第一章作业及答案

1.3.

(a). $x_1(t)=e^{-2t}u(t)$

$$E_\infty=\int_0^{+\infty}e^{-4t}dt=\frac{1}{4}\qquad \therefore P_\infty=0$$

(d).

$x_1[n]=(\frac{1}{2})^n u(n)$

$$E_\infty=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|(\tfrac{1}{2})^n u(n)\right|^2=\sum_{n=0}^{+\infty}(\tfrac{1}{4})^n=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\qquad P_\infty=0$$

10.

$x(t)=2\cos(10t+1)-\sin(4t-1)$

令 $\cos(10t+1)$ 的基波周期为 T_1，$\sin(4t-1)$ 的基波周期为 T_2。则 $x(t)$ 的基波周期 T 为 T_1 与 T_2 的最小公倍数.

$T_1=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}\qquad T_2=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

有 $T=\pi$

11.

$x[n]=1+e^{j\frac{4\pi n}{7}}-e^{j\frac{2\pi n}{5}}$

与第10题类似 $T_1=\frac{2\pi}{\frac{4\pi}{7}}=\frac{7}{2}\qquad T_2=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{5}}=5$

则有 $T=35$

19. (a). $y(t)=t^2x(t-1)$

首先检查线性. 当输入 $x_1(t)$ 时 有 $y_1(t)=t^2x_1(t-1)$

当输入 $x_2(t)$ 时 有 $y_2(t)=t^2x_2(t-1)$

当输入 $\underbrace{a x_1(t)+b x_2(t)}_{x_3(t)}$ 时 有 $y_3(t)=t^2[a x_1(t-1)+b x_2(t-1)]$

$=at^2x_1(t-1)+bt^2x_2(t-1)$

$y_3(t)=a y_1(t)+b y_2(t)$ 因此 线性成立.

检查时不变. 当输入 $x_1(t)$ 时 有 $y_1(t)=t^2x_1(t)$

当输入 $x_2(t)$ 时 有 $y_2(t)=t^2x_2(t)$

当令 $x_2(t)=x_1(t-t_0)$ 时 有 $y_2(t)=t^2x_1(t-t_0)$

同时 $y_1(t-t_0)=(t-t_0)^2x_1(t-t_0)$

$\Big\}$ 可以看出 $y_1(t-t_0)\neq y_2(t)$

所以 时不变性不成立.

19.(c). $y[n]=x[n+1]-x[n-1]$

首先检查线性. 当输入 $x_1[n]$ 时，有 $y_1[n]=x_1[n+1]-x_1[n-1]$

当输入 $x_2[n]$ 时，有 $y_2[n]=x_2[n+1]-x_2[n-1]$

当输入 $x_3[n]=a\,x_1[n]+b\,x_2[n]$ 时，有

$$y_3[n]=a\,x_1[n+1]+b\,x_2[n+1]-a\,x_1[n+1]-b\,x_2[n+1]$$

$$=a\,y_1[n]+b\,y_2[n]$$

因此 线性成立.

检查时不变 当输入 $x_1[n]$ 时，有 $y_1[n]=x_1[n+1]-x_1[n-1]$

当输入 $x_2[n]$ 时，有 $y_2[n]=x_2[n+1]-x_2[n-1]$

令 $x_2[n]=x_1[n-n_0]$ 有 $y_2[n]=x_1[n-n_0+1]-x_1[n-n_0-1]$

有 $y_2[n]=y_1[n-n_0]$

因此 时不变性成立.

20、(a). $x_1(t)=\cos(2t)=\dfrac{e^{j2t}+e^{-j2t}}{2}=\frac{1}{2}e^{j2t}+\frac{1}{2}e^{-j2t}$

根据线性. 有 $y_1(t)=\frac{1}{2}e^{j3t}+\frac{1}{2}e^{-j3t}=\cos(3t)$

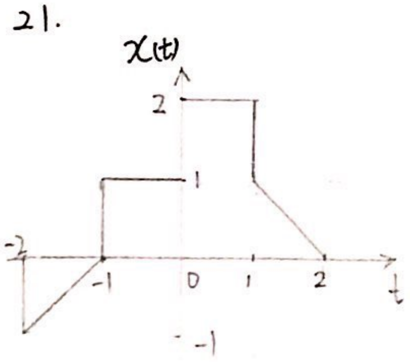
(b). $x_2(t)=\cos[2(t-\frac{1}{2})]=\dfrac{e^{j2(t-\frac{1}{2})}+e^{-j2(t-\frac{1}{2})}}{2}$

