MD II

ćwiczenia

Ocena
- aktywności 1/3
- kolokwia 1/3
- praca domowa 1/3

kod teams:
7hy6gv1

walka
rodzinski,
książka

trzeba zaliczyć aktywność
i kolokwia.

Kolokwia - 30-40 min
zadania otwarte
zadania "typowe"

2.75 zdaje

2 kolokwia - 4 i 7 zajęciach

PD: oddawane na następnych
zajęciach. Ocenia styl.

Można chodzić do innych grup.

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

2. $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$

3. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

4. $|X| > r \cdot |Y|$ - zasada szufladkowa Dirtlecha

wtedy $\exists y \in Y : |\{x \in X : f(x) = y\}| > r$

Istnieje szufladka, która ma więcej przedmiotów niż szufladek.

Uogulnione prawa zliczenia

1. Zasada włączeń i wyłączeń

$$\left|\bigcup_{t\in T} A_t\right| = \sum_{D=B} (-1)^{|D|+1} \cdot \left|\bigcap_{i\in D} A_t\right|$$

2. Uogólnione prawo mnożenia

$$\left|\mathop{P}_{t=1}^{n} A_t\right| = \prod_{t=1}^{n} |A_t|$$

3. Uogólniona zasada szufladkowa

$$\frac{\sum_{t=1}^{n} |A_t|}{n} \geq \frac{r \cdot |x|}{n} \quad \text{czyli} \quad \sum_{t=1}^{n} |A_t| = r \cdot |X|$$

Przykład włączeń i wyłączeń

$$|A \cup B \cup D| =$$

$$|A| + |B| + |D| - |A \cap B| - |B \cap D| - |A \cap D| +$$

$$+ |A \cap B \cap D|$$

Zadanie 1:

Uajak - ile 5 literowych kombinacji można ułożyć używając polskiego alfabetu (24 litery), które są symetryczne

$\boxed{24^3 \cdot 1 \cdot 1}$ $\boxed{24^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$

Ile jest ciągów cyfr po obróceniu to samo

9 6 1 5 8 0

$4 \cdot 3 \cdot 5^{(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2)}$

9 6 0 9 6

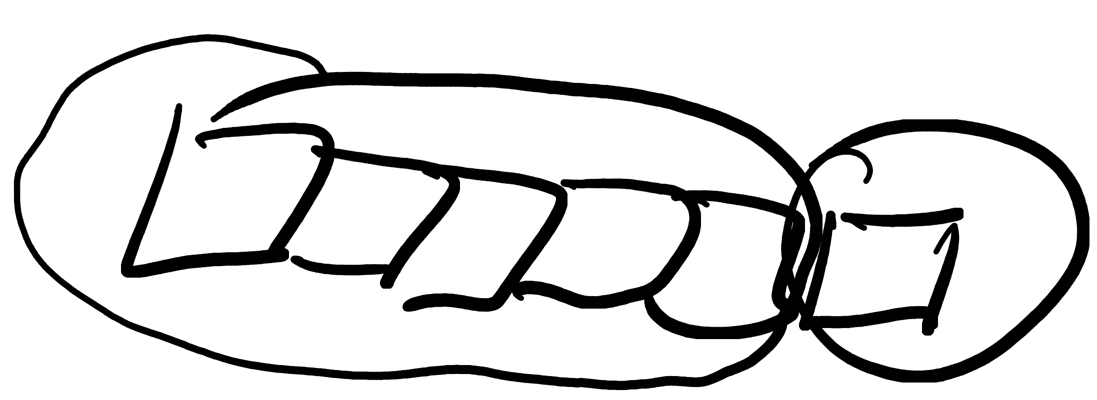
$4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$

Na ile sposobów z talii można wybrać 6 kart, tak aby ost nia nie pojawiła się wcześniej.

