

# テンソル同時分解の拡張による オミクスデータの統合

阿部興<sup>1</sup>・島村徹平<sup>2</sup>

2023 年 6 月 3 日

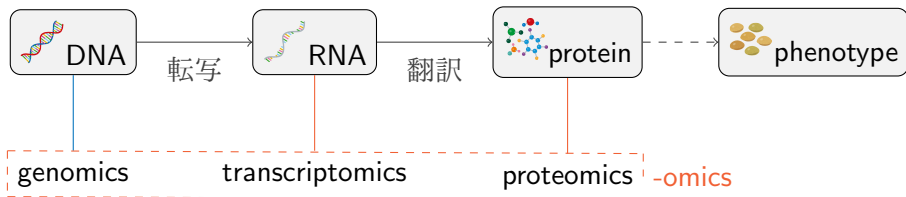
---

<sup>1</sup>東京医科歯科大学難治疾患研究所

<sup>2</sup>名古屋大学医学系研究科・東京医科歯科大学難治疾患研究所

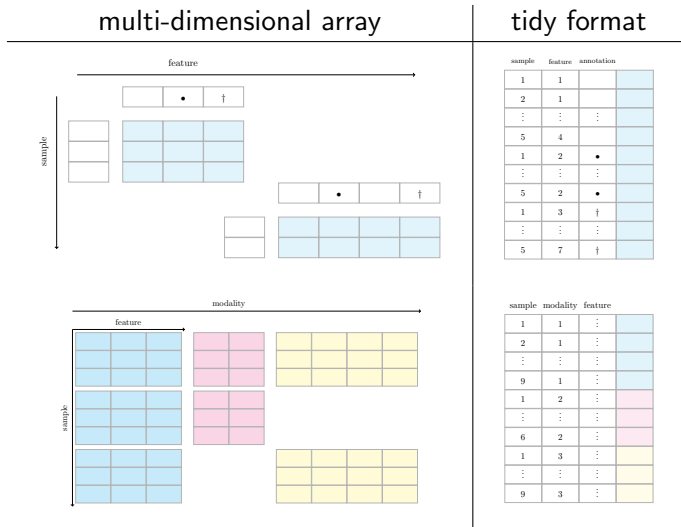
## 動機：分析対象

### モダリティ



- オミクス (omics) データを統合して分析したい
  - 積極的理由：データを補い合い普遍的な特徴を抽出
  - 消極的理由：対応のあるサンプルなので非独立
- 難しさ
  - semi-paired なデータが多い
  - モダリティごとに分布が変わる

# 動機：分析手法



tidy-format の利便性を生かしたまま行列分解ができないか？

### 3階のテンソルの場合

Data:

$$Y = (y_{ijk}), \quad y = (y_n) = \text{vec}(Y)$$

CP 分解 :

$$y_{ijk} \approx \sum_l v_{il}^{(1)} v_{jl}^{(2)} v_{kl}^{(3)}.$$

提案法 :



$$y_n \approx \sum_l \prod_{d=1}^D v_{dl}^{x_{nd}} \quad (1)$$

ここで,

$$V = (v_{dl}) = \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ v^{(3)} \end{pmatrix}$$

## 内積としての解釈

$$\begin{aligned}
 y_n &\approx \sum_{l=1}^L \prod_{d=1}^D v_{dl}^{x_{nd}} = v_{11}^{x_{n1}} v_{21}^{x_{n2}} \cdots v_{D1}^{x_{nD}} + \cdots + v_{1L}^{x_{n1}} v_{2L}^{x_{n2}} \cdots v_{DL}^{x_{nD}} \\
 &= \underbrace{\left( v_{d1}^{x_{nd}} \quad \cdots \quad v_{dL}^{x_{nd}} \right)}_{\text{inner product}} \begin{pmatrix} \prod_{d' \neq d} v_{d'1}^{x_{nd'}} \\ \vdots \\ \prod_{d' \neq d} v_{d'L}^{x_{nd'}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

inner product of  > inner product of 

**Fig:**  $y_n$  の値が大きいとき  $V$  の  $X$  で指定される成分どうしの値が似る

# アンサンブルとしての解釈

$$y_n \approx \sum_{l=1}^L \prod_{d=1}^D v_{dl}^{x_{nd}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \underbrace{L \exp \left( \sum_{d=1}^D x_{nd} \cdot \log v_{dl} \right)}_{f_{nl}}$$

