একনজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি — প্রথম ও দ্বিতীয় পত্র

By Abir Arafat Chawdhury [Introvert's Area]

প্রথম পত্র

অধ্যায়-১: ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক

1. (i) যদি $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হয় তবে,

$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\,\text{adj}\,A$

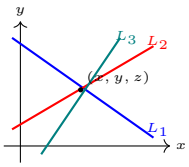
(ii) তিন চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোট:

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2,\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

এর সমাধান (ক্রেমারের নিয়ম):

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$



এবং $x = \dfrac{D_x}{D}, \quad y = \dfrac{D_y}{D}, \quad z = \dfrac{D_z}{D}$

2. ম্যাট্রিক্সের ট্রেস (Trace): A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে এর প্রধান বা মুখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলোর সমষ্টিকে ম্যাট্রিক্সটির ট্রেস বলা হয়।

$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

3. ম্যাট্রিক্সের গুণনযোগ্যতার শর্ত: $A_{m\times n}$ এবং $B_{p\times q}$ ম্যাট্রিক্সদ্বয় গুণনযোগ্য (AB) হবে যদি ও কেবল যদি প্রথম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা ও দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের সারী সংখ্যা সমান হয় অর্থাৎ $n = p$ হয়। উৎপন্ন নতুন ম্যাট্রিক্সের মাত্রা হবে $m \times q$।

4. বিভিন্ন প্রকার বিশেষ বর্গ ম্যাট্রিক্সের শর্তসমূহ:

(i) প্রতিসম (Symmetric) ম্যাট্রিক্স: $A^T = A$

(ii) বিপ্রতিসম বা বক্র-প্রতিসম (Skew-symmetric) ম্যাট্রিক্স: $A^T = -A$; এই ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের ভুক্তিগুলো সর্বদা শূন্য (0) হয়।

(iii) সমঘাতী (Idempotent) ম্যাট্রিক্স: $A^2 = A$

(iv) অভেদঘাতী (Involutory) ম্যাট্রিক্স: $A^2 = I$

(v) শূন্যঘাতী (Nilpotent) ম্যাট্রিক্স: $A^n = O$; যেখানে n হলো ম্যাট্রিক্সটির শূন্যঘাতী সূচক।

(vi) লম্ব বা লম্বিক (Orthogonal) ম্যাট্রিক্স: $AA^T = A^TA = I$

5. রূপান্তরিত বা ট্রান্সপোজ (Transpose) ম্যাট্রিক্সের ধর্মাবলী:

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

(iii) $(AB)^T = B^TA^T$ (বিপরীতক্রম নিয়ম)

(iv) $(kA)^T = kA^T$; যেখানে k একটি স্কেলার বা ধ্রুবক।

6. ব্যতিক্রমী ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের শর্ত:

(i) ব্যতিক্রমী (Singular) ম্যাট্রিক্স: যদি কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্য হয় অর্থাৎ $|A| = 0$ হয়।

(ii) অব্যতিক্রমী (Non-singular) excavation ম্যাট্রিক্স: যদি কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্য না হয় অর্থাৎ $|A| \neq 0$ হয়।

7. বিপরীত (Inverse) ম্যাট্রিক্সের ধর্মাবলী:

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$

(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(iv) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

8. অনুবন্ধী বা অ্যাডজয়েন্ট (Adjoint) ম্যাট্রিক্সের ধর্মাবলী:

(i) $A \cdot \text{adj}(A) = \text{adj}(A) \cdot A = |A|I$

(ii) $|\,\text{adj}(A)| = |A|^{n-1}$; যেখানে n হলো A ম্যাট্রিক্সের ক্রম $(n \times n)$।

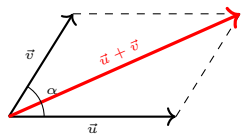
9. নির্ণায়কের অনুরাশি (Minor) ও সহগুণক (Cofactor):

(i) অনুরাশি (M_{ij}): কোনো নির্ণায়কের i-তম সারী এবং j-তম কলামের ভুক্তিটি যে সারী ও কলামে অবস্থিত তা বাদ দিয়ে গঠিত উপ-নির্ণায়ক।

(ii) সহগুণক (A_{ij}): উপযুক্ত চিহ্নযুক্ত অনুরাশিকে সহগুণক বলে অর্থাৎ, $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

অধ্যায়-২: ভেক্টর

1. $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ভেক্টরের মান, $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$



2. $\vec{A}$ ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর, $\hat{\eta} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

3. দুইটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ হলে, স্কেলার গুণন,

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$; θ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ।

4. $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ও $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ ভেক্টরের ভেক্টর বা ক্রসগুণন,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{\eta}|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

5. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরের লম্বদিকে একক ভেক্টর,

$\hat{\eta} = \pm\dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$

6. $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1; \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0; \hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0; \hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}, \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}, \hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}, \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}, \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$

7. (i) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

(ii) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে, $\vec{A}\times\vec{B} = 0$

8. (i) $\vec{A}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশ

$= (\hat{A}\cdot\vec{B})\hat{A} = \dfrac{(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{A}}{|\vec{A}|^2}$

(ii) $\vec{B}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\vec{A}$ ভেক্টরের উপাংশ

$= (\hat{B}\cdot\vec{A})\hat{B} = \dfrac{(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{B}}{|\vec{B}|^2}$

9. (i) $\vec{B}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ

$= \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}$

(ii) $\vec{A}$ ভেক্টরের উপর $\vec{B}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ

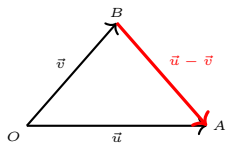
$= \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|}$

10. $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ভেক্টরত্রয় একই সমতলে অবস্থান করলে,

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = 0$ অর্থাৎ

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

11. সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল: (i) সন্নিহিত বাহুদ্বয় $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ হলে, ক্ষেত্রফল $= |\vec{A}\times\vec{B}|$ (ii) কর্ণদ্বয় $\vec{d_1}$ ও $\vec{d_2}$ হলে, ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}|\vec{d_1}\times\vec{d_2}|$



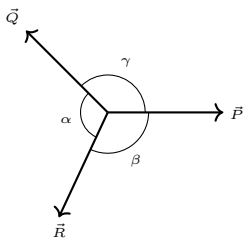
12. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল: (i) সন্নিহিত বাহুদ্বয় $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ হলে, ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}|$ (ii) শীর্ষবিন্দুত্রয়ের অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ হলে, ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}|$

13. সামান্তরিকের সূত্র (বলবিদ্যা সংক্রান্ত): যদি দুটি বল P ও Q পরস্পর α কোণে ক্রিয়া করে, তবে তাদের লব্ধি R এবং লব্ধির দিক θ (P বলের সাথে):

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

14. (i) সর্বোচ্চ লব্ধি, $R_{\text{max}} = P + Q$; যখন $\alpha = 0^\circ$



(ii) সর্বনিম্ন লব্ধি, $R_{\text{min}} = |P - Q|$; যখন $\alpha = 180^\circ$

Abir Arafat Chawdhury

15. লব্ধির বিশেষ ক্ষেত্রসমূহ: (ii) $\alpha = 90^\circ$ হলে, $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$ এবং $\tan\theta = \dfrac{Q}{P}$ (iii) $R = P = Q$ হলে ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 120^\circ$

16. ভেক্টর ক্যালকুলাস (Vector Calculus): (i) স্কেলার অপেক্ষক $\phi(x, y, z)$ -এর গ্রেডিয়েন্ট (Gradient):

$$\vec{\nabla}\phi = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

(ii) ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{A}$ -এর ডাইভারজেন্স (Divergence):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ডাইভারজেন্স শূন্য হলে ($\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$) ভেক্টরটি সোলেনয়ডাল (Solenoidal) বা চোঙাকৃতির হয়।

(iii) ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{A}$ -এর কার্ল (Curl):

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

কার্ল শূন্য হলে ($\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$) ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল (Irrotational) বা সংরক্ষণশীল হয়।

অধ্যায়-৩: সরলরেখা

1. (i) কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) এবং পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) হলে,

$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$; মডুলাস, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

2. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব

$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

3. (i) বর্গ হওয়ার শর্ত: বাহুগুলি এবং কর্ণদ্বয় সমান

(ii) আয়ত হওয়ার শর্ত: বিপরীত বাহু এবং কর্ণদ্বয় সমান

(iii) রম্বস হওয়ার শর্ত: বাহুগুলি সমান কিন্তু কর্ণদ্বয় অসমান

(iv) সামান্তরিক হওয়ার শর্ত: বিপরীত বাহু সমান কিন্তু কর্ণদ্বয় অসমান

4. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে (x, y) বিন্দুটি $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত অথবা বহির্বিভক্ত করলে,

$$(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 \pm m_2x_1}{m_1 \pm m_2},\ \frac{m_1y_2 \pm m_2y_1}{m_1 \pm m_2}\right)$$

5. (i) $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ এবং (x_3, y_3) বিন্দুদ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$\Delta = \dfrac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$

$= \dfrac{1}{2}\ |(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1)|$

(ii) উপরোক্ত ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক,

$G = \left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\ \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

(iii) বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হবে এবং বিপরীতক্রমে সত্য।

(iv) চতুর্ভুজ $ABCD$ এর চারটি শীর্ষবিন্দু হলে, চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right\}$$

$= \dfrac{1}{2}\ |(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_4 + y_4x_1)|$

6. (i) x-অক্ষের সমীকরণ, $y = 0$

(ii) y-অক্ষের সমীকরণ, $x = 0$

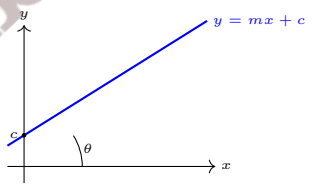
7. (i) x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $y = b$

(ii) y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $x = a$

8. (i) মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $y = mx$; সরলরেখাটির ঢাল $= m$

(ii) $ax + by + c = 0$ রেখার ঢাল $= -\dfrac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}}$

9. y-অক্ষকে ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $y = mx + c$; একে ঢাল আকার সমীকরণও বলা হয়।



10. মূলবিন্দু ও (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$y = \dfrac{y_1}{x_1}x$

11. ঢাল m এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$y - y_1 = m(x - x_1)$

12. x-অক্ষ ও y-অক্ষের ছেদক রেখার সমীকরণ, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$; যেখানে, x ও y অক্ষের ছেদিতাংশ যথাক্রমে a ও b; রেখাটি x-অক্ষকে $(a, 0)$ এবং y-অক্ষকে $(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

13. (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$\dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$

বা $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

এবং ঢাল $= \dfrac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

14. মূলবিন্দু হতে একটি সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং x-অক্ষের সাথে উক্ত লম্বের অন্তর্ভুক্ত কোণ α হলে, সরলরেখার সমীকরণ,

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

15. $ax + by + c = 0$ রেখার সমান্তরাল ও লম্ব যেকোনো রেখার সমীকরণ যথাক্রমে,

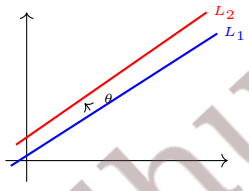
$ax + by + k = 0$ ও $bx - ay + k = 0$; যেখানে, k ইচ্ছাধীন ধ্রুবক।

16. দুইটি রেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, (একটি সরলরেখা) $+k$ (অপর সরলরেখা) $= 0$; যেখানে k ইচ্ছাধীন ধ্রুবক।

17. $a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ও $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু হওয়ার শর্ত:

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ এবং বিপরীতক্রমে সত্য।

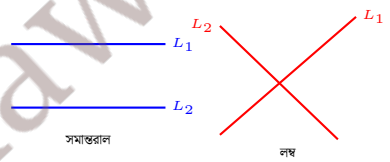
18. $y = m_1x + c_1$ ও $y = m_2x + c_2$ বা দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ φ হলে,



$\tan\varphi = \pm\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$

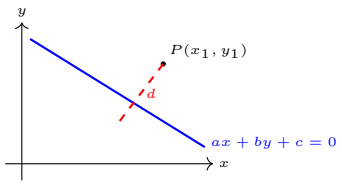
$[\because\ m_1 = \tan\theta_1,\ m_2 = \tan\theta_2]$

19. m_1 ও m_2 ঢালবিশিষ্ট দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল ও লম্ব হলে যথাক্রমে,



$m_1 = m_2$ ও $m_1m_2 = -1$

20. $P(x_1, y_1)$ বিন্দু হতে $ax + by + c = 0$ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য বা লম্বদূরত্ব



$= \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

21. $ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$ সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব

$= \dfrac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

22. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

(i) c_1 ও c_2 উভয়কে ধনাত্মক করে, $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$ হলে, $+$ চিহ্ন নিয়ে স্থূলকোণের এবং $-$ চিহ্ন নিয়ে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক পাওয়া যাবে।

(ii) $a_1a_2 + b_1b_2 < 0$ হলে, $+$ চিহ্ন নিয়ে সূক্ষ্মকোণের এবং $-$ চিহ্ন নিয়ে স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক পাওয়া যাবে।

(iii) c_1 ও c_2 ধনাত্মক হলে, $+$ চিহ্নধারী সমদ্বিখণ্ডকটি মূলবিন্দু ধারণকারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক এবং $-$ চিহ্নধারী সমদ্বিখণ্ডকটি মূলবিন্দু না-ধারণকারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

23. কোনো বিন্দুর সাপেক্ষে বা সরলরেখার সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব এবং লম্বপাদবিন্দু:

(i) $P(x_1, y_1)$ বিন্দু হতে $ax + by + c = 0$ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2}$$

(ii) $P(x_1, y_1)$ বিন্দুর সাপেক্ষে $ax + by + c = 0$ সরলরেখার সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = -\frac{2(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

24. অক্ষের রূপান্তর:

(i) অক্ষের দিক অপরিবর্তিত রেখে মূলবিন্দুকে (α, β) বিন্দুতে স্থানান্তর করলে নতুন স্থানাঙ্ক (X, Y) হলে আদি স্থানাঙ্ক:

$x = X + \alpha,\ \ y = Y + \beta$

(ii) মূলবিন্দু অপরিবর্তিত রেখে অক্ষদ্বয়কে θ কোণে আবর্তন করলে নতুন স্থানাঙ্ক (X, Y) হলে আদি স্থানাঙ্ক:

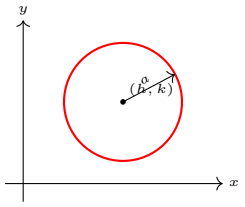
$x = X\cos\theta - Y\sin\theta,\ \ y = X\sin\theta + Y\cos\theta$

অধ্যায়-৪: বৃত্ত

Abir Arafat Chawdhury

1. (i) $(0,0)$ কেন্দ্র এবং a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2=a^2$

(ii) (h,k) কেন্দ্র এবং r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ, $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$



2. বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ যার--

(i) কেন্দ্র $(-g,-f)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

(ii) x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $=2\sqrt{g^2-c}$ এবং y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $=2\sqrt{f^2-c}$

(iii) x-অক্ষকে স্পর্শ করলে $g^2=c$; y-অক্ষকে স্পর্শ করলে $f^2=c$ এবং উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে $g^2=f^2=c$.

