2.3 $x[n]=(\frac{1}{2})^{n-2}u[n-2] \quad h[n]=u[n+2]$

令 $x_1[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$ 有 $x[n]=x_1[n-2]$ 令 $h_1[n]=u[n]$ 有 $h[n]=h_1[n+2]$

因此 $x[n]*h[n]=x_1[n-2]*h_1[n+2]$ 利用卷积的时不变性，有

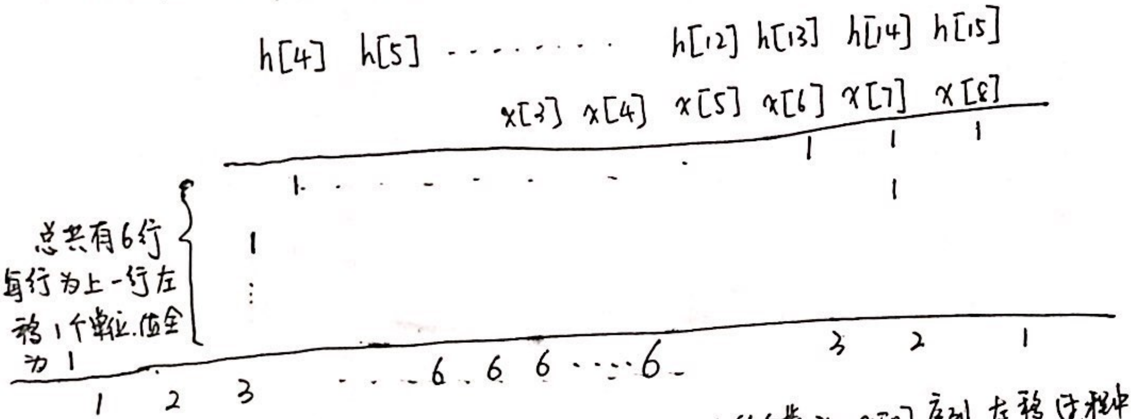
$$x_1[n-2]*h_1[n+2]=x_1[n]*h_1[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]*u[n]$$

利用卷积的积分性质，由于 $u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$ 上式 $=\sum_{k=-\infty}^{n}(\frac{1}{2})^k u[k]=2[1-(\frac{1}{2})^{n+1}]u[n]$

2.4. $x[n]=\begin{cases}1 & 3\le n\le 8\\ 0 & 其他\end{cases} \quad h[n]=\begin{cases}1 & 4\le n\le 15\\ 0 & 其他\end{cases}$

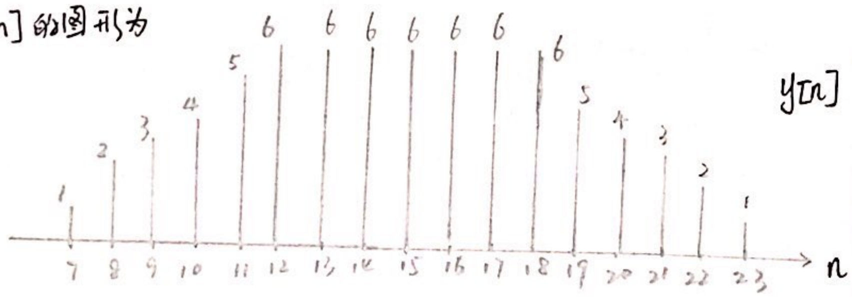
首先能确定 $y[n]$ 的取值范围 $7\le n\le 23$.

利用不进位的竖式乘法（见 MOOC 视频 2.2）



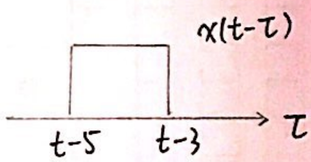
中间为若干个6，两侧均为 1 5 4 3 2 1. 6的个数为 $x[n]$ 序列左移过程中与 $h[n]$ 重叠次数即为7个.

所以 $y[n]$ 的图形为



2.11. $x(t)=u(t-3)-u(t-5) \quad h(t)=e^{-3t}u(t)$

(a). $h(\tau)=e^{-3\tau}u(\tau) \quad x(t-\tau)=u(t-\tau-3)-u(t-\tau-5)$



当 $t-3<0$ 即 $t<3$ 时 $y(t)=0$

当 $t-3\ge 0$ 且 $t-5<0$ 时 $y(t)=\int_0^{t-3}e^{-3\tau}d\tau=\frac{1-e^{-3(t-3)}}{3}$

当 $t-5\ge 0$ 即 $t\ge 5$ 时 $y(t)=\int_{t-5}^{t-3}e^{-3\tau}d\tau=\frac{e^{-3(t-5)}-e^{-3(t-3)}}{3}$

$$y(t)=\begin{cases}0 & t<3\\ \frac{1-e^{-3(t-3)}}{3} & 3\le t<5\\ \frac{e^{-3(t-5)}-e^{-3(t-3)}}{3} & t\ge 5\end{cases}$$

