Выполнила: Бунковская Анна

465304

Номер группы: 12.1

Типовик

√1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-3}{6n-4} = \frac{1}{2}$$

$\exists \varepsilon > 0 \quad \left|\frac{3n-3}{6n-4} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{10}{12n-8}\right| < \varepsilon, \quad n > \frac{5}{\varepsilon 6} + \frac{2}{3}, \quad n_0 = \max\left(\left[\frac{5}{\varepsilon 6} + \frac{2}{3}\right]; 1\right)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = \max\left(\left[\frac{5}{\varepsilon 6} + \frac{2}{3}\right]; 1\right) : \forall n \geq n_0 : \left|\frac{3n-3}{6n-4} + \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{3n-3}{6n-4} = \frac{1}{2}$

√2

$$\lim_{n\to\infty} (3 - \ln(n+1)) = -\infty$$

Покажем, что $\forall M > 0 \quad \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0 \quad 3 - \ln(n+1) < -M$ или равносильное $\ln(n+1) - 3 > M$

$\ln(n+1) > M+3, \quad n+1 > e^{M+3}, \quad n > e^{M+3} - 1$

Если взять $n_0 = [e^{M+3} - 1] + 1$, то $\forall n \geq n_0 : 3 - \ln(n+1) < -M \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} (3 - \ln(n+1)) = -\infty$$

√3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(2n^2-1)} \operatorname{arctg} n = 0$$

$\exists \varepsilon > 0 \quad \left|\frac{n}{2n^2-1} \operatorname{arctg} n\right| < \varepsilon \qquad \left|\frac{n}{2n^2-1} \operatorname{arctg} n\right| < \frac{1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4n} \qquad \frac{\pi}{4n} < \varepsilon$

$\operatorname{arctg} n$ принимает значения $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad n > \frac{\pi}{4\varepsilon}$

$\left|\frac{n}{2n^2-1}\right| < \frac{1}{2n}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = \max\left(\left[\frac{\pi}{4\varepsilon}\right]; 1\right) : \forall n > n_0 : \left|\frac{n}{2n^2-1} \operatorname{arctg} n\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^2-1} \operatorname{arctg} n = 0$

√4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n\sqrt[4]{n^3-2n} + n\sqrt{n^2+2n+8}}{\sqrt[3]{n^6-5n+4} - 3n^2+5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n\sqrt[4]{n^3\left(1-\frac{2}{n^2}\right)} + n\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}}{\sqrt[3]{n^6\left(1-\frac{5}{n^5}+\frac{4}{n^6}\right)} - 3n^2+5n} =$$

$$= \frac{5n \cdot n^{\frac{3}{4}} + n \cdot n}{n^2 - 3n^2 + 5n} = \frac{n(5n^{\frac{3}{4}} + n)}{n(-2n+5)} = \frac{n\left(\frac{5}{\sqrt[4]{n}} + 1\right)}{n\left(-2 + \frac{5}{n}\right)} = \frac{1}{-2}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$

№5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8^{n-3}+6^{2n+1}}{4^n 3^{2n+1}+n^5} = \frac{2^{3n-9}+6\cdot 2^{2n}\, 3^{2n}}{3\cdot 2^{2n}\cdot 3^{2n}+n^5} = \frac{3^{2n}\left(\frac{2^{3n-9}}{3^{2n}}+6\cdot 2^{2n}\right)}{3^{2n}\left(3\cdot 2^{2n}+\frac{n^5}{3^{2n}}\right)} = \frac{6\cdot 2^{2n}}{3\cdot 2^{2n}} = 2$$

Оценим $\frac{2^{3n-9}}{3^{2n}} = \frac{1}{512}\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^n = \frac{1}{1512}\left(\frac{8}{9}\right)^n$ так как $\frac{8}{9}<1$ то $\left(\frac{8}{9}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

- $\frac{n^5}{3^{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ так как это известный предел

Ответ: 2

№6

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{4n+4}+3(n+1)!}{n\cdot n! - 32^{3n}} = \frac{81\cdot 3^{4n}+3(n+1)!}{n\cdot n! - 2^{15n}} = \frac{2^{15n}\left(81\left(\frac{81}{2^{15}}\right)^n + \frac{3(n+1)!}{2^{15n}}\right)}{2^{15n}\left(\frac{n\cdot n!}{2^{15n}} - 1\right)} = 0$$

Воспользуемся знанием известного предела $\frac{a^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\left(\frac{81}{2^{15}}\right)^n \longrightarrow 0$ так как $81 < 2^{15}$

Ответ: 0.

