数学分析习题课教案

叶胥达　741317822@qq.com

2023 年 9 月 18 日

1　习题解答

20230911

1. 否则设 $\alpha, \beta \in S$ 均为数集 $E \subset S$ 的上确界. 由于 S 有有序集, 且 α, β 不等, 故一定有

$$\alpha > \beta \ \text{ 或 } \ \alpha < \beta$$

两种情形之一. 由对称性, 不妨设 $\alpha > \beta$. 由于 α 为 E 的上确界, 故 $\beta < \alpha$ 意味着 β 不是 E 的上界, 与 β 是上确界矛盾! 因此 E 的上确界 $\sup E$ 是唯一的. 类似的, E 的下确界 $\inf E$ 是唯一的.

2. 容易看出 2 是 E 的一个上界, 故 $\sup E \leqslant 2$. 对任何 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$2 - \frac{1}{n} \in E \Longrightarrow \sup E \geqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

由于 n 可以充分大, 因此 $\sup E \geqslant 2$. 故 $\sup E = 2$.

3. 由条件知对任意 $x \in A$, 存在 $y \in B$ 使得

$$x \leqslant y \leqslant \sup B.$$

因此 $\sup B$ 是集合 A 的一个上界, 故 $\sup A \leqslant \sup B$.

类似结果: 设有两个数集 A, B 满足: $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, 都有 $x \leqslant y$, 则有 $\sup A \leqslant \inf B$.

4. 对任意 $x \in A$, 有

$$x + c \in B \Longrightarrow x + c \leqslant \sup B,$$

故 $\sup B - c$ 是 A 的上界, 从而 $\sup A \leqslant \sup B - c$ 即 $\sup B \geqslant \sup A + c$. 反之, 对任意 $y \in B$, 有

$$y - c \in A \Longrightarrow y - c \leqslant \sup A,$$

故 $\sup A+c$ 是 B 的上界, 从而 $\sup B \leqslant \sup A+c$. 综合以上两结果可得

$$\sup B=\sup A+c.$$

类似地, 可以证明 $\inf B=\inf A+c$.

20230913

1. 对任意 $x \in A$, $y \in B$, 有

$$x+y \in C \Longrightarrow x+y \leqslant \sup C.$$

对 $x \in A$ 取上确界, 可得

$$\sup A+y \leqslant \sup C,$$

再对 $y \in B$ 取上确界, 可得

$$\sup A+\sup B \leqslant \sup C. \tag{1}$$

反之, 对任意 $z \in C$, 存在 $x \in A$ 和 $y \in B$ 使得 $z=x+y$, 故

$$x \leqslant \sup A, \quad y \leqslant \sup B \Longrightarrow z=x+y \leqslant \sup A+\sup B.$$

于是 $\sup A+\sup B$ 是集合 C 的一个上界, 从而

$$\sup A+\sup B \geqslant \sup C. \tag{2}$$

综合 (1)(2) 两个结果可以得到 $\sup A+\sup B=\sup C$. 类似地可以得到 $\inf A+\inf B=\inf C$.

2. 如果 $\sqrt{3}$ 是有理数, 则存在互素的正整数 p, q 使得

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q} \Longrightarrow p^2=3q^2.$$

故 $3 \mid p^2 \Rightarrow 3 \mid p \Rightarrow 9 \mid 3q^2 \Rightarrow 3 \mid q^2 \Rightarrow 3 \mid q$, 即 3 可以同时整除 p 和 q. 这与 p, q 互素的假设矛盾! 因此 $\sqrt{3}$ 一定是无理数.

推广: 当 n 不是完全平方数时, $\sqrt{n}$ 均为无理数.

2 补充习题

1. 当 n 不是完全平方数时, 证明集合 $E=\{a+b\sqrt{n}: a, b \in \mathbb{Q}\}$ 构成一个数域, 并且写出它的乘法规则和逆元表达式.

2. 当 n 不是完全平方数时, 证明函数

$$f(x) = \cos x + \sin\sqrt{n}x$$

不是周期函数.

证明 否则, 假设存在 $T > 0$ 使得

$$\cos x + \sin\sqrt{n}x = \cos(x+T) + \sin\big(\sqrt{n}x + \sqrt{n}T\big)$$

对任何 $x \in \mathbb{R}$ 成立. 由于

$$\cos x - \cos(x+T) = 2\sin\frac{T}{2}\sin\left(x + \frac{T}{2}\right),$$
$$\sin\big(\sqrt{n}x + \sqrt{n}T\big) - \sin\sqrt{n}x = 2\sin\frac{\sqrt{n}T}{2}\cos\left(\sqrt{n}x + \frac{\sqrt{n}T}{2}\right),$$

我们得到

$$\sin\frac{T}{2}\sin\left(x + \frac{T}{2}\right) = \sin\frac{\sqrt{n}T}{2}\cos\left(\sqrt{n}x + \frac{\sqrt{n}T}{2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

注意到, $\sin\frac{T}{2}$ 和 $\sin\frac{\sqrt{n}T}{2}$ 不能同时为 0. 否则, 存在整数 $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{T}{2} = k_1\pi, \quad \frac{\sqrt{n}T}{2} = k_2\pi \Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{k_2}{k_1} \in \mathbb{Q},$$

这与 $\sqrt{n}$ 是无理数矛盾. 因此, $\sin\frac{T}{2}$ 和 $\sin\frac{\sqrt{n}T}{2}$ 不能同时为 0.

进一步, $\sin\frac{T}{2}$ 和 $\sin\frac{\sqrt{n}T}{2}$ 都不为 0. 否则,

$$\sin\frac{T}{2} = 0 \Longrightarrow \cos\left(\sqrt{n}x + \frac{\sqrt{n}T}{2}\right) \equiv 0,$$
$$\sin\frac{\sqrt{n}T}{2} = 0 \Longrightarrow \sin\left(x + \frac{T}{2}\right) \equiv 0,$$

均有矛盾. 至此, $\sin\frac{T}{2}$ 和 $\sin\frac{\sqrt{n}T}{2}$ 都不为 0, 我们有:

$$\sin\left(x + \frac{T}{2}\right) \text{ 和 } \cos\left(\sqrt{n}x + \frac{\sqrt{n}T}{2}\right) \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上有相同的零点.}$$

但是, 前者的相邻零点的间距为 π, 而后者的相邻零点的间距为 $\pi/\sqrt{n}$, 矛盾! 因此 $f(x) = \cos x + \sin\sqrt{n}x$ 一定不是周期函数.