Теория вероятностей

MIPT

Осень 2012 г.

Содержание

Введение

Предмет изучения теории вероятностей:
Математический анализ случайных явлений.

Эксперименты бывают:

- Детерминированный результат (изучают другие науки)
- Случайный результат (теория вероятностей)

Одиночные результаты случайных экспериментов не позволяют обнаружить закономерности, однако при большом числе результатов однородных случайных экспериментов обнаруживается *устойчивость частот*.

Пример 1. Подбрасывание монетки:

Бюфорон, XVIII век, 4040 подбрасываний, 2048 раз выпал орел, частота 0,508...

Пирсон, XIX век, 24000 подбрасываний, 12012 раз выпал орел, частота 0,5005...

Принцип устойчивости частот:

Частота осуществления какого-либо исхода в последовательности однородных случайных экспериметов сходится к некоторому числу $p \in [0, 1]$.

Пусть A - некоторое событие, $U_n(A)$ - количетсво появлений в результатах случайных экспериментов после n испытаний. Тогда

$$\frac{U_n(A)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} p(A) \text{ -- вероятность события } A.$$

Однако с математической точки зрения это неудобно. Нужно предложить другое определение вероятности, для которого будет наблюдаться устойчивость частот.

Вероятностное пространство

В основе теории вероятностей лежит понятие вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (т.н "тройки Колмогорова")

1. Ω — *пространство элементарных событий.*
   $\omega \in \Omega$ — называется *элементарным событием.*
   В результате случайного эксперимента получаем один и ровно один элемент. Ω

2. $\mathcal{F}$ — σ-алгебра подмножеств на Ω.
   Элементы $\mathcal{F}$ называются *событиями.*
   $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \subset \Omega$.

Определение 1. Система подмножеств $\mathcal{F}$ множества Ω называется *алгеброй*, если:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
3. $\forall A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \triangle B \in \mathcal{F}$

Упражнение 1. Алгебра замкнута относительно операций:

1. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$
2. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$
3. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$

Определение 2. $\overline{A} = \Omega \setminus A$, называется дополнительным событием к событию A.

Пример 2.

1. $\mathcal{F}_* = \{\varnothing, \Omega\}$ — тривиальная алгебра
2. $\mathcal{F}^* = 2^\Omega$ (все подмножества Ω) — дискретная алгебра
3. $\mathcal{F} = \left\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\right\}$ — алгебра “порожденная” A
4. Конечные объединения подмножеств вида $[a, b), (-\infty; 0), [d, +\infty)$ образуют алгебру.

Определение 3. Система подмножеств $\mathcal{F}$ множества Ω называется σ-алгеброй, если:

1. $\mathcal{F}$ — алгебра
2. $\forall \{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F}\ \forall n \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Упражнение 2. Условие $\bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{F}$ можно заменить на $\bigcap\limits_n A_n \in \mathcal{F}$

Пример 3.

1. $\mathcal{F}_*$ — тривиальная σ-алгебра
2. $\mathcal{F}^*$ — дискретная σ-алгебра
3. $\forall$ конечная алгебра является σ-алгеброй.
4. $[a, b), (-\infty; c), [d, +\infty)$ — не σ-алгебра.

3 P - *вероятностная мера* на $(\Omega, \mathcal{F})$

Определение 4. Пара $(\Omega, \mathcal{F})$ множества Ω с заданной на нем σ-алгеброй $\mathcal{F}$ называется *измеримым пространством.*

Определение 5. Отображение $P\colon \mathcal{F} \to [0; 1]$
называется вероятностной мерой(или вероятностью) на $(\Omega, \mathcal{F})$, если:

1. $P(\Omega) = 1$
2. Для $\forall$ последовательности $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F}\ \forall n$ такой, что $\forall i \neq j :\ A_i \cap A_j = \varnothing$ выполнено свойство счетной аддитивности:

$$P\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Утверждение 1.

1. *$P(\varnothing) = 0$*
2. *Если $A \cap B = \varnothing$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (свойство конечной аддитивности)*
3. *$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$*
4. *$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$*
5. *$\forall A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$*
   $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n\right) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{m} P(A_n)$
6. *Если $A \subset B$, то $P(A) \leqslant P(B)$*

Доказательство.

