Отчет по типовому расчету

по дисциплине:

Математический анализ

Вариант 41

Выполнила:
Бунковская Анна
ИСУ 465304
Поток 12.1

1 Задание 1

$$f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

а) $X = [4;+\infty)$ Воспользуемся определением равномерной непрерывности: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x, y\ |x-y| < \delta :\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
Рассмотрим разность:

$$|f(x) - f(y)| = \left|2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x-3}} - 2\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y-3}}\right|$$

$$|f(x) - f(y)| \leq 2|\sqrt{x} - \sqrt{y}| + \left|\frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{1}{\sqrt{y-3}}\right|$$

Так как x принимает значение от 4, то

1. $$2|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{|x-y|}{2}$$

2. $$\left|\frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{1}{\sqrt{y-3}}\right| \leq \frac{|x-y|}{2\sqrt{(x-3)(y-3)}} \leq \frac{|x-y|}{2\cdot 1} = \frac{|x-y|}{2}$$

Получаем:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{2} + \frac{|x-y|}{2} = |x-y|$$

Для любого $\epsilon > 0$ выберем $\delta = \epsilon$. Тогда если $|x-y| < \delta$, то $|f(x)-f(y)| < \epsilon$. Получили, что эта функция равномерно непрерывна на данном полуинтервале

б) $X = (3;5)$ Предел при $= 3$ стремится к ∞, значит функция не является равномерно непрерывной

Задание 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n}+\cdots+\ln\frac{2n}{n})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})$$

это в свою очередь интегральная сумма для $f(x)=\ln(1+x)$ на интервале $[0,1]$.

Интеграл существует, так как данная функция логарифма существует на $[0,1]$ и непрерывна на этом интервале.

Функция $f(x)=\ln(1+x)$ определена и непрерывна на интервале $[0,1]$, так как:

Определение непрерывности:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x_1,x_2\ |x_1-x_2|<\delta:\ |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

Рассмотрим произвольное $x_0\in[0,1]$ и $\epsilon>0$. Найдем $\delta>0$ такое, что для всех $x\in[0,1]$, если $|x-x_0|<\delta$, то $|\ln(1+x)-\ln(1+x_0)|<\epsilon$.

$$|\ln(1+x_1)-\ln(1+x_2)|=\left|\ln\left(\frac{1+x_1}{1+x_2}\right)\right|$$

Так как логарифмическая функция монотонно возрастает, то:

$$\left|\ln\left(\frac{1+x_1}{1+x_2}\right)\right|<\varepsilon\quad\text{если}\quad\frac{1+x_1}{1+x_2}<e^{\varepsilon}\quad\text{и}\quad\frac{1+x_1}{1+x_2}>e^{-\varepsilon}$$

Выберем $\delta=\min\left((1+x_2)(e^{\varepsilon}-1),(1+x_2)(1-e^{-\varepsilon})\right)$. Тогда для всех $x\in[0,1]$, если $|x-x_0|<\delta$, выполняется:

$$|\ln(1+x)-\ln(1+x_0)|<\varepsilon$$

Таким образом, функция $f(x)=\ln(1+x)$ непрерывна на

$$[0,1]$$

.

Найдем предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\ln(1+x)\,dx=(x+1)\ln(x+1)-x\Big|_0^1=2(\ln 2)-1$$

Ответ:

$$2(\ln 2)-1$$

Задание 3

Найти площадь фигуры

$$x = a\sin(4t), \quad y = a\sin t$$

Воспользуемся формулой:

$$S = \int_a^b y(t)x'(t)dt$$

Определим границы интегрируемости: $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ - период без пересечения
Получаем:

$$S = |\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin t \ 4a\cos(4t) \ dt| = 4a^2|\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(5t) - \sin(3t))dt| = 2a^2(\frac{cos(5t)}{5} - \frac{cos(3t)}{3})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

