Fizyka

I

Jednostki układu SI

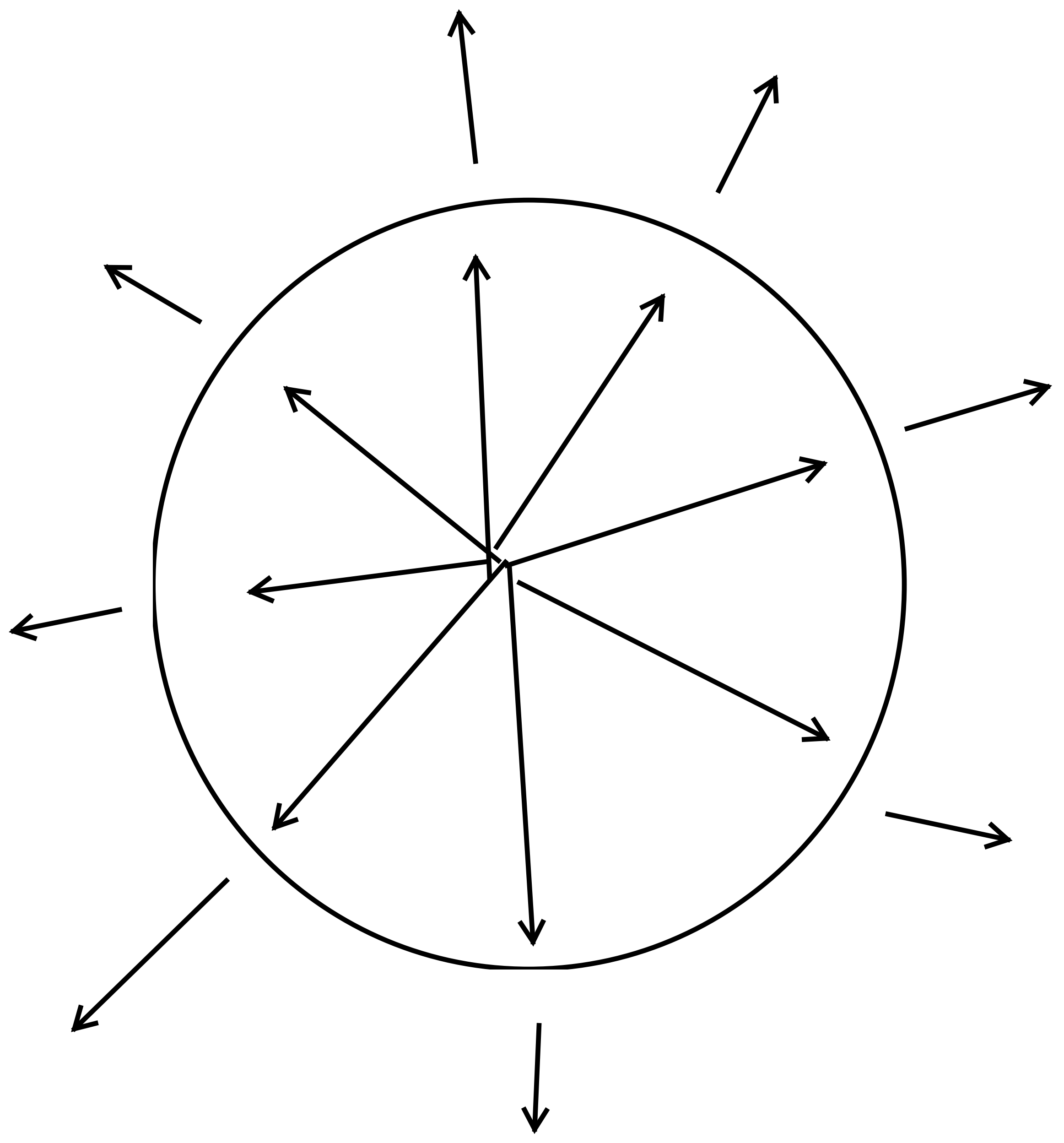
długość	metr	m
masa	kilogram	kg
czas	sekunda	s
prąd elektryczny	amper	A
temperatura	kelwin	K
ilość materii	mol	mol
światłość	kandela	cd

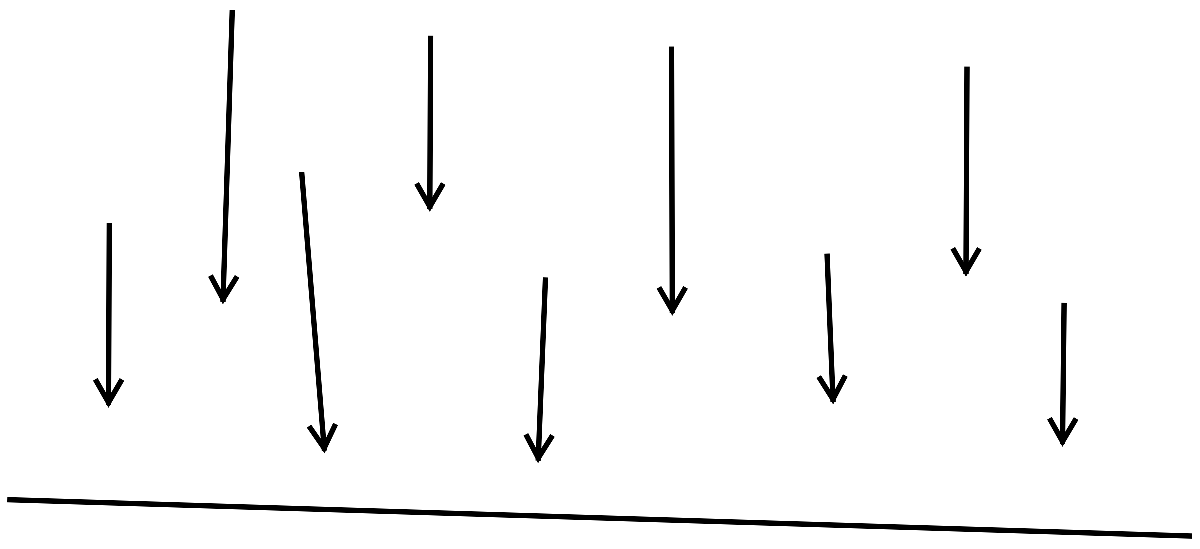
siła $F = ma$

moc $P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t}$

Pola wektorowe

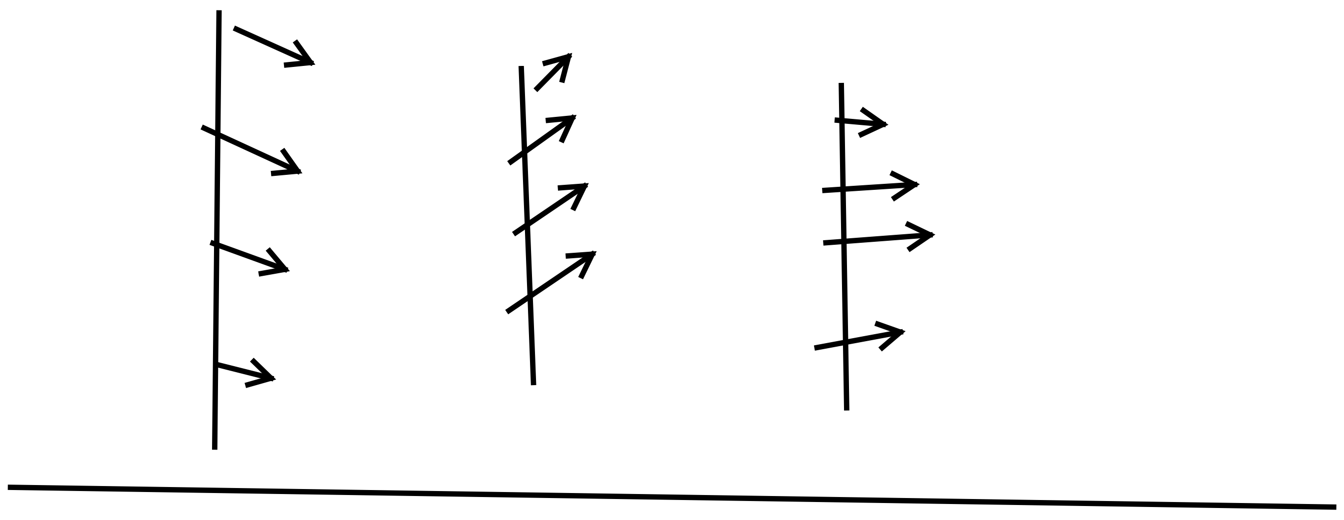
Pole wektorowe centralne





Pole wektorowe stałe

Pole wektorowe płaskie



Jeżeli w pewnej przestrzeni geometrycznej O_{xyz} każdemu punktowi $P=(x,y,z)$ przyporządkowany jest pewien wektor $\vec{F}(P)=\vec{F}(x,y,z)=[X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z)]$ to mówimy, że w tej przestrzeni jest pole wektorowe.

Wektor $\vec{F}(x,y,z)$ jest umieszczony w punkcie P.

Wektor $\vec{F}$ możemy nazwać natężeniem pola.

Linie styczne do wektorów pola nazywane są liniami sił pola.

Pole skalarne - jak pole wektorowe, ale skalary.

np. temperatura powietrza

Operacje różniczkowe na polach wektorowych i skalarnych.

Dywergencja pola wektorowego

$F(x,y,z) = [X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)]$

nazywamy pole skalarne

$$\text{div } F = \frac{\delta X(x,y,z)}{\delta x} + \frac{\delta Y(x,y,z)}{\delta y} + \frac{\delta Z(x,y,z)}{\delta z}$$

Przykład: Wyznacz dywergencję wektora

$$\vec{a} = (xy, xyz, \tfrac{z}{y})$$

Dywergencja wektora jest skalaram:

$$\text{div}\,\vec{a} = \frac{\delta a_x(x,y,z)}{\delta x} + \frac{\delta a_y(x,y,z)}{\delta y} + \frac{\delta a_z(x,y,z)}{\delta z}$$

$$\frac{\delta a_x}{\delta x} = y \qquad \frac{\delta a_y}{\delta y} = xz \qquad \frac{\delta a_z}{\delta y} = \frac{1}{y}$$

$$\text{div}\,\vec{a} = y + xz + \frac{1}{y}$$

Operacja rotacji pola wektorowego
(wirowość)

Rotacją pola wektorowego $\vec{F}(x,y,z) = [X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)]$ nazywamy inne pole wektorowe $\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ X & Y & Z \end{bmatrix}$

Przykład:

wyznacz rotację wektora $\vec{a} = [xy+zy, xz+z^2+y, y+x^2]$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy+zy & xz+z^2+y & y+x^2 \end{vmatrix} = \vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(y+x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz+z^2+y)\right] +$$

$$+\vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(xy+zy) - \frac{\partial}{\partial x}(y+x^2)\right] + \vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(xz+z^2+y) - \frac{\partial}{\partial y}(xy+zy)\right] =$$

$$= i\left[1-x-2z\right] + \vec{j}\left[y-2x\right] + \vec{k}\left[-x\right]$$

Operacja gradientu

Gradientem pola skalarnego $u(x,y,z)$ nazywamy pole wektorowe

$$\operatorname{grad} u(x,y,z) = \left[\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\right]$$

Przykład! Wyznacz gradient funkcji $f(x,y,z) = A(x^3+y^2+z^4)$, gdzie A jest stałą.

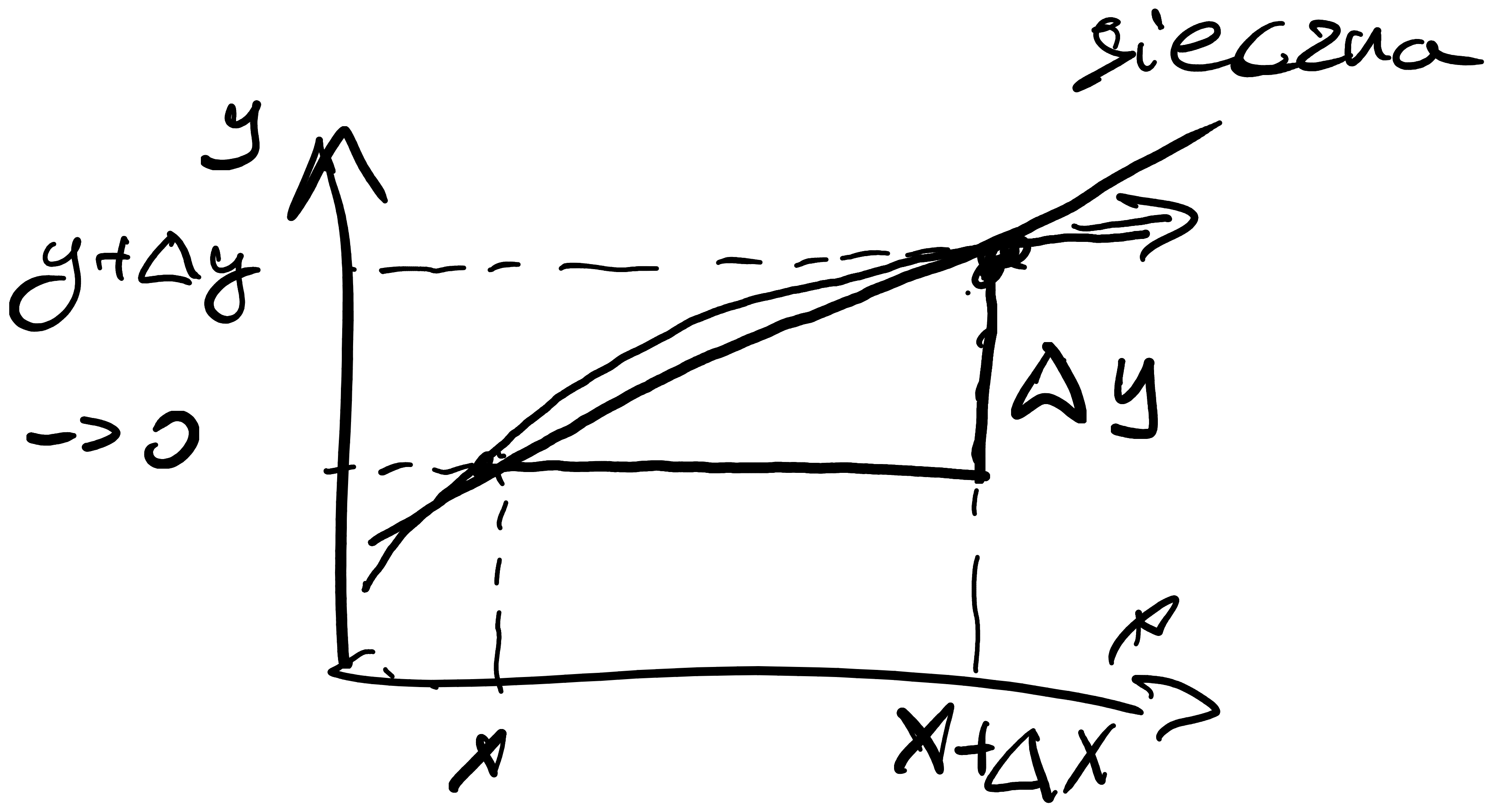
$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3Ax^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2Ay \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 4Az^3$$

$$\operatorname{grad} f = 3Ax^2\vec{i} + 2Ay\vec{j} + 4Az^3\vec{k}$$

1. Funkcje trygonometryczne

$$\left[\sin^2(3x^3-2x+1)\right]' = 2\sin(\ldots) + \cos(\ldots) + 9x^2+2$$



$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y', \ \Delta x \to 0$$

$\frac{dy}{dx}$ - $tg(\alpha)$ $tg(\alpha)$ kąta nachylenia stycznej.

$$dy = y' \cdot dx$$

$$f(x, y, z)$$

przyrost wzrost

$$df \text{ (różniczka zupełna)} = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz$$

$$\vec{dr} = [dx, dy, dz] \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\alpha)$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad \vec{i}\cdot\vec{i} = 1$$

wersor – wektor jednostkowy

$a \neq 0$, $b \neq 0$

$a \cdot b = 0$ – ortogonalne

różniczki - całkowe

$$\vec{dr} = [dx, dy, dz]$$

$$\left[\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right] = \left[\frac{\partial}{dx}, \frac{\partial}{dy}, \frac{\partial}{dz}\right] \cdot f$$

przyrost w danym kierunku

∇ - operator Nabla

∇f - grad f $\quad$ df - różniczka zupełna

(kierunek największego przyrostu funkcji.

