Modelowanie matematyczne

$$f: \mathring{A} \xrightarrow{1:1} (\mathring{X} \cup \mathring{R})$$

gdzie $\mathring{A}$ jest zbiorem nazw, cech i opisów związków lub $(\mathring{X} \cup \mathring{R})$

Klasyfi 'a modeli matematycznych

Klasyfikacja modeli matematycznych

1. Na znajomość wartości cech przed podjęciem decyzji

- znane
- nieznane

rozmyte/rozróżnione:

- inne osoby
- losowość (ryzyko)
- rozmyte
- niepewność (nie znamy %)
- przybliżone

2. Na wpływ decydenta
- ważne dla celu modelowania (kryteria)
- są treścią decyzji (zmienne decyzyjne)

3. Kto decyduje
- wielu decydentów (growe)
- jeden decydent (optymalizacyjne)

4. Co decydent będzie wiedział
- deterministyczne (twarde)
- probabilistyczne / losowe / stochastyczne
- rozmyte
- przybliżone
- mieszane

Formułowanie zadania optymalizacyjnego

1. Przekształcanie opisu cech $\overset{\circ}{X}$

$\overset{x}{X}_{dec}$ - zmienne decyzyjne. Jeżeli > 1, to trzeba uporządkować

$\overset{k}{X}_{kryt}$ - lista kryteriów. (Wartości na jakie mamy wpływ i chcemy osiągnąć)

$\overset{a}{X}_{dane}$ - lista danych tzn. wszystkie pozostałe cechy, zbiór fizycznie możliwych wartości danych.

Przykład:

X - zmienna decyzyjna (liczba miejsc rozstawienia; ich lokalizacje)

L - kryterium (Liczba rozstawionych stacji)

N - dane (liczba użytkowników)

M - dana (liczba potencjalnych miejsc)

O_n - dana (liczba użytkowników z dostępem do danej sieci)

2. Przekształcenie opisu związków $\mathring{R}$

A - zbiór poprawnych wartości danych.
Definiują go związki analizy danych gdzie występują <u>wyłącznie</u> dane.

$\Omega(a)$ zbiór dopuszczalnych wartości zmiennych
$\{\Omega(a)\}_{a\in A}$ decyzyjnych w przypadku wystąpienia $a\in A$.

$K(a,x)$ zbiór możliwych wartości kryteriów,
$\{\{K(a,x)\}_{x=\Omega(a)}\}_{a\in A}$ gdy zostanie podjęta decyzja x,
dla poprawnych wartości danych, $a\in A$

$$E_A : \bigcup_{x=\Omega(a)} X(a,x) \to (0,1)$$

Funkcja oceny osiągnięcia celu, gdy pojawiają się możliwe kryteria.
Mogą być różne dla różnych decydentów

Przykłady:

1. $X \subseteq \{1,2,\dots M\}$ ZD + D (zmienna decyzyjna + dana)
2. $\emptyset \notin O_m \subseteq \{1,2,N\}$ $(m=\overline{1,M})$ dana
3. $L = |X|$ ZD + K
4. $L \xrightarrow[X]{} \min$ ZD + K
5. $\bigcup_{m=1} O_m = \{1,2,\dots N\}$ ZD + D
6. $\bigcup_{m=1}^{M} O_m = \{1,2,\dots,N\}$ D

$$E_a(L^*) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } L' = \min\limits_{X\in\Omega(a)} X(a,x) = \min L(X) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

3. Analiza informacyjna

a_j - dana (cecha niebędąca zmienną decyzyjną i kryterium)

X_j - zbiór możliwych wartości danych

Przed podjęciem decyzji, decydent będzie znał

- jej wartość
- rozkład prawdopodobieństwa jej wartości
- stopień przynależności do jej zbioru X_j
- tylko taki zbiór A_j, dla którego
  $a_j \in A_j \subseteq X_j$
- tylko przybliżenia zbioru A_j

Po przeprowadzeniu analizy, może okazać się, że należy zmodyfikować zbiory A, $\Omega(a)$, $k(a,x)$

4. Sformułowanie zadania optymalizacyjnego

Dla danych $a \in A$ wyznaczyć takie $x^* \in \Omega(a)$ aby $\forall y = K(a, x^*) : E(y) = 1$

$\Omega(a)$ - zbiór rozwiązań (dopuszczalnych)

x^* - rozwiązanie optymalne

5. Definiowanie E_a

Zał: im większa wartość kryteriów, tym lepiej.

zbiór $K(a, x)$ jest jednoelementowy

$$K(a,x) = \{K(a,x)\} = \{k\}$$

k:
- liczba
- zbiór rozmyty
- wektor liczbowy
- zbiór liczbowy
- zmienna losowa
- zbiór przybliżony
- mieszane

K jako liczba:

$$E_n(K^*) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } k' = \max\limits_{x = \Omega(a)} \bigcup K(a,x) \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Dla danych $a \in A$ wyznaczyć takie $x^* \in \Omega(a)$, aby $K(a,x) = \max\limits_{x \in \Omega(a)} K(a,x)$

zamiast max może być:

min, sup, inf, Ω, $K(x)$

Wielokryterialność

K - wektor liczbowy

N - liczba kryteriów

$K_n = f_n(a, x) = f_n(x)$, gdzie $f_n : \Omega(a) \to R$

W tym przypadku:

$$K(a) = \bigcup_{x \in \Omega(a)} K(a, x) =$$

$$= \{ \langle f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \rangle \in R^N : x \in \Omega(a) \} =$$

$$= F(\Omega(a)) = F(\Omega)$$

Dominacja w sensie Pareto

Niech $K', K'' \in F(\Omega)$

Def. Mówimy, że K' dominuje K'', co zapisujemy $K' > K''$

$\forall n = \overline{1, N} : K'_n > K''_n$

K'' nazywamy elementem zdominowanym przez K' (relacja porządku)

Def. Element $K \in F(\Omega)$ nazywamy niezdominowanym, jeśli
$\neg \exists K' \in F(\Omega) : (K' > K \wedge K' \neq K)$

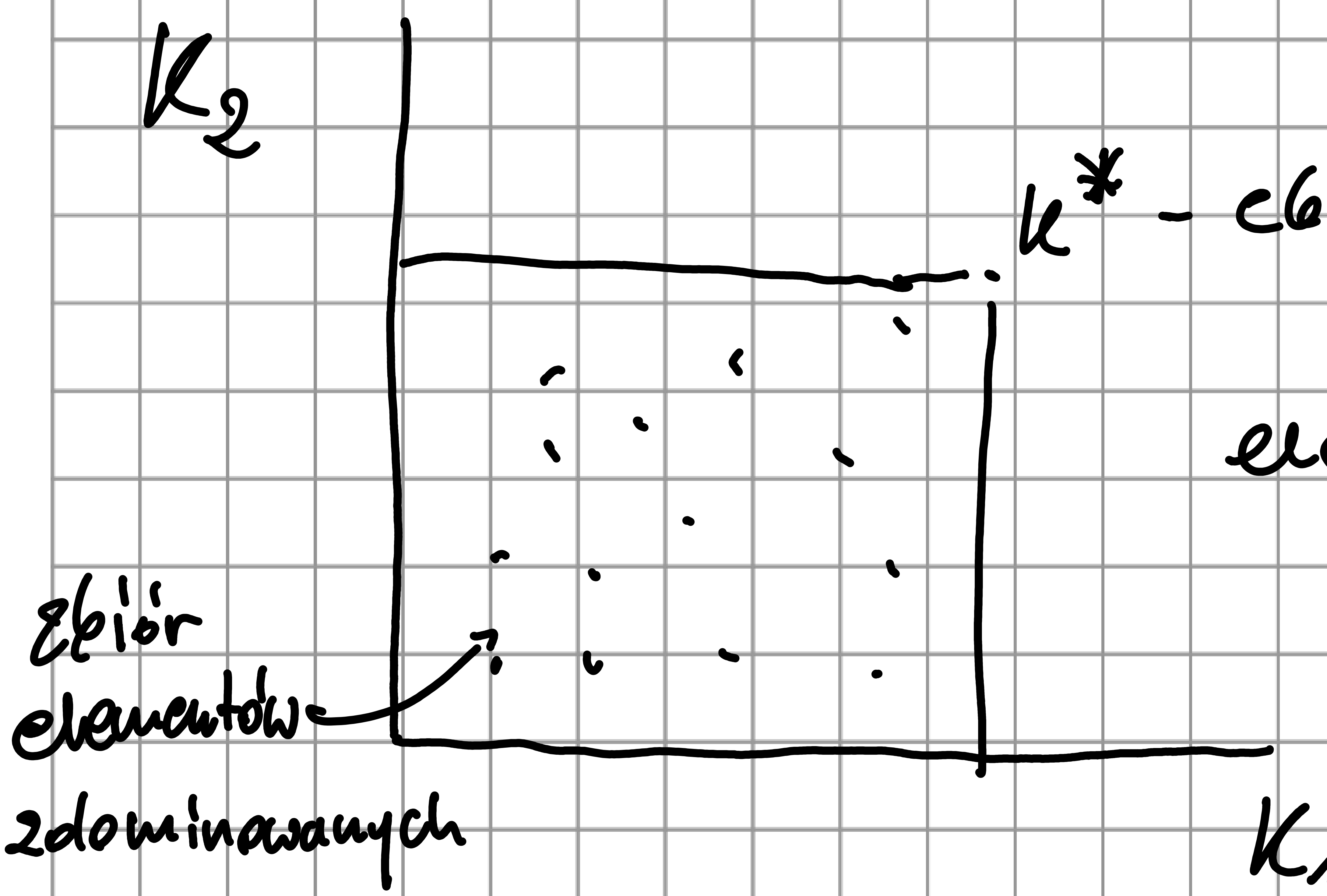
Def. Element nazywamy dominującym
$\forall K' \in F(\Omega) : K > K'$
(element największy)

Zbiór wszystkich niezdominowanych, nazywamy zbiorem Pareto-optymalnym.