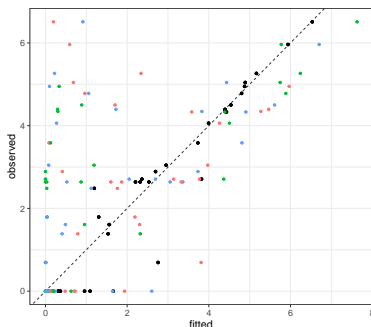


Fig: x 軸: 推定値, y 軸: 実測値, 色付きの点:  $L f_{nl}$ , 黒い点:  $\sum_l f_{nl}$

## モデル（準備）

式 1  $\left(y_n \approx \sum_l \prod_{d=1}^D v_{dl}^{x_{nd}}\right)$  より

$$y_n \mid V, \lambda \sim \mathcal{N}\left(y_n \mid \sum_{l=1}^L \prod_{d=1}^D v_{dl}^{x_{nd}}, \lambda^{-1}\right) \quad (2)$$

$$v_{dl} \sim \mathcal{N}(v_{dl} \mid 0, \tau^{-1}) \quad (3)$$

$$\lambda \sim \mathcal{G}(\lambda \mid a, b)$$

ここで  $\mathcal{N}(x \mid \mu, \sigma^2)$  は正規分布（平均  $\mu$ , 分散  $\sigma^2$ ）  $\mathcal{G}(x \mid a, b)$  はガンマ分布（形状パラメータ  $a$ , レートパラメータ  $b$ ）。

- さらに修正・拡張
  - 解釈性のため：非負制約
  - マルチオミクスデータの分析のため：分布を変える

## 事前分布：非負制約

$$\begin{aligned} v_{dl} &\sim \mathcal{TN}(v_{dl}|0, \tau^{-1}) \\ &\propto \mathcal{N}(v_{dl}|0, \tau^{-1}) \mathbb{1}_{(0, \infty)}(v_{dl}) \end{aligned}$$

ここで,  $\mathbb{1}_A(x)$  は指示関数 ( $x \in A$  のとき 1, さもなくば 0) .

**Note:** 原理的には, 非負制約の有無は変数ごとに選ぶこともできるが, 今回の我々の実装では煩雑さを避けるためすべて非負とした.



## 中間変数：分布を変える

- $y_n$  が実数（連続値）：

$$A(x) = x.$$

- $y_n$  が非負：

$$A(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

- $y_n$  が 2 値 (0 or 1)：

$$A(x) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

- $y_n$  が非負の整数：

$$A(x) = \begin{cases} \lceil x \rceil, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

# 切断, Rectified, 離散化

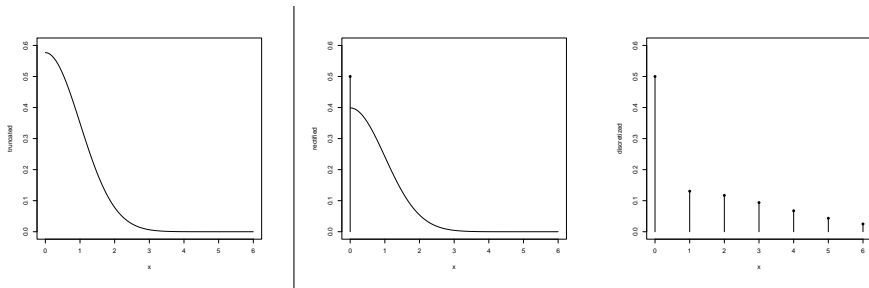


Fig: 左: 潜在変数の事前分布. 右: 観測されるデータのモデル.

