数学分析 III 课件

叶胥达

2022 年 9 月 29 日

1 连续、偏导数和可微

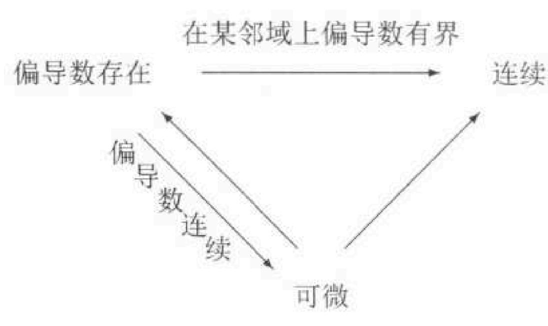
连续、偏导数和可微, 都是用于描述多元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在某一点 $\boldsymbol{x}^0$ 附近的局部性质. 表面上看, 这三种概念对函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的光滑性的要求越来越高, 但实际上这些概念之间的严格推导比较复杂, 也存在着许多反例说明一些条件是必要的. 熟练掌握这些推导定理以及反例, 对于我们理解连续、偏导数和可微这几种相似的概念是有帮助的.

首先, 请复习如何使用极限或 $\varepsilon-\delta$ 语言来描述 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处所满足的以下三种性质:

- $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处**连续**;
- $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处存在**偏导数** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$;
- $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的**全微分**为 $\mathrm{d}f(x,y)=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y$.

然后将它们推广到 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\cdots,x_n)$.

其次, 这三个概念之间存在如下的推导关系: (谢惠民, p172)



其中较为重要的两个结论是:

1. 若 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 的某邻域 $U(\boldsymbol{x}^0,\delta)$ 内存在各个偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(i=1,\cdots,n)$, 并且这些偏导数在 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 内有界, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处连续.
2. 若 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 的某邻域 $U(\boldsymbol{x}^0,\delta)$ 内存在各个偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(i=1,\cdots,n)$, 并且这些偏导数在 $\boldsymbol{x}^0$ 处连续, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处可微.

同时, 也存在着一些反例, 说明这些结论几乎不可能更弱.

1. 各个偏导数有界, 但是在 $\boldsymbol{x}^0$ 处不可微:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

2. 偏导数不连续且无界, 却在 $\boldsymbol{x}^0$ 处可微:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

最后, 需要强调应用链式法则时必须要求外层函数可微, 仅仅要求偏导数存在是不够的.

2 习题解答

习题十三 20220914

20. (1) **思路** 由于 $f(x,y)$ 关于 y 单调上升, 因此可以构造 (x_0,y_0) 附近的矩形来控制其中的函数值. 不过, 在本题当中, $D=[0,1]\times[0,1]$ 包含边界, 因此在讨论矩形的范围时需注意不越界.

解答 设 $(x_0,y_0)\in D$, 往证 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续, 即 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\Longrightarrow|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon. \tag{1}$$

由于 $f(x_0,y)$ 关于 y 连续, 因此存在 $\delta_1>0$ 使得

$$|y-y_0|\leqslant\delta_1\Longrightarrow|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

令 $y^+=\min(y_0+\delta_1,1)$, $y^-=\max(y_0-\delta,0)$. 由于 $f(x,y^+)$ 关于 x 连续, 因此存在 $\delta_2>0$ 使得

$$|x-x_0|<\delta_2\Longrightarrow|f(x,y^+)-f(x_0,y^+)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 (2) 可得 $|f(x_0,y^+)-f(x_0,y_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 因此

$$|x-x_0|<\delta_2 \Longrightarrow |f(x,y^+)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon. \tag{3}$$

类似地, 由于 $f(x,y^-)$ 关于 x 连续, 存在 $\delta_3>0$ 使得

$$|x-x_0|<\delta_2 \Longrightarrow |f(x,y^-)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon. \tag{4}$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$. 我们来说明 δ 符合 (1) 的要求.

