

# Теория вероятностей

МФТИ

Осень 2012 г.

## Содержание

Введение	2
Вероятностное пространство	2
Дискретные вероятностные пространства	5
Условные вероятности	7
Системы множеств	8
Независимость событий	11
Вероятностная мера на $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$	12
Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой	14
Вероятностные меры в $\mathbb{R}^n$	17
Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах	19
Случайные элементы	22
Действия над случайными величинами и векторами	24
Характеристики случайных величин и векторов	25
Независимость случайных величин и векторов	32
Неравенства	35
Виды сходимостей случайных величин	36
Усиленный закон больших чисел для случайных величин с ограниченными дисперсиями	39
Предельный переход под знаком $E$	43
Усиленный закон больших чисел для с.в. с конечным математическим ожиданием	44

Замена переменных в интеграле Лебега	47
Прямое произведение вероятностных пространств	50
Слабая сходимость вероятностных мер	52
Предельные теоремы для схемы Бернулли	54
Характеристические функции	55

## Введение

Предмет изучения теории вероятностей:  
Математический анализ случайных явлений.

Эксперименты бывают:

- Детерминированный результат (изучают другие науки)
- Случайный результат (теория вероятностей)

Одиночные результаты случайных экспериментов не позволяют обнаружить закономерности, однако при большом числе результатов однородных случайных экспериментов обнаруживается *устойчивость частот*.

**Пример 1.** Подбрасывание монетки:

Бюффон, XVIII век, 4040 подбрасываний, 2048 раз выпал орел, частота 0,508...

Пирсон, XIX век, 24000 подбрасываний, 12012 раз выпал орел, частота 0,5005...

**Принцип устойчивости частот:**

Частота осуществления какого-либо исхода в последовательности однородных случайных экспериментов сходится к некоторому числу  $p \in [0, 1]$ .

Пусть  $A$  - некоторое событие,  $U_n(A)$  - количество появлений в результатах случайных экспериментов после  $n$  испытаний. Тогда

$$\frac{U_n(A)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p(A) - \text{вероятность события } A.$$

Однако с математической точки зрения это неудобно. Нужно предложить другое определение вероятности, для которого будет наблюдаться устойчивость частот.

## Вероятностное пространство

В основе теории вероятностей лежит понятие вероятностного пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  (т.н. “тройки Колмогорова”)

- ①  $\Omega$  — пространство элементарных событий.  
 $\omega \in \Omega$  — называется элементарным событием.  
В результате случайного эксперимента получаем один и ровно один элемент  $\Omega$ .
- ②  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра подмножеств на  $\Omega$ .  
Элементы  $\mathcal{F}$  называются *событиями*.  
 $\forall A \in \mathcal{F} \implies A \subset \Omega$ .

**Определение 1.** Система подмножеств  $\mathcal{F}$  множества  $\Omega$  называется *алгеброй*, если:

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$
2.  $\forall A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$
3.  $\forall A, B \in \mathcal{F} \implies A \triangle B \in \mathcal{F}$

**Упражнение 1.** Алгебра замкнута относительно операций:

1.  $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$
2.  $A, B \in \mathcal{F} \implies A \setminus B \in \mathcal{F}$
3.  $A \in \mathcal{F} \implies \bar{A} \in \mathcal{F}$

**Определение 2.**  $\bar{A} = \Omega \setminus A$ , называется дополнительным событием к событию  $A$ .

**Пример 2.**

1.  $\mathcal{F}_* = \{\emptyset, \Omega\}$  — тривиальная алгебра
2.  $\mathcal{F}^* = 2^\Omega$  (все подмножества  $\Omega$ ) — дискретная алгебра
3.  $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$  — алгебра “порожденная”  $A$
4. Конечные объединения подмножеств вида  $[a, b), (-\infty; c), [d, +\infty)$  образуют алгебру.

**Определение 3.** Система подмножеств  $\mathcal{F}$  множества  $\Omega$  называется  $\sigma$ -алгеброй, если:

1.  $\mathcal{F}$  — алгебра
2.  $\forall \{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F} \forall n \implies \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$

**Упражнение 2.** Условие  $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$  можно заменить на  $\bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$

**Пример 3.**

1.  $\mathcal{F}_*$  — тривиальная  $\sigma$ -алгебра
2.  $\mathcal{F}^*$  — дискретная  $\sigma$ -алгебра
3.  $\forall$  конечная алгебра является  $\sigma$ -алгеброй.
4.  $[a, b), (-\infty; c), [d, +\infty)$  — не  $\sigma$ -алгебра.

③  $P$  - вероятностная мера на  $(\Omega, \mathcal{F})$

**Определение 4.** Пара  $(\Omega, \mathcal{F})$  множества  $\Omega$  с заданной на нем  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{F}$  называется *измеримым пространством*.

**Определение 5.** Отображение  $P: \mathcal{F} \rightarrow [0; 1]$  называется вероятностной мерой (или вероятностью) на  $(\Omega, \mathcal{F})$ , если:

1.  $P(\Omega) = 1$
2. Для  $\forall$  последовательности  $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F} \forall n$  такой, что  $\forall i \neq j: A_i \cap A_j = \emptyset$  выполнено свойство счетной аддитивности:

$$P\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

**Утверждение 1.**

1.  $P(\emptyset) = 0$
2. Если  $A \cap B = \emptyset$ , то  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  (свойство конечной аддитивности)
3.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
4.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5.  $\forall A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}$   

$$P\left(\bigcup_{n=1}^m A_n\right) \leq \sum_{n=1}^m P(A_n)$$
6. Если  $A \subset B$ , то  $P(A) \leq P(B)$

*Доказательство.*

$$1. \forall n A_n = \emptyset \implies P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset) < +\infty \implies P(\emptyset) = 0$$

$$2. A_1 = A, A_2 = B, A_3 = A_4 = \dots = A_n = \dots = \emptyset$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(A \cup B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = P(A) + P(B)$$

$$3. \Omega = A \sqcup \bar{A} \implies |\text{по 2}| \implies 1 = P(A) + P(\bar{A})$$

$$4. A \cup B = A \sqcup (B \setminus (A \cap B))$$

$$\implies P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B))$$

$$B = (A \cap B) \sqcup (B \setminus (A \cap B))$$

$$\implies P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus (A \cap B))$$

Осталось вычесть одно равенство из другого.

5. Если  $m = 2$  — то это пункт 4).

По индукции

$$P\left(\bigcup_{n=1}^m A_n\right) \leq P(A_m) + P\left(\bigcup_{n=1}^{m-1} A_n\right) \leq |\text{индукция}| \leq P(A_m) + \sum_{n=1}^{m-1} P(A_n) = \sum_{n=1}^m P(A_n)$$

6. Следует из 4).

□

**Определение 6.** Будем обозначать  $A_n \downarrow A$  при  $n \rightarrow +\infty$ , если для последовательности событий  $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$  выполнены свойства:

1.  $A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$
2.  $A = \bigcap_n A_n$

**Теорема 1** (О непрерывности в нуле вероятностной меры). Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  — измеримое пространство, а  $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  удовлетворяет двум свойствам:

1.  $P(\Omega) = 1$
2.  $P$  — конечно-аддитивна.

Тогда  $P$  — вероятностная мера  $\iff P$  — непрерывна в нуле (т.е. если  $A_n \downarrow \emptyset$ , то  $P(A_n) \rightarrow 0$ ).

*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $P$  - вероятностная мера, а  $A_n \downarrow \emptyset$ .

Рассмотрим  $B_m = A_m \setminus A_{m+1}$ . Тогда в силу  $\bigcap_n A_n = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{m=n}^{\infty} B_m = A_n$

Тогда в силу счетной аддитивности  $P(A_n) = \sum_{m=n}^{\infty} P(B_m)$

Но ряд  $P(A_1) = \sum_{m=1}^{\infty} P(B_m)$  сходится  $\Rightarrow \sum_{m=n}^{\infty} P(B_m)$  есть остаток сходящегося ряда  $\Rightarrow P(A_n) \rightarrow 0$

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $P$  непрерывна в нуле.

Покажем её счетную аддитивность:

Пусть  $A_n, n \in \mathbb{N}$  т.ч.  $A_n \in F \forall n$  и  $A_i \cap A_j = \emptyset$  при  $i \neq j$

Рассмотрим  $B_m = \bigcup_{n=m}^{+\infty} A_n$ . Тогда  $B_m \supset B_{m+1} \supset \dots$

Покажем, что  $\bigcap_m B_m = \emptyset$ .

Пусть  $\omega \in \bigcap_m B_m \Rightarrow \omega \in B_1 \Rightarrow \exists k : \omega \in A_k \Rightarrow \omega \notin B_{k+1}$ . Противоречие.

Следовательно,  $\bigcap_m B_m = \emptyset$  и в силу непрерывности в нуле  $P(B_m) \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Далее } P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=1}^m A_n \sqcup B_{m+1}\right) = |\text{конечная аддитивность}| = \\ &= \sum_{n=1}^m P(A_n) + P(B_{m+1}) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n), \quad m \rightarrow \infty \\ \Rightarrow P\left(\bigcup_n A_n\right) &= \sum_n P(A_n) \end{aligned}$$

□

**Следствие 1** (непрерывность вероятностной меры).

1. Если  $A_n \downarrow A$ , то  $P(A_n) \rightarrow P(A)$
2. Если  $A_n \uparrow A$  (т.е.  $A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$ , и  $A = \bigcup_n A_n$ ), то  $P(A_n) \rightarrow P(A)$

*Доказательство.*

1. Надо рассмотреть  $B_n = A_n \setminus A$
2. Надо рассмотреть  $B_n = \overline{A_n}$

□

## Дискретные вероятностные пространства

В дискретном случае множество элементарных исходов  $\Omega$  – счетно или конечно.

Сигма-алгебру  $\mathcal{F}$  на  $\Omega$  выбирают дискретной,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^* = 2^{\Omega}$

Тогда вероятность  $P$  можно задать как функцию на  $\Omega$ :

$$P: \Omega \rightarrow [0, 1], \text{ т.ч. } \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

В этом случае  $\forall A \subset \Omega : P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$

## Ⓘ Классическая модель

В классической модели  $\Omega$  – конечно, все элементарные события равновероятны:

$$\forall \omega \in \Omega : P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Тогда  $\forall A \subset \Omega : P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

### Пример 4.

1. Бросок монеты.  $\Omega = \{\text{Орел}, \text{Решка}\}$ .  
 $P(\text{Орел}) = P(\text{Решка}) = 1/2$

2. Бросок кости.  $\Omega = \{1, \dots, 6\}$   
 $P(i) = 1/6 \quad \forall i = 1 \dots 6$

3. Бросок двух монет. "Заблуждение Даламбера".  $\Omega = \{OO, OP, PP\}$   
Кажется, что все исходы имеют вероятность  $1/3$

Проблема в различимости монет.

Если они различимы, то  $\Omega = \{OO, OP, PO, PP\}$ , и вероятности событий равны  $1/4$   
 $P(\text{выпал 1 орел и 1 решка}) = 1/2$

4. Схема испытаний Бернулли.  $\Omega = \{\vec{w} = (w_1, \dots, w_n) \mid w_i \in \{0, 1\}\}$ .  $|\Omega| = 2^n$   
Эта модель отвечает броскам  $n$  различных монет.

## Ⓜ Геометрические вероятности

Здесь  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  и для  $\Omega$  определен, конечен и положителен его объем  $\mu(\Omega) > 0$ .

Сигма-алгебра  $\mathcal{F}$  состоит из тех  $A \subset \Omega$  для которых тоже определен объем  $\mu(A)$

Тогда вероятность  $P$  задается так:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Подобная модель – естественное продолжение классической модели на случай непрерывных пространств.

### Пример 5. Задача о встрече:

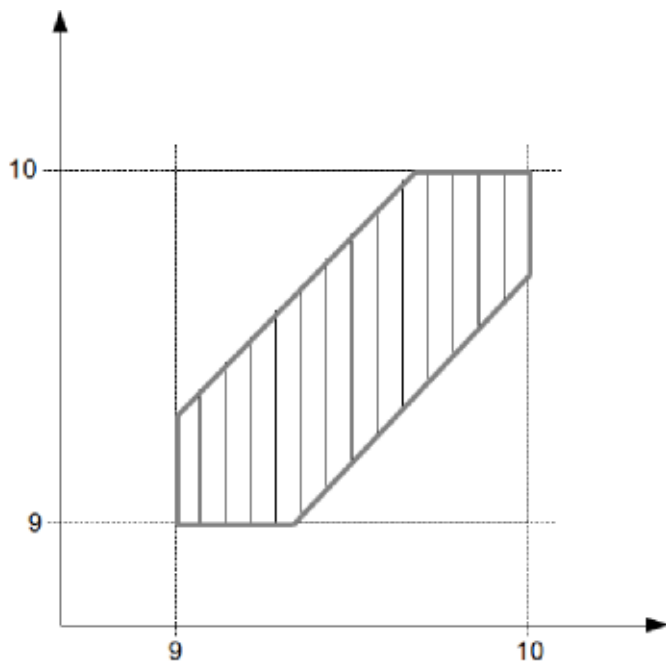
Два товарища договорились встретиться утром на остановке. Каждый приходит в случайное время между 9 и 10, ждет 15 минут, потом уезжает.

Какова вероятность встречи?

**Решение.** Пространство элементарных событий – это квадрат  $[9, 10] \times [9, 10]$ .

Время прихода первого и время прихода второго – случайная точка  $(u, v) \in [9, 10] \times [9, 10]$ .

Изобразим пространство событий геометрически:



Заштрихованная область  $A = \{(u, v) \mid u, v \in [9; 10], |u - v| < 1/4\}$ .

Нужно найти меру этой области:

$$\mu(A) = 1 - (3/4)^2 = 7/16$$

$$\mu(\Omega) = 1$$

$$\Rightarrow P(\text{они встретятся}) = \mu(A)/\mu(\Omega) = 7/16$$

## Условные вероятности

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – вероятностное пространство.

**Определение 1.** Для  $\forall A \in \mathcal{F}$ , т.ч.  $P(A) > 0$  *условной вероятностью* события  $B \in \mathcal{F}$  при условии  $A$  называют

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

если же  $P(A) = 0$ , то  $P(B \mid A) = 0$ ,  $\forall B \in \mathcal{F}$

**Упражнение 3.** Если  $P(A) > 0$ , то функция  $\bar{P}(B) = P(B \mid A)$

тоже является вероятностной мерой на  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

**Определение 2.** Систему событий  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  называют разбиением множества  $\Omega$ , если:

$$1. \forall i \neq j : B_i \cap B_j = \emptyset$$

$$2. \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$$

В этом случае также говорят, что  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  образует полную группу несовместных событий.

**Лемма 1** (формула полной вероятности).

Пусть  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  – разбиение  $\Omega$ . Тогда для  $\forall A \in \mathcal{F}$ :

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \mid B_n)P(B_n)$$



*Доказательство.* Рассмотрим событие  $A$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) = P\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap B_n\right) = \\ &= |\text{счетная аддитивность}| = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A | B_n)P(B_n) \end{aligned}$$

□

**Пример 6.** В ящике всего  $n$  шаров, из них  $k$  - белых. Последовательно, без возвращения, вынимаем по одному шару. Обозначим  $A_j = \{\text{на } j\text{-том шаге вынули белый шар}\}$ .

Доказать:

$$P(A_j) = \frac{k}{n}$$

Первое решение: воспользоваться симметрией.

Второе решение: в лоб

Введем события  $B_j(i) = \{\text{среди первых } j-1 \text{ шара вынули ровно } i \text{ белых}\}$

Тогда  $B_j(i)$  образуют разбиение,  $i = 0 \dots k$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} P(A_j | B_j(i)) &= \frac{k-i}{n-j+1} \\ P(B_j(i)) &= C_{j-1}^i \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)(n-k)\dots(n-k-j+1+i)}{n(n-1)\dots(n-j+1)} = \\ &= \frac{C_{j-1}^i C_k^i i! C_{n-k}^{j-1-i} (j-i-1)!}{C_n^{j-1} (j-1)!} = \frac{C_k^i C_{n-k}^{j-1-i}}{C_n^{j-1}} \end{aligned}$$

Отсюда:

$$P(A_j) = \sum_{i=0}^k \frac{k-i}{n-j+1} \frac{C_k^i C_{n-k}^{j-1-i}}{C_n^{j-1}} = \frac{k}{n} \sum_{i=0}^k \frac{C_{k-1}^i C_{n-k}^{j-1-i}}{C_{n-1}^{j-1}} = \frac{k}{n}$$

**Лемма 2** (формула Байеса).

Пусть  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  - разбиение  $\Omega$ , а  $A \in \mathcal{F} : P(A) > 0$ . Тогда  $\forall n$

$$P(B_n | A) = \frac{P(A | B_n)P(B_n)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(A | B_k)P(B_k)}$$

**Определение 3.**  $P(B_n)$  называется *априорной вероятностью*.

$P(B_n | A)$  называется *апостериорной вероятностью* (относительная вероятность при условии известного результата эксперимента)

## Системы множеств

Пусть  $\Omega$  - некоторое множество

**Определение 1.** Система подмножеств  $\mathcal{M}$  множества  $\Omega$  называется  $\pi$  - *системой*, если  $\forall A, B \in \mathcal{M}$  выполнено  $A \cap B \in \mathcal{M}$

**Определение 2.** Система подмножеств  $\mathcal{L}$  множества  $\Omega$  называется  $\lambda$  - *системой*, если

1.  $\Omega \in \mathcal{L}$

2. Если  $A, B \in \mathcal{L}$  и  $A \subset B$ , то  $B \setminus A \in \mathcal{L}$

3. Если последовательность  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n \in \mathcal{L} \quad \forall n$ ,  
удовлетворяет  $A_n \uparrow A$  (т.е.  $A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$  и  $A = \bigcup_n A_n$ ), то  $A \in \mathcal{L}$

**Лемма 3** (о  $\pi$ - и  $\lambda$ -системах). Система  $\mathcal{F}$  подмножеств  $\Omega$  является  $\sigma$ -алгеброй  
 $\iff$  она является  $\pi$ -системой и  $\lambda$ -системой одновременно.

*Доказательство.*

( $\implies$ ) очевидно.

( $\impliedby$ ) Для  $\forall A, B \in \mathcal{F}$

$\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$  т.к.  $\mathcal{F}$  –  $\lambda$ -система ( $A \subset \Omega$  и  $\Omega \in \mathcal{F}$ , свойство 2)

Также имеется замкнутость относительно  $\cap$  в  $\mathcal{F}$  ( $\mathcal{F}$  –  $\pi$ -система)

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{F}$

$A \cup B = \overline{(\Omega \setminus A) \setminus (B \setminus A)} \in \mathcal{F}$

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$\implies \mathcal{F}$  является алгеброй

Покажем, что она  $\sigma$ -алгебра:

Пусть  $\{B_n, n \in \mathbb{N}\}$  – последовательность элементов из  $\mathcal{F}$ , Проверим, что  $\bigcup_n B_n \in \mathcal{F}$

Положим  $A_m = \bigcup_{n=1}^m B_n$ .

Тогда  $A_m \in \mathcal{F}$  т.к.  $\mathcal{F}$  – алгебра. Кроме того  $A_m \subset A_{m+1}$  и  $A_m \uparrow \bigcup_n B_n = B$

Тогда в силу свойства 3)  $\lambda$ -системы,  $B \in \mathcal{F}$ . Значит  $\mathcal{F}$  –  $\sigma$ -алгебра

□

**Пример 7.**  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathcal{L} = \{\emptyset; (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (3, 4); \Omega\}$

Тогда  $\mathcal{L}$  – это  $\lambda$ -система, но не алгебра.

**Лемма 4** (о существовании минимальной системы).

Пусть  $\mathcal{M}$  – система подмножеств  $\Omega$ .

Тогда существует минимальная (по включению) алгебра (или  $\sigma$ -алгебра,  $\pi$ -система,  $\lambda$ -система) содержащая  $\mathcal{M}$  и обозначаемая  $\mathcal{L}(\mathcal{M})$  ( $\sigma(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M})$ )

*Доказательство.* Рассмотрим  $\mathcal{F}^* = 2^\Omega$  – дискретная  $\sigma$ -алгебра. Она является алгеброй ( $\sigma$ -алгеброй,  $\pi$ -системой,  $\lambda$ -системой), содержащей  $\mathcal{M}$ , т.е. множество интересующих нас систем не пусто.

Рассмотрим  $\alpha(\mathcal{M})$  ( $\sigma(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M})$ ) – пересечение всех алгебр ( $\sigma$ -алгебр,  $\pi$ -систем,  $\lambda$ -систем), содержащих  $\mathcal{M}$ . Тогда  $\alpha(\mathcal{M})$  ( $\sigma(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M})$ ) тоже будет являться алгеброй ( $\sigma$ -алгеброй,  $\pi$ -системой,  $\lambda$ -системой), содержащей  $\mathcal{M}$ .

При этом она будет минимальной по включению.

□

**Пример 8.**

1. Пусть  $\mathcal{M} = \{(a, b) \mid a < b \in \mathbb{R}\}$  – система интервалов.

