数学分析 III 课件

叶胥达

2022 年 11 月 10 日

1　知识回顾

$\mathbb{R}^n$ 中集合的体积

对任何有界集合 $E \subset \mathbb{R}^n$, 可定义其大体积和小体积为

$$M(E) = \inf M(\mathcal{A}_E), \quad m(E) = \sup m(\mathcal{A}_E),$$

其中 $M(\mathcal{A}_E)$ 和 $m(\mathcal{A}_E)$ 表示, 在闭长方体族 $\mathcal{A}_E$ 中, 与 E 的交非空以及与完全包含于 E的长方体的体积之和. 我们可以使用下面的方式来判断集合 E 是否可求体积:

- E 可求体积 $\Longleftrightarrow M(E) = m(E) \Longleftrightarrow \inf\big(M(\mathcal{A}_E) - m(\mathcal{A}_E)\big) = 0 \Longleftrightarrow V(\partial E) = 0$.

  因此, 可以通过计算 E 的边界 ∂E 或者估计 $M(\mathcal{A}_E) - m(\mathcal{A}_E)$ 来判断 E 是否可求体积. 注意, $M(E) = m(E) \Longrightarrow \inf\big(M(\mathcal{A}_E) - m(\mathcal{A}_E)\big) = 0$ 的证明需要用到公共加细的一个技巧.

  根据 $M(E)$ 的定义, 存在包含整个 E的长方体族 $\mathcal{A}^{(1)}$ 使得 $V(\mathcal{A}^{(1)}) < M(E) + \varepsilon$. 类似的, 根据 $m(E)$ 的定义, 存在完全包含于 E的长方体族 $\mathcal{A}^{(2)}$ 使得 $V(\mathcal{A}^{(2)}) > m(E) - \varepsilon$. 将 $\mathcal{A}^{(2)}$ 中的每个长方体的每个面 (这是一个 $n-1$ 维的超平面) 对 $\mathcal{A}^{(1)}$ 中的长方体进行切割, 可以得到一个长方体族 $\mathcal{A}_E$, 它是 $\mathcal{A}^{(1)}$ 和 $\mathcal{A}^{(2)}$ 的加细, 并且

  $$V(\mathcal{A}^{(2)}) \leqslant m(\mathcal{A}_E) \leqslant M(\mathcal{A}_E) \leqslant V(\mathcal{A}^{(1)}) \Longrightarrow M(\mathcal{A}_E) - m(\mathcal{A}_E) < 2\varepsilon.$$

  由于 ε 可以任意小, 我们得到 $\inf\big(M(\mathcal{A}_E) - m(\mathcal{A}_E)\big) = 0$.

- $V(E) = 0 \Longleftrightarrow \inf M(\mathcal{A}_E) = 0$.

  这就是说, E 是零体积集当且仅当对任何 $\varepsilon > 0$, 存在一个闭长方体族 $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k=1}^K$ 使得

  $$E \subset \bigcup_{k=1}^K A_k, \quad V(\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^K V(A_k) < \varepsilon.$$

- 由于 E 可求体积当且仅当 $V(\partial E)=0$, 可以得到如下推论:
    1. 设 A, B 是 $\mathbb{R}^n$ 中可求体积的有界集合, 则 $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$ 均可求体积.
    这是因为 $\partial(A\cup B), \partial(A\cap B), \partial(A\backslash B)\subset \partial A\cup\partial B$.
    2. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域, 则 D 可求体积 $\Longleftrightarrow$ $\bar{D}$ 可求体积.
    注意, 区域是指道路连通的开集, 而闭区域是指区域的闭包.

例 1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是可求体积的有界闭区域, 函数 $y=h(x)$ 在 Ω 上连续, 且 $h(x)\geqslant 0$. 证明集合 $D=\{(x,y): x\in\Omega, 0\leqslant y\leqslant h(x)\}$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中可求体积.