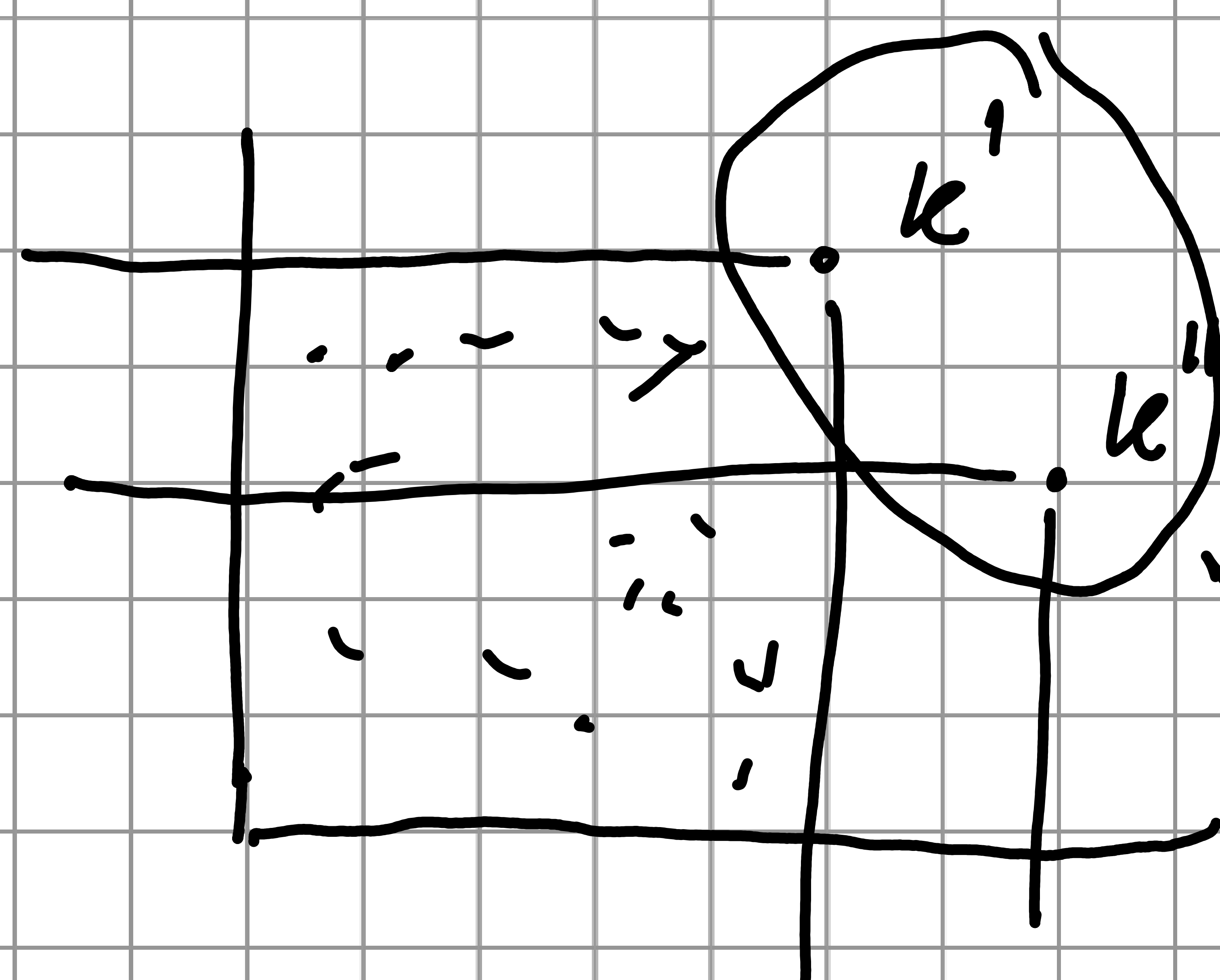
Uwaga: Zbiór elementów dominujących, $Y \neq \emptyset$ to $F^{-1}(Y) \subseteq \Omega$ jest zbiorem rozwiązań optymalnych.

Def. Niech $Y \subseteq F(\Omega)$ będzie zbiorem pareto-optymalnych. Zbiór $F^{-1}(Y) \subseteq \Omega$ nazywamy zbiorem rozwiązań sprawnych.

$$E_{\Omega}(k') = \begin{cases} 1 & \text{gdy } k' \in Y \\ 0 & \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases}$$

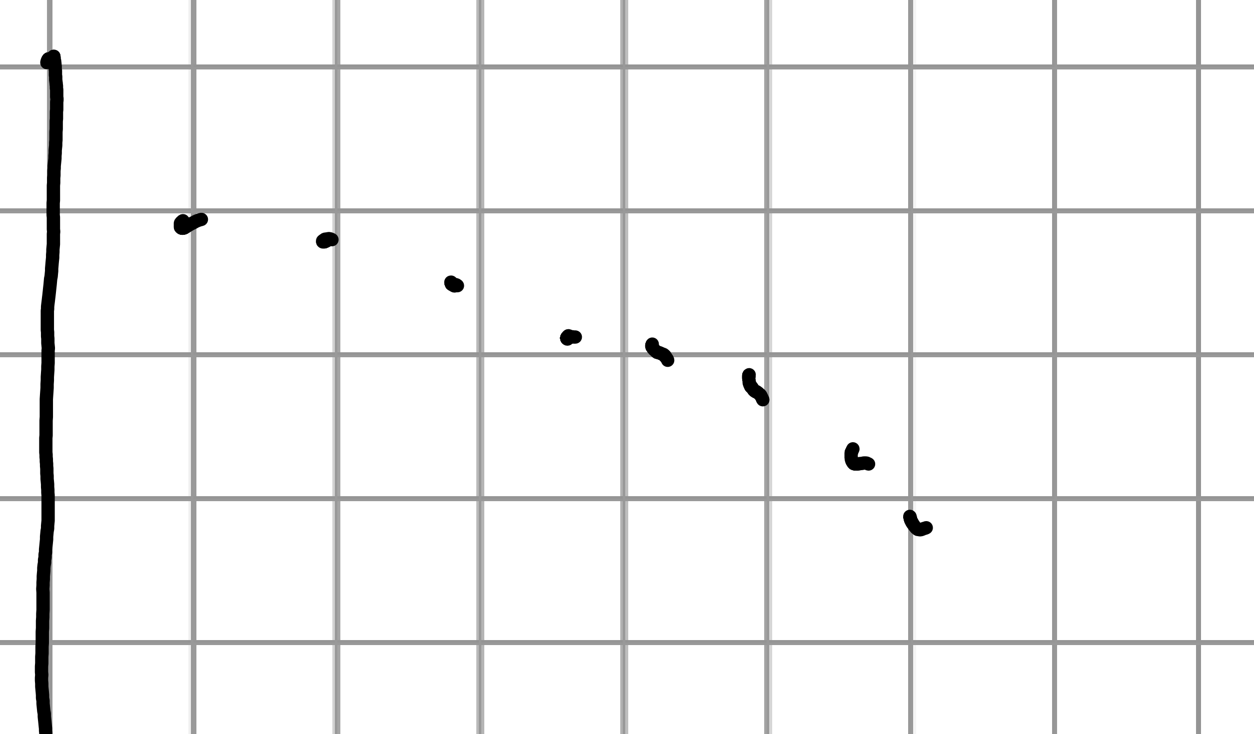


k^* – zbiór pareto-optymalny, element dominujący



Brak elementu dominującego

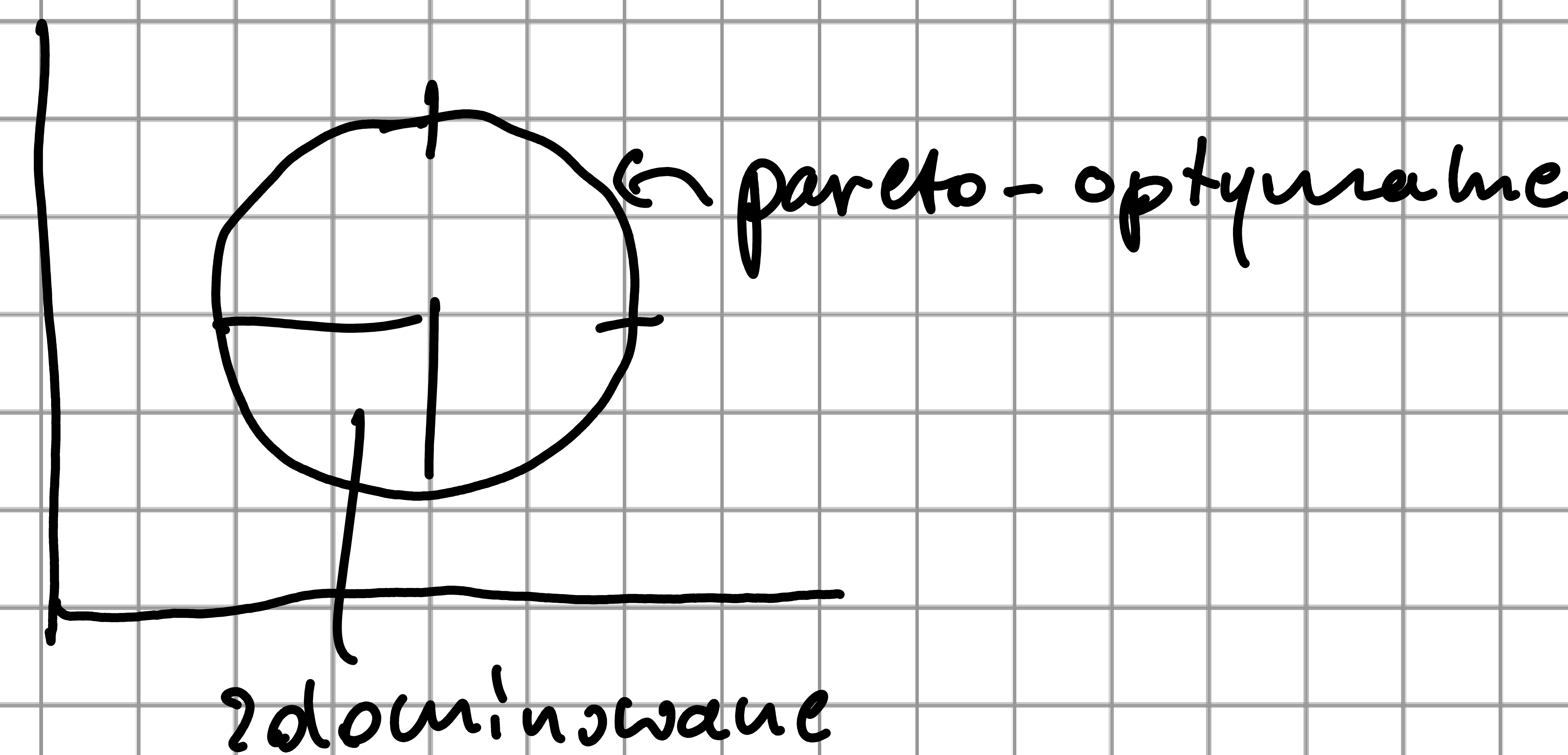
zbiór pareto-optymalny



Brak elementu dominującego

Brak elementów zdominowanych

Wszystkie punkty są pareto-optymalne


pareto-optymalne
zdominowane

Porządek Leksykograficzny

k_1 - najważniejsze, k_2 - kolejne ...

