Lista de Exercícios 2 de Álgebra Linear Computacional

Prof.: Fabrício Murai e Letícia Pereira Pinto

Informações importantes:

- Data de entrega: até 23:59 do dia 24/03/2019.
- Questões podem ser discutidas entre até três alunos. Nomes dos colegas precisam ser listados. Contudo, a escrita das soluções e submissão deve ser feita individualmente.
- Submissão deve ser feita em formato PDF através do Moodle, mesmo que tenham sido resolvidas a mão e escaneadas.
- Todas as soluções devem ser justificadas.

1. Considere a seguinte matriz 5×3, com 7 entradas existentes e 8 entradas faltando:

$$\begin{bmatrix} 3 & ? & ? \\ ? & 4 & ? \\ ? & 12 & 42 \\ ? & ? & 28 \\ 1 & 2 & ? \end{bmatrix}$$

Quais os valores faltantes? Calma, você vai precisar de mais uma informação: esta matriz possui posto 1.

2. Deseja-se usar a decomposição SVD para recomendar filmes a usuários. Utilizando dados de avaliações feitas pelos usuários, construiu-se a seguinte matriz usuários x filmes:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 5 & 3 & \dots \\ 2 & ? & ? & 4 & \dots \\ 1 & ? & ? & 1 & \dots \\ 2 & 4 & 5 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Na prática, para se utilizar o SVD, são realizados três passos nesta ordem:

- Calcula-se a média por filme, isto é a média das colunas. Suponha que este vetor de médias, incluindo as linhas não mostradas é $m = [1.8, 3.0, 4.0, 2.4, \dots]$. Em seguida, subtrai-se m_j (ou seja, a média do filme j) de cada elemento $a_{i,j}$. Seja B a matriz resultante desta subtração.
- Usa-se B para calcular o quanto a avaliação de usuário costuma se desviar em relação a média. Para isso toma-se a média das linhas. Suponha que esta média seja $u = [-0.05, -0.05, 0.45, -1.05, 0.7]$. Subtrai-se u_i (ou seja, o desvio do usuário i) de cada elemento $b_{i,j}$. Seja C a matriz resultante desta subtração.
- Calcula-se o SVD de $C = U\Sigma V^\top$, sem levar em consideração as entradas faltantes.

(a) Calcule B.

(b) Calcule C.

(c) Sabendo que o SVD truncado de C truncado com $k = 2$ é

$$U = \begin{bmatrix} -0.62 & -0.42 \\ 0.47 & 0.22 \\ 0.5 & -0.6 \\ -0.38 & 0.19 \\ 0.03 & 0.61 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad s = \begin{bmatrix} 3.63 & 0 \\ 0 & 1.05 \end{bmatrix} \quad V^\top = \begin{bmatrix} -0.38 & -0.61 & 0.48 & 0.51 & \dots \\ -0.75 & 0.59 & 0.28 & -0.11 & \dots \end{bmatrix},$$

determine uma aproximação (previsão) para as notas que os usuários 2 e 3 dariam as filmes 1 e 2 (assuma que os índices começam de 0).

3. Assinale V ou F e justifique:
( ) Em alguns casos é possível usar o NMF para reconstruir de maneira exata uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mesmo que alguns elementos de A sejam negativos.

( ) Considere uma matriz A em que pode se aplicar tanto SVD quanto NMF. O erro (Frobenius) da aproximação de posto k obtida pelo SVD será menor ou igual que o da aproximação de posto k obtida pelo NMF.

4. Calcule as seguintes normas da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Norma-1

(b) Norma-infinito

(c) Norma-2 (Para este item você pode usar o numpy)

(d) Norma Frobenius

5. Considere o uso do SVD truncado de posto k para compressão de imagens em escala de cinza (0 a 255) de tamanho 1024 x 768.

(a) No caso de uma única imagem decomposta usando SVD, quantos bytes precisam ser armazenados para reconstruir a imagem, em função de k? Qual o valor máximo de k para o qual a compressão vale a pena?

(b) Agora suponha que queiramos usar um único SVD para comprimir várias imagens. Para isso, iremos representar as imagens como vetores de tamanho 786432 (= 1024×768). Quantos bytes serão necessários para armazenar 10 imagens? E quanto a 1000 imagens?

6. **LEMBRETE:** Não deixe de submeter também a lista "Exercícios Práticos 2 (EP2)"pelo Moodle.