第四章 作业答案

4.2. (a). $\delta(t+1)+\delta(t-1)$

$\delta(t+1) \leftrightarrow e^{j\omega 1}$ $\quad \delta(t-1) \leftrightarrow e^{-j\omega \cdot 1}$

$\therefore \delta(t+1)+\delta(t-1) \leftrightarrow e^{j\omega}+e^{-j\omega}=2\cos\omega$

(b) $\frac{d}{dt}[u(-2-t)+u(t-2)] = \delta(t-2)-\delta(t+2) \leftrightarrow e^{-2j\omega}-e^{j\omega 2} = -2j\sin(2\omega)$

4.6 (a). $x_1(t)=x(1-t)+x(-1-t)$

由于 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ 有 ① $x(t-1) \leftrightarrow X(j\omega)e^{-j\omega}$ ② $x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$

$x(-t-1) \leftrightarrow X(-j\omega)e^{j\omega}$ $\quad x[-(t-1)] \leftrightarrow X(-j\omega)e^{-j\omega}$

所以 $x_1(t) \leftrightarrow X(-j\omega)[e^{j\omega}+e^{-j\omega}]=2X(-j\omega)\cos\omega$

(b). $x_2(t)=x(3t-6)$

$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$

$x(3t) \leftrightarrow \frac{1}{3}X(j\frac{\omega}{3})$

$x[3(t-2)] \leftrightarrow \frac{1}{3}X(j\frac{\omega}{3})e^{-j\omega 2} = \frac{1}{3}X(j\frac{\omega}{3})e^{-j2\omega}$

(c). $x_3(t)=\frac{d}{dt^2}[x(t-1)]$

$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$

$x(t-1) \leftrightarrow X(j\omega)e^{-j\omega}$

$x_3(t) \leftrightarrow (j\omega)^2 X(j\omega)e^{-j\omega} = -\omega^2 X(j\omega)e^{-j\omega}$

4.7. (b). $X_2(j\omega)=\cos(2\omega)\sin(\frac{\omega}{2})$ $\quad$ 对于 $X_2(j\omega)$

若 $x(t)$ 为实信号 即 $x(t)=x^*(t)$ 有 $X(j\omega)=X^*(-j\omega)$ 不满足

虚 $x(t)=-x^*(t)$ 有 $X(j\omega)=-X^*(-j\omega)$ 满足

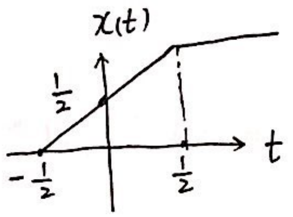
偶 $x(t)=x(-t)$ 有 $X(j\omega)=X(-j\omega)$ 不满足

奇 $x(t)=-x(-t)$ 有 $X(j\omega)=-X(-j\omega)$ 满足

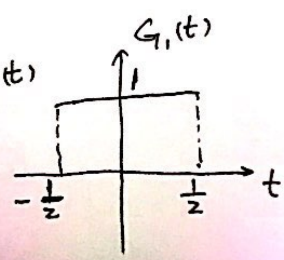
所以 $x_2(t)$ 是奇虚信号

4.8.

(a). $x(t)=\begin{cases} 0 & t<-\frac{1}{2} \\ t+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\le t\le\frac{1}{2} \\ 1 & t>\frac{1}{2} \end{cases}$



$x(t)$ 可以描述为门信号的积分 即 $x(t)=\int_{-\infty}^{t} G_1(t)dt$ 其中 $G_1(t)$



扫描全能王 创建

$G_1(t) \longleftrightarrow Sa(\frac{\omega}{2})$

根据 CFT 的积分性质有

$$X(j\omega) \longleftrightarrow \frac{Sa(\frac{\omega}{2})}{j\omega} + \pi\, Sa(0)\delta(\omega) = \frac{Sa(\frac{\omega}{2})}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

(b). $g(t) = x(t) - \frac{1}{2}$

$$G(j\omega) = X(j\omega) - \frac{1}{2}\cdot 2\pi\delta(\omega) = \frac{Sa(\frac{\omega}{2})}{j\omega}$$

4.10. (a). $x(t) = t\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2$

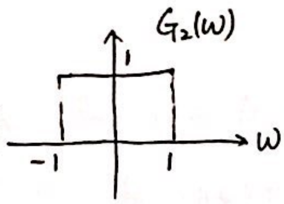
利用 CFT 的频域微分性质 $-jt f(t) \longleftrightarrow \frac{dF(j\omega)}{d\omega} \Rightarrow t f(t) \longleftrightarrow j\frac{dF(j\omega)}{d\omega}$

和 $x(t)$ 相比较可令 $f(t) = \left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2 = f_1(t)\cdot f_2(t)$ 其中 $f_1(t) = f_2(t) = \frac{\sin t}{\pi t}$