(наложили модуль на случай, если площадь выйдет отрицательной из-за обратного направения кривой) По формуле Ньютона-Лейбнице:

$$S = 2a^2|0 - \frac{2}{15}| = \frac{4a^2}{15}$$

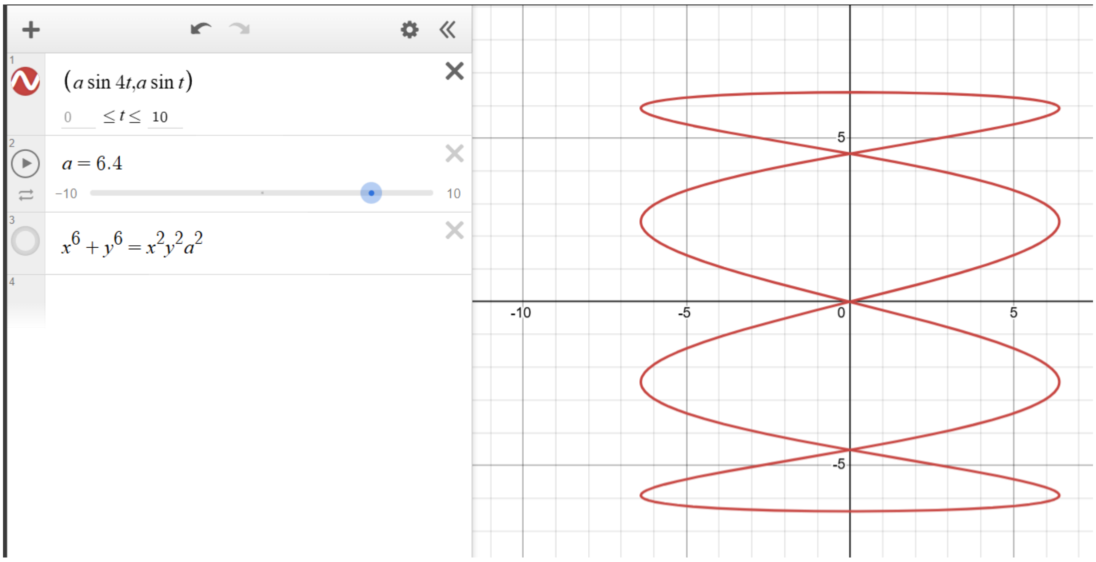

Рис. 1: График кривой, заданной параметрическими уравнениями

Ответ: $\frac{4a^2}{15}$

Задание 4

Найти площадь фигуры
$$x^6 + y^6 = a^2x^2y^2$$

Фигура симметрична относительно абсциссы и ординаты, значит посчитаем площадь для $x > 0, y > 0$ и умножим на 4.

Сделаем замену (переход в полярные координаты):
$x = \rho cos\phi$
$y = \rho sin\phi$
Получим:
$$\rho^6 cos^6\phi + \rho^6 sin^6\phi = a^2\ \rho^2 cos^2\phi\ \rho^2 sin^2\phi$$
$$\rho^2 cos^6\phi + \rho^2 sin^6\phi = a^2\ cos^2\phi\ sin^2\phi$$
$$\rho^2 = \frac{a^2\ cos^2\phi\ sin^2\phi}{cos^6\phi + sin^6\phi}$$
Воспользуемся формулой площади в полярных координатах:
$$S = \frac{1}{2}\int_a^b \rho^2 d\phi$$
Получаем:
$$S = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2\phi\ sin^2\phi}{cos^6\phi + sin^6\phi} d\phi = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sin^2(2\phi)}{4}}{1 - \frac{3sin^2(2\phi)}{4}} d\phi$$
$(\sin^2(2\phi) = 4\sin^2\phi\cos^2\phi)$
$(\cos^6\phi + \sin^6\phi = 1 - 3\cos^2\phi\sin^2\phi = 1 - \frac{3sin^2(2\phi)}{4}$ - разложили как сумма кубов)
Замена: $2\phi = w, d\phi = 2dw$
$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 w}{4 - 3\sin^2 w} dw = \frac{2\arctan(\frac{\tan w}{2})}{3} - \frac{w}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$(\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2})$

