tag{1.17}$$

$$z_1 - \alpha z_1 + \alpha z_2 = z \tag{1.18}$$

De la ecuación 1.16 tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 - \alpha x_1 + \alpha x_2 &= x \\ x_1 + \alpha(x_2 - x_1) &= x \\ &\Rightarrow \alpha = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

De la ecuación 1.17 tenemos:

$$\begin{aligned} y_1 - \alpha y_1 + \alpha y_2 &= y \\ y_1 + \alpha(y_2 - y_1) &= y \\ &\Rightarrow \alpha = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \end{aligned}$$

De la ecuación 1.18 tenemos:

$$\begin{aligned} z_1 - \alpha z_1 + \alpha z_2 &= z \\ z_1 + \alpha(z_2 - z_1) &= z \\ &\Rightarrow \alpha = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \end{aligned}$$

Entonces concluimos:

$$\alpha = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Cabe mencionar que es buena idea memorizarla, será de ayuda para integrar.

1.2.10. Ecuación de un plano

Dados 3 puntos, hay un único plano que los contiene. Por tanto la ecuación es:

$$Ax + By + Cx = D$$

Ahora, la ecuación vectorial del plano es:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$$

Ejercicio

Describir el lugar geométrico dado por $|\vec{r}-\vec{a}| = 3$, donde $\vec{r}$ es el vector de posición de un punto en el espacio de coordenadas (x, y, z) y $\vec{a}$ un vector de posición de un punto en el espacio de coordenadas (x_1, y_1, z_1).
Solución:

$$\vec{r}-\vec{a} = ((x-x_1),(y-y_1),(z-z_1))$$

$$\begin{aligned}|\vec{r}-\vec{a}| &= \sqrt{(x-x_1)^2,(y-y_1)^2,(z-z_1)^2} = 3\\ &= (x-x_1)^2,(y-y_1)^2,(z-z_1)^2 = 3^2\end{aligned}$$

El resultado es la ecuación de una esfera con centro en (x_1, y_1, z_1).

Capítulo 2

Derivación vectorial

2.1. Derivación vectorial

Antes de empezar, debemos conocer a las funciones paramétricas. En general una función parametrizada se escribe de la siguiente forma:

$$\phi(x(t), y(t), z(t))$$

siendo t su paramétro.
Ahora...
Definición.

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \frac{dA_1(t)}{dt}\hat{\imath} + \frac{dA_2(t)}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dA_3(t)}{dt}\hat{k}$$

2.1.1. Reglas de derivación

Obviamente no son todas, pero aquí verás algunas que te servirán por lo menos para sobrevivir...

$$\frac{d}{dt}(\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}) = \alpha\frac{d\vec{A}}{dt} + \beta\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{B} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}X\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}X\vec{B} + \vec{A}X\frac{d\vec{B}}{dt}$$

2.1.2. Notación

Existen múltiples formas de escribir una derivada, he aquí algunas:

$$\frac{dy}{dx} = y'$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dy}\right) = y''$$
$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$$

2.1.3. Ejercicios básicos de derivación

Ejercicio 1

Si $\vec{A}(t) = e_t\hat{i} + \sin^2 t\hat{j} + \cos^2 t\hat{k}$ encuentra $\frac{d\vec{A}(t)}{dt}$.
Solución:

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = e_t\hat{i} + 2\sin t\cos t\hat{j} - 2\cos t\sin t\hat{k}$$

¡Derivando

Suponga que $\vec{A} = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$ y $\vec{B} = (2t-3)\hat{i} + \hat{j} - t\hat{k}$, con $t = 1$. Encuentre:

- $\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{dt}$
- $\frac{d(\vec{A}X\vec{B})}{dt}$
- $\frac{d(\vec{A}+\vec{B})}{dt}$
- $\frac{d}{dt}\left(\vec{A}X\frac{d\vec{B}}{dt}\right)$

Solución:

- $\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{dt}$
  Primero obtenemos $\vec{A}\cdot\vec{B}$:

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= (2t-3)(t^2) + (-t) + (2t+1)(-t)\\ &= 2t^3 - 3t^2 - t - 2t^2 - t\\ &= 2t^3 - 5t^2 - 2t\end{aligned}$$

  Derivando:

$$\begin{aligned}\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{dt} &= \frac{d}{dt}(2t^3 - 5t^2 - 2t)\\ &= 6t^2 - 10t - 2\end{aligned}$$

