Podstawy
Optymalizacji

15:00 225 konsultacje

26183879 7

Literatura:

Marian Chudy:

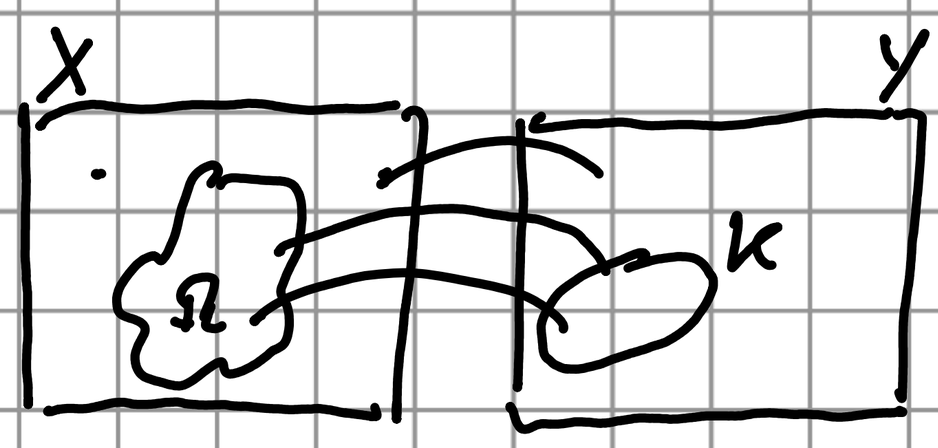
1. Wybrane algorytmy optymalizacji
2. Wybrane metody optymalizacji

Ocena z ćwiczeń jest oceną z wykładów!

Na kolokwium można mieć wszystkie notatki nie-elektroniczne.

$$K = \{ y \in Y : y = f(x),\ x \in \Omega \}$$

$$\Omega^* = \{ x \in \Omega : f(x) \in K^* \}$$



Na przedmiocie zajmiemy się tylko zadaniami jednokryterialnymi.

Przykłady zadań

1. Zadanie załadunku (Knapsack problem)

n - liczba ładunków

a_j - waga j-tego ładunku

c_j - wartość j-tego ładunku

b - ładowność środka transportu

Załadować przedmioty o maksymalnym ładunku.

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*) \in \Omega \subset E^n,$$

takie że $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^n = \max_{x=\Omega} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$,

gdzie $\Omega = \{x \in E^n \sum_{j=1} a_j x_j \leq b, \ x_j \in \{0,1\}\}$

Zadanie dwalne

Najpierw do dziedziny, reszta fale simplex.

$2x_1 + 3x_2 \longrightarrow \min$

$x_1 + x_2 \geq 2$

$3x_2 + 2x_2 \geq 7$

$2x_1, x_2 \geq 0 \longleftarrow$ Tyle odpowiedzi

$2x_1 + 2x_3 \longrightarrow \min$

$-x_1 - x_2 + x_3 = -2$

$-3x_1 - 2x_2 + x_4 = -7$

$-2x_1 - x_2 + x_5 = -4$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$-2/3$ $\quad -\frac{3}{2}$

	c_B	c_2	2	3	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	0	-2	-1	-1	1	0	0
x_4	0	-7	-3	-2	0	1	0
x_5	0	-4	-2	-1	0	0	1

nie mogą być ujemne, zamiana wierzchołka

$2 - (-\frac{7}{3}) = 1/3$

	c_B	h_0					
x_3	0	$1/3$	0	$-1/3$	1	$-1/3$	0
x_1	2	$2\,1/3$	1	$2/3$	0	$-1/3$	0
x_5	0	$2/3$	0	$1/3$	0	$-2/3$	1
		$4\,2/3$	0	$-1\,2/3$	0	$-2/3$	0

dodatnie, rozwiązanie

delty niedodatnie

Następne zajęcia:

- Metoda podziału, PCL
- Rozwiązywanie graficznie

Wektor optymalny $\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \left(7/3, \right. & \left. 0 \right) \end{array}$

wartości których nie było orginalnie opuszczamy

Wyznaczyć rozwiązanie:

$$(0, 2, 0) \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & -7/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= (0, 2, 0) \begin{bmatrix} -1 & 1/3 \cdot & 0 \\ 0 & 7/3 \cdot & 0 \\ 0 & 2/3 \cdot & -1 \end{bmatrix} = (0, 2/3, 0)$$

rozwiąż używając sympleks

$$2y_1 + 7y_2 + 4y_3 \to \max$$
$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \leq 2$$
$$y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

$$-2y_1 - 7y_2 - 4y_3 \to \min$$

$$-y_1 - 3y_2 - 2y_3 - y_4 = -2$$
$$-y_1 - 2y_2 - y_3 - y_5 = -3$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-2y_1 - 7y_2 - 4y_3 + 4y_6 + 4y_7 \to \min$$

$$-y_1 - 3y_2 - 2y_3 - y_4 + y_6 = -2$$

$$-y_1 - 2y_2 - y_3 - y_5 + y_7 = -3$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