Тогда минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathcal{M}$ , называется борелевской  $\sigma$ -алгеброй на прямой и обозначается  $B(\mathbb{R})$

$$B(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{M})$$

2. Рассмотрим в  $\mathbb{R}^n$  систему подмножеств вида

$$\mathcal{M} = \{ B_1 \times \dots \times B_n \mid B_i \in B(\mathbb{R}) \}$$

$$\mathcal{M} = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in B_i \quad \forall i = 1 \dots n \}$$

Тогда минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathcal{M}$  называется *борелевской  $\sigma$ -алгеброй* в  $\mathbb{R}^n$  и обозначается  $B(\mathbb{R}^n)$

3.  $\mathbb{R}^\infty = \{ (x_1, x_2, \dots) \mid x_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \}$  – числовые последовательности.

Для  $\forall n \forall B_n \in B(\mathbb{R}^n)$  введем

$$\mathcal{M}_n(B_n) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^\infty, \vec{x} = (x_1, x_2, \dots) \mid (x_1, \dots, x_n) \in B_n \}$$

– цилиндр с основанием  $B_n$

Минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все цилиндры, называется борелевской  $\sigma$ -алгеброй в  $\mathbb{R}^\infty$  и обозначается  $B(\mathbb{R}^\infty)$ . Формально:

$$B(\mathbb{R}^\infty) = \sigma(\{ \mathcal{M}_n(B_n) \mid n \in \mathbb{N}, B_n \in B(\mathbb{R}^n) \})$$

**Теорема 2** (о монотонных классах).

Пусть  $\mathcal{M}$  –  $\pi$ -система на  $\Omega$ . Тогда  $\lambda(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{M})$ .

*Доказательство.* Заметим, что  $\sigma(\mathcal{M})$  –  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathcal{M} \implies \sigma(\mathcal{M})$  –  $\lambda$ -система, содержащая  $\mathcal{M} \implies \lambda(\mathcal{M}) \subset \sigma(\mathcal{M})$  в силу минимальности.

Согласно лемме о  $\pi$ - и  $\lambda$ -системах для того, чтобы доказать  $\sigma(\mathcal{M}) \subset \lambda(\mathcal{M})$ , достаточно проверить, что  $\lambda(\mathcal{M})$  является  $\pi$ -системой.

Действительно, тогда  $\lambda(\mathcal{M})$  будем  $\sigma$ -алгеброй, содержащей  $\mathcal{M} \implies \sigma(\mathcal{M}) \subset \lambda(\mathcal{M})$

Рассмотрим следующую систему подмножеств:

$$\mathcal{M}_1 = \{ B \in \lambda(\mathcal{M}) \mid \forall A \in \mathcal{M} \hookrightarrow A \cap B \in \lambda(\mathcal{M}) \}$$

Покажем, что  $\mathcal{M}_1$ , является  $\lambda$ -системой,

1.  $\Omega \in \mathcal{M}_1$ ? Для  $\forall A \in \mathcal{M}$

$$\Omega \cap A = A \in \mathcal{M} \subset \lambda(\mathcal{M}) \implies \Omega \in \mathcal{M}_1.$$

2. Пусть  $A, B \in \mathcal{M}_1$  и  $A \subset B$ . Верно ли, что  $B \setminus A \in \mathcal{M}_1$ ?

$$\text{Пусть } C \in \mathcal{M}. \text{ Тогда } (B \setminus A) \cap C = (B \cap C) \setminus (A \cap C)$$

Причем  $(A \cap C) \subset (B \cap C) \implies$  по свойству 2)  $\lambda$ -системы получаем, что  $(B \setminus A) \cap C \in \lambda(\mathcal{M}) \implies (B \setminus A) \in \mathcal{M}_1$

3. Пусть  $\{B_n, n \in \mathbb{N}\}$  – последовательность из  $\mathcal{M}_1$ , причем  $B_n \uparrow B$ . Верно ли, что  $B \in \mathcal{M}_1$ ?

Для  $\forall A \in \mathcal{M} \quad (B_n \cap A) \uparrow (B \cap A)$ . Но  $(B_n \cap A) \in \lambda(\mathcal{M}) \implies (B \cap A) \in \lambda(\mathcal{M})$  по свойству 3)  $\lambda$ -системы.  $\implies B \in \mathcal{M}_1$ .

Мы показали, что  $\mathcal{M}_1$  –  $\lambda$ -система.

В силу того, что  $\mathcal{M}$  –  $\pi$ -система,  $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1 \implies \lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_1$ . В силу минимальности. Но  $\mathcal{M}_1 \subset \lambda(\mathcal{M})$  по построению.

Следовательно,  $\lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_1$ , т.е.  $\forall A \in \lambda(\mathcal{M}) \quad \forall B \in \mathcal{M} \quad A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})$  (\*)

Рассмотрим систему

$$\mathcal{M}_2 = \{ B \in \lambda(\mathcal{M}) \mid \forall A \in \lambda(\mathcal{M}) \hookrightarrow A \cap B \in \lambda(\mathcal{M}) \}$$

Точно также проверяется, что  $\mathcal{M}_2$  – это  $\lambda$ -система.

$\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_2$  т.к.  $\forall X \in \mathcal{M} : X \in \mathcal{M}_2$  (см. (\*)). Значит  $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_2 \implies \lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_2$

Значит  $\lambda(\mathcal{M})$  –  $\pi$ -система. То есть

$$\forall A, B \in \lambda(\mathcal{M}) \hookrightarrow A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})$$

□

**Следствие 1.** Пусть  $\mathcal{M}$  –  $\pi$ -система на  $\Omega$ ,  $\mathcal{L}$  –  $\lambda$ -система на  $\Omega$ ,  $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ . Тогда  $\sigma(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$

*Доказательство.* В силу минимальности  $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$ . По теореме о монотонных классах  $\sigma(\mathcal{M}) = \lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$ . □

## Независимость событий

**Определение 1.** События  $A$  и  $B$  на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  называются *независимыми*, если

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

**Упражнение 4.** Пусть  $A$  и  $B$  независимы. Тогда независимыми будут и такие пары:  
 $\overline{A}, B$     $A, \overline{B}$     $\overline{A}, \overline{B}$

**Определение 2.** Набор событий  $A_1 \dots A_n$  называются попарно независимыми, если  $\forall i \neq j$   $A_i$  независимо с  $A_j$ .

**Определение 3.** События  $A_1 \dots A_n$  называются независимыми в совокупности, если  $\forall k \leq n, \forall i_1, \dots, i_k : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  выполнено:

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$$

**Определение 4.** Системы событий  $\mathcal{M}_1 \dots \mathcal{M}_n$ ,  $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{F}$  называются *независимыми в совокупности*, если  $\forall A_1 \in \mathcal{M}_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n$  события  $A_1 \dots A_n$  – независимы в совокупности.

**Лемма 5** (критерий независимости  $\sigma$ -алгебр).

Пусть  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  –  $\pi$ -системы в  $\mathcal{F}$ . Тогда  $\sigma(\mathcal{M}_1)$  и  $\sigma(\mathcal{M}_2)$  независимы  $\iff \mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  – независимы.

*Доказательство.*

( $\implies$ ) очевидно из определения

( $\impliedby$ ) используем принцип подходящих множеств.

Рассмотрим такую систему:

$$\mathcal{L}_1 = \{ A \in \sigma(\mathcal{M}_2) \mid A \text{ независимо с } \mathcal{M}_1 \}$$

Проверим, что  $\mathcal{L}_1$  – это  $\lambda$ -система.

1.  $\Omega \in \mathcal{L}_1$ ?

$$P(\Omega \cap A) = P(A) = P(A)P(\Omega) \implies \text{независимы} \implies \Omega \in \mathcal{L}_1$$

2. Пусть  $A, B \in \mathcal{L}_1$ , причем  $A \subset B$ .  $B \setminus A \in \mathcal{L}_1$ ?

Пусть  $C \in \mathcal{M}_1$ . Тогда

$$\begin{aligned} P(B \setminus A \cap C) &= P((B \cap C) \setminus (A \cap C)) = P(B \cap C) - P(A \cap C) = \\ &= P(B)P(C) - P(A)P(C) = (P(B) - P(A))P(C) = P(B \setminus A)P(C) \\ &\implies B \setminus A \text{ независимо с } C \implies \text{независимо с } \mathcal{M}_1 \implies B \setminus A \in \mathcal{L}_1 \end{aligned}$$

3. Пусть  $B_n \uparrow B, B_n \in \mathcal{L}_1$ . Верно ли, что  $B \in \mathcal{L}_1$ ?

Да:

Пусть  $A \in \mathcal{M}_1$ . Тогда  $(B_n \cap A) \uparrow (B \cap A)$ .

$$P(B \cap A) = |\text{по теореме о непрерывности меры}| = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n \cap A) =$$

$$= |B_n \in \mathcal{L}_1 \implies B \text{ независимо с } A| = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n)P(A) = |\text{по теореме о непрерывности}| = P(B)P(A)$$

$$\implies B \text{ и } A \text{ независимы} \implies B \in \mathcal{L}_1$$

Значит  $\mathcal{L}_1$  –  $\lambda$ -система. По условию мы знаем, что  $\mathcal{M}_2$  независима с  $\mathcal{M}_1 \implies \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{L}_1 \implies$  по следствию из теоремы о монотонности  $\implies \sigma(\mathcal{M}_2) \subset \mathcal{L}_1 \iff$  т.е.  $\sigma(\mathcal{M}_2)$  независимо с  $\mathcal{M}_1$

Рассмотрим по аналогии

$$\mathcal{L}_2 = \{ A \in \mathcal{F} \mid A \text{ независимо с } \sigma(\mathcal{M}_2) \}$$

Аналогично  $\implies \mathcal{L}_2$  –  $\lambda$ -система.

По теореме о монотонных классах, в силу того, что  $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{L}_2$ , получаем, что  $\sigma(\mathcal{M}_1) \subset \mathcal{L}_2 \implies \sigma(\mathcal{M}_1)$  независимо с  $\sigma(\mathcal{M}_2)$ .

□

**Следствие 1.** Пусть  $\mathcal{M}_1 \dots \mathcal{M}_n$  –  $\pi$ -системы в  $\mathcal{F}$ . Тогда  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$  независимы в совокупности  $\iff \sigma(\mathcal{M}_1), \dots, \sigma(\mathcal{M}_n)$  независимы в совокупности.

**Определение 5.** Пусть  $\{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$  – произвольный набор систем событий из  $\mathcal{F}$ . Тогда этот набор называется независимым в совокупности, если  $\forall n \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathfrak{A}, \alpha_i \neq \alpha_j$ , системы  $\mathcal{M}_{\alpha_1} \dots \mathcal{M}_{\alpha_n}$  независимыми в совокупности, то есть любой конечный поднабор независим.

## Вероятностная мера на $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$

**Теорема 3** (Каратеодори, о продолжении меры). Пусть  $\Omega$  – некоторое множество,  $\mathcal{A}$  – алгебра на нем,  $P_\sigma$  – вероятностная мера на  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Тогда  $\exists!$  вероятностная мера  $P$  на  $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$ , являющаяся продолжением меры  $P_\sigma$ , т.е.  $\forall A \in \mathcal{A} \hookrightarrow P_\sigma(A) = P(A)$

**Лемма 6.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  – измеримое пространство,  $\mathcal{M}$  –  $\pi$ -система в  $\mathcal{F}$ , а  $P$  и  $Q$  – две вероятностные меры на  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Тогда если  $P|_{\mathcal{M}} = Q|_{\mathcal{M}}$ , то

$$P|_{\sigma(\mathcal{M})} = Q|_{\sigma(\mathcal{M})}$$

*Доказательство.* Рассмотрим

$$\mathcal{L} = \{ A \in \mathcal{F} \mid P(A) = Q(A) \}$$

Покажем, что  $\mathcal{L}$  – это  $\lambda$ -система.

$$1. \Omega \in \mathcal{L} : P(\Omega) = Q(\Omega)$$

$$2. \text{ Пусть } A, B \in \mathcal{L}. A \subset B \implies$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A) = Q(B) - Q(A) = Q(B \setminus A) \implies (B \setminus A) \in \mathcal{L}$$

$$3. \text{ Пусть } A_n \uparrow A, A_n \in \mathcal{L} \quad \forall n. \text{ Тогда}$$

$$P(A) = |\text{непрерывность вероятностной меры}| = \lim_n P(A_n) = \lim_n Q(A_n) =$$

$$= |\text{непрерывность вероятностной меры}| = Q(A)$$

$$\implies A \in \mathcal{L}$$

Доказали, что  $\mathcal{L}$  –  $\lambda$ -система. По условию  $\mathcal{M} \subset \mathcal{L} \implies \lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$ . По теореме о монотонных классах получаем, что  $\sigma(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$ , т.е.

$$P|_{\sigma(\mathcal{M})} = Q|_{\sigma(\mathcal{M})}$$

□

**Следствие 1** (единственность в теореме Каратеодори).

Пусть  $P$  и  $Q$  – два продолжения  $P_\sigma$  на  $\sigma(\mathcal{A})$ . Но  $\mathcal{A}$  – алгебра  $\implies \pi$ -система.

$$P|_{\mathcal{A}} = P_\sigma = Q|_{\mathcal{A}}$$

$\implies$  по лемме получаем, что  $\forall A \in \sigma(\mathcal{A})$   
 $P(A) = Q(A)$ , т.е. продолжение единственно.

Пусть  $P$  – вероятностная мера на  $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$

**Определение 1.** Функция  $F(x), x \in \mathbb{R}$ , заданная по правилу

$$F(x) = P((-\infty, x])$$

называется *функцией распределения вероятностной меры  $P$* .

**Лемма 7** (свойства функции распределения).

Пусть  $F(x)$  – функция распределения вероятностной меры  $P$ . Тогда

1.  $F(x)$  – неубывающая
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
3.  $F(x)$  непрерывная справа.

*Доказательство.*

1. Пусть  $y \geq x$ . Тогда

$$F(y) - F(x) = P((-\infty; y]) - P((-\infty; x]) = P((x, y]) \geq 0$$

2. Пусть  $x_n \rightarrow -\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $(-\infty; x_n] \downarrow \emptyset \implies$  по непрерывности вероятностной меры.

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(\emptyset) = 0$$

Аналогично, если  $x_n \rightarrow +\infty$ , то  $(-\infty; x_n] \uparrow \mathbb{R} \implies$  в силу непрерывности вероятностной меры.

$$F(x_n) = P((-\infty; x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(\mathbb{R}) = 1$$

3. Пусть убывающая  $x_n \rightarrow x + 0$  Тогда  $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty; x] \implies$  в силу непрерывности вероятностной меры.

$$F(x_n) = P((-\infty; x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P((-\infty; x]) = F(x)$$

□

**Следствие 2.** Функция распределения имеет предел слева в каждой точке  $x \in \mathbb{R}$ , при этом точек разрыва у нее не более чем счетное множество.

*Доказательство.*

$$\lim_{x \rightarrow a-0} F(x) = P((-\infty; a))$$

Каждая точка разрыва является скачком. Каждому скачку сопоставим отрезок. Отрезки скачков не пересекаются, так как функция монотонная. В каждом из них найдется рациональная точка  $\implies$  точек разрыва не более чем счетно.  $\square$

**Определение 2.** Функция  $F(x)$  называется функцией распределения на  $\mathbb{R}$ , если она удовлетворяет свойствам 1), 2), 3) из леммы.

**Теорема 4** (взаимнооднозначное соответствие между функциями распределения и вероятностными мерами).  $F(x)$  – функция распределения на  $\mathbb{R}$ . Тогда существует единственная вероятностная мера  $P$  на  $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ , т.ч.  $F(x)$  является функцией распределения  $P$ , т.е.  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = P((-\infty; x])$$

**Идея доказательства** Рассмотрим  $\mathcal{A}$  – алгебру, состоящую из конечных объединений непересекающихся полуинтервалов вида  $(a, b]$ , т.е.  $\forall A \in \mathcal{A}$  имеет вид:

$$A = \bigsqcup_{k=1}^n (a_k, b_k] \quad (*)$$

где  $-\infty \leq a_1 < b_1 < a_2 < \dots < b_n \leq +\infty$

Рассмотрим функцию  $P_0$  на  $\mathcal{A}$ , заданную по правилу: Если  $A$  имеет вид  $(*)$ , то

$$P_0(A) = \sum_{k=1}^n (F(b_k) - F(a_k))$$

Легко видеть, что  $P_0$  обладает свойствами

1.  $P_0(A) \in [0, 1] \quad \forall A \in \mathcal{A}$
2.  $P_0(\mathbb{R}) = F(+\infty) - F(-\infty) = 1$
3.  $P_0$  – конечно-аддитивна, т.е.  $\forall A, B \in \mathcal{A}$   
 $A \cap B = \emptyset \iff P_0(A \cup B) = P_0(A) + P_0(B)$

Если бы удалось доказать, что  $P_0$  счетно-аддитивна на  $\mathcal{A}$ , то  $P_0$  стала бы вероятностной мерой на  $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$  и по теореме Каратеодори её можно было бы продолжить единственным образом до вероятностной меры  $P$  на  $(\mathbb{R}, \sigma(\mathcal{A}))$ , а  $\sigma(\mathcal{A}) = B(\mathbb{R})$ .

Тогда бы  $F(x)$  была функцией распределения меры  $P$

$$F(x) = P_0((-\infty; x]) = P((-\infty; x])$$

## Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой

### ① Дискретные распределения

Пусть  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$  – не более чем счетное множество.

**Определение 1.** Вероятностная мера  $P$  на  $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ , удовлетворяющая свойству  $P(\mathbb{R} \setminus \mathcal{X}) = 0$ , называется дискретной вероятностной мерой на  $\mathcal{X}$ . Её функция распределения называется дискретной.

Пусть  $\mathcal{X} = \{x_k\}$  и положим  $p_k = P(\{x_k\})$

Тогда  $P(\mathcal{X}) = 1 = \sum_k P(\{x_k\}) = \sum_k p_k$

**Определение 2.** Набор чисел  $(p_0, p_1, \dots)$  называется распределением вероятностей на  $\mathcal{X}$ .

Как выглядит функция распределения дискретной вероятностной меры  $P$ ?

$F(x)$  – кусочно-постоянная разрывная в точках  $x_k \in \mathcal{X}$ . При этом величина скачка равна

$$\Delta F(x_k) = F(x_k) - F(x_k - 0) = P(\{x_k\}) = p_k$$

### Примеры дискретных распределений

1. Дискретное равномерное  $\mathcal{X} = \{1, \dots, N\}$ ,  $k = 1, \dots, N$  и  $p_k = 1/N$  для  $\forall k \in \mathcal{X}$ .

2. Бернуллиевское

$$\mathcal{X} = \{0, 1\}, k = 0, 1$$

$$p_k = p^k(1-p)^{1-k},$$

где  $p \in [0, 1]$  - параметр.

3. Биномиальное распределение

$$\mathcal{X} = \{0, \dots, n\}$$

$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

где  $p \in [0, 1]$  - параметр.

4. Пуассоновское распределение

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}_+$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0 - \text{параметр}$$

Моделирование: биномиальное  $\rightarrow$  пуассоновское

### ② Абсолютно непрерывные распределения

**Определение 3.** Пусть  $F(x)$  – функция распределения вероятностной меры  $P$  на  $\mathbb{R}$ , причем для  $\forall x \in \mathbb{R}$  имеет место равенство

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

где  $p(t) \geq 0$  – неотрицательная функция т.ч

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = 1$$

В этом случае вероятностная мера  $P$  называется *абсолютно непрерывной*, а  $F(x)$  – *абсолютно непрерывной функцией распределения*. Функция  $p(t)$  называется *плотностью распределения  $P$*  (или просто *плотностью*)

**Пример 9.**



1. Равномерное распределение на отрезке  $[a, b]$ .

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

2. Нормальное распределение (с параметрами  $(a, \sigma^2)$ )

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

Моделирование: измерения величины  $a = a + \text{ошибка измерения}$ .

3. Гамма распределение (с параметрами  $(d, \lambda)$ )

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda x^{\lambda-1}}{\Gamma(x)} e^{-\alpha x}, & x > 0, \quad \alpha, \lambda > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

**Определение 4.**

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{+\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx \quad \text{для } \lambda > 0$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

4. Экспоненциальное распределение(или показательное) (с параметром  $\lambda > 0$ ).

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Моделирование: время ожидания(время работы приборов)

5. Распределение Коши (с параметром  $\Theta > 0$ )

$$p(x) = \frac{\Theta}{\pi(\Theta^2 + x^2)}$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\Theta}\right) + \frac{1}{2}$$

### ③ Сингулярные распределения

**Определение 5.** Пусть  $F(x)$  – функция распределения на  $\mathbb{R}$ .  
Точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  называется *точкой роста* для  $F(x)$ , если для  $\forall \varepsilon > 0$

$$F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0 - \varepsilon) > 0$$

**Определение 6.** Множество  $A \subset \mathbb{R}$  называется множеством лебеговой меры нуль, если для  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$  счетный набор интервалов  $((a_k, b_k), k \in \mathbb{N})$  т.ч

$$\sum_k (b_k - a_k) \leq \varepsilon$$

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$$

**Пример 10.**  $\forall$  счетное множество  $\mathcal{X}$  имеет меру нуль.  
Пусть

$$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$$

$$(a_k, b_k) = \left(x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

**Определение 7.** Функция распределения  $F(x)$  называется *сингулярной*, если она непрерывна и её множество точек роста имеет лебегову меру нуль.

