

Estimacija radio kanala na osnovu pilotskih sekvenci

Kandidat: Aleksandar Birmančević

Fakultet tehničkih nauka
Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: Dr Milan Narandžić, docent

Fakultet tehničkih nauka
Univerzitet u Novom Sadu

Novi Sad, 2024.

Podlogu za pisanje rada ustupio
Univerzitet u Lundu, Švedska

Prava na korišćenje korica izdao
Departman za grafičko inženjerstvo i dizajn,
Fakultet tehničkih nauka
Univerzitet u Novom Sadu

© 2024.

Štampano izdanje

Novi Sad, Srbija



КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА


Редни број, РБР :		
Идентификациони број, ИБР :		
Тип документације, ТД :	Монографска публикација	
Тип записа, ТЗ :	Текстуални штампани материјал	
Врста рада, ВР :	Мастер рад	
Аутор, АУ :	Александар Бирманчевић	
Ментор, МН :	Др Милан Наранџић, доцент	
Наслов рада, НР :	Естимација радио канала на основу пилотских секвенци	
Језик публикације, ЈП :	Српски	
Језик извода, ЈИ :	Српски	
Земља публиковања, ЗП :	Србија	
Уже географско подручје, УГП :	Војводина	
Година, ГО :	2024.	
Издавач, ИЗ :	Ауторски репринт	
Место и адреса, МА :	Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 6а	
Физички опис рада, ФО : (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	5/54(66)/17/1/5/10/1	
Научна област, НО :	Електротехника	
Научна дисциплина, НД :	Радио комуникације	
Предметна одредница/Кључне речи, ПО :	Кључне речи: Бајесов естиматор, радио канал, антенско поље, кохерентни блок, пилотска секвенца, пилотска контаминација	
УДК		
Чува се, ЧУ :	Библиотека ФТН, Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 6а	
Важна напомена, ВН :	Нема	
Извод, ИЗ :	Естимација радио канала у овом раду везана је за поступак процене системске функције корисничких канала. Процене су потпомогнуте Задоф-Чу пилотским секвенцама које се могу делити међу корисницима. Линеарни Бајесов естиматор процењује тренутно стање канала минимизовањем свог ризика, где је функција цене - средња квадратна грешка. За последицу, естиматор уноси грешку процене која, када је минимизован Бајесов ризик, достиже своју минималну вредност међу свим линеарним/афиним естиматорима. Изведени су неопходни изрази за поступак процене. Квалитет процене естимираних канала описан је нормализованим средњим квадратним грешкама.	
Датум прихватања теме, ДП :		
Датум одбране, ДО :		
Чланови комисије, КО :	Председник: Др Бранко Бркљач, ванредни професор	
	Члан: Др Милан Видаковић, редовни професор	
	Члан:	Потпис ментора
	Члан, ментор: Др Милан Наранџић, доцент	



UNIVERSITY OF NOVI SAD • FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES
21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 6

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	Monographic publication
Type of record, TR :	Textual materials, printed
Contents code, CC :	Master's Thesis
Author, AU :	Aleksandar Birmančević
Mentor, MN :	Dr. Milan Narandžić, Assistant Professor
Title, TI :	Pilot Sequences Assisted Radio Channel Estimation
Language of text, LT :	Serbian
Language of abstract, LA :	Serbian
Country of publication, CP :	Serbia
Locality of publication, LP :	Vojvodina
Publication year, PY :	2024
Publisher, PB :	Author's reprint
Publication place, PP :	FTN, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6a
Physical description, PD : (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	5/54(66)/17/1/5/10/1
Scientific field, SF :	Electrical Engineering
Scientific discipline, SD :	Radio Communications
Subject/Key words, S/KW :	Bayes estimator, radio channel, antenna array, coherence block, pilot sequence, pilot contamination
UC	
Holding data, HD :	Library of the Faculty of Technical Sciences, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6a
Note, N :	None
Abstract, AB :	The Radio Channel Estimation in this paper is related to the procedure of evaluating the system function of the user channels. These evaluations are assisted by the Zadoff-Chu pilot sequences that can be shared among users. A linear Bayes estimator estimates the instantaneous channel state by minimizing its risk, where the cost function is the Mean-Squared Error (MSE). As a consequence, the estimator induces an estimation error that reaches its minimum value among all linear/affine estimators once the Bayes risk is minimized. The necessary expressions for the estimation procedure are derived. The quality of estimated channels are described by the Normalized Minimum Mean-Squared Errors (NMSEs).
Accepted by the Scientific Board on, ASB :	
Defended on, DE :	
Defended Board, DB :	President: Dr. Branko Brkljač, Associate Professor
	Member: Dr. Milan Vidaković, Full Professor
	Member:
Member, Mentor:	Dr. Milan Narandžić, Assistant Professor
	Mentor's sign

	УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ • ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА 21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6	Број:
	ЗАДАТАК ЗА МАСТЕР РАД	Датум:

(Податке уноси предметни наставник - ментор)

СТУДИЈСКИ ПРОГРАМ:	Енергетика, електроника и телекомуникације
РУКОВОДИЛАЦ СТУДИЈСКОГ ПРОГРАМА:	Проф. др Јован Бајић

Студент:	Александар Бирманчевић	Број индекса:	E175/19
Област:	Електротехника		
Ментор:	Доц. др Милан Наранџић		
НА ОСНОВУ ПОДНЕТЕ ПРИЈАВЕ, ПРИЛОЖЕНЕ ДОКУМЕНТАЦИЈЕ И ОДРЕДБИ СТАТУТА ФАКУЛТЕТА ИЗДАЈЕ СЕ ЗАДАТАК ЗА МАСТЕР РАД, СА СЛЕДЕЋИМ ЕЛЕМЕНТИМА: <ul style="list-style-type: none"> - проблем – тема рада; - начин решавања проблема и начин практичне провере резултата рада, ако је таква провера неопходна; 			

НАСЛОВ МАСТЕР РАДА:

Естимација радио канала на основу пилотских секвенци
--

ТЕКСТ ЗАДАТКА:

<p>Потребно је изучити и обрадити примену пилотских секвенци у оквиру естимације радио канала. У раду је потребно размотрити ограничења која намеће радио-пропагациони канал. У контексту мобилних комуникационих система потребно је објаснити мотиве и начин употребе пилотских секвенци, као и проблеме везане за пилотску контаминацију. Посебну пажњу посветити начину пројектовања пилотских секвенци. Начин формирања секвенци и остварене ауто и међукокорелационе особине демонстрирати на примеру Задиф-Чу секвенци. Објаснити концепте на којима се заснивају поједине класе естиматора: нпр. Бајесови естиматори и линеарни естиматори минималне средње квадратне грешке. Перформансе разматраних естиматора изразити кроз процену нивоа остварене грешке. На крају рада потребно је извести одговарајуће закључке.</p>

Руководилац студијског програма:	Ментор рада:

Примерак за: О - Студента; О - Ментора
--

Lista skraćenica i akronima

AoA	Odlazni ugao (<i>Angle of Departure</i>)
AoA	Dolazni ugao (<i>Angle of Arrival</i>)
BS	Bazna stanica
CDMA	Višestruki pristup sa raspodelom kodova (<i>Code-Division Multiple Access</i>)
CSI	Informacija o stanju kanala (<i>Channel State Information</i>)
FDD	Frekvencijska raspodela resursa po smeru (<i>Frequency-Division Duplex</i>)
GCD	Najveći zajednički delilac (<i>Greatest Common Divisor</i>)
LMMSE	Linearna minimalna srednja kvadratna greška (<i>Linear Minimum Mean-Squared Error</i>)
LTE	Dugoročan napredak (<i>Long-Term Evolution</i> ¹)
MIMO	Višestruki ulaz sa višestrukim izlazom (<i>Multiple-Input Multiple-Output</i>)
MISO	Višestruki ulaz sa jednim izlazom (<i>Multiple-Input Single-Output</i>)
MSE	Srednja kvadratna greška (<i>Mean-Squared Error</i>)
MT	Mobilni terminal
NMSE	Normalizovana srednja kvadratna greška (<i>Normalized Mean-Squared Error</i>)
NR	Novi radio (<i>New Radio</i> ²)
SDMA	Višestruki pristup sa prostornom raspodelom (<i>Space-Division Multiple Access</i>)

¹Upotrebljen je doslovan prevod koji se retko upotrebljava u praksi. Preporučeno je zadržavanje izvornog termina.

²Pogledati futnotu 1.

SIMO	Jedan ulaz sa višestruko izlaza <i>(Single-Input Multiple-Output)</i>
TDD	Vremenska raspodela resursa po smeru <i>(Time-Division Duplex)</i>
TDMA	Višestruki pristup sa vremenskom raspodelom <i>(Time-Division Multiple Access)</i>

Sadržaj

1	Uvod	1
1.1	Pozadina i motivacija	1
1.2	Struktura rada	2
2	Mobilni radio kanal	3
3	Model sistema	9
4	Estimacija kanala	13
4.1	Dizajn pilotskih sekvenci	13
4.2	Estimacija (trenutnih) stanja kanala	22
4.3	Bajesovi estimatori	23
4.4	Linearni estimator minimalne srednje kvadratne greške	25
4.5	Rezultati istraživanja	35
5	Zaključci i dalja istraživanja	39
A	Definicije i dokazi	41
A.1	Definicije sa pripadajućim dokazima	41
A.2	Dokazi iz poglavlja 4	42
	Reference	53

Spisak slika

2.1	Transformaciona kocka mobilnog radio kanala	5
2.2	Relacija ulaz-izlaz kanala kao linearnog filtra	7
3.1	Skica modela sistema	9
3.2	Fiksni koherentni blok sistema u okviru TDD protokola	12
4.1	Među-korelacije i autokorelacije Zadof-Ču sekvenci dužine 11	18
4.2	Među-korelacije i autokorelacije Zadof-Ču sekvenci dužine 12	19
4.3	Među-korelacije i autokorelacije Zadof-Ču sekvenci dužine 36	20
4.4	Geometrijska predstava estimatora u ravni	34
4.5	Topologija baznih stanica i korisnika u mreži	35
4.6	Norm. sr. kv. gr. korisnika naspram faktora ponavljanja pilotskih sekvenci	38

Spisak tabela

2.1	Pregled sistemskih funkcija propagacionog MISO/SIMO kanala. . . .	5
-----	---	---

1.1 Pozadina i motivacija

Povećanje broja korisničkih terminala, ali i minimalnih zahteva za nesmetan rad servisa koji se pokreću na ovim terminalima, zahtevaju ulaganja u dalji razvoj mrežne infrastrukture i tehnika prenosa informacija. Mrežna infrastruktura se, uglavnom iz ekonomskih razloga, razvija svojim najvećim delom na strani baznih stanica koje opslužuju korisničke terminale.

Cilj tehnike višestrukog pristupa zasnovane na prostornoj raspodeli (SDMA) je prostorno izdvajanje korisničkog terminala prema dolaznom (AoA) ili odlaznom uglu (AoD) izračenog elektromagnetskog talasa. SDMA se može upotrebiti sa drugim tehnikama višestrukog pristupa, kao što su tehnika zasnovana na vremenskoj raspodeli (TDMA), na frekvencijskoj raspodeli (FDMA) ili raspodeli kodova (CDMA). Uvođenjem antenskih polja na baznoj stanici moguće je povećati prostornu rezoluciju SDMA tehnike. Na primeru antenskog niza sa velikim brojem antenskih elemenata koji nisu značajno korelisani postiže se skoro savršeno izdvajanje korisničkih terminala prema AoA dovodeći do toga da SDMA nije potrebno kombinovati sa drugom tehnikom. Dakle, ako bazna stanica razlikuje dolazne uglove talasa na svom antenskom polju pod kojim ih korisnički terminali emituju, umetnuti signali u ovim talasima mogu da se ponavljaju u istim vremenskim trenucima, da zauzimaju identičan frekvencijski opseg, pa čak i da prenose istu informaciju. Bazna stanica će uspeti da izdvoji korisničke informacije i pridruži ih svakom korisniku koji ih je poslao. Na ovaj način, u uzlaznom smeru prenosa se štede vremensko-frekvencijski resursi u okviru ćelije koju opslužuje pomenuta bazna stanica. Poboljšava se sposobnost antenskog polja da izdvoji korisničke signale, kao i da uveća pojedinačne spektralne efikasnosti korisnika ili spektralnu efikasnost na nivou sistema. Da bi se sve pomenuto ostvarilo, neophodno je potisnuti interferenciju iz primljenog signala na antenskog polju. U ovom složenom signalu, nalaze se doprinosi svih aktivnih korisnika. Kako bi se izdvojili pojedinačni korisnički signali, prvo je neophodno proceniti unapred nepoznate korisničke kanalne odzive. U ovom trenutku, može se zamisliti da sistem uvodi CDMA tehniku tako da je kombinuje sa već uspostavljenom SDMA tehnikom u cilju estimacije kanala. Kanal se poželjno estimira upotrebom jedinstvenih pilotskih sekvenci koje se dodeljuju korisnicima

slično kodovima za višestruki pristup. Nakon što se kanal proceni, upotrebljava se jedna od metoda za kombinovanje antenskih signala sa svakog elementa antenskog polja. Pomoću date metode, u zavisnosti od stepena njene efikasnosti za potiskivanje interferencije iz primljenog signala, konačno se izdvaja korisnički signal. Jasno je da izdvajanje korisničkog signala u toliko kvalitetnije, što se interferencija više potisne.

1.2 Struktura rada

Poglavlje 2 opisuje mobilni radio kanal i karakteriše radio kanal fiksnog korisnika koji se procenjuje. Poglavlje 3 prikazuje pretpostavljeni model sistema u uzlaznom smeru koji koristi SDMA tehniku. Poglavlje 4 ističe važnost upotrebe pilotskih sekvenci odgovarajućih osobina i pokazuje ponašanje Zadof-Ču sekvenci. Ovo poglavlje procenjuje trenutna stanja kanala upotrebom linearnog Bajesovog estimatora na osnovu pilotskih sekvenci. Poglavlje 5 je namenjeno za završna razmatranja uz pojedine pravce daljeg istraživanja zasnovanog na iznetim rezultatima u radu.

Mobilni radio kanal

Fizički propagacioni kanal odražava dejstva fizičkog okruženja na prostiranje elektromagnetnih talasa u medijumu. U zavisnosti od verodostojnosti opisa fizičkog okruženja, zavisice realističnost opisa ponašanja elektromagnetnih talasa, nakon što u reakciji sa okolnim objektima i pod uticajem pojava u prenosnom medijumu potencijalno dožive i određene promene. Postupak modelovanja fizičkog propagacionog kanala nezavisan je od položaja antena na krajevima prenosa. Kada je potrebno razmotriti i dejstvo antena, govori se o modelovanju radio kanala. Uloga antene se prilikom emitovanja elektromagnetnih talasa ka prijemniku može protumačiti i kao pretvaranje dospele snage iz vremenskog u prostorni oblik. Prilikom doseganja elektromagnetnih talasa do antenskih provodnika, na njima se posredstvom elektromagnetnog polja indukuje električna struja i napon. Proizvod električne struje i napona u bilo kom vremenskom trenutku predstavlja električnu snagu, koja se iz prostornog pretvorila u vremenski oblik. Vremenski oblik elektromagnetnog talasa jeste jednodimenzioni modulirani signal.

Uz pretpostavku da barem jedna strana veze ili čak objekat u njihovom okruženju menja poziciju tokom vremena, tada je reč o mobilnom radio kanalu. U daljem tekstu, „mobilni radio kanal”, „radio kanal” i „kanal” koristiće se naizmenično za opis zamišljenog sredstva koji povezuje antenske elemente na krajevima radio veze. Refleksije, difrakcije i refrakcije u sredini, tj. medijumu za prenos, ubrajaju se u najčešće pojave koje utiču na prostiranje elektromagnetnih talasa dovodeći do pojave iščezavanja trenutne prijemne snage u radio kanalu. Uz odgovarajući opis pojava u fizičkom propagacionom kanalu koje dovode do iščezavanja prijemne snage u mobilnom radio kanalu, mogu se predvideti i predstojeći nivoi prijemnih snaga datog mobilnog radio kanala, što je i jedan od glavnih ciljeva postupka modelovanja svakog radio kanala. Jedna od najranijih karakterizacija mobilnog radio kanala delo je P. Bello koji je u [1] opisao linearan, vremensko-frekvencijski promenljiv kanal. Drugim rečima, posmatrano je ponašanje širokopojasnog kanala sa varijacijom trenutne prijemne snage tokom vremena u medijumu linearnih karakteristika kao što je vazduh. U nastavku, termini „frekvencijski selektivan” i „širokopojasni” upotrebljavaće se kao sinonimi, s obzirom na to da je uskopojasni kanal po definiciji frekvencijski nepromenljiv (ima ravnu amplitudsku prenosnu karakteristiku). Karakterizacije mobilnog radio kanala koje su usledile nakon pomenutog rada

uključuju varijacije prijemne snage u prostorno-vremenski promenljivom širokopojasnom kanalu. Preciznije, došlo je do razdvajanja uticaja vremenske i prostorne komponente na iščezavanje prijemne snage u fizičkom kanalu, što se posmatralo združeno do rezultata istraživanja iznetih u radu [2], R. Kattenbach-a. Praktični SISO kanal suočava se sa varijacijama trenutne prijemne snage u vremenskom i frekvencijskom domenu, pa se za takav radio kanal kaže da je selektivan u vremenskom i frekvencijskom domenu, tim redom. Dakle, SISO širokopojasni kanal može se opisati u dvodimenzionom prostoru sačinjenom od komponenata vremenske i frekvencijske promenljivosti. Uskopojasni SISO kanal mogao bi da se potpuno opiše u jednodimenzionoj reprezentaciji svoje vremenske promenljivosti.

Postavljanjem antenskog niza na bar jednom kraju radio veze, dolazi do neophodnosti razmatranja prostorne promenljivosti datog kanala. Modelovanje realističnog kanala sa antenskim nizom je zahtevan zadatak. Sa pojavom MIMO, karakterizacija samog kanala počinje da zahteva detaljnu analizu prostornog domena u vremensko-frekvencijsko-prostorno selektivnom kanalu. Mobilni radio kanali koji sadrže višestruke antene na predajnoj i prijemnoj strani mogu se zamisliti i u sledećem obliku - na strani bazne stanice, antene su smeštene u antenski niz, dok svaki mobilni terminal poseduje po jednu antenu. Ipak, združenim posmatranjem raspodeljenih mobilnih terminala na određenom geografskom području primećuje se antenski niz i sa druge strane radio veze. Međutim, ako je predmet razmatranja pojedinačni kanal koji opisuje radio vezu između samo jednog korisnika i samo jedne bazne stanice, reč je o SIMO prostornoj konfiguraciji za uzlazni smer prenosa, od MT do BS, odnosno MISO u silaznom smeru, od BS do MT.

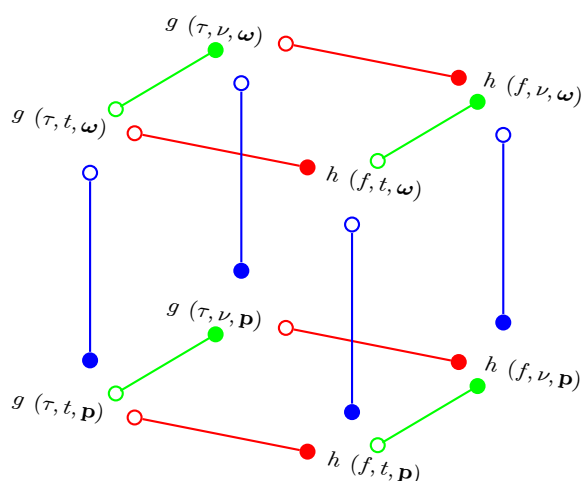
Planarna geometrijska predstava je najčešći izbor implementacije antenskih elemenata. Elementi u datoj geometrijskoj konfiguraciji obrazuju antensko polje, za razliku od antenskog niza, gde su svi elementi raspoređeni na duži. Nizovi sačinjeni od elemenata postavljenih na kružnici čine važnu klasu geometrijske izvedbe antenskih nizova. Radi pojednostavljene karakterizacije realističnih kanala koji će se tokom ovog rada razmatrati, dovoljno je pretpostaviti upotrebu linearnog (linijskog) antenskog niza na BS. Povrh toga, neka je rastojanje između svakog elementa niza identično. Shodno tome, antenski niz se naziva uniformnim. Uz to, pretpostavlja se da rastojanje između elemenata iznosi $\frac{\lambda}{2}$, znajući da je λ talasna dužina dolaznih talasa. Dimenzionalnost sistemskih funkcija (propagacionog i radio kanala) ne zavisi od izbora konkretne geometrijske konfiguracije antenskog polja, pa samim tim i niza.

Značaj karakterizacije mobilnog radio kanala za razumevanje osobina samog kanala, ali i kao osnova za njegovo što verodostojnije modelovanje, ističe se u [3]. Mobilni radio kanal odlikuje determinističko ponašanje. Bello-ova karakterizacija oslanja se na rezultate autora iz radova [4] i [5] koji su uveli i upotrebili tzv. sistemске funkcije za opisivanje mobilnih radio kanala. Ustanovljeno je da upotreba sistemskih funkcija uz uspostavljene odgovarajuće relacije između njih, omogućava determinističko opisivanje propagacionog kanala iz više perspektiva – domena. Dovoljno je koristiti samo jednu združenu sistemsku funkciju da bi se opisale sve pojave koje utiču na ponašanje kanala u tri domena, tj. perspektive. Združene perspektive (združene sistemске funkcije) date su u tabeli 2.1 i prikazane na slici 2.1. U ovom radu se primenjuju usvojene oznake iz rada [6]. Prema tome, skalar-

OZNAKA F-JE	TIP F-JE	FEDING DOMENI KANALA	SEKTRALNI DOMENI KANALA
$g(\tau, t, \mathbf{p})$	impulsni odziv	vremenski i prostorni	
$g(\tau, t, \omega)$	impulsni odziv	vremenski	ugaoni
$g(\tau, \nu, \mathbf{p})$	impulsni odziv	prostorni	Doplerov pomeraaj
$g(\tau, \nu, \omega)$	impulsni odziv		Doplerov pomeraaj i ugaoni
$h(f, t, \mathbf{p})$	frekvencijski odziv	vremenski i prostorni	
$h(f, t, \omega)$	frekvencijski odziv	vremenski	ugaoni
$h(f, \nu, \mathbf{p})$	frekvencijski odziv	prostorni	Doplerov pomeraaj
$h(f, \nu, \omega)$	frekvencijski odziv		Doplerov pomeraaj i ugaoni

Nezavisne promenljive u funkcijama su: τ - kašnjenje, ν - Doplerov pomeraaj, ω - prostorni ugao, f - frekvencija, t - vreme i \mathbf{p} - vektor položaja.

Tabela 2.1: Pregled sistemskih funkcija propagacionog MISO/SIMO kanala.



