PO
NOTATKI

Algo prymarny sympleks

Polecenie: Następujące zadanie rozwiązać metodą sympleks.

Dane:

$$2x_1 - x_4 \to \min$$
$$x_1 + x_2 + 5x_3 \leqslant 20$$
$$x_2 + 2x_4 \leqslant 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$$

Przekształcenie danych:

$$2x_1 - x_4 \to \min$$
$$x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 20$$
$$x_2 + 2x_4 + x_6 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0$$

Ma 'en na podst. przekształconych danych

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\leftarrow$ musi istnieć podmacierz $I^{(2)}$, którą przyjmiemy jako bazę B w algo. sympleks.

Kończymy jeżeli wszystkie $\Delta < 0$.

Iteracja 1.

N_B	C_B	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
			2	0	0	-1	0	0
x_1	2	20	1	1	5	0	1	0
x_6	0	5	0	1	0	2	0	1
$\Delta_j = C_B \cdot z_j - c_j$		40	0	2	10	1	2	0

C_B - wartość wierzchołków do bazy.

Iterujemy, aż $\Delta_j \leqslant 0$. Standaryzacja, $X_a = Z_6$

N_B	C_B	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
			2	0	0	-1	0	0
x_3	0	4	0,2	0,2	1	0	0,2	0
x_6	0	5	0	1	0	2	0	1
$\Delta_j = C_B \cdot z_j - c_j$		0	-2	0	0	1	0	0

1	2
3	4

NOWA WARTOŚĆ: $3 - \frac{1 \cdot 4}{2}$

			2	0	0	-1	0	0
N_B	C_B	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
x_3	0	4	0,2	0,2	1	0	0,2	0
x_4	-1	2,5	0	0,5	0	1	0	0,5
$\Delta_j = C_B \cdot z_j - c_j$		-2,5	-2	-0,5	0	0	0	-0,5

Algo dualny sympleks

Polecenie: Rozwiązać za pomocą dualnego algorytmu sympleks oraz wyznaczyć rozwiązanie zadania dualnego.

Dane:

$$2x_1 + 3x_2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 \geqslant 2$$
$$3x_1 + 2x_2 \geqslant 7$$
$$2x_1 + x_2 \geqslant 4$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

Przekształcenie:

$$2x_1 + 3x_2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_4 = 7$$
$$2x_1 + x_2 - x_5 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$$

Przystosowanie przekształcenia do algo. dualnego sympleks.

$$-2x_1 - 3x_2 \to \min$$
$$-x_1 - x_2 + x_3 = -2$$
$$-3x_1 - 2x_2 + x_4 = -7$$
$$2x_1 - x_2 + x_5 = -4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$$

Macierz do zadania

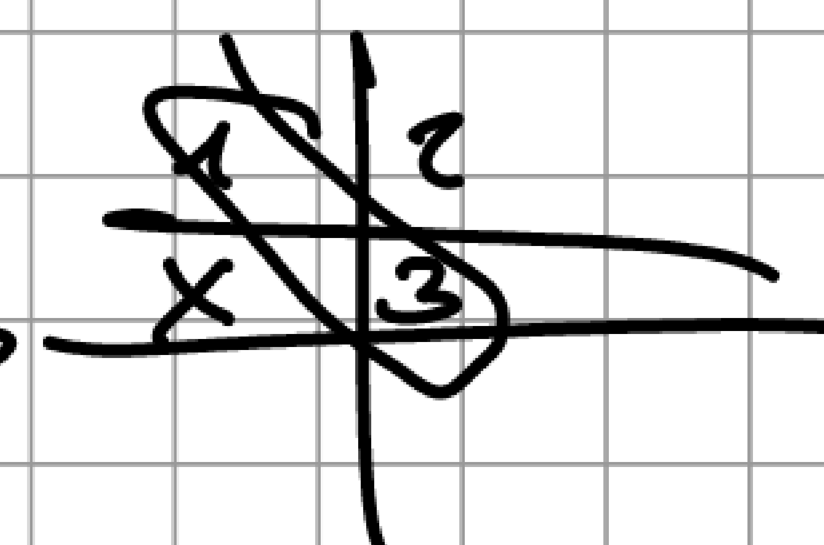
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow I^{(3)}$$

Koniec jeśli $\Delta = A^T y - c \leqslant 0$

			2	3	0	0	0
N_B	C_B	z_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	0	-2	-1	-1	1	0	0
x_4	0	-7	-3	-2	0	1	0
x_5	0	-4	-2	-1	0	0	1
$\nabla = c_B \cdot z_0 - c_j$		0	-2	-3	0	0	0

∇ ujemne, c_B dodatnie

$x - \frac{1 \cdot 3}{2}$



			2	3	0	0	0
N_B	C_B	z_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3			0				
x_4	2	$2\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0
x_5			0		0		

$\nabla = c_B \cdot z_0 - c_j$

Metoda podziału i oszacowań dla PLC

Polecenie: znaleźć rozwiązanie następującego zadania PLC metodą podziału i oszacowań

Dane:

$z = 7x_1 + 8x_2 \to max$

ogr.

$3x_1 + 4x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0 \quad x_1, x_2 - int$

Rozwiązujemy graficznie:

Wierzchołek dendrytu:

$$S_0 = \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - int \end{cases}$$