Rozpatruje ciąg zadań wyznaczania zbiorów

$$F_n = \left(k' \in F_{n-1} : k'_n = \max_{k \in F_{n-1}} k_n \right)$$

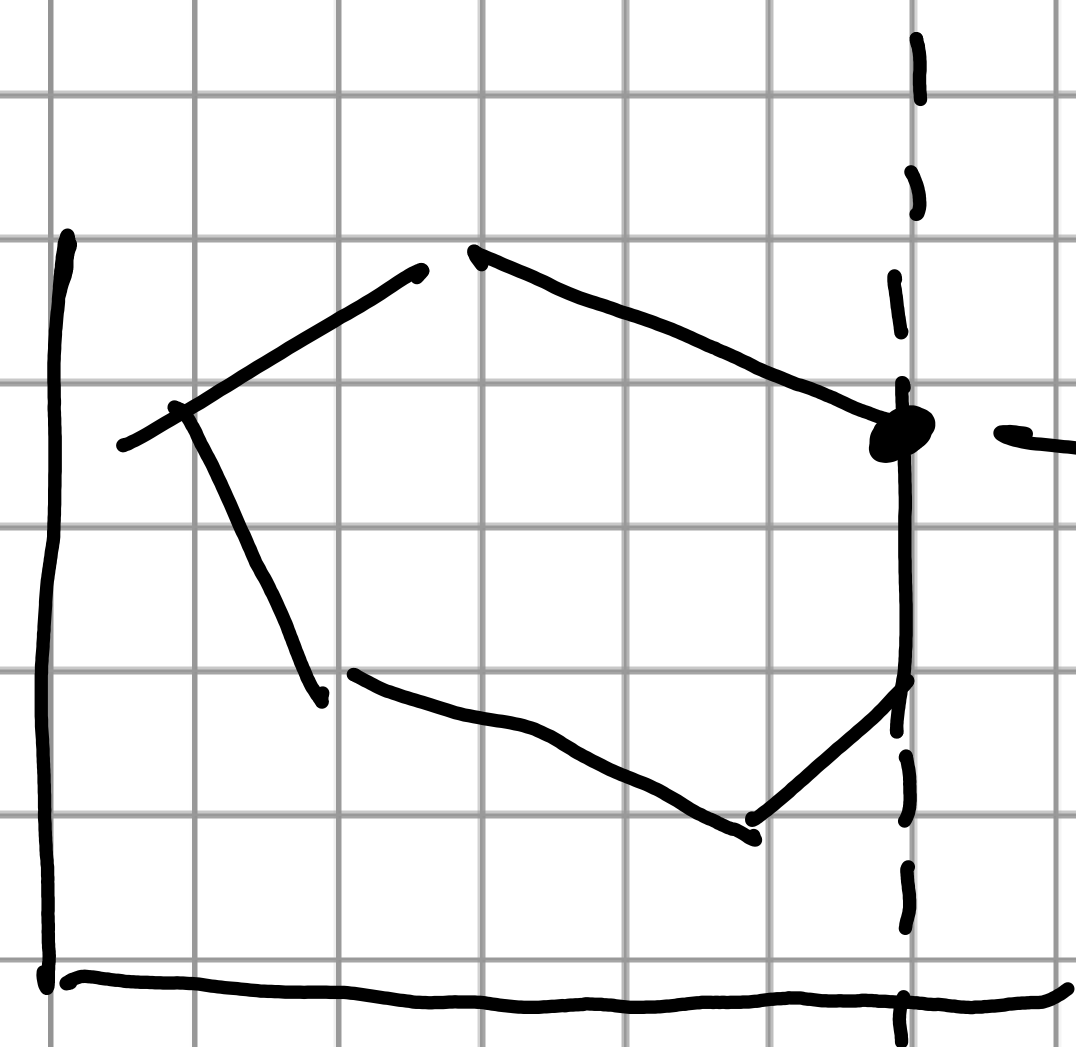
gdzie $F_\Omega = F(\Omega)$

Zadanie rozwiązujemy dla kolejnych n rozpoczynając od 1 aż dojdziemy do $N-1$.

F_n jest zatem jednoelementowym zbiorem wtedy

$$F_n = F_{n+1} = \ldots F_{n-1}$$

$$E_n(k') = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \forall n = \overline{1,N} : k'_n = \max\limits_{k \in f_{n-1}} k_n \\ 0 & \end{cases}$$



punkt optymalny leksykograficznie

Metoda kompromisu (ważonej sumy)

Jedna z metod $F(\Omega) \to R$

$$(k_1, k_2, \ldots, k_n) \to \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \cdot k_n$$

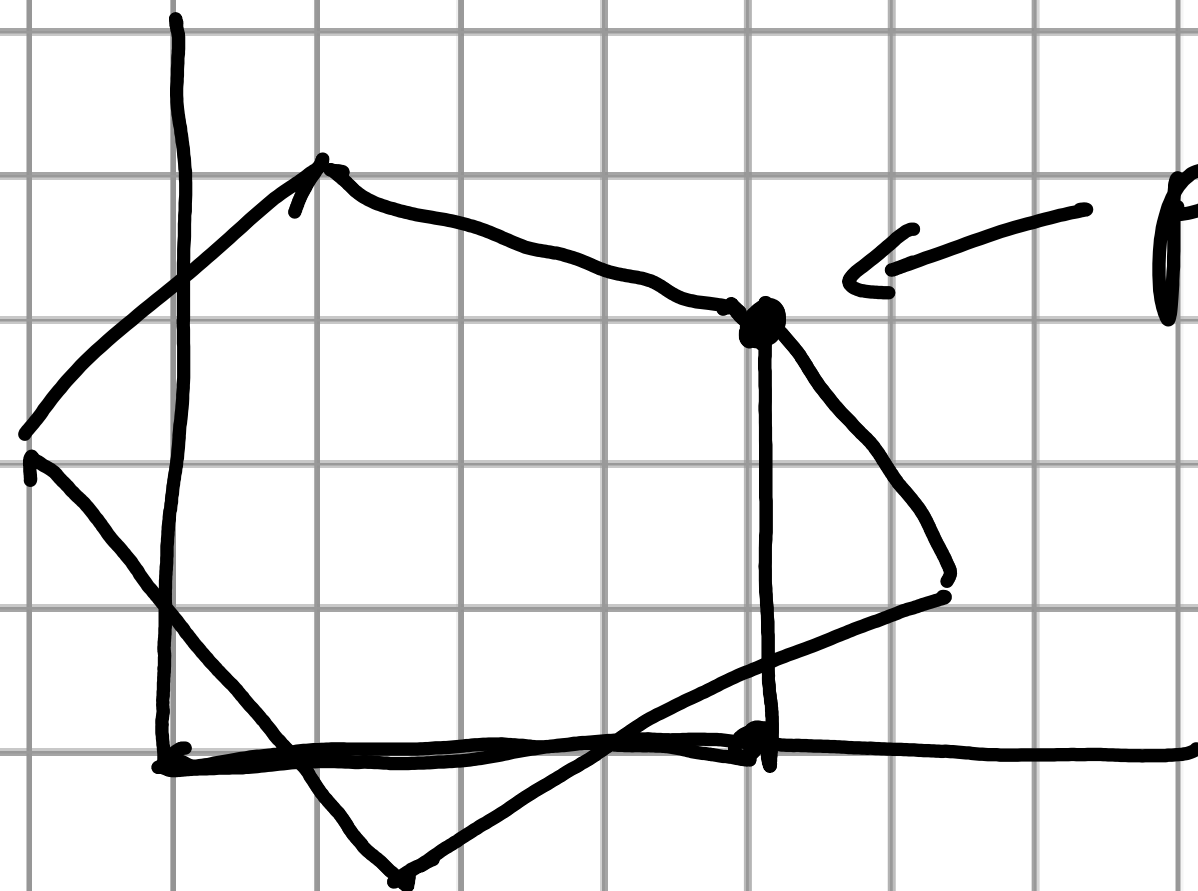
gdzie $\lambda_n > 0$ - subiektywne wagi kryt.

$(n = \overline{1,N})$

Wagi znormalizowane $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n = 1$

(kryt. ekonomiczne)

$$E_n(k') = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \cdot k_n' = \max \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \cdot k_n \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$



punkt optymalny
(suma własności)

dla $\lambda_1, \lambda_2 = 1, 1$
(x) (y)

Metoda Punktu Idealnego

$K^{max} = (k_1^{max}, k_2^{max} \ldots)$ - punkt idealny

wartość każdego z kryteriów jako największa.

$|k|$ - norma wektora k.
Należy wyznaczyć k'

$$|k^{max} - k'| = \min_{k \subseteq (\Omega)} |k^{max} - k|$$

Czyli

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{j.w} \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Najczęściej stosowane normy $|k|$

1. norma z parametrem $p \geq 1$.

$$|k| = \left(\sum_{n=1}^{N} |k_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