$$S = \frac{a^2\pi}{3}$$
Ответ: $\frac{a^2\pi}{3}$

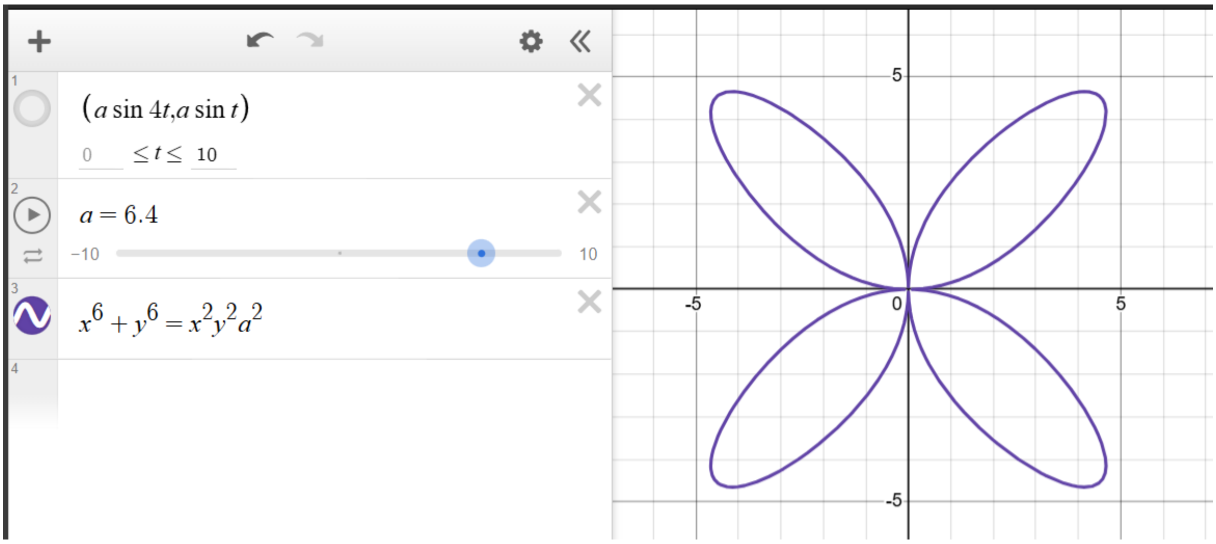

Рис. 2: График фигуры

Задание 5

Кривая задана как пересечение поверхностей. Задайте кривую параметрически и найдите уравнение кривой

$$x^2 = 9y, 16xy = 9z^2, |z| \leq 12$$

Решение:

$$y = \frac{x^2}{9}, z = \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9}$$

$$\left|\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9}\right| \leq 12 \implies x \leq 9$$

Пусть $t = x \in [0, 9]$

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{t^2}{9}, \\ z = \pm\dfrac{4t^{3/2}}{9}. \end{cases}$$

Воспользуемся формулой для параметризации кривой

$$L = \int_0^9 \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt = \int_0^9 \sqrt{1 + \frac{4t^2}{81} + \frac{4t}{9}}dt = \int_0^9 1 + \frac{2t}{9}dt = (t + \frac{t^2}{9})\Big|_0^9 = 18$$

$(x' = 1, \quad y' = \frac{2t}{9}, z' = \pm\frac{2\sqrt{t}}{3})$
Ответ: 18

Задание 6

Исследвоать интеграл на сходимость в каждой особой точке. Если функция меняет знак - на абсолютную и условную сходимость

$$\int_5^\infty \frac{1}{x}\ln\frac{x-5}{x+5}\,dx$$

Особые точки: $x = +\infty$ особая точка.