(iv) $-g=0$ বা, $g=0$ হলে বৃত্তের কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং $-f=0$ বা $f=0$ হলে বৃত্তের কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত।

(v) x-অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=$ |কেন্দ্রের কোটি| এবং y-অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=$ |কেন্দ্রের ভুজ|

3. (x_1,y_1) এবং (x_2,y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,
$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

4. $y=mx+c$ সরলরেখাটি $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত:
$c=\pm a\sqrt{1+m^2}$ বা $c^2=a^2(1+m^2)$; স্পর্শকের সমীকরণ, $y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}$
এবং স্পর্শবিন্দু $\left(\dfrac{\mp am}{\sqrt{1+m^2}},\ \dfrac{\pm a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$

5. (i) $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের উপরিস্থিত (x_1,y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ,
$xx_1+yy_1=a^2$ এবং স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{x_1^2+y_1^2-a^2}$

(ii) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের উপরিস্থিত (x_1,y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ,
$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$, অভিলম্বের সমীকরণ
$(x_1+g)y-(y_1+f)x+fx_1-gy_1=0$
এবং স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$

6. (i) দুইটি বৃত্ত পরস্পর বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে, কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=$ ব্যাসার্ধদ্বয়ের যোগফল।

(ii) দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করলে, কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=$ ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তর।

7. $S_1=0$ এবং $S_2=0$ দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী যেকোনো বৃত্তের সমীকরণ,
$S_1+kS_2=0$; যেখানে k একটি অশূন্য ধ্রুবক।

8. $S_1=0$ বৃত্ত এবং $L=0$ সরলরেখা হলে, এদের ছেদবিন্দুগামী যেকোনো বৃত্তের সমীকরণ,
$S_1+kL=0$; যেখানে k একটি অশূন্য ধ্রুবক।

9. (x_1,y_1) ও (x_2,y_2) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ
$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+k\{(x-x_1)(y_1-y_2)-(y-y_1)(x_1-x_2)\}=0$;
যেখানে, k একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

10. $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ ও (x_3,y_3) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)+(y_3-y_1)(y_3-y_2)}$$
$$=\frac{(x-x_1)(y_1-y_2)-(y-y_1)(x_1-x_2)}{(x_3-x_1)(y_1-y_2)-(y_3-y_1)(x_1-x_2)}$$

11. $S_1=0$ এবং $S_2=0$ দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ, $S_1-S_2=0$

12. R ব্যাসার্ধ ও (r_0,θ_0) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের পোলার সমীকরণ,
$r^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)+r_0^2=R^2$

13. R ব্যাসার্ধ ও পোল মূলবিন্দু দিয়ে যায় এমন বৃত্তের ব্যাস—

(i) পোলার অক্ষ বরাবর হলে সমীকরণ, $r=\pm 2R\cos\theta$

(ii) পোলার অক্ষের উপর লম্ব বরাবর হলে সমীকরণ, $r=\pm 2R\sin\theta$

14. পোলার স্থানাংকে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ:
$r^2-2r(g\cos\theta+f\sin\theta)+c=0$
যেখানে, কেন্দ্র $=\left(\sqrt{g^2+f^2},\ \tan^{-1}\dfrac{f}{g}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

15. $x^2+y^2=r^2$ বৃত্তের উপরিস্থিত (x_1,y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $xx_1+yy_1=r^2$
এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $xy_1-yx_1=0$

16. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের উপরিস্থিত (x_1,y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,
$xy_1-yx_1+f(x-x_1)-g(y-y_1)=0$

17. বহিঃস্থ কোনো বিন্দু (x_1,y_1) হতে $x^2+y^2=r^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শদ্বয়ের সমীকরণ,
$(xx_1+yy_1-r^2)^2=(x^2+y^2-r^2)(x_1^2+y_1^2-r^2)$ অর্থাৎ $T^2=SS_1$

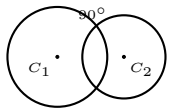
18. বহিঃস্থ (x_1,y_1) বিন্দু হতে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ,
$\{xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c\}^2=(x^2+y^2+2gx+2fy+c)(x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c)$

19. $y=mx+c$ রেখাটি $x^2+y^2=r^2$ বৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত: $c^2=r^2(1+m^2)$; স্পর্শবিন্দু $\left(\dfrac{-mr}{\sqrt{1+m^2}},\ \dfrac{r}{\sqrt{1+m^2}}\right)$

20. বৃত্তের বহিঃস্থ (x_1,y_1) বিন্দু হতে $x^2+y^2=r^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শজ্যার (chord of contact) সমীকরণ, $xx_1+yy_1=r^2$
এবং $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শজ্যার সমীকরণ, $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$

21. $x^2+y^2=r^2$ বৃত্তের কোনো জ্যার মধ্যবিন্দু (x_1,y_1) হলে, ঐ জ্যার সমীকরণ, $xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$
$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের ক্ষেত্রে জ্যার সমীকরণ, $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1$

22. দুটি বৃত্ত পরস্পর লম্বালম্বিভাবে ছেদ করার শর্ত (Orthogonal intersection): $2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2$



অধ্যায়-৫: বিন্যাস ও সমাবেশ

1. (i) n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে r সংখ্যক জিনিসের বিন্যাস
${}^nP_r=\dfrac{n!}{(n-r)!};\ n\ge r$

(ii) $n!=n(n-1)!=n(n-1)(n-2)!=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$; ${}^nP_n=n!$, $0!=1$

(iii) p সংখ্যক এক প্রকার, q সংখ্যক অন্য এক প্রকার, r সংখ্যক অন্য আর এক প্রকার বাকিগুলি ভিন্ন ভিন্ন এরূপ n সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা $=\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}$

(iv) n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা (যেখানে, যেকোনো জিনিসের r সংখ্যক বার পুনরাবৃত্তি ঘটতে পারে) $=n^r$

(v) n সংখ্যক ভিন্ন জিনিস একত্রে নিয়ে চক্র বিন্যাস $=(n-1)!$

(vi) টেবিল বা মালার ক্ষেত্রে (যাকে উল্টিয়ে দেখা যায়) চক্র বিন্যাস $=\dfrac{(n-1)!}{2}$

2. (i) ${}^nC_r=\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}={}^nC_{n-r}$ (সম্পূরক সমাবেশ)

(ii) ${}^nC_r+{}^nC_{r-1}={}^{n+1}C_r$

(iii) ${}^nC_x={}^nC_y$ হলে, $x+y=n$

(iv) বিন্যাস ও সমাবেশ এর মধ্যে সম্পর্ক: ${}^nP_r={}^nC_r\times r!$

3. (i) ১ম প্রকারের p সংখ্যক ২য় প্রকারের q সংখ্যক ও ৩য় প্রকারের r সংখ্যক থেকে যেকোনো সংখ্যক জিনিস নিয়ে মোট সমাবেশ $(p+1)(q+1)(r+1)-1$

(ii) ১ম প্রকারের p সংখ্যক ২য় প্রকারের q সংখ্যক ও r সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিসের সমাবেশ $(p+1)(q+1)2^r-1$

(iii) n সংখ্যক জিনিস থেকে প্রত্যেক বার অন্তত একটি জিনিস নিয়ে গঠিত সমাবেশ 2^n-1

4. শর্তাধীন সমাবেশ: (i) p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত করে n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু থেকে প্রতিবার r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশ $={}^{n-p}C_{r-p}$

(ii) p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত না করে n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু থেকে প্রতিবার r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশ $={}^{n-p}C_r$

5. দল গঠন ও বিভক্তিকরণ: (i) $p_1+p_2+\cdots+p_n$ সংখ্যক জিনিসকে n সংখ্যক ভাগে বিভক্ত করার সমাবেশ যেন ভাগগুলিতে যথাক্রমে $p_1,p_2,\ldots,p_n$ জিনিস থাকে,
$\dfrac{(p_1+p_2+\cdots+p_n)!}{p_1!\,p_2!\cdots p_n!}$

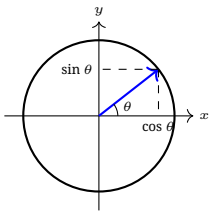
(ii) $(p+q)$ সংখ্যক জিনিসকে A ও B দুটি নির্দিষ্ট দলে বিভক্ত করা যায় $\dfrac{(p+q)!}{p!\,q!}$ উপায়ে

(iii) $2q$ সংখ্যক জিনিসকে A ও B দুটি নির্দিষ্ট দলে সমান ভাগে ভাগ করা যায় $\dfrac{(2q)!}{(q!)^2}$ উপায়ে

(iv) $2q$ সংখ্যক জিনিসকে দুটি সমান ভাগে (দলে) ভাগ করা যায় $\dfrac{(2q)!}{2!\,(q!)^2}$ উপায়ে

অধ্যায়-৬: ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

1. $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$ রেডিয়ান; 1 রেডিয়ান $=\dfrac{180^\circ}{\pi}$



2. (i) বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য, $s=r\theta$ একক; যেখানে, r ব্যাসার্ধ ও θ রেডিয়ান কোণ

(ii) বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $A=\dfrac{1}{2}r^2\theta$ বর্গ একক

3. (i) ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ, $\theta=\left|\dfrac{60H-11M}{2}\right|^\circ$

Abir Arafat Chawdhury

(ii) যদি, $\theta > 180^\circ$ হয়, তাহলে মধ্যবর্তী কোণ $= 360^\circ - \left|\dfrac{60H - 11M}{2}\right|^\circ$

যেখানে, $H =$ ঘণ্টার কাঁটা যে সংখ্যায় আছে এবং $M =$ মিনিটের কাঁটা যে সংখ্যায় আছে।

4. চতুর্ভাগ অনুযায়ী ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন: (i) ১ম চতুর্ভাগে সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (+)ve (ii) ২য় চতুর্ভাগে শুধু sin ও csc (+)ve (iii) ৩য় চতুর্ভাগে শুধু tan ও cot (+)ve (iv) ৪র্থ চতুর্ভাগে শুধু cos ও sec (+)ve

5. ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সূত্রসমূহ: (i) $\sin\theta = \dfrac{1}{\csc\theta}$ (ii) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ (iii) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$ (iv) $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ (v) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (vi) $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ (vii) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (viii) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

6. ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে মানের সীমা: (i) $-1 \le \sin\theta \le 1$ (ii) $-1 \le \cos\theta \le 1$ (iii) $\csc\theta \ge 1$ অথবা $\csc\theta \le -1$ (iv) $\sec\theta \ge 1$ অথবা $\sec\theta \le -1$ (v) $\tan\theta = \mathbb{R}$ [যেখানে $\mathbb{R} =$ যেকোনো বাস্তব সংখ্যা] (vi) $\cot\theta = \mathbb{R}$

7. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ:

ফাংশন	ডোমেন	রেঞ্জ
$\sin\theta$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$\cos\theta$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$\tan\theta$	$\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$
$\sec\theta$	$\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} - (-1,1)$
$\cot\theta$	$\mathbb{R} - \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\csc\theta$	$\mathbb{R} - \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} - (-1,1)$

অধ্যায়-৭: সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

1. ঋণাত্মক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত: (i) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$ (ii) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$, $\csc(-\theta) = -\csc\theta$ (iii) $\sec(-\theta) = \sec\theta$, $\cot(-\theta) = -\cot\theta$

2. সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের নিয়ম: (i) $\sin\left(n\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \pm\sin\theta$ [যখন n জোড়] $= \pm\cos\theta$ [যখন n বিজোড়] (ii) $\tan\left(n\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \pm\tan\theta$ [যখন n জোড়] $= \pm\cot\theta$ [যখন n বিজোড়] (iii) $\csc\left(n\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \pm\csc\theta$ [যখন n জোড়] $= \pm\sec\theta$ [যখন n বিজোড়] [(+) বা (-) চিহ্ন চতুর্ভাগের অবস্থান দেখে বসাতে হবে]

3. যৌগিক কোণের সূত্রাবলী (Compound Angles): (i) $\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$ (ii) $\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$ (iii) $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A\tan B}$ (iv) $\cot(A \pm B) = \dfrac{\cot A\cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$

4. ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের যোগফল ও গুণফলের রূপান্তর: (i) $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ (ii) $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$ (iii) $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ (iv) $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

5. যোগফল ও বিয়োগফলকে গুণফলে রূপান্তর: (i) $\sin C + \sin D = 2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$ (ii) $\sin C - \sin D = 2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}$ (iii) $\cos C + \cos D = 2\cos\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$ (iv) $\cos C - \cos D = 2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{D-C}{2}$

6. বর্গীয় কোণের গুণফলের সূত্রাবলী: (i) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$ (ii) $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$

7. গুণিতক কোণের সূত্রাবলী (Multiple Angles): (i) $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ (ii) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ (iii) $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ (iv) $1 - \cos 2A = 2\sin^2 A$ (v) $1 + \cos 2A = 2\cos^2 A$

8. ত্রিগুণিতক কোণের সূত্রাবলী (Triple Angles): (i) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ (ii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ (iii) $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

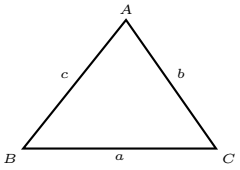
9. উপ-গুণিতক কোণের সূত্রাবলী (Sub-multiple Angles): (i) $\tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{1-\cos A}{\sin A} = \dfrac{\sin A}{1+\cos A} = \sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}$ (ii) $\cot\dfrac{A}{2} = \dfrac{\sin A}{1-\cos A} = \dfrac{1+\cos A}{\sin A} = \sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}}$ (iii) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{1-\sin A}{\cos A} = \dfrac{\cos A}{1+\sin A} = \sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}}$ (iv) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{1+\sin A}{\cos A} = \dfrac{\cos A}{1-\sin A} = \sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}}$

10. কিছু গুরত্বপূর্ণ General Form: (i) $A+B = 45^\circ$ হলে, 1. $\tan A + \tan B + \tan A\tan B = 1$ 2. $(1+\tan A)(1+\tan B) = 2$ (ii) $A = B+C$ হলে, $\tan A - \tan B - \tan C = \tan A\tan B\tan C$ (iii) $A + B = 90^\circ$ হলে, $\tan A = \tan B + 2\tan(A-B)$ (iv) $\tan(45^\circ + A) = \dfrac{1+\tan A}{1-\tan A} = \dfrac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A}$ (v) $\tan(45^\circ - A) = \dfrac{1-\tan A}{1+\tan A} = \dfrac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A}$ (vi) $\sin A + \cos A = \sqrt{2}\cos(45^\circ - A) = \sqrt{2}\sin(45^\circ + A)$ (vii) $A + B = 90^\circ$ হলে, $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$

11. বৃত্তীয় কোণ বিভাজনের বিশেষ ধর্ম (সাম্যাবস্থা): (i) $\sin A + \sin(A+120^\circ) + \sin(A-120^\circ) = 0$ (ii) $\cos A + \cos(A+120^\circ) + \cos(A-120^\circ) = 0$ (iii) $\sin A + \sin(A+120^\circ) + \sin(A+240^\circ) = 0$ (iv) $\cos A + \cos(A+120^\circ) + \cos(A+240^\circ) = 0$

12. ধারাবাহিক বর্গমূলের Shortcut সূত্রাবলী: (i) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$ [$n-1$ বার] $= 2\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ (ii) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$ [$n-1$ বার] $= 2\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ (iii) $\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+(n-1)\text{বার}+\sqrt{3}}} = 2\cos\dfrac{\pi}{3\cdot 2^n}$ (iv) $\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+(n-1)\text{বার}+\sqrt{3}}} = 2\sin\dfrac{\pi}{3\cdot 2^n}$

13. ত্রিভুজের ধর্ম ও মৌলিক সূত্রাবলী (Properties of Triangle):



(i) কোণ সমষ্টি: $A + B + C = 180^\circ$ এবং বাহুর দৈর্ঘ্য $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (ii) সাইন সূত্র (Sine Rule): $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ [যেখানে $R =$ পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ] (iii) কোসাইন সূত্র (Cosine Rule):

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

(iv) অভিক্ষেপ সূত্র (Projection Rule):

$$a = b\cos C + c\cos B, \quad b = c\cos A + a\cos C, \quad c = a\cos B + b\cos A$$

14. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Δ):

$$\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

যেখানে, $s = \dfrac{a+b+c}{2} =$ অর্ধপরিসীমা।

15. ত্রিভুজের অর্ধকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত: (i) $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\sin\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-c)}{ca}}$, $\sin\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ (ii) $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$, $\cos\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}}$, $\cos\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}$ (iii) $\tan\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \dfrac{\Delta}{s(s-a)}$ (iv) $\tan\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} = \dfrac{\Delta}{s(s-b)}$ (v) $\tan\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} = \dfrac{\Delta}{s(s-c)}$

16. অন্তর্ব্যাসার্ধ (r), পরিব্যাসার্ধ (R) ও ক্ষেত্রফলের (Δ) সম্পর্ক: (i) $\Delta = \dfrac{abc}{4R}$ (ii) $\Delta = rs$ (iii) $r = (s-a)\tan\dfrac{A}{2} = (s-b)\tan\dfrac{B}{2} = (s-c)\tan\dfrac{C}{2}$ (iv) $rs = \dfrac{abc}{4R}$ (v) $\dfrac{r}{R} = \dfrac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$ (vi) $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

17. বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ (r_a, r_b, r_c): (i) $r_a = \dfrac{\Delta}{s-a}$, $r_b = \dfrac{\Delta}{s-b}$, $r_c = \dfrac{\Delta}{s-c}$ (ii) $\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r}$

18. কিছু গুরুত্বপূর্ণ ত্রিকোণমিতিক কোণের মান: (i) $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ (ii) $\cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (iii) $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$ (iv) $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ (v) $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (vi) $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ (vii) $\cos 18^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ (viii) $\tan 7\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$

19. যদি $A + B = 180^\circ$ হয় তবে বিশেষ ধর্ম: (i) $\sin A - \sin B = 0$ (ii) $\cos A + \cos B = 0$ (iii) $\tan A + \tan B = 0$

অধ্যায়-৮: ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র

1. ফাংশন ও এক-এক ফাংশন পরীক্ষা:

(i) Y-অক্ষের সমান্তরাল রেখা পরীক্ষা (Vertical Line Test): কোনো সমীকরণ বা লেখচিত্র ফাংশন কি না তা যাচাই করার জন্য। যদি কোনো সমান্তরাল রেখা লেখচিত্রটিকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করে, তবে সেটি ফাংশন নয়।

(ii) X-অক্ষের সমান্তরাল রেখা পরীক্ষা (Horizontal Line Test): কোনো ফাংশন এক-এক (One-to-One) কি না তা যাচাই করার জন্য। যদি কোনো সমান্তরাল রেখা লেখচিত্রটিকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করে, তবে সেটি এক-এক ফাংশন নয়।

2. সার্বিক ফাংশন (Onto Function): কোনো ফাংশন $f : A \to B$ সার্বিক হবে যদি এবং কেবল যদি ফাংশনটির রেঞ্জ ও কোডোমেন সমান হয়, অর্থাৎ $R_f = B$।

3. টাইপ-ভিত্তিক ডোমেন ও রেঞ্জ:

(i) $f(x) = ax + b \implies D_f = \mathbb{R}; \quad R_f = \mathbb{R}$

(ii) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} \implies D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}; \quad R_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$

(iii) $f(x) = \dfrac{x^2-a^2}{x-a} \implies D_f = \mathbb{R} - \{a\}; \quad R_f = \mathbb{R} - \{2a\}$

(iv) $f(x) = \sqrt{a^2-x^2} \implies D_f = [-a, a]; \quad R_f = [0, a]$

(v) $f(x) = \sqrt{x^2-a^2} \implies D_f = (-\infty, -a] \cup [a, \infty); \quad R_f = [0, \infty)$

(vi) $f(x) = \log_k(a+bx) \implies D_f = \left(-\dfrac{a}{b}, \infty\right)$ $[b > 0]; \quad R_f = \mathbb{R}$

(vii) $f(x) = e^{ax}$ or $k^{ax} \implies D_f = \mathbb{R}; \quad R_f = (0, \infty)$

4. দ্বিঘাত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ: $f(x) = ax^2 + bx + c$ এর ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং নিশ্চায়ক $D = b^2 - 4ac$ হলে,

(i) $a > 0$ হলে রেঞ্জ, $R_f = \left[-\dfrac{D}{4a}, \infty\right)$

(ii) $a < 0$ হলে রেঞ্জ, $R_f = \left(-\infty, -\dfrac{D}{4a}\right]$

5. বিপরীত ফাংশন (Inverse Function):

(i) $f(x) = ax + b \implies f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$

Abir Arafat Chawdhury

(ii) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} \implies f^{-1}(x) = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$

(iii) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$ হলে ফাংশনটি নিজেই নিজের বিপরীত। অর্থাৎ, $f^{-1}(x) = f(x) \implies f(f(x)) = x$

6. ত্রিকোণমিতিক বিশেষ ফাংশনের রেঞ্জ ও চরমমান: $f(x) = a\sin x + b\cos x + c$ হলে,

(i) সর্বোচ্চ মান $= c + \sqrt{a^2+b^2}$

(ii) সর্বনিম্ন মান $= c - \sqrt{a^2+b^2}$

(iii) রেঞ্জ $= \left[c - \sqrt{a^2+b^2},\ c + \sqrt{a^2+b^2}\right]$

7. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের পর্যায় (Period) নির্ণয়:

(i) $\sin^n(ax+b), \cos^n(ax+b), \sec^n(ax+b), \csc^n(ax+b)$ এর ক্ষেত্রে:

যদি n বিজোড় হয়, তবে পর্যায় $= \dfrac{2\pi}{|a|}$

যদি n জোড় হয়, তবে পর্যায় $= \dfrac{\pi}{|a|}$

(ii) $\tan^n(ax+b)$ এবং $\cot^n(ax+b)$ এর ক্ষেত্রে n জোড় বা বিজোড় যাই হোক না কেন, পর্যায় $= \dfrac{\pi}{|a|}$

8. সংযোজিত ফাংশন (Composite Function) ও গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম:

(i) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ এবং $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

(ii) $e^{\ln x} = x$ এবং $a^{\log_a x} = x$

অধ্যায়-৯: লিমিট ও অন্তরীকরণ

1. লিমিটের অস্তিত্ব ও অবিচ্ছিন্নতা: (i) $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের সীমা বিদ্যমান থাকবে যদি, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ হয়। (ii) $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন হওয়ার শর্ত: $f(a) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ (iii) কোনো ফাংশনের বিপরীত ফাংশন পাওয়া যাবে যদি এবং কেবল যদি ফাংশনটি এক-এক ও সার্বিক হয়।

2. লিমিটের ধর্মসমূহ: (i) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (iii) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ (iv) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (v) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ (vi) $\lim\limits_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (vii) $\lim\limits_{x\to a} c = c$ [এখানে, $c =$ ধ্রুবক]

3. লিমিটের প্রমিত সূত্রাবলী: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{-1}x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^{-1}x}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x} = n\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n} = \dfrac{m}{n}a^{m-n}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{m}{x}\right)^{nx} = e^{mn}$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{n}{x}} = e^{mn}$ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{d}{dx}f(x)$

4. কিছু গুরুত্বপূর্ণ General Form (Limits): (i) $\lim\limits_{x\to\infty} a^x\sin\dfrac{b}{a^x} = b$ [যখন, $a > 0$] (ii) $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{bx+c}{dx}} = e^{\frac{ac}{dx}}$ (iii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^x = e^{a-b}$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-bx}}{x} = \dfrac{a+b}{2}$ (v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-\sqrt[n]{1-bx}}{x} = \dfrac{a-b}{2}$

(vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{bx^2} = \dfrac{a^2}{2b}$ (vii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx} = \dfrac{a^2}{b^2}$ (viii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{\cos cx-\cos dx} = \dfrac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$ (ix) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax-\sin ax}{x^3} = \dfrac{a^3}{2}$ (x) $\lim\limits_{x\to\infty}\{\ln(ax+b)-\ln(cx+d)\} = \ln\dfrac{a}{c}$

(xi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx} = \dfrac{a}{b}$

5. মূলনিয়মে অন্তরীকরণের সূত্র: $\dfrac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

6. অন্তরীকরণের সাধারণ নিয়মাবলী: (i) $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$ [যখন, c ধ্রুবক] (ii) $\dfrac{d}{dx}\{cf(x)\} = c\dfrac{d}{dx}\{f(x)\}$

(iii) $\dfrac{d}{dx}(u \pm v \pm w) = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx} \pm \dfrac{dw}{dx}$ (iv) $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$ [u, v উভয়ই x-এর ফাংশন] (v) $\dfrac{d}{dx}(uvw) = uv\dfrac{dw}{dx} + uw\dfrac{dv}{dx} + vw\dfrac{du}{dx}$

(vi) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ (vii) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\cdot\dfrac{w}{x}\right) = \ldots$ [পর্যায়ক্রমিক নিয়মে গুণ ও ভাগফল]

(viii) $\dfrac{d}{dx}(u^v) = u^v\left[v\cdot\dfrac{d}{dx}(\ln u) + \ln u\cdot\dfrac{dv}{dx}\right]$ (ix) চেইন রুল: $y = f(z)$ এবং $z = f(x)$ হলে, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{z}\times\dfrac{dz}{dx}$

7. অন্তরীকরণের প্রমিত সূত্রাবলী: (i) $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (ii) $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (iii) $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

(iv) $\dfrac{d}{dx}(e^{mx}) = me^{mx}$ (v) $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x\ln a$ (vi) $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ (vii) $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x}\log_a e = \dfrac{1}{x\ln a}$ (viii) $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ (ix) $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ (x) $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ (xi) $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$ (xii) $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\tan x$ (xiii) $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x\cot x$ (xiv) $\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (xv) $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(xvi) $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (xvii) $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$ (xviii) $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (xviii) $\dfrac{d}{dx}(\csc^{-1}x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

8. প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে অন্তরক সহগ নির্ণয়ের কৌশল:

Term এর আকৃতি	যা ধরতে হবে
$1-x^2$	$x = \sin\theta$ বা $\cos\theta$
$1+x^2$	$x = \tan\theta$ বা $\cot\theta$
x^2-1	$x = \sec\theta$ বা $\csc\theta$
$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ এবং $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$	$x = \cos\theta$ বা $\cos 2\theta$
$\dfrac{2x}{1\pm x^2}$ এবং $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$	$x = \tan\theta$
$\dfrac{1-x}{a+x}$ এবং $\dfrac{1-x}{1-ax}$ বা $\dfrac{a-x}{a+x}$	$x = a\tan\theta$ বা $x = a\cos\theta$

9. অব্যক্ত ফাংশন (Implicit Function) সংক্রান্ত শর্টকাট: (i) যদি $f(x,y) = 0$ হয় তবে, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f_x}{f_y} = -\dfrac{y \text{ কে ধ্রুবক রেখে } x \text{ এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ}}{x \text{ কে ধ্রুবক রেখে } y \text{ এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ}}$ (ii) $y = \sqrt{f(x)+\sqrt{f(x)+\sqrt{f(x)+\ldots}}}$ হলে, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{2y-1}$ (iii) $x^a\cdot y^b = (x\pm y)^{a+b}$ হলে, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

10. ফাংশনের সাপেক্ষে ফাংশনের Differentiation: $g(x)$ এর সাপেক্ষে $f(x)$ এর অন্তরীকরণ $= \dfrac{\frac{d}{dx}f(x)}{\frac{d}{dx}g(x)} = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

11. পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ (n-তম অন্তরজ): (i) $y = x^n$ হলে, $y_r = {}^nP_r\cdot x^{n-r}$ [যখন $n \geq r$]; $y_n = n!$ [যখন $n = r$] এবং $y_r = 0$ [যখন $n < r$] (ii) $y = e^{ax}$ হলে, $y_n = a^n\cdot e^{ax}$ (iii) $y = e^{ax}\sin bx$ হলে, $y_n = r^n\cdot e^{ax}\cdot\sin(bx+n\theta)$ [যেখানে, $r = \sqrt{a^2+b^2}$ এবং $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$] (iv) $y = e^{ax}\cos bx$ হলে, $y_n = r^n\cdot e^{ax}\cdot\cos(bx+n\theta)$ [যেখানে, $r = \sqrt{a^2+b^2}$ এবং $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$] (v) $y = \dfrac{1}{ax+b}$ হলে, $y_n = \dfrac{(-1)^n\cdot n!\cdot a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

(vi) $y = \ln(ax+b)$ হলে, $y_n = \dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot a^n}{(ax+b)^n}$ (vii) $y = \sin(ax+b)$ হলে, $y_n = a^n\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}+(ax+b)\right)$ (viii) $y = \sin x$ হলে, $y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$ (ix) $y = \cos(ax+b)$ হলে, $y_n = a^n\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{2}+(ax+b)\right)$ (x) $y = a^x$ হলে, $y_n = (\ln a)^n\cdot a^x$

12. ম্যাকলরিনের উপপাদ্য (Maclaurin's Theorem): $f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \ldots$

13. অন্তরীকরণের জ্যামিতিক প্রয়োগ ও স্পর্শক-অভিলম্ব: (i) $\dfrac{dy}{dx}$ দ্বারা বোঝায়: x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার, তাৎক্ষণিক পরিবর্তন, অথবা $y = f(x)$ বক্ররেখার যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল। (ii) (x_1, y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ: $y - y_1 = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}(x - x_1)$ (iii) (x_1, y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের সমীকরণ: $y - y_1 = \dfrac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}}(x - x_1)$ বা, $(x - x_1) + \dfrac{dy}{dx}(y - y_1) = 0$ (iv) স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে ঢাল, $m = \tan\theta$ (v) স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল বা y-অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\dfrac{dy}{dx} = \tan 0^\circ = 0$ (vi) স্পর্শক y-অক্ষের সমান্তরাল বা x-অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\dfrac{dx}{dy} = 0$ বা $\dfrac{dy}{dx} = \infty$ (vii) স্পর্শক উভয় অক্ষের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করলে, $\dfrac{dy}{dx} = \pm 1$

14. পরিবর্তনের হার সংক্রান্ত সূত্রাবলী: (i) বৃত্তের ক্ষেত্রে: $\dfrac{dA}{dt} = 2\pi r\cdot\dfrac{dr}{dt}$, $\dfrac{dp}{dt} = 2\pi\cdot\dfrac{dr}{dt}$, $\dfrac{dA}{dt} = r\cdot\dfrac{dp}{dt}$ [যেখানে, $r =$ ব্যাসার্ধ, $A =$ ক্ষেত্রফল, $p =$ পরিধি] (ii) গোলকের ক্ষেত্রে: $\dfrac{dA}{dt} = 8\pi r\cdot\dfrac{dr}{dt}$, $\dfrac{dV}{dt} = 4\pi r^2\cdot\dfrac{dr}{dt}$, $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{2}{r}\cdot\dfrac{dV}{dt}$ [যেখানে, $V =$ আয়তন, $A =$ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল]

15. ফাংশনের লঘু ও গুরুমান (Maxima and Minima): (i) চরম বিন্দুতে (Maximum বা Minimum বিন্দুতে) স্পর্শকের ঢাল, $\dfrac{dy}{dx} = 0$ (ii) প্রয়োজনীয় ধাপসমূহ: $y = f(x)$ ফাংশনের জন্য প্রথমে $\dfrac{dy}{dx}$ ও $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করতে হবে। (iii) $\dfrac{dy}{dx} = 0$ ধরে x এর মানসমূহ নির্ণয় করতে হবে। (iv) x এর যে মানের জন্য $\dfrac{d^2y}{dx^2} = (-)$ve হবে, সেই মানের জন্য $f(x)$ ফাংশনটির গুরুমান (Maximum value) পাওয়া যাবে। (v) x এর যে মানের জন্য $\dfrac{d^2y}{dx^2} = (+)$ve হবে, সেই মানের জন্য $f(x)$ ফাংশনটির লঘুমান (Minimum value) পাওয়া যাবে। (vi) x এর মান অবাস্তব হলে বা $f''(x) = 0$ হলে ফাংশনটির চরমমান নেই।