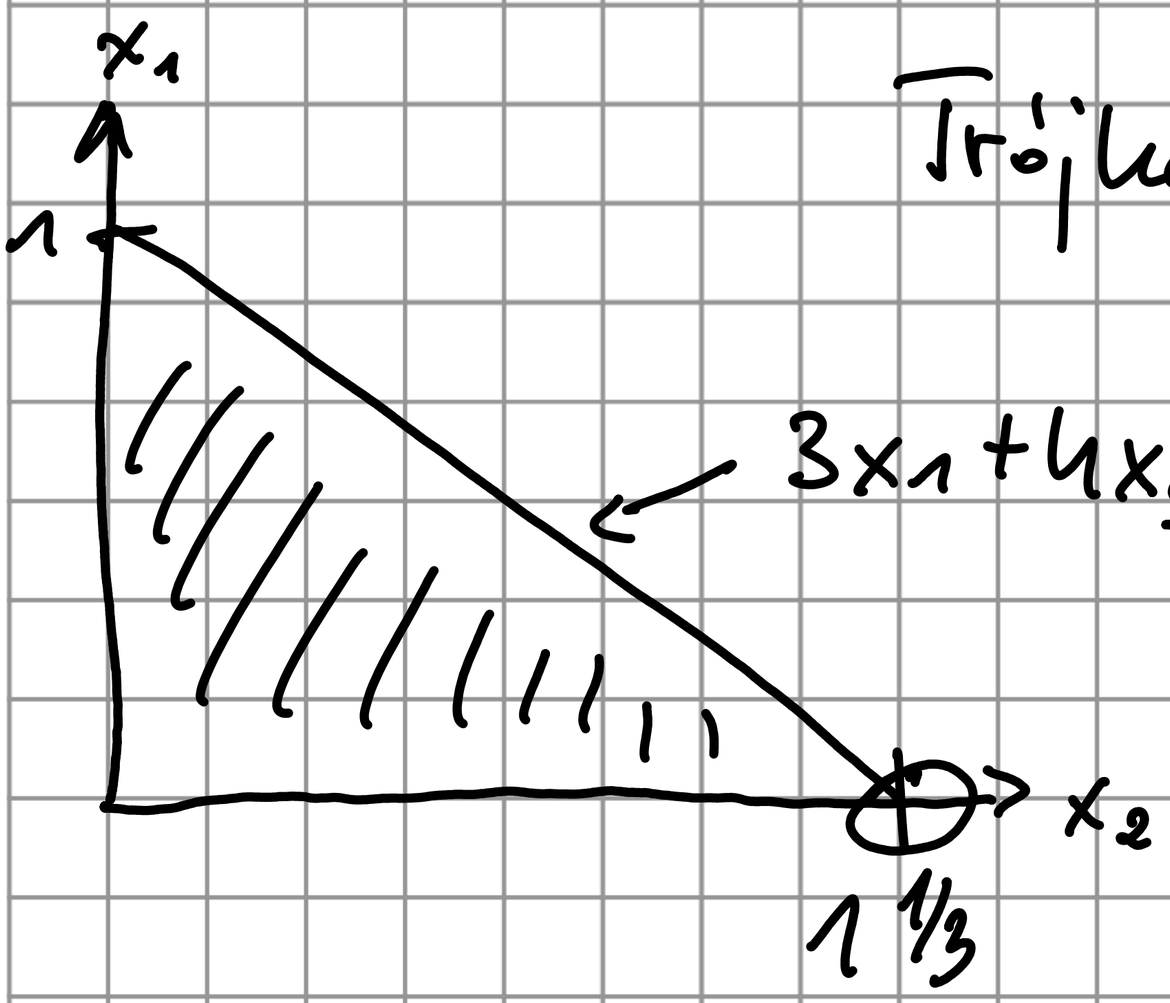
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Metoda podziału i oszacowań

