

数学分析 III 课件

开集与闭集、多元函数的连续与一致连续

叶胥达

2022 年 9 月 15 日

1 学习指南

1. $\varepsilon - \delta$ 语言是刻画极限的最基础的工具, 无论是在 \mathbb{R}^n 还是在 Hilbert 空间和度量空间中.
2. 不要拘泥于符号的使用, 但是要保持上下文符号的统一. 在多元函数的中, 数学符号会频繁出现各种上下标, 要明确这些符号的含义, 例如哪些代表空间的维数, 哪些代表数列的指标, 尽量不要重复混用. 另外, 同一个数学概念可能有多种表达方式, 例如函数 u 关于变量 x 的偏导数可以表示为 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x} u$ 或 $\partial_x u$. 具体使用哪种符号没有特别的要求, 但是要保证上下文中符号的统一.
3. 在课本中, 向量通常使用粗体的符号 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 表示. 在手写体中, 使用非粗体的 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 即可, 是否添加向量符号 \vec{x} 属于个人偏好.
4. 在大部分情况下, 数学分析中遇到的区域 $E \subset \mathbb{R}^n$ 都具有较好的正则性. 应用一些定理 (积分区域变换、Green 公式) 时不必太在意区域是否满足定理要求的正则性条件 (通常它们相当复杂).
5. 训练良好的计算能力, 尤其是在积分区域复杂的情形时. 尽管 MATLAB 和 Mathematica 可以帮助进行复杂的计算, 但是考试不能用.

2 习题解答

习题十三 20220905

10. $(\cos 2\pi\theta_k, \sin 2\pi\theta_k)$, 其中 $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是区间 $[0, 1)$ 中全部有理数的排列.

11. (1) 在 \mathbb{R}^1 上, $E_1 = (-1, 0)$, $E_2 = (0, 1)$.

(2) 在 \mathbb{R}^2 上, $E_1 = \{(x, y) : y \geq e^x\}$, $E_2 = \{(x, y) : y \leq 0\}$.

另一个例子是 $E_1 = \{n : n \in \mathbb{N}\}$, $E_2 = \{n + \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. (由热心同学提供)

(3) 由于 $d(E_1, E_2) = 0$, 故存在点列 $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset E_1$ 和 $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset E_2$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - y_k| = 0.$$

由于 E_1 为紧集, 故存在 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 的子列 (仍然记为 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$) 收敛到 $x^* \in E_1$, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*.$$

类似地, 存在 $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ 的子列 (仍然记为 $\{y_k\}_{k=1}^\infty$) 收敛到 $y^* \in E_2$, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y^*.$$

注意到

$$|x^* - y^*| \leq |x_k - x^*| + |y_k - y^*| + |x_k - y_k|,$$

令 $k \rightarrow \infty$ 即可得到 $x^* = y^*$. 因此 $x^* \in E_1 \cap E_2$.

若仅仅假设 E_1 为紧集, E_2 为闭集, 则结论仍然成立.

12. (有限覆盖定理) 对任何 $x \in F$, 由于 $x \in E$ 且 E 为开集, 存在 x 的邻域 $U(x, \delta_x)$ 使得 $U(x, \delta_x) \subset E$. 因此可以得到

$$F \subset \bigcup_{x \in F} U(x, \delta_{x/2}) \subset E.$$

由于 F 为紧集, 故由有限覆盖定理, 存在有限个元素 $\{x_k\}_{k=1}^K \subset F$, 使得

$$F \subset O := \bigcup_{k=1}^K U(x_k, \delta_{x_k/2}) \subset E.$$

上述公式定义的集合 O 是有限个开集的并, 并且 (见习题十三, 7(1))

$$\bar{O} \subset \bigcup_{k=1}^K \overline{U(x_k, \delta_{x_k/2})} \subset \bigcup_{k=1}^K U(x_k, \delta_{x_k}) \subset E.$$

(距离函数构造) 先证明关于距离函数 $d(x, E)$ 的一个性质.