1. $\forall n\ A_n = \varnothing \Rightarrow P\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(\varnothing) < +\infty \Rightarrow P(\varnothing) = 0$
2. $A_1 = A,\ A_2 = B,\ A_3 = A_4 = \ldots = A_n = \ldots = \varnothing$
   $P\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(A \cup B) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = P(A) + P(B)$
3. $\Omega = A \sqcup \overline{A} \Rightarrow |\text{по } 2| \Rightarrow 1 = P(A) + P(\overline{A})$
4. $A \cup B = A \sqcup (B \setminus (A \cap B))$
   $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B))$

   $B = (A \cap B) \sqcup (B \setminus (A \cap B))$
   $\Rightarrow P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus (A \cap B))$
   Осталось отнять вычесть одно равенство из другого.
5. Если $m = 2$ — то это пункт 4).
   По индукции
   $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n\right) \leqslant P(A_m) + P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{m-1} A_n\right) \leqslant |\text{индукция}| \leqslant P(A_m) + \sum\limits_{n=1}^{m-1} P(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{m} P(A_n)$
6. Следует из 4).

□

Определение 6. Будем обозначать $A_n \downarrow A$ при $n \to +\infty$, если для последовательности событий $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ выполнены свойства:

1. $A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$
2. $A = \bigcap\limits_{n}^{\infty} A_n$

Теорема 1 (О непрерывности в нуле вероятностной меры)**.** *Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ - измеримое пространство, а $P\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ удовлетворяет двум свойствам:*

1. *$P(\Omega) = 1$*
2. *P - конечно-аддитивна.*

Тогда P - вероятностная мера $\Leftrightarrow$ P - непрерывна в нуле(т.е если $A_n \downarrow \varnothing$, то $P(A_n) \to 0$).

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть P - вероятностная мера, а $A_n \downarrow \varnothing$.

Рассмотрим $B_m = A_m \setminus A_{m+1}$. Тогда в силу $\bigcap\limits_n A_n = \varnothing \Rightarrow \bigsqcup\limits_{m=n}^{\infty} B_m = A_n$

Тогда в силу счетной аддитивности $P(A_n) = \sum\limits_{m=n}^{\infty} P(B_m)$

Но ряд $P(A_1) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} P(B_m)$ сходится $\Rightarrow \sum\limits_{m=n}^{\infty} P(B_m)$ есть остаток сходящего ряда $\Rightarrow P(A_n) \to 0$

($\Leftarrow$) Пусть P непрерывна в нуле.

Покажем её счетную аддитивность:

Пусть $A_n, n \in \mathbb{N}$ т.ч $A_n \in F\ \forall n$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$

Рассмотрим $B_m = \bigsqcup\limits_{n=m}^{+\infty} A_n$. Тогда $B_m \supset B_{m+1} \supset \dots$

Покажем, что $\bigcap\limits_m B_m = \varnothing$.

Пусть $\omega \in \bigcap\limits_m B_m \Rightarrow \omega \in B_1 \Rightarrow \exists k : \omega \in A_k \Rightarrow \omega \notin B_{k+1}$ Противоречие.

Следовательно, $\bigcap\limits_m B_m = \varnothing$ и в силу непрерывности в нуле $P(B_m) \to 0$.

Далее $P\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{m} A_m \sqcup B_{m+1}\right) = |\text{конечная аддитивность}| =$

$= \sum\limits_{n=1}^{m} P(A_n) + P(B_{m+1}) \to \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n), m \to \infty$

$\Rightarrow P\left(\bigsqcup\limits_n A_n\right) = \sum\limits_n P(A_n)$ $\square$

Следствие 1 (непрерывность вероятностной меры)**.**

1. *Если* $A_n \downarrow A$, *то* $P(A_n) \to P(A)$
2. *Если* $A_n \uparrow A$ *(т.е* $A_n \subset A_{n-1} \subset \dots$, *и* $A = \bigcup\limits_n A_n$, *то* $P(A_n) \to P(A)$

Доказательство.

1. Надо рассмотреть $B_n = A_n \setminus A$
2. Надо рассмотреть $B_n = \overline{A_n}$

$\square$

Дискретные вероятностные пространства

В дискретном случае множество элементарных исходов Ω – счетно или конечно.

Сигма-алгебру $\mathcal{F}$ на Ω выбирают дискретной, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^* = 2^{\Omega}$

Тогда вероятность P можно задать как функцию на Ω:

$$P \colon \Omega \to [0,1], \text{ т.ч. } \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

В этом случае $\forall A \subset \Omega : P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\omega)$

(I) Классическая модель

В классической модели Ω – конечно, все элементарные события равновероятны:

$$\forall \omega \in \Omega : P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Тогда $\forall A \subset \Omega : P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

Пример 4.

