

# 数学分析 III 课件

开集与闭集、多元函数的连续与一致连续

叶胥达

2022 年 9 月 15 日

## 1 学习指南

1.  $\varepsilon - \delta$  语言是刻画极限的最基础的工具, 无论是在  $\mathbb{R}^n$  还是在 Hilbert 空间和度量空间中.
2. 不要拘泥于符号的使用, 但是要保持上下文符号的统一. 在多元函数的中, 数学符号会频繁出现各种上下标, 要明确这些符号的含义, 例如哪些代表空间的维数, 哪些代表数列的指标, 尽量不要重复混用. 另外, 同一个数学概念可能有多种表达方式, 例如函数  $u$  关于变量  $x$  的偏导数可以表示为  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} u$  或  $\partial_x u$ . 具体使用哪种符号没有特别的要求, 但是要保证上下文中符号的统一.
3. 在课本中, 向量通常使用粗体的符号  $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$  表示. 在手写体中, 使用非粗体的  $x = (x_1, \dots, x_n)$  即可, 是否添加向量符号  $\vec{x}$  属于个人偏好.
4. 在大部分情况下, 数学分析中遇到的区域  $E \subset \mathbb{R}^n$  都具有较好的正则性. 应用一些定理 (积分区域变换、Green 公式) 时不必太在意区域是否满足定理要求的正则性条件 (通常它们相当复杂).
5. 训练良好的计算能力, 尤其是在积分区域复杂的情形时. 尽管 MATLAB 和 Mathematica 可以帮助进行复杂的计算, 但是考试不能用.

## 2 习题解答

习题十三 20220905

10. 设  $\{\theta_k\}_{k=1}^\infty$  是区间  $[0, 1)$  中全部有理数的排列. 对一切  $k \in \mathbb{N}$ , 构造点

$$P_k = \left( \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cos 2\pi\theta_k, \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sin 2\pi\theta_k \right) \in \mathbb{R}^2,$$

并作集合  $E = \{P_k : k \in \mathbb{N}\}$ , 则  $E$  的聚点集为单位圆周. 一方面,  $E$  的聚点一定在单位圆周上. 这是由于  $|P_k| = 1 - \frac{1}{k}$ , 因此若  $E$  有聚点  $P^*$ , 则  $|P^*| = \lim_{k \rightarrow \infty} |P_k| = 1$ .

另一方面, 在单位圆周上的点一定是  $E$  的聚点. 在单位圆周上任取一点  $(\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$ , 其中  $\theta \in [0, 1)$ , 则存在有理数列  $\{\theta_{k_j}\}_{j=1}^\infty \subset [0, 1)$  使得  $\lim_{j \rightarrow \infty} \theta_{k_j} = \theta$ . 此时  $(\cos \theta, \sin \theta) = \lim_{j \rightarrow \infty} P_{k_j}$ , 因此  $(\cos \theta, \sin \theta)$  是  $E$  的聚点.

**备注** 证明的关键是保证所有的点的幅角在  $[0, 2\pi)$  中是稠密的, 这样才能保证  $E$  的聚点包含整个单位圆周. 直接选择习题 3(3) 中的集合  $E$  是不可取的, 因为集合  $E$  的聚点有圆盘内的部分. 另一个合理的取法是

$$\left( \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cos k, \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sin k \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

因为  $k \bmod 2\pi$  在  $[0, 2\pi)$  中稠密. 但是

$$\left( \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cos \left( \tan \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \right), \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sin \left( \tan \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \right) \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

不太可行, 因为证明  $\tan \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \bmod 2\pi$  在  $[0, 2\pi)$  中稠密非常不平凡.

**11.** (1) 在  $\mathbb{R}^1$  上,  $E_1 = (-1, 0)$ ,  $E_2 = (0, 1)$ .

(2) 在  $\mathbb{R}^2$  上,  $E_1 = \{(x, y) : y \geq e^x\}$ ,  $E_2 = \{(x, y) : y \leq 0\}$ .

