NSK

$$\lambda = 10^{-8}$$

$$F(0) = 1 - e^{-\lambda \cdot 0} = 0 ; \; F(\infty) = 1 - e^{-\lambda \cdot \infty} = 1$$

$$\frac{dF(t)}{dt} = e^{-\lambda t} \cdot (-\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Rozkład wykładniczy

Charakterystyki funkcyjne

1. Dystrybuanta $F(t)$ zmiennej losowej T – prawdopodobieństwo, że czas od chwili od uszkodzenia obiektu jest mniejszy od chwili t.

1) $F(t) = P\{T < t\}$

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad t \geq 0$

$F(0) = 1 - e^{0} = 0$

$F(\infty) = 1 - e^{-\infty} = 1$

2) Funkcja niezawodności $R(t)$ ...

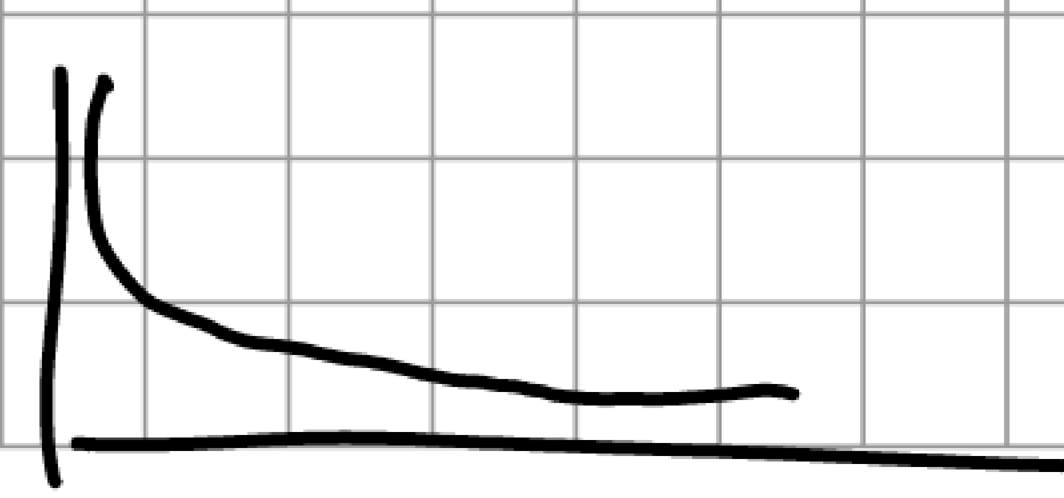
$R(t) = P\{T \geq t\}$

$R(t) + F(t) = 1$

$R(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$

$R(0) = e^{-\lambda 0} = 1$

$R(\infty) = e^{-\lambda(\infty)} = 0$

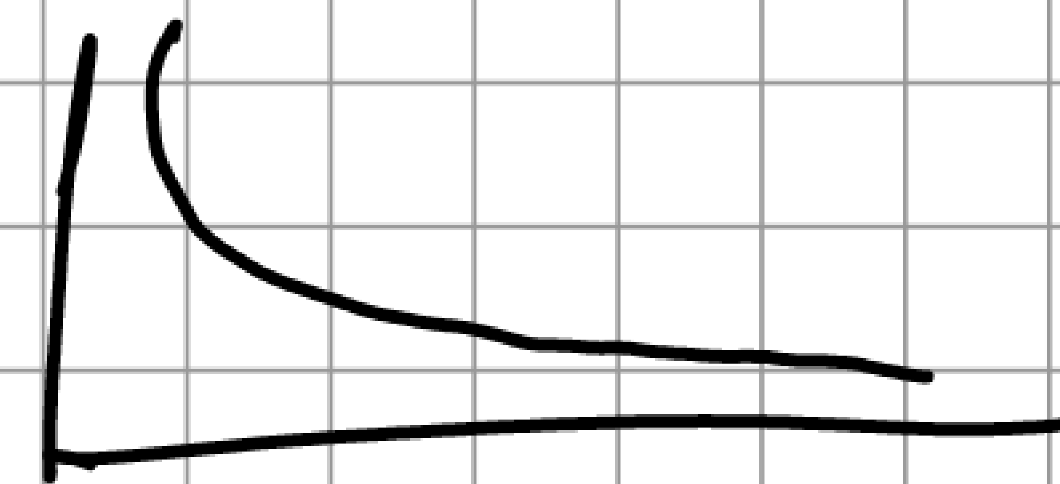


3) Gęstość zmiennej losowej T

$$f(t) = F'(t) = (1 - e^{-\lambda t})' = \lambda e^{-\lambda t}$$

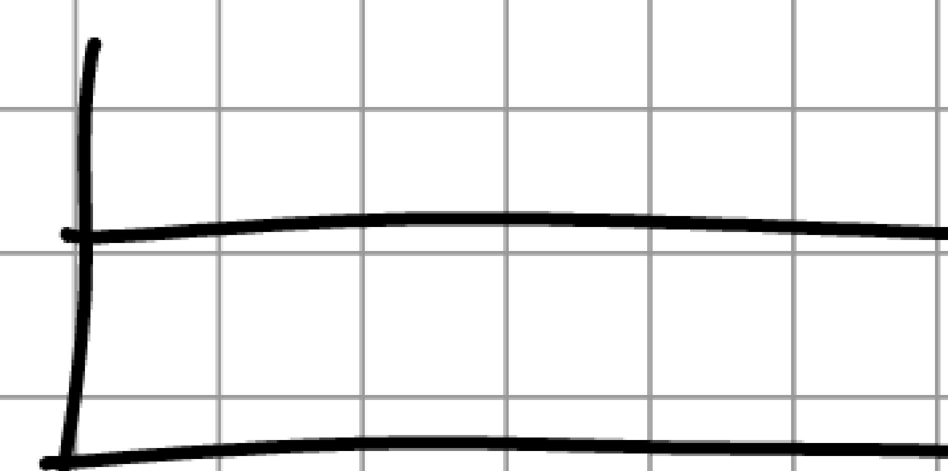
$$f(0) = \lambda e^{0} = \lambda$$

$$f(\infty) = \lambda e^{\infty} = 0$$



4) Funkcja λ intensywności zmiennej losowej T.

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$



Szansa na zepsucie, jeśli się nie zepsuł do t.

5) Funkcja wiodąca $\Lambda(t)$

Stosunek długości życia, do wymaganej długości.

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du = \int_0^t \lambda\,du \overset{j.w.}{=} \lambda t$$

$$\Lambda(0) = 0$$

$$\Lambda(\infty) = \infty$$

6. Warunkowa funkcja niezawodności $R_t(\tau)$

$$R_t(\tau) = \frac{R(t+\tau)}{R(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{\cancel{e^{-\lambda t}} \cdot e^{-\lambda \tau}}{\cancel{e^{-\lambda t}}} =$$

$$= e^{-\lambda t}$$

7. Bezwarunkowe prawdopodobieństwo $P(t, t+\tau)$ braku uszkodzenia w przedziale czasu $(t, t+\tau)$

Brak awarii w przedziale od t do $t+\tau$, pod warunkiem braku wcześniejszego uszkodzenia. Awaria następuje tylko w t lub $t+\tau$.

$$P(t, t+\tau) = 1 - [R(t) + R(t+\tau)] = 1 - (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+\tau)}) =$$

$$= 1 - (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda \tau} \cdot e^{-\lambda t}) = 1 - e^{\lambda t}(1 - e^{-\lambda \tau})$$

Charakterystyki liczbowe

8) Wartość oczekiwana $E\{t\} = \Theta$

$$E(t) = \int_0^\infty t \cdot f(t)\,dt = \int_0^\infty [1-F(t)]\,dt = \int_0^\infty R(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt = \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right)\Big|_0^\infty = \frac{-1}{\lambda} \cdot e^{-\infty} - \left(\frac{1}{\lambda} \cdot e^{0}\right) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\left\{ \int e^{-at}\,dt = \frac{1}{a} e^{-at} \right\}$$

9) Wariancja zmiennej losowej T

$$V(t) = \int_0^\infty (t-\Theta)^2 f(t)\,dt = \int_0^\infty \left(t - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda t}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(t^2 - \frac{2t}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right) \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \lambda \int_0^\infty t^2 e^{-\lambda t}\,dt =$$

$$-2 \int_0^\infty t e^{-\lambda t}\,dt + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\left\{ \int t^n e^{-\lambda t}\,dt = \frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^{n+1}} \qquad \Gamma = (n+1) = n! \right\}$$

10) Odchylenie standardowe

$$\sigma\{T\} = \sqrt{V\{T\}} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda} \quad (=\theta)$$

11) Kwantyl t_p zmiennej losowej T

Prawdopodobieństwo, że awaria będzie przed tą chwilą.

$$F(t_p) = p \qquad 1 - e^{-\lambda t_p} = p$$

$$1 - p = e^{-\lambda t_p}$$

$$\ln(1-p) = -\lambda t_p$$

$$\frac{\ln(1-p)}{-\lambda} = t_p$$

Założenia:

T_1: o rozkładzie gamma

$E(T) = \Theta = \frac{a}{b}$

$V(T) = \frac{a}{b^2}$

$\sigma(T) = \frac{\sqrt{a}}{b}$

$f^*(s) = \left(\frac{b}{b+s}\right)^a$

$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\Gamma(a)} b^a x^{a-1} e^{-bx} dx, t > 0$

o rozkładzie Erlanga

$T_2, T_3, T_4 \dots$

$E(T) = \Theta = \frac{2}{\lambda}$

$V(T) = \frac{2}{\lambda^2}$

$\sigma(T) = \frac{\sqrt{2}}{\lambda}$

$f^*(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2$

$F(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$

POMIJALNY CZAS ODNOWY

Założenia:

T_1: o znta zie wykładniczym

$E(T) = \Theta = \frac{1}{a}$

$V(T) = \frac{1}{a^2}$

$\sigma(T) = \frac{1}{a}$

$f^*(s) = \frac{a}{a+s}$

$F(t) = 1 - e^{-at}, t \geq 0$

o rozkładzie Erlanga

$T_2, T_3, T_4 \ldots$

$E(T) = \Theta = \frac{2}{\lambda}$

$V(T) = \frac{2}{\lambda^2}$

$\sigma(T) = \frac{\sqrt{2}}{\lambda}$

$f^*(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2$

$F(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, t \geq 0$

NIEPOMIJALNY CZAS ODNOWY

Zmienne losowe oznaczający czas poprawnej pracy obiektów

zmienne losowe oznaczające czas odnowy obiektów.

