

ZSSV Zusammenfassung

Andreas Biri, D-ITET

06.01.15

1. Zeitdiskrete lineare Systeme & z-Transformation

1.1 Signale

rechtsseitig: $\exists t_0 : f(t) = 0 \quad \forall t < t_0$

linksseitig: falls $f(-t)$ rechtsseitig

endliche Dauer: falls sowohl links- als auch rechtsseitig

kausal: $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$

antikausal: $f(t) = 0 \quad \forall t > 0$

absolut summierbar / stabil:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]| < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

quadratisch summierbar / endliche Energie:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]|^2 < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

beschränkt: $\exists b \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq b \quad \forall t$

Für zeitdiskrete und „brave“ kontinuierliche Funktionen:

absolut summierbar (stabil) \rightarrow quadr. summ. \rightarrow beschränkt

konjugiertes Signal: $f^c[\cdot] = \overline{f[-k]}$

Spezielle Signale

Kronecker-Delta: $\delta[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Einheitsschritt: $\sigma[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

1.2 Systeme

1) Menge von Variablen mit Konfigurationsraum

2) erlaubten Verhalten

Dynamisches System: Variablen als Funktionen der Zeit

linear: i) Konfigurationsraum ein Vektorraum

ii) erlaubte Verhalten Unterraum d. Vektorraums

zeitinvariant: kann Konfiguration beliebig verschieben

deterministisch: Ausgangssignal Funktion d. Eingangssignal

1.3 LTI-Systeme

LTI: linear time-invariant system / „lineare Filter“

$$u[\cdot] = \sum u[k] \delta[\cdot - k], \quad u(t) = \int u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

$$y[\cdot] = \sum u[k] h[\cdot - k], \quad y(t) = \int u(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Eingangssignal	Ausgangssignal	Begründung
$\delta[\cdot]$	$h[\cdot]$	Definition von $h[\cdot]$
$\delta[\cdot - k]$	$h[\cdot - k]$	Zeitinvarianz
$u[k] \cdot \delta[\cdot - k]$	$u[k] \cdot h[\cdot - k]$	Linearität (Homogenität)
$u[\cdot] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u[k] \delta[\cdot - k]$	$\sum_{k \in \mathbb{Z}} u[k] h[\cdot - k]$	Linearität (Superpositionsprinzip)

Satz 1.2: Kausales System, falls Stossantwort h kausal

Satz 1.3: BIBO-stabil iff Stossantwort h stabiles Signal

1.4 Faltung

$$(f * g)[n] = \sum f[k] g[n - k] = \sum f[n - k] g[k]$$

$$(f * g)(t) = \int f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

	f	g	$f * g$
1	rechtsseitig	rechtsseitig	rechtsseitig
2	kausal	kausal	kausal
3	irgend etwas	von endlicher Dauer	(wohldefiniert)
4	beschränkt	absolut summierbar	beschränkt
5	absolut summierbar	absolut summierbar	absolut summierbar
6	quadratisch summierbar	absolut summierbar	quadratisch summierbar
7	quadratisch summierbar	quadratisch summierbar	(wohldefiniert)

1.5 formale z-Transformation

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] z^{-k}$$

Zwei Interpretationsarten dieses Ausdrucks:

- formale z-Trafo: rein formaler Ausdruck (z undefiniert)

- (analytische) z-Trafo: komplexwertige Funktion

Verschiebung nach links („früher“): Multipliziere mit z^m

Kausaler Teil: $F(z) \bmod z = \sum_{k=0}^{\infty} f[k] z^{-k}$

1.6 Inverse Signale & inverse Filter

$G(z)$ invers zu $F(z)$: $F(z)G(z) = 1$, $f * g = \delta$

Satz 1.6: Es seien $g[\cdot]$ und $h[\cdot]$ invers zu $f[\cdot]$, $\alpha + \beta = 1$

Dann ist auch das Signal $\alpha g[\cdot] + \beta h[\cdot]$ invers zu $f[\cdot]$

Folglich gibt es unendlich viele Inversen eines Signals.

Satz 1.7: Falls $f[\cdot]$ rechtsseitig und nicht überall Null, gibt es genau ein rechtsseitiges zu $f[\cdot]$ inverses Signal.

Berechnen der (eindeutigen) Inversen

$$F(z) = z^{-m}(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots), \quad G(z) = z^{-n}(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots)$$

$$n = -m, \quad b_0 = 1/a_0$$

$$b_k = -\frac{1}{a_0} \sum_{i=0}^{k-1} a_{k-i} b_i$$

Rechtsseitiges und linksseitiges Signal

i) Rücktransformation eines Pols

$$G(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha}$$

Rechtsseitiges Signal (stabil für $|\alpha| < 1$)

$$g[k] = \begin{cases} \alpha^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

Linksseitiges Signal (stabil für $|\alpha| > 1$)

$$g[k] = \begin{cases} 0, & k \geq 0 \\ -\alpha^k, & k < 0 \end{cases}$$

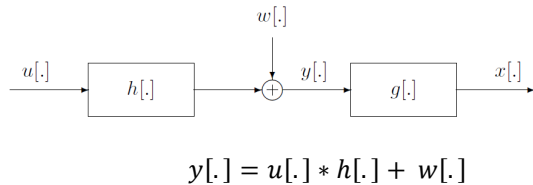
ii) Rücktransformation einer rationalen Funktion

$1/F(z)$: Polynomdivision liefert entsprechendes Signal

Rechtsseitig: $\frac{a z^m + (\text{niedrigere Ord.})}{b z^n + (\text{niedrigere Ord.})} = \frac{a}{b} z^{m-n} + (\text{niedriger})$

Linksseitig: $\frac{a z^m + (\text{höhere Ordnung})}{b z^n + (\text{höhere Ordnung})} = \frac{a}{b} z^{m-n} + (\text{höher})$

1.7 Egalisation, Entfaltung, Entzerrung



Versuche durch Inverse, $u[.]$ aus $y[.]$ zu bestimmen:

- Ansatz: $H(z) G(z) = 1$
- Mit Verzögerung $L \geq 0$: $H(z) G(z) \approx z^{-L}$

i) Suche stabiles Inverses (entweder links- oder rechtss.)

ii) Erzeuge kausales Schätzfilter $G(z)$ durch Abschneiden:

$$G(z) = z^{-L} G_{l/r}(z) \bmod z$$

$$H(z) G(z) = z^{-L} + E(z)$$

Dabei entstehender Fehler:

$$E(z) = -(-2)^{-L}$$

Decision-feedback equalizer (DFE)

Anwendbar, falls Signal nur diskrete Werte annimmt

G_f : Vorwärts-Filter, G_b : Rückwärtsfilter

$$H(z) = H_1(z) + z^{-L-1} H_2(z)$$

$$H_1(z) = \sum_{k=0}^L h[k] z^{-k}, \quad H_2(z) = \sum_{k=L+1}^{\infty} h[k] z^{-k} z^{L+1}$$

$$G_b(z) = -H_2(z), \quad G_f(z) = z^{-L} F(z) \bmod z$$

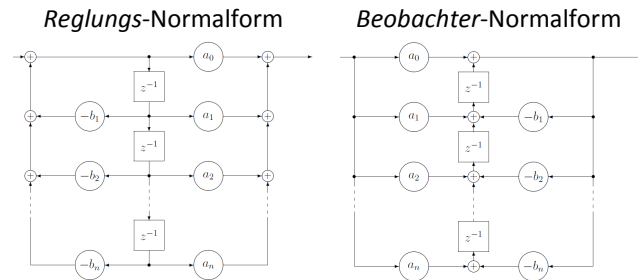
wobei $F(z)$ ein stabiles inverses Filter zu $H_1(z)$ ist