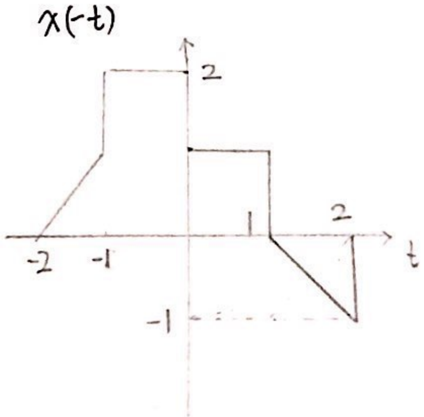
$$=\frac{1}{2}\cdot e^{-j\frac{1}{2}\times2}\cdot e^{j2t}+\frac{1}{2}e^{j\frac{1}{2}\times2}\cdot e^{-j2t}$$

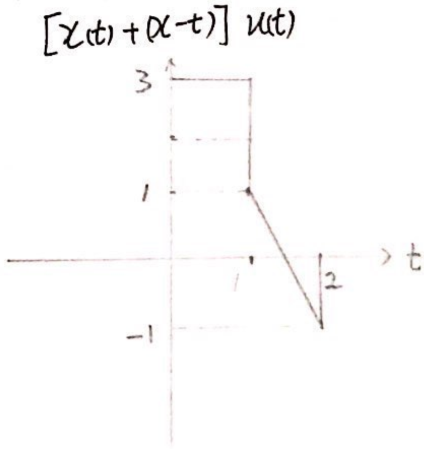
由线性. 有 $y_2(t)=\frac{1}{2}e^{-j\frac{1}{2}\times2}e^{j3t}+\frac{1}{2}e^{j\frac{1}{2}\times2}e^{-j3t}=\frac{1}{2}e^{-j}e^{j3t}+\frac{1}{2}e^{j}e^{-j3t}$

$$=\cos(3t-1)$$

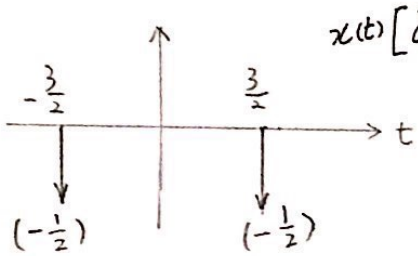
21.



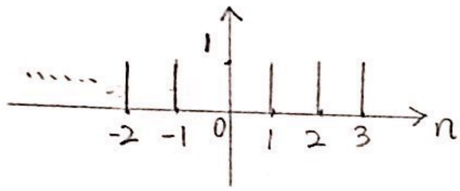




21.(f) $x(t)[\delta(t+\frac{3}{2})-\delta(t-\frac{3}{2})]$

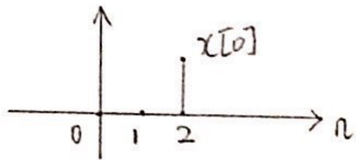


~~23.~~ 22.(e) 由于 $u[3-n]$ 的图形为



因此 $x[n]u[3-n]=x[n]$

(f) $x[n-2]\delta[n-2]=x[0]\delta[n-2]$



26.

(b) $x[n]=\cos(\frac{n}{8}-\pi)$

由于 $\frac{2\pi}{\frac{1}{8}}=16\pi$ ∴ $x[n]$为非周期

(e) $x[n]=2\cos(\frac{\pi}{4}n)+\sin(\frac{\pi}{8}n)-2\cos(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{6})$

令 $\cos(\frac{\pi}{4}n)$ 的周期为 T_1，$\sin(\frac{\pi}{8}n)$ 的周期为 T_2，$\cos(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{6})$ 的周期为 T_3

$T_1=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$ $T_2=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}}=16$ $T_3=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

取 T_1 T_2 T_3 的最小公倍数即为 $x[n]$ 的基波周期 $T=16$

27.

