Rapport Projet

Monte-Carlo

Name: **Benharrats Alexandre , Ruer Anouk**

Date : 2023.12.22

1 Sujet

Une option asiatique est un type d'option financière dont le payoff dépend non seulement du prix de l'actif sous-jacent à la date d'échéance, mais aussi de la moyenne des prix de l'actif sur une période spécifiée précédant cette date. L'option asiatique atténue l'impact des fluctuations extrêmes en utilisant la moyenne des prix sur une période donnée. Cela peut rendre l'option asiatique moins sensible aux mouvements de prix à court terme, offrant ainsi une certaine stabilité au détenteur de l'option. Ce type d'option est souvent utilisé pour gérer le risque lié à la volatilité à court terme des marchés financiers.

Supposons que l'on soit sur un marché financier avec un taux d'intérêt nul ($r = 0$). Soit S un actif risqué défini par $S_0 = 1$ et $S_t := S_0 \exp\Big((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\Big)$, où :

- S_t : Prix de l'actif à un moment donné.
- S_0 : Prix initial de l'actif.
- r : Taux d'intérêt.
- σ : Volatilité, mesurant la variabilité des rendements.
- t : Temps.
- W_t : Mouvement brownien standard, un processus stochastique.

Le modèle de marché financier repose sur le mouvement brownien géométrique, défini par l'équation suivante :

$$S_t = S_0 \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\right)$$

Cette formule implique plusieurs paramètres clés qui influent sur le comportement de l'actif financier. Premièrement, S_t représente le prix de l'actif à un moment t, avec S_0 étant le prix initial. Le taux d'intérêt, r, est supposé être nul dans ce contexte, simplifiant ainsi l'équation.

La volatilité, symbolisée par σ, joue un rôle crucial en mesurant la variabilité des rendements de l'actif financier. Une volatilité plus élevée implique des fluctuations plus importantes dans le prix de l'actif au fil du temps.

Le terme $(r - \frac{\sigma^2}{2})t$ reflète la composante de tendance, ajustant le modèle en fonction du temps. En présence de volatilité (σ), il peut indiquer une croissance ou une décroissance anticipée du prix en fonction du taux d'intérêt.

Enfin, σW_t représente la volatilité stochastique introduite par le mouvement brownien standard (W_t). Cette composante modélise les fluctuations aléatoires du prix de l'actif, capturant ainsi l'aspect imprévisible du marché financier.

Considérons $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ avec $t_k := \frac{T}{n} \cdot k$, une grille de discrétisation de l'intervalle de temps $[0, T]$. Notons $A_n^T := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_{t_i}$, où S_{t_i} est le prix de l'actif au temps t_i. En termes simples, nous divisons la période de temps $[0, T]$ en n sous-intervalles égaux, et t_k représente le temps au début de chaque sous-intervalle. Notons $A_n^T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_{t_i}$, où S_{t_i} est le prix de l'actif au temps t_i.

On cherche à calculer le prix d'une option asiatique par la méthode de Monte-Carlo, c'est-à-dire calculer $E[G] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} G_i$, où $G = (A_n^T - K)^+$, avec $T = 1$, $K = 1$, et $\sigma = 0.25$.

L'algorithme Monte-Carlo pourrait être mis en œuvre comme suit :

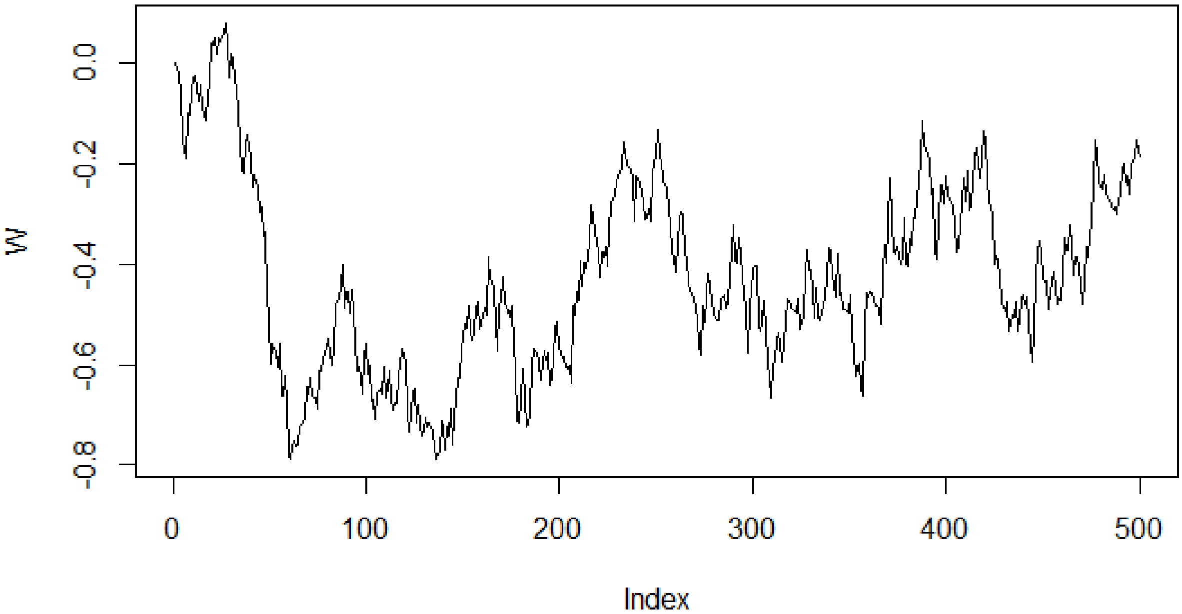
1. Pour $i = 1$ à N, simuler une trajectoire du modèle de marché financier avec un mouvement brownien géométrique.
2. Calculer la moyenne A_n^T pour chaque trajectoire.
3. Évaluer $G_i = (A_n^T - K)^+$ pour chaque simulation.