Slika 2.1: Transformaciona kocka propagacionog kanala. Svako teme kocke označava jednu od osam skalarinih združenih sistemskih funkcija. Stranice koje povezuju temena kocke predstavljaju relacije između funkcija.

ni impulsni odzivi MISO/SIMO kanala na jednom elementu antenskog polja/niza bazne stanice, označavaju se sa g . Nasuprot njima, skalarni frekvencijski odzivi nose oznaku h . Vektorski impulsni, odnosno frekvencijski odziv, koji se sastoji od odziva svih elemenata datog polja/niza obeležen je sa \mathbf{g} i \mathbf{h} , poštujući redosled navođenja.

Združena sistemska funkcija vezana je za kombinaciju originalnih i transformacionih domena, kojih ima ukupno osam. Frekvencijsko-vremensko-prostorno promenljiv kanal, može se posmatrati iz osam združenih perspektiva. Motivacija za ilustrovanje transformacione kocke, ali i zaključci u preostalom delu poglavlja temelje se na radu [7]. Svrha kocke je približavanje prelaza između različitih domena iz kojih se mogu posmatrati promene u praktičnom kanalu. Uspostavljeni jedno-

dimenzioni prelazi između sistemskih funkcija, u skladu sa kockom su:

$$s(f, \cdot, \cdot) \xrightarrow{\text{red}} s(\tau, \cdot, \cdot) \\ s(f, \cdot, \cdot) = \mathcal{F}\{s(\tau, \cdot, \cdot)\} = \int_{\mathbb{R}} s(\tau, \cdot, \cdot) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.1)$$

$$s(\tau, \cdot, \cdot) = \mathcal{F}^{-1}\{s(f, \cdot, \cdot)\} = \int_{\mathbb{R}} s(f, \cdot, \cdot) e^{j2\pi f\tau} df \quad (2.2)$$

$$s(\cdot, t, \cdot) \xrightarrow{\text{green}} s(\cdot, \nu, \cdot) \\ s(\cdot, t, \cdot) = \mathcal{F}^{-1}\{s(\cdot, \nu, \cdot)\} = \int_{\mathbb{R}} s(\cdot, \nu, \cdot) e^{j2\pi \nu t} d\nu \quad (2.3)$$

$$s(\cdot, \nu, \cdot) = \mathcal{F}\{s(\cdot, t, \cdot)\} = \int_{\mathbb{R}} s(\cdot, t, \cdot) e^{-j2\pi \nu t} dt \quad (2.4)$$

$$s(\cdot, \cdot, \mathbf{p}) \xrightarrow{\text{blue}} s(\cdot, \cdot, \boldsymbol{\omega}) \\ s(\cdot, \cdot, \mathbf{p}) = \mathcal{F}\{s(\cdot, \cdot, \boldsymbol{\omega})\} = \int_{\mathcal{S}^2} s(\cdot, \cdot, \boldsymbol{\omega}) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{p} \rangle} d\boldsymbol{\omega} \quad (2.5)$$

$$s(\cdot, \cdot, \boldsymbol{\omega}) = \mathcal{F}^{-1}\{s(\cdot, \cdot, \mathbf{p})\} = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^3} s(\cdot, \cdot, \mathbf{p}) e^{j\frac{2\pi}{\lambda}\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{p} \rangle} d\mathbf{p} \quad (2.6)$$

$$s(\cdot, \cdot, \mathbf{q}) \xrightarrow{\text{blue}} s(\cdot, \cdot, \boldsymbol{\omega}) \\ s(\cdot, \cdot, \mathbf{q}) = \mathcal{F}\{s(\cdot, \cdot, \boldsymbol{\omega})\} = \int_{\mathcal{S}^2} s(\cdot, \cdot, \boldsymbol{\omega}) e^{-j2\pi\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} \rangle} d\boldsymbol{\omega} \quad (2.7)$$

$$s(\cdot, \cdot, \boldsymbol{\omega}) = \mathcal{F}^{-1}\{s(\cdot, \cdot, \mathbf{q})\} = \int_{\mathbb{R}^3} s(\cdot, \cdot, \mathbf{q}) e^{j2\pi\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} \rangle} d\mathbf{q} \quad (2.8)$$

U izrazima (2.5) i (2.6) se koristi izmenjena Furijeova transformacija normalizovana sa talasnom dužinom dolaznog talasa, λ . Da bi se zadržala uobičajena forma Furijeove transformacije, uvodi se normalizovani vektor položaja sa pomenutom talasnom dužinom, \mathbf{q} , odnosno

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{p}}{\lambda}. \quad (2.9)$$

Unutrašnji proizvod jediničnog vektora pravca dolaznog talasa, $\boldsymbol{\omega}$ i normalizovanog vektora položaja elementa m u antenskom polju, \mathbf{q}_m , iznosi

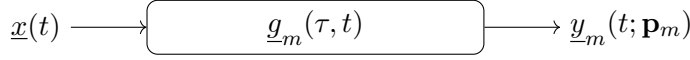
$$\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_m \rangle = \mathbf{q}_m^H \boldsymbol{\omega} = \mathbf{q}_m^T \boldsymbol{\omega}, \quad (2.10)$$

gde su vektor-kolone $\mathbf{q}_m \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ i $\boldsymbol{\omega} = \{\phi, \theta\} \in \mathcal{S}^{2 \times 1} \subset \mathbb{R}^{3 \times 1}$. $\mathcal{S}^{2 \times 1}$ označava skup svih tačaka koje zadovoljavaju jednačinu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, pri čemu su $\{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3$. S toga,

$$\boldsymbol{\omega} = -[\cos(\theta) \cos(\phi), \cos(\theta) \sin(\phi), \sin(\theta)]_{3 \times 1}^T \quad (2.11)$$

Karakteristična funkcija zračenja antenskih elemenata bazne stanice se pojavljuje kao deo impulsnog odziva kanala, nakon što se prostorni efekti propagacionog kanala preslikaju u domene vremena i kašnjenja, izraz (2.14). Za potrebe rada, dovoljno je posmatrati pojednostavljenu skalarnu karakterističnu funkciju zračenja kompleksnih vrednosti za element m ,

$$\underline{F}_m(\omega) = a_m(\omega) e^{-j2\pi\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_m \rangle}, \quad (2.12)$$



Slika 2.2: Blok šema (mobilnog) radio kanala. Šema se sastoji od poslatog korisničkog signala kroz linearni kanal i signala na izlazu m . Korisnički signal se sastoji od jednog simbola, $x(t)$. Kanal preslikava jedan ulaz na konačno mnogo prebrojivih izlaza, $y_m(t; \mathbf{p}_m)$, $m \in \{1, \dots, M_j\}$. U ovom slučaju, kanal se može nazvati SIMO kanalom sa M_j izlaza.

gde je $a_m(\omega)$ intenzitet karakteristične funkcije zračenja - dijagram zračenja (intenziteta električnog polja) antenskog elementa m , a fazni pomak karakteristične funkcije zračenja ovog elementa je vezan za njegovu poziciju u antenskom polju. Pomenuti fazni pomak je ujedno i električna dužina puta koju dolazni talas prelazi pod prostornim uglom ω do elementa niza u tački \mathbf{p}_m i iznosi $2\pi\langle\omega, \mathbf{q}_m\rangle$. Dodatno, pretpostavlja se da vektor električnog polja definiše samo jednu linearnu polarizaciju, vertikalnu ili horizontalnu. Iz tog razloga, ne razmatra se uticaj polarizacije dolaznog talasa kroz nezavisnu promenljivu u bilo kojoj od sistemskih funkcija.

Relacija ulaz-izlaz se, prema slici 2.2, zapisuje u obliku,

$$\begin{aligned} y_m(t; \mathbf{p}_m) &= \int_{\mathbb{R}} g_m(\tau, t) x(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{S^2} g_m(\tau, t, \omega) a_m(\omega) x(t - \tau) e^{-j2\pi\langle\omega, \mathbf{q}_m\rangle} d\omega d\tau \end{aligned} \quad (2.13)$$

gde je impulsni odziv vremensko-frekvencijski selektivnog **radio** kanala, $g_m(\tau, t)$ predstavljen sa

$$g_m(\tau, t) = \int_{S^2} g_m(\tau, t, \omega) a_m(\omega) e^{-j2\pi\langle\omega, \mathbf{q}_m\rangle} d\omega. \quad (2.14)$$

Impulsni odziv prostorno-vremensko-frekvencijski selektivnog **propagacionog** kanala, $g_m(\tau, t, \omega)$, prikazuje se prema

$$g_m(\tau, t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} g_m(\tau, \nu, \omega) e^{j2\pi\nu t} d\nu \quad (2.15)$$

Ako se fizički kanal okarakterise impulsnim odzivom u spektralnim domenima tako da je nenulti za konačno mnogo prebrojivih (komponenti) višestrukih putanja, $n \in \{1, \dots, N\}$, dobija se

$$g_m(\tau, \nu, \omega) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \delta(\tau - \tau_n) \delta(\nu - \nu_n) \delta(\omega - \omega_n). \quad (2.16)$$

gde je $\alpha_n \in \mathbb{C}$ koeficijent slabljenja putanje n , dok je $g_m(\tau, \nu, \omega)$ impulsni odziv elementa m u nizu.

Dirakovi impulsi u domenima kašnjenja, Doplerovog pomeraja i prostornog ugla

označeni su sa $\delta(\tau): \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $\delta(\nu): \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ i $\delta(\omega): \mathcal{S}^2 \mapsto \mathbb{R}$, poštujući redosled. Za navedene Dirakove impulse, važi osobina za vrednosti funkcije u tački gde impuls postoji, kao i osobina o jediničnoj površini ispod Dirakovog impulsa na intervalu od $-\infty$ do $+\infty$, odnosno intervalu $-\pi$ do π ,

$$\int_{\mathcal{S}^2} \delta(\omega - \omega_n) d\omega = 1. \quad (2.17)$$

Kada je disperzija Doplerovog pomeraja, σ_D usled kretanja terminala ili objekata u prostoru, manja od frekvencije korisničke signalizacije u osnovnom opsegu, kanal se naziva **približno** sporim. Pogodno je postaviti pitanje koliko dugo je pomenuti uslov zadovoljen. Odgovor se može pronaći u vremenu koherencije kanala, T_c (poglavlje 3). Usvaja se da je kanal vremenski nepromenljiv u trajanju njegovog vremena koherencije koje je duže od trajanja (sekvence) simbola za prenos.

U okolnostima kada je trajanje (sekvence) simbola duže od disperzije kašnjenja dolaznih ravnih talasa, σ_τ na antenskom nizu, tada se kanal smatra **približno** frekvencijski ravnim. U suprotnom, kanal postaje frekvencijski selektivan, što je neželjena karakteristika kanala. Pošto su domen kašnjenja i frekvencijski domen povezani Furijeovom transformacijom, može se utvrditi opseg koherencije, B_c za koji se on smatra ravnim (poglavlje 3). Usvaja se da kanal trpi uskopojasno iščezavanje prijemne snage u njegovom opsegu koherencije, širem od spektra simbola.

S obzirom na to da upotreba određene antene u antenskom nizu nije od ključnog značaja, ali u izvesnoj meri utiče na estimaciju kanala, upotrebiće se zamišljena antena koja podjednako zrači u svim pravcima prostora - izotropna antena. Konačno, vremensko-frekvencijski neselektivan impulsni odziv radio kanala izotropnog elementa tokom vremena koherencije i u opsegu koherencije obeležava se sa $g_m \in \mathbb{C}$, te više nije funkcija ni vremena, a ni frekvencije. Prostorno selektivan impulsni odziv propagacionog kanala izotropnog elementa ostaje funkcija samo jedne nezavisne promenljive u prostornom feding domenu, \mathbf{q} , odnosno u ugaonom spektralnom domenu, ω . Dakle, fizički kanal je i dalje selektivan u prostornom, a disperzivan u ugaonom domenu.

Primljeni signal sačinjen od jednog simbola, $\tau_a = 1$ se iz perspektive pojedinačnih elemenata niza od ukupno M_j elemenata, beleži kao vektor-kolona

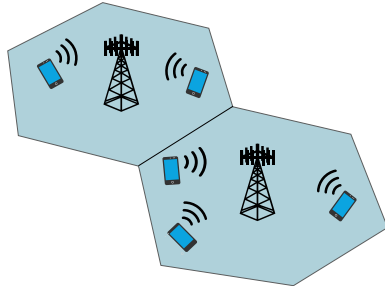
$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t; \mathbf{p}_1) \\ y_2(t; \mathbf{p}_2) \\ \vdots \\ y_{M_j}(t; \mathbf{p}_{M_j}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{M_j \times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{M_j} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g} \in \mathbb{C}^{M_j \times 1}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{1 \times 1}}, \quad (2.18)$$

dok se za primljeni signal sekvence simbola dužine, $\tau_a > 1$, upotrebljava zapis

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t_1; \mathbf{p}_1) & \cdots & y_1(t_{\tau_a}; \mathbf{p}_1) \\ y_2(t_1; \mathbf{p}_2) & \cdots & y_2(t_{\tau_a}; \mathbf{p}_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{M_j}(t_1; \mathbf{p}_{M_j}) & \cdots & y_{M_j}(t_{\tau_a}; \mathbf{p}_{M_j}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{M_j \times \tau_a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{M_j} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g} \in \mathbb{C}^{M_j \times 1}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t_1) & \cdots & x(t_{\tau_a}) \end{bmatrix}^T}_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{1 \times \tau_a}}. \quad (2.19)$$

Model sistema

U poglavlju koje se zasniva na [8], posmatra se slučaj kada se po jedna bazna stanica nalazi u svakoj od ćelija i opslužuje isključivo korisnike koji se nalaze u toj ćeliji, kao na slici 3.1. Pretpostavlja se da jedna takva baznih stanica j raspolažuću antenskim nizom od M_j elemenata, opslužuje K_j korisnika sa jednom antenom, dok joj preostalih K_l korisnika, takođe opremljenih sa po jednom antenom, svojim signalima prouzrokuju interferenciju. Dodatno, šum je neprekidno prisutan na svakom pojedinačnom elementu antenskih nizova, na svim baznim stanicama. Talas pristiže na antenske elemente niza pod približno istim uglom, dok prelazi različita rastojanja do elemenata usled geometrijske konfiguracije antenskog polja.



Slika 3.1: Skica postavke sistema u uzlaznom smeru prenosa.

Primljeni signal na jednoj baznoj stanici j od ukupno L , sa stanovišta jednog odbirka¹ u vremenu može se zapisati u domenu amplituda kao vektor-kolona, $\mathbf{y}^j \in \mathbb{C}^{M_j \times 1}$. Zapis je dat na sledeći način:

$$\mathbf{y}^j = \underbrace{\sum_{k=1}^{K_j} \mathbf{g}_{jk}^j x_{jk}}_{\text{Željeni signali}} + \underbrace{\sum_{l=1, l \neq j}^L \sum_{i=1}^{K_l} \mathbf{g}_{li}^j x_{li}}_{\text{Međućelijska interferencija}} + \underbrace{\mathbf{n}_j}_{\text{Šum}} \quad (3.1)$$

gde je korisnički signal koji dospeva iz iste ćelije dat kao $x_{jk} \in \mathbb{C}$, za razliku od poslatog signala korisničkog terminala izvan ćelije j , opisanog sa $x_{li} \in \mathbb{C}$. Kanalni odzivi i šum zabeleženi su kao, $\mathbf{g}_{jk}^j \in \mathbb{C}^{M_j \times 1}$, $\mathbf{g}_{li}^j \in \mathbb{C}^{M_j \times 1}$ i $\mathbf{n}^j \in \mathbb{C}^{M_j \times 1}$,

tim redom. Dakle, signal \mathbf{y}^j koji je stigao na BS j , sastavljen je od pojedinačnih doprinosa željenih signala koji potiču od korisnika pripadajuće ćelije j , zatim korisničkih signala koji su dospeli iz preostalih $L - 1$ ćelija, kao i šuma na samoj BS j . Željeni signali su poneli takav naziv, jer dolaze iz iste ćelije na kojoj se estimacija izvršava. Imajući u vidu da se korisnici unutar ćelije j nalaze na kraćim rastojanjima u poređenju sa korisnicima iz susedne ćelije l do bazne stanice j , njihovo ometanje u uzlaznom smeru je uticajnije. Primetno, svaki korisnik, pa i onaj koji prenosi željeni signal, ometa drugog korisnika u izvesnoj meri i naziva se ometačem, čak i kada se ukloni deo interferencije zahvaljujući ortogonalnim pilotskim sekvencama (primer u sekciji 4.5). Sa stanovišta više vremenskih odbiraka, primljeni signal iz izraza (3.1) pogodno je zapisati u matričnom obliku. Prema tome, $\mathbf{Y}^j \in \mathbb{C}^{M_j \times (\tau_p + \tau_u)}$ izražen je kao:

$$\mathbf{Y}^j = \underbrace{\sum_{k=1}^{K_j} \mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{x}_{jk}^T}_{\text{Željeni signali}} + \underbrace{\sum_{l=1, l \neq j}^L \sum_{i=1}^{K_l} \mathbf{g}_{li}^j \mathbf{x}_{li}^T}_{\text{Međućelijska interferencija}} + \underbrace{\mathbf{N}_j}_{\text{Šum}} \quad (3.2)$$

pri čemu su $\mathbf{x}_{jk} \in \mathbb{C}^{(\tau_p + \tau_u) \times 1}$ i $\mathbf{x}_{li} \in \mathbb{C}^{(\tau_p + \tau_u) \times 1}$. Dimenzionalnost kanalnih odziva je nepromenjena u odnosu na (3.1), tako da su i zapisi istovetni, tj. $\mathbf{g}_{jk}^j \in \mathbb{C}^{M_j \times 1}$ i $\mathbf{g}_{li}^j \in \mathbb{C}^{M_j \times 1}$. Šum na BS j tokom τ_p vremenskih odmeraka, opisan je matrično kao $\mathbf{N}^j \in \mathbb{C}^{M_j \times (\tau_p + \tau_u)}$. U matrici šuma, \mathbf{N}^j , elementi su identično i nezavisno raspodeljeni.

Zadržavajući opštost, a radi pojednostavljenja zapisa, uvodi se pretpostavka da je u svakoj ćeliji neprekidno prisutan jednak broj korisnika, K . Dakle, izraz (3.2) uvažavanjem pomenute pretpostavke da je $K_j = K_l = K$, postaje sledeći izraz,

$$\mathbf{Y}^j = \underbrace{\sum_{k=1}^K \mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{x}_{jk}^T}_{\text{Željeni signali}} + \underbrace{\sum_{l=1, l \neq j}^L \sum_{i=1}^K \mathbf{g}_{li}^j \mathbf{x}_{li}^T}_{\text{Međućelijska interferencija}} + \underbrace{\mathbf{N}_j}_{\text{Šum}} \quad (3.3)$$

Pošto su prvih τ_p odbiraka u koherentnom bloku namenjeni za prenos pilotskih sekvenci, tada korisnički signali u trajanju τ_p odbiraka, $\mathbf{x}_{jk} \in \mathbb{C}^{\tau_p \times 1}$ i $\mathbf{x}_{li} \in \mathbb{C}^{\tau_p \times 1}$ postaju

$$\mathbf{x}_{jk} = \sqrt{p_{jk}} \boldsymbol{\phi}_{jk} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{x}_{li} = \sqrt{p_{li}} \boldsymbol{\phi}_{li}, \quad (3.5)$$

pri čemu se pretpostavlja da su korisničke snage $p_{jk} \in \mathbb{R}$ i $p_{li} \in \mathbb{R}$ nepromenljive u trajanju τ_p odbiraka. Preporučeno je obezbediti da svi korisnici poseduju međusobno ortogonalne pilotske sekvence unutar ćelije. U sekciji 4.1 detaljno se razmatraju karakteristike korisničkih pilotskih sekvenci, $\boldsymbol{\phi}_{jk} \in \mathbb{C}^{\tau_p \times 1}$ i $\boldsymbol{\phi}_{li} \in \mathbb{C}^{\tau_p \times 1}$. Primljeni

¹Odbirak se u radu poistovećuje sa simbolom, iako se u opštem slučaju jednom simbolu može pridružiti više odbiraka, što se zatiče u praktičnim sistemima.

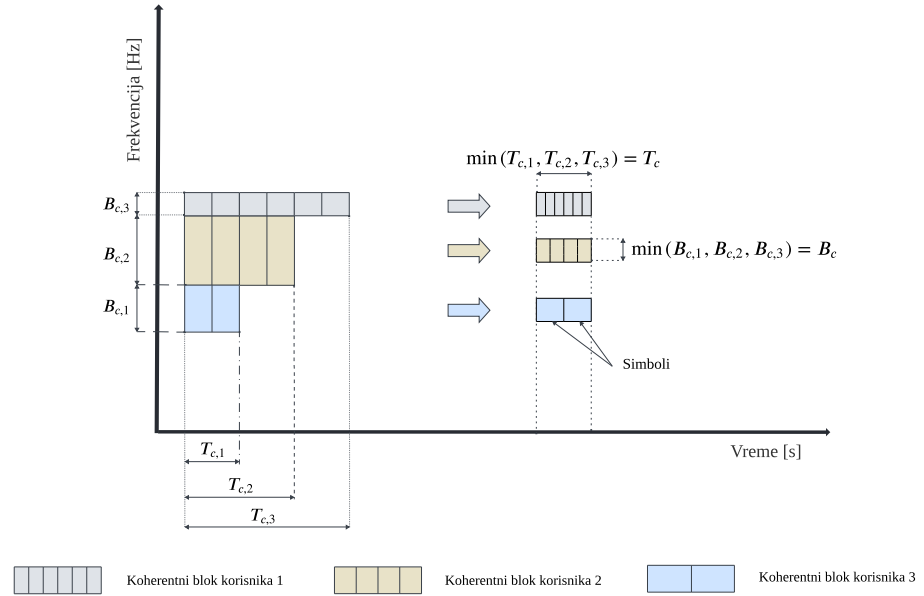
pilotski signal na baznoj stanici j , $\mathbf{Y}_j^p \in \mathbb{C}^{M_j \times \tau_p}$ dat je u skladu sa

$$\mathbf{Y}_j^p = \underbrace{\sum_{k=1}^K \sqrt{p_{jk}} \mathbf{g}_{jk}^j \phi_{jk}^T}_{\text{Željeni pilotski signali}} + \underbrace{\sum_{l=1, l \neq j}^L \sum_{i=1}^K \sqrt{p_{li}} \mathbf{g}_{li}^j \phi_{li}^T}_{\text{Međućelijska interferencija}} + \underbrace{\mathbf{N}_j}_{\text{Šum}}. \quad (3.6)$$

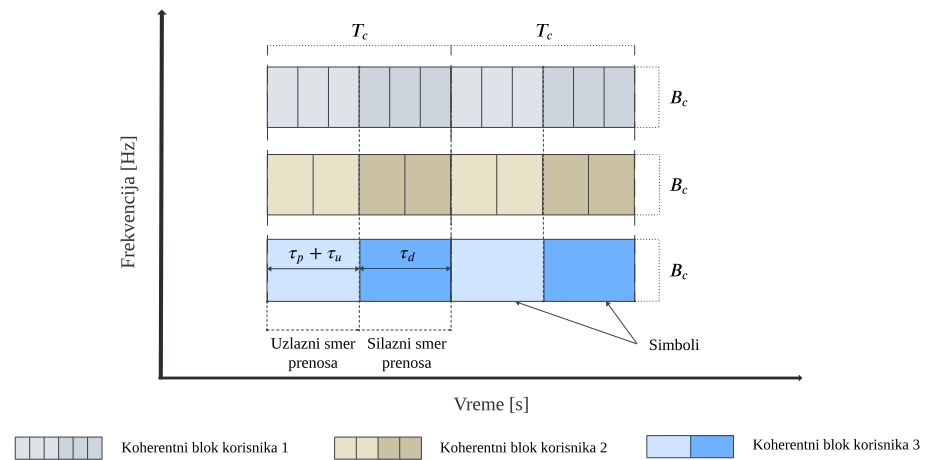
Matrica šuma je smanjene dimenzionalnosti, $\mathbf{N}^j \in \mathbb{C}^{M_j \times \tau_p}$. Zapis iz izraza (3.6) pogodan je za obradu primljenog signala tokom estimacije kanala, kao što će biti detaljnije prikazano u poglavlju 4.

