

P03b – Logic exercises

Following Russell & Norvig's finding that "*a student of AI must develop a talent for working with logical notation*" [AIMA, p. 290], this lab description collects some exercises to get acquainted with formulating and manipulating known facts in logical notation, and to do inference to arrive at new conclusions. For the sake of keeping the linguistic extravaganza found in one reference¹, some tasks are formulated in German.

1. Working with propositional logic

1.1 Which of the following is correct?²

- $\text{False} \models \text{True}$.
- $\text{True} \models \text{False}$.
- $(A \wedge B) \models (A \Leftrightarrow B)$.
- $A \Leftrightarrow B \models A \vee B$.
- $A \Leftrightarrow B \models \neg A \vee B$.
- $(A \wedge B) \Rightarrow C \models (A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)$.
- $(C \vee (\neg A \wedge \neg B)) \equiv ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$.
- $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee E) \models (A \vee B)$.
- $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee E) \models (A \vee B) \wedge (\neg D \vee E)$.
- $(A \vee B) \wedge \neg(A \Rightarrow B)$ is satisfiable (see appendix of V06a).
- $(A \Leftrightarrow B) \wedge (\neg A \vee B)$ is satisfiable.
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$ has the same number of models as $(A \Leftrightarrow B)$ for any fixed set of proposition symbols that includes A, B, C.

¹ Materials (script, exercises and exams) of Hellwig Geisse's lecture on „Methoden der KI“ at Fachhochschule Giessen Friedberg, Germany, spring semester 2003 – the AI lecturer (stdm) had the pleasure to attend during his own studies.

² Exercise 7.4 from [AIMA].

1.2 Decide whether each of the following sentences is valid, unsatisfiable, or neither³

Verify your decisions using truth tables or the equivalence rules (see V06a).

- $\text{Smoke} \Rightarrow \text{Smoke}$
- $\text{Smoke} \Rightarrow \text{Fire}$
- $(\text{Smoke} \Rightarrow \text{Fire}) \Rightarrow (\neg \text{Smoke} \Rightarrow \neg \text{Fire})$
- $\text{Smoke} \vee \text{Fire} \vee \neg \text{Fire}$
- $((\text{Smoke} \wedge \text{Heat}) \Rightarrow \text{Fire}) \Leftrightarrow ((\text{Smoke} \Rightarrow \text{Fire}) \vee (\text{Heat} \Rightarrow \text{Fire}))$
- $(\text{Smoke} \Rightarrow \text{Fire}) \Rightarrow ((\text{Smoke} \wedge \text{Heat}) \Rightarrow \text{Fire})$
- $\text{Big} \vee \text{Dumb} \vee (\text{Big} \Rightarrow \text{Dumb})$

³ Exercise 7.10 from [AIMA].

1.3 Wumpus world navigation⁴

Suppose an agent has progressed to the following point, having perceived nothing in [1,1], a breeze in [2,1], and a stench in [1,2], and is now concerned with the contents of [1,3], [2,2], and [3,1]:

1,4	2,4	3,4	4,4	A = Agent B = Breeze G = Glitter, Gold OK = Safe square P = Pit S = Stench V = Visited W = Wumpus
1,3 W!	2,3	3,3	4,3	
1,2 A S OK	2,2 OK	3,2	4,2	
1,1 V OK	2,1 B V OK	3,1 P!	4,1	

Figure 1: From [AIMA, Fig. 7.4a, p. 239].

Each of these can contain a pit, and at most one can contain a wumpus. Following the example the slide “Entailment in the wumpus world, contd.”, construct the set of possible worlds (you should find 32 of them).

Mark the worlds in which the KB is true and those in which each of the following sentences is true:

- α_2 = “There is no pit in [2,2].”
- α_3 = “There is a wumpus in [1,3].”

Hence show that $KB \models \alpha_2$ and $KB \models \alpha_3$.

⁴ Exercise 7.1 from [AIMA].

2. Formulating sentences in first-order logic

2.1 Hier das neueste aus dem Land der Bloffs und Würgel⁵

- *Zu jedem Würgel gibt es einen Bloff, der von diesem Würfel gepfennert wird.*
- *Wenn irgendein Bloff nausert, dann nausern alle Bloffs. (Ausgesprochen merkwürdig!)*
- *Wenn es für jeden Bloff einen Würfel gibt, der diesen Bloff pfennert, dann nausern alle Würfel.*

Formalisieren Sie diese Aussagen mit Hilfe der folgenden Prädikate:

- $\text{IstBloff}(X)$, $\text{IstWuerfel}(x)$, $\text{Pfennert}(x, y)$, $\text{Nausert}(x)$

2.2 Hier sind Neuigkeiten aus Bloffonien⁶

- *Jeder Bloff, der nörgt, klüpft einen Würfel.*
- *Prumm ist ein Bloff, der keinen Würfel klüpft.*

Formalisieren Sie diese beiden Aussagen als Sätze des Prädikatenkalküls erster Stufe. Verwenden Sie die Prädikate $\text{Bloff}(x)$, $\text{Noergt}(x)$, $\text{Wuerfel}(y)$ und $\text{Kluepft}(x, y)$.

⁵ From exam «Methoden der KI», 01.10.1997.

⁶ From exam «Methoden der KI», 30.01.1997.

2.3 Heute dürfen wir die Bloffs zuhause besuchen⁷

- *Wenn ein Bloff im Horg pummert, dann ist der Horg noch nicht suggi.*
- *Es gibt Bloffs, deren Horg schon suggi ist, die aber in einem anderen Horg noch pummern.*
- *Niemals pummert ein Würfel in einem Horg, in dem bereits ein Bloff pummert.*

Formalisieren Sie diese Aussagen mit Hilfe der folgenden Prädikate:

- $\text{IstBloff}(x)$, $\text{IstHorg}(x)$, $\text{IstWuergel}(x)$, $\text{PummertIn}(x, y)$, $\text{IstSuggi}(x)$, $\text{IstGleich}(x, y)$

3. Inference in logical sentences

3.1 Die possierlichen Bloffs benehmen sich ausgesprochen merkwürdig⁸ (FOL)

- *Wenn ein Bloff rüpft, dann nörgt er auch.*
- *Wenn ein Bloff nörgt und zinnt, dann gängert er.*

Obwohl die Bloffs sehr scheu sind, kennen wir einen bestimmten Bloff ein bisschen genauer:

- *Prumm ist ein Bloff, der zinnt, aber nicht gängert.*

Wandeln Sie die drei Aussagen in Klauseln um.

⁷ From exam «Methoden der KI», 26.01.2001.

⁸ From exam «Methoden der KI», 26.09.1996 (?).

Beweisen Sie durch Widerspruch in der Klauselmenge: «*Prumm rüpft nicht*».

3.2 On unicorns⁹ (propositional logic)

Given the following, can you prove that the unicorn is mythical? How about magical? Horned?

- *If the unicorn is mythical, then it is immortal, but if it is not mythical, then it is a mortal mammal.*
- *If the unicorn is either immortal or a mammal, then it is horned.*
- *The unicorn is magical if it is horned.*

⁹ Exercise 7.2. from [AIMA], adapted from Barwise and Etchemendy (1993).