- Ze zwracaniem
- Kolejność ma znaczenie $51^5 \cdot 52$

Ile jest liczb 6 cyfrowych takich, że suma cyfr jest parzysta

suma pierwszych 5 cyfr nieparzystych



$NP5 \cdot |\{1,3,5,7,9\}| +$

$P \cdot |\{0,2,4,6,8\}| = 5(NP5 + P5) =$

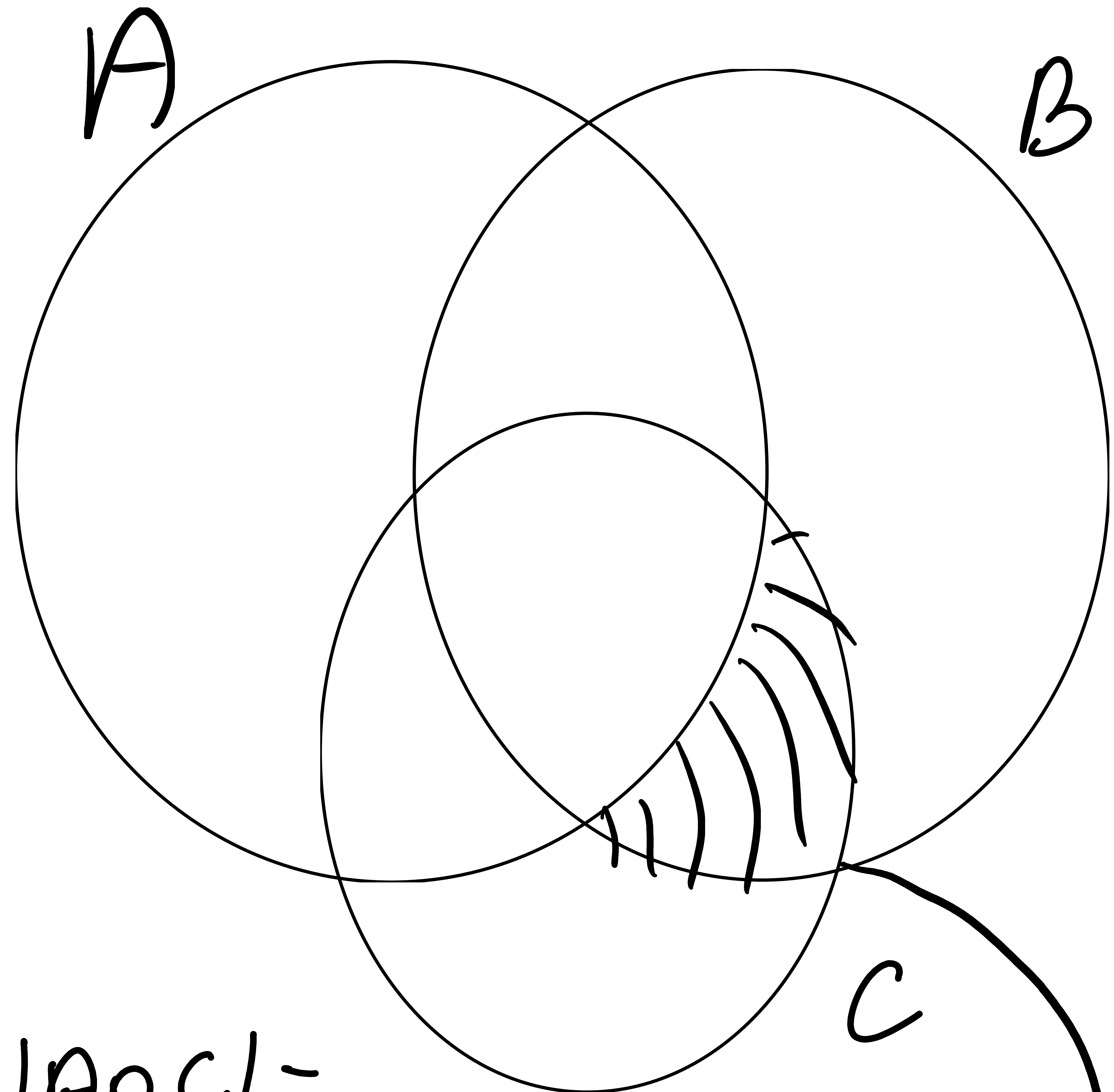
$= 5 \cdot 9 \cdot 10^4$

26.4

$|A| = 12$

$|B| = 15$

$|C| = |A \cap B|$



$|A \cup B \cup C| =$

$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| -$

$- |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$|B \cap C| - |A \cap B \cap C| = |A + B + C| - |A \cap B| - |A \cap C|$