在上述问题中, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的集合, 而 D 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的集合, 因此直接证明 D 边界 (包括上下底和侧面) 的体积为 0 可能并不容易. 因此我们直接来估计 $M(D)-m(D)$.

证明 由于 $h(x)$ 在 Ω 上一致连续, 故可设 $0\leqslant h(x)\leqslant H$, 且对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$|x-y|\leqslant\delta\Longrightarrow|h(x)-h(y)|\leqslant\varepsilon. \tag{1}$$

由于 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 可求体积, 故存在长方体族 $\mathcal{A}_\Omega$ 使得 $M(\mathcal{A}_\Omega)-m(\mathcal{A}_\Omega)<\varepsilon$. 不妨设 $\mathcal{A}_\Omega$ 中的每一个长方体的直径都不超过 δ, 否则将 $\mathcal{A}_\Omega$ 替换为 $\mathcal{A}_\Omega$ 的细分即可. 设长方体族 $\mathcal{A}_\Omega$ 由

$$\mathcal{A}_\Omega=\{A_k\}_{k=1}^L, \qquad A_k \text{ 为 } \mathbb{R}^n \text{ 中的闭长方体且与 } E \text{ 交集非空}$$

给出, 并且 $\{A_k\}_{k=1}^K$ 是完全包含于 E 的那些闭长方体. 进一步, 对 $1\leqslant k\leqslant L$, 定义

$$m_k=\inf_{x\in A_k\cap E}h(x), \qquad M_k=\sup_{x\in A_k\cap E}h(x).$$

由于 $h(x)$ 的一致连续性 (1), 有 $M_k-m_k\leqslant\varepsilon$. 注意到, $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 满足

$$\bigcup_{k=1}^K\Big(A_k\times[0,m_k]\Big)\subset D\subset\bigcup_{k=1}^L\Big(A_k\times[0,M_k]\Big),$$

因此 $M(D)-m(D)$ 不超过这两个长方体族的体积之差, 即

$$\begin{aligned}
M(D)-m(D)&\leqslant\sum_{k=1}^L V(A_k)M_k-\sum_{k=1}^K V(A_k)m_k\\
&=\boxed{\sum_{k=1}^K V(A_k)(M_k-m_k)+\sum_{k=K+1}^L V(A_k)M_k}\\
&\leqslant\sum_{k=1}^K V(A_k)\varepsilon+\sum_{k=K+1}^L V(A_k)H\\
&\leqslant V(\Omega)\varepsilon+\big(M(\mathcal{A}_\Omega)-m(\mathcal{A}_\Omega)\big)H\\
&\leqslant V(\Omega)\varepsilon+H\varepsilon.
\end{aligned}$$

注意, $V(\Omega)$ 和 H 均为有限值, 而 ε 可以充分小, 因此 $M(D)=m(D)$, 即 D 可求体积. $\square$

重积分的定义

我们可以用 $\varepsilon-\delta$ 语言来描述 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 上的 Riemann 积分:

定义 1 设 $f(\boldsymbol{x})$ 在可求体积的有界闭区域 D 上有定义. 若对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对一切满足 $\lambda(\Delta)\leqslant\delta$ 的分割 $\Delta=\{\Delta D_k\}_{k=1}^K$, 都有

$$\left|\sum_{k=1}^{K} f(\boldsymbol{\xi}_k)\Delta V_k - I\right| < \varepsilon, \qquad \forall \xi_i\in\Delta D_i,$$

则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 上可积, 且称 I 为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 上的 n 重积分, 记为

$$I=\int_D f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

在上面的定义中, $f(\boldsymbol{x})$ 是被积函数, 而 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的体积微元, 也可以写为 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$. 如果需要特别强调积分区域为 2 维或 3 维区域, 可以写为

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad I=\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

下面的结果可以方便地判定 $f(\boldsymbol{x})$ 是否在 D 上可积:

定理 1 设函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在可求体积的有界闭区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上有界, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 上可积的充分必要条件是: 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 D 的分割 $\Delta D=\{\Delta D_k\}_{k=1}^K$, 使得

$$\omega(\Delta):=\sum_{k=1}^{K}(M_k-m_k)\Delta V_k<\varepsilon,$$

其中 $M_k=\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in D_k} f(\boldsymbol{x})$, $m_k=\inf\limits_{\boldsymbol{x}\in D_k} f(\boldsymbol{x})$.