(b). $y(t)=[\cos(3t)]x(t)$

(1).无记忆

(2).因果

(3).稳定. 假设 $x(t)$ 有限 $|y(t)|=|\cos(3t)||x(t)|\le|x(t)|$ 因此 $y(t)$ 有限.

(4).判断线性: 令 $x_1(t)$ 输入时有 $y_1(t)=[\cos(3t)]x_1(t)$

令输入 $x_2(t)$ 时有 $y_2(t)=[\cos(3t)]x_2(t)$

输入 $x_3(t)=a x_1(t)+b x_2(t)$ 时 $y_3(t)=[\cos(3t)][a x_1(t)+b x_2(t)]$

$=a\cos(3t)\cdot x_1(t)+b\cos(3t)x_2(t)$

$=y_1(t)+y_2(t)$

因此线性成立.

(5). 判断时不变性. 令输入 $x_1(t)$ 时 有 $y_1(t)=[\cos(3t)]\,x_1(t)$

令输入 $x_2(t)$ 时 有 $y_2(t)=[\cos(3t)]\,x_2(t)$

令 $x_2(t)=x_1(t-t_0)$ 有 $y_2(t)=[\cos(3t)]\,x_1(t-t_0)$

而 $y_1(t-t_0)=[\cos 3(t-t_0)]\,x_1(t-t_0)$

$y_1(t-t_0)\neq y_2(t)$ 因此，时不变性不成立

(f). $y(t)=x(\frac{t}{3})$

(1). 记忆 例如 $t=3$ 时刻输出取决于 $x(1)$ 即 时刻1时的输入.

(2). 非因果 例如 $t=-3$ 时刻输出取决于未来时刻 $t=-1$ 时刻的输入.

(3). 稳定

(4). 判断线性，与上题类似，线性成立.

(5). 判断时不变性. 令输入 $x_1(t)$ 时 有 $y_1(t)=x_1(\frac{t}{3})$

令输入 $x_2(t)$ 时 有 $y_2(t)=x_2(\frac{t}{3})$

令 $x_2(t)=x_1(t-t_0)$ 时 $\cancel{y_2(t)=x_1(\frac{t}{3}-\frac{t_0}{3})}$ $y_2(t)=x_1(\frac{t}{3}-t_0)$

而 $y_1(t-t_0)=x_1(\frac{t}{3}-\frac{t_0}{3})$ 即 $y_2(t)\neq y_1(t-t_0)$

时不变不成立.

28. (e). $y[n]=\begin{cases} x[n] & n\geq 1\\ 0 & n=0\\ x[n+1] & n\leq -1\end{cases}$

(1). 记忆 (2). 非因果 (3) 稳定 (4). 线性

(5). 判断时不变. 设输入 $x_1[n]$ 时 有 $y_1[n]=\begin{cases} x_1[n] & n\geq 1\\ 0 & n=0\\ x_1[n+1] & n\leq -1\end{cases}$

设输入 $x_2[n]$ 时 有 $y_2[n]=\begin{cases} x_2[n] & n\geq 1\\ 0 & n=0\\ x_2[n+1] & n\leq -1\end{cases}$

令 $x_2[n]=x_1[n-n_0]$ 时

有 $y_2[n]=\begin{cases} x_1[n-n_0] & n\geq 1\\ 0 & n=0\\ x_1[n-n_0+1] & n\leq -1\end{cases}$

而 $y_1[n-n_0]=\begin{cases} x_1[n-n_0] & n-n_0\geq 1\\ 0 & n-n_0=0\\ x_1[n-n_0+1] & n-n_0\leq -1\end{cases}$

所以 $y_2[n]\neq y_1[n-n_0]$ 时不变性不成立

(8). $y[n]=x[4n+1]$

(1). 记忆 (2). 非因果 (3) 稳定 (4). 线性.

(5). 判断时不变性. 设输入 $x_1[n]$ 时 有 $y_1[n]=x_1[4n+1]$

设输入 $x_2[n]$ 时有 $y_2[n]=x_2[4n+1]$

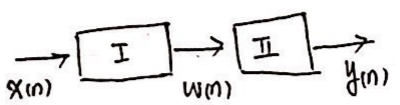
当 $x_2[n]=x_1[n-n_0]$ 时, 有 $y_2[n]=x_1[4n+1-n_0]$

而 $y_1[n-n_0]=x_1[4(n-n_0)+1]=x_1[4n+1-4n_0]$

$y_1[n-n_0]\neq y_2[n]$ 因此 时不变性 不成立.

