Отчет по типовому расчету №2

по дисциплине:

Математический анализ

Вариант 12

Выполнила:
Бунковская Анна
ИСУ 465304
Поток 12.1

31 июля 2025 г.

Задание 1

Исследовать на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!e^{n-1}}{n^{n+3}}$$

Представим как:

$$a_n = \frac{(n+1)!}{n^n} \frac{e^{n-1}}{n^3}$$

где первая дробь это медленно растущая функция, а вторая сходится как эквивалентная

$$\sum \frac{1}{n^3}$$

Получаем, что исходный ряд сходится

Для доказательства, воспользовалист ранее выведенным

$$\frac{(n+1)!}{n^n} \sim \frac{n^{3/2}}{e^n}$$

Задание 2

Исследовать на сходимость (абсолютную и условную)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{\pi}{n}}{n}$$

Рассмотрим абсолютную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)|}{n}$$

Так как

$$\cos(\pi/n) \sim 1 - \frac{\pi^2}{2n^2}$$

Получаем

$$\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{n} \sim \frac{1}{n} + C$$

Этот ряд расходится как гармонический

Рассмотрим условную сходимость, воспользуемся признаком Лейбница

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{n} = 0$$

Наша функция убывает, поэтому ряд сходится

Ответ

Абсолютная сходимость - расходится, условная - сходится

Задание 3

$$f_n(x) = exp(-2x^2 - 3nx), E_1 = (0; 1); E_2 = (1; +\infty)$$

Пусть дана последовательность функций $\{f_n\}$, определённых на множестве $E \subset \mathbb{R}$. Говорят, что f_n **сходится равномерно** к функции f на множестве E, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N \, \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Или эквивалентно:

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

На $E_1 = (0; 1)$ функция достигает максимума в $x = 0$ и равна 1

$$sup|f_n(x) - f(x)| = 1$$

значит сходимость неравномерная

На $E_2 = (1; +\infty)$:

$$\sup_{E_2} f_n(x) \leq e^{-2}e^{-3n} \to 0$$

значит сходимость равномерная

Задание 4

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \cos nx}{\sqrt{n} \ln(nx + 2)}, D = (0, 2)$$

б)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n \sin^2 x\right), \quad D_1 = \left(0, \frac{\pi}{4}\right], \quad D_2 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right].$$

0.1 а)

$$f_n(x) = \frac{x \cos(nx)}{\sqrt{n \ln(nx + 2)}}$$

Сделаем оценку

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x \cos(nx)}{\sqrt{n \ln(nx + 2)}} \right| \leq \frac{x}{\sqrt{n \ln(nx + 2)}}$$

На всём интервале $(0, 2)$ сходимость не равномерная, поскольку:

1. Для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и любого $N \in \mathbb{N}$ существует $x \in (0, \frac{1}{N})$ такое, что:

$$\left| \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{x \cos nx}{\sqrt{n} \ln(nx + 2)} \right| \geq \frac{N \cdot (x/2)}{\sqrt{2N} \ln 3} \geq \frac{\sqrt{N}}{4 \ln 3} > \frac{1}{2}$$

- Не выполняется критерий Коши равномерной сходимости

0.2 б)

Так как $\sin^2 x \in (0,1)$, то $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Поточечная сходимость есть.

$$|f_n(x)| \le M_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\delta} = \frac{e^{-\delta}}{1 - e^{-\delta}} < \infty$$

Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно.

Задание 5

Найти сумму

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1) \cdot 4^n}{(2n)!}$$

Разобьем на

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)4^n}{(2n)!} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!}}_{\cos 2} + 2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 4^n}{(2n)!}}_{-2\cos 2} = \cos 2 - 4\cos 2 = -3\cos 2$$

где первая сумма разлодение косинуса в ряд, а второй выразили найдя произволную

Задание 6

Реализация доступна по ссылкам:

- Решение 1
- Решение 2