数学分析 III 课件

开集与闭集、多元函数的连续与一致连续

叶胥达

2022 年 9 月 15 日

1 学习指南

1. $\varepsilon-\delta$ 语言是刻画极限的最基础的工具, 无论是在 $\mathbb{R}^n$ 还是在 Hilbert 空间和度量空间中.
2. 不要拘泥于符号的使用, 但是要保持上下文符号的统一. 在多元函数的中, 数学符号会频繁出现各种上下标, 要明确这些符号的含义, 例如哪些代表空间的维数, 哪些代表数列的指标, 尽量不要重复混用. 另外, 同一个数学概念可能有多种表达方式, 例如函数 u 关于变量 x 的偏导数可以表示为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial x}u$ 或 $\partial_x u$. 具体使用哪种符号没有特别的要求, 但是要保证上下文中符号的统一.
3. 在课本中, 向量通常使用粗体的符号 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 表示. 在手写体中, 使用非粗体的 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 即可, 是否添加向量符号 $\vec{x}$ 属于个人偏好.
4. 在大部分情况下, 数学分析中遇到的区域 $E\subset\mathbb{R}^n$ 都具有较好的正则性. 应用一些定理 (积分区域变换、Green 公式) 时不必太在意区域是否满足定理要求的正则性条件 (通常它们相当复杂).
5. 训练良好的计算能力, 尤其是在积分区域复杂的情形时. 尽管 MATLAB 和 Mathematica 可以帮助进行复杂的计算, 但是考试不能用.

2 习题解答

习题十三 20220905

10. 设 $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是区间 $[0,1)$ 中全部有理数的排列. 对一切 $k\in\mathbb{N}$, 构造点

$$P_k=\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)\cos 2\pi\theta_k,\left(1-\frac{1}{k}\right)\sin 2\pi\theta_k\right)\in\mathbb{R}^2,$$

并作集合 $E=\{P_k:k\in\mathbb{N}\}$, 则 E 的聚点集为单位圆周. 一方面, E 的聚点一定在单位圆周上. 这是由于 $|P_k|=1-\dfrac{1}{k}$, 因此若 E 有聚点 P^*, 则 $|P^*|=\lim\limits_{k\to\infty}|P_k|=1$.

另一方面, 在单位圆周上的点一定是 E 的聚点. 在单位圆周上任取一点 $(\cos 2\pi\theta,\sin 2\pi\theta)$, 其中 $\theta\in[0,1)$, 则存在有理数列 $\{\theta_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}\subset[0,1)$ 使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\theta_{k_j}=\theta$. 此时 $(\cos\theta,\sin\theta)=\lim\limits_{j\to\infty}P_{k_j}$, 因此 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 是 E 的聚点.

备注 证明的关键是保证所有的点的幅角在 $[0,2\pi)$ 中是稠密的, 这样才能保证 E 的聚点包含整个单位圆周. 直接选择习题 3(3) 中的集合 E 是不可取的, 因为集合 E 的聚点有圆盘内的部分. 另一个合理的取法是

$$\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)\cos k,\left(1-\frac{1}{k}\right)\sin k\right),\qquad k\in\mathbb{N},$$

因为 $k \bmod 2\pi$ 在 $[0,2\pi)$ 中稠密. 但是

$$\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)\cos\left(\tan\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)\right),\left(1-\frac{1}{k}\right)\sin\left(\tan\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)\right),\qquad k\in\mathbb{N},$$

不大可行, 因为证明 $\tan\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\right) \bmod 2\pi$ 在 $[0,2\pi)$ 中稠密非常不平凡.

11. (1) 在 $\mathbb{R}^1$ 上, $E_1=(-1,0)$, $E_2=(0,1)$.

(2) 在 $\mathbb{R}^2$ 上, $E_1=\{(x,y):y\geqslant e^x\}$, $E_2=\{(x,y):y\leqslant 0\}$.