1. Бросок монеты. $\Omega = \{\text{Орел, Решка}\}$.
   $P(\text{Орел}) = P(\text{Решка}) = 1/2$
2. Бросок кости. $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$
   $P(i) = 1/6 \quad \forall i = 1 \ldots 6$
3. Бросок двух монет. "Заблуждение Даламбера". $\Omega = \{OO, OP, PP\}$
   Кажется, что все исходы имеют верятность 1/3

   Проблема в различимости монет.
   Если они различимы, то $\Omega = \{OO, OP, PO, PP\}$, и вероятности событий равны 1/4
   $P(\text{выпал 1 орел и 1 решка}) = 1/2$
4. Схема испытаний Бернулли. $\Omega = \{\, \vec{\omega} = (w_1, \ldots, w_n) \mid w_i \in \{0, 1\} \,\}$. $|\Omega| = 2^n$

   Эта модель отвечает броскам n различимых монет.

(II) Геометрические вероятности

Здесь $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ и для Ω определен, конечен и положителен его объем $\mu(\Omega) > 0$.

Сигма-алгебра $\mathcal{F}$ состоит из тех $A \subset \Omega$ для которых тоже определен объем $\mu(A)$

Тогда вероятность P задается так:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Подобная модель – естественное продолжение классической модели на случай непрерывных пространств.

Пример 5. Задача о встрече:

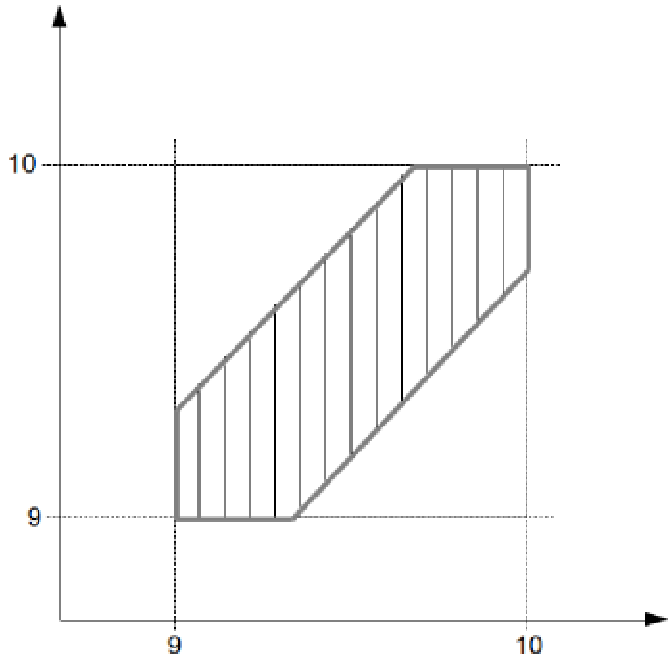
Два товарища договорились встретиться утром на остановке. Каждый приходит в случайное время между 9 и 10, ждет 15 минут, потом уезжает.

Какова вероятность встречи?

Решение. Пространство элементарных событий – это квадрат $[9, 10] \times [9, 10]$.

Время прихода вервого и время прихода второго — случайная точка $(u, v) \in [9, 10] \times [9, 10]$.

Изобразим пространство событий геометрически:



Заштрихованная область $A = \{\, (u, v) \mid u, v \in [9; 10],\ |u - v| < 1/4 \,\}$.

Нужно найти меру этой области:

$$\mu(A) = 1 - (3/4)^2 = 7/16$$
$$\mu(\Omega) = 1$$
$$\Rightarrow P(\text{они встретятся}) = \mu(A)/\mu(\Omega) = 7/16$$

Условные вероятности

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство.

Определение 1. Для $\forall A \in \mathcal{F}$, т.ч. $P(A) > 0$ *условной вероятностью* события $B \in \mathcal{F}$ при условии A называют

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

если же $P(A) = 0$, то $P(B \mid A) = 0,\ \forall B \in \mathcal{F}$

Упражнение 3. Если $P(A) > 0$, то функция $\overline{P}(B) = P(B \mid A)$

тоже является вероятностной мерой на $(\Omega, \mathcal{F})$.

Определение 2. Систему событий $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют разбиением множества Ω, если:

1. $\forall i \neq j : B_i \cap B_j = \varnothing$
2. $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$

В этом случае также говорят, что $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ обрезует полную группу несовместных событий.