$\nabla \vec{A} = \text{div}\, \vec{A}$ - dywergencja - **źródłowość**

(ile wody ubywa)

rachunek różniczkowy pozwala na badanie małych obszarów.

$\nabla \times \vec{A} = \text{rot}\, \vec{A}$ - wirowość

KINEMATYKA

ruch - zmiana położenia w czasie

$t, \vec{v}, \vec{a}, s$

prędkość = przyrost drogi do czasu

$V = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ $\quad V = \frac{ds}{dt}$

przyśpieszenie = zmiana prędkości w czasie

$a = \frac{dv}{dt}$ $\quad a = 3 - 2t$

$dv = a \cdot dt = (3-2t)dt \, \Big| \int$

$\int dv = \int (3-2t)dt$

$v = -t^2 + 3t + C = -t^2 + 3t + V_0$

$V = \frac{ds}{dt}$ $\quad ds = v \cdot dt = (-t^2 + 3t + v_0)\,dt \, \Big| \int$

$$s = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + v_0 t + s_0$$

Jeżeli na ciało nie wpływa żadna siła to jest w stanie spoczynku albo porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

siła odśrodkowa/dośrodkowa - prostopadła do toru

$F = m \cdot a$ - siła wprost proporcjonalna do przyspieszenia

Wzór na siłę gratawitacji $G \cdot \frac{M_Z m}{(R_Z+h)^2}$

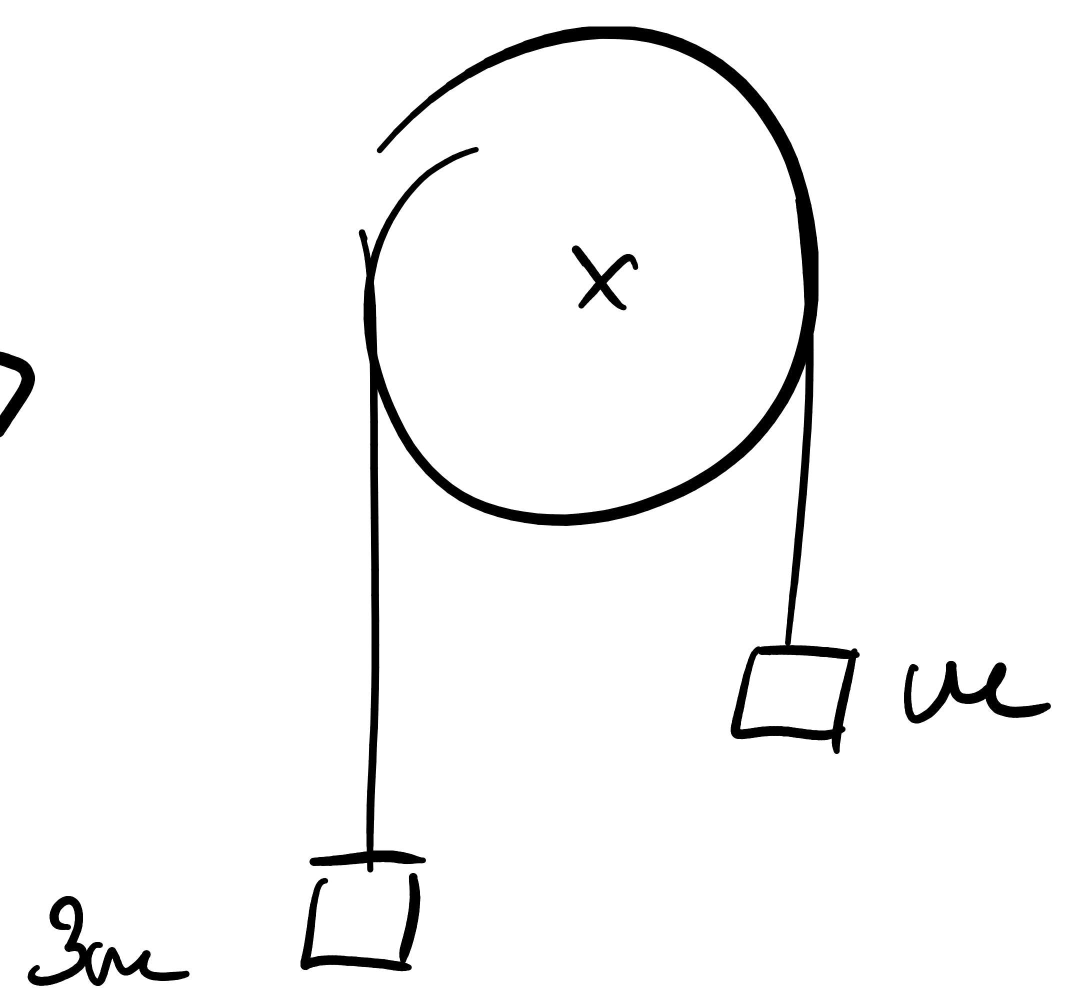
R_Z- promień ziemi

h-wysokość nad ziemią

G-stała grawitacyjna

mg

zmiana kierunku => ruchu



$2mg = 4ma$

$a = \frac{1}{2}g$

g- przyspieszenie ziemskie

Ruch jednostajnie przyśpieszony

$a = \text{const.}$

$a = \frac{dv}{dt}$

$dv = a\,dt \,|\int$

$v = \int a\,dt = at + c$

$= at + v_0$

$v(t=0) = c = v_0$

$\frac{ds}{dt} = v$

$s = \int v\,dt = \int (at + v_0)\,dt =$

$= a\int t\,dt + v_0 \int dt =$

$= \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + C$

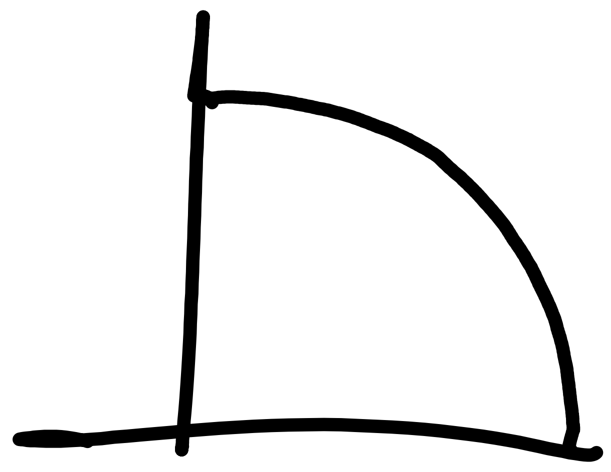
$= \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$

$s(t=0) = C = s_0$

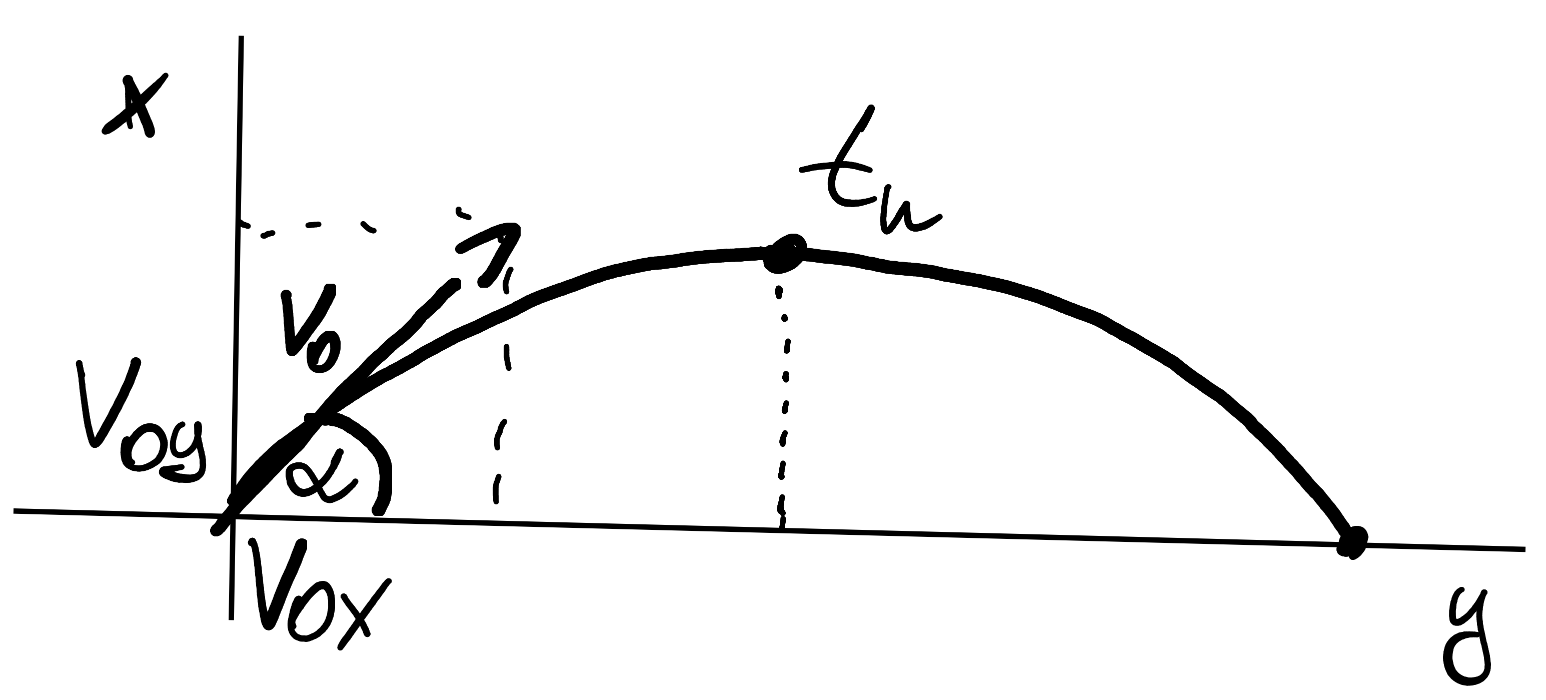
prędkość - styczna do toru

2. Jeżeli na ciało działa jakaś siła, to nadaje przyśpieszenie.

Rzut poziomy



Rzut ukośny



siła ciężkości - pionowo w dół

tor ruchu

$$V_{0x} = V_0 \cos(\alpha) \qquad V_x = V_{0x} \qquad \begin{cases} x = V_{0x} t \\ y = V_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$V_{0y} = V_0 \sin(\alpha) \qquad V_y = V_{0y} - gt$$

Parametryczne równania torów.

$$\begin{cases} t = \frac{x}{V_{0x}} \\ y = V_{0y} \cdot \frac{x}{V_{0x}} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{V_{0x}^2} \end{cases}$$

Punkty charakterystyczne -
0,0, środek, koniec

$$V(t_h) = 0, \quad V_{0y} - g t_h = 0 \qquad t_h = \frac{V_{0y}}{g}$$

$$H: y(t_h) = V_{0y} t_h - \frac{g t_h^2}{2} = \frac{V_{0y} \cdot V_{0y}}{g} - \frac{\cancel{g} \cdot V_{0y}^2}{2 \cdot g^{\cancel{2}}} = \frac{V_y^2}{2g}$$

$$y(t_2) = V_{0y} t_2 - \frac{g}{2} t_2^2 = 0$$

$$t_2 = \frac{2V_{0y}}{g}$$

2: $x_2 = V_{0x} \cdot \frac{2V_{0y}}{g}$

$$x_2 = 2\frac{V_0\sin(\alpha)\, V_0\cos(\alpha)}{g} = \frac{V_0^2}{g}\cdot\sin(2\alpha)$$

α: max , $\alpha = \frac{\pi}{4}$,

Spadek swobodny

$W = \vec{F}\vec{s}$ - praca = siła × presunięcie

Aby podnieść musimy użyć siły równej mg

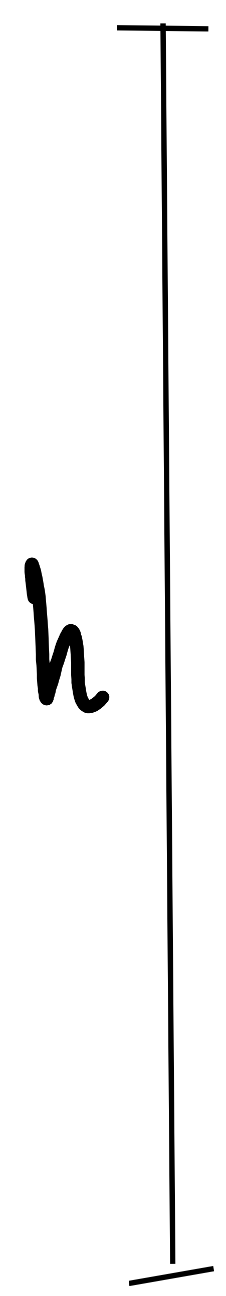
$$mg\cdot h\cdot\cos(90) = mg\cdot h$$

Energia = praca

$$E_p = mgh$$

$E_p + E_k = E_c$ $E_{k_1} = 0$ $E_{p_2} = 0$

$E_k = \frac{mV_2^2}{2}$ $V_2 = \sqrt{2gh}$



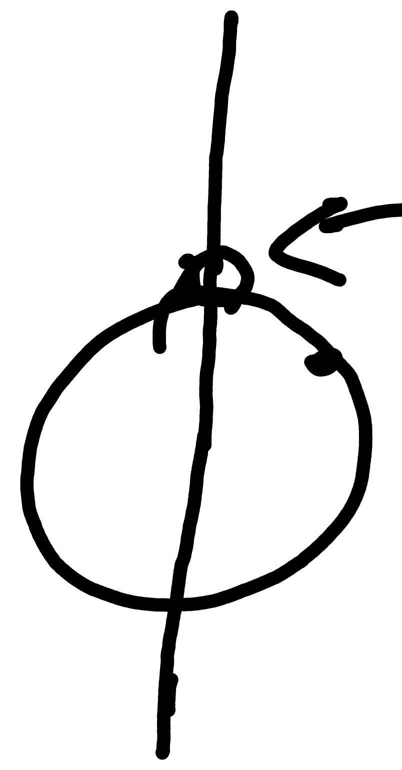
$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos(\alpha)$$

$W = m \cdot g \cdot h = E_p =$ siła wymagana aby podnieść na wysokość h.

$$E_c = E_{p_1} + \underbrace{E_{k_1}}_{0} = \underbrace{E_{p_2}}_{0} + E_{k_2}$$

E_p - praca wykonana z nieskończoności do danego punktu pola.