另一个例子是 $E_1=\{n:n\in\mathbb{N}\}$, $E_2=\{n+\frac{1}{n+1}:n\in\mathbb{N}\}$. (由热心同学提供)

(3) 由于 $d(E_1,E_2)=0$, 故存在点列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset E_1$ 和 $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}\subset E_2$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}|x_k-y_k|=0.$$

由于 E_1 为紧集, 故存在 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的子列 (仍然记为 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$) 收敛到 $x^*\in E_1$, 即

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x^*.$$

类似地, 存在 $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的子列 (仍然记为 $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$) 收敛到 $y^*\in E_2$, 即

$$\lim_{k\to\infty}y_k=y^*.$$

注意到

$$|x^*-y^*|\leqslant|x_k-x^*|+|y_k-y^*|+|x_k-y_k|,$$

令 $k\to\infty$ 即可得到 $x^*=y^*$. 因此 $x^*\in E_1\cap E_2$.

若仅仅假设 E_1 为紧集, E_2 为闭集, 则结论仍然成立.

12. (有限覆盖定理) 对任何 $x \in F$, 由于 $x \in E$ 且 E 为开集, 存在 x 的邻域 $U(x,\delta_x)$ 使得 $U(x,\delta_x) \subset E$. 因此可以得到

$$F \subset \bigcup_{x\in F} U(x,\delta_{x/2}) \subset E.$$

由于 F 为紧集, 故由有限覆盖定理, 存在有限个元素 $\{x_k\}_{k=1}^K \subset F$, 使得

$$F \subset O := \bigcup_{k=1}^K U(x_k,\delta_{x_k/2}) \subset E.$$

上述公式定义的集合 O 是有限个开集的并, 并且 (见习题十三, 7(1))

$$\bar{O} \subset \bigcup_{k=1}^K \overline{U(x_k,\delta_{x_k/2})} \subset \bigcup_{k=1}^K U(x_k,\delta_{x_k}) \subset E.$$

(距离函数构造) 先证明关于距离函数 $d(x,E)$ 的一个性质.

引理 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为非空集合, 定义 $d(x,E) = \inf_{y\in E} |x-y|$. 则

$$|d(x_1,E) - d(x_2,E)| \leqslant |x_1 - x_2|, \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n.$$

证明 对任意 $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n$, 由三角不等式,

$$|x_1 - y| \leqslant |x_1 - x_2| + |x_2 - y|.$$

在两端关于 $y \in E$ 取下确界可得

$$\inf_{y\in E} |x_1 - y| \leqslant |x_1 - x_2| + \inf_{y\in E} |x_2 - y|,$$

即 $d(x_1,E) \leqslant |x_1 - x_2| + d(x_2,E)$. 同理可以得到 $d(x_2,E) \leqslant |x_1 - x_2| + d(x_1,E)$, 命题得证. □

回到原题. 记 E^c 为 E 在 $\mathbb{R}^n$ 中的补集, 则 E^c 为闭集. 由于 $F \cap E^c = \phi$, 由 11(3) 的结果可知 $d(F,E^c) > 0$. 定义集合

$$O = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,F) < d(x,E^c)\},$$

我们来验证 O 是符合题目要求的集合. 下面证明:

1. $F \subset O$, 且 O 是开集.

   当 $x_0 \in O$ 时, $\varepsilon := d(x_0,E^c) - d(x_0,F) > 0$. 对任意 $x \in U(x_0,\varepsilon/3)$, 有

   $$d(x,E^c) - d(x,F) \geqslant d(x_0,E^c) - d(x_0,F) - \frac{2\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3} > 0,$$

   因此 $U(x_0,\varepsilon/3) \subset O$. 故 O 为开集.

2. $\bar{O} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, F) \leqslant d(x, E^c)\}$.

   任取 $x^* \in \bar{O}$, 则存在点列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset O$ 使得 $x_k \to x^*$. 由于 $d(x_k, F) < d(x_k, E^c)$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 成立, 因此令 $k \to \infty$ 可以得到 $d(x^*, F) \leqslant d(x^*, E^c)$.