1

Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że do chwili t_1 wystąpi conajmniej 12 uszkodzeń.

$$P(S_{12} < t_1) = dK_{12}(t_1)$$

$$K_r(t) = L^{-1} = L^{-1}\{K_r^*(s)\}$$

$k_r^*(s) = ?$

$k_{12}^*(s) = ?$

$$dk_n^*(s) = \frac{1}{s} f_1^*(s)\left(f^*(s)\right)^{r-1}$$

$$k_{12}^*(s) = \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{G}{G+s}\right)^a \cdot \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2\right)^{11}$$

ODNAWIALNE

1

· Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że do chwili t_1 wystąpi conajmniej 12 uszkodzeń.

NIEPOMIJALNY CZAS ODNOWY

$$P(t'_{12} < t_1) = \Psi_{12}(t_1)$$

$$P(T < t) = F(t)$$

$$P(T \geq t) = 1 - F(t)$$

$$T = t'$$

ψ – gęstość

Ψ – dystrybuanta

$$\psi_r(t) = L^{-1}\{\Psi_r^*(s)\}$$

$$\Psi_r^*(s) = \frac{1}{s} f^*(s) \left(f^*(s) \cdot g^*(s)\right)^{t-1}$$

$$\Psi^*(s) = \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{a}{a \cdot s}\right)\left(\left(\frac{a}{a \cdot s}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)\right)^{11}$$

(2)

Wyznaczyć graniczne ($t \to \infty$) prawdopodobieństwo tego, że do chwili t_4 nastąpi co najmniej 50 uszkodzeń.

$$P(S_{50} < t_4) = K_{50}(t_4) \cong F_{r.norm}(t_4)$$

$$N(r \cdot \theta, \sigma \cdot \sqrt{r}) \Rightarrow N\left(50 \cdot \frac{2}{\lambda}, \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \cdot \sqrt{50}\right)$$

Policzyć dystrybuantę

ODNAWIALNE

(2)

Wyznaczyć $\overset{t\to\infty}{\text{graniczne}}$ prawdopodobieństwo tego, że do chwili t_4 nastąpi co najmniej 50 uszkodzeń.

NIEPOMIJALNY CZAS ODNOWY

$$P(t'_{50} < t_4) = \Psi(t_4) \cong F_{r.norm.}(t_4)$$

$$N\left(r\cdot(\Theta_1\cdot\Theta_2), \sqrt{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\cdot r}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow N\left(50\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{\lambda}\right), \sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2}{\lambda^2}\right)\cdot 50}\right)$$

③ Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że po chwili t_5 wystąpi conajmniej 5 awarii

$$P(S_5 \geq t_2) = 1 - K_5(t_2)$$

$$K_5(t_2) = ?$$

$$K_r(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K_r^*(s)\}$$

$$K_5^*(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{\sigma}{\sigma+s}\right)^a \cdot \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2\right)^4$$

ODNAWIALNE

③ Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że po chwili t_5 wystąpi conajmniej 5 awarii

NIEPOMIJALNY CZAS ODNOWY

$$P(t_5'' \geq t_2) = 1 - \Phi_5(t_2)$$

$$\Phi_r(t) = L^{-1}\{\Phi_r^*(s)\}, \quad \Phi_r^*(s) = \frac{1}{s}\left(f^*(s)\cdot g^*(s)\right)^r$$

$$\Phi_5^*(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{a}{a+s}\cdot\left(\frac{\lambda}{\lambda\cdot s}\right)^2\right)^5$$

(4) Wyznacz prawdopodobieństwo, że do chwili t_3 będzie tylko 5 napraw.

$$P(N(t) = K_r(t) - K_{r+1}(t)$$

$$P(t_3) = K_5(t_3) - K_6(t_3)$$

$$K_6^*(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{b}{b+s}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda+b}\right)^2\right)^5$$

$$K_r(t) = L^{-1}(K_r^*(s))$$

ODNAWIALNE

(4) Wyznacz prawdopodobieństwo, że do chwili t_3 będzie tylko 5 napraw.

NIEPOMIJALNY CZAS ODNOWY

$$P(N_2(t) = r) = \phi_r(t) - \phi_{r+1}(t)$$

$$P(N_2 - t_3) = 5) = \phi_5(t_3) - \phi_6(t_3)$$

n_2 - awarie
n_1 - odnowy

$$\phi_6^*(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{a}{a+s} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda \cdot s}\right)^2\right)^6$$

⑤ Wyznaczyć graniczną liczbę odnowień do chwili t_{12}.

$$N\left(\frac{t}{\theta}, \frac{\sigma \cdot \sqrt{t}}{\frac{3}{\theta}^{2}}\right) \longrightarrow N\left(\frac{t_{12}}{\frac{2}{\lambda}}, \frac{\frac{\sqrt{2}}{\lambda} \cdot \sqrt{12}}{\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= N\left(\frac{t_{12} \cdot \lambda}{2}, \frac{\sqrt{12 \cdot \lambda}}{2}\right)$$

ODNAWIALNE

(5) Wyznaczyć graniczną liczbę odnowień do chwili t_{12}.

NIEPOMIJALNY CZAS ODNOWY

$$N\left(\frac{1}{\Theta_1+\Theta_2}, \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2\cdot t}}{(\Theta_1+\Theta_2)^{\frac{3}{2}}}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow N\left(\frac{t_{12}}{\frac{1}{a}+\frac{2}{\lambda}}, \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2}{\lambda^2}\right)\cdot t_{12}}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{\lambda}\right)^{3/2}}\right)$$

⑥ Wyznaczyć oczekiwaną liczbę uszkodzeń do chwili t_6.

$E(N(t)) = K(t)$ – oczekiwana liczba odnowień.

$$H(t) = L^{-1}(H^*(s))$$

$$H^*(s) = \frac{1}{s} \frac{f_1^*(s)}{1 - f^*(s)}$$

$$H^*(s) = \frac{1}{s} \frac{\left(\frac{b}{b+s}\right)^a}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2}$$

ODNAWIALNE

⑥ Wyznaczyć oczekiwaną liczbę wschodzeń do chwili t_6.

NIEPOMIJALNY CZAS ODNOWY

$$E(N(t)) = H_1(t_6)$$

$$H_1(t) = L^{-1}(H_1^*(s))$$

$$H_1^*(s) = \frac{1}{s} \frac{f^*(s)}{1 - F^*(s) \cdot g^*(s)}$$

$$H_1^*(s) = \frac{1}{s} \frac{\frac{a}{a+z}}{1 - \left(\frac{a}{a+s} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2\right.}$$

⑦ Wyznaczyć oczekiwaną liczbę napraw w przedziale czasu (t_8, t_9).

$E(N(t_s)) = ?$

$E(N(t_8)) = ?$

$E(N(t_9) - N(t_8)) = E(N(t_9)) - E(N(t_8))$

$H(t) \rightarrow H^*(s) =$

ODNAWIALNE

7 Wyznaczyć oczekiwaną liczbę napraw w przedziale czasu (t_8, t_9).

NIEPOMIJALNY CZAS ODNOWY

$$E(N_2(t)) = H_2(t) \qquad H_2(t) = L^{-1}(H_2^*(s))$$

$$H_2^* = \frac{1}{s} \frac{f^*(s) \cdot g^*(s)}{1 - f(s) \cdot g^*(s)}$$

$$H_2^*(s) = \frac{1}{s} \frac{\frac{a}{a+s} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2}{1 - \frac{a}{a+s} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2}$$

8

Wyznaczyć oczekiwaną graniczną liczbę uszkodzeń do chwili t_g.

$$\lim_{t \to \infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{\Theta}, \text{ dla dużych } \boxed{\frac{t}{\Theta}}$$

$$H(t_g) = \frac{t_g}{\frac{2}{\lambda}} = \frac{\lambda t_g}{2}$$

ODNAWIALNE

(8) Wyznaczyć oczekiwaną graniczną liczbę uszkodzeń do chwili t_0.

NIEPOMIJALNY CZAS ODNOWY

$$\lim_{t \to \infty} H_1(t_3) = \frac{t}{\Theta_1 + \Theta_2} = \frac{t_0}{\frac{1}{a} + \frac{2}{\lambda}}$$

⑨ Wyznaczyć graniczną oczekiwaną liczbę napraw w przedziale czasu (t_{10}, t_{11})

Tw. Blackwella

$$\lim_{t \to \infty} [H(t+\alpha) - H(t)] = \frac{\alpha}{\Theta} = \frac{t_{11} - t_{10}}{\frac{2}{\lambda}}$$

$$= \frac{\lambda (t_{11} - t_{10})}{2}$$

ODNAWIALNE

9 Wyznaczyć graniczną oczekiwaną liczbę napraw w przedziale czasu (t_{10}, t_{11})

Tw. Blackwella

NIEPOMIJALNY CZAS ODNOWY

$$\lim_{t \to \infty} \left[H_2(t+\alpha) - H_2(t)\right] = \frac{\alpha}{\Theta_1 + \Theta_2} = \frac{t_{11} - t_{10}}{\frac{1}{a} + \frac{2}{\lambda}}$$

(10) Wyznaczyć prawdopodobieństwo graniczne tego, że do chwili t_5 będzie mniej niż 100 uszkodzeń.

$$P(S_{100} \geq t_5) = 1 - K_{100}(t_5) = 1 - F_{n.norm.}(t_5)$$

$$N(r \cdot \Theta, \sigma \cdot \sqrt{r}) \to N\left(100 \cdot \frac{2}{\lambda}, \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \cdot 10\sqrt{2}\right)$$

ODNAWIALNE

(10) Wyznaczyć prawdopodobieństwo graniczne tego, że do chwili t_5 będzie mniej niż 100 uszkodzeń.

