

# 数学分析 III 课件

叶胥达

2022 年 11 月 10 日

## 1 知识回顾

### $\mathbb{R}^n$ 中集合的体积

对任何有界集合  $E \subset \mathbb{R}^n$ , 可定义其大体积和小体积为

$$M(E) = \inf M(\mathcal{A}_E), \quad m(E) = \sup m(\mathcal{A}_E),$$

其中  $M(\mathcal{A}_E)$  和  $m(\mathcal{A}_E)$  表示, 在闭长方体族  $\mathcal{A}_E$  中, 与  $E$  的交非空以及完全包含于  $E$  的长方体的体积之和. 我们可以使用下面的方式来判断集合  $E$  是否可求体积:

- $E$  可求体积  $\iff M(E) = m(E) \iff \inf (M(\mathcal{A}_E) - m(\mathcal{A}_E)) = 0 \iff V(\partial E) = 0$ .

因此, 可以通过计算  $E$  的边界  $\partial E$  或者估计  $M(\mathcal{A}_E) - m(\mathcal{A}_E)$  来判断  $E$  是否可求体积. 注意,  $M(E) = m(E) \implies \inf (M(\mathcal{A}_E) - m(\mathcal{A}_E)) = 0$  的证明需要用到公共加细的一个技巧.

根据  $M(E)$  的定义, 存在包含整个  $E$  的长方体族  $\mathcal{A}^{(1)}$  使得  $V(\mathcal{A}^{(1)}) < M(E) + \varepsilon$ . 类似的, 根据  $m(E)$  的定义, 存在完全包含于  $E$  的长方体族  $\mathcal{A}^{(2)}$  使得  $V(\mathcal{A}^{(2)}) > m(E) - \varepsilon$ . 将  $\mathcal{A}^{(2)}$  中的每个长方体的每个面 (这是一个  $n-1$  维的超平面) 对  $\mathcal{A}^{(1)}$  中的长方体进行切割, 可以得到一个长方体族  $\mathcal{A}_E$ , 它是  $\mathcal{A}^{(1)}$  和  $\mathcal{A}^{(2)}$  的加细, 并且

$$V(\mathcal{A}^{(2)}) \leq m(\mathcal{A}_E) \leq M(\mathcal{A}_E) \leq V(\mathcal{A}^{(1)}) \implies M(\mathcal{A}_E) - m(\mathcal{A}_E) < 2\varepsilon.$$

由于  $\varepsilon$  可以任意小, 我们得到  $\inf (M(\mathcal{A}_E) - m(\mathcal{A}_E)) = 0$ .

- $V(E) = 0 \iff \inf M(\mathcal{A}_E) = 0$ .

这就是说,  $E$  是零体积集当且仅当对任何  $\varepsilon > 0$ , 存在一个闭长方体族  $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k=1}^K$  使得

$$E \subset \bigcup_{k=1}^K A_k, \quad V(\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^K V(A_k) < \varepsilon.$$

• 由于  $E$  可求体积当且仅当  $V(\partial E) = 0$ , 可以得到如下推论:

1. 设  $A, B$  是  $\mathbb{R}^n$  中可求体积的有界集合, 则  $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$  均可求体积.

这是因为  $\partial(A \cup B), \partial(A \cap B), \partial(A \setminus B) \subset \partial A \cup \partial B$ .

2. 设  $D$  是  $\mathbb{R}^n$  中的有界区域, 则  $D$  可求体积  $\iff \bar{D}$  可求体积.

注意, 区域是指道路连通的开集, 而闭区域是指区域的闭包.

**例 1** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  是可求体积的有界闭区域, 函数  $y = h(x)$  在  $\Omega$  上连续, 且  $h(x) \geq 0$ . 证明集合  $D = \{(x, y) : x \in \Omega, 0 \leq y \leq h(x)\}$  在  $\mathbb{R}^{n+1}$  中可求体积.

在上述问题中,  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^n$  中的集合, 而  $D$  是  $\mathbb{R}^{n+1}$  中的集合, 因此直接证明  $D$  边界 (包括上下底和侧面) 的体积为 0 可能并不容易. 因此我们直接来估计  $M(D) - m(D)$ .