№7.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+7+\ldots+(4n+3)}{8n^2-3} = \frac{(4n+6)(n+1)}{16n^2-6} = \frac{4n^2+10n+6}{16n^2-6} = \frac{n^2\left(4+\frac{10}{n}+\frac{6}{n^2}\right)}{n^2\left(16-\frac{6}{n^2}\right)} = \frac{1}{4}$$

$$\overbrace{3+7+11+\ldots+(4n+3)}^{n+1} = \left(\frac{4n+6}{2}\right)(n+1)$$

$\uparrow n=0$ $\uparrow n=1$ $\uparrow n=2$ $\uparrow n$

№8

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5}{7n+8}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(3-\frac{5}{n}\right)}{n\left(7+\frac{3}{n}\right)}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^{2n} = 0$$

так как $\frac{3}{7}<1$.

№9

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+6}{7n^2-5}\right)^{8n^2-5} \overset{[1^\infty]}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{11}{7n^2-5}\right)^{8n^2-5} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{7n^2-5}{11}}\right)^{\left(\frac{7n^2-5}{11}\right)\frac{(8n^2-5)\cdot 11}{(7n^2-5)}}$$

Пусть $\frac{7n^2-5}{11}=t$ $\lim_{t\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}_{\to e}\right]^{\left(\frac{8n^2-5}{7n^2-5}\right)11} = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n^2-5}{7n^2-5}\right)\cdot 11} =$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\left(88-\frac{5}{n^2}\right)n^2}{\left(7-\frac{5}{n^2}\right)n^2}} = e^{\frac{88}{7}}$$

Ответ: $e^{\frac{88}{7}}$

№10

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{8n^2-4}{2n^2+3}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2(8-\frac{4}{n^2})}{n^2(2+\frac{3}{n^2})}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$$

Воспользуемся значением одного из известных пределов $\sqrt[n]{x_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

Ответ: 1

№11

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{3n^2+2n+4}-\sqrt[3]{3n^2-3n-4}\right)=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3}}\left(\frac{3n^2+2n+4-3n^2+3n+4}{\sqrt[3]{(3n^2+2n+4)^2}+\sqrt[3]{(3n^2+2n+4)(3n^2-3n-4)}+\sqrt[3]{(3n^2-3n-4)^2}}\right)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3}}\left(\frac{5n+8}{\sqrt[3]{n^2(3+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2})}+\sqrt[3]{9n^4-3n^3-3n^2-20n-16}+\sqrt[3]{n^2(3-\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2})}}\right)=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3}}\left(\frac{5n+8}{n^{\frac{4}{3}}3^{\frac{2}{3}}+(9n^4)^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{4}{3}}3^{\frac{2}{3}}}\right)$$

вынесем n^4 за скобки

$$=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3}}\left(\frac{5n+8}{n^{\frac{4}{3}}3^{\frac{2}{3}}+9^{\frac{1}{3}}n^{\frac{4}{3}}+n^{\frac{4}{3}}3^{\frac{2}{3}}}\right)=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3}}\left(\frac{5n+8}{3\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot n^{\frac{4}{3}}}\right)=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3}}\left(\frac{5+\frac{8}{n}}{3^{\frac{5}{3}}\cdot n^{\frac{1}{3}}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{3^{\frac{5}{3}}}=\frac{5}{3^{\frac{5}{3}}}$$

Ответ: $\frac{5}{3^{\frac{5}{3}}}$

Рассмотрим знаменатель

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{(3n^2+2n+4)^2}=3^{\frac{2}{3}}\cdot n^{\frac{4}{3}}$ аналогично с других слагаемых

№12

$$x_n=x_{n-1}+\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

Проверим, получится ли $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0:\ \forall n\geq n_0\ \forall p\in\mathbb{N}:\ |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$

Воспользуемся рекуррентной формулой для преобразования x_{n+p}:

$$x_{n+p}=x_{n+p-1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{n+p}=x_{n+p-2}+\left(\frac{4}{5}\right)^{n+p-1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{n+p}=$$

$$=x_n+\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{n+2}+\ldots+\left(\frac{4}{5}\right)^{n+p-1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{n+p}$$

Тогда $|x_{n+p}-x_n|=\left|\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{n+2}+\ldots+\left(\frac{4}{5}\right)^{n+p-1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{n+p}\right|$

Сумма является геометрическим рядом $S=\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{p-1}}{1-\frac{4}{5}}=\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}}=4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n$

$4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n<\varepsilon$ получаем $n>\log_{\frac{4}{5}}\frac{\varepsilon}{4}$ т.е. для $\forall n\in\mathbb{N}$ $n\geq n_0=\left[\log_{\frac{4}{5}}\frac{\varepsilon}{4}\right]+1$ неравенство $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$ выполняется при $\forall p\in\mathbb{N}$.