4. Calculer $E[G]$ en prenant la moyenne des valeurs G_i.

Maintenant que nous avons bien défini les paramètres commençons à répondre aux questions.

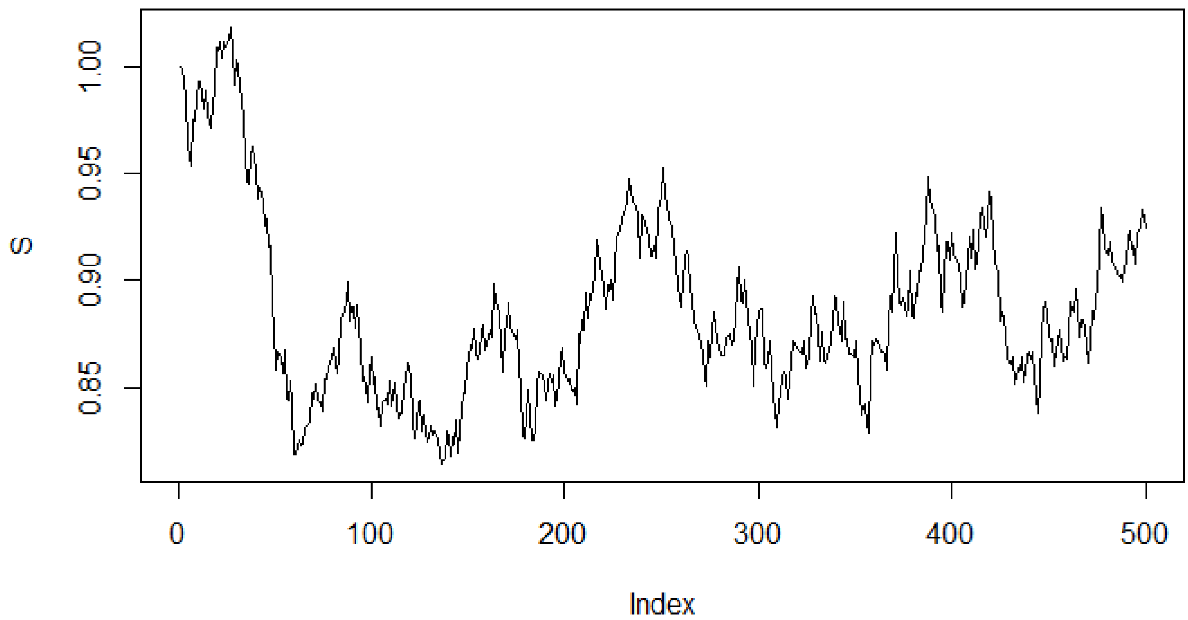
Question 1

Nous avons simulé une trajectoire Brownienne à partir d'un vecteur de taille n contenant des simulations du mouvement Brownien réalisées à partir d'un vecteur normal de taille n. Voici la trajectoire obtenu :



Pour le calcul de la Moyenne des Prix de l'Actif A_n^T : nous avons décidé de simuler les prixs actifs avec la formule :

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} \cdot \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i} \cdot Z_{i+1}\right)$$



Pour simuler $E[G]$ par la Méthode de Monte-Carlo : nous avons réalisé m simulations de $G_i = (A_{n,T} - K)^+$. Et ensuite la méthode Monte-Carlo permet de donner une estimation de E[G] par $E[G] \approx \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} G_i$.