**证明** 由于  $h(x)$  在  $\Omega$  上一致连续, 故可设  $0 \leq h(x) \leq H$ , 且对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得

$$|x - y| \leq \delta \implies |h(x) - h(y)| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

由于  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  可求体积, 故存在长方体族  $\mathcal{A}_\Omega$  使得  $M(\mathcal{A}_\Omega) - m(\mathcal{A}_\Omega) < \varepsilon$ . 不妨设  $\mathcal{A}_\Omega$  中的每一个长方体的直径都不超过  $\delta$ , 否则将  $\mathcal{A}_\Omega$  替换为  $\mathcal{A}_\Omega$  的细分即可. 设长方体族  $\mathcal{A}_\Omega$  由

$$\mathcal{A}_\Omega = \{A_k\}_{k=1}^L, \quad A_k \text{ 为 } \mathbb{R}^n \text{ 中的闭长方体且与 } E \text{ 交集非空}$$

给出, 并且  $\{A_k\}_{k=1}^K$  是完全包含于  $E$  的那些闭长方体. 进一步, 对  $1 \leq k \leq L$ , 定义

$$m_k = \inf_{x \in A_k \cap E} h(x), \quad M_k = \sup_{x \in A_k \cap E} h(x).$$

由于  $h(x)$  的一致连续性 (1), 有  $M_k - m_k \leq \varepsilon$ . 注意到,  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  满足

$$\bigcup_{k=1}^K (A_k \times [0, m_k]) \subset D \subset \bigcup_{k=1}^L (A_k \times [0, M_k]),$$

因此  $M(D) - m(D)$  不超过这两个长方体族的体积之差, 即

$$\begin{aligned} M(D) - m(D) &\leq \sum_{k=1}^L V(A_k) M_k - \sum_{k=1}^K V(A_k) m_k \\ &= \sum_{k=1}^K V(A_k) (M_k - m_k) + \sum_{k=K+1}^L V(A_k) M_k \\ &\leq \sum_{k=1}^K V(A_k) \varepsilon + \sum_{k=K+1}^L V(A_k) H \\ &\leq V(\Omega) \varepsilon + (M(\mathcal{A}_\Omega) - m(\mathcal{A}_\Omega)) H \\ &\leq V(\Omega) \varepsilon + H \varepsilon. \end{aligned}$$

注意,  $V(\Omega)$  和  $H$  均为有限值, 而  $\varepsilon$  可以充分小, 因此  $M(D) = m(D)$ , 即  $D$  可求体积.  $\square$

## 重积分的定义

我们可以用  $\varepsilon - \delta$  语言来描述  $f(\mathbf{x})$  在  $D$  上的 Riemann 积分:

**定义 1** 设  $f(\mathbf{x})$  在可求体积的有界闭区域  $D$  上有定义. 若对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对一切满足  $\lambda(\Delta) \leq \delta$  的分割  $\Delta = \{\Delta D_k\}_{k=1}^K$ , 都有

$$\left| \sum_{k=1}^K f(\xi_k) \Delta V_k - I \right| < \varepsilon, \quad \forall \xi_i \in \Delta D_i,$$

则称  $f(\mathbf{x})$  在  $D$  上可积, 且称  $I$  为  $f(\mathbf{x})$  在  $D$  上的  $n$  重积分, 记为

$$I = \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

在上面的定义中,  $f(\mathbf{x})$  是被积函数, 而  $d\mathbf{x}$  为  $\mathbb{R}^n$  上的体积微元, 也可以写为  $d\mathbf{x} = dx_1 \cdots dx_n$ . 如果需要特别强调积分区域为 2 维或 3 维区域, 可以写为

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad I = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz.$$

下面的结果可以方便地判定  $f(\mathbf{x})$  是否在  $D$  上可积:

**定理 1** 设函数  $f(\mathbf{x})$  在可求体积的有界闭区域  $D \subset \mathbb{R}^n$  上有界, 则  $f(\mathbf{x})$  在  $D$  上可积的充分必要条件是: 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $D$  的分割  $\Delta D = \{\Delta D_k\}_{k=1}^K$ , 使得

$$\omega(\Delta) := \sum_{k=1}^K (M_k - m_k) \Delta V_k < \varepsilon,$$

其中  $M_k = \sup_{\mathbf{x} \in D_k} f(\mathbf{x})$ ,  $m_k = \inf_{\mathbf{x} \in D_k} f(\mathbf{x})$ .