Лемма 1 (формула полной вероятности).

Пусть $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ - разбиение Ω. Тогда для $\forall A \in \mathcal{F}$:

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \mid B_n) P(B_n)$$

Доказательство. Рассмотрим событие A

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P\left(A \cap \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A \cap B_n\right) =$$
$$= |\text{счетная аддитивность}| = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \mid B_n) P(B_n)$$

□

Пример 6. В ящике всего n шаров, из них k - белых. Последовательно, без возвращения, вынимаем по одному шару. Обозначим $A_j = \{$на j-том шаге вынули белый шар$\}$.

Доказать:

$$P(A_j) = \frac{k}{n}$$

Первое решение: воспользоваться симметрией.

Второе решение: в лоб

Введем события $B_j(i) = \{$среди первых $j-1$ шара вынули ровно i белых$\}$
Тогда $B_j(i)$ образуют разбиение, $i = 0 \dots k$

Легко видеть, что

$$P(A_j \mid B_j(i)) = \frac{k-i}{n-j+1}$$

$$P(B_j(i)) = C_{j-1}^{i} \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)(n-k)\dots(n-k-j+1+i)}{n(n-1)\dots(n-j+1)} =$$
$$= \frac{C_{j-1}^{i} C_k^i \, i! \, C_{n-k}^{j-1-i} (j-i-1)!}{C_n^{j-1} (j-1)!} = \frac{C_k^i C_{n-k}^{j-1-i}}{C_n^{j-1}}$$

Отсюда:

$$P(A_j) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k-i}{n-j+1} \frac{C_k^i C_{n-k}^{j-1-i}}{C_n^{j-1}} = \frac{k}{n} \sum_{i=0}^{k} \frac{C_{k-1}^{i} C_{n-k}^{j-1-i}}{C_{n-1}^{j-1}} = \frac{k}{n}$$

Лемма 2 (формула Байеса).

Пусть $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– разбиение* Ω*, а* $A \in \mathcal{F} : P(A) > 0$*. Тогда* $\forall n$

$$P(B_n \mid A) = \frac{P(A \mid B_n) P(B_n)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(A \mid B_k) P(B_k)}$$

Определение 3. $P(B_n)$ называется *априорной вероятностью.*
$P(B_n \mid A)$ называется *апостериорной вероятностью* (относительная вероятность при условии известного результата эксперимента)

Системы множеств

Пусть Ω - некоторое множество

Определение 1. Система подмножеств $\mathcal{M}$ множества Ω называется π - *системой*,
если $\forall A, B \in \mathcal{M}$ выполнено $A \cap B \in \mathcal{M}$

Определение 2. Система подмножеств $\mathcal{L}$ множества Ω называется λ - *системой*, если

1. $\Omega \in \mathcal{L}$

2. Если $A, B \in \mathcal{L}$ и $A \subset B$, то $B \setminus A \in \mathcal{L}$
3. Если последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n \in \mathcal{L} \quad \forall n$,
   удовлетворяет $A_n \uparrow A$ (т.е $A_n \subset A_{n+1} \subset \ldots$ и $A = \bigcup\limits_n A_n$), то $A \in \mathcal{L}$

Лемма 3 (о π- и λ- системах)**.** *Система $\mathcal{F}$ подмножеств Ω является σ-алгеброй $\Leftrightarrow$ она является π-системой и λ-системой одновременно.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) очевидно.

($\Leftarrow$) Для $\forall A, B \in \mathcal{F}$

$\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ т.к. $\mathcal{F}$ – λ-система ($A \subset \Omega$ и $\Omega \in \mathcal{F}$, свойство 2)

Также имеется замкнутость относительно $\cap$ в $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ – π-система)

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{F}$

$A \cup B = \overline{(\Omega \setminus A) \setminus (B \setminus A)} \in \mathcal{F}$

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ является алгеброй

Покажем, что она σ-алгебра:
Пусть $\{B_n, n \in \mathbb{N}\}$ - последовательность элементов из $\mathcal{F}$, Проверим, что $\bigcup\limits_n B_n \in \mathcal{F}$

Положим $A_m = \bigcup\limits_{n=1}^{m} B_n$.
Тогда $A_m \in \mathcal{F}$ т.к $\mathcal{F}$ – алгебра. Кроме того $A_m \subset A_{m+1}$ и $A_m \uparrow \bigcup\limits_n B_n = B$

Тогда в силу свойства 3) λ-системы, $B \in \mathcal{F}$. Значит F – σ-алгебра

$\square$

Пример 7. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$
$\mathcal{L} = \{\varnothing; (1,2); (1,3); (1,4); (2,3); (2,4); (3,4); \Omega\}$
Тогда $\mathcal{L}$ – это λ-система, но не алгебра.

