数学分析 III 课件

叶胥达

2022 年 11 月 10 日

1 知识回顾

广义重积分

广义重积分是指积分区域无界或者有瑕点的情形. 这两种情形的主要定理基本相同, 我们仅以积分区域无界的情形讨论相关问题. 关于无界的平面区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的广义积分, 有如下两个主要定理:

定理 15.5.3 无穷重积分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛的充分必要条件是 $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛.

与一元广义积分的情形不同, 平面区域上的函数的重积分收敛可以只看其绝对值部分.

定理 15.5.4 设函数 $f(x,y)$ 在 $D=[a,+\infty)\times[b,+\infty)$ 上有定义. 则以下三个命题等价:

- $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛;
- $\displaystyle\int_a^\infty \mathrm{d}x\int_b^\infty |f(x,y)|\mathrm{d}y < +\infty$;
- $\displaystyle\int_b^\infty \mathrm{d}y\int_a^\infty |f(x,y)|\mathrm{d}x < +\infty$.

此定理在判断广义积分敛散性时很有用. 若 $f(x,y)$ 的累次积分发散, 则广义积分必发散.

I 型曲线积分

设平面曲线 Γ 可由 C^1 的参数曲线 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 来表示, 则对 Γ 上的连续函数 $f(x,y)$, $f(x,y)$ 在 Γ 上的 I 型曲线积分定义为

$$\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t.$$

设空间曲线 Γ 可由 C^1 的参数曲线 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 来表示, 则对 Γ 上的连续函数 $f(x, y, z)$, $f(x, y, z)$ 在 Γ 上的 I 型曲线积分定义为

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\mathrm{d}t.$$

I 型曲线的积分含义是以**曲线长度**为微元进行积分. 特别的, $f \equiv 1$ 的积分结果是曲线 Γ 的长度.

II 型曲线积分

设平面曲线 Γ 可由 C^1 的参数曲线 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 来表示, 则对 Γ 的连续向量场 $(P(x, y), Q(x, y))$, (P, Q) 在 Γ 上的 II 型曲线积分定义为

$$\int_\Gamma P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \Big(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\Big)\mathrm{d}t.$$

设空面曲线 Γ 可由 C^1 的参数曲线 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 来表示, 则对 Γ 的连续向量场 $(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, (P, Q, R) 在 Γ 上的 II 型曲线积分定义为

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z =$$
$$\int_\alpha^\beta \Big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\Big)\mathrm{d}t.$$

II 型曲线的含义是以**曲线位移**为微元进行积分. 因此, 如果把 (P, Q) 或 (P, Q, R) 看作是力场, II 型曲线积分可以看作是力在曲线 Γ 上的做功.

Green 公式

Green 公式是链接平面曲线积分和的二重积分的重要工具.

定理 *设平面闭区域 D 是可由有限条可求长的简单闭曲线围成, ∂D 表示 D 的正向边界. 若 $P(x, y), Q(x, y), \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y} \in C(D)$, 则有*

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

1. 本定理的应用条件, 即有限条可求长的简单闭曲线, 不需要特别记忆. 在现阶段的数学分析中, 定理的实际应用比理论证明更加重要.
2. 如果直接计算闭曲线上的 II 型曲线积分过于复杂, 可以先尝试计算 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$. 如果它具有简单的表达式, 那么可以将积分转化为平面区域上的二重积分, 从而可以利用熟悉的变量代换等方式求解.
3. 曲面边界的方向必须是正向, 即积分区域是前进方向的左边.

2 补充习题

1. 判断下列广义二重积分的收敛性.

(1) $\displaystyle\iint_D e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{x,y\geqslant 0\}\subset\mathbb{R}^2$.

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{x+y\geqslant 1\}\subset\mathbb{R}^2$, $p>0$.

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^p+y^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{x,y\geqslant 0, x+y\geqslant 1\}$, $p,q>0$.

解答 (1) 发散. 否则, 有

$$\iint_D e^{-xy}|\sin x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\infty|\sin x|\mathrm{d}x\int_0^\infty e^{-xy}\mathrm{d}y=\int_0^\infty\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$$

收敛. 注意到, 当 $x\in[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$ 时, 总有 $\dfrac{|\sin x|}{x}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$, 因此

$$\int_0^\infty\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x\geqslant\sum_{k=0}^\infty\int_{2k\pi+\frac{\pi}{4}}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x\geqslant\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}=+\infty,$$

矛盾! 因此广义积分发散.

(2) 发散. 作换元 $u=(x+y)/2$, $v=(x-y)/2$, 则

$$\sin x\sin y=\sin(u+v)\sin(u-v)=\sin^2 u-\sin^2 v.$$

若广义积分收敛, 则

$$\iint_{u\geqslant 0,v\in\mathbb{R}}\frac{|\sin^2 u-\sin^2 v|}{u^p}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

收敛. 容易看出, 对任何 $u\geqslant 1$,

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{|\sin^2 u-\sin^2 v|}{u^p}\mathrm{d}v=+\infty,$$

因此广义积分发散, 矛盾!

在本题当中, $x+y\geqslant 1$ 的条件不是关键, 如何对条件 x^p+y^q 进行化简才是重点. 作换元

$$x^p=r\cos^2\theta,\quad y^q=r\sin^2\theta,\quad r\in[0,+\infty),\quad \theta\in[0,\frac{\pi}{2}],$$

则

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{1}{p}r^{\frac{1}{p}-1}\cos^{\frac{2}{p}}\theta,\quad \frac{\partial x}{\partial\theta}=-\frac{2}{p}r^{\frac{1}{p}}\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial r}=\frac{1}{q}r^{\frac{1}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}}\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial\theta}=\frac{2}{q}r^{\frac{1}{q}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos\theta.$$

于是 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta}-\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{2}{pq}r^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta.$$

因此原广义重积分收敛当且仅当

$$I=\frac{2}{pq}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta\int_1^{\infty}r^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2}\mathrm{d}r.$$

收敛. 因此, 当 $1/p+1/q<1$ 时, 积分值收敛.

