

# 数学分析 III 课件

叶胥达

2022 年 9 月 29 日

## 1 连续、偏导数和可微

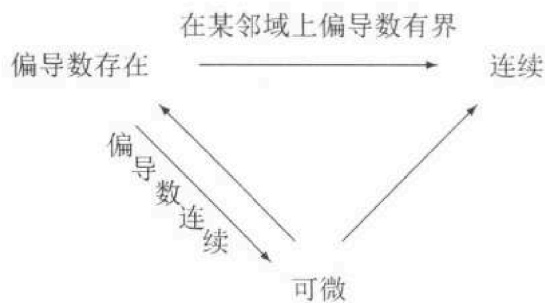
连续、偏导数和可微, 都是用于描述多元函数  $f(\mathbf{x})$  在某一点  $\mathbf{x}^0$  附近的局部性质. 表面上看, 这三种概念对函数  $f(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}^0$  处的光滑性的要求越来越高, 但实际上这些概念之间的严格推导比较复杂, 也存在着许多反例说明一些条件是必要的. 熟练掌握这些推导定理以及反例, 对于我们理解连续、偏导数和可微这几种相似的概念是有帮助的.

首先, 请复习如何使用极限或  $\varepsilon - \delta$  语言来描述  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处所满足的以下三种性质:

- $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处连续;
- $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处存在偏导数  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  和  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ;
- $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处的全微分为  $df(x, y) = A dx + B dy$ .

然后将它们推广到  $n$  元函数  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ .

其次, 这三个概念之间存在如下的推导关系: (谢惠民, p172)



其中较为重要的两个结论是:

1. 若  $f(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}^0$  的某邻域  $U(\mathbf{x}^0, \delta)$  内存在各个偏导数  $\frac{\partial f}{\partial x_i} (i = 1, \dots, n)$ , 并且这些偏导数在  $U(\mathbf{x}^0, \delta)$  内有界, 则  $f(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}^0$  处连续.
2. 若  $f(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}^0$  的某邻域  $U(\mathbf{x}^0, \delta)$  内存在各个偏导数  $\frac{\partial f}{\partial x_i} (i = 1, \dots, n)$ , 并且这些偏导数在  $\mathbf{x}^0$  处连续, 则  $f(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}^0$  处可微.

同时, 也存在一些反例, 说明这些结论几乎不可能更弱.

1. 各个偏导数有界, 但是在  $\mathbf{x}^0$  处不可微:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2. 偏导数不连续且无界, 却在  $\mathbf{x}^0$  处可微:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

最后, 需要强调应用链式法则时必须要求外层函数可微, 仅仅要求偏导数存在是不够的.

## 2 习题解答

习题十三 20220914

**20. (1) 思路** 由于  $f(x, y)$  关于  $y$  单调上升, 因此可以构造  $(x_0, y_0)$  附近的矩形来控制其中的函数值. 不过, 在本题当中,  $D = [0, 1] \times [0, 1]$  包含边界, 因此在讨论矩形的范围时需注意不越界.

**解答** 设  $(x_0, y_0) \in D$ , 往证  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处连续, 即  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得

$$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon. \quad (1)$$

由于  $f(x_0, y)$  关于  $y$  连续, 因此存在  $\delta_1 > 0$  使得

$$|y - y_0| \leq \delta_1 \implies |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

令  $y^+ = \min(y_0 + \delta_1, 1)$ ,  $y^- = \max(y_0 - \delta, 0)$ . 由于  $f(x, y^+)$  关于  $x$  连续, 因此存在  $\delta_2 > 0$  使得

$$|x - x_0| < \delta_2 \implies |f(x, y^+) - f(x_0, y^+)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 (2) 可得  $|f(x_0, y^+) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , 因此

$$|x - x_0| < \delta_2 \implies |f(x, y^+) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon. \quad (3)$$

类似地, 由于  $f(x, y^-)$  关于  $x$  连续, 存在  $\delta_3 > 0$  使得

$$|x - x_0| < \delta_2 \implies |f(x, y^-) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon. \quad (4)$$

取  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ . 我们来说明  $\delta$  符合 (1) 的要求.