$+ |A \cap B \cap C| = 12 + 15 - 8 - 16$

26. 9 W zbiorze $A \subseteq \mathbb{Z}$ o liczności $|A| = n+1$ zawsze występują liczby których różnica jest podzielna przez n.

- Zasada szufladkowa $|X| > r \cdot |Y|$

$(a_1 - a_2) | n$

n+1 liczb, z mają taką samą resztę z dzielenia przez n.

$\boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{\ldots}\ \boxed{n-1}$ $\quad f: A \to \{0, 1, \ldots, n-1\}$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$ - opcje bez powtórzeń

$$\binom{n+k-1}{k}$$ - opcje z powtórzeniami

Po wybraniu 6 kart, ile kombinacji ma wszystkie kolory.

$\binom{13}{3}\binom{4}{1}$ $\binom{13}{1}^3$

3, 1, 1, 1   I $\binom{13}{3}\binom{4}{1}\binom{13}{1}^3 = 88 \cdot 13^4$

2, 2, 1, 1 $\underline{\text{II}}$ $\binom{13}{2}^2\binom{4}{2}\binom{13}{1}^2 = 13^4 \cdot 216$

$\underline{\text{I}} + \underline{\text{II}} = 13^4 \cdot 304$

32. Mamy n par butów.
Na ile sposobów można je ustawić, aby buty z jednej pary nie stały obok siebie?

$$\neg(\forall \neg sos) \equiv \neg(\neg \exists sos) \equiv \exists sos$$

$$(2n!-1)! \cdot 2 \cdot \binom{n}{2}$$

$$2 \cdot (2n-2)! \cdot 2^2 \binom{n}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2n-k) \cdot 2^k \cdot \binom{n}{k} (-1)^{k+1}$$

$$(101)^4 = (100+1)^4$$

Liczby specjalne

Ile wynosi liczba podziałów zbioru n-elementowego na k podziałów.

Liczba Stirlinga II rodzaju –

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{dla } k=0 \vee k>n \\ \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\} & \text{dla } 0<k<n \end{cases}$$

$$\{a,b,c\} = \{a,b\} \cup \{c\} = \{a,c\},\{b\} = \{b, c = a\} = \{b,c\} \cup \{a\}$$

$$\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2} ; \left\{ {n \atop n} \right\} \ 1 , \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$$

$$\left\{ {5 \atop 3} \right\} = \left\{ {4 \atop 2} \right\} + 3 \cdot \left\{ {4 \atop 3} \right\} = \left\{ {3 \atop 1} \right\} + 2\left\{ {3 \atop 2} \right\} + 3\binom{4}{2} = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 25$$

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

Liczba Stirlinga I rodzaju – dzielimy na cykle

$$\left[{n \atop k} \right] = \begin{cases} 0 & \text{dla } k=0 \vee k>n \\ \left[{n-1 \atop k-1} \right] + (n-1) \left[{n-1 \atop k} \right] & \text{dla } 0<k<n \end{cases}$$

$1,2,3$ ilość możliwych cykli $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

ilość cykli po dodaniu 1 elementu w konkretnym miejscu:

$(a,b)(c)$

$(n-1)$

$$\left[{n \atop 1} \right] = (n-1)!$$

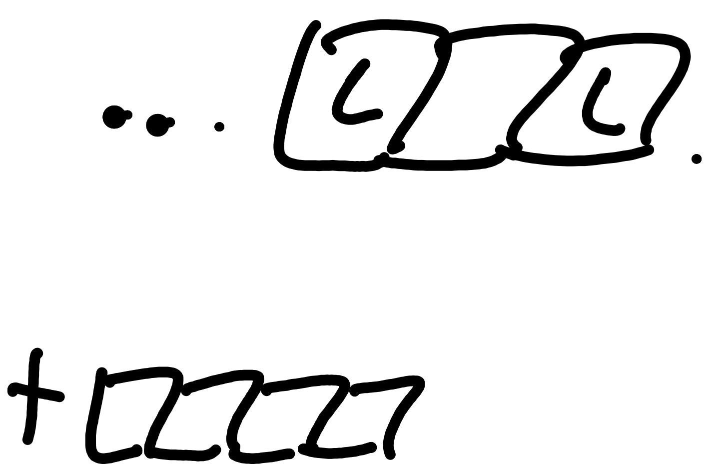
$$\left[{n \atop n} \right] = 1$$

Praca domowa: Zrobić zestawienie liczb specjalnych + Euler

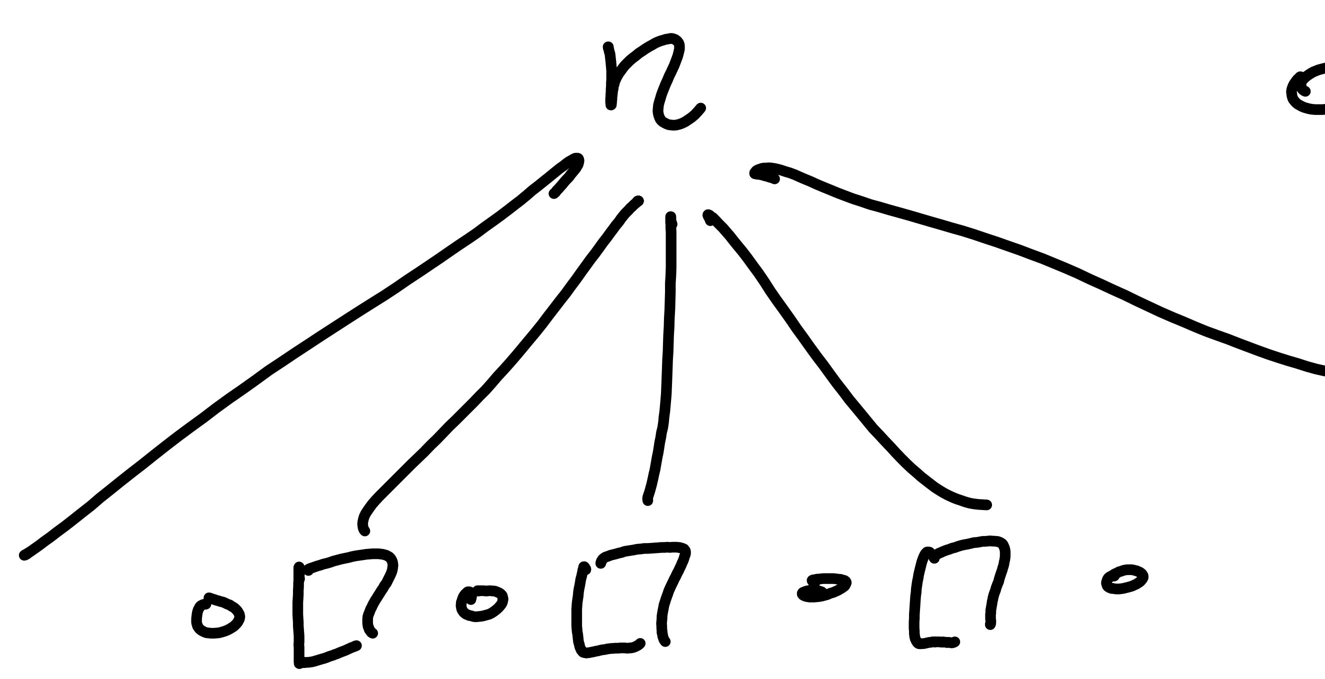
rekurencja, przykłady, interpretacja

Matematyka konkretna kurt, Orek

15. N-klatek, k-lwów.



$$\begin{cases} L(2k-1, k) = 1 \\ L(n,k) = 0 \text{ dla } n < 2k-1 \end{cases}$$



odp.: $\binom{n-(2k-1)}{k+1} =$

$= \binom{\cancel{k}+1+n-2-\cancel{k}+\cancel{1}-\cancel{1}}{n-2k+1}$

$3 = 2+1 = 1+2$

kolejność ma znaczenie

uporządkowany

$P(n,k) = P(n-1, k-1) + P(n-\underline{k}, k)$

$N(n,k) = N(n-1, k-1) + N(n-\underline{1}, k)$

bez znaczenia

Funkcje tworzące

$a = (1)_{i \in N}$

$A(z) = \sum_{i=1}^{\infty} 1 \cdot z^i = \frac{1}{1-z}$ – zwykła funkcja tworząca

Analiza w sposób formalny

wykładnicza funkcja tworząca $x=0$, $\frac{1}{n!}$ na start.

$A(z) + B(z)$

$(a) + (b)$

$A(z) \cdot B(z)$

$(a) \cdot (b)$ – splot ciągów

funkcja tworząca ciągu skończonego

("wielomian" nieskończonej wielkiej)

$$a_n = n^3 + 2n + 3$$

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^3 + 2n + 3) \cdot z^n = \sum_{n\geq 0} \left(n^3 \cdot z^n + 2n z^n + 3z^n \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n^3 \cdot z^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} n z^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\sum \left(n^3 \cdot z^n + 2(n+1) z^n + z^n \right)$$

$A(z) = z^4 \cdot A(z) + 2$

$\boxed{\text{da się szybciej}}$

$X \overset{\text{ozn.}}{=} A(z)$

$X = z^4 x + 2$

$X = \frac{2}{1-z^4} = \frac{2}{(1-z^2)(1+z^2)} = \frac{2}{((1-z)(1+z))(1+z^2)}$

$\frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z} + \frac{Cz}{1+z^2} + \frac{D}{1+z^2} \quad \{1+z^2 = 1-(-z^2)\}$

$A \cdot \sum z^n + B\sum(-z)^n + (Cz+D)\sum(-z^2)^n =$