1.8 Normalformen und Faltungsalgorithmen

Rational: Funktion ist ein Quotient von zwei Polynomen

Kausal: Zählergrad nicht höher als Nenner

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}$$



1.9 Potenzreihen & Laurentreihen

Absolute Konvergenz: $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty$

Komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius:

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad r = \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} \right)^{-1}$$

Inverse Potenzreihe (konvergiert ausserhalb v. r)

$$B(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{-k}, \quad r = \limsup_{k \rightarrow \infty} |b_k|^{\frac{1}{k}}$$

Laurent-Reihen

$$A(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} x^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Konvergiert in Kreising: $\{x \in \mathbb{C} : r_1 < |x| < r_2\}$

$$r_1 = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_{-k}|^{\frac{1}{k}}, \quad r_2 = \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} \right)^{-1}$$

1.10 Die z-Transformation

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] z^{-k}, \quad ROC(f) = \{r_1 < |z| < r_2\}$$

$$r_1 : \text{von } \sum_{k=0}^{\infty} f[k] z^{-k}, \quad r_2 : \text{von } \sum_{k=0}^{\infty} f[-k] z^k$$

Falls ROC leer, existiert die z-Transformierte nicht.

Jedes Signal f von endlicher Dauer besitzt $ROC = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Satz 1.9: ROC enthält Einheitskreis $\Rightarrow f[.]$ ist stabil

$f[.]$ stabil \Rightarrow Einheitskreis liegt in ROC (oder Rand)

Zeitverschiebung: $H(z) = z^m F(z) \rightarrow ROC(h) = ROC(f)$

Zeitumkehrung: $H(z) = F(z^{-1}) \rightarrow \{1/r_2 < |z| < 1/r_1\}$

Anfangswert-Eigenschaft für kausale Signale

$$f[0] = \lim_{|z| \rightarrow \infty} F(z)$$

Endwert-Eigenschaft für rationale rechtsseitige Signale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) F(z)$$

Satz 1.12: Umkehrformel der z-Transformation

$$f[k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(e^{i\Omega}) e^{i\Omega k} d\Omega$$

1.11 Rationale z-Transformation

Eine *rationale* Funktion ist eine Funktion der Form

$$F(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}$$

kausal: Zählergrad ist nicht höher als der Nennergrad

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i z}{z - p_i} \rightarrow f[z] = \sum \begin{cases} \text{rechts.}, & |p_i| < 1 \\ \text{links.}, & |p_i| > 1 \end{cases}$$

$F(z)$	$ROC(f)$	$f[.]$
$\frac{z}{z-p}$	$ z > p $	$f[k] = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ p^k, & k \geq 0 \end{cases}$
	$0 < z < p $	$f[k] = \begin{cases} -p^k, & k < 0 \\ 0, & k \geq 0 \end{cases}$
$\frac{Az}{z-p} + \frac{\bar{A}z}{z-\bar{p}}$	$ z > p $	$f[k] = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 2 A p ^k \cos(\Omega k + \varphi), & k \geq 0 \end{cases}$
$= 2z \cdot \frac{z \operatorname{Re}(A) - \operatorname{Re}(A\bar{p})}{z^2 - 2z \operatorname{Re}(p) + p ^2}$	$0 < z < p $	$f[k] = \begin{cases} -2 A p ^k \cos(\Omega k + \varphi), & k < 0 \\ 0, & k \geq 0 \end{cases}$

$f[.]$ ist stabil $\Leftrightarrow ROC(f)$ enthält den Einheitskreis

1.14 Spektrum von zeitdiskreten Signalen

$$F(e^{i\Omega}) = F(z) |_{z=e^{i\Omega}} = \sum f[k] e^{-i\Omega k}$$

Spektrum = Transformierte auf Einheitskreis, 2π -periodisch

Satz 1.13: $f[.]$ stabil \rightarrow Spektrum *wohldefiniert*/konvergiert

$c_k = f[-k]$: Fourier-Koeffizienten des Spektrums $F(e^{i\Omega})$

$$f^c[.] \rightarrow F^c(z) = \overline{F(\bar{z}^{-1})} \rightarrow F^c(e^{i\Omega}) = \overline{F(e^{i\Omega})}$$

Satz 1.14: Ein stabiles kompl. zeitdisk. Signal $f[.]$ ist *reell*:

$$F(e^{-i\Omega}) = \overline{F(e^{i\Omega})}$$

Spezialfall: Periodische Signale ($r=1$)

$$f[k] = e^{i\Omega_0 k} \rightarrow F(e^{i\Omega}) = 2\pi \sum_n \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi n)$$

2. Zeitdiskret & zeitkontinuierlich

2.1 Laplace- und Fourier-Transformation

Laplace-Transformierte eines zeitkontinuierlichen Signals

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$ROC(f) = \{s \in \mathbb{C} : r_1 < \operatorname{Re}(s) < r_2\}$$

rechtsseitig: $ROC(f) = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > r\}$

linksseitig: $ROC(f) = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) < r\}$

stabil: $ROC(f)$ enthält die imaginäre Achse

Satz 2.2: Ein rechtsseitiges Signal $f(.)$ ist *stabil* iff

i) Zählergrad nicht grösser als Nennergrad

ii) alle Pole von $F(s)$ in offenen linken Halbebene

Satz 2.3: $ROC(f)$ enthält imaginäre Achse $\Rightarrow f(.)$ stabil

$f(.)$ stabil $\Rightarrow ROC(f)$ enthält imag. Achse (od. Rand)

Fourier-Transformation: Laplace auf imaginärer Achse

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Spektrum eines Signals = Fourier-Transformierte

Frequenzgang: Fourier-Transformierte der Stossantwort

Satz 2.4: komplexes zeitkont. Signal $f(.)$ ist *reell* iff

$$F(-i\omega) = \overline{F(i\omega)}$$

Satz 2.5: Sei $f(.)$ ein stabiles komplexes Signal mit

$$F(s) = c * \frac{\prod(s-a)}{\prod(s-b)}$$

$f(.)$ ist *reell*, falls die Pole & Nullstellen entweder reell sind oder in konjugiert komplexen Paaren auftreten.

2.2 Umwandlung zeitdiskret \rightarrow zeitkont.

Allgemeiner Ansatz:

$$y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] h(t - kT)$$

Bildung eines formal zeitkontinuierlichen Signals

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - kT)$$

$$\rightarrow y(t) = \tilde{x}(t) * h(t), \quad Y(s) = \tilde{X}(s) H(s)$$

Satz 2.6: Laplace-Transformierte von $\tilde{x}(t)$

$$\tilde{X}(s) = X(z) |_{z=e^{sT}}, \quad \tilde{X}(i\omega) = X(e^{i\omega T})$$

Spektrum eines „formal zeitkontinuierlichen“ Signals entspricht dem periodischen Spektrum d. zeitdisk. Signals

Einsatz eines Tiefpasses als Filter

Unterdrückung aller Perioden d. Spektrums ausser Grundperiode

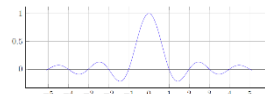
$$H(i\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}, \quad h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

$$\text{Spezialfall: } \omega_c = \frac{\pi}{T} \quad \left(f_c = \frac{1}{2T}, \quad \omega_c = 2\pi f_c \right)$$

$$h(t) = \frac{1}{T} \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} = \frac{1}{T} \operatorname{sinc}(t/T)$$

$$\rightarrow y(nT) = \frac{1}{T} x[n]$$

(Übereinstimmung an Abtastzeitpunkten)