(b). $g(t)=\frac{dx(t)}{dt}*h(t)$ ~~$=x(t)*h'(t)$ $h(t)=u$~~ 由于 $x(t)=u(t-3)-u(t-5)$

$$\frac{dx(t)}{dt}=\delta(t-3)-\delta(t-5)$$

$$=[\delta(t-3)-\delta(t-5)]*h(t)$$

$$=h(t-3)-h(t-5)$$

$$=e^{-3(t-3)}u(t-3)-e^{-3(t-5)}u(t-5)$$

(c). $y'(t)=\begin{cases}0 & t<3\\ e^{-3(t-3)} & 3\le t<5\\ e^{-3(t-3)}-e^{-3(t-5)} & t\ge 5\end{cases}$ 观察 $y'(t)$ 和 $g(t)$ 可以发现 $y'(t)=g(t)$

2.14.

(a). $h_1(t)=e^{-(1-2j)t}u(t)$

$\int_{-\infty}^{\infty}|h_1(t)|dt \le \int_0^{+\infty}|e^{-t}|\cdot|e^{2jt}|dt=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1$ 所以系统稳定

(b). $h_2(t)=e^{-t}\cos(2t)u(t)$

$\int_{-\infty}^{\infty}|h_2(t)|d(t)=\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-t}\cos(2t)|u(t)dt<\int_0^{+\infty}|e^{-t}|\cdot|\cos(2t)|dt<\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1$ 稳定

2.15.

(a). $h_1[n]=n\cos(\frac{\pi}{4}n)u[n]$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h_1[n]|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n\cos(\frac{\pi}{4}n)|u[n]=\sum_{n=0}^{+\infty}|n\cdot\cos(\frac{\pi}{4}n)|=\infty$ 不稳定.

(b). $h_2[n]=3^n u[-n+10]$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h_2[n]|=\sum_{n=-\infty}^{10}3^n<\infty$ 稳定

2.19. (a). 由 $y[n]=\alpha y[n-1]+\beta w[n]$ 有 $w[n]=\frac{y[n]-\alpha y[n-1]}{\beta}$ ①.

则 $w[n-1]=\frac{1}{\beta}y[n-1]-\frac{\alpha}{\beta}y[n-2]$ ②

将①和②代入 S_1 有: $\frac{1}{\beta}y[n]-\frac{\alpha}{\beta}y[n-1]=\frac{1}{2\beta}y[n-1]-\frac{\alpha}{2\beta}y[n-2]+x[n]$

整理有. $\frac{1}{\beta}y[n]-(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{2\beta})y[n-1]+\frac{\alpha}{2\beta}y[n-2]=x[n]$

与. $y[n]+\frac{1}{8}y[n-2]-\frac{3}{4}y[n-1]=x[n]$ 对照，有

$$\begin{cases}\alpha=\frac{1}{4}\\ \beta=1\end{cases}$$

(b). S_1 系统: $w[n]=\frac{1}{2}w[n-1]+x[n]$ 可以推出 $h_1[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$

S_2 系统: $y[n]=\frac{1}{4}y[n-1]+w[n]$ 可以推出 $h_2[n]=(\frac{1}{4})^n u[n]$

所以 S_1 级联 S_2 有 $h[n]=h_1[n]*h_2[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]*(\frac{1}{4})^n u[n]=[2\cdot(\frac{1}{2})^n-(\frac{1}{4})^n]u[n]$

2.20. (a). $\int_{-\infty}^{\infty} u_0(t)\cos t\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\cos t\,dt = 1$

(b). $\int_0^5 \sin(2\pi t)\delta(t+3)\,dt = 0$ 由于 $\delta(t+3)$ 仅在 $t=-3$ 处有值，$t=-3$ 不在积分区间内.

(c). $\int_{-5}^{5} u_1(1-\tau)\cos(2\pi\tau)\,d\tau$ 由于 $u_1(1-\tau)$ 仅在 $\tau=1$ 处有值.

$\therefore$ 原式 $= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(1-\tau)\cos(2\pi\tau)\,d\tau$ 而 $u_1(t) * \cos(2\pi t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t-\tau)\cos(2\pi\tau)\,d\tau$

所以有 $= u_1(t) * \cos(2\pi t)\Big|_{t=1}$

$= \delta(t) * [\cos(2\pi t)]'\Big|_{t=1}$

$= [\cos(2\pi t)]'\Big|_{t=1} = 0$

2.24. 题：$h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$ 且 $h_2[n] = h_3[n]$

(a). 由于 $h[n] = h_1[n] * h_2[n] * h_3[n] = h_1[n] * (h_2[n] * h_3[n])$

而 $h_2[n] * h_3[n] = (\delta[n] + \delta[n-1]) * (\delta[n] + \delta[n-1]) = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$

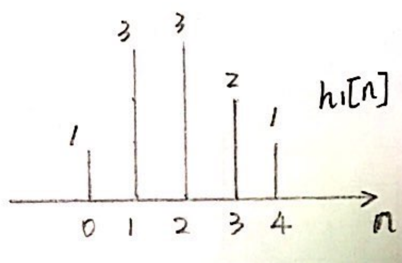
$= \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$ 为三点序列.