S_0 $\quad z_0^g = \infty \quad z_0^d = -\infty$

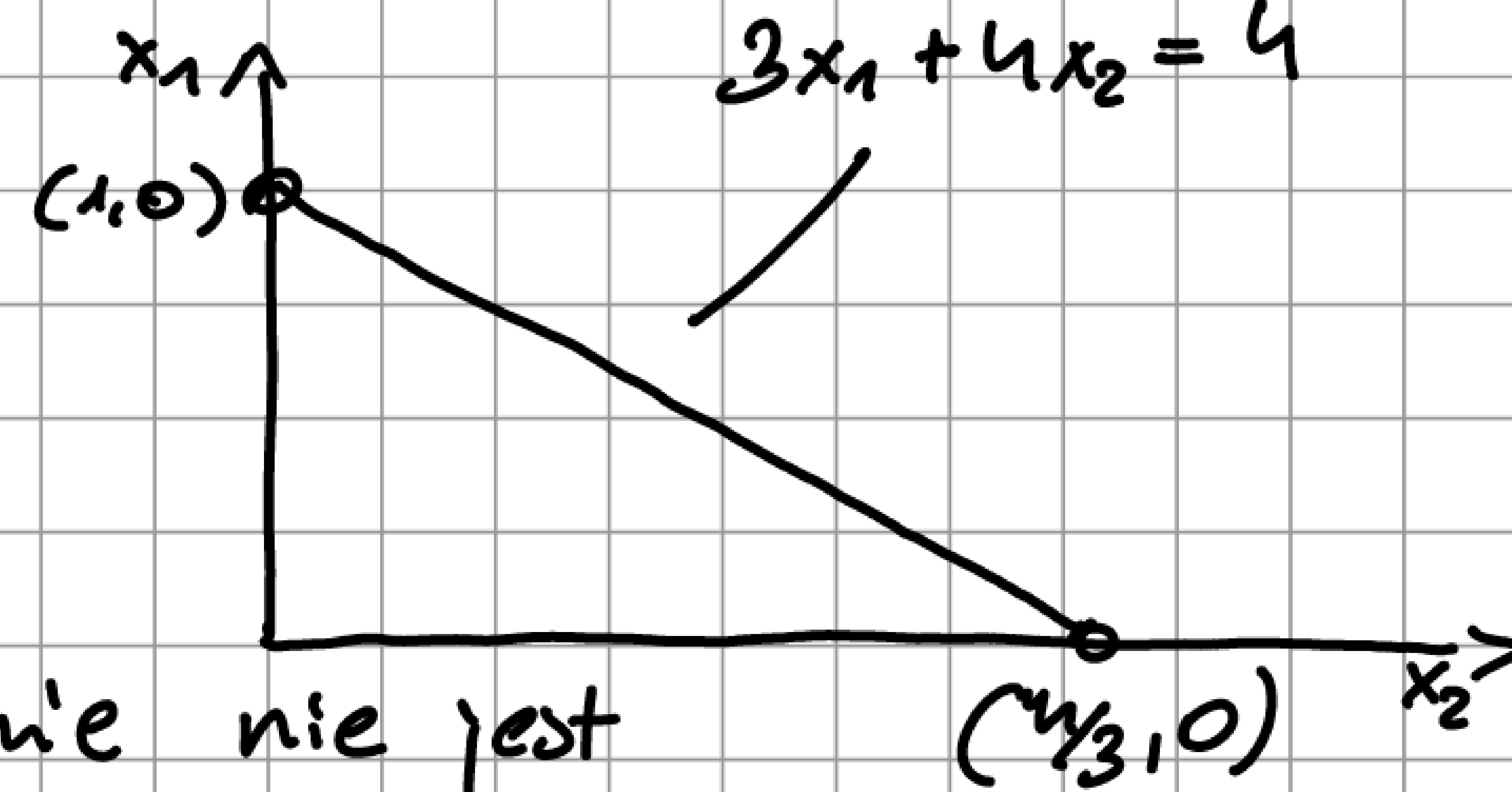
Nie ma podstaw do zamknięcia, a więc następuje podział.

$Z = 7x_1 + 8x_2 \to max$

ogr.

$3x_1 + 4x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

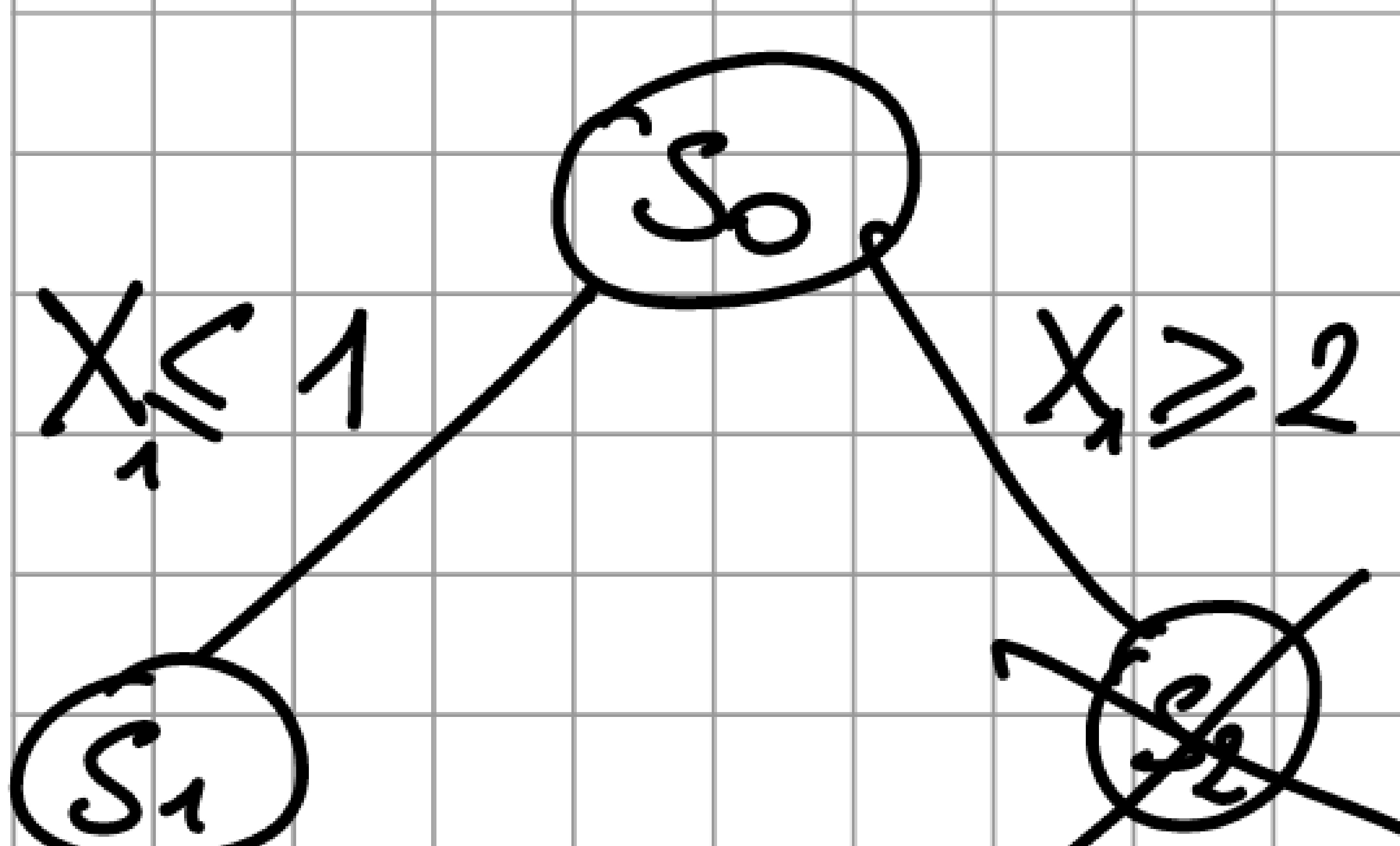


Ponieważ rozwiązanie nie jest całkowitoliczbowe, uzyskujemy nowe ograniczenie od góry.