16. বৃদ্ধিপ্রাপ্ত (ক্রমবর্ধমান) ও হ্রাসপ্রাপ্ত (ক্রমহ্রাসমান) ফাংশন: (i) for increasing function, $\dfrac{dy}{dx} > 0$ (ii) for decreasing function, $\dfrac{dy}{dx} < 0$

17. ফাংশনের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের শর্টকাট: (i) $ax^2 + bx + c$ এর সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন মান $= c - \dfrac{b^2}{4a}$ (ii) $a\sin x \pm b\cos x + c$ এর সর্বোচ্চ মান $= c + \sqrt{a^2+b^2}$ এবং সর্বনিম্ন মান $= c - \sqrt{a^2+b^2}$ (iii) $\dfrac{x}{\ln x}$ এর লঘুমান $= e$ (iv) $\dfrac{lnx}{x}$ এর গুরুমান $= \dfrac{1}{e}$

—

অধ্যায়-১০: যোগজীকরণ

Abir Arafat Chawdhury

1. অনির্দিষ্ট যোগজের সাধারণ সূত্রসমূহ (প্রত্যেকটির শেষে $+c$ দিতে হবে): (i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad [n \neq -1]$ (ii) $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$ (iii) $\int \left[\frac{d}{dx}(f(x))\right] dx = f(x) + c$ (iv) $\int dx = x + c$ (v) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$ (vi) $\int m \cdot f(x)dx = m \cdot \int f(x)dx \quad [m = \text{ধ্রুবক}]$ (vii) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$ (viii) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$ (ix) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$ (x) $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$ (xi) $\int \sec x \cdot \tan x\, dx = \sec x + c$ (xii) $\int \csc x \cdot \cot x\, dx = -\csc x + c$ (xiii) $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$ (xiv) $\int (u \pm v \pm w)dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx \pm \int w\, dx$ (xv) $\int e^x dx = e^x + c$ (xvi) $\int e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m} + c$ (xvii) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ (xviii) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ (xix) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$ (xx) $\int \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a} + c$ (xxi) $\int \sin ax\, dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$ (xxii) $\int \sec^2 ax\, dx = \frac{\tan ax}{a} + c$ (xxiii) $\int \csc^2 ax\, dx = -\frac{\cot ax}{a} + c$ (xxiv) $\int \sec ax \cdot \tan ax\, dx = \frac{\sec ax}{a} + c$ (xxv) $\int \csc ax \cdot \cot ax\, dx = -\frac{\csc ax}{a} + c$ (xxvi) $\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + c = -\ln|\cos x| + c$ (xxvii) $\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + c$ (xxviii) $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$ (xxix) $\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

2. বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন সংক্রান্ত যোগজ সূত্রাবলী: (i) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$ (ii) $\int \frac{-1}{1+x^2} dx = \cot^{-1} x + c$ (iii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$ (iv) $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \cos^{-1} x + c$ (v) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$ (vi) $\int \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \csc^{-1} x + c$ (vii) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$ (viii) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$ (ix) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a} + c$ (x) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$ (xi) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$ (xii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + c$ (xiii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + c$ (xiv) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$ (xv) $\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{a^2+x^2}| + c$ (xvi) $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + c$

3. ইউ-ভি পদ্ধতি (Integration by Parts): $\int u \cdot v\, dx = u\int v\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(u) \cdot \int v\, dx\right\} dx$ ইউ (u) নির্ধারণের জন্য ক্রম (LIATE নিয়ম):
L (Logarithmic) $\rightarrow$ I (Inverse) $\rightarrow$ A (Algebraic) $\rightarrow$ T (Trigonometric) $\rightarrow$ E (Exponential)
আগে যেটি আসবে তা u, পরে যেটি আসবে তা v।

4. কিছু সাধারণ আকৃতির রূপ (General Forms): (i) $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ (ii) $\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$ (iii) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$ (iv) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$ (v) $\int e^{ax} \cdot [a \cdot f(x) + f'(x)]\, dx = e^{ax} \cdot f(x) + c$ (vi) $\int e^x \cdot [f(x) + f'(x)]\, dx = e^x \cdot f(x) + c$

5. কিছু বিশেষ পদ্ধতির প্রতিস্থাপন কৌশল: (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{ax+c}}$ আকৃতির ক্ষেত্রে লব ও হরকে হরের অনুবন্ধী রাশি দ্বারা গুণ করতে হবে। (ii) $\int \sqrt{ax+b} \cdot (cx+d)dx$ আকৃতির ক্ষেত্রে, $(ax+b) = t^2$ ধরতে হবে। (iii) $\int \frac{(a+bx)^m}{(c+dx)^n} dx$ [যেখানে $m \rightarrow$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, $n \rightarrow$ মূলদ], এক্ষেত্রে, $c + dx = t$ ধরতে হবে। (iv) $\int \frac{dx}{a+be^{mx}}$ থাকলে, লব ও হরকে e^{-mx} দ্বারা এবং $\int \frac{dx}{a+be^{-mx}}$ থাকলে, লব ও হরকে e^{mx} দ্বারা গুণ করতে হবে। (v) $\int \frac{dx}{a+b\sin^2 x}, \int \frac{dx}{a+b\cos^2 x}, \int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$ থাকলে লব ও হরকে $\cos^2 x$ দ্বারা ভাগ করে $\tan x = t$ ধরতে হবে। (vi) $\int \frac{x^2 \pm 1}{x^4 + kx^2 + 1} dx$ থাকলে, x^2 দ্বারা লব ও হরকে ভাগ করে $\left(x + \frac{1}{x}\right) = t$ অথবা $\left(x - \frac{1}{x}\right) = t$ ধরতে হবে। (vii) $\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n}$ থাকলে, $a = r\cos\theta$ এবং $b = r\sin\theta$ ধরতে হবে।

6. MCQ Special যোগজ সূত্রাবলী: (i) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{|D|}} \cdot \tan^{-1}\frac{f'(x)}{\sqrt{|D|}} + c$ [যখন নিশ্চায়ক, $D < 0$] (ii) $\int \frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x} dx = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}x + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\ln|c\sin x + d\cos x| + c$ (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \sin^{-1}\left(\frac{2x-(\alpha+\beta)}{\beta-\alpha}\right) + c$ (iv) $\int e^{ax} \cdot x^n dx = e^{ax}\left[\frac{x^n}{a} - \frac{n \cdot x^{n-1}}{a^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^3} - \dots\right]$ [ধ্রুবক পদ না আসা পর্যন্ত পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ চালাতে হবে] (v) $\int \begin{Bmatrix} e^{ax}\sin(bx+c)dx \\ e^{ax}\cos(bx+c)dx \end{Bmatrix} = \frac{T \cdot E_D - E \cdot T_D}{a^2+b^2}$ [যেখানে T = Trigonometric, E = Exponential; T_D ও E_D যথাক্রমে এদের Differentiation] (vi) $\int \frac{dx}{f(x)\sqrt{\{f(x)\}^2 - 1}} = \frac{\sec^{-1} f(x)}{f'(x)} + c \quad [f(x) = \text{Linear function}]$

7. নির্দিষ্ট যোগজের সূত্রাবলী (Properties of Definite Integrals): (i) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ (ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (iii) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad [a < c < b]$ (iv) $\int_a^b f(x)dx = p \cdot \int_{a/p}^{b/p} f(px)dx$ (v) যদি $f(x) = f(2a-x)$ হয়, তবে $\int_0^{2a} f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$ (vi) যদি $f(x) = -f(-x)$ [বিজড় ফাংশন] হয়, তবে $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ (vii) যদি $f(x) = f(-x)$ [জোড় ফাংশন] হয়, তবে $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$ (viii) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

8. নির্দিষ্ট যোগজের শর্টকাট (Definite Integral Shortcuts): (i) $\int_a^b \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \frac{b-a}{2}$ [যখন, $a + b = \frac{\pi}{2}$] (ii) $\int_a^b \frac{\tan^n x}{\tan^n x + \cot^n x} dx = \int_a^b \frac{\cot^n x}{\tan^n x + \cot^n x} dx = \frac{b-a}{2}$ [যখন, $a + b = \frac{\pi}{2}$] (iii) $\int_a^b \frac{\sec^n x}{\sec^n x + \csc^n x} dx = \int_a^b \frac{\csc^n x}{\sec^n x + \csc^n x} dx = \frac{b-a}{2}$ [যখন, $a + b = \frac{\pi}{2}$] (iv) $\int_0^\pi \frac{dx}{a + b\cos x} = \int_0^\pi \frac{dx}{a + b\sin x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ (v) $\int_0^\infty e^{-ax} \cdot \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}$ (vi) $\int_0^\infty e^{-ax} \cdot \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}$ (vii) $\int_0^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = \frac{\pi a}{2} + a$ (viii) $\int_0^a \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx = \frac{\pi a}{2} - a$ (ix) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ (x) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{\pi a^2}{4}$ (xi) $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$

9. ওয়ালিস উপপাদ্য (Walli's Theorem): $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$

$$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \frac{n-5}{n-4} \times \cdots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \quad [\text{যখন, } n = \text{জোড়}]$$

$$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \frac{n-5}{n-4} \times \cdots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times 1 \quad [\text{যখন, } n = \text{বিজোড়}]$$

10. ক্ষেত্রফল নির্ণয় সংক্রান্ত সাধারণ তত্ত্ব: (i) নির্দিষ্ট যোগজ $A = \int_a^b y\, dx = \int_a^b f(x)dx$ যা, $y = f(x)$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ দুটি নির্দিষ্ট ভুজ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে। (ii) নির্দিষ্ট যোগজ $A = \int_c^d x\, dy = \int_c^d f(y)dy$ যা, $x = f(y)$ বক্ররেখা, y-অক্ষ এবং $y = c$ ও $y = d$ দুটি নির্দিষ্ট কোটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে। (iii) $y_1 = f(x_1)$ ও $y_2 = f(x_2)$ বক্ররেখা এবং $x = a$ ও $x = b$ ভুজ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $A = \int_a^b (y_2 - y_1)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$ (iv) $x_1 = f(y_1)$ এবং $x_2 = f(y_2)$ বক্ররেখা এবং $y = c$ ও $y = d$ কোটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $A = \int_c^d (x_1 - x_2)dy = \int_c^d [f_1(y) - f_2(y)]dy$

11. ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত শর্টকাট সূত্রাবলী (MCQ Special): (1) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ রেখা এবং স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}ab$ (2) $x + y = a$ রেখা এবং স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}a^2$ (3) $x = a, x = b, y = c$ এবং $y = d$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (b-a)(d-c)$ [এখানে $a < b$ এবং $c < d$] (4) $y = |x|$ এবং $y = b$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= b^2$ (5) $y = -|x|$ এবং $y = -b$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= b^2$ (6) $y = mx$ সরলরেখা, x-অক্ষ এবং $x = a$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}ma^2$ (7) $y = mx$ সরলরেখা, y-অক্ষ এবং $y = b$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{b^2}{2m}$ (8) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং $x = b$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8}{3}\sqrt{a}(\sqrt{b})^3$ (9) $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত এবং $y = b$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8}{3}\sqrt{a}(\sqrt{b})^3$ (10) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8}{3}a^2$ (11) $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8}{3}a^2$ (12) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং $y = mx$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3m^3}$ (13) $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত এবং $y = mx$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8}{3}a^2m^3$ (14) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং $y = mx + c$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8}{3}\frac{a^2}{m^3}\left(\sqrt{1 - \frac{cm}{a}}\right)^3$ (15) $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত এবং $y = mx + c$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8}{3}a^2m^3\left(\sqrt{1 + \frac{c}{am^2}}\right)^3$ (16) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং $x^2 = 4by$ পরাবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{16}{3}ab$ (17) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{16}{3}a^2$ (18) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \pi ab$ (19) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের এক চতুর্থাংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi ab}{4}$ (20) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \pi a^2$ (21) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের এক চতুর্থাংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi a^2}{4}$ (22) $y = \sqrt{a^2-x^2}$ অর্ধবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi a^2}{2}$ (23) $y = -\sqrt{a^2-x^2}$ অর্ধবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi a^2}{2}$ (24) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত এবং $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi ab}{4} - \frac{1}{2}ab$ (25) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত এবং $x + y = a$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi a^2}{4} - \frac{1}{2}a^2$ (26) $x^2 + y^2 = 2ax$ বৃত্ত এবং $y^2 = ax$ পরাবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi a^2}{2} - \frac{4}{3}a^2$ (27) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত এবং $y^2 = a^2 - x$ পরাবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi a^2}{2} - \frac{4}{3}a^2$ (28) $xy = c^2$ অধিবৃত্ত, x-অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= c^2\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ [এখানে $a < b$] (29) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ অধিবৃত্ত এবং স্থানাঙ্কের অক্ষ দুটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{a^2}{6}$

অধ্যায়-১০: যোগজীকরণ

1. সাধারণ সূত্রসমূহ: [প্রত্যেকটির শেষে +c দিতে হবে]
(i) $\int\{f(x) \pm \varphi(x)\}\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int!\varphi(x)\, dx$
(ii) $\int cf(x)\, dx = c\int f(x)\, dx$

Abir Arafat Chawdhury

(iii) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$; যখন $n \neq -1$

(iv) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

(v) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

(vi) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ এবং $\int \sin mx\,dx = -\frac{\cos mx}{m} + c$

(vii) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ এবং $\int \cos mx\,dx = \frac{\sin mx}{m} + c$

(viii) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$ এবং $\int \sec^2 mx\,dx = \frac{\tan mx}{m} + c$

(ix) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$ এবং $\int \csc^2 mx\,dx = -\frac{\cot mx}{m} + c$

(x) $\int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}e^{mx} + c$

(xi) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ এবং $\int a^{mx}\,dx = \frac{a^{mx}}{m\ln a} + c$

(xii) $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$ এবং $\int \csc mx \cot mx\,dx = -\frac{\csc mx}{m} + c$

(xiii) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$ এবং $\int \sec mx \tan mx\,dx = \frac{\sec mx}{m} + c$

(xiv) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$

(xv) $\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \cos^{-1} x + c$

(xvi) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$

(xvii) $\int \frac{-dx}{1+x^2} = \cot^{-1} x + c$

(xviii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + c$

(xix) $\int \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \csc^{-1} x + c$

(xx) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + c$

(xxi) $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + c$

(xxii) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + c$

(xxiii) $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$

(xxiv) $\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)\}\right] dx = f(x) + c$

(xxv) $\int dx = x + c$

(xxvi) $\int m \cdot f(x)\,dx = m \cdot \int f(x)\,dx$ [এখানে $m =$ ধ্রুবক]

(xxvii) $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

(xxviii) $\int (u \pm v \pm w)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx \pm \int w\,dx$

(xxix) $\int e^x\,dx = e^x + c$

(xxx) $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$

(xxxi) $\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + c$

(xxxii) $\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$

(xxxiii) $\int \sec^2 ax\,dx = \frac{\tan ax}{a} + c$

(xxxiv) $\int \csc^2 ax\,dx = -\frac{\cot ax}{a} + c$

(xxxv) $\int \sec ax \cdot \tan ax\,dx = \frac{\sec ax}{a} + c$

(xxxvi) $\int \csc ax \cdot \cot ax\,dx = -\frac{\csc ax}{a} + c$

(xxxvii) $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + c$

(xxxviii) $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$

(xxxix) $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

(xl) $\int \csc x\,dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

2. প্রমিত যোগজসমূহ:

(i) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

(iii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a} + c$

(iv) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

(v) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

(vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$

(vii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

(viii) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

(ix) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + c$

(x) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

3. অংশ্যায়ন ও সাধারণ আকারসমূহ:

(i) $\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int v\,dx\right\}dx$

(ii) $\int e^x\{f(x)+f'(x)\}\,dx = e^x f(x) + c$ এবং $\int e^{ax}\{af(x)+f'(x)\}\,dx = e^{ax}f(x) + c$

(iii) $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c$

(iv) $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$

(v) U, V নির্ণয় (LIATE নিয়ম): L $\to$ Logarithmic, I $\to$ Inverse, A $\to$ Algebraic, T $\to$ Trigonometric, E $\to$ Exponential
আগে যেটি আসবে তা u, পরে যেটি আসবে তা v।

(vi) $\int \{f(x)\}^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{\{f(x)\}^{n+1}}{n+1} + c$

(vii) $\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$

(viii) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

4. প্রতিস্থাপন কৌশল ও বিশেষ সাধারণ পদ্ধতি:

(i) যদি কোনো যোগজ $\int \frac{a+bx^l}{p+qx^n}\,dx$ আকারে থাকে, যেখানে l ও m উভয়ে ভগ্নাংশ এবং তাদের হরের ল.সা.গু n হয়, তবে $x = z^n$ ধরতে হয়।

(ii) $\int \frac{dx}{x(a+bx^n)}$ আকারের যোগজের জন্য, $x^n = \frac{1}{z}$ ধরতে হয়।

(iii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^n}}$ আকারের যোগজের জন্য, $x^n = \frac{1}{z}$ ধরতে হয়।

(iv) $\int \frac{dx}{x^m(a+bx)^n}$ আকারের যোগজের জন্য, $a+bx = zx$ ধরতে হয়।

(v) $\int \frac{dx}{(x-a)^m(x-b)^n}$ আকারের যোগজের জন্য, $z = \frac{x-b}{x-a}$ ধরতে হয়।

(vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}}$ আকৃতির ক্ষেত্রে লব ও হরকে হরের অনুবন্ধী রাশি দ্বারা গুণ করতে হবে।

(vii) $\int \sqrt{ax+b}\cdot(cx+d)\,dx$ আকৃতির ক্ষেত্রে, $(ax+b) = t^2$ ধরতে হবে।

(viii) $\int \frac{(a+bx)^m}{(c+dx)^n}\,dx$ যেখানে $m \to$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, $n \to$ মূলদ। এক্ষেত্রে, $c+dx = t$ ধরতে হবে।

(ix) $\int \frac{dx}{a+be^{mx}}$ থাকলে, লব ও হরকে e^{-mx} দ্বারা এবং $\int \frac{dx}{a+be^{-mx}}$ থাকলে, লব ও হরকে e^{mx} দ্বারা গুণ করতে হবে।

(x) $\int \frac{dx}{a+b\sin^2 x}$, $\int \frac{dx}{a+b\cos^2 x}$, $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$ থাকলে লব ও হরকে $\cos^2 x$ দ্বারা ভাগ করে $\tan x = t$ ধরতে হবে।

(xi) $\int \frac{x^2 \pm 1}{x^4+kx^2+1}\,dx$ থাকলে, x^2 দ্বারা লব ও হরকে ভাগ করে $(x+\frac{1}{x}) = t$ অথবা $(x-\frac{1}{x}) = t$ ধরতে হবে।

(xii) $\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n}$ থাকলে, $a = r\cos\theta$ এবং $b = r\sin\theta$ ধরতে হবে।

5. নির্দিষ্ট যোগজের সূত্রাবলী:

(i) $\int_a^b f'(x)\,dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(iii) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

(iv) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

(v) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a\pm c}^{b\pm c} f(x\mp c)\,dx$

(vi) $\int_a^b f(x)\,dx = p\cdot\int_{a/p}^{b/p} f(px)\,dx$

(vii) $f(x) = f(2a-x)$ হলে, $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\cdot\int_0^a f(x)\,dx$

(viii) $f(x) = f(-x)$ হলে, $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\cdot\int_0^a f(x)\,dx$

(ix) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

6. MCQ Special & Shortcuts:

Abir Arafat Chawdhury

(i) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{-D}} \cdot \tan^{-1} \frac{f'(x)}{\sqrt{-D}} + c$ [যখন, নিশ্চায়ক, $D < 0$]

(ii) $\int \frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}\, dx = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}x + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \ln|c\sin x + d\cos x| + c$

(iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}} = 2\ln\left|\sqrt{x-\alpha} + \sqrt{x-\beta}\right| + c$

(iv) $\int e^{ax} \cdot x^n\, dx = e^{ax}\left[\frac{x^n}{a} - \frac{n \cdot x^{n-1}}{a^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^3} - \dots\right]$ [ধ্রুবক না আসা পর্যন্ত differentiation করতে হবে]

(v) $\int e^{ax}\sin(bx + c)\, dx \rightarrow \frac{T \cdot E_D - E \cdot T_D}{a^2+b^2}$ [যেখানে T = trigonometric, E = exponential, T_D ও E_D তাদের যথাক্রমে differentiation]

(vi) $\int e^{ax}\cos(bx+c)\, dx \rightarrow \frac{T \cdot E_D - E \cdot T_D}{a^2+b^2}$

(vii) $\int \frac{dx}{f(x)\sqrt{\{f(x)\}^2 - 1}} = \frac{\sec^{-1} f(x)}{f'(x)} + c$ [এখানে $f(x)$ = linear function]

(viii) $\int_a^b \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\, dx = \frac{b-a}{2}$ [যখন, $a + b = \frac{\pi}{2}$]

(ix) $\int_a^b \frac{\tan^n x}{\tan^n x + \cot^n x}\, dx = \frac{b-a}{2}$ এবং $\int_a^b \frac{\cot^n x}{\tan^n x + \cot^n x}\, dx = \frac{b-a}{2}$ [যখন, $a + b = \frac{\pi}{2}$]

(x) $\int_a^b \frac{\sec^n x}{\sec^n x + \csc^n x}\, dx = \int_a^b \frac{\csc^n x}{\sec^n x + \csc^n x}\, dx = \frac{b-a}{2}$ [যখন, $a + b = \frac{\pi}{2}$]

(xi) $\int_0^\pi \frac{dx}{a + b\cos x} = \int_0^\pi \frac{dx}{a + b\sin x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$

(xii) $\int_0^\infty e^{-ax} \cdot \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}$

(xiii) $\int_0^\infty e^{-ax} \cdot \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}$

(xiv) $\int_0^a !\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\, dx = \frac{\pi}{2}a + a$

(xv) $\int_0^a !\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\, dx = \frac{\pi}{2}a - a$

(xvi) $\int_0^a !\frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{\pi}{2}$

(xvii) $\int_0^a !\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{4}$

(xviii) $\int_0^a !\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}$

(xix) Walli's theorem:

$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \frac{n-5}{n-4} \times \dots \times \frac{3 \times 1}{4 \times 2} \times \frac{\pi}{2}$ [যখন, n = জোড়]

$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \frac{n-5}{n-4} \times \dots \times \frac{2}{3}$ [যখন, n = বিজোড়]

7. ক্ষেত্রফল নির্ণয় সংক্রান্ত জ্যামিতিক ধারণা ও লেখচিত্র:

(i) নির্দিষ্ট যোগজ $A = \int_a^b y\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$ যা $y = f(x)$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ দুটি নির্দিষ্ট ভুজ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে।

(ii) নির্দিষ্ট যোগজ $A = \int_c^d x\, dy = \int_c^d f(y)\, dy$ যা $x = f(y)$ বক্ররেখা, y-অক্ষ এবং $y = c$ ও $y = d$ দুইটি নির্দিষ্ট কোটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে।

(iii) $y_1 = f(x_1)$ ও $y_2 = f(x_2)$ বক্ররেখা এবং $x = a$ ও $x = b$ ভুজ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $A = \int_a^b (y_2 - y_1)\, dx = \int_a^b \{f_2(x) - f_1(x)\}\, dx$

(iv) $x_1 = f(y_1)$ এবং $x_2 = f(y_2)$ বক্ররেখা এবং $y = c$ ও $y = d$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $A = \int_c^d (x_1 - x_2)\, dy = \int_c^d \{f_1(y) - f_2(y)\}\, dy$

8. ক্ষেত্রফল সংক্ষেপঃ অঙ্কের জন্য এই সূত্রগুলো মুখস্থ রাখতে হবে

(1) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ রেখা এবং স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}ab$

(2) $x + y = a$ রেখা এবং স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}a^2$

(3) $x = a, x = b, y = c$ এবং $y = d$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $(b-a)(d-c)$ [এখানে $a < b$ এবং $c < d$]

(4) $y = |x|$ এবং $y = b$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = b^2

(5) $y = -|x|$ এবং $y = -b$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = b^2

(6) $y = mx$ সরলরেখা, x-অক্ষ এবং $x = a$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}ma^2$

(7) $y = mx$ সরলরেখা, y-অক্ষ এবং $y = b$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{m}$

(8) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং $x = b$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{8}{3}\sqrt{a}(\sqrt{b})^3$

(9) $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত এবং $y = b$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{8}{3}\sqrt{a}(\sqrt{b})^3$

(10) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{8}{3}a^2$

(11) $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{8}{3}a^2$

(12) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং $y = mx$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{8}{3} \cdot \frac{a^2}{m^3}$

(13) $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত এবং $y = mx$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{8}{3}a^2m^3$

(14) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং $y = mx + c$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{8}{3} \cdot \frac{a^2}{m^3}\left(\sqrt{1 - \frac{cm}{a}}\right)^3$

(15) $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত এবং $y = mx + c$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{8}{3}a^2m^3\left(\sqrt{1 + \frac{c}{am^2}}\right)^3$

(16) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং $x^2 = 4by$ পরাবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{16}{3}ab$

(17) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{16}{3}a^2$

(18) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = πab

(19) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের এক চতুর্থাংশের ক্ষেত্রফল = $\frac{\pi ab}{4}$

(20) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = πa^2

(21) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের এক চতুর্থাংশের ক্ষেত্রফল = $\frac{\pi a^2}{4}$

(22) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ অর্ধবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{\pi a^2}{2}$

(23) $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ অর্ধবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{\pi a^2}{2}$

(24) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত এবং $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{\pi ab}{4} - \frac{1}{2}ab$

(25) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত এবং $x + y = a$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{\pi a^2}{4} - \frac{1}{2}a^2$

(26) $x^2 + y^2 = 2ax$ বৃত্ত এবং $y^2 = ax$ পরাবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{\pi a^2}{2} - \frac{4}{3}a^2$

(27) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত এবং $y^2 = a^2 - x$ পরাবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{\pi a^2}{2} - \frac{4}{3}a^2$

(28) $xy = c^2$ অধিবৃত্ত, x-অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ রেখাদুটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $c^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ [এখানে $a < b$]

(29) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ অধিবৃত্ত এবং স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{a^2}{6}$

দ্বিতীয় পত্র

অধ্যায়-১: বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা

1. সকল $a, b \in \mathbb{R}$ এর জন্য,

(i) $|a| \geq a$ (ii) $|a|^2 = |-a|^2 = a^2$

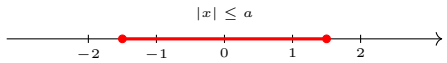
(iii) $|ab| = |a||b|$ (iv) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (ত্রিভুজ অসমতা)

(v) $|a - b| \leq |a| + |b|$ (vi) $|a - b| \geq ||a| - |b||$

(vii) $|ab| \geq ab$ (viii) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$; যেখানে $b \neq 0$

2. $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

3. পরমমান চিহ্নের সাহায্যে অসমতার প্রকাশ ($a > 0$ হলে):



(i) $|x| < a \iff -a < x < a$ (ii) $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$
(iii) $|x| > a \iff x > a$ অথবা $x < -a$ (iv) $|x| \geq a \iff x \geq a$ অথবা $x \leq -a$

4. অসমতার মৌলিক বৈশিষ্ট্যসমূহ: (i) $a > b$ এবং $c \in \mathbb{R}$ হলে, $a + c > b + c$ এবং $a - c > b - c$ (ii) $a > b$ এবং $c > 0$ হলে, $ac > bc$ এবং $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ (iii) $a > b$ এবং $c < 0$ হলে, $ac < bc$ এবং $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ (ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করলে অসমতার চিহ্ন উল্টে যায়) (iv) $a > b$ এবং $b > c$ হলে, $a > c$ (সংক্রামক ধর্ম) (v) $a > b > 0$ হলে, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

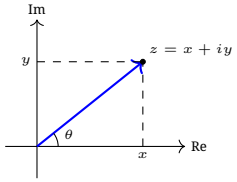
5. বাস্তব সংখ্যার বিভিন্ন প্রকার ব্যবধি (Intervals): (i) খোলা ব্যবধি (Open Interval): $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (ii) বদ্ধ ব্যবধি (Closed Interval): $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (iii) খোলা-বদ্ধ ব্যবধি (Open-Closed Interval): $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (iv) বদ্ধ-খোলা ব্যবধি (Closed-Open Interval): $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (v) অসীম ব্যবধি (Infinite Interval): $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ এবং $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

6. ঊর্ধ্বসীমা, নিম্নসীমা, সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম: (i) ঊর্ধ্বসীমা (Upper Bound): কোনো সেট S এর সকল উপাদান যদি একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা M অপেক্ষা ছোট বা সমান হয়, তবে M-কে সেটের ঊর্ধ্বসীমা বলে। (ii) নিম্নসীমা (Lower Bound): কোনো সেট S এর সকল উপাদান যদি একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা m অপেক্ষা বড় বা সমান হয়, তবে m-কে সেটের নিম্নসীমা বলে। (iii) লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা বা সুপ্রিমাম (Supremum / L.U.B): কোনো সেটের ঊর্ধ্বসীমাবদ্ধ সেটটির ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমাকে সুপ্রিমাম বলে। (iv) গরিষ্ঠ নিম্নসীমা বা ইনফিমাম (Infimum / G.L.B): কোনো সেটের নিম্নসীমাবদ্ধ সেটটির বৃহত্তম নিম্নসীমাকে ইনফিমাম বলে।

অধ্যায়-৩: জটিল সংখ্যা

1. জটিল সংখ্যা, $z = x + iy$ এর ক্ষেত্রে, মডুলাস, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

Abir Arafat Chawdhury



2. যদি $a + ib = x + iy$ হয়, তবে $a = x,\ b = y$; যেখানে $i = \sqrt{-1}$, সুতরাং $i^2 = -1,\ i^3 = -i$ এবং $i^4 = 1$

3. একেকের জটিল ঘনমূল দুইটির একটি ω হলে, অপরটি ω^2

এবং $\omega^3 = 1,\ 1 + \omega + \omega^2 = 0; \omega = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i),\ \omega^2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)$

4. মুখ্য আর্গুমেন্ট নির্ণয়ের নিয়ম ($z = x + iy$ এর জন্য): (i) ১ম চতুর্ভাগ ($x > 0, y > 0$): $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ (ii) ২য় চতুর্ভাগ ($x < 0, y > 0$): $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ (iii) ৩য় চতুর্ভাগ ($x < 0, y < 0$): $\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ (iv) ৪র্থ চতুর্ভাগ ($x > 0, y < 0$): $\theta = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

5. অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা ও তার ধর্মাবলী: (i) $z = x + iy$ হলে এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স বা সংখ্যা $\bar{z} = x - iy$ (ii) $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$ (iii) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ (iv) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

6. মডুলাস ও আর্গুমেন্টের ধর্মাবলী: (i) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ এবং $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(ii) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ (iii) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

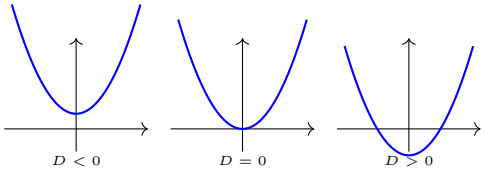
অধ্যায়-৪: বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