2. norma maksimum

$$|k| = \max_{n=\overline{1,N}} |k_n|$$

3. norma euklidesowa

$$|k| = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |k_n|}$$

4. norma uliczna

$$|k| = \sum_{n=1}^{N} |k_n|$$

Metoda punktu nadir

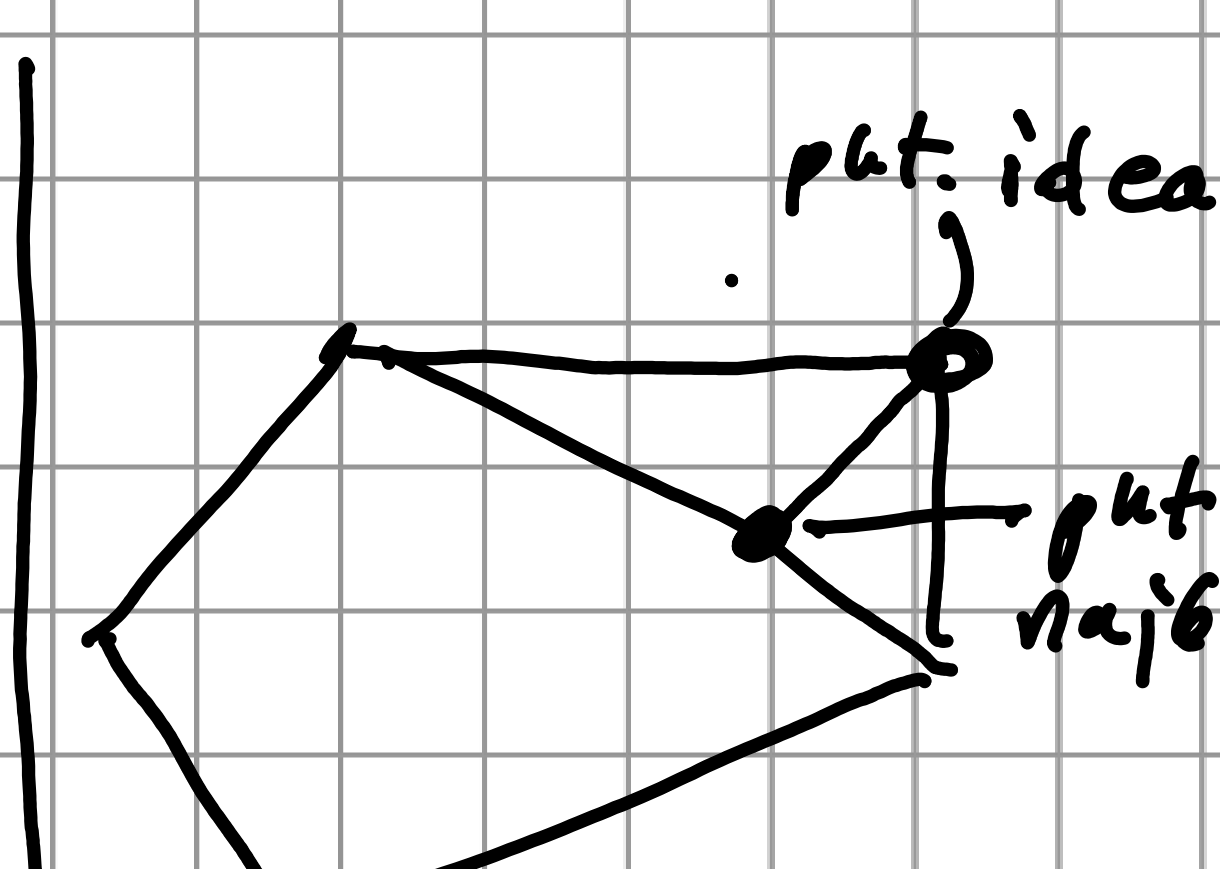
nadir - przeciwność zenitu

$$k^{min} = (k_1^{min}, k_2^{min}, \dots) \text{ - punkt nadir}$$

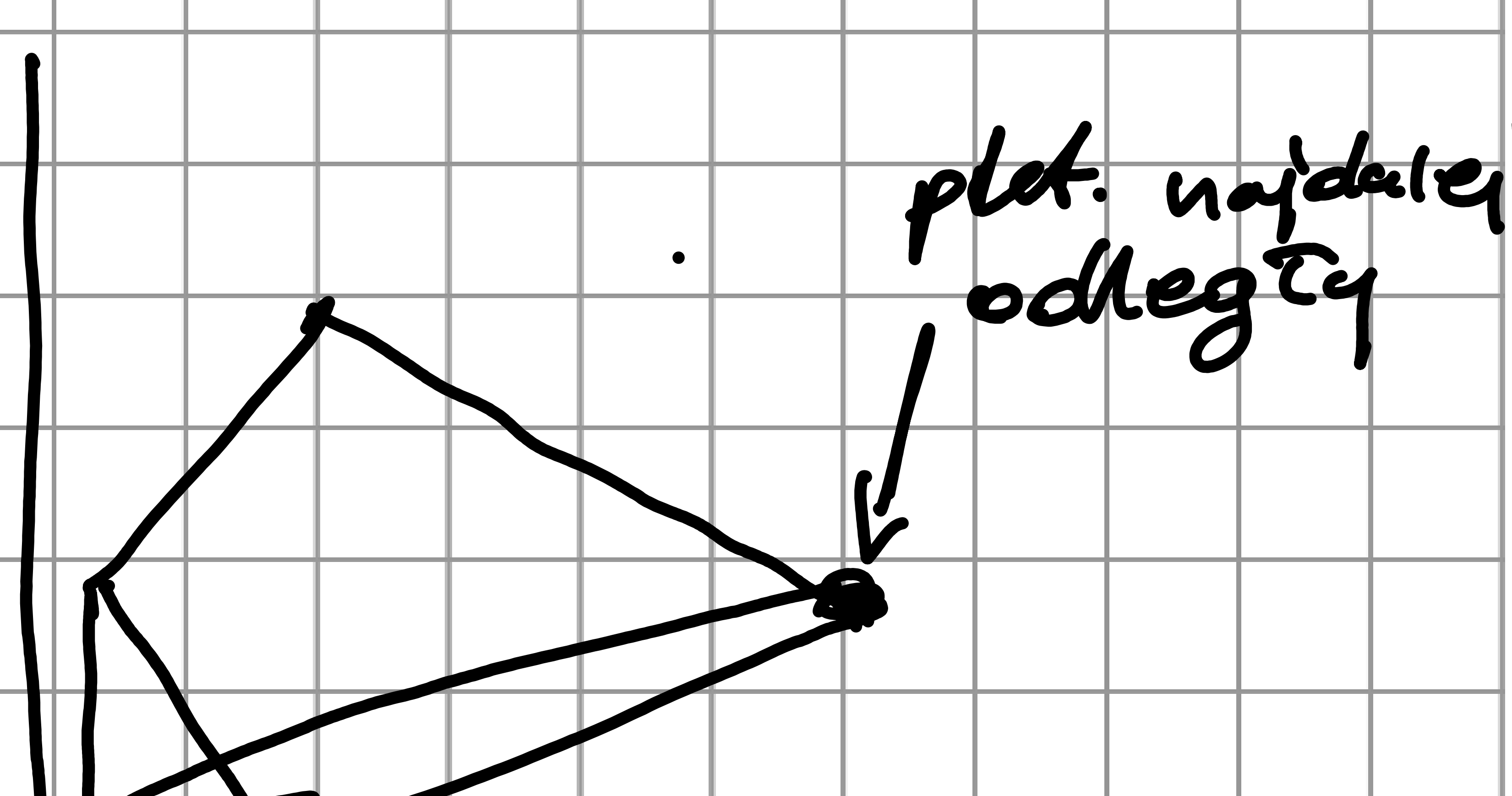
$$|k^{min} - k'| = \max_{k \in f(\Omega)} |k^{min} - k|$$

$$E_n(k') = \begin{cases} 1 & j.w \\ 0. & w.p.p \end{cases}$$

Metoda pkt. idealnego



metoda nadir



Programowanie celowe

Cel: $C = \langle c_1, c_2 \dots c_n \rangle$

Im bliżej celu, tym lepiej

$$|K - C| = \sum_{n=1}^{N} w_n - |x_n - k_n - c_n|$$

Jeśli $F(\Omega)$ jest zbiorem liniowym wypukłym, to powyższe stwierdzenie sprowadza się do ZPM.

$$y_n = \max(0, x_n - k_n - c_n)$$
$$x_n = \max(0, c_n - x_n \cdot k_n)$$

$$c_n = x_n \cdot k_n - y_n + z_n$$

LPM - liniowe programowanie matematyczne

Zamiana zadania nieliniowego, w zadanie liniowe

Modele Growe (Strategiczne)

Uwzględniamy:

- listę uczestników gry
- opisy działań możliwych
- analiza poziomu informacyjnego graczy
- opis przebiegu gry
- preferencje graczy dotyczące możliwych wypłat

Podstawowe modele:

a) postać ekstensywna (rozwinięta)
b) postać normalna
c) postać funkcji charakterystycznej.

Postać ekstensywna gry

N - liczba graczy $n = \overline{1,N}$

W - liczba stanów gry

$V \subseteq W \times W$ - liczba możliwych przejść między stanami

A - zbiór możliwych wyborów graczy.

Def. Gra N-osobowa w postaci ekstensywnej

$$G = (W, V)$$

1) Surjekcja $f: V \to A$
2) Podział zbioru W na podzbiory
   a) Zbiór stanów losowych W_0
   b) $\{W_{nk}\}_{k \in K_n}$ - rodzina zbiorów informacyjnych gracza nr n, K_n - zbiór indeksów

   $W_n = \bigcup_{n \in K_n} W_{nk}$ - zbiór stanów gry, w których decyzja należy do gracza n

   c) zbiór stanów końcowych gry

Dla każdego ze stanów losowych $k \in W_0$ - rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze zdarzeń

$$A(x) = \{ f(x,y) \in A : y \in \Gamma(x) \}$$

h) funkcję wektorową $u : W^k \to R^N$

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots u_n(x))$$

$u_n(x)$ - wypłata (użyteczność) dla gracza nr n, gdy osiągnie stan końcowy $x \in W^k$

Mające właściwości:

1) $x', x'' \in W_{nk} \Rightarrow (|\Gamma(x')| = |\Gamma(x'')| \wedge f(U(x')) = f(U(x'')))$

gdzie: $U(x) = \{ \langle x,y \rangle \in U : y \in \Gamma(x) \}$

II) W każdej drodze łączącej korzeń drzewa $G = \langle W, U \rangle$ z wierzchołkiem końcowym (partii) występuje conajmniej jeden wierzchołek każdego zbioru informacyjnego.

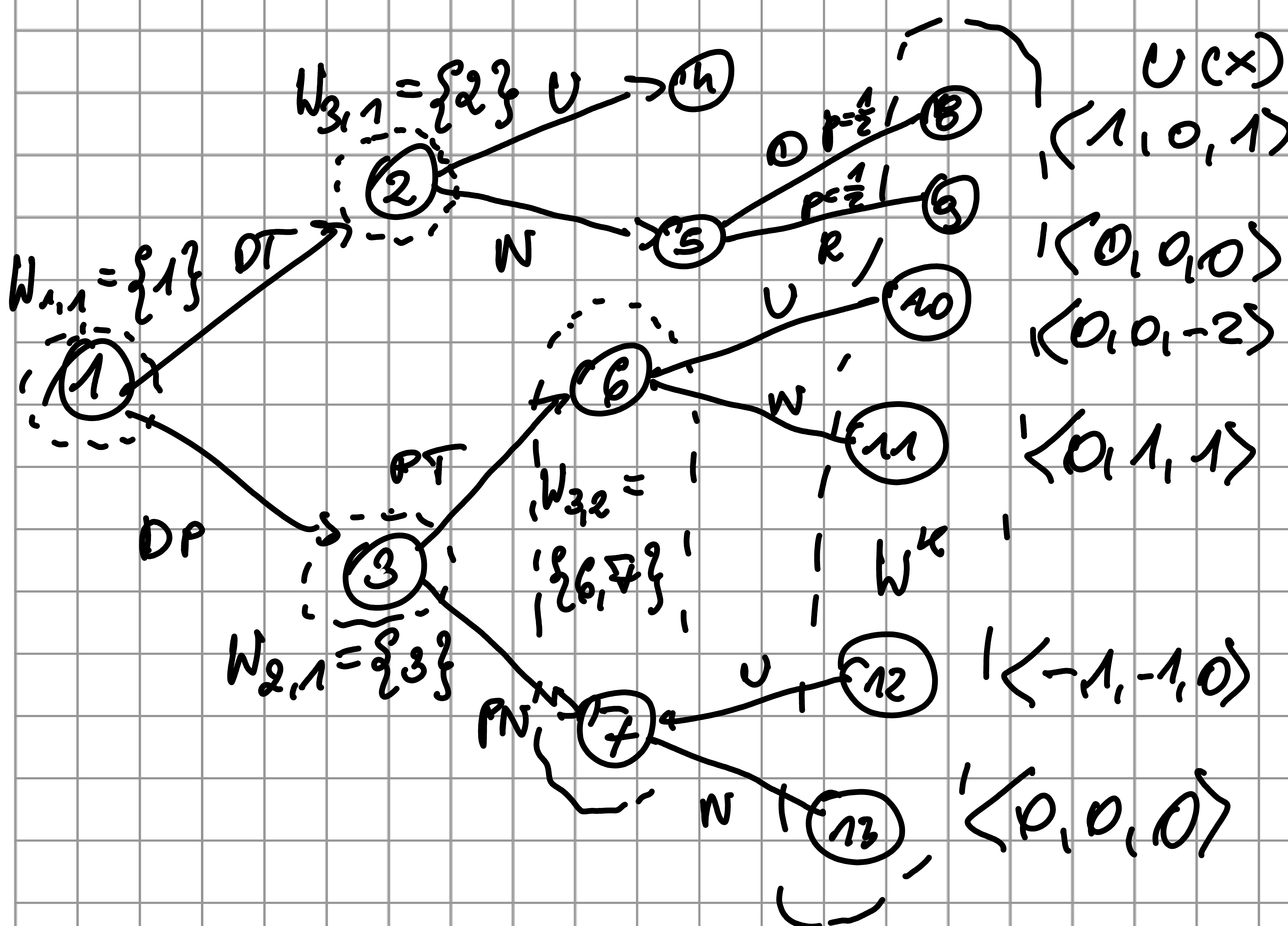
$N = 3$

$n = 1$ - dziekan

$n = 2$ - prodziekan

$n = 3$ - student

$A = \{DT, DP, PT, PN, U, N, O, R\}$



Def: Strategią gracza nr n nazywamy funkcję $s_n : K_n \to A$ o własciwości:

$$(s_n(u) = a) \Rightarrow \exists (x,y) \in U : (f(x,y) = a \wedge x \in U_{n_k})$$

co by zrobił, gdyby doszło do konieczności podjęcia decyzji, nie ważne jaki był stan poprzedni.

