数学分析 III 课件

叶胥达

2022 年 10 月 13 日

1　知识回顾

高阶偏导数

高阶偏导数描述函数在局部的高阶可导性. 对于二元函数 $f(x,y)$, 假设其混合偏导数 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内存在. 只要 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$ 之一在 (x_0,y_0) 处连续, 就可以得到 $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$. (谢惠民 命题 19.1.2)

命题 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内存在混合偏导数 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$. 若 $f''_{xy}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续, 则 $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

证明 不妨设 $(x_0,y_0)=(0,0)$. 则由一元微分中值定理, 存在 $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$ 使得

$$f(x,y)-f(x,0)-f(0,y)+f(0,0)=f''_{xy}(\theta_1 x,\theta_2 y)xy.$$

由于 $f''_{xy}(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x,y\in[-\delta,\delta]$ 且 $x,y\neq 0$ 时,

$$\left|\frac{1}{x}\left(\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}-\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}\right)-f''_{xy}(0,0)\right|\leqslant\varepsilon.$$

令 $y\to 0$, 则得到对任意 $x\in[-\delta,\delta]$ 且 $x\neq 0$,

$$\left|\frac{1}{x}\Big(f'_y(x,0)-f'_y(0,0)\Big)-f''_{xy}(0,0)\right|\leqslant\varepsilon.$$

根据导数的定义可知在 $f''_{yx}(0,0)=f''_{xy}(0,0)$. $\square$

高阶可微性

高阶可微性用于定性描述函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近的光滑性. $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处 k 阶可微, 是指 $f(x,y)$ 的直到 $k-1$ 阶偏导数都在 (x_0,y_0) 处可微. $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内 k 阶连续可微, 是指 $f(x,y)$ 的直到 k 阶偏导数都在 (x_0,y_0) 的邻域内光滑.

多元 Taylor 展开

Taylor 展开提供了逼近多元函数的手段, 本质上还是一元的 Taylor 展开. 若 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 的邻域内具有 $k+1$ 阶连续偏导数, 则存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$f(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}^0) + \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\boldsymbol{x}^0) + \frac{1}{(K+1)!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{K+1} f(\boldsymbol{x}^0+\theta\boldsymbol{h})$$

与一维的情形相同, Taylor 展开在局部存在不意味着 Taylor 级数收敛, 即不能得到

$$f(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}^0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\boldsymbol{x}^0).$$

注意到, 对于满足 $k = k_1 + \cdots + k_n$ 的非负整数 $k_1, \cdots, k_n$, 上述表达式当中的偏导数

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}(\boldsymbol{x}^0)$$

的系数为

$$\frac{1}{k!}\binom{k}{k_1 \cdots k_n} = \frac{1}{k_1! \cdots k_n!}.$$

因此, 我们也可以把 Taylor 展开写为

$$\boxed{f(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{h}) = \sum_{\substack{k_1,\cdots,k_n \geqslant 0 \\ k_1+\cdots+k_n \leqslant K}} \frac{1}{k_1! \cdots k_n!} \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}(\boldsymbol{x}^0) h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n} + o(|\boldsymbol{h}|^K).}$$

上面的表达式有时候比微分算子形式的 Taylor 展开更加好用.

隐函数定理

隐函数定理最简单的情形是 x, y 均为实数.

定理 1 设函数 $F(x,y): \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 $(0,0)$ 的邻域 $U(\delta)\times U(\delta)$ 内连续可微, 使得 $F(0,0)=0$ 且 $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) \neq 0$, 则存在 $\delta_0 \in (0,\delta)$ 和函数 $f: U(\delta_0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得 $F(x, f(x)) = 0$, 且

$$f'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \forall x \in U(\delta_0).$$

注意到, $f(x)$ 与 $F(x,y)$ 有相同阶的光滑性, 即如果 $F(x,y)$ 有 k 阶的连续偏导数, 则 $f(x)$ 有 k 阶连续导数. 类似的结论对高维的 x, y 也成立.

