数学

啊波呲

2025 年 11 月 27 日

双曲线的常用结论

1. 焦点三角形

定义 双曲线上的一点以及它的两个焦点构成的三角形, 叫做这个双曲线的**焦点三角形**.

我们以焦点在 x 轴的双曲线为例进行研究. 设双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$, 焦点为 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$.

命题 焦点三角形的内切圆圆心横坐标为 a 或 $-a$.

求证: 设 $P(x_0,y_0)$ 是双曲线上的一点, 三角形 PF_1F_2 的内切圆圆心为 I, 分别切 PF_1,PF_2, F_1F_2 于 A,B,C, 则点 I 的横坐标为 a 或 $-a$.

证明 我们来证明点 P 在双曲线的右支时, 内切圆圆心 I 的横坐标为 a.

根据双曲线的定义, 有 $|PF_1|-|PF_2|=2a$, 即

$$(|PA|+|AF_1|)-(|PB|+|BF_2|)=2a.$$

根据圆的切线长定理, 有

$$|PA|=|PB|,\ |AF_1|=|CF_1|,\ |BF_2|=|CF_2|,$$

代入上式, 就得到

$$|CF_1|-|CF_2|=2a.$$

设点 C 的坐标为 $(x_1,0)$, 即

$$x_1-(-c)-(c-x_1)=2a.$$

解得 $x_1=a$. 因为 $CI\perp F_1F_2$, 所以点 I 的横坐标也为 a.

命题 设 $P(x_0,y_0)$ 是双曲线 C 上的一点, 记 $\theta=\angle F_1PF_2$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为

$$S=\frac{b^2}{\tan\dfrac{\theta}{2}}$$

证明 由余弦定理, 有

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}.\\&=\frac{(|PF_1|-|PF_2|)^2+2|PF_1||PF_2|-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}\\&=\frac{(2a)^2+2|PF_1||PF_2|-(2c)^2}{2|PF_1||PF_2|}=1-\frac{2b^2}{|PF_1||PF_2|}.\end{aligned}$$

所以
$$|PF_1||PF_2| = \frac{2b^2}{1-\cos\theta}.$$

于是
$$S = \frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\theta = b^2\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{b^2}{\tan\dfrac{\theta}{2}}.$$

2. 双曲线的渐近线

定理 (双曲线的渐近线方程)

(1) 若双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$, 则它的两条渐近线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$, 即
$$y=\pm\frac{b}{a}x;$$
(2) 若双曲线的方程为 $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1(a>0,b>0)$, 则它的两条渐近线方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=0$, 即
$$y=\pm\frac{a}{b}x.$$

证明 略.

下面讨论焦点在 x 轴上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.

命题 双曲线的焦点到渐近线的距离为常数 b.

证明 考察双曲线的右焦点 $F_2(c,0)$ 到渐近线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 的距离, 有
$$d=\frac{\left|\dfrac{b}{a}c-0\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{b}{a}\right)^2+1}}=\frac{\dfrac{b}{a}c}{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}}=b.$$

命题 过双曲线的焦点向渐近线作垂线, 垂足的坐标为 $\left(\pm\dfrac{a^2}{c},\pm\dfrac{ab}{c}\right)$.

证明 考察双曲线的右焦点 $F_2(c,0)$ 到渐近线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 的垂线.

垂线的斜率为 $-\dfrac{a}{b}$, 故垂线方程为
$$y=-\frac{a}{b}(x-c).$$

由方程组 $\begin{cases} y=\dfrac{b}{a}x, \\ y=-\dfrac{a}{b}(x-c) \end{cases}$ 消去 y, 得 $\dfrac{b}{a}x=-\dfrac{a}{b}(x-c)$. 整理得
$$b^2x+a^2x=a^2c.$$

解得

$$x = \frac{a^2c}{a^2+b^2} = \frac{a^2}{c}.$$

将 $x = \frac{a^2}{c}$ 代入 $y = \frac{b}{a}x$, 得

$$y = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{c} = \frac{ab}{c}.$$

因此, 垂足的坐标为

$$\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right).$$

命题 双曲线上的点到两条渐近线的距离之积为常数 $\frac{a^2b^2}{c^2}$.

证明 双曲线的两条渐近线分别为 $l_{1,2} : \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$, 即

$$l_1 : bx + ay = 0,$$

$$l_2 : bx - ay = 0.$$

设 $P(x_0, y_0)$ 是双曲线上的一点, 则

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2.$$

设 P 到两条渐近线 l_1 和 l_2 的距离分别为 d_1 和 d_2, 则

$$d_1 = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad d_2 = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

于是有

$$\begin{aligned} d_1d_2 &= \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= \frac{|(bx_0 - ay_0)(bx_0 + ay_0)|}{a^2+b^2} \\ &= \frac{|b^2x_0^2 - a^2y_0^2|}{a^2+b^2} = \frac{a^2b^2}{c^2}. \end{aligned}$$

3. 点差法