

数学分析 III 课件

叶胥达

2022 年 10 月 27 日

1 期中试卷讲解

1. 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,

$$\left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| = |x| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq |x|.$$

因此 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0$.

2. 容易计算得到, 当 $z \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \left(\frac{y}{z}, \frac{x}{z}, -\frac{xy}{z^2} \right), \\ \nabla g(x, y, z) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

由于 $f(x, y, z), g(x, y, z)$ 的切平面的法向量分别为 $\nabla f(x, y, z)$ 和 $\nabla g(x, y, z)$, 因此只需验证

$$\nabla f(x, y, z) \cdot \nabla g(x, y, z) = 0, \quad (2)$$

由 (1) 可以得到

$$\nabla f(x, y, z) \cdot \nabla g(x, y, z) = \frac{xy}{z\sqrt{x^2 + z^2}} + \frac{xy}{z\sqrt{y^2 + z^2}} - \left(\frac{xy}{z\sqrt{x^2 + z^2}} + \frac{xy}{z\sqrt{y^2 + z^2}} \right) = 0.$$

因此 (2) 成立. 命题得证.

3. (1) 由于 $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$, 故

$$\nabla \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \Delta u.$$

(2) 反证法. 若存在 $x^0 \in \Omega$ 使得 $u(x^0) = M > 0$, 则 x^0 是 $u(x)$ 的极值点, 因此 $\nabla u(x^0) = 0$, 且

$$\Delta u(x^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x^0) = u(x^0) > 0,$$

因此存在下标 $i \in \{1, \dots, N\}$ 使得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x^0) > 0$.

设 e_i 是第 i 个分量上的单位向量. 在 $t = 0$ 附近作函数 $g(t) = u(x^0 + te_i)$, 则 $g(t)$ 的一阶和二阶导数由 e_i 方向上的方向导数给出:

$$g'(t) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0 + te_i), \quad g''(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x^0 + te_i).$$

特别的,

$$g'(0) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0) = 0, \quad g''(0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x^0) > 0.$$

由于 $g(t)$ 在 $t = 0$ 处的二阶 Taylor 展开形如

$$g(t) = g(0) + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + o(t^2),$$

存在 $\delta > 0$ 使得当 $t \in U_0(0, \delta)$ 时总有 $g(t) > g(0)$, 即

$$u(x^0 + te_i) > u(x^0), \quad t \in U_0(0, \delta).$$

因此 x^0 不是 $u(x)$ 的最大值点, 矛盾!

另证: 由于 x^0 是 $u(x)$ 的极大值点, 故其 Hesse 矩阵 $\nabla^2 u(x^0)$ 非正定. 因此该矩阵的迹

$$\text{tr}(\nabla^2 u(x^0)) = \Delta u(x^0) \leq 0.$$

但根据方程, $\Delta u(x^0) = u(x^0) > 0$, 矛盾!

(3) 和 (2) 的证明方法完全相同, 或者可以对 $-u$ 进行讨论.

(4) 若 $u(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值 $M > 0$, 则最大值点 $x^0 \in \Omega$. 这与 (2) 的结果矛盾!

若 $u(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的最小值 $m < 0$, 则最小值点 $x^0 \in \Omega$. 这与 (3) 的结果矛盾!

4. 在方程 $x + e^{yz} + z^2 = 0$ 的两端分别对 x, y 求偏导数, 可以得到

$$1 + (ye^{yz} + 2z) \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$ze^{yz} + (ye^{yz} + 2z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

在 (1) 中取 $(x, y, z) = (-2, 0, 1)$, 可以得到 $\frac{\partial z}{\partial x}(-2, 0) = -\frac{1}{2}$.

在 (2) 中令 $y = 0$, 则在 $x = -2$ 附近, 恒有 $\frac{\partial z}{\partial y}(x, 0) = -\frac{1}{2}$. 对 x 求偏导得到 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-2, 0) = 0$.

将 (1)(2) 两式相除可得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = ze^{yz} \frac{\partial z}{\partial x}. \quad (3)$$

在 (3) 两边对 x 求偏导数得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (e^{yz} + yz) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + ze^{yz} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

代入 $(x, y, z) = (-2, 0, 1)$ 可得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 = -\frac{1}{4}$.

在 (3) 两边对 y 求偏导数得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{yz} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + e^{yz} \left(z + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + ze^{yz} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

代入 $(x, y, z) = (-2, 0, 1)$ 可得 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{4}$. 综上, 可以得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{4}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

注意: 如果直接在等式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{ye^{yz} + 2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{ze^{yz}}{ye^{yz} + 2z}$$

的两端对 x, y 求偏导数, 计算量将显著增加. 使用简单的方式来表示偏导数是解题的关键. 此外, 在计算得到 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 之后, 也可待定系数

$$z(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x+2) - \frac{1}{2}y + \frac{a}{2}(x+2)^2 + \frac{b}{2}y^2 + o((x+2)^2 + y^2)$$

来得到常数 a, b 的值.

5. 如果 f 是 m 次齐次函数, 则

$$f(tx) = t^m f(x)$$

对一切 $t > 0$ 成立. 在两端关于 t 取导数, 并根据链式法则, 得到

$$x^T \nabla f(tx) = mt^{m-1} f(x).$$

取 $t = 1$, 则得到 $x^T \nabla f(x) = mf(x)$.

如果 $x^T \nabla f(x) = mf(x)$ 成立, 考察函数 $g(t) = f(tx)/t^m$, 其中 $t > 0$. 则

$$g'(t) = \frac{tx^T \nabla f(tx) - mf(tx)}{t^{m+1}} = 0,$$

故 $g(t)$ 在 $t > 0$ 上为常数函数. 因此 $g(t) = g(1)$, 即 $f(tx) = t^m f(x)$. 因此 f 为 m 次齐次函数.