$z = 7x_1 + 8x_2 \to max$

$3x_1 + 4x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$, x_1, x_2 – cnt



Trójkąt jest wypukły

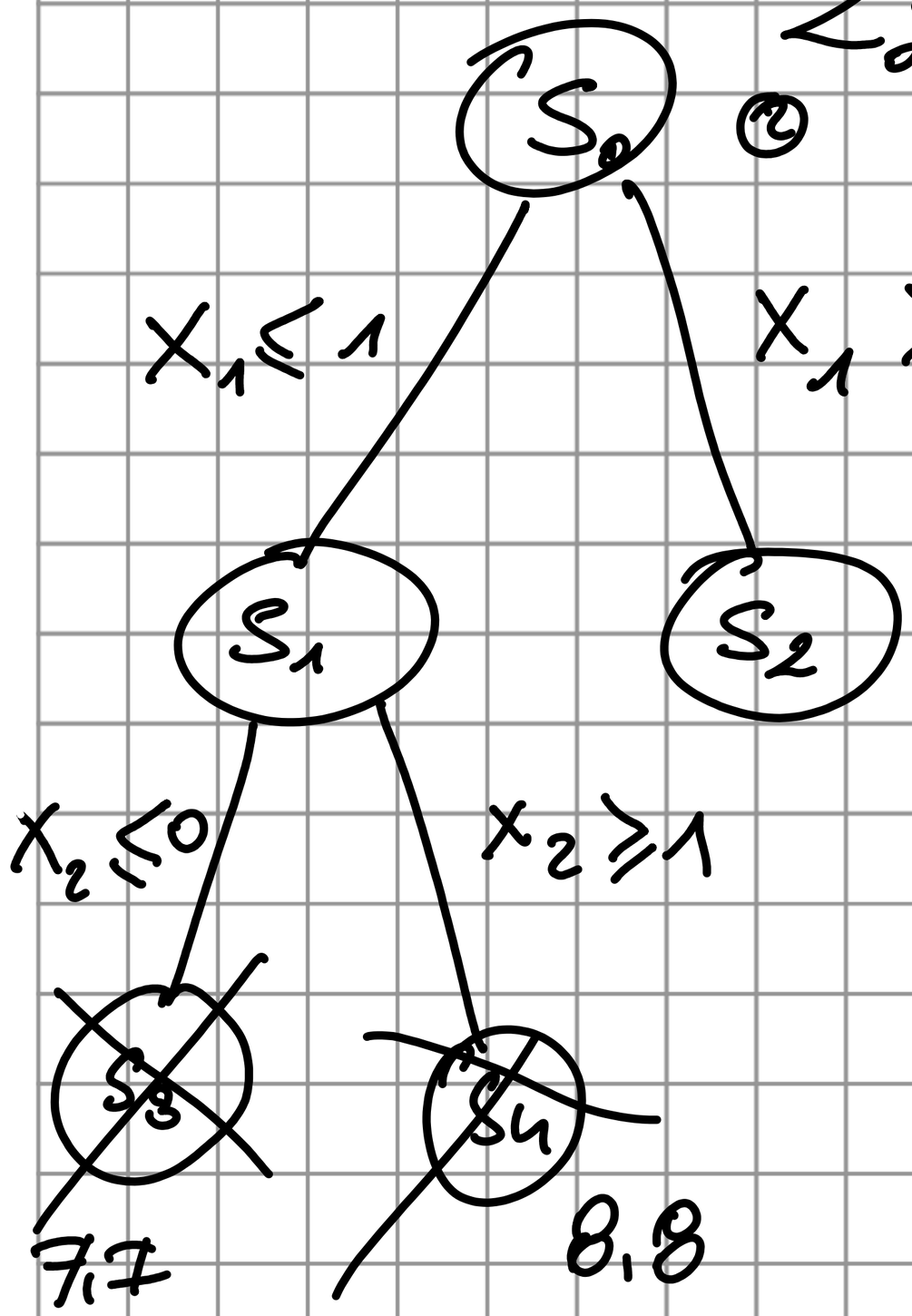
$3x_1 + 4x_2 \leq 4$

$(1\frac{1}{3}, 0)$ $z = 9\frac{1}{3}$

Jeżeli zbiór decyzji jest wypukły, to zbiór decyzji dopuszczalnych składa się z wierzchołków.

