导数例题

啊波呲

2025 年 6 月 22 日

目录

1 隐零点问题

例 1 若存在 $k \in \mathbb{Z}$, 使得不等式

$$x(\ln x+1)>k(x-2)$$

在 $x \in (2,+\infty)$ 恒成立, 求 k 的最大值.

解 题设等价于 $k<\dfrac{x(\ln x+1)}{x-2}$ 对于任意的 $x \in (2,+\infty)$ 恒成立。

令 $g(x)=\dfrac{x(\ln x+1)}{x-2}, x \in (2,+\infty)$, 则

$$g'(x)=\frac{x-2\ln x-4}{(x-2)^2}.$$

令 $\varphi(x)=x-2\ln x-4, x \in (2,+\infty)$, 则恒有

$$\varphi'(x)=1-\frac{2}{x}>0.$$

所以 $\varphi(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 递增.

注意到 $\varphi(8)<0$, $\varphi(10)>0$, 根据零点定理, 存在唯一的 $x_0 \in (8,10)$, 使得 $\varphi(x)=0$, 即

$$x_0-2\ln x_0-4=0. \tag{1}$$

于是, 当 $2<x<x_0$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 递减; 当 $x>x_0$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 递增. 所以

$$g(x) \leqslant g(x_0)=\frac{x_0(\ln x_0+1)}{x_0-2}.$$

代入 (1) 式可得

$$g(x) \leqslant \frac{x_0\left(\dfrac{x_0}{2}-1\right)}{x_0-2}=\frac{x_0}{2}.$$

由此可知 $k<\dfrac{x_0}{2}$. 由 $x \in (8,10)$ 得 $\dfrac{x_0}{2} \in (4,5)$. 因此, 使 $k<\dfrac{x_0}{2}$ 恒成立的最大整数 k 是 4.

即所求 k 的最大值为 4.

例 2 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln ax}{x}-\mathrm{e}\ln x$, 其中 $a>\mathrm{e}$.

(1) 证明: $f(x)$ 存在唯一极值点;

(2) 证明: $f(x)<\mathrm{e}(a-1)$.

证明 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. 对其求导:

$$f'(x)=\frac{1-\ln ax-\mathrm{e}x}{x^2}.$$

令 $\varphi(x)=1-\ln ax-\mathrm{e}x$, 容易看出 $\varphi(x)$ 单调递减. 注意到

$$\varphi\left(\frac{1}{a}\right)=1-\frac{\mathrm{e}}{a}>0,\qquad \varphi\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=1-\ln a<0.$$

又由 $a>\mathrm{e}$ 知 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. 因此 $\varphi(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{e}\right)$ 上存在唯一零点 x_0.

于是, 当 $0<x<x_0$ 时, $\varphi(x)>0$, 即 $f'(x)>0$, $f(x)$ 递增; 当 $x>x_0$ 时, $\varphi(x)<0$, 即 $f'(x)<0$, $f(x)$ 递减. $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的唯一极值点.

(2) 由 (1) 可得 $1-\ln ax_0-\mathrm{e}x_0=0$, 即 $\ln ax_0=1-\mathrm{e}x_0$. 从而

$$f(x_0)=\frac{1}{x_0}-\mathrm{e}\ln x_0-\mathrm{e},\ x_0\in\left(\frac{1}{a},\frac{1}{e}\right).$$

因为 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的唯一极大值, 所以

$$f(x)\leqslant f(x_0)=\frac{1}{x_0}-\mathrm{e}\ln x_0-\mathrm{e}.$$

令 $g(x)=\dfrac{1}{x}-\mathrm{e}\ln x-\mathrm{e}, x\in\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{e}\right)$. 易知 $g(x)$ 是减函数, 所以

$$g(x)<g\left(\frac{1}{a}\right)=a+\mathrm{e}\ln a-\mathrm{e}.$$

即 $f(x)<a+\mathrm{e}\ln a-\mathrm{e}$. 因此, 要证 $f(x)<\mathrm{e}(a-1)$, 只需证明 $a+\mathrm{e}\ln a-\mathrm{e}>\mathrm{e}(a-1)$, 即证

$$\mathrm{e}\ln a-\mathrm{e}a+a<0. \tag{2}$$

令 $h(a)=\mathrm{e}\ln a-\mathrm{e}a+a,\ a\in(e,+\infty)$. 由

$$h'(a)=\frac{\mathrm{e}}{a}-\mathrm{e}+1<1-e+1<0$$

知 $h(a)$ 单调递减. 于是

$$h(a)<h(e)=2\mathrm{e}-\mathrm{e}^2<0.$$

这就证明了不等式 (2). 以上过程均可逆, 于是原不等式得证.

2 对数均值不等式

熟知均值不等式

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1x_2},$$

其中 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 当且仅当 $x_1 = x_2$ 时取等号.

对 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 恒有

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geqslant \frac{x_1-x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} \geqslant \sqrt{x_1x_2},$$

当且仅当 $x_1 = x_2$ 时取等号. 这个不等式称为**对数均值不等式**.

证明 不妨设 $x_1 > x_2 > 0$. 令 $t = x_1/x_2 > 1$, 则 $x_1 = tx_2$, 要证上式, 等价于证明

$$\frac{x_2(t+1)}{2} > \frac{x_2(t-1)}{\ln t} > x_2\sqrt{t}.$$

由于 $x_2 > 0$, 所以等价于证明

$$\frac{t+1}{2} > \frac{t-1}{\ln t} > \sqrt{t}.$$

先证明左侧的不等式

$$\frac{t+1}{2} > \frac{t-1}{\ln t},$$

即证

$$\ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} > 0.$$

构造函数

$$F(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}, t \in (1, +\infty).$$

求导可得 $F(x)$ 在 $x > 1$ 时单调递增, 则

$$F(x) > F(1) = 0.$$

从而左侧得证. 右侧可作类似证明, 于是原不等式成立.