Introduction

Ces notes de cours (fiches de révision) sont rédigées principalement du livre *Logique et démonstration automatique*[1] et le livre *Logique Mathématique et Calculabilité*[2].

La logique, chemin vers la vérité

Etymologie : *Logique vient du grec logos (raison, langage, raisonnement).*

Le raisonnement est un cheminement (une déduction) qui permet à partir d'hypothèses, de construire de nouvelles propriétés. On est convaincu que si les hypothèses sont vraies alors les propriétés que l'on a déduites sont aussi vraies.

La logique mathématique, (ou logique formelle ou logique symbolique), est une discipline des mathématiques qui définit et étudie des représentations formelles du langage mathématique.

La logique sert à préciser ce qui est un raisonnement correct, indépendamment du domaine d'application. Un raisonnement est un moyen d'obtenir une conclusion à partir d'hypothèses données.

Raisonnement logique correct :

Un raisonnement correct ne dit rien sur la vérité des hypothèses, il dit seulement que

de la vérité des hypothèses on peut déduire la vérité de la conclusion.

Exemple. : Raisonnement formel

Hypothèses :

- • (H1) : Si Pierre est grand, alors Jean n'est pas le fils de Pierre
- • (H2) : Si Pierre n'est pas grand, alors Jean est le fils de Pierre
- • (H3) : Si Jean est le fils de Pierre alors Marie est la sœur de Jean.

Conclusion (C) : Marie est la sœur de Jean ou Pierre est grand.

Notons :

- • p : "Pierre est grand"
- • j : "Jean est le fils de Pierre"
- • m : "Marie est la sœur de Jean"

Les hypothèses deviennent : (H1) : $p \Rightarrow \neg j$; (H2) :$\neg p \Rightarrow j$; (H3) : $j \Rightarrow m$; (C) : $m \vee p$

Un exemple de problème de logique est de montrer

$$(\text{H1} \wedge \text{H2} \wedge \text{H3}) \Rightarrow \text{C}$$

$$((p \Rightarrow \neg j) \wedge (\neg p \Rightarrow j) \wedge (j \Rightarrow m)) \Rightarrow (m \vee p)$$

est vraie quelque soit la **vérité** des propositions p, j, m.

La logique énonce des règles qui permettent de se convaincre de la vérité d'une argumentation ou au contraire de la réfuter.

Nous restreindrons à la logique classique (logique bi-valente) à deux valeurs de vérité(le **vrai** et le **faux**).
Il en existe d'autres logiques dites non classiques(logique intuitioniste, logique modale, logique multivalente, logique temporelle, logique floue, . . .)

1. Logique et démonstration automatique : Michel Levy, Pasca Lafourcade, Stéphane Desvismes ; Année 2012
2. Logique Mathématique et Calculabilité : M. Mezghiche : Édition Pages Bleus 2010

Cours 1

Raisonnement mathématique

Les mathématiques sont un langage pour s'exprimer rigoureusement, adapté aux phénomènes complexes, qui rend les calculs exacts et vérifiables. Le raisonnement est le moyen de valider ou d'infirmer une hypothèse et de l'expliquer à autrui.

1.1 Les entiers naturels

Souvent, on écrit l'ensemble des entiers comme $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Cette définition est intuitive mais insuffisante. On donne une autre définition plus adaptée, qui construit l'ensemble des entiers à partir de l'entier 0 et une fonction injective successeur. $\forall n \in \mathbb{N} \quad S : n \to n+1$. Ainsi on peut construire tous les entiers comme suit : $1 = S(0); 2 = S(1); 3 = S(2); \ldots, n+1 = S(n), \ldots$.

Définition par induction des entiers

- 0 est un entier naturel
- Si n est un entier naturel alors $S(n) = n+1$ est un entier naturel
- L'ensemble des entiers naturels est défini par les clauses (1) et (2)

C'est un exemple d'une définition par induction. Les clauses (1) est appelée règle de base, (2) est appelée règle de génération. (3) est appelée règle de fermeture, elle signifie que la définition des entiers est définie **seulement** par les clauses (1) et (2).

Exemple 1. *Les entiers pairs correspondent aussi au plus* petit ensemble *qui contient* 0 *et tel que si n est pair, alors $n+2$ est pair. Observons que l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ vérifie bien que 0 est un entier, et que si n est un entier $n+2$ aussi. Il y a donc besoin de dire que c'est le plus petit ensemble avec cette propriété.*

Nous présentons quelques types de raisonnements mathématiques(démonstrations).

1.2 Démonstration par induction

Démonstration par induction

Supposons souhaiter démontrer une priorité $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par induction consiste à suivre les étapes suivantes :

- Montrer que $P(n)$ est vérifiée pour $n = 0$.
- Montrer que $P(n+1)$ est vérifiée si l'on admet que $P(n)$ est vérifiée.
- On déclare que $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ est démontrée.

Le principe de l'induction mathématique est très utilisé et on peut l'utiliser en général pour montrer des propriétés sur des ensembles dénombrables. Signalons que si la règle de base est vérifiée pour n_0 alors on déduit par induction $\forall n \geq n_0\ P(n)$ est démontrée.