№13

$x_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+9}{3k+1}$

По признаку Вейерштрасса, если невозрастающая последовательность ограничена снизу, то она сходится.

Очевидно, что все члены последовательность больше нуля

Рассмотрим монотонность:

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+9}{3n+1} = \frac{2}{3}$, Рассмотрим $\frac{2n+9}{3n+1} \geq \frac{2}{3}$

Последовательность убывает при $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$

$\frac{\frac{2(n+1)+9}{3(n+1)+1}}{\frac{2n+9}{3n+1}} < 1$ При $\frac{2n+11}{3n+4} < 1$ $n > 7$ – последовательность убывает, но при $n \leq 7$ возрастает.

Произведение сходится, так как все члены не отрицательные и начиная с $n=8$ последовательность убывает.

№14

$x_n = \frac{n+5}{n+3} \cdot \arccos\sqrt{\frac{2+(-1)^n}{4}}$

при ~~$n\to\infty$~~ $\lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{n+3} = 1$, Рассмотрим $\arccos\sqrt{\frac{2+(-1)^n}{4}}$:

При $n = 2k$: $\arccos\sqrt{\frac{2+(-1)^{2k}}{4}} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{6}$

При $n = 2k+1$: $\arccos\sqrt{\frac{2+(-1)^{2k+1}}{4}} = \arccos\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{3}$

1) Х изначальную последовательность

$n = 2k$: $\lim_{k\to\infty} \frac{2k+5}{2k+3} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

$n = 2k+1$: $\lim_{k\to\infty} \frac{2k+6}{2k+4} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$n=0$ $x_n = \frac{5\pi}{18}$ $n=3$ $x_n = \frac{4\pi}{9}$

$n=1$ $x_n = \frac{\pi}{2}$

$n=2$ $x_n = \frac{7\pi}{30}$

2) $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \frac{\pi}{3}$

$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \frac{\pi}{6}$

Рассмотрев несколько первых элементов последовательность получаем $\sup x_n = \frac{\pi}{2}$