事实上, 当 $|y-y_0|<\delta$ 时, 有 $y\in[y^-,y^+]$. 由 $f(x,y)$ 关于 y 的单调性, 有

$$f(x,y^-)\leqslant f(x,y)\leqslant f(x,y^+).$$

因此由 (3)(4) 有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant \max\left\{|f(x,y^+)-f(x_0,y_0)|,|f(x,y^-)-f(x_0,y_0)|\right\}<\varepsilon,$$

因此 (1) 成立. 命题得证.

(2) 往证 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续, 即 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta \Longrightarrow |f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

首先, 由于 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 知存在 $\delta_1>0$ 使得

$$|x-x_0|<\delta_1 \Longrightarrow |f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

其次, 根据条件, 存在 δ_2 使得

$$|y-y_0|<\delta_2 \Longrightarrow |f(x,y)-f(x,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

最后, 取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, 则由三角不等式,

$$|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta \Longrightarrow |f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

故命题得证.

22. 利用开集和连续性的定义即可证明. 参考谢惠民命题 18.2.1.

25. 本题的关键在于, 对任何相异两点 $P_1,P_2\in D$, 都存在无穷条连续曲线连接 P_1,P_2 两点, 并且这些曲线除首尾外两两不交. 尽管该命题非常直观的, 但是仍然需要稍加详细地说明其原因, 因为 $D=[0,1]\times[0,1]$ 是一个有限集合, 它很大程度上限制了曲线的走向. 因此, 这些曲线的选取依赖于 P_1,P_2 在 D 中的相对位置, 不能直接不加证明地指出曲线有无穷多条.

以下是一个可行的证明. 令点 P_0 为 P_1P_2 的中点, 则 $P_0\in D$. 令直线 l 过点 P_0 且垂直于 P_1P_2.

- 若 P_0 在 D 的内部, 则 l 上存在点 $P_3 \neq P_0$ 使得 $P_3 \in D$.
- 若 P_0 在 D 的边界上, 则线段 P_1P_2 也在边界上. 此时 l 在 D 内部的部分上有一点 $P_3 \neq P_0$.

总之, 存在点 $P_3 \in D$, $P_3 \neq P_0$, 且 P_3 在 P_1P_2 的中垂线上. 考察曲线族 $\{\gamma_t\}_{0\leqslant t\leqslant 1}$, 其中

$$\gamma_t \text{ 为连接 } P_1,\ tP_0+(1-t)P_3,\ P_2 \text{ 三点的折线段.}$$

于是, γ_t 为连续曲线, 且对于相异实数 $t \neq t'$, 曲线 γ_t 和 $\gamma_{t'}$ 仅有首尾相交.

26. 易知 $D := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ 是紧集. 由于 A 非退化, 故 $f(x) = |Ax|$ 在 D 上恒取正值. 又由于 $f(x)$ 关于 x 连续, 故存在 $\lambda > 0$ 使得

$$|Ax| \geqslant \varepsilon, \quad \forall x \in D.$$

由此即可得到 $|Ax| \geqslant \lambda |x|$ 对一切 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立.

习题十四 20220919 & 20220921

1. 思路 本题的关键在于明确各个符号以及上下标的含义.

解答 不妨设 $\boldsymbol{x}^0 = 0$. 下面证明: 若 $f(\boldsymbol{x})$ 在原点的邻域 $U(\mathbf{0},\delta)$ 上的偏导数有界, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 在原点处连续. 事实上, 对任意 $= (x_1, \cdots, x_n) \in U(0,\delta)$, 我们有

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\mathbf{0}) = \sum_{k=1}^{n} \big[f(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k, \cdots, 0) - f(x_1, \cdots, x_{k-1}, 0, \cdots, 0) \big].$$