NIEPOMIJALNY CZAS ODNOWY

$$P(t'_{100} \geq t_5) = 1 - \Psi_{100}(t_5)$$

$$N\left(r \cdot (\Theta_1 + \Theta_2), \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \cdot r}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow N\left(100\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\lambda}\right), \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{\lambda}\right) \cdot 100}\right)$$

11) Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w przedziale czasu (t_{13}, t_{14}) nie będzie uszkodzeń.

$$P(t, t+\tau) = 1 - F_1(t+\tau) + \int_0^t (1 - F(t+\tau-x)) h_x \, dx$$

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot b^a \cdot x^{a-1} \cdot e^{-bx} \, dx$$

$$F_1(t_{14}) = \int_0^{t_{14}} \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot b^a \cdot x^{a-1} \cdot e^{-bx} \, dx$$

ODNAWIALNE

$$F(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

$$F(t_{14}-x) = 1 - \Bigg[\underbrace{\frac{(\lambda(t_{14}-x))^0}{0!} e^{-\lambda(t_{14}-x)}}_{i=0} + \underbrace{\frac{(\lambda(t_{14}-x))^1}{1!} e^{-\lambda(t_{14}-x)}}_{i=1} \Bigg]$$

$$= 1 - \left(e^{-\lambda(t_{14}-x)} + (\lambda(t_{14}-x)) \cdot e^{-\lambda(t_{14}-x)} \right)$$

$$h^*(s) = \frac{f^*(s)}{1-f^*(s)} \qquad h^*(s) = \frac{\left(\frac{b}{b+s}\right)^a}{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2}$$

$$P(t, t+\tau) = 1 - \int_0^{t_{14}} \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot b^a \cdot x^{a-1} e^{-\lambda x} dx + \int_0^{t_{13}} \Big(e^{-\lambda(t_{14}-x)} + \left(\lambda(t_{14}-x)\right) \cdot e^{\lambda(t_{14}-x)} \Big) \cdot h_x \, dx$$

11) Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w przedziale czasu (t_{13}, t_{14}) nie będzie uszkodzeń.

NIEPOMIJALNY CZAS ODNOWY

$$P(t_2 + \tau) = 1 - F(t + \tau) +$$

$$+ \int_0^t h_2(x)\left[1 - F(t - \quad + \tau - x)\right] dx$$

$$F(t) = 1 - e^{-at}$$

$$F(t_{14}) = 1 - e^{-at_{14}}$$

$$F(t_{14} - x) = 1 - \left[e^{-\lambda(t_{14}-x)} + \lambda(t_{14}-x) \cdot e^{-\lambda(t_{14}-x)}\right)$$

$$P(t, t+\tau) = e^{-at_{14}} + \int_0^{13} h_2(x)\left[e^{-\lambda(t_{14}-x)} + \lambda(t_{14}-x) \cdot e^{-\lambda(t_{14}-x)}\right] dx$$

$$h_2^*(s) = \frac{f^*(s) \cdot g^*(s)}{1 - f^*(s) \cdot g^*(s)}$$

(12) Wyznaczyć graniczne prawdopodobieństwo, że w przedziale czasu nie będzie uszkodzeń.

$$P(\tau) = \frac{1}{\Theta} \int_{\tau}^{\infty} (1 - F(t))dt$$

$$F(\tau) = \frac{\lambda}{2} \cdot \int_{t_{16}-t_{15}}^{\infty} \left(1 - \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}\right)\right] dt =$$

$$= \frac{\lambda}{2} \int_{t_{16} t_{15}}^{\infty} \left(\frac{(\lambda t)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda t} \right) + \left(\frac{(\lambda t)^1}{1!} e^{-\lambda t} \right) dt = \frac{\lambda}{2} \int_{t_{16} t_{15}}^{\infty} e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} dt$$

ODNAWIALNE

(12) Wyznaczyć graniczne prawdopodobieństwo, że w przedziale czasu nie będzie uszkodzeń.

NIEPOMIJALNY CZAS ODNOWY

$$P(\tau) = \frac{1}{\frac{1}{a} \cdot \frac{2}{\lambda}} \cdot \int_{\tau}^{\infty} e^{-at} \, dt$$

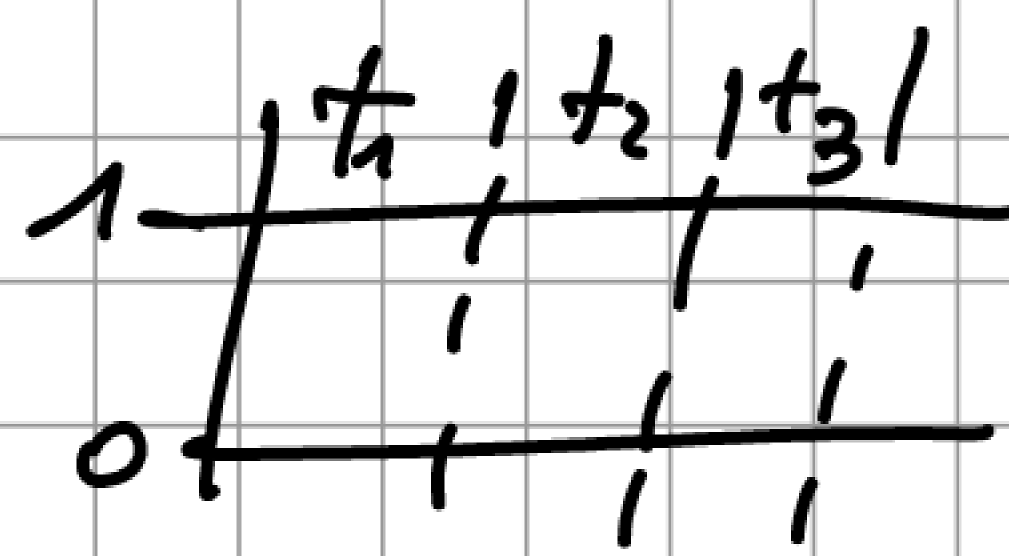
$t^{16} - t^{15}$

$$P(\tau) = \frac{1}{\Theta_1 \cdot \Theta_2} \int_{\tau}^{\infty} [\underbrace{1 - F(t)}_{R(t)}] \, dt$$

$$R(t) = e^{-at}$$

NIE NA KOLOSIE

(13) Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że chwili t_{17} obiekt będzie w stanie zdatności.

$P(X \mid t_{17} = 1) = 1$ 

Zawsze w stanie zdatności

ODNAWIALNE

(13) Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że chwili t_{17} obiekt będzie w stanie zdatności.

NIEPOMIJALNY CZAS ODNOWY

$$K^*g(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1-f^*(s)}{1-f^*(s)\cdot g^*(s)} = \frac{1}{s} \frac{1-\frac{a}{a+s}}{1-\left(\frac{a}{a+s}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2}$$

$$K_g(t) = L^{-1}(K_g^*(s)) \qquad K_g^*(s) = 1$$

1) Wyznaczyć graniczne prawdopodobieństwo zdatności obiektów. NIEPOMIJALNY CZAS ODNOWY

$$K_g = \frac{\Theta_1}{\Theta_1 + \Theta_2} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{2}{\lambda}}$$

4.

Ścieżki zdatności

1. Wyznaczyć minimalne ścieżki zdatności

$$f^5(x) = x_1 x_3 (x_4 + x_5) + (x_1 + x_4)(x_3 + x_5) + x_4 x_5 (x_3 + x_1)$$

$a \cdot a = a$

$a + a = a$

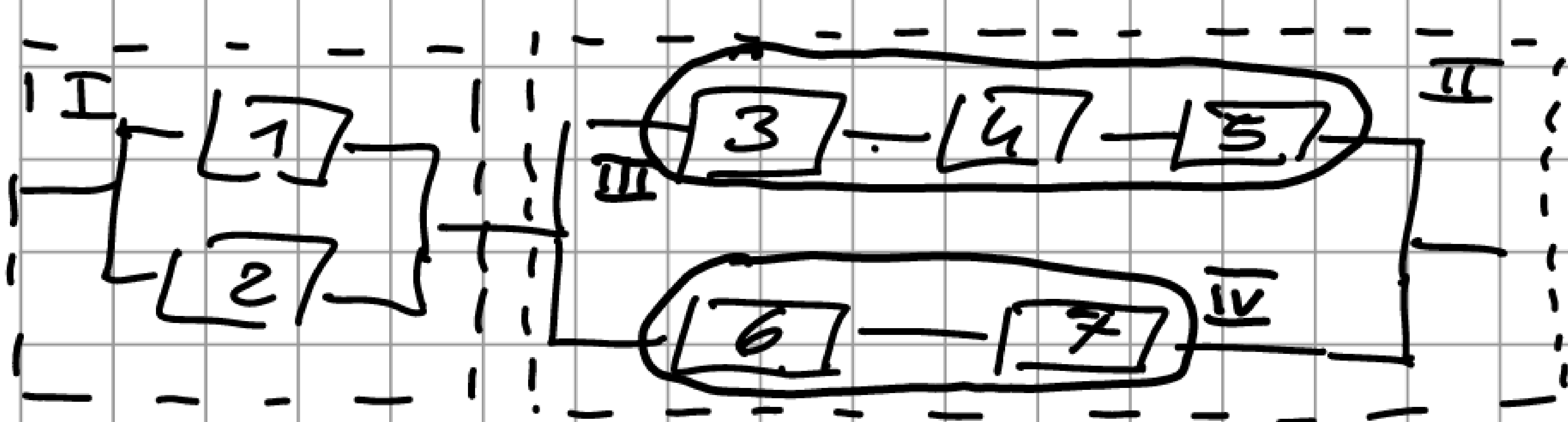
$ab + a = a$

$a(b + a) = a$

1. Narysować minimalne cięcia

3. Narysować schemat na podstawie funkcji

4. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że w chwili t system jest w stanie zdatności. Elementy identycznego, nieodnawialne, rozkład czasu od uszkodzenia - wykładniczy z a