引理 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为非空集合, 定义 $d(x, E) = \inf_{y \in E} |x - y|$. 则

$$|d(x_1, E) - d(x_2, E)| \leq |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n.$$

证明 对任意 $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n$, 由三角不等式,

$$|x_1 - y| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - y|.$$

在两端关于 $y \in E$ 取下确界可得

$$\inf_{y \in E} |x_1 - y| \leq |x_1 - x_2| + \inf_{y \in E} |x_2 - y|,$$

即 $d(x_1, E) \leq |x_1 - x_2| + d(x_2, E)$. 同理可以得到 $d(x_2, E) \leq |x_1 - x_2| + d(x_1, E)$, 命题得证. \square

回到原题. 记 E^c 为 E 在 \mathbb{R}^n 中的补集, 则 E^c 为闭集. 由于 $F \cap E^c = \emptyset$, 由 11(3) 的结果可知 $d(F, E^c) > 0$. 定义集合

$$O = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, F) < d(x, E^c)\},$$

我们来验证 O 是符合题目要求的集合. 下面证明:

1. $F \subset O$, 且 O 是开集.

当 $x_0 \in O$ 时, $\varepsilon := d(x_0, E^c) - d(x_0, F) > 0$. 对任意 $x \in U(x_0, \varepsilon/3)$, 有

$$d(x, E^c) - d(x, F) \geq d(x_0, E^c) - d(x_0, F) - \frac{2\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3} > 0,$$

因此 $U(x_0, \varepsilon/3) \subset O$. 故 O 为开集.

2. $\bar{O} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, F) \leq d(x, E^c)\}$.

任取 $x^* \in \bar{O}$, 则存在点列 $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset O$ 使得 $x_k \rightarrow x^*$. 由于 $d(x_k, F) < d(x_k, E^c)$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 成立, 因此令 $k \rightarrow \infty$ 可以得到 $d(x^*, F) \leq d(x^*, E^c)$.

3. $\bar{O} \cap E^c = \emptyset$.

事实上, 如果 $x \in \bar{O} \cap E^c$, 则

$$d(x, F) \leq d(x, E^c) = 0 \implies d(x, F) = 0.$$

由于 F 是紧集, 上述结果意味着 $x \in F$, 从而 $F \cap E^c \neq \emptyset$, 矛盾!

综合以上结果, 可以得到 $F \subset O \subset \bar{O} \subset E$.

习题 13 20220907

14. 解答从略. 欲证明极限存在, 通常需要使用不等式放缩, 如 $|\sin x| \leq |x|$; 欲证明极限不存在, 则只需证明可以使用不同的方式逼近极限点而函数值极限不等.

16. (1) 为方便起见, 记

$$g(x, y) = \frac{f(x)f(y)}{f^2(x) + f^2(y)}.$$

如果 $g(x, y)$ 在 $E \ni (x, y) \rightarrow 0$ 的极限存在, 则其值应与 $x = y$ 时的极限相等, 即

$$\lim_{E \ni (x, y) \rightarrow 0} g(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(x)}{f^2(x) + f^2(x)} = \frac{1}{2}.$$

而另一方面, 对任意 $\varepsilon > 0$, 可任取 $x \in U_0(0, \varepsilon/2)$, 然后取 $y \in U_0(0, \varepsilon/2)$, 使得

$$|f(y)| < \varepsilon |f(x)|.$$

这样的 y 存在是由于 $f(x) \neq 0$ 且 $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 0$. 对于这样的 x, y 我们有

$$|g(x, y)| \leq \left| \frac{f(y)}{f(x)} \right| < \varepsilon \implies \left| g(x, y) - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{4}.$$

由于 ε 可以充分小, 因此 $g(x, y)$ 不以 $\frac{1}{2}$ 为极限值, 矛盾!

另一种证法是定义序列 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 使得 $f(x_{k+1})/f(x_k) \rightarrow 0$ (课本参考答案).

(2) 仿照上面的方法, 实际上可以证明

$$\lim_{E \ni (x, y) \rightarrow 0} \frac{f^2(x)f^2(y)}{f^4(x) + f^4(y)}$$

不存在.

18. 思路 在一致存在的条件

$$|f(x, y) - h(y)| < \varepsilon$$

中令 $y \rightarrow b$, 从而得到 $\left| g(x) - \lim_{y \rightarrow b} h(y) \right| < \varepsilon$, 即关于 $h(y)$ 的极限信息.