Vremensko-frekvencijski resursi koherentnog bloka podeljeni su u vremenu na dva dela: uzlazni i silazni smer prenosa informacija, što nalaže TDD protokol razdvajanja smerova prenosa, kao na slici 3.2. Ovaj protokol zadržava osobinu recipročnosti kanala fizičkog kanala, bez obzira na smer prenosa. Za odabrano trajanje prenosa pilotskih sekvenci, protokol pruža mogućnost da broj antenskih elemenata na baznoj stanici j prevazilazi granicu primene FDD protokola, $\tau_p - \frac{K}{2}$. Upotrebom FDD protokola za podelu smerova prenosa razdvajanjem frekvencijskih opsega prestaje da važi osobina recipročnosti propagacionog kanala u okviru koherentnog bloka, pa je neophodno slati pilotske signale u oba smera prenosa. U skladu sa tim, očigledno je u okviru koherentnog bloka potrebno rezervisati više resursa za prenos pilotskih sekvenci nego kod TDD protokola.

Pošto je dinamičko određivanje dimenzija koherentnih blokova svakog korisnika složen zadatak, poseže se za definisanjem nepromenljivih dimenzija koherentnog bloka na sistemskom nivou. Bira se najnepovoljniji slučaj (minimalna vrednost) vremena koherencije, T_c i opsega koherencije, B_c , što postaju dužine stranica združenog koherentnog bloka.



(a) Koherentni blok



(b) TDD protokol primenjen na koherentne blokove

Slika 3.2: Nastajanje fiksnog koherentnog bloka sistema u okviru TDD protokola na primeru tri aktivna korisnika. U uzlaznom smeru, odbirci rezervisani za prenos sistemskih informacija, kao što su pilotske sekvence, obeleženi su sa τ_p , dok τ_u predstavlja odbirke korisničkih informacija. U silaznom smeru, odbirci su označeni sa τ_d .

Estimacija kanala

4.1 Dizajn pilotskih sekvenci

Korisnička pilotska sekvenca predstavlja skup znakova za raspoznavanje u svrhu estimacije njegovog kanala, ali i sinhronizacije prenosa. Svaki skup znakova (konkretna sekvenca) od mnoštva skupova potiče iz knjige pilotskih sekvenci. Celokupna knjiga pilotskih sekvenci je neprekidno dostupna svim baznim stanicama koji su operativni na određenom geografskom području. Prisutni korisnik na pomenutom području koristi jedan takav skup znakova, odnosno pilotsku sekvencu determinističke prirode. Cilj je da svaki korisnik koristi jedinstveni skup znakova. Ipak, pomenuti cilj je praktično jako teško ostvariv, što će biti pokazano u sekciji 4.1.1.

Pilotska sekvenca je, zapravo, vektor-kolona određene dužine iz knjige u formi matrice, čije su sve kolone, poželjno, međusobno ortogonalne. Svaka pilotska sekvenca je podjednako duga i svaka vektor-kolona u knjizi kao matrici, istog je intenziteta. Iako se pilotske sekvence mogu zadati u različitim domenima, od naročitog interesa za ovaj rad su pilotske sekvence zadate u vremenskom domenu. Sledeći pomenuto, sve pilotske sekvence posmatrane u vremenskom domenu traju podjednako. Prema [9], za predajnike na baznim stanicama koji su uglavnom ograničeni u pogledu vršne snage, idealne pilote čine međusobno ortogonalne sinusoide konstantnih amplituda.

Prema [10], postoji beskonačno mnogo mogućih izbora optimalne knjige pilotskih sekvenci kojom će raspolagati svaka bazna stanica. U originalnoj referenci nema više informacija, već je pretpostavka da sve antene imaju isto ograničenje predajne snage, odakle proizilazi uniformna raspodela, [10]. S obzirom na pomenuto ograničenje predajne vršne snage po anteni, neophodno je uniformno raspodeliti predajnu snagu na sve elemente datog antenskog niza, [10]. Praktično, zahteva se da moduli svih elementa u knjizi pilotskih sekvenci kao matrici budu jednaki. Kako bi se održao isti nivo snage na svim odbircima, poželjno je da svi elementi u vektor-kolonama knjige pilotskih sekvenci budu jediničnog intenziteta, tj. da važi $|\phi_s| = 1$, gde $[\cdot]_s$ označava s -ti element proizvoljne pilotske sekvence ϕ , pri čemu je $s \in \{1, \dots, \tau_p\}$.

Kada se determinističkim pilotskim sekvencama iz knjige pilotskih sekvenci dodeli i predajna snaga, tada je reč o kompleksnim signalima u osnovnom opsegu koji su definisani izrazima (3.4) i (3.5). Ovakva predstava se naziva kompleksna obvojnica i dobijena je transformacijom realnog signala iz propusnog opsega. Prednost izražavanja signala u osnovnom opsegu ogleda se u izuzimanju zavisnosti od no-seće frekvencije iz propusnog opsega. Međutim, odabir knjige pilotskih sekvenci predstavljene kompleksnim signalima u osnovnom opsegu povezan je sa izborom modulacione šeme. U datoj predstavi signala, svaki odbirak sadrži amplitudu i fazu. Amplituda opisuje jačinu signala, dok faza signala određuje kako se tokom postupka modulacije signala, jačina signala raspodeljuje na dve komponente: komponentu u fazi i komponentu u kvadraturi.

Broj vektor-kolona predstavlja najveći broj korisničkih kanala koje je moguće razlikovati u mreži baznih stanica upotrebom date knjige pilotskih sekvenci potpuno izbegavajući međusobno ometanje. Kako bi se najveći mogući broj korisničkih kanala razlikovao, neophodno je da bazne stanice dodele pilotske sekvence odgovarajuće dužine svim prisutnim korisnicima. Iz tog razloga, dimenzije matrice knjige pilotskih sekvenci treba da zadovolje potreban uslov ortogonalnosti, tako da broj njenih vrsta ne bude manji od broja njenih kolona. Konkretno, ukoliko je ukupan broj korisnika koje treba razlikovati τ_p , neophodno je obezbediti vremenski interval od τ_p odbiraka kako bi se po isteku ovog intervala ostvarila međusobna ortogonalnost τ_p korisnika. Važno je da vremenski interval od τ_p odbiraka bude kraći od vremena koherencije datog kanala. Razlog se temelji na dve činjenice:

1. Tokom trajanja intervala koherencije, prenosna funkcija kanala smatra se frekvencijski ravnom.
2. Kako bi se ostvario prenos korisničkih informacija u uzlaznom, silaznom ili u oba smera tokom trajanja jednog koherentnog intervala, potrebno je obezbediti i vreme (simbole, odbirke) za prenos korisničkih informacija. U suprotnom, neće postojati prenos korisničkih informacija, već samo sistemskih informacija kao što su pilotske sekvence.

Jedna od optimalnih knjiga pilotskih sekvenci za τ_p korisnika može se zapisati kao $\Phi \in \mathbb{C}^{\tau_p \times \tau_p}$, pri čemu $\Phi^H \Phi = \tau_p \mathbf{I}_{\tau_p}$ potvrđuje međusobnu ortogonalnost svih njenih vektor-kolona, odnosno njenih τ_p korisnika. Operator $(\cdot)^H$ naziva se Hermitova transpozicija, dok je $\mathbf{I}_{\tau_p} \in \mathbb{C}^{\tau_p \times \tau_p}$ jedinična matrica (matrica identiteta).

U radu [11] izložene su teorijske osnove, osobine i primene Zadof-Ču sekvenci. Vodeći se iznetim zaključcima i rezultatima iz pomenutog rada, oni će se u nastavku primeniti na stvaranje različitih pilotskih knjiga, pregled osobina razmatranih sekvenci, kao i na generisanje grafika potiskivanja istočelijske i međučelijske interferencije.

Opšti član u pilotskoj knjizi sastavljenoj od Zadof-Ču sekvenci dužine **neparnog prostog broja** $N_{\text{Zadof-Ču}}$ i indeksa korena $q \in \{1, \dots, N_{\text{Zadof-Ču}} - 1\}$, može se

zapisati na sledeći način:

$$[\Phi]_{i_1, i_2} = \exp \left[-j\pi q \frac{(\alpha \bmod N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}})((\alpha \bmod N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}}) + 1)}{N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}}} \right], \quad (4.1)$$

gde je pomoćna promenljiva

$$\alpha = \begin{cases} (i_1 - 1) + (i_2 - 1) & \text{za ciklični pomeraj udesno} \\ (i_1 - 1) - (i_2 - 1) & \text{za ciklični pomeraj ulevo.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Brojač, $(i_1 - 1) \in \{0, \dots, N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}}\}$, ukazuje na jedan od simbola čiji je **jedinstveni** ciklični pomeraj, $\tau_{\text{rot}} = (i_2 - 1) \in \{0, \dots, N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}} - 1\}$. Sekvenca sa cikličnim pomerajem, $\tau_{\text{rot}} = 0$, naziva se baznom sekvencom. Kolona pilotske knjige, $i_2 = 1$, rezervisana je za čuvanje vrednosti bazne sekvence. Međutim, redosled kolona je, govoreći uopšteno, relativan pojam za Zadof-Ču sekvence, pošto se vrednosti tražene kolone mogu dobiti cikličnim pomeranjem, udesno ili ulevo, svih simbola polazne kolone.

Sva polja pilotske knjige su po svojim apsolutnim vrednostima jednaka, pa iznose

$$|[\Phi]_{i_1, i_2}| = 1 \quad \text{za} \quad i_1 = 1, \dots, N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}}, \quad i_2 = 1, \dots, N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}}. \quad (4.3)$$

Sekvenca dužine različite od neparnog prostog broja može se generisati produžavanjem ili odsecanjem sekvence čija je dužina neparan prost broj. U ovom radu, predstavlja se metoda cikličnog produžavanja sekvence. Neophodno je da dužina polazne sekvence, $N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}}$ bude najveći prost broj manji ili jednak u poređenju sa dužinom željene sekvence, $N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}, \text{ cikl. pr.}}$. Sada se opšti član pilotske knjige zapisuje na sledeći način,

$$[\Phi]_{i_3, i_4} = \exp \left[-j\pi q \frac{(\alpha_{\text{cikl. pr.}} \bmod N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}})((\alpha_{\text{cikl. pr.}} \bmod N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}}) + 1)}{N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}}} \right], \quad (4.4)$$

gde je pomoćna promenljiva

$$\alpha_{\text{cikl. pr.}} = \begin{cases} ((i_3 - 1) \bmod N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}}) + (i_4 - 1) & \text{za ciklični pomeraj udesno} \\ ((i_3 - 1) \bmod N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}}) - (i_4 - 1) & \text{za ciklični pomeraj ulevo.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Simbol u produženoj sekvenci označen je sa $((i_3 - 1) \bmod N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}})$, a rotacije datog simbola su obeležene sa $(i_4 - 1) = \tau_{\text{rot, cikl. pr.}}$, pri čemu $\tau_{\text{rot, cikl. pr.}} \in \{ \underbrace{0, \dots, N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}} - 1}_{N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}} \text{ jedinstvenih rotacija}}, \dots, N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}, \text{ cikl. pr.}} - 1 \}$.

Vrednost $N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}, \text{ cikl. pr.}}$ predstavlja dužinu novonastale ciklično produžene sekvence. Moduo svakog polja pilotske knjige je jediničan,

$$|[\Phi]_{i_3, i_4}| = 1 \quad \text{za} \quad i_3 = 1, \dots, N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}, \text{ cikl. pr.}}, \quad i_4 = 1, \dots, N_{\text{Zadof-}\check{\text{C}}\text{u}, \text{ cikl. pr.}}. \quad (4.6)$$

U svrhu estimacije pojedinačnog korisničkog kanala $\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j$, neophodno je izračunati ukupno L periodičnih među-korelacija $R_{\phi_{jk}\phi_{l'i'}}$. Pošto je trajanje svake od periodičnih među-korelacija jednako njenom periodu, važi da je $K = N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}}$ ili $K = N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}, \text{ cikl. pr.}}$, gde je K broj korisnika u jednoj od ukupno L ćelija u mreži.

Ukoliko se radi o Zadof-Ču sekvencama čija je dužina neparan prost broj $N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}}$, što je period ovih sekvenci, tada se jedna vrednost među-korelacije (od K različitih vrednosti) izražava prema

$$R_{\phi_{jk}\phi_{l'i'}}[i_2 - 1] = (\phi_{jk} \star \phi_{l'i'})[i_2 - 1] \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} \sum_{i_1=1}^{N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}}} \phi_{jk}^*[i_1 - 1] \phi_{l'i'}^{(i_2-1)}[i_1 - 1] & \text{za ciklični pomeraj udesno} \\ \sum_{i_1=1}^{N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}}} \phi_{jk}^{*(i_2-1)}[i_1 - 1] \phi_{l'i'}[i_1 - 1] & \text{za ciklični pomeraj ulevo,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{i_1=1}^{N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}}} \phi_{l'i'}^{(i_2-1)}[i_1 - 1] \phi_{jk}^*[i_1 - 1] & \text{za ciklični pomeraj udesno} \\ \sum_{i_1=1}^{N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}}} \phi_{l'i'}[i_1 - 1] \phi_{jk}^{*(i_2-1)}[i_1 - 1] & \text{za ciklični pomeraj ulevo.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.8)$$

gde je $\phi_{jk}[i_1 - 1]$ preuzet simbol iz bilo koje kolone pilotske knjige Φ određene opštim članom $\phi_{l'i'}^{(i_2-1)}[i_1 - 1] = [\Phi]_{i_1, i_2}$, prema (4.1). Pored toga, rotacija $i_2 - 1$ komponente $i_1 - 1$ pilotske sekvence ϕ_{jk}^* označena je sa $\phi_{jk}^{*(i_2-1)}[i_1 - 1]$. Važi još da je $K = N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}}$, kao i:

$$\begin{aligned} i_1 &\in \{1, \dots, N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}}\}, \quad i_2 \in \{1, \dots, N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}}\}, \quad i' \in \{1, \dots, K\}, \\ j &\in \{1, \dots, L\}, \quad k \in \{1, \dots, K\}, \quad l' \in \{1, \dots, L\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Kada je reč o periodičnoj među-korelaciji ciklično produženih Zadof-Ču sekvenci dužine i perioda $N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}, \text{ cikl. pr.}}$, dostupan je zapis

$$R_{\phi_{jk}\phi_{l'i'}}[i_4 - 1] = (\phi_{jk} \star \phi_{l'i'})[i_4 - 1] \quad (4.10)$$

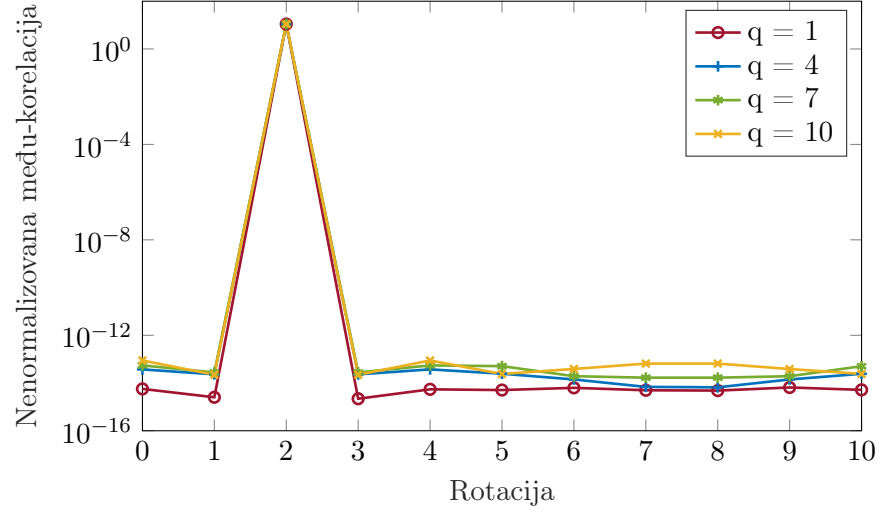
$$\begin{aligned} &= \begin{cases} \sum_{i_3=1}^{N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}, \text{ cikl. pr.}}} \phi_{jk}^*[i_3 - 1] \phi_{l'i'}^{(i_4-1)}[i_3 - 1] & \text{za ciklični pomeraj udesno} \\ \sum_{i_3=1}^{N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}, \text{ cikl. pr.}}} \phi_{jk}^{*(i_4-1)}[i_3 - 1] \phi_{l'i'}[i_3 - 1] & \text{za ciklični pomeraj ulevo,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{i_3=1}^{N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}, \text{ cikl. pr.}}} \phi_{l'i'}^{(i_4-1)}[i_3 - 1] \phi_{jk}^*[i_3 - 1] & \text{za ciklični pomeraj udesno} \\ \sum_{i_3=1}^{N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}, \text{ cikl. pr.}}} \phi_{l'i'}[i_3 - 1] \phi_{jk}^{*(i_4-1)}[i_3 - 1] & \text{za ciklični pomeraj ulevo.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.11)$$

gde je $\phi_{jk}[i_3 - 1]$ preuzet simbol iz bilo koje kolone pilotske knjige Φ određene opštim članom $\phi_{l'i'}^{(i_4-1)}[i_3 - 1] = [\Phi]_{i_3, i_4}$, prema (4.4). Istovremeno, rotacija $i_4 - 1$ komponente $i_3 - 1$ pilotske sekvence ϕ_{jk}^* označena je sa $\phi_{jk}^{*(i_4-1)}[i_3 - 1]$. Jasno je da vredi: $i_3 = 1, \dots, N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}, \text{ cikl. pr.}}$, $i_4 = 1, \dots, N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}, \text{ cikl. pr.}}$. Važi još da je $K = N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}, \text{ cikl. pr.}}$ kao i:

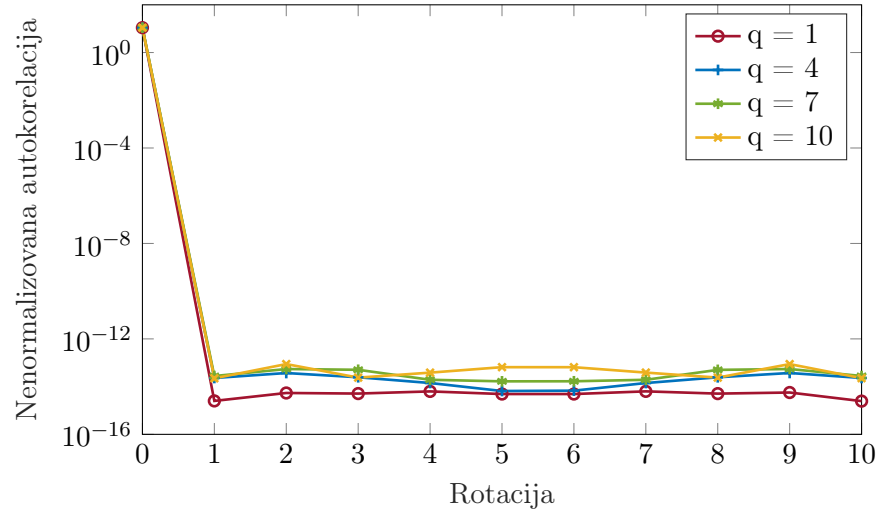
$$\begin{aligned} i_3 &\in \{1, \dots, N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}, \text{ cikl. pr.}}\}, \quad i_4 \in \{1, \dots, N_{\text{Zadof-}\check{\text{Cu}}, \text{ cikl. pr.}}\}, \quad i' \in \{1, \dots, K\}, \\ j &\in \{1, \dots, L\}, \quad k \in \{1, \dots, K\}, \quad l' \in \{1, \dots, L\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Na slici 4.1, uz upotrebljenu notaciju iz (4.9), ilustrovani su primeri korelacija međusobno ortogonalnih pilotskih sekvenci. Pilotska knjiga je neortogonalna u primeru sa slike 4.2. Na slici 4.3 su izložene korelacije praktičnih pilotskih sekvenci sa parametrima pogodnim za upotrebu u LTE i NR sistemima. Upotrebljene oznake na slikama 4.2 i 4.3 prethodno su zapisane u (4.12).

Dakle, Zadof-Ču sekvenca je sekvenca čiji su svi simboli jedinične amplitude za svaki indeks korena $q \in \{1, \dots, N_{\text{Zadof-Ču}} - 1\}$, gde je dužina sekvence $N_{\text{Zadof-Ču}}$. Kada indeks korena određene sekvence sa njenom dužinom čini relativan prost broj, tj. $\gcd(q, N_{\text{Zadof-Ču}}) = 1$, tada se rotacijom ove sekvence dobijaju isključivo njoj ortogonalne sekvence. Nenormalizovane među-korelacije dve sekvence istih dužina, ali međusobno različitih indeksa korena $q_1 \neq q_2$ takvih da $\gcd(|q_1 - q_2|, N_{\text{Zadof-Ču}}) = 1$, jesu konstantne i iznose $\sqrt{N_{\text{Zadof-Ču}}}$, dok su normalizovane među-korelacije jednake $\frac{1}{\sqrt{N_{\text{Zadof-Ču}}}}$. Među-korelacija dve sekvence istih dužina i korena može se smatrati i autokorelacijom. U ovom radu se u pomenutim okolnostima upotrebljava termin među-korelacije. Kada se na Zadof-Ču sekvence primeni direktna ili inverzna Furijeova transformacija, rezultat je ponovo, Zadof-Ču sekvenca. Pomenuta osobina je vrlo korisna za generisanje sekvence u domenima koji čine par Furijeove transformacije. LTE i NR sistemi upravo generišu ciklično proširene Zadof-Ču sekvence dužine 36 od sekvenci dužine 31 u frekvencijskom domenu za namenu prenosa pilotskih signala u uzlaznom smeru. U pogledu indeksa korena u NR sistemima za sekvence dužine 36, koriste se svi raspoloživi koreni izvorne sekvence dužine 31. Konkretno, reč je indeksima korena, $q \in \{1, \dots, 30\}$. Zainteresovani čitalac se upućuje na [12, Sekcija 5.5.1 i 5.5.3] za detaljan tok nastajanja Zadof-Ču pilotskih sekvenci proizvoljnih dužina u LTE sistemima. Čitaocu se predlaže uvid u [13, Sekcija 5.2.2 i 6.4.1.4] za NR sisteme.