2. (1) (谢惠民 例 24.1.2) 给定常数 $a>0$. 计算空间曲线 Γ:

$$\begin{cases}(x-y)^2=a(x+y),\\ x^2-y^2=\dfrac{9}{8}z^2,\end{cases}$$

在点 $(0,0,0)$ 和 (x_0,y_0,z_0) 之间的弧长, 其中 $x_0>0$.

(2) 给定常数 $a>0$, 计算空间曲线 Γ :

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ \sqrt{x^2+y^2}\cosh\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)=a\end{cases}$$

在点 $(a,0,0)$ 和 (x_0,y_0,z_0) 之间的弧长, 其中 $x_0,y_0,z_0>0$.

思路 由于参数曲线是两条曲面相交得到的, 需要先将曲线转化为合适的参数方程.

解答 (1) 将 $x+y=\dfrac{1}{a}(x-y)^2$ 代入 $(x-y)(x+y)=\dfrac{9}{8}z^2$ 中, 可以得到

$$(x-y)^3=\frac{9a}{8}z^2\Longrightarrow x-y=\frac{\sqrt[3]{9a}}{2}z^{\frac{2}{3}},\quad x+y=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{\frac{4}{3}}.$$

因此将 z 视为参数, 可以得到曲线上 x,y 的表达式

$$x(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{\frac{4}{3}}+\frac{\sqrt[3]{9a}}{2}z^{\frac{2}{3}}\right),\qquad y(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{\frac{4}{3}}-\frac{\sqrt[3]{9a}}{2}z^{\frac{2}{3}}\right).$$

特别的, $x(z)$ 关于 z 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调递增. 注意到

$$x'(z)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{\frac{a}{3}}z^{-\frac{1}{3}}\right),\qquad y'(z)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{\frac{a}{3}}z^{-\frac{1}{3}}\right),$$

故弧长微元可表示为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'(z)^2+y'(z)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{\frac{a}{3}}z^{-\frac{1}{3}}\right)=\sqrt{2}x'(z)\mathrm{d}z.$$

由于 $x(z)$ 关于 z 严格递增, 故 $\mathrm{d}s=\sqrt{2}\mathrm{d}x$. 从而弧长为 $\boxed{\sqrt{2}x_0}$

(2) 作球坐标换元 $x=a\sin\varphi\cos\theta$, $y=a\sin\varphi\sin\theta$, $z=a\cos\varphi$, 其中 $\theta,\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$. 于是

$$\sqrt{x^2+y^2}=a\sin\varphi,\ \ \arctan\frac{y}{x}=\theta\Longrightarrow\sin\varphi\cosh\theta=1.$$

从 $\sin\varphi\cosh\theta=1$ 可以得到

$$\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}=\frac{1}{\sin\varphi}\Longrightarrow\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2\varphi}-1}=\frac{1}{\tan\varphi}\Longrightarrow e^\theta=\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{1}{\tan\frac{\varphi}{2}}.$$

因此空间曲线可写为关于 φ 的参数方程:

$$\theta=-\ln\tan\frac{\varphi}{2},\qquad\varphi\in\left[\varphi_0,\frac{\pi}{2}\right],\Longrightarrow\theta'(\varphi)=-\frac{1}{\sin\varphi},$$

其中 $\varphi_0=\arccos(z_0/a)$. 将 x,y,z 视为关于 φ 的参数曲线, 可得

$$\begin{aligned}
x'(\varphi)&=a\cos\varphi\cos\theta-a\sin\varphi\sin\theta\cdot\theta'(\varphi)=a\cos\varphi\cos\theta+a\sin\theta,\\
y'(\varphi)&=a\cos\varphi\sin\theta+a\sin\varphi\cos\theta\cdot\theta'(\varphi)=a\cos\varphi\sin\theta-a\cos\theta,\\
z'(\varphi)&=-a\sin\varphi,
\end{aligned}$$

因此

$$\sqrt{x'(\varphi)^2+y'(\varphi)^2+z'(\varphi)^2}=\sqrt{2}a\Longrightarrow\mathrm{d}s=\sqrt{2}a\mathrm{d}\varphi.$$

故曲线的长度为

$$\sqrt{2}a\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)=\boxed{\sqrt{2}a\arcsin\frac{z_0}{a}}$$

3. 设 $D=\{x^2+y^2\leqslant 1\}$ 为单位圆盘. 若 $f(x,y)$ 在 D 上有连续偏导数, 且 $f|_{\partial D}=0$, 证明:

(1) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(2) $\displaystyle\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{\pi}{3}\max_{(x,y)\in D}\left|\nabla f(x,y)\right|.$

证明 (1) 注意当 $P(x,y)$ 满足 $P|_{\partial D}=0$ 时, 由 Green 公式有

$$\iint_D\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

取 $P(x,y)=xf(x,y)$, 有 $\dfrac{\partial P}{\partial x}=f(x,y)+x\dfrac{\partial x}{\partial y}(x,y)$, 从而有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

第二个等号可以用类似方法得到.

(2) 利用

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\iint_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由 Cauchy 不等式可以得到

$$\begin{aligned}\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| &\leqslant \frac{1}{2}\iint_D \left|x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{1}{2}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot|\nabla f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \max_{(x,y)\in D}|\nabla f(x,y)| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\max_{(x,y)\in D}|\nabla f(x,y)| = \frac{\pi}{3}\max_{(x,y)\in D}|\nabla f(x,y)|.\end{aligned}$$