**Теорема 5 (Лебег).** Пусть  $F(x)$  – произвольная функция распределения. Тогда существует разложение вида

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x)$$

где

$F_1$  – дискретная функция распределения  
 $F_2$  – абсолютно непрерывная функция распределения  
 $F_3$  – сингулярная функция распределения

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

## Вероятностные меры в $\mathbb{R}^n$

**Определение 1.** Пусть  $P$  – вероятностная мера на  $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$

Тогда функция  $F(\vec{x}), \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$$F(\vec{x}) = P((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n])$$

называется функцией распределения вероятностной меры  $P$  в  $\mathbb{R}^n$ .

**Обозначения.** Пусть  $\vec{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$

Будем писать  $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ , если:

$\forall i \quad x_i^{(k)} \geq x_i^{(k+1)} \geq y_i$  и  $x_i^{(k)} \rightarrow y_i$  при  $k \rightarrow \infty$

**Лемма 8** (свойства многомерной функции распределения).

Пусть  $F(\vec{x})$  – функция распределения вероятностной меры  $P$  в  $\mathbb{R}^n$  Тогда:

1. Если  $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{x}$ , то  $F(\vec{x}^{(k)}) \rightarrow F(\vec{x})$
2.  $\lim_{\forall i: x_i \rightarrow +\infty} F(\vec{x}) = 1$  и  $\forall i \quad \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(\vec{x}) = 0$

3. Для  $\forall i = 1 \dots n \quad \forall a_i < b_i \in \mathbb{R}$  введем оператор

$$\Delta_{a_i, b_i}^i F(\vec{x}) = F(x_1, \dots, b_i, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, a_i, \dots, x_n)$$

Тогда  $\forall a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$ :

$$\Delta_{a_1, b_1}^1 \dots \Delta_{a_n, b_n}^n F(\vec{x}) \geq 0$$

*Доказательство.*

1. Если  $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{x}$ , то множество

$$(-\infty, x_1^{(k)}] \times \dots \times (-\infty, x_n^{(k)}] \downarrow (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]$$

$\implies$  [по непрерывности вероятностной меры]  $\implies$

$$F(\vec{x}^{(k)}) = P((-\infty, x_1^{(k)}] \times \dots \times (-\infty, x_n^{(k)}]) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} P((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) = F(\vec{x})$$

2. Если  $x_1 \dots x_n \rightarrow +\infty$ , то  $(-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n] \uparrow \mathbb{R}^n$

В силу непрерывности вероятностной меры:

$$\lim_{\forall i: x_i \rightarrow \infty} F(\vec{x}) = P(\mathbb{R}^n) = 1$$

Если же  $\vec{x}^{(k)} \rightarrow -\infty$ ,  $k \rightarrow \infty$ , то  $(-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_i^{(k)}] \times \dots \times (-\infty, x_n] \downarrow \emptyset$

Отсюда в силу непрерывности вероятностной меры:

$$\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(\vec{x}) = P(\emptyset) = 0$$

3. Докажем, только для  $n = 2$

$$\begin{aligned} \Delta_{a_1 b_1}^1 \Delta_{a_2 b_2}^2 F(\vec{x}) &= \Delta_{a_1 b_1}^1 (F(x_1, b_2)) - F(x_1, a_2) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) = \\ &= P((-\infty, b_1] \times (-\infty, b_2]) - P((-\infty, b_1] \times (-\infty, a_2]) - P((-\infty, a_1] \times (-\infty, b_2]) + \\ &+ P((-\infty, a_1] \times (-\infty, a_2]) = P((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) - P((-\infty, a_1] \times (-\infty, a_2]) + \\ &+ P((-\infty, a_1] \times (-\infty, a_2]) = P((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) \geq 0 \end{aligned}$$

□

**Теорема 6** (о взаимно однозначном соответствии).

Если  $F(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , удовлетворяет свойствам 1) - 3) из леммы, то  $\exists!$  вероятностная мера  $P$  в  $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$ , для которой  $F(\vec{x})$  является функцией распределения т.е.

$$\forall a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$$

$$\Delta_{a_1 b_1}^1 \dots \Delta_{a_n b_n}^n F(\vec{x}) = P((a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n])$$

## Примеры многомерных функций распределения

**Пример 11.** 1. Пусть  $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$  – одномерные функции распределения. Тогда

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n)$$

— многомерная функция распределения в  $\mathbb{R}^n$ .

Заметим, что

$$\Delta_{a_1 b_1}^1 \dots \Delta_{a_n b_n}^n F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n (F_k(b_k) - F_k(a_k)) \geq 0$$

Если  $F_i(x_i) = x_i$ , для  $\forall i = 1 \dots n$  при  $x_i \in [0, 1]$ , то

$$F(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists i : x_i < 0 \\ \prod_{i=1}^n (x_i I\{x_i \in [0, 1]\} + I\{x_i \geq 1\}), & \text{иначе} \end{cases}$$

Такая  $F$  соответствует для меры Лебега на  $[0, 1]^n$ .

2. Пусть  $f(t_1, \dots, t_n)$ ,  $t_i \in \mathbb{R}$  - функция в  $\mathbb{R}^n$  т.ч.  
 $\int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n = 1$  и  $f(t_1, \dots, t_n) \geq 0$

Тогда

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1 \dots t_n) dt_1 \dots dt_n$$

— многомерная функция распределения

$$\Delta_{a_1 b_1}^1 \dots \Delta_{a_n b_n}^n F(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(t_1 \dots t_n) dt_1 \dots dt_n \geq 0$$

В этом случае  $f(t_1 \dots t_n)$  называется плотностью функции распределения  $F(x_1 \dots x_n)$  (или просто плотностью). Ясно, что

$$f(x_1 \dots x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F(x_1 \dots x_n)$$

### Вероятностные меры в $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Пусть  $P$  – вероятностная мера в  $(\mathbb{R}^\infty, B(\mathbb{R}^\infty))$ . Для  $\forall B_n \in B(\mathbb{R}^n)$  введем

$$\mathcal{F}_n(B_n) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^\infty \mid (x_1, \dots, x_n) \in B_n \}$$

— цилиндр с основанием  $B_n$

Тогда  $P_n(B_n) = P(\mathcal{F}_n(B_n))$  является вероятностной мерой в  $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$ . При этом имеет место свойство согласованности:

$$P_{n+1}(B_n \times \mathbb{R}) = P_n(B_n)$$

**Теорема 7** (Колмогорова, о мерах в  $\mathbb{R}^\infty$ ).

Пусть  $\forall n$  задана вероятностная мера  $P_n$  в  $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$ , причем для  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$  выполнено свойство согласованности.

Тогда  $\exists!$  вероятностная мера  $P$  в  $(\mathbb{R}^\infty, B(\mathbb{R}^\infty))$ , т.ч.  $\forall n \forall B_n \in B(\mathbb{R}^n)$ :

$$P_n(B_n) = P(\mathcal{F}_n(B_n))$$

## Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах

Пусть  $(\Omega, P)$  – дискретное вероятностное пространство.

**Определение 1.** Отображение  $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется *случайной величиной*.

Т.к  $\Omega$  не более чем счетно, то  $\xi$  принимает не более чем счетное число значений  $(a_1, a_2, \dots)$

Введем события  $A_i = \{ \omega \mid \xi(\omega) = a_i \}$  – состоит в том, что  $\xi$  приняло значение  $a_i$ .

$$p_i = P(A_i) = P(\xi = a_i) \quad \text{и} \quad \sum_i p_i = 1 = \sum_i P(A_i)$$

**Определение 2.** Набор значений  $(a_1, a_2, \dots)$  и вероятностей  $(p_1, p_2, \dots)$ , с которыми эти значения принимаются, вместе образуют распределение случайной величины  $\xi$ .

*Замечание.*  $\xi_1 \dots \xi_n$  – случайные величины,  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – функция, то  $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$  – тоже случайная величина.

**Определение 3.** Пусть  $\xi$  – случайная величина со значениями  $(a_1, a_2, \dots)$  и  $\eta$  – случайная величина со значениями  $(b_1, b_2, \dots)$ . Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  называются независимыми, если  $\forall i \forall j$  события  $\{\xi = a_i\}$  и  $\{\eta = b_j\}$  независимы, т.е.

$$P(\xi = a_i, \eta = b_j) := P(\{\xi = a_i\} \cap \{\eta = b_j\}) = P(\xi = a_i)P(\eta = b_j)$$

**Определение 4.** Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – случайные величины,  $\xi_i$  принимает значения  $(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots)$ . Тогда  $\xi_1, \dots, \xi_n$  называют *независимыми в совокупности* (взаимно независимыми), если  $\forall j_1, \dots, j_n$  выполнено:

$$P(\xi_1 = a_{j_1}^{(1)}, \dots, \xi_n = a_{j_n}^{(n)}) = \prod_{k=1}^n P(\xi_k = a_{j_k}^{(k)})$$

### Пример 12.

1. Бросок игральной кости.

$\eta$  – число очков, выпавшее на кости.

Распределение  $\eta$  – равномерное на  $\{1, \dots, 6\}$

2. Пусть  $A \subset \Omega$  – событие. Тогда случайная величина

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

Называется индикатором события  $A$ .

Другое обозначение:  $I\{A\}$ .

3.  $\xi$  называется *биномиальной случайной величиной*, если она принимает значения  $\{1, 2, \dots, n\}$  и

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$$

Обозначение:  $\xi \sim Bin(n, p)$

4.  $\xi$  называется пуассоновской случайной величиной,  $\xi \sim Pois(\lambda)$ , если  $\xi$  принимает значения в  $\mathbb{Z}_+$  и

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

$\lambda > 0$  – параметр распределения.

### Упражнение 5.

1.  $I_A$  и  $I_B$  независимы  $\iff A$  и  $B$  независимы

2.  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – с.в. Тогда они независимы в совокупности  $\iff \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ :

$$P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \prod_{k=1}^n P(\xi_k = x_k)$$

3. Если  $\xi$  и  $\eta$  – независимы, и  $\xi \sim Bin(n, p)$ ,  $\eta \sim Bin(m, p)$ , то  $\xi + \eta \sim Bin(n + m, p)$ .

4. Если  $\xi \sim Pois(\lambda_1)$ ,  $\eta \sim Pois(\lambda_2)$ , то  $\xi + \eta \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

**Определение 5.** Пусть  $\xi$  – случайная величина. Её *математическим ожиданием* называют

$$E\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)P(\omega)$$

Если ряд в правой части сходится абсолютно.

**Пример 13.** В классической модели  $\Omega$  – конечно и  $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$  для  $\forall \omega \in \Omega$ . Тогда

$$E\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{\xi(\omega)}{|\Omega|} = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)$$

— среднее арифметическое значений.

**Лемма 9** (свойства математического ожидания).

1. *Линейность*

$$E(a\xi + b\eta) = aE\xi + bE\eta, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

2. Пусть  $\xi$  принимает значения  $(a_1, a_2, \dots)$ . Тогда

$$E\xi = \sum_i a_i P(\xi = a_i)$$

3. Пусть  $\xi$  - принимает значения  $(a_1, a_2, \dots)$

Тогда для  $\forall$  функции  $\varphi(x)$ :

$$E\varphi(\xi) = \sum_i \varphi(a_i)P(\xi = a_i)$$

4. Если  $\xi \leq \eta$ , то  $E\xi \leq E\eta$

5. Если  $\xi$  и  $\eta$  - независимы, то

$$E\xi\eta = E\xi E\eta$$

*Доказательство.*

1. Очевидно из определения.

2.

$$\begin{aligned} E\xi &= \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)P(\omega) = \sum_i \sum_{\omega: \xi(\omega)=a_i} \xi(\omega)P(\omega) = \\ &= \sum_i \sum_{\omega: \xi(\omega)=a_i} a_i P(\omega) = \sum_i a_i \sum_{\omega: \xi(\omega)=a_i} P(\omega) = \sum_i a_i P(\xi = a_i) \end{aligned}$$

3. Аналогично 2)

4. Очевидно из определения.

5.

$$\begin{aligned} E\xi\eta &= \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)\eta(\omega)P(\omega) = \sum_{i,j} \sum_{\substack{\omega: \xi(\omega)=a_i \\ \eta(\omega)=b_j}} \eta(\omega)\xi(\omega)P(\omega) = \sum_{i,j} a_i b_j \sum_{\substack{\omega: \xi(\omega)=a_i \\ \eta(\omega)=b_j}} P(\omega) = \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j P(\xi = a_i, \eta = b_j) = |\text{независимость}| = \sum_{i,j} a_i b_j P(\xi = a_i)P(\eta = b_j) = \\ &= \left( \sum_i a_i P(\xi = a_i) \right) \left( \sum_j b_j P(\eta = b_j) \right) = E\xi E\eta \end{aligned}$$

□

**Следствие 1.** Для матожидания  $E\xi$  (и  $E\varphi(\xi)$ ) достаточно знать распределение случайной величины  $\xi$ .

**Определение 6.**  $E\xi^k$  – момент порядка  $k$  случайной величины  $\xi$  ( $k$ -й момент)

$E(\xi - E\xi)^k$  – центральный момент порядка  $k$  случайной величины  $\xi$  ( $k$ -й центральный момент).

$E\xi(\xi - 1) \dots (\xi - k + 1)$  – факториальный момент порядка  $k$  случайной величины  $\xi$ ,  $k \in \mathbb{N}$

$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$  – дисперсия случайной величины  $\xi$

**Лемма 10** (свойства дисперсии).

1.  $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \text{линейность} = E(\xi^2) - 2E(\xi E\xi) + E(E\xi)^2 = E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$
2.  $D\xi \geq 0$
3.  $D(c\xi) = c^2 D\xi$
4.  $D\xi = 0 \iff P(\xi = E\xi) = 1$

**Утверждение 2.** Если  $\xi$  – биномиальная:  $\xi \sim \text{Bin}(n, p)$ , то  $D\xi = np(1 - p)$

**Определение 7.** Пусть  $\xi$  и  $\eta$  – две случайные величины. Ковариацией случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  называется

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

Если  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$ , то  $\xi$  и  $\eta$  называются некоррелированными.

1.  $\text{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$
2. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то они не коррелируют. (обратное неверно!)
3.  $D\xi = \text{cov}(\xi, \xi)$

**Утверждение 3.**

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} D(\xi + \eta) &= E(\xi + \eta - E(\xi + \eta))^2 = E(\xi - E\xi)^2 + E(\eta - E\eta)^2 + 2E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = \\ &= D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta) \end{aligned}$$

□

**Следствие 2.** Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

## Случайные элементы

**Определение 1.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  и  $(E, \mathcal{E})$  – два измеримых пространства. Отображение  $X: \Omega \rightarrow E$  называется случайным элементом, если оно является  $\mathcal{F}$  - измеримым. (или  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{E}$  - измеримым) т.е.  $\forall B \in \mathcal{E}$

$$\{x \in B\} = X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

**Определение 2.**

Если  $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ , то случайный элемент  $X$  называется *случайной величиной*.

Если  $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$ , то  $X$  называется *случайным вектором*.

**Лемма 11** (достаточное условие измеримости отображения).

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  и  $(E, \mathcal{E})$  – два измеримых пространства,  $X: \Omega \rightarrow E$ . Пусть  $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$  таково, что  $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$ . Тогда  $X$  является случайным элементом  $\iff$  для  $\forall B \in \mathcal{M}$

$$X^{-1}(B) = \{ \omega \mid X(\omega) \in B \} \in \mathcal{F}$$

*Доказательство.*

$(\implies)$  очевидно из определения

$(\impliedby)$

Рассмотрим систему множеств

$$D = \{ B \in \mathcal{E} \mid X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \}$$

Убедимся в том, что  $D$  – это  $\sigma$ -алгебра. Операция прообраз сохраняет все теоретико-множественные операции.

$$X^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} D_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} X^{-1}(D_{\alpha})$$

$$X^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} D_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha} X^{-1}(D_{\alpha})$$

$$X^{-1}(B \setminus A) = X^{-1}(B) \setminus X^{-1}(A)$$

Тогда

1.  $X^{-1}(E) = \Omega \in \mathcal{F} \implies E \in D$
2.  $X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \{D_n \in D\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(D_n) \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in D$
3. Если  $B, A \in D$ , то  $X^{-1}(B \setminus A) = X^{-1}(B) \setminus X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \implies B \setminus A \in D$

$D$  –  $\sigma$ -алгебра и по условию  $\mathcal{M} \subset D \implies$  в силу минимальности  $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E} \subset D$  (А значит  $E = D$ )

т.е  $\forall B \in \mathcal{E} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$  и, стало быть,  $X$  – случайный элемент.  $\square$

**Следствие 1.**

1.  $X$  – случайная величина на  $(\Omega, \mathcal{F}) \iff \forall x \in \mathbb{R} : \{X \leq x\} = \{ \omega \mid X(\omega) \leq x \} \in \mathcal{F}$
2.  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайный вектор на  $(\Omega, \mathcal{F}) \iff \forall i : X_i$  – случайная величина.

*Доказательство.*

$(\implies)$  1) и 2) очевидно из определения случайных величин и векторов

$(\impliedby)$



1. Рассмотрим систему  $\mathcal{M} = \{(-\infty; x] \mid x \in \mathbb{R}\}$ .

Тогда  $\sigma(\mathcal{M}) = B(\mathbb{R})$ . По условию  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$  для  $\forall B \in \mathcal{M}$ . По лемме о достаточном условии измеримости получим, что  $X$  – случайная величина.

2. Рассмотрим систему  $\mathcal{M} = \{B_1 \times \dots \times B_n \mid B_i \in B(\mathbb{R})\}$

Тогда  $\sigma(\mathcal{M}) = B(\mathbb{R}^n)$

$$X^{-1}(B_1 \times \dots \times B_n) = \{\omega \mid X_1(\omega) \in B_1, \dots, X_n(\omega) \in B_n\} = \bigcap_{i=1}^n X_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}$$

$\implies X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$  для  $\forall B \in \mathcal{M}$ . По лемме получаем, что  $X$  – случайный вектор.

□

### Смысл условия измеримости

Случайные величины и векторы — это численные и векторные характеристики случайных экспериментов. Нам нужно уметь вычислять вероятности вида  $P(\xi \leq x)$  или  $P(\xi \in [a, b])$

Но  $P$  задана формально только на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}$

Значит, нам нужно требовать, чтобы события вида  $\{\xi \leq x\}$  и  $\{\xi \in [a, b]\}$  лежали в  $\mathcal{F}$ .

## Действия над случайными величинами и векторами

**Определение 1.** Функция  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется борелевской, если для  $\forall B \in B(\mathbb{R}^m)$

$$\varphi^{-1}(B) = \{x \mid \varphi(x) \in B\} \in B(\mathbb{R}^n)$$

**Лемма 12.** Пусть  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – случайный вектор.  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  – борелевская функция. Тогда  $\varphi(\xi)$  – тоже случайный вектор.

*Доказательство.* Пусть  $B \in B(\mathbb{R}^m)$ . Тогда

$$(\varphi(\xi))^{-1}(B) = \{\omega \mid \varphi(\xi(\omega)) \in B\} = \{\omega \mid \xi(\omega) \in \varphi^{-1}(B)\} \in \mathcal{F} \quad (\text{т.к. } \varphi^{-1}(B) \in B(\mathbb{R}^n))$$

$\implies \varphi(\xi)$  – случайный вектор.

□

**Теорема 8.** Любая непрерывная или кусочно-непрерывная функция является борелевской.

**Следствие 1.**

Пусть  $\xi$  и  $\eta$  – случайные величины,  $c \in \mathbb{R}$ .

Тогда  $c\xi$ ,  $\xi + c$ ,  $\xi + \eta$ ,  $\xi - \eta$  и  $\frac{\xi}{\eta}$  (считаем, что  $\eta(\omega) \neq 0 \forall \omega \in \Omega$ ) – тоже случайные величины.

*Доказательство.*  $\varphi(x, y) = xy$  или  $x + y$  – непрерывные функции в  $\mathbb{R}^2 \implies$  борелевские.

Константа  $c$  – случайная величина  $\implies$  по лемме получаем, что  $c\xi$ ,  $\xi + c$ ,  $\xi + \eta$ ,  $\xi - \eta$  – случайные величины.

Рассмотрим

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Она тоже борелевская (кусочно-непрерывная)  $\implies \varphi(\xi, \eta) = \frac{\xi}{\eta}$  – тоже случайная величина.

□

**Лемма 13** (пределы случайной величины).

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – последовательность случайных величин.