1. দ্বিঘাত সমীকরণ, $ax^2 + bx + c = 0$ (যেখানে, $a \neq 0$) এর ক্ষেত্রে,

(i) মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

(ii) উপরি-উক্ত সমীকরণের সমাধান, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(iii) দ্বিঘাত সমীকরণের নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac$ যেখানে,



$b^2 - 4ac = 0$ হলে, মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান; $b^2 - 4ac > 0$ হলে, মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান।

$b^2 - 4ac < 0$ হলে, মূলদ্বয় জটিল ও অসমান; $b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ সংখ্যা হলে, মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান।

$b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ সংখ্যা না হলে, মূলদ্বয় অমূলদ ও অসমান।

2. ত্রিঘাত সমীকরণ, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (যেখানে, $a \neq 0$) এর ক্ষেত্রে

(i) মূলত্রয়, α, β, γ হলে, $\Sigma\alpha = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \Sigma\alpha\beta = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a}$ এবং $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

(ii) মূলত্রয় সমান্তর প্রগমনে থাকলে তাদের সাধারণ আকার, $\alpha - \beta,\ \alpha,\ \alpha + \beta$

(iii) মূলত্রয় গুণোত্তর প্রগমনে থাকলে তাদের সাধারণ আকার, $\frac{\alpha}{r},\ \alpha,\ \alpha r$

(iv) মূলত্রয় ভাজিত (Harmonic) প্রগমনে থাকলে তাদের সাধারণ আকার, $\frac{1}{\alpha - \beta},\ \frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\alpha + \beta}$

3. (i) α, β মূলদ্বয় বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

(ii) ত্রিঘাত সমীকরণের মূলত্রয় α, β ও γ হলে, সমীকরণ

$x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$

4. চতুর্ঘাত সমীকরণ, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (যেখানে, $a \neq 0$) এর মূলগুলি $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হলে:

(i) $\sum \alpha = \alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a}$ (ii) $\sum \alpha\beta = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \frac{c}{a}$

(iii) $\sum \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -\frac{d}{a}$ (iv) $\alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}$

5. সাধারণ মূল (Common Root) থাকার শর্তসমূহ: (i) $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল α থাকলে:

$$(c_1a_2 - c_2a_1)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1)$$

(ii) উভয় মূল সাধারণ হওয়ার শর্ত: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

6. দ্বিঘাত রাশির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান: $ax^2 + bx + c$ রাশিটির সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান $= \frac{4ac - b^2}{4a}$ (i) $a > 0$ হলে রাশিটির সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়। (ii) $a < 0$ হলে রাশিটির সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়।

7. ভাগশেষ উপপাদ্য ও উৎপাদক উপপাদ্য: (i) ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem): কোনো বহুপদী $f(x)$-কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(a)$। (ii) উৎপাদক উপপাদ্য (Factor Theorem): যদি $f(a) = 0$ হয়, তবে $(x - a)$ রাশিটি $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে।

অধ্যায়-৫: দ্বিপদী বিস্তৃতি

1. ধনাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাতের ক্ষেত্রে দ্বিপদী উপপাদ্য ($n \in \mathbb{N}$):

(i) $(a + x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + \cdots + {}^nC_ra^{n-r}x^r + \cdots + x^n$

(ii) $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা $= n + 1$ টি।

(iii) $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ অর্থাৎ $(r + 1)$ তম পদ, $T_{r+1} = {}^nC_ra^{n-r}x^r$

(iv) $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ (Middle Term) নির্ণয়: (a) n জোড় সংখ্যা হলে, মধ্যপদ একটি এবং তা $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ তম পদ। (b) n বিজোড় সংখ্যা হলে, মধ্যপদ দুইটি এবং তা $\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)$ এবং $\left(\frac{n+1}{2} + 1\right)$ তম পদদ্বয়।

(v) $(ax^p + bx^q)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদে x^m সম্বলিত হলে, $r = \frac{np - m}{p - q}$ এবং x^m এর সহগ $= {}^nC_ra^{n-r}b^r$; যেখানে, $m, n \in \mathbb{N}$

2. যেকোনো মূলদীয় ঘাতের জন্য দ্বিপদী উপপাদ্য (n ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ এবং $|x| < 1$ হলে):

(i) $(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r + \cdots$

(ii) $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ অর্থাৎ $(r + 1)$ তম পদ, $T_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r$

(iii) $(1 - x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^r\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r + \cdots$

3. কিছু গুরুত্বপূর্ণ নির্দিষ্ট অনুমিত বিস্তৃতি ($|x| < 1$ হলে):

(i) $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^r + \cdots$

(ii) $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^rx^r + \cdots$

(iii) $(1 - x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (r + 1)x^r + \cdots$

(iv) $(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots + (-1)^r(r + 1)x^r + \cdots$

(v) $(1 - x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots + \frac{1}{2}(r + 1)(r + 2)x^r + \cdots$

(vi) $(1 + x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \cdots + (-1)^r\frac{1}{2}(r + 1)(r + 2)x^r + \cdots$

(vii) $(1 - x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}x^r + \cdots$

(viii) $(1 + x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \cdots + (-1)^r\frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}x^r + \cdots$

4. অনন্ত দ্বিপদী ধারার অভিসারিতা (Convergence of Binomial Series):

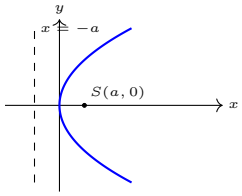
(i) যদি $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| < 1$ হয়, তাহলে ধারাটি অভিসৃত (Convergent) হবে।

(ii) যদি $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| > 1$ হয়, তাহলে ধারাটি অপসৃত (Divergent) হবে।

অধ্যায়-৬: কণিক (Conics)

1. দ্বিঘাত সমীকরণ ও কণিকের শ্রেণীবিভাগ: (i) সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ: $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ (ii) নিশ্চায়ক (Discriminant): $\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$ (iii) $\Delta = 0$ হলে সমীকরণটি একজোড়া সরলরেখা প্রকাশ করে। (iv) $\Delta \neq 0$ হলে বিভিন্ন শর্তে নিচের কণিকসমূহ নির্দেশ করে: (a) $h = 0$ এবং $a = b$ হলে এটি একটি বৃত্ত (Circle)। (b) $h^2 - ab = 0$ হলে এটি একটি পরাবৃত্ত (Parabola); উৎকেন্দ্রিকতা, $e = 1$ (c) $h^2 - ab < 0$ হলে এটি একটি উপবৃত্ত (Ellipse); উৎকেন্দ্রিকতা, $0 < e < 1$ (d) $h^2 - ab > 0$ হলে এটি একটি অধিবৃত্ত (Hyperbola); উৎকেন্দ্রিকতা, $e > 1$ (e) $h^2 - ab > 0$ এবং $a + b = 0$ হলে এটি একটি আয়তাকার অধিবৃত্ত (Rectangular Hyperbola)।

2. পরাবৃত্তের পূর্ণাঙ্গ তুলনামূলক চিত্র ও সূত্রাবলী (Table of Parabola):



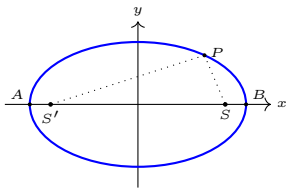
(A) প্রমিত রূপসমূহ (Standard Forms):

বৈশিষ্ট্য / সমীকরণ	$y^2 = 4ax\ (a > 0)$	$y^2 = -4ax\ (a > 0)$	$x^2 = 4ay\ (a > 0)$	$x^2 = -4ay\ (a > 0)$
১. শীর্ষবিন্দু (Vertex)	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
২. উপকেন্দ্র (Focus)	$(a, 0)$	$(-a, 0)$	$(0, a)$	$(0, -a)$
৩. অক্ষরেখার সমীকরণ	$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$x = 0$
৪. নিয়ামকের সমীকরণ	$x + a = 0$	$x - a = 0$	$y + a = 0$	$y - a = 0$
৫. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	$4a$	$4a$	$4a$	$4a$
৬. উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x = a$	$x = -a$	$y = a$	$y = -a$
৭. শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরণ	$x = 0$	$x = 0$	$y = 0$	$y = 0$
৮. নিয়ামক ও অক্ষের ছেদবিন্দু	$(-a, 0)$	$(a, 0)$	$(0, -a)$	$(0, a)$
৯. উপকেন্দ্রিক দূরত্ব ($P(x_1, y_1)$)	$x_1 + a$	$a - x_1$	$y_1 + a$	$a - y_1$

(B) শীর্ষবিন্দু (α, β) বিন্দুতে স্থানান্তরিত হলে: (i) $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ এর ক্ষেত্রে: শীর্ষ (α, β), উপকেন্দ্র $(\alpha + a, \beta)$, অক্ষ $y = \beta$, নিয়ামক $x = \alpha - a$ (ii) $(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$ এর ক্ষেত্রে: শীর্ষ (α, β), উপকেন্দ্র $(\alpha, \beta + a)$, অক্ষ $x = \alpha$, নিয়ামক $y = \beta - a$

3. উপবৃত্তের পূর্ণাঙ্গ তুলনামূলক চিত্র ও সূত্রাবলী (Table of Ellipse):

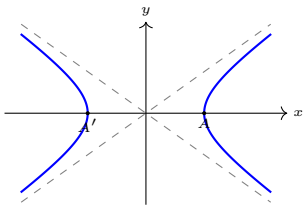
Abir Arafat Chawdhury



(A) প্রমিত সমীকরণ: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

বৈশিষ্ট্য	শর্ত: $a>b$	শর্ত: $a<b$
১. কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (Center)	$(0,0)$	$(0,0)$
২. উৎকেন্দ্রিকতা (Eccentricity)	$e=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{b^2}}$
৩. উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	$(\pm ae,0)$	$(0,\pm be)$
৪. শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	$(\pm a,0)$	$(0,\pm b)$
৫. বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ	দৈর্ঘ্য $=2a$, সমীকরণ: $y=0$	দৈর্ঘ্য $=2b$, সমীকরণ: $x=0$
৬. ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ	দৈর্ঘ্য $=2b$, সমীকরণ: $x=0$	দৈর্ঘ্য $=2a$, সমীকরণ: $y=0$
৭. নিয়ামক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ	$x=\pm\dfrac{a}{e}$	$y=\pm\dfrac{b}{e}$
৮. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	$\dfrac{2b^2}{a}$	$\dfrac{2a^2}{b}$
৯. উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x=\pm ae$	$y=\pm be$
১০. উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব	$2ae$	$2be$
১১. নিয়ামকদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব	$\dfrac{2a}{e}$	$\dfrac{2b}{e}$
১২. উপকেন্দ্রিক দূরত্বের সমষ্টি	$SP+S'P=2a$	$SP+S'P=2b$

4. অধিবৃত্তের পূর্ণাঙ্গ তুলনামূলক চিত্র ও সূত্রাবলী (Table of Hyperbola):



(A) প্রমিত সমীকরণদ্বয়:

বৈশিষ্ট্য	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ (বা $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$)
১. কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক	$(0,0)$	$(0,0)$
২. উৎকেন্দ্রিকতা (e)	$e=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{b^2}}$
৩. উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	$(\pm ae,0)$	$(0,\pm be)$
৪. শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	$(\pm a,0)$	$(0,\pm b)$
৫. আড় অক্ষের (Transverse Axis) দৈর্ঘ্য	$2a$ (সমীকরণ: $y=0$)	$2b$ (সমীকরণ: $x=0$)
৬. অনুবন্ধী অক্ষের (Conjugate Axis) দৈর্ঘ্য	$2b$ (সমীকরণ: $x=0$)	$2a$ (সমীকরণ: $y=0$)
৭. নিয়ামক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ	$x=\pm\dfrac{a}{e}$	$y=\pm\dfrac{b}{e}$
৮. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	$\dfrac{2b^2}{a}$	$\dfrac{2a^2}{b}$
৯. উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x=\pm ae$	$y=\pm be$
১০. অসীমতটের সমীকরণ (Asymptotes)	$y=\pm\dfrac{b}{a}x \implies \dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$	$y=\pm\dfrac{b}{a}x \implies \dfrac{y}{b}\pm\dfrac{x}{a}=0$
১১. উপকেন্দ্রিক দূরত্বের অন্তর	$\lvert SP-S'P\rvert=2a$	$\lvert SP-S'P\rvert=2b$

5. স্পর্শক ও অভিলম্ব সংক্রান্ত সমীকরণ এবং শর্তাবলী (Tangents and Normals):

(A) পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে ($y^2=4ax$): (i) স্পর্শক হওয়ার শর্ত: $y=mx+c$ রেখাটি স্পর্শ করবে যদি $c=\dfrac{a}{m}$ হয়। (ii) স্পর্শবিন্দু: $\left(\dfrac{a}{m^2},\dfrac{2a}{m}\right)$ (iii) (x_1,y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $yy_1=2a(x+x_1)$ (iv) (x_1,y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের (Normal) সমীকরণ: $y-y_1=-\dfrac{y_1}{2a}(x-x_1)$

(B) উপবৃত্তের ক্ষেত্রে ($\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$): (i) স্পর্শক হওয়ার শর্ত: $y=mx+c$ রেখাটি স্পর্শ করবে যদি $c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ হয়। (ii) স্পর্শবিন্দু: $\left(\mp\dfrac{a^2m}{c},\pm\dfrac{b^2}{c}\right)$ যেখানে $c=\sqrt{a^2m^2+b^2}$ (iii) (x_1,y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $\dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}=1$ (iv) (x_1,y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ: $\dfrac{a^2x}{x_1}-\dfrac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2$

(C) অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে ($\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$): (i) স্পর্শক হওয়ার শর্ত: $y=mx+c$ রেখাটি স্পর্শ করবে যদি $c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ হয়। (ii) স্পর্শবিন্দু: $\left(\mp\dfrac{a^2m}{c},\mp\dfrac{b^2}{c}\right)$ যেখানে $c=\sqrt{a^2m^2-b^2}$ (iii) (x_1,y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $\dfrac{xx_1}{a^2}-\dfrac{yy_1}{b^2}=1$ (iv) (x_1,y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ: $\dfrac{a^2x}{x_1}+\dfrac{b^2y}{y_1}=a^2+b^2$

6. প্যারামেট্রিক স্থানাঙ্ক (Parametric Coordinates): (i) পরাবৃত্ত $y^2=4ax$ এর জন্য: $(at^2,2at)$ (ii) উপবৃত্ত $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ এর জন্য: $(a\cos\theta,b\sin\theta)$ (iii) অধিবৃত্ত $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ এর জন্য: $(a\sec\theta,b\tan\theta)$

7. অন্যান্য গুরুত্বপূর্ণ তথ্য: (i) উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল: πab বর্গ একক। (ii) নিয়ামক বৃত্ত (Director Circle): উপবৃত্তের পরস্পর লম্ব স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত, যার সমীকরণ: $x^2+y^2=a^2+b^2$ (iii) অধিবৃত্তের নিয়ামক বৃত্ত: $x^2+y^2=a^2-b^2$ ($a>b$ হলে) (iv) আয়তাকার অধিবৃত্তের (Rectangular Hyperbola) অসীমতটদ্বয় পরস্পর লম্ব হয়, অর্থাৎ তাদের মধ্যবর্তী কোণ 90° এবং $e=\sqrt{2}$।

অধ্যায়-৭: বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ

1. বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের প্রধান মান, ডোমেন ও রেঞ্জ (Table of Domain and Range):