$$mgh = \frac{mv_2^2}{2} \qquad \boxed{V_2 = \sqrt{2gh}}$$

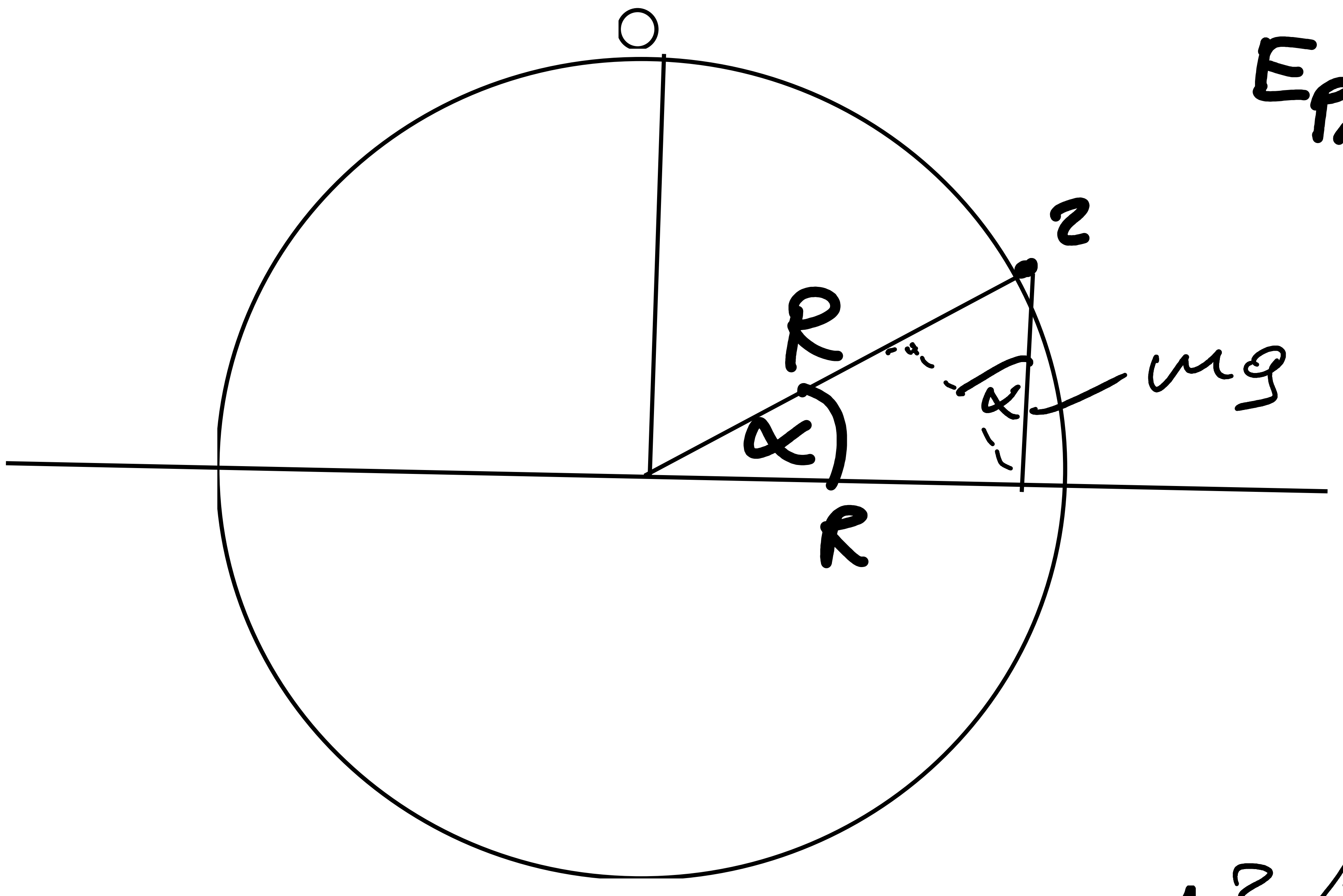


punkt równowagi nietrwałej

Oderwie się przed 90° dzięki sile odśrodkowej.

$E_c = const.$

$E_{p_1} + E_{k_1} = E_{p_2} + E_{k_2}$

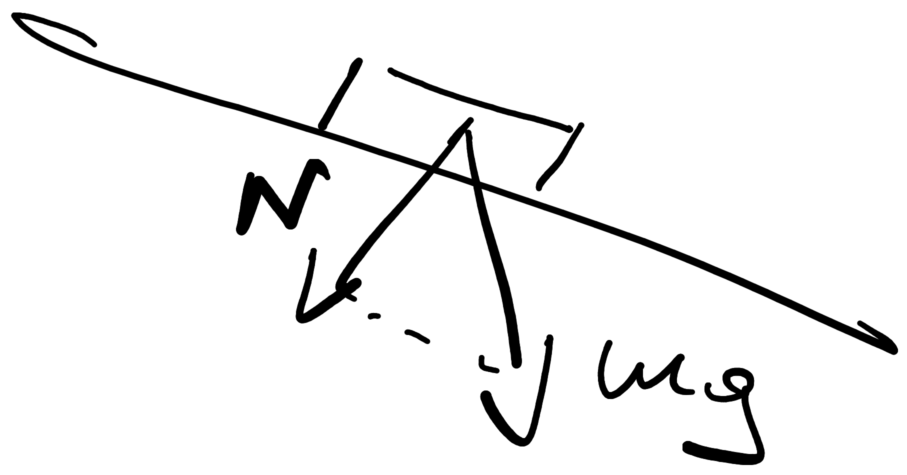


warunek: $F_o > N$

$$mgR + 0 = mgh + \frac{mV_2^2}{2}$$

N - siła nacisku

$F_o = \frac{mV^2}{R}$ - siła odśrodkowa



$$h = R\sin(\beta)$$

$$\frac{mv_2^2}{R} = mg\sin(\alpha)$$

$$V_2 = \sqrt{Rg\sin(\alpha)} = \sqrt{2(gR - Rg\sin\alpha)}$$

$$2\cancel{Rg}(1 - \sin(\alpha)) = \cancel{Rg}\sin(\alpha)$$

$$2 = 3\sin(\alpha) \qquad \sin(\alpha) = \frac{2}{3}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2}{3}Rg}$$

ruch postępowy	ruch obrotowy
s	α
$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
$F = ma$	$M = J \cdot \varepsilon$
$p = mv$	$L = J \cdot \omega$
$E_k = \frac{mv^2}{2}$	E_k
m	J

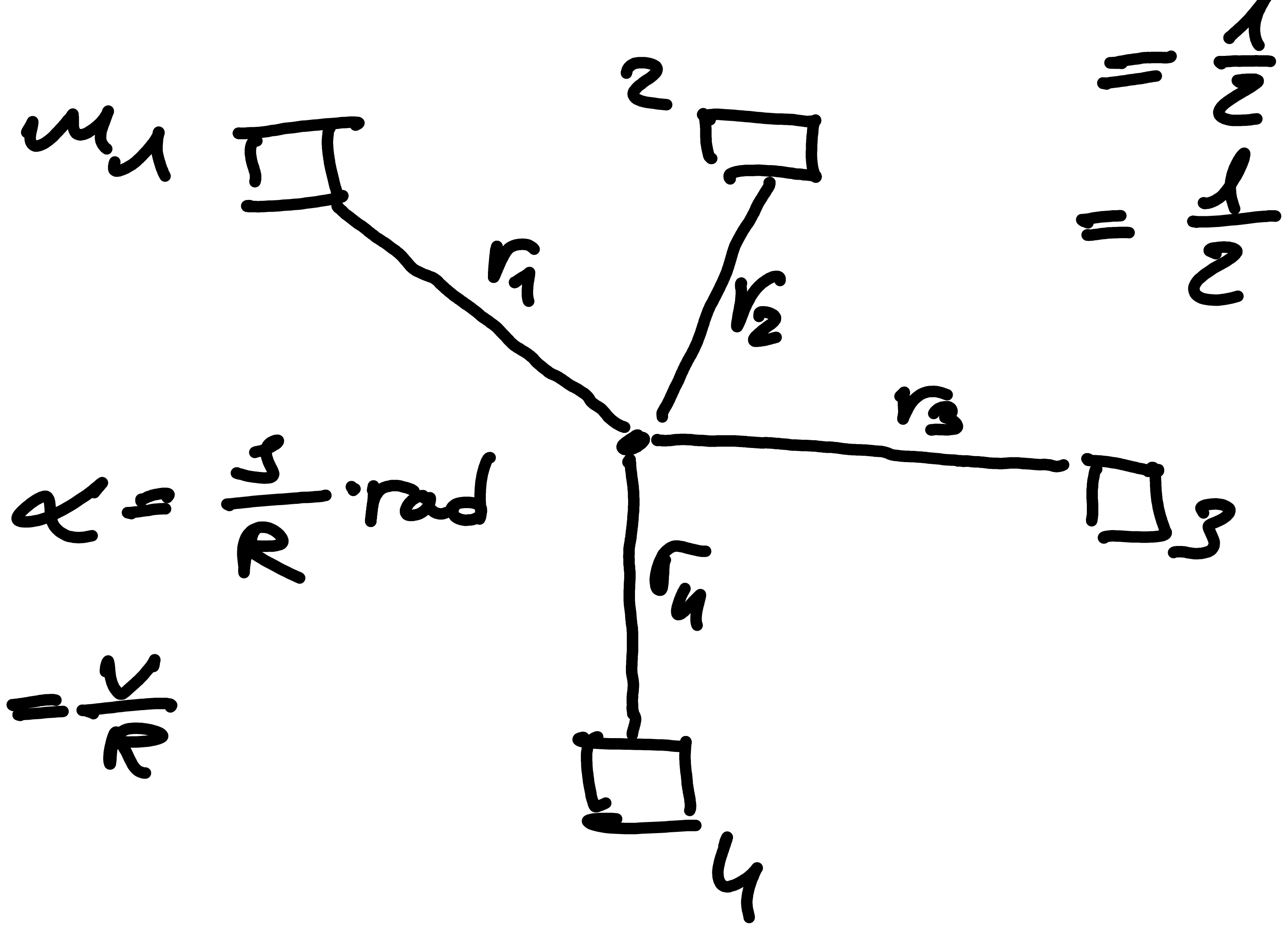
Masa jest miarą bezwładności.

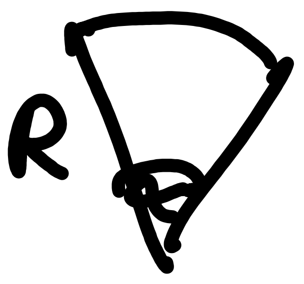
Gr. sztywna

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{\cdot 2} \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 v_2^2 + m_2 v_2^2 + \ldots) =$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots)}_{J}$$





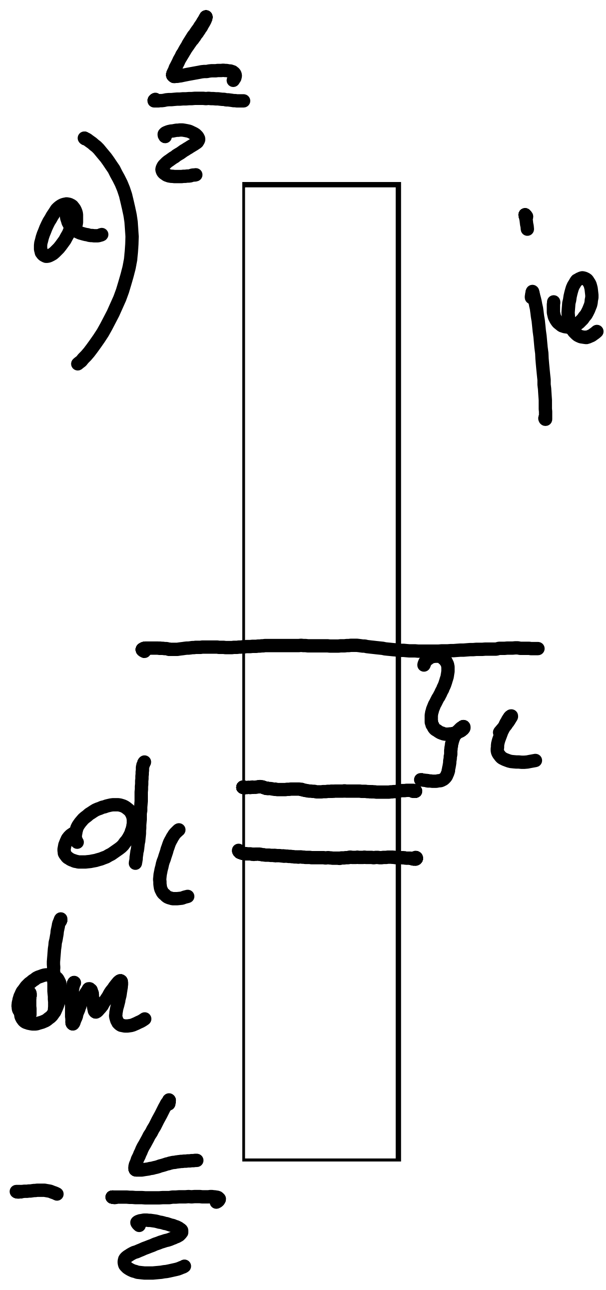
$\alpha = \frac{s}{R} \cdot \text{rad}$

$\omega = \frac{v}{R}$

Wyznaczyć moment bezwładności belki
o masie M i długości L

a) wokół osi przechodzącej przez środek
b) przechodzącej przez koniec belki

a)