6. (1) 容易知道

$$u(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

由于满足 $1 \leq i < j \leq n$ 的 (i, j) 对有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个, 故 $u(x)$ 是 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次齐次函数, 故结论成立.

(2) 先假设 x_1, \dots, x_n 互不相等. 对每个 $k \in \{1, \dots, n\}$, 有

$$u(x) = \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i, j \neq k}} (x_j - x_i) \left[(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n) \right] (-1)^{n-k}$$

对 x_k 求偏导数可得

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = u(x) \left[\frac{1}{x_k - x_1} + \cdots + \frac{1}{x_k - x_{k-1}} + \frac{1}{x_k - x_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{x_k - x_n} \right],$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = u(x) \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq k}} \frac{1}{x_k - x_l}.$$

对 k 求和有

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} = u(x) \sum_{\substack{1 \leq k, l \leq n \\ l \neq k}} \frac{1}{x_k - x_l} = u(x) \sum_{1 \leq k < l \leq n} \left(\frac{1}{x_k - x_l} + \frac{1}{x_l - x_k} \right) = 0.$$

即若 x_1, \dots, x_n 互不相等, 总有 $\nabla \cdot u(x_1, \dots, x_n) = 0$. 对于一般的 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\nabla \cdot u(x_1, \dots, x_n) = \lim_{t \rightarrow 0} \nabla \cdot u(x_1 + t, x_2 + 2t, \dots, x_n + nt).$$

由于当 $t > 0$ 充分小时, $\{x_k + kt\}_{k=1}^n$ 互不相等, 故 $\nabla \cdot u(x_1, \dots, x_n) = 0$.

7. 为了求 $\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2$ 在约束条件 $\sum_{i=1}^n a_i x_i + b = 0$ 下的最小值, 利用 Lagrange 乘数法, 定义

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 - \lambda \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i + b \right).$$

如果 (x_1, \dots, x_n) 为约束优化问题的最小值点, 则

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \implies 2(x_i - x_i^0) = \lambda a_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

因此由 (1) 可得

$$\lambda \sum_{i=1}^n a_i^2 = 2 \sum_{i=1}^n a_i(x_i - x_i^0) = -2 \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^0 + b \right) \implies \lambda = - \frac{2 \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^0 + b \right)}{\sum_{i=1}^n a_i^2}. \quad (2)$$

由 (1)(2) 得到

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 = \frac{\lambda^2}{4} \sum_{i=1}^n a_i^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^0 + b \right)^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}.$$

因此最短距离为

$$d = \frac{\left| \sum_{i=1}^n a_i x_i^0 + b \right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}.$$

8. 对 $x \in [a, b]$ 定义三角形区域

$$\Delta_x = \{(\xi, y) : a \leq y \leq \xi \leq x\} \subset [a, b] \times [a, b].$$

则 $\varphi(x)$ 的定义可以写为

$$\varphi(x) = \max_{(\xi, y) \in \Delta_x} f(\xi, y).$$

当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $\Delta_{x_1} \subset \Delta_{x_2}$, 因此 $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$, 即 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上是单调递增函数.

由于 $f(\xi, y)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上是一致连续的, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$|(\xi_1, y_1) - (\xi_2, y_2)| \leq \sqrt{2}\delta \implies |f(\xi_1, y_1) - f(\xi_2, y_2)| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

对于 (1) 中确定的 $\delta > 0$, 我们希望证明:

$$|x_1 - x_2| \leq \delta \implies |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq \varepsilon. \quad (2)$$

不妨设 $x_1 < x_2$, 则由于 $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$, 只需验证 $\varphi(x_2) \leq \varphi(x_1) + \varepsilon$. 根据 $\varphi(x_2)$ 的定义, 存在 $(\xi_2, y_2) \in \Delta_{x_2}$ 使得 $\varphi(x_2) = f(\xi_2, y_2)$. 注意到 $a \leq y_2 \leq \xi_2 \leq x_2$, 考察下面两种情形:

- 若 $\xi_2 \leq x_1$, 则 $a \leq y_2 \leq \xi_2 \leq x_1 \implies (\xi_2, y_2) \in \Delta_{x_1}$. 故

$$\varphi(x_2) = f(\xi_2, y_2) \leq \max_{(\xi, y) \in \Delta_{x_1}} f(\xi, y) = \varphi(x_1) < \varphi(x_1) + \varepsilon.$$

- 若 $\xi_2 > x_1$, 取 $\xi_1 = x_1$, $y_1 = \min(x_1, y_2)$. 此时 $(\xi_1, y_1) \in \Delta_{x_1}$, 且

$$|\xi_2 - \xi_1| \leq |x_2 - x_1| \leq \delta, \quad |y_2 - y_1| \leq |x_2 - x_1| \leq \delta.$$

故由 (1) 可以得到 $|f(\xi_1, y_1) - f(\xi_2, y_2)| \leq \varepsilon$. 因此

$$\varphi(x_2) = f(\xi_2, y_2) \leq f(\xi_1, y_1) + \varepsilon \leq \max_{(\xi, y) \in \Delta_{x_1}} f(\xi, y) + \varepsilon \leq \varphi(x_1) + \varepsilon.$$

因此, 无论何种情形我们都可以得到 $\varphi(x_2) \leq \varphi(x_1) + \varepsilon$, 因此 (2) 成立. 根据连续性的定义, $\varphi(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 上一致连续.