注意, 上述定理和多重积分的定义的区别在于, 定理只要求存在一个分割  $\Delta$  使得  $\omega(\Delta) < \varepsilon$ , 而多重积分的定义要求对一切满足  $\lambda(\Delta) < \delta$  的分割  $\Delta$  成立. 这与一元情形的定积分是一致的.

**例 2** 设函数  $f(\mathbf{x})$  在可求体积的有界闭区域  $D$  上有界, 并且在除去  $D$  的一个零体积集上连续, 则  $f(\mathbf{x})$  在  $D$  上可积.

**证明** 设  $|f(x)| \leq M$  对某  $M > 0$  恒成立. 设此零体积集为  $F$ , 则存在闭长方体的并  $E_0$  使得  $F \subset E_0$ , 且  $V(E_0) < \frac{\varepsilon}{8M}$ . 将  $E_0$  中的每个闭长方体都扩展为一个体积稍大的开长方体, 可以得到开集  $E \subset \mathbb{R}^n$  使得

$$F \subset E, \quad V(\bar{E}) < \frac{\varepsilon}{4M}. \quad (1)$$

注意到  $D \setminus E$  为有界闭集, 从而  $f(\mathbf{x})$  在  $D \setminus E$  上一致连续, 存在  $\delta > 0$  使得

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \setminus E, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \frac{\varepsilon}{2V(D)}. \quad (2)$$

将  $D \setminus E$  划分为若干个直径不超过  $\delta$  的闭区域之并, 可以得到分割  $\Delta_1 = \{\Delta D_k\}_{k=1}^K$ , 由 (2) 有

$$\omega(\Delta_1) = \sum_{k=1}^K \omega_k \Delta V_k \leq \frac{\varepsilon}{2V(D)} \sum_{k=1}^K \Delta V_k \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

在分割  $\Delta_1$  中加上  $\bar{E} \cap D$  可以得到一个新的分割  $\Delta_2$ , 它是  $D$  的一个分割, 由 (1) 有

$$\omega(\Delta_2) \leq \sum_{k=1}^K \omega_k \Delta V_k + 2M \cdot V(\bar{E} \cap D) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon.$$

因此  $f(\mathbf{x})$  在  $D$  上是可积的. □

一些计算多重积分的技巧:

- 观察函数的奇偶性. 利用函数的对称性可以大幅简化被积函数或积分区域.
- 使用恰当的变量替换来简化被积函数或积分区域.
- 当积分区域十分复杂时, 对区域进行合适的划分, 使得每个小区域中的积分相对容易计算.

## 2 课本习题

2. 我们来证明  $m(D \cap E) = 0$  而  $M(D \cap E) = 1$ .

一方面, 不可能有任何闭长方体完全包含于  $D \cap E$ , 因此  $m(D \cap E) = 0$ . 另一方面, 如果有一些闭长方体的并  $A$  使得  $D \cap E \subset A$ , 则由于  $A$  是闭集,  $D \cap E$  的闭包也完全含于  $A$ , 即  $[0, 1]^2 \subset A$ . 因此  $M(D \cap E) = 1$ .

5. 不妨设  $\iint_D g(x, y) dx dy > 0$ , 并定义

$$D_1 = \{(x, y) \in D : g(x, y) > 0\}.$$

由  $g(x, y)$  在  $D$  上连续,  $D_1$  为非空开集, 且  $\bar{D}_1$  是  $g(x, y)$  的支撑集. 由  $f(x, y)$  在  $\bar{D}_1$  上连续, 令

$$M = \max_{(x, y) \in \bar{D}_1} f(x, y), \quad m = \min_{(x, y) \in \bar{D}_1} f(x, y).$$

由于  $m \leq f(x, y) \leq M$  对  $(x, y) \in \bar{D}_1$  恒成立, 有

$$mg(x, y) \leq f(x, y)g(x, y) \leq Mg(x, y), \quad \forall (x, y) \in D.$$

两端对  $(x, y) \in D$  积分后可得

$$m \leq Q := \frac{\iint_D f(x, y)g(x, y)dx dy}{\iint_D g(x, y)dx dy} \leq M.$$

下面进行分类讨论:

- 若  $Q = m$ , 则有  $(f(x, y) - m)g(x, y) \geq 0$ , 且

$$\iint_D (f(x, y) - m)g(x, y) = 0.$$

由于  $g(x, y)$  在  $D_1$  上恒正, 因此当  $(x, y) \in D_1$  时总有  $f(x, y) = m$ . 显然  $D_1$  有无穷元素.

