第一章 集合、映射与函数

集合是数学中最基础的概念，在各个分支中有着广泛的用途。在集合之间，我们如果定义一种对应法则，那就可以说成是建立了一种映射。函数是特殊的映射。他们都是数学中最基础的概念，因此在第一章，我们将首先开始学习他们。

1.1 集合基本概念与记号

1.1.1 集合与元素

生活中有许多组合，比如超市里的水果整体，貌似构造出了一个更大更宏观的对象。并且我们能够分辨出，哪些水果是属于这个更宏观的对象的，哪些是不属于的。对这种有对象构成的整体的研究是有意义的。

定义 1.1 (集合的定义)

一定范围内确定的、不同的对象构成的宏观上无次序的对象，被称作集合 (set)。♣

不幸的是，集合不太能有一个形式化的定义，我们只能用描述性的自然语言和各种例子去向大家描述这样的数学对象。

定义 1.2 (元素的定义)

集合中的每一个对象称为集合中的元素 (element)。♣

根据以上定义，我们应该知道，集合中的元素应该是确定的、无序的。[1]

同时，定义中的主语是对象 (object)，因此，集合本身也被视为对象。事实上，有下面的公理存在。

公理 1.1

如果 A 是集合，那么 A 也是一个对象。即，当给定集合 A 和集合 B 后，研究集合 A 是否是集合 B 的元素是有意义的。♡

为了更好理解集合和元素的概念，我们给出一些例子帮助读者理解。

例题 1.1 集合 $A = \{1, 4, 5, 7\}$，其中的元素有 $1, 4, 5, 7$。像这样用数字构成的集合，叫做数集。

例题 1.2 集合 $B = \{(2, 3), (4, 5), (-1, 0)\}$，其中的元素有 $(2, 3), (4, 5), (-1, 0)$，其代表着二维欧式空间（或者简单的理解为平面）上的三个点。像这样用点构成的集合，叫做点集。[2]

例题 1.3 全体自然数构成自然数集 $\mathbb{N}$，[3]全体整数构成整数集 $\mathbb{Z}$，全体有理数构成有理数集 $\mathbb{Q}$，全体实数构成实数集 $\mathbb{R}$，全体复数构成复数集 $\mathbb{C}$，全体四元数构成四元数集 $\mathbb{H}$。[4]

例题 1.4 集合 $D = \{A, B\}$，其中 A 和 B 是前文例子中的集合。则集合 D 的元素是集合 A 和集合 B。

像上面例题 1.1、例题 1.2 和例题 1.4 中的集合，他们的元素个数是有限多个，叫做有限集；而像例题 1.3 中的集合，他们的元素个数是无限多个，被叫做无限集。无限集还分为可数集和不可数集，我们将在 1.4.2 节中更细致的介绍。

---

[1]在现行中学数学教材中，还要求集合中的元素互异。但事实上，依据 ZFC 公理化集合论的外延公理，集合 $\{1, 1, 2\}$ 与集合 $\{1, 2\}$ 是相等的，并无依据说如 $\{1, 1, 2\}$ 是非良定义的。中学数学中要求的互异性应该来自于朴素集合论对集合的描述中。

[2]对点这个数学对象的理解，大家参考初中数学平面几何即可。若需要更公理化的理解，需学习《几何原本》第一卷平面几何基础。

[3]自然数的定义在国际上并不明确，有的学者认为其定义为全体正整数，而有的学者认为其定义为全体非负整数。为了减少歧义，我们将在后面尽量避免使用自然数这一概念。

[4]对于这些数具体是怎么构造和抽象出来的，我们放在附录中介绍。

集合也是人们对事物的一种数学抽象，就像小学时大家学的自然数，也是一种很自然的抽象。虽然这一节的定义和例子都比较简单，但是作者希望大家细细琢磨和享受这种抽象的过程，人们对数学的认识也正是来自于抽象。

1.1.2 元素与集合的关系

定义 1.3

若元素 x 是组成集合 A 对象之一，则我们说 x 是 A 的元素，称作 x 属于 A，记作 $x \in A$。
反之，若 x 不是组成集合 A 对象之一，则我们说 x 不是 A 的元素，称作 x 不属于 A，记作 $x \notin A$。♣

这个定义非常的自然，我们能够直观的想象到，给定元素和集合，我们应该能唯一确定他们之间的关系的。换言之，给定元素 x 和集合 A，要么 $x \in A$，要么 $x \notin A$。不存在既属于又不属于的情况。我们在这里简单介绍一下这个情况，至于为什么具体不属于，我们留到后面的公理化集合论再慢慢阐述。

现在，我们就能定义两集合相等了。

在定义集合相等之前，我们先简要介绍一些必要的符号简写。

$\forall$ 是全称量词（对任意的简写），表示“对于所有的”或“对任意的”。

$\exists$ 是存在量词（存在的简写），表示“存在”或“至少有一个”。

s.t. 是“such that”的简写，表示“使得”。

定义 1.4 (集合相等)