$$R_S(t) = R_I(t) \cdot R_{II}(t)$$

$$R_I(t) = 1 - F_I(t)$$

$$F_I(t) = F_1(t) \cdot F_2(t) = (1-e^{-at})^2 = 1-2e^{-at}+e^{-2at}$$

$$F_{II}(t) = F_{III}(t) + F_{IV}(t)$$

$$R_{III}(t) = R_3(t) \cdot R_4(t) \cdot R_5(t)$$

$$R_{IV}(t) = R_6(t) \cdot R_7(t) = e^{-2at}$$

$$F_{II}(t) = (1-e^{-3at}) \cdot (1-e^{-2at})$$

$$R_{II}(t) = 1-(1-e^{-2at}-e^{-3at}+e^{-5at}) =$$

$$= e^{-2at}+e^{-3at}-e^{-5at}$$

5. Wyznaczyć oczekiwany czas do uszkodzenia systemu

$$R_s(t) = \left(2e^{-at} - e^{-2at}\right) \cdot \left(e^{-2at} + e^{-3at} - e^{-5at}\right)$$

$$= 2e^{-3at} + e^{-4at} - e^{-5at} - 2e^{-6at} + e^{-7at}$$

$$E(t) = \int_0^\infty R(t)\,dt$$

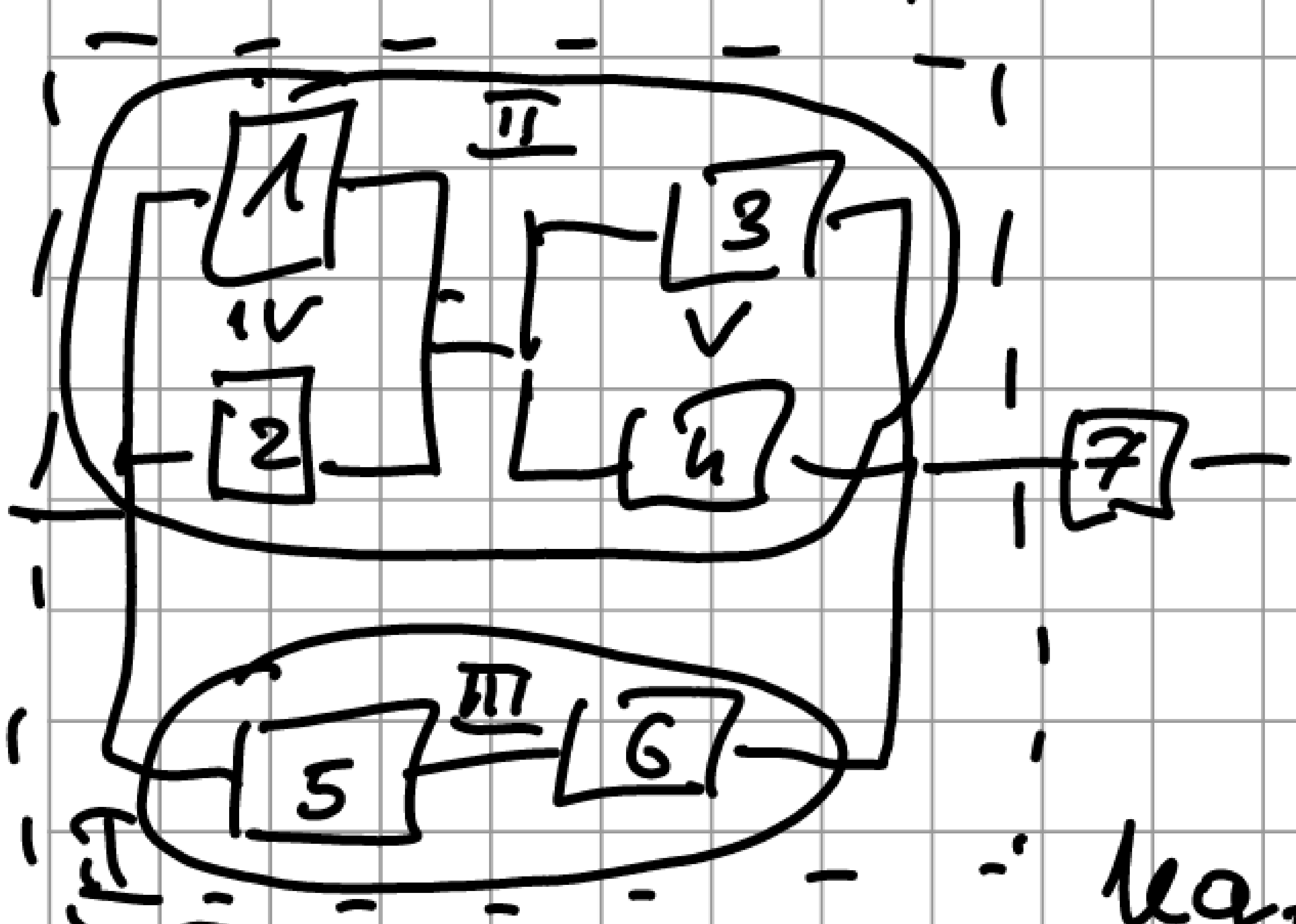
$$E(t) = \int_0^\infty \left(2e^{-3at} + e^{-4at} - e^{-5at} + 2e^{-6at} + e^{-7at}\right)$$

$$\left\{ \int_0^\infty e^{-nat}\,dt = \frac{-1}{na} e^{-nat} \Big|_0^\infty = \frac{1}{na} \right\}$$

$$= \frac{2}{3a} + \frac{1}{4a} + \frac{1}{5a} + \frac{2}{6a} + \frac{1}{7a}$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{1}{7}\right)$$

6. Wyznaczyć prawdopodobieństwa zdarzenia, że w chwili t system jest w stanie zdatności. Elementy 1,2,3,4,7 są identyczne, odnawialne. Elementy 5,6 są nieodnawialne. Rozkład czasu poprawnej pracy dla obiektów odnawialnych — wykładniczy z a., czas odnowy wykładniczy z b. Dla nieodnawialnych wykładniczy z h.



$$kg_S(t) = kg_I(t)\cdot kg_7(t)$$

$$1-kg_I(t) = \left(1-kg_{II}(t)\right)\cdot F_{III}(t)$$

$$kg_I(t) = 1-\left(1-kg_{II}(t)\right)\cdot F_{III}(t)$$

$$kg_{II}(t) = kg_{IV}(t)\cdot kg_V(t)$$

$$1-kg_{IV}(t) = \left(1-kg_1(t)\right)\left(1-kg_2(t)\right)$$

$$\Rightarrow kg_{IV}(t) = 1-\left(1-kg_1(t)\right)\left(1-kg_2(t)\right)$$

$$1-kg_V(t) = \left(1-kg_3(t)\right)\cdot\left(1-kg_4(t)\right) \Rightarrow$$

$$kg_V = 1-\left(1-kg_3(t)\right)\cdot\left(1-kg_4(t)\right)$$

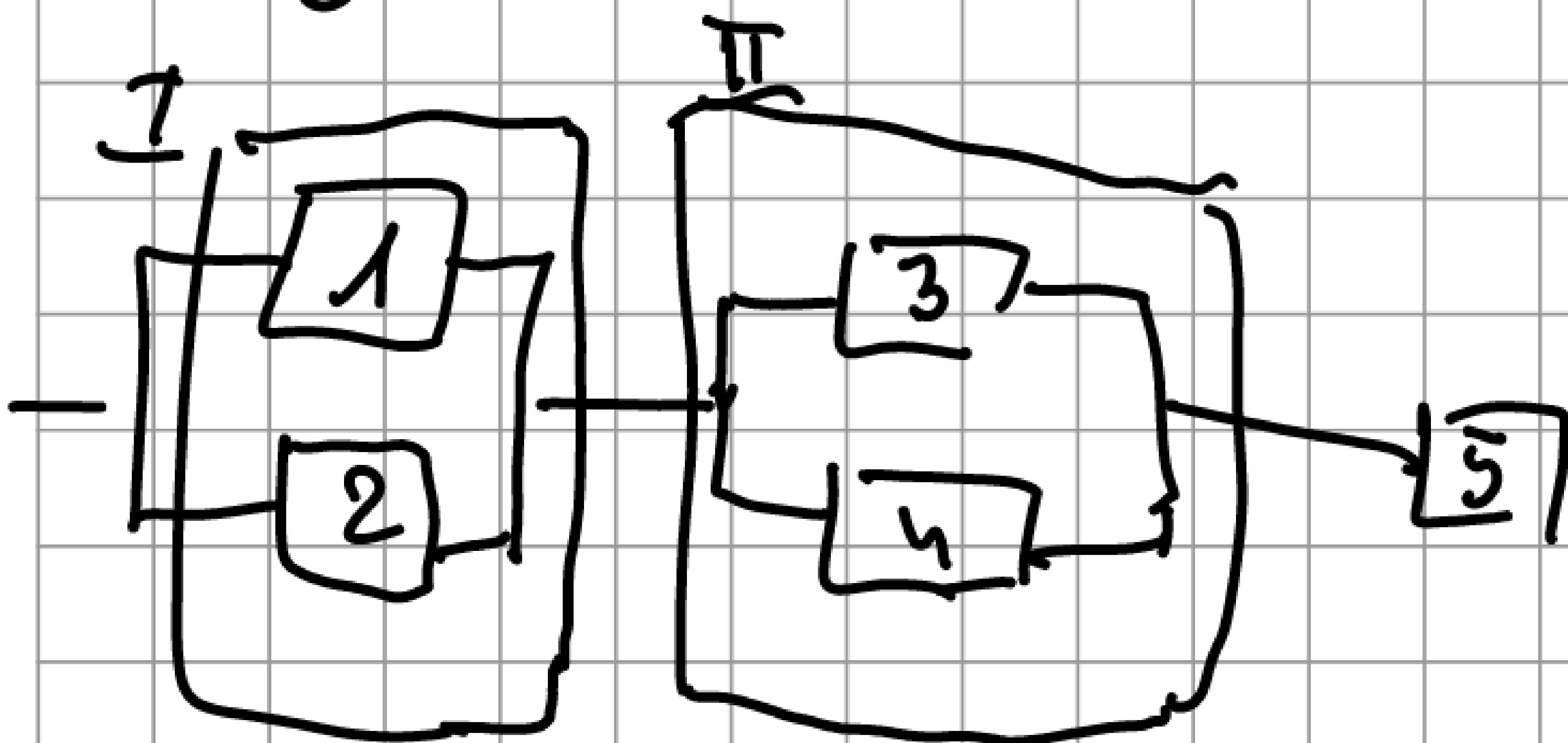
$$ug^*(s) = \frac{1}{s}\frac{1 - f^*(s)}{1 - f^*(s) \cdot g^*(s)}$$