Тогда  $\overline{\lim}_n \xi_n, \underline{\lim}_n \xi_n, \sup_n \xi_n, \inf_n \xi_n$  – тоже случайная величина.

(Они могут принимать значения  $\pm\infty$ )

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \left\{ \omega \mid \sup_n \xi_n(\omega) \leq x \right\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \xi_n \leq x \} \in \mathcal{F} \\ \implies \sup_n \xi_n(\omega) &- \text{случайная величина} \\ \left\{ \omega \mid \inf_n \xi_n(\omega) \geq x \right\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \xi_n \geq x \} \in \mathcal{F} \\ \implies \inf_n \xi_n(\omega) &- \text{случайная величина} \\ \left\{ \omega \mid \overline{\lim}_n \xi_n(\omega) \leq x \right\} &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{ \xi_n \leq x + \frac{1}{k} \} \in \mathcal{F} \\ \implies \overline{\lim}_n \xi_n(\omega) &- \text{случайная величина} \\ \left\{ \omega \mid \underline{\lim}_n \xi_n(\omega) \geq x \right\} &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{ \xi_n \geq x - \frac{1}{k} \} \in \mathcal{F} \\ \implies \underline{\lim}_n \xi_n(\omega) &- \text{случайная величина} \end{aligned}$$

□

## Характеристики случайных величин и векторов

Распределение случайной величины вектора.

**Определение 1.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – вероятностное пространство,  $\xi$  – случайная величина на нем. Тогда распределением  $\xi$  называется вероятностная мера  $P_\xi$  на  $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ , заданная по правилу.

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B), \quad B \subset B(\mathbb{R}).$$

**Определение 2.** Пусть  $\xi$  – случайный вектор размерности  $n$  на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Тогда его распределением  $P_\xi$  называется вероятностная мера на  $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$ , заданная по правилу

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B), \quad B \in B(\mathbb{R}^n)$$

### Функция распределения

**Определение 3.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – вероятностное пространство.  $\xi$  – случайная величина на нем. Тогда функцией распределения случайной величины  $\xi$  называется

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$$

**Определение 4.** Случайная величина  $\xi$  называется

- дискретной, если её функция распределения дискретная.
- абсолютно непрерывной, если её функция распределения абсолютно непрерывна. В этом случае

$$P(\xi \leq x) = F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(t) dt$$

и функция  $p_\xi(t)$  называется плотностью случайной величины  $\xi$ .

- сингулярной, если её функция распределения сингулярна
- непрерывной, если её функция распределения непрерывна.

**Определение 5.** Пусть  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – случайный вектор на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Тогда его *функцией распределения* называется

$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n).$$

### Порожденная $\sigma$ -алгебра

**Определение 6.** Пусть  $\xi$  – случайная величина на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Тогда  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{F}_\xi$ , порожденной  $\xi$  называется

$$\mathcal{F}_\xi = \{ \{ \xi \in B \} \mid B \in B(\mathbb{R}) \}$$

**Определение 7.** Если  $\xi$  – случайный вектор размерности  $n$  на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , то  $\sigma$ -алгеброй, порожденной  $\xi$  называется

$$\mathcal{F}_\xi = \{ \{ \xi \in B \} \mid B \in B(\mathbb{R}^n) \}$$

Схема:

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{\xi} (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$$

$$P \rightarrow P_\xi$$

$$\mathcal{F}_\xi \leftarrow B(\mathbb{R})$$

**Определение 8.** Пусть  $\xi$  и  $\eta$  – случайные величины. Будем говорить, что  $\eta$  является  $\mathcal{F}_\xi$  – измеримой, если  $\mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\xi$ .

**Упражнение 6.** Пусть  $\varphi(x)$  – борелевская функция,  $\eta = \varphi(\xi)$ . Тогда  $\eta$  –  $\mathcal{F}_\xi$  – измерима.

**Теорема 9.** Пусть  $\eta$  –  $\mathcal{F}_\xi$  – измерима. Тогда  $\exists$  борелевская функция  $\varphi(x)$  т.ч.  $\eta = \varphi(\xi)$

**Определение 9.**

Пусть  $A \in \mathcal{F}$  – событие на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Тогда случайная величина

$$I_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

называется индикатором события  $A$

**Определение 10.** Случайная величина  $\xi$  называется *простой*, если она принимает конечное число значений.

Тогда  $\exists$  набор  $\{x_1, \dots, x_n\}$  из различных чисел т.ч.

$$\xi = \sum_{k=1}^n x_k I_{A_k}$$

где события  $A_1 \dots A_n$  – разбиение  $\Omega$ . т.е.  $A_k = \{\xi = x_k\}$

**Определение 11.** Пусть  $\xi$  – случайная величина.

Тогда обозначим:  $\xi^+ = \max(\xi, 0)$  и  $\xi^- = \max(-\xi, 0)$

Ясно, что  $\xi = \xi^+ - \xi^-$ ,  $|\xi| = \xi^+ + \xi^-$

**Теорема 10** (о приближении простыми).

Пусть  $\xi$  – случайная величина. Тогда

1. Если  $\xi \geq 0$ , то  $\exists$  последовательность  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  простых неотрицательных случайных величин, т.ч.  $\xi_n \uparrow \xi$  (т.е.  $\forall \omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \leq \xi_{n+1}(\omega)$  и  $\xi(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)$ ) и  $\xi_n$  явл.  $\mathcal{F}_\xi$  - измеримыми.
2. Если  $\xi$  - произвольная случайная величина, то  $\exists$  последовательность  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  простых  $\mathcal{F}_\xi$  - измеримых случайных величин т.ч.  $|\xi_n| \leq |\xi| \forall n$  и  $\xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)$

*Доказательство.*

1. Положим

$$\xi_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} I \left\{ \frac{k-1}{2^n} \leq \xi(\omega) < \frac{k}{2^n} \right\} + n I \{ \xi(\omega) \geq n \}$$

Легко видеть, что  $\xi_n \uparrow \xi$  и  $\xi_n$  является  $\mathcal{F}_\xi$  - измеримым (т.к.  $\left\{ \frac{k-1}{2^n} \leq \xi < \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathcal{F}_\xi$ )

by А.Д.: не понял примера. Мой(возможно похож/такой же):

$\xi_n = \varphi_n(\xi)$ , где  $[\varphi_n(x)] = \min(n, [x])$ ,  $\{\varphi_n(x)\}$  = максимальное число, не превосходящее  $\{x\}$ , представимое в виде  $\frac{k}{2^n}$ .

Очевидно, что  $\xi_n \leq \xi$ .

Ясно, что  $\xi_n \uparrow \xi$ , ибо целая часть в какой-то момент совпадет, а дробные части - двоично-рациональные приближения.

Покажем, что функции  $\varphi_n$  - борелевские, тогда  $\xi_n$  -  $\mathcal{F}_\xi$ -измеримы. Найдем прообраз  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Это тоже самое, что прообраз двоично-рациональных точек из  $B$ . В каждую двоично-рациональную дробь  $a$  переходит не более чем счетное кол-во полуинтервалов вида  $[a + k, a + k + \frac{1}{2^n})$ , где  $k$  - какое-то целое. (Бесконечно, только если  $[a] = n$ , иначе не более 1 полуинтервала). Но тогда искомый прообраз - счетное объединение полуинтервалов, а значит лежит в  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

2. Пусть  $\xi = \xi^+ - \xi^-$  и пусть  $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$  - последовательность простых  $\mathcal{F}_\xi$  - измеримых с.в. т.ч.  $\eta_n \uparrow \xi^+$ , а  $\{\zeta_n, n \in \mathbb{N}\}$  - последовательность простых  $\mathcal{F}_\xi$  - измеримых т.ч.  $\zeta_n \uparrow \xi^-$

Положим  $\xi_n = \eta_n - \zeta_n$ .

Тогда  $\xi_n \rightarrow \xi \quad \forall \omega \in \Omega$  и  $|\xi_n| = |\eta_n| + |\zeta_n| \leq |\xi^+| + |\xi^-| = |\xi|$

□

## Математическое ожидание случайных величин

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  - вероятностное пространство,  $\xi$  - случайная величина на нем. Что такое  $E\xi$ ?

Простые случайные величины.

Пусть  $\xi$  - простая случайная величина, т.е.

$$\xi = \sum_{k=1}^n x_k I_{A_k},$$

где  $x_1 \dots x_n$  - различные числа,  $A_1, \dots, A_n$  - разбиение  $\Omega$ , т.е.  $A_k = \{\xi = x_k\}$

**Определение 12.** Для простой случайной величины  $\xi$  её математическим ожиданием называют

$$E\xi = \sum_{k=1}^n x_k P(A_k)$$

## Свойства математического ожидания для простых случайных величин

1.  $\xi = c = \text{const} \implies E\xi = c$

## 2. Линейность

$$E(a\xi + b\eta) = aE\xi + bE\eta, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

*Доказательство.* Обозначим  $\zeta = a\xi + b\eta$ , пусть  $\xi$  принимает значения  $x_1 \dots x_n$ ,  $\eta$  — значения  $y_1 \dots y_m$ ,  $\zeta$  — значения  $z_1 \dots z_l$

Обозначим  $C_{k,j} = \{\xi = x_k, \eta = y_j\}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} E\zeta &= \sum_{i=1}^l z_i P(\zeta = z_i) = \sum_{i=1}^l z_i \sum_{\substack{k,j: \\ ax_k + by_j = z_i}} P(\xi = x_k, \eta = y_j) = \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{\substack{k,j: \\ ax_k + by_j = z_i}} (ax_k + by_j) P(\xi = x_k, \eta = y_j) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (ax_k + by_j) P(\xi = x_k, \eta = y_j) = \\ &= \sum_{k=1}^n ax_k P(\xi = x_k) + \sum_{j=1}^m by_j P(\eta = y_j) = aE\xi + bE\eta \end{aligned}$$

□

3. Если  $\xi \geq 0$ , то  $E\xi \geq 0$

*Доказательство.* Если  $\xi \geq 0$ , то все  $x_k \geq 0 \implies E\xi \geq 0$

□

4. Если  $\xi \leq \eta$ , то  $E\xi \leq E\eta$

*Доказательство.* Рассмотрим  $\zeta = \eta - \xi \geq 0$ . По свойству 3

$$0 \leq E\zeta = E(\eta - \xi) = E\eta - E\xi$$

□

## Неотрицательные случайные величины

**Определение 13.** Пусть  $\xi$  — неотрицательная случайная величина, а  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  —  $\forall$  последовательность неотрицательных простых случайных величин, т.ч.  $\xi_n \uparrow \xi$ .

Тогда  $E\xi_n \leq E\xi_{n+1} \implies \exists$  предел  $E\xi_n$  и

$$E\xi := \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n$$

**Лемма 14.** Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  и  $\eta$  — простые неотрицательные случайные величины, причем  $\xi_n \uparrow \xi \geq \eta$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \geq E\eta$$

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon > 0$  фиксировано. Рассмотрим  $A_n = \{\omega \mid \xi_n - \eta \geq -\varepsilon\}$

Тогда

$$\begin{aligned} E\xi_n &= E(\xi_n I_{A_n}) + E(\xi_n I_{\bar{A}_n}) \geq E((\eta - \varepsilon) I_{A_n}) = \\ &= E\eta - E\eta I_{\bar{A}_n} - \varepsilon E I_{A_n} \geq E\eta - \varepsilon P(\bar{A}_n) - \varepsilon P(A_n); \end{aligned}$$

где  $c = \max_{\omega \in \Omega} \eta(\omega)$ .

Заметим, что  $A_n = \{\xi_n \geq \eta - \varepsilon\} \uparrow \Omega$  т.к.  $\xi_n \uparrow \xi \geq \eta \implies P(A_n) \rightarrow P(\Omega) = 1$

Значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (E\eta - cP(\overline{A_n}) - \varepsilon P(A_n)) = E\eta - \varepsilon$$

В силу произвольности  $\varepsilon$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \geq E\eta$  □

**Следствие 1.** *Определение математического ожидания для неотрицательных случайных величин корректно.*

*Доказательство.* Пусть  $\xi \geq 0$  и  $\xi_n \uparrow \xi$ ,  $\eta_m \uparrow \xi$  – последовательность простых неотрицательных случайных величин. Тогда  $\forall m$  в силу леммы

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n &\geq E\eta_m \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} E\eta_m \end{aligned}$$

Меняем  $\xi$  и  $\eta$  местами в рассуждении.

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} E\eta_m &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n &= \lim_{m \rightarrow \infty} E\eta_m \end{aligned}$$

□

*Замечание.* Если  $\xi$  – неотрицательная с.в., то

$$E\xi = \sup_{\eta: \eta \leq \xi} E\eta, \quad \text{где } \eta - \text{неотриц. простая с.в.}$$

## Произвольные случайные величины

**Определение 14.** Пусть  $\xi$  – произвольная случайная величина,  $\xi = \xi^+ - \xi^-$

1. Если  $E\xi^+$  и  $E\xi^-$  – конечны, то  $\boxed{E\xi := E\xi^+ - E\xi^-}$
2. Если  $E\xi^+ = +\infty$  и  $E\xi^-$  – конечно, то  $\boxed{E\xi := +\infty}$
3. Если  $E\xi^+$  конечно и  $E\xi^- = +\infty$ , то  $\boxed{E\xi := -\infty}$
4. Если  $E\xi^+ = E\xi^- = +\infty$ , то  $E\xi$  не существует (не определено)

*Замечание.*

1. Математическое ожидание случайной величины это интеграл Лебега по вероятностной мере  $P$

$$E\xi := \int_{\Omega} \xi dP = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega)$$

2.  $E\xi$  – конечно  $\iff E|\xi|$  – конечно.
3. Множество случ. величин  $\xi$  на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  с условием:  $E\xi$  – конечно, образует пространство  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Далее мы убедимся, что это линейное пространство.

## Свойства математического ожидания

- ① Пусть  $\xi$  – случайная величина,  $E\xi$  – конечно.

Тогда для  $\forall c \in \mathbb{R}$   $E(c\xi)$  конечно и

$$E(c\xi) = cE\xi$$

*Доказательство.* Для простых  $\xi$ , доказано ранее. Пусть  $\xi \geq 0$ .

Если  $c \geq 0$ , то возьмем последовательность простых неотрицательных случайных величин  $\xi_n$  т.ч.  $\xi_n \uparrow \xi$ . Тогда  $c\xi_n \uparrow c\xi \implies$

$$E(c\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(c\xi_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n = cE\xi$$

Если  $c < 0$ , то  $c\xi = -(c\xi)^- = -(-c\xi)$

$$\implies E(c\xi) = -E(c\xi)^- = -E((-c)\xi) = cE\xi$$

Пусть  $\xi$  – произвольная,  $c \geq 0$

Тогда

$$E(c\xi) = E(c\xi)^+ - E(c\xi)^- = Ec\xi^+ - Ec\xi^- = c(E\xi^+ - E\xi^-) = cE\xi$$

Для  $c < 0$  действуем аналогично. □

- ② Если  $\eta \leq \xi$  и  $E\eta, E\xi$  – конечны, то

$$E\eta \leq E\xi$$

*Доказательство.* Для простых  $\xi$  и  $\eta$  – доказано. Пусть  $\xi$  и  $\eta$  – неотрицательны. Тогда

$$E\eta = \sup_{\mu: \mu \leq \eta} E\mu \leq \sup_{\mu: \mu \leq \xi} E\mu = E\xi$$

Пусть  $\xi$  и  $\eta$  – произвольные.

Тогда  $\xi^+(\omega) \geq \eta^+(\omega)$  и  $\xi^-(\omega) \leq \eta^-(\omega)$

$$\implies E\eta = E\eta^+ - E\eta^- \leq E\xi^+ - E\xi^- = E\xi$$
□

- ③ Если  $E\xi$  – конечно, то

$$|E\xi| \leq E|\xi|$$

*Доказательство.*  $|\xi| = \xi^+ + \xi^- \implies E|\xi|$  – конечно.

По свойству 2

$$E(-|\xi|) \leq E\xi \leq E|\xi| \implies -E|\xi| \leq E\xi \leq E|\xi| \implies |E\xi| \leq E|\xi|$$
□

- ④ Аддитивность

Пусть  $\xi$  и  $\eta$  – случайные величины.  $E\xi$  и  $E\eta$  – конечны.

Тогда  $E(\xi + \eta)$  – конечно и

$$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$$

*Доказательство.* Для простых доказано ранее. Пусть  $\xi$  и  $\eta$  – неотрицательные случайные величины. Возьмем  $\xi_n, \eta_n$  – последовательности простых неотрицательных случайных величин, т.ч.  $\xi_n \uparrow \xi, \eta_n \uparrow \eta$ . Тогда  $\xi_n + \eta_n \uparrow \xi + \eta$

$$E(\xi + \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(\xi_n + \eta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n + \lim_{n \rightarrow \infty} E\eta_n = E\xi + E\eta$$

Пусть  $\xi$  и  $\eta$  – произвольные случайные величины.

Тогда  $(\xi + \eta)^+ \leq (\xi^+ + \eta^+)$

Обозначим  $\delta = (\xi^+ + \eta^+) - (\xi + \eta)^+ \geq 0$ .

По доказанному,  $E\delta = E\xi^+ + E\eta^+ - E(\xi + \eta)^+$

Рассмотрим  $(\xi + \eta)^- = (\xi + \eta)^+ - (\xi + \eta) = \xi^+ + \eta^+ - \delta - (\xi + \eta) = \xi^- + \eta^- - \delta$ .

Следовательно  $E(\xi + \eta)^- = E\xi^- + E\eta^- - E\delta$

Тогда  $E(\xi + \eta) = E(\xi + \eta)^+ - E(\xi + \eta)^- = E\xi^+ + E\eta^+ - E\delta - E\xi^- + E\eta^- + E\delta = E\xi + E\eta$

□

- ⑤ 1) Пусть  $|\xi| \leq \eta$  и  $E\eta$  – конечно. Тогда  $E\xi$  конечно.  
 2) Пусть  $\xi \leq \eta$  и  $E\eta < +\infty$ , тогда  $E\xi < +\infty$   
 Если  $\xi \geq \eta$  и  $E\eta > -\infty$ , то  $E\xi > -\infty$ .  
 3) Если  $E\xi$  конечно и  $A \in \mathcal{F}$ , то  $E(\xi I_A)$  тоже конечно.

*Доказательство.*

$$1) \xi^-, \xi^+ \leq \eta \implies E\xi^+ = \sup_{0 \leq \xi \leq \xi^+} E\xi \leq \sup_{0 \leq \xi \leq \eta} E\xi = E\eta < +\infty$$

Аналогично с  $E\xi^-$ . Тогда  $E\xi = E\xi^+ - E\xi^-$  – тоже конечно

$$2) \xi^+ \leq \eta^+ \text{ и } E\eta^+ < +\infty \implies \text{по доказанному в 1)}, \text{ что } E\xi^+ < +\infty \implies E\xi < +\infty$$

$$3) (\xi I_A)^+ = \xi^+ I_A \leq \xi^+ \implies E(\xi I_A)^+ \text{ – конечно.}$$

Аналогично,  $E(\xi I_A)^-$  – тоже конечно.

□

**Определение 15.** Говорят, что событие  $A$  происходит почти наверное, если  $P(A) = 1$

- ⑥  $\xi = 0$  п.н. Тогда  $E\xi = 0$

*Доказательство.* Пусть  $\xi$  – простая случайная величина.

$$\xi = \sum_{k=1}^n x_k I_{A_k}, \quad \text{где } x_1, \dots, x_n \text{ – различные и } A_1 \dots A_n \text{ – разбиение } \Omega : A_k = \{\xi = x_k\}$$

Тогда, если  $x_k \neq 0$ , то  $A_k = \{\xi = x_k\} \subset \{\xi \neq 0\}$

$$\implies P(A_k) \leq P(\xi \neq 0) = 0$$

$$\implies E\xi = \sum_{k=1}^n x_k P(A_k) = 0$$

Если  $\xi \geq 0$  – неотрицательная случайная величина, то  $E\xi = \sup_{\eta \leq \xi} E\eta$ , где  $\eta$  – простая неотрицательная с.в.

Но для таких  $\eta : 0 \leq \eta \leq \xi = 0 \implies \eta = 0$  п.н.



Значит  $E\eta = 0$

Если  $\xi$  – произвольная случайная величина, то  $\xi^+ = 0$  п.н.,  $\xi^- = 0$  п.н.

По доказанному  $E\xi^+ = E\xi^- = 0 \implies E\xi = E\xi^+ + E\xi^- = 0$  □

⑦ Если  $\xi = \eta$  п.н. и  $E\eta$  - конечно, то  $E\xi$  - конечно и  $E\xi = E\eta$

*Доказательство.* Рассмотрим  $A = \{\xi \neq \eta\}$ . Тогда  $I_A = 0$  п.н.  $\implies \xi I_A = 0$  п.н.,  $\eta I_A = 0$  п.н.

$$\begin{aligned}\xi &= \xi I_A + \xi I_{\bar{A}} = \xi I_A + \eta I_{\bar{A}} \implies E\xi \text{ конечно и} \\ E\xi &= E\xi I_A + E\eta I_{\bar{A}} = E\eta I_A + E\eta I_{\bar{A}} = E\eta\end{aligned}$$

□

⑧ Пусть  $\xi \geq 0$  и  $E\xi = 0$ .