定理 2 设函数 $F(x,y):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 在 $(0,0)$ 的邻域 $U(\delta)\times U(\delta)$ 内连续可微, 使得 $F(0,0)=0$ 且 $\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\neq 0$, 则存在 $\delta_0\in(0,\delta)$ 和函数 $f:U(\delta_0)\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 使得 $F(x,f(x))=0$,

$$f'(x)=-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}.$$

我们也可以用下面的方式来直观的理解为什么 $\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\neq 0$ 可以保证函数 $y=f(x)$ 的唯一性. 由于 F 连续可微, 可以假设 $\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\neq 0$ 在 $(0,0)$ 的某个邻域上均不为 0. 此时若 $y=f(x)$ 不唯一, 则存在 $x\in U(\delta)\subset\mathbb{R}^n$ 及 $y_1,y_2\in U(\delta)$ 使得

$$F(x,y_1)=F(x,y_2)=0.$$

根据微分中值定理, 存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$(y_2-y_1)\cdot\nabla_y F\big(x,y_1+\theta(y_2-y_1)\big)=0.$$

因此, $\nabla_y F\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的行是线性相关的, 因此其行列式 $\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}=0$, 矛盾!

利用隐函数定理还可以得到逆映射定理和 Lagrange 乘数法.

2 习题解答

30. (2) 容易看出, $\ln x$ 的 m 阶导数形如

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\ln x=(-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{x^m},$$

因此可以猜测 $\ln(\sum_i a_ix_i)$ 的阶偏导数 $(m=m_1+\cdots+m_n)$ 形如

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}}=(-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{(\sum_i a_ix_i)^m}a_1^{m_1}\cdots a_n^{m_n}. \tag{1}$$

(1) 可以通过对 m 归纳来得到. 当 $m=1$ 时, 结果显然成立.

假设 (1) 对某个 m 成立, 考虑 $m+1$ 的情形, 即存在 $m_1,\cdots,m_n$ 使得 $m_1+\cdots+m_n=m+1$. 不妨设 $m_i>0$, 则由

$$m_1+\cdots+m_{i-1}+(m_i-1)+m_{i+1}+\cdots+m_n=m$$

可得

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_i^{m_i-1}\cdots\partial x_n^{m_n}}=(-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{(\sum_i a_ix_i)^m}a_1^{m_1}\cdots a_i^{m_i-1}\cdots a_n^{m_n}. \tag{2}$$

在 (2) 的两端对 x_i 求导即可得到

$$\frac{\partial^{m+1}f}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_i^{m_i}\cdots\partial x_n^{m_n}}=(-1)^m\frac{m!}{(\sum_i a_ix_i)^{m+1}}a_1^{m_1}\cdots a_i^{m_i}\cdots a_n^{m_n}.$$

因此 (1) 对 $m+1$ 的情形成立.

35. 注意, 从 (x,y) 坐标下的 Laplace 方程到 (r,θ) 坐标下的 Laplace 方程有一定的信息损失, 因为后者要求 $r\neq 0$. 例如, $u(r,\theta)=\log r$ 满足 (r,θ) 意义下的 Laplace 方程, 但是在 (x,y) 坐标的意义下它有奇异点 $(0,0)$. 再例如, $u(r,\theta)=\theta$ 也满足 (r,θ) 意义下的 Laplace 方程, 但它关于 θ 不是以 2π 为周期的.

由于 (r,θ) 可以唯一确定一组 (x,y) 坐标, 因此在全局意义下有

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\qquad \frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta,\qquad \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta,\qquad \frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta.$$

换句话说, 变换 $(r,\theta)\mapsto(x,y)$ 的 Jacobi 矩阵为

$$J_{(r,\theta)}(x,y)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}.$$

但是反过来的情形不太一样. 即便 $(x,y)\neq(0,0)$, 从同一组 (x,y) 出发也会有多组 (r,θ) 与之对应. 但是, 从局部的角度看, (x,y) 和 (r,θ) 之间存在一一对应. 因此此时变换 $(x,y)\mapsto(r,\theta)$ 的 Jacobi 矩阵是 $J_{(r,\theta)}(x,y)$ 的逆矩阵, 即

$$J_{(x,y)}(r,\theta)=\frac{1}{r}\begin{bmatrix}r\cos\theta & -\sin\theta\\ r\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

但无论如何, 从 (x,y) 映射到 (r,θ) 丢失了 (x,y) 坐标中的全局信息. 这也就是为什么在 (r,θ) 下, 需要人为地添加关于 θ 的周期边界条件.

