《信号与系统》第三章作业及答案

3.1 $x(t)$ 基波周期 $T=8$. 非零系数 $a_1=a_{-1}=2$ $a_3=a_{-3}^*=4j$.

可知 $a_{-3}=-4j$

$x(t)=\sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}$ 其中 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$

$=2e^{j\cdot 1\cdot\frac{\pi}{4}t}+2e^{j(-1)\frac{\pi}{4}t}+4j\cdot e^{j3\cdot\frac{\pi}{4}t}-4je^{j(-3)\frac{\pi}{4}t}$

$=4\cos\frac{\pi}{4}t-8\sin\frac{3}{4}\pi t$

$=4\cos\frac{\pi}{4}t+8\cos(\frac{3}{4}\pi t+\frac{\pi}{2})$

3.5 $x_2(t)=x_1(1-t)+x_1(t-1)$

由傅里叶级数的性质可知 若 $x_1(t)\longrightarrow a_k$ 则 $x_1(t-1)\longrightarrow a_k e^{-jk\omega_0\cdot 1}=a_k e^{-jk\omega_0}$

题目已知基波频率为 ω_1. 则有 $x_1(t-1)\rightarrow a_k e^{-jk\omega_1}$

$x_1(1-t)$ 是由 $x_1(t)$ 经过时移得到 $x_1(t+1)$ 再翻转 $x_1(-t+1)$

所以若 $x_1(t)\longrightarrow a_k$ 则 $x_1(t+1)\rightarrow a_k e^{jk\omega_1}$

进一步有: $x_1(-t+1)\longrightarrow a_{-k}e^{-jk\omega_1}$ (这里利用性质 $x_1(t)\rightarrow a_k$, $x_1(-t)\rightarrow a_{-k}$)

$\therefore$ $x_2(t)\rightarrow a_{-k}e^{-jk\omega_1}+a_k e^{-jk\omega_1}=e^{-jk\omega_1}(a_k+a_{-k})$

3.8. 首先 $x(t)$ 为实函数 存在: $a_k=a_{-k}^*$

其次 $x(t)$ 为奇函数 即 $x(t)=-x(-t)$ $\Rightarrow$ $a_k=-a_{-k}$

综合可得 a_k 应为纯虚数.

由条件3: 对于 $|k|>1$, $a_k=0$. 即傅里叶级数只可能存在 a_0, a_1 及 a_{-1} 非零.

$a_0=\frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt$ 由 $x(t)$ 为奇函数可知 $a_0=0$.

所以傅里叶非零系数仅可能为 a_1 和 a_{-1}

由条件4: $\frac{1}{2}\int_0^2|x(t)|^2dt=1$ 可知 $\frac{1}{2}\int_0^2|x(t)|^2dt$ 为信号的功率.

由 parsvel 定理. $\frac{1}{2}\int_0^2|x(t)|^2dt=\sum_k|a_k|^2=|a_1|^2+|a_{-1}|^2=1$ 即 $2|a_1|^2=1$

$\therefore$ 综合前述结论有 $a_1=\frac{1}{\sqrt{2}}j$ 或 $a_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}j$ 对应有 $a_{-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}j$ 或 $a_{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}j$

所以 $x(t)$ 可取: $\frac{1}{\sqrt{2}}je^{j\pi t}-\frac{1}{\sqrt{2}}je^{-j\pi t}=-\sqrt{2}\sin\pi t$ (其中基频为 $\frac{2\pi}{T}=\pi$)

或: $-\frac{1}{\sqrt{2}}je^{j\pi t}+\frac{1}{\sqrt{2}}je^{-j\pi t}=\sqrt{2}\sin\pi t$

3.21 $x(t)$ 的基波周期为 $T=8$. 则基频 $w_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$

$a_1=a_{-1}^*=j \quad a_5=a_{-5}=2$

$x(t)=je^{j\cdot1\frac{\pi}{4}t}-je^{j(-1)\frac{\pi}{4}t}+2e^{j5\cdot\frac{\pi}{4}t}+2e^{-j5\cdot\frac{\pi}{4}t}$

$=-2\sin(\frac{\pi}{4}t)+4\cos(\frac{5}{4}\pi t)$

$=4\cos(\frac{5}{4}\pi t)+2\cos(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2})$