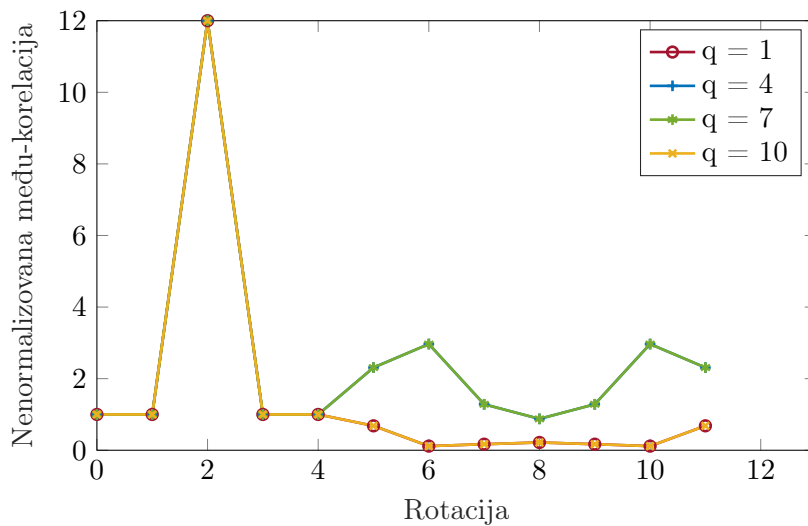


$$(a) \sum_{i_1=1}^{11} \phi_{l'i'}^{(i_2-1)}[i_1-1] \phi_{jk}^*[i_1-1] = 11 \delta[\tau_{\text{rot}} = i_2 - 1 = 2]$$

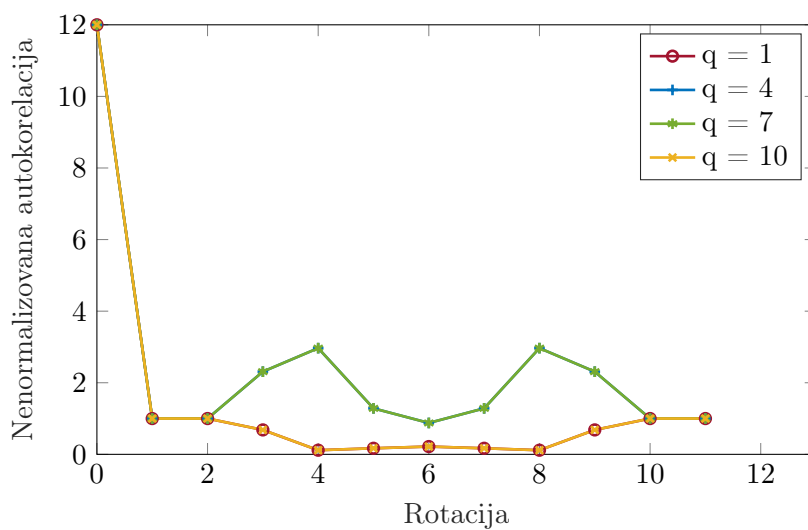


$$(b) \sum_{i_1=1}^{11} \phi_{jk}^{(i_2-1)}[i_1-1] \phi_{jk}^*[i_1-1] = 11 \delta[\tau_{\text{rot}} = i_2 - 1 = 0]$$

Slika 4.1: Savršene među-korelacije i autokorelacije Zadof-Ču sekvenci dužine 11. Svi parovi dužine sekvenci $N_{\text{Zadof-Ču}}$ i indeksa korena $q \in \{1, \dots, N_{\text{Zadof-Ču}} - 1\}$ su relativni prosti brojevi. Ostvarena je savršena ortogonalnost pilotskih sekvenci. Obratiti pažnju da su vertikalne ose date na logaritamskoj skali sa osnovom 10.

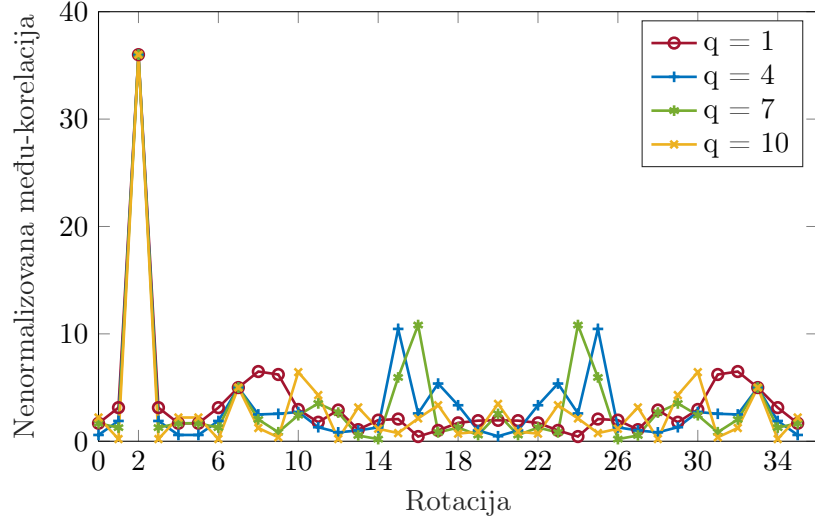


(a) $\sum_{i_3=1}^{12} \phi_{jk}^*[i_3 - 1] \phi_{l'i'}^{(i_4-1)}[i_3 - 1]$

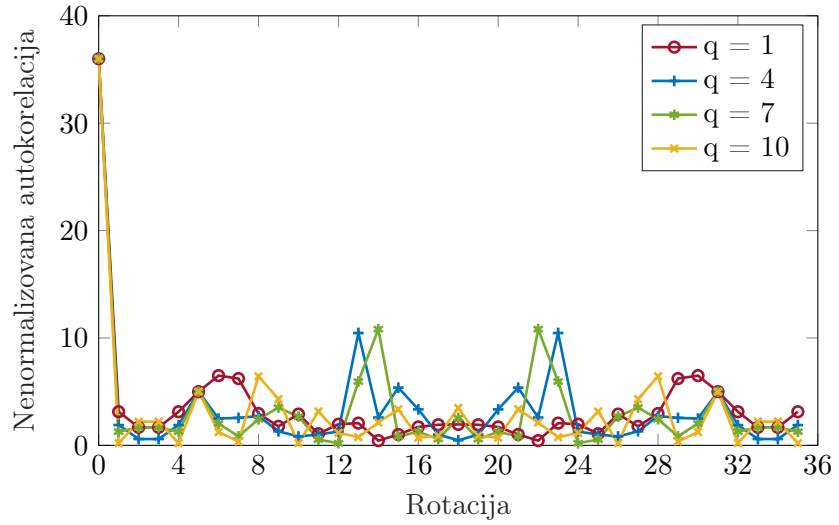


(b) $\sum_{i_3=1}^{12} \phi_{jk}[i_3 - 1] \phi_{jk}^{*(i_4-1)}[i_3 - 1]$

Slika 4.2: Zadof-Ču sekvence dužine 11 su ciklično produžene do dužine 12. Za parove novonastalih dužina sekvenci $N_{\text{Zadof-Ču, cikl. pr.}}$ i indeksa korena q , vrednosti među-korelacija i autokorelacija se menjaju u parovima. Indeksi korena $q \in \{1, 10\}$ pružaju identične vrednosti među-korelacija, odnosno autokorelacija. Preostali indeksi korena, $q \in \{4, 7\}$ stvaraju zasebnu, ali za njih zajedničku zavisnost od broja rotacija. U poređenju sa slikom 4.1, primećuju se nesavršene korelacije za određeni broj rotacija.



(a) $\sum_{i_3=1}^{36} \phi_{jk}^*[i_3 - 1] \phi_{l'i'}^{(i_4-1)}[i_3 - 1]$



(b) $\sum_{i_3=1}^{36} \phi_{jk}[i_3 - 1] \phi_{jk}^{*(i_4-1)}[i_3 - 1]$

Slika 4.3: Zadof-Ču sekvence dužine 31 su ciklično produžene do dužine 36. Za parove novonastalih dužina sekvenci $N_{\text{Zadof-Ču, cikl. pr.}}$ i indeksa korena q , vrednosti među-korelacija i autokorelacija se brže menjaju u poređenju sa slikom 4.2, ali i ređe dostižu nultu vrednost. Indeksi korena su odabrani tako da u paru sa dužinom novonastale sekvence, $\{(1, 36), (7, 36)\}$ budu relativni prosti brojevi, odnosno tako da taj uslov nije ispunjen za parove $\{(4, 36), (10, 36)\}$.

4.1.1 Pilotska kontaminacija

U nastavku se uvode otežavajuće okolnosti prisutne u stvarnim sistemima. Na dalje, u posmatranom modelu sistema iz izraza (3.3) tokom procesa estimacije kanala javlja se fenomen tzv. pilotske kontaminacije. Da bi se ukazalo na uzroke ovog fenomena, uvode se prostorne autokorelacione matrice impulsnih odziva radio kanala korisnika k iz ćelije j i korisnika i iz ćelije l , na BS j , $\mathbf{R}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} \in \mathbb{C}^{M_j \times M_j}$ i $\mathbf{R}_{\mathbf{g}_{li}^j \mathbf{g}_{li}^j} \in \mathbb{C}^{M_j \times M_j}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} &= \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j (\mathbf{g}_{jk}^j)^H\} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{g}_{li}^j \mathbf{g}_{li}^j} &= \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{li}^j (\mathbf{g}_{li}^j)^H\},\end{aligned}\tag{4.13}$$

gde su

$$k \in \{1, \dots, K\}, j \in \{1, \dots, K_l\}, i \in \{1, \dots, K\}, l \in \{1, \dots, K_l\}.$$

Autokorelacione matrice iz (4.13) su međusobno ortogonalne kada je zadovoljen sledeći uslov

$$\mathbf{R}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} \mathbf{R}_{\mathbf{g}_{li}^j \mathbf{g}_{li}^j} = \mathbf{0}_{M_j \times M_j} \implies \text{tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} \mathbf{R}_{\mathbf{g}_{li}^j \mathbf{g}_{li}^j}) = 0,\tag{4.14}$$

pri čemu operator $\text{tr}\{\cdot\}$ predstavlja trag kvadratne matrice.

Pilotska kontaminacija postaje prisutna kao posledica nedovoljnog broja jedinstvenih pilotskih sekvenci za dodelu korisnicima, pri čemu svi korisnici koji dele (ponavljaju) takve pilotske sekvence poseduju međusobno neortogonalne prostorne autokorelacione matrice. U takvim slučajevima, spektralna efikasnost opada sa povećanjem stepena ponavljanja date pilotske sekvence. Dakle, čak i kada postoje korisnici koji dele pilotsku sekvencu, pilotska kontaminacija nastupa u trenucima neortogonalnosti prostornih korelacionih matrica korisnika ponavljajuće sekvence. Drugim rečima, dati sistem nije izložen pilotskoj kontaminaciji ukoliko je ispunjen barem jedan od sledeća dva dovoljna uslova:

1. Postoji dovoljan broj raspoloživih jedinstvenih pilotskih sekvenci za dodelu korisnicima iz knjige pilotskih sekvenci. Pilotska sekvenca jednog korisnika se sinhronizovano sa sekvencama ostalih aktivnih korisnika emituje ka svim baznim stanicama pozicioniranim u zonama servisa korisničkih predajnika. S obzirom na to da se pilotska sekvenca može posmatrati i kao vektor, njena dužina, odnosno intenzitet vektora, potvrđuje dimenzionalnost posmatrajućeg vektorskog prostora u kom se pomenuti vektor nalazi. Da bi ovakav vektorski prostor nastao, neophodno je da ga razapinje τ_p vektora iz standardne baze čija je dimenzionalnost τ_p . U takvom τ_p -dimenzionalnom vektorskom prostoru $\mathbb{V}^{\tau_p \times 1}(\mathbb{C})$, najveći jedinstveni skup sadrži upravo τ_p međusobno ortogonalnih vektora. Na ovaj način, u okviru definisanja raspoloživog broja jedinstvenih pilotskih sekvenci, došlo je, u stvari, do provere zadovoljenja uslova ortogonalnosti između samih pilotskih sekvenci koje su, takođe, smeštene u vektorskom prostoru $\mathbb{V}^{\tau_p \times 1}(\mathbb{C})$. To znači da u ovom slučaju nije

neophodno razmatrati ortogonalnost između prostornih korelacionih matrica bilo kog prisutnog korisnika iz 2. uslova, jer već postoji dovoljan broj jedinstvenih pilotskih sekvenci za svakog od njih.

2. Individualne prostorne autokorelacione matrice su ortogonalne između svih korisnika koji dele datu pilotsku sekvencu. Prema tome, nije potrebno proveravati ispunjenost 1. uslova. Čak i da postoji više korisnika koji zahtevaju pilotsku sekvencu od broja raspoloživih sekvenci, nakon ispunjenja 2. uslova, to neće izazvati pojavu pilotske kontaminacije.

4.2 Estimacija (trenutnih) stanja kanala

Radi podsećanja, trenutni impulsni odziv kanala jednog smera radio veze često se predstavlja realizacijama slučajnog vektora. Ovakav impulsni odziv nazivamo stvarnim. Ipak, stvarni impulsni odziv nije unapred poznat, pa ga je važno proceniti. Dakle, neophodno je proceniti realizacije slučajnih vektora, odnosno, skupove stvarnih trenutnih realizacija svih slučajnih vektora. Svaki estimator za procenu nepoznate promenljive koristi prethodno prikupljena opažanja/merenja u kojima je prisutna i promenljiva koja je predmet procene. Dakle, u rezultatima merenja ili opažanja postoji doprinos nepoznate promenljive, odnosno zavisnost od nje. Procenu je poželjno uraditi na strani baznih stanica i to između svih mogućih parova BS-MT. Na taj način, stiže se do procenjenog trenutnog stanja kanala svakog para u mreži. Zapravo, prikupljena je informacija o trenutnim stanjima kanala (CSI). Prema tome, termini „procenjeni trenutni impulsni odziv” i „informacija o trenutnom stanju kanala” označavaju isto, imajući na umu da se impulsni odziv, pored drugih sistemskih funkcija radio kanala, koristi za njegov potpuni opis.

Postoji više metoda za procenu trenutnih stanja kanala. Između ostalih, signalizacija pilotskim sekvencama izdvojila se kao vrlo pogodna metoda za datu svrhu. Polazna pretpostavka za ovu metodu je takva da su bazne stanice već dodelile pilotske sekvence korisnicima koji su im pristupili. Na taj način, mobilni terminali raspolazu pilotskim sekvencama i spremno pristupaju fazi obuke uzlaznog smera prenosa, što je i prvi korak procedure procene stanja kanala zasnovane na pilotskim sekvencama. Celokupna procedura sastoji se iz sledećeg redosleda koraka:

1. Na samom početku nastupa faza obuke u uzlaznom smeru prenosa koja traje τ_p odibraka. Tokom τ_p odbiraka stvara se složeni pilotski signal od doprinosa pojedinačnih korisnika u mreži. Takvi složeni signali prenose se kanalima opisanim pojedinačnim impulsnim odzivima. Konačno, složeni signali pristižu na bazne stanice - jedan složeni signal na jednu baznu stanicu.
2. Nakon faze obuke i proteklih τ_p odbiraka, svaki estimator na baznoj stanici množi/koreliše primljeni signal sa pojedinačnim pilotskim sekvencama svih aktivnih korisnika u celokupnoj mreži, odnosno onih korisnika koji su pružili svoj doprinos u stvaranju složenog pilotskog signala. Detalji obrade signala u pozadini nalaze se u (4.35). Ovo je vrlo važan korak za predstojeći uspešan rad bilo kog estimatora. Dakle, uzimaju se u obzir svi mobilni terminali iz sopstvenih i susednih ćelija u odnosu na bilo koju baznu stanicu. Od ovog

trenutka, estimatori poseduju izdvojene primljene signale (sekvence) koji sadrže: za sada, nepoznate kanalne odzive pojedinačnih korisnika, potencijalno neuklonjenu interferenciju usled ponavljanja pilotskih sekvenci, ali i šum.

3. Od ranije, estimatorima su poznate i pilotske sekvence svih mobilnih terminala koje su i sastavni deo složenih pilotskih signala. U ovom, ujedno i poslednjem koraku, zadatak estimatora se ogleda u težnji da što verodostojnije procene trenutna stanja svakog korisničkog kanala. Nakon posebne procedure procene koja se razlikuje od estimatora do estimatora, oni na svojim izlazima pružaju procene trenutnih stanja kanala.

Estimator započinje odgovarajuću procenu pojedinačnog kanala po isteku τ_p odbiraka od trenutka prijema prvog polja vektora korisničke pilotske sekvence određenog korisnika. Aktuelnost procena kanala zavisi od dinamičnosti propagacionog okruženja u kome se nalaze pokretni korisnički terminali i nepokretne bazne stanice. Radi podsećanja, trajanje koherentnog bloka je uređeno samim sistemom i iznosi, upravo, τ_c . Ovaj rad razmatra sistem koji je dizajniran tako da estimator kanala jedanput svakih τ_c odbiraka poseže za ažuriranjem procena svih korisničkih kanala. Učestalnost procenjivanja kanala ostaje ista, čak iako se ne dogode značajne promene prvih i drugih statističkih momenata kanalnih impulsnih odziva po isteku τ_c odbiraka. Sam postupak estimacije kanala potpomognut pilotskim sekvencama podrazumeva utrošak vremenskog resursa u trajanju od τ_p odbiraka, tako da se upotrebljivi deo svakog koherentnog bloka umanjuje za navedeni broj odmeraka.

Pojedine klase estimatora zahtevaju posedovanje delimičnih ili „potpunih” statističkih predznanja o prikupljenim merenjima/opažanjima, što je preduslov za uspešno rešavanje 3. koraka u prethodnoj listi. Za potrebe estimacije trenutnih stanja kanala, opažanja su, kao što se videlo, prvo bivala opisana složenim signalima od doprinosa svih korisnika, te izdvojenim pojedinačnim korisničkim signalima. Dakle, pojedini estimatori zahtevaju delimična ili potpuna predznanja o složenim signalima, odnosno, izdvojenim pojedinačnim korisničkim signalima. Delimična predznanja se karakterišu statističkim momentima prvog i drugog reda. Potpuna predznanja podrazumevaju poznavanje funkcija raspodela slučajnih promenljivih. Očigledno, sve slučajne promenljive impulsnog odziva kanala združeno doprinose opserviranom slučajnom vektoru. Poznavanje delimične ili potpune raspodele slučajnog vektora otvara put ka proceni njegovih realizacija, tj. ka procenjenom trenutnom impulsnom odzivu bilo kog kanala.

Bajesovi estimatori su istaknuti predstavnici klase koja zahteva određena statistička predznanja za prikupljena merenja ili opažanja, pa će o njima biti reči u sekciji 4.3.

4.3 Bajesovi estimatori

Kod ovog postupka estimacije, nepoznata promenljiva koja je predmet estimacije, u stvari, predstavlja realizaciju druge slučajne promenljive sa delimično ili potpuno poznatom statističkom raspodelom, prema [8]. U teoriji estimacije često se koristi

pojam „gubitka” za meru štetnosti donošenja **konkretne pogrešne odluke** tokom procene. Cilj Bajesovog estimatora je minimizacija Bajesovog rizika, $\mathbb{E}\{l(\cdot, \cdot)\}$, tj. očekivane vrednosti cene za datu funkciju cene, $l(\cdot, \cdot)$. Namena funkcije cene je utvrđivanje pravila odlučivanja, pri čemu ona ukazuje i na količinu štetnosti koju uvodi **svaka od donesenih odluka**.

Bajesov rizik za procenu (nepoznatog) trenutnog stanja impulsnog odziva kanala između j-te BS i k-tog MT u j-toj ćeliji, \mathbf{g}_{jk}^j , zapisuje se kao:

$$\mathbb{E}\{l(\mathbf{g}_{jk}^j, \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j(\mathbf{y}_{jk}^j))\}, \quad (4.15)$$

gde se odluka o procenjenom impulsnom odzivu, $\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j$, donosi na osnovu poznavanja primljenog signala, \mathbf{y}_{jk}^j . Za Bajesov rizik je definisano mnoštvo funkcija cene, tako da dizajner estimatora brine o izgledu funkcije cene, $l(\mathbf{g}_{jk}^j, \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j(\mathbf{y}_{jk}^j))$. Zbog prisustva operatora matematičkog očekivanja, $\mathbb{E}\{\cdot\}$, u sekciji 4.3.1 se razmatraju funkcije gustine raspodele verovatnoća kanalnog odziva, \mathbf{g}_{jk}^j . Alternativno, upotrebljavaju se statistički momenti datog kanalnog odziva, o čemu će biti više reči u 4.4. Pošto je delimična ili potpuna statistika kanalnog odziva u praktičnim okolnostima unapred nepoznata, za upotrebu Bajesovog estimatora neophodno je izvršiti njenu procenu, što prevazilazi okvire ovog rada.

Za funkciju cene u ovom radu razmatraće se ℓ^2 -norma, što je vektorska norma kvadratne razlike nepoznatih slučajnih vektora: \mathbf{g}_{jk}^j i $\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j(\mathbf{y}_{jk}^j)$. U nastavku izlaganja Bajesovih estimatora, koristiće se i kraći zapis, $\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j$ za $\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j(\mathbf{y}_{jk}^j)$.

4.3.1 Estimator minimalne srednje kvadratne greške

Za izražavanje razlike nepoznatih slučajnih vektora \mathbf{g}_{jk}^j i $\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j(\mathbf{y}_{jk}^j)$ može se uvesti novi vektor, $\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j$,

$$\mathbf{g}_{jk}^j - \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j(\mathbf{y}_{jk}^j) = \tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j, \quad (4.16)$$

koji se naziva greškom estimacije.

Primenom ℓ^2 -norme vektora greške estimacije na obe strane jednakosti izraza (4.16), nastaje sledeći oblik:

$$\|\mathbf{g}_{jk}^j - \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j(\mathbf{y}_{jk}^j)\| = \|\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j\| = \sqrt{(\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j)^H (\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j)} = \sqrt{(\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j)^T (\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j)^*}. \quad (4.17)$$

Dakle, ℓ^2 -norma je jednaka unutrašnjem proizvodu vektora greške estimacije, $\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j$, sa samim sobom.