Найдем эквивалентную замену в окрестноси $+\infty$ (используя разложение по Маклорену):

$$\frac{1}{x}\ln(1+\frac{-10}{x+5}) \sim \frac{1}{x}(\frac{-10}{x+5} - \frac{(\frac{-10}{x+5})^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{10}{x^2+5x}$$

при $x \to +\infty$ дробь стремится к 0 снизу

Сравним с эталонным интегралом

$$-\frac{10}{x^2+5x} \sim -\frac{1}{x^2}$$

так как степень > 1, то сходится на $[5, +\infty)$ по 2 признаку сравнения

Так как интеграл не меняет знак на $[5, +\infty)$, то он сходится абсолютно

Задание 7

Исследвоать интеграл на сходимость в каждой особой точке. Если функция меняет знак - на абсолютную и условную сходимость

$$\int_0^\infty \frac{\ln^{\frac{4}{3}}(1+x^2)}{x^4}\cos\frac{1}{x}dx$$

Особые точки:
$x = 0$ — так как знаменатель обнуляется
$x = +\infty$

$$\ln^{\frac{4}{3}}(1+x^2) \sim x^{\frac{8}{3}}$$

Получаем, при $x \to 0$:

$$\frac{x^{\frac{8}{3}}}{x^4}\cos\frac{1}{x} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\cos\frac{1}{x}$$

$$|\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\cos\frac{1}{x}| \leq \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$$

Сравнивая с эталонным интегралом ($\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}dx$), по второму признаку сходимости получаем, что $\int_0^1$ расходится, так как $\frac{5}{3} > 1$. Значит интеграл расходится

При $x \to \infty$

$$\ln^{\frac{4}{3}}(1+x^2) \sim \ln^{\frac{4}{3}} x^2 \sim \ln^{\frac{4}{3}} x$$

Получаем

$$\frac{\ln^{\frac{4}{3}}(1+x^2)}{x^4}\cos\frac{1}{x} \sim \frac{\ln^{\frac{4}{3}}}{x^4}\cos\frac{1}{x}$$

Сравним с эталонным интегралом $\int_0^\infty \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha}dx$ У нас $\alpha = 4, \beta = 4/3$, получаем абсолютную сходимость

Ответ: расходится

Задание 8

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, [a,b] = [1,e]$$

Аналитический этап

1. Суммы Дарбу: Для n точек разбиения $|\Delta x_k| = \frac{e-1}{n}$ Так как функция убывает, то максимум на подотрезке $M_k = \frac{1}{\sqrt{x_{k-1}}}$, а минимум $m_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}}$

$$I' = \sum_{k=1}^{n} M_k |\Delta x_k| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_{k-1}}} \frac{e-1}{n} = \frac{e-1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + (k-1)\frac{e-1}{n}}}$$

$$I_{\text{‘}} = \sum_{k=1}^{n} m_k |\Delta x_k| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_k}} \frac{e-1}{n} = \frac{e-1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + k\frac{e-1}{n}}}$$

Так как функция непрерывна и убывает на искомом промежутке, то I’ и $I_{\text{‘}}$ спремятся к одному пределу
Получаем, что интеграл Дарбу существует и равен $\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$$\lim_{n \to \infty} I' = \lim_{n \to \infty} I_{\text{‘}} = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_1^e = 2\sqrt{e} - 2\sqrt{1} = 2\sqrt{e} - 2 \approx 1.297$$

2. Критерий Римана интегрируемости: Функция интегрируема по Риману, если:

$$\lim_{\lambda(\tau) \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta x_k) |\Delta x_k| = 0$$

Появляются телескпические суммы

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{x_k}} \right) \Delta x_k = \frac{e-1}{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$$

что стремится к 0, значит критерий Римана выполнен

3. Если $f(x)$ монотонна на $[a,b]$, то она интегрируема по Риману, поэтому докажем монотонность. Производная функции меньше нуля, значит она монотонно убывает

4. По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x}\Bigg|_1^e = 2\sqrt{e} - 2 \approx 1.297$$

Практический этап

Ссылка на гугл колаб с программой, выполняющей практический этап