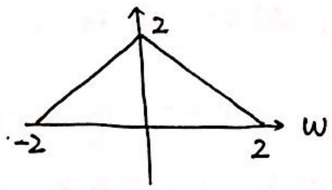
利用 CFT 的时域乘积性质,有

$$F(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_1(j\omega)$$

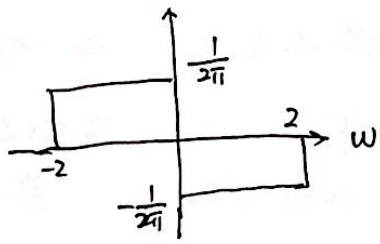
其中 $F_1(j\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right) = G_2(\omega)$ 如右图



因此 $F_1(j\omega) * F_1(j\omega)$ 为



所以 $\frac{d[F(j\omega)]}{d\omega}$ 为:



即 $X(j\omega) = \begin{cases} \frac{j}{2\pi} & -2 \le \omega < 0 \\ \frac{-j}{2\pi} & 0 \le \omega < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(b). $A = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^4 dt$

由 parsevel 定理有 $A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[2\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\right] = \frac{1}{2\pi^3}$

4.14. 由条件 2. $\mathcal{F}^{-1}\{(1+j\omega)X(j\omega)\} = Ae^{-2t}u(t)$

有 $(1+j\omega)X(j\omega) = \frac{A}{j\omega+2} \Rightarrow X(j\omega) = \frac{A}{(j\omega+1)(j\omega+2)}$

扫描全能王 创建

$$X(j\omega)=A\left[\frac{1}{j\omega+1}-\frac{1}{j\omega+2}\right]$$

有 $x(t)=Ae^{-t}u(t)-Ae^{-2t}u(t)$

由条件3. $\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=2\pi$

可得 $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=1$ 将 $x(t)$ 代入左式

有 $\int_{0}^{+\infty}A^2[e^{-t}-e^{-2t}]^2dt=1$

$\int_{0}^{+\infty}A^2[e^{-2t}+e^{-4t}-2e^{-3t}]dt=1$

$A=2\sqrt{3}$ （舍弃 $A=-2\sqrt{2}$ 因为已知 $x(t)$ 为非负）

最后为 $x(t)=2\sqrt{3}\,(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

4.17. (a) 错误

说明：若 $x(t)$ 为纯虚奇 则有 $x(t)=-x^*(t)$ 和 $x(t)=-x(-t)$

对应有 $X(j\omega)=-X^*(-j\omega)$ 和 $X(j\omega)=-X(-j\omega)$

进一步可得：$X(j\omega)=X^*(j\omega)$ 即 $X(j\omega)$为偶的

(b) 已知 $X_1(j\omega)$ 为奇 即有 $X_1(j\omega)=-X_1(-j\omega)$

$X_2(j\omega)$为偶 即有 $X_2(j\omega)=X_2(-j\omega)$

则 $X_1(j\omega)*X_2(j\omega)\longleftrightarrow 2\pi\,x_1(t)\cdot x_2(t)$ 即 $2\pi x_1(t)\cdot x_2(t)\longleftrightarrow -X_1(-j\omega)*X_2(-j\omega)$

~~考察 $2\pi\,x_1(-t)\cdot x_2(-t)\longleftrightarrow X_1(-j\omega)*X_2(-j\omega)$~~

~~对比两个式子~~ 发现有 $X_1(j\omega)*X_2(j\omega)=-X_1(-j\omega)*X_2(-j\omega)$

即 该结果为奇的

4.19. $Y(j\omega)=\frac{1}{j\omega+3}-\frac{1}{j\omega+4}=\frac{1}{(j\omega+3)(j\omega+4)}$

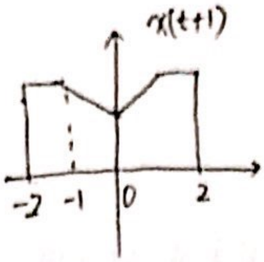
$H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+3}$

则 $X(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)}=\frac{1}{j\omega+4}$

$\therefore\ x(t)=e^{-4t}u(t)$

扫描全能王 创建

4.25. (a). 对 $x(t)$ 向左平移 1 个单位, 有



可见 $x(t+1)$ 为实偶函数.