  Con $t = 1$:

$$\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{dt} = 6 - 10 - 2 = -6$$

- $\frac{d(\vec{A}X\vec{B})}{dt}$
  Primero obtenemos $\vec{A}X\vec{B}$

$$\begin{aligned}\vec{A}X\vec{B} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ t^2 & -t & 2t+1\\ 2t-3 & 1 & -t\end{vmatrix} &= \hat{i}\begin{vmatrix}-t & 2t+1\\ 1 & -t\end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix}t^2 & 2t+1\\ 2t-3 & -t\end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix}t^2 & -t\\ 2t-3 & 1\end{vmatrix}\\ &= \Big(t^2 - (2t+1)\Big)\hat{i} - \Big(-t^3 - (2t-3)(2t+1)\Big)\hat{j} + \Big(t^2 + t(2t-3)\Big)\hat{k}\\ &= (t^2 - 2t - 1)\hat{i} - (-t^3 - 4t^2 - 2t + 6t + 3)\hat{j} + (t^2 + 2t^2 - 3t)\hat{k}\\ &= (t^2 - 2t - 1)\hat{i} - (-t^3 - 4t^2 + 4t + 3)\hat{j} + (3t^2 - 3t)\hat{k}\end{aligned}$$

  Derivando:

$$\begin{aligned}\frac{d(\vec{A}X\vec{B})}{dt} &= \frac{d}{dt}\Big((t^2 - 2t - 1)\hat{i} - (-t^3 - 4t^2 + 4t + 3)\hat{j} + (3t^2 - 3t)\hat{k}\Big)\\ &= (2t - 2)\hat{i} - (-3t^2 - 8t + 4)\hat{j} + (6t - 3)\hat{k}\end{aligned}$$

  Finalmente con $t = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{d(\vec{A}X\vec{B})}{dt} &= (2-2)\hat{i} - (-3 - 8 + 4)\hat{j} + (6-3)\hat{k}\\ &= 7\hat{j} + 3\hat{k}\end{aligned}$$

- $\frac{d(\vec{A}+\vec{B})}{dt}$
  Primero obtenemos $\vec{A}+\vec{B}$
  $$\begin{aligned}\vec{A}+\vec{B} &= t^2\hat{\imath} - t\hat{\jmath} + (2t+1)\hat{k} + (2t-3)\hat{\imath} + \hat{\jmath} - t\hat{k} \\ &= (t^2+2t-3)\hat{\imath} + (1-t)\hat{\jmath} + (t+1)\hat{k}\end{aligned}$$
  Derivando:
  $$\begin{aligned}\frac{d(\vec{A}+\vec{B})}{dt} &= \frac{d}{dt}\left((t^2+2t-3)\hat{\imath} + (1-t)\hat{\jmath} + (t+1)\hat{k}\right) \\ &= (2t+2)\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}\end{aligned}$$
  Finalmente con $t=1$
  $$\begin{aligned}\frac{d(\vec{A}+\vec{B})}{dt} &= (2+2)\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k} \\ &= 4\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}\end{aligned}$$

- $\frac{d}{dt}\left(\vec{A}X\frac{d\vec{B}}{dt}\right)$
  Primero hacemos $\frac{d\vec{B}}{dt}$
  $$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{B}) &= \frac{d}{dt}\left((2t-3)\hat{\imath} + \hat{\jmath} - t\hat{k}\right) \\ &= 2\hat{\imath} - \hat{k}\end{aligned}$$
  Hacemos el producto vectorial:
  $$\begin{aligned}\vec{A}X\frac{d\vec{B}}{dt} = \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ t^2 & -t & 2t+1 \\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix} &= \hat{\imath}\begin{vmatrix}-t & 2t+1 \\ 0 & -1\end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix}t^2 & 2t+1 \\ 2 & -1\end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix}t^2 & -t \\ 2 & 0\end{vmatrix} \\ &= t\hat{\imath} - (-t^2-4t-2)\hat{\jmath} + 2t\hat{k}\end{aligned}$$
  Derivando:
  $$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\vec{A}X\frac{d\vec{B}}{dt}\right) &= \frac{d}{dt}\left(t\hat{\imath} - (-t^2-4t-2)\hat{\jmath} + 2t\hat{k}\right) \\ &= \hat{\imath} - (-2t-4)\hat{\jmath} + 2\hat{k}\end{aligned}$$
  Finalmente con $t=1$
  $$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\vec{A}X\frac{d\vec{B}}{dt}\right) &= \hat{\imath} - (-2-4)\hat{\jmath} + 2\hat{k} \\ &= \hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 2\hat{k}\end{aligned}$$