Halteglied als Filter

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

2.3 Abtastung

Ideale regelmässige Abtastung mit Abtastperiode T

$$x_s[k] = T x(kT - \tau)$$

Satz 2.7: Die z-Transformierte des abgetasteten Signals

$$g_s[k] = Tg(kT) \rightarrow G_s(z) = \sum_{s: e^{sT}=z} G(s)$$

oder äquivalent dazu ($\rho, \Omega \in \mathbb{R}$, $\ln(\rho)/T \in \text{ROC}(g)$)

$$G_s(\rho e^{i\Omega}) = \sum G(\ln(\rho)/T + i(\Omega + n2\pi)/T)$$

Für die Spektren gilt (falls sie existieren)

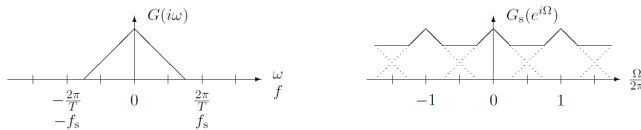
$$G_S(e^{i\omega T}) = \sum G(i(\omega + n2\pi/T))$$

oder mit Abtastfrequenz $f_s = 1/T$ und $\omega = 2\pi f$,

$$G_S(e^{i2\pi f/f_s}) = \sum G(i2\pi(f + nf_s))$$

Das Spektrum $G_S(e^{i\Omega})$ ($\Omega = \omega T$) eines abgetasteten Signals entspricht der Summe aller um ganzzahlige

Vielfache von $\frac{2\pi}{T}$ verschobenen Kopien von $G(i\omega)$



Frequenz abgetasteter Signale: $\Omega = \omega T = 2\pi f/f_s$

Satz 2.8: Nyquist-Shannon Abtasttheorem

Erfüllt das Signal die Nyquist-Bedingung

$$G(i\omega) = 0, |\omega| \geq \frac{\pi}{T} \quad \left(G(i2\pi f) = 0, |f| \geq \frac{f_s}{2} \right)$$

kann aus Abtastwerten $g_s[k] = Tg(kT)$ vollständig

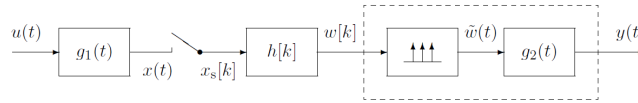
(ohne **Aliasing**) rekonstruieren (Abtastfrequenz $f_s = 1/T$):

$$G(i\omega) = G_S(e^{i\omega T}) \quad \text{für } |\omega| < \frac{\pi}{T}$$

$$g(t) = \sum_k g(kT) \text{sinc}\left(\frac{t - kT}{T}\right)$$

2.4 Zeitdiskr. Filterung v. zeitkont. Signalen

Standard Signalverarbeitungssystem



- i) Filterung: $x(t) = u(t) * g_1(t)$
- ii) Abtastung: $x_s[k] = T x(kT)$
- iii) Diskrete Filterung: $w[k] = x_s[k] * h[k]$
- iv) Kontinuierlich machen: $y(t) = \sum_k w[k] g_2(t - kT)$

Satz 2.9: Falls sowohl $G_1(i\omega)$ & $G_2(i\omega)$ die Nyquist-Bedingung erfüllen, ist das Gesamtsystem *zeitinvariant* mit Frequenzgang $G_1(i\omega) H(e^{i\omega T}) G_2(i\omega)$

\Rightarrow äquivalent zu zeitkont. Filter mit Frequenzgang $H(e^{i\omega T})$

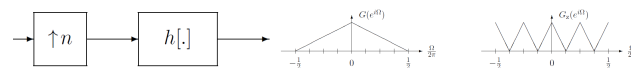
2.6 Dezimation, Interpolation &

Umrechnung der Abtastrate

Interpolation: Erhöhung der Abtastfrequenz (ganzzahlig)
zero-stuffing: Einfüllen von $n - 1$ Nullen zwischen Werten

$$G_z(z) = G(z^n) \rightarrow G_z(e^{i\Omega}) = G(e^{i\Omega/n})$$

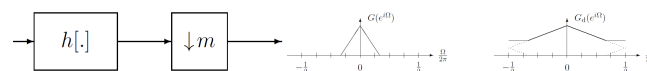
danach spektrale Anteile ausserhalb $|\Omega| < \pi/n$ wegfiltern



Dezimation: Verringerung der Abtastfrequenz (ganzzahlig)

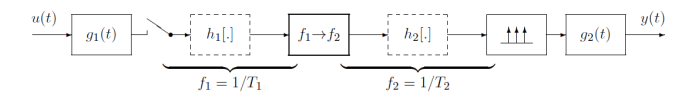
Satz 2.10: Dezimationssatz $g_d[k] = n g[nk]$

$$G_d(z) = \sum_{z_1: z_1^n = z} G(z_1), \quad G_d(e^{i\Omega}) = \sum_{m=0}^{n-1} G\left(e^{i(\Omega + m2\pi)/n}\right)$$



Wechsel der Abtastfrequenz

Wechsel um rationalen Faktor durch Kombination von Interpolation und Dezimation



Satz 2.11: Es seien die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

- $|G_1(i2\pi f)| = 0$ für $|f| \geq f_1/2$
- $|G_2(i2\pi f)| = 0$ für $|f| \geq f_2/2$
- Abtastratenkonvention $f_1 \rightarrow f_2$ erfolgt mit Zwischenrate $f_3 = n f_1 = m f_2$ und mit $|H(e^{i\Omega})| = 0, \min\{\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{m}\} \leq |\Omega| \leq \pi$

Dann ist das Gesamtsystem zeitinvariant mit Frequenzgang

$$G_1(i\omega) H_1(e^{i\omega T_1}) H(e^{i\omega T_3}) H_2(e^{i\omega T_2}) G_2(i\omega), \quad T_i = \frac{1}{f_i}$$

2.7 FIR-Filter und Fensterfunktionen

FIR-Filter: *finite impulse response filter*

IIR-Filter: *infinite impulse response filter*

Tiefpass

Idealer zeitdiskreter Tiefpass

$$H(e^{i\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & \Omega_c \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}, \quad h[k] = \frac{\sin(\Omega_c k)}{\pi k}$$

Problem: Weder kausal noch stabiles Filter

Lösung: Abschneiden/Dämpfen von Koeffizienten mit einer Fensterfunktion $h[k]w[k] \rightarrow$ *Faltung der Spektren*

Kausaler Tiefpass

$$g\left[k + \frac{N}{2}\right] = \frac{h[k] w[k]}{\sum_n h[n] w[n]}$$

Verschiebung bewirkt Kausalität, Nenner erhält Neutralität

Fensterfunktionen

Rechteckfenster: nicht geeignet, sehr langsames Abklingen

$$w[k] = \begin{cases} 1 & , |k| \leq N/2 \\ 0 & , |k| > N/2 \end{cases}$$

Hanning-Filter (raised-cosine window): Ordnung N

$$w[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi k}{N+2}\right) \right) & , |k| \leq N/2 \\ 0 & , |k| > N/2 \end{cases}$$

Bandpässe

Frequenzselektive Filter mit Fensterfunktionen

Idealer Bandpass: $0 \leq \Omega_1 \leq \Omega_2 \leq \pi$

$$H(e^{i\Omega}) = \begin{cases} 1 & , \Omega_1 < |\Omega| < \Omega_2 \\ 0 & , |\Omega| \leq \Omega_1 \text{ oder } \Omega_2 \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$h[k] = \frac{\sin(\Omega_2 k) - \sin(\Omega_1 k)}{\pi k}, \quad h[0] = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\pi}$$

Kausaler Bandpass: $|G(e^{i\Omega})|_{\Omega=\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}} = 1$

$$g\left[k + \frac{N}{2}\right] = \frac{h[k] w[k]}{|\sum_n h[n] w[n] e^{-in(\Omega_1+\Omega_2)/2}|}$$