$$up_i^*(s) = \frac{1}{s}\frac{1 - \frac{a}{a+s}}{1 - \frac{a}{a+s} \cdot \frac{b}{b+s}}$$

$$ug_i(t) = L^{-1}(ug^*(s))$$

6. Wyznaczyć graniczny współczynnik gotowości.

$$K_g = \frac{\Theta_1}{\Theta_1 + \Theta_2} \qquad \Theta_1 = \frac{1}{a} \qquad \Theta_2 = \frac{1}{b}$$



$$K_{g_s} = K_{g_I} \cdot K_{g_{II}} \cdot K_{g_7}$$

$$1 - K_{g_I} = (1 - K_{g_1})(1 - K_{g_2})$$

$$1 - K_{g_{II}} = (1 - K_{g_3})(1 - K_{g_4})$$

$$K_{g_i} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \qquad = \frac{1}{a} \cdot \frac{a \cdot b}{a + b} = \frac{b}{a+b}$$

5. Redundancja w systemach niezawodnych

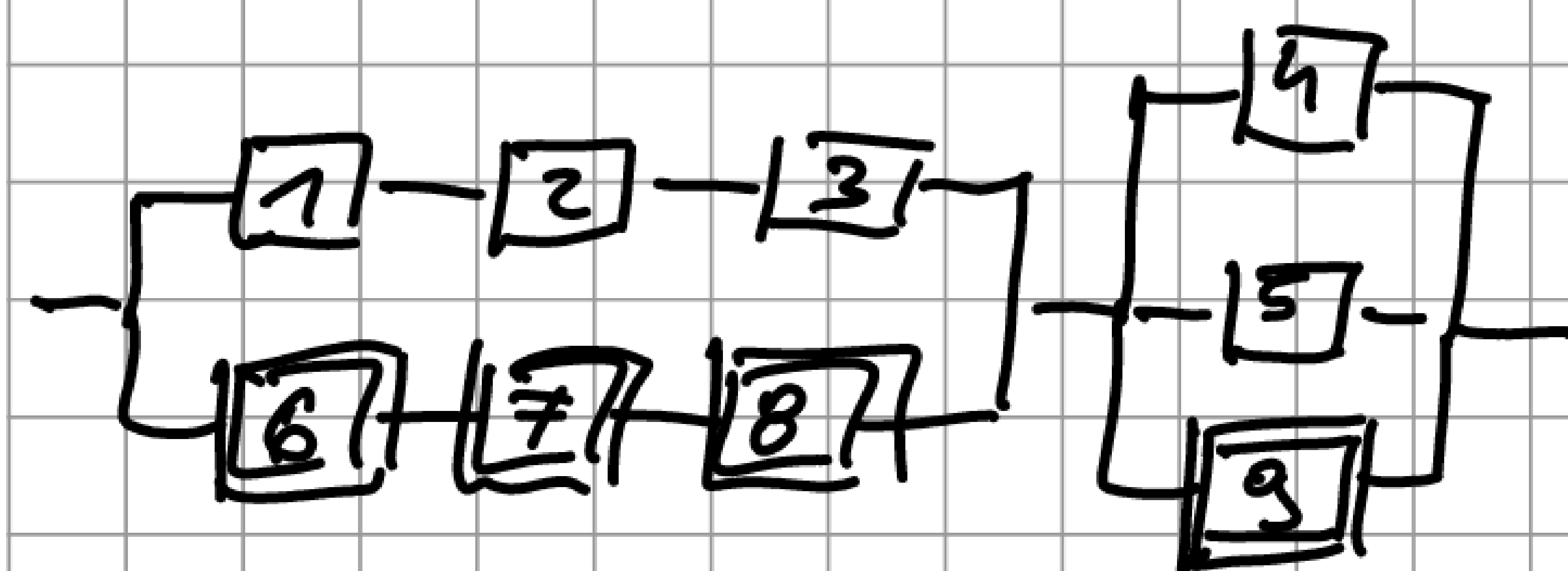
$$\eta_{W(t)}(t) = \frac{W^*(t)}{W(t)}$$

$W^*(t)$ – elementy podstawowe i nadmiarowe

$W(t)$ – elementy podstawowe

(t) – tylko jeśli bierzemy czas pod uwagę

1. Wyznaczyć zysk z redundancji z punktu widzenia poprawnej pracy w chwili t rozpatrywanego systemu. Elementy 1,2,3,4,5 są podstawowe, 6-9 są nadmiarowe. Wszystkie są identyczne, nieodnawialne.
Czas uszkodzenia - rozkład wykładniczy z param. a.

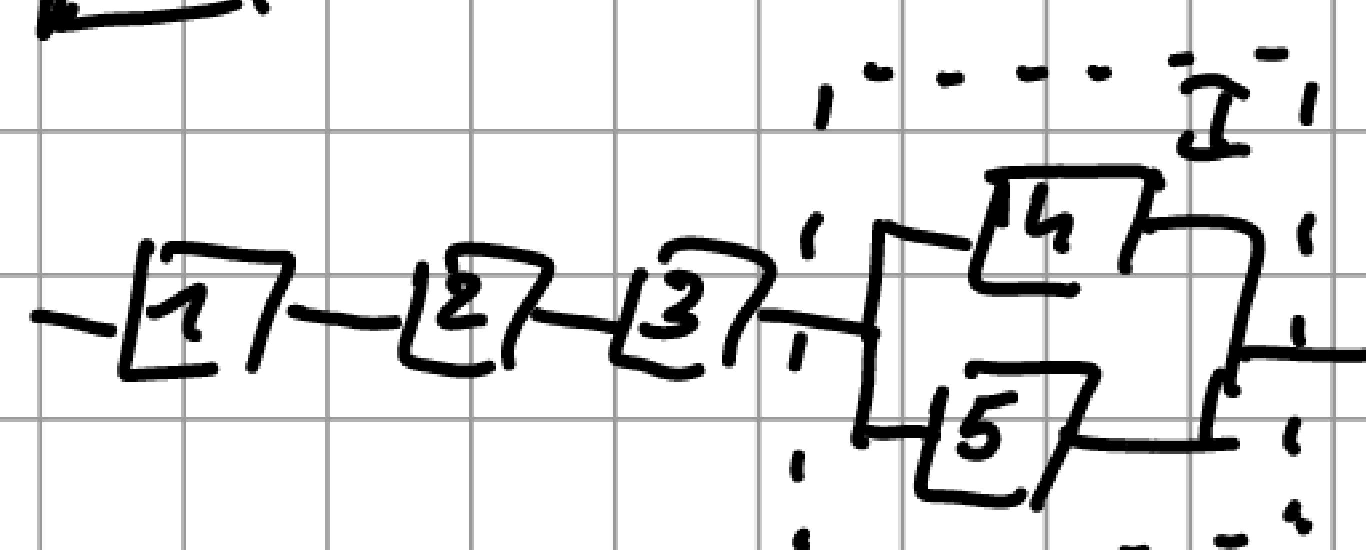


R - funkcja niezawodności $R_S(t)$

F - funkcja zawodności $F_S(t) = 1 - R_S(t)$

$R(t) = e^{-at}$ $F(t) = 1 - e^{-at}$

$$\eta_{R(t)} = \frac{R_S^*(t)}{R_S(t)}$$



$$R(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot R_3(t) \cdot R_I(t)$$

