FALE

$$y(x,t) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \omega x(t) = 0 \xrightarrow{t=0} x(t) = x_0 \sin(\omega t)$$

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t)$$

$$y_0 = \cos(t)$$

$$\omega = \text{const} \cdot \nu = \frac{1}{T}$$

równanie fali

$$y(x,t) = y_0 \sin(\omega t - kx) \qquad V = \frac{\lambda}{T}$$

$f = V$ – okres fali $\quad v = \frac{\lambda}{T} \quad \omega = \frac{1}{s}$ – częstość kątowa

Równanie drgań niegasnących w źródle drgań ma postać:

$x=0$

$$y(t) = 0.01\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\ [m]$$

Wyznaczyć falę poprzeczną i jej prędkość.

o długości $\lambda = 6m$

$$y(t,x) = 0{,}01\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{2}\right)\ [m]$$

$$\lambda = 6m \rightarrow k = \frac{2\pi}{6}\left[\frac{1}{m}\right] = \frac{\pi}{3}$$

$$V_f = \frac{\lambda}{T} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2s$$

$$V_f = \frac{\lambda}{T} = \frac{6}{2}\frac{m}{s} = 3\frac{m}{s}$$

W oparciu o wynik zadania pop.
wyznaczyć stan drgań ośrodka w
punkcie odległym o 4,5m od źródła
drgań oraz stan drgań w dowolnej
odległości X dla $t = 1/2$ s.

$$y(t, x=4{,}5) = 0{,}01 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\cdot 4{,}5 - \frac{\pi}{2}\right) m =$$

$$= 0{,}01 \cos\left(\pi t - \frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2}\right) m =$$

$$0{,}01 \cos\left(\pi t - 2\pi\right)$$

$$\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$$

b) $$y\left(t = \frac{1}{2} s, x\right) = 0{,}01 \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{\pi}{3} x - \frac{\pi}{2}\right) m =$$

$$= 0{,}01 \cos\left(-\frac{\pi}{3} x\right) [m]$$

fala płaska to zbiór punktów o tej samej fazie.
równanie fali jest funkcją dwóch zmiennych

Równanie drgań

Dla fali płaskiej poprzecznej w postaci dla $x=0$

$x=0; \quad y(t) = 0{,}02 \sin(10t)\ [m]$

o długości $\lambda = 12 m$.

Prędkość propagacji fali i maksymalną prędkość cząsteczek równania ośrodka.

$v = ?$ $\quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda\omega}{2\pi} = \frac{12 \cdot \cancel{10}^{5}}{\cancel{2}\pi} = \frac{60}{\pi}\ \frac{m}{s}$

$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0.02 \sin(10t)\right)$

$0{,}02 \cdot 10 \cos(10t)\ \frac{m}{s} = \underbrace{\boxed{0{,}2}}_{v_0} \overbrace{\cos(10t)}^{t}\ \frac{m}{s}$

$V_{max} = 0{,}2\ \frac{m}{s}$

$\sin(ax)' = a\cos(ax)$

Wyznaczyć różnicę faz między 2 punktami fali dźwiękowej w powietrzu między punktami odległymi od siebie $l = 0{,}25\,m$ i $f = 680\,Hz$.

$v = 340\,\frac{m}{s}$ $\quad y(x,t) = y_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$

$v = 340\,m/s$, $\frac{1}{T} = 680\,s$ $\quad \varphi = kx - \varphi_0$

$\lambda = vT = \frac{v}{f} = \frac{340}{680} = 0{,}5\,m.$

$x_1 : \varphi_1 = kx_1 + \varphi_0$ $\quad \varphi_2 - \varphi_1 = kx_2 + \varphi_0 - (kx_1 + \varphi_0)$

$x_2 : \varphi_2 = kx_2 + \varphi_0$ $\quad = k(x_2 - x_1)$

$\Delta\varphi = k(\Delta x)$ $\quad k = \frac{2\pi \cdot 2}{1} = 4\pi$

$\Delta\varphi = 4\pi \cdot \frac{1}{4}\,m = \pi$

Parametry fali

Prędkość propagacji: zależy tylko od ośrodka

gazy < ciecze < c. stałe

gazy: $p, V,$

$$V_f = \sqrt{\frac{\varkappa \cdot T}{M}}$$

$$pV = C$$

$$pV^{\varkappa} = C$$ – współczynnik adiabaty

$$\varkappa = 1.33$$

Wyznaczyć prędkość fali akustycznej rozchodzących się w powietrzu w warunkach normalnych.

$$V_f = \sqrt{\frac{\varkappa T}{M}}$$

$p_0 = 1013\ Pa$

$T_0 = 0^\circ C = 273K$

$T = 25^\circ C = 273 + 25 = 298K$

pow = $\begin{cases} N_2 - 78\%\ M_{\text{ł}} \\ O_2 - 21\ M_{\text{ł}} \\ \text{gaz.}\ 1\% \end{cases}$

$$M_{pow} = 29 \cdot 10^{-3}\ \frac{kg}{mol}$$

$$V_f = \sqrt{\frac{\varkappa R T}{M}}$$

$\varkappa = 1{,}4$

$R = 8{,}3\ \frac{J}{mol \cdot K}$

$$V_f(273K) = \sqrt{\frac{1{,}4 \cdot 8{,}3 \cdot 273}{29 \cdot 10^{-3}}} = 330\ \frac{m}{s}$$

Wychodzące z równania fali

$$y(x,t) = y_0 \cos(\omega t - kx)$$

Wyznaczyć równanie ruchu falowego.

$$\frac{dy}{dx} = y_0(-k) \cdot \sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y_0 (k^2) \cos(\omega t - kx)$$

$$\frac{dy}{dt} = y_0 \omega_0 \sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y_0 \omega^2 \cdot \cos(\omega t - kx)$$

$$y_0 \cos(\omega t - kx) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{1}{k^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{1}{\omega^2}$$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{d^2 y}{dt^2}}_{V^2}$$ – r. różniczkowe r. falowego

μ_0 – współczynnik przenikalności magnet.

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{F}{m} \qquad \varepsilon_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

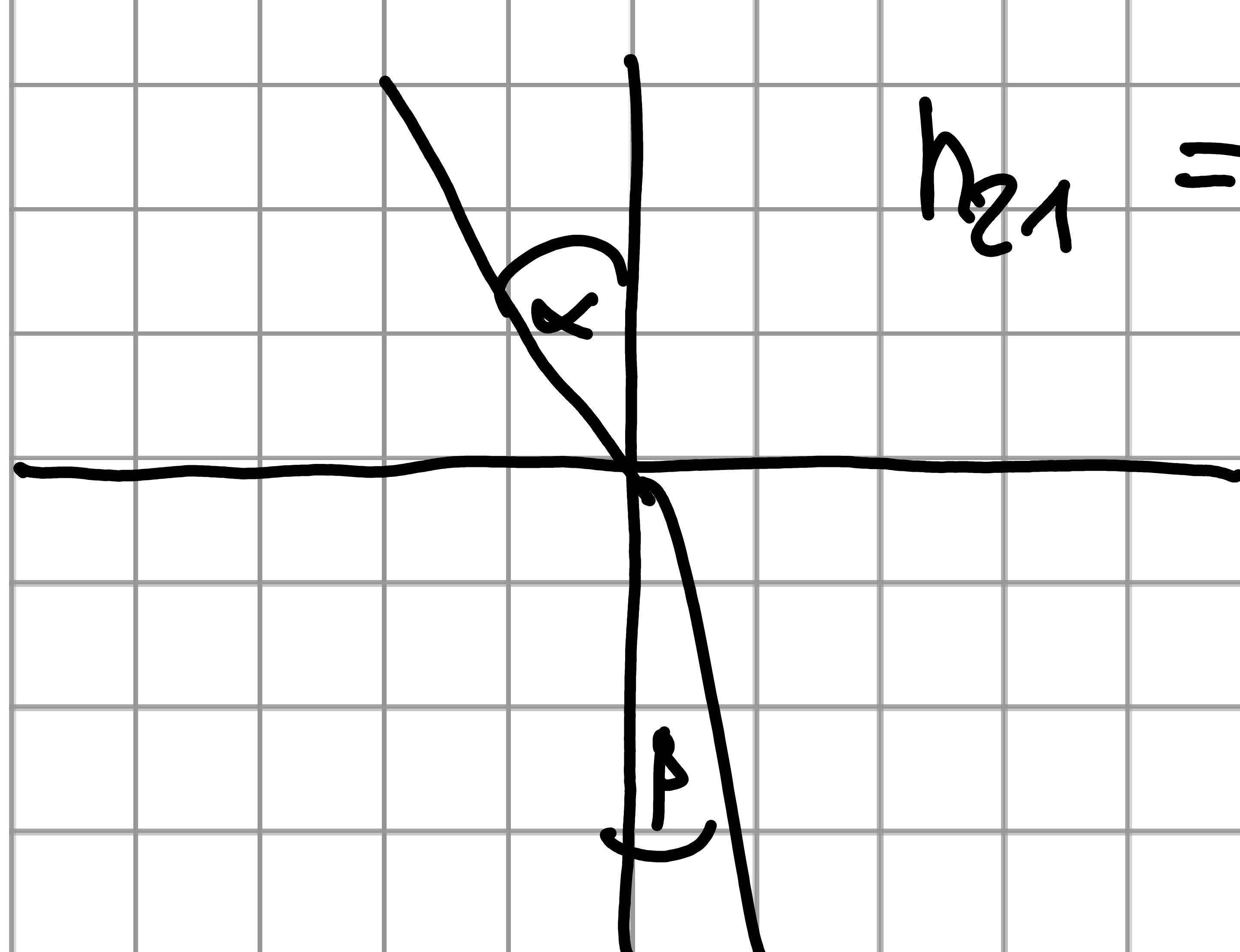
$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \qquad \vec{B}, \ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{H}{m}$$

$$\varepsilon_r \varepsilon_0 = \varepsilon \left[\frac{F}{m}\right]$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial E_y}{dt^2}; \qquad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial B_z^2}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}{c^2} \longrightarrow v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$$

Prędkość propagacji zależy tylko od ośrodka



$$n_{21} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$n_{0i} = \frac{c}{v_i}$$

Wyznaczyć prędkość rozchodzenia się fali świetlnej w ośrodkach innych niż powietrze.

szkło: $\varepsilon_r = 1{,}78$

plexi: $\varepsilon_r = 2{,}2$

diament: $\varepsilon_r = 5{,}5$

Współczynnik załamania względem próżni.