Тогда  $\xi = 0$  п.н.

*Доказательство.* Рассмотрим  $A = \{\xi > 0\}$  и  $A_n = \{\xi > \frac{1}{n}\}$   
Тогда  $A_n \uparrow A$ . Но

$$P(A_n) = EI_{A_n} \leq E(\xi_n)I_{A_n} \leq nE\xi = 0$$

Отсюда в силу непрерывности вероятностной меры

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$$

□

⑨ Пусть  $E\xi$  и  $E\eta$  - конечно и для  $\forall A \in \mathcal{F}$  выполнено:

$$E(\xi I_A) \leq E(\eta I_A)$$

Тогда  $\xi \leq \eta$  п.н.

*Доказательство.* Рассмотрим  $B\{\xi > \eta\}$ . Тогда  $E\eta I_B \leq E\xi I_B \leq E\eta I_B$

Тогда  $E\xi I_B = E\eta I_B \implies E(\xi - \eta)I_B = 0 \implies$  |по свойству 8|  $\implies (\xi - \eta)I_B = 0$  п.н.

Но  $(\xi - \eta)I_B = 0 \iff I_B = 0$

$\implies I_B = 0$  п.н. и, значит,  $P(B) = 0$

□

## Независимость случайных величин и векторов

**Определение 1.** Набор случайных векторов (величин)  $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$  называется *независимым в совокупности*, если независимы в совокупности  $\{\mathcal{F}_{\xi_\alpha}\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$  сигма-алгебры, ими порожденные.

**Следствие 1.** Случайные величины  $\xi_1 \dots \xi_n$  - независимы в совокупности  $\iff \forall B_1 \dots B_n \in B(\mathbb{R})$  события  $\{\xi_1 \in B_1\} \dots \{\xi_n \in B_n\}$  - независимы в совокупности.

**Теорема 11** (критерий независимости для функции распределения).

Случайные величины  $\xi_1 \dots \xi_n$  - независимы в совокупности  $\iff \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n) = P(\xi_1 \leq x_1) \dots P(\xi_n \leq x_n)$$

(функция распределения вектора  $(\xi_1 \dots \xi_n)$  распадается в произведение функций распределения компонент)

*Доказательство.*  $\xi_1 \dots \xi_n$  – независимы в совокупности  $\iff \sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_{\xi_1} \dots \mathcal{F}_{\xi_n}$  – независимы в совокупности  $\iff$  [критерий независ.  $\sigma$ -алгебр]  $\iff \pi$ -системы порождающие эти  $\sigma$ -алгебры независимы.

Для  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_{\xi_i} = \{ \{ \xi_i \in B \} \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$  такой  $\pi$ -системой будет  $\{ \{ \xi_i \leq x \} \mid x \in \mathbb{R} \}$ .

Это следует из того, что  $\sigma((-\infty; x] : x \in \mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\iff \pi$ -системы  $\{ \{ \xi_i \leq x_i \} \mid x_i \in \mathbb{R} \}$  – независимы

$\iff \forall x_1 \dots x_n$  – события.  $\{ \xi_1 \leq x_1 \} \dots \{ \xi_n \leq x_n \}$  независимы в совокупности

$$\iff P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n) = P(\xi_1 \leq x_1) \dots P(\xi_n \leq x_n), \quad \forall x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$$

□

**Теорема 12** (функции от независимых – тоже независимы).

Пусть  $\xi_1 \dots \xi_m$  – независимые случайные векторы,  $\xi_i$  имеет размерность  $n_i$ .

Пусть  $f_i: \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{k_i}$  – борелевская функция,  $\forall i = 1 \dots m$

Тогда  $f_1(\xi_1), \dots, f_m(\xi_m)$  – независимы в совокупности.

*Доказательство.* Обозначим  $\eta_i = f_i(\xi_i)$ .

Тогда  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_i})$ :

$$\{ \eta_i \in B \} = \{ f_i(\xi_i) \in B \} = \{ \xi_i \in (f_i^{-1})(B) \} \in \mathcal{F}_{\xi_i}$$

то есть  $\mathcal{F}_{\eta_i} \subset \mathcal{F}_{\xi_i}$

По условию  $\mathcal{F}_{\xi_1} \dots \mathcal{F}_{\xi_m}$  – независимы  $\implies \mathcal{F}_{\eta_1} \dots \mathcal{F}_{\eta_m}$  – тоже независимы.

$\iff \eta_1 \dots \eta_m$  – независимы в совокупности.

□

**Теорема 13.** Пусть случайная величина  $\xi$  и  $\eta$  – независимы, причем  $E\xi$  и  $E\eta$  – конечны. Тогда  $E\xi\eta$  тоже конечно и  $E\xi\eta = E\xi E\eta$

*Доказательство.* Пусть  $\xi$  и  $\eta$  – простые случайные величины,

$\xi$  – принимает значения  $x_1 \dots x_n$ ,  $\eta$  – принимает значения  $y_1 \dots y_m$ .

Тогда по линейности:

$$\begin{aligned} E\xi\eta &= \sum_{k,j} x_k y_j P(\xi = x_k, \eta = y_j) = |\text{независимость}| = \sum_{k,j} x_k y_j P(\xi = x_k) P(\eta = y_j) = \\ &= \left( \sum_{k=1}^n x_k P(\xi = x_k) \right) \left( \sum_{j=1}^m y_j P(\eta = y_j) \right) = E\xi E\eta \end{aligned}$$

Пусть теперь  $\eta$  и  $\xi$  – неотрицательные случайные величины.

Тогда по теореме о приближении простыми  $\exists$  последовательность простых  $\mathcal{F}_\xi$  – измеримых неотрицательных случайных величин  $\{ \xi_n, n \in \mathbb{N} \}$ , т.ч.  $\xi_n \uparrow \xi$ . Аналогично  $\exists \{ \eta_n, n \in \mathbb{N} \}$  – последовательных простых неотрицательных  $\mathcal{F}_\eta$  – измеримых случайных величин, т.ч.  $\eta_n \uparrow \eta$

Тогда  $\xi_n \eta_n \uparrow \xi\eta$  и  $\forall n: \xi_n$  и  $\eta_n$  – независимы.

$$\implies E\xi\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \eta_n = |\text{независимость } \xi_n \text{ и } \eta_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n E\eta_n = E\xi E\eta$$

Пусть  $\xi$  и  $\eta$  – произвольные с.в. Тогда  $\xi^+, \xi^-$  – функции от  $\xi$ ,  $\eta^+, \eta^-$  – функции от  $\eta \implies \xi^+, \xi^-$  – независимы с  $\eta^+, \eta^-$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} (\xi\eta)^+ &= \xi^+ \eta^+ + \xi^- \eta^- \implies E(\xi\eta)^+ = E(\xi^+ \eta^+) + E(\xi^- \eta^-) = \\ &= |\text{независимость } \xi^+ \text{ с } \eta^+ \text{ и } \xi^- \text{ с } \eta^-| = E\xi^+ E\eta^+ + E\xi^- E\eta^- \end{aligned}$$

Аналогично  $E(\xi\eta)^- = E\xi^+ E\eta^- + E\xi^- E\eta^+$

$$\implies E\xi\eta \text{ конечно и } E\xi\eta = E\xi^+\eta^+ + E\xi^-E\eta^- - E\xi^+\eta^- - E\xi^-E\eta^+ = E\xi E\eta$$

□

### Дисперсия и ковариация

**Определение 2.** *Дисперсией* с.в.  $\xi$  называют

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2, \quad \text{если } E\xi \text{ существует}$$

**Определение 3.** *Ковариацией* случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  называют

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

Если  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$ , то  $\xi$  и  $\eta$  называются *некоррелированными*.

Если  $D\xi$  и  $D\eta$  – конечны и положительны, то можно определить расстояние

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

которое называется *коэффициентом корреляции*  $\xi$  и  $\eta$

**Лемма 15** (свойства дисперсии и ковариации).

*Если все математические ожидания конечны, то*

1. *Ковариация билинейна.*
2.  $\text{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$   
 $D\xi = \text{cov}(\xi, \xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2$
3.  $D(c\xi) = c^2 D\xi, D(\xi + c) = D\xi$
4. *Неравенство Коши-Буняковского.*

$$|E\xi\eta|^2 \leq E\xi^2 E\eta^2$$

5.  $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$ , причем  $\rho(\xi, \eta) = 1 \iff \xi$  и  $\eta$  – п.н. линейно зависимы.

*Доказательство.*

Свойства 1) – 3) легко вытекают из свойств математического ожидания.

4. Рассмотрим для  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$f(\lambda) = E(\xi + \lambda\eta)^2 \geq 0$$

$$\text{Но } f(\lambda) = E\xi^2 + 2E\xi\eta\lambda + \lambda^2 E\eta^2 \geq 0 \iff \text{дискриминант} \leq 0, \text{ т.е. } 4[(E\xi\eta)^2 - E\xi^2 E\eta^2] \leq 0$$

5. Рассмотрим  $\xi_1 = \xi - E\xi, \eta_1 = \eta - E\eta$

$$\text{Тогда } \text{cov}(\xi, \eta) = E\xi_1\eta_1, \quad D\xi = E\xi_1^2, \quad D\eta = E\eta_1^2$$

$$\implies |\rho(\xi, \eta)| = \left| \frac{E\xi_1\eta_1}{\sqrt{E\xi_1^2 E\eta_1^2}} \right| \leq 1, \text{ по нер-ву Коши-Буняковского.}$$

$$\text{При этом } |\rho(\xi, \eta)| = 1 \iff \text{дискриминант} = 0 \iff \exists! \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ т.ч. } f(\lambda_0) = 0. \text{ т.е. } E(\xi_1 + \lambda_0\eta_1)^2 = 0$$

$$\implies \xi_1 + \lambda_0\eta_1 = 0 \text{ п.н. т.е.}$$

$$\xi = E\xi - \lambda_0(\eta - E\eta) \text{ п.н.}$$

□

**Следствие 2.** Если  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – попарно некоррелируют,  $D\xi_i < +\infty$ , тогда

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{k=1}^n D\xi_k$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} D(\xi_1 + \dots + \xi_k) &= \text{cov}(\xi_1 + \dots + \xi_k, \xi_1 + \dots + \xi_k) = \\ &= \sum_{i,j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_i \text{cov}(\xi_i, \xi_i) = \sum_i D\xi_i \end{aligned}$$

□

**Следствие 3.**  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – независимы,  $D\xi_i < +\infty$ . Тогда  $D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{k=1}^n D\xi_k$

**Определение 4.** Пусть  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – случ. вектор.

Тогда его *мат. ожиданием* называется вектор из мат. ожиданий его компонент:

$$E\xi = (E\xi_1, \dots, E\xi_n)$$

**Определение 5.** *Дисперсией* вектора  $\xi$  называется его матрица ковариаций:

$$D\xi = \|\text{cov}(\xi_i, \xi_j)\|_{i,j=1}^n \text{ — матрица } n \times n$$

**Лемма 16.** Матрица ковариаций случайного вектора является симметрической и неотрицательно определенной.

*Доказательство.*  $D\xi = \|\text{cov}(\xi_i, \xi_j)\|_{i,j=1}^n$  – симметричная т.к.  $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \text{cov}(\xi_j, \xi_i)$

Пусть  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  – вектор.

$$\begin{aligned} \langle D\xi x, x \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) x_i x_j = |\text{линейность ковариации}| = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(x_i \xi_i, x_j \xi_j) = \\ &= |\text{суммируем по } i| = \sum_{j=1}^n \text{cov}(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n, x_j \xi_j) = \\ &= |\text{суммируем по } j| = \text{cov}(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n, x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n) = D(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n) \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  неотр. определенная

□

## Неравенства

### ① Неравенство Маркова

Пусть  $\xi \geq 0$  – неотрицательная случайная величина.

$$\text{Тогда для } \forall \varepsilon > 0 : \quad P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}$$

$$\text{Доказательство. } P(\xi \geq \varepsilon) = E I\{\xi \geq \varepsilon\} \leq E \left( \frac{\xi}{\varepsilon} I\{\xi \geq \varepsilon\} \right) \leq E \left( \frac{\xi}{\varepsilon} \right) = \frac{E\xi}{\varepsilon}$$

□

### ② Неравенство Чебышева

$$\text{Если } D\xi < +\infty, \text{ то для } \forall \varepsilon > 0 : \quad P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

*Доказательство.*

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) = P(|\xi - E\xi|^2 \geq \varepsilon^2) \leq |\text{нер-во Маркова}| \leq \frac{E|\xi - E\xi|^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

□

### ③ Неравенство Йенсена

Пусть  $g(x)$  – выпуклая вниз функция. Пусть  $E\xi$  – конечно. Тогда

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi)$$

*Доказательство.* Т.к  $g(x)$  – выпуклая вниз функция, то  $\forall x_0 \in \mathbb{R} \exists \lambda(x_0) : \text{т.ч. } \forall x \in \mathbb{R}$  выполнено:

$$g(x) \geq g(x_0) + \lambda(x_0)(x - x_0)$$

Положим  $x = \xi$ ,  $x_0 = E\xi$ . Тогда

$$g(\xi) \geq g(E\xi) + \lambda(E\xi)(\xi - E\xi)$$

Берем математическое ожидание от обеих частей:

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi) + \lambda(E\xi)E(\xi - E\xi) = g(E\xi)$$

□

## Виды сходимостей случайных величин

### Определение 1.

1. Последовательность случайных величин  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  *сходится по вероятности* к случайной величине  $\xi$  (обозначение  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ ), если для  $\forall \varepsilon > 0$  :

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

2. Последовательность случайных величин  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  *сходится с вероятностью 1* к случайной величине  $\xi$  (или *сходится почти наверное*), если

$$P(\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)) = 1$$

Обозначения:  $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ ,  $\xi_n \rightarrow \xi$  п.н. или  $\xi_n \rightarrow \xi$   $P$ -п.н.

3. Последовательность случайных величин  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  *сходится в среднем порядка  $p > 0$*  к случайной величине  $\xi$  (или *сходится в пространстве  $L^p$* ), если

$$E|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Обозначение:  $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$

4. Последовательность случайных величин  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  *сходится по распределению* к случайной величине  $\xi$ , если для  $\forall$  ограниченной непрерывной ф-ции  $f(x)$  выполнено

$$Ef(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Ef(\xi)$$

Обозначение:  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$

**Теорема 14** (Закон больших чисел в форме Чебышева).

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – последовательность попарно некоррелированных случайных величин, т.ч.  $\forall n : D\xi_n \leq C$ .

Обозначим  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) &\leq |\text{нер-во Чебышева}| \leq \frac{D\left(\frac{S_n - ES_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D(S_n - ES_n)}{n^2 \varepsilon^2} = \\ &= \frac{DS_n}{n^2 \varepsilon^2} = |\xi_i \text{ и } \xi_j - \text{некорр.}| = \frac{\sum_{j=1}^n D\xi_j}{n^2 \varepsilon^2} \leq \frac{Cn}{n^2 \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

□

**Следствие 1.** Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – независимые случайные величины, т.ч.  $D\xi_n \leq C, \forall n$  и  $E\xi_n = a, \forall n$ .

Тогда, обозначив  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ , получаем

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a$$

### Смысл ЗБЧ:

$\xi_1 \dots \xi_n \dots$  – результаты независимых проведений одного и того же эксперимента.

Тогда их среднее арифметическое сходится к среднему значению результата одного эксперимента  $E\xi_i$

Если  $\xi_i$  – индикаторы наступления некоторого события  $A$ :

$$\xi_i = I\{A \text{ наступило в } i\text{-м эксперименте}\}$$

то

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} E\xi_i = P(A)$$

Таким образом ЗБЧ – это принцип устойчивости частот постулировавшийся в начале курса.

**Лемма 17** (критерий сходимости почти наверное).

$$\xi_n \xrightarrow{n.n.} \xi \iff \text{для } \forall \varepsilon > 0 : P(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Доказательство.*

Обозначим  $A_k^\varepsilon = \{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\}$  и  $A^\varepsilon = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon$

Тогда  $\{\xi_n \rightarrow \xi\} = \bigcup_{m=1}^\infty A_m^{\frac{1}{m}}$

Получаем

$$P(\xi_n \rightarrow \xi) = 0 \iff P\left(\bigcup_{m=1}^\infty A_m^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \iff \forall m : P\left(A_m^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 : P(A^\varepsilon) = 0.$$

$$\text{Но } \bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon \downarrow A^\varepsilon, \text{ поэтому } P(A^\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon\right) = 0 \iff P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Осталось заметить, что  $\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon = \{\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\}$

□

**Теорема 15** (взаимоотношение различных видов сходимости).

Выполнены соотношения

1.  $\xi_n \xrightarrow{n.n.} \xi \implies \xi_n \xrightarrow{P} \xi$
2.  $\xi_n \xrightarrow{L^P} \xi \implies \xi_n \xrightarrow{P} \xi$
3.  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \implies \xi_n \xrightarrow{d} \xi$

Доказательство.

1. Если  $\xi_n \xrightarrow{n.n.} \xi$ , то по лемме для  $\forall \varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} P(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{но событие } \{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} \subset \{\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \\ \implies P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) &\leq P(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

2.  $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^P \geq \varepsilon^P) \leq |\text{нер-во Маркова}| \leq \frac{E|\xi_n - \xi|^P}{\varepsilon^P} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

3. Пусть  $f(x)$  - ограниченная непрерывная функция,  $|f(x)| \leq C, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$  - фиксировано. Возьмем такое  $N$ , что

$$P(|\xi| > N) \leq \frac{\varepsilon}{4C}$$

Функция  $f(x)$  равномерно непрерывна на  $[-N, N]$ , т.е.  $\exists \delta > 0 : \forall x, y$  с условием  $|x| \leq N$  и  $|x - y| \leq \delta$  выполнено

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим следующее разбиение  $\Omega$

$$\begin{aligned} A_1 &= \{|\xi_n - \xi| \leq \delta, |\xi| \leq N\} \\ A_2 &= \{|\xi_n - \xi| \leq \delta, |\xi| > N\} \\ A_3 &= \{|\xi_n - \xi| > \delta\} \end{aligned}$$

Тогда

$$|Ef(\xi_n) - Ef(\xi)| \leq E|f(\xi_n) - f(\xi)| = E(|f(\xi_n) - f(\xi)|(I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3})) \left( \leq \right)$$

Если выполнено  $A_1$ , то  $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies E|f(\xi_n) - f(\xi)|I_{A_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}EI_{A_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Если выполнено  $A_2$  или  $A_3$ , то  $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq 2C$

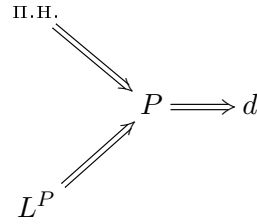
$$\begin{aligned} \implies \left( \leq \right) \frac{\varepsilon}{2} + 2CE(I_{A_2} + I_{A_3}) &= \frac{\varepsilon}{2} + 2C(P(A_2) + P(A_3)) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2CP(|\xi| > N) + 2CP(|\xi_n - \xi| > \delta) \leq \varepsilon + 2CP(|\xi_n - \xi| > \delta) \end{aligned}$$

По условию  $P(|\xi_n - \xi| > \delta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Значит в силу произвольности  $\varepsilon > 0$ ,  $Ef(\xi_n) \rightarrow Ef(\xi)$ , т.е.  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$

□

*Замечание.* Сходимость по распределению случайных величин — это, на самом деле, сходимость их распределений.



Обратных стрелок нигде нет. Можно привести контрпримеры.

## Усиленный закон больших чисел для случайных величин с ограниченными дисперсиями

**Определение 1.** Последовательность  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  чисел из  $\mathbb{R}$  называется *фундаментальной*, если

$$|x_n - x_m| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow +\infty$$

**Теорема 16** (критерий Коши). *Последовательность  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  сходится  $\iff$  она фундаментальна.*

**Теорема 17** (критерий Коши сходимости почти наверное). *Последовательность  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  сходится почти наверное  $\iff \{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  фундаментальна с вероятностью 1.*

*Доказательство.*

( $\implies$ ) Пусть  $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ .

Тогда если  $\omega \in \left\{ \omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega) \right\}$ , то  $\omega \in \{\{\xi_n(\omega)\} - \text{фундаментальна}\}$

$$\implies P(\{\xi_n\} - \text{фундаментальна}) \geq P(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi) = 1$$

( $\Leftarrow$ ) Обозначим  $A = \{\{\xi_n\} - \text{фундаментальна}\}$

Тогда  $\forall \omega \in A$  у  $\xi_n(\omega)$   $\exists$  предел  $\xi(\omega)$

$$\xi(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega), \quad \text{если } \omega \in A$$

Если же  $\omega \notin A$ , то положим  $\xi(\omega) := 0$

Тогда  $\xi_n I_A \rightarrow \xi \implies \xi$  — случайная величина (как предел случайных величин)

$$\begin{aligned}
 P(\xi_n \rightarrow \xi) &\leq P(\{\xi_n \rightarrow \xi\} \cap A) = P(A) = 1 \\
 &\implies \xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi
 \end{aligned}$$

□

**Лемма 18** (критерий фундаментальности с вероятностью 1).

*Последовательность  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  фундаментальна с вероятностью 1  $\iff$  для  $\forall \varepsilon > 0$ :*

$$P(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi_n| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Доказательство.* Полностью аналогично док-ву критерия сходимости почти наверное. □



**Теорема 18** (Колмогоров-Хинчин, достаточное условие для сходимости ряда почти наверное).

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – последовательность независимых случайных величин т.ч.  $E\xi_n = 0, \forall n$  и  $E\xi_n^2 < +\infty, \forall n$

Тогда если сходится  $\sum_n E\xi_n^2 < +\infty$ , то ряд  $\sum_n \xi_n$  сходится почти наверное.

**Лемма 19** (Неравенство Колмогорова).

Пусть  $\xi_1 \dots \xi_n$  – независимые с.в.

$E\xi_i = 0$  и  $E\xi_i^2 < +\infty$ . Обозначим  $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$

Тогда

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{ES_n^2}{\varepsilon^2}$$

*Доказательство.* Обозначим  $A = \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon \right\}$

Разделим  $A$  на следующие части:

$A_k = \{|S_k| \geq \varepsilon \text{ и } |S_i| < \varepsilon \text{ для } i = 1 \dots k-1\}$ .

Тогда  $A_k \cap A_j = \emptyset$  при  $k \neq j$  и  $A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$

Рассмотрим

$$ES_n^2 \geq E(S_n^2 I_A) = E \sum_{k=1}^n (S_n^2 I_{A_k}) = \sum_{k=1}^n E(S_n^2 I_{A_k})$$

$$\begin{aligned} ES_n^2 I_{A_k} &= E(S_k + \xi_{k+1} + \dots + \xi_n)^2 I_{A_k} = \\ &= ES_k^2 I_{A_k} + 2ES_k(\xi_{k+1} + \dots + \xi_n) I_{A_k} + E(\xi_{k+1} + \dots + \xi_n)^2 I_{A_k} \end{aligned}$$

Но  $I_{A_k}$  зависит от  $S_1 \dots S_k \implies S_k I_{A_k}$  не зависит от  $\xi_{k+1} \dots \xi_n$

Следовательно, второе слагаемое

$$\begin{aligned} ES_k I_{A_k} (\xi_{k+1} + \dots + \xi_n) &= ES_k E(\xi_{k+1} + \dots + \xi_n) = 0 \quad (\forall i : E\xi_i = 0) \\ \implies ES_n^2 I_{A_k} &= ES_k^2 I_{A_k} + E(\xi_{k+1} + \dots + \xi_n)^2 I_{A_k} \geq ES_k^2 I_{A_k} \geq \varepsilon^2 E I_{A_k} = \varepsilon^2 P(A_k) \end{aligned}$$

т.к.  $S_k \geq \varepsilon$  на  $A_k$ .

В итоге

$$ES_n^2 \geq \sum_{k=1}^n E(S_n^2 I_{A_k}) \geq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^n P(A_k) = \varepsilon^2 P(A)$$

□

*Док-во теоремы Колмогорова-Хинчина.*

Обозначим  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ . Тогда  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$  сходится п.н.  $\iff$  (критерий Коши)  $\iff$

$\iff \{S_n, n \in \mathbb{N}\}$  фундаментальна с вероятностью 1  $\iff$  (критерий фундаментальности)  $\iff$

$\iff$  для  $\forall \varepsilon > 0 : P(\sup_{k \geq n} |S_k - S_n| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Оценим её: Рассмотрим.

$$\begin{aligned}
P(\sup_{k \geq n} |S_k - S_n| \geq \varepsilon) &= P(\bigcup_{k \geq n} \{|S_k - S_n| \geq \varepsilon\}) = |\text{непрерывность вер. меры}| = \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} P(\bigcup_{k=n}^{N+n} \{|S_k - S_n| \geq \varepsilon\}) = \lim_{N \rightarrow \infty} P(\max_{1 \leq k \leq N} |S_{k+n} - S_n| \geq \varepsilon) = |\text{нер-во Колмогорова}| \leq \\
&\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E(S_{n+N} - S_n)^2}{\varepsilon^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=n+1}^{n+N} E\xi_k^2}{\varepsilon^2} = \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} E\xi_k^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

т.к. это остаток сходящегося ряда (по условию  $\sum_n E\xi_n^2 < +\infty$ )

□

**Лемма 20** (Тёплиц).

Пусть последовательность  $x_n \rightarrow x$ ,  $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$  т.ч.  $a_n \geq 0$  и  $b_n = \sum_{j=1}^n a_j \uparrow +\infty$ .

Тогда

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n a_j x_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$$

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon > 0$  – произвольное. Возьмём  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  т.ч.  $\forall n > n_0 : |x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ .  
Далее, возьмем  $n_1 > n_0$ , т.ч.

$$\frac{1}{b_{n_1}} \sum_{j=1}^{n_0} a_j |x_j - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда для  $\forall n > n_1$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n a_j x_j - x \right| &= \left| \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n a_j (x_j - x) \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n_0} a_j |x_j - x| + \frac{1}{b_n} \sum_{j=n_0+1}^{n_1} a_j |x_j - x| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{b_n} \sum_{j=n_0+1}^n a_j \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

□

**Лемма 21** (Кронекер).

Пусть ряд  $\sum_n x_n$  сходится.

$\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$  – некоторая последовательность  $a_n \geq 0$  т.ч.  $b_n = \sum_{j=1}^n a_j \uparrow +\infty$

Тогда

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n b_j x_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Доказательство.* Обозначим  $S_n = x_1 + \dots + x_n$ . Тогда  $\{S_n\}$  сходится.

$$\sum_{j=1}^n b_j x_j = \sum_{j=1}^n b_j (S_j - S_{j-1}) = b_n S_n - \sum_{j=1}^n S_{j-1} (b_j - b_{j-1}) = b_n S_n - \sum_{j=1}^n S_{j-1} a_j$$

Делим на  $b_n$ :

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n b_j x_j = S_n - \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n S_{j-1} a_j$$

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$$

А по лемме Тёплица:

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n S_{j-1} a_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

$\Rightarrow$  их разность стремится к нулю. □

**Теорема 19** (Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова-Хинчина).

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – независимые с.в. т.ч.  $D\xi_n < +\infty \forall n$ .

Пусть последовательность  $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$  т.ч.  $b_n > 0, b_n \uparrow +\infty$  и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{b_n^2} < +\infty$$

Обозначим  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Тогда

$$\boxed{\frac{S_n - ES_n}{b_n} \xrightarrow{n.н.} 0} \quad (\text{при } n \rightarrow \infty)$$

*Доказательство.* Рассмотрим

$$\frac{S_n - ES_n}{b_n} = \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k \left( \frac{\xi_k - E\xi_k}{b_k} \right)$$

Далее с.в.  $\eta_k = \frac{\xi_k - E\xi_k}{b_k}$  – независимы и  $E\eta_k = 0$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} E\eta_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} E \left( \frac{\xi_k - E\xi_k}{b_k} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D\xi_k}{b_k^2} < +\infty$$

$\Rightarrow$  по теореме о сходимости ряда, ряд  $\sum_k \eta_k$  сходится п.н.

Но по лемме Кронекера  $\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k \left( \frac{\xi_k - E\xi_k}{b_k} \right)$  сходится к нулю для всех  $\omega$ , для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k - E\xi_k}{b_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k$$

сходится. А этот ряд сходится.

$$\Rightarrow \frac{S_n - ES_n}{b_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$$

□

**Следствие 1.** Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – независимые случайные величины т.ч.  $D\xi_n \leq C \forall n \in \mathbb{N}$   
Обозначим  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ .

Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$$

Если, к тому же,  $E\xi_i = a \forall i$ , то

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} a$$

*Доказательство.* Возьмем  $b_n = n \implies b_n > 0, b_n \uparrow +\infty$ .

Тогда

$$\sum_n \frac{D\xi_n}{b_n^2} = \sum_n \frac{D\xi_n}{n^2} \leq \sum_n \frac{c}{n^2} < +\infty$$

Согласно УЗБЧ

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

Если же  $E\xi_n = a$ , то  $ES_n = n - a$

$$\frac{S_n}{n} - a \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \iff \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} a$$

□

Смысл УЗБЧ: обоснование феномена устойчивости частот появлений событий в последовательностях независимых экспериментов.

Если  $\xi_i = I\{\text{событие } A \text{ произошло в } i\text{-том эксперименте}\}$  то

$$\nu_n(A) = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_1 = P(A)$$

## Предельный переход под знаком $E$

Вопрос:  $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \implies E\xi \rightarrow E\xi$ ?

**Теорема 20** (О монотонной сходимости).

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi, \eta$  – с.в.

1. Если  $\xi_n \uparrow \xi, \xi_n \geq \eta, \forall n \in \mathbb{N}$  и  $E\eta > -\infty$ , то  $E\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n$
2. Если  $\xi_n \downarrow \xi, \xi_n \leq \eta, \forall n \in \mathbb{N}$  и  $E\eta < +\infty$ , то  $E\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n$

**Теорема 21** (лемма Фату).

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \eta$  – с.в.,  $E\eta$  – конечно

1. Если  $\xi_n \geq \eta, \forall n \in \mathbb{N}$ , то  $\varliminf_n E\xi_n \geq E \varliminf_n \xi_n$
2. Если  $\xi_n \leq \eta, \forall n \in \mathbb{N}$ , то  $\varlimsup_n E\xi_n \leq E \varlimsup_n \xi_n$

3. Если  $|\xi_n| \leq \eta, \forall n \in \mathbb{N}$ , то  $E \underline{\lim}_n \xi_n \leq \underline{\lim}_n E\xi_n \leq \overline{\lim}_n E\xi_n \leq E \overline{\lim}_n \xi_n$

*Доказательство.*

1. Обозначим  $\psi_n = \inf_{k \geq n} \xi_k$ . Тогда  $\psi_n \uparrow \underline{\lim}_n \xi_n$  и  $\psi_n \geq \eta, \forall n \in \mathbb{N}$ .

По теореме о монотонной сходимости получаем

$$\lim_n E\psi_n = E \underline{\lim}_n \xi_n$$

Осталось заметить, что

$$E \underline{\lim}_n \xi_n = \lim_n E\psi_n = \underline{\lim}_n E\psi_n \leq \underline{\lim}_n E\xi_n$$

т.к.  $\xi_n \geq \psi_n, \forall n$

2. Следует из 1) заменой  $\xi_n$  на  $-\xi_n$

3. Сразу следует из 1) и 2)

□

**Теорема 22** (Лебега о мажорируемой сходимости).

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – последовательность с.в. т.ч.  $\xi_n \xrightarrow{n.н.} \xi$  и для  $\forall n : |\xi_n| \leq \eta$ , причем  $E\eta$  конечно.

Тогда  $E\xi = \lim_n E\xi_n$  и, более того,  $E|\xi_n - \xi| \rightarrow 0$  (т.е.  $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$ )

*Доказательство.* Заметим, что  $\xi = \lim_n \xi_n = \underline{\lim}_n \xi_n = \overline{\lim}_n \xi_n$  п.н.

$\implies$  по лемме Фату

$$\begin{aligned} E\xi &= E \underline{\lim}_n \xi_n \leq \underline{\lim}_n E\xi_n \leq \overline{\lim}_n E\xi_n \leq E \overline{\lim}_n \xi_n = E\xi \\ &\implies \lim_n E\xi_n = E\xi \end{aligned}$$

Конечность  $E\xi$  следует из того, что  $|\xi| \leq \eta$  п.н. и конечности  $E\eta$

Для обоснования сходимости в  $L^1$  достаточно взять  $\psi_n = |\xi_n - \xi|$ .

Тогда  $|\psi_n| \leq 2|\eta|$  п.н. и  $\psi_n \xrightarrow{п.н.} 0 \implies E\psi_n \rightarrow 0$

□

## Усиленный закон больших чисел для с.в. с конечным математическим ожиданием

**Определение 1.** Пусть  $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$  – последовательность событий.

Тогда событием  $\{A_n \text{ бесконечное число}\} = \{A_n \text{ б.ч}\}$  наз. событие, заключающееся в том, что произошло бесконечное число событий в последовательности  $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Формально:

$$\{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

**Лемма 22** (Борель-Кантелли).

1. Если  $\sum_n P(A_n) < +\infty$ , то  $P(A_n \text{ б.ч.}) = 0$

2. Если  $\sum_n P(A_n) = +\infty$  и все  $A_n$  - независимые, то  $P(A_n \text{ б.ч.}) = 1$

*Доказательство.*

1.

$$P(A_n \text{ б.ч.}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq n} P(A_k) = 0$$

2.

$$P(A_n \text{ б.ч.}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(1 - \bigcap_{k \geq n} \bar{A}_k\right)$$

Но

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k \geq n} \bar{A}_k\right) &= |\text{непр. вер. меры}| = \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k \geq n}^N \bar{A}_k\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N P(\bar{A}_k) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N (1 - P(A_k)) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N e^{-P(A_k)} = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-\sum_{k=n}^N P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{т.к. } \forall n : \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = +\infty$$

$$\implies P(A_n \text{ б.ч.}) = 1$$

□

**Лемма 23.** Пусть  $\xi$  - неотр. с.в.,  $E\xi$  - конечно. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) \leq E\xi \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi \geq n)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(k \leq \xi < k+1) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(k \leq \xi < k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(k \leq \xi < k+1) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E(k I\{k \leq \xi < k+1\}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} E(\xi I\{k \leq \xi < k+1\}) = E\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi I\{k \leq \xi < k+1\}\right) = \\ &= E\xi \leq E\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) I\{k \leq \xi < k+1\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) + \sum_{n=0}^{\infty} P(k \leq \xi < k+1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geq n) + 1 \end{aligned}$$

□

**Определение 2.** Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  наз. *одинаково распределенными*, если у них совпадают функции распределения.

Обозначение:  $\xi \stackrel{d}{=} \eta$

**Утверждение 4.** Если  $\xi \stackrel{d}{=} \eta$ , то для  $\forall$  борелевской  $g(x)$  т.ч.  $Eg(\xi)$  конечно, выполнено:

$$Eg(\xi) = Eg(\eta)$$

**Теорема 23** (Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова).

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – независимые одинаково распределенные случ. величины (н.о.р.с.в), т.ч.:  $E|\xi_i| < +\infty$ .

Тогда

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} m = E\xi_1$$

*Доказательство.*  $E|\xi_i|$  – конечно. Тогда по доказанной выше лемме:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_1| \geq n) < +\infty$$

В силу одинаковости распределенности:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_1| \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| \geq n) < +\infty$$

Согласно лемме Бореля-Кантелли:

$$P(\{|\xi_n| \geq n\} \text{ б.ч.}) = 0$$

$\implies$  с вероятностью 1  $\forall n$ , кроме конечного числа, выполнено  $\{|\xi_n| \leq n\}$ .

Обозначим  $\tilde{\xi}_n = \xi_n I\{|\xi_n| \leq n\}$ .

Тогда с вероятностью 1,  $\tilde{\xi}_n = \xi_n$ , кроме конечного числа элементов.

Считаем, что  $E\xi_i = 0$

Получаем, что

$$P\left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \rightarrow 0\right) = P\left(\frac{\tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_n}{n} \rightarrow 0\right)$$

Рассмотрим  $E\tilde{\xi}_n$  :

$$E\tilde{\xi}_n = E\xi_n I\{|\xi_n| \leq n\} = E\xi_1 I\{|\xi_1| < n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E\xi_1 = 0$$

Согласно лемме Тёплица

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\tilde{\xi}_k \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

Значит

$$\frac{\tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \iff \frac{(\tilde{\xi}_1 - E\tilde{\xi}_1) + \dots + (\tilde{\xi}_n - E\tilde{\xi}_n)}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$$

Обозначим  $\bar{\xi}_n = \tilde{\xi}_n - E\tilde{\xi}_n$ .

Согласно лемме Кронекера, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\xi}_k}{k}, \quad \text{то } \frac{\bar{\xi}_1 + \dots + \bar{\xi}_n}{n} \rightarrow 0$$

(для фикс.  $\omega \in \Omega$ )

Остается проверить, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\xi}_k}{k}$  сходится с вероятностью 1.

Согласно теореме Колмогорова-Хинчина для этого достаточно показать ( $\bar{\xi}_k$  - нез.,  $E\bar{\xi}_k = 0$ ), что сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\bar{\xi}_k^2}{k^2}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\bar{\xi}_k^2}{k^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D\tilde{\xi}_k}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\tilde{\xi}_k^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} E\xi_k^2 I\{|\xi_k| \leq k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} E(\xi_1^2 I\{|\xi_1| \leq k\}) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} E(\xi_1^2 \sum_{n=1}^k I\{n-1 < |\xi_1| \leq n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\xi_1^2 I\{n-1 < |\xi_1| \leq n\}) \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\xi_1^2 I\{n-1 < |\xi_1| \leq n\} \cdot \frac{2}{n}\right) \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} E(|\xi_1| I\{n-1 < |\xi_1| \leq n\}) = \\ &= 2E\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_1| I\{n-1 < |\xi_1| \leq n\}\right) = 2E|\xi_1| < +\infty \end{aligned}$$

□

## Замена переменных в интеграле Лебега

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – вероятностное пространство,  $\xi$  – с.в. на нем и  $E\xi$  – конечно.

**Обозначения.**

1.  $E\xi = \int_{\Omega} \xi dP$  – интеграл Лебега от  $\xi$  по вер. мере  $P$ .
2.  $\int_A \xi dP := E(\xi I_A)$  для  $\forall A \in \mathcal{F}$

Напоминание: Распределение  $P_{\xi}$  – это вероятностная мера на  $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$  ( $P_{\xi} = P(\xi \in B)$ )

Для вер. пр-ва  $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), P_{\xi})$  тоже можно ввести мат. ожидание.

1.  $\int_{\mathbb{R}} g(x) P_{\xi}(dx)$  – мат. ожидание с.в.  $g(x)$  на таком пространстве.
- 2.

$$\int_A g(x) P_{\xi}(dx) := \int_{\mathbb{R}} g(x) I_A(x) P_{\xi}(dx), \quad \forall A \in B(\mathbb{R})$$

3. Если  $F_{\xi}(x)$  – ф.р. с.в.  $\xi$ , то

$$dF_{\xi}(x) := P_{\xi}(dx)$$

Вопрос: можно ли вычислить  $Eg(\xi)$ , зная только ее распределение?

**Теорема 24** (замена переменных в интеграле Лебега).

Пусть  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – случайный вектор,  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – борелевская функция.

Тогда для  $\forall B \in B(\mathbb{R})$  выполнено:

$$E(g(\xi)) I\{\xi \in B\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{\xi \in B\}} g(\xi) dP = \int_B g(x) P_{\xi}(dx)$$



*Доказательство.* Пусть  $g$  – простая:  $g(x) = I_A(x)$  для  $A \in B(\mathbb{R}^n)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} Eg(\xi)I\{\xi \in B\} &= EI\{\xi \in A\}I\{\xi \in B\} = EI\{\xi \in A \cap B\} = \\ &= \int_{A \cap B} P_\xi(dx) = \int_B I_A(x)P_\xi(dx) = \int_B g(x)P_\xi(dx) \end{aligned}$$

Если функция  $g(x)$  – простая неотрицательна, то искомое равенство следует из линейности мат. ожидания. Если  $g(x)$  – произвольная неотрицательная, то рассмотрим последовательность простых неотриц.  $g_n(x)$  т.ч.  $g_n(x) \uparrow g(x)$ .

Тогда по теореме о монотонной сходимости:

$$\begin{aligned} Eg_n(\xi)I\{\xi \in B\} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} Eg(\xi)I\{\xi \in B\} \\ \int_B g_n(x)P_\xi(dx) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_B g(x)P_\xi(dx) \end{aligned}$$

$\implies$  доказано для неотриц.  $g(x)$ .

В общем случае, пользуемся разложением  $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$  и линейностью математического ожидания.  $\square$

### Следствие 1.

- ① Для вычисления  $Eg(\xi)$  достаточно знать только распределение  $\xi$ .
- ② Для  $\forall$  борелевской  $g(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\forall$  случ. вектора  $\xi$  из  $\mathbb{R}^n$ :

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)P_\xi(dx)$$

*Доказательство.* Достаточно положить  $B = \mathbb{R}^n$  в теореме.  $\square$

- ③ Если  $\xi$  – с.в., то

$$E\xi = \int_{\mathbb{R}} xP_\xi(dx)$$

*Доказательство.* Достаточно положить  $g(x) = x$  в ②  $\square$

- ④ Если  $\xi \stackrel{d}{=} \eta$  – одинаково распределены, то для  $\forall$  борелевской  $g(x)$ :  $Eg(\xi) = Eg(\eta)$

*Доказательство.*

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}} g(x)P_\eta(dx) = Eg(\eta)$$

$\square$

- ⑤ Пусть  $\xi$  – дискретная с.в. со значениями в  $\mathcal{X} = \{x_i\}_{i=1}^\infty$ .