解答 根据条件, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $x \in U_0(a, \delta)$ 且 $y \neq b$ 时有

$$f(x, y) - \varepsilon < h(y) < f(x, y) + \varepsilon. \quad (*)$$

在其中令 $y \rightarrow b$, 可以得到

$$g(x) - \varepsilon \leq \varliminf_{y \rightarrow b} h(y) \leq \varlimsup_{y \rightarrow b} h(y) \leq g(x) + \varepsilon.$$

特别的, 我们有

$$\varlimsup_{y \rightarrow b} h(y) - \varliminf_{y \rightarrow b} h(y) \leq 2\varepsilon.$$

由于 ε 可以充分小, 因此 $\overline{\lim}_{y \rightarrow b} h(y) = \underline{\lim}_{y \rightarrow b} h(y)$. 定义 $c := \lim_{y \rightarrow b} h(y)$, 并将 (*) 改写为

$$h(y) - \varepsilon < f(x, y) < h(y) + \varepsilon, \quad \forall x \in U_0(a, \delta), \quad (**)$$

然后令 $y \rightarrow b$, 可以得到

$$c - \varepsilon \leq g(x) \leq c + \varepsilon, \quad \forall x \in U_0(a, \delta).$$

由于 ε 可以任意小, 我们得到

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c.$$

最后, 在 (**) 的条件下, 可以选择 $\delta_1 < \delta$ 使得当 $y \in U_0(b, \delta_1)$ 时, 一定有

$$|g(y) - c| < \varepsilon.$$

因此由 (**) 可以得到: 当 $x \in U_0(a, \delta_1)$ 且 $y \in U_0(b, \delta_1)$ 时, 有

$$|f(x, y) - c| < 2\varepsilon.$$

由于 ε 可以充分小, 因此可得

$$\lim_{E \ni (x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = c.$$

3 补充题目

1. (周民强, 例 1.3.9) 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有连续的一阶导数 $f'(x)$. 证明: 函数

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, & x \neq y \\ f'(x), & x = y \end{cases}$$

在 \mathbb{R}^2 上连续.

思路 $F(x, y)$ 在不同区域上的定义不同, 因此在使用 $\varepsilon - \delta$ 语言时需要分类讨论.

证明 显然 $F(x, y)$ 在 $x \neq y$ 上的区域连续. 取定 $x_0 \in \mathbb{R}$, 来证明 $F(x, y)$ 在 (x_0, x_0) 处连续, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $x, y \in U(x_0, \delta)$ 时有 $|F(x, y) - F(x_0, x_0)| < \varepsilon$.

由于 $f'(x)$ 在 x_0 处连续, 因此存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时一定有 $|f'(x) - f'(x_0)| < \varepsilon$. 我们来验证这样选择的 $\delta > 0$ 符合题目要求. 考察以下两种情形:

- 若 $x \neq y$ 且 $x, y \in U(x_0, \delta)$, 则由 Lagrange 中值定理, 存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x_0) = f'(\theta x + (1 - \theta)y) - f'(x_0).$$

由于

$$|\theta x + (1 - \theta)y - x_0| \leq \theta|x - x_0| + (1 - \theta)|y - x_0| < \delta,$$

故 $|F(x, y) - F(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

- 若 $x = y \in U(x_0, \delta)$, 则

$$|F(x, x) - F(x_0, x_0)| = |f'(x) - f'(x_0)| < \varepsilon.$$

以上两种情形中, 都有 $|F(x, y) - F(x_0, x_0)| < \varepsilon$, 因此 $F(x, y)$ 在 (x_0, x_0) 处连续.

该题也可以直接使用一般化的中值定理 $F(x, y) = f'(\theta x + (1 - \theta)y)$ 来证明.

2. (1) 设 $f(x)$ 是 \mathbb{R}^n 上的有界函数. 证明: $f(x)$ 在 \mathbb{R}^n 上连续当且仅当其图像

$$G = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}$$

在 \mathbb{R}^{n+1} 中是闭集.

(2) 如果去掉 $f(x)$ 是有界的条件, 结论是否成立?

解答 (1) 一方面, 当 $f(x)$ 连续时, 证明 G 为闭集, 即 $\bar{G} \subset G$. 任取 $(x^*, y^*) \in \bar{G}$, 则存在点列 $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^\infty \subset G$ 使得 $(x_k, y_k) \rightarrow (x^*, y^*)$. 根据 G 的定义, 有 $y_k = f(x_k)$. 由于 f 的连续性, 有 $f(x_k) \rightarrow f(x^*)$, 因此 $y^* = f(x^*)$, 从而 $(x^*, y^*) \in G$.