事实上, 当  $|y - y_0| < \delta$  时, 有  $y \in [y^-, y^+]$ . 由  $f(x, y)$  关于  $y$  的单调性, 有

$$f(x, y^-) \leq f(x, y) \leq f(x, y^+).$$

因此由 (3)(4) 有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \max\{|f(x, y^+) - f(x_0, y_0)|, |f(x, y^-) - f(x_0, y_0)|\} < \varepsilon,$$

因此 (1) 成立. 命题得证.

(2) 往证  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处连续, 即  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得

$$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

首先, 由于  $f(x, y_0)$  在  $x = x_0$  处连续, 知存在  $\delta_1 > 0$  使得

$$|x - x_0| < \delta_1 \implies |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

其次, 根据条件, 存在  $\delta_2$  使得

$$|y - y_0| < \delta_2 \implies |f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

最后, 取  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ , 则由三角不等式,

$$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

故命题得证.

**22.** 利用开集和连续性的定义即可证明. 参考谢惠民命题 18.2.1.

**25.** 本题的关键在于, 对任何相异两点  $P_1, P_2 \in D$ , 都存在无穷条连续曲线连接  $P_1, P_2$  两点, 并且这些曲线除首尾外两两不交. 尽管该命题非常直观的, 但是仍然需要稍加详细地说明其原因, 因为  $D = [0, 1] \times [0, 1]$  是一个有限集合, 它很大程度上限制了曲线的走向. 因此, 这些曲线的选取依赖于  $P_1, P_2$  在  $D$  中的相对位置, 不能直接不加证明地指出曲线有无穷多条.

以下是一个可行的证明. 令点  $P_0$  为  $P_1 P_2$  的中点, 则  $P_0 \in D$ . 令直线  $l$  过点  $P_0$  且垂直于  $P_1 P_2$ .

- 若  $P_0$  在  $D$  的内部, 则  $l$  上存在点  $P_3 \neq P_0$  使得  $P_3 \in D$ .
- 若  $P_0$  在  $D$  的边界上, 则线段  $P_1P_2$  也在边界上. 此时  $l$  在  $D$  内部的部分上有一点  $P_3 \neq P_0$ .

总之, 存在点  $P_3 \in D$ ,  $P_3 \neq P_0$ , 且  $P_3$  在  $P_1P_2$  的中垂线上. 考察曲线族  $\{\gamma_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ , 其中

$\gamma_t$  为连接  $P_1, tP_0 + (1-t)P_3, P_2$  三点的折线段.

于是,  $\gamma_t$  为连续曲线, 且对于相异实数  $t \neq t'$ , 曲线  $\gamma_t$  和  $\gamma_{t'}$  仅有首尾相交.

**26.** 易知  $D := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$  是紧集. 由于  $A$  非退化, 故  $f(x) = |Ax|$  在  $D$  上恒取正值. 又由于  $f(x)$  关于  $x$  连续, 故存在  $\lambda > 0$  使得

$$|Ax| \geq \varepsilon, \quad \forall x \in D.$$

由此即可得到  $|Ax| \geq \lambda|x|$  对一切  $x \in \mathbb{R}^n$  成立.

习题十四 20220919 & 20220921

**1. 思路** 本题的关键在于明确各个符号以及上下标的含义.

**解答** 不妨设  $x^0 = 0$ . 下面证明: 若  $f(x)$  在原点的邻域  $U(0, \delta)$  上的偏导数有界, 则  $f(x)$  在原点处连续. 事实上, 对任意  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U(0, \delta)$ , 我们有

$$f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^n [f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, 0) - f(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, \dots, 0)].$$

由 Lagrange 中值定理, 对每个  $k \in \{1, \dots, n\}$ , 存在  $\theta_k \in (0, 1)$  使得

$$f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, 0) - f(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, \dots, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_{k-1}, \theta_k x_k, \dots, 0)x_k,$$

因此

$$f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_{k-1}, \theta_k x_k, 0, \dots, 0)x_k.$$

设  $f(x)$  的各个偏导数的绝对值均不超过  $M$ , 则

$$|f(x) - f(0)| \leq M \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

因此  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续. 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

在点附近有无界的偏导数, 并且在  $(0, 0)$  处连续.

