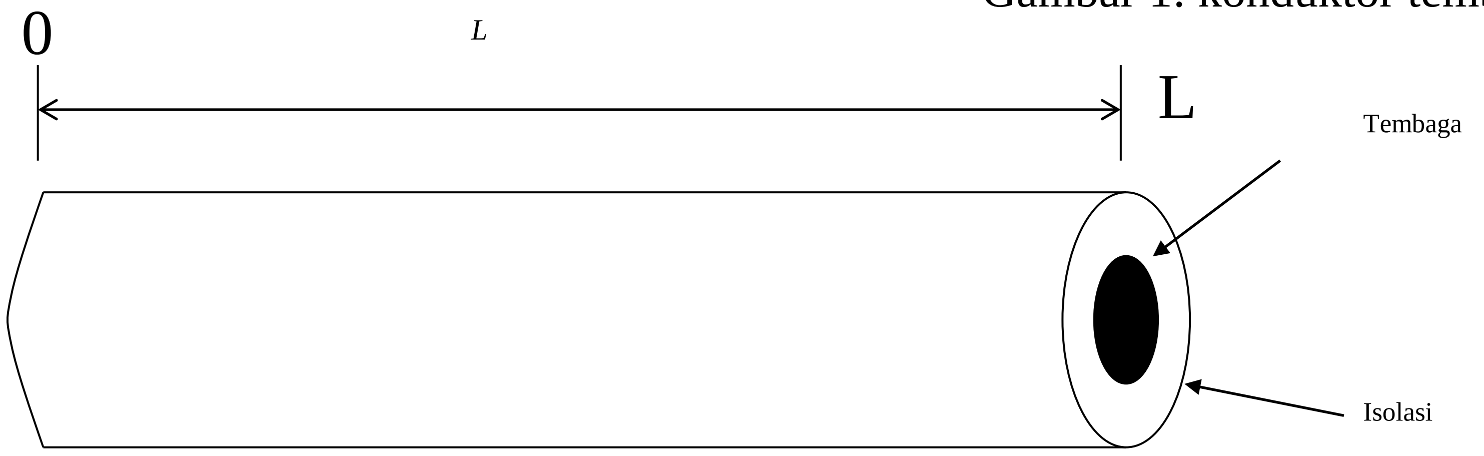
Model PDP: Aliran panas dalam konduktor listrik

Sebuah konduktor tembaga diselubungi bahan isolator. Isolator juga berfungsi menghentikan panas agar tidak keluar. Bayangkan kawat ini dalam keadaan panas setelah menghantarkan listrik. Akan dibuatkan model kehilangan panas setelah daya listrik dimatikan.

Langkah 1: Model dan persamaan model aliran panas sederhana dari konduktor tembaga dengan panjang *L*:

Gambar 1: konduktor tembaga



Untuk menggambarkan distribusi suhu sepanjang 0 hingga L kita perlu:

sebuah persamaan

Suhu di perbatasan.

Suhu awal.

Sifat bahan konduktor.

Panas akan mengalir ke arah penurunan suhu. Laju aliran sebanding dengan gradien suhu:

Dalam satu dimensi dapat dikatakan:

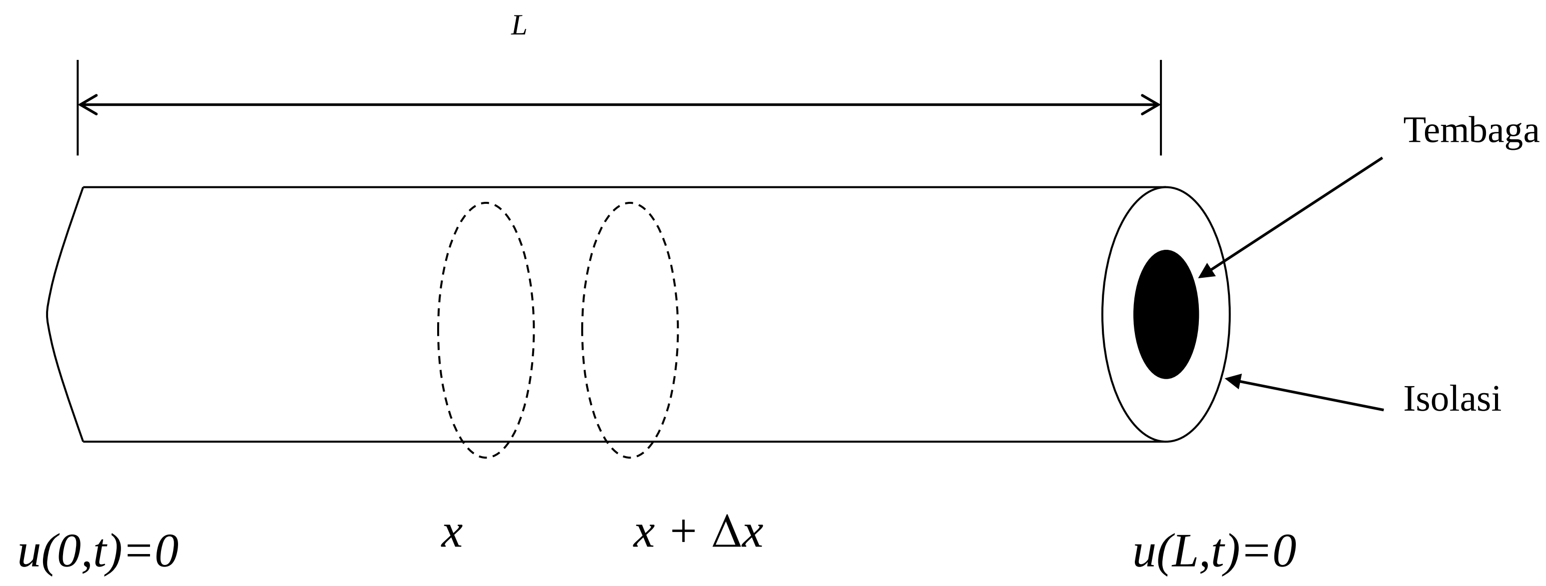
$$\text{Laju aliran panas} = -KA\frac{du}{dx}$$

dengan u = suhu, K = konduktivitas panas dan A = luas penampang konduktor. Karena kawat berinsulasi, panas hanya mengalir pada arah sumbu x. diterapkan konservasi panas pada segmen kawat [x, x+dx]:

Perubahan panas bersih di [x, $x+dx$] = Fluks panas bersih melintasi batas + total panas yang dihasilkan di [x, $x+dx$].

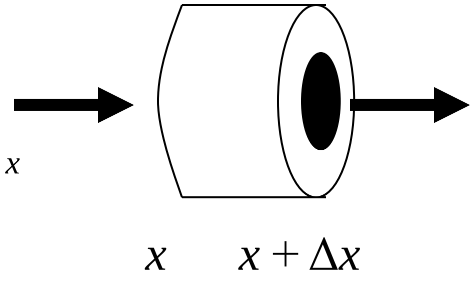
Catatan: Diasumsikan bahwa tidak ada panas yang dihasilkan di dalam konduktor untuk masalah ini.

Fluks panas melintasi batas



Pada segmen antara x dan x + x:

Laju panas yang mengalir ke bagian depan segmen $= -KA \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x}$



Laju panas yang mengalir ke ujung belakang segmen $= -KA \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x}$

Panas bersih yang diangkut masuk atau keluar dari segmen ini adalah perbedaan antara fluks panas di belakang dan depan:

$$\Delta \text{fluks panas} = -KA\left(\frac{\partial u}{\partial x}_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}_{x} \right)$$

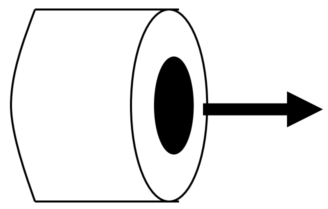
Panas dihasilkan sebagai konsekuensi dari hambatan listrik. Bayangkan bahwa kita telah meninggalkan daya dan konduktor telah memanas. Saat dimatikan, konduktor akan mendingin karena panas dialirkan ke ujungnya.