S_n - zbiór strategii czystych gracza nr n

Def. Profilem strategii czystych nazywamy element zbioru: $S = \prod_{n=1}^{N} S_n$, czyli wektor $s = \langle s_1, s_2 \dots, s_n \rangle$

$S_1 = \{\{\langle 1, OT \rangle\}, \{\langle 1, OP\}\}$

$S_2 = \{\{\langle 1, PT \rangle\}, \{1, PN\}\}$

$S_3 = \{\{\langle 1, U \rangle, \langle 2, U \rangle\}, \{\langle 1, U \rangle, \langle 2, N \rangle\}, \{\langle 1, N \rangle, \langle 2, N \rangle\}\}$

Strategie czyste $\dashv$

Krótsze zapisy

$\langle DT, PN, \langle U, W \rangle \rangle \to \langle DT, PN, UN \rangle$

1. Każdemu profilowi strategii czystych odpowiada dokładnie jedna partia
2. W przypadku W_0, przypisujemy wartość oczekiwaną

strat	gra	wynik
$\langle DP, PT, UU \rangle$	$\langle 1, 3, 6, 10 \rangle$	$\langle 0, 1, 1 \rangle$
$\langle DT, PT, NN \rangle$	$\langle 1, 2, 5, 8 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle \frac{1}{2}$
	$\langle 1, 2, 5, 9 \rangle$	$\langle 0, 0, -2 \rangle \frac{1}{2}$

$\left.\begin{matrix} \langle 0, 0, 0 \rangle \frac{1}{2} \\ \langle 0, 0, -2 \rangle \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \langle 0, 0, -1 \rangle$

Postać normalna gry

Def.: N-osobowa gra w postaci normalnej to

$\langle S_1, S_2, S_3 \dots, S_n, u \rangle$

gdzie $u : \prod_{n=1}^{N} S_n \to R^N$

Dylemat więźnia

$S_1, S_2 = \{P, N\}$

u:

1 \ 2	P	N
P	$\langle 1,1 \rangle$	$\langle 3,0 \rangle$
N	$\langle 0,3 \rangle$	$\langle 2,2 \rangle$

Zmodyfikowana walka płci

$S_1 = S_2 = \{O, K\}$

u:

1 \ 2	O	K
O	$\langle 2,1 \rangle$	$\langle 0,0 \rangle$
K	$\langle 0,0 \rangle$	$\langle 1,2 \rangle$

modyfikacja

$\langle 0,1 \rangle$??

Def.: Strategią mieszaną gracza nr n nazywamy rozkład prawdopodobieństwa na S_n, tzn. wektor

$$P_n = \left(p_n^1, p_n^2, \ldots, p_n^{l_n} \right)$$

gdzie $p_n \geq 0$ $(n = \overline{1,n})$

$$\sum_{l=1}^{l_n} p_n^l = 1$$

P_n - zbiór wszystkich strategii mieszanych gracza nr n

Def. Funkcja wypłat dla strategii mieszanych nazywamy funkcję

$$u : \prod_{n=1}^{N} P_n \to \mathbb{R}^n$$

o wartościach $u(p) = \langle u_1(p), u_2(p), \dots u_n(p) \rangle$

gdzie $p = \langle p_1, p_2 \dots p_n \rangle$ - profil strategii mieszanych

$$u_n(p) = \sum_{s \in C} u(s) \cdot \prod_{n=1}^{N} p_n^{l_n}$$

$$s = \langle s_1^{l_1}, s_2^{l_2}, \dots, s_n^{l_n} \rangle$$

Przykład:

Dylemat więźnia

$S_1, S_2 = \{P, N\}$

u:

		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	1 \ 2	P	N
$\frac{1}{4}$	P	$\langle 1,1 \rangle$	$\langle 3,0 \rangle$
$\frac{3}{4}$	N	$\langle 0,3 \rangle$	$\langle 2,2 \rangle$

$u(p_1, p_2) = (2, 1)$

Uwaga: Strategia czysta s_n^i może być traktowana jako strategia mieszana.

$\langle p_1, \ldots p_N \rangle$

Niech: $P = \langle p_1, p_2, \ldots, p_N \rangle$

Oznaczenia: $\overline{P_n} = \langle p_1 \ldots p_{n-1}, p_{n+1}, \ldots p_n \rangle$

Def. Strategię czystą nazywamy zdominowaną jeśli strategia mieszana ma niegorsze od niej osiągi.

$S_1, S_2 = \{P, N\}$

u:

1 \ 2	P	N
P	$\langle 1,1 \rangle$	$\langle 3,0 \rangle$
N	$\langle 0,3 \rangle$	$\langle 2,2 \rangle$

$1 > 0,\ 3 > 2$

Strategie czyste są zdominowane przez P.

Iterowana eliminacja strategii czystych

Wykreśla się strategie zdominowaną konstruując „mniejszą grę", tak długo jak to jest możliwe. Pozostają tzw. racjonalizowane.

0,4	~~3,3~~	0,5
1,2	~~0,1~~	3,1

~~0,4~~	~~0,5~~
1,2	3,1

1,2	~~3,1~~

$\boxed{1,2}$

$\mathcal{S} = \$$

Def. Strategię $s_n \in \$$ nazywamy najlepszą odpowiedzią gracza nr. n na profil strategii $\overline{p_n}$ pozostałych graczy, jeśli

$$\forall s_n' \in \$_n : u_n(s_n, \overline{p_n}) \geq u_n(s_n', \overline{p_n})$$

Def.: Profil strategii czystych $s \in \$$ nazywamy punktem równowagi w sensie Nasha, jeśli: $\forall n = \overline{1,N} : s_n \in NO_n(\overline{s_n})$

Jeśli ponadto:

$$\forall n = \overline{1,n} : NO_n(\overline{s_n}) \Big| = 1$$

$s \in \$$ nazywamy równowagą Nasha

Dylemat więźnia

$S_1, S_2 = \{P, N\}$

u_i:

1 \ 2	P	N
P	$\langle 1,1 \rangle$	$\langle 3,0 \rangle$
N	$\langle 0,3 \rangle$	$\langle 2,2 \rangle$

$NO_1(P) = \{P\} = NO_1(N)$

$NO_2(P) = \{P\} = NO_2(N)$

$\{P, P\}$ - punkt równowagi w sensie nasha

Walka płci

u_i:

1 \ 2	O	K
O	$\langle 2,1 \rangle$	$\langle 0\ 1 \rangle$
K	$\langle 0,0 \rangle$	$\langle 1,2 \rangle$

$NO_1(O) = \{O\}$ $NO_1(K) = \{K\}$

$NO_2(K) = \{O, K\}$

$NO(K) = \{K\}$

punkt równowagi w sensie Nasha (O, O) (K, K)

ścisła równowaga (K, K)

Def.: Profil strategii mieszanych $p \in P$ nazywamy równowagą Nasha w strategiach mieszanych, jeśli

$$\forall n = \overline{1,N}\ \forall s_n \in S_n : u_n(p_n, \bar{p}_n) \geq u_n(s_n, \bar{p}_n)$$

Def.: Grę $G^y = \langle \Psi^y, \psi^y \rangle$ nazywamy podgrą gry $G = \langle \Psi, \psi \rangle$ o korzeniu $y \in \Psi$, jeśli

1) jest drzewem o korzeniu $y \in \Psi$ zawierającym wszystkie wierzchołki osiągalne z y

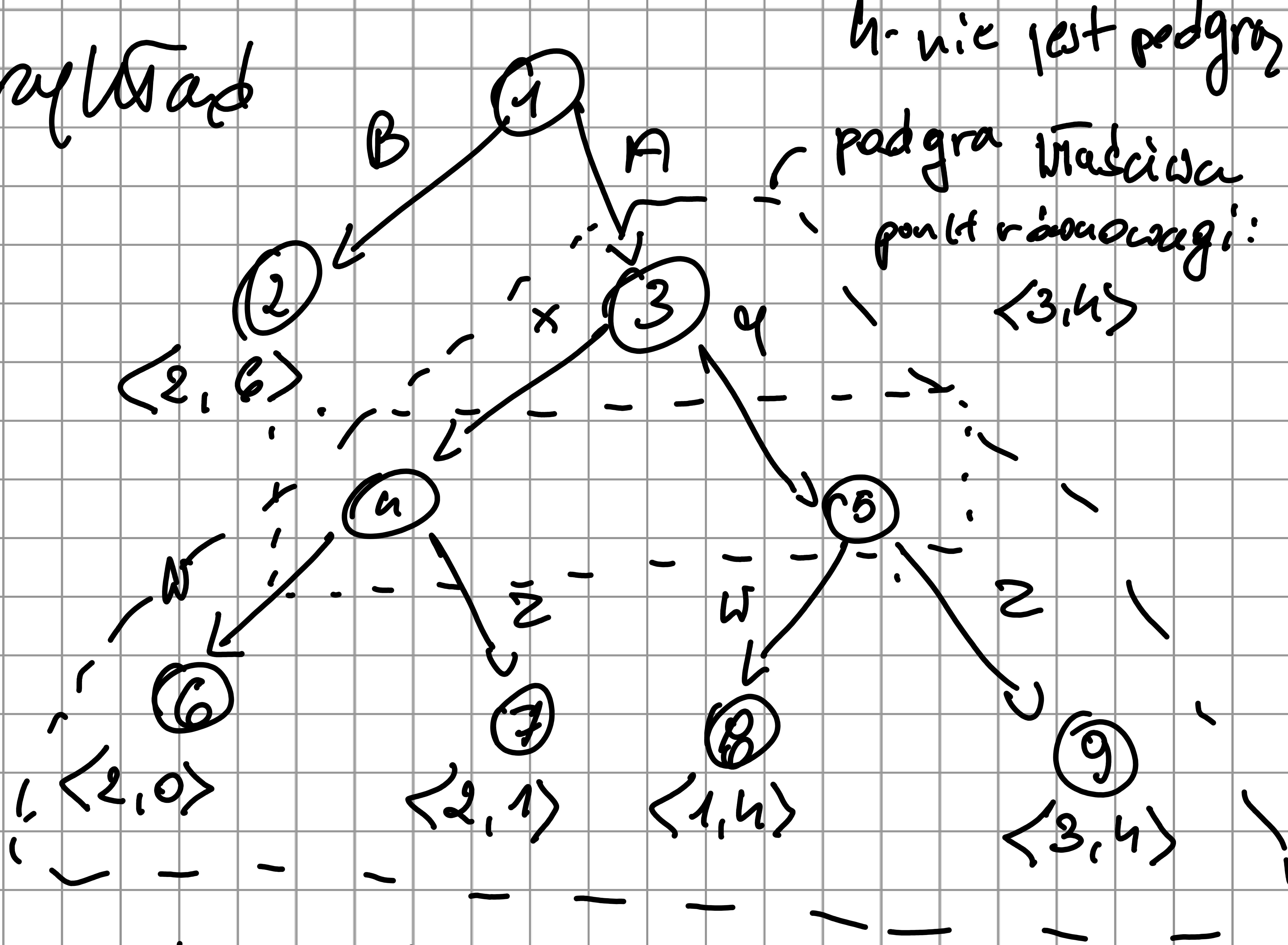
2) $\forall x \in \Psi^y\ \forall n = \overline{1,N}\ \forall k \in K_n$:

$$(x \in \Psi_{nk} \Rightarrow \Psi_{nk} \subseteq \Psi^y)$$

G^y jest podgrą właściwą jeśli $G^y \neq G$ oraz $|\Psi^y| > 1$

Def.: Profil strategii $p \in P$ nazywa się doskonałą równowagą Nasha w grze G, jeśli wyznacza on równowagę Nasha w każdej podgrze tej gry.

Przykład



2 \ 1	AX	AY	BX	BY
W	$\langle 2,0\rangle$	$\langle 1,4\rangle$	$\langle 2,6\rangle$	$\langle 2,6\rangle$
Z	$\langle 2,1\rangle$	$\langle 3,4\rangle$	$\langle 2,6\rangle$	$\langle 2,6\rangle$

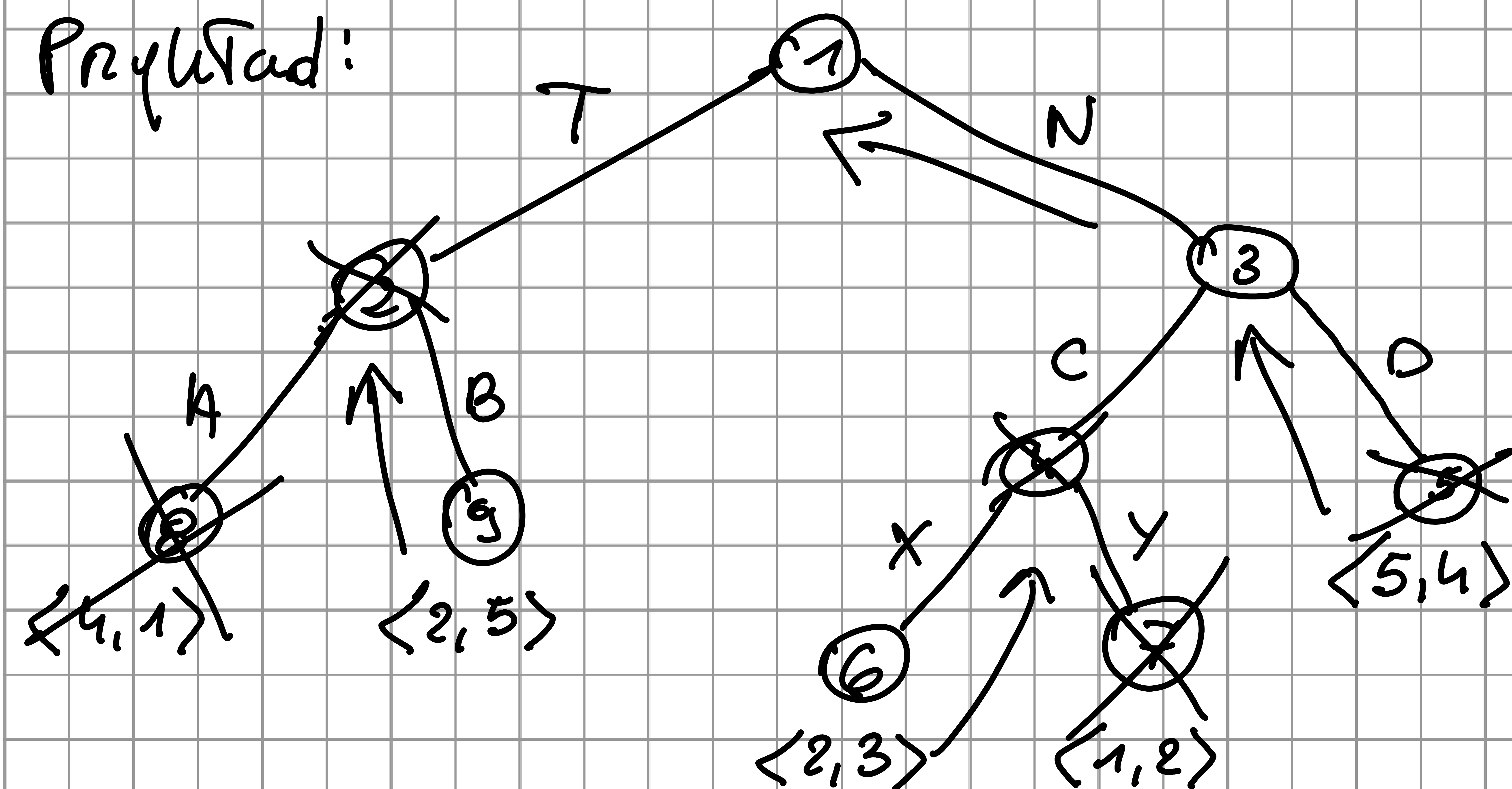
Punkty równowagi:

AYZ, WBX, WBY

równowaga doskonała: $\langle 3,4\rangle$

Indukcja wsteczna - kolejne wykreślanie "od końca" wierzchołków, których osiągnięcie nie jest racjonalne. Usuwane są kolejno strategie tzw. warunkowo zdominowane, gdyż warunkiem jest dojście do wierzchołka gry.

Przykład:



otrzymaliśmy: ⟨5, 4⟩

⟨NX, AD⟩, ⟨NX, BD⟩, ...

Def.: Każdy niepusty podzbiór numerów graczy $\Psi = \{1, 2, \ldots, N\}$ nazywamy koalicją.

Def.: Funkcje $\omega : 2^{\Psi} \to R$ przyporządkującą każdemu $S \subseteq \Psi$ wartość maksymalną w grze dwuosobowej rozgrywanej pomiędzy S a $\Psi \setminus S$ nazywamy <u>funkcją charakterystyczną</u> gry, gdy spełnia:

$$\omega(\emptyset) = 0$$

$$S, T \subseteq \Psi \wedge S \cap T = \emptyset \Rightarrow \omega(S \cup T) \geq \omega(S) + \omega(T) \ ?$$

Przykład: Trzech graczy stoi przed problemem utworzenia koalicji. Jeśli dwóch z nich utworzy koalicję, to trzeci gracz wypłaca po 1. Jeżeli żadna dwuosobowa koalicja nie powstaje, to wypłata nie następuje.

$$w(S) = \begin{cases} 2 & \text{gdy } |S| = 1 \\ 2 & \text{gdy } |S| = 2 \\ 0 & \text{gdy } |S| = 3 \lor |S| = 0 \end{cases}$$

$\langle -2, 1, 1 \rangle$, $\langle 1, -2, 1 \rangle$, $\langle 1, 1, -2 \rangle$, $\langle 0, 0, 0 \rangle$

Uwaga: Wektor $u(x) = \langle u_1(x), u_2(x), \dots u_n(x) \rangle$
mozna interpretować jako sytuację,
w której występuje jeden decydent
ale skutki decyzji $x \in \mathbb{R}^k = \Omega$
oceniane ...

Modele Probabilistyczne

Podejmowanie decyzji
w warunkach ryzyka

K - zmienna losowa

Zastępowanie zmiennej K kryterium liczbowym

1. Wartość oczekiwana (najczęściej)

$\mathbb{E}[K]$ - wartość oczekiwana zmiennej losowej K.

$$E_a(K^{-1}) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \mathbb{E}[K^*] = \max \mathbb{E}[K] \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

2. Kwantyl zmiennej losowej.

Def.: Kwantylem rzędu p $(0 \leq p \leq 1)$ zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$w_p(X) = \max\{w \in R : Pr\{X \leq w\} \leq p\}$$

$$E_a(K^*) = \begin{cases} 1 & \text{dla } w_p(K^*) = \max_{K \in (a)} w_p(K) \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

p - nowa dana

3. Wariancja zmiennej losowej.

$var(K)$ - wariancja (rozrzut, dyspersja) zmiennej losowej K.

$$E_a(K^*) = \begin{cases} 1 & \text{dla } var(K^*) = \min_{K \in K(a)} var(K) \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Bardziej „przewidywalny" skutek jest lepszy od najkorzystniejszego, ale mniej „przewidywalnego"

4. Prawdopodobieństwo zdarzenia

a) korzystnego

$\mathbb{A}$ – zdarzenie korzystne

$$E_a(k^*) = \begin{cases} 1 & \text{dla } Pr(k^* \in \mathbb{A}) = \max\limits_{k \in K(a)} Pr\{k \in A\} \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

b) niekorzystnego

$$E_a(k^*) = \begin{cases} 1 & \text{dla } Pr\{k^* \in \mathbb{B}\} = \min\limits_{k \in K(a)} Pr\{k \in B\} \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Uwaga: Nie musi zachodzić $\mathbb{B} = \overline{\mathbb{A}}$,

ale $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$

5. Zasada nieuwzględniania małych prawdopodobieństw w decyzjach jednokrotnych

k - dyskretna losowa

Niech $p_m = P_r\{K = k_m\}$

p^0 - próg uwzględniania zdarzeń

pomija się te zdarzenia k_m $(m = \overline{1,M})$

dla których $p_m < p^0$

Oblicza się "odpowiednik" wartości oczekiwanej.

$$R(k) = \sum_{m: p_m \geq p^0} k_m \cdot p_m$$

$$E_a(k^*) = \begin{cases} 1 & \text{dla } R(k^*) = \max\limits_{k \in K(a)} R(k) \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

p_m	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$
k_1	12	4	5
k_2	1	5	6

$E[k_1] = \frac{53}{10}$ $\quad E[k_2] = \frac{51}{10}$

$k^* = k_1$

olla $p_0 = \frac{2}{10}$

p_m	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$
k_1	4	5
k_2	5	6

$R(k^1) = \frac{41}{10}$ $\quad R(k^2) = \left(\frac{50}{10}\right)$

$k^* = k^2$

Zastępowanie zmiennej losowej K wektorem liczbowym.