Demostración 1

Demuestra que:

$$\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = A\frac{dA}{dt}$$

Solución:
Sea

$$\vec{A} = A_1(t)\hat{\imath} + A_2(t)\hat{\jmath} + A_3(t)\hat{k}$$

entonces:

$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_1)^2 + (A_2)^2 + (A_3)^2}$$

Por un lado desarrollaremos la parte izquierda $\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt}$:

$$\begin{aligned}
\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} &= \vec{A} \cdot \left(\frac{dA_1}{dt}\hat{\imath} + \frac{dA_2}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dA_3}{dt}\hat{k}\right) \\
&= \left(A_1\hat{\imath} + A_2\hat{\jmath} + A_3\hat{k}\right) \cdot \left(\frac{dA_1}{dt}\hat{\imath} + \frac{dA_2}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dA_3}{dt}\hat{k}\right)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = (A_1)\frac{dA_1}{dt} + (A_2)\frac{dA_2}{dt} + (A_3)\frac{dA_3}{dt} \tag{2.1}$$

Ahora desarrollamos el lado derecho $A\frac{dA}{dt}$:

$$A\frac{dA}{dt} = A\left(\frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2A_1\frac{dA_1}{dt} + 2A_2\frac{dA_2}{dt} + 2A_3\frac{dA_3}{dt}\right)$$

Entonces:

$$A\frac{dA}{dt} = (A_1)\frac{dA_1}{dt} + (A_2)\frac{dA_2}{dt} + (A_3)\frac{dA_3}{dt} \tag{2.2}$$

Como 2.1=2.2, concluimos que:

$$\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = A\frac{dA}{dt}$$

2.1.4. Resolviendo ecuaciones diferenciales

Ejercicio 1

Verifica que $\vec{r} = \vec{C}_1 \sin 2t$ es solución de $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.
Solución:
Derivamos:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{C}_1 \cos 2t$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(2\vec{C}_1 \cos 2t\right) = -4\vec{C}_1 \sin 2t \tag{2.3}$$

Sustituyendo 2.3 en la ecuación diferencial:

$$-4\vec{C}_1 \sin 2t + 4\vec{C}_1 \sin 2t = \vec{0}$$

$\therefore$ $\vec{r}$ es solución de la ecuación diferencial.

Ejercicio 2

Sea

$$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = 6t\hat{\imath} - 24t^2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$$

Encuentre $\vec{A}$ dado que:

$$\vec{A}(t = 0) = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$$

Y que con $t = 0$:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -\hat{\imath} - 3\hat{k}$$

Solución:
Sabemos que:

$$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right) = *$$

Observa lo siguiente:

$$d\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right) = *dt$$

Entonces podemos decir que:

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = 3t^2\hat{\imath} - 8t^3\hat{\jmath} - 4\hat{k} + \vec{C} \tag{2.4}$$

Evaluamos cuando $t = 0$ en la ecuación 2.4 y con la condición inicial del problema:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{A}(t)}{dt} &= 3(0)\hat{\imath} - 8(0)\hat{\jmath} - 4\hat{k} + \vec{C} = -\hat{\imath} - 3\hat{k} \\ &= -4\hat{k} + \vec{C} = -\hat{\imath} - 3\hat{k}\end{aligned}$$

Por lo tanto decimos:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{C} &= -\hat{\imath} - 3\hat{k} + 4\cos t\hat{k} \\ &= -\hat{\imath} + (4-3)\hat{k} \\ &= -\hat{\imath} + \hat{k}\end{aligned}$$

Sustituimos el valor del $\vec{C}$ en 2.4:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{A}(t)}{dt} &= 3t^2\hat{\imath} - 8t^3\hat{\jmath} - 4\cos t\hat{k} - \hat{\imath} + \hat{k} \\ &= (3t^2 - 1)\hat{\imath} - 8t^3\hat{\jmath} + (1 - 4\cos t)\hat{k}\end{aligned}$$