$$F_I = F_4(t) \cdot F_5(t) = \left(1 - e^{-at}\right)^2$$

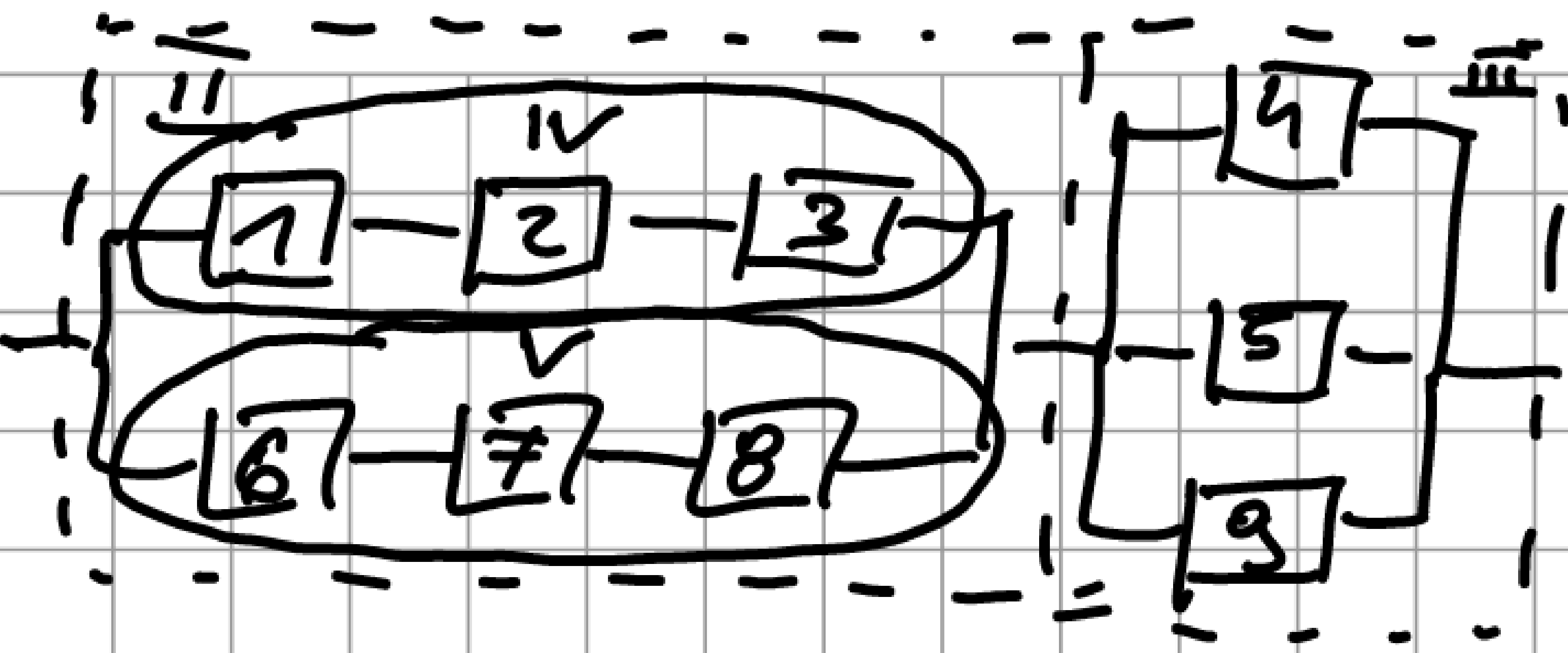
$$= 1 - 2e^{-at} + e^{-2at}$$

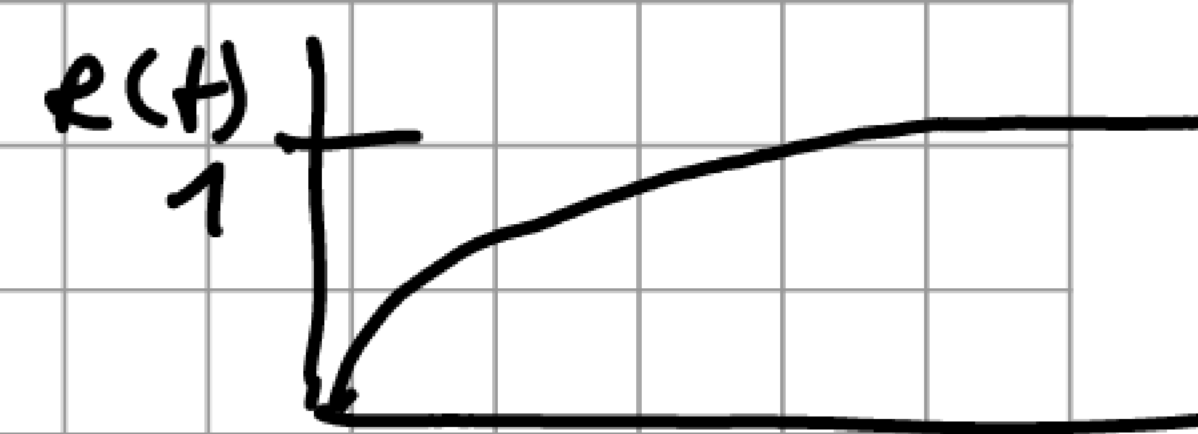
$$R_I(t) = 2e^{-at} - e^{-2at}$$

$$R_t = e^{-3at}\left(2e^{-at} - e^{-2at}\right) =$$

$$= e^{-4at} - e^{-5at}$$

$R^* \longrightarrow$

$R^*(t)$ 



$$F_{\underline{II}}(t) = F_{\underline{IV}}(t) \cdot F_{V}(t)$$

$$R_{IV}(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot R_3(t)$$

$$R_V(t) = R_6(t) \cdot R_7(t) \cdot R_8(t)$$

$$F_{\underline{II}}(t) = \left(1 - e^{-3at}\right)^2 = 1 - 2e^{-3at} + e^{-6at}$$

$$R_{\underline{II}}(t) = 2e^{-3at} - e^{-6at}$$

$$F_{\underline{III}} = F_4(t) \cdot F_5(t) \cdot F_6(t) = \left(1 - e^{-3at}\right)^3 =$$

$$= 1 - 3e^{-at} + 3e^{-2at} - e^{-3at}$$

$$R_{\underline{III}} = 3e^{-at} - 3e^{-2at} + e^{-3at}$$

$$R^*(t) = R_{\underline{IV}}(t) \cdot R_{\underline{V}}(t) =$$

$\downarrow$ $\longrightarrow$

$$\eta_{R(t)} = \frac{6e^{-4at} - 6e^{-5} + 2e^{-6at} - 3e^{-7at} + 3e^{-8at} - e^{-9at}}{2e^{-4at} - e^{-5at}}$$

$$\eta_{R(t)} = \frac{\cancel{e^{-4at}}\left(6 - 6e^{-at} + 2e^{-2at} - 3e^{-3at} + 3e^{-4at} - e^{-5at}\right)}{\cancel{e^{-4at}}\left(2 - e^{-at}\right)}$$

$$\eta_{R(t)}(0) = \frac{6 - 6 + 2 - 3 + 3 - 1}{2 - 1} = 1$$

$$\eta_{R(t)}(\infty) = \frac{6}{2} = 3$$

2. Wyznaczyć zysk z redundancji z punktu widzenia oczekiwanego czasu awarii systemu.

$$E(T) = \Theta = \int_0^\infty t \cdot f(t)\, dt = \int_0^\infty R(t)\, dt$$

$$\eta_{E(t)} = \frac{E(T^*)}{E(T)}$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int e^{-nat} dx = \frac{1}{na}$$

$$E(T) = \int_0^\infty \left(2e^{-4at} - e^{-5at}\right) dt = \frac{2}{4a} - \frac{1}{5a} = \frac{1}{2a} - \frac{1}{5a} =$$

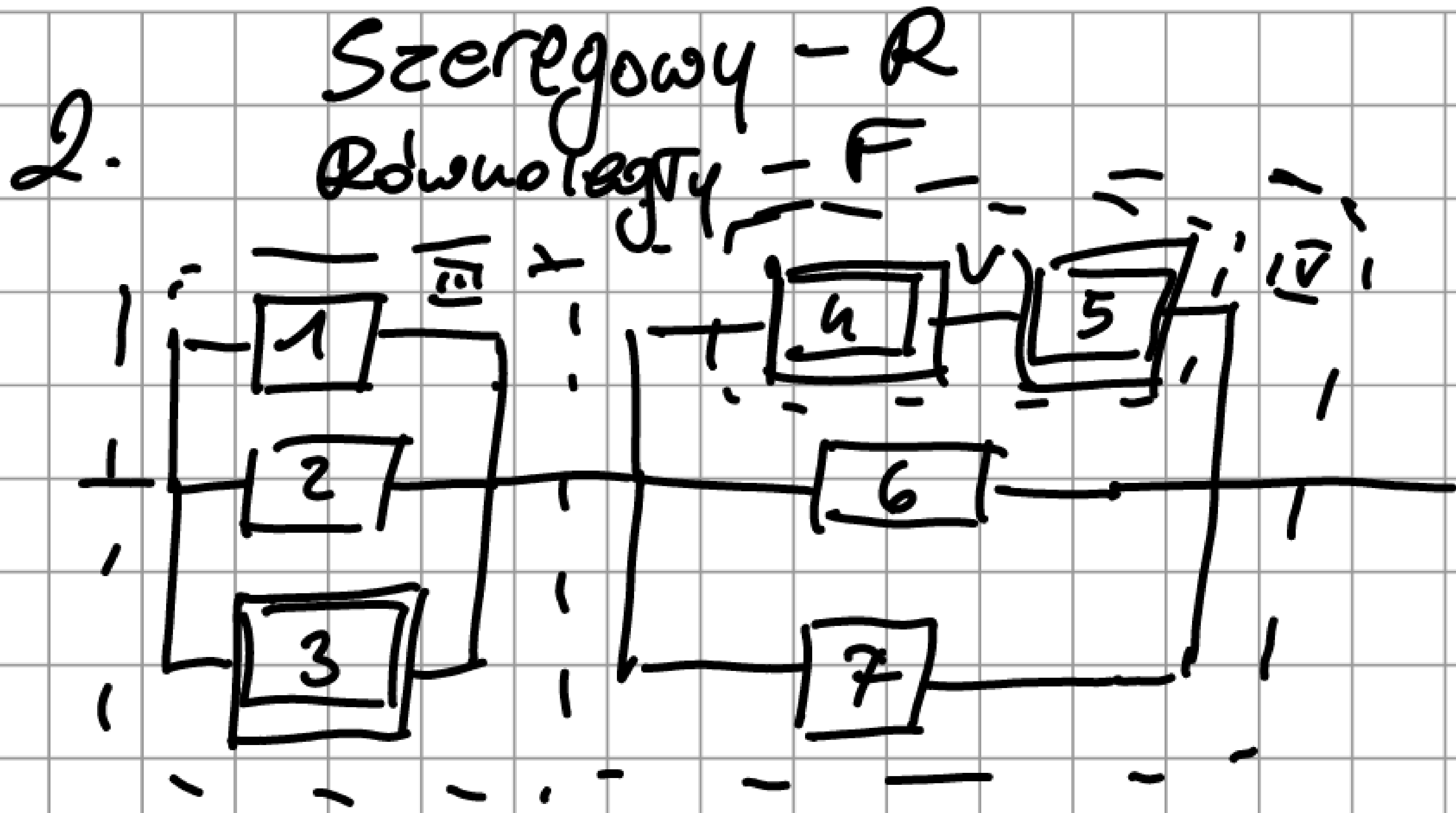
$$= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{5}{10} - \frac{2}{10}\right) = \frac{3}{10}$$

$$E^*(t) = \int_0^\infty R_V(t)\, dt = \frac{6}{4a} - \frac{6}{5a} + \frac{2}{6a} - \frac{3}{7a} + \frac{3}{8a} - \frac{1}{9a} =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{469}{1000}$$