Linearer Phasengang

Für FIR-Filter, die mit dieser Methode entworfen werden, gilt im Durchlassbereich

$$G(e^{i\Omega}) \approx e^{-i\Omega N/2} = z^{-N/2} \big|_{z=e^{i\Omega}}$$

und somit eine reine Verzögerung um N/2 Zeiteinheiten. Dies ist oft wünschenswert und ein Hauptgrund für FIR

2.7 Zeitkont. & zeitdiskrete IIR-Filter

- 1) Entwurf eines zeitkontinuierlichen Filters
- 2) Transformation in ein zeitdiskretes Filter

Butterworth-Filter der Ordnung N

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^N (1 - s/p_k)}$$

$$p_k = \omega_c e^{i \frac{\pi}{2N} (2k + N - 1)}$$

3-dB-Frequenz: $f_c = \omega_c/2\pi$

Für ein Filter mit Ordnung N gerade gilt:

$$H(s) = \prod_{k=1}^{N/2} \frac{1}{1 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2N} (2k + N - 1)\right) \frac{s}{\omega_c} + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2}$$

Satz 2.12: Amplitudengang $|H(i\omega)|$ gegeben durch

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}$$

Bilineare Transformation

$$G(z) = H(s) \big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$G(e^{i\Omega}) = H(i\omega) \big|_{\omega=\frac{2}{T} \tan(\Omega/2)}$$

Satz 2.13: Abbildung $z \rightarrow s$

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad z = \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2}$$

Frequenztransformation

$$\Omega = 2 \tan^{-1}\left(\frac{\omega T}{2}\right), \quad \omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\tan(\Omega/2)}{\tan(\Omega'/2)}$$

3. DFT & FFT

	Zeitachse	Frequenzachse
Fourier-Transformation	\mathbb{R}	\mathbb{R}
Fourier-Reihe	$\mathbb{R} \bmod 2\pi$	\mathbb{Z}
zeitdiskrete Fourier-Transformation	\mathbb{Z}	$\mathbb{R} \bmod 2\pi$
diskrete Fourier-Transformation (DFT)	$\mathbb{Z} \bmod N$	$\mathbb{Z} \bmod N$

3.2 Die diskrete Fourier-Transformation

Sei α eine komplexe Zahl: $\alpha^N = 1$; $\alpha^n \neq 1$, $0 < n < N$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{N-1} f[k] z^{-k} = (f[0], f[1], \dots, f[N-1])^T$$

$$F[n] = F(\alpha^n) = \sum_{k=0}^{N-1} f[k] \alpha^{-kn}$$

Meistens wird $\alpha = e^{i2\pi/N}$ gewählt:

$$F[n] = F(e^{i\Omega}) \big|_{\Omega=2\pi n/N}$$

DFT berechnet Abtastwerte $F[n]$ des Spektrums von $f[\cdot]$

Transformation als Matrix: $\alpha^{-l} = \alpha^{N-l}$

$$\begin{pmatrix} F[0] \\ F[1] \\ F[2] \\ \vdots \\ F[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^0 & \alpha^0 & \alpha^0 & \dots & \alpha^0 \\ \alpha^0 & \alpha^{-1} & \alpha^{-2} & \dots & \alpha^{-(N-1)} \\ \alpha^0 & \alpha^{-2} & \alpha^{-4} & \dots & \alpha^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^0 & \alpha^{-(N-1)} & \alpha^{-2(N-1)} & \dots & \alpha^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ \vdots \\ f[N-1] \end{pmatrix}$$

Satz 3.1: Die DFT ist invertierbar mit der Umkehrformel

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F[n] \alpha^{kn}$$

Satz 3.2: Sei N eine positive ganze Zahl, $\beta \in \mathbb{C}$: $\beta^N = 1$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \beta^n = \begin{cases} N & \text{falls } \beta = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Satz 3.3: Ein komplexer Vektor ist *reell* genau dann, wenn:

$$F[N - n] = \overline{F[n]} \quad , \quad 0 < n < N \quad ; \quad F[0] = \overline{F[0]}$$

(In zyklischer Notation mit $i \bmod N$: $F[-n] = \overline{F[n]}$)

Berechnung mit Horner-Schema

$$F[n] = F(\alpha^n) \rightarrow n \text{ setzen: } \beta = \alpha^{-n} = \alpha^{N-n}$$

$$F[n] = F(\beta^{-1}) = f[0] + \beta(f[1] + \beta(f[2] + \dots))$$

DFT-Matrizen für N = 4

$$\begin{pmatrix} F[0] \\ F[1] \\ F[2] \\ F[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F[0] \\ F[1] \\ F[2] \\ F[3] \end{pmatrix}$$

3.3 Aliasing in der Zeit

Reduktion der Exponenten in der formellen z-Trafo:

$$F(z) \bmod (z^N - 1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k] z^{-(k \bmod N)}$$

Satz 3.4: N positive ganze Zahl; $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha^N = 1$

$$F(z) \bmod (z^N - 1) |_{z=\alpha^n} = F(\alpha^n)$$

Abtastung des Spektrums erzeugt Aliasing in der Zeit: An Abtastwerten ist das Spektrum d. zeitdiskr. Signals f gleich dem Spektrum (d.h. der DFT) des Vektors mit der formalen z-Transformierten $F(z) \bmod (z^N - 1)$

3.4 Zyklische Faltung

$$h[n] = \sum_{k=0}^n f[k]g[n-k] + \sum_{k=n+1}^{N-1} f[k]g[N+n-k]$$

Satz 3.5: formale z-Trafo der zyklischen Faltung von $f \circledast g$

$$F(z)G(z) \bmod (z^N - 1)$$

4. Wahrscheinlichkeitstheorie

4.2 Definition Wahrscheinlichkeitssystem

Definition 4.1 (Axiome von Kolmogorov). Ein *Wahrscheinlichkeitssystem* ist ein Tripel (Ω, \mathcal{E}, P) , bestehend aus einer Menge Ω , einer Menge \mathcal{E} von Teilmengen von Ω und einer Funktion $P: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Menge \mathcal{E} muss eine *Sigma-Algebra* sein, d.h. es muss folgendes gelten:

E1. $\Omega \in \mathcal{E}$.

E2. Für jedes $A \in \mathcal{E}$ ist auch die Komplementmenge $A^c \triangleq \Omega \setminus A$ in \mathcal{E} .

E3. Falls A_1, A_2, A_3, \dots Elemente von \mathcal{E} sind, ist auch $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$ ein Element von \mathcal{E} .

Die Funktion P muss ein *Wahrscheinlichkeitsmass* sein, d.h. es muss folgendes gelten:

P1. Für jedes $A \in \mathcal{E}$ gilt $0 \leq P(A) \leq 1$.

P2. $P(\Omega) = 1$.

P3. Falls A_1, A_2, A_3, \dots Elemente von \mathcal{E} sind mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$, dann gilt $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Elemente von Ω : "Ergebnisse", Elemente von \mathcal{E} : "Ereignisse"

E4. $\emptyset \in \mathcal{E}$.

E5. Falls A_1, A_2, A_3, \dots Elemente von \mathcal{E} sind, ist auch $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$ ein Element von \mathcal{E} .

P4. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

P5. $P(\emptyset) = 0$.

Unabhängigkeit: Zwei Ereignisse A, B sind unabhängig, falls

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

4.3 Diskrete Zufallsgrößen/Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsgröße: Funktion $X: \Omega \rightarrow S$

Für jedes Ergebnis $\omega \in \Omega$ hat X einen eindeutigen Wert

Def. 4.4: Zwei diskrete Zufallsgrößen X,Y sind unabhängig:

$$P(X = x \text{ und } Y = y) = P(X = x) * P(Y = y)$$

Verbundwahrscheinlichkeit: $P(X = x \text{ und } Y = y)$

$$= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \cap \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y\})$$

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x \text{ und } Y = y)$$

Alle Zufallsgrößen sind Funktionen des gleichen Ergebnisses!