其傅里叶变换为实偶的, 所以相位 $\varphi(\omega)=0$

对于令 $\mathscr{F}[x(t+1)] = X_1(j\omega)$, 有 $x_1(t) = x(t+1)$, 则 $x(t) = x_1(t-1)$

所以: $X(j\omega) = X_1(j\omega)e^{-j\omega}$ $\quad X_1(j\omega)$ 为实偶

所以 $X(j\omega)$ 的相位 $\varphi(\omega) = -\omega$

(b). $X(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \Big|_{\omega=0}$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 7$

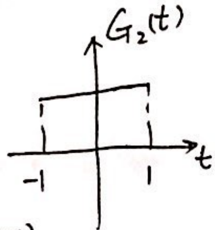
(c). $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{+j\omega t}d\omega \Big|_{t=0}$

$= 2\pi x(0) = 4\pi$

(d). $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\cdot\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left[X(j\omega)\cdot\frac{2\sin\omega}{\omega}\right]\cdot e^{j2\omega}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j2\omega}d\omega$

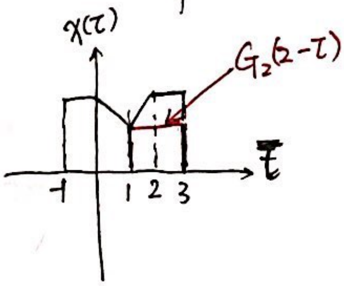
$= 2\pi f(t)\Big|_{t=2}$

其中 $f(t)$ 为 $F(j\omega)$ 的傅里叶变换. $F(j\omega) = X(j\omega)\cdot\frac{2\sin\omega}{\omega}$



则 $f(t) = x(t) * \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{2\sin\omega}{\omega}\right)$ $\qquad \frac{2\sin\omega}{\omega} = 2Sa(\omega) \longleftrightarrow$

则 $x(t) * G_2(t)\Big|_{t=2} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)G_2(t-\tau)d\tau \Big|_{t=2}$



$= \int_1^2 \tau\, d\tau + \int_2^3 2\, d\tau$

$= \frac{7}{2}$

所以 原式 $= 2\pi\cdot\frac{7}{2} = 7\pi$

(e) $\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = \frac{76}{3}\pi$

(f). $Re[X(j\omega)] = \frac{X(j\omega)+X^*(j\omega)}{2}$ $\qquad$ 由于令 $\int_{-\infty}^{\infty}X^*(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = x_1(t)\cdot 2\pi$

$\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega = x_1^*(t)\cdot 2\pi$

$\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = x_1^*(-t)\cdot 2\pi$

扫描全能王 创建

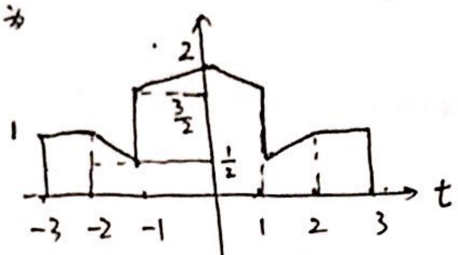
而 $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = 2\pi x(t)$

即有 $x(t) = x_1^*(-t)$ 即 $x_1(t) = x^*(-t)$

$\therefore \mathcal{F}^{-1}[Re\{X(j\omega)\}] = \dfrac{x(t) + x^*(-t)}{2}$ 由于 $x(t)$ 为实信号 有

$= \dfrac{x(t) + x(-t)}{2}$

图为



4.28. (a). $p(t) = \sum_n a_n e^{jn\omega_0 t} \longleftrightarrow \sum_n a_n 2\pi \delta(\omega - n\omega_0)$

$y(t) = x(t) p(t)$

则 $Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \sum_n a_n X[j(\omega - n\omega_0)]$

4.33.

(a). 对 LCCDE 方程两侧求 CFT 有:

$$(j\omega)^2 Y(j\omega) + 6j\omega Y(j\omega) + 8Y(j\omega) = 2X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{2}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 8} = \frac{2}{(j\omega+2)(j\omega+4)} = \frac{1}{j\omega+2} - \frac{1}{j\omega+4}$$

$h(t) = [e^{-2t} - e^{-4t}] u(t)$

(b) $x(t) = te^{-2t}u(t)$ 则 $X(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega+2)^2}$ (见教材 4.2表,尾页给出了证明)

则此时 $Y(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega+2)^2} \cdot \dfrac{2}{(j\omega+2)(j\omega+4)} = \dfrac{1}{(j\omega+2)^2}\left[\dfrac{1}{j\omega+2} - \dfrac{1}{j\omega+4}\right]$

$$= \frac{1}{(j\omega+2)^3} - \frac{1}{(j\omega+2)^2(j\omega+4)} = \frac{1}{(j\omega+2)^3} - \frac{1}{2}\frac{(j\omega+4)-(j\omega+2)}{(j\omega+2)^2(j\omega+4)}$$

$$= \frac{1}{(j\omega+2)^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(j\omega+2)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(j\omega+2)(j\omega+4)}$$

$$= \frac{1}{(j\omega+2)^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{(j\omega+2)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{j\omega+2} - \frac{1}{4}\frac{1}{j\omega+4}$$