特别注意: 本题不能应用多元 Lagrange 中值定理, 因为定理要求  $f(\mathbf{x})$  可微.

15. 我们用  $x_{1:n-1} := (x_1, \dots, x_{n-1})$  来表示  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$  的前  $n-1$  个分量. 不妨设  $\mathbf{x}^0 = 0$ , 则只需证明: 若  $f(\mathbf{x})$  在原点的邻域  $U(\mathbf{0}, \delta)$  上有  $n$  个偏导数, 且前  $n-1$  个偏导数在  $U(\mathbf{0}, \delta)$  内连续, 则  $f(\mathbf{x})$  在原点处可微.

注意到, 对给定的  $x_n \in \mathbb{R}$ ,  $f(x_{1:n-1}, x_n)$  作为  $x_{1:n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$  的函数总具有连续的偏导数. 因此,  $f(x_{1:n-1}, x_n)$  关于  $x_{1:n-1}$  可微. 由多元 Lagrange 中值定理, 存在  $\theta \in (0, 1)$  使得

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}) &= f(x_{1:n-1}, x_n) - f(0, x_n) + f(0, x_n) - f(0, 0) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\theta x_{1:n-1}, x_n) x_k + (f(0, x_n) - f(0, 0)). \end{aligned} \quad (1)$$

当  $\mathbf{x} \rightarrow 0$  时, 由于  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  在原点连续, 有

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\theta x_{1:n-1}, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(0, 0) = o(1) \implies \frac{\partial f}{\partial x_k}(\theta x_{1:n-1}, x_n) x_k - \frac{\partial f}{\partial x_k}(0, 0) x_k = o(|\mathbf{x}|),$$

从而由 (1) 可以得到

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_k}(0, 0) x_k + (f(0, x_n) - f(0, 0)). \quad (2)$$

最后, 根据偏导数  $\frac{\partial f}{\partial x_n}$  的定义, 有

$$f(0, x_n) - f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(0, 0) x_n + o(x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(0, 0) x_n + o(|\mathbf{x}|). \quad (3)$$

由 (2)(3) 可以得到

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(0, 0) x_k + o(|\mathbf{x}|),$$

因此  $f(\mathbf{x})$  在原点处可微.

特别注意: 本题应用多元 Lagrange 中值定理时一定要验证  $f(x_{1:n-1}, x_n)$  关于  $x_{1:n-1}$  是可微的. 多元 Lagrange 中值定理应用的必要条件是可微性, 而偏导数的存在性不足以得到可微. 从本质上说, 本题需要在  $n-1$  个方向上使用中值定理, 并在最后一个方向上使用偏导数的定义. 如果在所有方向上都使用了中值定理, 那么就是错误的解答, 因为最后一个偏导数未必在此连续.

23. (1) 设  $M$  为  $f(\mathbf{x})$  的各个偏导数的绝对值的上界. 仿照第 1 题的证明, 可以得到

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq M \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D.$$

注意,  $D$  是凸集保证了连接  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  的线段仍然落在  $D$  中. 故  $f(\mathbf{x})$  一致连续.

### 3 补充题目

1. 定义  $\mathbb{R}^2$  上的集合  $E = \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0, 1]\}$ .

(1) 求出  $E$  的闭包  $\bar{E}$ ; (2) 证明  $\bar{E}$  不是道路连通的.

**思路** 本题看似容易, 但思路并不常规. 这是因为, 连接两点的连续曲线可以有各种各样的形式, 甚至可以让曲线在中间的某一段上往回跑. 使用严格的数学语言对于解决此题是关键.

**解答** 容易得到  $E$  的闭包为  $\bar{E} = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup E$ . 下面证明  $\bar{E}$  不是道路连通的.

否则, 假设  $f : [0, 1] \mapsto \bar{E}$  是连接  $(0, 0)$  和  $(1, \sin 1)$  两点的连续曲线. 设  $f_1, f_2 : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$  分别是  $f$  在  $x, y$  轴上的分量, 即