由 Lagrange 中值定理, 对每个 $k \in \{1, \cdots, n\}$, 存在 $\theta_k \in (0,1)$ 使得

$$f(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k, \cdots, 0) - f(x_1, \cdots, x_{k-1}, 0, \cdots, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \cdots, x_{k-1}, \theta_k x_k, \cdots, 0) x_k,$$

因此

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\mathbf{0}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \cdots, x_{k-1}, \theta_k x_k, 0, \cdots, 0) x_k.$$

设 $f(\boldsymbol{x})$ 的各个偏导数的绝对值均超过 M, 则

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\mathbf{0})| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

因此 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 处连续. 函数

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

在原点附近有无界的偏导数, 并且在 $(0,0)$ 处连续.

特别注意: 本题不能应用多元 Lagrange 中值定理, 因为定理要求 $f(\boldsymbol{x})$ 可微.

15. 我们用 $x_{1:n-1} := (x_1, \cdots, x_{n-1})$ 来表示 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ 的前 $n-1$ 个分量. 不妨设 $\boldsymbol{x}^0 = 0$, 则只需证明: 若 $f(\boldsymbol{x})$ 在原点的邻域 $U(\mathbf{0}, \delta)$ 上有 n 个偏导数, 且前 $n-1$ 个偏导数在 $U(\mathbf{0}, \delta)$ 内连续, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 在原点处可微.

注意到, 对给定的 $x_n \in \mathbb{R}$, $f(x_{1:n-1}, x_n)$ 作为 $x_{1:n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ 的函数总具有连续的偏导数. 因此, $f(x_{1:n-1}, x_n)$ 关于 $x_{1:n-1}$ 可微. 由多元 Lagrange 中值定理, 存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - f(\mathbf{0}) &= f(x_{1:n-1}, x_n) - f(0, x_n) + f(0, x_n) - f(0,0) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\theta x_{1:n-1}, x_n) x_k + \big(f(0, x_n) - f(0,0)\big). \end{aligned} \tag{1}$$

当 $\boldsymbol{x} \to 0$ 时, 由于 $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ 在原点连续, 有

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\theta x_{1:n-1}, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(0,0) = o(1) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(\theta x_{1:n-1}, x_n) x_k - \frac{\partial f}{\partial x_k}(0,0) x_k = o(|\boldsymbol{x}|),$$

从而由 (1) 可以得到

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\mathbf{0}) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_k}(0,0) x_k + \big(f(0, x_n) - f(0,0)\big). \tag{2}$$

最后, 根据偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ 的定义, 有

$$f(0, x_n) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(0,0) x_n + o(x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(0,0) x_n + o(|\boldsymbol{x}|). \tag{3}$$

由 (2)(3) 可以得到

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\mathbf{0}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(0,0) x_k + o(|\boldsymbol{x}|),$$

因此 $f(\boldsymbol{x})$ 在原点处可微.

特别注意: 本题应用多元 Lagrange 中值定理时一定要验证 $f(x_{1:n-1}, x_n)$ 关于 $x_{1:n-1}$ 是可微的. 多元 Lagrange 中值定理应用的必要条件是可微性, 而偏导数的存在性不足以得到可微. 从本质上说, 本题需要在 $n-1$ 个方向上使用中值定理, 并在最后一个方向上使用偏导数的定义. 如果在所有方向上都使用了中值定理, 那么就是错误的解答, 因为最后一个偏导数未必在此连续.

23. (1) 设 M 为 $f(\boldsymbol{x})$ 的各个偏导数的绝对值的上界. 仿照第 1 题的证明, 可以得到

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D.$$

注意, D 是凸集保证了连接 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 的线段仍然落在 D 中. 故 $f(\boldsymbol{x})$ 一致连续.

3 补充题目

1. 定义 $\mathbb{R}^2$ 上的集合 $E = \big\{(x, \sin(1/x)) : x \in (0, 1]\big\}$.
(1) 求出 E 的闭包 $\bar{E}$; (2) 证明 $\bar{E}$ 不是道路连通的.