woda = 1,33

etanol = 1,37

olej n_{21} = 1,47

Odbijanie się, prawo Fermata

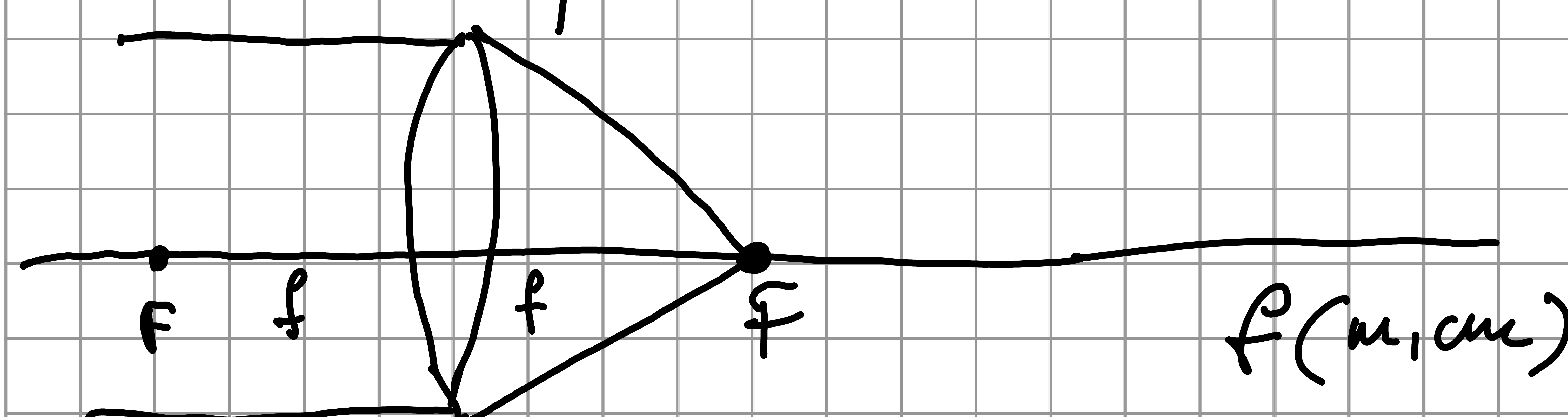
$D \sin \theta = m \lambda$ załamanie/r

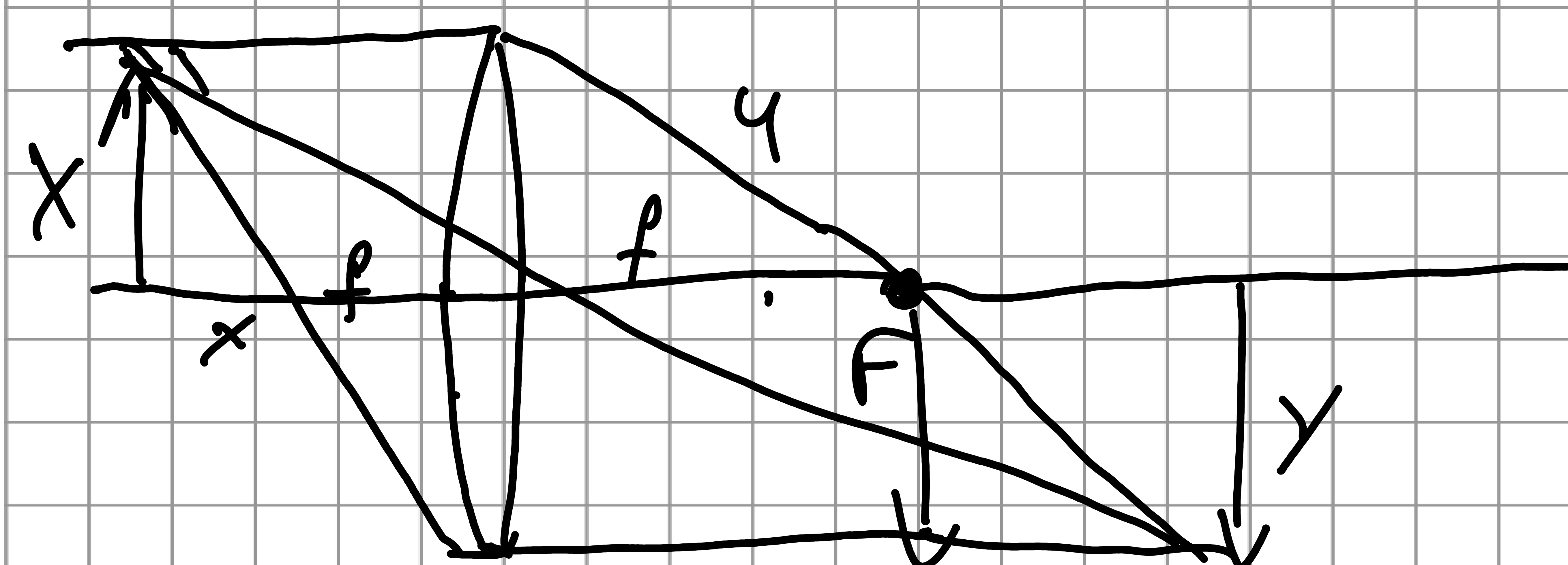
załamanie na siatce dyfrakcyjnej

dyfrakcja i interferencja

Falowa natura światła

W jakiej odległości x od soczewki skupiającej o ogniskowej $f=25cm$, umieścić przedmiot, aby uzyskać obraz rzeczywisty, dwukrotnie powiększony



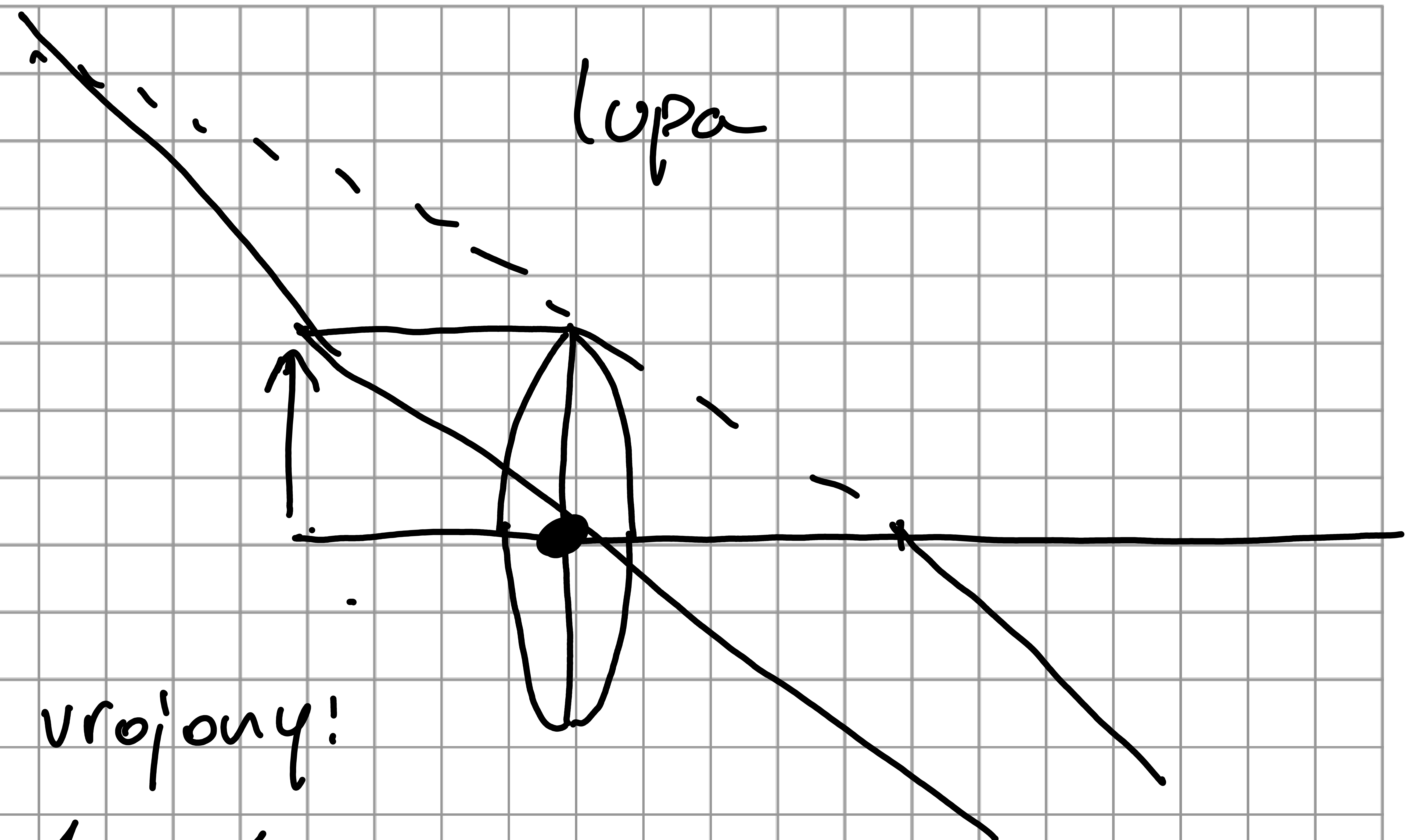


$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{Y}{X} = p \\ \frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \end{cases}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{p \cdot x}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{p+1}{p \cdot x}$$

$$X = \frac{f(p+1)}{p} = \frac{25(2+1)}{2} = 37{,}5\ cm$$



Obraz urojony:

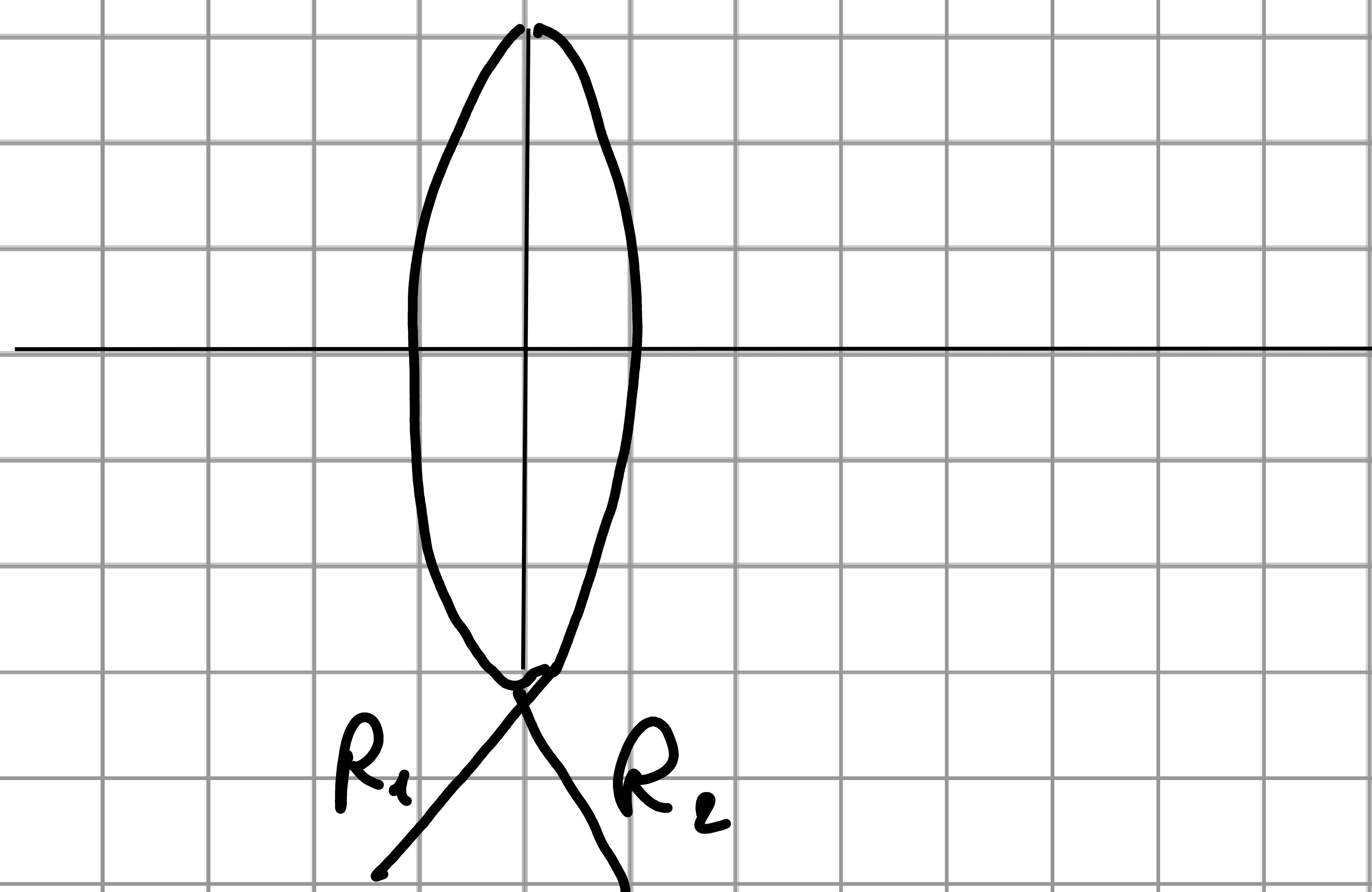
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

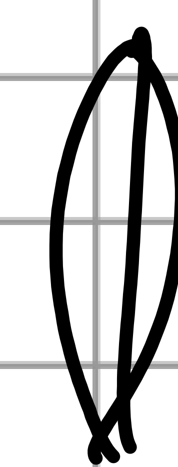
W jakiej odległości trzeba umieścić przedmiot, aby dla wcześniej podanej soczewki otrzymać obraz pozorny, podwójnie powiększony.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} - \frac{1}{p \cdot x}$$

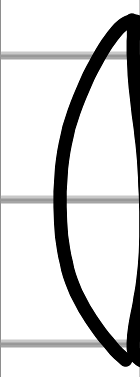
$$\frac{1}{f} = \frac{p-1}{p \cdot x} ; \quad x = \frac{f(p-1)}{p} = \frac{1}{2} f$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad \frac{1}{f} = \frac{n_s - n_0}{n_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$



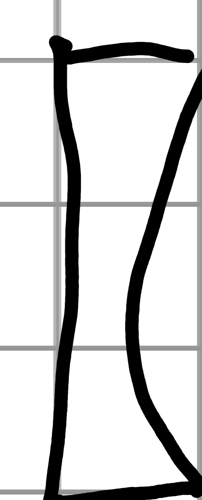


$R_1, R_2 > 0$



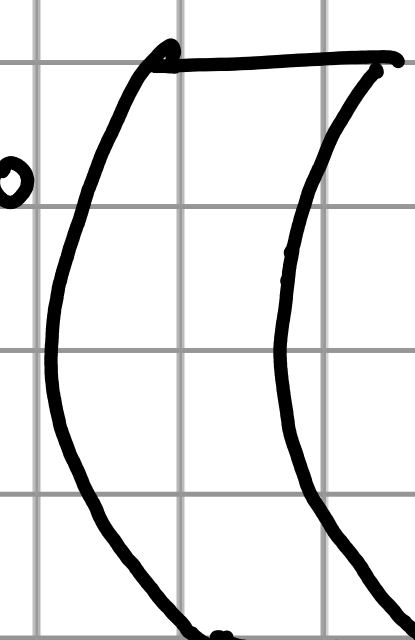
$R_2 \to \infty$

$\frac{1}{R_2} = 0$



$\frac{1}{R_1} = 0$

$R_2 < 0$



$R_1 > 0$

$R_2 < 0$

Soczewka symetrycznie dwuwypukła wykonana ze szkła o współczynniku załamania $n_s = 1{,}5$ w odległości równej $6\,cm = x$, daje wyraźny obraz w odległości $12\,cm = y$. Jaki obraz krzywizny daję soczewki.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad , \quad \frac{1}{f} = \frac{n_s - n_o}{n_o}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$= (n_s - 1)\frac{2}{R}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = (n_s - 1)\frac{2}{R} \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = (n_s - 1)\frac{2}{R}.$$

$$R(x+y) = 2y(n_s - 1)$$

$$R = \frac{2y(n_s - 1)}{(x+y)}\,cm$$

Zdolność skupiająca: $\frac{1}{f} = Z\left[\frac{1}{m} = D\right]$

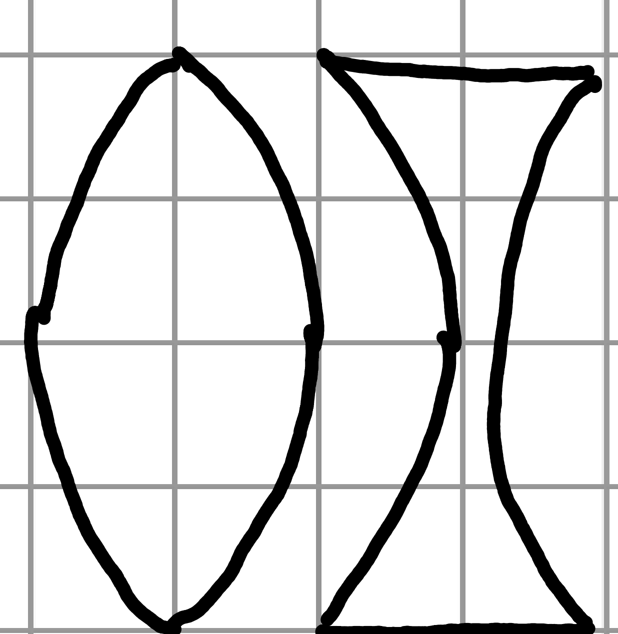
$Z < 0$ rozpraszająca

$Z > 0$ skupiająca

$Z_c = Z_1 + Z_2 + \ldots + n$

$\frac{1}{f_c} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \ldots + n$

Krótkowidz który używa okularów widzi dobrze na 25cm = x. oraz soczewki. Obliczyć odległość dobrego widzenia bez korekcji optycznej.



$$\frac{1}{f_o} + \frac{1}{f_s} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