- 若  $Q = M$ , 可以使用与上面类似的方法论证.
- 若  $m < Q < M$ , 设  $f(x_1, y_1) = M$ ,  $f(x_2, y_2) = m$ , 其中  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ . 由  $f(x, y)$  的连续性, 在  $(x_1, y_1)$  的邻域内存在  $(x'_1, y'_1) \in D^\circ$ , 在  $(x_2, y_2)$  的邻域内存在  $(x'_2, y'_2) \in D^\circ$ ,

$$f(x'_1, y'_1) > Q, \quad f(x'_2, y'_2) < Q.$$

由于  $D^\circ$  是道路连通的开集, 故在  $D^\circ$  中存在无穷多条连接  $(x'_1, y'_1)$  和  $(x'_2, y'_2)$  的连续曲线; 在其中任何一条连续曲线上, 根据连续函数的介值定理, 都存在  $(\xi, \eta)$  使得  $f(\xi, \eta) = Q$ .

注: 集合

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1), \sin \frac{1}{x} - x < y < \sin \frac{1}{x} + x \right\}$$

是道路连通的开集, 但  $\bar{D}$  不是道路连通的.

### 3 补充习题

1. 记  $D = [0, 1]^2$  为  $\mathbb{R}^2$  中的单位正方形. 若函数  $u(x, y) \in C^3(\mathbb{R}^2)$  在  $(x, y) \notin D$  取值为 0, 证明:

$$\iint_D |u''_{xy}|^2 dx dy = \iint_D u''_{xx} u''_{yy} dx dy.$$

**思路** 本题考察化重积分为累次积分. 一般的, 可以证明函数  $u(x_1, \dots, x_n) \in H_0^2(D)$  满足

$$\int_D \sum_{i,j=1}^n |u''_{x_i x_j}|^2 d\mathbf{x} = \int_D |\Delta u|^2 d\mathbf{x}.$$

**证明** 化重积分为累次积分, 并由分部积分公式, 可以得到

$$\begin{aligned}
 \iint_D |u_{xy}|^2 dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^1 u_{xy} u_{xy} dy \\
 &= \int_0^1 dx \left( u_{xy} u_x \Big|_0^1 - \int_0^1 u_{xyy} u_x dy \right) \\
 &= - \iint_D u_{xyy} u_x dx dy \\
 &= - \int_0^1 dy \int_0^1 u_{xyy} u_x dx \\
 &= - \int_0^1 dy \left( u_{yy} u_x \Big|_0^1 - \int_0^1 u_{xxy} u_{yy} dx \right) \\
 &= \iint_D u_{xx} u_{yy} dx dy.
 \end{aligned}$$

故命题得证.

**2.** (谢惠民例 22.3.3) (1) 设常数  $a > b > 0$ ,  $R > 0$ . 计算二重积分

$$I = \iint_{\substack{x, y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq R^2}} \frac{xy}{\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}} dx dy.$$

(2) 设常数  $a > b > c > 0$ ,  $R > 0$ . 计算三重积分

$$I = \iiint_{\substack{x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2}} \frac{xyz}{\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2}} dx dy dz.$$

**思路** 本题考察二重积分和三重积分的变量替换.

证明 (1) 作换元  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , 则  $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . 由于  $dx dy = r dr d\theta$ , 有

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^R r dr \int_0^{\pi/2} \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{a^2 r^2 \cos^2 \theta + b^2 r^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\
 &= \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2 \theta}} d\theta \\
 &= \frac{R^3}{6} \int_0^{\pi/2} \frac{d(\sin^2 \theta)}{\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2 \theta}} \quad (t = \sin^2 \theta) \\
 &= \frac{R^3}{6} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)t}} \\
 &= \frac{R^3}{3} \frac{\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)t^2}}{b^2 - a^2} \Big|_{t=0}^{t=1} \\
 &= \frac{R^3}{3(a+b)}.
 \end{aligned}$$

因此原积分的值为  $I = \frac{R^3}{3(a+b)}$ .