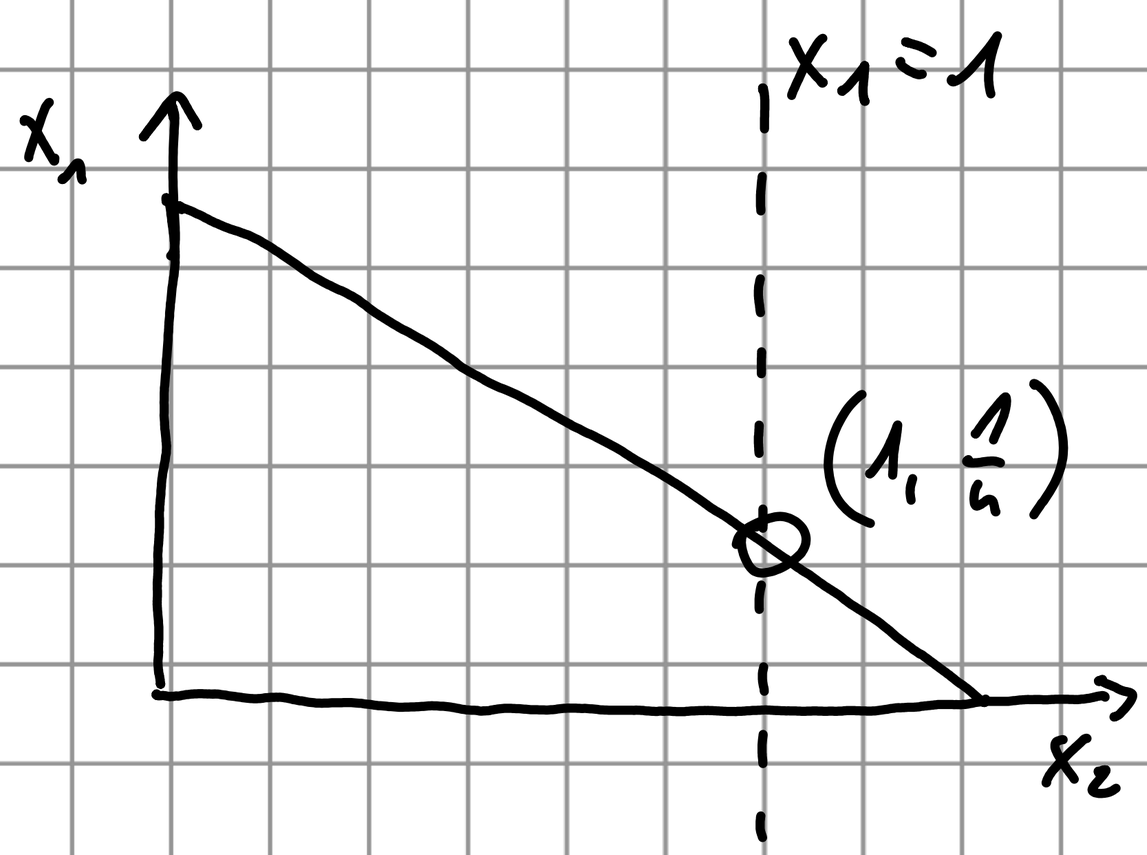
① $z_0^g = \infty$, $z_0^d = -\infty$

② 8, 9



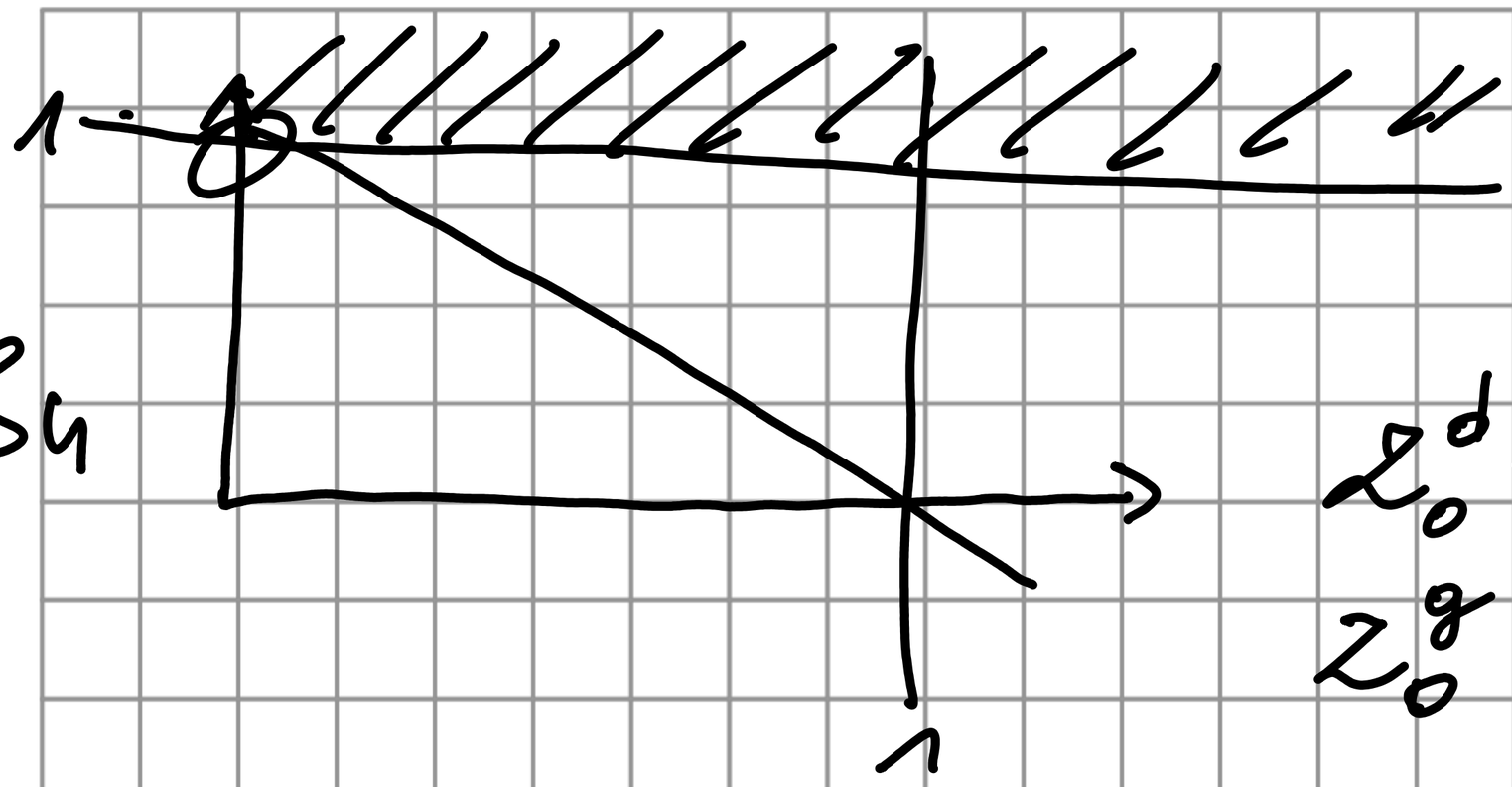
S_2 - nie ma rozwiązania

Przyjmujemy S_4, bo ma maksymalną wartość kryterialną.