Exemple 2. *Montrer que la somme des entiers $1, 3, 5, \cdots, 2n-1$ est égale à n^2. Notons cette propriété $P(n)$. Elle est vérifié pour $n = 1$. Supposons que $P(n)$ est vrai alors $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$. On déduit $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Alors $P(n+1)$ est vérifiée.*

Démonstration par induction : version forte

On a parfois besoin de connaître en plus de $P(n)$ les propriétés $P(n-1), P(n-2), \ldots$ pour conclure. Pour montrer $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$.

- [*] On vérifie $P(n)$ pour tout $n \leq n_1$ pour n_1 fini.
- [*] On montre pour $n \geq n_1$ que si $(\forall k \leq n : \ P(k))$ alors $P(n+1)$ est vérifiée.
  (on suppose que le prédicat est vrai pour toutes les valeurs inférieures à n pour réussir à prouver qu'il est vrai au rang n+1)

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle de Fibonacci définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ u_n > 0$.

1.3 Démonstration par l'absurde (contradiction)

Démonstration par l'absurde (contradiction)

Le raisonnement par contradiction est basé sur le principe suivant : Si nous arrivons à déduire une contradiction en partant d'une hypothèse donnée alors nous concluons que cette hypothèse est fausse.

Exemple 3. *Montrons que l'ensemble des nombres premiers n'est pas fini.*

Supposons qu'il est fini et s'écrit : $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \cdots, p\}$ *où* p *est le plus grand entier premier. Soit* $Q = (2*3*5*7*11*13*17*19*\cdots*p) + 1$. Q *est plus grand que* p *et par hypothèse* Q *n'est pas premier. Donc il existe un nombre premier qui divise* Q*, en même temps, ce nombre premier divise* $Q - 1$ *alors il divise* 1*(contradiction). On conclut que l'hypothèse de départ est fausse, et donc l'ensemble des nombres premiers est infini.*

1.4 Démonstration par contraposition

La démonstration par contraposition de $(P \Rightarrow Q)$ consiste à montrer directement qu'on a $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$. (c'est à dire la contraposée de $(P \Rightarrow Q)$)

Exemple 4. *Soit* $x \in \mathbb{N}$ *; Montrons que si* x^2 *est impair alors* x *est impair.*

Raisonnons par contra-position ; supposons x *pair et vérifions* x^2 *est pair. Si* x *est pair, donc il s'écrit comme* $x = 2k$ *alors* $x^2 = 4k^2 = 2*2k^2$ *est pair.*

1.5 Démonstration par disjonction de cas

La disjonction des cas, pour démontrer un énoncé, consiste simplement à le montrer dans les différentes situations possibles.

Exemple 5. *On veut montrer que si* $n \in \mathbb{N}$ *alors* $n(n+1)$ *est pair.*
Nous avons deux cas : si n *est pair alors* $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k$ *d'où* $n(n+1) = 2k(n+1)$ *et donc* $n(n+1)$ *est pair. Si* n *est impair alors* $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1$ *donc* $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(k+1)(2k+1)$*, c'est-à-dire que* $n(n+1)$ *est pair. En conclusion si* $n \in \mathbb{N}$ *alors* $n(n+1)$ *est pair.*

1.6 Démonstration par contre exemple

Pour prouver $(\forall x \in E\ P(x))$, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire de trouver un seul élément $x \in E$ qui vérifie $NON(P(x))$.

Exemple 6. *Montrer que l'assertion suivante est fausse "Tout entier positif est somme de trois carrés ". (Les carrés sont les* $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ *Par exemple* $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$*.) Un contre exemple est* 7 *: Les carrés inférieurs à* 7 *sont* $0, 1, 4$ *mais avec trois de ces nombres on ne peut pas faire* 7*.*

Exemple 7. *Montrons que* $(\forall x \in \mathbb{R}, x < 2 \Rightarrow x^2 < 4)$ *est fausse. Considérons* $x_0 = -3$*,* $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 < 2$ *et* $x_0^2 \geq 4$*. On a donc trouvé un exemple à la proposition :* $(\exists x \in \mathbb{R}, x < 2$ *et* $x^2 \geq 4)$ *ce qui équivaut à un contre-exemple à la proposition* $(\forall x \in \mathbb{R}, x < 2 \Rightarrow x^2 < 4)$

En mathématiques, une conjecture est une assertion pour laquelle on ne connaît pas encore de démonstration, mais que l'on soupçonne d'être vraie. Un exemple qui montre qu'une conjecture est fausse se nomme un contre exemple.

Fermat(1601-1665) avait remarqué que $2^{2^n} + 1$ était premier pour n entre 0 et 4. Il avait donc conjecturé que cette règle était vraie pour toutes les valeurs de n. Euler trouva un contre exemple : $2^{2^5} + 1 = 4294967297$ n'est pas premier : il est divisible par 641.

Conjecture de Fermat, Théorème de Wiles 1994

Il n'existe pas de nombres entiers non nuls x, y et z tels que : $x^n + y^n = z^n$ dès que n est un entier strictement supérieur à 2.

La conjecture a été énoncé par De Fermat. On a jamais réussi à trouver des contre-exemples. On a cependant attendu plus de trois siècles pour avoir une preuve publiée et validée, établie par Andrew Wiles en 1994. La conjecture est devenue un théorème.

Conjecture de Goldbach

La conjecture de Goldbach est une assertion mathématique non démontrée qui s'énonce comme suit :

Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

Formulée en 1742, elle n'est pas démontrée, mais elle n'a pas été contredite.