$\lfloor (7,8) | (4/3, 0) \rfloor = 9$ $\quad S_0$ $\quad z_0^g = 9$, $z_0^d = -\infty$

Nie jest całkowitoliczbowe, a więc nie zamykamy.

$\lfloor 4/3 \rfloor = 1$, $\lceil 4/3 \rceil = 2$



Wierzchołek S_2 zostaje zamknięty, bo jest pusty.

$Z = 7x_1 + 8x_2 \to max$

ogr.

$3x_1 + 4x_2 \leq 4$

$x_1 \geq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$, x_1, x_2 - int

Rozpatrujemy S_1.

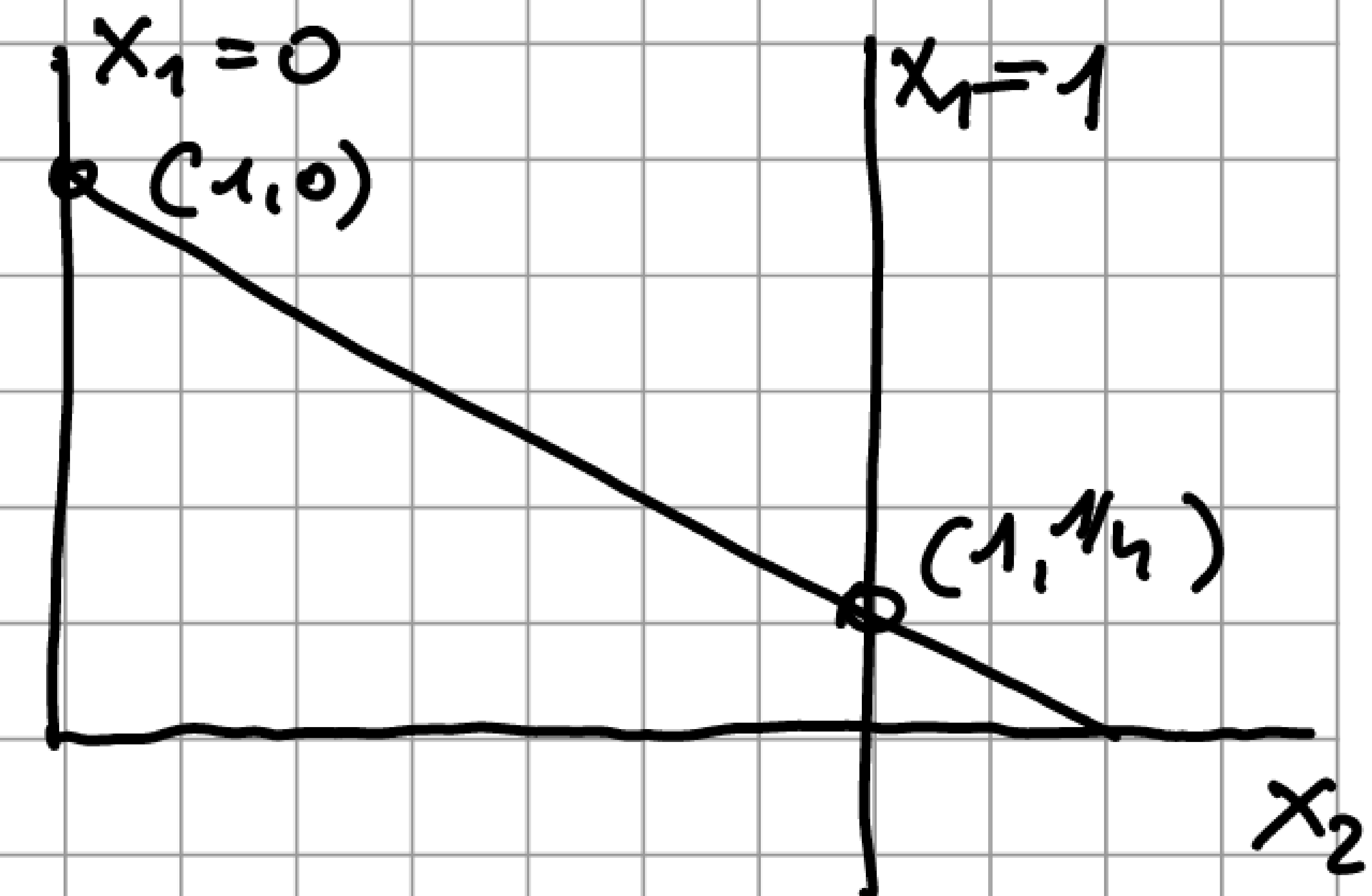
$z = 7x_1 + 8x_2 \to max$

ogr.