3. $\bar{O} \cap E^c = \phi$.

   事实上, 如果 $x \in \bar{O} \cap E^c$, 则

$$d(x, F) \leqslant d(x, E^c) = 0 \Longrightarrow d(x, F) = 0.$$

   由于 F 是紧集, 上述结果意味着 $x \in F$, 从而 $F \cap E^c \neq \phi$, 矛盾!

综合以上结果, 可以得到 $F \subset O \subset \bar{O} \subset E$.

习题 13 20220907

14. 解答从略. 欲证明极限存在, 通常需要使用不等式放缩, 如 $|\sin x| \leqslant |x|$; 欲证明极限不存在, 则只需证明可以使用不同的方式逼近极限点而函数值极限不等.

16. (1) 为方便起见, 记

$$g(x, y) = \frac{f(x)f(y)}{f^2(x) + f^2(y)}.$$

如果 $g(x, y)$ 在 $E \ni (x, y) \to 0$ 的极限存在, 则其值应与 $x = y$ 时的极限相等, 即

$$\lim_{E \ni (x,y) \to 0} g(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)f(x)}{f^2(x) + f^2(x)} = \frac{1}{2}.$$

而另一方面, 对任意 $\varepsilon > 0$, 可任取 $x \in U_0(0, \varepsilon/2)$, 然后取 $y \in U_0(0, \varepsilon/2)$, 使得

$$|f(y)| < \varepsilon |f(x)|.$$

这样的 y 存在是由于 $f(x) \neq 0$ 且 $\lim\limits_{y \to 0} f(y) = 0$. 对于这样的 x, y 我们有

$$|g(x, y)| \leqslant \left| \frac{f(y)}{f(x)} \right| < \varepsilon \Longrightarrow \left| g(x, y) - \frac{1}{2} \right| \geqslant \frac{1}{4}.$$

由于 ε 可以充分小, 因此 $g(x, y)$ 不以 $\frac{1}{2}$ 为极限值, 矛盾!

另一种证法是定义序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $f(x_{k+1})/f(x_k) \to 0$ (课本参考答案).

(2) 仿照上面的方法, 实际上可以证明

$$\lim_{E \ni (x,y) \to 0} \frac{f^2(x)f^2(y)}{f^4(x) + f^4(y)}$$

不存在.

18. 思路 在一致存在的条件

$$|f(x,y)-h(y)|<\varepsilon$$

中令 $y\to b$, 从而得到 $\left|g(x)-\lim\limits_{y\to b}h(y)\right|<\varepsilon$, 即关于 $h(y)$ 的极限信息.

解答 根据条件, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得 $x\in U_0(a,\delta)$ 且 $y\neq b$ 时有

$$f(x,y)-\varepsilon<h(y)<f(x,y)+\varepsilon. \tag{$*$}$$

在其中令 $y\to b$, 可以得到

$$g(x)-\varepsilon\leqslant\varliminf_{y\to b}h(y)\leqslant\varlimsup_{y\to b}h(y)\leqslant g(x)+\varepsilon.$$

特别的, 我们有

$$\varlimsup_{y\to b}h(y)-\varliminf_{y\to b}h(y)\leqslant 2\varepsilon.$$

由于 ε 可以充分小, 因此 $\varlimsup\limits_{y\to b}h(y)=\varliminf\limits_{y\to b}h(y)$. 定义 $c:=\lim\limits_{y\to b}h(y)$, 并将 $(*)$ 改写为

$$h(y)-\varepsilon<f(x,y)<h(y)+\varepsilon,\quad \forall x\in U_0(a,\delta), \tag{$**$}$$

然后令 $y\to b$, 可以得到

$$c-\varepsilon\leqslant g(x)\leqslant c+\varepsilon,\quad \forall x\in U_0(a,\delta).$$