另一个例子是  $E_1 = \{n : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $E_2 = \{n + \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ . (由热心同学提供)

(3) 由于  $d(E_1, E_2) = 0$ , 故存在点列  $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset E_1$  和  $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset E_2$  使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - y_k| = 0.$$

由于  $E_1$  为紧集, 故存在  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  的子列 (仍然记为  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ ) 收敛到  $x^* \in E_1$ , 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*.$$

类似地, 存在  $\{y_k\}_{k=1}^\infty$  的子列 (仍然记为  $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ ) 收敛到  $y^* \in E_2$ , 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y^*.$$

注意到

$$|x^* - y^*| \leq |x_k - x^*| + |y_k - y^*| + |x_k - y_k|,$$

令  $k \rightarrow \infty$  即可得到  $x^* = y^*$ . 因此  $x^* \in E_1 \cap E_2$ .

若仅仅假设  $E_1$  为紧集,  $E_2$  为闭集, 则结论仍然成立.

**12.** (有限覆盖定理) 对任何  $x \in F$ , 由于  $x \in E$  且  $E$  为开集, 存在  $x$  的邻域  $U(x, \delta_x)$  使得  $U(x, \delta_x) \subset E$ . 因此可以得到

$$F \subset \bigcup_{x \in F} U(x, \delta_{x/2}) \subset E.$$

由于  $F$  为紧集, 故由有限覆盖定理, 存在有限个元素  $\{x_k\}_{k=1}^K \subset F$ , 使得

$$F \subset O := \bigcup_{k=1}^K U(x_k, \delta_{x_k/2}) \subset E.$$

上述公式定义的集合  $O$  是有限个开集的并, 并且 (见习题十三, 7(1))

$$\bar{O} \subset \bigcup_{k=1}^K \overline{U(x_k, \delta_{x_k/2})} \subset \bigcup_{k=1}^K U(x_k, \delta_{x_k}) \subset E.$$

(距离函数构造) 先证明关于距离函数  $d(x, E)$  的一个性质.

**引理** 设  $E \subset \mathbb{R}^n$  为非空集合, 定义  $d(x, E) = \inf_{y \in E} |x - y|$ . 则

$$|d(x_1, E) - d(x_2, E)| \leq |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n.$$

**证明** 对任意  $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n$ , 由三角不等式,

$$|x_1 - y| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - y|.$$

在两端关于  $y \in E$  取下确界可得

$$\inf_{y \in E} |x_1 - y| \leq |x_1 - x_2| + \inf_{y \in E} |x_2 - y|,$$

即  $d(x_1, E) \leq |x_1 - x_2| + d(x_2, E)$ . 同理可以得到  $d(x_2, E) \leq |x_1 - x_2| + d(x_1, E)$ , 命题得证.  $\square$

回到原题. 记  $E^c$  为  $E$  在  $\mathbb{R}^n$  中的补集, 则  $E^c$  为闭集. 由于  $F \cap E^c = \emptyset$ , 由 11(3) 的结果可知  $d(F, E^c) > 0$ . 定义集合

$$O = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, F) < d(x, E^c)\},$$

我们来验证  $O$  是符合题目要求的集合. 下面证明:

1.  $F \subset O$ , 且  $O$  是开集.

当  $x_0 \in O$  时,  $\varepsilon := d(x_0, E^c) - d(x_0, F) > 0$ . 对任意  $x \in U(x_0, \varepsilon/3)$ , 有

$$d(x, E^c) - d(x, F) \geq d(x_0, E^c) - d(x_0, F) - \frac{2\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3} > 0,$$

因此  $U(x_0, \varepsilon/3) \subset O$ . 故  $O$  为开集.

2.  $\bar{O} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, F) \leq d(x, E^c)\}$ .

任取  $x^* \in \bar{O}$ , 则存在点列  $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset O$  使得  $x_k \rightarrow x^*$ . 由于  $d(x_k, F) < d(x_k, E^c)$  对所有  $k \in \mathbb{N}$  成立, 因此令  $k \rightarrow \infty$  可以得到  $d(x^*, F) \leq d(x^*, E^c)$ .

3.  $\bar{O} \cap E^c = \phi$ .