Jumlah total panas dalam segmen adalah : $\sigma\rho\Delta xAu$,
untuk σ = panas spesifik
ρ = densitas
Saat mendingin dapat dikatakan bahwa perubahan energi panas adalah :

$$\Delta energipanas = \sigma\rho\Delta xA\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\Delta energipanas = \sigma\rho\Delta xA\frac{\partial u}{\partial t}$$

Laju panas yang mengalir ke bagian depan segmen $= -KA\frac{\partial u}{\partial x}_{x}$



x $\quad$ $x+\Delta x$

Laju panas yang mengalir ke ujung belakang segmen $= -KA\frac{\partial u}{\partial x}_{x+\Delta x}$

Energi tidak dapat diciptakan sehingga jumlah panas yang keluar atau masuk melalui ujung ditambahkan ke perubahan energi panas dalam segmen = 0

Dapat ditulis bahwa: *Δ*fluks panas + *Δ*energi panas = 0

Karena itu dapat ditulis
*Δ*energi panas = - *Δ*fluks panas

$$\sigma\rho\Delta x A\frac{\partial u}{\partial t} = KA\left(\frac{\partial u}{\partial x}_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}_{x}\right)$$

Disusun kembali:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{\sigma\rho}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}_{x}}{\Delta x}$$

Jika diberikan $\Delta x \rightarrow 0$, diperoleh persamaan panas 1 dimensi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{\sigma\rho} \frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}}{\Delta x}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{\sigma\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$K/\sigma\rho$ disebut sebagai difusivitas panas dan dapat titulis dengan α^2.
Sehingga, persamaan panas 1 dimensi ditulis :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

(dengan $\alpha^2 = K/\sigma\rho$)

Langkah 2: Solusi Umum
Sekarang kita sudah dapat membuat rumus untuk suhu di sepanjang kawat. Selanjutnya dicari solusi umum dari persamaan panas ini.

Digunakan metode “Pemisahan Variabel”, dengan asumsi bahwa solusinya adalah fungsi x dikalikan dengan fungsi t,

$$U(x,t) = X(x)T(t)$$

Substitusikan solusi *u(x,t)=X(x)T(t)* ke dalam Persamaan Diferensial Parsial :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

diperoleh:

$$X \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} T$$

Sekarang pisahkan variabel (fungsi x di satu sisi dan fungsi t di sisi lain):

$$\frac{\;\frac{\partial T}{\partial t}\;}{\alpha^2 T} = \frac{\;\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\;}{X}$$

Samakan kedua sisi dengan konstanta. Sebut saja *k*:

$$\frac{\frac{\partial T}{\partial t}}{\alpha^2 T} = \frac{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}{X} = k$$

Diperoleh dua persamaan:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - kX = 0$$

$$\frac{dT}{dt} - k\alpha^2 T = 0$$

Pilih : $k = -\lambda^2$

Direoleh 2 persamaan diferensial biasa:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$\frac{dT}{dt} + \lambda^2 \alpha^2 T = 0$$

Penyelesian untuk T dan X adalah :

$$X = B\sin\left(\lambda x\right) + C\cos(\lambda x)$$

$$T = Ae^{-\alpha^2\lambda^2 t}$$

(Tunjukkan bahwa kedua ekspresi ini adalah solusi untuk persamaan panas dimensi 1)

Solusi untuk u(x,t) sama dengan X kali T, dan dapat dinyatakan dengan:

$$u(x,t) = Ae^{-\alpha^2\lambda^2 t}\left(\ B\sin(\lambda x) + C\cos(\lambda x)\ \right)$$

atau

$$u(x,t) = e^{-\alpha^2\lambda^2 t}(D\sin(\lambda x) + E\cos(\lambda x)) \qquad (2)$$

Ini terlihat ok. Ada istilah 'peluruhan' eksponensial untuk menggambarkan kehilangan panas dan istilah sinusoidal yang berguna untuk menyesuaikan solusi dalam panjang tetap.

Apa bentuk solusi yang akan Anda dapatkan jika Anda memilih k= $+\lambda^2$?

Langkah 3: Menerapkan kondisi/syarat batas

Kedua ujungnya diatur pada 0ºC.