観測されるデータのモデルは0の一点で確率を持つ  
(cf. zero-inflated モデル)

**Note:** モデルの密度が0になることは対数尤度に  $-\infty$  の罰則をつけることと同じであるため, 分布の台が最も大きい影響を持つと考えた.

# モデル

$$y_n = A_{m(n)}(z_n), \quad z_n \sim \mathcal{N} \left( \sum_{l=1}^L \prod_{d=1}^D v_{dl}^{x_{nd}}, \lambda^{-1} \right) \quad (4)$$

ここで  $m(n)$  は  $n$  をモダリティを区別する添字に写す関数.  
分析者が設定する要素 (チューニングパラメータ):

潜在変数  $V$  の次元  $L$

中間的関数  $A(x)$

計画行列  $X$

# 対数尤度

$$\begin{aligned}\ell(v_{dl}) &= \sum_{n=1}^N \log p(z|V, X) = \sum_{n=1}^N \left( -\frac{\lambda}{2} \left\{ z_n - \sum_{l=1}^L \prod_{d=1}^D v_{dl}^{x_{nd}} \right\}^2 \right) + C \\ &= -\frac{h_{dl}}{2} \left( v_{dl}^2 - 2v_{dl} \frac{\eta_{dl}}{h_{dl}} \right) + C,\end{aligned}$$

ここで,

$$\eta_{dl} = \sum_n x_{nd} \prod_{d' \neq d} v_{dl}^{x_{nd}} \left( z_n - \sum_{l' \neq l} \prod_{d' \neq d} v_{dl'}^{x_{nd}} \right) \quad (5)$$

$$h_{dl} = \sum_n \lambda x_{nd} \prod_{d' \neq d} v_{dl}^{2x_{nd}}. \quad (6)$$

$C$  は  $v_{dl}$  に依存しない定数とした.

## 変分 EM アルゴリズム (一般論)

データ:  $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n)$

$\mathcal{D}$  全体に影響する **global** な潜在変数:  $V$

$\mathcal{D}_n$  に影響する **local** な潜在変数:  $z_n$  ( $z = (z_1, \dots, z_N)'$ )

$$\begin{aligned} D_{KL}(q||p) &= \int q(z) \log \frac{q(z)}{p(z_n|\mathcal{D}, w)} dz \\ &= E_q[\log q(z)] - E_q[\log p(z_n|\mathcal{D}, w)] \end{aligned}$$

$q(z) \propto \exp(E_q[\log p(z_n|\mathcal{D}, w)])$  のとき最小.

### 変分 EM アルゴリズム

**E-step:**  $q(z_n) \propto \exp(E_q[\log p(z_n|\mathcal{D}, w)])$  を更新

**M-step:**  $q(w) \propto \exp(E_q[\log p(w|\mathcal{D}, z)])$  を更新

## 提案モデル; local な潜在変数 $z_n$

変分事後分布からサンプリング:

- rectified

$$q(-z_n) = \begin{cases} \mathcal{TN}(-z_n | -f_n, \sigma_n^2) & y_n = 0, \\ z_n = y_n \text{ with probability } 1 & y_n > 0 \end{cases} \quad (7)$$

- binary

$$q(-z_n) = \begin{cases} \mathcal{TN}(-z_n | -f_n, \sigma_n^2) & y_n = 0, \\ \mathcal{TN}(z_n | f_n, \sigma_n^2) & y_n = 1 \end{cases} \quad (8)$$

- nonnegative integer

$$q(-z_n) = \begin{cases} \mathcal{TN}(-z_n | -f_n, \sigma_n^2) & y_n = 0, \\ \mathcal{TN}(z_n | f_n, \sigma_n^2) & y_n = 1 \end{cases} \quad (9)$$

## 提案モデル; global な潜在変数 $V, \lambda$

解析的に期待値計算：

$$q(v_{dl}) = \begin{cases} \mathcal{N}(\mu_{dl}, \sigma_{dl}) & \text{if the prior of } v_{dl} \text{ is not truncated} \\ \mathcal{TN}(\mu_{dl}, \sigma_{dl}) & \text{if the prior of } v_{dl} \text{ is truncated,} \end{cases} \quad (10)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mu_{dl} &= \frac{E_q[\eta_{dl}]}{E_q[h_{dl}] + \tau / E_q[\lambda]}, \\ \sigma^2 &= (\tau + E_q[h_{dl}])^{-1}. \end{aligned}$$

$\lambda$  の変分事後分布は,

$$q(\lambda) = \mathcal{G}((N/2)E_q[\eta_{dl}], (E_q[h_{dl}] + \tau) / 2). \quad (11)$$

## まとめ

今後の発展：大規模メタアナリシス, 因果推論, 時空間の相関を考慮する