事实上, 如果  $x \in \bar{O} \cap E^c$ , 则

$$d(x, F) \leq d(x, E^c) = 0 \implies d(x, F) = 0.$$

由于  $F$  是紧集, 上述结果意味着  $x \in F$ , 从而  $F \cap E^c \neq \phi$ , 矛盾!

综合以上结果, 可以得到  $F \subset O \subset \bar{O} \subset E$ .

习题 13 20220907

14. 解答从略. 欲证明极限存在, 通常需要使用不等式放缩, 如  $|\sin x| \leq |x|$ ; 欲证明极限不存在, 则只需证明可以使用不同的方式逼近极限点而函数值极限不等.

16. (1) 为方便起见, 记

$$g(x, y) = \frac{f(x)f(y)}{f^2(x) + f^2(y)}.$$

如果  $g(x, y)$  在  $E \ni (x, y) \rightarrow 0$  的极限存在, 则其值应与  $x = y$  时的极限相等, 即

$$\lim_{E \ni (x, y) \rightarrow 0} g(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(x)}{f^2(x) + f^2(x)} = \frac{1}{2}.$$

而另一方面, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 可任取  $x \in U_0(0, \varepsilon/2)$ , 然后取  $y \in U_0(0, \varepsilon/2)$ , 使得

$$|f(y)| < \varepsilon |f(x)|.$$

这样的  $y$  存在是由于  $f(x) \neq 0$  且  $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 0$ . 对于这样的  $x, y$  我们有

$$|g(x, y)| \leq \left| \frac{f(y)}{f(x)} \right| < \varepsilon \implies \left| g(x, y) - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{4}.$$

由于  $\varepsilon$  可以充分小, 因此  $g(x, y)$  不以  $\frac{1}{2}$  为极限值, 矛盾!

另一种证法是定义序列  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  使得  $f(x_{k+1})/f(x_k) \rightarrow 0$  (课本参考答案).

(2) 仿照上面的方法, 实际上可以证明

$$\lim_{E \ni (x, y) \rightarrow 0} \frac{f^2(x)f^2(y)}{f^4(x) + f^4(y)}$$

不存在.

**18. 思路** 在一致存在的条件

$$|f(x, y) - h(y)| < \varepsilon$$

中令  $y \rightarrow b$ , 从而得到  $\left|g(x) - \lim_{y \rightarrow b} h(y)\right| < \varepsilon$ , 即关于  $h(y)$  的极限信息.

**解答** 根据条件, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得  $x \in U_0(a, \delta)$  且  $y \neq b$  时有

$$f(x, y) - \varepsilon < h(y) < f(x, y) + \varepsilon. \quad (*)$$

在其中令  $y \rightarrow b$ , 可以得到

$$g(x) - \varepsilon \leq \varliminf_{y \rightarrow b} h(y) \leq \varlimsup_{y \rightarrow b} h(y) \leq g(x) + \varepsilon.$$

特别的, 我们有

$$\varlimsup_{y \rightarrow b} h(y) - \varliminf_{y \rightarrow b} h(y) \leq 2\varepsilon.$$

由于  $\varepsilon$  可以充分小, 因此  $\varlimsup_{y \rightarrow b} h(y) = \varliminf_{y \rightarrow b} h(y)$ . 定义  $c := \lim_{y \rightarrow b} h(y)$ , 并将 (\*) 改写为

$$h(y) - \varepsilon < f(x, y) < h(y) + \varepsilon, \quad \forall x \in U_0(a, \delta), \quad (**)$$

然后令  $y \rightarrow b$ , 可以得到

$$c - \varepsilon \leq g(x) \leq c + \varepsilon, \quad \forall x \in U_0(a, \delta).$$

由于  $\varepsilon$  可以任意小, 我们得到

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c.$$

最后, 在 (\*\*) 的条件下, 可以选择  $\delta_1 < \delta$  使得当  $y \in U_0(b, \delta_1)$  时, 一定有

$$|g(y) - c| < \varepsilon.$$

因此由 (\*\*) 可以得到: 当  $x \in U_0(a, \delta_1)$  且  $y \in U_0(b, \delta_1)$  时, 有

$$|f(x, y) - c| < 2\varepsilon.$$

由于  $\varepsilon$  可以充分小, 因此可得

$$\lim_{E \ni (x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = c.$$

### 3 补充题目

1. (周民强, 例 1.3.9) 设函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有连续的一阶导数  $f'(x)$ . 证明: 函数

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, & x \neq y \\ f'(x), & x = y \end{cases}$$

在  $\mathbb{R}^2$  上连续.