Para obtener el valor de $\vec{A}$:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\vec{A} &= \int \Big((3t^2 - 1)\hat{\imath} - 8t^3\hat{\jmath} + (1 - 4\cos t)\hat{k}\Big)\,\mathrm{d}t \\ \vec{A} &= \int (3t^2 - 1)\hat{\imath}\mathrm{d}t - \int 8t^3\hat{\jmath}\mathrm{d}t + \int (1 - 4\cos t)\hat{k}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Resolviendo las integrales:

$$\vec{A} = (t^3 - t)\hat{\imath} - 2t^4\hat{\jmath} + (t - 4\sin t)\hat{k} + \vec{C}_1 \tag{2.5}$$

Aplicando la condición inicial $\vec{A}(t=0) = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (0)\hat{\imath} - 2(0)\hat{\jmath} + (0)\hat{k} + \vec{C}_1 = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} \\ &\Rightarrow \vec{C}_1 = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath}\end{aligned}$$

Sustituimos el valor del $\vec{C}_1$ en 2.5:

$$\vec{A} = (t^3 - t)\hat{i} - 2t^4\hat{j} + (t - 4\sin t)\hat{k} + 2\hat{i} + \hat{j}$$
$$\vec{A} = (t^3 - t + 2)\hat{i} + (1 - 2t^4)\hat{j} + (t - 4\sin t)\hat{k}$$

Ecuación-Polinomio característico

Resolver la ecuación diferencial donde α y w son constantes.

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2\alpha\frac{d\vec{r}}{dt} + w^2\vec{r} = \vec{0}$$

Solución:
Proponemos que la solución sea $\vec{r} = \vec{C}e^{mt}$ donde $\vec{C}$ es un vector constante. Así que:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{C}me^{mt}$$
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{C}m^2e^{mt}$$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$\vec{C}m^2e^{mt} + 2\alpha\vec{C}me^{mt} + w^2\vec{C}e^{mt} = \vec{0}$$

Factorizamos:

$$\vec{C}e^{mt}\left(m^2 + 2\alpha m + w^2\right) = \vec{0}$$

Observamos que no podemos evaluar $\vec{C}e^{mt}$ porque queremos una solución **NO TRIVIAL** es decir, diferente de cero entonces $\vec{C} \neq 0 \therefore$ evaluo al polinomio.
Bueno, a este polinomio se le conoce como: ***Polinomio caracteristico***.
Buscamos el valor de m:

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - -4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4w^2}}{2} \\ &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - w^2} \end{aligned}$$

Nuevamente nos detenemos y analizamos los resultados que surgen a partir del resultado obtenido de m:

- **CASO 1** $\alpha^2 - w^2 > 0 \Rightarrow m_1 \neq m_2 \ \epsilon\mathbb{R}$

$$\vec{r} = \vec{C_1}e^{m_1t} + \vec{C_2}e^{m_2t}$$

- **CASO 2** $\alpha^2 - w^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = m \ \epsilon\mathbb{R}$

$$\vec{r} = \vec{C_1}e^{mt} + \vec{C_2}e^{mt}$$

- **CASO 3** $\alpha^2 - w^2 < 0 \Rightarrow m_1 \neq m_2 \ \epsilon\mathbb{C}$ donde $\mathbb{C}$ es el conjunto de números complejos.
  En este caso las raíces son:

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - w^2} \\ &= -\alpha \pm \sqrt{-(w^2 - \alpha^2)} \\ &= -\alpha \pm \sqrt{(-1)}\sqrt{(w^2 - \alpha^2)} \\ &= -\alpha \pm i\sqrt{w^2 - \alpha^2} \ \epsilon\mathbb{C} \\ &= \alpha \pm i\beta \end{aligned}$$

  Tendríamos que:

$$\begin{aligned} m_1 &= \alpha + i\beta \\ m_2 &= \alpha - i\beta \end{aligned}$$

  La forma para escribir una ecuación diferencial cuyas raíces son complejas es:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{C_1}e^{m_1t} + \vec{C_2}e^{m_2t} \\ &= \vec{C_1}e^{(\alpha+i\beta)t} + \vec{C_2}e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= \vec{C_1}e^{\alpha t}e^{i\beta t} + \vec{C_2}e^{\alpha t}e^{-i\beta t} \\ &= \vec{C_1}e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + \vec{C_2}e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t) \\ &= e^{\alpha t}\left((\vec{C_1} + \vec{C_2})\cos\beta t + i(\vec{C_1} - \vec{C_2})\sin\beta t\right) \end{aligned}$$