$3x_1 + 4x_2 \leq 4$

$x_1 \leq 1$

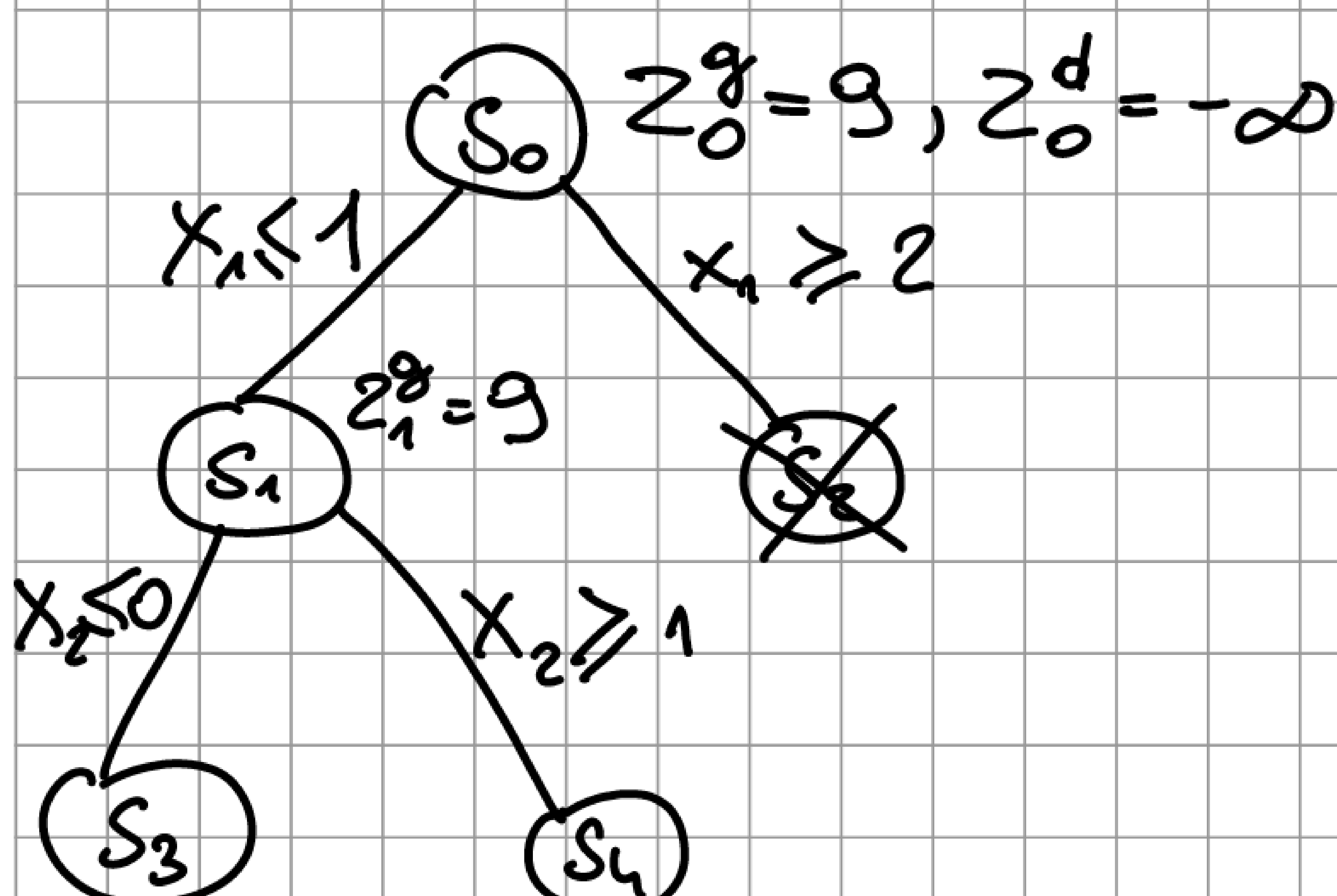
$x_1, x_2 \geq 0$



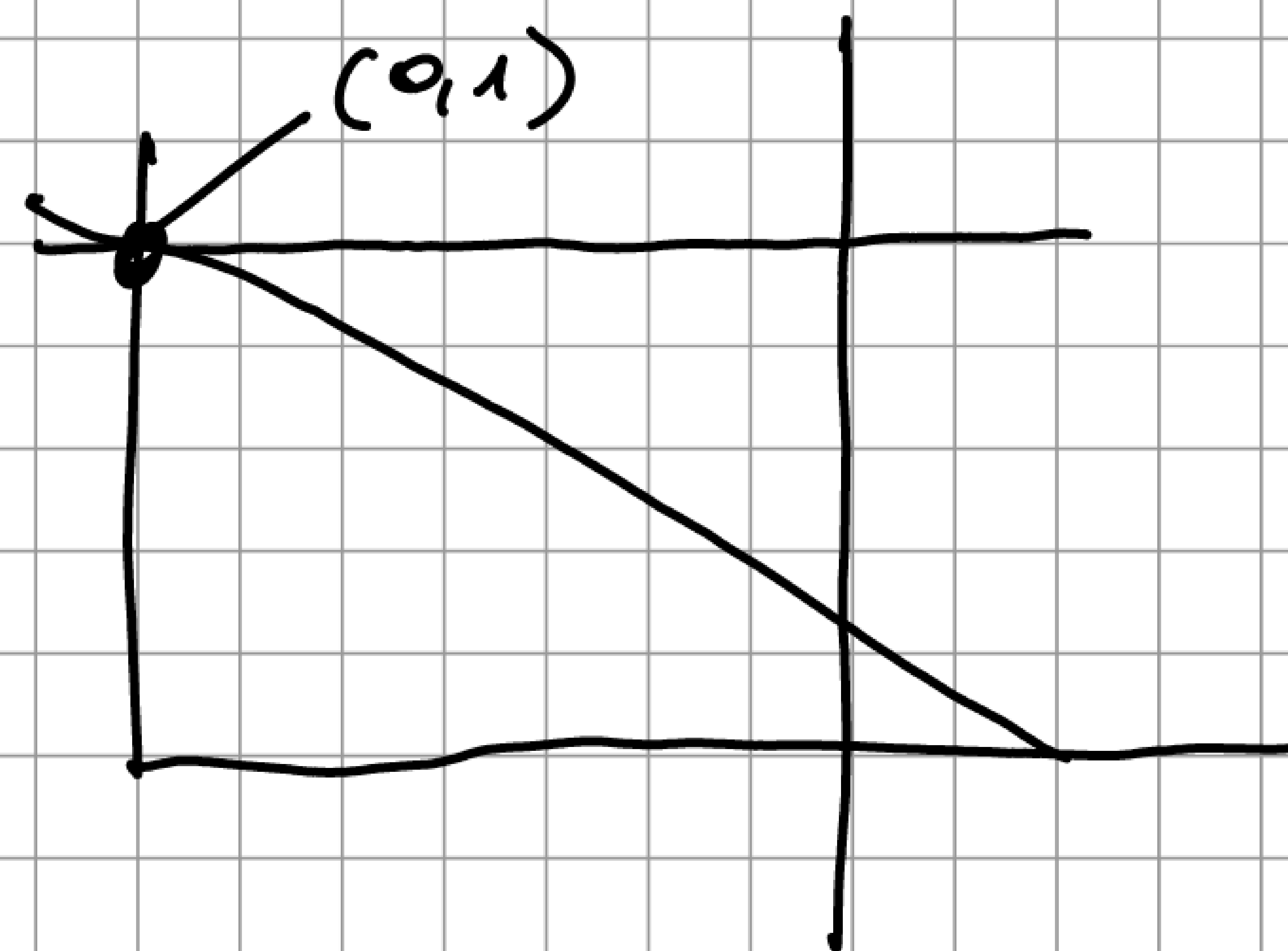
Ograniczenie górne bez zmian:

$\lfloor (7,8) \mid (1, 1/4) \rfloor = 9$

$(1, 1/4)$ nie jest całkowite, a więc podział na $\lfloor 1/4 \rfloor$ oraz $\lceil 1/4 \rceil$.