Kvadriranjem izraza (4.17), dolazi se do funkcije cene, $l(\mathbf{g}_{jk}^j, \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j(\mathbf{y}_{jk}^j))$, razmatranog estimatora:

$$\|\mathbf{g}_{jk}^j - \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j(\mathbf{y}_{jk}^j)\|^2 = l(\mathbf{g}_{jk}^j, \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j(\mathbf{y}_{jk}^j)). \quad (4.18)$$

Prikazana funkcija cene predstavlja, očigledno, kvadriranu ℓ^2 -normu greške estimacije vektora \mathbf{g}_{jk}^j .

U nastavku, postavljanjem operatora matematičkog očekivanja ispred izraza (4.18) za funkciju cene, dolazi se do oblika koji se naziva srednjom kvadriranom ℓ^2 -normom greške estimacije vektora \mathbf{g}_{jk}^j . Oblik

$$\mathbb{E}\{\|\mathbf{g}_{jk}^j - \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j(\mathbf{y}_{jk}^j)\|^2\} = \mathbb{E}\{l(\mathbf{g}_{jk}^j, \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j(\mathbf{y}_{jk}^j))\}, \quad (4.19)$$

naziva se i Bajesovim rizikom za estimator od trenutnog interesa. Estimator koji za funkciju cene iz izraza (4.18) minimizuje Bajesov rizik u izrazu (4.19), može se nazvati Bajesovim estimatorom kvadrirane ℓ^2 -norme greške. Međutim, njegov najčešće korišćen naziv je estimator minimalne srednje kvadratne greške. Prema tome, poslednje zapisani naziv će se upotrebljavati i u ovom radu.

U opštem slučaju, razmatrani estimator, $\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j$, u izrazu (4.19) može biti nelinearno zavisn od primljenog signala, \mathbf{y}_{jk}^j . U skladu sa tim, funkcija zavisnosti procene trenutnog kanalnog odziva od primljenog signala je opšteg oblika:

$$\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j = \mathbb{E}\{\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j | \mathbf{y}_{jk}^j\} = \int \mathbf{g}_{jk}^j f(\mathbf{g}_{jk}^j | \mathbf{y}_{jk}^j) d\mathbf{g}_{jk}^j, \quad (4.20)$$

pri čemu, $f(\mathbf{g}_{jk}^j | \mathbf{y}_{jk}^j)$ označava funkciju uslovne gustine verovatnoće kanalnog odziva, \mathbf{g}_{jk}^j , od primljenog signala, \mathbf{y}_{jk}^j . Zahvaljujući Bajesovoj teoremi,

$$f(\mathbf{g}_{jk}^j | \mathbf{y}_{jk}^j) = \frac{f(\mathbf{y}_{jk}^j | \mathbf{g}_{jk}^j) f(\mathbf{g}_{jk}^j)}{f(\mathbf{y}_{jk}^j)}, \quad (4.21)$$

unapred nepoznata i zahtevana funkcija uslovne gustine verovatnoće, $f(\mathbf{g}_{jk}^j | \mathbf{y}_{jk}^j)$, može se i odrediti. Konkretno, zahteva se poznavanje $f(\mathbf{y}_{jk}^j | \mathbf{g}_{jk}^j)$, tj. funkcije uslovne verovatnoće, primljenog signala, \mathbf{y}_{jk}^j , od kanalnog odziva, \mathbf{g}_{jk}^j . Pored toga, Bajesova teorema zahteva i upotrebu marginalnih gustina verovatnoće kanalnog odziva i primljenog signala. Poštujući redosled navođenja marginalnih gustina verovatnoća, one su označene sa $f(\mathbf{g}_{jk}^j)$ i $f(\mathbf{y}_{jk}^j)$.

Kao što se iz izraza (4.20) može zaključiti, ključno je unapred poznavati $f(\mathbf{g}_{jk}^j | \mathbf{y}_{jk}^j)$ ili je odrediti pomoću izraza (4.21). Srećom, postoje specijalni slučajevi kada nije neophodno poznavati pomenutu funkciju, niti je određivati. Preciznije, upotreba linearnog estimatora minimalne srednje kvadratne greške dovodi do olakšavajuće okolnosti.

4.4 Linearni estimator minimalne srednje kvadratne greške

Kada se estimator, $\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j$, u izrazu (4.19), ograniči isključivo na linearnu ili afinu zavisnost od primljenog signala \mathbf{y}_{jk}^j , tada dati estimator postaje linearan. Dakle, linearni estimator minimalne srednje kvadratne greške se zapisuje kao

$$\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j = \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j + \mathbf{b}_{jk}^j, \quad (4.22)$$

gde se kvadratna matrica $\mathbf{A}_{jk}^j \in \mathbb{C}^{M_j \times M_j}$ i vektor-kolona $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{M_j \times 1}$ združeno biraju u cilju minimizacije Bajesovog rizika za pomenuti estimator.

Bajesov rizik, $\mathbb{E}\{\|\mathbf{g}_{jk}^j - (\mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j + \mathbf{b})\|^2\}$ minimizuje se odabirom parametara $\mathbf{A}_{jk,\min}^j$ i $\mathbf{b}_{jk,\min}^j$ na sledeći način:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{jk,\min}^j &= \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} \\ \mathbf{b}_{jk,\min}^j &= \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}.\end{aligned}\quad (4.23)$$

Teorema 4.1. *Procena trenutnog stanja kanala korisnika k iz ćelije j na baznoj stanici j računa se u skladu sa*

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j &= \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j + \mathbf{b}_{jk}^j \Big|_{\mathbf{A}=\mathbf{A}_{jk,\min}^j, \mathbf{b}=\mathbf{b}_{jk,\min}^j} \\ &= \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} + \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} (\mathbf{y}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}),\end{aligned}\quad (4.24)$$

pri čemu važi da su

$$\mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} = \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\})(\mathbf{y}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})^H\} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} = \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})(\mathbf{y}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})^H\}^{-1}. \quad (4.26)$$

Dokaz. Teorema 4.1 dokazana je u A.2.1. □

Srednja kvadratna greška pri proceni pomenutog kanalnog odziva data je sa

$$\text{MSE}_{jk}^j = \mathbb{E}\{\|\mathbf{g}_{jk}^j - \underbrace{(\mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j + \mathbf{b}_{jk}^j)}_{\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j \text{ iz (4.22)}}\|^2\} = \text{tr}(\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j}) \quad (4.27)$$

gde je kovarijansna matrica pogrešne procene, $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j} \in \mathbb{C}^{M_j \times M_j}$ zapisana kao

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j} = \mathbb{E}\{(\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j\})(\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j\})^H\}. \quad (4.28)$$

Minimizovana srednja kvadratna greška linearnog Bajesovog estimatora za korisnika k iz ćelije j na baznoj stanici j zapisuje se prema

$$\begin{aligned}\text{LMMSE}_{jk}^j &= \mathbb{E}\{\|\mathbf{g}_{jk}^j - \underbrace{(\mathbf{A}_{jk,\min}^j \mathbf{y}_{jk}^j + \mathbf{b}_{jk,\min}^j)}_{\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j \text{ iz (4.24)}}\|^2\} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{minimizovani Bajesov rizik}} \\ &= \text{tr}(\underbrace{\mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j}^H}_{=\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j}}). \end{aligned}\quad (4.29)$$

Kovarijansna matrica pogrešne procene iz (4.28), ovoga puta, kada je minimizovana srednja kvadratna greška, ima oblik

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j} = \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j}^H. \quad (4.30)$$

Interesantno je da u slučaju estimatora u (4.24), kovarijansna matrica greške iz (4.30) predstavlja ujedno i korelacionu matricu greške, $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j \tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j} \in \mathbb{C}^{M_j \times M_j}$, pošto je $\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j\} = \mathbf{0}_{M_j \times 1}$. Dakle, zapisuje se jednačina

$$\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j \tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j} = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j \tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j} = \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j (\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j)^H\} = \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j - \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j)(\mathbf{g}_{jk}^j - \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j)^H\}. \quad (4.31)$$

Dokaz. Jednačina (4.31) dokazana je u A.2.2. \square

Prilikom računanja LMMSE_{jk}^j u (4.29), dovoljno je posmatrati korelacionu matricu greške iz (4.31), odnosno,

$$\text{LMMSE}_{jk}^j = \text{tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} - \mathbf{R}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{R}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} \mathbf{R}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j}^H). \quad (4.32)$$

Upoređivanjem $\mathbf{A}_{jk,\min}^j$ i $\mathbf{b}_{jk,\min}^j$, primećuje se da $\mathbf{A}_{jk,\min}^j$ sadrži isključivo statističke momente drugog reda, dok se $\mathbf{b}_{jk,\min}^j$ sastoji iz statističkih momenata i prvog i drugog reda slučajnih vektora \mathbf{g}_{jk}^j i \mathbf{y}_{jk}^j . Izvedeni linearni estimator srednje kvadratne greške može se upotrebiti i u svrhu estimacije trenutnih stanja kanala koja nije potpomognuta prenosom poznatih pilotskih sekvenci. S obzirom na to da ovaj rad postavlja naglasak na estimaciju trenutnih stanja kanala potpomognutu pilotskim sekvencama, proračun procene $\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j$ u (4.24) koristiće i primljene pilotske sekvence.

Neka je pilotska knjiga Φ odabrana tako da zadovoljava uslov $\Phi^H \Phi = \tau_p \mathbf{I}_{\tau_p}$. Sada se može uspostaviti unutrašnji proizvod nad Φ između bilo koje pilotske sekvence (uključujući i sekvencu ϕ_{jk}) sa sekvencom ϕ_{jk} ,

$$\phi_{l'i'}^T \phi_{jk}^* = \begin{cases} \tau_p & \text{ako } (l', i') \in \mathcal{P}_{jk} \\ 0 & \text{inače.} \end{cases} \quad (4.33)$$

Skup \mathcal{P}_{jk} sadrži sve korisnike kojima je dodeljena identična pilotska sekvenca kao korisniku k iz ćelije j ,

$$\mathcal{P}_{jk} = \{(l', i') : \phi_{l'i'} = \phi_{jk} \quad l' = 1, \dots, L, \quad i' = 1, \dots, K \\ (l'', i'') : \phi_{l''i''} = \phi_{jk} \quad l'' = 1, \dots, L, \quad i'' = 1, \dots, K\}, \quad (4.34)$$

gde je podrazumevano da $(j, k) \in \mathcal{P}_{jk}$.

Prema modelu sistema iz (3.6) primenjujući (4.33) i (4.34), važi da je

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{jjk}^p &= \mathbf{Y}_j^p \phi_{jk}^* \\ &= \sum_{l'=1}^L \sum_{i'=1}^K \sqrt{p_{l'i'}} \mathbf{g}_{l'i'}^j \phi_{l'i'}^T \phi_{jk}^* + \mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \\ &= \underbrace{\sum_{(l', i') \notin \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l'i'}} \mathbf{g}_{l'i'}^j \phi_{l'i'}^T \phi_{jk}^*}_{= \mathbf{0} \in \mathbb{C}^{M_j \times 1}} + \sum_{(l', i') \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l'i'}} \mathbf{g}_{l'i'}^j \phi_{l'i'}^T \phi_{jk}^* + \mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \quad (4.35) \\ &= \sum_{(l', i') \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l'i'} \tau_p} \mathbf{g}_{l'i'}^j + \mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*. \end{aligned}$$

Na osnovu dodatnog elementa u $\mathbf{y}_{jjk}^p \in \mathbb{C}^{M_j \times 1}$ prateći (4.35), radi se o prijemnoj sekvenci koja je projektovana na konkretnu pilotsku sekvencu, sa ciljem da se uklone signali povezani sa ortogonalnim pilotskim sekvencama. Dakle,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{jjk,\min}^p &= \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} \Big|_{\mathbf{y}_{jk}^j = \mathbf{y}_{jjk}^p} \\ \mathbf{b}_{jjk,\min}^p &= \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} \Big|_{\mathbf{y}_{jk}^j = \mathbf{y}_{jjk}^p}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Važi da su:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jjk}^p} &= \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\})(\mathbf{y}_{jjk}^p - \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jjk}^p\})^H\} \\ &= \sqrt{p_{jk}} \tau_p \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Dokaz. Jednačina (4.37) dokazana je u A.2.3. \square

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jjk}^p \mathbf{y}_{jjk}^p}^{-1} &= \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jjk}^p - \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jjk}^p\})(\mathbf{y}_{jjk}^p - \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jjk}^p\})^H\}^{-1} \\ &= \left(\sum_{\{(l',i'),(l'',i'')\} \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l'i'} p_{l''i''}} (\tau_p)^2 \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l'i'}^j \mathbf{g}_{l''i''}^j} + \mathbf{C}_{\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Dokaz. Jednačina (4.38) dokazana je u A.2.4. \square

Zamenom (4.35) u (4.36) dolazi se do traženih parametara $\mathbf{A}_{jjk,\min}^j$ i $\mathbf{b}_{jjk,\min}^j$ za slučaj kada su korisnici poslali pilotsku sekvencu $\phi_{l'i'}$, tj. ϕ_{jk} , tako da je na baznoj stanici j primljen signal \mathbf{y}_{jjk}^p :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{jjk,\min}^p &= \sqrt{p_{jk}} \tau_p \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} \\ &\quad \times \left(\sum_{\{(l',i'),(l'',i'')\} \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l'i'} p_{l''i''}} (\tau_p)^2 \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l'i'}^j \mathbf{g}_{l''i''}^j} + \mathbf{C}_{\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*} \right)^{-1} \\ \mathbf{b}_{jjk,\min}^p &= \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \sqrt{p_{jk}} \tau_p \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} \\ &\quad \times \left(\sum_{\{(l',i'),(l'',i'')\} \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l'i'} p_{l''i''}} (\tau_p)^2 \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l'i'}^j \mathbf{g}_{l''i''}^j} + \mathbf{C}_{\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*} \right)^{-1} \\ &\quad \times \mathbb{E}\left\{ \left(\sum_{(l',i') \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l'i'}} \tau_p \mathbf{g}_{l'i'}^j + \mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

podrazumevajući da su

$$\mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} = \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\})(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\})^H\} \quad (4.40)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*} = \mathbb{E}\{(\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* - \mathbb{E}\{\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*\})(\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* - \mathbb{E}\{\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*\})^H\}. \quad (4.41)$$

Pod pretpostavkom da je predmet estimacije frekvencijski ravan i vremenski nepromenljiv kanal u periodu od τ_c odbiraka, konačno, njegova procena, $\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j$, ostvaruje se prema izrazu

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j &= \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j + \mathbf{b}_{jk}^j \Big| \mathbf{A} = \mathbf{A}_{jjk, \min}^p, \mathbf{b} = \mathbf{b}_{jjk, \min}^p, \mathbf{y}_{jk}^j = \mathbf{y}_{jjk}^p \\ &= \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} + \sqrt{p_{jk}} \tau_p \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} \\ &\quad \times \left(\sum_{\{(l', i'), (l'', i'')\} \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l'i'} p_{l''i''}} (\tau_p)^2 \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l'i'}^j \mathbf{g}_{l''i''}^j} + \mathbf{C}_{\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*} \right)^{-1} \quad (4.42) \\ &\quad \times \left(\mathbf{y}_{jjk}^p - \left(\sum_{(l', i') \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l'i'}} \tau_p \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{l'i'}^j\} + \mathbb{E}\{\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*\} \right) \right).\end{aligned}$$

Kovarijansna matrica greške za minimizovanu srednju kvadratnu grešku estimatora iz (4.42) je oblika

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j \tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j} &= \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jjk}^p} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jjk}^p \mathbf{y}_{jjk}^p}^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jjk}^p \mathbf{g}_{jk}^j}^H \\ &= \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} - p_{jk} (\tau_p)^2 \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} \\ &\quad \times \left(\sum_{\{(l', i'), (l'', i'')\} \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l'i'} p_{l''i''}} (\tau_p)^2 \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l'i'}^j \mathbf{g}_{l''i''}^j} + \mathbf{C}_{\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*} \right)^{-1} \\ &\quad \times \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j}^H.\end{aligned} \quad (4.43)$$

U skladu sa tim, minimizovana srednja kvadratna greška je

$$\begin{aligned}\text{LMMSE}_{jk}^j &= \text{tr}(\mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j}) \\ &\quad - \text{tr} \left(p_{jk} \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} \left(\sum_{\{(l', i'), (l'', i'')\} \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l'i'} p_{l''i''}} \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l'i'}^j \mathbf{g}_{l''i''}^j} \right)^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j}^H \right) \quad (4.44) \\ &\quad - \text{tr} \left(p_{jk} (\tau_p)^2 \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} (\mathbf{C}_{\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*})^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j}^H \right).\end{aligned}$$

Iz prethodnog opšteg izlaganja o toku estimacije kanala, jasno je da po nastanku procene $\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j$, ona biva aktuelna najduže $\tau_c - \tau_p$ odbiraka. Takođe, $\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j$ se ažurira jedanput na početku svakog predstojećeg koherentnog bloka, pod uslovom da je korisnik k iz ćelije j i dalje aktivan. Dobijeni estimator za sve aktivne korisnike procenjuje stvarne impulsne odzive kanala koji su po svojoj prirodi međusobno statistički nezavisni.

U literaturi se mogu pronaći aproksimacije realističnog impulsnog odziva kanala. Aproksimacije nalažu uvođenje dodatnih relaksacionih uslova, osim pretpostavke o stacionarnom procesu u širem smislu. Često se uzima da impulsni odzivi kanala imaju nultu srednju vrednost, pored toga što su dobro opisani statističkim momentima drugog reda u konačnom trajanju. Uz to, smatra se da su kovarijanse (slučajne promenljive) u kovarijansnoj matrici skaliranog šuma na različitim

antenskim elementima međusobno nezavisne, pa samim tim i međusobno nekorelisane. Pod pomenutim relaksacionim osobinama odziv kanala, procena impulsnog odziva kanala, $\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j$ je oblika

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j &= \sqrt{p_{jk}} \mathbf{R}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} \\ &\times \left(\tau_p \sum_{(l', i') \in \mathcal{P}_{jk}} p_{l' i'} \mathbf{R}_{\mathbf{g}_{l' i'}^j \mathbf{g}_{l' i'}^j} + \text{diag}((\sigma_{\mathbf{N}_j^p})^2_{(1)}, \dots, (\sigma_{\mathbf{N}_j^p})^2_{(M_j)}) \mathbf{I}_{M_j} \right)^{-1} \\ &\times \left(\sum_{(l', i') \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l' i'} \tau_p} \mathbf{g}_{l' i'}^j + \mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \right), \end{aligned} \quad (4.45)$$

pri čemu je

$$\text{diag}((\sigma_{\mathbf{N}_j^p})^2_{(1)}, \dots, (\sigma_{\mathbf{N}_j^p})^2_{(M_j)}) = \begin{bmatrix} (\sigma_{\mathbf{N}_j^p})^2_{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\sigma_{\mathbf{N}_j^p})^2_{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\sigma_{\mathbf{N}_j^p})^2_{(M_j)} \end{bmatrix}.$$

Povrh svega, uz već pomenute pretpostavke, usvaja se da skalirani šum, $\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*$ ima nultu srednju vrednost. Kada su varijanse skaliranog šuma na svakom antenskom elementu jednake tako da iznose $(\sigma_{\mathbf{N}_j^p})^2$, onda se procena razmatranog impulsnog odziva kanala ostvaruje za parametre

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{jjk, \min}^p &= \sqrt{p_{jk}} \mathbf{R}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} \\ &\times \left(\sum_{\{(l', i'), (l'', i'')\} \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l' i'} p_{l'' i''}} \tau_p \mathbf{R}_{\mathbf{g}_{l' i'}^j \mathbf{g}_{l'' i''}^j} + (\sigma_{\mathbf{N}_j^p})^2 \mathbf{I}_{M_j} \right)^{-1} \\ \mathbf{b}_{jjk, \min}^p &= \mathbf{0}_{M_j \times 1}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

koji dovode do procene

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j &= \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j + \mathbf{b}_{jk}^j \Big|_{\substack{\mathbf{A}_{jk}^j = \mathbf{A}_{jjk, \min}^p, \\ \mathbf{b}_{jk}^j = \mathbf{b}_{jjk, \min}^p}} \\ &= \sqrt{p_{jk}} \mathbf{R}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} \\ &\times \left(\sum_{\{(l', i'), (l'', i'')\} \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l' i'} p_{l'' i''}} \tau_p \mathbf{R}_{\mathbf{g}_{l' i'}^j \mathbf{g}_{l'' i''}^j} + (\sigma_{\mathbf{N}_j^p})^2 \mathbf{I}_{M_j} \right)^{-1} \mathbf{y}_{jjk}^p, \end{aligned} \quad (4.47)$$

gde je $(\sigma_{\mathbf{N}_j^p})^2 \in \mathbb{R}$ varijansa skaliranog šuma koja je jednaka za sve antenske elemente.

U slučaju odabira estimatora u (4.47), minimizovana srednja kvadratna greška

iznosi

$$\begin{aligned} \text{LMMSE}_{jk}^j &= \text{tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j}) \\ &- \text{tr} \left(p_{jk} \mathbf{R}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} \left(\sum_{\{(l', i'), (l'', i'')\} \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l' i'} p_{l'' i''}} \mathbf{R}_{\mathbf{g}_{l' i'}^j \mathbf{g}_{l'' i''}^j} \right)^{-1} \mathbf{R}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j}^H \right) \quad (4.48) \\ &- \text{tr} \left(p_{jk} \tau_p \mathbf{R}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} ((\sigma_{\mathbf{N}_j}^p)^2 \mathbf{I}_{M_j})^{-1} \mathbf{R}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j}^H \right). \end{aligned}$$

4.4.1 Geometrijska predstava estimatora

Matrica \mathbf{A}_{jjk}^p je, zapravo, linearna transformacija $f: \mathbb{V}_1(\mathbb{F}_1) \rightarrow \mathbb{V}_2(\mathbb{F}_2)$, gde su \mathbb{V}_1 i \mathbb{V}_2 vektorski prostori nad poljima \mathbb{F}_1 i \mathbb{F}_2 , tim redom. Pošto je u radu usvojeno da $\mathbf{A}_{jjk}^p \in \mathbb{C}^{M_j \times M_j}$, za datu matricu važi: $\mathbb{F}_1 = \mathbb{C}$, $\mathbb{F}_2 = \mathbb{C}$, $\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_1^{M_j \times 1}$ i $\mathbb{V}_2 = \mathbb{V}_2^{M_j \times 1}$. Vektorski prostori $\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_1^{M_j \times 1}$ i $\mathbb{V}_2 = \mathbb{V}_2^{M_j \times 1}$ predstavljaju po jednu tačku u istom polju \mathbb{C} . Dakle, reč je o M_j -dimenzionim kompleksnim vektorskim prostorima. Primljeni signal je označen sa $\mathbf{y}_{jjk}^p \in \mathbb{V}_1^{M_j \times 1}(\mathbb{C})$, a vektor translacije sa $\mathbf{b}_{jjk}^p \in \mathbb{V}_2^{M_j \times 1}(\mathbb{C})$.

