Homework

Week 1

习题1.1. 设Ω为$\mathbb{R}^n$上的有界光滑区域, 函数$f \in L^2(\Omega)$. 称$u \in H_0^2(\Omega)$为双调和边值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & x \in \Omega, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的弱解，如果对于$\forall v \in H_0^2(\Omega)$, 积分等式

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

成立. 证明上述边值问题在$H_0^2(\Omega)$中存在唯一的弱解.

习题1.2. 设B_1为$\mathbb{R}^n$上以原点为心的单位球, α是一个正数. 证明$|x|^{-\alpha} \in W^{1,p}(B_1)$当且仅当$\alpha < \dfrac{n-p}{p}$.

习题1.3. 当$n=2$时，叙述和证明定理4.2 ($b_i(x) = 0, d^i(x) = 0, i = 1, \cdots, n$).

习题1.4. 设$1 < p < +\infty$, $q = \dfrac{p}{p-1}$. 设Ω为$\mathbb{R}^n$上的有界Lipschitz区域, 函数$f \in L^q(\Omega)$. 利用变分方法证明p-Laplace方程的边值问题

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

在$W_0^{1,p}(\Omega)$中存在唯一的弱解.

Week 2

习题1.5. 设函数$u \in H^1(\mathbb{R}^n)$具有紧支集且是方程

$$-\Delta u + c(u) = f, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

的弱解，其中$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是一个光滑函数且满足$c(0) = 0$, $c' \geq 0$. 证明$u \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

习题1.6. 设$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是一个光滑凸函数, $a^{ij}(x) \in L^\infty(\Omega), i, j = 1, \cdots, n$满足椭圆性条件. 函数$u \in H^1(\Omega)$是方程

$$\mathcal{L}u = -D_j(a^{ij}(x) D_i u) = 0, \quad x \in \Omega$$

的有界弱解. 记$w = \phi(u)$. 证明w是一个弱下解, 即

$$\mathcal{L}w \leq 0, \quad x \in \Omega.$$

思考题1. 设$1 < p < +\infty$, $q = \dfrac{p}{p-1}$. 设函数$f \in L^q(\mathbb{R}^n)$. 证明p-Laplace方程

$$-\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

弱解的存在性.

Week 3

习题2.1. 证明对于给定的函数

$$f(x)=\frac{x_2^2-x_1^2}{2|x|^2}\Big[\frac{n+2}{(-\ln|x|)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2(-\ln|x|)^{\frac{3}{2}}}\Big],\quad x\neq 0$$

且$f(0)=0$, 位势方程

$$-\Delta u=f(x),\quad x\in B_{\frac{1}{2}}\subset\mathbb{R}^n$$

不存在古典解.

习题2.2. 设$0<\alpha<1$. 证明$|x|^\alpha\in C^\alpha(\bar{B}_1)$.

习题2.3. 设$0<\alpha<1$, $f,g\in C^\alpha(\bar{\Omega})$. 证明$fg\in C^\alpha(\bar{\Omega})$, 且

$$\|fg\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}\leq\|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}\|g\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}.$$

习题2.4. 设$u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$在$\mathbb{R}^n$上满足方程$-\Delta u=f(x)$. 证明：对$\forall R>0$,

$$|D_iu(x)|\leq\frac{n}{R}\mathrm{osc}_{B_R(x)}u+R\,\mathrm{osc}_{B_R(x)}f.$$

Week 4

习题2.5. 证明下列定理.

定理3.1. 设$0<\alpha<1$. 设$f\in C^\alpha(\bar{B}_1^+)$和$u\in C^2(\bar{B}_1^+)$在$B_1^+$上满足$\Delta u=f$且$u|_{x_n=0}=0$, 则

$$[D^2u]_{C^\alpha(B^+_{\frac{1}{2}})}\leq C_0\big(\|f\|_{C^\alpha(\bar{B}_1^+)}+\|u\|_{C(\bar{B}_1^+)}\big),\tag{1}$$

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{B}^+_{\frac{1}{2}})}\leq C_0\big(\|f\|_{C^\alpha(\bar{B}_1^+)}+\|u\|_{C(\bar{B}_1^+)}\big).\tag{2}$$

习题2.6. 证明[CW]的第二章第5节的引理5.1.

Week 5

习题2.7. 选取参数α，构造闸函数$w(x)=\rho^{-\alpha}-|x-y|^{-\alpha}$来证明定理7.2.

思考题2： 利用Campanato空间推导边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f, & x\in B_1,\\ u=0, & x\in\partial B_1\end{cases}$$

的Schauder估计, 其中$f\in C^\alpha(\bar{B}_1)$.

Week 6

习题3.1. (1) 设$f\in L^p(\Omega)$ $(1\leq p<\infty)$. 利用$A_t(f)$表示积分

$$\int_{A_s(f)}|f(x)|^p\,dx,$$

其中$s\geq 0$.

