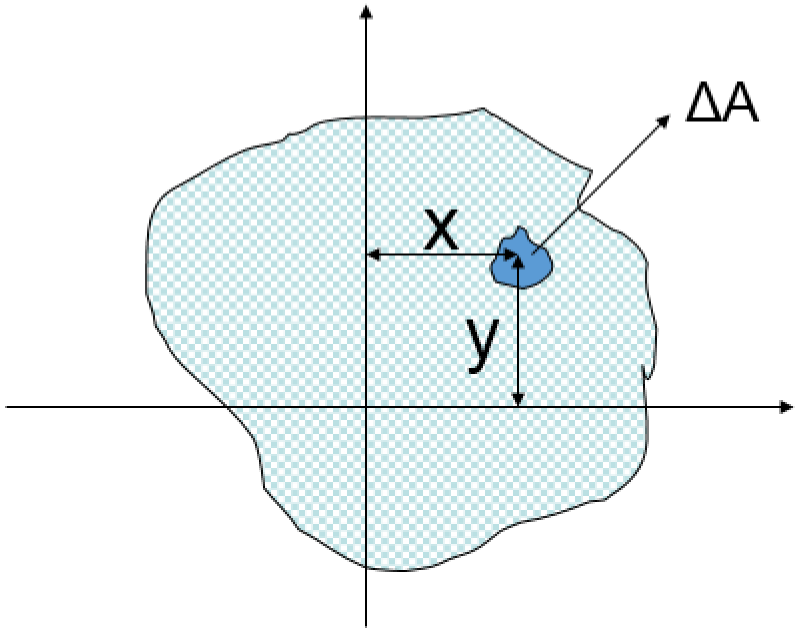
ممان سطح

انتگرال $\int xdA$ به ممان اولیه سطح A نسبت به محور y معروف است و با Q_y نشان داده می شود.



$$Q_y = \int xdA$$

در سطوح ساده تر داریم:

$$Q_y = \bar{x}A$$

به همان طریق برای محور X خواهیم داشت:

$$Q_x = \int y dA$$

در سطوح ساده تر داریم:

$$Q_x = \bar{y} A$$

بنابراین ، می توان نتیجه گرفت که مختصات مرکز سطح را می توان از فرمول های زیر بدست آورد.

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A}$$

ممان اینرسی

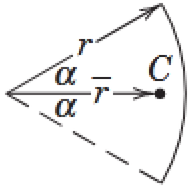
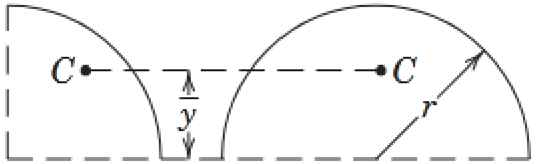
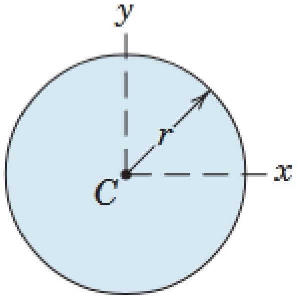
ممان ثانویه یا ممان اینرسی یک سطح:

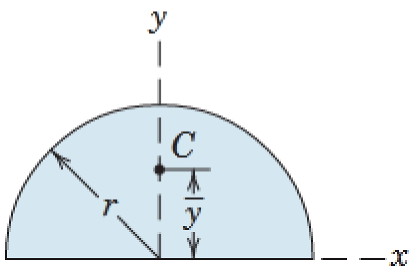
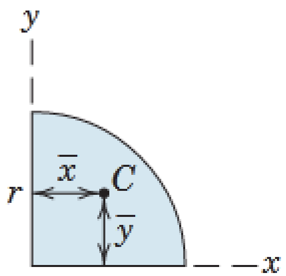
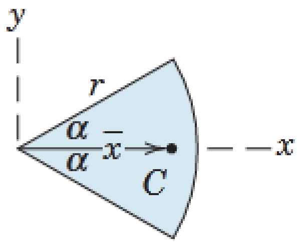
در ممان اولیه، وزن یک جزء Δw با سطح آن متناسب بود و ممان اولیه به سطح بستگی داشت.
ممان ثانویه نه تنها به سطح بستگی دارد، بلکه به فاصله از سطح تا محور داده شده نیز بستگی دارد.