Sehingga pada *x=0*

$$u(0,t)=e^{-\alpha^2\lambda^2 t}\left(D\overset{0}{\sin(\lambda 0)}+E\overset{1}{\cos(\lambda 0)}\right)$$

$$u(0,t)=e^{-\alpha^2\lambda^2 t}E=0$$

Untuk memenuhi kondisi batas ini, maka *E*=0

Selanjunya pada *x=L:*

$$u(L,t) = e^{-\alpha^2\lambda^2 t} D\sin(\lambda L) = 0$$

Dipenuhi jika $sin(\lambda L) = 0$

Sehingga $\lambda L = n\pi$, n=1,2,3…

Semua suku dalam solusi diberikan di bawah ini:

$$u_n(x,t) = D_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha^2 t} \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

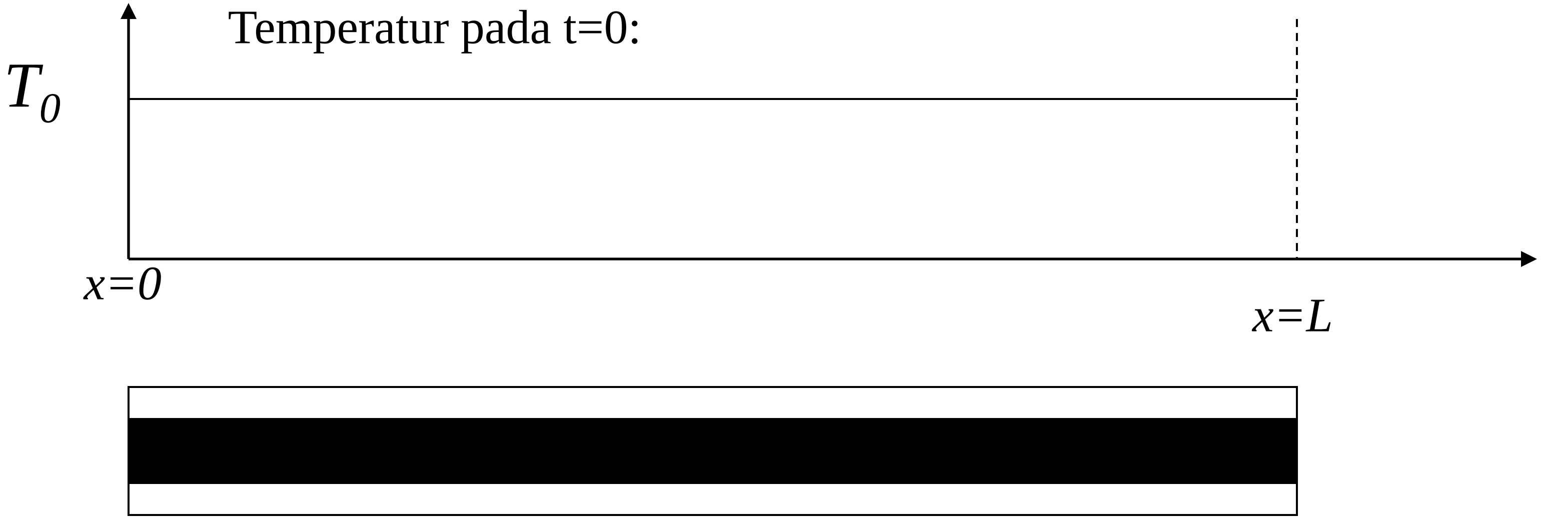
Solusinya adalah jumlah suku-sukunya : $u_n(x,t) = D_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha^2 t} \sin(\frac{n\pi x}{L})$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha^2 t} \sin(\frac{n\pi x}{L}) \qquad (3)$$

Langkah 4: Menerapkan kondisi awal

Jika diketahui suhu awal, dapat ditemukan konstanta D_n. Diasumsikan bahwa suhu kawat sama di sepanjang kawat, katakanlah $u(x,0)=T_0$. Sehingga

$$u(x,0) = T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (4)$$



Untuk menentukan koefisien-koefisien D_n digunakan sifat dari fungsi sinus, yaitu:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{2} \qquad \text{jika } n=m \qquad (5)$$

$$= 0 \qquad \text{jika } n \neq m$$

Kita kalikan kedua ruas persamaan 4 dengan sin(*mπx*) dan kemudian integralkan antara *0* dan *L*.