(2) 作换元  $x = r \sin \varphi \cos \theta$ ,  $y = r \sin \varphi \sin \theta$ ,  $z = r \cos \varphi$ , 则  $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq \theta, \varphi \leq \pi/2$ . 由于

$$dx dy dz = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi,$$

我们有

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{r^3 \sin \varphi^2 \cos \varphi \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{a^2 r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + b^2 r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + c^2 r^2 \cos^2 \varphi}} d\theta \\
 &= \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \varphi}} d\theta \\
 &= \frac{R^5}{5} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \varphi}} d\theta
 \end{aligned}$$

作换元  $u = \sin^2 \varphi$ ,  $v = \sin^2 \theta$ , 可以得到

$$\begin{aligned}
I &= \frac{R^5}{20} \int_0^1 u du \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{a^2 u(1-v) + b^2 uv + c^2(1-u)}} \\
&= \frac{R^5}{20} \int_0^1 u du \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{[c^2 + (a^2 - c^2)u] + (b^2 - a^2)uv}} \\
&= \frac{R^5}{10} \int_0^1 u du \left. \frac{\sqrt{c^2 + (a^2 - c^2)u] + (b^2 - a^2)uv}}{(b^2 - a^2)u} \right|_{v=0}^{v=1} \\
&= \frac{R^5}{10(b^2 - a^2)} \int_0^1 \left( \sqrt{c^2 + (b^2 - c^2)u} - \sqrt{c^2 + (a^2 - c^2)u} \right) du \\
&= \frac{R^5}{10(b^2 - a^2)} \left[ \frac{2}{3(b^2 - c^2)} (c^2 + (b^2 - c^2)u)^{\frac{3}{2}} \Big|_{u=0}^{u=1} - \frac{2}{3(a^2 - c^2)} (c^2 + (a^2 - c^2)u)^{\frac{3}{2}} \Big|_{u=0}^{u=1} \right] \\
&= \frac{R^5}{15(b^2 - a^2)} \left[ \frac{b^3 - c^2}{b^2 - c^2} - \frac{a^3 - c^3}{a^2 - c^2} \right] \\
&= \frac{R^5}{15} \cdot \frac{ab + bc + ca}{(a+b)(b+c)(c+a)}.
\end{aligned}$$

因此原积分的值为  $I = \frac{R^5}{15} \cdot \frac{ab + bc + ca}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ .

**3.** (周民强例 6.2.20) 计算由下列曲面围成的立体的体积.

- (1)  $(x^2 + y^2 + z^2)^n = x^{2n-1}$ , 其中  $n$  为正整数.
- (2)  $\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i x_j = 1$ , 其中  $A = (a_{ij})$  为 3 阶正定对称矩阵.

**证明** (1) 作换元  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi \cos \theta$ ,  $z = r \sin \varphi \sin \theta$ , 则曲线的方程成为

$$r^{2n} = r^{2n-1} \cos^{2n-1} \varphi \implies r = \cos^{2n-1} \varphi.$$

注意到,  $r \geq 0$  隐含着条件  $\cos^{2n-1} \varphi \geq 0$ , 因此围成的立体的内部可以由  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ,  $0 \leq r \leq \cos^{2n-1} \varphi$  来表示. 此时  $dx dy dz = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$ , 因此立体的体积为

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos^{2n-1} \varphi} r^2 \sin \varphi dr \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{3(2n-1)} \varphi}{3} \sin \varphi d\varphi \\
&= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^{3(2n-1)} \varphi d(\cos \varphi) \\
&= \frac{2\pi}{3} \int_0^1 t^{3(2n-1)} dt \\
&= \frac{\pi}{3(3n-1)}.
\end{aligned}$$



(2) 设3阶正交阵  $P$  使得  $P^T A P = \Lambda$ , 其中  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  为  $A$  的特征值. 作换元  $y = P^T x$ , 则  $x^T A x = y^T \Lambda y$ , 故

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i x_j \leq 1$$

的体积等于

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i y_i^2 \leq 1$$

的体积. 这是一个半径分别为  $1/\sqrt{\lambda_1}, 1/\sqrt{\lambda_2}, 1/\sqrt{\lambda_3}$  的椭圆, 因此其体积为

$$\frac{4}{3} \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}} = \frac{4}{3} \frac{\pi}{\sqrt{\det A}}.$$