ফাংশন	ডোমেন (Domain)	রেঞ্জ / প্রধান মান (Principal Value Range)
১. $y=\sin^{-1}x$	$-1\le x\le 1 \implies [-1,1]$	$-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2} \implies \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$
২. $y=\cos^{-1}x$	$-1\le x\le 1 \implies [-1,1]$	$0\le y\le\pi \implies [0,\pi]$
৩. $y=\tan^{-1}x$	$-\infty<x<\infty \implies \mathbb{R}$	$-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2} \implies \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$
৪. $y=\cot^{-1}x$	$-\infty<x<\infty \implies \mathbb{R}$	$0<y<\pi \implies (0,\pi)$
৫. $y=\sec^{-1}x$	$x\ge 1$ অথবা $x\le -1 \implies \mathbb{R}\setminus(-1,1)$	$0\le y\le\pi,\ y\ne\dfrac{\pi}{2}$
৬. $y=\csc^{-1}x$	$x\ge 1$ অথবা $x\le -1 \implies \mathbb{R}\setminus(-1,1)$	$-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2},\ y\ne 0$

2. সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক সূত্রাবলী: (i) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ (ii) $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ (iii) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ (iv) $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ (v) $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ (vi) $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$ (vii) $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$ (viii) $\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$

3. ত্রিকোণমিতিক গুণফলকে যোগফল বা বিয়োগফলে রূপান্তর: (i) $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$ (ii) $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$ (iii) $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$ (iv) $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$

4. ত্রিকোণমিতিক যোগফল বা বিয়োগফলকে গুণফলে রূপান্তর: (i) $\sin C+\sin D=2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$ (ii) $\sin C-\sin D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}$ (iii) $\cos C+\cos D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$ (iv) $\cos C-\cos D=2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{D-C}{2}$

5. গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ: (i) $\sin 2A=2\sin A\cos A=\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ (ii) $\cos 2A=\cos^2A-\sin^2A=1-2\sin^2A=2\cos^2A-1=\dfrac{1-\tan^2A}{1+\tan^2A}$ (iii) $1+\cos 2A=2\cos^2A$ এবং $1-\cos 2A=2\sin^2A$ (iv) $\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2A}$ (v) $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3A$ (vi) $\cos 3A=4\cos^3A-3\cos A$ (vii) $\tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3A}{1-3\tan^2A}$

6. বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের পারস্পরিক রূপান্তর: $\sin^{-1}x=\csc^{-1}\dfrac{1}{x}=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\sec^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

7. বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের সমাহার ও যোগসূত্র: (i) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$ (ii) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$ (iii) $\csc^{-1}x+\sec^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$

8. বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের যোগ ও বিয়োগ সংক্রান্ত সূত্রাবলী: (i) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$ [যখন $xy<1$] (ii) বিশেষ শর্ত: $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\pi+\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$ [যখন $x>0, y>0$ এবং $xy>1$] (iii) $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy}$ [যখন $xy>-1$] (iv) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}$ (v) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right\}$ [যখন $x^2+y^2\le 1$ বা $x^2+y^2>1$ এবং $xy\le 0$] (vi) $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right\}$ (vii) $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}\left\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$ [যখন $x+y\ge 0$] (viii) $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\cos^{-1}\left\{xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$ [যখন $x\le y$] (ix) $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}=\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

9. ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধান (General Solutions Table): এখানে প্রত্যেক ক্ষেত্রে সাধারণ সমাধানের জন্য ধ্রুবক সংখ্যা $n\in\mathbb{Z}$ (পূর্ণসংখ্যা):

Abir Arafat Chowdhury

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ	সাধারণ সমাধান (θ)	বিশেষ শর্ত / শর্তাবলী
১. $\sin\theta = 0$ বা $\tan\theta = 0$	$\theta = n\pi$	$n \in \mathbb{Z}$
২. $\cos\theta = 0$ বা $\cot\theta = 0$	$\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$	$n \in \mathbb{Z}$
৩. $\sin\theta = 1$	$\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$	$n \in \mathbb{Z}$
৪. $\sin\theta = -1$	$\theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}$	$n \in \mathbb{Z}$
৫. $\cos\theta = 1$	$\theta = 2n\pi$	$n \in \mathbb{Z}$
৬. $\cos\theta = -1$	$\theta = (2n+1)\pi$	$n \in \mathbb{Z}$
৭. $\sin\theta = \sin\alpha$	$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$	$-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$
৮. $\cos\theta = \cos\alpha$	$\theta = 2n\pi \pm \alpha$	$0 \le \alpha \le \pi$
৯. $\tan\theta = \tan\alpha$	$\theta = n\pi + \alpha$	$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$
১০. $\sin^2\theta = \sin^2\alpha$ ১১. $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$ ১২. $\tan^2\theta = \tan^2\alpha$	$\theta = n\pi \pm \alpha$	তিনটি বর্গের সমীকরণের জন্যই একই সমাধান

10. বিশেষ আকারের সমীকরণ সমাধান পদ্ধতি: (i) $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ আকারের সমীকরণটি সমাধানের জন্য উভয় পক্ষকে $\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা ভাগ করতে হয়। (ii) সমীকরণটির বাস্তব সমাধান থাকার শর্ত: $c^2 \le a^2 + b^2$ অর্থাৎ $-\sqrt{a^2+b^2} \le c \le \sqrt{a^2+b^2}$

অধ্যায়-৮: স্থিতিবিদ্যা (Statics)

1. সমবিন্দু বলের লব্ধি (Resultant of Coplanar Concurrent Forces): (i) P ও Q বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α এবং লব্ধি R হলে: $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ (ii) P বল এবং লব্ধিবল R এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে: $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ (iii) লব্ধির সর্বোচ্চ মান ($R_{\max}$): $\alpha = 0^\circ$ হলে, $R_{\max} = P + Q$ (বলদ্বয় একই দিকে ক্রিয়াশীল) (iv) লব্ধির সর্বনিম্ন মান ($R_{\min}$): $\alpha = 180^\circ$ হলে, $R_{\min} = |P - Q|$ (বলদ্বয় বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল) (v) লব্ধি R, P বলের সাথে লম্ব হলে ($\theta = 90^\circ$): $P + Q\cos\alpha = 0 \implies \cos\alpha = -\dfrac{P}{Q}$ এবং $R = \sqrt{Q^2 - P^2}$ [এখানে $Q > P$] (vi) বলদ্বয়ের মান সমান হলে ($P = Q$): $R = 2P\cos\dfrac{\alpha}{2}$ এবং লব্ধির দিক, $\theta = \dfrac{\alpha}{2}$ (অর্থাৎ লব্ধি কোণটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে)

2. লব্ধির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের শর্তাবলী (Summary Table):

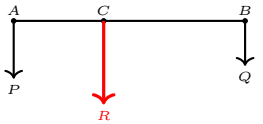
অবস্থা / বৈশিষ্ট্য	মধ্যবর্তী কোণ (α)	লব্ধির মান (R)	লব্ধির দিক (θ)
১. সর্বোচ্চ লব্ধি	$\alpha = 0^\circ$	$R = P + Q$	$\theta = 0^\circ$
২. সর্বনিম্ন লব্ধি	$\alpha = 180^\circ$	$R = \lvert P - Q\rvert$	$\theta = 0^\circ$ বা 180°
৩. পরস্পর লম্ব বল	$\alpha = 90^\circ$	$R = \sqrt{P^2 + Q^2}$	$\tan\theta = \dfrac{Q}{P}$
৪. সমান মানের বল	α	$R = 2P\cos\dfrac{\alpha}{2}$	$\theta = \dfrac{\alpha}{2}$

3. বল বিভাজন ও লম্বাংশ উপপাদ্য (Resolution of Forces): (i) যেকোনো দুটি নির্দিষ্ট দিকে বলের উপাংশ (Resolution into two components): F বলকে দুটি উপাংশে বিভক্ত করলে যারা F এর সাথে যথাক্রমে α ও β কোণ উৎপন্ন করে: $\dfrac{P}{\sin\beta} = \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{F}{\sin(\alpha+\beta)}$ (ii) লম্ব উপাংশ (Rectangular Components): $\beta = 90^\circ - \alpha$ হলে পরস্পর লম্ব দিকে উপাংশদ্বয়: $P = F\cos\alpha$ এবং $Q = F\sin\alpha$ (iii) লম্বাংশ উপপাদ্য (Theorem of Resolving Parts): কোনো সমতলে ক্রিয়ারত $P, Q, \ldots$ বলসমূহের যেকোনো নির্দিষ্ট দিকে লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি, ওই একই দিকে তাদের লব্ধি R এর লম্বাংশের সমান। $R\cos\theta = P\cos\alpha + Q\cos\beta + \ldots$ $R\sin\theta = P\sin\alpha + Q\sin\beta + \ldots$ লব্ধির মান ও দিক: $R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2}$ এবং $\tan\theta = \dfrac{\Sigma Y}{\Sigma X}$

4. তিনটি বলের সাম্যাবস্থা ও লামীর উপপাদ্য (Equilibrium and Lami's Theorem): (i) লামীর উপপাদ্য (Lami's Theorem): কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি সমতলীয় বল সাম্যাবস্থায় থাকলে, প্রতিটি বলের মান অপর দুটি বলের মধ্যবর্তী কোণের sine এর সমানুপাতিক। $\dfrac{P}{\sin\alpha} = \dfrac{Q}{\sin\beta} = \dfrac{R}{\sin\gamma}$ [যেখানে α হলো Q ও R এর মধ্যবর্তী কোণ, β হলো R ও P এর মধ্যবর্তী কোণ, γ হলো P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ] (ii) বলের ত্রিভুজ সূত্র (Triangle Law of Forces): কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বলের মান ও দিক যদি কোনো ত্রিভুজের একই ক্রমে গৃহীত তিনটি বাহু দ্বারা নির্দেশ করা যায়, তবে বলগুলো সাম্যাবস্থায় থাকবে। (iii) বলের বিপরীত ত্রিভুজ সূত্র (Converse of Triangle Law of Forces): কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে এবং তাদের ক্রিয়ারেখা কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমান্তরাল হলে, বলগুলোর মান ওই বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক হবে। $\dfrac{P}{BC} = \dfrac{Q}{CA} = \dfrac{R}{AB}$

5. ত্রিভুজের $m - n$ উপপাদ্য ($m - n$ Theorem): কোনো ত্রিভুজ ABC এর BC বাহুর উপর D একটি বিন্দু যেন $BD : DC = m : n$ এবং $\angle ADC = \theta$ হয়, তবে: (i) $(m+n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta$ [যেখানে $\angle BAD = \alpha$ এবং $\angle CAD = \beta$] (ii) $(m+n)\cot\theta = n\cot B - m\cot C$

6. সমান্তরাল বলসমূহ (Parallel Forces Table):



বৈশিষ্ট্য	সদৃশ সমান্তরাল বল (Like Parallel)	অসদৃশ সমান্তরাল বল (Unlike Parallel)
১. বলের প্রকৃতি ও দিক	দিক একই মুখী (P ও Q)	দিক বিপরীত মুখী (P ও Q, যেখানে $P > Q$)
২. লব্ধির মান (R)	$R = P + Q$	$R = P - Q$
৩. লব্ধির অবস্থান (C)	AB রেখার অভ্যন্তরে অবস্থিত	AB রেখার বাইরে, বৃহত্তর বলের পাশে অবস্থিত
৪. বলের সমাবস্থা সূত্র	$P \cdot AC = Q \cdot BC$	$P \cdot AC = Q \cdot BC$
৫. অনুপাত সূত্র	$\dfrac{P}{BC} = \dfrac{Q}{AC} = \dfrac{R}{AB}$	$\dfrac{P}{BC} = \dfrac{Q}{AC} = \dfrac{R}{AB}$

7. বলযুগল বা দ্বন্দ্ব এবং ভ্রামক (Moment of Force and Couple): (i) বলের ভ্রামক (Moment of a Force): কোনো বিন্দু O এর সাপেক্ষে P বলের ভ্রামক = বল $\times$ বিন্দু থেকে বলের ক্রিয়ারেখার লম্ব দূরত্ব = $P \cdot d$ (ii) বলযুগল (Couple): দুটি সমান ও বিপরীতমুখী অসদৃশ সমান্তরাল বল ভিন্ন ক্রিয়ারেখায় ক্রিয়া করলে তাকে বলযুগল বলে। (iii) বলযুগলের ভ্রামক (Moment of a Couple): যেকোনো একটি বলের মান $\times$ বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব; $G = P \cdot d$ (iv) চিহ্নের প্রথা: ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে (Counter-clockwise) ঘূর্ণন প্রবণতা থাকলে ভ্রামক ধনাত্মক (+) এবং ঘড়ির কাটার দিকে (Clockwise) হলে ভ্রামক ঋণাত্মক (-) ধরা হয়।

অধ্যায়-৯: সমতলে বস্তুকণার গতি (Motion of Particles in a Plane)

1. বেগের সামান্তরিক সূত্র ও লব্ধি বেগ (Parallelogram Law of Velocities): (i) লব্ধি বেগ (w): কোনো বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি বেগ u ও v এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে, তাদের লব্ধি বেগের মান: $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$ (ii) লব্ধি বেগের দিক (θ): লব্ধি বেগ w যদি u বেগের ক্রিয়ারেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে, তবে: $\tan\theta = \dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha} \implies \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}\right)$ (iii) সর্বোচ্চ লব্ধি বেগ ($w_{\max}$): $\alpha = 0^\circ$ হলে (বেগদ্বয় একই দিকে ক্রিয়া করলে), $w_{\max} = u + v$ (iv) সর্বনিম্ন লব্ধি বেগ ($w_{\min}$): $\alpha = 180^\circ$ হলে (বেগদ্বয় বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে), $w_{\min} = |u - v|$ (v) পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়ারত বেগ: $\alpha = 90^\circ$ হলে, $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ এবং $\tan\theta = \dfrac{v}{u}$

2. আপেক্ষিক বেগ ও নদী-নৌকা সংক্রান্ত সূত্রাবলী (Relative Velocity & River-Boat Problems): (i) আপেক্ষিক বেগ (Relative Velocity): A বস্তুর বেগ $\vec{v}_A$ এবং B বস্তুর বেগ $\vec{v}_B$ হলে, A এর সাপেক্ষে B এর আপেক্ষিক বেগ: $\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{v}_B + (-\vec{v}_A)$ (ii) নদী-নৌকা পারাপারের পূর্ণাঙ্গ চিত্র (Table of River-Boat Scenarios): এখানে স্রোতের বেগ = u, নৌকার/সাঁতারুর আদি বেগ = v (যেখানে $v > u$), নদীর প্রস্থ = d, এবং স্রোত ও নৌকার মধ্যবর্তী কোণ = α

বিষয় / শর্ত	১. ন্যূনতম দূরত্বে বা সোজাসুজি পারাপার	২. ন্যূনতম সময়ে নদী পারাপার
১. লব্ধি বেগের দিক (θ)	$\theta = 90^\circ$ (স্রোতের সাথে লম্বভাবে)	$\tan\theta = \dfrac{v}{u}$ (যেহেতু $\alpha = 90^\circ$)
২. প্রক্ষেপণ কোণ (α)	$\alpha = \cos^{-1}\left(-\dfrac{u}{v}\right) \implies \alpha > 90^\circ$	$\alpha = 90^\circ$ (স্রোতের সাথে লম্বভাবে রওনা)
৩. লব্ধি বেগ (w)	$w = \sqrt{v^2 - u^2}$	$w = \sqrt{u^2 + v^2}$
৪. পারাপারের সময় (t)	$t = \dfrac{d}{v\sin\alpha} = \dfrac{d}{\sqrt{v^2 - u^2}}$	$t_{\min} = \dfrac{d}{v}$
৫. আনুভূমিক সরণ/নদীর পাড় বরাবর দূরত্ব	$x = 0$ (ঠিক বিপরীত বিন্দুতে পৌঁছাবে)	$x = u \cdot t_{\min} = \dfrac{ud}{v}$