由于 ε 可以任意小, 我们得到

$$\lim_{x\to a}g(x)=c.$$

最后, 在 $(**)$ 的条件下, 可以选择 $\delta_1<\delta$ 使得当 $y\in U_0(b,\delta_1)$ 时, 一定有

$$|g(y)-c|<\varepsilon.$$

因此由 $(**)$ 可以得到: 当 $x\in U_0(a,\delta_1)$ 且 $y\in U_0(b,\delta_1)$ 时, 有

$$|f(x,y)-c|<2\varepsilon.$$

由于 ε 可以充分小, 因此可得

$$\lim_{E\ni(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=c.$$

3 补充题目

1. (周民强, 例 1.3.9) 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续的一阶导数 $f'(x)$. 证明: 函数

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x\neq y\\ f'(x), & x=y\end{cases}$$

在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

思路 $F(x,y)$ 在不同区域上的定义不同, 因此在使用 $\varepsilon-\delta$ 语言时需要分类讨论.

证明 显然 $F(x,y)$ 在 $x\neq y$ 上的区域连续. 取定 $x_0\in\mathbb{R}$, 来证明 $F(x,y)$ 在 (x_0,x_0) 处连续, 即对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得 $x,y\in U(x_0,\delta)$ 时有 $|F(x,y)-F(x_0,x_0)|<\varepsilon$.

由于 $f'(x)$ 在 x_0 处连续, 因此存在 $\delta>0$ 使得当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时一定有 $|f'(x)-f'(x_0)|<\varepsilon$. 我们来验证这样选择的 $\delta>0$ 符合题目要求. 考察以下两种情形:

- 若 $x\neq y$ 且 $x,y\in U(x_0,\delta)$, 则由 Lagrange 中值定理, 存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

  $$F(x,y)-F(x_0,y_0)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-f'(x_0)=f'(\theta x+(1-\theta)y)-f'(x_0).$$

  由于

  $$|\theta x+(1-\theta)y-x_0|\leqslant\theta|x-x_0|+(1-\theta)|y-x_0|<\delta,$$

  故 $|F(x,y)-F(x_0,y_0)|<\varepsilon$.

- 若 $x=y\in U(x_0,\delta)$, 则

  $$|F(x,x)-F(x_0,x_0)|=|f'(x)-f'(x_0)|<\varepsilon.$$

以上两种情形中, 都有 $|F(x,y)-F(x_0,x_0)|<\varepsilon$, 因此 $F(x,y)$ 在 (x_0,x_0) 处连续.

该题也可以直接使用一般化的中值定理 $F(x,y)=f'(\theta x+(1-\theta)y)$ 来证明.

2. (1) 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界函数. 证明: $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续当且仅当其图像

$$G=\{(x,f(x)):x\in\mathbb{R}^n\}$$

在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中是闭集.

(2) 如果去掉 $f(x)$ 是有界的条件, 结论是否成立?

解答 (1) 一方面, 当 $f(x)$ 连续时, 证明 G 为闭集, 即 $\bar{G}\subset G$. 任取 $(x^*,y^*)\in\bar{G}$, 则存在点列

$\{(x_k,y_k)\}_{k=1}^{\infty}\subset G$ 使得 $(x_k,y_k)\to(x^*,y^*)$. 根据 G 的定义, 有 $y_k=f(x_k)$. 由于 f 的连续性, 有 $f(x_k)\to f(x^*)$, 因此 $y^*=f(x^*)$, 从而 $(x^*,y^*)\in G$.

另一方面, 当 G 为闭集时, 证明 $f(x)$ 连续. 如果 $f(x)$ 在 $x^*\in\mathbb{R}^n$ 处不连续, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 以及收敛到 x^* 的点列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, 使得

$$|f(x_k)-f(x^*)|\geqslant\varepsilon_0,\qquad \forall k\in\mathbb{N}. \tag{$*$}$$

由于 $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界, 因此由 Weierstrass 定理, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 有子列 $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{j\to\infty}f(x_{k_j})=y^*\in\mathbb{R}$$

由 $(*)$ 可得 $|y^*-f(x^*)|\geqslant\varepsilon_0$. 注意 (x^*,y^*) 是 G 中点列 $\{(x_{k_j},f(x_{k_j}))\}_{j=1}^{\infty}$ 的极限点, 我们有 $(x^*,y^*)\in G$. 于是, 在 $f(x)$ 的图像 G 中, x^* 同时对应两个不同的函数值 $f(x^*)$ 和 y^*, 矛盾! 因此 $f(x)$ 必定连续.