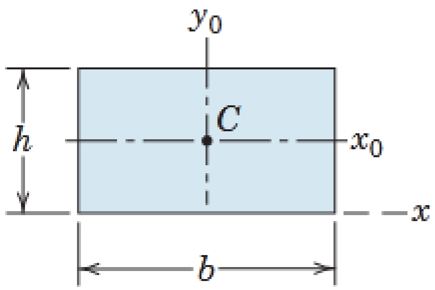
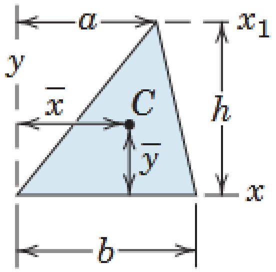
ممان اولیه سطح $Q_x = \int y\,dA$

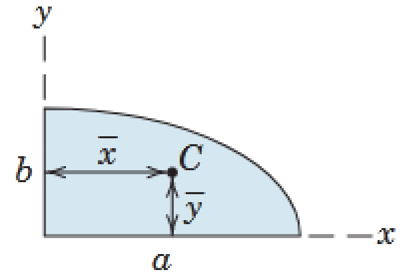
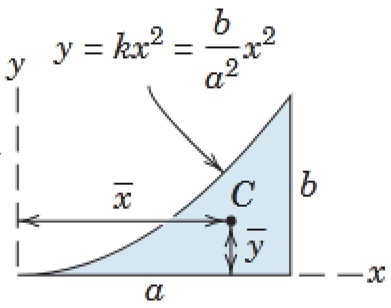
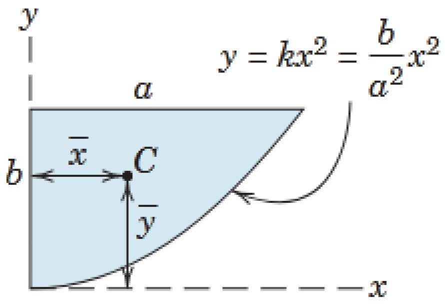
ممان ثانویه (ممان اینرسی) $I_x = \int y^2\,dA$

مرکز سطح و ممان اینرسی در شکل های دوبعدی

	FIGURE	CENTROID	AREA MOMENTS OF INERTIA
قطعاعی از کمان	Arc Segment 	$\bar{r} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	—
نیم و ربع کمان	Quarter and Semicircular Arcs 	$\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	—
سطح دایره ای	Circular Area 	—	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_z = \frac{\pi r^4}{2}$