$E[K]$, $\operatorname{var} K$, $\Pr\{K \in A\}$, $\Pr\{K \in B\}$

a następnie stosuje się metody wielokryterialne. Jedną z metod jest dominacja pareto dla dwóch kryteriów.

Dominacja efektywności kryterium.

K - dyskretna zmienna losowa o wartościach $k_1, k_2, k_3, \ldots$. Niech $P_m = P_r\{K \geq k_m\}$

Def.: Efektywnością kryterium nazywa się parę $\{k_m, P_m\}$.

	p_1	p_2	p_3	p_4
	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{14}{20}$
k_1	2	1	3	4
k_2	3	1	4	3
k_3	2	3	2	4

k_1 :

k_2 : $\langle 3, \frac{19}{20} \rangle$

k_3 : $\langle 2, 1 \rangle$ $\langle 4, \frac{14}{20} \rangle$

Drzewo decyzyjne

$D = \langle W, \psi \rangle = \langle W, \Gamma \rangle$, drzewo w którym $W = \Phi \cup M$ $(\Phi \cap M = \emptyset)$

Φ - zbiór wierzchołków (stanów) decyzyjnych
M - zbiór wierzchołków (stanów) losowych

gdzie $\Gamma(d) \subseteq M \wedge \Gamma(m) \subseteq \Phi \wedge \Gamma(m) \neq \emptyset$

dla $d \in \Phi \wedge m \in M$

Koniec drzewa jest wierzchołkiem decyzyjnym oznaczającym koniec procesu podejmowania decyzji.

Określane są:

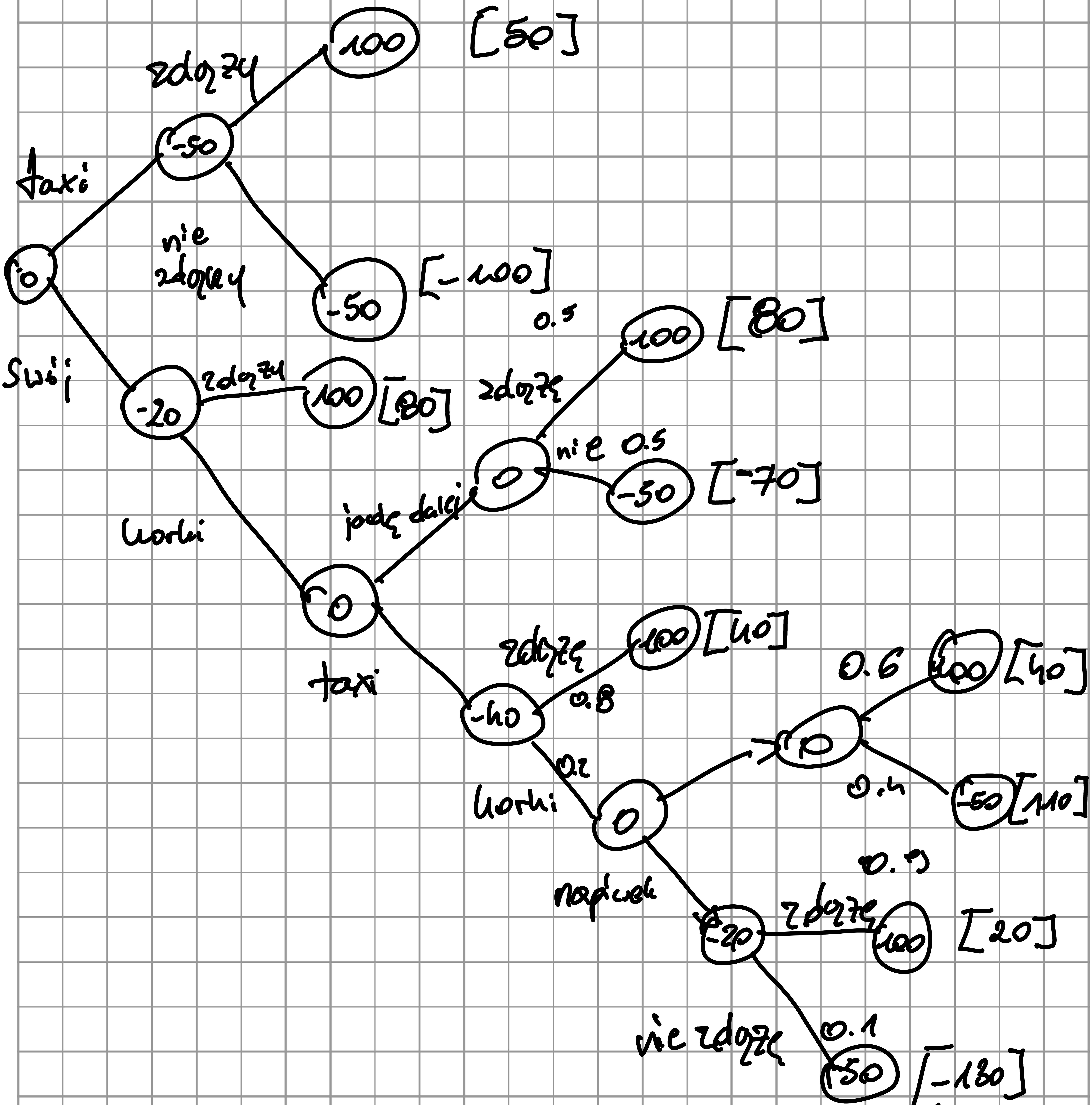
- zbiór A możliwych decyzji
- przyporządkowanie przejść do możliwych przejść decyzyjnych.

$$f : (\Phi \times M) \cap U \to A$$

- rozkłady prawdopodobieństwa na zbiorach zdarzeń, które mogą mieć miejsce w stanie $m \in M$: $Z_m = \{\langle m, d\rangle\}_{d \in r(m)}$
- funkcja wypłat częściowych $k : W \to R$

Uwaga: Wypłaty są definiowane rekurencyjnie począwszy od liści drzewa decyzyjnego.

Przykład:


taxi
swój
zdąży
nie zdąży
0
-50
100
[50]
-50
[-100]
-20
100
[80]
korki
0
jadę dalej
zdążę
0.5
0
100
[80]
nie 0.5
-50
[-70]
taxi
-40
zdążę
0.8
100
[40]
0.2
korki
0
0.6
100
[40]
0.4
-50
[110]
napiwek
-20
zdążę
0.9
100
[20]
nie zdążę
0.1
-50
[-130]

E - zbiór zdarzeń. Jeśli $A, B, C \in E$ oraz $p = [0,1]$, to zachodzi $\{p \cdot A + (1-p) \cdot B\} \in E$.

To zdarzenie nazywa się <u>loterią</u>.

W E zdefiniowana została relacja binarna

$A > B$, oznaczająca że decydent

wodzi A od zdarzenia B $\neg(A > B) \wedge \neg(B > A) = A \sim B$

Twierdzenie o funkcji użyteczności

Dla zbioru E z relacją $>$ istnieje funkcja $u: E \to R$, taka że:

1) $u(A) = u(B) \iff A - B$

2) $u(\{p \cdot A + (1-p) \cdot B\}) = p \cdot u(A) + (1-p) \cdot u(B)$

3) jest jedyna taka funkcja z dokładnością do przekształcenia liniowego.

$$E_A(A^*) = \begin{cases} 1 & \text{dla } u(A^*) = \max u(A) \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Przykład

zysk

A : 2 $\qquad C > B > A$

B : 1 $\qquad u(A) = 0$

C : 2 $\qquad u(C) = 1$

ile wynosi $u(B)$?

$$B \sim \{p \cdot A + (1-p) \cdot C\}$$

Przyjmijmy, że $p = 0.2$ („lepszy wróbel w garści")

zauważ $E[B] = 1$ oraz $E[\{p \cdot A + (1-p) \cdot C\}] = 1.2$

Stąd: $u(B) = 0.2 \cdot u(A) + 0.8 \cdot u(C) = 0.8$

A co lepsze?

$X = \{0.1 \cdot A + 0.9 \cdot B\}$ czy $Y = \{0.2 \cdot A + 0.8 \cdot \{0.6 \cdot B + 0.4 \cdot C\}\}$

$u(X) = 0.1 \cdot u(A) + 0.9\, u(B) = 0.9 \cdot 0.8 = 0.72$

$u(Y) = 0.2 \cdot u(A) + 0.8 \cdot 0.6\, u(B) + 0.8 \cdot 0.4 \cdot u(C)$

$= 0.704$

Modele

Rozwyte

Def.: Zbiór rozmyty A w przestrzeni X jest to funkcja

$$\mu : X \to [0,1]$$

czyli: $A = \{\langle x, \mu(x)\rangle : x \in X\}$

Funkcja μ funkcją przynależności do zbioru rozmytego A.

Funkcję przynależności oznaczamy μ_A

Dla $X = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ przyjęto oznaczać:

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}$$

a ogólnie $A = \int \frac{\mu_A(x)}{x}$

Przy powyższych zapisach pomija się to że $x \in X$ dla których

$$\mu_A(x) = 0$$

Znane są:

- zbiory nierozmyte (przestrzenie):

$\mathbb{A}$ - poprawnych wartości danych

$\Omega(\mathbb{A})$ - dopuszczalnych decyzji przy danych $a \in \mathbb{A}$

$K(a)$ - możliwych wartości kryterium przy danych $a \in \mathbb{A}$ - mechanizm realizacji decyzji nierozmytej

$d_a : \Omega(a) \to K(a)$

- $C_a \in F(\Omega(a))$ zbiór rozmyty dopuszczalnych decyzji.