(2) 不一定对. 取

$$f(x)=\begin{cases}1/x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

3. (在每个线性方向上连续的函数不一定连续) 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上有定义. 如果对任何单位向量 $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ($\mathbb{S}^{n-1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面), 都有 $\lim\limits_{\mathbb{R}\ni t\to 0}f(tv)=0$, 是否一定有 $\lim\limits_{\mathbb{R}^n\ni x\to 0}f(x)=0$?

解答 答案是否定的. 考察 $\mathbb{R}^2$ 上的函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\max\left\{0,\dfrac{y}{x^2}\left(1-\dfrac{y}{x^2}\right)\right\}, & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

则 $f(x,y)$ 满足题目所述的条件.

首先, $f(x,y)$ 在直线 $x=0$ 和 $y=0$ 上的极限为 0, 即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x,0)=\lim\limits_{y\to 0}f(0,y)=0$.

其次, $f(x,y)$ 在直线 $y=kx(k\neq 0)$ 上的极限为 0. 这是因为当 $y=kx$ 时,

$$f(x,y)=\max\left\{0,\frac{k}{x}\left(1-\frac{k}{x}\right)\right\}.$$

当 $\dfrac{k}{x}\leqslant 0$ 或 $\dfrac{k}{x}\geqslant 1$ 时, 一定有 $\dfrac{k}{x}\left(1-\dfrac{k}{x}\right)\leqslant 0$, 因此有 $f(x,kx)=0$, 从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x,kx)=0$.

最后, 在曲线 $y=\dfrac{x^2}{2}$ 上, $f(x,y)\equiv\dfrac{1}{4}$, 因此 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x,\dfrac{x^2}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$. 于是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

4. 设 $g \in C(\mathbb{R})$, $f(x,y) := g(xy)$. 若 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续, 则 g 恒为常数.

解答 往证任意 $x \in \mathbb{R}$, 有 $g(x) = g(0)$. 由于 $f(x,y)$ 一致连续, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$|x_1 - x_2| \leqslant \delta, \quad |y_1 - y_2| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon. \tag{1}$$

特别的,

$$|g(x) - g(0)| = \left| f\left(\frac{x}{\delta}, \delta\right) - f\left(\frac{x}{\delta}, 0\right) \right| < \varepsilon.$$

由于 ε 可以任意小, 因此有 $g(x) = g(0)$. 从而 g 为常数.

5. (周民强, 例 1.3.2) 设定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数 $f(x,y)$ 满足:

(i) $f(x,y)$ 关于变量 x, y 均连续;

(ii) 对任何有界闭集 $K \subset \mathbb{R}^2$, $f(K) \subset \mathbb{R}^1$ 为有界闭集.

证明: $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

思路 若使用反证法, 则可假设点列 $\{(x_k,y_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ 收敛到原点且使得 $|f(x_k,y_k)| \geqslant \varepsilon_0$ 成立. 此时, $K := \{(x_k,y_k)\}_{k=1}^{\infty} \cup \{(0,0)\}$ 是有界闭集. 如何使得 $f(K) = \{f(x_k,y_k)\}_{k=1}^{\infty} \cup \{f(0,0)\}$ 不是闭集呢? 于是, 我们希望证明 $\{f(x_k,y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ 有一个不在 $f(K)$ 中的聚点.