**思路**  $F(x, y)$  在不同区域上的定义不同, 因此在使用  $\varepsilon - \delta$  语言时需要分类讨论.

**证明** 显然  $F(x, y)$  在  $x \neq y$  上的区域连续. 取定  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 来证明  $F(x, y)$  在  $(x_0, x_0)$  处连续, 即对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得  $x, y \in U(x_0, \delta)$  时有  $|F(x, y) - F(x_0, x_0)| < \varepsilon$ .

由于  $f'(x)$  在  $x_0$  处连续, 因此存在  $\delta > 0$  使得当  $x \in U(x_0, \delta)$  时一定有  $|f'(x) - f'(x_0)| < \varepsilon$ . 我们来验证这样选择的  $\delta > 0$  符合题目要求. 考察以下两种情形:

- 若  $x \neq y$  且  $x, y \in U(x_0, \delta)$ , 则由 Lagrange 中值定理, 存在  $\theta \in (0, 1)$  使得

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x_0) = f'(\theta x + (1 - \theta)y) - f'(x_0).$$

由于

$$|\theta x + (1 - \theta)y - x_0| \leq \theta|x - x_0| + (1 - \theta)|y - x_0| < \delta,$$

故  $|F(x, y) - F(x_0, y_0)| < \varepsilon$ .

- 若  $x = y \in U(x_0, \delta)$ , 则

$$|F(x, x) - F(x_0, x_0)| = |f'(x) - f'(x_0)| < \varepsilon.$$

以上两种情形中, 都有  $|F(x, y) - F(x_0, x_0)| < \varepsilon$ , 因此  $F(x, y)$  在  $(x_0, x_0)$  处连续.

该题也可以直接使用一般化的中值定理  $F(x, y) = f'(\theta x + (1 - \theta)y)$  来证明.

2. (1) 设  $f(x)$  是  $\mathbb{R}^n$  上的有界函数. 证明:  $f(x)$  在  $\mathbb{R}^n$  上连续当且仅当其图像

$$G = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}$$

在  $\mathbb{R}^{n+1}$  中是闭集.

(2) 如果去掉  $f(x)$  是有界的条件, 结论是否成立?

**解答** (1) 一方面, 当  $f(x)$  连续时, 证明  $G$  为闭集, 即  $\bar{G} \subset G$ . 任取  $(x^*, y^*) \in \bar{G}$ , 则存在点列

$\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset G$  使得  $(x_k, y_k) \rightarrow (x^*, y^*)$ . 根据  $G$  的定义, 有  $y_k = f(x_k)$ . 由于  $f$  的连续性, 有  $f(x_k) \rightarrow f(x^*)$ , 因此  $y^* = f(x^*)$ , 从而  $(x^*, y^*) \in G$ .

另一方面, 当  $G$  为闭集时, 证明  $f(x)$  连续. 如果  $f(x)$  在  $x^* \in \mathbb{R}^n$  处不连续, 则存在  $\varepsilon_0 > 0$  以及收敛到  $x^*$  的点列  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ , 使得

$$|f(x_k) - f(x^*)| \geq \varepsilon_0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

由于  $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$  在  $\mathbb{R}$  上有界, 因此由 Weierstrass 定理,  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  有子列  $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$  使得

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{k_j}) = y^* \in \mathbb{R}$$

由 (\*) 可得  $|y^* - f(x^*)| \geq \varepsilon_0$ . 注意  $(x^*, y^*)$  是  $G$  中点列  $\{(x_{k_j}, f(x_{k_j}))\}_{j=1}^{\infty}$  的极限点, 我们有  $(x^*, y^*) \in G$ . 于是, 在  $f(x)$  的图像  $G$  中,  $x^*$  同时对应两个不同的函数值  $f(x^*)$  和  $y^*$ , 矛盾! 因此  $f(x)$  必定连续.