4.4 Reelle Zufallsgrößen

Reelle Zufallsgröße: Funktion $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Satz 4.1: Wenn X eine reelle Zufallsgröße ist, dann sind für jedes $r \in \mathbb{R}$ alle folgenden Mengen Ereignisse:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) > r\}, \quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) < r\}$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq r\}, \quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) = r\}$$

Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(r) dr$$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{a+}^{b+} f_X(x) dx$$

V1. Monoton nicht abfallend: Für $s < r$ gilt $F(s) \leq F(r)$.

V2. $\lim_{r \rightarrow -\infty} F(r) = 0$ und $\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = 1$.

V3. Rechtsseitig stetig: $\lim_{s \rightarrow r+} F(s) = F(r)$.

V4. $\lim_{s \rightarrow r-} F_X(s) = P(X < r) = F_X(r) - P(X = r)$.

Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

$P(X = x_0) \neq 0$: Sprung in F_X und Dirac-Stoss in f_X

4.5 Verbundwahrscheinlichkeitsdichte

Verbundverteilungsfunktion

$$F_{X_1, X_2, \dots}(x_1, x_2, \dots) = P(X_1 \leq x_1 \text{ und } X_2 \leq x_2 \text{ und } \dots)$$

Verbundwahrscheinlichkeitsfunktion

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{d^n F_{X_1, \dots, X_n}}{dx_1 \dots dx_n}(x_1, \dots, x_n)$$

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_i, X_j}(x_i, x_j) dx_j$$

(statistisch) unabhängig: $F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) * \dots * F_{X_n}(x_n)$
 $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) * \dots * f_{X_n}(x_n)$

4.6 Funktionen von Zufallsgrößen

$$\Omega \rightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto g(X(\omega)) \quad , \quad Y = g(X)$$

$$F_Y(r) = P(Y \leq r) = P(g(X) \leq r) = P(X \leq g^{-1}(r)) = F_X(g^{-1}(r))$$

4.7 Erwartungswert

$$E[X] = m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \sum_{x \in S} x P(X = x)$$

Satz 4.2: Für einen reellen Vektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ gilt

$$E[X] = (E[X_1], \dots, E[X_n])^T, \quad m_X = (m_{X_1}, \dots, m_{X_n})^T$$

Satz 4.3: Sei X eine reelle Zufallsgrösse und $Y = g(X)$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx = \sum_{x \in S} g(x) P(X = x)$$

Satz 4.4: Linearität des Erwartungswertes, $a, b \in \mathbb{C}$

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y], \quad E[\bar{Z}] = \overline{E[Z]}$$

Satz 4.6: Falls X und Y **unabhängig** sind:

$$E[X * Y] = E[X] * E[Y], \quad E[X * \bar{Y}] = E[X] * \overline{E[Y]}$$

$$\text{unabhängig} \Rightarrow \text{unkorreliert}$$

4.8 Varianz und Korrelation

$$n\text{-tes Moment von } X: \quad E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = E[(X - m_X)^2] = E[X^2] - m_X^2$$

Für komplexe Zufallsgrösse $Z = X + iY$

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = E[|Z|^2] - |m_Z|^2$$

$$\text{Korrelation:} \quad E[X \bar{Y}]$$

$$\text{orthogonal:} \quad \text{falls Korrelation } E[X \bar{Y}] = 0$$

Kovarianz

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - m_X)(\overline{Y - m_Y})] = E[X \bar{Y}] - m_X \overline{m_Y}$$

$$\text{unkorreliert:} \quad \text{Cov}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow E[X \bar{Y}] = E[X] \overline{E[Y]}$$

Satz 4.7: Es seien X und Y komplexe Zufallsgrößen

$$\text{unkorreliert} \Rightarrow \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

$$\text{orthogonal} \Rightarrow E[|X + Y|^2] = E[|X|^2] + E[|Y|^2]$$

Satz 4.8: Für reelle oder komplexe Zufallsgrößen gilt

$$|\text{Cov}(X, Y)|^2 \leq \text{Var}(X) * \text{Var}(Y)$$

Matrixtransformationen

$$\text{Transponierte:} \quad A^T : (A^T)_{i,j} = A_{j,i}$$

$$\text{Hermetisch-Transponierte:} \quad A^H : (A^H)_{i,j} = \overline{A_{j,i}}$$

Korrelationsmatrix positiv-semidefinit: $x^H R x \geq 0 \quad \forall x$

$$R_X = E[X X^H] = R_X^H$$

$$R_X = \begin{pmatrix} E[X_1 \bar{X}_1] & E[X_1 \bar{X}_2] & \dots & E[X_1 \bar{X}_n] \\ E[X_2 \bar{X}_1] & E[X_2 \bar{X}_2] & \dots & E[X_2 \bar{X}_n] \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ E[X_n \bar{X}_1] & E[X_n \bar{X}_2] & \dots & E[X_n \bar{X}_n] \end{pmatrix}$$

Kovarianzmatrix

$$V_X = E[(X - m_X)(X - m_X)^H] = R_X - m_X m_X^H$$

$$V_X = \begin{pmatrix} E[(X_1 - m_{X_1})(\overline{X_1 - m_{X_1}})] & \dots & E[(X_1 - m_{X_1})(\overline{X_n - m_{X_n}})] \\ \vdots & \dots & \vdots \\ E[(X_n - m_{X_n})(\overline{X_1 - m_{X_1}})] & \dots & E[(X_n - m_{X_n})(\overline{X_n - m_{X_n}})] \end{pmatrix}$$

Satz 4.9: Für eine komplexe $n \times n$ Matrix A und $Y = AX$

$$R_Y = A R_X A^H, \quad V_Y = A V_X A^H$$

4.9 Zeitdiskrete stochastische Prozesse

Zeitdiskreter stochastischer Prozess: Folge $X[k], k \in \mathbb{Z}$

Liefert für jedes $\omega \in \Omega$ ein zeitdiskr. Signal $X(\omega)[.] = X[.](\omega)$

i.i.d. \Rightarrow stationär \Rightarrow schwach stationär

Independent and identically distributed (i.i.d.), wenn
... $X[k], X[k+1], \dots$ unabh. Zufallsgrößen & gleiche Verteilung

stationär: Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $X[k], X[k+1], \dots, X[k+n-1]$ hängt $\forall n$ nicht von k ab

schwach stationär: $E[X[k]]$ und $E[X[k+n] * \overline{X[k]}]$ hängen für alle n nicht von k ab

Für einen **schwach stationären** Prozess gilt:

- **Mittelwert** des Prozesses: $m_X = E[X[k]]$

- **Autokorrelationsfunktion**

$$R_X[n] = E[X[k+n] \overline{X[k]}] \quad , \quad R_X[-n] = \overline{R_X[n]}$$

- **mittlere Leistung**

$$R_X[0] = E[|X[k]|^2]$$

gemeinsam schwach stationär:

- sowohl $X[.]$ als auch $Y[.]$ schwach stationär
- $E[X[k+n] \overline{Y[k]}] \quad \forall n$ unabhängig von k

Kreuzkorrelationsfunktion

$$R_{XY}[n] = E[X[k+n] \overline{Y[k]}] \quad , \quad R_{XY}[-n] = \overline{R_{XY}[n]}$$

Weisses Rauschen mit Leistung σ^2 : $X[.]$ schwach stationär:

$$m_X = 0, \quad R_X[.] = \sigma^2 \delta[.], \quad S_X(z) = \sigma^2$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