42. 将函数 $f(x,y)=e^{xy}$ 以 xy 为变元作 Taylor 展开可得

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^ky^k.$$

另一方面, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的 K 阶 Taylor 展开公式为

$$f(x,y)=\sum_{k+l\leqslant K}\frac{1}{k!l!}\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l}(0,0)x^ky^l+o((|x|+|y|)^K). \tag{2}$$

比较 (1)(2) 中 x^ky^l 的系数有

$$\frac{1}{k!l!}\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l}(0,0)=\frac{1}{k!}\delta_{k,l}.$$

因此

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(0,0) = \begin{cases} k!, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

52. 由条件存在一一映射 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 使得 f 和 f^{-1} 都连续可微. 任取点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 令 $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}^m$. 令 $J_1 = \nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的 Jacobi 矩阵, $J_2 = (\nabla f^{-1})(y_0) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 在 y_0 处的 Jacobi 矩阵. 在等式

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x$$

两端对 x 求梯度可得

$$(\nabla f^{-1})\big(f(x)\big)\nabla f(x) = I_n,$$

其中 $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为 n 阶单位方阵. 令 $x = x_0$, 则可以得到

$$J_2 J_1 = I_n.$$

但 $n = \operatorname{rank} I_n = \operatorname{rank} J_2 J_1 \leqslant \operatorname{rank} J_1 \leqslant m$, 矛盾! (注: 也没有 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的 C^0 同胚)

3 补充习题

1. (周民强 2.2.16) 设 $f(x,y)$ 在原点的邻域 $U_0(\delta)$ 内存在一阶偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$. 若 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 均在 $(0,0)$ 处可微, 证明 $f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0)$.

思路 关于不同的变元的偏导数何时可交换是一个基本的问题. 本题说明了在较弱的条件下也可以保证偏导数可交换. 主要的步骤是对 $f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0)$ 进行估计.

解答 记 $S(x,y) = f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0)$. 由微分中值定理, 存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$S(x,y) = x\big[f'_x(\theta x, y) - f'_y(\theta x, 0)\big]. \tag{1}$$

由于 $f'_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 故

$$f'_x(x,y) = f''_{xx}(0,0)x + f''_{xy}(0,0)y + o(\rho),$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. 特别的, 我们有

$$\begin{aligned} f'_x(\theta x, y) &= f''_{xx}(0,0)\theta x + f''_{xy}(0,0)y + o(\rho), \\ f'_x(0,y) &= f''_{xx}(0,0)\theta x + o(\rho). \end{aligned}$$

故

$$f'_x(\theta x, y) - f'_x(0,y) = f''_{xy}(0,0)y + o(\rho).$$

将其代入 (1) 中可以得到

$$S(x,y) = f''_{xy}(0,0)xy + o(\rho^2). \tag{2}$$

同理有

$$S(x,y) = f''_{yx}(0,0)xy + o(\rho^2). \tag{3}$$

由 (2)(3) 可以得到

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{\left[f''_{xy}(0,0) - f''_{yx}(0,0)\right]xy}{x^2+y^2} = 0.$$

特别的, 在直线 $x = y$ 上可以得到 $f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0)$.

注意, 从 (2) 出发不能得到 $\lim\limits_{x,y\to 0} \dfrac{S(x,y)}{xy} = f''_{xy}(0,0)$.

2. (周民强 2.2.8) (1) 设 $u(x,y)$ 有连续二阶偏导数, 且满足 $\Delta u = 0$. 证明:

$$v(x,y) = u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

满足 $\Delta v = 0$.

(2) 设 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 三阶连续可微, 且满足 $\Delta u = 0$, 则

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

满足 $\Delta v = 0$.

(3) 设 $u(x_1, \cdots, x_n)$ 三阶连续可微, 且满足 $\Delta u = 0$, 则

$$v(x_1, \cdots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) u(x_1, \cdots, x_n)$$

满足 $\Delta(\Delta v) = 0$.

思路 这些题目主要考察高阶偏导数的计算. 如何用最简单的方式表示出偏导数是解题的关键.