Тогда для  $\forall$  борелевской функции  $g(x)$ :

$$Eg(\xi) = \sum_{i=1}^\infty g(x_i)P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^\infty g(x_i)P_\xi(\{x_i\})$$

*Доказательство.* Если  $g(x) \geq 0$ , то  $\sum_{i=1}^n g(x_i)I\{\xi = x_i\} \uparrow g(\xi)$

$\implies$  по теореме о монотонной сходимости:

$$Eg(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i)P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)P(\xi = x_i)$$

В общем, раскладываем  $g(x)$  на  $g^+$  и  $g^-$  и пользуемся линейностью мат. ожидания.  $\square$

**Следствие 2.** если  $P_\xi$  – дискр. распр. на  $\mathcal{X} = \{x_i\}$ , то

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)P_\xi(dx) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)P_\xi(\{x_i\}) = \int_{\mathbb{R}} g(x)dF_\xi(x)$$

**Пример 14.** Пусть  $\xi \sim Pois(\lambda)$ . Найти  $E\xi$  = ?

$$\xi \sim Pois(\lambda) \implies P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \text{для } \forall k \in \mathbb{Z}_+$$

Тогда

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} kP(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda$$

⑥ Пусть  $\xi$  – абсолютно непрерывная с.в. с плотностью  $f_\xi(x)$ .

Тогда для  $\forall g(x)$  – борелевской функции:

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f_\xi(x)dx$$

*Доказательство.* Пусть  $F_\xi$  – ф.р.  $\xi$ . Тогда по определению плотности,

$$P(\xi \leq x) = F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(y)dy$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} P(\xi \leq x) &= P_\xi((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x P_\xi(dy) \\ \implies P_\xi(dy) &= f_\xi(y)dy \end{aligned}$$

В итоге,

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f_\xi(x)dx$$

$\square$

**Пример 15.** Пусть  $\xi \sim N(a, \sigma^2)$ . Вычислить  $E\xi$ .

Плотность  $N(a, \sigma^2)$  равна:

$$f_\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Rightarrow E\xi &= \int_{\mathbb{R}} x f_\xi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x-a) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx + a \int_{\mathbb{R}} f_\xi(x) dx = a \end{aligned}$$

*Замечание.* Если  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – случайный вектор с плотностью  $f_\xi(x_1, \dots, x_n)$ , то для  $\forall g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – борелевской функции:

$$Eg(\xi_1, \dots, \xi_n) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) f_\xi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

*Пример 16.* Если  $(\xi, \eta)$  имеет плотность  $f_{(\xi, \eta)}(x, y)$ , то

$$E\xi\eta = \int_{\mathbb{R}^2} xy f_{(\xi, \eta)}(x, y) dx dy$$

## Прямое произведение вероятностных пространств

**Определение 1.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}_1, P_1)$  и  $(\Omega, \mathcal{F}_2, P_2)$  – два вероятностных пространства. Тогда вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  наз. их *прямым произведением*, если

- $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$
- $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ , т.е.  
 $\mathcal{F} = \sigma(\{B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathcal{F}_1, B_2 \in \mathcal{F}_2\})$
- $P = P_1 \otimes P_2$ , т.е.

$P$  – это продолжение меры  $P_1 \times P_2$ , заданной на прямоугольниках  $B_1 \times B_2$ ,  $B_i \in \mathcal{F}_i$  по правилу  $P(B_1 \times B_2) = P_1(B_1) \cdot P_2(B_2)$

Такое продолжение  $\exists$  и единственно по теореме Каратеодори.

**Теорема 25** (Фубини).

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – прямое произведение  $(\Omega, \mathcal{F}_1, P_1)$  и  $(\Omega, \mathcal{F}_2, P_2)$ .

Пусть с.в  $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  т.ч.  $\int_{\Omega} |\xi(\omega_1, \omega_2)| dP < +\infty$

Тогда интегралы  $\int_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) dP_1$  и  $\int_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) dP_2$  определены почти наверное относительно  $P_2$  и  $P_1$ , являются измеримыми относительно  $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1$  соотв., и кроме того,

$$\int_{\Omega} \xi(\omega_1, \omega_2) dP = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) dP_2 dP_1 = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) dP_1 dP_2$$

Смысл теоремы: Двойной интеграл = повторному интегралу

**Утверждение 5.** Пусть  $\xi, \eta$  – независ. с.в.

Тогда  $(\mathbb{R}^2, B(\mathbb{R}^2), P_{(\xi, \eta)})$  явл. прямым произведением  $(\mathbb{R}^2, B(\mathbb{R}^2), P_\xi)$  и  $(\mathbb{R}^2, B(\mathbb{R}^2), P_\eta)$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ B(\mathbb{R}^2) &= B(\mathbb{R}) \otimes B(\mathbb{R}) \\ P_{(\xi, \eta)}(B_1 \times B_2) &= P_\xi(B_1) \cdot P_\eta(B_2)?\end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}P_{(\xi, \eta)}(B_1 \times B_2) &= P((\xi, \eta) \in B_1 \times B_2) = P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = |\text{независимость}| = \\ &= P(\xi \in B_1) \cdot P(\eta \in B_2) = P_\xi(B_1) \cdot P_\eta(B_2).\end{aligned}$$

□

**Лемма 24** (О свертке распределений).

Пусть  $\xi, \eta$  – нез. с.в. с ф.р.  $F_\xi$  и  $F_\eta$ .

Тогда:

1.

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x) dF_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} F_\eta(z-x) dF_\xi(x)$$

2. Если  $\xi$  имеет плотность  $f_\xi(x)$ ,  $\eta$  – плотность  $f_\eta(x)$ , то  $\xi + \eta$  имеет плотность

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(z-x) f_\eta(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_\eta(z-x) f_\xi(x) dx$$

Доказательство.

1.

$$\begin{aligned}F_{\xi+\eta}(z) &= P(\xi + \eta \leq z) = EI\{\xi + \eta \leq z\} = |\text{Ф-ла замены переменных}| = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} I\{x + y \leq z\} P_{(\xi, \eta)}(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}^2} I\{x + y \leq z\} P_\xi(dx) P_\eta(dy) = |\text{теор. Фубини}| = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} I\{x + y \leq z\} P_\xi(dx) \right) P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}} P(\xi + y \leq z) P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}} F_\eta(z-y) dF_\xi(y)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}F_{\xi+\eta}(z) &= \int_{\mathbb{R}^2} I\{x + y \leq z\} P_\xi(dx) P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}^2} I\{x + y \leq z\} f_\xi(x) f_\eta(y) dx dy = \\ &= |t = x + y, x' = x| = \int_{\mathbb{R}^2} I\{t \leq z\} f_\xi(x') f_\eta(t - x') dx' dt = |\text{теорема Фубини}| = \\ &= \int_{-\infty}^z \left( \int_{\mathbb{R}} f_\xi(x') f_\eta(t - x') dx' \right) dt = \int_{-\infty}^z f_{\xi+\eta}(t) dt\end{aligned}$$

□

Замечание:

Если  $\xi_1 \dots \xi_n$  – незав. с.в., то  $P_{(\xi_1, \dots, \xi_n)} = P_{\xi_1} \otimes \dots \otimes P_{\xi_n}$ ,

$$dF_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1 \dots x_n) = dF_{\xi_1}(x_1) \dots dF_{\xi_n}(x_n)$$

и если  $\xi_i$  имеет плотность  $f_{\xi_i}(x_i)$ , то вектор  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  тоже имеет плотность

$$f_{\xi}(x_1 \dots x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{\xi_n}(x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{\xi}(x_1 \dots x_n)$$

## Слабая сходимость вероятностных мер

**Определение 1.** Последовательность  $\{F_n(x), n \in \mathbb{N}\}$  функций распределения на  $\mathbb{R}$  назыв. *слабо сходящейся* к функции распределения  $F(x)$ , если  $\forall f(x)$  – огр. непрер. функции на  $\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dF_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x)$$

**Обозначение 1.**  $F_n \xrightarrow{w} F$

**Следствие 1.**  $C.в. \xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F_{\xi}$

*Доказательство.*

$$Ef(\xi_n) = |\text{замена переменной}| = \int_{\mathbb{R}} f(x) dF_{\xi_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Ef(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dF_{\xi}(x)$$

□

**Определение 2.** Последовательность  $\{F_n(x), n \in \mathbb{N}\}$  – функций распределения на  $\mathbb{R}$  называется *сходящейся в основном* к функции распределения  $F(x)$ , если  $\forall x \in \mathbb{C}(F)$  :

$$F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x)$$

где  $\mathbb{C}(F)$  – множество точек непрер. функции  $F(x)$

**Обозначение 2.**  $F_n \implies F$

Пусть  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}, P$  – вероятностная мера в  $(\mathbb{R}^m, B(\mathbb{R}^m))$

**Определение 3.** Последовательность  $P_n$  наз. *слабо сходящейся* к вер. мере  $P$ , если  $\forall f(x)$  – огранич. непрер. ф-ии в  $\mathbb{R}^m$  выполнено:

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x) P_n(dx) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) P(dx)$$

**Обозначение 3.**  $P_n \xrightarrow{w} P$

**Следствие 2.**  $C.в. \xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F_{\xi} \iff P_{\xi_n} \xrightarrow{w} P_{\xi}$

**Определение 4.** Последовательность  $P_n$  сходится к вер. мере  $P$  в основном, если для  $\forall A \in B(\mathbb{R}^m)$  с условием  $P(\partial A) = 0$  выполнено:

$$P_n(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(A)$$

**Обозначение 4.**  $P_n \implies P$

**Теорема 26** (Александров).

Для вер. мер в  $\mathbb{R}^m$  следующие условия эквивалентны

1.  $P_n \xrightarrow{w} P$

$$2. \overline{\lim}_n P_n(A) \leq P(A), \quad \forall \text{ замкнутого } A$$

$$3. \underline{\lim}_n P_n(A) \geq P(A), \quad \forall \text{ открытого } A$$

$$4. P_n \Rightarrow P$$

**Теорема 27** (Эквивалентность предельных сходимости).

Пусть  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}, P$  – вероятностные меры на  $\mathbb{R}$ ,  $\{F_n(x), n \in \mathbb{N}\}, F(x)$  – соответств. им функции распределения.

Тогда следующие условия эквивалентны:

$$1. P_n \xrightarrow{w} P$$

$$2. P_n \Rightarrow P$$

$$3. F_n \xrightarrow{w} F$$

$$4. F_n \Rightarrow F$$

*Доказательство.* По теореме Александрова достаточно проверить, что (2) эквивалентно (4).

$$(2) \Rightarrow (4):$$

Пусть  $x \in \mathbb{C}(F)$

Тогда  $\partial((-\infty; x]) = \{x\}$ .

Значит,

$$F_n(x) = P_n((-\infty; x]) \xrightarrow{P_n \rightarrow P} P((-\infty; x]) = F(x)$$

$$(4) \Rightarrow (2):$$

Для установления (2) по теореме Александрова достаточно проверить, что  $\underline{\lim}_n P_n(A) \geq P(A), \forall A$  – откp. из  $\mathbb{R}$

Пусть  $A \subset \mathbb{R}$  – открыто, тогда  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ , где  $I_k = (a_k, b_k)$  – непересек. интервалы.

Для  $\forall \varepsilon > 0$  выберем  $I'_k = (a'_k, b'_k] \subset I_k$ , т.ч.  $a'_k, b'_k$  – точки непрерывности  $F(x)$  и

$$P(I'_k) \geq P(I_k) - \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Такой выбор  $(a'_k, b'_k]$  возьмем в силу непр. вер. меры и того факта, что  $F(x)$  имеет не более чем счетное число точек разрыва. Тогда

$$\underline{\lim}_n P_n(A) = \underline{\lim}_n \sum_{k=1}^{\infty} P_n(I_k) \geq |\forall N| \geq \underline{\lim}_n \sum_{k=1}^N P_n(I_k) \geq \sum_{k=1}^N \underline{\lim}_n P_n(I_k)$$

Устремим  $N \rightarrow \infty$ :

$$\underline{\lim}_n P_n(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_n P_n(I_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_n P_n(I'_k) \quad (\equiv)$$

Но  $P_n(I'_k) = P((a'_k, b'_k]) = F_n(b'_k) - F_n(a'_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(b'_k) - F(a'_k)$ , так как  $a'_k, b'_k$  – точки непр.  $F(x)$ .

Значит  $F_n \Rightarrow F$

$$(\equiv) \sum_{k=1}^{\infty} (F(b'_k) - F(a'_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} P((a'_k, b'_k]) \geq \sum_{k=1}^{\infty} (P(I_k) - \frac{\varepsilon}{2^k}) = P(A) - \varepsilon$$

В силу произвольности  $\varepsilon > 0$ ,  $\underline{\lim}_n P_n(A) \geq P(A)$

□

**Следствие 3.** Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\xi$  – с.в. Тогда  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_\xi(x)$  для  $\forall x \in \mathbb{C}(F_\xi)$

### Смысл сходимости по распределению:

Это аппроксимация распределений.

Пусть  $\eta$  – нек. с.в. со "сложным" распр. (сложно вычислить ф.р.  $\eta$ ).

Пусть  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ , где распр.  $\xi$  "легко" вычислить (или оно известно).

Если  $\xi_m \stackrel{d}{=} \eta$  для достаточно большого номера  $m$ , то ф.р.  $\eta$  можно аппроксимировать ф.р.  $\xi$ .

## Предельные теоремы для схемы Бернулли

Описание модели: проводим большое число независимых однородных случ. экспериментов, в которых мы фиксируем "успех" или "неудачу".

Нас интересует распределение числа успехов при проведении большого числа экспериментов.

Математическая модель:

$\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – нез. с.в.  $P(\xi_n = 1) = p$ ,  $P(\xi_n = 0) = 1 - p = q$

**Определение 1.** Распределение  $\xi_n$  наз. распр. Бернулли.

Обозначим  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$  – число "успехов" после проведения  $n$  испытаний.

**Теорема 28** (Бернулли, 1703, ЗБЧ).  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} p$

Несмотря на то, что распр.  $S_n$  известно, практическое вычисление вероятностей вида  $P(a \leq S_n \leq b)$  при очень больших  $n$  затруднительно.

**Теорема 29** (Пуассон).

Если  $np(n) \rightarrow \lambda > 0$ , то  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$

$$P(S_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{k!} (np)^k \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} (1-p)^n (1-p)^{-k} \\ &= \frac{1}{k!} (\lambda + o(1))^k e^{-\lambda} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} \end{aligned}$$

□

**Следствие 1.** Если  $\xi_n \sim \text{Bin}(n, p(n))$ , где  $np(n) \rightarrow \lambda > 0$ , то  $\xi_n \xrightarrow{d} \eta \sim \text{Pois}(\lambda)$

*Доказательство.*  $\xi_n \xrightarrow{d} \eta \iff \forall x \in \mathbb{C}(F_\eta) : F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_\eta(x)$  Но  $\xi_n$  и  $\eta$  принимает значения  $\mathbb{Z}_+ \implies \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_+ :$

$$F_{\xi_n}(x) = \sum_{\substack{k \leq x \\ k \in \mathbb{Z}_+}} P(\xi_n = k) \rightarrow \text{по теор. Пуассона} \rightarrow \sum_{\substack{k \leq x \\ k \in \mathbb{Z}_+}} P(\eta = k) = F_\eta(x)$$

□

**Теорема 30** (Муавр-Лаплас).

Пусть  $p = \text{const}$ ,  $S_n \sim \text{Bin}(n, p)$ . Обозначим для  $\forall -\infty \leq a \leq b \leq +\infty$

$$P_n(a, b) = P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right)$$

Тогда имеет место сходимость:

$$\sup_{-\infty \leq a \leq b \leq +\infty} \left| P_n(a, b) - \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Следствие 2.** В условиях теоремы Муавра-Лапласа

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{d} \eta \sim N(0, 1)$$

*Доказательство.* Обозначим  $\xi_n := \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$

Тогда  $\xi_n \xrightarrow{d} \eta \sim N(0, 1) \iff \forall x \in \mathbb{R}$

$$F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_\eta(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Но теорема Муавра-Лапласа именно это и утверждает □

## Характеристические функции

**Определение 1.** Характеристической функцией с.в.  $\xi$  называется

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi}, \quad t \in \mathbb{R}$$

*Замечание.* Характеристическая функция, вообще говоря, явл. комплекснозначной. Мы понимаем  $Ee^{it\xi}$  как

$$Ee^{it\xi} = E \cos(t\xi) + iE \sin(t\xi)$$

**Определение 2.** Пусть  $F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  – функция распределения на  $\mathbb{R}$ . Её характеристической функцией наз.

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} dF(x)$$

Если  $P$  – вероятностная мера на  $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ , то её характеристической ф-ей наз.

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} P(dx)$$

**Следствие 1.**  $\varphi_\xi(t)$  – х.ф. с.в.  $\xi \iff \varphi_\xi(t)$  – х.ф.  $F_\xi(x) \iff \varphi_\xi(t)$  – х.ф.  $P_\xi$  (распр.  $\xi$ )

*Доказательство.*

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_\xi(x)$$

□



**Определение 3.** Пусть  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – случайный вектор. Его характеристической функцией наз.

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{i\langle t, \xi \rangle}, \text{ где } t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ а } \langle t, \xi \rangle = \sum_{i=1}^n t_i \xi_i$$

**Определение 4.** Пусть  $F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  – функция распр. в  $\mathbb{R}^n$ .

Её х.ф. наз.

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, x \rangle} dF(x), \quad t \in \mathbb{R}^n$$

Если  $P$  – вероятностная мера в  $\mathbb{R}^n$ , то её х.ф. наз

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, x \rangle} P(dx), \quad t \in \mathbb{R}^n$$

**Следствие 2.** Если  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – сл. вектор, то  $\varphi_\xi(t)$  – х.ф.  $\xi \iff \varphi_\xi(t) = \text{х.ф. } F_\xi(x), x \in \mathbb{R}^n \iff \varphi_\xi(t) = \text{х.ф. } P_\xi$

**Пример 17.**

1.  $\xi \sim \text{Bern}(p)$ , бернуллиевская с.в.,  $P(\xi = 1) = p, \quad P(\xi = 0) = 1 - p$ .

Тогда

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = e^{it}P(\xi = 1) + e^{it0}P(\xi = 0) = pe^{it} + 1 - p$$

2.  $\xi \sim \text{Pois}(\lambda)$ , пуассоновская с.в.

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} \right) e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

3.  $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$  экспоненциальная с.в.

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \int_0^{+\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(it-\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

## Основные свойства характеристических функций

① Пусть  $\varphi(t)$  – х.ф. с.в.  $\xi$ .

Тогда  $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$

*Доказательство.*

$$|\varphi(t)| = |Ee^{it\xi}| \leq E|e^{it\xi}| = 1 = \varphi(0)$$

□

② Пусть  $\varphi(t)$  – хар. ф. с.в.  $\xi$ , а  $\eta = a\xi + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\varphi_\eta(t) = e^{itb} \varphi_\xi(ta)$$

*Доказательство.*

$$\varphi_\eta(t) = Ee^{it\eta} = Ee^{it(a\xi+b)} = e^{itb} Ee^{ita\xi} = e^{itb} \varphi_\xi(at)$$

□

- ③ Пусть  $\varphi(t)$  – х.ф.с.в.  $\xi$ . Тогда  $\varphi(t)$  равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство.*

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = |Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}| = |E(e^{i(t+h)\xi} - e^{it\xi})| = |E(e^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1))| = E|e^{ih\xi} - 1|$$

При  $h \rightarrow 0$ ,  $e^{ih\xi} - 1 \rightarrow 0$  п.н.

Кроме того,  $E|e^{ih\xi} - 1| \leq 2 \implies$  по теореме Лебега о мажорируемой сходимости:

$E|e^{ih\xi} - 1| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \implies \varphi(t)$  равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}$ . □

- ④ Пусть  $\varphi(t)$  – х.ф. с. в.  $\xi$ . Тогда  $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$

*Доказательство.*

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = Ee^{conj-it\xi} = \overline{Ee^{-it\xi}} = \overline{\varphi(-t)}$$

□

- ⑤ Пусть  $\varphi(t)$  – х.ф. с.в.  $\xi$ . Тогда  $\varphi(t)$  – действительнoзначная  $\iff$  распределение  $\xi$  симметрично, т.е.  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P(\xi \in B) = P(\xi \in -B)$$

*Доказательство.*

( $\Leftarrow$ ) Пусть распр.  $\xi$  – симметрично. Тогда  $\xi \stackrel{d}{=} -\xi \implies$

$$\begin{aligned} E \sin(t\xi) &= E \sin(-t\xi) = -E \sin(t\xi) \\ \implies E \sin(t\xi) &= 0 \implies \varphi(t) = Ee^{it\xi} = E \cos(t\xi) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

– действительнoзначная.