Question 2

Méthode antithétique : Soit $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)$ le vecteur de vecteurs gaussiens identiquement distribués suivant une loi $\mathcal{N}(0, I_n)$. On utilise la transformation $T(x) := -x$ telle que la variable antithétique $T(Z_i)$ soit de même loi que Z_i. L'estimateur par la variable antithétique est :

$$\hat{I}_m^{(A)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{G(Z_i) + G(T(Z_i))}{2}$$

où $G(Z_i) = (A_t^n(Z_i) - K)^+$ avec $A_t^n(Z_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_t(z_{i,j})$

Question 3

Méthode variable de contrôle :
Soit $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)$ le vecteur de vecteurs gaussiens identiquement distribués suivant une loi $\mathcal{N}(0, I_n)$.
Soit la variable de controle $Y_i = (\left(\prod_{j=1}^{n} S_t(z_{i,j})\right)^{1/n} - K)^+$
L'estimateur par la variable de contrôle est :

$$\hat{I}_n^{(C)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(G(Z_i) + b(Y_i - E[Y_i]))$$

où $G(Z_i) = (A_t^n(Z_i) - K)^+$ avec $A_t^n(Z_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_t(z_{i,j})$

Pour utiliser cette méthode, on a besoin de connaître l'espérance de la variable de contrôle de manière explicite:

$$\left(\left(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right)^{1/n} - K\right)^{+} = \left(S_0 \exp\left(\frac{1}{n}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}(t_k - t_{k-1}) + \frac{\sigma}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\sqrt{t_k - t_{k-1}}z_k\right) - K\right)^{+}$$

or :

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}(t_k - t_{k-1}) = \sum_{i=1}^{n}(\frac{T}{n} * i) = \frac{T}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{T(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\sqrt{t_k - t_{k-1}}\cdot z_k = \sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} z_k$

Donc :

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right)^{1/n} - K\right)^{+} \\
&= \left(S_0 \exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{\sigma}{n}\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} z_k\right) - K\right)^{+} \\
&= \left(S_0 \exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{\sigma}{n}\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} z_k\right) - K\right)\mathbf{1}_{\{S_0 \exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{\sigma}{n}\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} z_k\right) - K \geq 0\}} \\
&= \left(S_0 \exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)\exp\left(\frac{\sigma}{n}\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} z_k\right) - K\right)\mathbf{1}_{\{\exp\left(\frac{\sigma}{n}\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} z_k\right) \geq \frac{K}{S_0 \exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)}\}}
\end{aligned}$$

On note $Z^* := \frac{\sigma}{n}\sqrt{\frac{T}{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} z_k\right)$.
Déterminons sa loi : On sait que z_k sont indépendantes et suivent une loi $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} z_k &= \sum_{k=1}^{n} z_k + \sum_{k=1}^{n-1} z_k + \ldots + \sum_{k=1}^{2} z_k + z_1 \\
&= z_n + 2z_{n-1} + \ldots + (n-1)z_2 + nz_1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \cdot z_{n+1-k} \\
&\overset{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0, \sum_{k=1}^{n} k^2) \\
&\overset{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}).
\end{aligned}$$

Donc $Z^* \overset{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0, \frac{T\sigma^2(n+1)(2n+1)}{6n^2})$

On peut donc réécrire :

$$\left(\left(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right)^{1/n} - K\right)^{+} = \left(S_0 \exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)\exp(Z^*) - K\right)\mathbf{1}_{\{\exp(Z^*) \geq \frac{K}{S_0 \exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)}\}}$$

Calcul de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left[\left(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}^{1/n} - K\right)^{+}\right] = \mathbb{E}\left[S_0 \exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)\exp\left(Z^*\right)\mathbf{1}_{\left\{Z^* \geq \log\left(\frac{K}{S_0\exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)}\right)\right\}}\right]$$
$$- K\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\left\{Z^* \geq \log\left(\frac{K}{S_0\exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)}\right)\right\}}\right]$$
$$= S_0 \exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)\mathbb{E}\left[\exp\left(Z^*\right)\cdot\mathbf{1}_{\left\{Z^* \geq \log\left(\frac{K}{S_0\exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)}\right)\right\}}\right]$$
$$- K\mathbb{P}\left(Z^* \geq \log\left(\frac{K}{S_0\exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)}\right)\right).$$