jednorodny, środek masy w środku belki

dl - długość plasterka

dm - masa plasterka

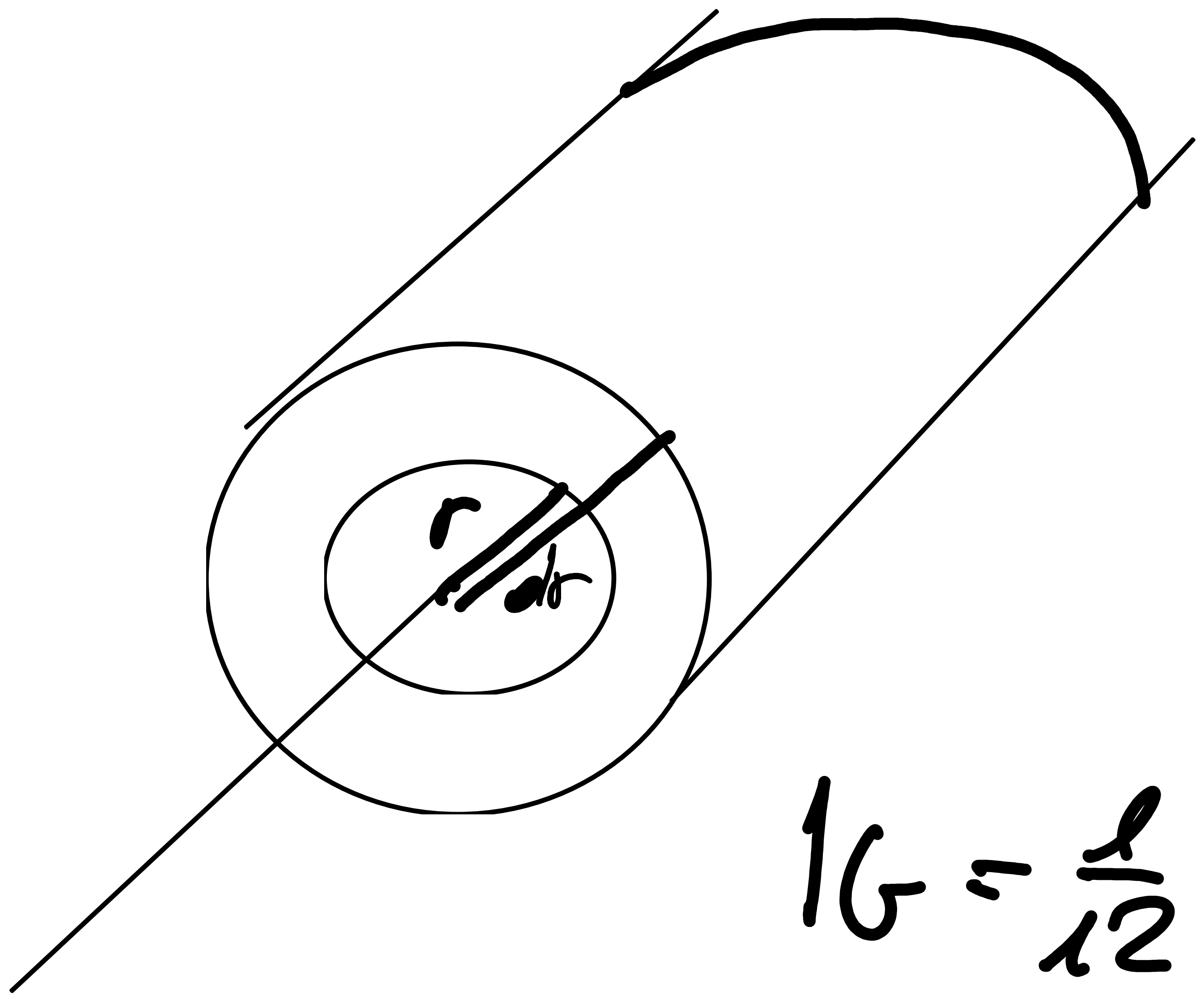
$$dI = dm\, l^2$$

gęstość liniowa - $dm = \frac{M}{L}\cdot dl$

$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{M}{L} l^2 dl = \frac{M}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} l^2 dl = \frac{M}{L}\frac{l^3}{3}\Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} =$$

$$= \frac{M}{3L}\left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8}\right) = \frac{1}{12}ML^2 = I_0$$

b) $= \frac{1}{3}\frac{M}{L}(L^3) = \frac{1}{3}ML^2$



Twierdzenie Steinera:

$$I_G = I_0 = m_G^2$$

$$I_G = \frac{1}{12} mL^2 + m \cdot \frac{L^2}{4} = \frac{1}{3} mL^2$$

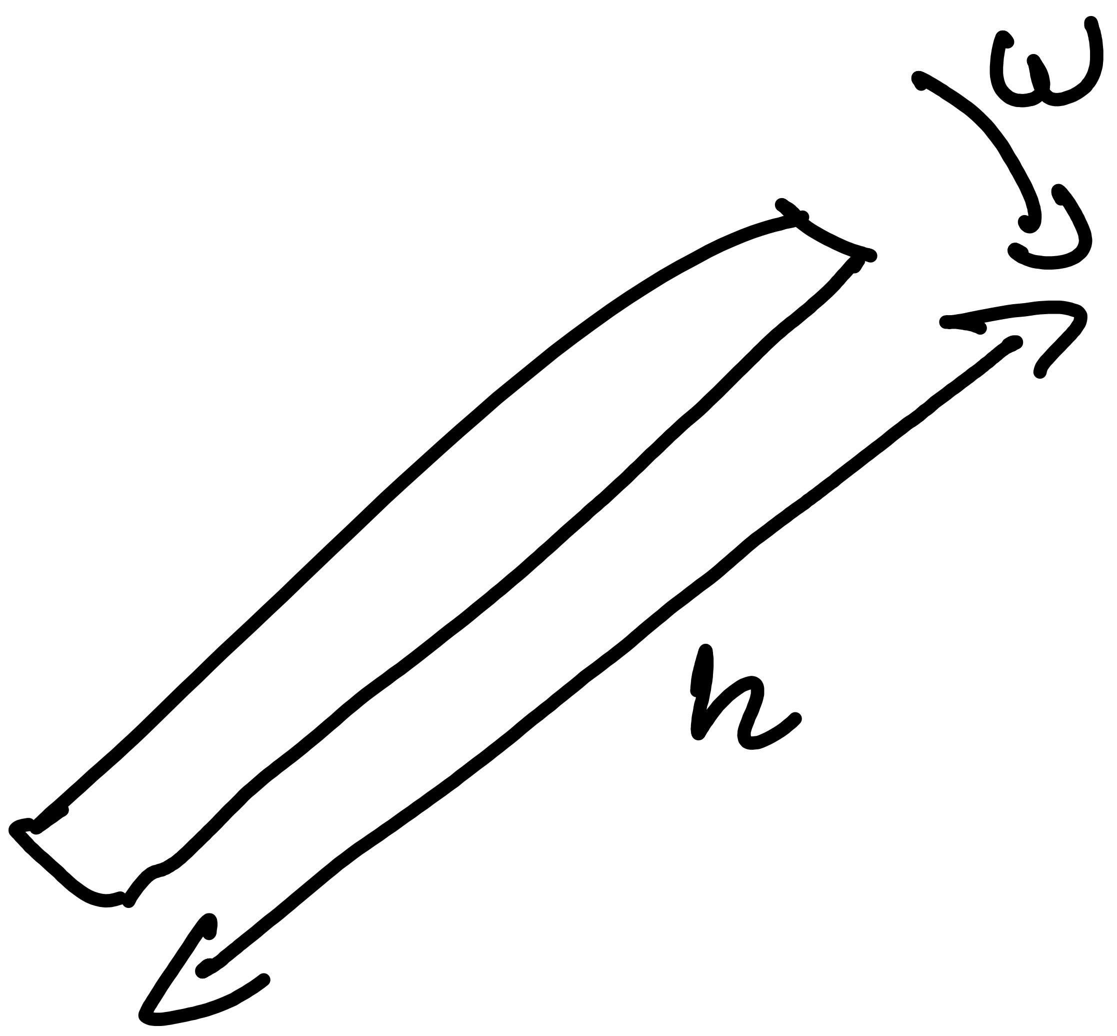
Zadanie: Z wysokości h na równię pochyłą pod kątem α spada kulka. Odbija się i ponownie spada. Wyznaczyć odległość miejsc uderzenia kulki.

1) Spadek kulki
2) Zderzenie sprężyste

$$V_{0x} = V_0 \sin(\alpha)$$
$$V_{0y} = V_0 \cos(\alpha)$$
$$g_x = g \sin(\alpha)$$
$$g_y = g \cos(\alpha)$$
$$V_0 = \sqrt{2gh}$$

Zadanie:

Słup drewniany o wysokości h odpiłowano od podstawy. Z jaką prędkością upadnie wierzchołek słupa na ziemię? Zakładamy, że możemy potraktować jako walec.



$$\Delta E_p = \Delta E_k$$

$$E_k = \frac{J \cdot \omega^2}{2} \quad E_p = Mg\frac{h}{2}$$

$$J_0 = \frac{1}{12} \cdot h^2 \cdot M$$

$$J = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) M h^2 = \frac{1}{3} M h^2$$

Dla środka masy na początku ruchu:

$$E_{pśo} = \frac{mgh}{2} \qquad E_{kśo} = 0$$

Dla środka masy na końcu:

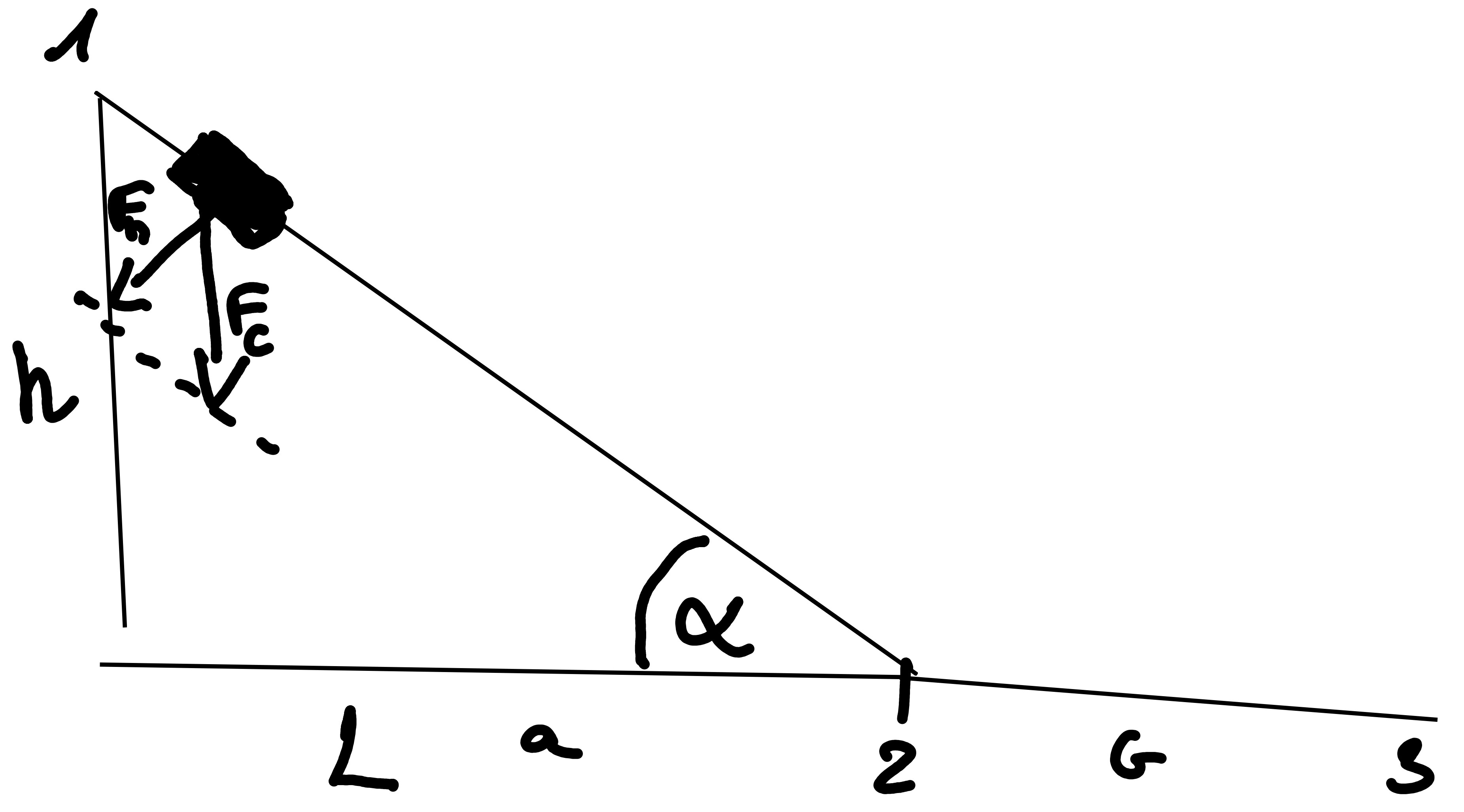
$$E_{pśk} = 0 \qquad E_{kśk} = E_{pśo} \qquad \frac{mgh}{2} = \frac{J\omega^2}{2}$$

$$\cancel{M}g\frac{\cancel{h}}{\cancel{2}} = \frac{1}{\cancel{6}}\cancel{M}h^{\cancel{2}}\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{h}}, \; \omega = \frac{v}{r}$$

Dla końca: $v = \omega \cdot h = \sqrt{\frac{3gh^2}{h}} = \sqrt{3gh}$

Zadanie Sanki ześlizgują się z oblodzonej góry, o wysokości h i kącie nachylenia α. Zatrzymują się po przebyciu odległości L od początku ruchu. Obliczyć współczynnik tarcia na powierzchni lodowej. Obliczyć dystans przyspieszenie na odcinku płaskim.

Początek ruchu jest tam gdzie zaczyna się nachylenie.



$L = a + b$ $\quad F_c = mg$ – siła ciężkości

$F_n = F_c \cdot \cos(\alpha)$

$F_T = F_n \cdot \mu$

1° $E_{p1} = mgh$

$E_{k1} = 0$

2° $E_{k2} = \frac{mV_2^2}{2}$ $\quad E_{p1} = E_{k2} + W_{T1,2}$

$E_{p2} = 0$

$W_{T1,2} = F_T \cdot S_{1,2}$

$W_{T1,2} = \mu \cdot F_n \cdot \frac{h}{\sin(\alpha)}$

$E_{k2} = E_{p1} - W_{T1,2} = W_{T2,3} = F_c \cdot \mu \cdot b$

$E_{p1} = W_{T1,2} + W_{T2,3}$

$\cancel{mg}h = \mu \cdot \cancel{mg} \cdot \frac{h}{\sin(\alpha)} \cdot \cos(\alpha) + \mu \cdot \cancel{mg} \cdot b$

$u = u\,ctg(\alpha)\cdot M + M\cdot G$

$h = a\cdot M + \mu\cdot G$

$\mu = \frac{h}{a+G} = \frac{h}{L}$

Przyspieszenie: $\cancel{m}a = \cancel{m}\cdot g\cdot\mu = \frac{gh}{L}$

To nie tajemnica. Dlaczego? Bo w tablicy widzą słowa i rysują słowa, a ten rysuje słowo płacz. A żeby człowiek coś narysował, to musi to sobie najpierw to wyobrazić.

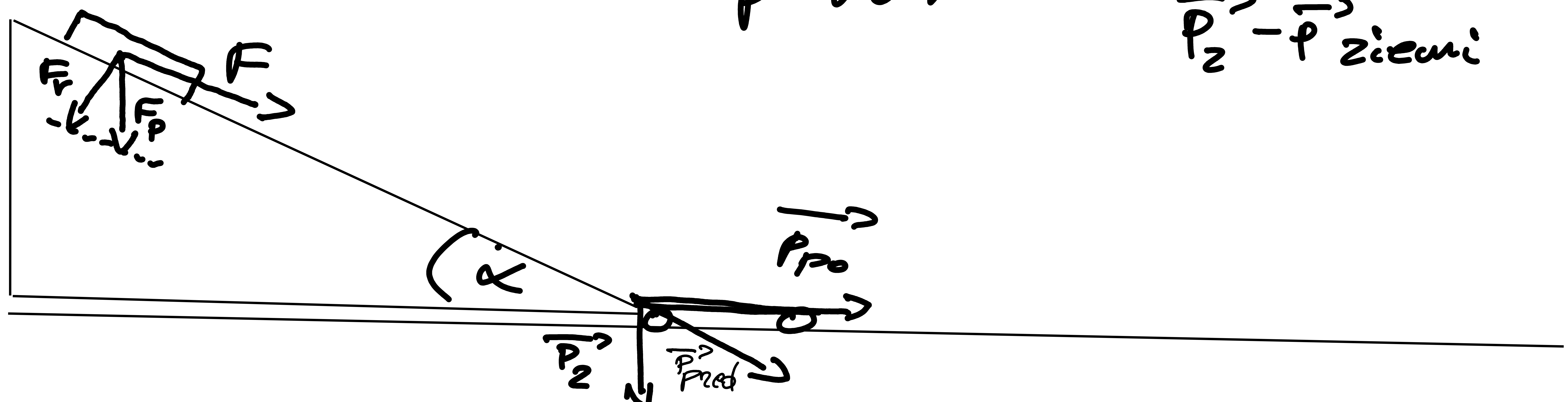
Zadanie Ciało o ciężarze G ześlizguje się z pochylonej deski na nieruchomą platformę. Jaką prędkość V osiągnie platforma, kiedy ciało na nią opadnie. Ciężar platformy G1, wysokość h, kąt α, platforma porusza się bez tarcia.