$$u(x,0) = T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) \qquad (6)$$

$$\int_0^L u(x,0)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

Semua suku sama dengan nol kecuali bila *n* =*m*.

$$\int_0^L u(x,0)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = D_m \frac{L}{2}$$

Susun ulang untuk menemukan nilai suku ke-m dari persamaan berikut:

$$\int_0^L u(x,0)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = D_m \frac{L}{2}$$

$$D_m = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,0)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx \qquad (7)$$

Sehingga D_m dapat dinyatakan dengan:

$$D_m = \frac{2}{L}\int_0^L T_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = T_0 \frac{2}{m\pi}\left(1-\cos(m\pi)\right)$$

Sehingga konstanta D ke-m adalah

$$D_m = T_0 \frac{2}{m\pi}\left(1 - \cos(m\pi)\right)$$

Substitusikan ini ke dalam solusi, diperoleh:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_0}{n\pi}\left(1 - \cos(n\pi)\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{8}$$

Selanjutnya diberikan contoh. Konstanta berikut ini akan digunakan untuk menghitung difusivitas panas tembaga:

Panas spesifik σ = 386 J/(kgC°)

Densitas ρ = $8.96*10^3$ kg/m^3

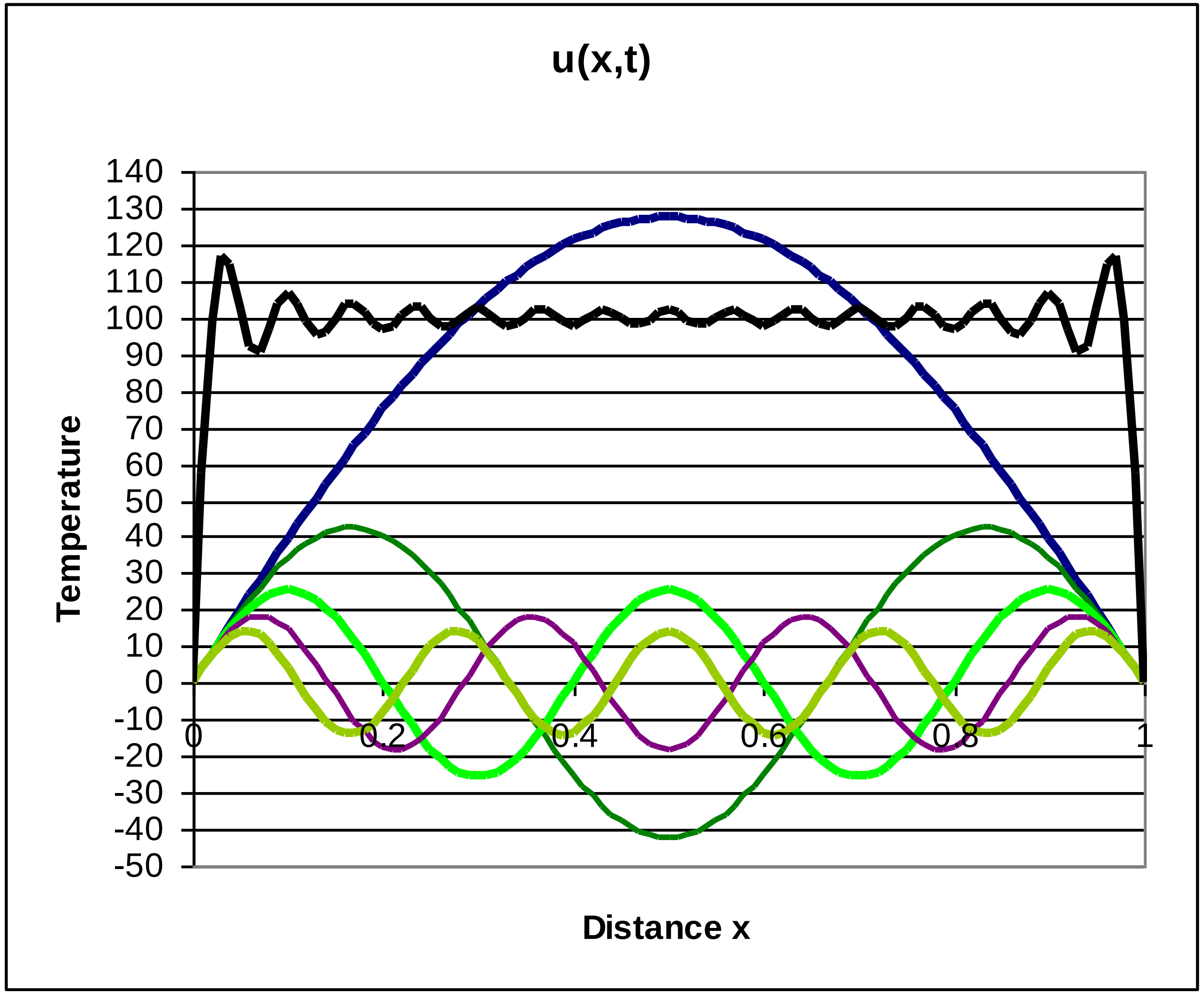
Konduktivitas panas K = 385 J/(sec*meter*C°).