  Usamos $\vec{C_1} + \vec{C_2} = \vec{D_1}$ y $\vec{C_1} - \vec{C_2} = \vec{D_2}$:

$$\vec{r} = e^{\alpha t}\left(\vec{D_1}\cos\beta t + i\vec{D_2}\sin\beta t\right)$$

Ejercicio 3

Resolver:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 16\vec{r} = \vec{0}$$

Solución:
Primero con el polinomio caracteristico buscamos las raíces:

$$\begin{aligned} m^2 + 16 &= 0 \\ m &= \pm 4i \end{aligned}$$

Como las raíces son complejas, entonces recordamos que la solución debe estar dada por:

$$\vec{r} = e^{\alpha t}\left(\vec{D_1}\cos\beta t + i\vec{D_2}\sin\beta t\right)$$

Para este caso $\alpha = 0$ y $\beta = 4$ entonces la solución es:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= e^{(0)t}\left(\vec{D_1}\cos 4t + i\vec{D_2}\sin 4t\right) \\ &= \vec{D_1}\cos 4t + i\vec{D_2}\sin 4t \end{aligned}$$

Ejercicio 4

Resolver:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - 4\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} = \vec{0}$$

Solución:
Primero con el polinomio caracteristico buscamos las raíces:

$$\begin{aligned} m^2 - 4m + 1 &= 0 \\ m_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

Como las raíces son diferentes, entonces recordamos que la solución debe estar dada por:

$$\vec{r} = \vec{C_1}e^{m_1 t} + \vec{C_2}e^{m_2 t}$$

Para este caso $m_1 = 2 + \sqrt{3}$ y $m_2 = 2 - \sqrt{3}$ entonces la solución es:

$$\vec{r} = \vec{C_1}e^{(2+\sqrt{3})t} + \vec{C_2}e^{2-\sqrt{3}t}$$

Ejercicio 5

Resolver:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+2\frac{d\vec{r}}{dt}+\vec{r}=\vec{0}$$

Solución:
Primero con el polinomio caracteristico buscamos las raíces:

$$\begin{aligned} m^2+2m+1&=0\\ (m+1)(m+1)&=0 \end{aligned}$$

Como las raíces son iguales, entonces recordamos que la solución debe estar dada por:

$$\vec{r}=\vec{C_1}e^{mt}+\vec{C_2}e^{mt}$$

Para este caso $m_1=-1$ y $m_2=-1$ entonces la solución es:

$$\vec{r}=\vec{r}=\vec{C_1}e^{-t}+\vec{C_2}e^{-t}$$

Ejercicio 6

Resolver:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+4\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{0}$$

Solución:
Primero con el polinomio caracteristico buscamos las raíces:

$$\begin{aligned} m^2+4&=0\\ m^2&=-4\\ m^2&=\pm 2i \end{aligned}$$

Como las raíces son complejas, entonces recordamos que la solución debe estar dada por:

$$\vec{r}=e^{\alpha t}\left(\vec{D_1}\cos\beta t+i\vec{D_2}\sin\beta t\right)$$

Para este caso $\alpha=0$ y $\beta=2$ entonces la solución es:

$$\begin{aligned} \vec{r}&=e^{(0)t}\left(\vec{D_1}\cos 2t+i\vec{D_2}\sin 2t\right)\\ &=\vec{D_1}\cos 2t+i\vec{D_2}\sin 2t \end{aligned}$$

2.2. Velocidad y aceleración

Comenzaremos repasando ciertos conceptos que en un curso de física ya los aprendiste.
Desplazamiento. Definimos el desplazamiento como el cambio en la posición de un objeto. El desplazamiento es una cantidad vectorial porque establece en que *dirección* se mueve el objeto. Usaremos $\vec{r}$ para identificarlo.
Velocidad. En pocas palabras, es la relación entre la distancia que recorre un objeto y el tiempo que tarda en recorrerla. Suena lógico entonces decir:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = velocidad$$

Rapidez. Es la magnitud de la velocidad:

$$|\vec{v}| = rapidez$$

Ahora, empecemos con un poco de explicación, supongamos que estas ...