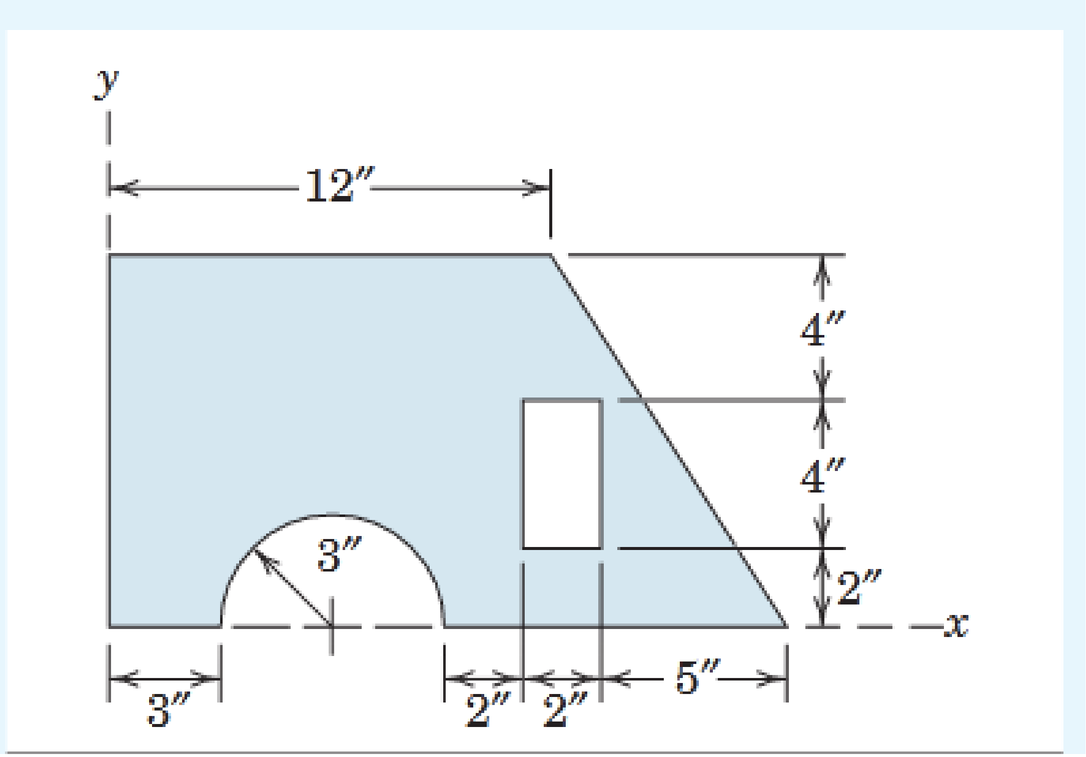
سطح نیم دایره ای	Semicircular Area 	$\bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \dfrac{\pi r^4}{8}$ $\bar{I}_x = \left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{8}{9\pi}\right) r^4$ $I_z = \dfrac{\pi r^4}{4}$
سطح ربع دایره ای	Quarter-Circular Area 	$\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \dfrac{\pi r^4}{16}$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \left(\dfrac{\pi}{16} - \dfrac{4}{9\pi}\right) r^4$ $I_z = \dfrac{\pi r^4}{8}$
سطح بخشی از دایره	Area of Circular Sector 	$\bar{x} = \dfrac{2}{3} \dfrac{r \sin\alpha}{\alpha}$	$I_x = \dfrac{r^4}{4}\left(\alpha - \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$ $I_y = \dfrac{r^4}{4}\left(\alpha + \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$ $I_z = \dfrac{1}{2} r^4 \alpha$

سطح مستطیلی	Rectangular Area 	—	$I_x = \frac{bh^3}{3}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_z = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$
سطح مثلثی	Triangular Area 	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_{x_1} = \frac{bh^3}{4}$

سطح ربع بیضی	Area of Elliptical Quadrant 	$\bar{x} = \dfrac{4a}{3\pi}$ $\bar{y} = \dfrac{4b}{3\pi}$	$I_x = \dfrac{\pi ab^3}{16}, \quad \bar{I}_x = \left(\dfrac{\pi}{16} - \dfrac{4}{9\pi}\right)ab^3$ $I_y = \dfrac{\pi a^3 b}{16}, \quad \bar{I}_y = \left(\dfrac{\pi}{16} - \dfrac{4}{9\pi}\right)a^3 b$ $I_z = \dfrac{\pi ab}{16}(a^2 + b^2)$
سطح زیر سهموی	Subparabolic Area Area $A = \dfrac{ab}{3}$ 	$\bar{x} = \dfrac{3a}{4}$ $\bar{y} = \dfrac{3b}{10}$	$I_x = \dfrac{ab^3}{21}$ $I_y = \dfrac{a^3 b}{5}$ $I_z = ab\left(\dfrac{a^3}{5} + \dfrac{b^2}{21}\right)$
سطح سهموی	Parabolic Area Area $A = \dfrac{2ab}{3}$ 	$\bar{x} = \dfrac{3a}{8}$ $\bar{y} = \dfrac{3b}{5}$	$I_x = \dfrac{2ab^3}{7}$ $I_y = \dfrac{2a^3 b}{15}$ $I_z = 2ab\left(\dfrac{a^2}{15} + \dfrac{b^2}{7}\right)$