另一方面, 当 G 为闭集时, 证明 $f(x)$ 连续. 如果 $f(x)$ 在 $x^* \in \mathbb{R}^n$ 处不连续, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及收敛到 x^* 的点列 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, 使得

$$|f(x_k) - f(x^*)| \geq \varepsilon_0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

由于 $\{f(x_k)\}_{k=1}^\infty$ 在 \mathbb{R} 上有界, 因此由 Weierstrass 定理, $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 有子列 $\{x_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ 使得

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{k_j}) = y^* \in \mathbb{R}$$

由 (*) 可得 $|y^* - f(x^*)| \geq \varepsilon_0$. 注意 (x^*, y^*) 是 G 中点列 $\{(x_{k_j}, f(x_{k_j}))\}_{j=1}^\infty$ 的极限点, 我们有 $(x^*, y^*) \in G$. 于是, 在 $f(x)$ 的图像 G 中, x^* 同时对应两个不同的函数值 $f(x^*)$ 和 y^* , 矛盾! 因此 $f(x)$ 必定连续.

(2) 不一定对. 取

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

3. (在每个线性方向上连续的函数不一定连续) 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R}^n 上有定义. 如果对任何单位向量 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ (\mathbb{S}^{n-1} 是 \mathbb{R}^n 中的单位球面), 都有 $\lim_{\mathbb{R} \ni t \rightarrow 0} f(tv) = 0$, 是否一定有 $\lim_{\mathbb{R}^n \ni x \rightarrow 0} f(x) = 0$?

解答 答案是否定的. 考察 \mathbb{R}^2 上的函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \max \left\{ 0, \frac{y}{x^2} \left(1 - \frac{y}{x^2} \right) \right\}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

则 $f(x, y)$ 满足题目所述的条件.

首先, $f(x, y)$ 在直线 $x = 0$ 和 $y = 0$ 上的极限为 0, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$.

其次, $f(x, y)$ 在直线 $y = kx (k \neq 0)$ 上的极限为 0. 这是因为当 $y = kx$ 时,

$$f(x, y) = \max \left\{ 0, \frac{k}{x} \left(1 - \frac{k}{x} \right) \right\}.$$

当 $\frac{k}{x} \leq 0$ 或 $\frac{k}{x} \geq 1$ 时, 一定有 $\frac{k}{x} \left(1 - \frac{k}{x} \right) \leq 0$, 因此有 $f(x, kx) = 0$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = 0$.

最后, 在曲线 $y = \frac{x^2}{2}$ 上, $f(x, y) \equiv \frac{1}{4}$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(x, \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{4}$. 于是 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不连续.

4. 设 $g \in C(\mathbb{R})$, $f(x, y) := g(xy)$. 若 f 在 \mathbb{R}^2 上一致连续, 则 g 恒为常数.

解答 往证任意 $x \in \mathbb{R}$, 有 $g(x) = g(0)$. 由于 $f(x, y)$ 一致连续, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$|x_1 - x_2| \leq \delta, \quad |y_1 - y_2| \leq \delta \implies |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon. \quad (1)$$

特别的,

$$|g(x) - g(0)| = \left| f\left(\frac{x}{\delta}, \delta\right) - f\left(\frac{x}{\delta}, 0\right) \right| < \varepsilon.$$

由于 ε 可以任意小, 因此有 $g(x) = g(0)$. 从而 g 为常数.

5. (周民强, 例 1.3.2) 设定义在 \mathbb{R}^2 上的函数 $f(x, y)$ 满足:

- (i) $f(x, y)$ 关于变量 x, y 均连续;
- (ii) 对任何有界闭集 $K \subset \mathbb{R}^2$, $f(K) \subset \mathbb{R}^1$ 为有界闭集.

证明: $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上连续.

思路 若使用反证法, 则可假设点列 $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^2$ 收敛到原点且使得 $|f(x_k, y_k)| \geq \varepsilon_0$ 成立. 此时, $K := \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^\infty \cup \{(0, 0)\}$ 是有界闭集. 如何使得 $f(K) = \{f(x_k, y_k)\}_{k=1}^\infty \cup \{f(0, 0)\}$ 不是闭集呢? 于是, 我们希望证明 $\{f(x_k, y_k)\}_{k=1}^\infty$ 有一个不在 $f(K)$ 中的聚点.