$y(t) = \frac{1}{2}t^2 e^{-2t}u(t) - \frac{1}{2}te^{-2t}u(t) + \frac{1}{4}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{4}e^{-4t}u(t)$

扫描全能王 创建

(c). $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\sqrt{2}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=2\frac{d^2x(t)}{dt^2}-2x(t)$ 对两侧求CFT，有:

$$\left((j\omega)^2+\sqrt{2}j\omega+1\right)Y(j\omega)=\left[2(j\omega)^2-2\right]X(j\omega)$$

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{2\left[(j\omega)^2-1\right]}{(j\omega)^2+\sqrt{2}j\omega+1}$$

$$=2+\frac{-\sqrt{2}-2\sqrt{2}j}{j\omega-\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}j}{2}}+\frac{-\sqrt{2}+2\sqrt{2}j}{j\omega-\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}j}{2}}$$

~~$\therefore h(t)=2\delta(t)-\sqrt{2}(1+2j)$~~

$$\therefore h(t)=2\delta(t)-\sqrt{2}(1+2j)e^{-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}j}{2}t}u(t)-\sqrt{2}(1-2j)e^{-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}j}{2}t}u(t)$$

4.34.

(a). $H(j\omega)=\frac{j\omega+4}{6-\omega^2+5j\omega}=\frac{j\omega+4}{(j\omega)^2+5j\omega+6}$

对应的LCCDE为:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+4x(t)$$

(b). $H(j\omega)=\frac{j\omega+4}{(j\omega)^2+5j\omega+6}=\frac{j\omega+4}{(j\omega+2)(j\omega+3)}=\frac{j\omega+2+2}{(j\omega+2)(j\omega+3)}$

$$=\frac{1}{j\omega+3}+2\cdot\left[\frac{1}{j\omega+2}-\frac{1}{j\omega+3}\right]=\frac{2}{j\omega+2}-\frac{1}{j\omega+3}$$

$$\therefore h(t)=2e^{-2t}u(t)-e^{-3t}u(t)$$

(c). $x(t)=e^{-4t}u(t)-te^{-4t}u(t)$

$$X(j\omega)=\frac{1}{j\omega+4}-\frac{1}{(j\omega+4)^2}=\frac{j\omega+3}{(j\omega+4)^2}$$

$$Y(j\omega)=X(j\omega)\cdot H(j\omega)=\frac{j\omega+3}{(j\omega+4)^2}\cdot\frac{j\omega+4}{(j\omega+2)(j\omega+3)}=\frac{1}{(j\omega+2)(j\omega+4)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{j\omega+2}-\frac{1}{j\omega+4}\right]$$

$$\therefore h(t)=\left[\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-4t}\right]u(t)$$

扫描全能王 创建

4.36. (a). $y(t)=[2e^{-t}-2e^{-4t}]u(t)$

$$Y(j\omega)=\frac{2}{j\omega+1}-\frac{2}{j\omega+4}=\frac{6}{(j\omega+1)(j\omega+4)}$$

$$x(t)=[e^{-t}+e^{-3t}]u(t)$$

$$X(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}+\frac{1}{j\omega+3}=\frac{2j\omega+4}{(j\omega+1)(j\omega+3)}$$

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{3(j\omega+3)}{(j\omega+2)(j\omega+4)}$$

$$=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{j\omega+2}+\frac{1}{j\omega+4}\right]$$

(b) $\because$ $h(t)=\frac{3}{2}[e^{-2t}+e^{-4t}]u(t)$

(c). 对应的LCCDE方程为：

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=3\frac{dx(t)}{dt}+9x(t)$$

附教材 4.2表 $x(t)=\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{(j\omega+a)^n}$

证明：对于 $n=1$时. $e^{-at}u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{j\omega+a}$

对于 $n=2$时 $[t\cdot e^{-at}u(t)]'=e^{-at}u(t)-ate^{-at}u(t)+\underbrace{te^{-at}\delta(t)}_{=0}$

对上式求CFT有: $(j\omega)X(j\omega)=\frac{1}{j\omega+a}-aX(j\omega)$

有 $X(j\omega)=\frac{1}{(j\omega+2)^2}$

对于 $n=3$时 $[t^2e^{-at}u(t)]'=2te^{-at}u(t)-at^2e^{-at}u(t)+\underbrace{t^2e^{-at}\delta(t)}_{=0}$

因此 有: $(j\omega)X_1(j\omega)=\frac{2}{(j\omega+a)^2}-aX_1(j\omega)$

此处 $X(j\omega)\longleftrightarrow t^2e^{-at}u(t)$

$X_1(j\omega)=\frac{2}{(j\omega+a)^3}$

原信号为 $\frac{t^2}{2}e^{-at}u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{(j\omega+a)^3}$

⋮

以类推，得证.

扫描全能王 创建