Gabarito da Lista de Exercícios 1 de Álgebra Linear Computacional

Prof.: Fabrício Murai e Letícia Pereira Pinto

Informações importantes:

- Data de entrega: até 23:59 do dia 24/03/2019.
- Questões podem ser discutidas entre até três alunos. Nomes dos colegas precisam ser listados. Contudo, a escrita das soluções e submissão deve ser feita individualmente.
- Submissão deve ser feita em formato PDF através do Moodle, mesmo que tenham sido resolvidas a mão e escaneadas.
- Todas as soluções devem ser justificadas.

1. Considere o exemplo visto em sala que usava uma Cadeia de Markov para ilustrar a transição de estados para um indivíduo que possui o vírus do HIV. Se a população está distribuída hoje conforme o vetor $\pi = (0.85, 0.10, 0.05, 0.00)$, qual será a distribuição após 10 anos? Você pode usar o computador para resolver.

```
import numpy as np
from scipy import linalg
np.set_printoptions(precision=3)

P = np.array([
    [.9,.07,.02,.01],
    [0,.93,.05,.02],
    [0,0,.85,.15],
    [0,0,0,1]
])

pi = np.array([.85,.10,.05,0])
for i in range(10):
    pi = pi @ P

print(pi)
```

A solução é $\pi = [0.296, 0.317, 0.134, 0.253]$.

2. Considere o seguinte computador hipotético, onde a representação de um número em ponto flutuante em base 2 (binária) possui apenas 5 dígitos para a mantissa e o expoente pode variar entre -6 e 7. Tendo como referência os padrões da IEEE apresentados em sala,

   (a) Qual o menor número positivo que pode ser representado de forma exata?
   $(-1)^0 \cdot 2^{-6} \cdot (1.)_2 = 2^{-6}$

   (b) Qual o maior? $(-1)^0 \cdot 2^7 \cdot (1.11111)_2 \approx 2^8$

   (c) Como seria representado o número $2^3 \cdot (0.01010)_2$ neste computador? Andando com o ponto duas casas para a direita e reduzindo o expoente: $(-1)^0 \cdot 2^1 \cdot (1.01000)_2$

   (d) Como seria representado o número $-2^{-2} \cdot (1101.01010)_2$ neste computador? Andando com o ponto três casas para a esquerda e aumentado o expoente: $(-1)^1 \cdot 2^1 \cdot (1.10101)_2 \approx 2^8$

   (e) Qual é o menor número maior que 1 neste computador? $(-1)^0 \cdot 2^0 \cdot (1.00001)_2 \approx 1 + 2^{-5}$

(f) Qual é o $\epsilon_{machine}$? É a metade da diferença entre o menor número maior que 1 e 1: 2^{-6}.

3. Considere a decomposição SVD completa de uma $A_{m\times n} = U_{m\times m}\Sigma_{m\times n}V_{n\times n}^\top$, com $m > n$. Sabendo que U é uma matriz ortonormal e V também é uma matriz ortonormal, mostre que $AA^\top = U\Sigma^2U^\top$ e que $A^\top A = V\Sigma^2V^\top$.

$$
\begin{aligned}
AA^\top &= (U\Sigma V^\top)(U\Sigma V^\top)^\top \\
&= U\Sigma V^\top V\Sigma^\top U^\top \\
&= U\Sigma^2 U^\top
\end{aligned}
$$

onde Σ^2 é uma matrix diagonal $m \times m$ cujos elementos são os quadrados dos elementos de Σ.

$$
\begin{aligned}
A^\top A &= (U\Sigma V^\top)^\top(U\Sigma V^\top) \\
&= V\Sigma^\top U^\top U\Sigma V^\top \\
&= V\Sigma^2 V^\top
\end{aligned}
$$

onde Σ^2 é uma matrix diagonal $n \times n$ cujos elementos são os quadrados dos elementos de Σ.

4. Seja a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Mostre que $C = U\Sigma V^\top$, onde

$$
U = \begin{bmatrix} -0.632 & 0.000 \\ 0.316 & -0.707 \\ -0.316 & -0.707 \\ 0.632 & 0.000 \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2.236 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad V^\top = \begin{bmatrix} -0.707 & 0.707 \\ -0.707 & -0.707 \end{bmatrix}
$$

é o SVD de C. (Dica: você precisa mostrar que U e V são ortonormais e que de fato o produto $U\Sigma V^\top$ é igual a C).

```
C = np.array([[1,-1],[0,1],[1,0],[-1,1]])
U = np.array([
      [-0.632,  0.000],
      [ 0.316,-0.707],
      [-0.316,-0.707],
      [ 0.632,  0.000]
])
s=np.array([2.236,1.0])
Vt = np.array([
      [-0.707,  0.707],
      [-0.707,-0.707]
])

print(np.allclose(U.T@U,np.eye(2),atol=1e-2))
print(np.allclose(Vt@Vt.T,np.eye(2),atol=1e-2))
print(np.allclose(C,U@np.diag(s)@Vt,atol=1e-2))
```

A saída é `True` nos três casos. Note que é preciso especificar a tolerância absoluta `atol`$= 10^{-2}$, embora as entradas possuam três casas decimais. Isso se deve ao erro acumulado das operações aritméticas.

5. Suponha que a matriz C do exercício anterior denota a opinião de quatro usuários sobre dois sites na Internet (-1: negativa, 0: neutra, 1: positiva). Queremos adicionar informação sobre um novo usuário que tem opinião positiva sobre os dois sites $w = (1, 1)$ à matriz U, sem recalcular o SVD. Como seria a representação deste usuário?

   Para isso teríamos que adicionar uma linha $x^\top$ à U de forma que $x^\top \Sigma V^\top = (1, 1)$. Transpondo ambos os lados temos:
$$\begin{pmatrix} 0.707 & 0.707 \\ -0.707 & 0.707 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.236 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Resolvendo este sistema encontramos $x^\top = [0.000, -1.414]$.

6. **LEMBRETE:** Não deixe de submeter também a lista "Exercícios Práticos 1 (EP1)" pelo Moodle.