解答 (1) 如果不使用复变函数的技巧的话, 本题并无简便方法, 仅仅要求仔细计算 $v(x,y)$ 的各阶偏导数. 设函数 u 关于其两个分量的偏导数分别为 $\partial_1 u$ 和 $\partial_2 u$, 则由

$$\partial_x v = \partial_1 u \, \partial_x \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \partial_2 u \, \partial_x \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

可以得到

$$\begin{aligned}\partial_{xx} v = {} & \partial_{11} u \left[\partial_x \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right]^2 + 2\partial_{12} u \, \partial_x \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \partial_x \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) + \partial_{22} u \left[\partial_x \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]^2 \\ & + \partial_1 u \, \partial_{xx} \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \partial_2 u \, \partial_{xx} \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right).\end{aligned}$$

类似地有

$$\partial_{yy}v=\partial_{11}u\left[\partial_y\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right]^2+2\partial_{12}u\,\partial_y\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\partial_y\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)+\partial_{22}u\left[\partial_y\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]^2$$
$$+\partial_1u\,\partial_{yy}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\partial_2u\,\partial_{yy}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

注意到, 由于

$$\left[\partial_x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right]^2=\left[\partial_y\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]^2,\quad \left[\partial_x\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]^2=\left[\partial_y\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right]^2,$$

并且 $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 和 $\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 在除 $(0,0)$ 外的区域上均为调和函数, 因此可得

$$\partial_{xx}v+\partial_{yy}v=2\partial_{12}u\left[\partial_x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\partial_x\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)+\partial_y\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\partial_y\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right].$$

最后, 由于

$$\partial_x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\partial_x\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{-2xy}{x^2+y^2}=-\partial_y\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\partial_y\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right),$$

我们得到 $\partial_{xx}v+\partial_{yy}v=0$.

(2) 由于 $v=\sum_j x_j\partial_j u$, 我们有

$$\partial_i v=\sum_j\partial_i(x_j\partial_j u)=\sum_j\left(\delta_{ij}\partial_j u+\partial_{ij}u\right)=\partial_i u+\sum_j\partial_{ij}u,$$

因此

$$\partial_{ii}v=\partial_{ii}u+\sum_j\partial_{iij}u.$$

故

$$\Delta v=\sum_i\partial_{ii}v=\Delta u+\sum_j\partial_j(\Delta u)=0.$$

(3) 使用和 (2) 类似的计算, 由

$$\partial_i v=\partial_i\left(\sum_j x_j^2 u\right)=2x_i u+\sum_j x_j^2\partial_i u$$

可以得到

$$\partial_{ii}v=2u+4x_i\partial_i u+\sum_j x_j^2\partial_{ii}u.$$

对 i 求和以后得到

$$\Delta v=\sum_i \partial_{ii}v=2nu+4\sum_i x_i\partial_i u.$$

因此

$$\partial_i(\Delta v)=2n\partial_i u+4\sum_j\big(\delta_{ij}\partial_j u+\partial_{ij}u\big)=(2n+4)\partial_i u+4\sum_j\partial_{ij}u.$$

故对 x_i 求导之后得到

$$\partial_{ii}(\Delta v)=(2n+4)\partial_{ii}u+4\sum_j\partial_{iij}u.$$

对 n 求和以后得到

$$\Delta(\Delta v)=(2n+4)\Delta u+4\sum_j\partial_j(\Delta u)=0.$$

3*. 证明: 对任意 $M>0$, 存在 $\mathbb{R}^2$ 上二阶连续可微的函数 $u(x,y)$, 使得

1. 当 $x^2+y^2\geqslant 1$ 时, $u(x,y)=0$;
2. $\max\left\{|u''_{xx}(x,y)|,|u''_{yy}(x,y)|\right\}\leqslant 1$ 对所有 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立;
3. $|u''_{xy}(0,0)|\geqslant M$.

思路 在二阶椭圆方程的理论中, 有以下著名的 L^p 估计: 对任何 $1<p<+\infty$, 存在 $C_p>0$ 使得

$$\|u\|_{W^{2,p}(B_1)}\leqslant C_p\|\Delta u\|_{L^p(B_1)},\qquad \forall u\in W_0^{2,p}(B_1).$$

换言之, Laplace 算子的 L^p 范数可以控制混合偏导数的 L^p 范数. 本题的结果说明了 L^p 估计在 $p=+\infty$ 时不成立: u''_{xx} 和 u''_{yy} 的 L^∞ 范数不足以控制 u''_{xy} 的 L^∞ 范数. 另外, 本题的构造可以看作调和分析中 Riesz 变换的一种特例.