解答 只需证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续. 不妨假设 $f(0,0) = 0$. 若结论不成立, 则存在收敛到原点的点列 $\{(x_k,y_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$, 使得 $|f(x_k,y_k)| \geqslant \varepsilon_0 > 0$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 成立. 由于

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, 0) = f(0,0) = 0,$$

故存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $k > N$ 时, 一定有 $|f(x_k,0)| \leqslant \varepsilon_0/2$. 注意到 $f(x_k,y)$ 关于 y 连续, 因此当 $k > N$ 时, 存在介于 0 和 y_k 之间的实数 y_k' 使得

$$|f(x_k,y_k')| = \frac{k\varepsilon_0}{k+1}, \qquad \forall k > N.$$

定义集合 $K := \{(x_k,y_k')\}_{k=N+1}^{\infty} \cup \{(0,0)\}$, 则 $\{(0,0)\}$ 是 K 唯一聚点, 从而 K 为有界闭集. 故

$$f(K) = \{f(x_k,y_k')\}_{k=N+1}^{\infty} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$$

为有界闭集. 由于 $|f(x_k,y_k')| = k\varepsilon_0/(k+1)$, 因此 $f(K)$ 有一个聚点在集合 $\{+\varepsilon_0, -\varepsilon_0\}$ 中. 但 $+\varepsilon_0$ 和 $-\varepsilon_0$ 均不在 $f(K)$ 当中, 故 $f(K)$ 不是闭集, 矛盾!

6. (周民强, 例 1.3.3) 设定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数 $f(x,y)$ 满足:

(i) $f(x,y)$ 关于变量 x, y 均连续;

(ii) 当 y 的值固定时, $f(x,y)$ 关于变量 x 单调.

证明: $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

思路 该题目并未要求 $f(x,y)$ 对于不同的 y 的增减性是相同的, 例如 $f(x,y)=xy$ 满足题目所述条件, 但 $y<0$ 和 $y>0$ 时的增减性不同. 本题由于单调性的特殊结构, 不适合用反证法进行证明. 证明策略是在每个 (x_0,y_0) 附近构造一个小矩形, 然后在小矩形内部对函数值进行估计.

解答 任取 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, 往证 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续, 即对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon,\quad \forall x\in U(x_0,\delta),\ \ \forall y\in U(y_0,\delta). \tag{1}$$

由于 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 故存在 $\delta_1>0$ 使得

$$|f(x_0-\delta_1,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x_0+\delta_1,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

接着, 由于 $f(x_0-\delta_1,y)$ 在 $y=y_0$ 处连续, 存在 $\delta_2>0$ 使得

$$|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0-\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall y\in U(y_0,\delta_2).$$

进一步, 可以得到

$$|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon,\quad \forall y\in U(y_0,\delta_2). \tag{2}$$

类似的, 存在 $\delta_3>0$ 使得

$$|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon,\quad \forall y\in U(y_0,\delta_3). \tag{3}$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$. 我们来说明这样的 δ 满足 (1) 中的要求.

对于任意 $x\in U(x_0,\delta)$ 和 $y\in U(y_0,\delta)$, 有 $x\in[x_0-\delta_1,x_0+\delta_1]$. 根据 $f(x,y)$ 关于 x 的单调性, $f(x,y)$ 的值位于 $f(x_0-\delta_1,y)$ 和 $f(x_0+\delta_1,y)$ 之间. 由 (2)(3) 即可得到

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon,$$

因此 (1) 成立. 故 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

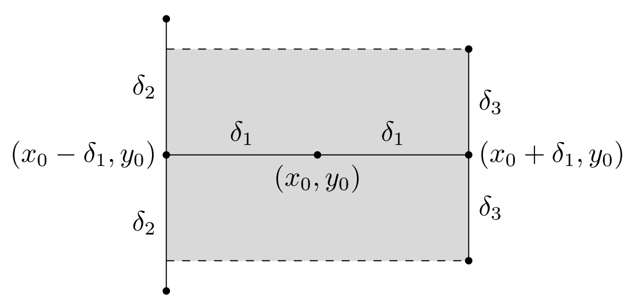

图 1: 构造 (x_0,y_0) 附近的矩形, 使得 $f(x,y)$ 的值可以被控制.