$m = \frac{G}{g}$

F – siła ściągająca

$\vec{p} - m \cdot \vec{v}$

$\vec{p_z} - \vec{p}$ ziemi



Zasada zachowania pędu: $\sum \vec{p}_{przed} = \sum \vec{p}_{po}$

$$\left(\vec{p}_{po} = [p_{po}x, 0]\right) + \left(\vec{p} = [p_x, p_y]\right) + \left(\vec{p_2} = [0, p_y]\right)$$

$P_0 x = p_x = mv \cdot \cos(\alpha)$

$v = \sqrt{2gh}$

$m = \frac{G}{g}$

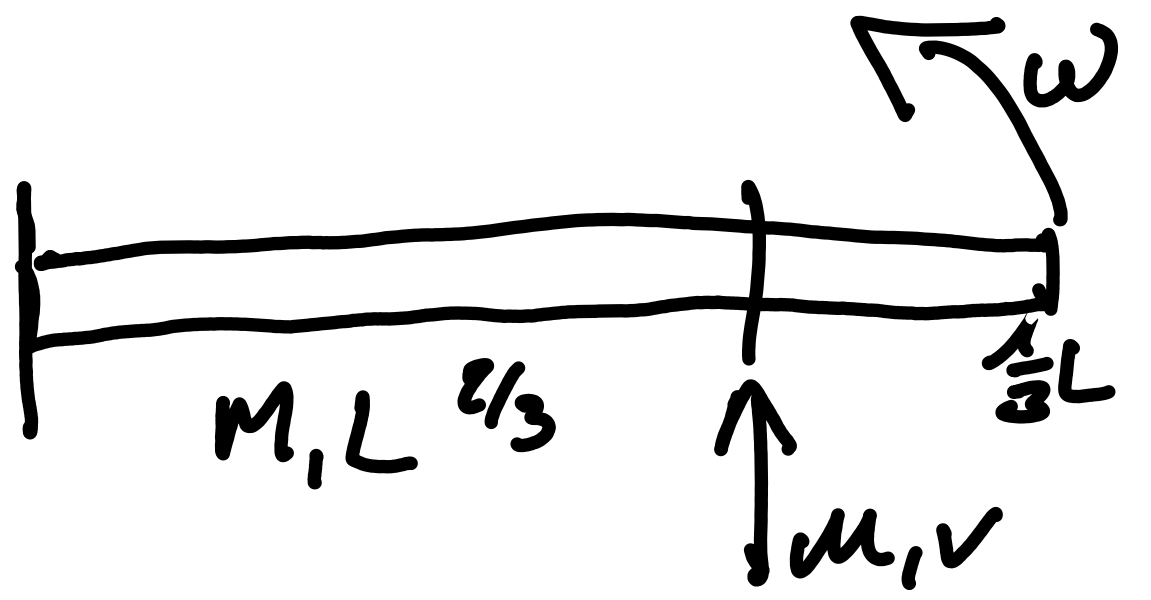
$P_{przed} = \frac{G}{g}\sqrt{2gh}$

$P_{x\,przed} = \frac{G}{g}\sqrt{2gh}\cos(\alpha) = \frac{G+G_1}{2} \cdot u$

u – nowa prędkość.

$$u = \frac{G\sqrt{2gh}\cos(\alpha)}{G+G_1}$$

Listwa o masie M i długości L.
Z jaką prędkością kątową zacznie
obracać się belka, gdy utkwi w nią pocisk?



Przy zderzeniu nie obowiązuje
zasada zachowania pędu.

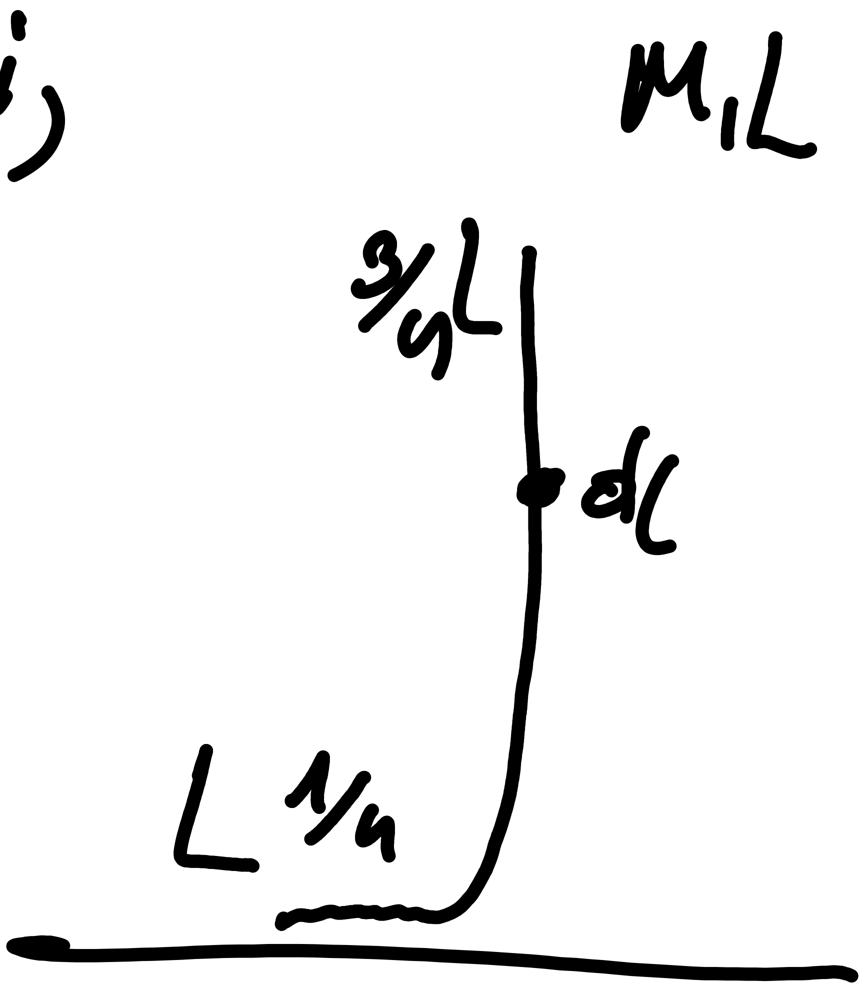
Odpowiednikiem pędu w ruchu obrotowym jest moment pędu.
Masy jest moment bezwładności
Prędkości jest prędkość kątowa. $\omega = \frac{v}{R}$

Przed	Po
$L_b = 0$	$L_b = J \cdot \omega = \frac{1}{3} ML^2 \cdot \omega$
$L_p = p \cdot \frac{2}{3} L = m \cdot v \cdot \frac{2}{3} L$	$L_p = m \cdot u \cdot \frac{2}{3} L = \frac{4}{9} L^2 m \omega$

$$\frac{2}{\cancel{3}} \cdot mvL = \frac{4}{\cancel{9}\,3} L^2 m\omega + \frac{1}{\cancel{3}} ML^2 \omega$$

$$\omega = \frac{2mv}{\left(\frac{4}{3} Lm + ML\right)}$$

Łańcuch nad stołem pionowo wisi, o długości m i masie L, tak że 1/4 dotyka powierzchni stołu. Jaki pęd zostanie przekazany po upadku łańcucha.



Wybieramy jedno ogniwo

$$dm = \frac{M}{L} \cdot dl$$

$$dp = dm \cdot v = dm\sqrt{2gl} = \frac{M}{L}\sqrt{2gl} \cdot dl$$

$$p = \int_0^{\frac{3}{4}L} \frac{M}{L}\sqrt{2gl} \cdot dl = \frac{M}{L}\sqrt{2g} \cdot \int_0^{\frac{3}{4}L} \sqrt{l}\, dl =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\frac{M}{L}\sqrt{2g} \cdot l^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^{\frac{3}{4}L} = \underline{\frac{2}{3}M\sqrt{2gL}} \cdot \boxed{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4}}}$$

tylko to jak cały w powietrzu.

tylko to się będzie zmieniać

DRGANIA

$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ – harmoniczne

ωt – kąt α

$\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{T}$

$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$

$= F_T = \beta v$

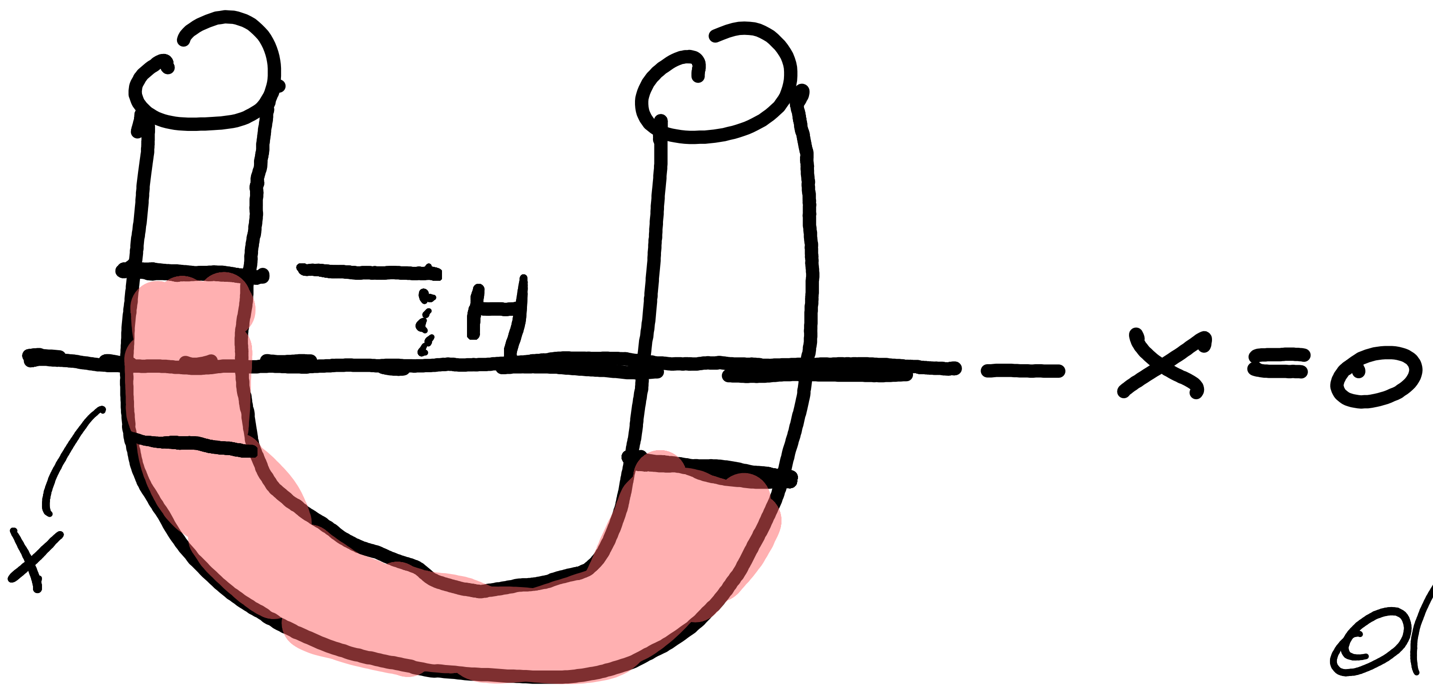
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

równanie drg. harmoniczne swobodne

Dla małych oporów ruchu, tłumienie proporcjonalne jest do prędkości.

Zadanie

Mamy U-rurkę z cieczą. Znaleźć okres drgań z daną cieczą.



Dąży do wyrównania) ponieważ masa z obu dąży do wyrównania.

ρ – ro – gęstość., S – pole podstawy

L – długość słupa cieczy

$$F = mg \cdot \underbrace{\underbrace{2x \cdot S}_{\text{objętość}} \cdot \rho \cdot g}_{\text{ciężar}} = L \cdot S \cdot \rho \cdot a$$

$(mg = ma)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

$$F = 2xg = La$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{2g}}$$

$$a + \frac{2g}{L} \cdot x = 0$$

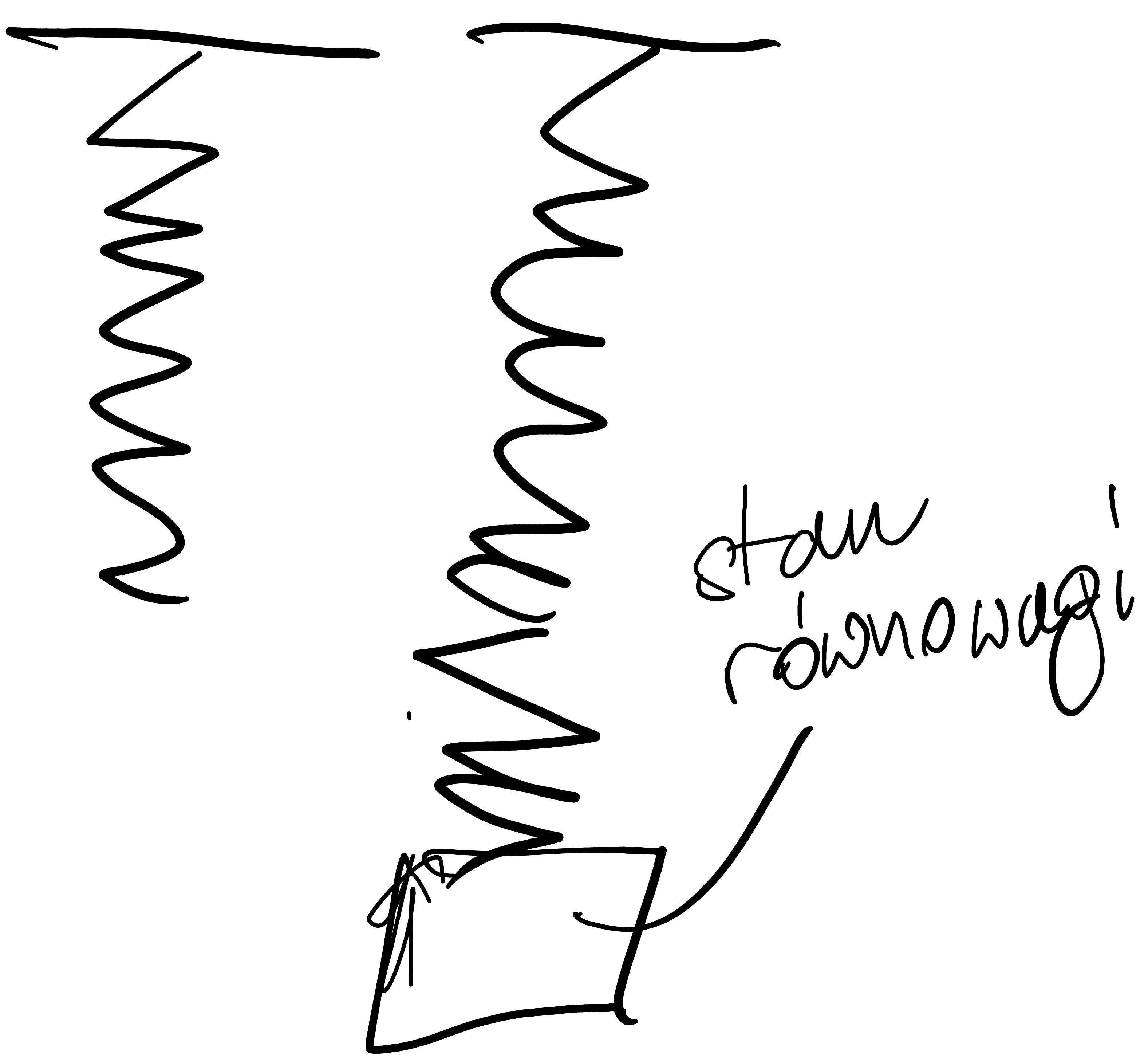
$$y = A\cos(\omega t)$$

$$y = \frac{H}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{L}}\, t\right)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}} = \frac{2\pi}{T}$$

Sprężyna



$F = -kx$

$F = ma$

$ma = -kx$

$m\ddot{x} = -kx$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$\omega^2 = \frac{k}{m}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$

$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$

Fala - rozchodzenie się zaburzenia ośrodka

Wszystkie punkty w ruchu falowym muszą mieć tą samą częstotliwość.

