

# Numeričko rješavanje evolucije Navier-Stokesovih jednadžbi

Antonio Bjelčić

Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek

24. kolovoza 2020.

## SAŽETAK

U ovom projektnom radu riješena je evolucija Navier-Stokesovih jednadžbi korištenjem Taylor-Hoodovih elemenata. Dan je kratki osvrt na teoriju i pregled konačnih elemenata te njihove stabilnosti pomoću LBB uvjeta. Metoda je testirana na dva *benchmark* testa: *cavity* test iz standardne literature za konačne elemente [1] i *nozzle* test iz [2] koji predstavlja standardni test za CFD solveure predložen od strane FDA agencije. Variranjem Reynoldsovog broja proučeni su režimi od laminarnog do turbulentnog toka. U slučaju velikog Reynoldsovog broja, demonstrirana je pojava tzv. Kármánovih vrtloga.

## 1 TEORIJSKI UVOD

Gibanje nestlačivog fluida opisano je Navier-Stokesovim jednadžbama u domeni  $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ :

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u}) - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

Uzimamo da je gustoća  $\rho$  konstanta. Pripadni tenzor naprezanja je  $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$ . Na granici domene  $\partial\Omega$  zadajemo Dirichletov i Neumannov rubni uvjet:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D, \text{ na } \partial\Omega_D, \quad (3)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = (-p\mathbf{I} + \mu D(\mathbf{u}))\mathbf{n} = \mathbf{j}\mathbf{n}, \text{ na } \partial\Omega_N, \quad (4)$$

gdje koristimo simetrizirani gradijent  $D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$ . Zadana je i početna brzina  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$  za  $t = 0$ .

Obzirom na to da u praktičnim računima koristimo neku vrstu vremenske diskretizacije kao što je npr. implicitna Eulerova shema, obično se kod analize u N-S jednadžbu (1) dodaje i linearni član  $\alpha \mathbf{u}$ , za  $\alpha > 0$ . Time se evolucija promatra na svakom vremenskom sloju zasebno kao stacionarna N-S jednadžba s dodanim novim članom.

Pretpostavimo da je  $\mathbf{U}_D|_{\partial\Omega_D} = \mathbf{u}_D$  za  $\mathbf{U}_D \in H^1(\Omega)$ , te da su  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$  i  $\mathbf{j} \in L^2(\partial\Omega_N)$ . Lako se vidi da je rješenje ekvivalentno tražiti u obliku  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{U}_D$ , što homogenizira Dirichletov rubni uvjet, a redefinira silu  $\mathbf{f}$ . Definirajmo prostore u kojima tražimo rješenje  $V := \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) : \mathbf{u}|_{\partial\Omega_D} = \mathbf{0}\}$  i  $Q := \{v \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} v = 0\}$ . Varijacijska formulacija glasi: naći  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_D + V$  i  $p \in Q$  takve da je:

$$\int_{\Omega} \rho(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \mu D(\mathbf{u}) \cdot D(\mathbf{v}) + \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{j}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (5)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q = 0, \quad \forall q \in Q. \quad (6)$$

U nastavku ćemo radi jednostavnosti analize pretpostaviti da je konveksijski član  $(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u}$  zanemariv te da nemamo Neumannovu granicu, tj.  $\partial\Omega_D = \partial\Omega$ . Ako uvedemo bilinearne forme:

$$a(\mathbf{u}, \phi) := \int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \phi + \alpha \mathbf{u} \cdot \phi, \quad \mathbf{u}, \phi \in V, \quad (7)$$

$$b(\mathbf{u}, \phi) = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \phi, \quad \mathbf{u} \in V, \phi \in Q, \quad (8)$$

tada prethodnu zadaću možemo zapisati kao: naći  $(\mathbf{u}, p) \in V \times Q$ , takve da:

$$a(\mathbf{u}, \phi) + b(\phi, p) = (\mathbf{f}, \phi)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \phi \in V, \quad (9)$$

$$b(\mathbf{u}, \phi) = 0, \quad \forall \phi \in Q. \quad (10)$$

Može se pokazati [3] da prethodna zadaća ima jedinstveno rješenje te da tlak ima interpretaciju Lagrangeovog multiplikatora za ograničenje  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Također, uz dovoljnu glatkoću prethodna zadaća povlači i klasično rješenje N-S jednadžbi.