Dla S_4:



$z = 7x_1 + 8x_2 \to max$

ogr.

$3x_1 + 4x_2 \leq 4$

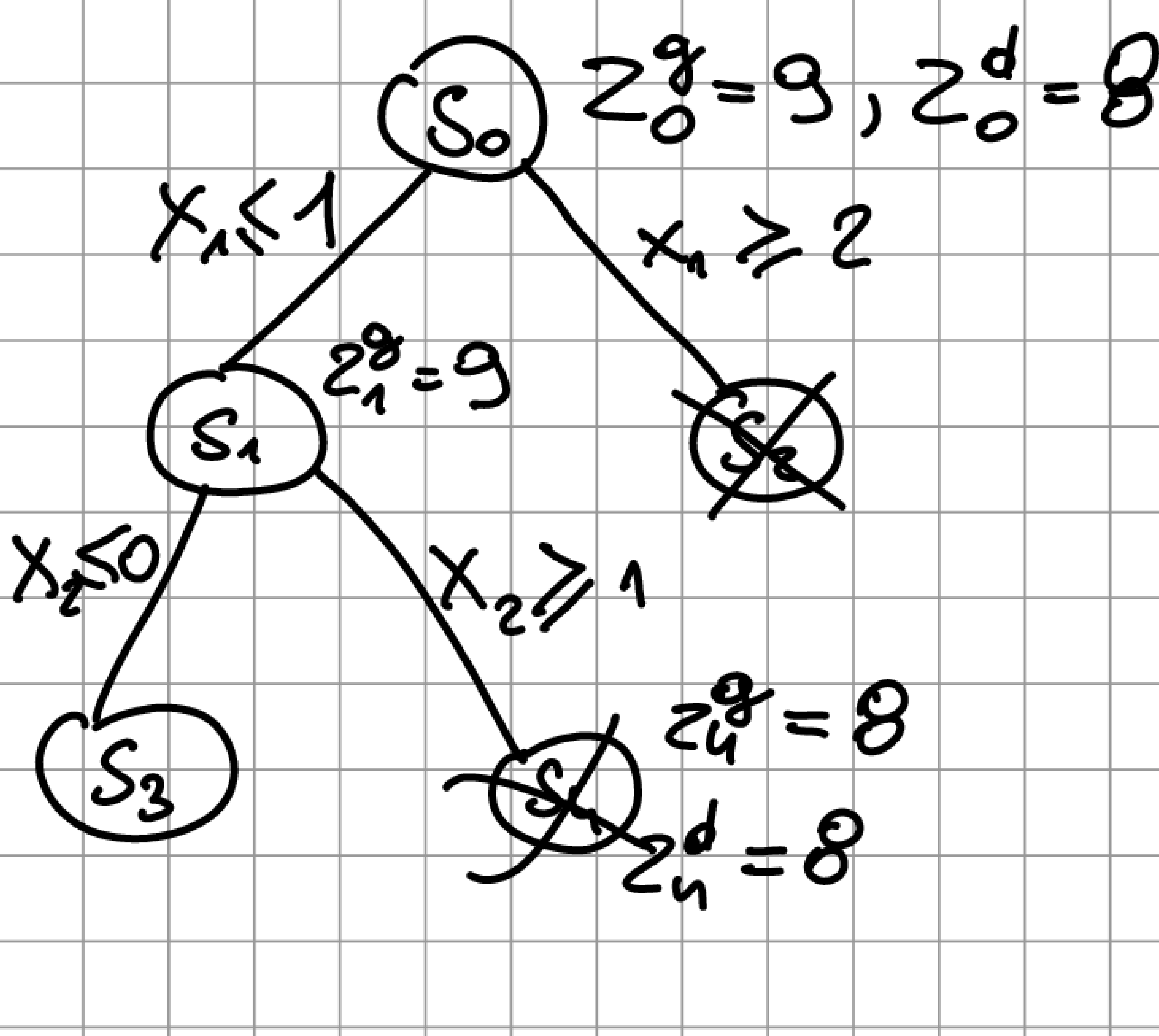
$x_1 \leq 1$

$x_2 \geq 1$

$x_1 \geq 0$

Szacowanie: $\lfloor (7,8) | (0,1) \rfloor = 8$

a więc $z_0^d = 8$



Dla S_3:

$z = 7x_1 + 8x_2 \to \max$

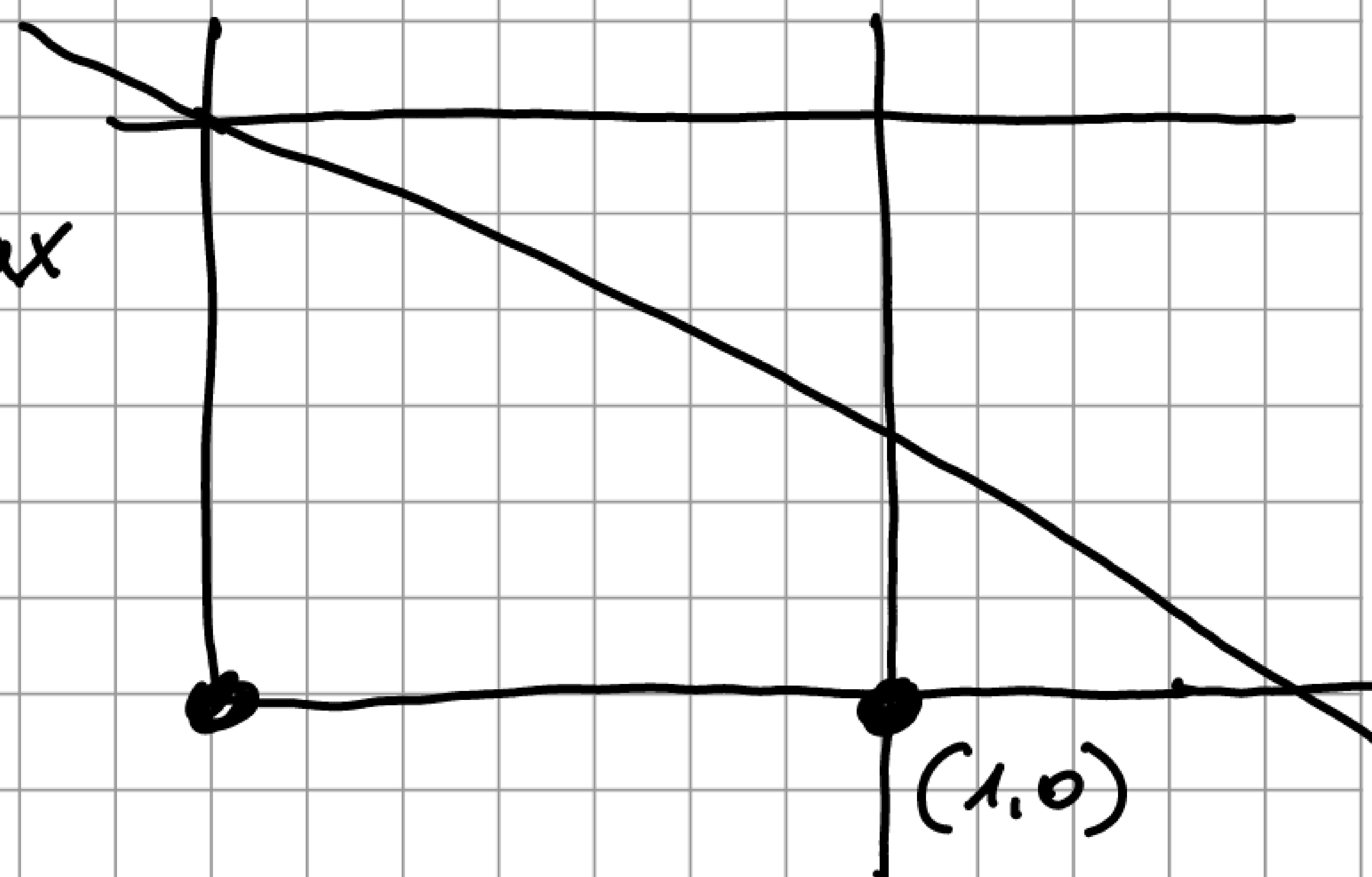
ogr.:

$3x_1 + 4x_2 \le 4$

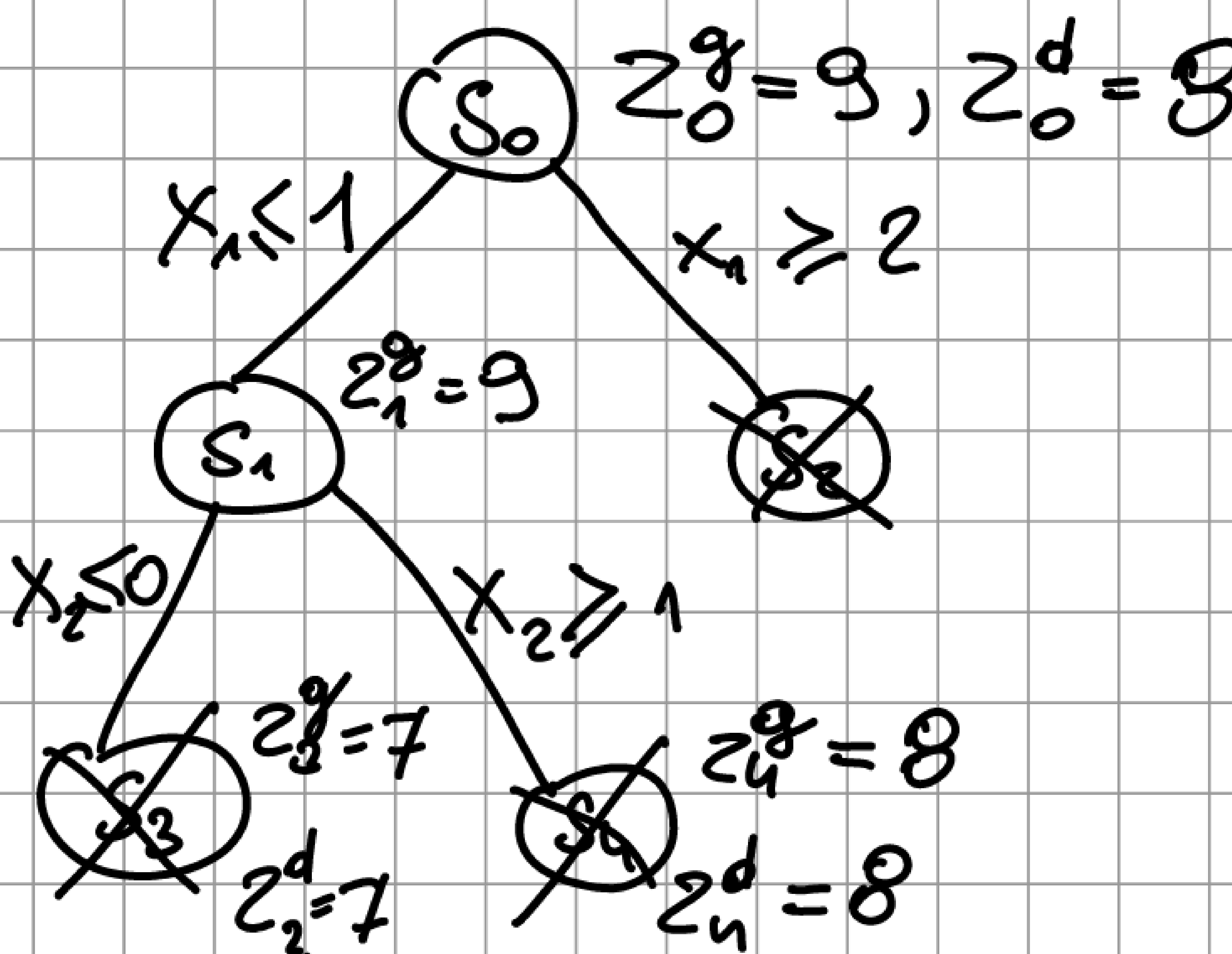
$x_1 \le 1$

$x_2 \le 0$

$x_1 \ge 0$



Szacowanie $\lfloor (7,8) | (1,0) \rfloor = 7$



Nie mamy już aktywnych wierzchołków.