$(1, \frac{1}{4}) = 9$

S_4



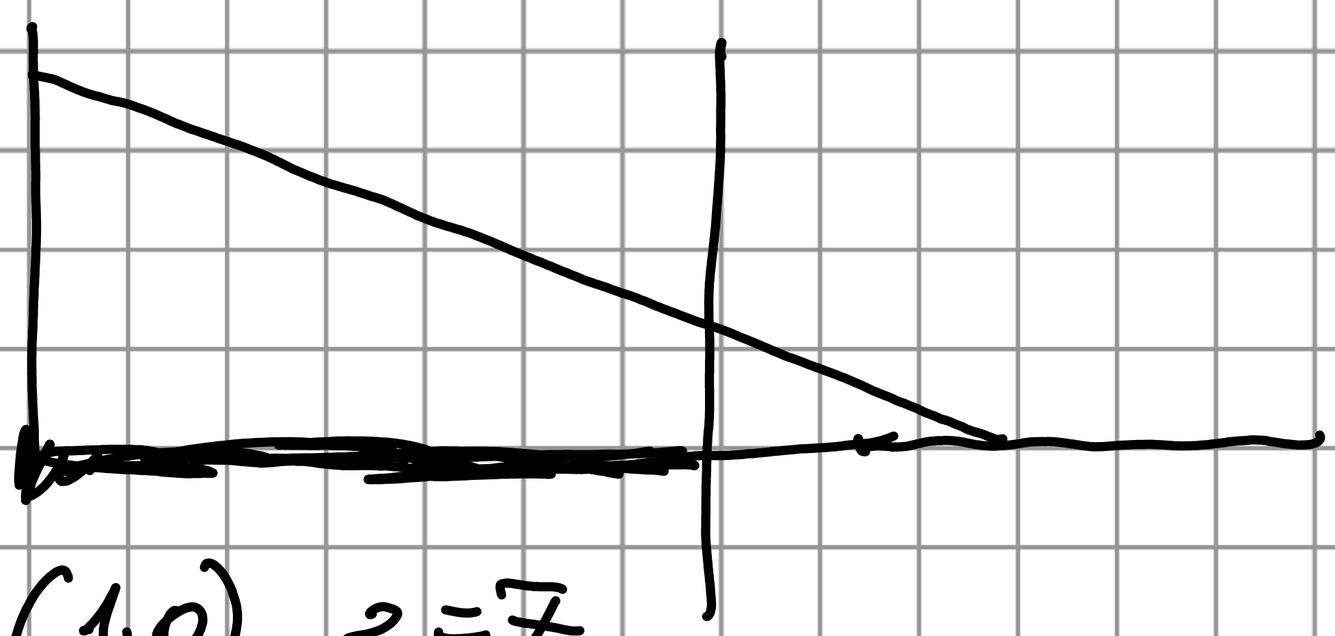
$(0,1)$ $z=8$

$z_0^d = 8$

$z_0^g = 8$

$x \geq 1$

S_3



$x=0$

$z_0^g = 7$

$z_0^d = 7$

$(1,0)$ $z=7$

Zad 2.

$$Z = x_1 + x_2 \to \max$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 20$$

Następne. optymalizacja nieliniowa

$z = -2x_1 - 4x_2 - x_3 \longrightarrow \max$ PLB

Ogr.

przegląd pośredni binarny

$-5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1$

$-2x_1 - x_2 + 7x_3 \leq -1$

$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq -1$

$x_1, x_2, x_3 \longrightarrow$ Bin

1. Sprawdzamy czy można rozwiązać dla 0.

Zwracamy uwagę na konstrukcję zadania.

Zbiór decyzji dopuszczalnych

S_0

$z_0^g = -\infty$
$z_0^d = \infty$
} górna i dolna granica funkcji kryterialnej.

Zbiór ograniczeń i warunków brzegowych

Zadanie osłabione - pomijamy ograniczenia.

$z = -2x_1 - 4x_2 - x_3 \to max$

x_1, x_2, x_3 - bin $\qquad x = (0,0,0)$ - $\not\in S_0$

$F_0 = \{1,2,3\}$ $\quad W_0 = \emptyset$ $\quad N_0 = \emptyset$ $\quad N_0^+ = \emptyset$ $\quad Q = \{2,3\}$

jeszcze nie rozpatrywane $\qquad$ już rozpatrzone $\qquad$ zbiór ograniczeń z wartością ujemną

$F_0 + W_0$ - zbiór wszystkich

zmienne pomocnicze

$t = \sum \min(0, a_{ij}) = -5 + 0 + 0 = -5 < 1$

$t_2 = -2 + (-1) + 0 = -3 < 1$

$t_3 = 0 + (-3) + 0 = -3 < 1$

Nawet w niekorzystnej sytuacji, ograniczenia wytrzymają.

a więc $\quad z_0^g = 0 > z_0^d = \infty$

$R_0 = \{1,2\}$

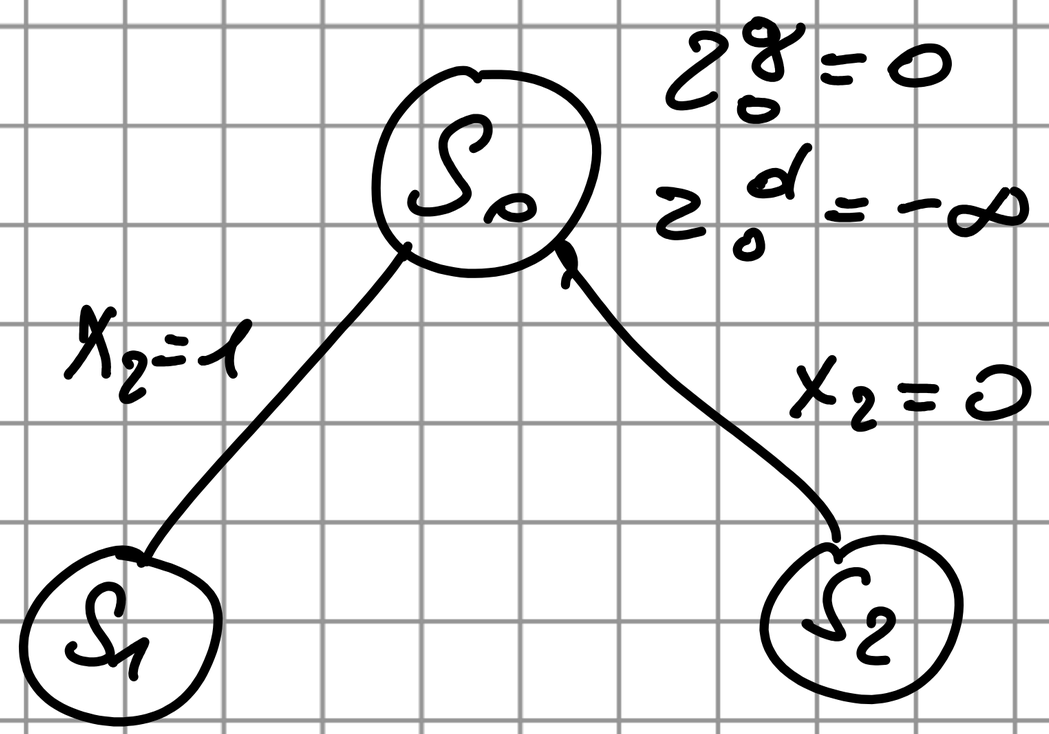
Numery dzieci współczynnikami z Q.