解答 只需证明 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续. 不妨假设 $f(0, 0) = 0$. 若结论不成立, 则存在收敛到原点的点列 $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$, 使得 $|f(x_k, y_k)| \geq \varepsilon_0 > 0$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 成立. 由于

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, 0) = f(0, 0) = 0,$$

故存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $k > N$ 时, 一定有 $|f(x_k, 0)| \leq \varepsilon_0/2$. 注意到 $f(x_k, y)$ 关于 y 连续, 因此当 $k > N$ 时, 存在介于 0 和 y_k 之间的实数 y'_k 使得

$$|f(x_k, y'_k)| = \frac{k\varepsilon_0}{k+1}, \quad \forall k > N.$$

定义集合 $K := \{(x_k, y'_k)\}_{k=N+1}^{\infty} \cup \{(0, 0)\}$, 则 $\{(0, 0)\}$ 是 K 唯一聚点, 从而 K 为有界闭集. 故

$$f(K) = \{f(x_k, y'_k)\}_{k=N+1}^{\infty} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$$

为有界闭集. 由于 $|f(x_k, y'_k)| = k\varepsilon_0/(k+1)$, 因此 $f(K)$ 有一个聚点在集合 $\{+\varepsilon_0, -\varepsilon_0\}$ 中. 但 $+\varepsilon_0$ 和 $-\varepsilon_0$ 均不在 $f(K)$ 当中, 故 $f(K)$ 不是闭集, 矛盾!

6. (周民强, 例 1.3.3) 设定义在 \mathbb{R}^2 上的函数 $f(x, y)$ 满足:

- (i) $f(x, y)$ 关于变量 x, y 均连续;
- (ii) 当 y 的值固定时, $f(x, y)$ 关于变量 x 单调.

证明: $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上连续.

思路 该题目并未要求 $f(x, y)$ 对于不同的 y 的增减性是相同的, 例如 $f(x, y) = xy$ 满足题目所述条件, 但 $y < 0$ 和 $y > 0$ 时的增减性不同. 本题由于单调性的特殊结构, 不适合用反证法进行证明. 证明策略是在每个 (x_0, y_0) 附近构造一个小矩形, 然后在小矩形内部对函数值进行估计.

解答 任取 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, 往证 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in U(x_0, \delta), \quad \forall y \in U(y_0, \delta). \quad (1)$$

由于 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 故存在 $\delta_1 > 0$ 使得

$$|f(x_0 - \delta_1, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x_0 + \delta_1, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

接着, 由于 $f(x_0 - \delta_1, y)$ 在 $y = y_0$ 处连续, 存在 $\delta_2 > 0$ 使得

$$|f(x_0 - \delta_1, y) - f(x_0 - \delta_1, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall y \in U(y_0, \delta_2).$$

进一步, 可以得到

$$|f(x_0 - \delta_1, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \quad \forall y \in U(y_0, \delta_2). \quad (2)$$

类似的, 存在 $\delta_3 > 0$ 使得

$$|f(x_0 + \delta_1, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \quad \forall y \in U(y_0, \delta_3). \quad (3)$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. 我们来说明这样的 δ 满足 (1) 中的要求.

对于任意 $x \in U(x_0, \delta)$ 和 $y \in U(y_0, \delta)$, 有 $x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$. 根据 $f(x, y)$ 关于 x 的单调性, $f(x, y)$ 的值位于 $f(x_0 - \delta_1, y)$ 和 $f(x_0 + \delta_1, y)$ 之间. 由 (2)(3) 即可得到

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

因此 (1) 成立. 故 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上连续.

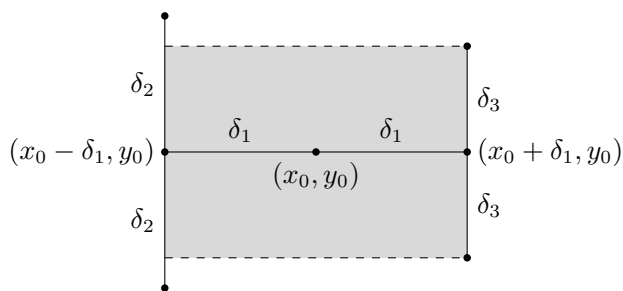


图 1: 构造 (x_0, y_0) 附近的矩形, 使得 $f(x, y)$ 的值可以被控制.