两个集合 A 和 B 相等，当且仅当 $\forall x \in A, x \in B$ 且 $\forall y \in B, y \in A$。记作 $A = B$。♣

集合相等的概念是容易被证明有自反性、对称性和传递性的。

定理 1.1 (集合相等的自反性、对称性和传递性)

1. 自反性：$\forall A, A = A$。
2. 对称性：$\forall A, B, A = B \Rightarrow B = A$。
3. 传递性：$\forall A, B, C, A = B$ 且 $B = C \Rightarrow A = C$。

♡

证明

1. 自反性：由定义可知，$A = A$ 当且仅当 $\forall x \in A, x \in A$ 且 $\forall y \in A, y \in A$，显然成立。
2. 对称性：由定义可知，$A = B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$ 且 $\forall y \in B, y \in A$，而 $B = A \Leftrightarrow \forall x \in B, x \in A$ 且 $\forall y \in A, y \in B$，显然成立。
3. 传递性：由定义可知，$A = B$ 且 $B = C \Rightarrow \forall x \in A, x \in B$ 且 $\forall y \in B, y \in C \Rightarrow \forall x \in A, x \in C$。同理可证得 $\forall y \in C, y \in A$，则 $A = C$ 成立。

□

下面我们给出一些例题来帮助读者理解。

例题 1.5 集合 $A = \{x | x = 7k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$，集合 $B = \{x | x = 7k + 6, k \in \mathbb{Z}\}$。证明 $A = B$。

证明

由定义，$\forall x \in A, x = 7k_1 - 1, k_1 \in \mathbb{Z}$，而 $7k_1 - 1 = 7(k_1 - 1) + 6 \equiv 7k_2 + 6, k_2 \in \mathbb{Z}$，则 $x \in B$。
同理，$\forall y \in B, y = 7k_3 + 6, k_3 \in \mathbb{Z}$，而 $7k_3 + 6 = 7(k_3 + 1) - 1 \equiv 7k_4 - 1, k_4 \in \mathbb{Z}$，则 $y \in A$。
综上所述，$A = B$。

□

例题 1.6 已知存在集合 A，集合 B。其中集合 A 是无限集。若集合 $A = B$，求证 B 也是无限集。

证明

由于我们还未对有限集和无限集严格的定义，我们先采用大家对有限集和无限集最朴素的理解。即通过元素个数判断。[5]

我们使用反证法证明。若 B 是有限集，我们设 $\mathrm{card}(B)=n$，[6]即可设 $B=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。由于 $A=B$，则 $\forall y\in A, y\in B$，因此我们不妨设 $y_{a_1}=x_1, y_{a_2}=x_2,\cdots,y_{a_n}=x_n$。又由于 A 是无限集，则 $\exists y_{a_{n+1}}\in A$, s.t. $y_{a_{n+1}}\neq y_i, i=a_1,a_2,\cdots,a_n$。则 $y_{a_{n+1}}\notin B$，与 $A=B$ 矛盾。则假设不成立，即 B 是无限集。

□

上一题的证明实则不太美观和严谨，这是因为我们还未学习映射导致的。在学完本章后，相信读者能给出一个更严谨的证明。

，我们希望有一个特殊的集合，其能够利用各种运算构造出更多的集合。这样的集合应该没有元素，因为如果里面有元素，那其需要能够被更基本的集合构造得到。由此，我们给出空集公理。

公理 1.2 (空集是存在的)

存在一个集合 $\emptyset$，其不包含任何元素。即 $\forall x, x\notin\emptyset$。这个集合被称为空集。如果一个集合不等于空集，则称该集合非空。

为什么一定要强调这个公理呢，是因为没有他我们甚至不能确定这样的集合是否存在。

空集的存在性搞定了，那这样的空集是否唯一呢。

定理 1.2 (空集的唯一性)

若 $\exists\emptyset,\emptyset'$ 都是空集，则 $\emptyset=\emptyset'$。即空集是唯一的。

证明

本定理证明需要用到更多数理逻辑知识，此处暂时不予证明。我们将此处证明放至附录数理逻辑中作为例题展示。

□

1.1.3 集合与集合的关系

上一节我们介绍了元素和集合的关系，这一节我们将介绍集合与集合的关系。事实上，上一节的两集合相等也是集合间的关系。

定义 1.5 (子集)

设 A 和 B 是两个集合，若 $\forall x\in A, x\in B$，则称 A 是 B 的子集 (subset)，记作 $A\subseteq B$。

定义 1.6 (真子集)

设 A 和 B 是两个集合，若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneq B$。

大家结合子集和集合相等的定义，发现子集的要求实际上比集合相等的要求宽泛。同时，类比于集合相等，我们不难发现子集的一些性质。

定理 1.3 (子集的自反性与偏序性)