4.10 Lineare Filterung eines schwach stationären Prozesses

Sei $X[.]$ schwach stationärer Prozess

$$Y[.] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k-n] h[n]$$

Satz 4.11: Das Ausgangssignal $Y[.]$ ist schwach stationär

$$m_Y = m_X \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = m_X H(1) = m_X H(e^{i\Omega})|_{\Omega=0}$$

Für die beiden schwach stationären Prozesse $X[.]$ und $Y[.]$

$$R_{YX}[.] = h[.] * R_X[.], \quad h^c[.] = \overline{h[-.]}$$

$$R_Y[.] = h^c[.] * R_{YX}[.] = h[.] * h^c[.] * R_X[.]$$

Mit der z-Transformation schreiben wir:

$$S_{YX}(z) = H(z) S_X(z), \quad S_{XY}(z) = H^c(z) S_X(z)$$

$$S_Y(z) = H^c(z) S_{YX}(z) = H(z) H^c(z) S_X(z)$$

$$S_Y(e^{i\Omega}) = |H(e^{i\Omega})|^2 S_X(e^{i\Omega})$$

4.11 Leistungsdichtespektrum

$X[.]$ schwach stationär, z-Transformation von R_X

$$S_X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_X[n] z^{-n}$$

Satz 4.12: Der $ROC(R_X)$ hat die Form $\{1/\rho < |z| < \rho\}$

R_X ist immer stabil, da der Einheitskreis stets enthalten ist.

Leistungsdichtespektrum: $S_X(e^{i\Omega})$: Spektrum v. $R_X[.]$

Wiener-Khinchine-Beziehung

$$E[|X[k]|^2] = R_X[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_X(e^{i\Omega}) d\Omega$$

Satz 4.13: Sei $Y[.]$ schwach stationärer Prozess, s.d. $S_Y(z)$ rational und weder Pole noch Nullstellen auf Einheitskreis

$$S_Y(z) = F(z) F^c(z)$$

Wobei PS u. NS von $F(z)$ diejenigen von S_Y im Einheitskreis
Falls $Y[.]$ reell, gilt $F^c(z) = F(z^{-1})$

Satz 4.14: Ein Prozess $Y[.]$ wie in Satz 4.13 kann gedeutet werden als *gefiltertes weisses Rauschen*, wobei das Filter $H(z) = F(z) z^n$ rational, kausal und stabil ist.

Whitening-Filter: für schwach stationären Prozess $Y[.]$, falls
- $g[.]$ kausal und stabil
- \exists kausales, stabiles Signal mit z-Transformation $1/G(z)$
- $S_Y(z) G(z) G^c(z) = 1$

Satz 4.15: Für $Y[.]$ wie in Satz 4.14 ist $G(z) =$

$$H(z)^{-1} = F(z)^{-1} z^{-n} \text{ ein Whitening-Filter.}$$

Falls $S_Y(z)$ Pole od. NS auf EK, existiert kein Whitening-Filter.

4.12 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Satz 4.16: $P(. | B)$ ist ein (neues) Wahrscheinlichkeitsmass

Der Übergang von $P(.)$ zu $P(. | B)$ entspricht der Veränderung des Wissens eines Beobachters, der erfährt, dass das Ereignis B eingetroffen ist.

$$P(A \cap B) = P(B) P(A | B) = P(A) P(B | A)$$

Kettenregel

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B|A) P(C|A \cap B)$$

Bayes'sche Regel

$$P(A | B) = \frac{P(A) P(B | A)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

4.13 Totale Wahrscheinlichkeit

Vollständige Klasse/Menge v. paarweise unvereinbaren Ereignissen

$$\{A_1, \dots, A_n\}: A_i \cap A_j = \emptyset, \quad A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

4.17: Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei A_1, \dots, A_n eine vollständige Klasse wie oben

$$P(B) = P(A_1) P(B|A_1) + \dots + P(A_n) P(B | A_n)$$

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

$$F_X(x) = \sum_{k=1}^n P(A_k) F_{X|A_k}(x), \quad f_X(x) = \sum_{k=1}^n P(A_k) f_{X|A_k}(x)$$

Satz 4.18: Satz des totalen Erwartungswertes

$$E[X] = \sum_{k=1}^n P(A_k) E[X | A_k]$$

4.14 Werte von Zufallsgrößen als Bedingungen

Bayes'sche Regel

$$P(A | Y = y) = \frac{P(A) p_{Y|A}(y)}{p_Y(y)} \quad P(A | Y = y) = \frac{P(A) f_{Y|A}(y)}{f_Y(y)}$$

Totale Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \sum_y p_Y(y) P(A | Y = y) \quad P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) P(A | Y = y) dy$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} \quad f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Kettenregel

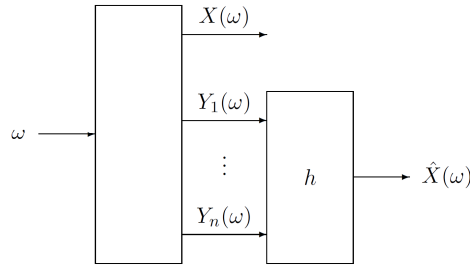
$$p(x,y,z) = p(x) p(y|x) p(z|x,y) \quad f(x,y,z) = f(x) f(y|x) f(z|x,y)$$

Totaler Erwartungswert

$$E[X] = \sum_y E[X | Y = y] p_Y(y) \quad E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X | Y = y] f_Y(y) dy$$

5. Entscheidungs- & Schätztheorie

$\hat{X} = h(Y_1, \dots, Y_n)$ als „optimale“ Schätzung von X



5.1 Bayes'sche Schätzung

Kostenfunktion $\kappa(\hat{x}, x)$: „Kosten“ für Schätzung $\hat{X} = \hat{x}$, wenn tatsächlich $X = x$ ist. Für X reell oder komplex:

Squared Error: $\kappa(\hat{x}, x) = |\hat{x} - x|^2$

Bayes'sche Schätzregel: minimiert für jede Beobachtung $Y = y$ die mittleren Kosten $E[\kappa(\hat{x}, X) | Y = y]$, $E[\kappa(\hat{X}, X)]$

$$\hat{x} = h(y) = \arg \min_{\hat{x}} E[\kappa(\hat{x}, X) | Y = y]$$

Bayes'sche MMSE-Schätzung (*minimum mean squared error*)

$$\hat{x} = h(y) = m_X(y) = E[X | Y = y]$$

Minimiert den *mittleren Schätzfehler* / *bedingte Varianz*

$$E[|\hat{x} - X|^2 | Y = y] = \text{Var}[X | Y = y]$$

5.2 Maximum-Likelihood-Schätzung (ML)

$$h(y) = \arg \max_{x: f_X(x) > 0} f_{Y|X}(y|x)$$

Likelihood-Funktion: $f_{Y|X}(y|x)$ (für feste Beobachtung y)

Satz 5.1 (Invarianz der ML-Schätzung): $X = g(U)$

\hat{x} ML-Schätz. von X iff $\hat{u} = g^{-1}(\hat{x})$ ML-Schätz. von U im Bezug auf dieselbe Beobachtung $Y = y$

Bayes'sche Schätzung: minimiert die mittleren Kosten $E[\kappa(\hat{x}, X) | Y = y]$.

Bayes'sche MMSE-Schätzregel: $\hat{x} = E[X | Y = y]$, minimiert $E[|\hat{x} - X|^2 | Y = y]$; mittlerer Schätzfehler $E[|\hat{x} - X|^2 | Y = y] = \text{Var}[X | Y = y]$.