(2) 不一定对. 取

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

**3.** (在每个线性方向上连续的函数不一定连续) 设函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}^n$  上有定义. 如果对任何单位向量  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  ( $\mathbb{S}^{n-1}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的单位球面), 都有  $\lim_{\mathbb{R} \ni t \rightarrow 0} f(tv) = 0$ , 是否一定有  $\lim_{\mathbb{R}^n \ni x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ?

**解答** 答案是否定的. 考察  $\mathbb{R}^2$  上的函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \max\left\{0, \frac{y}{x^2}\left(1 - \frac{y}{x^2}\right)\right\}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

则  $f(x, y)$  满足题目所述的条件.

首先,  $f(x, y)$  在直线  $x = 0$  和  $y = 0$  上的极限为 0, 即  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$ .

其次,  $f(x, y)$  在直线  $y = kx (k \neq 0)$  上的极限为 0. 这是因为当  $y = kx$  时,

$$f(x, y) = \max\left\{0, \frac{k}{x}\left(1 - \frac{k}{x}\right)\right\}.$$

当  $\frac{k}{x} \leq 0$  或  $\frac{k}{x} \geq 1$  时, 一定有  $\frac{k}{x}\left(1 - \frac{k}{x}\right) \leq 0$ , 因此有  $f(x, kx) = 0$ , 从而  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = 0$ .

最后, 在曲线  $y = \frac{x^2}{2}$  上,  $f(x, y) \equiv \frac{1}{4}$ , 因此  $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(x, \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{4}$ . 于是  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处不连续.

4. 设  $g \in C(\mathbb{R})$ ,  $f(x, y) := g(xy)$ . 若  $f$  在  $\mathbb{R}^2$  上一致连续, 则  $g$  恒为常数.

**解答** 往证任意  $x \in \mathbb{R}$ , 有  $g(x) = g(0)$ . 由于  $f(x, y)$  一致连续, 故对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得

$$|x_1 - x_2| \leq \delta, |y_1 - y_2| \leq \delta \implies |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon. \quad (1)$$

特别的,

$$|g(x) - g(0)| = \left| f\left(\frac{x}{\delta}, \delta\right) - f\left(\frac{x}{\delta}, 0\right) \right| < \varepsilon.$$

由于  $\varepsilon$  可以任意小, 因此有  $g(x) = g(0)$ . 从而  $g$  为常数.

5. (周民强, 例 1.3.2) 设定义在  $\mathbb{R}^2$  上的函数  $f(x, y)$  满足:

- (i)  $f(x, y)$  关于变量  $x, y$  均连续;
- (ii) 对任何有界闭集  $K \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f(K) \subset \mathbb{R}^1$  为有界闭集.

证明:  $f(x, y)$  在  $\mathbb{R}^2$  上连续.

**思路** 若使用反证法, 则可假设点列  $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^2$  收敛到原点且使得  $|f(x_k, y_k)| \geq \varepsilon_0$  成立. 此时,  $K := \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^\infty \cup \{(0, 0)\}$  是有界闭集. 如何使得  $f(K) = \{f(x_k, y_k)\}_{k=1}^\infty \cup \{f(0, 0)\}$  不是闭集呢? 于是, 我们希望证明  $\{f(x_k, y_k)\}_{k=1}^\infty$  有一个不在  $f(K)$  中的聚点.