1. 自反性：$\forall A, A\subseteq A$。
2. 偏序性：$\forall A,B,C, A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$。

证明

1. 自反性：由定义可知，$A\subseteq A$ 当且仅当 $\forall x\in A, x\in A$，显然成立。

[5]这里是利用朴素集合论对有限集和无限集进行定义。因此我们再此处必须承认集合中元素有互异性，这样才能良定义元素的个数。

[6]我们在这里用 $\mathrm{card}(B)$ 表示集合 B 的元素个数。

2. 偏序性：由定义可知，$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C \Rightarrow \forall x \in A, x \in B$ 且 $\forall y \in B, y \in C \Rightarrow \forall x \in A, x \in C$。即 $A \subseteq C$ 成立。

□

定理 1.4 (真子集的偏序性)

$\forall A, B, C, A \subsetneq B$ 且 $B \subsetneq C \Rightarrow A \subsetneq C$。

♡

证明

由定义可知，$A \subsetneq B$ 且 $B \subsetneq C \Rightarrow \forall x \in A, x \in B$ 且 $\forall y \in B, y \in C \Rightarrow \forall x \in A, x \in C$。即 $A \subseteq C$ 成立。

□

同样，我们给读者例题，帮助读者理解这一概念。

例题 1.7 集合 $A = \{1, 2, 3\}$，集合 $B = \{1, 2, 3, 4\}$。试证明 $A \subsetneq B$。

证明

由定义，$\forall x \in A, x \in B$，即 $1, 2, 3 \in B$。因此 $A \subseteq B$。

又由于 $A \neq B$[7]，因此 $A \subsetneq B$。

□

例题 1.8 集合 $\mathbb{Z}_{2n} = \{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\}$ 表示偶数集，集合 $\mathbb{Z}$ 表示整数集。试证明 $\mathbb{Z}_{2n} \subseteq \mathbb{Z}$。

证明

由定义，$\forall x \in \mathbb{Z}_{2n}, x = 2k, k \in \mathbb{Z}$。故 $2k$ 是整数[8]，即 $x \in \mathbb{Z}$。则 $\mathbb{Z}_{2n} \subseteq \mathbb{Z}$。

□

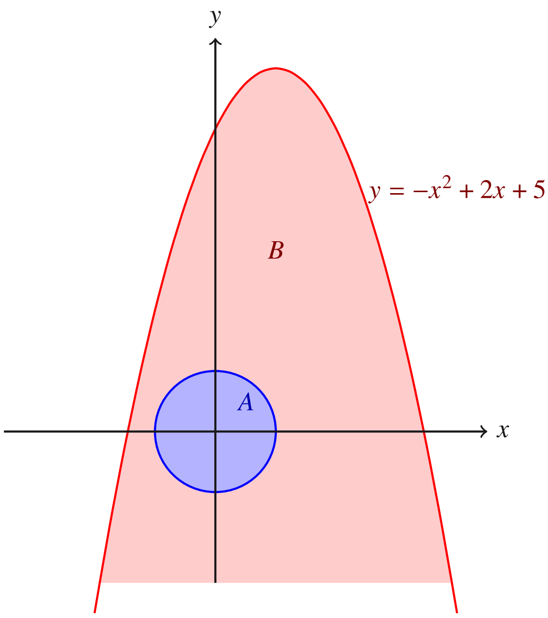
例题 1.9 集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$，集合 $B = \{(x, y) | y \leq -x^2 + 2x + 5\}$。证明 $A \subseteq B$。

证明

集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 表示以原点为圆心、半径为 1 的圆。集合 $B = \{(x, y) \mid y \leq -x^2 + 2x + 5\}$ 表示抛物线 $y = -x^2 + 2x + 5$ 以下（含边界）区域。

几何法：

我们作图观察两者位置关系：



[7] 读者虽然能直接看出两者不相等，但是如果让读者证明希望读者不会忘记。

[8] 为什么整数和整数的乘法结果也是整数，这似乎体现了整数集与乘法之间的关系。我们把一个运算后的结果仍在运算前元素所在集合中的性质叫做运算的封闭性。想想看，你能新定义出具有封闭性性质的运算吗？

从图中可见，圆盘 A 被完全包含在抛物线所围成的区域 B 之下。这是因为抛物线 $y=-x^2+2x+5$ 的最小值在 $x\in[-1,1]$ 上也不小于 2，而圆盘中 $y\le 2$，显然每一点 $(x,y)\in A$ 都满足：

$$y\le 2\le -x^2+2x+5 \Rightarrow (x,y)\in B$$

因此 $A\subseteq B$。

代数法：

我们观察圆盘 A 中的点的范围：因为 $x^2+y^2\le 1$，所以 $x\in[-1,1]$，$y\in[-1,1]$，即 A 被包含在 $[-1,1]\times[-1,1]$ 的矩形中。