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t)) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, 1].$$

由于  $f_2(t)$  在  $[0, 1]$  上一致连续, 存在  $\varepsilon > 0$  使得

$$|t - t'| < \varepsilon \implies |f_2(t) - f_2(t')| < 2. \quad (*)$$

注意到  $f_1$  是连续函数, 且  $f_1(0) = 0, f_1(1) = 1$ , 据介值定理, 对每个  $n \in \mathbb{N}$ , 存在  $t_n \in [0, 1]$  使得

$$f_1(t_n) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-1} \implies f_2(t_n) = 1.$$

由于  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  为  $[0, 1]$  中的无穷点列, 故存在正整数  $n < m$  使得  $|t_n - t_m| < \varepsilon$ . 此时

$$f_1(t_m) = \left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-1} < \left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right)^{-1} < f_1(t_n) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-1}.$$

据介值定理, 存在介于  $t_n$  和  $t_m$  之间的实数  $t^*$  使得

$$f_1(t^*) = \left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right)^{-1} \implies f_2(t^*) = -1.$$

故  $|f_2(t^*) - f_2(t_n)| = 2$  且  $|t^* - t_n| < \varepsilon$ . 这与  $f_2$  一致连续的要求  $(*)$  矛盾!

2. (1) 设函数  $f(x)$  在开的凸区域  $D \subset \mathbb{R}^n$  上可微. 证明: 对任何  $x, y \in D$ , 存在  $\theta \in (0, 1)$  使得

$$f(y) - f(x) = \nabla f(\theta x + (1 - \theta)y) \cdot (y - x).$$

(2) 判断下述结论是否成立: 若  $\mathbf{f}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  为可微的向量值函数, 则对任何  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , 存在  $\theta \in (0, 1)$  使得

$$\mathbf{f}(y) - \mathbf{f}(x) = \nabla \mathbf{f}(\theta x + (1 - \theta)y) \cdot (y - x).$$

其中,  $x, y \in \mathbb{R}^n$  均视为列向量, 而  $\nabla \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是  $\mathbf{f}$  的 Jacobi 矩阵.

**思路** 本题的目的是说明, Lagrange 中值定理可以推广到标量值多元函数上, 但是不能应用在向量值函数上. 另外, 可微性的条件是必要的, 因为链式法则必须利用到可微性.

**解答** (1) 作函数  $g(\theta) := \mathbf{f}(\theta x + (1 - \theta)y)$ . 则  $g(0) = y, g(1) = x$ , 且

$$g'(\theta) = \nabla \mathbf{f}(\theta x + (1 - \theta)y) \cdot (x - y).$$

根据一元 Lagrange 中值定理, 存在  $\theta \in (0, 1)$  使得

$$g(1) - g(0) = g'(\theta) \implies \mathbf{f}(y) - \mathbf{f}(x) = \nabla \mathbf{f}(\theta x + (1 - \theta)y) \cdot (y - x).$$

(2) 不成立. 考察函数  $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t)$ , 则  $J\mathbf{f}(t) = (-\sin t, \cos t)$ . 若  $\theta \in (0, 1)$  使得

$$\mathbf{f}(2\pi) - \mathbf{f}(0) = J\mathbf{f}(\theta \cdot 2\pi) \cdot 2\pi,$$

则  $(-\sin 2\pi\theta, \cos 2\pi\theta) = 0$ , 这不可能成立!

**3. 举例说明:** 存在  $\mathbb{R}^2$  上的连续函数  $f(x, y)$ , 使得  $f(x, y)$  的偏导数  $\frac{\partial f}{\partial x}$  和  $\frac{\partial f}{\partial y}$  在  $\mathbb{R}^2$  上存在且一致有界, 但是  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处不可微.