Karena itu α^2 = 1.11E-4 Apa unitnya?

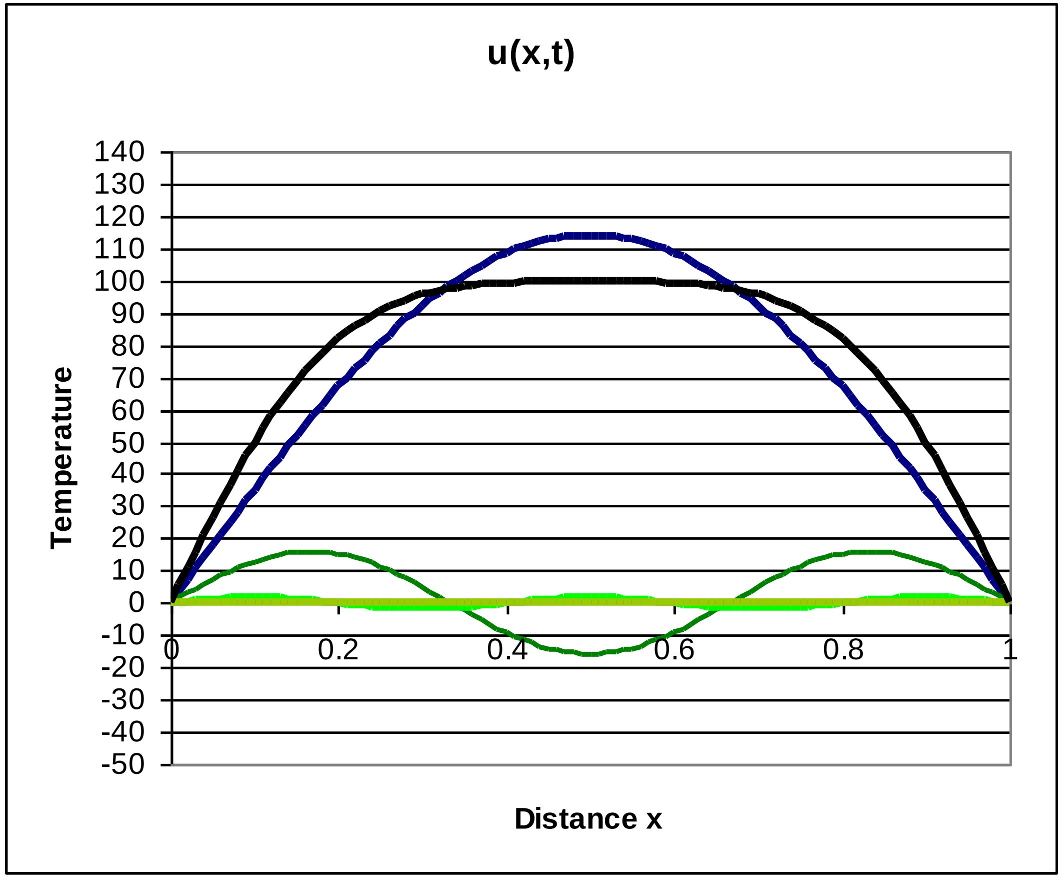
Ingat: $\alpha^2 = K/\sigma\rho$

Asumsikan L=0,1m dan T_0 = $100°C$. Dengan menggunakan Microsoft Excel dapat ditampilkan hasil perhitungan dari permasalahan panas dimensi satu. Garis hitam