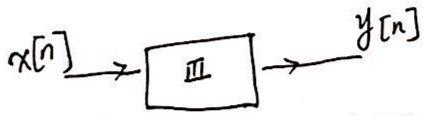
42.

(a) 假定系统I与系统II级联.



根据线性, $a x_1[n]+b x_2[n] \longrightarrow \boxed{\mathrm{I}} \longrightarrow a w_1[n]+b w_2[n] \longrightarrow \boxed{\mathrm{II}} \longrightarrow a y_1[n]+b y_2[n]$

若将两个系统级联看作一个系统 有



有 $a x_1[n]+b x_2[n] \longrightarrow a y_1[n]+b y_2[n]$ 成立. 即系统III 线性成立.

~~(b)~~. 根据时不变性 若 $x[n]$ 输入 有输出 $w(n)$.

则 $x[n-n_0]\longrightarrow w[n-n_0]$ 系统II同时也具有时不变性

则 $w[n-n_0]\longrightarrow y[n-n_0]$

因此系统I与系统II级联后的系统III是时不变的.

(b). 假如 $w[n]=x[n]+3$

$y[n]=w[n]-3$

明显 系统I 与系统II 均不是线性.

然而 级联后的系统 $y[n]=x[n]$ 为线性系统.

因此 该说法是错的.

(c).

$$x[n] \to \boxed{\mathrm{I}} \xrightarrow{w[n]} \boxed{\mathrm{II}} \xrightarrow{z[n]} \boxed{\mathrm{III}} \to y[n]$$

假定系统 I 的输出为 $w[n]$，系统II 的输出为 $z[n]$

有 $$w[n]=\begin{cases} x[n/2] & n\text{为偶数} \\ 0 & n\text{为奇数} \end{cases}$$

~~$y[n]=$~~ $$z[n]=w[n]+\frac{1}{2}w[n-1]+\frac{1}{4}w[n-2]$$

$$y[n]=z[2n]$$

因此有

$y[n]=z[2n]$ 将 $z[n]$ 代入左式有

$=w[2n]+\frac{1}{2}w[2n-1]+\frac{1}{4}w[2n-2]$ 将 $w[n]=\begin{cases} x[n/2] & n\text{为偶数} \\ 0 & n\text{为奇数}. \end{cases}$ 代入左式有

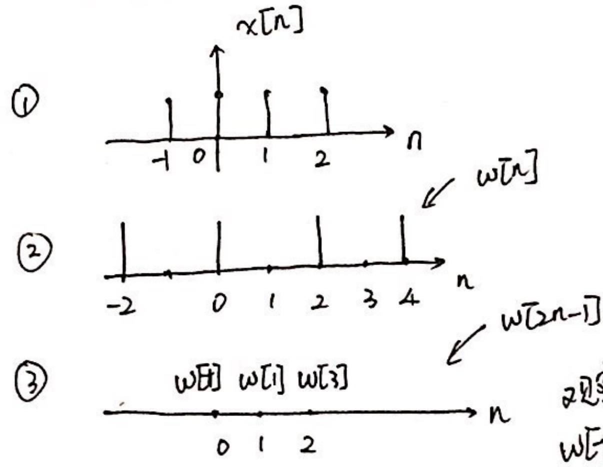
$=x[n]+\frac{1}{4}x[n-1]$

补充说明：以 $w[2n-1]$ 为例. 由 $w[n]=\begin{cases} x[\frac{n}{2}] & n\text{为偶数} \\ 0 & n\text{为奇数}. \end{cases}$

利用变量的变换知识. 可知 $w[2n-1]=\begin{cases} x[n-\frac{1}{2}] & n\text{为偶} \\ 0 & n\text{为奇}. \end{cases}$

注意此时 $x[n-\frac{1}{2}]$ 是取不到数据的.

画图说明. 假如 $x[n]$ 为



观察上图可知
$w[-1]=w[1]=w[3]=0$

因此 $w[2n-1]$ 为零序列.