2CP **Série d'exercices N° 2** **ANA4**

Intégrales multiples

Intégrales doubles

Exercice 1 : Calculer, par le théoréme de Fubini, les intégrales doubles suivantes :

1) $\iint_{D_1} \cos(x)e^y dxdy \quad avec \quad D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \le x \le 3, \ 0 \le y \le 2\}$.

2) $\iint_{D_2} y^2 e^{xy} dxdy \quad avec \quad D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \le y \le 3, \ 0 \le x \le 2y\}$.

3) $\iint_{D_3} \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy \quad avec \quad D_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1, \ x^2+y^2 \ge 1\right\}$.

4) $\iint_{D_4} xy^2 dxdy \quad avec \ D_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x+y \ge 1 \ et \ x^2+y^2 \le 1\right\}$.

5) $\iint_{D_5} x\cos(x+y)dxdy$ où D_5 la région triangulaire de sommets $(0,0)$, $(\pi,0)$, (π,π).

Exercice 2 : En utilisant un changement de variables en coordonnées polaires, calculer $\iint_{D_i} f_i(x,y)dxdy$ où

- $f_1(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \ge 0, \ y \ge 0, \ 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}$,
- $f_2(x,y = \sqrt{x^2+y^2}$, $D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \ge 0, \ 1 \le x^2+y^2 \le 2y\right\}$.

Exercice 3 : En utilisant le changement de variables indiqué calculer $\iint_{D_i} f_i(x,y)dxdy$ où

- $f_1(x,y) = \frac{y}{x}$, $D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x < y < 2x, \ \ x < y^2 < 2x\right\}$, $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{y^2}{x}$.
- $f_2(x,y) = xy$, $D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \ge 0, \ y \ge 0, \ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \le 1\right\}$,
  $x = r\cos^3(\theta), \ y = r\sin^3(\theta), \ avec \ r \ge 0, \ \theta \in [0, 2\pi[$.

Exercice 4 : Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln((1+x)}{1+x^2} dx$.

1) Montrer que $\forall x \in]-1,+\infty[, \quad \int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy = \ln((1+x)$.

2) Déduire que $I = \iint_D \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} dxdy$ avec $D = [0,1]^2$.

3) Montrer que $\iint_D \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} dxdy = 2I$.

4) Déduire que $I = \frac{\pi}{8} \ln(2)$.

Exercice 5 : Calculer les intégrales doubles suivantes :

1) $\iint_D (x-y)^2 dxdy \quad avec \ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \sqrt{x} + \sqrt{y} \ge 1, \ \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} \ge 1\right\}$.

2) $\iint_D xydxdy \quad avec \ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \ge 0, \ \ y \ge 0, \ xy+x+y \le 1\right\}$.

3) $\iint_D dxdy \quad avec \ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x-y| \le 1, \ |x+y| \le 1\right\}$.

4) $\iint\limits_D (2x-y)dxdy \quad avec \;\; D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2+y^2 \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x\right\}$.

5) $\iint\limits_D \sqrt{3x-y}\, e^{2y-x} dxdy$ / D est l'intérieur du parallélogramme de sommets $(0,0);\ (2,1);\ (3,4);\ (1,3)$.

6) $\iint\limits_D xy^2 dxdy \quad avec \;\; D$ est l'ensemble des points du plan délimité par les courbes d'équations $x = \frac{1}{y}$ et $x = -4y+5$.

Intégrales triples

Exercice 1 : Soient les ensembles suivante

- $\Omega_1 = [0,1] \times [-1,2] \times [2,3]$.
- $\Omega_2 =$ l'ensemble des point de $\mathbb{R}^3$ délimité par le cylindre élliptique $x^2+z^2 = 4$ et les plans $y = 0,\ y = 6$.
- $\Omega_3 =$ l'ensemble des point de $\mathbb{R}^3$ délimité par les plans $z = 0,\ z = y$ et le cylindre parabolique $y = 1-x^2$.

1) Représenter les ensembles $\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3$.

2) Considérons une fonction intégrable f sur Ω_i. Exprimer $\iiint\limits_{\Omega_i} f(x,y,z)dxdydz$ sous forme de trois intégrales simples succéssives (sans utiliser de changement de variables).

Exercice 2 : Calculer $\iiint\limits_{\Omega_i} f(x,y,z)dxdydz$, $0 \leq i \leq 6$ dans chacun des cas suivants:

1) $f(x,y,z) = e^x,\ \Omega_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y,\ 0 \leq z \leq x+y\right\}$.

2) $f(x,y,z) = |xyz|,\ \Omega_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2+y^2 \leq 2pz,\ 0 \leq z \leq a\right\}$ où $a,p \in \mathbb{R}_+^*$.

3) $f(x,y,z) = z,\ \Omega_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2+y^2 \leq z^2, x^2+y^2+z^2 \leq a^2,\ z \geq 0\right\}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

4) $f(x,y,z) = x,\ \Omega_4$ étant borné par le paraboloide $x = 4y^2+4z^2$ et le plan $x = 4$.

5) $f(x,y,z) = y,\ \Omega_5$ étant le domaine se trouvant sous le plan $z = x+2y$ et au dessus de la région du plan xoy bornée par les courbes $y = x^2,\ y = 0$ et $x = 1$.

6) $f(x,y,z) = y\cos(x+z),\ \Omega_6 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; ,y \geq 0, z \geq 0, y \leq \sqrt{x}, x+z \leq \frac{\pi}{2}\right\}$.

Exercice 3 : Soient

$$\Omega_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2+y^2 \leq 1 \;\text{ et }\; x^2+y^2+z^2 \leq 2,\ z \geq 0\right\},$$

$$\Omega_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} \leq z^2 \leq x^2+y^2,\ z \geq 0 \text{ et } x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}.$$

1) Déterminer le transformé de Ω_1 en coordonnées cylindriques.

2) Déterminer le transformé Ω_2 en coordonnées sphériques.

3) Déduire le volume de Ω_1 et de Ω_2.

Exercice 4 : Identifier les ensembles suivants et calculer leur volume :

1) $\Omega_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2+y^2 \leq z \leq 1,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0\right\}$.

2) $\Omega_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ \ -1 \leq z \leq 1\right\}$.

3) $\Omega_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2 \leq \frac{z^2}{h^2},\ 0 \leq z \leq h\right\}$ avec $h > 0$.

4) $\Omega_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2 \leq z \leq 1-(x^2+y^2)\right\}$.