注意, 上述定理和多重积分的定义的区别在于, 定理只要求存在一个分割 Δ 使得 $\omega(\Delta)<\varepsilon$, 而多重积分的定义要求对一切满足 $\lambda(\Delta)<\delta$ 的分割 D 成立. 这与一元情形的定积分是一致的.

例 2 设函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在可求体积的有界闭区域 D 上有界, 并且在除去 D 的一个零体积集上连续, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 上可积.

证明 设 $|f(x)|\leqslant M$ 对某 $M>0$ 恒成立. 设此零体积集为 F, 则存在闭长方体的并 E_0 使得 $F\subset E_0$, 且 $V(E_0)<\varepsilon/2$. 将 E_0 中的每个闭长方体都扩展为一个体积稍大的开长方体, 可以得到开集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 使得

$$F\subset E, \qquad V(\bar{E})<\frac{\varepsilon}{4M}. \tag{1}$$

注意到 $D\backslash E$ 为有界闭集, 从而 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $D\backslash E$ 上一致连续, 存在 $\delta>0$ 使得

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D\backslash E, \quad |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})| < \frac{\varepsilon}{2V(D)}. \tag{2}$$

将 $D\backslash E$ 划分为若干个直径不超过 δ 的闭区域之并, 可以得到分割 $\Delta_1=\{\Delta D_k\}_{k=1}^K$, 由 (2) 有

$$\omega(\Delta_1)=\sum_{k=1}^K \omega_k \Delta V_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2V(D)} \sum_{k=1}^K \Delta V_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

在分割 Δ_1 中加上 $\bar{E}\cap D$ 可以得到一个新的分割 Δ_2, 它是 D 的一个分割, 由 (1) 有

$$\omega(\Delta_2) \leqslant \sum_{k=1}^K \omega_k \Delta V_k + 2M\cdot V(\bar{E}\cap D) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}=\varepsilon.$$

因此 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 上是可积的. □

- 观察函数的奇偶性. 利用函数的对称性可以大幅简化被积函数或积分区域.
- 使用恰当的变量替换来简化简化被积函数或积分区域.
- 当积分区域十分复杂时, 对区域进行合适的划分, 使得每个小区域中的积分相对容易计算.

2 课本习题

2. 我们来证明 $m(D\cap E)=0$ 而 $M(D\cap E)=1$.

一方面, 不可能有任何闭长方体完全包含于 $D\cap E$, 因此 $m(D\cap E)=0$. 另一方面, 如果有一些闭长方体的并 A 使得 $D\cap E\subset A$, 则由于 A 是闭集, $D\cap E$ 的闭包也完全含于 A, 即 $[0,1]^2\subset A$. 因此 $M(D\cap E)=1$.

5. 不妨设 $\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$, 并定义

$$D_1=\{(x,y)\in D: g(x,y)>0\}.$$

由 $g(x,y)$ 在 D 上连续, D_1 为非空开集, 且 $\bar{D}_1$ 是 $g(x,y)$ 的支撑集. 由 $f(x,y)$ 在 $\bar{D}_1$ 上连续, 令

$$M=\max_{(x,y)\in\bar{D}_1} f(x,y), \qquad m=\min_{(x,y)\in\bar{D}_1} f(x,y).$$

由于 $m\leqslant f(x,y)\leqslant M$ 对 $(x,y)\in\bar{D}_1$ 恒成立, 有

$$mg(x,y)\leqslant f(x,y)g(x,y)\leqslant Mg(x,y), \qquad \forall (x,y)\in D.$$

两端对 $(x,y)\in D$ 积分后可得

$$m\leqslant Q:=\frac{\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\leqslant M.$$

下面进行分类讨论:

- 若 $Q=m$, 则有 $\big(f(x,y)-m\big)g(x,y)\geqslant 0$, 且

  $$\iint_D \big(f(x,y)-m\big)g(x,y)=0.$$

  由于 $g(x,y)$ 在 D_1 上恒正, 因此当 $(x,y)\in D_1$ 时总有 $f(x,y)=m$. 显然 D_1 有无穷元素.