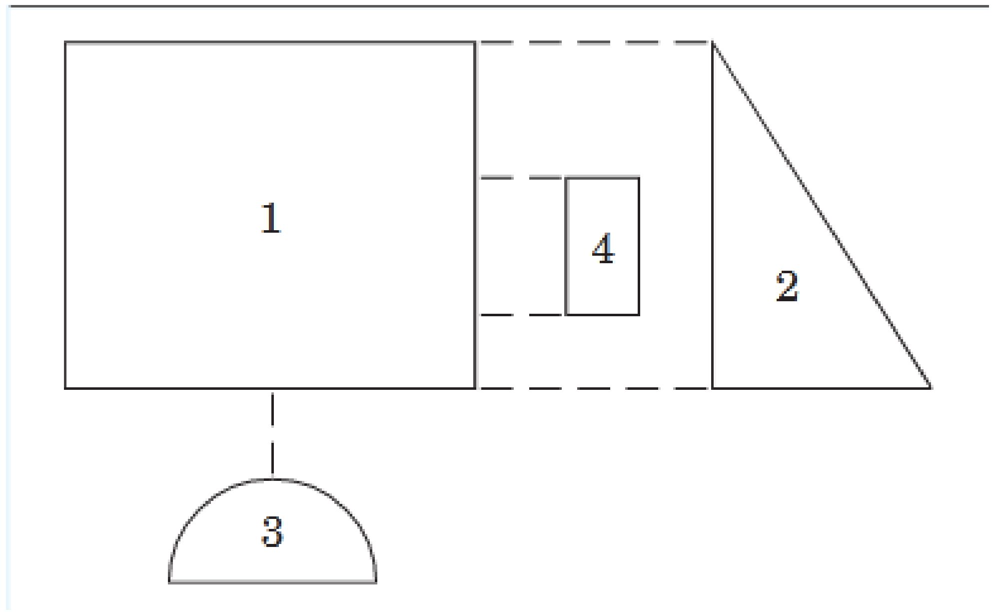
مثال ۱:

مرکز سطح هاشور خورده را در شکل مقابل بیابید.



حل

شکل را بصورت اجزای مقابل تفکیک نموده و قطعات ۳ و۴ را بصورت سطوح منفی لحاظ می نماییم.



با استفاده از مقادیر موجود برای مراکز سطح در جداول خواهیم داشت.

PART	A in.^{2}	$\bar{x}$ in.	$\bar{y}$ in.	$\bar{x}A$ in.^{3}	$\bar{y}A$ in.^{3}
1	120	6	5	720	600
2	30	14	10/3	420	100
3	−14.14	6	1.273	−84.8	−18
4	−8	12	4	−96	−32
TOTALS	127.9			959	650

در نتیجه مختصات مرکز جرم عبارت است از:

$$\left[\bar{X} = \frac{\Sigma A\bar{x}}{\Sigma A}\right] \qquad \bar{X} = \frac{959}{127.9} = 7.50 \text{ in.}$$

$$\left[\bar{Y} = \frac{\Sigma A\bar{y}}{\Sigma A}\right] \qquad \bar{Y} = \frac{650}{127.9} = 5.08 \text{ in.}$$

انتقال ممان اینرسی به محورهای موازی محورهای اصلی:

$$I_x = \Sigma \bar{I}_x + \Sigma A {d_x}^2$$
$$I_y = \Sigma \bar{I}_y + \Sigma A {d_y}^2$$