**思路** 本题考察连续、偏导数和可微三个基本概念中的一个反例.

**解答** 考察  $\mathbb{R}^2$  上的函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

直接计算容易得到: 当  $(x, y) \neq (0, 0)$  时,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

显然它们在  $\mathbb{R}^2$  上是有界的. 由于  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处的偏导数均为 0, 因此  $f(x, y)$  可微当且仅当

$$\lim_{(x, y) \rightarrow 0} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \iff \lim_{(x, y) \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

显然, 在直线  $y = x$  上, 上面的极限值非 0, 矛盾! 因此  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处不可微. 另一个例子是

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

4. (周民强 2.1.13) 设  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处可微, 且  $f(0, 0) = 0$ , 若  $g(x, y)$  在  $(0, 0)$  处连续, 证明  $f(x, y)g(x, y)$  在  $(0, 0)$  处可微.

思路 要证  $f$  在  $(0, 0)$  处可微, 先来形式地计算它的偏导数. 由链式法则, 在  $(0, 0)$  处我们有

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}g.$$

但由于  $g$  在  $(0, 0)$  处可能不连续, 链式无法使用. 因此, 应该使用定义来验证  $fg$  的全微分.

解答 为证明  $f(x, y)g(x, y)$  在  $(0, 0)$  处可微, 只需证明

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)g(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)g(0, 0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)g(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0. \quad (1)$$

一方面, 由  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处可微可以得到

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0. \quad (2)$$

因此, 存在  $(0, 0)$  的邻域  $U_\delta$  使得当  $(x, y) \in U_\delta$  时, 有  $|f(x, y)| \leq M\sqrt{x^2 + y^2}$ , 进而有

$$|f(x, y)g(x, y) - f(x, y)g(0, 0)| \leq M\sqrt{x^2 + y^2}|g(x, y) - g(0, 0)|.$$

由于  $g(x, y)$  在  $(0, 0)$  处连续, 我们有

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)g(x, y) - f(x, y)g(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0. \quad (3)$$

由 (2)(3) 即可得到 (1) 成立. 因此,  $f(x, y)g(x, y)$  在  $(0, 0)$  处的全微分形如

$$d(f(x, y)g(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)g(0, 0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)g(0, 0)dy.$$

5. 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  是开区域, 实值函数  $u(x, y), v(x, y)$  在  $\Omega$  上连续可微, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad u^2 + v^2 = C,$$

其中  $C$  为常数. 证明  $u(x, y), v(x, y)$  在  $\Omega$  上均为常值函数.



**思路** 本题的背景是复变函数中的 Cauchy-Riemann 方程.

**解答** 在  $u^2 + v^2 = C$  两端关于  $x$  取偏导数, 有

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \implies u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

在  $u^2 + v^2 = C$  两端关于  $y$  取偏导数, 有

$$u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

联立方程

$$u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

可以得到  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ . 同理可得  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ . 因此  $u, v$  均为常数.

**6.** (周民强 2.1.17) 设  $f(x, y)$  在  $\mathbb{R}^2$  上连续可微. 若

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

证明:  $f(x, y)$  恒为常数.

**解答** 给定  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , 定义一元函数

$$g(t) = f(tx, ty), \quad t \in \mathbb{R},$$

则由链式法则,

$$g'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x} f(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y} f(tx, ty) = 0.$$

因此  $g(t)$  恒为常数, 特别的有  $g(0) = g(1)$ , 即  $f(x, y) = f(0, 0)$ . 故  $f(x, y)$  恒为常数.

**7.** 可微函数  $f(x, y, z)$  是齐次函数的充要条件是  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = nf(x, y, z)$ .

**解答** 如果  $f$  是  $n$  次齐次函数, 则

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$$

对一切  $t \neq 0$  成立. 在两端关于  $t$  取导数, 并根据链式法则, 得到

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty, tz) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty, tz) + z \frac{\partial f}{\partial z}(tx, ty, tz) = nt^{n-1} f(x, y, z).$$

取  $t = 1$ , 则得到题目所需结果.

如果题目结果成立, 考察函数  $g(t) = f(tx, ty, tz)/t^n$ , 其中  $t > 0$ . 则

$$g'(t) = \left[ \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right) f(tx, ty, tz) t^n - f(tx, ty, tz) n t^{n-1} \right] t^{-2n} = 0$$

因此  $g(t) = g(1)$ , 即  $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$ . 因此  $f$  为  $n$  次齐次函数.