2.2.1. Ejercicio de velocidad

Suponga que una partícula se mueve a lo largo de la curva $x = 2\sin 3t$, $y = 2\cos 3t$ y $z = 8t$. Encuentre la velocidad y aceleración de esta partícula para todo tiempo > 0 y de igual forma su rapidez y celeridad para $t = \frac{\pi}{2}$
Solución:
El problema nos dice a lo largo de qué curva se mueve la partícula, entonces usaremos un vector:

$$\vec{A} = 2\sin 3t\hat{\imath} + 2\cos 3t\hat{\jmath} + 8t\hat{k}$$

Calculamos la velocidad y aceleración para $t > 0$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{A}}{dt} = 6\cos 3t\hat{\imath} - 6\sin 3t\hat{\jmath} + 8\hat{k}$$
$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = -18\sin 3t\hat{\imath} - 18\cos 3t\hat{\jmath}$$

Calculamos la velocidad y aceleración para $t = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{d\vec{A}}{dt} = 6\cos 3\frac{\pi}{2}\hat{\imath} - 6\sin 3\frac{\pi}{2}\hat{\jmath} + 8\hat{k} \\
&= 6\hat{\jmath} + 8\hat{k} \\
\vec{a} &= \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = -18\sin 3\frac{\pi}{2}\hat{\imath} - 18\cos 3\frac{\pi}{2}\hat{\jmath} \\
&= 18\hat{\imath}
\end{aligned}$$

Obteniendo la rapidez y celeridad:

$$\begin{aligned}
rapidez &= |\vec{v}| = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10 \\
celeridad &= |\vec{a}| = \sqrt{18^2} = 18
\end{aligned}$$

2.3. Derivadas parciales de funciones vectoriales

2.3.1. Diferencial

Definición.

$$\mathrm{d}f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\mathrm{d}z$$

2.3.2. Notación

Existen múltiples formas de escribir una derivada parcial, he aquí algunas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= f_x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy} \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) = f_{xxy}
\end{aligned}$$

2.3.3. Propiedades

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\vec{A})=\frac{\partial\phi}{\partial t}\vec{A}+\phi\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}X\vec{B}\right)=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}X\vec{B}+\vec{A}X\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

2.3.4. Problemas

Ejercicio 1

Solución:

$$\frac{\partial d}{\partial x}x^2\ln(3ye^z)=\ln(3ye^z)2x$$

Ejercicio 2

Si $\phi(x,y,z)=xy^2z$ y $\vec{A}=xz\hat{\imath}-xy^2\hat{\jmath}+yz^2\hat{k}$. Hallar:

$$\frac{\partial^3(\phi\vec{A})}{\partial x^2\partial z}$$

Solución:
Primero realizamos:

$$\phi\vec{A}=x^2y^2z^2\hat{\imath}-x^2y^4z\hat{\jmath}+xy^3z^3\hat{k}$$

Sabemos que:

$$\frac{\partial^3(\phi\vec{A})}{\partial x^2\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(\phi\vec{A})}{\partial z}\right)\right)$$

Primero hacemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\phi\vec{A})}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(x^2y^2z^2\hat{\imath} - x^2y^4z\hat{\jmath} + xy^3z^3\hat{k}) \\ &= 2x^2y^2z\hat{\imath} - x^2y^4\hat{\jmath} + 3xy^3z^2\hat{k}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(\phi\vec{A})}{\partial z}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y^2z\hat{\imath} - x^2y^4\hat{\jmath} + 3xy^3z^2\hat{k}\right) \\ &= 4xy^2z\hat{\imath} - 2xy^4\hat{\jmath} + 3y^3z^2\hat{k}\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\frac{\partial^3(\phi\vec{A})}{\partial x^2\partial z} = 4y^2z\hat{\imath} - 2y^4\hat{\jmath}$$

Ejercicio 3

Siendo $\vec{C_1}$ y $\vec{C_2}$ vectores constantes y x un escalar constante demostrar que $\vec{H} = e^{-\lambda x}\left(\vec{C_1}\sin\lambda y + \vec{C_2}\cos\lambda y\right)$ es la solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \vec{0}$$

Solución:
Para la solución de problemas parecidos a este, es necesario redefinir ciertas partes de la ecuación principal, nota que las redefiniciones dependen de una sola variable. Usaremos:

$$\begin{aligned}\gamma &= e^{-\lambda x} \\ \vec{A} &= \vec{C_1}\sin\lambda y + \vec{C_2}\cos\lambda y\end{aligned}$$