(2) 设$\Phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$是一个$C^1$函数, 且$\Phi(0)=0$. 又设$f:\Omega\to\mathbb{R}$是一个可测函数, $\Phi(|f(x)|)$在Ω上可积. 利用$A_t(f)$表示积分

$$\int_\Omega\Phi(|f(x)|)\,dx.$$

习题3.2. 证明: 对于$1<p<\infty$, 存在常数$C=C(n,p)>0$使得

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

其中M为极大算子. (提示：M是强(∞,∞)型, 和弱$(1,1)$型.)

Week 7

习题3.3. 证明: 由(3.4)定义的映射T可延拓为$L^1(\mathbb{R}^n)$到$L^1_w(\mathbb{R}^n)$上的映射且

$$\|Tf\|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} \le C(n)\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

习题3.4. 详细证明定理3.6.

习题3.5. 求出$q, r \in (1,\infty)$使得当$b_i \in L^q(\Omega)$, $c \in L^r(\Omega)$时, 引理4.1的估计仍然成立.

习题3.6. 设$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(p \in (1,\infty))$, 记Newton位势$u = Nf$. 求出$q, r \in (1,\infty)$使得当$u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\nabla u \in L^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Week 8

习题3.7. 证明引理5.3

习题3.8. 证明定理5.4.

Week 9

习题4.1. 证明引理1.2 $(n=2)$.

习题4.2. 去掉引理1.2中u是有界的假设.

习题4.3. 设$1<p<\infty$, $u \in W^{1,p}(B_R)$是

$$\nabla \cdot (a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 \quad \text{in } B_R \quad (0<\lambda \le a(x) \le \Lambda)$$

的弱解，证明相应的局部极值原理.

习题4.4. 设$b^i \in L^\infty(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \ge 0$. 对于方程

$$-D_j(a^{ij}D_i u) + b^i D_i u + cu = f + D_i f^i$$

导出定理2.3的估计.

Week 10

习题4.5. (i) 设$u_1(x), u_2(x) \in H^1(\Omega)$是方程(1.1)'的弱上解, 证明$v(x) = \min\{u_1(x), u_2(x)\}$是方程(1.1)'的弱上解.

(ii)设$u_1(x), u_2(x) \in H^1(\Omega)$是方程(1.1)'的弱下解, 证明$w(x) = \max\{u_1(x), u_2(x)\}$是方程(1.1)'的弱下解.

习题4.6. 证明定理3.4.

Week 11

习题5.1. 设$u \in W^{1,p}(B_R)$ $(1 < p < \infty)$是拟线性方程

$$-D_i[a_i(x,u,Du)] + b(x,u,Du) = 0 \quad \text{in } B_R$$

的有界弱解，其中a_i和b满足结构条件$(0 < \lambda \le \Lambda)$：

$$\begin{aligned} a_i(x,z,\eta)\eta_i &\ge \lambda|\eta|^p - |g(x)|^p, \\ |a_i(x,z,\eta)| &\le \Lambda[|\eta|^{p-1} + |g(x)|^{p-1}], \\ |b(x,z,\eta)| &\le \Lambda[|\eta|^p + |f(x)|]. \end{aligned}$$

设$f(x) \in L^\infty(B_R)$, $g(x) \in L^\infty(B_R)$, 叙述和证明相应的局部极值原理.

习题5.2. 证明定理2.4.

习题5.3. 设$a_i(x,\tau,\eta) = a^{ij}(x)\eta_j$, $b(x,\tau,\eta) = \Lambda|\eta|^2$ $(\Lambda > 0)$, 且a^{ij} 满足满足结构条件：

$$\begin{aligned} |\eta|^2 \le a^{ij}(x)\eta_i\eta_j, \qquad & \forall \eta \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega, \\ |a^{ij}(x)| + |Da^{ij}(x)| \le \Lambda, \qquad & \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

重证定理3.2.

Week 12

习题5.4. 设$a_i(x,\tau,\eta) = a^{ij}(x)\eta_j$, $b(x,\tau,\eta) = \Lambda|\eta|^2$ $(\Lambda > 0)$, 且$a^{ij} \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ $(0 < \alpha < 1)$. 重证定理5.1.

Week 13

习题6.1. 设$\Omega = B_d(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, $u(x) = \dfrac{\lambda}{d^2}(d^2 - |x - x_0|^2)$ $(\lambda > 0)$，求Γ_u, $\chi(x)$和$\chi(\Omega)$.

习题6.2. 在定理1.9中, 若$f \le 0$. 试直接证明

$$\sup_\Omega u \le \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

Week 14

习题6.3. 设定理2.3中的$Lu = -a^{ij}D_{ij}u + cu$, 其中$c = c(x) \ge 0$. 给出定理2.3证明的第一步.

习题6.4. 设K_1是$\mathbb{R}^n$上的单位立方体, 有两可测集$A \subset B \subset K_1$满足

(1) $|A| < \delta$, 其中$\delta \in (0,1)$；

(2) 对于任意二进分割得到的立方体K, 如果$|A \cap K| \ge \delta|K|$, 则K的上一层立方体$\tilde{K} \subset B$.

则有

$$|A| \le \delta|B|.$$