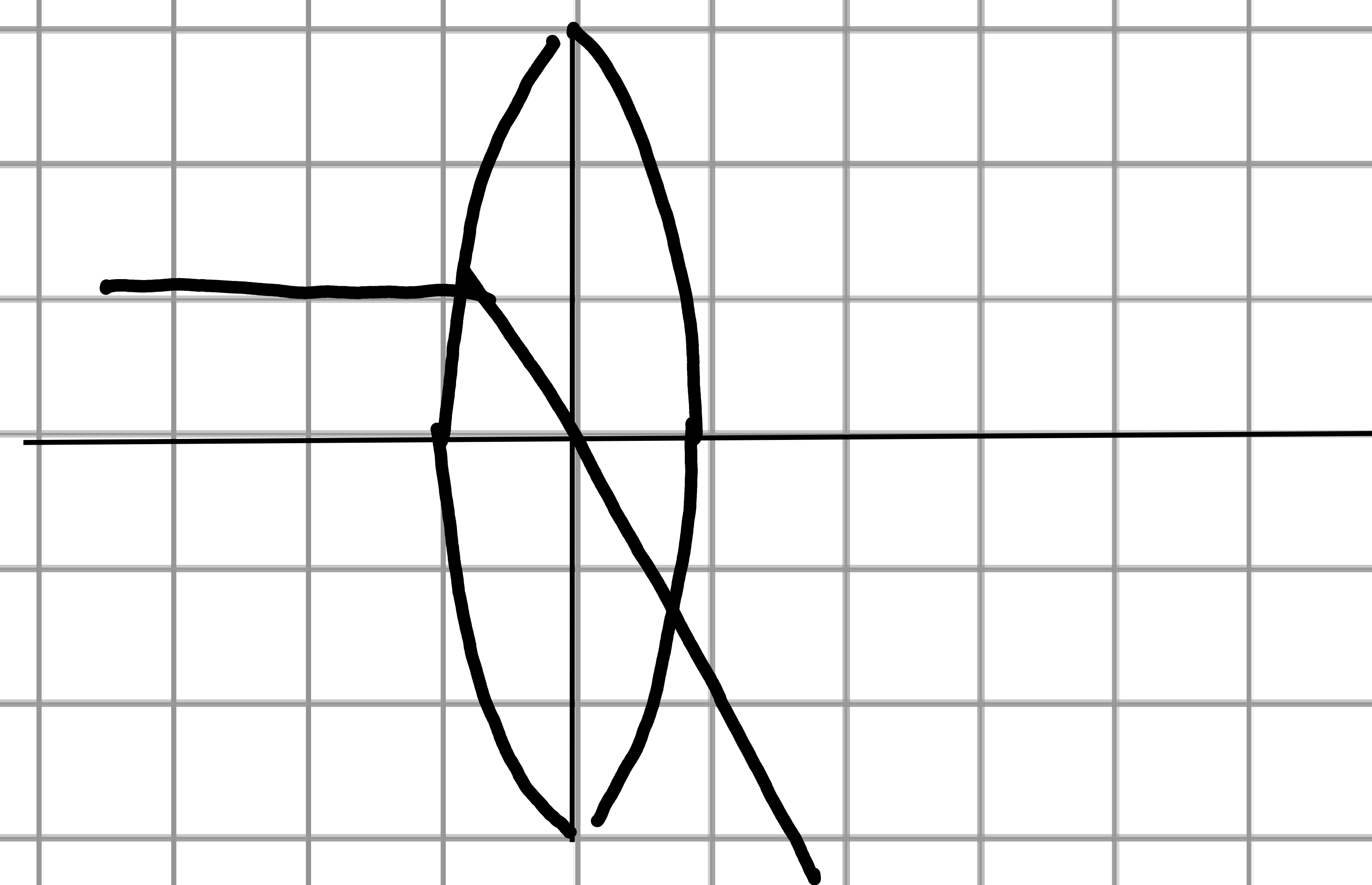
$$Z_o + Z_s$$

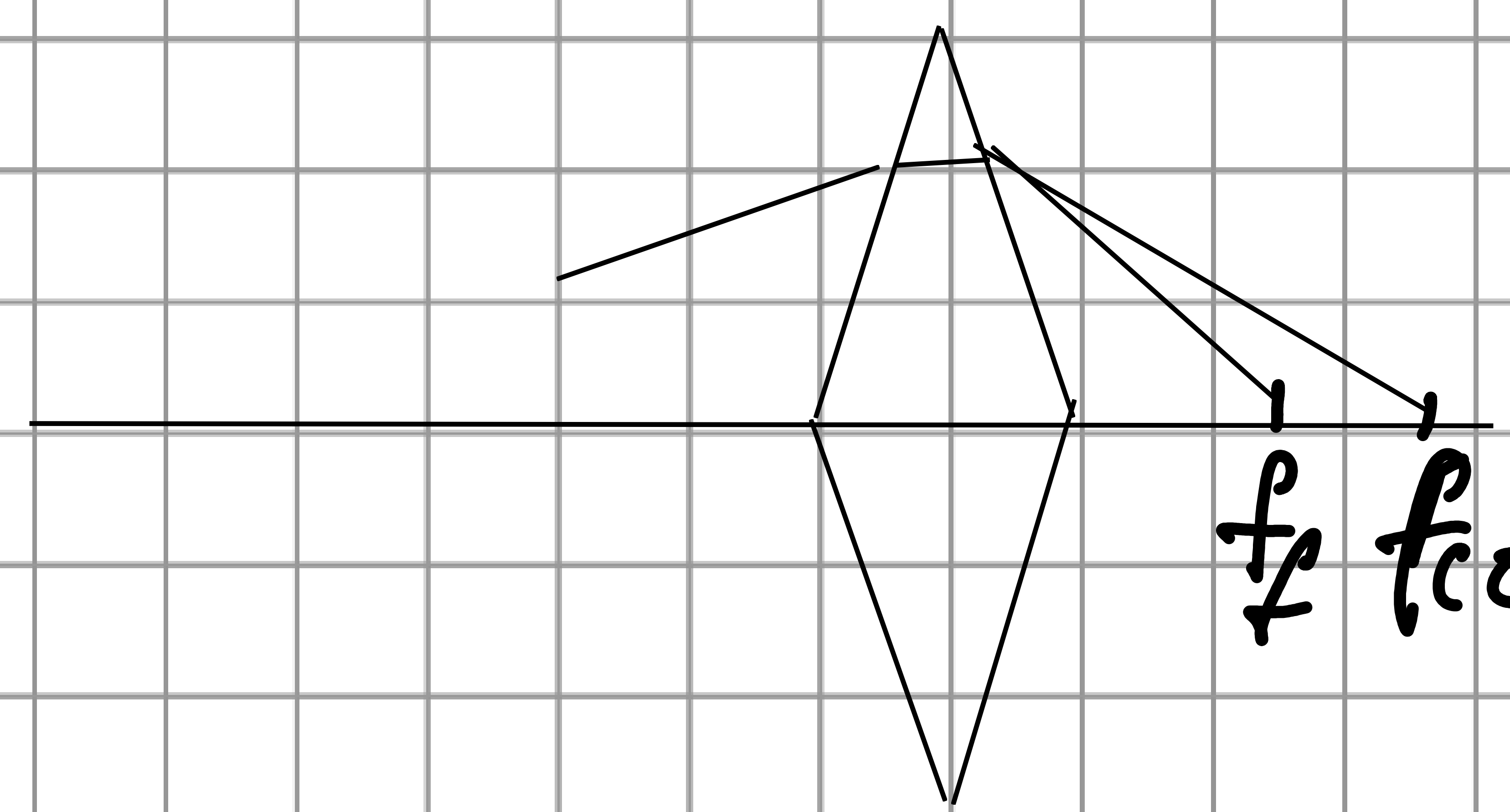
$$\begin{cases} Z_o = \frac{1}{x'} + \frac{1}{y} \\ Z_o + Z_s = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \end{cases}$$

$$Z_s = \frac{1}{x} - \frac{1}{x'} \longrightarrow -\frac{1}{x'} = \frac{1}{x} - Z_s$$

Przekształcić,

$$x' = \frac{x}{x \cdot Z_s + 1}$$





$f_{cz} - f_f = \Delta f$ - aberracja chromatyczna

Wyznaczyć wartość aberracji chromatycznej. Dla symetrycznej dwuwypukłej soczewki, o promieniach $r = 15$ cm, dla której dla barwy czerw. wynosi 1,45, a dla fioletowej 1.65. $n_0 = 1$

$f_{cz} = 1.45$, $f_f = 1.45$

$$\frac{1}{f} = (n_s - 1)\left(\frac{2}{R}\right) \qquad \Delta f = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{n_{cz}-1} - \frac{1}{n_f - 1}\right)$$

$$\frac{1}{f_{cz}} = (n_{cz} - 1)\left(\frac{2}{R}\right) \rightarrow f_{cz} = \frac{R}{2(n_{cz} - 1)}$$

$$f_f = (n_f - 1)\left(\frac{2}{R}\right) \rightarrow f_f = \frac{R}{2(n_f - 1)}$$

$$e_\lambda = \frac{E}{\underset{s}{\Delta t}\,\underset{n}{\Delta s}\,\underset{m^2}{\Delta \lambda}} = \frac{V}{s \cdot n \cdot m^2} = \frac{W}{n \cdot m^2}$$

$\lambda_m \cdot T = b$ – prawo Wiena

$b = 2898\ K \cdot \mu m$

$E_c = \varsigma T^4$ – prawo Stefana-Boltzmana

Temperatura pręta z węgliku krzemu wzrosła od 400 K do 1200 K.
Obliczyć o ile zmieniła się przy tym długość fali określająca maksimum emisyjnej pręta i ile razy wzrosła moc emitowana przez to ciało.

$$\lambda_{max_1} = \frac{C}{T_1} \quad \lambda_{max_2} = \frac{C}{T_2}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_{max_2} - \lambda_{max_1}$$

$$\Delta\lambda = \frac{C}{T_2} - \frac{C}{T_1} = C\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

$$E_{c_1} = \sigma T_1^4 \qquad \frac{E_{c_2}}{E_{c_1}} = \frac{T_2^4}{T_1^4} = 3^4 = 81$$

$$E_{c_2} = \sigma T_2^4$$

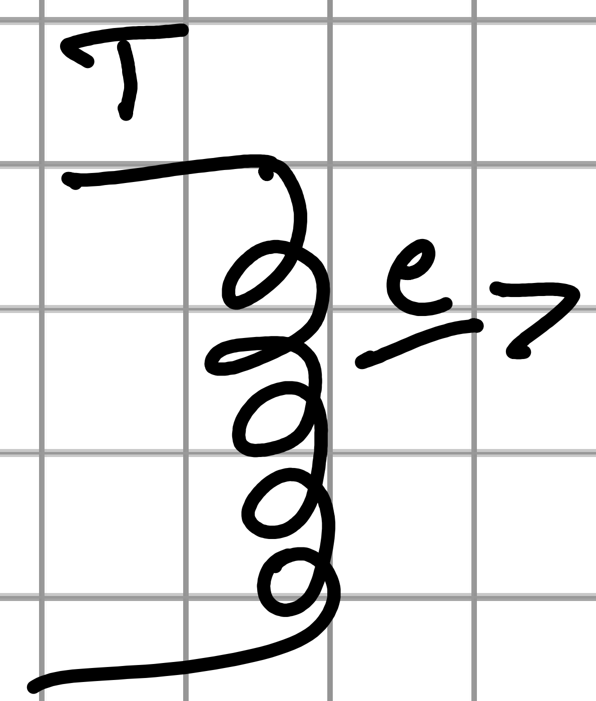
$$e(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c} \cdot \nu^3 \cdot e^{\frac{1}{\frac{h\nu}{kt} - 1}}$$

$$e(\lambda, T) = \frac{2c^2 \cdot h}{\lambda^5} \cdot e^{\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{\lambda kt}} - 1}}$$