$$I_0(1) = \sum_{i=1}^{1} \max\{0, -r + a_{i1}\} = \max\{0, -1-5\} +$$

$$+ \max\{0, 1+1\} = 2$$

$$I(2) = \sum \max\{0, -r + a_{i2}\} = \max\{0, -1+2\} +$$

$$+ \max\{0, 1-1\} + \max\{0, 1-3\} = 1$$



$$Z = -2x_1 - 4x_2 - x_3 \to \max$$

$$-5x_1 + x_3 \leq 1 \qquad t_1 = -5 < -1$$

$$-2x_1 + 7x_3 \leq 0 \qquad t_2 = -2 < 0$$

$$x_1 + 2x_3 \leq 2 \qquad t_3 = 0 < 2$$

$$x_1, x_2 - \text{bin}$$

$$x_2 = 1$$

$$X = (0, 1, 0) \notin S_1$$

$F_1 = \{1, 3\}$

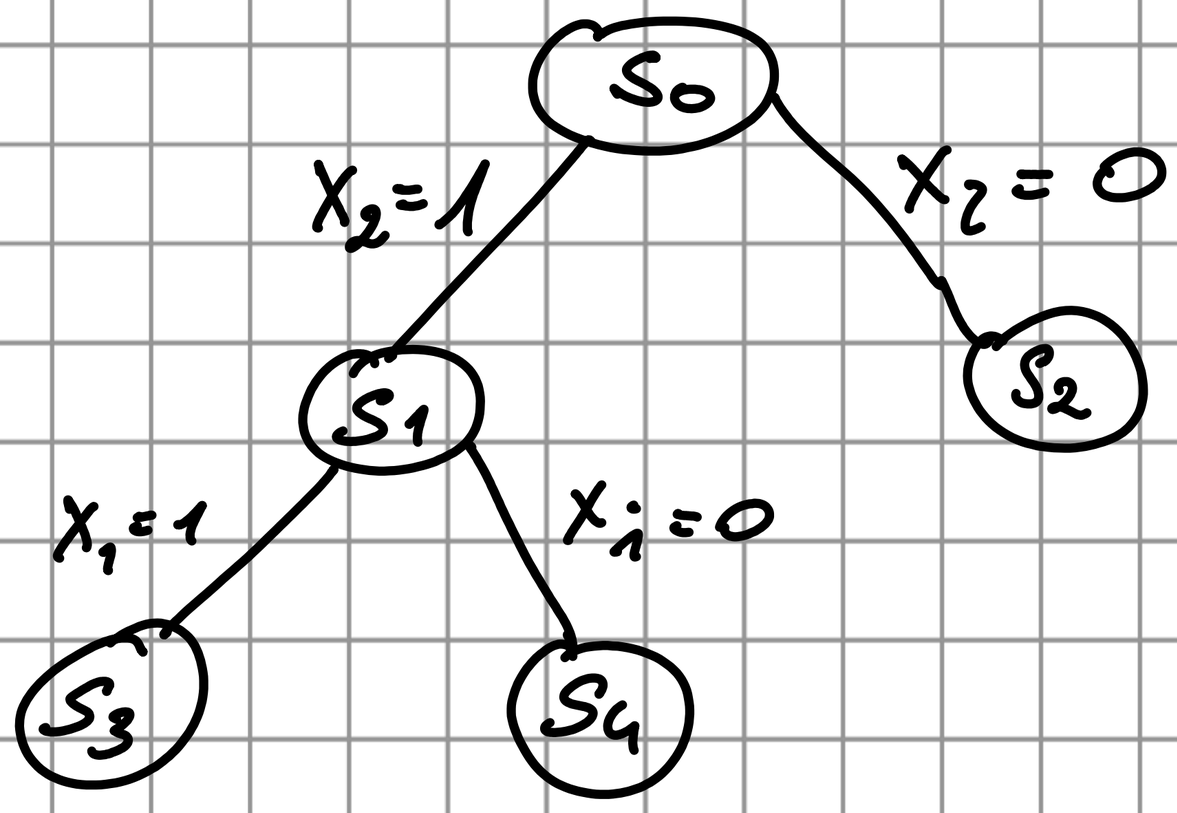
$W_1 = \{2\}$

$N_1 = \emptyset$

$Q_1 = \{1\}$

$R_1 = \{1\}$

W niekorzystnych warunkach ograniczenia wytrzymają.


