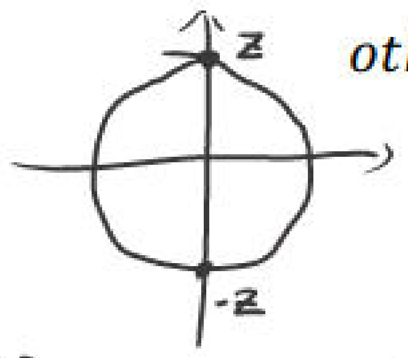
概率论与数理统计四次作业

截止日期：2021 年 5 月 25 日

1. 设X,Y是相互独立的随机变量，它们都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$。试验证随机变量$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\ge 0,\\ 0, & others\end{cases}$$



解：$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$

$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$

$F_Z(z)=\iint_G \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dx\,dy \xrightarrow{\text{极坐标}} \int_0^{2\pi}\left[\int_0^z \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr\right]d\theta=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$

$\therefore f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$

2. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$-\frac{1}{2}(e^{-2}-1)$

$\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^1 \quad e^{-y}\Big|_0^{\infty}$

$$f(x,y)=\begin{cases}be^{-(2x+y)}, & 0<x<1,0<y<\infty,\\ 0, & others\end{cases}$$

be^{-2x} |

$be^{-y}\int_0^1 e^{-2x}dx$

$b\left(-\frac{1}{2}e^{-2}-1\right)$

(1) 试确定常数b

(2) 求边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$，X,Y是否独立？

(3) 求函数$U=\max\{X,Y\}$的分布函数

解 (1) $\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx\right]dy=1$

$\int_0^{\infty}\left[\int_0^1 be^{-(2x+y)}dx\right]dy$

$=b\left(\frac{1}{2}e^{-2}+1\right)=1$

$b=\frac{1}{\frac{1}{2}e^{-2}+1}$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=be^{-(2x+y)}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=-\frac{1}{2}(e^{-2}-1)\cdot e^{-y}$

$f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y)$

(3) $F_{max}(u)=F_X(z)\,F_Y(z)$

3. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6y^2, & 0\le y\le x\le 1,\\ 0, & others\end{cases}$$

求$E(X),E(Y),E(XY),E(X^2+Y^2)$

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_0^x 6y^2dy=2x^3$

$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 2x^4dx=\frac{2}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{2}{5}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\int_y^1 6y^2dx=6y^2\cdot(1-y)$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^1 6y^3-6y^4dy=\frac{3}{10}$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy$

$=\int_0^1\left[\int_y^1 6xy^3dx\right]dy$

$=\frac{2}{5}$

$E(X^2+Y^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+y^2)f(x,y)dxdy$

$=\int_0^1\left[\int_y^1 6y^2(x^2+y^2)dx\right]dy$

$=\int_0^1(2y^2+6y^4-8y^5)dy=\frac{3}{5}$

5. (1) 设随机变量$X\sim N(0,1),Y\sim N(0,1)$，且$X,Y$相互独立。求$E(\frac{X^2}{X^2+Y^2})$.

(2) 一飞机进行空投物资作业，设目标点为原点$O(0,0)$，物资着陆点为(X,Y)，X,Y相互独立，且设$X\sim N(0,2),Y\sim N(0,2)$，求原点到点$(X,Y)$间距离的数学期望。(tips: 积分可用极坐标计算)

(1)

解：$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

变量相互独立，

$\therefore f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$

$E(\frac{X^2}{X^2+Y^2})$

$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X^2}{X^2+Y^2}\cdot f(x,y)dydx$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X^2}{x^2+y^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy.$

转换到极坐标下：

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos^2\theta\, e^{-\frac{r^2}{2}}dr\cdot d\theta$

$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos^2\theta e^{-\frac{r^2}{2}}dr\cdot d\theta$

$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta$

$=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}-\frac{\cos 2\theta}{2}d\theta$

$=\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^{2\pi}1-\cos 2\theta\, d2\theta$

$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(2). 求：$E(\sqrt{X^2+Y^2})$

$f_X(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$

$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}$

$\because X,Y$ 互相独立

$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

$=\frac{1}{4\pi}\cdot e^{-\frac{(x^2+y^2)}{4}}$

$\therefore E(\sqrt{x^2+y^2})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{4}}dxdy$

转换为极坐标下：$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r\cdot e^{-\frac{r^2}{4}}drd\theta$

$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{r^2}{4}}\cdot dr^2\right]d\theta$

$=\frac{1}{4\pi}\cdot\int_0^{2\pi}2\,d\theta$

$=1$

$$\frac{4\ln 4-4}{16}\int_0^4 \frac{\ln 4-1}{4}+\frac{\ln y}{4}\,dy.$$

6. 设随机变量X,Y是相互独立的，且服从(0,4)上的均匀分布。

(1)求$E(XY),E(In(XY)),E(|Y-X|)$

(2)以X,Y为边长的一长方形，以A,C 表示长方形的面积和周长，求A和C的相关系数。

解：(1) 变量相互独立.

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0<x<4\\ 0, & \text{others}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0<y<4.\\ 0, & \text{others}\end{cases}$$

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{16}, & 0<x<4,\ 0<y<4\\ 0, & \text{others}\end{cases}$$

$$E(XY)=\int_0^4\int_0^4 xy\cdot f(x,y)\,dx\,dy$$
$$=\int_0^4\left[\int_0^4 \frac{xy}{16}\,dx\right]dy$$
$$=\int_0^4 \frac{y}{2}\,dy$$
$$=4$$

$$E(\ln(XY))=\int_0^4\int_0^4 \frac{\ln(xy)}{16}\,dx\,dy$$
$$=\int_0^4\left[\int_0^4 \frac{\ln x}{16}+\frac{\ln y}{16}\,dx\right]dy$$
$$=\int_0^4\left(\frac{x\ln x-x}{16}\right)\Big|_0^4+\left(\frac{x\ln y}{16}\right)\Big|_0^4\,dy$$
$$=\int_0^4 \frac{\ln 4-1}{4}+\frac{\ln y}{4}\,dy$$
$$=(\ln 4-1)+\frac{1}{4}\cdot(y\ln y-y)\Big|_0^4$$
$$=\ln 4-1+\ln 4-1$$
$$=4\ln 2-2.$$

$$E(|Y-X|)=\int_0^4\left[\int_0^4 \frac{|Y-X|}{16}\,dx\right]dy.$$

(2). $A=E(2X+2Y)$
$=2E(X)+2E(Y)$

$E(X)=\int_0^4 x\cdot\frac{1}{4}\cdot dx=2.$

$\therefore A=E(2X+2Y)=8.$

$C: E(XY)=4$

7. 卡车装运水泥，设每袋水泥重量 X（以 kg 计）服从分布$N(100,25^2)$，问最多装多少袋水泥使总重量超过 1000 的概率不大于 0.5

解:

$\because P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i>1000\right\}\le 0.5.$

$\because X_1, X_2\cdots X_n$ 相互独立.

$\therefore \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(100n,\ 25^2\cdot n)$

$\therefore P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i>1000\right\}=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i-100n}{25\sqrt{n}}>\frac{1000-100n}{25\sqrt{n}}\right\}$

$=1-\Phi\left(\frac{1000-100n}{25\sqrt{n}}\right)\le 0.5.$

$\Rightarrow \Phi\left(\frac{1000-100n}{25\sqrt{n}}\right)\ge 0.5$

查表得:

$\frac{1000-100n}{25\sqrt{n}}\ge 0$

$\Rightarrow n\le 10.$

$\therefore$ 最多装10袋.