Falls X und Y gemeinsam normalverteilt sind, dann hat die MMSE-Schätzung die Form $\hat{x} = h_0 + h_1^T y$, d.h. MMSE-Schätzung = affine LMMSE-Schätzung (Kap. 5.5).

MAP-Schätzregel (siehe Kap. 5.4): $\hat{x} = \arg \max_x f_{X|Y}(x|y)$.

Maximum-Likelihood (ML) Schätzregel: $\hat{x} = \arg \max_{x: f_X(x) > 0} f_{Y|X}(y|x)$.

5.3 Beispiele: verrauschte Messungen

X : normalverteilt, Mittelwert m_X und Varianz σ_X^2

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_X} \exp\left(-\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right)$$

Eine Messung: $Y = aX + W$

Bayes'sche Schätzung

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = f_X(x) f_W(y - ax)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \propto f_{X,Y}(x, y)$$

Ergibt Normalverteilung mit Erwartungswert u. Varianz

$$\hat{x} = E[X | Y = y] = \frac{\sigma_W^2 m_X + a \sigma_X^2 y}{\sigma_W^2 + a^2 \sigma_X^2}$$

$$E[|\hat{x} - X|^2 | Y = y] = \sigma_{X|Y}^2 = \left(\frac{1}{\sigma_X^2} + \frac{a y}{\sigma_W^2}\right)^{-1}$$

ML-Schätzung

$$f_{Y|X}(y|x) = f_W(y - ax)$$

Ergibt Normalverteilung mit Erwartungswert u. Varianz

$$\hat{x} = m_L = \sigma_L^2 \frac{ay}{\sigma_W^2} = \frac{y}{a}, \quad \sigma_L^2 = \frac{\sigma_W^2}{a^2}$$

Zwei Messungen: $Y_1 = aX + W_1, Y_2 = bX + W_2$

Bayes'sche Schätzung

$$f_{X,Y_1,Y_2}(x, y_1, y_2) = f_X(x) f_{W_1}(y_1 - ax) f_{W_2}(y_2 - bx)$$

$$f_{X|Y_1,Y_2}(x|y_1, y_2) \propto f_{X,Y_1,Y_2}(x, y_1, y_2)$$

Ergibt Normalverteilung mit Erwartungswert u. Varianz

$$\hat{x} = E[X | Y = y] = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 m_X + a \sigma_X^2 \sigma_2^2 y_1 + b \sigma_X^2 \sigma_1^2 y_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 + a^2 \sigma_X^2 \sigma_2^2 + b^2 \sigma_X^2 \sigma_1^2}$$

$$\sigma_{X|Y}^2 = \left(\frac{1}{\sigma_X^2} + \frac{a^2}{\sigma_1^2} + \frac{b^2}{\sigma_2^2}\right)^{-1}$$

ML-Schätzung

$$f_{Y_1,Y_2|X}(y_1, y_2|x) = f_{W_1}(y_1 - ax) f_{W_2}(y_2 - bx)$$

Ergibt Normalverteilung mit Erwartungswert u. Varianz

$$\hat{x} = m_L = \frac{a \sigma_2^2 y_1 + b \sigma_1^2 y_2}{a^2 \sigma_2^2 + b^2 \sigma_1^2}, \quad \sigma_L^2 = \left(\frac{a^2}{\sigma_1^2} + \frac{b^2}{\sigma_2^2}\right)^{-1}$$

5.4 Grundbegriffe der Entscheidungstheorie

X sei eine *diskrete Zufallsgrösse*, d.h. nur Werte in einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge S

Dieses Problem heisst **Entscheidungsproblem** und kann in ein **Hypothesentestproblem** umgewandelt werden.

Bayes'sche Entscheidungsregel

$$\hat{x} = h(y) = \arg \min_{\hat{x}} \sum_{x \in S} \kappa(\hat{x}, x) P(X = x) f_{Y|X}(y|x)$$

MAP-Entscheidungsregel (*maximum a posteriori*)

minimiert Fehlerwahrscheinlichkeit von Bayes

$$\hat{x} = \arg \max_x P(X = x) f_{Y|X}(y|x)$$

ML-Entscheidungsregel oft mit Entscheidungsgebieten

$$\hat{x} = \arg \max_x f_{Y|X}(y|x)$$

5.5 LMMSE-Schätzung

(linear minimum mean squared error estimation)

Lineare Schätzfunkt. $h : (Y_1, \dots, Y_n)$ minimiert $E[|\hat{X} - X|^2]$

Allgemein schlechter als Bayes Schätzung, dafür einfacher

$$\hat{X} = h(Y_1, \dots, Y_n) = \sum_{k=1}^n h_k Y_k$$

Satz 5.2 (Orthogonalitätsprinzip): $\hat{X} = \sum_k h_k Y_k$ genau dann LMMSE-Schätzung von X aus Y_1, \dots, Y_n , wenn:

$$E[(\hat{X} - X) \bar{Y}_k] = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$$

d.h. Fehler $\hat{X} - X$ orthogonal zu allen Beobachtungen
Zu lösendes Gleichungssystem (mind. 1 Lösung):

$$\sum_{j=1}^n h_j E[Y_j \bar{Y}_k] = E[X \bar{Y}_k]$$

Satz 5.3: LMMSE-Fehler

$$E[|\hat{X} - X|^2] = E[X \overline{(X - \hat{X})}] = E[|X|^2] - E[|\hat{X}|^2]$$

Affine LMMSE-Schätzung: zusätzliche Beobachtung

$$\hat{X} = h(Y_1, \dots, Y_n) = \sum_{k=1}^n h_k Y_k + h_0 = \sum_{k=0}^n h_k Y_k$$

$Y_0 = 1$: „virtuelle Beobachtung“ erlaubt Einbeziehung eines Mittelwertes

5.6 Wiener-Filter

Suche ein zeitinvariantes lineares Filter, s.d. die Schätzung minimalen quadratischen Fehler $E[|\hat{X}[k] - X[k]|^2]$ ergibt:

$$\hat{X}[\cdot] = h[\cdot] * Y[\cdot] = \sum_{n=-L}^M h[n] Y[k-n]$$

Fenster: $h[n] = 0$ für $n < -L, n > M$

Berücksichtigt nur die $M + L$ Werte $Y[k-M], \dots, Y[k+L]$

$L > 0$: verzögerte Schätzung; $L < 0$: Vorhersage

Kann Filter durch Verzögerung L immer **kausal** machen

$$h_s[\cdot] = h[\cdot - L]$$

Wiener-Hopf-Gleichung (Orthogonalitätsbedingungen)

$$\sum_{n=-L}^M h[n] R_Y[j-n] = R_{XY}[j], \quad j = -L, \dots, M$$

Mittlerer quadratischer Fehler:

$$E[|\hat{X}[k] - X[k]|^2] = R_X[0] - \sum_{n=-L}^M R_{XY}[n] \bar{h}[n]$$

FIR Wiener-Filter: Ordnung $N = M + L$

$$\begin{pmatrix} R_Y[0] & \bar{R}_Y[1] & \bar{R}_Y[2] & \dots & \bar{R}_Y[N] \\ R_Y[1] & R_Y[0] & \bar{R}_Y[1] & \dots & \bar{R}_Y[N-1] \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ R_Y[N] & R_Y[N-1] & R_Y[N-2] & \dots & R_Y[0] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h[0-L] \\ h[1-L] \\ \vdots \\ h[N-L] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{XY}[0-L] \\ R_{XY}[1-L] \\ \vdots \\ R_{XY}[N-L] \end{pmatrix}$$