Ya que redefinimos ahora si derivamos parcialmente:

$$\begin{aligned}\vec{H_x} &= \vec{A}\left(-\lambda e^{-\lambda x}\right) \\ \vec{H_{xx}} &= \vec{A}\left(\lambda^2 e^{-\lambda x}\right)\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\vec{H_y} &= \gamma \left(\lambda \vec{C_1} \cos \lambda y - \lambda \vec{C_2} \sin \lambda y\right) \\
&= \gamma\lambda \left(\vec{C_1} \cos \lambda y - \vec{C_2} \sin \lambda y\right) \\
\vec{H_{yy}} &= \gamma\lambda \left(-\lambda \vec{C_1} \sin \lambda y - \lambda \vec{C_2} \cos \lambda y\right) \\
&= -\gamma\lambda^2 \left(\vec{C_1} \sin \lambda y + \vec{C_2} \cos \lambda y\right)
\end{aligned}$$

Sustituimos los resultados en la ecuación principal:

$$\begin{gathered}
\vec{H_{xx}} + \vec{H_{yy}} = \vec{0} \\
\vec{A}\left(\lambda^2 e^{-\lambda x}\right) - \gamma\lambda^2 \left(\vec{C_1} \sin \lambda y + \vec{C_2} \cos \lambda y\right) = \vec{0}
\end{gathered}$$

Ahora sustituimos las redefiniciones que establecimos:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{C_1} \sin \lambda y + \vec{C_2} \cos \lambda\right)\left(\lambda^2 e^{-\lambda x}\right) - (e^{-\lambda x})\lambda^2 \left(\vec{C_1} \sin \lambda y + \vec{C_2} \cos \lambda y\right) &= \vec{0} \\
\lambda^2 e^{-\lambda x}(\vec{0}) &= \vec{0}
\end{aligned}$$

$\therefore$ $\vec{H}$ es solución de la ecuación diferencial.

2.3.5. Ejercicio 4

Siendo $\vec{A} = \cos xy\hat{\imath} + (3xy - 2x^3)\hat{\jmath} - (3x + 2y)\hat{k}$, hallar:

- $\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}$
- $\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}$
- $\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y \partial x}$
- $\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x \partial y}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos xy\hat{\imath} + (3xy - 2x^3)\hat{\jmath} - (3x + 2y)\hat{k}\right) \\
&= -y \sin xy\hat{\imath} + (3y - 6x^2)\hat{\jmath} - 3\hat{k} \\
\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos xy\hat{\imath} + (3xy - 2x^3)\hat{\jmath} - (3x + 2y)\hat{k}\right) \\
&= -x \sin xy\hat{\imath} + 3x\hat{\jmath} - 2\hat{k}
\end{aligned}$$

Utilizando los resultados anteriores, calculamos los ejercicios sobrantes:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-y\sin xy\hat{\imath} + (3y - 6x^2)\hat{\jmath} - 3\hat{k}\right) = (-xy\cos xy - \sin xy)\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x\sin xy\hat{\imath} + 3x\hat{\jmath} - 2\hat{k}\right) = (-xy\cos xy - \sin xy)\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$$

47

Capítulo 3

Operador diferencial vectorial nabla

3.1. El operador diferencial vectorial Nabla

3.1.1. Definición en coordenadas cartesianas y propiedades

3.2. El gradiente

3.2.1. Interpretación geométrica

3.2.2. Aplicaciones y ejercicios

3.3. La divergencia

3.3.1. Interpretación geométrica y campos solenoidales

3.3.2. Aplicaciones y ejercicios

3.4. El rotacional

3.4.1. Interpretación geométrica y campos irrotacionales

3.4.2. Aplicaciones y ejercicios

Capítulo 4

Cálculo integral vectorial

4.1. Coordenadas curvilíneas generalizadas

4.1.1. Ecuaciones de transformación

4.1.2. Curvas coordenadas y superficies de nivel

4.1.3. Elementos de línea, de superficie y de volumen

4.1.4. Gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano

4.1.5. Aplicación a coordenadas cilíndricas y esféricas

4.2. Integral de línea

4.2.1. Definición y ejercicios

4.2.2. Propiedades

4.2.3. Teorema de campos conservativos

4.3. Integrales dobles y triples

4.3.1. Integrales iteradas

4.4. Integrales de superficie

4.4.1. Integrales de superficie de un campo escalar