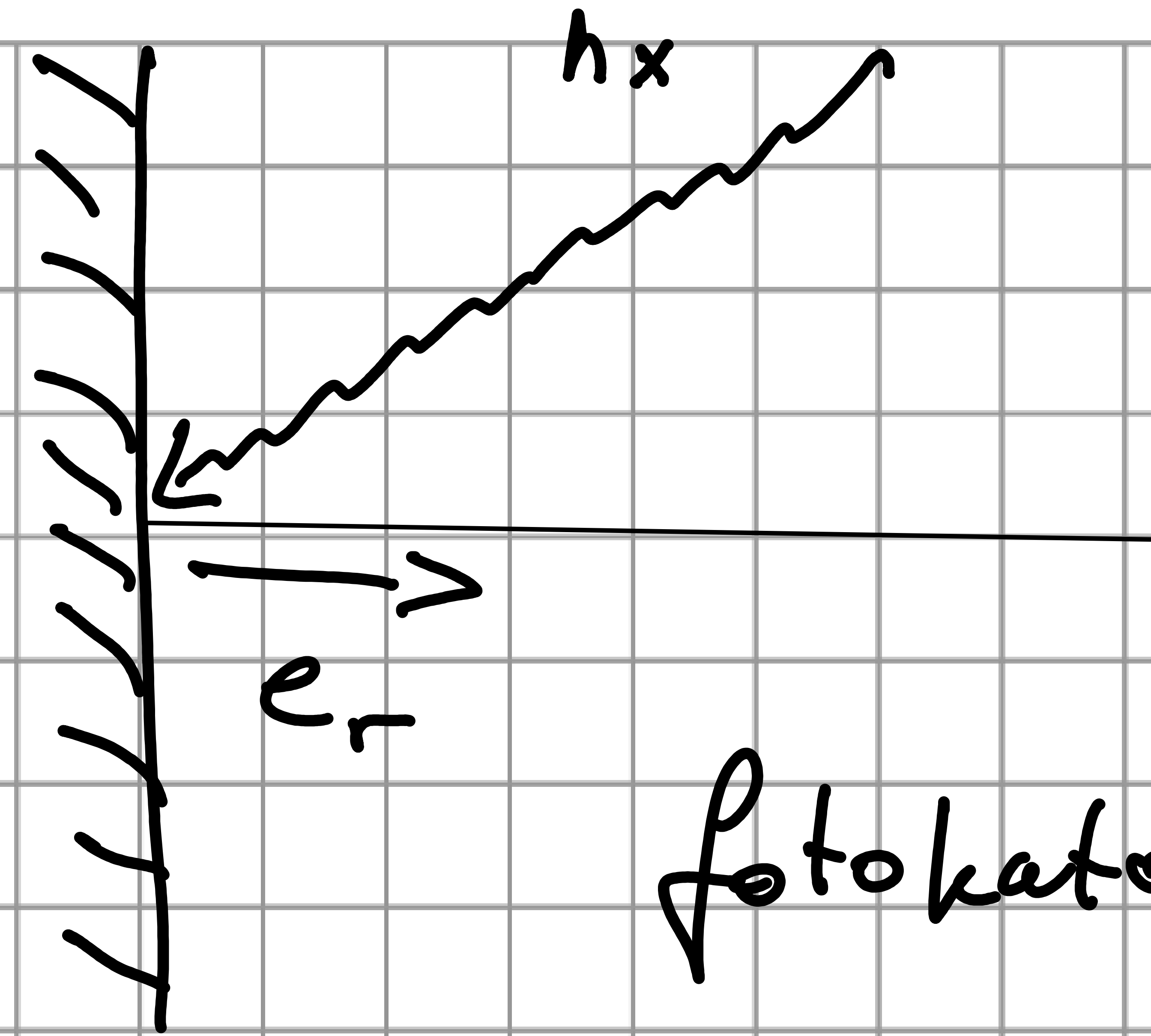
$$T = \frac{de_\lambda}{d\lambda} = 0 \rightarrow \lambda_m = \frac{G}{T}$$

$$S = 5{,}67 \cdot 10^{-6}$$

$$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \, J \cdot s$$



termokatoda



fotokatoda

W (eV) elektronowolty

$eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, e \cdot 1\, V = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, J$

$E_{fg} = W$ $\quad E = W + E_c$ – efekt fotoelektryczny

$E_f = W + \frac{m}{2} v_e^2$

$hc = 1240\,eV \cdot nm$

Powierzchnię elektrody wykonanej z potasu oświetlono promieniowaniem zielonym $\lambda = 500\,nm$. Praca wyjścia dla potasu to 2,2 eV. Czy energia tego fotonu jest wystarczająca, aby wywołać zjawisko fotoelektryczne, na powierzchni potasu. Jeśli tak, to jaką energię elektryczną i prędkość będą miały uwolnione protony.

$$h = 4{,}136 \cdot 10^{-16}\ eV \cdot s$$

$$E_f = h\nu = \frac{hc}{\lambda_f}$$

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \frac{1}{T} = \lambda \cdot \nu$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

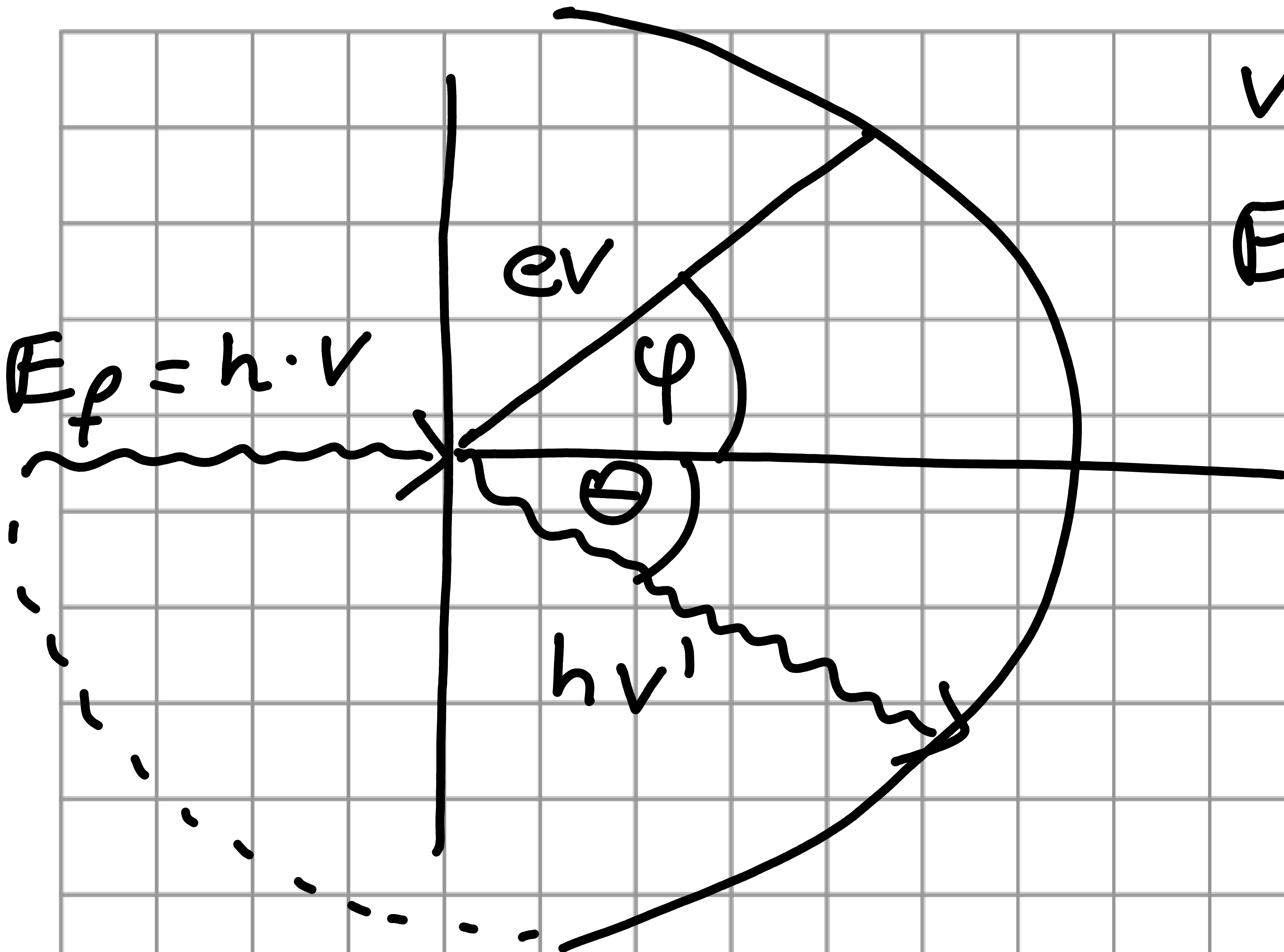
$$E_{f_g} = \frac{hc}{\lambda_f} = \frac{1240\,eV \cdot nm}{500\,nm} = 2{,}48\,eV.$$

$$E_f - W = 2{,}48\,eV - 2{,}2\,eV = 0{,}28\,eV$$

$$E_m = \frac{m_e}{2} V^2 \longrightarrow V = \sqrt{\frac{2E_k}{m_e}}$$

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}28 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} \quad \left(\frac{J}{kg} = \frac{N \cdot m}{kg} \cdot \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2}}{kg} \cdot \frac{m}{s^2}\right)$$

$$\left[\frac{m}{s}\right]$$



$\nu' < \nu$

$E_f = E_{f'} + E_{k_e}$

$\vec{p_f} = \vec{p_{f'}} + \vec{p_e}$

$\Theta_{max} = 180°$

$$\lambda'_f - \lambda_f = \frac{h}{m_e \cdot c}\left(1 - \cos(\Theta)\right)$$

$\lambda_c = 2{,}426 \cdot 10^{-12}$ m. stała comptonowska

a) Jaką długość miało promieniowanie X, padające na grafitową płytkę jeśli na skutek rozpraszania komptonowskiego pod kątem $\Theta = 60°$ zaobserwowano rozproszony foton o długości $\lambda' = 2,5$.