Punkt początkowy - źródło
Po starcie, wszystkie stają się źródłem nowej fali.

$y = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$ - faza

$kx = kvt$, $k = \frac{\alpha}{x} = \frac{2\pi}{\lambda}$ k - siła falowa

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \text{długość fali} = v \cdot T \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \end{array}\right\} \lambda = 2\pi \frac{v}{\omega}$$

- jest bo każdy kolejny punkt porusza się później.

Oscylator harmoniczny

$y = 0{,}15\cos(\pi T - 0.5\pi)$

Znaleźć równanie fali o długości 10m. i odległość punktów różniących się w fazie o $\frac{\pi}{3}$.

$\lambda = 10m$

prawdziwe dla wszystkich

$y = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$

$y = 0{,}15\cos\left(\pi T - \frac{\pi}{2}\right)$

$y = 0{,}15\cos\left(\pi T - kx - \frac{\pi}{2}\right)$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{5}$

$y = 0{,}15 \cdot \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{5}x - \frac{\pi}{2}\right)$

$x_1 : \pi t - \frac{\pi}{5}x_1 - \frac{\pi}{2}$

$x_2 : \pi t - \frac{\pi}{5}x_2 - \frac{\pi}{2}$

$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{5}\Delta x$

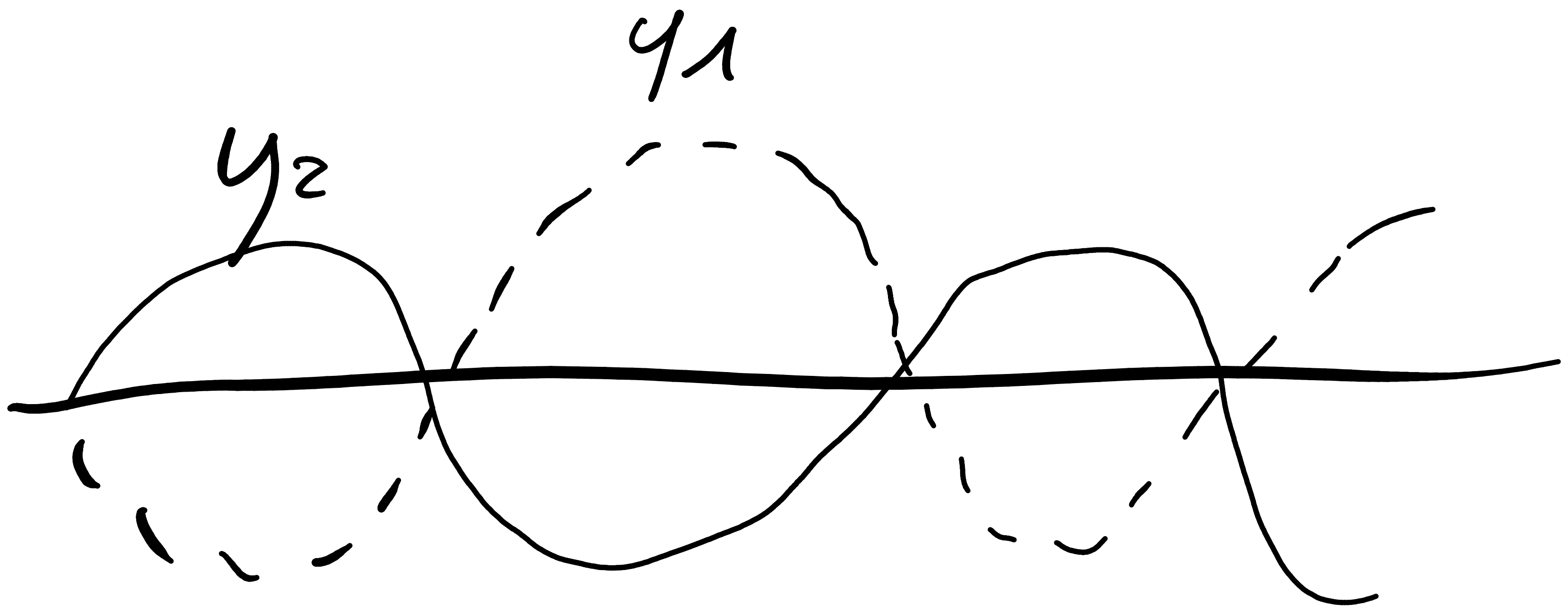
$\frac{\pi}{5}\Delta x = \frac{\pi}{3}$

$\Delta x = \frac{5}{3}$

Fala stojąca

Kundt

rura Kundta



$$y_1 = A\sin(\omega t - kx)$$

$$y_2 = -A\sin(\omega t + kx)$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = A\sin(\omega t - kx) - A\sin(\omega t + kx)$$

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2A\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\boxed{2A}\sin(\omega t)\cdot\boxed{\cos(-kx}$$

test

1h

5 zadań

zaliczenie to 3 zadania dobrze zrobione

Rysunek

Poprawa 45min

Elektryczność

elektrostatyka - ładunki statyczne

elektron - najmniejszy ładunek

obszar na który oddziaływują nazywamy polem elektrostatycznym.

Ładunki rozłożone - odizolowane
—||— skoncentrowane - w metalu

$q \cdot \qquad \cdot Q$

$$F = k\frac{qQ}{r^2}$$

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$ - współczynnik proporcjonalności (zależy od układu jednostek)

$$\frac{k\cdot\frac{qQ}{r^2}}{q} = \vec{E}$$

||

natężenie pola

$= k\cdot\frac{Q}{r^2} = \frac{F}{q}$

$$\vec{F} = k\cdot\frac{Q\cdot q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

wersor osi

$$F = qE$$

(Dla ładunków punktowych)

Energia to praca

Energia potencjalna - przeniesienie z nieskończoności do danego punktu.

$$V = \frac{E_p}{q} = k \cdot \frac{Q}{r}$$

$$|\vec{E}| = \frac{k \cdot \frac{qQ}{r^2}}{q} = k \cdot \frac{Q}{r^2} = E = \frac{F}{q} \quad F = qE$$

$$\vec{F} = k \cdot \frac{qQ}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

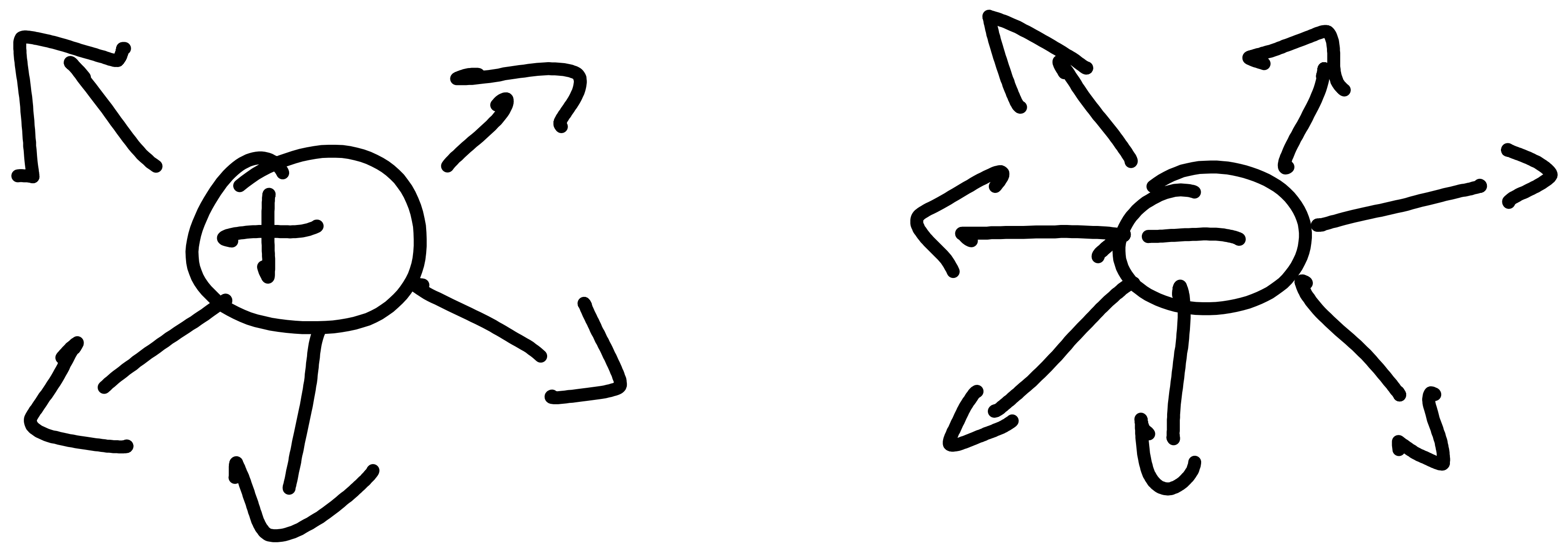
$$E = -\operatorname{grad} V \qquad \vec{E} = [E, 0, 0]$$

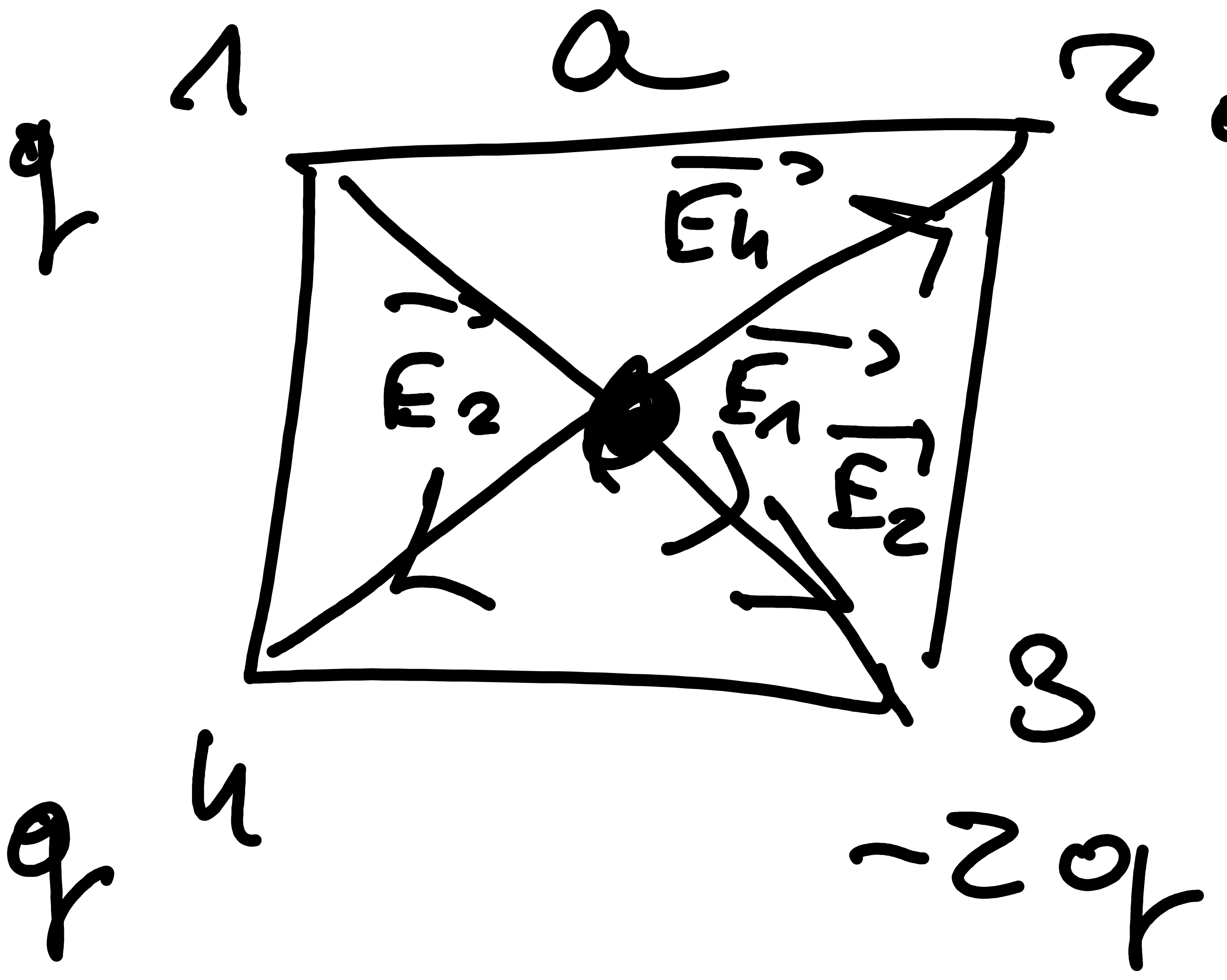
Potencjał jest wielkością skalarną

Natężenie pola sumuje się wektorowo.