$$\eta_{E(t)} = \frac{\frac{469}{1000a}}{\frac{3}{10a}} \cong 1{,}56$$

2. Szeregowy – R
Równoległy – F



$$\eta_{R(t)}(t) = \frac{R_s^*(t)}{R_s(t)} \qquad R_s^* = ?$$

$$R_s(t) = R_I \cdot R_{II}$$

$$F_I(t) = F_1(t) \cdot F_2(t) = (1-e^{-at})^2 = 1-2e^{-at}+e^{-2at}$$

$$R_I(t) = 2e^{-at} - e^{-2at}$$

$$F_{II}(t) = 1-2e^{-at}+e^{-2at} \Rightarrow R_{II}(t) = 2e^{-at} - e^{-2at}$$

$$R_s(t) = (2e^{-at} - e^{-2at})^2 = 4e^{-2at} - 4e^{-3at} + e^{-4at}$$

$$R^*(t) = R_{III}(t) \cdot R_{IV}(t)$$

$$F_{III}(t) = F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 = (1-e^{-at})^3 \qquad R_{III} = 3e^{-3at} - 3e^{-2at} + e^{-3at}$$

$$F_{IV}(t) = F_V \cdot F_6 \cdot F_7 = (1-e^{-2at}) \cdot (1-e^{-at})^2 =$$

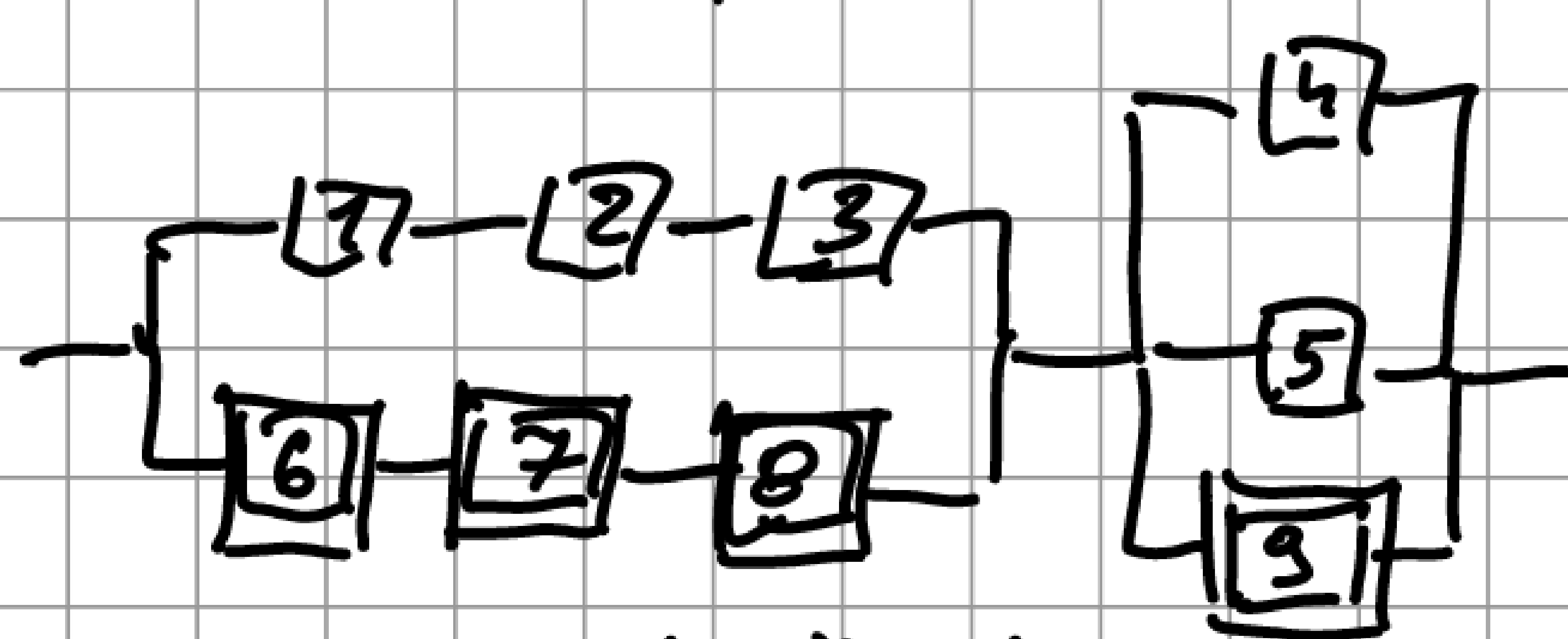
$$= 1-2e^{-at}+2e^{-3at}-e^{-4at} \qquad R_s(t) = R_{III} \cdot R_{IV}$$

6. Redundancja w systemach odnawialnych.

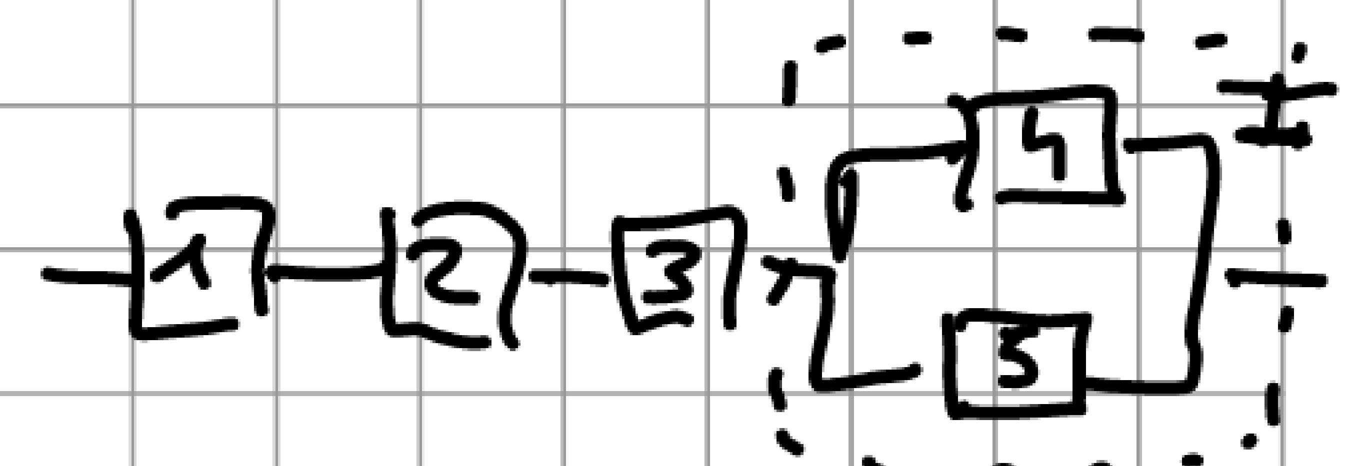
1. Wyznaczyć zysk z redundancji z punktu widzenia poprawnej pracy w chwili t rozpatrywanego systemu. Elementy 1–5 są podstawowe, 6–9 nadmiarowe. Wszystkie są identyczne, odnawialne. Czas poprawnej pracy – wykładniczy z a. Czas odnowy – wykładniczy z b.