Optymalne jest S_4. (0,1).

Metoda przeglądu pośredniego dla zadań PLB

Polecenie: Znaleźć rozwiązanie PLB metodą przeglądu pośredniego.

$z = -4x_2 - 5x_3 - 7x_4 \longrightarrow max$

ogr.

$x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \leq 5$

$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \leq -1$

x_1, x_2, x_3, x_4 - Gin

Wyznaczamy S_0

$z_0^g = \infty$, $z_0^d = -\infty$

$W_0 = \emptyset$, $F_0 = \{1,2,3,4\}$ $N_0^+ = \emptyset$, $N_0^- = \emptyset$, $Q_0 = \{2\}$

$Z = -4x_2 - 5x_3 - 7x_4 \longrightarrow \max$

ogr.

x_1, x_2, x_3, x_4 – bin

optymalne: $x^0(0) = (0,0,0,0)$

2 ograniczenie w nieostabionym nie jest spełnione, $z_0^g = 0$

$Q_0 \neq 0$, a więc obliczamy t, aby zobaczyć czy zamykamy.

$t_1 = \sum \min\{0, a_{1j}\} = \min\{0,1\} + \min\{0,-2\} + \min\{0,-3\} +$
$+ \min\{0,3\} = -5$

$t_2 = -5$

$r_1 = 5$ (prawa strona równania)

$r_2 = -1$

Ponieważ $t_1 \leqslant r_1 \wedge t_2 \leqslant r_2$, nie zamykamy.

Ponieważ $Q = \emptyset$ oraz $z_0^g = 0 > z_0^d$ – rozdzielimy!

$R_0 = \{j \in F_0 : a_{ij} < 0 \wedge i \in Q_0\} = \{2,4\}$

⟨ ujemne z lewej równań które mają ujemne z prawą. ⟩

W - dane sprawdzone

F - dane niesprawdzone

N^+ - ograniczenia w dół

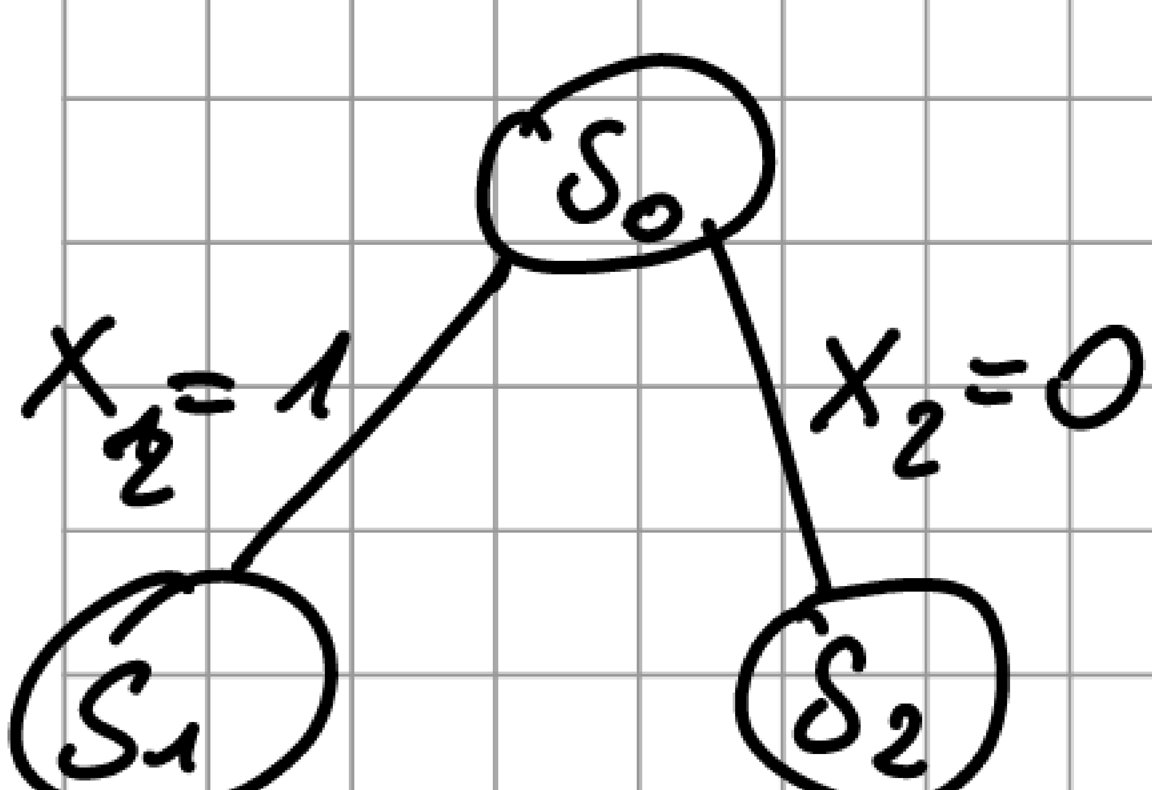
N^- - ograniczenia w górę

$$I_0(2) = \sum_{i=0}^{2} \max\{0, -r_i + a_{i2}\} = \max\{0, -5-2\} + \max\{0, 1-3\} = 0$$

$$I_0(4) = \sum_{i=1}^{2} \max\{0, -r_i a_{i4}\} = \max\{0, -5+3\} + \max\{0, 1-2\} = 0$$

$$I_0(p) = \min I_0\{I_0(2), I_0(4)\} = \min\{0, 0\} = 0$$

Poniewaz $I_0(2) = I_0(4)$, wybieramy arbitralnie.



