半代入法求切线方程

啊波呲

2025 年 6 月 22 日

目录

1 极限

在自变量逐渐趋于某个值某个变化过程中, 若对应的函数值无限接近于一个确定的常数, 那么, 这个确定的常数就叫做这一变化的过程中函数的极限.

定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义 (但不一定在点 x_0 处有定义), 如果存在常数 l, 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的一切 x, 恒有 $|f(x) - l| < \epsilon$, 则称当 x 趋于 x_0 时, $f(x)$ 收敛于极限 l. 常数 l 叫做函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的**极限**, 记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

定义 设 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上有定义, 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于满足 $b - \delta < x < b$ 的一切 x, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称当 x 从左边趋于 b 时, $f(x)$ 收敛于极限 A. 常数 A 称为 $f(x)$ 在 x 趋于 x_0 处的左极限, 记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A.$$

定义 设 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上有定义, 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于满足 $a < x < a + \delta$ 的一切 x, 恒有 $|f(x) - B| < \epsilon$, 则称当 x 从右边趋于 b 时, $f(x)$ 收敛于极限 B. 常数 B 称为 $f(x)$ 在 x 趋于 x_0 处的右极限, 记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = B.$$

定理 (极限存在的充要条件) 当且仅当 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 均存在, 并且

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

时, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在.

2 切线与导数

2.1 导数与导函数

导数是函数的瞬时变化率, 几何上表示函数在某一点处切线的斜率. 下面是导数的定义.

定义 设函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 在点 x_0 附近的某个区间内有定义, 当自变量 x 在 x_0 处产生一个增量 Δx, 并且 $(x+\Delta x)$ 也在该区间内时, 函数值相应地取得增量 $\Delta y = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-fx_0}{\Delta x}$. 若 Δy 与 Δx 之比在 Δx 趋于 0 时有极限, 则称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处**可导**, 并称这个极限为 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**导数**, 记作 $f'(x_0)$, 即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 $\Delta x\to 0$ 时的左极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

称为 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**左导数**, 记作 $f'_-(x_0)$;

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 $\Delta x\to 0$ 时的右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

称为 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**右导数**, 记作 $f'_+(x_0)$.

由极限存在的充要条件, 可以得到:

定理 (导数存在的充要条件) 当且仅当函数的在某一点的左右导数均存在且相等时, 函数在这一点可导.

定义 如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 中每一点处都可导, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导.

如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $f(x)$ 在区间左端点 a 处的右导数和右端点 b 处的左导数都存在, 那么 $f'(x)$ 称为区间 $[a,b]$ 的**导函数**, 简称**导数**.

例 1 证明函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

解 因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)}{\Delta x},$$

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=-1,$$
$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=1.$$

因此 $\lim_{\Delta x\to 0^-} \neq \lim_{\Delta x\to 0^+}$, 即 $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$. 由导数存在的充要条件可知, 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

2.2 切线

几何上, 切线指的是一条刚好触碰到曲线上某一点的直线.

设 P 和 Q 是曲线 C 上邻近的两点, P 是定点, 当 Q 点沿着曲线 C 无限地接近 P 点时, 割线 PQ 的极限位置 PT 叫做曲线 C 在点 P 的**切线**, P 点叫做**切点**.

对于一个函数, 如果函数的某处可导, 那么此处的导数就是过此处的切线的斜率, 该点和斜率所构成的直线就为该函数在该点处的切线.

2.3 根据导函数求切线方程

我们以二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 为例. 因为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}&=\frac{a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)-ax^2-bx}{\Delta x}\\&=\frac{a[(x+\Delta x)^2-x^2]+b\Delta x}{\Delta x}\\&=a(2x+\Delta x)+b,\end{aligned}$$

所以

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2ax+b.$$

我们知道函数在某点的导数等于等于函数在这一点切线的斜率. 我们取 $x=x_0$, 设函数在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线

$$l: y-(ax_0^2+bx_0+c)=(2ax_0+b)(x-x_0),$$

整理得

$$y=2ax_0x-ax_0^2+bx+c. \tag{1}$$

即

$$l: y=(2ax_0+b)x+(c-ax_0^2).$$

3 半代入法求切线方程

对 (1) 式做恒等变换, 有

$$y + ax_0^2 + bx_0 + c = 2ax_0x + b(x_0 + x) + 2c.$$

因为 $f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$, 所以上式等价于

$$y + f(x_0) = 2ax_0x + b(x_0 + x) + 2c.$$

观察系数, 我们考虑将等号两边同时除以 2, 得

$$\frac{y + f(x_0)}{2} = ax_0x + b\frac{x_0 + x}{2} + c. \tag{2}$$

我们注意到, 如果将 (2) 式中的 x_0 换回 x, $f(x_0)$ 换回 $f(x)$, 那么 (2) 式就变为 $f(x) = ax^2 + bx + c$.

反过来说, 如果把 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 中的 x^2 变为 $x_0 \cdot x$, x 和 y 分别变为 $\dfrac{x_0 + x}{2}$ 和 $\dfrac{y_0 + y}{2}$, 我们就得到了 $f(x)$ 在 x_0 处的切线方程. 这种代换方法, 看起来像是把每个变量都换掉一半.

$$\begin{aligned} x^2 &\to x_0 \cdot x, \\ x &\to \frac{x_0 + x}{2}. \end{aligned}$$

我们把它叫做**半代入**.

利于半代入法, 二次式降次为了一次式. 事实上, 这种方法不仅适用于求函数的切线方程, 也适用于求其他各种曲线的切线方程.

例 2 利用半代入法, 求圆 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ 在 $x = 3$ 处的切线方程.

解 把 $x = 3$ 代入圆的方程, 解得 $y_1 = 2$, $y_2 = -4$. 下面分别求过圆上两点 $(3, 2)$, $(3, -4)$ 的切线方程.

将方程化为一般式, 得

$$x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0.$$

利用半代入法, 将 $(3, 2)$ 代入方程中, 得

$$3x + 2y - (3 + x) - 1 = 0,$$

即

$$x + y - 2 = 0.$$

同理, 将 $(3,-4)$ 代入方程中, 得

$$3x-4y-(3+x)-1=0,$$

即

$$x-2y-2=0.$$

因此, 所求圆在 $x=3$ 处的两条切线分别为 $x+y-2=0$ 和 $x-2y-2=0$.

4 半代入法的证明