Kg – szeregowe

$1-kg$ – równoległe



$$\eta_{kg(t)} = \frac{kg^*_s(t)}{kg_s(t)} \qquad kg_s(t) = ?$$



$$kg_s(t) = kg_1 \cdot kg_2 \cdot kg_3 \cdot kg_I$$

$$1-kg_I = (1-kg_4)(1-kg_5) \Rightarrow kg_I = 1-(1-kg_4)(1-kg_5)$$

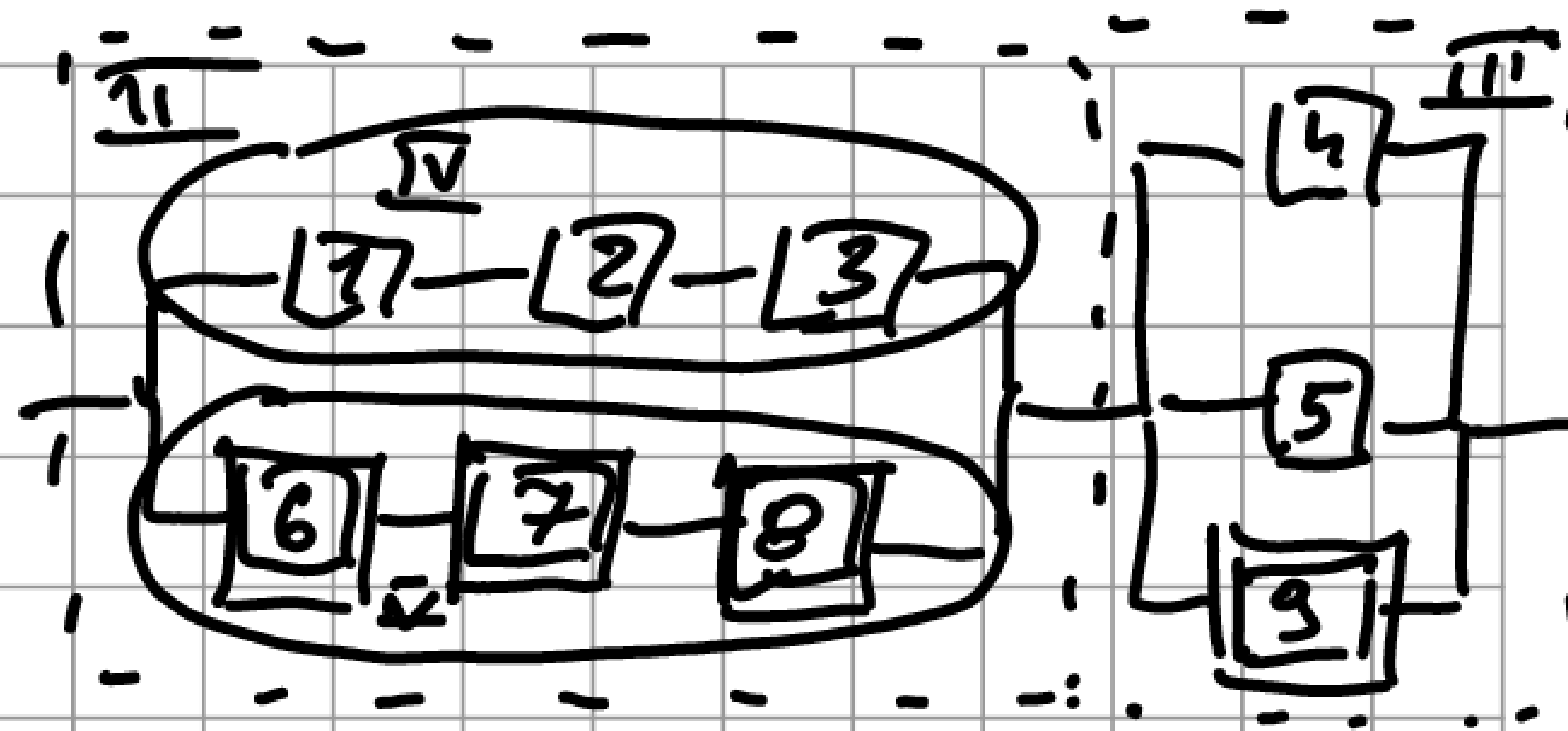
$$kg(t) = L^{-1}\{kg^*(s)\}$$

$$kg^*(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1-f^*(s)}{1-f^*(s)g^*(s)} = \frac{1}{s}\,\frac{1-\frac{a}{a+s}}{1-\frac{a}{a+s}\cdot\frac{b}{b+s}}$$

$$kg_I(t) = 1-(1-A(t))(1-A(t)) = 2A(t)-A^2(t) \qquad kg(t)=A(t)$$

$$kg_s(t) = A^3(t)\left(2A(t)-A^2(t)\right) = 2A^4(t)-A^5(t)$$

$$kg_s^*(t) = kg_{II}(t) \cdot kg_{III}(t)$$



$$1 - kg_{II}(t) = \left(1 - kg_{IV}(t)\right)\left(1 - kg_{V}(t)\right)$$

$$kg_{II}(t) = 1 - \left(1 - kg_{IV}(t)\right)\left(1 - kg_{V}(t)\right)$$

$$kg_{IV}(t) = kg_3(t) \cdot kg_2(t) \cdot kg_1(t) = A^3(t)$$

$$kg_{V}(t) = kg_6(t) \cdot kg_7(t) \cdot kg_8(t) = A^3(t)$$

$$kg_{II}(t) = 1 - \left(1 - A^3(t)\right)\left(1 - A^3(t)\right) = 1 - \left(1 - 2A^3(t) + A^6(t)\right)$$

$$= 3A(t) - 3A^2(t) + A^3(t)$$

$$kg_s^*(t) = \left(2A^3(t) - A^6(t)\right)\left(3A(t) - 3A^2(t) + A^3(t)\right) =$$

$$= 6A^4(t) - 6A^5(t) + 2A^6(t) - 3A^7(t) + 3A^8(t) - A^9(t)$$

$$\downarrow$$

$$\eta_{kg}(t) = \frac{-}{A^6(t) - A^5(t)}$$

2. Wyznaczyć zysk z redundancji z punktu widzenia granicznego prawdopodobieństwa działania systemu.

$$K_g = \frac{\Theta_1}{\Theta_1 + \Theta_2} \qquad \eta = \frac{K_{gs}^*}{K_{g/s}}$$

$$K_g = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{\cancel{a}b}{\cancel{a}(a+b)}$$

$$K_g = \frac{b}{b+a} = B$$

$$\eta_{kg} = \frac{6B^4 - 6B^5 + 2B^6 - 3B^7 + 3B^8 - B^9}{2B^4 - B^5}$$

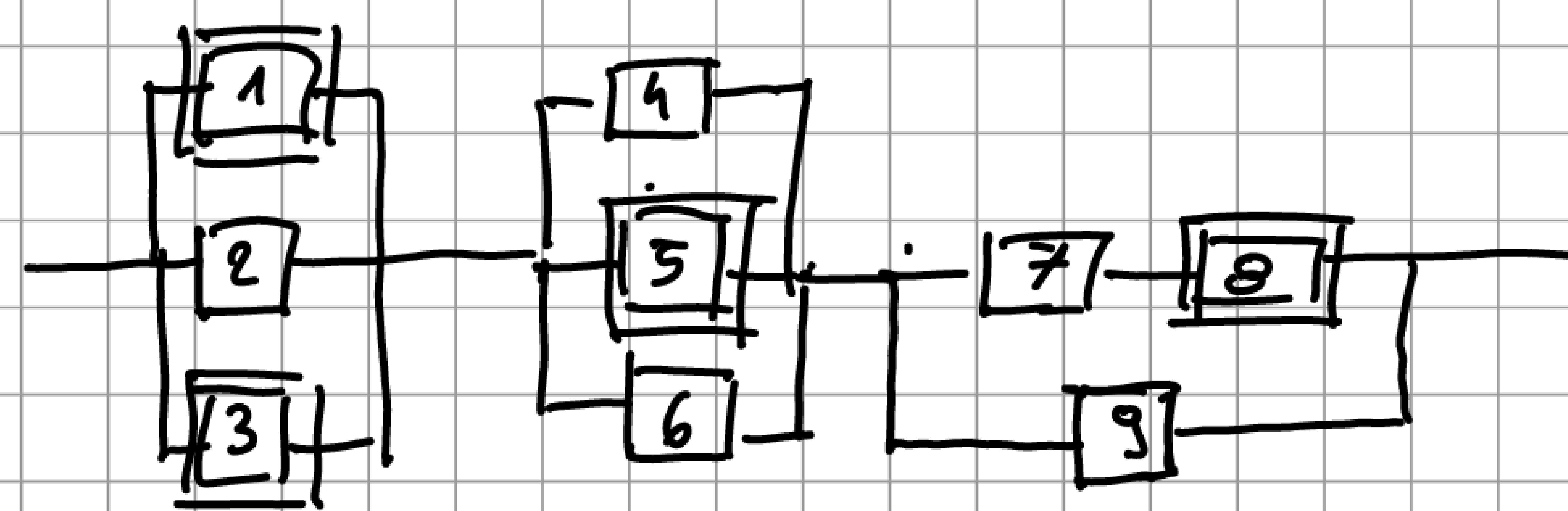
Zad. 2. Czas odnowy - r. gamma z param α, β. Czas odnowy pracy r. Erlanga 6-rzędu z param γ

$$k_g^*(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1-\left(\frac{\gamma}{\gamma+s}\right)^6}{1-\left(\frac{\gamma}{\gamma+s}\right)^6 \cdot \left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^\alpha}$$

rozkład gamma

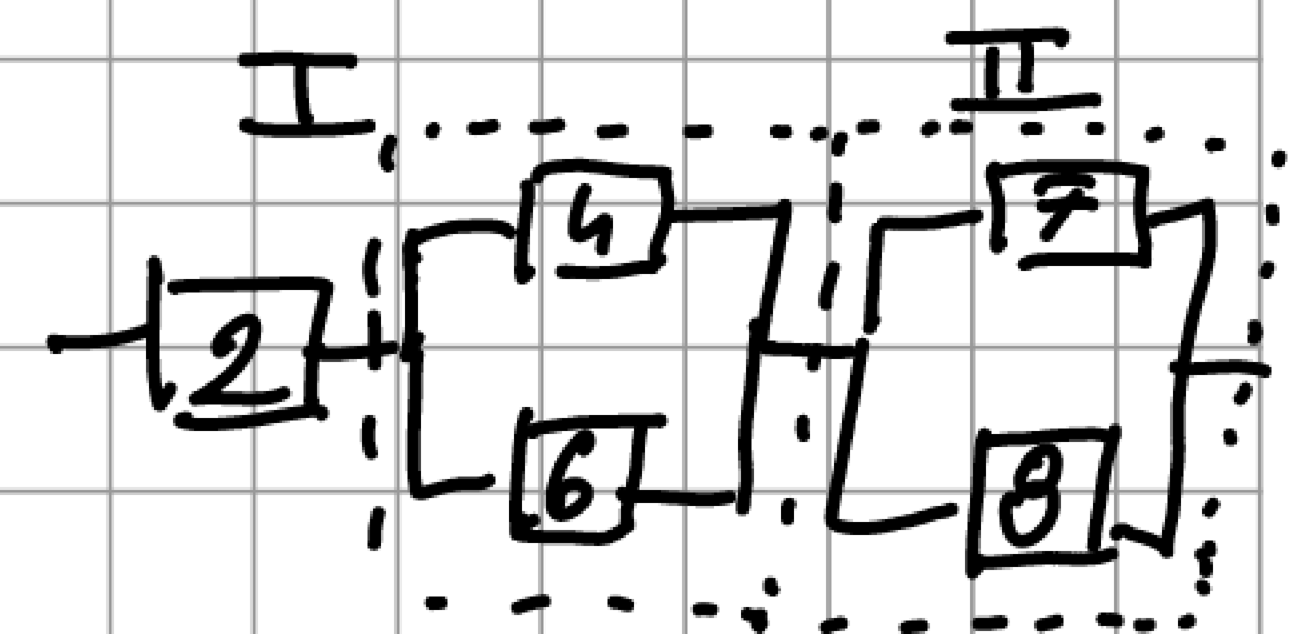
$y, z \Rightarrow \alpha, \lambda$

3. (jak 1)



$$\eta_{kg(t)} = \frac{kg^{*}_{s}(t)}{kg_s(t)}$$

$kg_s(t) = ?$



$$kg_s(t) = kg_2 \cdot kg_I \cdot kg_{II}$$

$$1 - kg_I(t) = (1 - kg_4(t))(1 - kg_6(t))$$

$$kg_I(t) = 1 - (1 - A^2(t)) = -A^2(t) + 2A(t)$$

$$kg_{II}(t) = -A^2(t) + 2A(t)$$

$$kg_s(t) = A(t) \cdot (-A^2(t) + 2A(t))^2$$