## 2 APROKSIMACIJA KONAČNIM ELEMENTIMA

Varijacijsku aproksimaciju prethodne zadaće dobivamo izborom konačnodimenzionalnih potprostora  $V_h < V$  i  $Q_h < Q$  i zamjenom  $V \times Q$  sa  $V_h \times Q_h$ . Da bi takva aproksimacijska zadaća bila dobro postavljena, aproksimacijski prostori  $V_h$  i  $Q_h$  moraju zadovoljavati tzv. LBB (Ladišenskaja-Babuška-Brezzi) uvjet:

$$\exists \beta > 0, \forall q \in Q_h, \exists \mathbf{v}_q \in V_h \setminus \{0\}, \text{ t.d. } (q, \nabla \cdot \mathbf{v}) \geq \beta \|q\|_Q \|\mathbf{v}\|_V. \quad (11)$$

Neka je  $(\phi_j)_{j=1}^{N_h}$  baza za  $V_h$ , a  $(\psi_j)_{j=1}^{M_h}$  baza za  $Q_h$ . Tada aproksimacijska zadaća za  $\mathbf{u}_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \phi_j$  i  $p_h = \sum_{j=1}^{M_h} p_j \psi_j$  ima oblik:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

gdje su  $\mathbf{u} = (u_j) \in \mathbf{R}^{N_h}$ ,  $\mathbf{p} = (p_j) \in \mathbf{R}^{M_h}$ ,  $\mathbf{f} = (f_j) = ((\mathbf{f}, \phi_j)_{L^2(\Omega)}) \in \mathbf{R}^{N_h}$ ,  $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{i,j}) = (a(\phi_j, \phi_i)) \in \mathbf{R}^{N_h \times N_h}$

i  $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{i,j}) = (b(\phi_j, \psi_i)) \in \mathbf{R}^{M_h \times N_h}$ . Može se pokazati [3] da ako  $V_h$  i  $Q_h$  zadovoljavaju LBB uvjet, da tada prethodno uvedena aproksimacijska zadaća ima jedinstveno rješenje. Intuitivno, prostor  $V_h$  mora biti dovoljno velik u odnosu na  $Q_h$  u protivnom se narušava jedinstvenost tlaka što se numerički manifestira kao jake oscilacije tlaka. S druge strane, ako  $Q_h$  nije dovoljno bogat, iz  $(\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q) = 0$ , za svako  $q \in Q_h$ , neće slijediti  $\nabla \cdot \mathbf{u}_h = 0$ . Ako je pak  $Q_h$  suviše bogat, u nekim kombinacijama  $V_h$  i  $Q_h$  čak je moguće da  $(\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q) = 0$ , za svako  $q \in Q_h$ , povlači  $\mathbf{u}_h = \mathbf{0}$ . Dakle, sam izbor konačnih elemenata, odnosno prostora  $V_h$  i  $Q_h$  je ključan za stabilnost metode.

Pretpostavimo da imamo domenu  $\Omega$  sastavljenu od mreže simplicijalnih elemenata  $\mathcal{T}_h$ . Promatramo prostor konačnih elemenata koji su polinomi reda  $k$  kada su restringirani na proizvoljan simplicijalni element mreže:

$$Y_h^k = \{\phi \in L^2(\Omega) : \phi|_K \in \mathbf{P}_k, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (13)$$

te neprekidne funkcije na  $\bar{\Omega}$  iz  $Y_h^k$ :

$$X_h^k = Y_h^k \cap C(\bar{\Omega}). \quad (14)$$

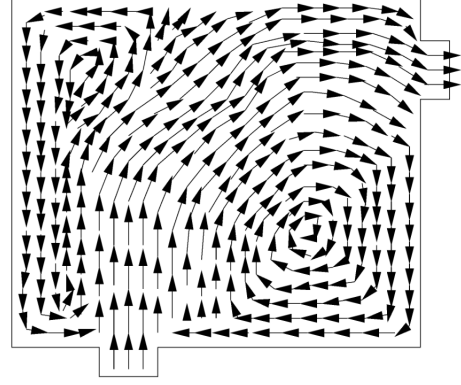
Za prostor brzine uzimamo  $V_h = (X_h^k \cap H_0^1(\Omega))^d$ , dok za tlak uzimamo  $Q_h = Y_h^m \cap L_0^2(\Omega)$  (diskontinuirani tlak) ili prostor  $Q_h = X_h^m \cap L_0^2(\Omega)$  (kontinuirani tlak). Variranjem vrijednosti  $k$  i  $m$  dobivamo razne konačne elemente.

Ispostavlja se da u slučaju diskontinuiranog tlaka, najniži izbor  $k = 1, m = 0$  ne zadovoljava LBB uvjet. Slučaj  $k = 2, m = 0$  zadovoljava LBB uvjet, ali je konvergencija samo linearna. Slučaj  $k = 2, m = 1$  ne zadovoljava LBB uvjet, ali ako se obogati tzv. *bubble* funkcijama na svakom elementu, tada elementi zadovoljavaju LBB uvjet i imaju kvadratičnu konvergenciju. Prirodnije je uzeti slučaj kontinuiranog tlaka. U tom slučaju  $k = m$  elementi ne zadovoljavaju LBB uvjet, dok  $k = m + 1$  zadovoljavaju. Obzirom da  $k = 2, m = 1$  zadovoljava LBB uvjet i da ima zadovoljavajuću konvergenciju, često se koriste u praktičnim računima. Ti se elementi nativaju Taylor-Hoodovi elementi.