Ipak, za potrebe pojednostavljenog geometrijskog prikaza problema, isključivo u ovoj sekciji, pretpostaviće se da $\mathbf{A}_{jjk}^p \in \mathbb{R}^{M_j \times M_j}$. U realnim vektorskim prostorima $\mathbb{V}_1^{M_j \times 1}(\mathbb{R})$ i $\mathbb{V}_2^{M_j \times 1}(\mathbb{R})$, nalaze se vektori: \mathbf{y}_{jjk}^p i \mathbf{b}_{jjk}^p , tim redom. Usvaja se kratak zapis za vektorske prostore, $\mathbb{V}_1^{M_j \times 1}(\mathbb{R}) = \mathbb{V}_1^{M_j \times 1}$ i $\mathbb{V}_2^{M_j \times 1}(\mathbb{R}) = \mathbb{V}_2^{M_j \times 1}$. Posmatra se linearno preslikavanje vektora \mathbf{y}_{jjk}^p iz realnog vektorskog prostora $\mathbb{V}_1^{M_j \times 1}$ u $\mathbb{V}_2^{M_j \times 1}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{jjk}^p \mathbf{y}_{jjk}^p &= f(\mathbf{y}_{jjk}^p) \\ &= f(y_{jjk(1)}^p [\mathbf{e}]_1 + y_{jjk(2)}^p [\mathbf{e}]_2 + \dots + y_{jjk(M_j)}^p [\mathbf{e}]_{M_j}) \\ &= f(y_{jjk(1)}^p [\mathbf{e}]_1) + f(y_{jjk(2)}^p [\mathbf{e}]_2) + \dots + f(y_{jjk(M_j)}^p [\mathbf{e}]_{M_j}) \\ &= y_{jjk(1)}^p f([\mathbf{e}]_1) + y_{jjk(2)}^p f([\mathbf{e}]_2) + \dots + y_{jjk(M_j)}^p f([\mathbf{e}]_{M_j}) \quad (4.49) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} f([\mathbf{e}]_1) & f([\mathbf{e}]_2) & \dots & f([\mathbf{e}]_{M_j}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{jjk}^p} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{jjk(1)}^p \\ y_{jjk(2)}^p \\ \vdots \\ y_{jjk(M_j)}^p \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_{jjk}^p} \end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{jjk}^p &= [\mathbf{y}_{jjk}^p]_1 + [\mathbf{y}_{jjk}^p]_2 + \dots + [\mathbf{y}_{jjk}^p]_{M_j} \\ &= y_{jjk(1)}^p [\mathbf{e}]_1 + y_{jjk(2)}^p [\mathbf{e}]_2 + \dots + y_{jjk(M_j)}^p [\mathbf{e}]_{M_j} \quad (4.50) \\ &= \sum_{i=1}^M \mathbf{y}_{jjk(i)}^p [\mathbf{e}]_i. \end{aligned}$$

Važno je navesti da su

$$[\mathbf{e}]_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{e}]_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, [\mathbf{e}]_{M_j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

linearno nezavisni i ortonormirani vektori.

Primetno, u (4.50) dat je vektor \mathbf{y}_{jk}^j koji se izražava linearnom kombinacijom baznih vektora $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{M_j}\}$ u vektorskom prostoru $\mathbb{V}_1^{M \times 1}$. Vektorske komponente (koordinate vektora) \mathbf{y}_{jk}^j , označene su sa $\{y_{jk(1)}^j, y_{jk(2)}^j, \dots, y_{jk(M_j)}^j\}$.

Pogodno je istaći da važi jednakost

$$\begin{bmatrix} f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) & \dots & f(\mathbf{e}_{M_j}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{M_j}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) & \dots & f(\mathbf{e}_{M_j}) \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

dok za bazne vektore iz (4.51) važi da je

$$[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_{M_j}]^T = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_{M_j}]. \quad (4.53)$$

Prema tome, pravac vektora \mathbf{y}_{jjk}^p u vektorskom prostoru $\mathbb{V}_1^{M_j \times 1}$ nema uticaj na njegov pravac nakon linearnog preslikavanja u vektorski prostor $\mathbb{V}_2^{M_j \times 1}$. Smer i intenzitet preslikanog vektora, $\mathbf{A}_{jjk}^p \mathbf{y}_{jjk}^p$, određuju se prema (4.49). Pomenuto linearno preslikavanje prikazano je na slici 4.4a. Primetno, $\mathbf{A}_{jjk}^p \mathbf{y}_{jjk}^p$ predstavlja linearnu kombinaciju baznih vektora iz uređenog skupa $\{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_{M_j})\}$ u vektorskom prostoru $\mathbb{V}_2^{M_j \times 1}$, gde su komponente preslikanog vektora, $\mathbf{A}_{jjk}^p \mathbf{y}_{jjk}^p$, izražene sa $\{y_{jjk(1)}^p, y_{jjk(2)}^p, \dots, y_{jjk(M_j)}^p\}$.

Kada se prema izvedenom izrazu (4.47), komponente preslikanog vektora sabere sa komponentama vektora pomerača, dobija se i geometrijski prikaz izvedenog linearnog Bajesovog estimatora srednje kvadratne greške, kao na slici 4.4b. Dati estimator dostiže minimalnu srednju kvadratnu grešku kada je zadovoljen princip ortogonalnosti - vektor greške estimacije, $\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j$ upravan je na vektor koji se estimira, $\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j$, *akko*

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j, \mathbf{y}_{jjk}^p \rangle &= (\mathbf{y}_{jjk}^p)^H \tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j = \text{tr} \left(\mathbb{E} \{ \mathbf{y}_{jjk}^p (\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j)^H \} \right) = 0 \\ \implies \langle \tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j, \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j \rangle &= (\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j)^H \tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j = \text{tr} \left(\mathbb{E} \{ \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j (\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j)^H \} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Bitno je istaći da je, u opštem slučaju, unutrašnji proizvod, $\langle \tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j, \mathbf{y}_{jjk}^p \rangle$ definisan u Hilbertovom prostoru nad poljem kompleksnih brojeva. Međutim, na datoj slici se razmatra dvodimenzioni podprostor Hilbertovog prostora nad poljem realnih brojeva. Dodatno, na slici se može uočiti pravougli trougao čije su stranice obeležene

sa \mathbf{g}_{jk}^j , $\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j$ i $\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j$. Navedeni trougao pruža grafičku predstavu principa ortogonalnosti, očigledno, za estimator u (4.47).

Ako se posmatra dobijeni estimator u izrazu (4.42), pored provere ispunjenosti uslova (4.54), neophodno je proveriti jednakost

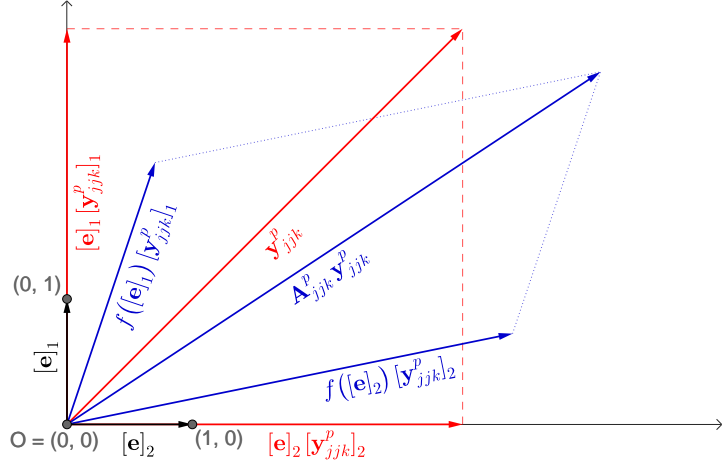
$$\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} = 0. \quad (4.55)$$

Pošto estimator u (4.55) procenjuje veličinu čiji je prvi statistički momenat nulti na osnovu merenja čija je uzoračka srednja vrednost, takođe, nulta, dovoljno je proveriti uslov iz (4.54).

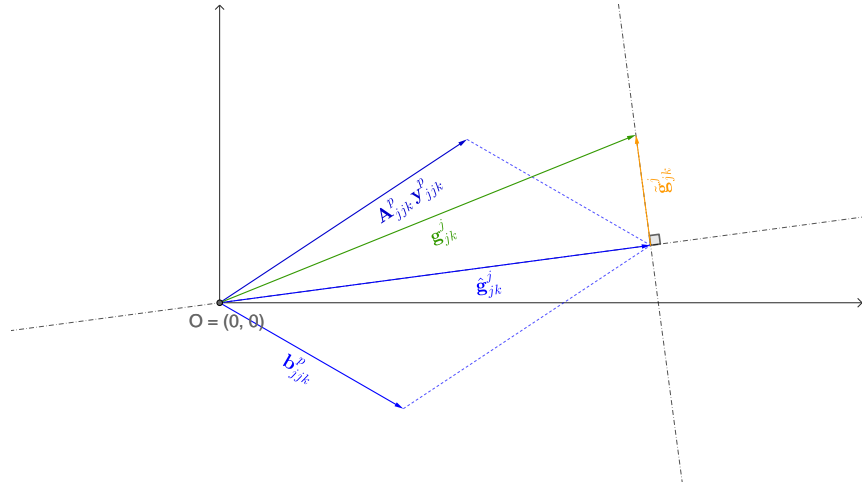
Pogodan je trenutak da se prikaže ograničenje linearnog Bajesovog estimatora. Ukoliko su vektor merenja i vektor koji se estimira međusobno nekorelisani tako da

$$\langle \mathbf{g}_{jk}^j, \mathbf{y}_{jjk}^p \rangle = (\mathbf{y}_{jjk}^p)^H \mathbf{g}_{jk}^j = \text{tr} \left(\mathbb{E} \{ \mathbf{y}_{jjk}^p \mathbf{g}_{jk}^j \}^H \right) = 0, \quad (4.56)$$

linearni Bajesov estimator srednje kvadratne greške ne treba upotrebljavati.



- (a) Vektori u izvornom vektorskom prostoru, $\mathbb{V}_1^{M_j \times 1}(\mathbb{R})$ označenom crvenom bojom i novonastalom vektorskom prostoru $\mathbb{V}_2^{M_j \times 1}(\mathbb{R})$ označenom plavom bojom.

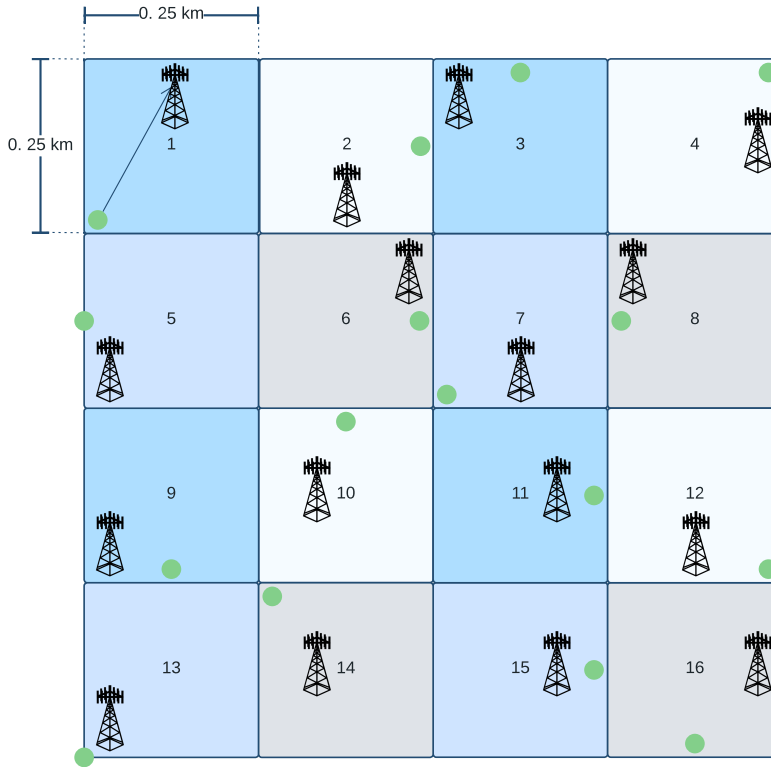


- (b) Lineararno preslikani vektori u ciljnom vektorskom prostoru, $\mathbb{V}_2^{M_j \times 1}(\mathbb{R})$, kao i vektor koji se estimira, $\mathbf{g}_{j,k}^j$ uz vektor greške njegove procene, $\hat{\mathbf{g}}_{j,k}^j$.

Slika 4.4: Geometrijski odnosi vektora od interesa u ravni tokom estimacije (trenutnog) stanja kanala. Pošto je za vektor $\mathbf{A}_{j,k}^p \mathbf{y}_{j,k}^p + \mathbf{b}_{j,k}^p$ minimizovan Bajesov rizik, sledi da je $\mathbf{A}_{j,k}^p = \mathbf{A}_{j,k,\min}^p$ i $\mathbf{b}_{j,k}^p = \mathbf{b}_{j,k,\min}^p$. Motivacija za grafičko predstavljanje razmatranog estimatora potiče iz radova [14] i [15].

4.5 Rezultati istraživanja

U prikazu mreže na slici 4.5 postoji $L = 16$ ćelija. Postoji po jedna bazna stanica u svakoj ćeliji. Bazine stanice su opremljene sa identičnim antenskim nizom sa uniformnim rastojanjem $d = \frac{\lambda}{2}$ između elemenata kojih ima $\forall j, M_j = 64$. U svakoj od ćelija nalaze se $K = 4$ fiksna korisnička terminala opremljena sa po jednom antenom. Preostali sistemski parametri preuzeti su iz [8, Sekcija 4.1.3].



Slika 4.5: Topologija baznih stanica i korisnika u mreži. Korisnici se povezuju na bazne stanice u ćeliji u kojoj se nalaze, ali prenose pilotske signale i baznim stanicama susednih ćelija. Radi pojednostavljenja ilustracije, prikazan je samo jedan korisnik po ćeliji. Faktor ponavljanja pilotskih sekvenci je $f = 4$, što je i broj ponavljanja svake nijanse boje za područja ćelija u mreži.

Estimiraju se korisnički kanali između svih kombinacija baznih stanica i korisničkih terminala u skladu sa tim da li se korisnici nalaze u istoj ćeliji j kao i bazna stanica ili u njoj obližnjoj ćeliji $l, l \neq j$.

Normalizovana srednja kvadratna greška pri proceni impulsnog odziva **unutarćeljskog korisnika**, tj. korisnika k iz ćelije j na baznoj stanici j , NMSE_{jk}^j definiše

se prema

$$\text{NMSE}_{jk}^j = \frac{\text{tr}(C_{\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j \tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j})}{\text{tr}(C_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j})}, \quad (4.57)$$

znajući da je srednja kvadratna greška datog korisnika označena sa $\text{tr}(C_{\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j \tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j})$ prethodno uvedena izrazima (4.27) i (4.28). Ova greška se normalizuje tragom autokovarijanske matrice stvarnog impulsnog odziva radio kanala razmatranog korisnika. Poslednje navedena autokovarijanska matrica prati izraz (4.40).

Normalizovana srednja kvadratna greška pri proceni impulsnog odziva **korisnika iz jedne od preostalih ćelija**, tj. korisnika k iz ćelije l na baznoj stanici j , NMSE_{lk}^j definiše se prema

$$\text{NMSE}_{lk}^j = \frac{\text{tr}(C_{\tilde{\mathbf{g}}_{lk}^j \tilde{\mathbf{g}}_{lk}^j})}{\text{tr}(C_{\mathbf{g}_{lk}^j \mathbf{g}_{lk}^j})} \quad (4.58)$$

gde se srednja kvadratna greška pomenutog korisnika, u oznaci $\text{tr}(C_{\tilde{\mathbf{g}}_{lk}^j \tilde{\mathbf{g}}_{lk}^j})$ izražava prema izrazu (4.27), kada se indeks korisničke ćelije, j zameni indeksom l . Autokovarijanska matrica pogrešne procene razmatranog korisničkog kanala, $C_{\tilde{\mathbf{g}}_{lk}^j \tilde{\mathbf{g}}_{lk}^j}$ prati izraz (4.28), dok je autokovarijanska matrica stvarnog impulsnog odziva radio kanala, $C_{\mathbf{g}_{lk}^j \mathbf{g}_{lk}^j}$ uzeta u obzir izrazom, (4.40), pri čemu je u oba slučaja neophodno da indeks korisničke ćelije postane l .

NMSE_{jk}^j i NMSE_{lk}^j odgovaraju na slučaj odabranom unutarćelijskom korisniku i korisniku iz preostalih ćelija, poštujući redosled navođenja.

Prosečna normalizovana srednja kvadratna greška pri proceni impulsnog odziva unutarćelijskih korisnika računa se prema

$$\overline{\text{NMSE}}_{\text{unutarćelijsko}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^L \frac{\text{tr}(C_{\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j \tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j})}{\text{tr}(C_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j})}. \quad (4.59)$$

Prosečna normalizovana srednja kvadratna greška pri proceni impulsnog odziva korisnika preostalih ćelija računa se prema

$$\overline{\text{NMSE}}_{\text{preostalih ćelija}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^L \sum_{l=1, l \neq j}^L \frac{\text{tr}(C_{\tilde{\mathbf{g}}_{lk}^j \tilde{\mathbf{g}}_{lk}^j})}{\text{tr}(C_{\mathbf{g}_{lk}^j \mathbf{g}_{lk}^j})}. \quad (4.60)$$

U oba slučaja se uprosečavanje izvršava prema korisniku k na nivou svih odgovarajućih ćelija. Nakon toga se dobijenih K vrednosti uprosečava i normalizuje sa brojem korisnika, K .

Na slici 4.6 se iscrtavaju grafici normalizovane srednje kvadratne greške, NMSE_{lk}^j u zavisnosti od faktora ponavljanja pilotskih sekvenci, $f \in \{1, 2, 4, 16\}$. Ekstremne vrednosti koje f uzima objašnjavaju se na sledeći način:

- Kada je $f = 1$, svaka ćelija ponavlja identični skup pilotskih sekvenci (tako da korisnik k u jednoj od ćelija koristi identičnu sekvencu kao korisnik k u svim ostalim ćelijama, dok je korisnik j jedne ćelije i dalje ortogonalan sa korisnikom k iz svoje i svih ostalih ćelija).

- Kada je $f = 16$, svaka ćelija koristi jedinstveni skup pilotskih sekvenci, što znači da su sada čak i korisnici k iz različitih ćelija međusobno ortogonalni. Dakle, bilo koja sekvenca je ortogonalna sa svim ostalim sekvencama gde god se njima odgovarajući korisnici nalazili u mreži.

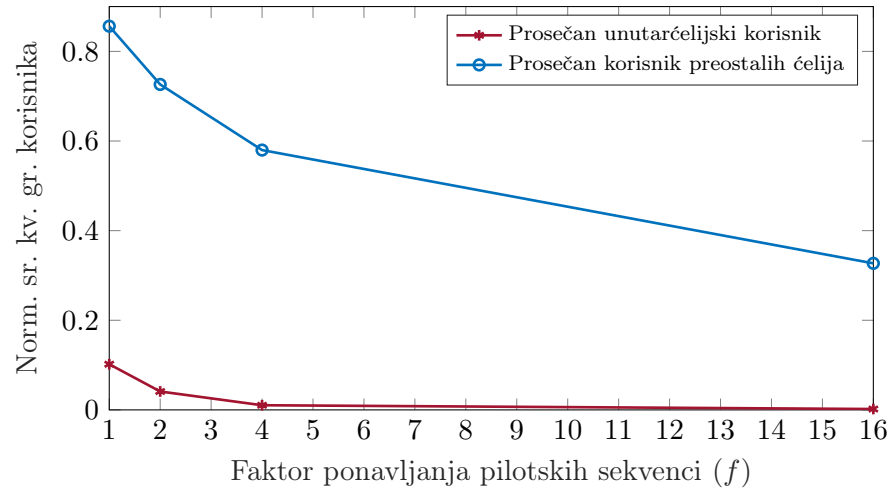
Na slikama 4.6a i 4.6b prikazani su rezultati za prosečnog i jednog odabranog korisnika. Termin „preostalih ćelija” podrazumeva i slučajeve kada se obližnja ćelija fizički ne graniči sa ćelijom gde se procena izvršava.

Vrednosti na slici 4.6a su intuitivno korektne, pošto se visoka vrednost greške estimacije dobija za korisničke kanale iz drugih ćelija, čiji se terminali nalaze na većim rastojanjima od terminala istoćelijskih korisničkih kanala. Kada ne postoji pilotska kontaminacija u mreži ($f = 16$), greška estimacije unutarćelijskih korisničkih kanala teži nuli, dok je za susednoćelijske korisničke kanale znatno viša. Ovakav ishod se može objasniti postojanjem uticaja drugih faktora na grešku estimacije, osim faktora ponavljanja pilotskih sekvenci. Ključni preostali faktori su predajna snaga željenog korisničkog signala i njegovo slabljenje na trasi, interferencija koja nije posledica pilotske kontaminacije i šum. Običan matrični proizvod između korisničkih prostornih autokorelacionih matrica impulsnih odziva radio kanala, prema izrazima (4.13) i (4.14) karakteriše značaj činilac interferencije. Preostali udeo u interferenciji pronalazi se u pilotskim signalima, gde se uočava i predajna snaga ometajućih antenskih signala. Ukupna interferencija pilotskih signala tokom estimacije impulsnih odziva radio kanala se može sagledati kao zbir dve interferencije:

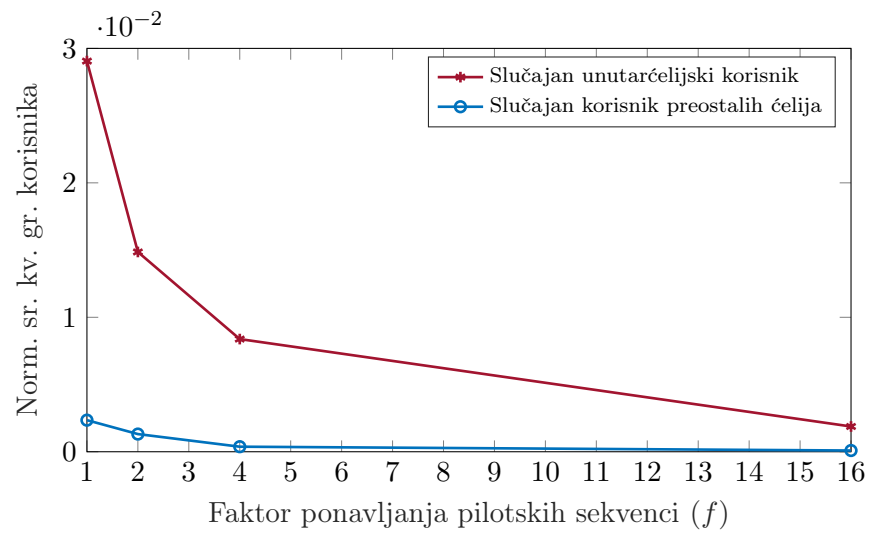
- nekoherentne koja ne raste linearno sa brojem antenskih elemenata, M_j i nije posledica pilotske kontaminacije i
- koherentne koja raste linearno sa brojem antenskih elemenata, M_j i posledica je pilotske kontaminacije.