Zadanie :

Ładunek próbny - dodatni mały ładunek





$$E_2 = \frac{kq}{r^2} = \frac{kq}{r^2} = \frac{2kq}{a^2}$$

$$V_1 = \frac{kq}{r}$$

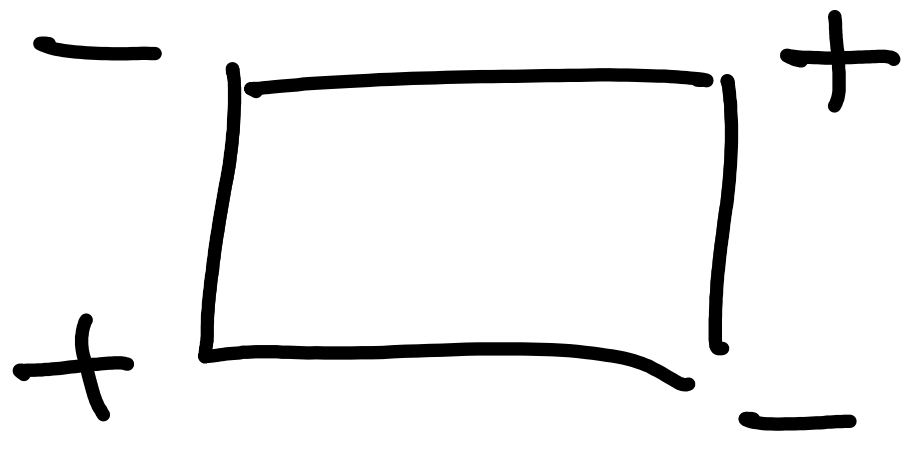
$$V_2 = \frac{kq}{r}$$

$$V_3 = \frac{-2kq}{r}$$

$$V_4 = \frac{ka}{r}$$

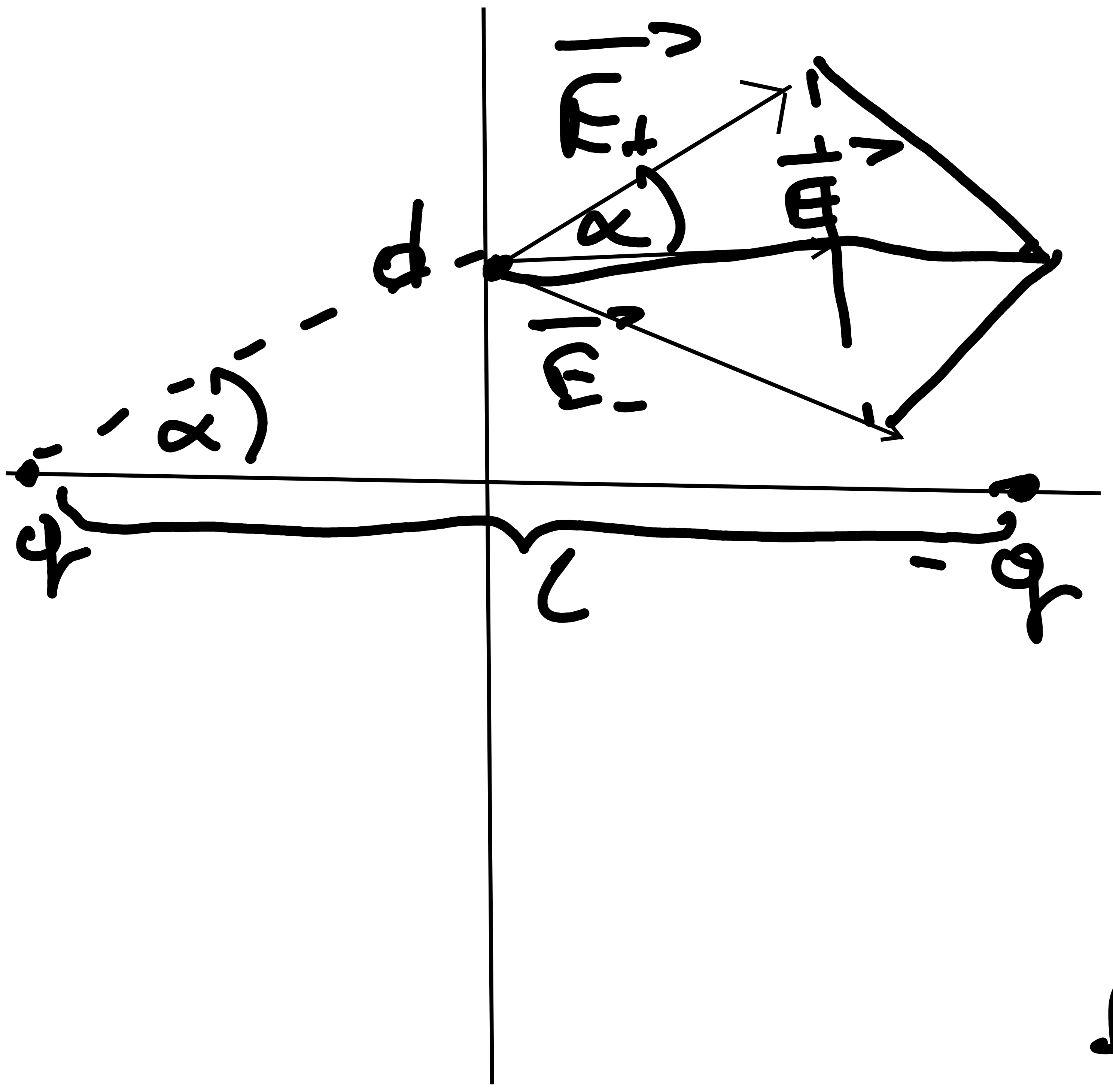
$$V = \sum v_i = \frac{kq}{r}$$

quadrupol



+ ——— − dipol

2 Ładunki +q , -q są L od siebie. Wyznaczyć natężenie i potencjał na osi w odległości D.



$$E_{-x} + E_{+x} = E$$

$$E_{+y} + E_{-y} = 0$$

$$E_+ = \frac{+q}{r^2}$$

$$E_{+x} = E + \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{L}{2r}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + d^2}$$

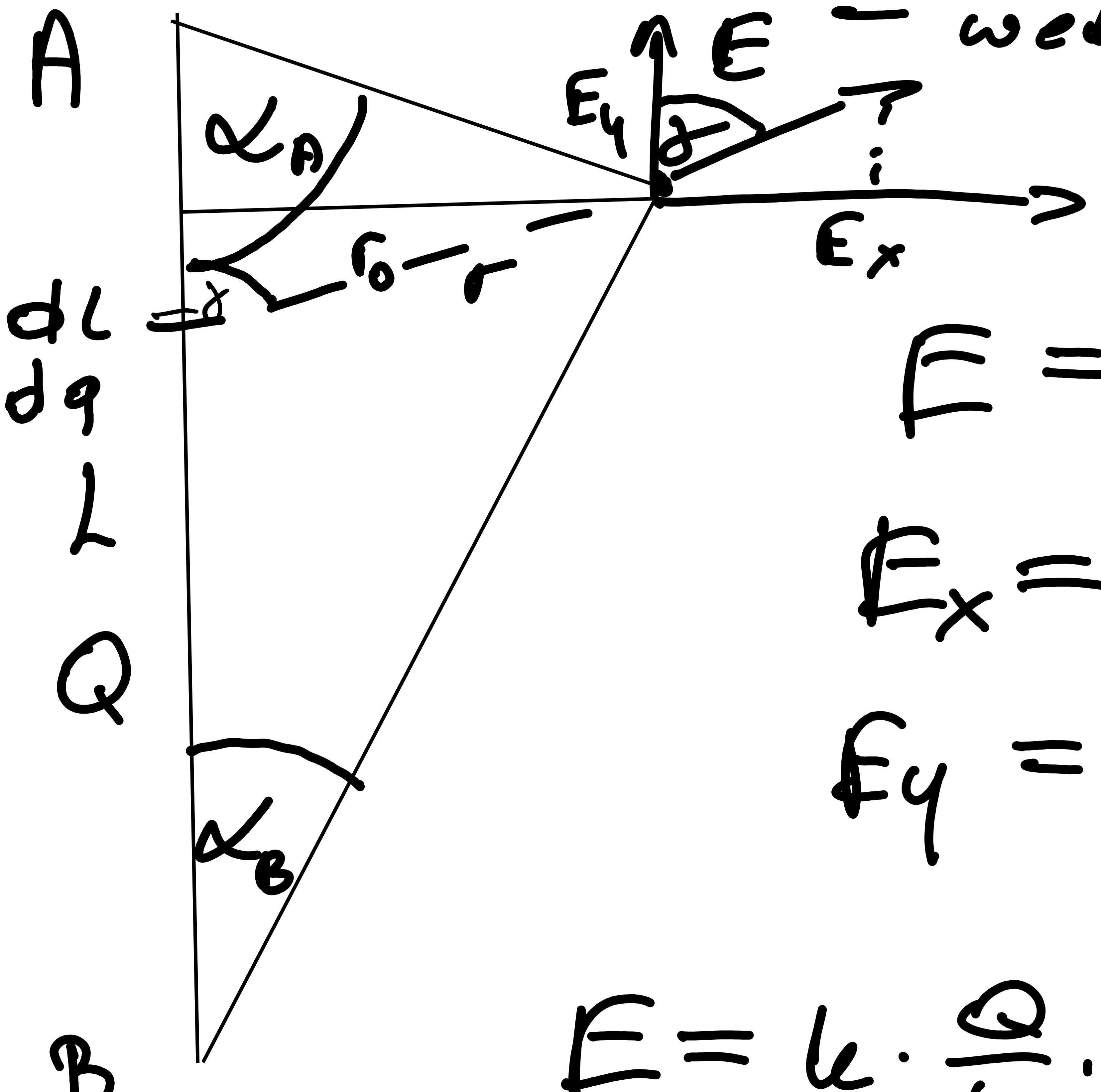
$$E_{+x} = \frac{kq}{r^2} \cdot \frac{L}{2r}$$

$$E = \frac{\cancel{2} kqL}{\cancel{2} r^3} = \frac{kqL}{\left(\frac{L^2}{4} + d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Znaleźć natężenie pola w punkcie odległym o r_0 od pręta o długości L jeżeli końce są widziane pod kątem α_A i α_B. A równomiernie rozłożony na pręcie ładunek wynosi q.

$dq = \frac{Q}{L} dL$

Przyjmujemy, że ładunek jest dodatni.



$\vec{E}$ – wektor natężenia pola.

długość
kierunek
zwrot

$$E = \frac{dq}{r^2}$$

$$E_x = E\sin(\gamma) = E\frac{r_0}{r}$$

$$E_y = E\cos(\gamma) = E\frac{L}{r}$$

$$r = \frac{r_0}{\sin(\alpha)}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\sin(\gamma)\cdot L}{r_0}$$

$$E = k\cdot\frac{Q}{L}\cdot\frac{dL}{r^2}$$

$$E_x = k\cdot\frac{Q}{L}\cdot\frac{dL}{r^2}\cdot\sin(\gamma)$$

$$\vec{E}_W = [\vec{E}_{Wx}, \vec{E}_{Wy}] \quad E_{Wx} = \int_L k\cdot\frac{Q}{L}\cdot\frac{dL}{r^2}\cdot\sin(\gamma)$$

$$dL = r_0\cdot -\frac{1}{\sin^2\gamma}\cdot d\gamma$$

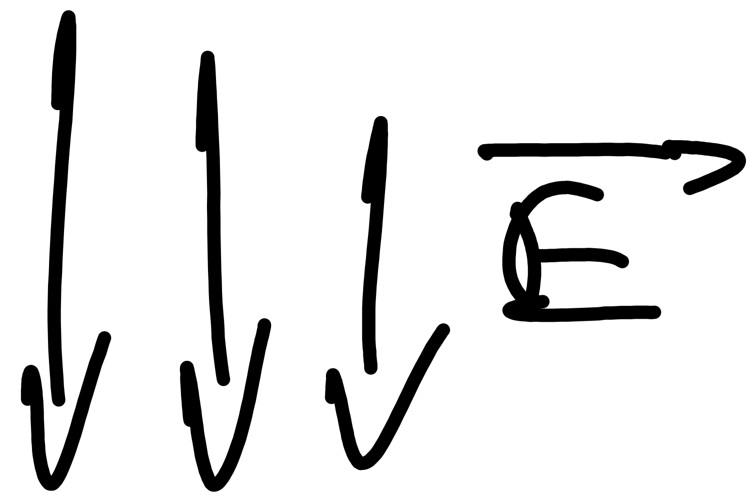
$$E_{Wx} = \int_L k\cdot\frac{Q\cdot r_0\cdot\sin(\gamma)}{L}d\gamma = \int_{\alpha_B}^{\alpha_A}\frac{k\cdot Q\cdot\sin(\gamma)}{L\cdot r_0}d\gamma = \longrightarrow$$

$$= \frac{k \cdot Q}{L \cdot r_0} \cdot \int_{\alpha_B}^{\alpha_A} \sin(\gamma)\, d\gamma = \frac{kQ}{Lr_0}\left(\cos(\alpha_B) - \cos(\alpha_A)\right)$$

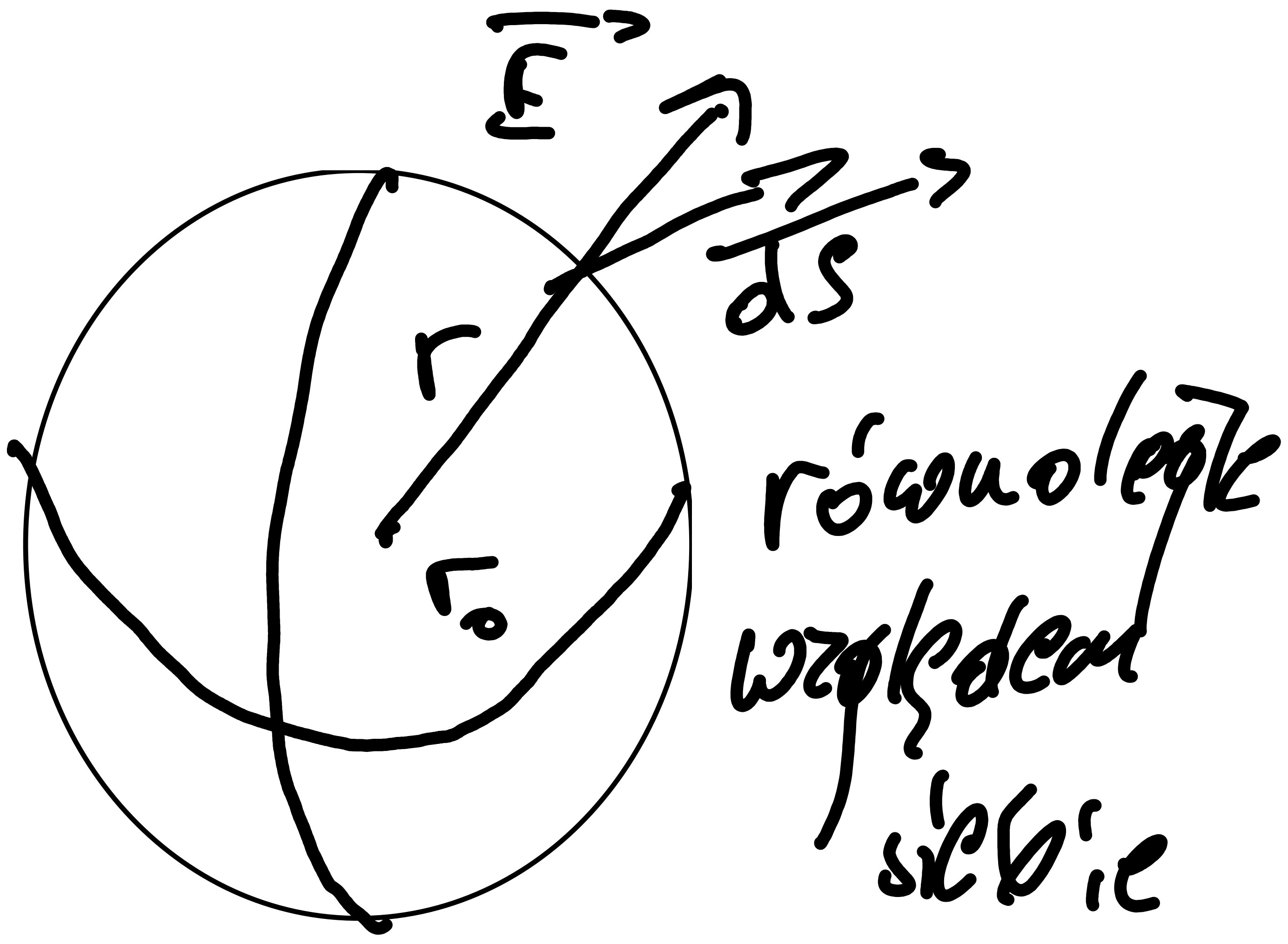
odpowiedź

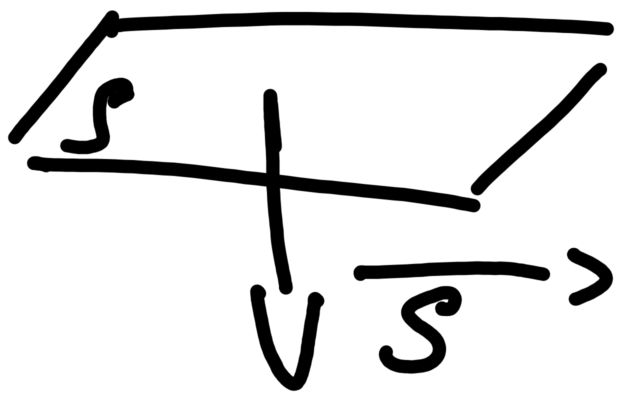
Prawo Gaussa w postaci całkowej:

strumień wektora $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S \cdot \cos(\alpha) = \frac{Q_c}{\varepsilon}$