思路 本题看似容易, 但思路并不常规. 这是因为, 连接两点的连续曲线可以有各种各样的形式, 甚至可以让曲线在中间的某一段上往回跑. 使用严格的数学语言对于解决此题是关键的.

解答 容易得到 E 的闭包为 $\bar{E} = \big(\{0\} \times [-1, 1]\big) \cup E$. 下面证明 $\bar{E}$ 不是道路连通的.

否则, 假设 $f : [0, 1] \mapsto E$ 是连接 $(0, 0)$ 和 $(1, \sin 1)$ 两点的连续曲线. 设 $f_1, f_2 : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ 分别是 f 在 x, y 轴上的分量, 即

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t)) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, 1].$$

由于 $f_2(t)$ 在 $[0, 1]$ 上一致连续, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$|t - t'| < \varepsilon \Longrightarrow |f_2(t) - f_2(t')| < 2. \tag{$*$}$$

注意到 f_1 是连续函数, 且 $f_1(0) = 0$, $f_1(1) = 1$, 据介值定理, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $t_n \in [0, 1]$ 使得

$$f_1(t_n) = \Big(2n\pi + \frac{\pi}{2}\Big)^{-1} \Longrightarrow f_2(t_n) = 1.$$

由于 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $[0, 1]$ 中的无穷点列, 故存在正整数 $n < m$ 使得 $|t_n - t_m| < \varepsilon$. 此时

$$f_1(t_m) = \Big(2m\pi + \frac{\pi}{2}\Big)^{-1} < \Big(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\Big)^{-1} < f_1(t_n) = \Big(2n\pi + \frac{\pi}{2}\Big)^{-1}.$$

据介值定理, 存在介于 t_n 和 t_m 之间的实数 t^* 使得

$$f_1(t^*) = \Big(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\Big)^{-1} \Longrightarrow f_2(t^*) = -1.$$

故 $|f_2(t^*) - f_2(t_n)| = 2$ 且 $|t^* - t_n| < \varepsilon$. 这与 f_2 一致连续的要求 $(*)$ 矛盾!

2. (1) 设函数 $f(x)$ 在凸区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上可微. 证明: 对任何 $x, y \in D$, 存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$f(y) - f(x) = \nabla f\big(\theta x + (1 - \theta) y\big) \cdot (y - x).$$

(2) 判断下述结论是否成立: 若 $\boldsymbol{f}(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 为可微的向量值函数, 则对任何 $x,y\in\mathbb{R}^n$, 存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$\boldsymbol{f}(y)-\boldsymbol{f}(x)=\nabla\boldsymbol{f}\big(\theta x+(1-\theta)y\big)\cdot(y-x).$$

其中, $x,y\in\mathbb{R}^n$ 均视为列向量, 而 $\nabla\boldsymbol{f}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 是 f 的 Jacobi 矩阵.

思路 本题的目的是说明, Lagrange 中值定理可以推广到标量值多元函数上, 但是不能应用在向量值函数上. 另外, 可微性的条件是必要的, 因为链式法则必须利用到可微性.

解答 (1) 作函数 $g(\theta):=f(\theta x+(1-\theta)y)$. 则 $g(0)=y$, $g(1)=x$, 且

$$g'(\theta)=\nabla f\big(\theta x+(1-\theta)y\big)\cdot(x-y).$$

根据一元 Lagrange 中值定理, 存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$g(1)-g(0)=g'(\theta)\Longrightarrow f(y)-f(x)=\nabla f\big(\theta x+(1-\theta)y\big)\cdot(y-x).$$

(2) 不成立. 考察函数 $\boldsymbol{f}(t)=(\cos t,\sin t)$, 则 $J\boldsymbol{f}(t)=(-\sin t,\cos t)$. 若 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$\boldsymbol{f}(2\pi)-\boldsymbol{f}(0)=J\boldsymbol{f}(\theta\cdot 2\pi)\cdot 2\pi,$$

则 $(-\sin 2\pi\theta,\cos 2\pi\theta)=0$, 这不可能成立!