解答 首先, 我们证明下面的引理:

引理 *存在函数 $\xi\in C^2(\mathbb{R})$, 使得*

1. *当 $t\leqslant 0$ 时 $\xi(t)=1$, 当 $t\geqslant 1$ 时 $\xi(t)=0$, 当 $0<t<1$ 时 $0<\xi(t)<1$;*
2. *$|\xi'(t)|\leqslant 2$ 和 $|\xi''(t)|\leqslant 5$ 对一切 $t\in\mathbb{R}$ 成立.*

引理的证明 将 $\xi(t)$ 显式地取为 $\xi(t)=1-10t^3+15t^4-6t^5(0<t<1)$ 即证. □

考察 $u(x,y)=xyg(x^2+y^2)$, 其中 $g(t)$ 为二次可微的标量函数. 直接计算易得

$$\begin{aligned}
u''_{xx}&=6xyg'(x^2+y^2)+4x^3yg''(x^2+y^2),\\
u''_{yy}&=6xyg'(x^2+y^2)+4xy^3g''(x^2+y^2),\\
u''_{xy}&=g(x^2+y^2)+2(x^2+y^2)g'(x^2+y^2)+4x^2y^2g''(x^2+y^2).
\end{aligned}$$

令 $t=x^2+y^2$, 则由 $|2xy|\leqslant t$ 容易验证

$$\begin{aligned}\max\left\{|u''_{xx}|,|u''_{yy}|\right\}&\leqslant 3t|g'(t)|+2t^2|g''(t)|,\\ |u''_{xy}|&\geqslant |g(t)|-2t|g'(t)|-t^2|g''(t)|.\end{aligned}$$

令 $g(t)=\ln(\varepsilon+t)\xi(t)$, 其中 $\varepsilon\in(0,1)$ 为待定常数, 而函数 $\xi(t)$ 按照引理定义. 于是

$$\begin{aligned}g'(t)&=\frac{1}{\varepsilon+t}\xi(t)+\ln(\varepsilon+t)\xi'(t),\\ g''(t)&=-\frac{1}{(\varepsilon+t)^2}\xi(t)+\frac{2}{\varepsilon+t}\xi'(t)+\ln(\varepsilon+t)\xi''(t).\end{aligned}$$

注意到对任意 $t\geqslant 0$, 有

$$t|\ln(\varepsilon+t)|1_{\{t\leqslant 1\}}\leqslant(\varepsilon+t)|\ln(\varepsilon+t)|1_{\{t\leqslant 1\}}\leqslant\sup_{x\in(0,e)}x|\ln x|\leqslant 3,$$

我们可以得到 $t|g'(t)|$ 和 $t^2|g''(t)|$ 的估计: 对任意 $t\geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}t|g'(t)|&\leqslant t\left(\frac{1}{t}+2|\ln(\varepsilon+t)|1_{\{t\leqslant 1\}}\right)\leqslant 1+2t|\ln(\varepsilon+t)|1_{\{t\leqslant 1\}}\leqslant 7,\\ t^2|g''(t)|&\leqslant t^2\left(\frac{1}{t^2}+\frac{4}{t}1_{\{t\leqslant 1\}}+5|\ln(\varepsilon+t)|1_{\{t\leqslant 1\}}\right)\leqslant 5+5t|\ln(\varepsilon+t)|1_{\{t\leqslant 1\}}\leqslant 20.\end{aligned}$$

综合以上结果, 有

$$\begin{aligned}\max\left\{|u''_{xx}(x,y)|,|u''_{yy}(x,y)|\right\}&\leqslant 61,\\ |u''_{xy}(0,0)|&\geqslant|\ln\varepsilon|-34.\end{aligned}$$

由于 ε 可以任意小, $|u''_{xy}(0,0)|$ 可以任意大.

4. (1) (周民强 2.2.3) 设函数 $u=u(x,y)$ 由 $u=y+x\varphi(u)$ 确定, 其中 φ 任意次可导. 证明:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\left(\varphi^n(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

(2) 设隐函数 $u=u(x)$ 由 $u=1+x\sin u$ 确定. 证明: $u(x)$ 在 $x=0$ 处的任意阶导数为

$$u^{(n)}(0)=\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}(\sin^n t)\Big|_{t=1},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

思路 本题主要考察隐函数中的偏导数计算.