mewakili jumlah 14 suku bukan nol yang telah dihitung. Garis biru adalah suku pertama. Secara keseluruhan di tampilkan 5 suku bukan nol.

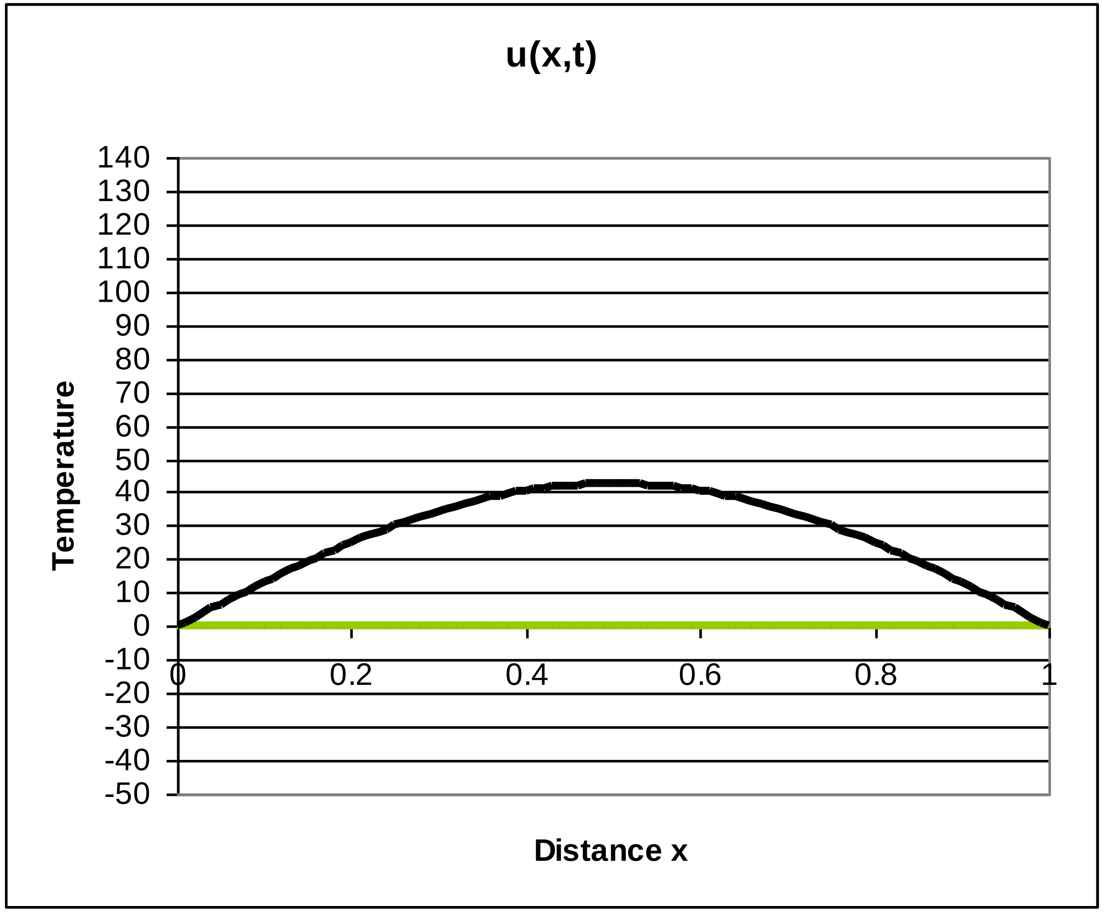
Penyelesain pada $t=0$



Penyelesaian:



t= 1 detik



t= 10 detik

SEKIAN

TERIMA KASIH