

深圳大学期末考试试卷参考解答及评分标准

命题人(签字) 审题人(签字) 年 月 日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	基本题 总分	附加题
得分												
评卷人												

第一部分 基本题

一、选择题 (共 6 小题, 每小题 5 分, 满分 30 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一个符合题目要求的, 把所选项前的字母填在题后的括号内) (每道选择题选对满分, 选错 0 分)

1. 如果事件 A 与事件 B 满足  $A \cap B = \emptyset$ , 则 ( )
- (A) 事件 A 与事件 B 互不相容 (B) 事件 A 与事件 B 相互独立
- (C) 事件 A 与事件 B 为相容事件 (D) 事件 A 与事件 B 互为对立事件

答: 选 A, 由互不相容事件的定义可知。

2. 假设事件 A 与事件 B 互为对立, 则 ( )
- (A)  $P(A)P(B)=P(A \cap B)$  (B)  $A \cup \bar{B} = \emptyset$
- (C)  $P(A)+P(B)>1$  (D)  $P(B)=1-P(A)$

答: 选 D, 由加法定理得。

3. 已知随机变量  $X_1, X_2, X_3$  相互独立, 且都服从标准正态分布, 令  $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$ , 则

- $(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + (X_3 - \bar{X})^2$  服从 ( )
- (A) 自由度为 3 的  $\chi^2$  分布 (B) 自由度为 2 的  $\chi^2$  分布
- (C) 自由度为 3 的 F 分布 (D) 自由度为 2 的 F 分布

答: 选 B, 由 n 个相互独立服从标准正态分布的样本  $X_1, \dots, X_n$  满足  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$  可得。

4. 已知随机变量  $X \sim N(2, 4), Y = 2X - 4$ , 则 ( )
- (A)  $Y \sim N(2, 8)$  (B)  $Y \sim N(2, 16)$  (C)  $Y \sim N(0, 8)$  (D)  $Y \sim N(0, 16)$

答: 选 D, 因  $E(Y) = 2E(X) - 4 = 0, D(Y) = D(2X) = 4D(X) = 16$ 。

5. 样本  $(X_1, X_2, X_3)$  取自总体 X,  $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$ , 则有 ( )
- (A)  $X_1 + X_2 - X_3$  是  $\mu$  的无偏估计 (B)  $\frac{X_1 + X_2 + X_3}{2}$  是  $\mu$  的无偏估计
- (C)  $X_2^2$  是  $\sigma^2$  的无偏估计 (D)  $\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}\right)^2$  是  $\sigma^2$  的无偏估计

答: 选 A, 因  $E(X_1 + X_2 - X_3) = E(X_1) = E(X)$ 。

6. 随机变量 X 服从在区间 (0,1) 上的均匀分布,  $Y = 2X + 1$  则 ( )
- (A) Y 服从在区间 (0,2) 上的均匀分布 (B) Y 服从在区间 (1,2) 上的均匀分布
- (C) Y 服从在区间 (1,3) 上的均匀分布 (D) Y 服从在区间 (2,3) 上的均匀分布

答: 选 C, 由均匀分布的性质可知。

二、填空题 (共 6 小题, 每小题 5 分, 满分 30 分。把答案填在题中横线上)

1. 两封信随机地投入四个邮筒, 则前两个邮筒内没有信的概率是 \_\_\_\_\_

答: 填 0.25 或  $\frac{1}{4}$ , 根据古典概型, 所求概率  $= \frac{2^2}{4^2} = \frac{1}{4}$ 。



2. 一批产品中，一、二、三等品率分别为 0.8、0.16、0.04，若规定一、二等品为合格品，则产品的合格率为 \_\_\_\_\_

答：填 0.96，因一、二等品的互不相容性，合格率是一等品率与二等品率之和。

3. 电灯泡使用寿命在 1000 小时以上的概率为 0.2，则 3 个灯泡在使用 1000 小时后，最多只有一个坏了的概率为 \_\_\_\_\_

答：填 0.104，因为 3 个灯泡使用 1000 小时后坏的数目  $X \sim b(3, 0.2)$ ，由二项分布公式算得  $P\{X \leq 1\} = 0.104$ 。

4. 已知随机变量  $X \sim N(2, 4)$ ， $Y = 2X + 3$ ，则  $P\{Y > 7\} =$  \_\_\_\_\_

答：填 0.5，因为  $E(Y) = E(2X + 3) = 2E(X) + 3 = 7$ ，则正态分布大于均值的概率总为 0.5。

5. 假设  $X \sim b(10, 0.4)$  (二项分布)， $Y \sim N(1, 6)$ ， $X$  与  $Y$  相互独立，则  $D(X + Y) =$  \_\_\_\_\_