3. 举例说明: 存在 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数 $f(x,y)$, 使得 $f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上存在且一致有界, 但是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

思路 本题考察连续、偏导数和可微三个基本概念中的一个反例.

解答 考察 $\mathbb{R}^2$ 上的函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\[2mm] 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

直接计算容易得到: 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

显然它们在 $\mathbb{R}^2$ 上是有界的. 由于 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的偏导数均为 0, 因此 $f(x,y)$ 可微当且仅当

$$\lim_{(x,y)\to 0}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\Longleftrightarrow\lim_{(x,y)\to 0}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

显然, 在直线 $y=x$ 上, 上面的极限值非 0, 矛盾! 因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微. 另一个例子是

$$f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

4. (周民强 2.1.13) 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 且 $f(0,0)=0$, 若 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续, 证明 $f(x,y)g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

思路 要证 f 在 $(0,0)$ 处可微, 先来形式地计算它的偏导数. 由链式法则, 在 $(0,0)$ 处我们有

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg)=\frac{\partial f}{\partial x}g+f\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}g.$$

但由于 g 在 $(0,0)$ 处可能不连续, 链式无法使用. 因此, 应该使用定义来验证 fg 的全微分.

解答 为证明 $f(x,y)g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 只需证明

$$\lim_{(x,y)\to 0}\frac{f(x,y)g(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)g(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)g(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0. \tag{1}$$

一方面, 由 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微可以得到

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0. \tag{2}$$

因此, 存在 $(0,0)$ 的邻域 U_δ 使得当 $(x,y)\in U_\delta$ 时, 有 $|f(x,y)|\leqslant M\sqrt{x^2+y^2}$, 进而有

$$|f(x,y)g(x,y)-f(x,y)g(0,0)|\leqslant M\sqrt{x^2+y^2}|g(x,y)-g(0,0)|.$$

由于 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续, 我们有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)g(x,y)-f(x,y)g(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0. \tag{3}$$

由 (2)(3) 即可得到 (1) 成立. 因此, $f(x,y)g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的全微分形如

$$\mathrm{d}\big(f(x,y)g(x,y)\big)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)g(0,0)\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)g(0,0)\mathrm{d}y.$$

5. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是开区域, 实值函数 $u(x,y),v(x,y)$ 在 Ω 上连续可微, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\qquad u^2+v^2=C,$$

其中 C 为常数. 证明 $u(x,y),v(x,y)$ 在 Ω 上均为常值函数.

思路 本题的背景是复变函数中的 Cauchy–Riemann 方程.

解答 在 $u^2+v^2=C$ 两端关于 x 取偏导数, 有

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0 \Longrightarrow u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

即 $\dfrac{\partial}{\partial y}(uv)=0$. 类似地, 关于 y 取偏导数可得到 $\dfrac{\partial}{\partial x}(uv)=0$.

由于 uv 的偏导数在 $\mathbb{R}^2$ 上恒为 0, 我们有 $uv\equiv C_1$. 其中 C_1 为常数. 此时 u 满足方程

$$u^4-Cu^2+C_1^2=0,$$

因此 u 的取值范围至多包含 4 个实数. 由于 u 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 故 u 恒为常数. 同理 v 恒为常数.

6. (周民强 2.1.17) 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微. 若

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0, \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

证明: $f(x,y)$ 恒为常数.

解答 给定 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 定义一元函数

$$g(t)=f(tx,ty), \quad t\in\mathbb{R},$$

则由链式法则,

$$g'(t)=x\frac{\partial f}{\partial x}f(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=0.$$

因此 $g(t)$ 恒为常数, 特别的有 $g(0)=g(1)$, 即 $f(x,y)=f(0,0)$. 故 $f(x,y)$ 恒为常数.