$h[n]$ 取值区间为 $0 \le n \le 6$.

可得 $h_1[n]$ 取值区间为 $0 \le n \le 4$. 利用不进位的竖式乘法

		$h_1[0]$	$h_1[1]$	$h_1[2]$	$h_1[3]$	$h_1[4]$	
				1	2	1	$\leftarrow h_2[n]*h_3[n]$
		$h_1[0]$	$h_1[1]$	$h_1[2]$	$h_1[3]$	$h_1[4]$	
	$2h_1[0]$	$2h_1[1]$	$2h_1[2]$	$2h_1[3]$	$2h_1[4]$		
$h_1[0]$	$h_1[1]$	$h_1[2]$	$h_1[3]$	$h_1[4]$			
$h_1[0]$	.	.	.	.	$h_1[3]+2h_1[4]$	$h_1[4]$	与 $h[n]$ 对照有：

$$\begin{cases} h_1[0] = h[0] = 1 \\ 2h_1[0] + h_1[1] = 5 \Rightarrow h_1[1] = 3 \\ h_1[0] + 2h_1[1] + h_1[2] = 10 \Rightarrow h_1[2] = 3 \\ h_1[1] + 2h_1[2] + h_1[3] = 11 \Rightarrow h_1[3] = 2 \\ h_1[2] + 2h_1[3] + h_1[4] = 8 \Rightarrow h_1[4] = 1 \end{cases}$$



(b). 对于输入 $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ 输出 $y[n] = (\delta[n] - \delta[n-1]) * h[n] = h[n] - h[n-1]$

2.28. (a). $h[n] = (\frac{1}{5})^n u[n]$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{5})^n < \infty$ 稳定.

$h[n]$ 在 $n<0$ 处 $=0$ $\therefore$ 是因果的.

(f) $h[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n] + (1.01)^n u[1-n]$ 当 $n=-1$ 时 $h[n] \neq 0$ $\therefore$ 非因果

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(-\frac{1}{2})^n u[n] + (1.01)^n u[1-n]| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(-\frac{1}{2})^n u[n]| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(1.01)^n u[1-n]|$

$= \sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^n + \sum_{n=-\infty}^{1}(1.01)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{1.01})^n < \infty$ ∴是稳定的

2.29. (d). $h(t) = e^{2t}u(-1-t)$

由于 $t<-1$ 时 $h(t)\neq 0$ ∴非因果

$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty}|e^{2t}u(-1-t)|dt = \int_{-\infty}^{-1}e^{2t}dt = \int_{1}^{+\infty}e^{-2t}dt < \infty$ ∴稳定

(f). $y(t) = t\cdot e^{-t}u(t)$ 因果

$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt = \int_{0}^{+\infty}t\cdot e^{-t}dt = -\int_{0}^{+\infty}t\,d(e^{-t}) = -t\cdot e^{-t}\Big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty}e^{-t}dt = 1 < \infty$ ∴稳定

2.46.

$x(t) \rightarrow y(t)$

$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow -3y(t) + e^{-2t}u(t)$

$x(t) = 2e^{-3t}u(t-1)$ 有 $\frac{dx(t)}{dt} = -6e^{-3t}u(t-1) + 2e^{-3t}\delta(t-1)$ 经过系统 $h(t)$ 有

$[-6e^{-3t}u(t-1) + 2e^{-3t}\delta(t-1)] * h(t)$

$= [-6e^{-3t}u(t-1)]*h(t) + [2e^{-3t}\delta(t-1)]*h(t) \longrightarrow$ ①

而已知 $2e^{-3t}u(t-1)*h(t) = y(t)$ 所以上式第一项为 $-3y(t)$

因而 ①式 $= -3y(t) + [2e^{-3t}\delta(t-1)]*h(t)$

$e^{-3t}\delta(t-1) = e^{-3}\delta(t-1)$

①式 $= -3y(t) + 2e^{-3}\delta(t-1)*h(t) = -3y(t) + 2e^{-3}h(t-1) \overset{已知}{=\!=} -3y(t) + e^{-2t}u(t)$

$\Rightarrow h(t-1) = \frac{1}{2}e^{3}\cdot e^{-2t}u(t)$

∴ $h(t) = \frac{1}{2}e^{3}\cdot e^{-2(t+1)}u(t+1)$