- 若 $Q=M$, 可以使用与上面类似的方法论证.

- 若 $m<Q<M$, 设 $f(x_1,y_1)=M$, $f(x_2,y_2)=m$, 其中 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$. 由 $f(x,y)$ 的连续性, 在 (x_1,y_1) 的邻域内存在点 $(x_1',y_1')\in D$, 在 (x_2,y_2) 的邻域内存在点 $(x_2',y_2')\in D$,

  $$f(x_1',y_1')>Q,\qquad f(x_2',y_2')<Q.$$

  由于 D° 是道路连通集, 故在 D° 中存在无穷多条连接 (x_1',y_1') 和 (x_2',y_2') 的连续曲线; 在其中任何一条连续曲线上, 根据连续函数的介值定理, 都存在 (ξ,η) 使得 $f(\xi,\eta)=Q$.

3 补充习题

1. 记 $D=[0,1]^2$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的单位正方形. 若函数 $u(x,y)\in C^3(\mathbb{R}^2)$ 在 $(x,y)\notin D$ 取值为 0, 证明:

$$\iint_D |u''_{xy}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D u''_{xx}u''_{yy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

思路 本题考察化重积分为累次积分. 一般的, 可以证明函数 $u(x_1,\cdots,x_n)\in H_0^2(D)$ 满足

$$\int_D\sum_{i,j=1}^n|u''_{x_ix_j}|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_D|\Delta u|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

证明 化重积分为累次积分, 并由分部积分公式, 可以得到

$$\begin{aligned}\iint_D |u_{xy}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 u_{xy}u_{xy}\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x\left(u_{xy}u_x\Big|_0^1 - \int_0^1 u_{xyy}u_x\mathrm{d}y\right) \\ &= -\iint_D u_{xyy}u_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 u_{xyy}u_x\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \mathrm{d}y\left(u_{yy}u_x\Big|_0^1 - \int_0^1 u_{xx}u_{yy}\mathrm{d}x\right) \\ &= \iint_D u_{xx}u_{yy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

故命题得证.

2. (谢惠民例 22.3.3) (1) 设常数 $a > b > 0$, $R > 0$. 计算二重积分

$$I = \iint_{\substack{x,y\geqslant 0\\ x^2+y^2\leqslant R^2}} \frac{xy}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 设常数 $a > b > c > 0$, $R > 0$. 计算三重积分

$$I = \iiint_{\substack{x,y,z\geqslant 0\\ x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}} \frac{xyz}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

思路 本题考察二重积分和三重积分的变量替换.

证明 (1) 作换元 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 则 $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$. 由于 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, 有

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^R r\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{a^2r^2\cos^2\theta+b^2r^2\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta\\
&=\int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{R^3}{6}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}(\sin^2\theta)}{\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\sin^2\theta}}\qquad(t=\sin^2\theta)\\
&=\frac{R^3}{6}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2+(b^2-a^2)t}}\\
&=\frac{R^3}{3}\frac{\sqrt{a^2+(b^2-a^2)t^2}}{b^2-a^2}\bigg|_{t=0}^{t=1}\\
&=\frac{R^3}{3(a+b)}.
\end{aligned}$$

因此原积分的值为 $I=\dfrac{R^3}{3(a+b)}$.