on note $\theta^2 := \frac{T\sigma^2(n+1)(2n+1)}{6n^2}$ la variance de Z^*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(Z^*\right)\cdot\mathbf{1}_{\left\{Z^* \geq \log\left(\frac{K}{S_0\exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)}\right)\right\}}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(z^*\right)\cdot\mathbf{1}_{\left\{z^* \geq \log\left(\frac{K}{S_0\exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)}\right)\right\}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}}e^{-\frac{z^{*2}}{2\theta^2}}\,dz^*$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{1}_{\left\{z^* \geq \log\left(\frac{K}{S_0\exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)}\right)\right\}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}}e^{\frac{-(z^*)^2}{2\theta^2}+z^*}\,dz^*$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{1}_{\left\{z^* \geq \log\left(\frac{K}{S_0\exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)}\right)\right\}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}}e^{\frac{-(z^*-\theta^2)^2}{2\theta^2}+\frac{\theta^2}{2}}\,dz$$
$$= e^{\frac{\theta^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{1}_{\left\{z^* \geq \log\left(\frac{K}{S_0\exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)}\right)-\theta^2\right\}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}}e^{-\frac{z^{*2}}{2\theta^2}}\,dz^*$$
$$= e^{\frac{\theta^2}{2}}\cdot P(Z^* \geq \log\left(\frac{K}{S_0\exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)}\right)-\theta^2)$$

Au final : $Z^* \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0,\theta^2)$ avec $\theta^2 := \frac{T\sigma^2(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$$\mathbb{E}\left[\left(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}^{1/n} - K\right)^{+}\right] = S_0 \exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\frac{\theta^2}{2}\right)\mathbb{P}(Z^* \geq \log\left(\frac{K}{S_0\exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)}\right)-\theta^2)$$
$$- K\mathbb{P}\left(Z^* \geq \log\left(\frac{K}{S_0\exp\left(\frac{T(n+1)}{2n}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)}\right)\right)$$

Question 4

(a)

$$
\begin{aligned}
G &= (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i} - K)^+ \\
&= \left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} S_{t_0}\cdot e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\frac{T}{n}\cdot i+\left(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{k=1}^{i} z_k\right)} - K\right)\cdot \mathbf{1}_{\{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} S_{t_0}\cdot e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\frac{T}{n}\cdot i+\left(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{k=1}^{i} z_k\right)}-K\geq 0\}} \\
&= \left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} S_{t_0}\cdot e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\frac{T}{n}\cdot i+\left(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\cdot\langle Z,V_i\rangle\right)} - K\right)\cdot \mathbf{1}_{\{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} S_{t_0}\cdot e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\frac{T}{n}\cdot i+\left(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\cdot\langle Z,V_i\rangle\right)}-K\geq 0\}}
\end{aligned}
$$

où V_i est un vecteur composé des i premiers éléments égaux à 1 et des $(n-i)$ restants égaux à 0.

$$= g(Z) \quad \text{avec } Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$$

(b)

On note $f(z)$ la densité du vecteur gaussien Z de loi $\mathcal{N}(0, I_n)$:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle z, z\rangle\right)$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g(Z)\right] &= \int_{\mathbb{R}^n} g(z)f(z)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(z)\frac{f(z)}{f(z-\mu)}f(z-\mu)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(z)\exp\left(\frac{1}{2}\langle\mu,\mu\rangle - \langle z,\mu\rangle\right) f(z-\mu)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(z+\mu)\exp\left(\frac{1}{2}\langle\mu,\mu\rangle - \langle z,\mu\rangle - \langle\mu,\mu\rangle\right) f(z)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(z+\mu)\exp\left(-\langle\mu,z\rangle - \frac{1}{2}\langle\mu,\mu\rangle\right) f(z)\,dz \\
&= \mathbb{E}\left[g(Z+\mu)\exp\left(-\langle\mu,Z\rangle - \frac{1}{2}\langle\mu,\mu\rangle\right)\right]
\end{aligned}
$$

(c)

Pour chaque $y \neq 0$, les deux vecteurs $z(y)$ et $S(y)$ sont défini comme suit :

$$z_1(y) = \frac{\sigma\sqrt{\Delta t}(y+K)}{y}$$

$$z_{j+1}(y) = z_j(y) - \frac{\sigma\sqrt{\Delta t}S_j(y)}{ny}$$

et

$$S_j(y) = S_0 e^{-\frac{\sigma^2 t_j}{2} + \sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{k=1}^{j} z_k(y)}$$

Nous utilisons la méthode de dicotomie pour trouver la solution de l'équation suivante :

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_j(y) - K - y = 0$$

Nous trouvons un $\hat{y}$ environ égale à 0.1562774.
Notons $\hat{\mu}$ le vecteur $z(\hat{y})$. Il est obtenu en évaluant $z(y)$ avec $y = \hat{y}$.
Ainsi, $\hat{\mu} = z(\hat{y})$. Nous avons alors réalisé une estimation préférentiel, avec comme estimateur :

$$E[G] \approx \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} g(Z_i + \hat{\mu}) \cdot h(Z_i),$$

où m est le nombre d'échantillons générés , où $\hat{\mu}$ est un vecteur de taille n et $h(Z_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle\hat{\mu}, Z_i\rangle - \frac{1}{2}\langle\hat{\mu}, \hat{\mu}\rangle\right)$.