答：填 8.4，因  $D(X) = 10 \times 0.4 \times 0.6 = 2.4$ ，由  $X$  与  $Y$  相互独立知  $D(X + Y) = D(X) + D(Y) = 2.4 + 6 = 8.4$ 。

6. 已知随机变量  $X$  的概率密度函数为  $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$  则  $P\{X < 0.5\} =$  \_\_\_\_\_

答：填 0.25，因  $\int_0^{0.5} f(x) dx = 0.25$ 。

三、一个机床有  $1/3$  的时间加工零件 A，其余时间加工零件 B，加工零件 A 时，停机的概率是 0.3，加工零件 B 时，停机的概率是 0.4，求这个机床停机的概率。（10 分）

解：设事件 C 为“加零件 A”，D 为“机床停机”，则根据全概率公式有

$$\begin{aligned} P(D) &= P(C)P(D|C) + P(\bar{C})P(D|\bar{C}) \\ &= \frac{1}{3} \times 0.3 + \frac{2}{3} \times 0.4 = 0.367 \end{aligned}$$

四、已知 100 个产品中有 10 个次品，求任意取出的 5 个产品中次品数的期望值。（10 分）

解：定义随机变量  $X_i, i=1, 2, 3, 4, 5$ ，如果取出的第  $i$  个产品为次品，则  $X_i$  取 1，否则取 0，因此  $X_i$  服从 0-1 分布， $P\{X_i=1\} = 10/100 = 0.1$ ，则  $E(X_i) = 0.1, i=1, 2, 3, 4, 5$ 。任意取出 5 个产品中的次品数  $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ ，因此

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) = 5 \times 0.1 = 0.5$$

五、两个随机变量  $X$  与  $Y$ ，已知  $D(X) = 25, D(Y) = 36, \rho_{XY} = 0.4$ ，计算  $D(X + Y)$  与  $D(X - Y)$ 。（10 分）

解：由题意得  $\text{cov}(X, Y) = 5 \times 6 \times 0.4 = 12$

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{cov}(X, Y) = 25 + 36 + 24 = 85$$

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y) - 2\text{cov}(X, Y) = 25 + 36 - 24 = 37$$

六、包装机装糖入包，每包标准重为 100kg。每天开工后，要检验所装糖包的总体期望值是否合乎标准 (100kg)。某日开工后，测得 9 包糖重如下 (单位：kg)：

99.3    98.7    100.5    101.2    98.3    99.7    99.5  
102.1    100.5

包装机装糖的包重服从正态分布，问该包装机工作是否正常 ( $\alpha = 0.05$ )? (须给出严格的假设检验计算过程，不能够乱猜) (10 分)

解：首先给出待检假设  $H_0: \mu = 100$ ，计算出样本均值为  $\bar{x} = 99.98$ ，样本标准差为  $s = 1.212$ ，样本容量  $n = 9$ ，查  $t$  分布表得  $t_{0.025}(8) = 2.306$ ，

$$\text{计算出统计量 } t = \frac{\bar{x} - 100}{s/\sqrt{9}} = \frac{-0.02 \times 3}{1.212} = -0.050$$

因为  $|t| = 0.05 < t_{0.025}(8) = 2.306$ ，因此接受原假设  $H_0$ ，即认为包装机工作是正常的。

附：标准正态分布函数表  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$

$\Phi(x)$	0.9	0.95	0.975	0.99
x	1.281551	1.644853	1.959961	2.326342

t 分布表  $P\{t(n) > t_\alpha(n)\} = \alpha$

N	0.1	0.05	0.025
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281

## 第二部分 附加题

附加题 1 设离散型随机变量  $X \sim P(\lambda)$ ，又设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是  $X$  的一组样本观测值，求参数  $\lambda$  的最大似然估计值。（15 分）

解：因总体  $X$  的分布率为  $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (k = 0, 1, 2, \dots)$  则似然函数  $L$  为

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$$

$$\ln L = -n\lambda + \ln \lambda \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \ln x_i!$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L}{d \lambda} = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

解得  $\lambda$  的最大似然估计值为： $\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$ 。

附加题 2 证明事件在一次试验中发生次数的方差不超过  $1/4$ 。（15 分）

证：任何事件在一次试验中发生次数  $X \sim b(1, p)$ ， $p$  是一次试验中事件发生的概率。因此将方差描述为  $p$  的函数  $g(p) = D(X) = p(1-p) = p - p^2$ ，因此

$$\frac{dg}{dp} = 1 - 2p \quad (1)$$

$$\frac{d^2 g}{dp^2} = -2 < 0 \quad (2)$$

为求函数  $g(p)$  的极值，令  $\frac{dg}{dp} = 1 - 2p = 0$ ，解得当  $p = \frac{1}{2}$  时  $g(p)$  取得极值，而由 (2) 式知  $g(p)$

在此处取得最大值  $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ ，所以  $D(X) = g(p) \leq \frac{1}{4}$ 。