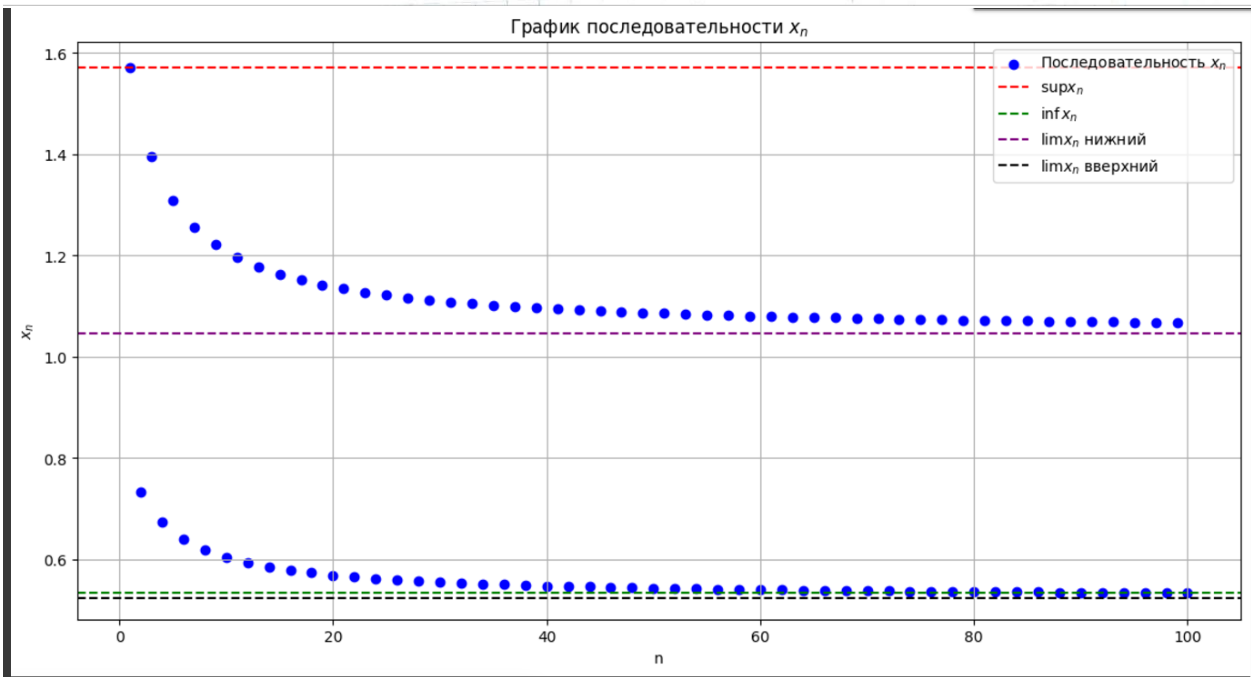
Max x_n = pi/2

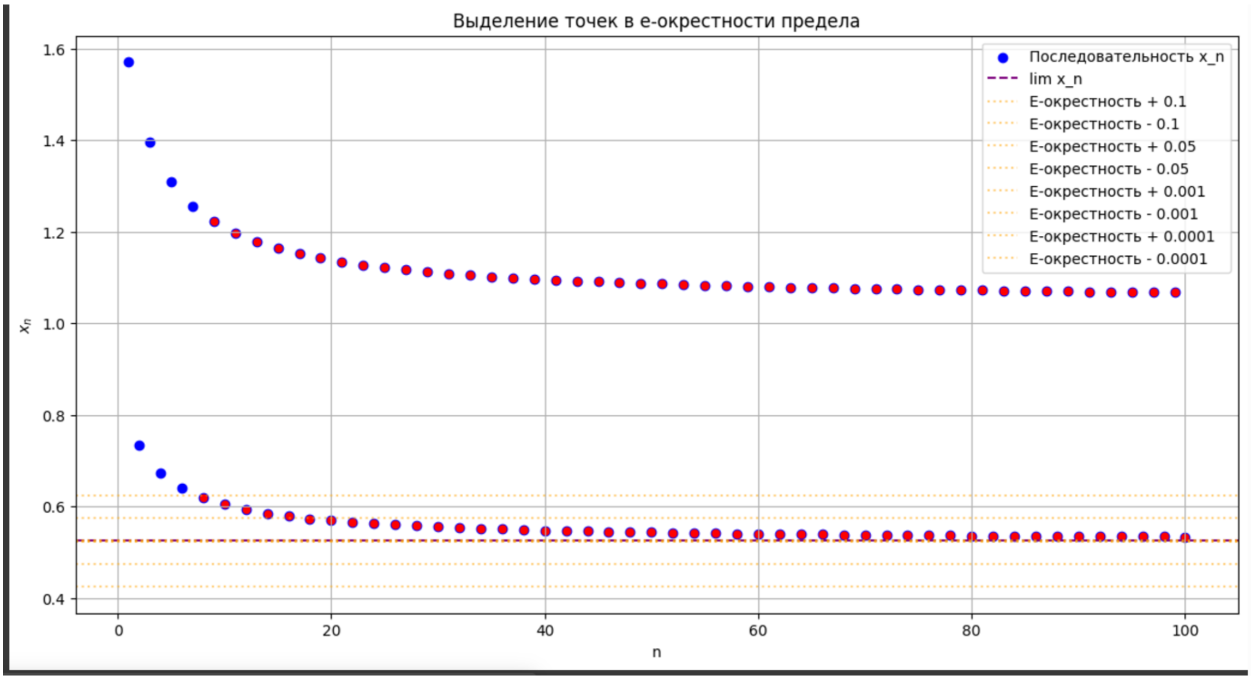
4) $\lim\limits_{2n\to\infty} \frac{2n+5}{2n+3} \arccos\sqrt{\frac{2+(-1)^{2n}}{4}} = \frac{\pi}{6}$

$\exists\, \varepsilon>0 \quad \left|\frac{2n+5}{2n+3}\arccos\sqrt{\frac{2+(-1)^{2n}}{4}} - \frac{\pi}{6}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{2n+5}{2n+3}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{\pi}{6}\cdot\frac{2}{2n+3}\right|<\varepsilon, \quad n > \frac{\pi}{6\varepsilon} - 3, \quad n_0 = \max\left(\left[\frac{\pi}{6\varepsilon}-3\right]; 1\right)$

$\forall \varepsilon \quad \exists\, n_0 = \max\left(\left[\frac{\pi}{6\varepsilon}-3\right], 1\right) : \forall n \geq n_0 \quad \left|\frac{2n+5}{2n+3}\arccos\sqrt{\frac{2+(-1)^{2n}}{4}}-\frac{\pi}{6}\right|<\varepsilon$





https://colab.research.google.com/drive/103P4zg-AXww5bUaE9SY9Mb2pFVD_yL_s#scrollTo=SisWfYfshFmo