S_0
$x_2=1$
$x_2=0$
S_1
S_2
$x_1=1$
$x_1=0$
S_3
S_4

Wyznaczyć minimum funkcji

$$f(x) = 2x_1^2 - (x_2 - 1)^2$$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right) = \left(4x_1, -2(x_2 - 1) \right)$$

$$\nabla f(x^0) = \left(4x_1^0, -2(x_2^0 - 1) \right) = (4, 0)$$

$$\| \nabla f(x^0) \| = \left(\nabla f(x^0) \mid \nabla f(x^0) \right)^{\frac{1}{2}} = 4 > \varepsilon$$

$$s^0 = -\nabla f(x^0) = -(4,0) = (-4,0)$$

$$\min f(x^0 + t s^0) = \min f\left((1,1) + t(-4,0)\right) =$$

$$= \min f(1 - 4t, 1) = \min f\left(2 \cdot (1-4t)^2 - 1^2 + 2 \cdot 1^2 - 1^2\right) = \min \left(2 - 16t + 32t^2\right)$$

$$x^1 = x^0 + t s^0 \qquad x^1 = (1,1) + \ldots$$

Metoda Newtona

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f(x)}{\partial^2 (x_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$s^0 = -H^{-1} \nabla f(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} (4,0)^T = (-1,0)$$