**解答** 只需证明  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处连续. 不妨假设  $f(0, 0) = 0$ . 若结论不成立, 则存在收敛到原点的点列  $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^2$ , 使得  $|f(x_k, y_k)| \geq \varepsilon_0 > 0$  对所有  $k \in \mathbb{N}$  成立. 由于

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, 0) = f(0, 0) = 0,$$

故存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $k > N$  时, 一定有  $|f(x_k, 0)| \leq \varepsilon_0/2$ . 注意到  $f(x_k, y)$  关于  $y$  连续, 因此当  $k > N$  时, 存在介于 0 和  $y_k$  之间的实数  $y'_k$  使得

$$|f(x_k, y'_k)| = \frac{k\varepsilon_0}{k+1}, \quad \forall k > N.$$

定义集合  $K := \{(x_k, y'_k)\}_{k=N+1}^\infty \cup \{(0, 0)\}$ , 则  $\{(0, 0)\}$  是  $K$  唯一聚点, 从而  $K$  为有界闭集. 故

$$f(K) = \{f(x_k, y'_k)\}_{k=N+1}^\infty \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$$

为有界闭集. 由于  $|f(x_k, y'_k)| = k\varepsilon_0/(k+1)$ , 因此  $f(K)$  有一个聚点在集合  $\{+\varepsilon_0, -\varepsilon_0\}$  中. 但  $+\varepsilon_0$  和  $-\varepsilon_0$  均不在  $f(K)$  当中, 故  $f(K)$  不是闭集, 矛盾!

6. (周民强, 例 1.3.3) 设定义在  $\mathbb{R}^2$  上的函数  $f(x, y)$  满足:

- (i)  $f(x, y)$  关于变量  $x, y$  均连续;



(ii) 当  $y$  的值固定时,  $f(x, y)$  关于变量  $x$  单调.

证明:  $f(x, y)$  在  $\mathbb{R}^2$  上连续.

**思路** 该题目并未要求  $f(x, y)$  对于不同的  $y$  的增减性是相同的, 例如  $f(x, y) = xy$  满足题目所述条件, 但  $y < 0$  和  $y > 0$  时的增减性不同. 本题由于单调性的特殊结构, 不适合用反证法进行证明. 证明策略是在每个  $(x_0, y_0)$  附近构造一个小矩形, 然后在小矩形内部对函数值进行估计.

**解答** 任取  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , 往证  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处连续, 即对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in U(x_0, \delta), \quad \forall y \in U(y_0, \delta). \quad (1)$$

由于  $f(x, y_0)$  在  $x = x_0$  处连续, 故存在  $\delta_1 > 0$  使得

$$|f(x_0 - \delta_1, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x_0 + \delta_1, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

接着, 由于  $f(x_0 - \delta_1, y)$  在  $y = y_0$  处连续, 存在  $\delta_2 > 0$  使得

$$|f(x_0 - \delta_1, y) - f(x_0 - \delta_1, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall y \in U(y_0, \delta_2).$$

进一步, 可以得到

$$|f(x_0 - \delta_1, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \quad \forall y \in U(y_0, \delta_2). \quad (2)$$

类似的, 存在  $\delta_3 > 0$  使得

$$|f(x_0 + \delta_1, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \quad \forall y \in U(y_0, \delta_3). \quad (3)$$

令  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ . 我们来说明这样的  $\delta$  满足 (1) 中的要求.

对于任意  $x \in U(x_0, \delta)$  和  $y \in U(y_0, \delta)$ , 有  $x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ . 根据  $f(x, y)$  关于  $x$  的单调性,  $f(x, y)$  的值位于  $f(x_0 - \delta_1, y)$  和  $f(x_0 + \delta_1, y)$  之间. 由 (2)(3) 即可得到

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

因此 (1) 成立. 故  $f(x, y)$  在  $\mathbb{R}^2$  上连续.

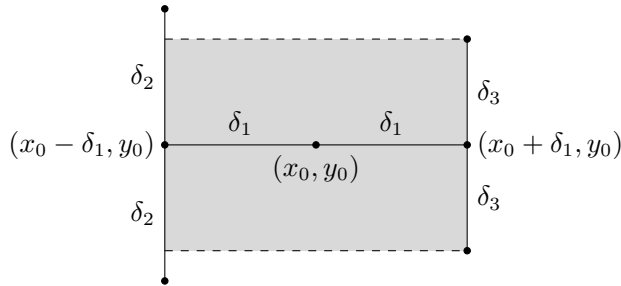


图 1: 构造  $(x_0, y_0)$  附近的矩形, 使得  $f(x, y)$  的值可以被控制.