### 3 NUMERIČKI TESTOVI

Za numeričku simulaciju korištena su dva testna problema: *cavity* domena iz [1] i *nozzle* domena iz [2]. Korišteni su Taylor-Hoodovi elementi u okviru već implementiranog lokalnog operatora za sučelje koje nudi *DUNE PDELab* modul [4] bez zanemarivanja konvekcijskog člana. Za promatrani fluid odabrana je voda na  $20^\circ$  s gustoćom  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$  i dinamičkom viskoznosti  $\mu = 0.01 \text{ g/s cm}$ . Korišten je CGS mjerni sustav. Reynoldsov broj:  $\text{Re} = \rho u L / \mu$  izračunat je tako da je za karakterističnu skalnu problema uzet  $L = 1 \text{ cm}$ , a brzina  $u$  je izračunata *a posteriori* kao maksimalna brzina koju fluid postiže u nekoj točki tokom numeričke simulacije.

U oba testna primjera, rub  $\partial\Omega = \Gamma \cup \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ , podijeljen je na ulazni dio  $\partial\Omega_D$  gdje je zadan Poiseuillov tok, stijenku posude  $\Gamma$  gdje je zadan *no-slip* rubni uvjet, te izlazni dio  $\partial\Omega_N$  gdje je zadano iščezavajuće djelovanje tenzora naprezanja na normalnu komponentu. Poiseuillov parabolički profil brzine množen je s varijabilnim faktorom kojim zadajemo intenzitet ulaznog toka, a samim time i Reynoldsov broj. Obzirom da se radi o evolucijskom problemu, zadana je iščezavajuća početna brzina  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ . Samim time, nefizikalno je da na ulaznom dijelu granice  $\partial\Omega_D$  Poiseuillov



Slika 1. *Cavity* domena  $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ , preuzeto iz [1].

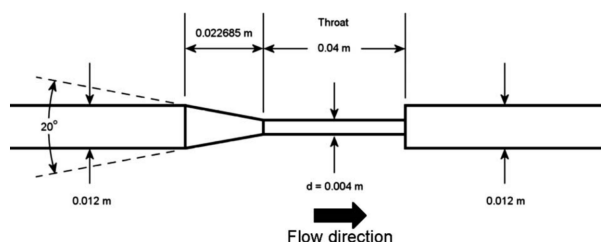
tok vremenski ne izgledimo. Stoga je Poiseuillov profil brzine vremenski moduliran glatkom uzlaznom funkcijom  $\sin^2\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right)$  do trenutka  $t \leq \tau = 0.1 \text{ s}$  nakon čega je vremenska modulacija jednaka 1.

Obično je rezultat proučavanja numeričke evolucije niz rješenja na svakom od vremenskih slojeva koji se zatim spajaju u cjelinu, stoga je rezultate vizualno prihvatljivije prikazivati kao animaciju. Za tu svrhu, na *GitHub* repozitoriju projektnog zadatka [5] nalazi se pet animacija (flow1-flow5) na koje se referenciram u ostatku dokumenta.

#### 3.1 TESTNI PROBLEM: CAVITY

*Cavity* domena  $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$  preuzeta je iz [1]. Radi se o kvadratu sa stranicama duljine 1 cm uz kojeg imamo ulaznu cijevčicu  $\partial\Omega_D$  na koju postavljamo Poiseuillov tok te izlaznu cijevčicu na koju postavljamo slobodan Neumannov kraj  $\partial\Omega_N$  (slika 1).

Simulirana su tri slučaja zadavanjem jakosti Poiseuillovog toka kojima je kontroliran Reynoldsov broj. U slučaju laminarnog toka  $\text{Re} = 50$  prikazanog na animaciji *flow1.mp4* uočavamo da u trenutku  $\approx \tau$ , gotovo odmah nakon uspostavljanja stacionarnog ulaznog toka, dobijemo i uspostavljanje približno stacionarne u vremenu brzine unutar domene. Polje brzine se uniformo raspodijeli po domeni bez stvaranja vrtloga kako bismo i očekivali od laminarnog toka viskoznog fluida. Ako povećamo Reynoldsov broj na  $\text{Re} = 500$ , dolazimo u prijelazni režim između laminarnog i turbulentnog toka prikazanog na animaciji *flow2.mp4*. Najprije uočavamo pojavu izraženog vrtloga unutar domene između ulazne i izlazne cijevčice te činjenicu da tok postaje približno stacionaran tek nakon vremena  $\approx 10\tau$ . Ako pak još povećamo Reynoldsov broj na  $\text{Re} = 6000$ , ulazimo u turbulentan režim prikazanog na animaciji *flow3.mp4* što uočavamo činjenicom da čak niti nakon  $10\tau$  tok se postaje približno stacionaran. Uočavamo pojavu višestrukih vrtloga oko virtualne cijevčice koja ide kroz domenu od ulazne do izlazne granice unutar koje je modul brzine dominantan u usporedbi s brzinom na ostatku domene. Ti vrtlozi osciliraju u vremenu po ponavljajućem uzorku koji perturbira virtualnu cijevčicu unutar domene. Radi se o pojavi tzv. Kármánovih vrtloga koji perturbiraju tok u ponavljajućem uzorku. Takvo ponašanje je očekivano pri velikim Reynoldsovim brojevima. Ako još više povećavamo Reynoldsov broj, tada čak Newtonova metoda koja rješava nelinearni sustav dobiven konačnim elementima zakaže