$$\min(x^0 + t s^0) = \min((1,1) + t(-1,0)) =$$

$$= \min((1-t, 1)) = \min(2t^2 - 4t + 2 - 1 + 2 - 1)$$

$$= \min(2t^2 - 4t + 2)$$

$$\frac{d\, 2t^2 - 4t + 2}{dt} = 0 \Rightarrow 4t - 4 = 0 \Rightarrow t^* = 1$$

warunki Kuhna, funkcja Lagrange

rozwiązywanie nieliniowe z ograniczeniami

Metoda Gaussa-Seidela

$S = \{ s^1 = (1,0), s^2 = (0,1) \}$

$x(1)^0 = x(0)^2 = x^0$

$x(1)^1 = \min f(x(0)^2 + t s^1) =$

$\min f((1,1) + (t,0)) = \min f(t+1, 1) =$

$= \min (2(t+1)^2)$

$(2 + (t+1)^2)' = 4t + 4 = 0 \Rightarrow t = -1$

$x(1)^1 = x(0)^2 - 1 s^1 = (1,1) - (1,0) = (0,1)$

$x(1)^2 = \min f(x(1)^1 + t \cdot s^2) =$

$\min f((0,1) \ldots$

$\ldots$

$\| x(0)^2 - x(1)^2 \| = 1 > \varepsilon$

$x(2)^1 = \min f((0,1) + t s^1)) = \min f(t, 1) =$

$= \min (t^2)$ $\quad (t^2)' = 0$

$t = 0$

$x(2)^1 = x(1)^2 = (0,1)$

$x(2)^2 = \min f((0,1) + t s^2) =$

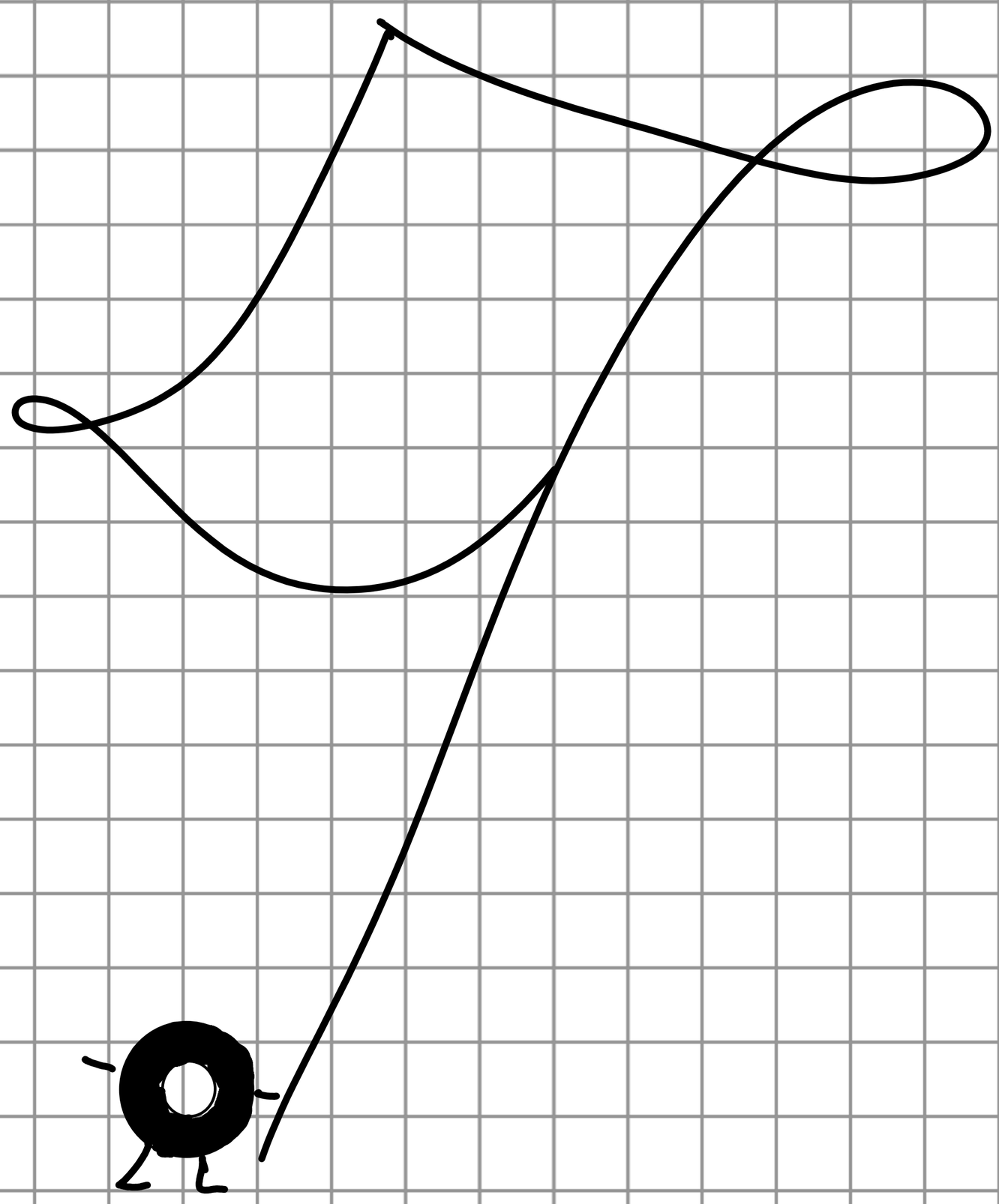
$= \min f((0,1 + t) = \min(-t^2)$

$t = 0$

$x(2)^2 = x(1) \ldots$

Metoda Powella

$$s^3 = x(1)^2 - x(0)^2 = (0,1) - (1,1) = (-1,0)$$



Metoda KKT

czy różniczkowalna?

1. $f(x) = -3x_1 + \frac{1}{2}x_2^3 \to \min$

przy ograniczeniach:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$L(x,y) = -3x_1 + \frac{1}{2}x_2^3 + y_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + y_2(-x_1) + y_3(-x_2)$$

Warunki gradientowe:

$$\nabla_x L(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial L}{x_1} = -3 + 2y_1x_1 - y_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{x_2} = x_2 + 2y_1x_2 - y_3 = 0 \end{cases}$$

Warunki dopuszczalności

$$\nabla_y L(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y_1} = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} = -x_1 \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y_3} = -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Warunki nieujemności:

$y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0, \; y_3 \geq 0$

Warunek ortogonalności:

$$y_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + y_2(-x_1) + y_3(-x_2) = 0$$

1. $g_1(x), g_2(x), g_3(x) \neq 0$

$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$

Z warunu 1 $-3 = 0$, sprzeczność

2. Założenie $g_1(x) = 0, g_2(x), g_3(x) \neq 0$

$$\begin{cases} \varphi_2 = \varphi_3 \\ -3 + 2x_1\varphi_1 = 0 \\ x_2 + 2x_2\varphi_1 = 0 \end{cases}$$

sprzeczne

3. $g_1(x) \neq 0, g_2(x) = 0, g_3(x) \neq 0$

$\varphi_1 = 0, \varphi_3 = 0, g_2 = 0$

$x_1 = 0$

$-3 - \varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = -3$ ← sprzeczność

$x_2 = 0$

4. $g_1(x) \neq 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = 0$

$-3 = 0$

5. $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$, $g_3(x) \neq 0$

$\varphi_3 = 0$, $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$

7. $g_1(x) \neq 0$, g_2

2. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \to \min$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 12$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 8$$

$$g_1(x) = x_1 - x_2 - 2x_3 - 12 \leq 0$$

$$g_2(x) = x_1 + x_2 - 3x_3 - 8 \leq 0$$

$$L(x,y) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + y_1(x_1 - x_2 - 2x_3 - 12) + y_2(x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 8)$$

$$\nabla_x L(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + y_1 + y_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 - y_1 + 2y_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} = 6x_3 - 2y_1 - 3y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\nabla_y L(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y_1} = x_1 - x_2 - 2x_3 - 12 \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} = x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 8 \end{cases}$$

Ortogonalności:

$$y_1(x_1 - x_2 - 2x_3 - 12) + y_2(x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 8) = 0$$

Nieujemność

$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$

1. $g(x) \neq 0$, $g_2(x) \neq 0$

$\mu_1 = \mu_2 = 0$

$$\nabla_x L(x,\mu) = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} = 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Dopuszczalne

2. $g_1(x) = 0$, $g_2(x) \neq 0$

$\mu_2 = 0$

$$\nabla_x L(x,\mu) = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \mu_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-\mu_1}{2} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 - \mu_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\mu_1}{4} \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} = 6x_3 - 2\mu_1 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{\mu_1}{3} \end{cases}$$

$$g(x) = x_1 - x_2 - x_3 = 12 = -\frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_1}{4} + \frac{2\mu_1}{3} - 12 = 0$$

$$\mu_1 = -\frac{144}{17}$$

μ_1 nie jest > 0

3. $g_1(x) \neq 0, g_2(x) = 0$

$y_1 = 0$

3. $f(x) = x_1 + x_2 \to \min$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$