解答 (1) 对 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, 在 $u=y+x\varphi(u)$ 两端对 x,y 分别求导可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi(u)+x\varphi'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=1+x\varphi'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big(1-x\varphi'(u)\Big)=\varphi(u)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big(1-x\varphi'(u)\Big)=1\end{cases}$$

将以上两式相除可得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

设命题对 n 成立, 考察 $n+1$ 的情形. 在原等式的两端对 x 取偏导数, 得到

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi^n(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$$

为了证明命题对 $n+1$ 的情形成立, 只需验证

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi^n(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi^{n+1}(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{$*$}$$

为了证明 $(*)$, 注意到 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}$, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS}&=n\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\varphi^n(u)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
&=n\varphi'(u)\varphi(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\varphi^n(u)\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
&=n\varphi'(u)\varphi(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\varphi^n(u)\left(\varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\varphi(u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\
&=(n+1)\varphi'(u)\varphi(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\varphi^{n+1}(u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\
&=\mathrm{RHS}.
\end{aligned}$$

因此原命题对 $n+1$ 的情形成立.

(2) 一般地, 考察由 $v=y+x\sin v$ 确定的隐函数 $v(x,y)$. 由 (1) 的结果,

$$\frac{\partial^n v}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\left(\sin^n v\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

特别的, 当 $x=0$ 时, $v=y$, 因此有

$$\frac{\partial^n v}{\partial x^n}(0,y)=\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}(\sin^n y)$$

接着, 取 $y=1$ 即可得到

$$u^{(n)}(0)=\frac{\partial^n v}{\partial x^n}(0,1)=\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}(\sin^n t)\Big|_{t=1}.$$

5. 设 Hermite 多项式由

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^{-x^2},\qquad n\geqslant 0.$$

给出. 证明: 对任何 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

解答 首先证明, Hermite 多项式 $H_n(x)$ 满足三项递推公式

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \geqslant 1.$$

事实上, 利用乘积的高阶导数公式可以得到

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(e^{-x^2}) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(-2xe^{-x^2}) = -2x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2}) - 2n\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(e^{-x^2}).$$

因此可以得到 $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$.

另一方面, 在 e^{2xt-t^2} 中对 t 作 Taylor 展开可以得到存在多项式 $P_n(x)$ 使得

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{$*$}$$

直接验算可得 $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 2x$. 因此只需证明 $P_n(x)$ 和 $H_n(x)$ 满足相同的三项递推公式. 在 $(*)$ 的两端对 t 取偏导数可得

$$e^{2xt-t^2}(2x-2t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x) \frac{t^n}{n!}.$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{t^n}{n!}(2x-2t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x) \frac{t^n}{n!}.$$

比较两端 t^n 的系数可以得到

$$P_n(x)\frac{2x}{n!} - P_{n-1}(x)\frac{2}{(n-1)!} = P_{n+1}(x)\frac{1}{n!} \Longrightarrow P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x).$$

由于 $P_n(x)$ 和 $H_n(x)$ 满足相同的初始值和相同的三项递推公式, 我们有 $P_n(x) \equiv H_n(x)$.

6*. 设函数 $V(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$, 并且存在 $\lambda, \Lambda > 0$ 使得

$$\lambda I \leqslant \nabla^2 V(x) \leqslant \Lambda I, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

给定常数 $a \in (0, \frac{2\lambda}{\Lambda^2})$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 考察在 $\mathbb{R}^n$ 上由递推公式

$$x_{k+1} = x_k - a\nabla V(x_k), \quad k \geqslant 0.$$

定义的点列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. 证明: 存在 $x^* \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$, 且 x^* 是 $V(x)$ 的唯一极小点.

(注: 矩阵 $A \geqslant B$ 意味着 $A - B$ 非负定)

思路 本题中出现的递推公式是数值最优化中著名的梯度下降 (gradient descent) 算法. 势能函数的强凸性保证了该算法必然以指数速度收敛.

解答 设 $y_k = x_k - x_{k-1}$, $k \geqslant 1$. 将 $x_{k+1} = x_k - a\nabla V(x_k)$ 和 $x_k = x_{k-1} - a\nabla V(x_{k-1})$ 相减得到

$$y_{k+1} = y_k - a\big(\nabla V(x_k) - \nabla V(x_{k-1})\big). \tag{1}$$

注意到, 由定积分的定义可以得到

$$\begin{aligned}\nabla V(x_k) - \nabla V(x_{k-1}) &= \nabla V\big(x_{k-1} + t(x_k - x_{k-1})\big)\Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= \int_0^1 \nabla^2 V\big(x_{k-1} + t(x_k - x_{k-1})\big)(x_k - x_{k-1})\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}(x_k - x_{k-1}) \cdot \big(\nabla V(x_k) - \nabla V(x_{k-1})\big) &= \int_0^1 (x_k - x_{k-1})^{\mathrm{T}} \nabla^2 V\big(x_{k-1} + t(x_k - x_{k-1})\big)(x_k - x_{k-1})\mathrm{d}t \\ &\geqslant \lambda \int_0^1 |x_k - x_{k-1}|^2 \mathrm{d}t = \lambda |x_k - x_{k-1}|^2,\end{aligned}$$