Dla $S1$:

$W_1 = \{2\}$ $F_1 = \{1, 3, 4\}$

$N_1^+ = \{2\}$ $N_1^- = \emptyset$

Dla S_1 ma postać:

$$z = -5x_3 - 7x_4 - 4 \to \max$$

ogr.

$$x_1 - 3x_3 + 3x_4 \leq 5 - (-2 \cdot 1) = 7 \quad \xleftarrow{} x_2$$

$$2x_1 + x_3 - 2x_4 \leq -1 - (-3 \cdot 1) = 2 \quad \xleftarrow{} x_2$$

x_1, x_3, x_4 – bin

Zadanie osłabione:

$$z = -5x_3 - 7x_4 - 4 \to \max$$

ogr. x_1, x_3, x_4 – bin

Optymalny: $(0,1,0,0)$

$z_1^d = -4 \quad z_1^g = -4$

Zamykamy S_1

S_2 : $W = \{2\}$ $F_2 = \{1,3,4\}$ $N_2^+ = \emptyset$ $N_2^- = \{2\}$

$z = -5x_3 - 7x_4 \longrightarrow \max$

$x_1 - 3x_3 + 3x_4 \leqslant 5$

$2x_1 + x_3 - 2x_4 \leqslant -1$

x_1, x_3, x_4 – bin

tak samo

Optymalizacja nieliniowa bez ograniczeń

Polecenie: Wyznaczyć minimum funkcji

$\cdot\ f(x) = 2x_1^2 - (x_2-1)^2$ stosując metody:

gradientowe:

- największego spadku
- Newtona

bezgradientowe:

- Gaussa-Siedla
- Powella

Dla punktu start. $x^0 = (1,1)$ i dokładności $\varepsilon = 0{,}01$.

Największego spadku:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right) = \left(4x_1, -2(x_2-1)\right)$$

Dla $x_0 = (4,0)$

Dokładność obliczeń: $4 > \varepsilon$

Nie osiągnięto wymaganej dokładności:

$$S^0 = -\nabla f(x^0) = -(4,0) = (-4,0)$$

Optymalna długość kroku t:

$$\min f(x^0 + tS^0) = \min f((1,1) + t(4,0)) =$$
$$= \min f(1+4t, 1) = \min(32t^2 - 16t + 2)$$

Wyznaczamy t^* poprzez przyrównanie pochodnej do 0.

$$\frac{df(x^0 + tS^0)}{dt} = 0 \to \frac{d(32t^2 + 16t + 2)}{dt} =$$

$$64t - 16 = 0 \Rightarrow t = 1/4$$

Wyznaczenie kolejnego przybliżenia

$$x^1 = x^0 + t^* \cdot s^0 = (1,1) + \tfrac{1}{4}(-4,0) = (0,1)$$

Badanie gradientu dla wyniku końcowego.

$$\nabla f(x_1) = (4x^1, -2(x_2^1 - 1)) = (0,0)$$

$0 < \varepsilon$, a więc osiągnięto wymaganą dokładność.

Metoda Newtona

$H(x)$ jest hesjanem $f(x)$.

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczamy kierunek minimalizacji:

$$s^0 = -H(x^0)^{-1} \nabla f(x_0) = -\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} (4,0)^T = (-1,0)^T$$

Poszukiwanie kroku t:

$$\min f((1,1) + t(-1,0)) = \min_t f(1-t, 1) =$$

$$\min(2t^2 - 4t + 2) \Rightarrow t^* = 1$$

Kolejne przybliżenie:

$$x_1 = x_0 + t^* s^0 = (1,1) + 1(-1,0) = (0,1)$$

$$\nabla f(x_1) = (0,0)$$

$0 < \varepsilon$, a więc $(0,1)$ jest optymalne

Metoda Gaussa-Seidela

$k=1, \quad x(1)^0 = x(0)^2 = x^0$

Baza ortogonalna kierunków minimalizacji:

$S = \{ s^1 = (1,0), \; s^2 = (0,1) \}$

Poszukiwanie $t s^1$

$\min f(x(1)^0 + t s^1) = \min f((1,1) + t(1,0)) =$

$= \min f(1+t, 1) = \min(2t^* + 4t + 2) \Rightarrow t^* = -1.$

$x(1)^1 = x(1)^0 + t^* s^1 = (1,1) - 1(1,0) = (0,1)$

Poszukiwanie $t s^2$:

$\min f(x(1)^1 + t s^2) = \min f((0,1) + t(0,1)) =$

$= \min f(0, 1+t) = \min(-t^2) \Rightarrow t^* = 0$

$x(1)^2 = x(1)^1 + t^* s^2 = 0,1 + 0(0,1) = (0,1)$

$\| x(0)^2 - x(1)^2 \| = \| (1,1) - (0,1) \| = 1 > \varepsilon$

Metoda Powella

$\min (x_1^2 + x_2^2 - 2x_2)$

$S = \{s^1, s^2\} = \{(0,1),(1,0)\}$

$\varepsilon = 0{,}01$

$x(1)^0 = (0,0)$

$\min f(x(1)^0 + ts^1) = \min f((0,0) + t(0,1)) =$

$= \min f(0,t) = \min (t^2 - 2t) \Rightarrow t = 1$

$(0,0) + 1(0,1) = (0,1)$

$\min f(x(1)^1 + ts^2) = \min f((0,1) + t(1,0)) =$

$= \min f(t,1) = \min (t^2 + 1 - 2) \Rightarrow t^* = 0$

punkt $(0,1)$.

$\| x(0)^2 - x(1)^2 \| = \| (0,0) - (0,1) \| = 1 > \varepsilon$

$s^3 = x(1)^2 - x(0)^2 = (0,1) - (0,0) = (0,1)$

Optymalizacja nieliniowa z ograniczeniami

Polecenie: Stosując metodę KKT
wyznaczyć optymalne rozwiązanie zadania:

$$f(x) = -3x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 \longrightarrow \min$$

przy ograniczeniach:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Przekształcenie:

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$$
$$g_2(x) = -x_1 \leq 0$$
$$g_3(x) = -x_2 \leq 0$$

Funkcja Lagrange:

$$L(x,y) = -3x + \frac{1}{2}x_2^2 + y_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + y_2(-x_1) + y_3(-x_2)$$

gradientowe:

$$\nabla_x L(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -3 + 2y_1x_1 - y_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2 + 2y_1x_1 - y_3 = 0 \end{cases}$$

Dopuszczalności:

$$\nabla_y L(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y_1} = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} = -x_1 \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y_3} = -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Warunek ortogonalności:

(Lagrange bez 1) $y_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + y_2(-x_1) + y_3(-x_2) = 0$

Warunki nieujemności:

$y_1 \geqslant 0, \; y_2 \geqslant 0, \; y_3 \geqslant 0$

potem sprawdzanie