S obzirom na to da istraživanja u literaturi pokazuju da je uslov ortogonalnosti autokorelacionih matrica iz (4.14) veoma retko zadovoljen u praksi, nekoherentna interferencija ostaje prisutna čak i kada se koherentna interferencija ukloni ortogonalnim pilotskim sekvencama. Dakle, pilotske sekvence ne utiču na smanjenje ili povećanje nekoherentne interferencije.

Vrednosti na slici 4.6b su iznenađujuće, ako se $NMSE_{lk}^j$ posmatra u zavisnosti od slabljenja željenog signala na trasi (bez fedinga usled senčenja), koherentne interferencije i šuma. Međutim, uračunavanjem fedinga usled senčenja, kao i uticaja nekoherentne interferencije na estimaciju željenog korisničkog kanala, postaje jasno zašto su rezultati korektni.



(a) Amplitudska karakteristika prosečnog korisnika



(b) Amplitudska karakteristika na slučaj odabranog korisnika

Slika 4.6: Zavisnost greške estimacije od faktora ponavljanja pilotskih sekvenci. Sve funkcije su opadajuće. Upotrebene su pilotske sekvence sa idealnim autokorelacionim i međukorelacionim osobinama, prema (4.33). Kovarijansne/korelacione matrice greške estimacije su apriori potpuno poznate. Pošto vredne usvojene pretpostavke za (4.48), zapravo se normalizuje minimizovana srednja kvadratna greška iz datog izraza.

Zaključci i dalja istraživanja

U tezi je prikazana dekompozicija impulsnog odziva kanala prema pojedinim dimenzijama višetrake propagacije: kašnjenje, Doplerov pomak i ugaoni pravci dolaska odlaska. Za tu namenu je korišćen model sistema iz reference [8], što nije relevantan pristup tipičnih radova o estimaciji. Prema uputstvima iz [11], modeluju se Zadof-Ču sekvence koje se koriste kao pilotske sekvence na osnovu kojih se procenjuje radio kanal. Kreira se pilotska knjiga koja se kao takva može upotrebiti u praktičnim sistemima za estimaciju sistemskih funkcija radio kanala, u skladu sa Bello-ovom notacijom. Među mogućim ekvivalentnim opcijama, u ovoj tezi je korišćen impulсни odziv. Računaju se autokorelacije i međukorelacije za različite rotacije sekvence koja nije produžena i ciklično produženih sekvenci, kao na graficima 4.1, 4.2 i 4.3. Međukorelacione osobine sekvenci pre njihovog prenosa kroz kanal, sa ciljem utvrđivanja „stepena ortogonalnosti” prikazane su na graficima 4.1a, 4.2a i 4.3a. Međusobno ortogonalne sekvence se smatraju idealnim. Na graficima 4.1a i 4.1b se primećuje minimalno odstupanje od teorijskih vrednosti autokorelacija i međukorelacija za idealne sekvence, koje može biti posledica konačne preciznosti korišćene računarske platforme.

Bajesov estimator procenjuje impulсни odziv kanala. Kroz odgovarajuća izvođenja, u radu su dati izrazi za autokovarijansnu matricu primljenog signala i međukovarijansnu matricu stvarnog kanalnog odziva i primljenog signala. Dobijeni izrazi omogućuju sagledavanje performansi estimatora čak i kada prvi statistički momenti odziva kanala i primljenog signala nisu jedanaki nuli. Ekvivalentne izraze, autor nije pronašao u raspoloživoj literaturi koja pretpostavlja nulte srednje vrednosti za prve statističke momente odziva i primljenog signala.

Simulirane su performanse linearnog estimatora korišćenjem prethodno dostupnih modela sistema iz pratećeg materijala, [8]. Pretpostavljeno je da estimator poseduje sva neophodna statistička predznanja za minimizaciju Bajesovog rizika. U dobijenim rezultatima dostignuta je minimalna srednja kvadratna greška impulsnog odziva među svim linearnim Bajesovim estimatorima za dati Bajesov rizik. Uzeta je u obzir otežavajuća okolnost prisutnosti pilotske kontaminacije u sistemu. Za tu namenu je korišćena poznata strategija ponavljanja pilotskih sekvenci među kombinacijama ćelija. Prikazani su grafici greške estimacije u zavisnosti od faktora ponavljanja sekvenci.

Ovaj rad razmatra pojednostavljenu geometrijsku predstavu estimatora, što prema saznanju autora, predstavlja nerazmatrani pogled na princip rada estimacije kanalnih odziva. Uz to, navedeno je i ograničenje za primenu bilo kog linearnog Bajesovog estimatora.

Prikazane performanse estimatora podrazumevaju identičnu raspodelu korisničke predajne snage, iako teorijska izvođenja u radu dopuštaju uključivanje strategije neravnomerne raspodele snage. U praktičnim sistemima nisu dostupna predznanja prvih i drugih statističkih momenata veličina iz Bajesovog rizika. Neophodno je estimirati ih. Čitaocu se predlaže metoda izložena u [16]. Metoda razmatra identičnu raspodelu snaga tokom estimacije statističkih momenata i samog kanalnog odziva, ali se uz određene modifikacije može prilagoditi neravnomernoj raspodeli snaga.

U radu se posmatraju ravni elektromagnetni talasi koji putuju ka antenskim poljima baznih stanica. Međutim, poželjno je analizirati performanse izloženog estimatora za sferne talase, odnosno u okolnostima kada se antensko polje nalazi u bliskim zonama zračenja korisničkog terminala u propagacionom kanalu. Predlaže se upotreba modela kanala iz [6] koji se može upotrebiti i u topologiji baznih stanica koje ne koriste ćelije. Polazna razmatranja ka pomenutoj analizi performansi estimatora za sferne talase mogu se pronaći u [17].

Estimatori koji koriste statistička predznanja ne bi bili jedan od prvih izbora za dizajnera mreže, kada bi se sistemska funkcija radio kanala izrazila u analitičkoj formi sačinjenoj od isključivo determinističkih komponenti. Štaviše, potreba za korišćenjem bilo kojih estimatora trenutnih stanja kanala bi se dovela u pitanje.

Definicije i dokazi

A.1 Definicije sa pripadajućim dokazima

Definicija A.1. *Kovarijansna matrica $\mathbf{C}_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}^{M_j \times M_j}$ i korelaciona matrica $\mathbf{R}_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}^{M_j \times M_j}$ slučajnih vektora $\alpha \in \mathbb{C}^{M_j \times 1}$ i $\beta \in \mathbb{C}^{M_j \times 1}$ smeštenih u proizvoljnim vektorskim prostorima, povezani su relacijom*

$$\mathbf{C}_{\alpha\beta} = \mathbb{E} \left\{ \left(\alpha - \mathbb{E}\{\alpha\} \right) \left(\beta - \mathbb{E}\{\beta\} \right)^H \right\} = \mathbf{R}_{\alpha\beta} - \mathbb{E}\{\alpha\} \mathbb{E}\{\beta^H\}, \quad (\text{A.1})$$

znajući da je $\mathbf{R}_{\alpha\beta} = \mathbb{E}\{\alpha(\beta)^H\}$.

Dokaz. Jednostavnim primenama osobina operatora matematičkog očekivanja i odgovarajućim množenjem članova u zagradama, dobija se

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\alpha\beta} &= \mathbb{E} \left\{ \left(\alpha - \mathbb{E}\{\alpha\} \right) \left(\beta - \mathbb{E}\{\beta\} \right)^H \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \alpha\beta^H - \alpha\mathbb{E}\{\beta^H\} - \mathbb{E}\{\alpha\}\beta^H + \mathbb{E}\{\alpha\}\mathbb{E}\{\beta^H\} \right\} \\ &= \mathbb{E}\{\alpha\beta^H\} - \mathbb{E}\{\alpha\mathbb{E}\{\beta^H\}\} - \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{\alpha\}\beta^H\} + \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{\alpha\}\mathbb{E}\{\beta^H\}\} \\ &= \mathbb{E}\{\alpha\beta^H\} - \mathbb{E}\{\alpha\}\mathbb{E}\{\beta^H\} - \mathbb{E}\{\alpha\}\mathbb{E}\{\beta^H\} + \mathbb{E}\{\alpha\}\mathbb{E}\{\beta^H\} \\ &= \mathbf{R}_{\alpha\beta} - \mathbb{E}\{\alpha\}\mathbb{E}\{\beta^H\}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

□

Definicija A.2. *Kvadratni trinom nad proizvoljnim vektor-kolonama $\{\alpha, \beta, \gamma\} \in \mathbb{C}^{M_j \times 1}$ iz proizvoljnog vektorskog prostora, razvija se prema,*

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)^H &= (\gamma - \beta + \alpha)(\gamma - \beta + \alpha)^H \\ &= \alpha\alpha^H + \beta\beta^H + \gamma\gamma^H + \alpha\gamma^H + \gamma\alpha^H - \alpha\beta^H - \beta\alpha^H - \beta\gamma^H - \gamma\beta^H. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Dokaz. Množenjem odgovarajućih članova se dolazi do krajnjeg izraza. □

A.2 Dokazi iz poglavlja 4

A.2.1 Dokaz teoreme 4.1

Da bi se ukazalo na neophodna predznanja povodom minimizacije Bajesovog rizika u slučaju datog linearnog estimatora, polazi se od jednačine (4.22). U skladu sa tim¹, sledi uvrštavanje (4.22) u (4.19),

$$\mathbb{E}\{\|\mathbf{g}_{jk}^j - \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j(\mathbf{y}_{jk}^j)\|^2\} = \mathbb{E}\{\|\mathbf{g}_{jk}^j - (\mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j + \mathbf{b}_{jk}^j)\|^2\} = \mathbb{E}\{\|\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j - \mathbf{b}_{jk}^j\|^2\}. \quad (\text{A.4})$$

Izraz (A.4) se može zapisati i upotrebom operatora traga matrice, u oznaci $\text{tr}(\cdot)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\|\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j - \mathbf{b}_{jk}^j\|^2\} &= \mathbb{E}\{\text{tr}((\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j - \mathbf{b}_{jk}^j) \\ &\quad \times (\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j - \mathbf{b}_{jk}^j)^H)\} \\ &= \mathbb{E}\{\text{tr}((\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j - \mathbf{b}_{jk}^j)((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - (\mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)^H - (\mathbf{b}_{jk}^j)^H))\} \\ &= \mathbb{E}\{\text{tr}((\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j - \mathbf{b}_{jk}^j)((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H - (\mathbf{b}_{jk}^j)^H))\}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Operatori matematičkog očekivanja i traga matrice jesu linearni operatori, tako da oba zadovoljavaju osobine aditivnosti i homogenosti. U zajedničkom prisustvu pomenuta dva operatora, oni međusobno komutiraju. Konkretno, ispravno je permutovati njihova mesta pojavljivanja u izrazu (A.5). Sledeći prethodno navedeno,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\{\text{tr}((\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j - \mathbf{b}_{jk}^j)((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H - (\mathbf{b}_{jk}^j)^H))\} \\ &= \text{tr}(\mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j - \mathbf{b}_{jk}^j)((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H - (\mathbf{b}_{jk}^j)^H)\}). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Kvadratni trinom $(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j - \mathbf{b}_{jk}^j)((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H - (\mathbf{b}_{jk}^j)^H)$ kompleksnih vrednosti, čine, između ostalog, ranije uvedeni parametri, \mathbf{A}_{jk}^j i \mathbf{b}_{jk}^j . Kako bi se oba nepoznata parametra i pronašla, predlaže se njihovo razdvajanje na dva polinoma. Raščlanjavanje je potrebno izvesti tako da jedan novonastali polinom sadrži samo jedan parametar, tj. ili \mathbf{A}_{jk}^j ili \mathbf{b}_{jk}^j . Preostali novonastali polinom će u tom slučaju uključiti oba navedena parametra. Dakle, zapisuje se

$$\begin{aligned} &\text{tr}(\mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j - \mathbf{b}_{jk}^j)((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H - (\mathbf{b}_{jk}^j)^H)\}) \\ &= \text{tr}(\mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H) \\ &\quad + (-\mathbf{b}_{jk}^j)((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H - (\mathbf{b}_{jk}^j)^H) + (\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)(-\mathbf{b}_{jk}^j)^H\}). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Pošto je već ustanovljeno da su operatori, $\mathbb{E}\{\cdot\}$ i $\text{tr}(\cdot)$ aditivni, dozvoljeno je posegnuti za ovom osobinom. Primenom aditivnosti pomenutih operatora razdvajaju

¹Dokaz razrađuje međukorake tokom izvođenja na osnovu sažetog dokaza iz [8, Sekcija B.4]. Identične rezultate dokaza je moguće postići upotrebom principa ortogonalnosti iz (4.54).

se njihovi uticaji na pojedinačne uticaje sabiraka,

$$\begin{aligned}
& \text{tr}(\mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H) \\
& \quad + (-\mathbf{b}_{jk}^j)((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H - (\mathbf{b}_{jk}^j)^H) + (\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)(-\mathbf{b}_{jk}^j)^H\}) \\
& = \text{tr}(\mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H)\}) \\
& \quad + \text{tr}(\mathbb{E}\{(-\mathbf{b}_{jk}^j)((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H - (\mathbf{b}_{jk}^j)^H) + (\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)(-\mathbf{b}_{jk}^j)^H\}).
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Izdvojeni matrični zbir iz izraza (A.8),

$$\begin{aligned}
& -\mathbf{b}_{jk}^j((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H - (\mathbf{b}_{jk}^j)^H) + (\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)(-\mathbf{b}_{jk}^j)^H \\
& = \mathbf{b}_{jk}^j((\mathbf{b}_{jk}^j)^H - (\mathbf{g}_{jk}^j)^H + (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H) + (\mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j - \mathbf{g}_{jk}^j)(\mathbf{b}_{jk}^j)^H
\end{aligned} \tag{A.9}$$

sastoji se od sabiraka unutar kojih je potrebno sprovesti operaciju množenja. Naknadno, nad zbirom datih kvadratnih matrica primenjuje se i osobina homogenosti i aditivnosti operatora matematičkog očekivanja. Nadovezujući se na (A.8) i (A.9), sledi

$$\begin{aligned}
& \text{tr}(\mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H)\}) \\
& \quad + \text{tr}(\mathbb{E}\{\mathbf{b}_{jk}^j((\mathbf{b}_{jk}^j)^H - (\mathbf{g}_{jk}^j)^H + (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H) + (\mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j - \mathbf{g}_{jk}^j)(\mathbf{b}_{jk}^j)^H\}) \\
& = \text{tr}(\mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H)\}) \\
& \quad + \text{tr}(\mathbb{E}\{\mathbf{b}_{jk}^j(\mathbf{b}_{jk}^j)^H - \mathbf{g}_{jk}^j(\mathbf{b}_{jk}^j)^H - \mathbf{b}_{jk}^j(\mathbf{g}_{jk}^j)^H + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j(\mathbf{b}_{jk}^j)^H \\
& \quad + \mathbf{b}_{jk}^j(\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H\}) \\
& = \text{tr}(\mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H)\}) \\
& \quad + \text{tr}(\mathbf{b}_{jk}^j(\mathbf{b}_{jk}^j)^H - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\}(\mathbf{b}_{jk}^j)^H - \mathbf{b}_{jk}^j \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\} + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}(\mathbf{b}_{jk}^j)^H \\
& \quad + \mathbf{b}_{jk}^j \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\}(\mathbf{A}_{jk}^j)^H).
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Da bi se zaključio sadržaj parametra \mathbf{b}_{jk}^j , potrebno je pogodnije zapisati poslednja dva reda iz (A.10). S obzirom na to da izdvojeni sabirci sadrže operator $\text{tr}(\cdot)$, unutar koga su svih pet članova predstavljeni u vidu proizvoda: \mathbf{A}_{jk}^j , $(\mathbf{A}_{jk}^j)^H$, \mathbf{b}_{jk}^j , $(\mathbf{b}_{jk}^j)^H$, $\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\}$, $\mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\}$, $\mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}$ i $\mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\}$, ističe se zamisao o stvaranju kvadrirane ℓ^2 -norme nad članovima: \mathbf{A}_{jk}^j , \mathbf{b}_{jk}^j , $\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\}$ i $\mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}$. Prevažhodno, potrebno je stvoriti kvadratni trinom, te nakon toga posegnuti za ℓ^2 -normom nad stvorenim kvadratnim trinomom.

Upoređivanjem $\mathbf{b}_{jk}^j(\mathbf{b}_{jk}^j)^H - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\}(\mathbf{b}_{jk}^j)^H - \mathbf{b}_{jk}^j \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\} + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}(\mathbf{b}_{jk}^j)^H + \mathbf{b}_{jk}^j \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\}(\mathbf{A}_{jk}^j)^H$, kao nepotpunog kvadratnog trinoma sa definicijom A.2, otkriva se da je $\alpha = \mathbf{b}_{jk}^j$, ili $\beta = \mathbf{b}_{jk}^j$, ili je pak $\gamma = \mathbf{b}_{jk}^j$. Zasluge za dati zaključak pripadaju postojanju jedinog kvadratnog člana, $\mathbf{b}_{jk}^j(\mathbf{b}_{jk}^j)^H$. Pošto se \mathbf{b}_{jk}^j pojavljuje

u članovima i sa pozitivnim i negativnim predznakom, a β isključivo u članovima sa negativnim predznakom, važi da je $\beta \neq \mathbf{b}_{jk}^j$. Zbog komutativnosti operacije sabiranja matrica (pa samim tim i vektora), ispravno je zaključiti:

$$(\alpha = \mathbf{b}_{jk}^j \wedge \gamma = \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}) \oplus (\alpha = \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} \wedge \gamma = \mathbf{b}_{jk}^j), \quad (\text{A.11})$$

gde \wedge označava operaciju logičkog „I”, dok \oplus označava operaciju ekskluzivnog „ILI”.

Za potrebe ovog rada, pretpostaviće se da važi tvrdnja $\alpha = \mathbf{b}_{jk}^j \wedge \gamma = \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}$. U tom slučaju, očigledno je $\beta = \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\}$.

Kada se pronađeni: $\alpha = \mathbf{b}_{jk}^j$, $\beta = \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\}$ i $\gamma = \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}$ uvrste u (A.3), a zatim, primeni osobina linearnosti Ermitovog konjugata pored operatora matematičkog očekivanja, stiže se i do razvoja kvadratnog trinoma,

$$\begin{aligned} & (\mathbf{b}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})(\mathbf{b}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})^H \\ &= \mathbf{b}_{jk}^j (\mathbf{b}_{jk}^j)^H \boxed{+ \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} (\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\})^H} \boxed{+ \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} (\mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})^H} \\ &+ \mathbf{b}_{jk}^j (\mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})^H + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} (\mathbf{b}_{jk}^j)^H - \mathbf{b}_{jk}^j (\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\})^H - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} (\mathbf{b}_{jk}^j)^H \\ &\boxed{- \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} (\mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})^H} \boxed{- \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} (\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\})^H} \\ &= \mathbf{b}_{jk}^j (\mathbf{b}_{jk}^j)^H + \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} (\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\})^H + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} (\mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H \\ &+ \mathbf{b}_{jk}^j (\mathbf{A}_{jk}^j)^H (\mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})^H + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} (\mathbf{b}_{jk}^j)^H - \mathbf{b}_{jk}^j (\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\})^H \\ &- \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} (\mathbf{b}_{jk}^j)^H - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} (\mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} (\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\})^H \\ &= \mathbf{b}_{jk}^j (\mathbf{b}_{jk}^j)^H + \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\} + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\} (\mathbf{A}_{jk}^j)^H \\ &+ \mathbf{b}_{jk}^j (\mathbf{A}_{jk}^j)^H \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\} + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} (\mathbf{b}_{jk}^j)^H - \mathbf{b}_{jk}^j \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\} \\ &- \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} (\mathbf{b}_{jk}^j)^H - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\} (\mathbf{A}_{jk}^j)^H - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Uočavaju se uokvireni članovi u (A.12) koji su doprineli stvaranju kvadratnog trinoma, $\mathbf{b}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}$ i $(\mathbf{b}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})^H$, a nisu postojali u polaznim izrazima. Za primenu dobijenog kvadratnog trinoma na izraz (A.10), neophodno je neutralisati dejstvo novih članova, čime će se održati uspostavljena jednakost sa (A.5). Prošireni izraz (A.10) se zapisuje kao

$$\begin{aligned} & \text{tr}(\mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H)\}) \\ &+ \text{tr}(\mathbf{b}_{jk}^j (\mathbf{b}_{jk}^j)^H - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} (\mathbf{b}_{jk}^j)^H - \mathbf{b}_{jk}^j \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\} + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} (\mathbf{b}_{jk}^j)^H \\ &+ \mathbf{b}_{jk}^j \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\} (\mathbf{A}_{jk}^j)^H + \text{tr}(\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\} + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\} (\mathbf{A}_{jk}^j)^H \\ &- \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\} (\mathbf{A}_{jk}^j)^H - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\}) - \text{tr}(\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\} \\ &+ \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\} (\mathbf{A}_{jk}^j)^H \\ &- \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\} (\mathbf{A}_{jk}^j)^H - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{tr}(\mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - (\mathbf{y}_{jk}^j)^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H)\}) \\
&+ \text{tr}(\underbrace{(\mathbf{b}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})((\mathbf{b}_{jk}^j)^H - \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\} + \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\}(\mathbf{A}_{jk}^j)^H)}_{\text{stvoren i kvadratni trinom}}) \\
&\quad \text{kvadrirana } \ell^2\text{-norma stvorenog kvadratnog trinoma, sliĉno (A.5)} \\
&- \text{tr}(\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\} + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\} (\mathbf{A}_{jk}^j)^H \\
&- \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\} (\mathbf{A}_{jk}^j)^H - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\}). \tag{A.13}
\end{aligned}$$

Sada se jedan od polaznih izraza, (A.4) izraĉava upotrebom kvadriranih ℓ^2 -normi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{\|\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j - \mathbf{b}_{jk}^j\|^2\} &= \mathbb{E}\{\|\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j\|^2\} \\
&+ \underbrace{\|\mathbf{b}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}\|^2 - \|\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}\|^2}_{\text{neutralisanje promena}}. \tag{A.14}
\end{aligned}$$

Moguće je, iz delova i bilo kojim redosledom, ostvariti minimizaciju Bajesovog rizika linearnog estimatora srednje kvadratne greške. Konkretno, parametar \mathbf{b}_{jk}^j se u (A.14) zatiĉe samo u obliku $\|\mathbf{b}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}\|^2$. Da bi se ovaj parametar i minimizovao, dovoljno je rešiti jednaĉinu

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{b}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}\|^2 &= 0 \\
\Rightarrow \mathbf{b}_{jk,\min}^j &= \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}. \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem pronađenog parametra, $\mathbf{b}_{jk,\min}^j$ u (A.14), preostaje posao minimizacije izraza $\mathbb{E}\{\|\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j\|^2\} - \|\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}\|^2$, pronalaženjem drugog nepoznatog parametra, \mathbf{A}_{jk}^j . U izrazu se zapaĉa postojanje elemenata koji ĉine kovarijansne matrice. Pre svega, preostali ĉlanovi se grupišu u zajedniĉku kvadriranu ℓ^2 -normu. Nakon toga, izvođenje se usmerava na minimizovanje pomenute zajedniĉke ℓ^2 -norme.