即

$$y_k \cdot \big(\nabla V(x_k) - \nabla V(x_{k-1})\big) \geqslant \lambda |y_k|^2. \tag{2}$$

并且, 在矩阵 2 范数的意义下, 由 $\|\nabla^2 V\| \leqslant \Lambda$ 可以得到

$$|\nabla V(x_k) - \nabla V(x_{k-1})| \leqslant \int_0^1 \big\|\nabla^2 V\big(x_{k-1} + t(x_k - x_{k-1})\big)\big\| |x_k - x_{k-1}| \mathrm{d}t \leqslant \Lambda |x_k - x_{k-1}|,$$

即

$$|\nabla V(x_k) - \nabla V(x_{k-1})| \leqslant \Lambda |y_k|. \tag{3}$$

由 (2)(3) 的估计, 将 (1) 两边取 2 范数后得到

$$\begin{aligned}|y_{k+1}|^2 &= \big|y_k - a\big(\nabla V(x_k) - \nabla V(x_{k-1})\big)\big| \\ &= |y_k|^2 - 2a y_k \cdot \big(\nabla V(x_k) - \nabla V(x_{k-1})\big) + \big|\nabla V(x_k) - \nabla V(x_{k-1})\big|^2 \\ &\leqslant |y_k|^2 - 2a\lambda |y_k|^2 + a^2\Lambda^2 |y_k|^2 \\ &= \big(1 - 2a\lambda + a^2\Lambda^2)|y_k|^2.\end{aligned}$$

当 $a < \frac{2\lambda}{\Lambda^2}$ 时, $q = \sqrt{1 - 2a\lambda + a^2\Lambda^2} < 1$. 因此由

$$|x_{k+1} - x_k| = q|x_k - x_{k-1}|$$

可以得到 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列. 假设此点列的极限是 $x^* \in \mathbb{R}^n$, 则在 $x_{k+1} = x_k - a\nabla V(x_k)$ 中令 $k \to \infty$ 可得 $\nabla V(x^*) = 0$, 即 x^* 是 $V(x)$ 的一个极小点. $V(x)$ 的极小点的唯一性可以从强凸性直接得到.

7. 设 $p, q > 1$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 对非负实数 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$, 证明 Hölder 不等式

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

思路 使用 Lagrange 乘数法可以给出证明. 但需要特别注意边界!

证明 对 n 使用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时, 不等式显然成立. 设不等式对 $n-1$ 成立, 考察 n 的情形. 不妨设 $y_1, \cdots, y_n > 0$, 否则当 $y_i = 0$ 时可由归纳假设得到不等式成立. 由齐次性可设 $\sum_{i=1}^n x_i^p = 1$. 于是问题归结为求集合 $E = \big\{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geqslant 0\big\}$ 上的函数

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

在约束条件 $\sum_{i=1}^n x_i^p = 1$ 下的最大值. 如果 f 在 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 处取最大值, 则或者 $x \in \partial E$, 或者 $x \in E^\circ$ 且 x 为极值点.

- 若 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \partial E$, 则存在某个 $x_i = 0$. 由归纳假设可以得到不等式成立.
- 若 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E^\circ$ 且 x 为极值点, 则考察函数

$$F(x_1, \cdots, x_n, \lambda) = f(x_1, \cdots, x_n) - \lambda\Bigg(\sum_{i=1}^n x_i^p - 1\Bigg).$$

由 Lagrange 乘数法, 知存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \Longrightarrow y_i = \lambda p x_i^{p-1}.$$

因此可得, $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在约束条件下的极值点形如

$$x_i = a y_i^{\frac{1}{p-1}}, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{$*$}$$

其中 $a = (\sum_{i=1}^n y_i^q)^{-\frac{1}{p}}$. 对于 $(*)$ 给出的极值点, 不难计算得到 $f(x_1, \cdots, x_n) = (\sum_{i=1}^n y_i^q)^{\frac{1}{q}}$.

综上可知, 不等式对 n 的情形成立.