(2) 作换元 $x=r\sin\varphi\cos\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\varphi$, 则 $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\theta,\varphi\leqslant\pi/2$. 由于

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

我们有

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\frac{r^3\sin\varphi^2\cos\varphi\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{a^2r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2r^2\cos^2\varphi}}\mathrm{d}\theta\\
&=\int_0^R r^4\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi}}\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{R^5}{5}\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi}}\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

作换元 $u=\sin^2\varphi$, $v=\sin^2\theta$, 可以得到

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{R^5}{20}\int_0^1 u\mathrm{d}u\int_0^1 \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{a^2u(1-v)+b^2uv+c^2(1-u)}}\\
&= \frac{R^5}{20}\int_0^1 u\mathrm{d}u\int_0^1 \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{[c^2+(a^2-c^2)u]+(b^2-a^2)uv}}\\
&= \frac{R^5}{10}\int_0^1 u\mathrm{d}u\frac{\sqrt{c^2+(a^2-c^2)u]+(b^2-a^2)uv}}{(b^2-a^2)u}\Bigg|_{v=0}^{v=1}\\
&= \frac{R^5}{10(b^2-a^2)}\int_0^1\left(\sqrt{c^2+(b^2-c^2)u}-\sqrt{c^2+(a^2-c^2)u}\right)\mathrm{d}u\\
&= \frac{R^5}{10(b^2-a^2)}\left[\frac{2}{3(b^2-c^2)}\left(c^2+(b^2-c^2)u\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{u=0}^{u=1}-\frac{2}{3(a^2-c^2)}\left(c^2+(b^2-c^2)u\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{u=0}^{u=1}\right]\\
&= \frac{R^5}{15(b^2-a^2)}\left[\frac{b^3-c^2}{b^2-c^2}-\frac{a^3-c^3}{a^2-c^2}\right]\\
&= \frac{R^5}{15}\cdot\frac{ab+bc+ca}{(a+b)(b+c)(c+a)}.
\end{aligned}
$$

因此原积分的值为 $I=\dfrac{R^5}{15}\cdot\dfrac{ab+bc+ca}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

3. (周民强例 6.2.20) 计算由下列曲面围成的立体的体积.

(1) $(x^2+y^2+z^2)^n=x^{2n-1}$, 其中 n 为正整数.

(2) $\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_ix_j=1$, 其中 $A=(a_{ij})$ 为 3 阶正定对称矩阵.

证明 (1) 作换元 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi\cos\theta$, $z=r\sin\varphi\sin\theta$, 则曲线的方程成为

$$r^{2n}=r^{2n-1}\cos^{2n-1}\varphi\Longrightarrow r=\cos^{2n-1}\varphi.$$

注意到, $r\geqslant 0$ 隐含着条件 $\cos^{2n-1}\varphi\geqslant 0$, 因此围成的立体的内部可以由 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, $0\leqslant r\leqslant\cos^{2n-1}\varphi$ 来表示. 此时 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$, 因此立体的体积为

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos^{2n-1}\varphi} r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\\
&= 2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{3(2n-1)}\varphi}{3}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\
&= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^{3(2n-1)}\varphi\mathrm{d}(\cos\varphi)\\
&= \frac{2\pi}{3}\int_0^1 t^{3(2n-1)}\mathrm{d}t\\
&= \frac{\pi}{3(3n-1)}.
\end{aligned}
$$

(2) 设 3 阶正交阵 P 使得 $P^{\mathrm{T}}AP = \Lambda$, 其中 $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ 为 A 的特征值. 作换元 $y = P^{\mathrm{T}}x$, 则 $x^{\mathrm{T}}Ax = y^{\mathrm{T}}\Lambda y$, 故

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j \leqslant 1$$

的体积等于

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i y_i^2 \leqslant 1$$

的体积. 这是一个半径分别为 $1/\sqrt{\lambda_1}, 1/\sqrt{\lambda_2}, 1/\sqrt{\lambda_3}$ 的椭圆, 因此其体积为

$$\frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}} = \frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\det A}}.$$