Prvo se dospeva do $\mathbb{E}\{\|(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j) - (\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})\|^2\}$, što je kvadratni binom ĉijim preuređivanjem se dolazi i do ciljanog izraza. Da bi se postiglo sve prethodno, uvodi se okvireni ĉlan u (A.17), a zatim neutrališu promene koje on unosi pomoću istog ĉlana suprotnog predznaka. U izvođenju se upotrebljava razvoj kvadratnog binoma po ugledu na

$$\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 - \text{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^H) - \text{tr}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^H) + \|\boldsymbol{\beta}\|^2, \tag{A.16}$$

gde su $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\} \in \mathbb{C}^{M_j \times 1}$ vektor-kolone iz proizvoljnog vektorskog prostora. Dakle,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{\|\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j\|^2\} - \|\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}\|^2 \\
&= \mathbb{E}\{\|\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j\|^2\} - \|\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}\|^2 \\
&\quad \underbrace{+ \|\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}\|^2 - \|\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}\|^2}_{\text{neutralisanje promena}} \\
&= \mathbb{E}\{\|\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j\|^2\} - \text{tr}((\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})(\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})^H)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}\|^2 \\
& - \text{tr}((\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})(\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})^H) \\
& = \mathbb{E}\{\|\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j\|^2\} - \text{tr}(\underbrace{\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j\}}_{\text{konstantna vektor-kolona}} (\underbrace{\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j\}}_{\text{konstantna vektor-kolona}})^H) \\
& + \|\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}\|^2 - \text{tr}(\underbrace{(\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})}_{\text{konstantna vektor-kolona}} \underbrace{\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j\}}_{\text{konstantna vektor-kolona}}^H) \\
& = \mathbb{E}\{\|\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j\|^2\} - \text{tr}(\mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)(\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})^H\}) \\
& + \|\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}\|^2 - \text{tr}(\mathbb{E}\{(\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)^H\}) \\
& = \mathbb{E}\{\|\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j\|^2\} - \mathbb{E}\{\text{tr}((\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)(\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})^H)\} \\
& + \|\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}\|^2 - \mathbb{E}\{\text{tr}((\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)^H)\} \\
& = \mathbb{E}\{\|\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j\|^2 - \text{tr}((\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)(\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})^H)\} \\
& + \|\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}\|^2 - \text{tr}((\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j)^H)\} \\
& = \mathbb{E}\{\|(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j) - (\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})\|^2\} \\
& = \mathbb{E}\{\|(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\}) - \mathbf{A}_{jk}^j (\mathbf{y}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})\|^2\}. \tag{A.17}
\end{aligned}$$

Uzimajući da su $\alpha = \mathbf{g}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\}$ i $\beta = \mathbf{A}_{jk}^j (\mathbf{y}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})$, važi

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\{\|\alpha - \beta\|^2\} = \mathbb{E}\{\text{tr}((\alpha - \beta)(\alpha^H - \beta^H))\} \\
& = \mathbb{E}\{\text{tr}(\underbrace{\alpha\alpha^H - \alpha\beta^H - \beta\alpha^H + \beta\beta^H}_{\text{razvoj kvadrata binoma, } (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)^H})\} \\
& = \text{tr}(\mathbb{E}\{\alpha\alpha^H - \alpha\beta^H - \beta\alpha^H + \beta\beta^H\}) \\
& = \text{tr}(\mathbb{E}\{\alpha\alpha^H\} - \mathbb{E}\{\alpha\beta^H\} - \mathbb{E}\{\beta\alpha^H\} + \mathbb{E}\{\beta\beta^H\}) \\
& = \text{tr}(\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\}\}((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\})) \\
& - \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\})((\mathbf{y}_{jk}^j)^H - \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\})(\mathbf{A}_{jk}^j)^H\} \\
& - \mathbb{E}\{(\mathbf{A}_{jk}^j (\mathbf{y}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}))((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\})\} \\
& + \mathbb{E}\{\mathbf{A}_{jk}^j (\mathbf{y}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})((\mathbf{y}_{jk}^j)^H - \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\})(\mathbf{A}_{jk}^j)^H\}) \\
& = \text{tr}(\underbrace{\mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\})((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\})\}}_{\text{autokovarijansna matrica, } \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j}^j \in \mathbb{C}^{M_j \times M_j}} \\
& - \underbrace{\mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\})((\mathbf{y}_{jk}^j)^H - \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\})\}(\mathbf{A}_{jk}^j)^H}_{\text{među-kovarijansna matrica, } \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^j \in \mathbb{C}^{M_j \times M_j}} \\
& - \underbrace{\mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})((\mathbf{g}_{jk}^j)^H - \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\})\}}_{\text{među-kovarijansna matrica, } \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j}^j \in \mathbb{C}^{M_j \times M_j}} \\
& + \underbrace{\mathbf{A}_{jk}^j \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\})((\mathbf{y}_{jk}^j)^H - \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\})\}(\mathbf{A}_{jk}^j)^H}_{\text{autokovarijansna matrica, } \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^j \in \mathbb{C}^{M_j \times M_j}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{tr}(\mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} (\mathbf{A}_{jk}^j)^H - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j} + \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} (\mathbf{A}_{jk}^j)^H) \\
&= \text{tr}(\mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j}) + \text{tr}(\underbrace{\mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} (\mathbf{A}_{jk}^j)^H - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} (\mathbf{A}_{jk}^j)^H - \mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j}}_{= \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^H}) \\
&= \text{tr}(\mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j}) + \text{tr}(\mathbf{A}_{jk}^j \boxed{\mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1}} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^H (\mathbf{A}_{jk}^j)^H \\
&\quad - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \boxed{\mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^H} (\mathbf{A}_{jk}^j)^H - \mathbf{A}_{jk}^j \boxed{\mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1}} \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^H \\
&\quad + \underbrace{\mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^H - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^H}_{\text{neutralisanje promena}) \\
&= \text{tr}((\mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}) \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} (\mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j})^H) \\
&\quad + \text{tr}(\mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{g}_{jk}^j}) - \text{tr}(\mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^H). \tag{A.18}
\end{aligned}$$

Umetanjem $\mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} = \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^H = \mathbf{I}_{M_j} \in \mathbb{R}^{M_j \times M_j}$ otvara se mogućnost stvaranja $(\mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}) \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} (\mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j})^H$.

Pošto se, sada, traženi parametar \mathbf{A}_{jk}^j u (A.18), zatiče isključivo u jednom sabirku, $\text{tr}((\mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}) \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} (\mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j})^H)$, potrebno je uspostaviti jednakost sa minimalnom vrednošću koju ovaj sabirak može poneti. Reč je o vrednosti 0. Dakle,

$$\begin{aligned}
&\text{tr}((\mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}) \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} (\mathbf{A}_{jk}^j \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j})^H) = 0 \\
&\Rightarrow \mathbf{A}_{jk, \min}^j = \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1}. \tag{A.19}
\end{aligned}$$

Kada se pronađeni parametri $\mathbf{b}_{jk, \min}^j$ i $\mathbf{A}_{jk, \min}^j$ uvrste u (4.22), dobija se linearni Bajesov estimator, $\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j$, koji uspešno minimizuje Bajesov rizik i zapisuje se sa

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j &= \mathbf{A}_{jk, \min}^j \mathbf{y}_{jk}^j + \mathbf{b}_{jk, \min}^j \\
&= \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} \mathbf{y}_{jk}^j + \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} \mathbf{y}_{jk}^j \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} \\
&= \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} + \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} (\mathbf{y}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}). \tag{A.20}
\end{aligned}$$

A.2.2 Dokaz jednačine (4.31)

Neka je estimator dat sa

$$\mathbf{g}_{jk}^j = \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} + \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} (\mathbf{y}_{jk}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\}). \tag{A.21}$$

S obzirom na to da važe jednakosti,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j\} &= \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} + \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} \\
&\quad - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jk}^j\} = \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \\
\mathbb{E}\{(\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j)^H\} &= \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\} + (\mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j})^H (\mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1})^H \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\} \\
&\quad - \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jk}^j \mathbf{y}_{jk}^j}^{-1} \mathbb{E}\{(\mathbf{y}_{jk}^j)^H\} = \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\}
\end{aligned} \tag{A.22}$$

sledi da su

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j\} &= \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j - \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j\} = \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbb{E}\{\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j\} = \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} = \mathbf{0}_{M_j \times 1} \\
\mathbb{E}\{(\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j)^H\} &= \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j - \hat{\mathbf{g}}_{jk}^j\}^H = \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\} - \mathbb{E}\{(\hat{\mathbf{g}}_{jk}^j)^H\} \\
&= \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\} - \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\} = \mathbf{0}_{M_j \times 1}.
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Zaključuje se da je

$$\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j \tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j} = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j \tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j} - \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j)^H\} = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j \tilde{\mathbf{g}}_{jk}^j}. \tag{A.24}$$

A.2.3 Dokaz jednačine (4.37)

Primenjuje se definicija iz (A.1) na konkretnu među-kovarijansnu matricu $\mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jjk}^p}^j$. Zapisuje se,

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jjk}^p}^j &= \mathbf{R}_{\mathbf{g}_{jk}^j \mathbf{y}_{jjk}^p}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jjk}^p\}^H \\
&= \mathbb{E}\left\{ \mathbf{g}_{jk}^j \left(\sum_{(l', i') \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l'i'}} \tau_p \mathbf{g}_{l'i'}^j + \mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \right)^H - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \mathbb{E}\left\{ \left(\sum_{(l', i') \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l'i'}} \tau_p \mathbf{g}_{l'i'}^j + \mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \right) \right\}^H \right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{ \mathbf{g}_{jk}^j \left(\left(\sum_{(l', i') \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l'i'}} \tau_p \mathbf{g}_{l'i'}^j \right)^H + \left(\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \right)^H \right) - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \mathbb{E}\left\{ \left(\sum_{(l', i') \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l'i'}} \tau_p \mathbf{g}_{l'i'}^j \right)^H + \left(\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \right)^H \right\} \right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{ \mathbf{g}_{jk}^j \left(\sum_{(l', i') \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l'i'}} \tau_p \mathbf{g}_{l'i'}^j \right)^H + \mathbf{g}_{jk}^j \left(\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \right)^H - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \mathbb{E}\left\{ \left(\sum_{(l', i') \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l'i'}} \tau_p \mathbf{g}_{l'i'}^j \right)^H - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \mathbb{E}\left\{ \left(\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \right)^H \right\} \right\} \right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{ \mathbf{g}_{jk}^j \left(\sqrt{p_{jk}} \tau_p \mathbf{g}_{jk}^j + \sum_{(l', i') \in \mathcal{P}_{jk} \setminus (j,k)} \sqrt{p_{l'i'}} \tau_p \mathbf{g}_{l'i'}^j \right)^H + \mathbf{g}_{jk}^j \left(\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \right)^H \right\} \\
&\quad - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \mathbb{E}\left\{ \left(\sqrt{p_{jk}} \tau_p \mathbf{g}_{jk}^j + \sum_{(l', i') \in \mathcal{P}_{jk} \setminus (j,k)} \sqrt{p_{l'i'}} \tau_p \mathbf{g}_{l'i'}^j \right)^H - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \mathbb{E}\left\{ \left(\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* \right)^H \right\} \right\} \\
&= \sqrt{p_{jk}} \tau_p \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j (\mathbf{g}_{jk}^j)^H\} + \mathbb{E}\left\{ \sum_{(l', i') \in \mathcal{P}_{jk} \setminus (j,k)} \sqrt{p_{l'i'}} \tau_p \mathbf{g}_{l'i'}^j (\mathbf{g}_{l'i'}^j)^H \right\} + \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j (\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*)^H\} \\
&\quad - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \sqrt{p_{jk}} \tau_p \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\} - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \mathbb{E}\left\{ \sum_{(l', i') \in \mathcal{P}_{jk} \setminus (j,k)} \sqrt{p_{l'i'}} \tau_p (\mathbf{g}_{l'i'}^j)^H - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*)^H\} \right\} \\
&= \sqrt{p_{jk}} \tau_p \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j (\mathbf{g}_{jk}^j)^H\} + \mathbb{E}\left\{ \sum_{(l', i') \in \mathcal{P}_{jk} \setminus (j,k)} \sqrt{p_{l'i'}} \tau_p \mathbf{g}_{l'i'}^j (\mathbf{g}_{l'i'}^j)^H \right\} + \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*)^H\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{p_{jk}\tau_p}\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\}\mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\}-\mathbb{E}\left\{\sum_{(l',i')\in\mathcal{P}_{jk}\setminus(j,k)}\sqrt{p_{l'i'}\tau_p}\mathbf{g}_{jk}^j(\mathbf{g}_{l'i'}^j)^H\right\}-\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\}\mathbb{E}\{(\mathbf{N}_j^p\phi_{jk}^*)^H\}} \\
& =\sqrt{p_{jk}\tau_p}\left(\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\}-\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\}\mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\}\right) \\
& =\sqrt{p_{jk}\tau_p}\left(\mathbf{R}_{\mathbf{g}_{jk}^j\mathbf{g}_{jk}^j}^j-\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{jk}^j\}\mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{jk}^j)^H\}\right) \\
& =\sqrt{p_{jk}\tau_p}\mathbf{C}_{\mathbf{g}_{jk}^j\mathbf{g}_{jk}^j}^j
\end{aligned} \tag{A.25}$$

A.2.4 Dokaz jednačine (4.38)

Primenjuje se definicija iz (A.1) na konkretnu autokovarijansnu matricu $\mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jjk}^p\mathbf{y}_{jjk}^p}$. Prema tome,

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{\mathbf{y}_{jjk}^p\mathbf{y}_{jjk}^p}^p & =\mathbf{R}_{\mathbf{y}_{jjk}^p\mathbf{y}_{jjk}^p}^p-\mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jjk}^p\}\mathbb{E}\{\mathbf{y}_{jjk}^p\}^H \\
& =\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{(l',i')\in\mathcal{P}_{jk}}\sqrt{p_{l'i'}\tau_p}\mathbf{g}_{l'i'}^j+\mathbf{N}_j^p\phi_{jk}^*\right)\left(\sum_{(l'',i'')\in\mathcal{P}_{jk}}\sqrt{p_{l''i''}\tau_p}\mathbf{g}_{l''i''}^j+\mathbf{N}_j^p\phi_{jk}^*\right)^H\right\} \\
& \quad -\left(\mathbb{E}\left\{\sum_{(l',i')\in\mathcal{P}_{jk}}\sqrt{p_{l'i'}\tau_p}\mathbf{g}_{l'i'}^j\right\}+\mathbb{E}\{\mathbf{N}_j^p\phi_{jk}^*}\right)\left(\mathbb{E}\left\{\sum_{(l'',i'')\in\mathcal{P}_{jk}}\sqrt{p_{l''i''}\tau_p}\mathbf{g}_{l''i''}^j\right\}+\mathbb{E}\{\mathbf{N}_j^p\phi_{jk}^*}\right)^H \\
& =\sum_{\{(l',i'),(l'',i'')\}\in\mathcal{P}_{jk}}\mathbb{E}\left\{\left(\sqrt{p_{l'i'}p_{l''i''}}(\tau_p)^2\mathbf{g}_{l'i'}^j(\mathbf{g}_{l''i''}^j)^H+\sqrt{p_{l'i'}\tau_p}\mathbf{g}_{l'i'}^j(\mathbf{N}_j^p\phi_{jk}^*)^H+\sqrt{p_{l''i''}\tau_p}\mathbf{N}_j^p\phi_{jk}^*(\mathbf{g}_{l'i'}^j)^H\right.\right. \\
& \quad \left.\left.+\sqrt{p_{l''i''}\tau_p}\mathbf{N}_j^p\phi_{jk}^*(\mathbf{g}_{l'i'}^j)^H\right)\right\}+\sqrt{p_{l'i'}\tau_p}\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{l'i'}^j\}\mathbb{E}\{(\mathbf{N}_j^p\phi_{jk}^*)^H\}+\sqrt{p_{l''i''}\tau_p}\mathbb{E}\{(\mathbf{N}_j^p\phi_{jk}^*)^H\} \\
& \quad -\left(\sqrt{p_{l'i'}p_{l''i''}}(\tau_p)^2\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{l'i'}^j\}\mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{l''i''}^j)^H\}+\sqrt{p_{l'i'}\tau_p}\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{l'i'}^j\}\mathbb{E}\{(\mathbf{N}_j^p\phi_{jk}^*)^H\}+\sqrt{p_{l''i''}\tau_p}\mathbb{E}\{(\mathbf{N}_j^p\phi_{jk}^*)^H\}\right) \\
& =\sum_{\{(l',i'),(l'',i'')\}\in\mathcal{P}_{jk}}\left(\sqrt{p_{l'i'}p_{l''i''}}(\tau_p)^2\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{l'i'}^j(\mathbf{g}_{l''i''}^j)^H\}+\sqrt{p_{l'i'}\tau_p}\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{l'i'}^j\}\mathbb{E}\{(\mathbf{N}_j^p\phi_{jk}^*)^H\}+\sqrt{p_{l''i''}\tau_p}\mathbb{E}\{(\mathbf{N}_j^p\phi_{jk}^*)^H\}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\sqrt{p_{l'i'} p_{l''i''}}(\tau_p)^2 \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{l'i'}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{l''i''}^j)^H\} + \sqrt{p_{l'i'} \tau_p} \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{l'i'}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*)^H\} + \sqrt{p_{l''i''} \tau_p} \mathbb{E}\{\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*\} \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{l''i''}^j)^H\} \right) \\
& + \mathbb{E}\{\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* (\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*)^H\} - \mathbb{E}\{\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*\} \mathbb{E}\{(\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*)^H\} \\
& = \sum_{\{(l', i'), (l'', i'')\} \in \mathcal{P}_{jk}} \left(\sqrt{p_{l'i'} p_{l''i''}}(\tau_p)^2 \left(\mathbb{E}\{\mathbf{g}_{l'i'}^j (\mathbf{g}_{l''i''}^j)^H\} - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{l'i'}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{l''i''}^j)^H\} \right) + \mathbb{E}\{\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* (\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*)^H\} - \mathbb{E}\{\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*\} \mathbb{E}\{(\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*)^H\} \right) \\
& = \sum_{\{(l', i'), (l'', i'')\} \in \mathcal{P}_{jk}} \left(\sqrt{p_{l'i'} p_{l''i''}}(\tau_p)^2 \left(\mathbf{R}_{\mathbf{g}_{l'i'}^j} \mathbf{g}_{l''i''}^j - \mathbb{E}\{\mathbf{g}_{l'i'}^j\} \mathbb{E}\{(\mathbf{g}_{l''i''}^j)^H\} \right) + \mathbf{R}_{\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*} \mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^* - \mathbb{E}\{\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*\} \mathbb{E}\{(\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*)^H\} \right) \\
&] \\
& = \sum_{\{(l', i'), (l'', i'')\} \in \mathcal{P}_{jk}} \sqrt{p_{l'i'} p_{l''i''}}(\tau_p)^2 \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l'i'}^j} \mathbf{g}_{l''i''}^j + \mathbf{C}_{\mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*} \mathbf{N}_j^p \phi_{jk}^*
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Reference

- [1] P. Bello, "Characterization of randomly time-variant linear channels," *IRE Trans. Commun. Syst.*, vol. 11, no. 4, pp. 360–393, dec. 1963.
- [2] R. Kattenbach, "Statistical modeling of small-scale fading in directional radio channels," *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 20, no. 3, pp. 584–592, apr. 2002.
- [3] M. Herdin, "Non-stationary indoor MIMO radio channels," doktorska disertacija, Technische Universität Wien, 2004.
- [4] L. A. Zadeh, "Frequency analysis of variable networks," *Proc. IRE*, vol. 38, no. 3, pp. 291–299, mar. 1950.
- [5] T. Kailath, "Sampling models for linear Time-Variant filters," *M.I.T. Research Lab. of Electronics*, no. 352, 1959.
- [6] S. Jaeckel, "Quasi-deterministic channel modeling and experimental validation in cooperative and massive MIMO deployment topologies," doktorska disertacija, Ilmenau, avg. 2017. Dostupno na: https://www.db-thueringen.de/receive/dbt_mods_00032895
- [7] G. Del Galdo, "Geometry-Based Channel Modeling for Multi-User MIMO Systems and Applications," doktorska disertacija, jul 2007. Dostupno na: https://www.db-thueringen.de/receive/dbt_mods_00011002
- [8] E. Björnson, J. Hoydis i L. Sanguinetti, "Massive MIMO networks: Spectral, energy, and hardware efficiency," *Foundations and Trends® in Signal Processing*, vol. 11, no. 3-4, pp. 154–655, 2017. Dostupno na: <http://dx.doi.org/10.1561/20000000093>
- [9] T. L. Marzetta, E. G. Larsson, H. Yang i H. Q. Ngo, *Fundamentals of Massive MIMO*. Cambridge, England: Cambridge University Press, nov. 2016.
- [10] M. Biguesh i A. B. Gershman, "Downlink channel estimation in cellular systems with antenna arrays at base stations using channel probing with feedback," *EURASIP J. Adv. Signal Process.*, vol. 2004, no. 9, dec. 2004.

- [11] J. G. Andrews, “A Primer on Zadoff Chu Sequences,” 2023. Dostupno na: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2211.05702>
- [12] 3GPP, “Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Physical channels and modulation,” 3rd Generation Partnership Project (3GPP), Technical Specification (TS) 36.211, 2023. Dostupno na: <https://portal.3gpp.org/desktopmodules/Specifications/SpecificationDetails.aspx?specificationId=2425>
- [13] —, “NR; Physical channels and modulation,” 3rd Generation Partnership Project (3GPP), Technical Specification (TS) 38.211, 2023. Dostupno na: <https://portal.3gpp.org/desktopmodules/Specifications/SpecificationDetails.aspx?specificationId=3213>
- [14] A. Papoulis i S. Unnikrishna Pillai, *Probability, random variables and stochastic processes*, 4th ed., ser. McGraw-Hill series in electrical and computer engineering. Maidenhead, England: McGraw Hill Higher Education, dec. 2001.
- [15] S. M. Kay, *Fundamentals of statistical processing, volume I*. Philadelphia, PA: Prentice Hall, mar. 1993.
- [16] K. Upadhyay i S. A. Vorobyov, “Covariance Matrix Estimation for Massive MIMO,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 25, no. 4, pp. 546–550, apr. 2018.
- [17] M. Cui i L. Dai, “Channel estimation for extremely large-scale MIMO: Far-field or near-field?” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 70, no. 4, pp. 2663–2677, apr. 2022.