3.27. $x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ 其中 $N=5$

$=2+a_2e^{j2\cdot\frac{2}{5}\pi n}+a_{-2}e^{j(-2)\cdot\frac{2}{5}\pi n}+a_4e^{j4\cdot\frac{2}{5}\pi n}+a_{-4}e^{j(-4)\frac{2}{5}\pi n}$

由已知 $a_0=2 \quad a_2=2e^{j\frac{\pi}{6}} \quad a_{-2}=2e^{-j\frac{\pi}{6}} \quad a_4=e^{j\frac{\pi}{3}} \quad a_{-4}=e^{-j\frac{\pi}{3}}$ 代入上式.

有: $x[n]=2+4\cos(\frac{4}{5}\pi n+\frac{\pi}{6})+2\cos(\frac{8}{5}\pi n+\frac{\pi}{3})$

$=2+4\sin(\frac{4}{5}\pi n+\frac{2}{3}\pi)+2\sin(\frac{8}{5}\pi n+\frac{5}{6}\pi)$

3.40. (a) $x(t-t_0)+x(t+t_0)$ 利用傅里叶级数的时移性质

$x(t)\to a_k \quad x(t-t_0)\to a_ke^{-jkw_0t_0}$ 其中 $w_0=\frac{2\pi}{T}$

$x(t+t_0)\to a_ke^{jkw_0t_0}$

$\therefore x(t-t_0)+x(t+t_0)\to a_ke^{-jkw_0t_0}+a_ke^{jkw_0t_0}=2a_k\cos(kw_0t_0)=2a_k\cos(k\frac{2\pi}{T}t_0)$

(b). $Ev\{x(t)\}$ Ev (even) 为偶分量

$Ev\{x(t)\}=\frac{x(t)+x(-t)}{2}\longrightarrow\frac{a_k+a_{-k}}{2}$

(c). $Re\{x(t)\}=\frac{x(t)+x^*(t)}{2}$ 令 $x^*(t)$ 的傅里叶系数为 a_k'

$a_k'=\frac{1}{T}\int_T x^*(t)e^{-jkw_0t}dt$ 有 $a_k'^*=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{jkw_0t}dt$

有 $(a_{-k}')^*=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jkw_0t}dt=a_k$

$\therefore a_k'=a_{-k}^*$

$\therefore Re\{x(t)\}\to\frac{a_k+a_{-k}^*}{2}$

第2页

(d).
$$x(t)=\sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=\sum_k a_k(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\sum_k a_k(jk\omega_0)(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

∴其傅里叶级数系数为：$a_k\cdot(-k^2\omega_0^2)$ 其中 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

(e). 先确定 $x(3t-1)$ 的基波周期. 由于 $x(3t-1)$ 是 $x(t)$ 经过缩放3倍.并移位.得到

∴有 $x(3t-1)$ 的基波周期为 $\frac{T}{3}$ (其中 T 为 $x(t)$ 的基波周期)

令 $x(3t-1)$ 的傅里叶级数系数为 b_k

有: $b_k=\frac{1}{T'}\int_{T'}x(3t-1)e^{-jk\frac{2\pi}{T'}t}dt$ 其中 T' 为 $x(3t-1)$ 的基波周期 $T'=\frac{T}{3}$

$=\frac{3}{T}\int_{T'}x(3t-1)e^{-jk\frac{2\pi}{T'}t}dt$ 令 $3t-1=m$ 有 $t=\frac{m+1}{3}$

$=\frac{3}{T}\int_T x(m)e^{-jk\frac{2\pi}{\frac{T}{3}}(\frac{m+1}{3})}\frac{1}{3}dm$

$=\frac{1}{T}\left[\int_T x(m)e^{-jk\frac{6\pi}{T}\cdot\frac{m}{3}}dm\right]\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}}$

$=a_k\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}}$

3.43. (a). (i). 若 $x(t)$ 是奇谐，即 $a_k=0$ (当k为偶整数)

$$x(t)=\sum_k a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

有: $x(t+\frac{T}{2})=\sum_k a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}(t+\frac{T}{2})}=\sum_k a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}e^{j\pi k}$

当k为奇数时.有 $x(t+\frac{T}{2})=-\sum_k a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$

综合有 $x(t)=-x(t+\frac{T}{2})$

(ii) 若有 $x(t)=-x(t+\frac{T}{2})$.