$= \sum\left(A + B(-1)^n + (Cz+D)z^n\right)z^n =$

$= \sum\left(A + B(-1)^n\right)z^n + \quad | \; 1+z+z^2 =$

$(z+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{4}{3}(z+\frac{1}{2})^2\right) =$

$= \frac{3}{4}\left(1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}(z+\frac{1}{2})\right)^2\right)$

3j. 2p. 2+3 Banany

← nie można rozdzielać

na ile sposobów można wygaraśłowowace?
Owoce są nierozróżnialne. Bez powtórzeń.

$0, 1, 2, 3$ j $(1+x+x^2+x^4)\cdot$

$0, 1, 2$ p $(1+x+x^2)\cdot$

$0, 2, 3, 5$ B $(1+x^2+x^3+x^5)$

$j+p+B=4$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n=0 \\ 2\cdot b_{n-1} + n^2 - n & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$ 6/96

versona $[n=5]$ — gdy prawda, jest równe 1.

nie jest to 1 logiczne.

$$B(z) = 0z^0 + \sum_{n\geq 1} (2b_{n-1} + n^2 - n) z^n =$$

$$= \sum_{n\geq 1} (2b_{n-1} z^n + n(n+1) z^n) =$$

$$= 2\sum_{n\geq 1} b_{n-1} \cdot z^n + \sum n(n-1) z^n =$$

$$= \sum_{n\geq 0} n(n-1) z^n + 2\sum_{n\geq 1} b_{n-1} z^{(n-1)+1} =$$

$$= \frac{2z^2}{(1-z)^3} + 2z \sum_{n\geq 1} b_{n-1} z^{n-1}$$

$$B(z) = \frac{2z^2}{(1-z)^3} + 2z \sum_{n\geq 0} b_n z^n = B(z)$$

$\tilde{n} = n-1$

Elementy teorii liczb

$-255 : 120$

$-255 = -3 \cdot 120 + 105$

715	5
143	11
13	13
1	

$5 \cdot 11 \cdot 13 = 715$

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$

$240 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 11^0 \cdot 15^0$

$715 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 11^1 \cdot 15^1$

Podzielniki 240 $\quad 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$

$\alpha_1 = 0-4, \ \alpha_2 = 0-1, \ \alpha_3 = 0-1$

$5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$

$NWD(240, 715) = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 11^0 \cdot 13^0 = 5$