考虑函数 $f(x)=-x^2+2x+5$，它的顶点为

$$x=1,\quad f(1)=-1^2+2\cdot 1+5=6$$

所以在 $x\in[-1,1]$ 上，函数 $f(x)$ 最小值大于等于 $f(-1)=2$，即

$$\forall x\in[-1,1],\quad -x^2+2x+5\ge 2$$

而圆盘 A 中所有点 y 均满足 $y^2\le 1\Rightarrow |y|\le 1\Rightarrow y\le 1$，即圆盘内的纵坐标最多为 1，始终低于抛物线 $y=-x^2+2x+5$，因此：

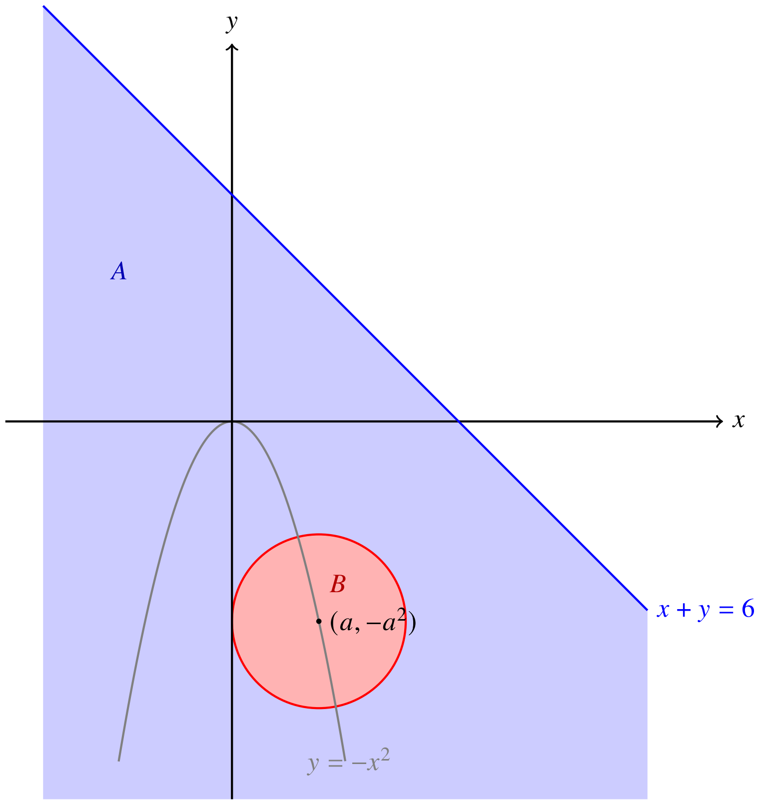
$$\forall (x,y)\in A,\quad y\le 2< -x^2+2x+5\Rightarrow (x,y)\in B$$

故 $A\subseteq B$。

□

例题 1.10 集合 $A=\{(x,y)|x+y-6\le 0\}$，集合 $B=\{(x,y)|(x-a)^2+(y+a^2)^2\le b^2\}$。若 $a,b\in\mathbb{R}$ 的取值满足 $B\subseteq A$，$\forall a, d=\max b$，求 $\dfrac{d}{a}(a\ne 0)$ 的取值范围。

解 如下图，集合 A 表示直线 $x+y=6$ 下方的半平面，集合 $B=\{(x,y)|(x-a)^2+(y+a^2)^2\le b^2\}$ 表示圆心 $(a,-a^2)$ 在抛物线 $y=-x^2$ 上，半径是 b 的圆。



为了满足 $B\subset A$，圆的半径需小于圆心到直线的距离。换言之，圆最大能大到与直线相切。

因此，$b \leq \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|a - a^2 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{a^2 - a + 6}{\sqrt{2}}$。即 $d = \dfrac{a^2 - a + 6}{\sqrt{2}}$。

则 $\dfrac{d}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(a + \dfrac{6}{a} - 1\right), (a \neq 0)$。显然，$\dfrac{d}{a} \in \left(-\infty, -\dfrac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

以上的例题能让大家对这集合之间的关系有着更清晰的认识。

利用例 1.7，我们能够发现证明 $A = B$ 的部分步骤与证明 $A \subseteq B$ 的步骤是相似的。我们猜测，集合相等与子集有一定的关系。

定理 1.5 (集合相等的充要条件)

设 A 和 B 是两个集合，则 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$。

证明

由定义，$A = B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$ 且 $\forall y \in B, y \in A$。即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$。

反之，若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则 $\forall x \in A, x \in B$ 且 $\forall y \in B, y \in A$，则 $A = B$。

□

因此，我们以后证明两集合相等，使用定理 1.5 即可。