Slika 2. Nozzle domena  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , preuzeto iz [2].

iako je korišten relativno malen vremenski korak od  $\Delta t = 0.002$  s i gusta prostorna mreža.

### 3.2 TESTNI PROBLEM: NOZZLE

Nozzle domena predložena je od strane U.S. Food and Drug Administration [2] kao model brizgalice koja sadrži karakteristike često susretane u medicinskim napravama (slika 2). Iako je originalno zadana u tri dimenzije, mi ćemo pojednostaviti i promatrati situaciju u dvije dimenzije  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ . Slično kao i u cavity domeni, i ovdje imamo ulaznu i izlaznu granicu na kojima su zadani isti rubni uvjeti kao u cavity domeni. Obzirom da je dijametar izlazne cijevčice  $\approx 1$  cm, i ovdje je uzet  $L = 1$  cm za karakterističnu skalu u formuli za Reynoldsov broj.

Proučena su dva režima navedena u [2] koja odgovaraju laminarnom  $Re = 140$  i turbulentnom  $Re = 1400$  toku. Očekujemo da će u području nagle ekspanzije brizgalice (pri kraju *throat* područja) biti potrebno neko vrijeme do uspostave stacionarnosti toka zbog moguće pojave vrtloga. Laminarni tok Reynoldsovog broja  $Re = 140$  prikazan je na animaciji `flow4.mp4`. Uočavamo pojavu jako blagih vrtloga u području ekspanzije brizgalice unatoč kojih se ipak vrlo brzo uspostavlja stacionarnost toka zbog dominacije viskoznih sila. Turbulentan tok Reynoldsovog broja  $Re = 1400$  prikazan je na animaciji `flow5.mp4`. Pojavljuju se dva simetrično postavljena vrtloga u području ekspanzije brizgalice koji se zatim transportiraju duž izlazne cijevčice. Uslijed slučajnih perturbacija toka koji se dešavaju u prirodi, a u našem slučaju numeričkih grešaka, iako su domena i rubni uvjeti simetrični obzirom na  $x$  os, dolazi do pojave Kármánovih vrtloga u ponavljajućem uzorku koji perturbiraju virtualnu cijevčicu unutar domene  $\Omega$  koja nosi glavninu modula brzine u domeni. Pri većim Reynoldsovim brojevima, ponovno Newtonova metoda zakaže iako je korišten relativno malen vremenski korak i gusta prostorna mreža.

## 4 ZAKLJUČAK

Metoda konačnih elemenata tipa Taylor-Hood testirana je na evolucijskom problemu N-S jednadžbi kroz dva numerička eksperimenta. Variranjem Reynoldsovog broja proučeni su režimi od laminarnog do turbulentnog toka. U slučaju velikog Reynoldsovog broja, demonstrirana je pojava tzv. Kármánovih vrtloga.

## REFERENCE

- [1] Zhangxin Chen,  
*Finite Element Methods and Their Applications*,  
Springer 2005.
- [2] Hariharan P., Giarra M., Reddy V., Day S. W., Manning K. B., Deutsch S., Stewart S. F. C., Myers M. R., Berman M. R., Burgreen G. W., Paterson E. G. and Malinauskas R. A.,  
*Multilaboratory particle image velocimetry analysis of the FDA benchmark nozzle model to support validation of computational fluid dynamics simulations*,  
J. Biomech. Eng. **133** 041002 (2011).
- [3] M. Jurak,  
*Stokesova zadaća, bilješke s predavanja iz kolegija Numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi 2*,  
Sveučilište u Zagrebu, PMF, Matematički odsjek.
- [4] P. Bastian, F. Heimann, S. Marnach,  
*Generic implementation of finite element methods in the Distributed and Unified Numerics Environment (DUNE)*  
Kybernetika, **46** (2010).
- [5] A. Bjelčić,  
*GitHub repozitorij projektnog zadatka*,  
<https://github.com/abjelcic/ProjektniZadatak>