3. সরলরেখায় সুষম ত্বরণে গতিশীল কণার সমীকরণসমূহ (Motion under Uniform Acceleration): (i) নির্দিষ্ট সময়ে শেষ বেগ: $v = u + ft$ (ii) গড় বেগের সাহায্যে দূরত্ব: $s = \left(\dfrac{u+v}{2}\right)t$ (iii) ত্বরণ ও সময়ের সাহায্যে দূরত্ব: $s = ut + \dfrac{1}{2}ft^2$ (iv) বেগ ও দূরত্বের সম্পর্ক: $v^2 = u^2 + 2fs$ (v) t-তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব (s_t): কণাটি তার গতির ঠিক t সেকেন্ড সময়টিতে যে দূরত্ব অতিক্রম করে: $s_t = u + \dfrac{1}{2}f(2t - 1)$ [দ্রষ্টব্য: মন্দন বা গতি হ্রাস পাওয়ার ক্ষেত্রে ত্বরণ ft এর স্থলে $-f$ বসাতে হবে।]

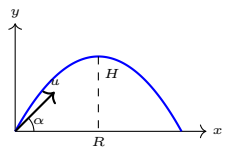
4. মহাকর্ষের অধীনে উলম্ব গতি (Vertical Motion Under Gravity):

(A) খাড়া নিচের দিকে পতনশীল বস্তুর ক্ষেত্রে (স্থির অবস্থান বা আদিবেগ u সহ): (i) $v = u + gt$ (ii) $h = ut + \dfrac{1}{2}gt^2$ (iii) $v^2 = u^2 + 2gh$ (iv) স্থির অবস্থান ($u = 0$) হতে h উচ্চতা থেকে মাটিতে পড়তে প্রয়োজনীয় সময় ও শেষ বেগ: $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ এবং $v = \sqrt{2gh}$

(B) খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে: (i) $v = u - gt$ (ii) $h = ut - \dfrac{1}{2}gt^2$ (iii) $v^2 = u^2 - 2gh$ (iv) সর্বোচ্চ উচ্চতা (H): $v = 0$ হলে, $H = \dfrac{u^2}{2g}$ (v) সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছানোর সময় (উত্থানকাল, t_h): $t_h = \dfrac{u}{g}$ (vi) মোট বিচরণকাল বা শূন্যে থাকার সময় (T): $T = 2t_h = \dfrac{2u}{g}$ (উত্থানকাল = পতনকাল)

(C) কোনো নির্দিষ্ট উচ্চতা (h) থেকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতি: ভূমি থেকে h উচ্চতায় অবস্থিত কোনো টাওয়ার বা ছাদ হতে u আদিবেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তু t সময় পর ভূমিতে পতিত হলে: (i) উচ্চতা বা সরণের সমীকরণ: $h = -ut + \dfrac{1}{2}gt^2$ (ii) যেকোনো সময়ে বেগের সমীকরণ: $v = -u + gt$ (iii) বেগ ও দূরত্বের সমীকরণ: $v^2 = u^2 + 2gh$

5. প্রাসের গতি বা দ্বিমাত্রিক প্রক্ষিপ্ত বস্তুর গতি (Motion of a Projectile):



ভূমি থেকে কোনো বস্তুকে আনুভূমিকের সাথে α কোণে u আদিবেগে নিক্ষেপ করা হলে:

(A) প্রাসের গতির সাধারণ সমীকরণসমূহ (Table of Projectile Formulas):

বৈশিষ্ট্য / রাশি	গাণিতিক সূত্র (Formula)	ব্যাখ্যা ও বিশেষ দ্রষ্টব্য
১. t সময় পর আনুভূমিক সরণ	$x = u\cos\alpha \cdot t$	আনুভূমিক দিকে কোনো ত্বরণ নেই ($f_x = 0$)
২. t সময় পর উলম্ব সরণ	$y = u\sin\alpha \cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2$	উলম্ব দিকে অভিকর্ষজ মন্দন কাজ করে
৩. গতির গতিপথের সমীকরণ	$y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$	সমীকরণটি একটি পরাবৃত্ত (Parabola) নির্দেশ করে
৪. আনুভূমিক পাল্লার সাথে সম্পর্ক	$y = x\tan\alpha\left(1 - \dfrac{x}{R}\right)$	গাণিতিক সমস্যা সমাধানে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ
৫. সর্বোচ্চ উচ্চতা (H)	$H = \dfrac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$	এই বিন্দুতে উলম্ব বেগ শূন্য হয় ($v_y = 0$)
৬. সর্বোচ্চ উচ্চতায় ওঠার সময়	$t = \dfrac{u\sin\alpha}{g}$	মোট বিচরণকালের অর্ধেক
৭. মোট বিচরণকাল (T)	$T = \dfrac{2u\sin\alpha}{g}$	আবার ভূমিতে ফিরে আসার মোট সময়
৮. আনুভূমিক পাল্লা (R)	$R = \dfrac{u^2\sin 2\alpha}{g}$	ভূমিতে অতিক্রান্ত মোট আনুভূমিক দূরত্ব
৯. সর্বোচ্চ আনুভূমিক পাল্লা	$R_{\max} = \dfrac{u^2}{g}$	যখন প্রক্ষেপণ কোণ, $\alpha = 45^\circ$ হয়

Abir Arafat Chawdhury

(B) প্রাসের গতি সংক্রান্ত গুরুত্বপূর্ণ অনুসিদ্ধান্তসমূহ: (i) একই আনুভূমিক পাল্লার জন্য দুটি প্রক্ষেপণ কোণ: কোনো বস্তুকে u আদিবেগে নিক্ষেপ করলে প্রক্ষেপণ কোণ α অথবা $(90^\circ - \alpha)$ উভয় ক্ষেত্রের জন্যই আনুভূমিক পাল্লা (R) একই থাকে। (ii) t সময় পরে প্রাসের লব্ধি বেগ (v_t): $v_t = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ যেখানে, $v_x = u\cos\alpha$ এবং $v_y = u\sin\alpha - gt$ (iii) t সময় পরে লব্ধি বেগের দিক (θ_t): $\tan\theta_t = \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{u\sin\alpha - gt}{u\cos\alpha}$

অধ্যায়-১০: বিস্তার পরিমাপ ও সম্ভাবনা (Measures of Dispersion and Probability)

1. বিস্তার পরিমাপের প্রকারভেদ (Classification of Measures of Dispersion): (i) অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপ (Absolute Measures): ১. পরিসর (Range) ২. চতুর্থক ব্যবধান (Quartile Deviation) ৩. গড় ব্যবধান (Mean Deviation) ৪. পরিমিত ব্যবধান (Standard Deviation)। (ii) আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ (Relative Measures): ১. পরিসরাঙ্ক ২. চতুর্থক ব্যবধান অঙ্ক ৩. গড় ব্যবধান অঙ্ক ৪. বিভেদঙ্ক বা ব্যবধান অঙ্ক (Coefficient of Variation)।

2. অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপের পূর্ণাঙ্গ গাণিতিক সূত্রাবলী (Absolute Measures of Dispersion):

(A) অশ্রেণীকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে (For Ungrouped Data): তথ্যমানসমূহ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ এবং গাণিতিক গড় $\bar{x}$ হলে: (i) পরিসর (Range): $R = X_H - X_L$ [এখানে X_H = সর্বোচ্চ মান, X_L = সর্বনিম্ন মান] (ii) চতুর্থক ব্যবধান (Quartile Deviation): $QD = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$ [এখানে Q_1 = প্রথম চতুর্থক, Q_3 = তৃতীয় চতুর্থক] (iii) গড় ব্যবধান (Mean Deviation): $MD(\bar{x}) = \dfrac{\sum|x_i - \bar{x}|}{n}$ [মধ্যমার সাপেক্ষে হলে: $MD(Me) = \dfrac{\sum|x_i - Me|}{n}$] (iv) ভেদাঙ্ক (Variance): $\sigma^2 = \dfrac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} = \dfrac{\sum x_i^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x_i}{n}\right)^2$ (v) পরিমিত ব্যবধান (Standard Deviation): $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x_i}{n}\right)^2}$

(B) শ্রেণীকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে (For Grouped Data): শ্রেণি মধ্যমানসমূহ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, গণসংখ্যা $f_1, f_2, \ldots, f_n$, মোট গণসংখ্যা $N = \sum f_i$ এবং গাণিতিক গড় $\bar{x}$ হলে: (i) গড় ব্যবধান (Mean Deviation): $MD(\bar{x}) = \dfrac{\sum f_i|x_i - \bar{x}|}{N}$ (ii) ভেদাঙ্ক (Variance): $\sigma^2 = \dfrac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{N} = \dfrac{\sum f_i x_i^2}{N} - \left(\dfrac{\sum f_i x_i}{N}\right)^2$ (iii) পরিমিত ব্যবধান (Standard Deviation): $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\dfrac{\sum f_i x_i^2}{N} - \left(\dfrac{\sum f_i x_i}{N}\right)^2}$ (iv) সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি (Short-cut Method): অনুমিত গড় a, শ্রেণির ব্যবধান h এবং ধাপ বিচ্যুতি $d_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ হলে: $\sigma = h \times \sqrt{\dfrac{\sum f_i d_i^2}{N} - \left(\dfrac{\sum f_i d_i}{N}\right)^2}$ এবং ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = h^2\left[\dfrac{\sum f_i d_i^2}{N} - \left(\dfrac{\sum f_i d_i}{N}\right)^2\right]$

3. আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপের তুলনামূলক ছক (Table of Relative Measures of Dispersion):

ক্রমিং	আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপের নাম	গাণিতিক সূত্র (Formula)
১.	পরিসরাঙ্ক (Coefficient of Range)	CR $= \dfrac{X_H - X_L}{X_H + X_L} \times 100\%$
২.	চতুর্থক ব্যবধান অঙ্ক (Coefficient of QD)	CQD $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100\%$
৩.	গড় ব্যবধান অঙ্ক (Coefficient of MD)	CMD $= \dfrac{MD(\bar{x})}{\bar{x}} \times 100\%$
৪.	বিভেদঙ্ক বা ব্যবধান অঙ্ক (Coefficient of Variation)	CV $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

4. পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্কের গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য ও অনুসিদ্ধান্ত: (i) মূল ও মাপনী পরিবর্তন: পরিমিত ব্যবধান মূল (Origin) পরিবর্তনের উপর নির্ভরশীল নয়, কিন্তু মাপনীর (Scale) পরিবর্তনের উপর নির্ভরশীল। মূল a ও মাপনী c দ্বারা চলক পরিবর্তন $u_i = \dfrac{x_i - a}{c}$ হলে, $\sigma_x = |c| \cdot \sigma_u$ হয়। ভেদাঙ্কের ক্ষেত্রে, $\sigma_x^2 = c^2 \cdot \sigma_u^2$ (ii) ধ্রুবকের বিস্তার: যেকোনো ধ্রুবক সংখ্যার পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক সর্বদা শূন্য হয়। $\sigma(c) = 0,\ \sigma^2(c) = 0$ (iii) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ক্ষেত্রে $(1, 2, 3, \ldots, n)$: (a) গাণিতিক গড়: $\bar{x} = \dfrac{n+1}{2}$ (b) ভেদাঙ্ক: $\sigma^2 = \dfrac{n^2 - 1}{12}$ (c) পরিমিত ব্যবধান: $\sigma = \sqrt{\dfrac{n^2 - 1}{12}}$ (iv) সম্মিলিত পরিমিত ব্যবধান (Combined Standard Deviation): দুটি তথ্যসেটের আকার n_1, n_2, গড় $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ এবং পরিমিত ব্যবধান σ_1, σ_2 হলে তাদের সম্মিলিত পরিমিত ব্যবধান σ_c: $\sigma_c = \sqrt{\dfrac{n_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}}$ [যেখানে, $d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_c$, $d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}_c$ এবং সম্মিলিত গড় $\bar{x}_c = \dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$]

5. সম্ভাবনার মৌলিক সূত্রাবলী ও সীমারেখা (Basic Principles of Probability): (i) গাণিতিক সংজ্ঞা: কোনো ঘটনার অনুকূল ফলাফল সংখ্যা $n(A)$ এবং নমুনা ক্ষেত্রের মোট ফলাফল সংখ্যা $n(S)$ হলে, A ঘটনার সম্ভাবনা: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$ (ii) সম্ভাবনার সীমা (Range of Probability): যেকোনো ঘটনা A এর জন্য সম্ভাবনার মান 0 থেকে 1 এর মধ্যে থাকে। $0 \le P(A) \le 1$ (iii) নিশ্চিত ঘটনা (Certain Event): নমুনা ক্ষেত্র S এর জন্য, $P(S) = 1$ (iv) অসম্ভব ঘটনা (Impossible Event): ফাঁকা সেট Φ এর জন্য, $P(\Phi) = 0$ (v) পূরক ঘটনা (Complementary Event): A ঘটনাটি না ঘটার সম্ভাবনা $P(A^c)$ বা $P(A')$ হলে, $P(A) + P(A^c) = 1 \implies P(A^c) = 1 - P(A)$ (vi) অনুকূল ও প্রতিকূল সংযোগ (Odds in Favor and Against): কোনো ঘটনার অনুকূল অনুপাত $a : b$ হলে, অনুকূলের সম্ভাবনা $= \dfrac{a}{a+b}$ এবং প্রতিকূলের সম্ভাবনা $= \dfrac{b}{a+b}$

6. সম্ভাবনার যোগ ও গুণন উপপাদ্য (Addition & Multiplication Theorems): (i) A ও B বর্জনশীল (Mutually Exclusive) ঘটনা হলে: $A \cap B = \Phi \implies P(A \cap B) = 0$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (ii) A ও B অবর্জনশীল (Non-mutually Exclusive) ঘটনা হলে: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (iii) তিনটি অবর্জনশীল ঘটনা A, B ও C এর ক্ষেত্রে যোগ সূত্র: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$ (iv) A ও B স্বাধীন (Independent) ঘটনা হলে: A এর সংঘটন B এর উপর প্রভাব ফেলে না। $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (v) A ও B অধীন (Dependent) বা শর্তাধীন (Conditional) ঘটনা হলে: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = P(B) \times P(A|B)$ (vi) শর্তাধীন সম্ভাবনার সূত্র (Conditional Probability): A ঘটনা ঘটার সাপেক্ষে B ঘটার সম্ভাবনা: $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ $[P(A) \neq 0]$ এবং $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $[P(B) \neq 0]$ (vii) সম্পূর্ণ ঘটনা (Exhaustive Events): A ও B সম্পূর্ণ ঘটনা হলে, $P(A \cup B) = P(S) = 1$

7. ঘটনার বিভিন্ন সমাবেশের সম্ভাবনার রূপান্তর ছক (Set Operations and Probability Chart):

ক্রমিং	ঘটনার বিবরণ ও সেট প্রতীক	গাণিতিক বিস্তৃতি ও সূত্র (Formula)
১.	A বা B এর কমপক্ষে একটি ঘটার সম্ভাবনা $(A \cup B)$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
২.	A ও B উভয়ই একসাথে ঘটার সম্ভাবনা $(A \cap B)$	$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
৩.	কেবল A ঘটবে কিন্তু B ঘটবে না $(A \cap B^C)$	$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$
৪.	কেবল B ঘটবে কিন্তু A ঘটবে না $(A^C \cap B)$	$P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$
৫.	A ও B এর কোনোটিই না ঘটার সম্ভাবনা $(A^C \cap B^C)$	$P(A^C \cap B^C) = P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B)$
৬.	A অথবা B এর কোনোটিই না ঘটার সম্ভাবনা $(A^C \cup B^C)$	$P(A^C \cup B^C) = P((A \cap B)^C) = 1 - P(A \cap B)$
৭.	কেবল একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা	$P(A \cap B^C) + P(A^C \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$

Abir Arafat Chowdhury