( $\implies$ ) Пусть  $\varphi(t) \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$ . Тогда по свойствам ② и ④.

$$\varphi(t) = \varphi_{\xi}(t) = \overline{\varphi_{\xi}(-t)} = \varphi_{\xi}(-t) = \varphi_{-\xi}(t)$$

т.е. у  $\xi$  и у  $-\xi$  одинаковая х.ф.  $\implies$  по теореме о единственности функции распр.  $\xi$  и  $-\xi$  совпадают.

$\implies \xi \stackrel{d}{=} -\xi$  и, значит, для  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ :

$$P(\xi \in B) = P(-\xi \in B) = P(\xi \in -B)$$

□

- ⑥ Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – независимые с.в.,  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$  Тогда

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \varphi_{S_n}(t) &= Ee^{iS_nt} = Ee^{i\xi_1 t} \dots e^{i\xi_n t} = |\text{с.в. независимы} \implies e^{i\xi_k t} \text{ независимы}| = \\ &= (Ee^{i\xi_1 t}) \dots (Ee^{i\xi_n t}) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t) \end{aligned}$$

□

**Теорема 31** (о производных х.ф.).

Пусть  $E|\xi|^n < +\infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда для  $\forall r \leq n : \exists \varphi_\xi^{(r)}(t)$ , причем

$$1. \varphi_\xi^{(r)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^r e^{itx} P_\xi(dx)$$

$$2. E\xi^r = \frac{\varphi_\xi^{(r)}(0)}{i^r}$$

$$3. \varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t)$$

$$\text{где } |\varepsilon_n(t)| \leq 3E|\xi|^n \text{ и } \varepsilon_n(t) \rightarrow 0, \text{ при } t \rightarrow 0$$

*Доказательство.*

1. Заметим, что  $E|\xi|^r$  конечно для  $\forall r \leq n$  т.к.  $|\xi|^r \leq |\xi|^n + 1$

Рассмотрим

$$\frac{\varphi_\xi(t+h) - \varphi_\xi(t)}{h} = \frac{Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}}{h} = E\left(e^{it\xi} \frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right)$$

$$\text{При } h \rightarrow 0, \frac{e^{ih\xi} - 1}{h} \rightarrow i\xi \text{ п.н., кроме того } \left| \frac{e^{ih\xi} - 1}{h} \right| \leq |\xi|$$

$\Rightarrow$  по теореме Лебега.

$$E\left(e^{it\xi} \frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} E(i\xi e^{it\xi}) = \int_{\mathbb{R}} (ix) e^{itx} P_\xi(dx) = \varphi'_\xi(t)$$

Установление формулы для  $\varphi_\xi^{(r)}$  при  $r > 1$  проводится по индукции аналогично.

2. Формула  $E\xi^k = \frac{\varphi_\xi^{(k)}(0)}{i^k}$  сразу следует из формулы для  $\varphi_\xi^{(r)}$

3. Имеет место разложение:

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iy)^k}{k!} + \frac{(iy)^n}{n!} (\cos \theta_1 y + i \sin \theta_2 y)$$

$$\text{где } |\theta_1| \leq 1, |\theta_2| \leq 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} e^{it\xi(\omega)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it\xi)^k}{k!} + \frac{(it\xi)^n}{n!} (\cos(\theta_1(\omega)t\xi(\omega)) + i \sin(\theta_1(\omega)t\xi(\omega))) \\ \Rightarrow \varphi_\xi(t) &= Ee^{it\xi} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} E(\xi^n (\cos(\theta_1 t\xi) + i \sin(\theta_1 t\xi))) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t) \end{aligned}$$

$$\text{где } \varepsilon_n(t) = E(\xi^n (\cos(\theta_1 t\xi) + i \sin(\theta_1 t\xi) - 1))$$

Легко увидеть, что  $|\varepsilon_n(t)| \leq 3E|\xi|^n$  и  $E(\xi^n (\cos(\theta_1 t\xi) + i \sin(\theta_1 t\xi) - 1)) \rightarrow 0, t \rightarrow 0$

По теореме Лебега,  $\varepsilon_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$

□

**Теорема 32** (о разложении в ряд х.ф.).

Пусть  $\xi$  – с.в. такова, что  $E|\xi|^n < +\infty$  для  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Если для некоторого  $T > 0$  выполнено

$$\overline{\lim}_n \left( E \frac{|\xi|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{T},$$

то для  $\forall t : |t| < T$ , выполнено

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}$$

*Доказательство.*

Пусть  $t_0$  такое, что  $|t_0| < T$ . Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( E \frac{|\xi|^n |t_0|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} < \frac{|t_0|}{T} < 1$$

По принципу Коши ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{E|\xi|^k |t_0|^k}{k!} \text{ сходитс}.$$

Рассмотрим  $t$  т.ч.  $|t| < |t_0|$  :

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t) \quad (*)$$

$$\text{Но } |R_n(t)| \leq \frac{|t|^n}{n!} 3E|\xi|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Устремляя  $n \rightarrow \infty$  в  $(*)$  получаем

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} E\xi^n$$

В силу произвольности  $t_0$  с условием  $|t_0| < T$ , получаем, что разложение верно для всех  $t \in (-T, T)$

□

**Пример 18.** Пусть  $\xi \sim N(0, 1)$ . Тогда  $\varphi_\xi = e^{-\frac{t^2}{2}}$

*Доказательство.* Посчитаем моменты с.в.  $\xi$ .

$$E\xi^m = \int_{\mathbb{R}} x^m \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Если  $m$  - нечетно, то  $E\xi^m = 0$

Если же  $m$  - четно, то

$$\begin{aligned} E\xi^m &= 2 \int_0^{+\infty} x^m \frac{1}{\sqrt{2\xi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left| y = \frac{x^2}{2} \right| = 2 \int_0^{+\infty} (2y)^{m/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y} \frac{dy}{\sqrt{2y}} \\ &= 2^{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} y^{\frac{m-1}{2}} e^{-y} dy = 2^{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) = 2^{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2^{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(m-1)!!}{2^{m/2}} \sqrt{\pi} = (m-1)!! \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_n \left( \frac{E|\xi|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} &= \overline{\lim}_n \left( \frac{E|\xi|^{2n}}{(2n)!} \right)^{\frac{1}{2n}} = \overline{\lim}_n \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!} \right)^{\frac{1}{2n}} = \overline{\lim}_n \left( \frac{1}{(2n)!!} \right)^{\frac{1}{2n}} \\ &= \overline{\lim}_n \left( \frac{1}{2^n n!} \right)^{\frac{1}{2n}} = |\text{Ф-ла Стирлинга}| = \overline{\lim}_n \left( \frac{e^n}{2^n n!} \right)^{\frac{1}{2n}} = 0 < \frac{1}{T}, \forall T\end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi_\xi(t)$  разлагается в ряд на всей прямой.

Осталось его посчитать

$$\begin{aligned}\varphi_\xi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(it)^{2m}}{(2m)!} E\xi^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^m}{(2m)!} (2m-1)!! \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^m}{(2m)!!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^m}{2^m m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{-t^2}{2} \right)^m \cdot \frac{1}{m!} = e^{-t^2/2}\end{aligned}$$

□

**Следствие 3.** Пусть  $\xi \sim N(a, \sigma^2)$ . Тогда

$$\varphi_\xi(t) = e^{ita - \frac{t^2 \sigma^2}{2}}$$

*Доказательство.* Если  $\xi \sim N(a, \sigma^2)$ , то  $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$\Rightarrow \varphi_\xi(t) = e^{ita} \varphi_\eta(t\sigma) = e^{ita - \frac{t^2 \sigma^2}{2}}$$

□

**Теорема 33** (единственности).

Пусть  $F(x), G(x)$  – функции распределения на прямой. Если характеристические функции  $F$  и  $G$  совпадают, то  $F = G$ .

*Доказательство.* Пусть  $a < b \in \mathbb{R}$ . Для  $\forall \varepsilon > 0$  рассмотрим функцию  $f_\varepsilon(x)$ :

Докажем, что

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dG(x)$$

Рассмотрим отрезок  $[-n, n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  т.ч.  $[-n, n] \supset [a, b + \varepsilon]$ .

По теореме Вейерштрасса  $f_\varepsilon(x)$  равномерно приближается тригонометрическими многочленами от  $\frac{x\pi}{n}$ , т.е.

$$\exists f_\varepsilon^n(x) = \sum_{k \in K} a_k e^{i \frac{k\pi x}{n}}, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad K - \text{конечное подмно-во } \mathbb{Z}$$

т.ч.  $|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon^n(x)| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall x \in [-n, n]$

Заметим, что  $f_\varepsilon^n(x)$  явл. периодической с периодом  $2n$

$$\Rightarrow \text{т.к. } |f_\varepsilon^n(x)| \leq 2 \text{ для } \forall x \in [-n, n], \text{ то } |f(x)| \leq 1 \text{ и } |f_\varepsilon^n(x)| \leq 2, \text{ для } \forall x \in \mathbb{R}.$$

По условию  $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dG(x) \\ \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dF(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dG(x)\end{aligned}$$

Теперь оценим:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon}(x) dF(x) - \int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon}(x) dG(x) \right| \leq \left| \int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon}^n(x) dF(x) - \int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon}^n(x) dG(x) \right| + \\
& + \int_{\mathbb{R}} (f_{\varepsilon}(x) - f_{\varepsilon}^n(x)) dF(x) - \int_{\mathbb{R}} (f_{\varepsilon}(x) - f_{\varepsilon}^n(x)) dG(x) \leq \\
& \leq \frac{1}{n} \int_{[-n,n]} dF(x) + \frac{1}{n} \int_{[-n,n]} dG(x) + 2 \left( \int_{\mathbb{R} \setminus [-n,n]} dF(x) + \int_{\mathbb{R} \setminus [-n,n]} dG(x) \right) \leq \\
& \leq \frac{2}{n} + 2 \left( \int_{-\infty}^{-n} dF(x) + \int_n^{+\infty} dF(x) + \int_{-\infty}^{-n} dG(x) + \int_n^{+\infty} dG(x) \right) = \\
& = \frac{2}{n} + 2(F(-n) + 1 - F(n) + G(-n) + 1 - G(n)) \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что  $\forall \varepsilon$

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon}(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon}(x) dG(x)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $f_{\varepsilon}(x) \rightarrow I_{(a,b]}(x)$

При этом  $|f_{\varepsilon}(x)| \leq 1$  для  $\forall x \in \mathbb{R} \implies$  по теореме Лебега

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon}(x) dF(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} I_{(a,b]} dF(x) = F(b) - F(a)$$

Следовательно, для  $\forall a < b$ :

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

Устремим  $a \rightarrow -\infty$ ,  $\implies \forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = G(x)$$

□

**Пример 19.** Пусть  $\xi_1, \xi_2$  – нез. с.в.,  $\xi_i \sim N(a_i, \sigma_i^2)$ . Тогда  $\xi_1 + \xi_2 \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ .

*Доказательство.* х.ф.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\xi_j}(t) &= e^{ia_j t - \frac{1}{2} \sigma_j^2 t^2} \\
\implies \varphi_{\xi_1 + \xi_2}(t) &= |_{\text{нез.}}| = \varphi_{\xi_1}(t) \varphi_{\xi_2}(t) = e^{i(a_1 + a_2)t - \frac{1}{2} t^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}
\end{aligned}$$

– х.ф  $N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

По теореме о единственности  $\xi_1 + \xi_2 \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

□

**Теорема 34** (критерий независимости компонент случайного вектора). Пусть  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  – случайный вектор. Тогда  $\xi_1 \dots \xi_n$  – независимы в совокупности  $\iff$  х.ф. вектора  $\xi$  распадается в произведение х.ф.  $\xi_j$ :

$$\varphi_{\xi}(t_1, \dots, t_n) = \varphi_{\xi_1}(t_1) \cdot \dots \cdot \varphi_{\xi_n}(t_n)$$

*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $\xi_1 \dots \xi_n$  – независимы. Тогда

$$\varphi_\xi(t_1 \dots t_n) = E e^{i \sum_{k=1}^n \xi_k t_k} = E(e^{it_1 \xi_1} \dots e^{it_n \xi_n}) = \prod_{k=1}^n E e^{it_k \xi_k} = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k)$$

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $F_1, \dots, F_n$  – функции распределения  $\xi_1, \dots, \xi_n$ .

Рассмотрим  $G(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \dots \cdot F_n(x_n)$  Посчитаем её х.ф.:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \langle t, x \rangle} dG(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \langle t, x \rangle} dF_1(x_1) \dots dF_n(x_n) = |\text{теорема Фубини}| = \\ &= \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{it_k x_k} dF_k(x_k) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k) = \varphi_\xi(t_1 \dots t_n) \end{aligned}$$

Но  $\varphi$  – х.ф. вектора  $\xi$ .  $\Rightarrow$  она является х.ф. ф.р.  $F_\xi(x_1 \dots x_n)$ .

По теореме о единственности

$$F_\xi(x_1 \dots x_n) = G(x_1 \dots x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n)$$

По критерию независимости для ф.р. получаем, что  $\xi_1 \dots \xi_n$  независимы в совокупности. □

**Теорема 35** (формула обращения).

Пусть  $\varphi(t)$  – х.ф. ф.р.  $F(x)$  Тогда

1. Для  $\forall a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{C}(F)$  – точки непрерывности  $F(x)$ , выполнено:

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{it} \varphi(t) dt$$

2. Если  $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < +\infty$ , то у  $F(x) \exists$  плотность  $f(x)$  и

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

**Пример 20.** Пусть  $\xi$  имеет распр. Коши

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Найти х.ф.  $\xi$ .

*Доказательство.* Пусть  $\eta$  имеет распр. Лапласа,  $p_\eta(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

Тогда  $\varphi_\eta(t) = \frac{1}{1+t^2}$ , и  $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < +\infty$

$\Rightarrow$  по формуле обращения

$$\begin{aligned} p_\eta(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{2} \varphi_\xi(-x) \\ &\Rightarrow \varphi_\xi(t) = e^{-|t|} \end{aligned}$$

□

## Как понять, является ли функция характеристической?

**Определение 5.** Функция  $(\varphi(t), t \in \mathbb{R})$  наз. неотрицательно определенной, если  $\forall t_1 \dots t_n \in \mathbb{R} \ z_1 \dots z_n \in \mathbb{C}$  выполнено:

$$\sum_{i,j=1}^n \varphi(t_i - t_j) z_i \bar{z}_j \geq 0$$

**Теорема 36** (Бонхер - Хинчин).

Пусть  $\varphi(t), t \in \mathbb{R}$  - непрерывна в нуле и  $\varphi(0) = 1$ . Тогда  $\varphi(t)$  явл. хар. функцией  $\iff \varphi(t)$  неотрицательно определена.

*Доказательство.* ( $\implies$ ) Пусть  $\varphi(t)$  - х.ф. с.в.  $\xi$ . Тогда  $\forall t_1 \dots t_n \in \mathbb{R}, \forall z_1 \dots z_n \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^n \varphi(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k &= \sum_{j,k=1}^n E e^{i(t_j - t_k)\xi} z_j \bar{z}_k = E \left( \sum_{j,k=1}^n e^{it_j \xi} z_j e^{-it_k \xi} \bar{z}_k \right) = \\ &= E \left( \sum_{j,k=1}^n (e^{it_j \xi} z_j) \overline{(e^{it_k \xi} z_k)} \right) = E \left( \sum_j (e^{it_j \xi} z_j) \right) \cdot \overline{\left( \sum_k e^{it_k \xi} z_k \right)} = E \left| \sum_{j=1}^n e^{it_j \xi} z_j \right|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

□

**Следствие 4.** Если  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  - две х.ф., то  $\forall \alpha \in (0, 1)$ :

$$\alpha \varphi(t) + (1 - \alpha) \psi(t) - \text{тоже х.ф.}$$

**Теорема 37** (непрерывности).

Пусть  $\{F_n(x), n \in \mathbb{N}\}$  - последовательность ф.р. на  $\mathbb{R}$ , а  $\{\varphi_n(t), n \in \mathbb{N}\}$  - последовательность их х.ф.

Тогда

1. Если  $F_n \xrightarrow{w} F$ , где  $F(x)$  - ф.р. на  $\mathbb{R}$ , то для  $\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $\varphi(t)$  - х.ф.  $F(x)$
2. Пусть для  $\forall t \in \mathbb{R} \ \exists$  предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$ , причем  $\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$  непрерывна в нуле. Тогда  $\exists$  ф.р.  $F(x)$  т.ч.  $F_n \xrightarrow{w} F$  и  $\varphi(t)$  - х.ф.  $F(x)$

*Доказательство.* 1. Если  $F_n \xrightarrow{w} F$ , то  $\forall f(x)$  - огр. непр. выполнено:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dF_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x)$$

Функции  $\cos tx$  и  $\sin tx$  - огр. и непр., тогда

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos tx dF_n(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin tx dF_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \cos tx dF(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin tx dF(x) = \varphi(t) \end{aligned}$$

□

**Следствие 5.** С.в.  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff \forall t \in \mathbb{R} : \varphi_{\xi_n}(t) \rightarrow \varphi_{\xi}(t)$

*Доказательство.*  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F_{\xi} \iff \varphi_{\xi_n}(t) \rightarrow \varphi_{\xi}(t)$  для  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

□



**Теорема 38** (Центральная предельная теорема).

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – последовательность независимых одинаково распределенных с.в. т.ч.  $0 < D\xi_n < +\infty$ .

Обозначим  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$  Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

*Доказательство.*

Обозначим  $a = E\xi_i, \sigma^2 = D\xi_i$ . Рассмотрим  $\eta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma} \implies E\eta_i = 0, D\eta_i = E\eta_i^2 = 1$

Тогда

$$T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = \text{[независимость]} = \frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{\sqrt{n}}$$

Рассмотрим х.ф.  $\eta_i$  :

$$\varphi_{\eta_i}(t) = \varphi(t) = 1 + E\eta_i(it) + \frac{1}{2}E\eta_i^2(it)^2 + o(t^2);$$

(t→0)

Отсюда получаем, что

$$\varphi_{T_n}(t) = \varphi_{\eta_1 + \dots + \eta_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \text{[независимость]} = \left(\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Но  $e^{-\frac{t^2}{2}}$  – х.ф.  $N(0, 1) \implies$  по теореме непрерывности мы получаем, что

$$T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

□

**Следствие 6.** В условиях ЦПТ для  $\forall x \in \mathbb{R}$  выполнено

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

*Доказательство.* По ЦПТ  $T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \xi \sim N(0, 1) \iff F_{T_n} \implies F_\xi$ , где  $F_\xi(x)$  – ф.р.  $N(0, 1)$ , т.е.  $\forall x \in \mathbb{R}$  :

$$F_{T_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

□

**Следствие 7.** В условиях ЦПТ, если  $E\xi_i = a, D\xi_i = \sigma^2$ , то

$$\sqrt{n} \left( \frac{S_n}{n} - a \right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

*Доказательство.*

$$\sigma T_n = \sigma \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = \sigma \frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} = \sqrt{n} \left( \frac{S_n}{n} - a \right)$$

Но  $T_n \xrightarrow{d} N(0, 1) \implies \sigma T_n \xrightarrow{d} \sigma N(0, 1) = N(0, \sigma^2)$

$$\implies \sqrt{n} \left( \frac{S_n}{n} - a \right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

□

**Теорема 39** (Теорема Берри - Эссен).

Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – нез. с. в.,  $E|\xi_i|^3 < +\infty$ ,

$E\xi_i = a, D\xi_i = \sigma^2 > 0$ .

Обозначим  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$ .

Тогда

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| \leq C \frac{E|\xi_1 - a|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$$

где  $C$  – абс. константа. Вместо  $\xi_1$  можно взять любую из  $\xi_1 \dots \xi_n$ .

Что можно сказать про  $C$ ?

1.  $C \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,399$  (Эссен)

2. Текущий рекорд  $\forall n \forall \xi : C \leq 0.48$

**Пример 21.** Складываются  $10^4$  чисел, каждое из которых было вычислено с точностью  $10^{-6}$ . Найти в каких пределах с вероятностью 0.99 лежит суммарная ошибка, считая, что все ошибки независимы и распределены  $R(-10^{-6}, 10^{-6})$

*Доказательство.*  $\xi_i \sim R(-10^{-6}, 10^{-6})$  – нез. с. в.

$E\xi_i = a = 0, D\xi_i = \sigma^2 = 10^{-12} \frac{2}{3}, S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ .

Согласно ЦПТ:

$$P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}\right| \leq u\right) \sim P(|\eta| \leq u), \text{ где } \eta \sim N(0, 1)$$

Из таблицы значений  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$

Получаем, что при  $u = 2.58$

$$\begin{aligned} P(|\eta| \leq u) &\geq 0.99 \\ \implies P(|S_n| \leq 2.58 \sqrt{DS_n}) &\geq 0.99 \\ P\left(|S_n| \leq 2.58 \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 10^{-6}\right) &\geq 0.99 \end{aligned}$$

Суммарная ошибка:  $2.58 \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 10^{-6}$

□