Matematyka I

Poprawa

WEKTORY

$$\vec{v} \circ \vec{w} = |\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot \cos(\alpha)$$

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 \ldots + v_n^2}$$

$$\vec{v} \perp \vec{w} = \vec{v} \circ \vec{w} = 0$$

$$(1,1) \circ (0,3) = 3$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2}$$

$$|\vec{w}| = 3$$

$$\frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(45^\circ)$$

iloczyn wektorowy:

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin\alpha$$

$$(2,0,0) \times (0,3,0) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 6e_3 = \langle 0, 0, 6 \rangle$$

PŁASZCZYZNA W R3.

$Ax + By + Cz + D$ – wzór

(A, B, C) – wektor równoległy

$$(1,2,0), (3,2,1), (4,2,2)$$

$$P_3 - P_2 = \langle 1, 0, 1 \rangle \qquad \vec{n} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$P_1 - P_2 = \langle -2, 0, -1 \rangle$$

$$2 + D = 0 \Rightarrow D = -2, \quad \boxed{y - 2 = 0}$$

Równanie parametryczne.

$$x + y - 2z + 3 = 0$$

$x=2,\ y=1 \Rightarrow z=3 \qquad P_1 = (2,1,3)$

$x=0,\ y=1 \Rightarrow z=2 \qquad P_2 = (0,1,2)$

$x=1,\ y=0 \Rightarrow z=2 \qquad P_3 = (1,0,2)$

$\vec{v} = P_1 - P_2 = \langle 2,0,1 \rangle$

$\vec{w} = P_3 - P_2 = \langle 1,-1,0 \rangle$

$\vec{v} \nparallel \vec{w}$, więc rozpinają.

$y(t,s) = (0,1,2) + t(2,0,1) + s(1,-1,0)$

Wyznaczyć równanie parametrycznej prostej będące częścią wspólnej

$P_1: x - 2y + 3z + 4 = 0$

$P_2: 2x - y - 2z + 7 = 0$

$$\langle 1, -2, 3 \rangle \times \langle 2, -1, -2 \rangle = \langle 7, 8, 3 \rangle$$

$$x = 0, \begin{cases} -2y + 3z = -4 \\ -1y - 2z = -7 \end{cases} \ldots$$

$$y = \frac{29}{7}, \quad z = \frac{10}{7}$$

$$y(t) = \left(0, \frac{29}{7}, \frac{10}{7}\right) + t\langle 7, 8, 3 \rangle$$

alternatywnie znaleźć 2 punkt np $y=0$ i zrobić z nich wektor.

Dane są 2 proste, jak leżą względem siebie?

1) $k: \varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$l: \varphi(s) = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \quad t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{v} \not\parallel \vec{w} \Rightarrow k \not\parallel l$

$$\begin{pmatrix} 1+2t \\ 2+t \\ 3+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+s \\ 5+s \\ 12+s \end{pmatrix} \Rightarrow t=2,\ s=-1$$

układ ma dokładnie 1 rozwiązanie.

$$P = \varphi(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$$

2) $k: \varphi(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$l: \varphi(s) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\vec{v} \parallel \vec{w} \Rightarrow k \parallel l$

$$\begin{pmatrix} 2 + t\,1 \\ 1 + t\,2 \\ 3 + t\,5 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 + 2s \\ 3 + 4s \\ 7 + 10s \end{pmatrix}$$

$2 + t = 3 + 2s \Rightarrow t = 1 + 2s$

$1 + 2t = 3 + 4s \Rightarrow 2 + 4s = 2 + 4s \Rightarrow s = 0$

$3 + 5t = 7 + 10s \Rightarrow 5 + 10s = 4 + 10s =$

sprzeczne

3) $k: \varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

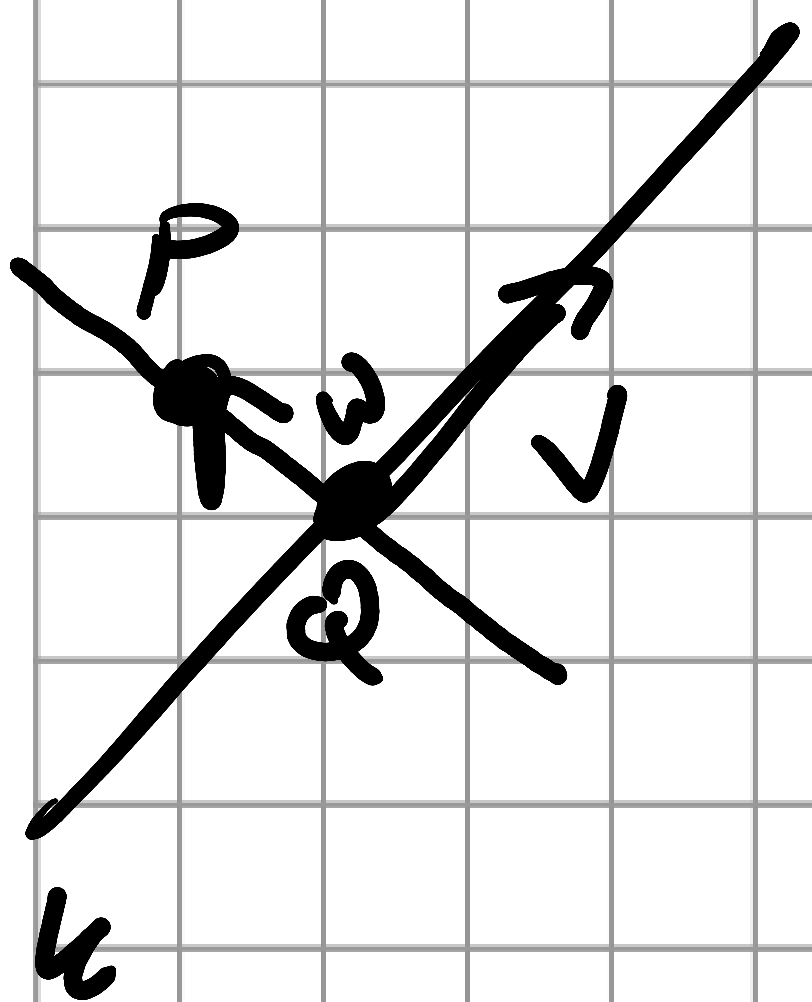
$l: \varphi(s) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\vec{w} \parallel \vec{v} \Rightarrow k \parallel l$

$t = 0, \quad \begin{matrix} -4 = -2s \\ -2 = -s \\ -12 = -6s \end{matrix} \quad s = 2$

układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, więc pole k i l jest sobie równe.

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix}$$



$$w = P - Q = \begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2+t\\1+t\\3+t\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}8-t\\9-t\\8-3t\end{pmatrix}$$

$$\vec{w} \circ \vec{v} = 0 = 41 - 11t \Rightarrow t = \frac{41}{11}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix}8 - \frac{41}{11}\\ 9 - \dots \\ 8 - \dots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{47}{11}\\ \frac{58}{11}\\ -\frac{35}{11}\end{pmatrix}$$

$$\varphi(s) = \begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} + s - '' -$$