$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{T}\int_T -x(t+\frac{T}{2})e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$ 令 $t+\frac{T}{2}=m$

$=-\frac{1}{T}\int_T x(m)e^{-jk\frac{2\pi}{T}(m-\frac{T}{2})}dm=-e^{jk\pi}a_k$ (这里也可直接使用傅里叶级数性质的时移性质)

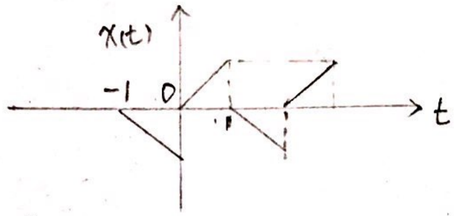
$=-(\cos k\pi+j\sin k\pi)a_k$

当k为偶整数时 存在 $a_k=-a_k$ 即 $a_k=0$

当k为奇整数时 等式左右相等成立.

(b). $x(t)=t \quad 0<t<1$

根据奇谐周期信号的定义有 $x(t)$



$$x(t)=\sum_k a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{其中 } \omega_0=\frac{2\pi}{T}=\pi$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\pi t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x(t)e^{-jk\pi t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(-t-1)e^{-jk\pi t}dt+\frac{1}{2}\int_0^1 t\,e^{-jk\pi t}dt$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(-t)e^{-jk\pi t}dt}_{①}+\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 t\,e^{-jk\pi t}dt}_{②}\underbrace{-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}e^{-jk\pi t}dt}_{③}$$

对①有：令 $t=-m$ 有 $=\frac{1}{2}\int_1^0 m\,e^{jk\pi m}d(-m)=\frac{1}{2}\int_0^1 t\,e^{jk\pi t}dt$

$$\therefore ①+② =\frac{1}{2}\int_0^1(t e^{-jk\pi t}+t e^{jk\pi t})dt=\frac{1}{2}\int_0^1 2t\cos k\pi t\,dt$$

$$=\int_0^1\frac{t}{k\pi}d(\sin k\pi t)$$

$$=\frac{1}{k\pi}\left[t\cdot\sin k\pi t\Big|_0^1-\int_0^1\sin\pi t\,dt\right]=\frac{\sin k\pi}{k\pi}+\frac{\cos k\pi-1}{k^2\pi^2}$$

③：
$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}e^{-jk\pi t}dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-jk\pi t}\Big|_{-1}^{0}}{-jk\pi}=-\frac{1}{2}j\cdot\frac{[1-e^{jk\pi}]}{k\pi}$$

综合①~③结果有 $a_k=\frac{\cos k\pi-1}{k^2\pi^2}-\frac{1}{2}j\,\frac{1-e^{jk\pi}}{k\pi}$

当 k 为偶数时 $a_k=0$

当 k 为奇数时 $a_k=\frac{-2}{k^2\pi^2}+\frac{1}{jk\pi}$

(c). 当 $x(t)$ 为偶谐信号时. $a_k=0$ 当 k 为奇整数

$$x(t+\tfrac{T}{2})\to a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}}=a_k e^{jk\pi}\quad\begin{cases}\text{当 } k \text{ 为奇整数} & x(t+\frac{T}{2})\to -a_k=0\\ \text{当 } k \text{ 为偶整数} & x(t+\frac{T}{2})\to a_k\end{cases}$$

所以有 $x(t)=x(t+\frac{T}{2})$

因此 周期为 $\frac{T}{2}$.

(d). (1). a_1 或 a_{-1} 为非零. $x(t)=\sum_k a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$ 既然 a_1 或 a_{-1} 非零. 所以基频成分 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ 一定存在 所以基波周期为 T.

(2). a_k 或 a_l 非零 a_k 和 a_l 对应的 k 次谐波即 $k\omega_0$ 和 $l\omega_0$，周期分别为 $\frac{2\pi}{k\omega_0}$ 和 $\frac{2\pi}{l\omega_0}$ 和谐波分量求和后的信号周期为上述信号的公共周期即 $\frac{2\pi}{k\omega_0}$ 和 $\frac{2\pi}{l\omega_0}$ 的最小公倍数 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$