$g_n \in F(K(a))$ - cel rozmyty

Def.: $h_n \in F(\Omega(a))$ <u>decyzja rozmyta</u>

$$h_a(x) = \min\left(c_a(x), g_a(d_a(x))\right)$$
$$x \in \Omega(a)$$

Nierozmyta decyzja optymalna jest to decyzja $x^* = \Omega(a)$ dla której:

$$h_n(x^*) = \min\{c_n(x^*), g_a(d_n(x^*))\} =$$

$$= \max_{x = \Omega(a)} \min\{c_a(x), g_a(d_a(x))\}$$

Dążymy do tego, aby decyzja optymalna
- była jak najbardziej dopuszczalna
- jak najbardziej zapewniała osiągnięcie celu

Zbiory rozmyte c_a i g_a konstruowane są z użyciem algebry zbiorów rozmytych lub logiki rozmytej

Niech $A, B \in F(X)$

Dopełnienie $\bar{A}$ zbioru A: $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

Suma $A \cup B$: $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

Suma algebraiczna: $A + B$

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$$

Przecięcie: $A \cap B$: $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

Iloczyn algebraiczny: $\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$

Iloczyn skalara: $a \in [0,1]$:

zbioru $A \sim a \cdot A$

$$\mu_{a \cdot A}(x) = a \cdot \mu_A(x)$$

Antonim A dla $X = [0, N]$: $\mu_{\neg A}(x) = \mu_A(N - x)$

Iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych
$A_i \in F(x)$ $(i = \overline{1,n})$
jest to zbiór rozmyty $B \in F(X_1, X_2, \dots X_n)$
oznaczony $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ dla
którego

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x_1, x_2 \dots x_n) = \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2) \dots\}$$

Relacja rozmyta R jest to zbiór rozmyty
określony na iloczynie kartezjańskim $X \times Y$
tzn. $\mu_R : X \times Y \rightarrow [0,1]$

Przykład: komputer o częstotliwości zegara x jest dużo szybszy od komputera o częstotliwości x

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 0 & x \in y \\ \frac{x-y}{10^9} & y < x \in y + 10^9 \\ 1 & \text{jeśli } x > y > 10^9 \end{cases}$$

Niech $A, B = F(x)$

Wysokość zbioru rozmytego A

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

Zbiór rozmyty A jest normalny, jeśli $h(A) = 1$

Nośnik zbioru rozmytego A:

$$\sup p(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$$

Zbiór rozmyty A jest pusty, jeśli

$\sup p(A) = \emptyset$

α: przekrój zbioru rozmytego A

$$A_\alpha = \{ x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha \}$$

Rdzeń zbioru rozmytego A:

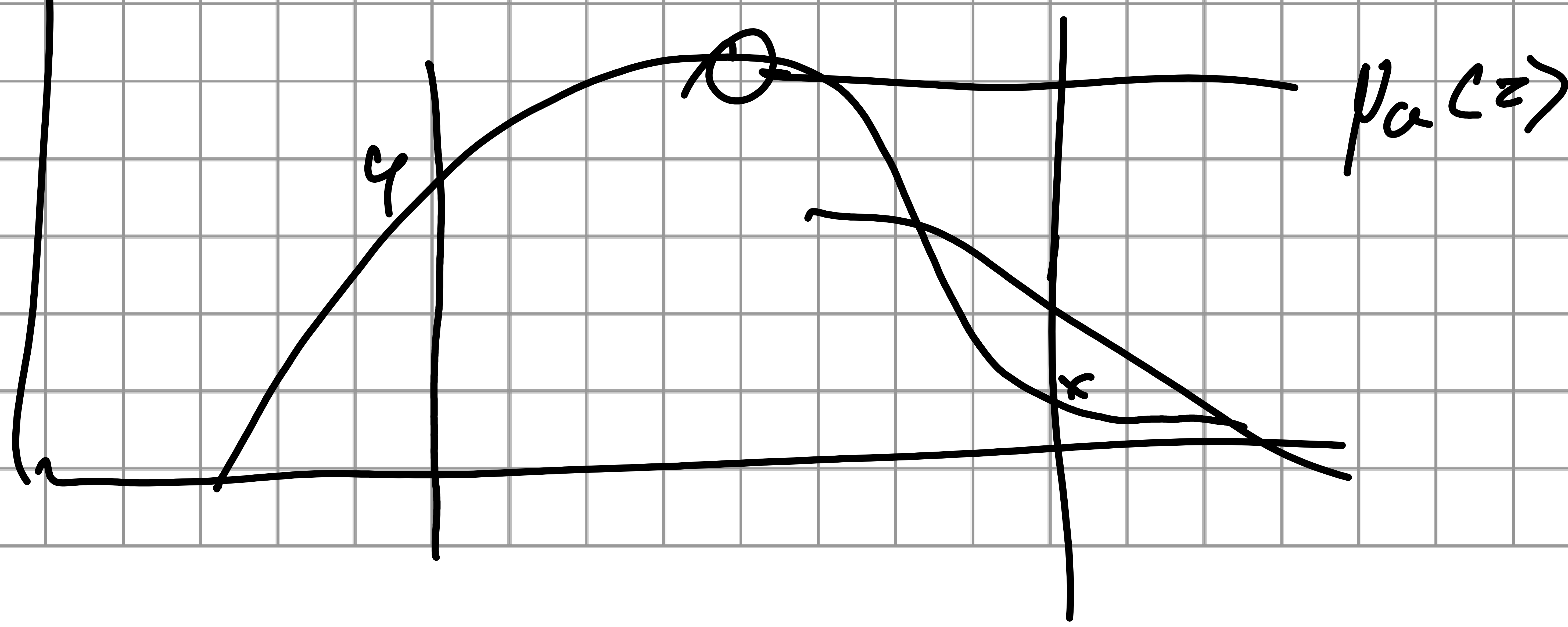
$$core(A) = \{ x \in X : \mu_A(x) = 1 \}$$

czyli $core(A) = A_1$

Zbiór rozmyty $A \in F(R^n)$ jest wypukły jeśli:

$$\forall x, y \in R^n \, \forall \lambda \in [0,1] : \mu_A(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$$

wypukły zbiór, nie f(x)



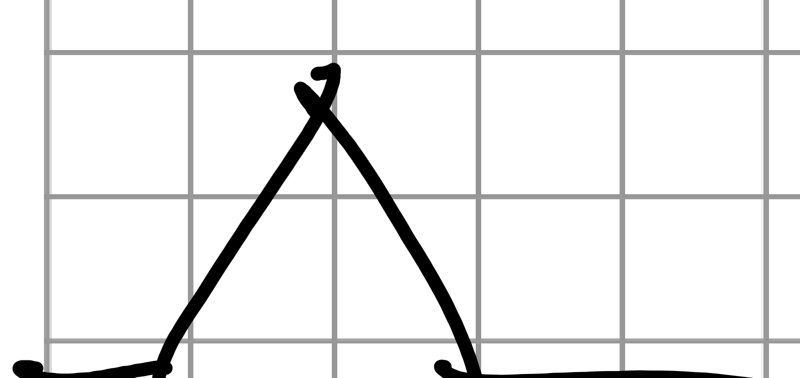
Liczby rozmyte

Niech $X \in R$

Liczba rozmyta jest to normalny, wypukły zbiór rozmyty, którego funkcja przynależności jest przedziałami ciągła oraz nośnik jest ograniczony. Liczba rozmyta A jest dodatnia jeśli:

$\mu_A(x) = 0$ dla $x < 0$, a jest ujemna jeśli $\mu_A(x) = 0$ dla $x > 0$

Najczęstsze liczby



trójkątna

trapezoidalna

Logika rozmyta

Wartości logiczne rozmytych funktorów zdaniotwórczych określa się nie dla wychodzącymi "prawda", "fałsz", ale "stopnia prawdy" będącego z przedziału $[0,1]$

Negacja $n : [0,1] \rightarrow [0,1]$

przy czym:

1. $n(0) = 1$
2. $n(1) = 0$
3. $x \leq y \Rightarrow n(x) \geq n(y)$

Najczęściej: $n(x) = 1 - x$

t - norma

$$t: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$

przy czym:

1. $t(x,1) = x$
2. $x \leq y \Rightarrow \forall z: t(x,y) \leq t(y,z)$
3. $t(x,y) = t(y,x)$
4. $t(x, t(y,z)) = t(t(x,y), z)$

Najczęściej

a) $\min\{x,y\}$

b) $x \cdot y$

c) $\max\{0, x+y-1\}$

t - konorma, s - norma

$S: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$

przy czym:

1' $S(x,0) = x$

takie jak tam

2, 3, 4

Najczęściej:

a) $\max\{x,y\}$

b) $x + y - x \cdot y$ suma probabilistyczna

c) $\min\{1, x+y\}$ t - konorma Łukasiewicza

Implikacja $i : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$

1) $i(0,y) = 1$

2) $i(x,1) = 1$

$i(1,0) = 0$

$x \leq y \Rightarrow \forall z : i(x,z) \geq i(y,z)$

$x \leq y \Rightarrow \forall z : i(z,x) \leq i(z,y)$

a) $\min\{1-x+y, 1\}$ Łukasiewicza

b) $\begin{cases} 1 & \text{dla } x=0 \\ \min\{1, \frac{y}{x}\} & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}$ Goguera

c) $\max\{1-x, \min\{x,y\}\}$

Równoważność $e: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$

1. $e(0,1) = 0$
2. $e(x,y) = e(y,x)$
3. $e(x,x) = 1$
4. $x \leq u \leq z$

a) $1 - [x - y]$ Łukasiewicza

Modelowanie rachunku niepewności

Np. Po ulokowaniu pewnej kwoty w banku po roku ta kwota zmieni się o jakąś liczbę z przedziału

[-10 000 , 30000]

1. Kryterium Pesymisty

$$E_n(K^*) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } 1 = \min K^* = \max \min K \\ 0 & \text{w. p.p.} \end{cases}$$

	będzie	nie będzie	Pesymista
uczyć	10	-10	-10
nie uczyć	-5	0	-5

-5

Nie!

2. Kryterium optymisty (maksymaksowe)

$$E_n(K^*) \begin{cases} 1 & \text{gdy } \max K^* = \text{maxmax} \\ 0 & \end{cases}$$

10

0

10

Tak!

3. Kryterium Hurwicza

$\alpha = [0,1]$ – współczynnik optymizmu

$$E_a(K^*) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \alpha \cdot \max K^* + (1-\alpha) \cdot \min K^* - \\ & - \max\limits_{k \in K(a)} (\alpha \cdot \max K + (1-\alpha) \min K) \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Hurwicza dla $\frac{1}{2}$

10	−10	0
−5	0	−2,5

0

Tak!

11. Zmiana niepewności losowością

Kryterium Laplace'a

Jeśli nie ma podstaw, by sądzić inaczej, to każda wartość ze zbiorów uważa się za wartość zmiennej losowej o rozkładzie równomiernym i dla takiej zmiennej losowej stosuje się metody modelowania probabilistycznego.

III. Zamiana korzyści stratami

Kryterium żalu

Każdy element $k \in K(a, x)$ zależy od:

- wartości danych $a \in A$
- podjętej decyzji $x \in \Omega(a)$
- oddziaływania zewnętrznego $b \in B(a, x)$ na realizację decyzji $x \in \Omega(a)$ skutkującego wartością kryterium $k(a, b, x) \in X(a, x)$

Gdyby decydent przed podjęciem decyzji znał b, to podjąłby decyzję x^* taką:

$$k(a, b, x^*) = \max k(a, b, x)$$

tabela żalu

				reszy
10	-10	0	10	10
-5	0	15	0	15

mniejszy żal

uczyć się

Modele ze zbiorami przybliżonymi

Rough Sets

górna, dolna aproksymacja