$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{ds} =$$





$$= \int_S E \cdot ds = E \cdot \int_S ds =$$

$$= ES = E \cdot (4\pi r^2) =$$

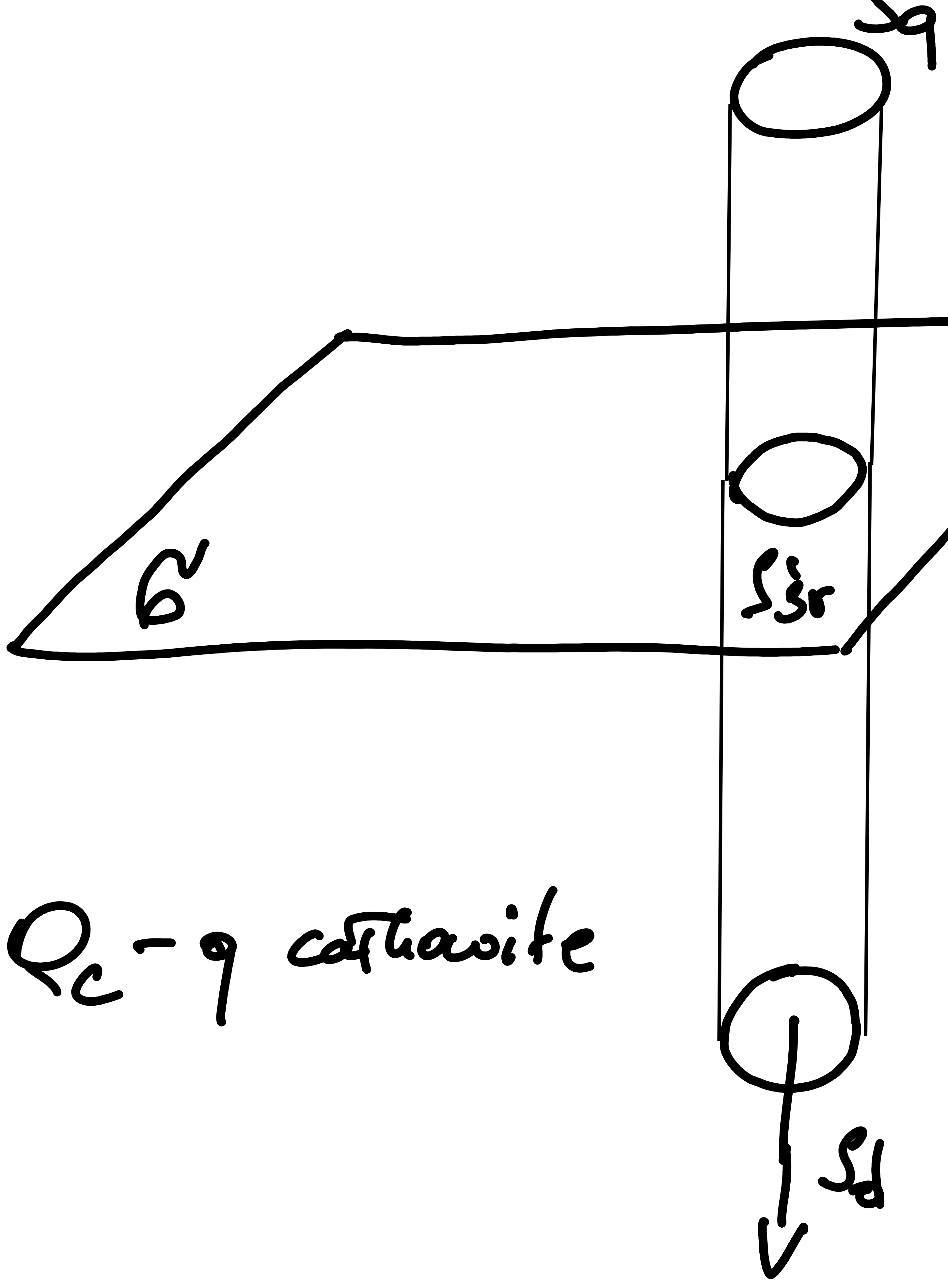
$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon} \frac{q}{\cancel{r^2}} \cdot \cancel{4\pi r^2} = \frac{q}{\varepsilon}$$

$$E = \frac{k \cdot q}{r^2}$$

Strumień natężenia pola jest równy ładunkowi zamkniętemu w powierzchni.

nie zależne od kształtu.



$$\Phi_E = \oint_{S_{cath.}} \vec{E}\,\vec{ds} = \int E\,ds = 2ES$$

$$S_q + S_c + \cancel{S_l}$$

$$S_q = S_d = S_{jr} = S'$$

Q_c - q cafuavite

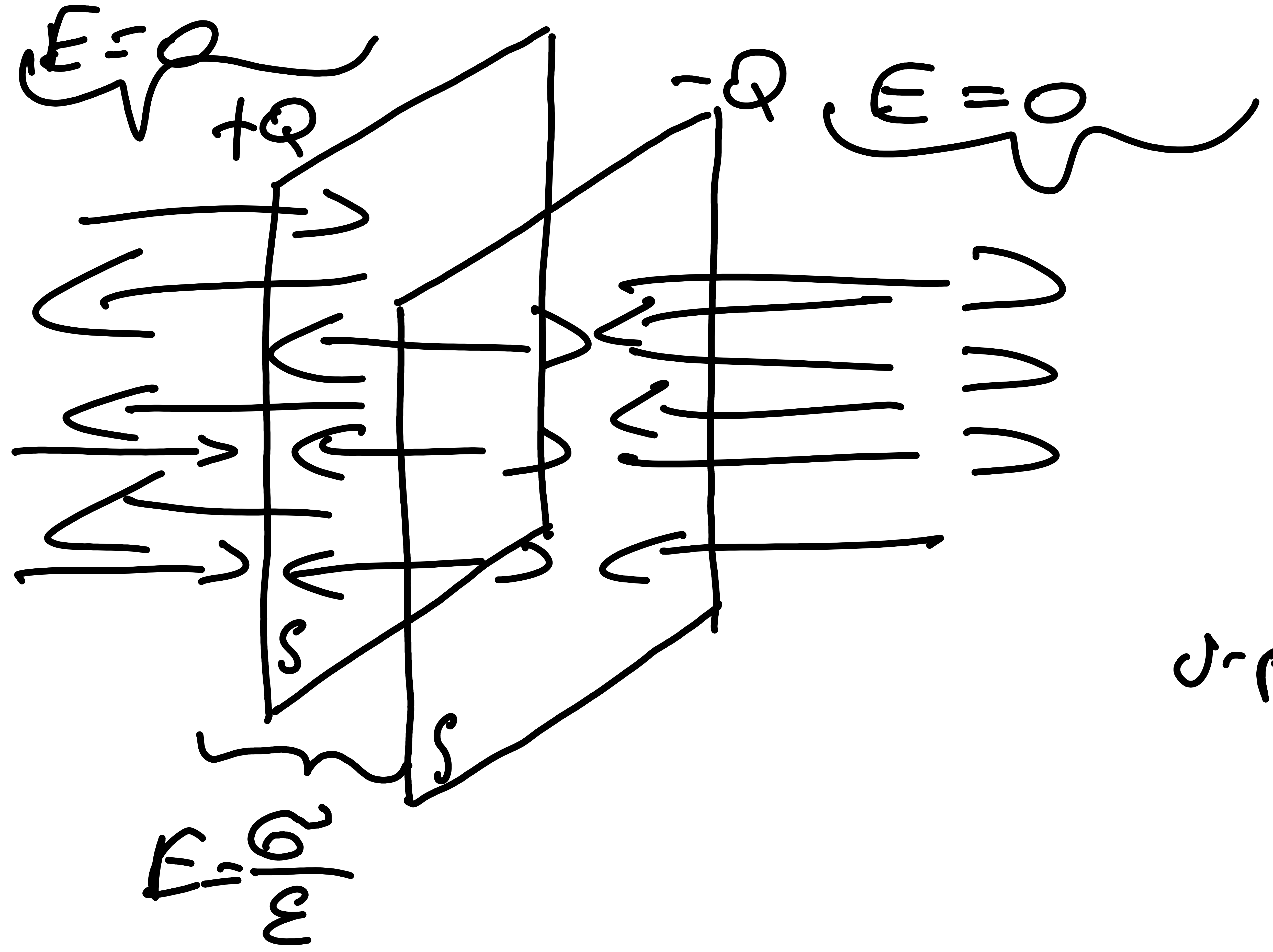
$$2ES' = \frac{\sigma \cdot S'}{\varepsilon}$$

$$Q_c = \sigma \cdot S'$$

$$E = \frac{\sigma}{2S} \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

Wyznaczyć pojemność kondensatora płaskiego o jednakowych okładkach o powierzchni S, w odległości D.

$C = \frac{Q}{U}$ - wielkość stała dla danego przewodnika.



C - pojemność

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \qquad U = Ed \qquad C = \frac{Q\varepsilon}{\sigma d} = \frac{\varepsilon S}{d}$$

$$dW = U\,dq$$

$$dW = \frac{Q}{C}\,dq$$

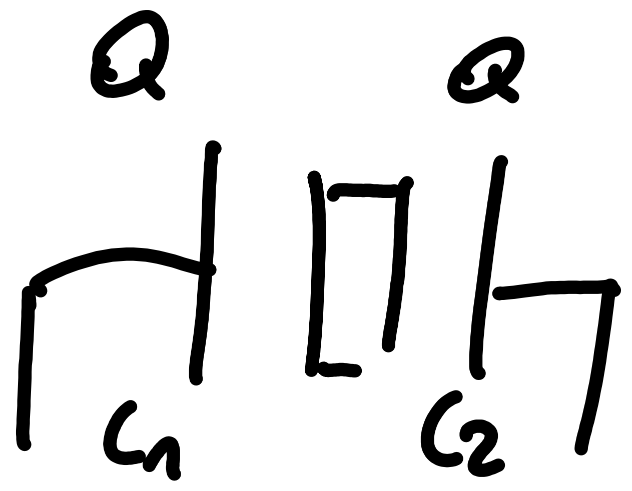
$$W = \int_0^{Q_c} \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{2}Q^2 \qquad E = \frac{1}{2}\frac{Q_k^2}{C} = \frac{1}{2}Q_k \cdot U$$

$$E = \frac{1}{2}CU$$

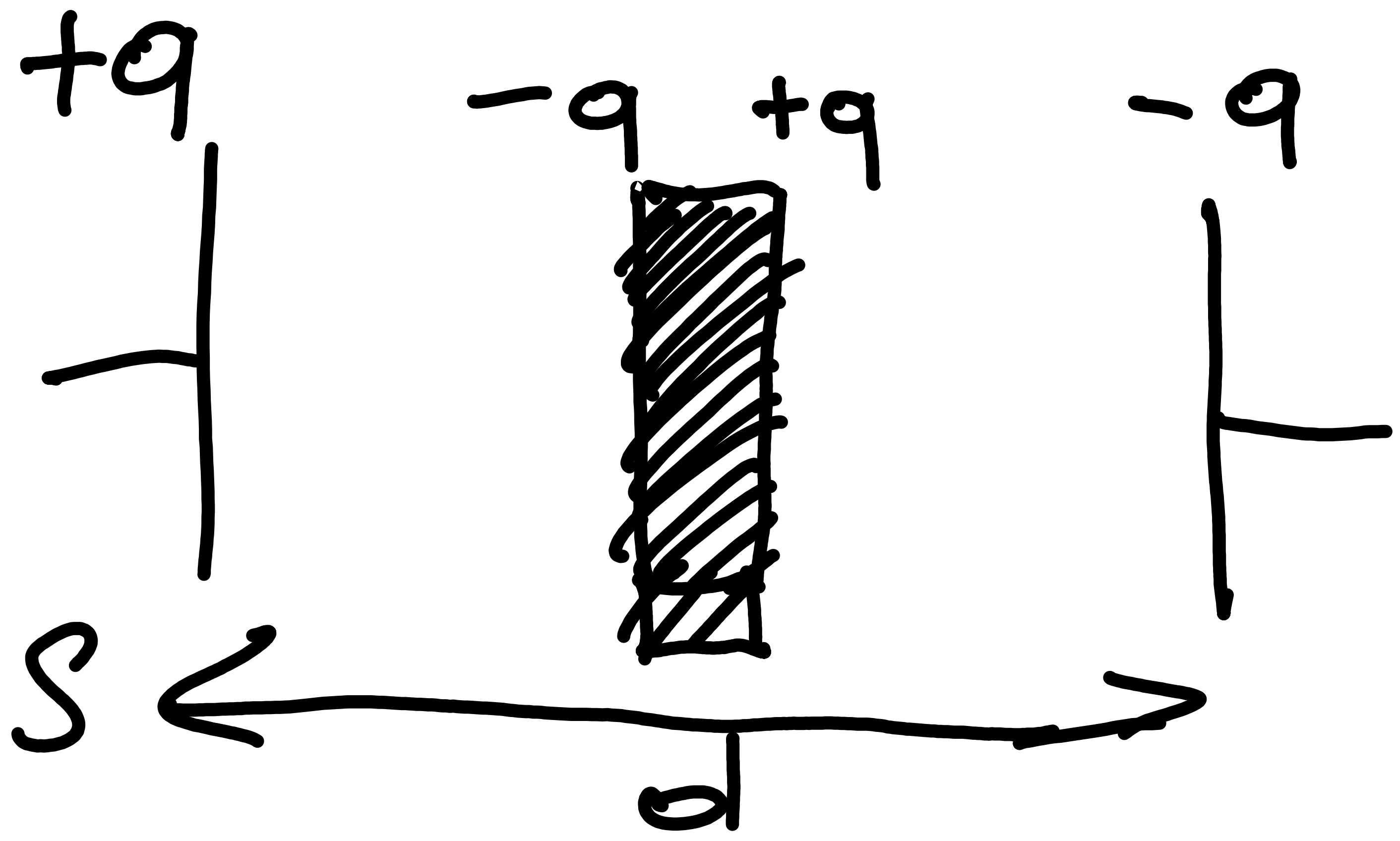
(?)

kondensator i wsadzimy miedzianą płytkę

$\frac{1}{4}d$



$C?$ S, d



$$C = \frac{Q}{U} \qquad U = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon \cdot \frac{S}{x}} + \frac{1}{\varepsilon \cdot \frac{S}{d - \frac{1}{4}d + x}}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{x}{\varepsilon \cdot S} + \frac{\frac{3}{4}d - x}{\varepsilon \cdot S}$$

$$C = \frac{4}{3}C_0$$

W teams jest wynik na odwrót! $\frac{3}{4}$ zamiast $\frac{4}{3}$