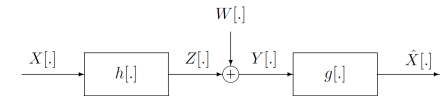
Nicht-kausales Wiener-Filter:

$$H(z) = \frac{S_{XY}(z)}{S_Y(z)}$$

5.8 LMMSE-Egalisation

Anwendung e. **nicht-kausalen Wiener-Filter**s zur Egalisation

$$G(z) = \frac{S_{XY}(z)}{S_Y(z)} = \frac{S_X(z) H^c(z)}{S_X(z) H(z) H^c(z) + S_W(z)}$$



5.9 LMS-Algorithmus (least mean square)

$$\hat{X}[k] = \sum_{n=0}^N k_k[n] Y[k-n]$$

Adaptives Filter: zeitvariantes FIR-Filter mit 2 Phasen
eingefroren: $h_{k+1}[\cdot] = h_k[\cdot]$; adaptierend:

$$h_{k+1}[n] = h_k[n] + \beta (X[k] - \hat{X}[k]) Y[k-n]$$

β : Schrittweite; falls klein, „lernt“ das Filter langsam

6. Trellis Algorithmen

6.1 Viterbi Algorithmen

Min-Summe-Version: Summe der Zweigmetriken

$$\mu(s) = \min_{\substack{\text{Zweige } b \\ \text{rst}(b) = s}} \mu(\text{lst}(b)) + \mu(b)$$

Max-Produkt-Version: Produkt der Zweigmetriken

$$\mu(s) = \max_{\substack{\text{Zweige } b \\ \text{rst}(b) = s}} \mu(\text{lst}(b)) * \mu(b)$$

7. Verschiedenes

$$|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2 \operatorname{Re}(a \bar{b})$$

$$E[|\hat{X} - X|^2] = E[(\hat{X} - X) \overline{(\hat{X} - X)}]$$

8. Tabellen

$i = \sqrt{1} = e^{i\frac{\pi}{2}}$
$\tan' x = 1 + \tan^2 x$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\cos(z) = \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y)$
$\sin(z) = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y)$

Grad	Rad	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\tan \varphi$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	
120°	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	π	0	-1	0

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

Doppelter und halber Winkel

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi \quad \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \varphi)$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \quad \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 - \tan^2 \varphi} \quad \tan^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

Umformung einer Summe in ein Produkt

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Umformung eines Produkts in eine Summe

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

Reihenentwicklungen

$$e^x = 1 + x + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\operatorname{artanh} x = x + \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Summe der ersten n-Zahlen

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Fourier-Korrespondenzen

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$

Eigenschaften der Fourier-Transformation

Eigenschaft	$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
Linearität	$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda \hat{f}(\omega) + \mu \hat{g}(\omega)$
Ähnlichkeit	$f(at) \quad a > 0$	$\frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Verschiebung	$f(t - a)$	$e^{-ai\omega} \hat{f}(\omega)$
	$e^{ait} f(t)$	$\hat{f}(\omega - a)$
Ableitung	$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n \hat{f}(\omega)$
	$t^n f(t)$	$i^n \hat{f}^{(n)}(\omega)$
Faltung	$f(t) * g(t)$	$\hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$

Partialbruchzerlegung (PBZ)

Reelle Nullstellen n-ter Ordnung:

$$\frac{A_1}{(x - a_k)} + \frac{A_2}{(x - a_k)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - a_k)^n}$$

Paar komplexer Nullstellen n-ter Ordnung:

$$\frac{B_1 x + C_1}{(x - a_k)(x - \overline{a_k})} + \dots + \frac{B_n x + C_n}{[(x - a_k)(x - \overline{a_k})]^n} +$$
$$(x - a_k)(x - \overline{a_k}) = (x - \operatorname{Re})^2 + \operatorname{Im}^2$$

Laplace- Korrespondenz

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\sigma(t)$	1	$H(t - a)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$
1	$\frac{1}{s}$	e^{at}	$\frac{1}{s - a}$
t	$\frac{1}{s^2}$	te^{at}	$\frac{1}{(s - a)^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$

Eigenschaften der Laplace-Transformation

Eigenschaft	$f(t)$	$F(s)$
Linearität	$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda F(s) + \mu G(s)$
Ähnlichkeit	$f(at) \quad a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Verschiebung im Zeitbereich	$f(t - t_0)$	$e^{-st_0} F(s)$
Verschiebung im Bildbereich	$e^{-at} f(t)$	$F(s + a)$
Ableitung im Zeitbereich	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
	$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-k-1}$
Ableitung im Bildbereich	$-tf(t)$	$F'(s)$
	$t^2 f(t)$	$F''(s)$
	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(u) du$	$\frac{1}{s} F(s)$
Integration im Bildbereich	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(u) du$
Faltung	$f(t) * g(t)$	$F(s) \cdot G(s)$
Periodische Funktion	$f(t) = f(t + T)$	$\frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt$

Ableitungen

Potenz- und Exponentialfunktionen			Trigonometrische Funktionen		Hyperbolische Funktionen	
$f(x)$	$f'(x)$	Bedingung	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}_{<0}, x \neq 0$	$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
x^a	ax^{a-1}	$a \in \mathbb{R}, x > 0$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
e^x	e^x		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
a^x	$a^x \cdot \log a$	$a > 0$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	Bedingung	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$\frac{1}{x}$	$\log x $	$\sin(\omega t) \sin(\omega t)$	$\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}_{\leq -2}, x \neq 0$	$\tan x$	$-\log \cos x $	$\sin(\omega t) \cos(\omega t)$	$-\frac{\cos(2\omega t)}{4\omega}$
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$a \in \mathbb{R}, a \neq -1, x > 0$	$\tanh x$	$\log(\cosh x)$	$\sin(\omega t) \sin(n\omega t)$	$\frac{n \cos(\omega t) \sin(n\omega t) - \sin(\omega t) \cos(n\omega t)}{\omega(n^2-1)}$
$\log x$	$x \log x - x$	$x > 0$	$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$	$\sin(\omega t) \cos(n\omega t)$	$\frac{n \sin(\omega t) \sin(n\omega t) + \cos(\omega t) \cos(n\omega t)}{\omega(n^2-1)}$
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$a \neq 0$	$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$	$\cos(\omega t) \sin(n\omega t)$	$\frac{\sin(\omega t) \sin(n\omega t) + n \cos(\omega t) \cos(n\omega t)}{\omega(1-n^2)}$
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$	$a > 0, a \neq 1$	$\tan^2 x$	$\tan x - x$	$\cos(\omega t) \cos(n\omega t)$	$\frac{\sin(\omega t) \cos(n\omega t) + n \cos(\omega t) \sin(n\omega t)}{\omega(1-n^2)}$

Standard-Substitutionen

Integral	Substitution	Ableitung	Bemerkung
$\int f(x, x^2 + 1) dx$	$x = \tan t$	$dx = \tan^2 t + 1 dt$	$t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$
$\int f(x, \sqrt{ax+b}) dx$	$x = \frac{t^2-b}{a}$	$dx = \frac{2}{a}t dt$	$t \geq 0$
$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$	$x + \frac{b}{2a} = t$	$dx = dt$	$t \in \mathbb{R}$, quadratische Ergänzung
$\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$	$x = a \sin t$	$dx = a \cos t dt$	$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$
$\int f(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$	$x = a \sinh t$	$dx = a \cosh t dt$	$t \in \mathbb{R}, 1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$
$\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$	$x = a \cosh t$	$dx = a \sinh t dt$	$t \geq 0, \cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x$
$\int f(e^x, \sinh x, \cosh x) dx$	$e^x = t$	$dx = \frac{1}{t} dt$	$t > 0, \sinh x = \frac{t^2-1}{2t}, \cosh x = \frac{t^2+1}{2t}$
$\int f(\sin x, \cos x) dx$	$\tan \frac{x}{2} = t$	$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$	$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$