$NWW(240, 715) = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1 = \frac{240 \cdot 715}{5}$

$NWD(m, n) \cdot NWW(m, n) = m \cdot n$

Algorytm Euklidesa

$715 = 240 \cdot 2 + 235$

$240 = 1 \cdot 235 + \boxed{5}$ — NWD

$235 = 47 \cdot 5 + 0$

Równania Diofantyczne

Rozszerzony Algorytm Euklidesa

$NWD(m,n) = u \cdot m + v \cdot n$

$5 = 715u + 240v$

$5 = 240 - 235 = 240 - (715 - 2 \cdot 240) =$

$= \underset{u}{\boxed{-1}} \cdot 715 - \underset{v}{\boxed{3}} \cdot 240$ — tylko jedno z rozwiązań

$\begin{bmatrix} 715 \\ 240 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 240t \\ -715t \end{bmatrix}$ — znajdujemy wektory ortogonalne

$u = -1 + 240t$

$v = 3 - 715t$

$$10 = 715u + 240v$$

$$m \cdot u + n \cdot v = a = k \cdot b$$

$$NWD(m, n) = 1$$

$$11^2 \pmod{10} = (10+1)^2 = 1^2 = 1$$

$$11^4 \pmod{12} = (0 \cdot 12 + 11)^4$$

$$n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$n^{p-1} \equiv_p 1$$

muszą być względnie pierwsze.

$$15^{2023} \equiv_{17} 15^{16\cdot 126+7} = \left(15^{16}\right)^{126} \cdot 15^{7} \equiv_{17} 15^{7} =$$

$$= \left(15^{2}\right)^{3} \cdot 15 = 225^{3} \cdot 15 =$$

twierdzenie fermata

$n^{p-1} \equiv_p 1$

$$= \left(17\cdot 13+4\right)^{3} \cdot 15 \equiv_{17}$$

$$\equiv_{17} 4^{3} \cdot 15 = \left(3\cdot 17 + 13\right) \cdot 15 \equiv_{17} 13\cdot 15 = 195 =$$

$$= 17\cdot 11 + 8 \equiv_{17} = 8$$

$NWD(n, m) = 1$

$\varphi(m)$ $\quad n \equiv_m 1$

$\varphi(p) = p - 1$

$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha - 1}$

jeśli $NWD(m, n) = 1$, to $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$

$17^{2023} \equiv_{24}$

$\varphi(24) = \varphi(3 \cdot 2^3) = \varphi(3) \cdot \varphi(2^3) = 2 \cdot (2^3 - 2^2) = 8$

$\boxed{1}, \cancel{2, 3, 4,} \boxed{5}, 6, \boxed{7}, 8, 9, 10, \boxed{11}, 12, \boxed{13}, 14, 15, 16, \boxed{17}, 18,$
$\boxed{19}, 20, 21, 22, \boxed{23}, 24 \leftarrow$ zostało 8

$24 | 154$, $10 | 152$

9 / 147 Chińskie twierdzenie o resztach

$$\begin{cases} x \equiv_7 4 \\ x \equiv_{10} 5 \\ x \equiv_{31} 26 \ (-5) \end{cases}$$

$m_1 = 7,\ a_1 = 4,\ N_1 = 310$

$N_1 \cdot x_1 \equiv_{m_1} 1$

$310 x_1 \equiv_7 1$

$310 x_1 + 7 y_1 = 1$

N_1 i m_1 muszą być względnie pierwsze

Iloczyn liczb względnie pierwszych, jest względnie pierwszy.