b) Jaką długość fal będzie miał foton najsilniej rozproszony i jaką energię

a) $\lambda' \to \lambda$

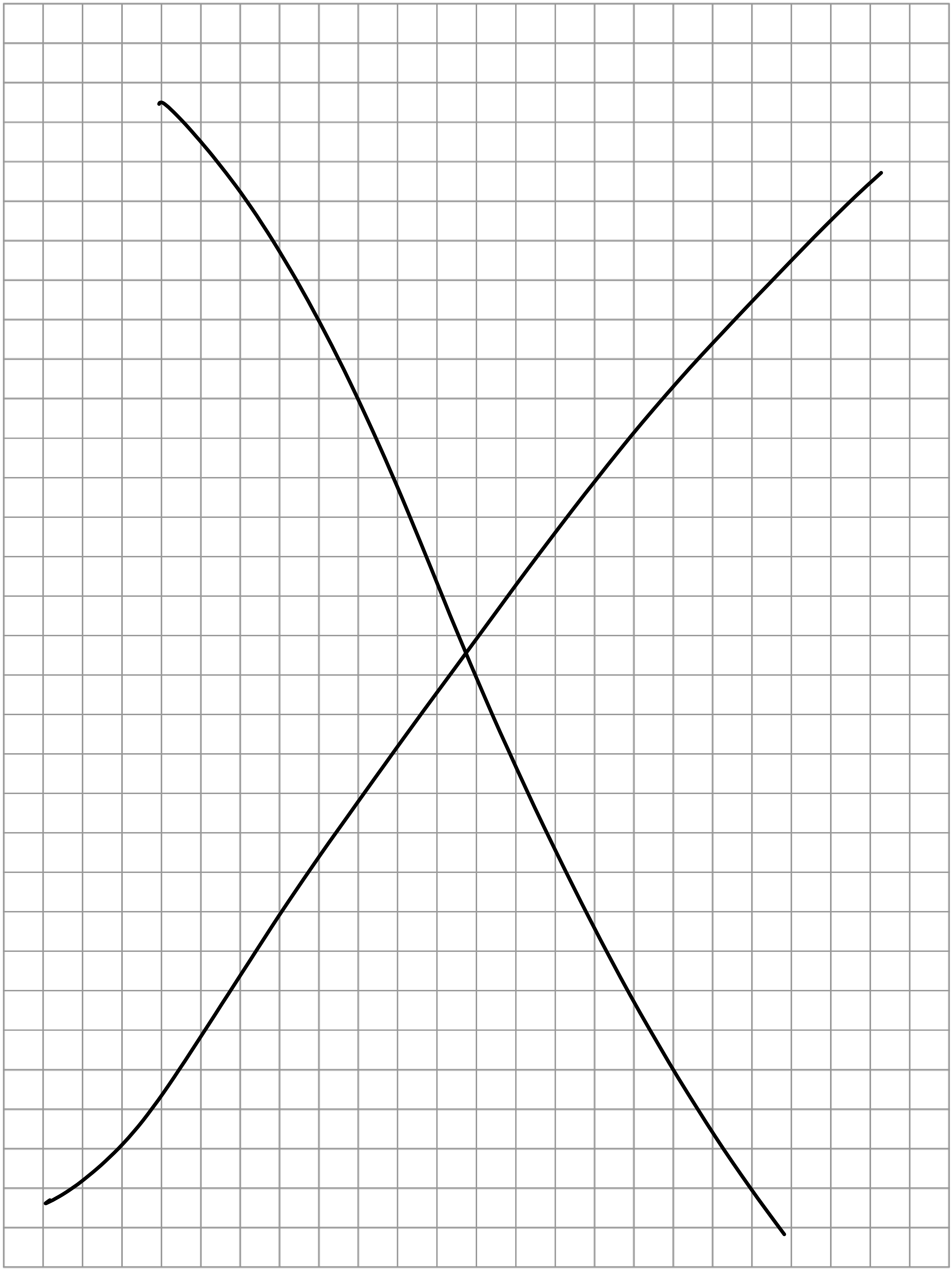
$$\lambda_f = \lambda'_f - \lambda_c (1 - \cos(\Theta))$$

$$\lambda_f = 2,5 \cdot 10^{-11} - 2,426 \left(1 - \frac{1}{2}\right) m$$

...

b) $$\lambda'_{180} = \lambda'_f + \lambda'_c (1 - \cos(180°)) =$$

$$= \lambda_f + \lambda_c (1 - (-1)) = \lambda_f \cdot 2 \lambda_c$$



Fale

$$y(x) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – liczba falowa (m^{-1})

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ – prędkość kątowa (s^{-1})

ϕ – kąt początkowy

A – amplituda

$T = \frac{1}{f}$

f – częstość fali T – okres fali

$v = \lambda f$

λ – długość fali

Fala ma postać:

$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) =$

$0{,}2m \cdot \sin(6{,}28m^{-1} \cdot x - 1{,}57s^{-1} \cdot t)$

Oblicz amplitudę, długość, okres i prędkość fali.

1) $A = 0{,}2m$

2) $6{,}28 = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{6{,}28}$

3) $1{,}57 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{1{,}57}$

4) $v = \lambda f$

$T^{-1} = f = \frac{1{,}57}{2\pi}$

$V = \frac{\cancel{2\pi}}{6{,}28} \cdot \frac{1{,}57}{\cancel{2\pi}} = 0{,}25\ m/s$

$$y(x,t) = A\sin(kx + \omega t + \phi)$$

max prędkość

$$\frac{\partial y'(x,t)}{\partial t} = -A\omega\cos(kx + \omega t + \phi)$$

max przyśpieszenie

$$\frac{\partial'' y(x,t)}{\partial t} = -A\omega^2\sin(kx + \omega t + \phi)$$

$x = 0$

$$y(t) = 0.01\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Wyznaczyć prędkość fali poprzecznej o długości $\lambda = 6m$.

$$y(t) = 0.01\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y(t) = A\cos(kx + \omega t + \phi)$$

$$\phi = \frac{\pi}{2}, \quad \omega = \pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2 \Rightarrow f = \frac{1}{2}$$

$$V = \lambda f = 6m \cdot \frac{1}{2}s^{-1} = 3\,m/s$$

Wyznaczyć w $x = 4{,}5$ dla $t = 1/2\,s$

$$y(t) = 0.01\cos\left(\frac{3}{2}\pi + 1/2\,\pi - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 0.01\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

Wyznaczyć stan dla dowolnego x.

j.w.

Wyznaczyć dla fali płaskiej poprzecznej dla $x=0$; $y(t) = 0{,}2 \sin(10t)$ o długości $\lambda = 12\,m$, prędkość propagacji fali i maksymalną prędkość cząsteczek.

$$y(t) = 0{,}2 \sin(10t)$$

$$x=0,\ \phi = 0,\ A = 0{,}2,\ \omega = 10 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}$$

$$f = \frac{5}{\pi}$$

$$V = \lambda f = 12 \cdot \frac{5}{\pi} = \frac{60}{\pi}\,\frac{m}{s}$$ ← prędkość propagacji

$$\max |v| = \frac{d}{dt}\, 0.2 \sin(10t) = \left| -2\cos(10t) \right|$$

$$V_{max} = 2\,\frac{m}{s}$$

Wyznaczyć różnicę faz między dwoma punktami fali dźwiękowej w powietrzu. Punkty są odległe od siebie o $l = 0,25m$ i mają $f = 680Hz$,

$$V = 340 \frac{m}{s}, \quad V = \lambda f \Rightarrow \lambda = 0,5m$$

$$k = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi, \quad \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = k(x_1 - x_2)$$

$$\Delta\varphi = 4\pi \cdot 1/4 = \pi$$

Prędkość impulsu/fali wynosi:

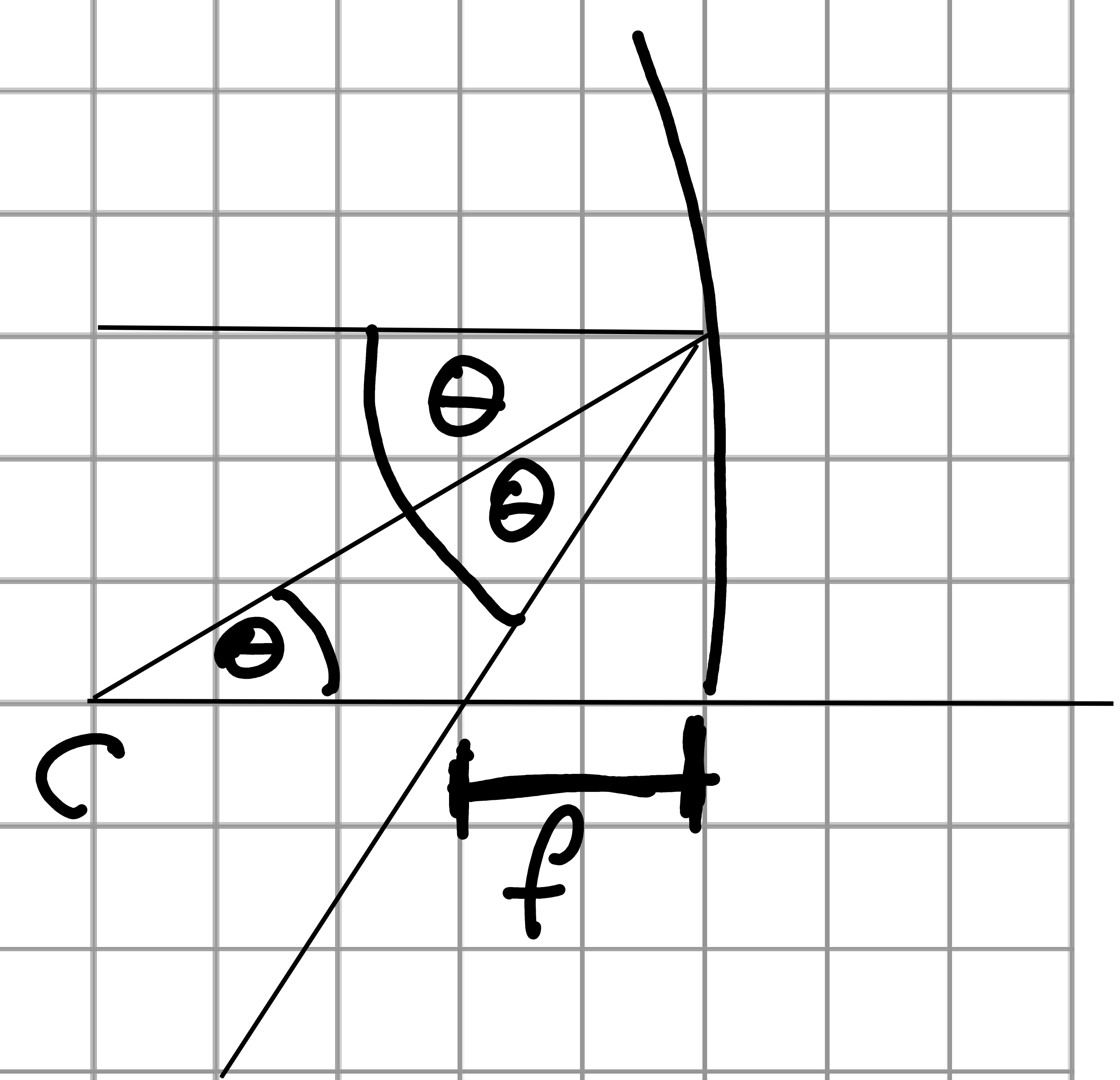
$$|v| = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

F_T - naprężenie struny

μ - masa na jednostkę długości struny

Optyka

Dla małych kątów: $f = \frac{R}{2}$



f - ogniskowa zwierciadła

R - promień krzywizny

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$ - równanie zwierciadła

$-x = y$

$p = \frac{y}{x} = \frac{Y}{X}$ p - bezwymiarowe powiększenie

Równanie powierzchni sferycznej:

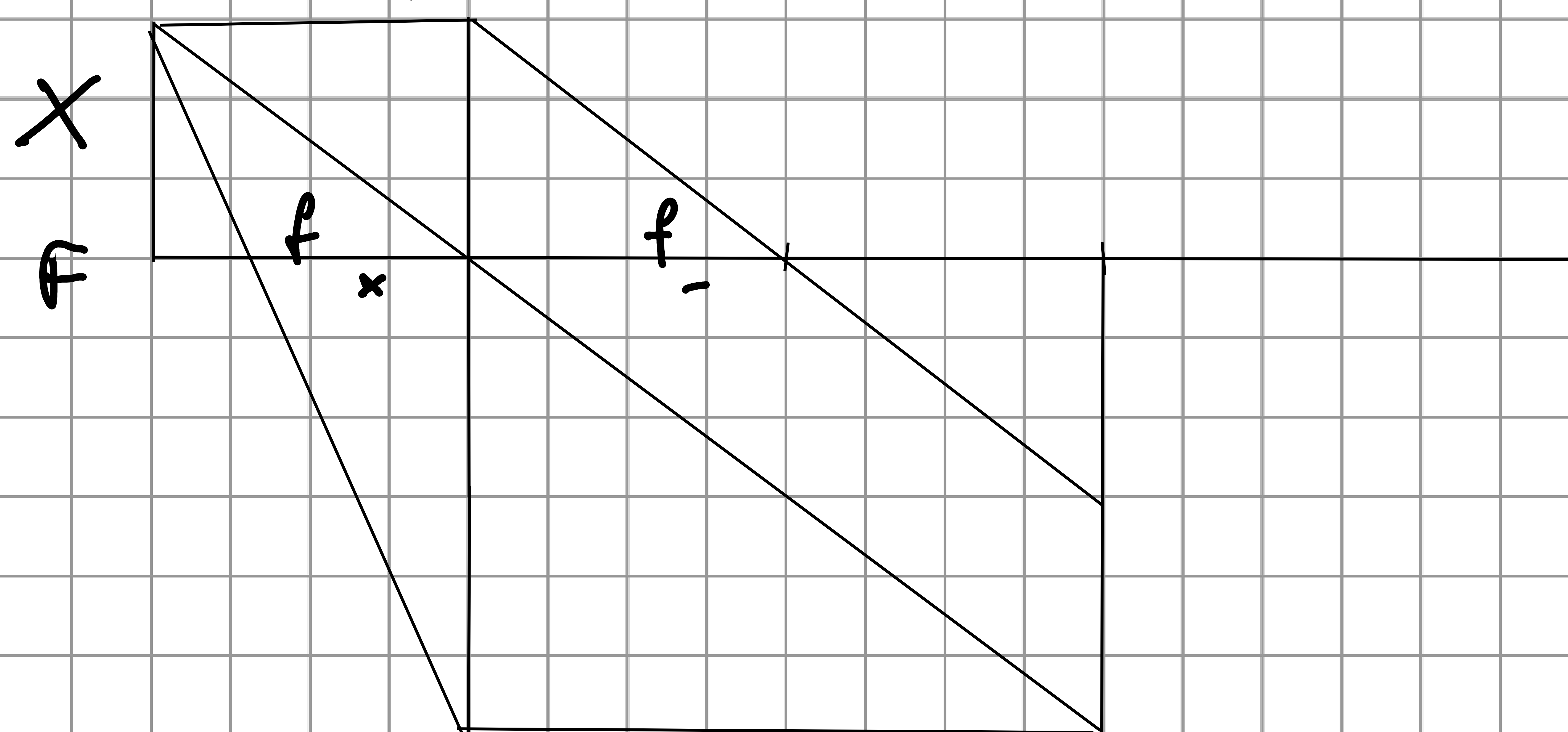
$\frac{n_1}{x} + \frac{n_2}{y} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ R - promień krzywizny

Równanie soczewki:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \approx \left(n_s - 1\right)\left(\frac{2}{R}\right) = \frac{1}{f}$$

$\Delta f = f_{cz} - f_f$ - aberracja chromatyczna

W jakiej odległości X od soczewki skupiającej o ogniskowej $f=25$ cm, umieścić przedmiot, aby uzyskać obraz rzeczywisty, dwukrotnie powiększony.



$p=2$

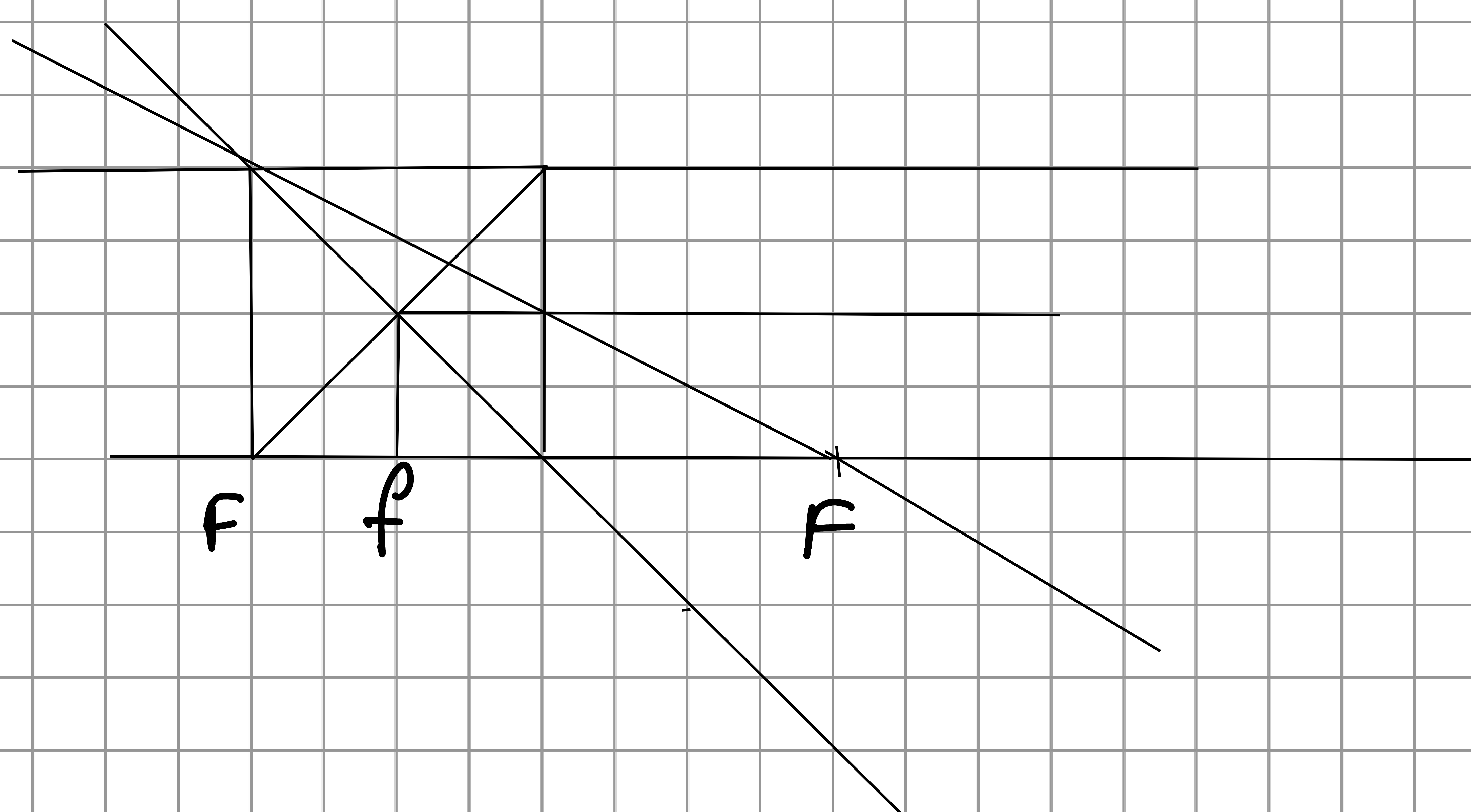
Równanie soczewki: $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

Równanie powiększenia: $p = \frac{y}{x} = \frac{Y}{X} \Rightarrow \begin{matrix} y = 2x \\ Y = 2X \end{matrix}$

$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} \Rightarrow \frac{3}{2}f = 37{,}5 = X$

W jakiej odległości trzeba umieścić przedmiot, aby dla wcześniej podanej soczewki otrzymać obraz pozorny, podwójnie powiększony?

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} \Rightarrow f = 2x \Rightarrow x = 12{,}5\,m$$



Jaka powinna być wartość promienia zwierciadła, aby promienie słoneczne skupiły się w odległości 40 cm od zwierciadła?

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad x = \infty, \; f = 40$$

$$\frac{1}{40} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = 40$$

Soczewka symetrycznie dwuwypukła wykonana ze szkła o współczynniku załamania $n_s = 1{,}5$ w odległości $6cm = x$, daje wyraźny obraz w odległości $12cm = y$. Jaki obraz wyraźny daje soczewka?

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \qquad R_1 = R_2, \quad n_0 = 1$$

$$\frac{1}{f} = \frac{n_s - n_0}{n_0}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = (n_s - 1)\left(\frac{2}{R}\right)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow f = 4$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 4$$

Obraz rzeczywisty, bo $f > 0$.

Oblicz położenie, orientację i powiększenie obrazu dla przedmiotu o wysokości 3 cm, dla następujących odległości przedmiotu od soczewki wypukłej o ogniskowej równej 10 cm.

$f = 10\,cm$

a) $x = 50\,cm$

$$y = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{50}\right)^{-1} = 12{,}5\,cm$$

Obraz jest rzeczywisty.

$$p = \frac{y}{x} = \frac{12{,}5}{50}$$

Przedmiot jest dalej niż ogniskowa, a więc używany jest wzór $p = -\frac{y}{x}$

$$p = -\frac{12{,}5}{50} = -0{,}25\,cm$$ => Obraz odwrócony, mniejszy od orginału

$0.25 \cdot 3\,cm = 0{,}75\,cm$ - wysokość obrazu

b) dla $x = 5 cm$

$y = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}\right)^{-1} = -10 cm$ ← obraz pozorny

$p = -\frac{-10}{5} = +2$ ← obraz prosty

$2 \cdot 3 = 6$ ← obraz ma 6 cm

Wyznaczyć wartość aberracji chromatycznej dla symetrycznej dwuwypukłej soczewki o promieniu $r = 15\,cm$. Dla barwy czerwonej wynosi 1,45, dla fioletowej 1.65.

$n_0 = 1.$

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{2}{R}\right)$$

Aberracja chromatyczna – różnica ogniskowych soczewki dla różnych długości fal

Dla czerwonego:

$$\frac{1}{f} = (1{,}45-1)\left(\frac{2}{15}\right) = \frac{0{,}9}{15} \Rightarrow f = \frac{15}{0{,}9} = 16{,}67$$

Dla fioletowego:

$$\frac{1}{f} = (1{,}65-1)\left(\frac{2}{15}\right) = \frac{1{,}3}{15} \Rightarrow f = \frac{15}{1{,}3} = 11.54$$

Aberracja jest równa $(16{,}67 - 11{,}54)$ 5,13.

Światło

$$1 \leqslant n = \frac{c}{v}$$

n - współczynnik załamania

v - prędkość światła w danym ośrodku.

$$n_2 = n_1 \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)}$$

n_1 - zazwyczaj powietrze = 1

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Fotony i fale materii

$E_{max} = h\nu - W$ E - kwant energii

ν - częstotliwość światła

$E_f = \frac{hc}{\lambda}$ h - stała Plancka $= 4,136 \cdot 10^{16}$

energia fotonu

$h \cdot c = 1240$ eV W - praca potrzebna, aby fotoelektron opuścił metal.

$E_{max} = E \cdot V_h$

$\nu_0 = \frac{W}{h}$ - częstotliwość progowa

$\lambda \nu = c$ λ - długość fal

$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{hc}{W}$ - długość fal odpowiadająca częstotliwości progowej.

Prawo Stefana-Boltzmana: $P(T) = \sigma S T^4$

S - powierzchnia ciała doskonale czarnego jak dużo energii jest emitowane

T - temperatura

σ - stała SB $= 5,67 \cdot 10^{-8}$ W

$E_n - n\nu h$ n - liczba naturalna

ν - częstotliwość oscylatora

h - stała plancka $= 4,136 \cdot 10^{-15}$ eVs

Promieniowanie o długości fali 300 nm pada na powierzchnię srebra. Czy zachodzi efekt fotoelektryczny?

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{W} = \frac{1240\,\text{eV nm}}{4{,}73\,\text{eV}} = 262\ \text{nm}.$$

$$300\ \text{nm} > 262\ \text{nm}.$$

Nie zajdzie efekt fotoelektryczny, ponieważ fale są dłuższe od długości progowej.

Powierzchnię elektrody wykonanej z potasu oświetlono promieniowaniem zielonym $\lambda = 500$ nm. Praca wyjścia dla potasu to 2,2 eV. Czy zajdzie zjawisko fotoelekt. Jeśli tak, jaką energię elektryczną będą miały uwolnione protony.

$\lambda = 500$ nm. $W = 2{,}2$ eV. $h = 4{,}136 \cdot 10^{-16}$ eV$\cdot$s

$$E_f = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240}{500} = 2{,}48 \text{ eV} > W = 2{,}2 \text{ eV}$$

$$E_k = E_f - W = 0{,}48 \text{ eV}$$

E_f - energia fotonu

E_k - energia kinetyczna

W - praca wyjścia

Światło o długości 180 nm pada na nieznany metal. Zmierzony fotoprąd przestaje płynąc po przyłożeniu napięcia −0.8 V. Wyznacz pracę wyjścia dla metalu oraz częstotliwość progową.

$W = ?$ $\lambda_0 = ?$ $\lambda = 180\,nm$

$$E_{max} = e \cdot V = 0{,}8\,eV$$

$$E_{max} = E_f - W = \frac{hc}{\lambda} - W \Rightarrow W = \frac{1240\,eV nm}{180\,nm} - 0.8\,eV$$

$$W = 6{,}09\ eV.$$

$$\nu_0 = \frac{W}{h} = \frac{6{,}09}{4{,}136 \cdot 10^{-15}\,eV \cdot s} = 1{,}47 \cdot 10^{-15}\ Hz$$

Temperatura pręta z węglika krzemu wzrasta od 400K do 1200K. Obliczyć o ile zmieniła się długość fali określającą maksimum emisyjne pręta i o ile razy wzrosła moc emitowana przez to ciało.

$$\lambda_{max_1} = \frac{b}{T_1} \qquad \lambda_{max_2} = \frac{b}{T_2}$$

$$\Delta \lambda = \lambda_{max_2} - \lambda_{max_1}$$

$$\Delta \lambda = \frac{b}{T_2} - \frac{b}{T_1} = b\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

$$E_{c_1} = \sigma s T^4 \qquad E_{c_2} = \sigma s T^4$$

$$\frac{E_{c2}}{E_{c1}} = \frac{T_2^4}{T_1^4} = 3^4 = 81$$

Jaką długość miało promieniowanie X, padające na grafitową płytkę jeśli na skutek rozpraszania komptonowskiego pod kątem $\Theta = 60^\circ$ zaobserwowano foton o długości $\lambda' = 2,5\,nm$.

$\lambda_f = \lambda' - \lambda_c(1 - \cos(\Theta))$

$\lambda_c = 2,426$ $\quad \lambda' = 2,5 \cdot 10^{-11}$ $\quad \Theta = 60$

$\lambda_f = 2,5 - 2,426 \cdot (1 - \cos(60^\circ))$

$\lambda_f = 2,5 - 1,213 = 1,287\ pm$

Jaką długość i energię będą miały fotony najsilniej rozproszone? $\Theta = 180$

$\lambda_f = 2,5 + 2,426 \cdot (1 - \cos(180^\circ))$

$= 2,5 + 2 \cdot 2,426 = 6,14\ pm$

+ przy obliczaniu fotonów

− przy obliczaniu długości fali

Fale de Brogile'a

Wcześniej używaliśmy:

$$E = h\nu = \frac{c}{\lambda}$$

E - energia cząstki
ν - częstotliwość fali
h - stała planka $(4{,}136 \cdot 10^{-6})$
p - pęd cząstki
λ - długość fali

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Po uogólnieniu de Brogile'a:

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi} \cdot (2\pi\nu) = \hbar \cdot \omega$$

$\hbar$ - stała Diraca

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar \cdot \vec{k}$$

$\to$ k - wektor falowy

Dodatkowo:

$$E = \gamma mc^2$$

Wyznaczyć długość fali de Brogilea dla elektronu rozpędzonego w polu elektrycznym przy napięciu $U = 10\,V$

$E_k = eU = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,J \cdot 10\,V = 1{,}602 \cdot 10^{-18}$

$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = 1{,}8 \cdot 10^{6}\,\frac{m}{s}$

$p = mv = (9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg) \cdot (1{,}8 \cdot 10^{6}\,\frac{m}{s}) = 1{,}6 \cdot 10^{-24}\,kg\frac{m}{s}$

$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{1{,}64 \cdot 10^{-24}} = 4 \cdot 10^{-10}$

Obliczyć prędkość elektronów o $E_k = 10 keV$

Wyznaczyć długość fali de Brogile'a.

1) Prędkość elektronu

$m = 9,11 \cdot 10^{-31} kg \quad E_0 = m_0 c^2 = 511 keV$

$e = 1,602 \cdot 10^{-19} kg$

$h = 6,626 \cdot 10^{-34} Js$

$10 keV = 10\,000 eV \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \frac{J}{eV} = 1,602 \cdot 10^{-15} J.$

$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = 5,9 \cdot 10^7 \frac{m}{s} = 0,2c$

2) Długość fal de Broglie'a

$p = m_e v = (9,11 \cdot 10^{-31} kg) \cdot (5,9 \cdot 10^7 \frac{m}{s}) = 5,37 \cdot 10^{-23} \frac{kg\,m}{s}$

$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{5,37 \cdot 10^{-23}} = 1,23 \cdot 10^{-11} = 0,012 nm$

Obliczyć prędkość elektronów o $E_k = 500\,keV$

Wyznaczyć długość fali de Brogile'a.

Dla wysokiej energii trzeba użyć relatywistycznego wzoru.

1. Całkowita energia elektronu

$$E_c = E_0 + E_k = mc^2 + E_k = 511\,keV + 500\,keV = 1011\,keV$$

2. Współczynnik lorentza

$$\gamma = \frac{E_c}{mc^2} = \frac{1011}{511} = 1{,}978$$

3. Prędkość

$$\frac{v}{c} = \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma}} = \sqrt{1 - \frac{1}{(1{,}978)^2}} = 0{,}863$$

$$v = \beta c = 0{,}863c$$

4. Pęd

$$p = m v \gamma = (9{,}11 \cdot 10^{-31}) \cdot 0{,}863 \cdot 3 \cdot 10^{8} \cdot 1{,}978 = 4{,}66 \cdot 10^{-22}\ kg\frac{m}{s}$$

5. Długość fali

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{4{,}66 \cdot 10^{-22}} = 1{,}42 \cdot 10^{-12} = 1{,}42\,pm$$

$$E_c = E_k + E_0$$

$$mc^2 = \frac{1}{2} m v^2 + m_0 \cdot c^2$$

$$mc^2 - \frac{1}{2} m v^2 = m_0 c^2$$

$$m\left(c^2 - \frac{1}{2} v^2\right) = m_0 c^2$$

$$m\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) = m_0$$

$$m = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right)}$$

Mechanika kwantowa

Nieoznaczoność położenia cząsteczki swobodnej wynosi $\Delta x = 5 \cdot 10^{-10} m$. Wyprowadzić wzór na nieoznaczoność fali λ_B.

$\Delta x = 5 \cdot 10^{-10} m$

$\Delta \lambda_B = ?$

$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}$

$\lambda_B = 5 \cdot 10^{-10} m$

$\lambda_B = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda_B}$

$$\Delta p = \frac{h}{\lambda_B^2} \Delta \lambda_B$$

$$\Delta \lambda_B \geq \frac{\lambda_B^2}{4\pi \Delta x} = \frac{(5 \cdot 10^{-10} m)^2}{4\pi (5 \cdot 10^{-10} m)}$$

Nieoznaczoność położenia cząsteczki swobodnej wynosi $\Delta x = 5 \cdot 10^{-10} m$. Wyprowadzić wzór na nieoznaczoność fali λ_{B}.

Dla fali fotonu promieniowania emitowanego podczas zmiany stanu elektronu w atomie wodoru wynosiła $\lambda = 655\,nm$, a czas emisji tego przejścia $t = 10^{-8}\,s$. Obliczyć widmową szerokość $\Delta\nu$ obserwowanej linii i obliczyć jej względne poszerzenie $\delta = \frac{\Delta\nu}{\nu}$.

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \qquad E = h\nu \Rightarrow \Delta E = h\Delta\nu$$

$$h \cdot \Delta\nu \cdot t = \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta\nu = \frac{\hbar}{2ht} = \frac{1}{4\pi t} = 1{,}59 \cdot 10^{7}\,Hz$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{8}\,m/s}{6{,}55 \cdot 10^{-7}\,m} = 4{,}58 \cdot 10^{14}\,Hz$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{1{,}59 \cdot 10^{7}}{4{,}58 \cdot 10^{14}} = 3{,}5 \cdot 10^{-8}$$