Лемма 4 (о существовании минимальной системы)**.**
Пусть $\mathcal{M}$ – система подмножеств Ω.
Тогда существует минимальная(по включению) алгебра (или σ-алгебра, π-система, λ-система) содержащая $\mathcal{M}$ и обозначаемая $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ $(\sigma(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M}))$

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{F}^* = 2^{\Omega}$ – дискретная σ-алгебра. Она является алгеброй(σ-алгеброй, π-системой, λ-системой), содержащей $\mathcal{M}$, т.е множество интересующих нас систем не пусто.

Рассмотрим $\alpha(\mathcal{M})$ $(\sigma(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M}))$ – пересечение всех алгебр (σ-алгебр, π-систем, λ-систем), содержащих $\mathcal{M}$. Тогда $\alpha(\mathcal{M})$ $(\sigma(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M}))$ тоже будет являться алгеброй (σ-алгеброй, π-системой, λ-системой), содержащей $\mathcal{M}$.

При этом она будет минимальной по включению. $\square$

Пример 8.

1. Пусть $\mathcal{M} = \{\, (a, b) \mid a < b \in \mathbb{R} \,\}$ – система интервалов.
   Тогда минимальная σ-алгебра, содержащая $\mathcal{M}$, называется борелевской σ-алгеброй на прямой и обозначается $B(\mathbb{R})$

$$B(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{M})$$

2. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ систему подмножеств вида

$$\mathcal{M} = \{\, B_1 \times \ldots \times B_n \mid B_i \in B(\mathbb{R}) \,\}$$
$$\mathcal{M} = \{\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in B_i \quad \forall i = 1 \ldots n \,\}$$

   Тогда минимальная σ-алгебра, содержащая $\mathcal{M}$ называется *болевеской σ-алгеброй* в $\mathbb{R}^n$ и обозначается $B(\mathbb{R}^n)$

3. $\mathbb{R}^\infty = \{\, (x_1, x_2, \ldots) \mid x_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \,\}$ – числовые последовательности.
   Для $\forall n \; \forall B_n \in B(\mathbb{R}^n)$ введем

$$\mathcal{M}_n(B_n) = \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^\infty, \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in B_n \,\}$$

   – цилиндр с основанием B_n

   Минимальная σ-алгебра, содержащая все цилиндры, называется борелевской σ-алгеброй в $\mathbb{R}^\infty$ и обозначается $B(\mathbb{R}^\infty)$. Формально:

$$B(\mathbb{R}^\infty) = \sigma(\{\, \mathcal{M}_n(B_n) \mid n \in \mathbb{N}, B_n \in B(\mathbb{R}^n) \,\})$$

Теорема 1 (о монотонных классах)**.**
Пусть $\mathcal{M}$ – π-система на Ω. Тогда $\lambda(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{M})$.

Доказательство. Заметим, что $\sigma(\mathcal{M})$ – σ-алгебра, содержащая $\mathcal{M} \Rightarrow \sigma(\mathcal{M})$ – λ-система, содержащая $\mathcal{M} \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) \subset \sigma(\mathcal{M})$ в силу минимальности.

Согласно лемме о π- и λ-системах для того, чтобы доказать $\sigma(\mathcal{M}) \subset \lambda(\mathcal{M})$, достаточно проверить, что $\lambda(\mathcal{M})$ является π-системой.

Действительно, тогда $\lambda(\mathcal{M})$ будем σ-алгеброй, содержащей $\mathcal{M} \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}) \subset \lambda(\mathcal{M})$

Рассмотрим следующую систему подмножеств:

$$\mathcal{M}_1 = \{\, B \in \lambda(\mathcal{M}) \mid \forall A \in \mathcal{M} \hookrightarrow A \cap B \in \lambda(\mathcal{M}) \,\}$$

Покажем, что $\mathcal{M}_1$, является λ-системой,

1. $\Omega \in \mathcal{M}_1$? Для $\forall A \in \mathcal{M}$
   $\Omega \cap A = A \in \mathcal{M} \subset \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow \Omega \in \mathcal{M}$.

2. Пусть $A, B \in \mathcal{M}_1$ и $A \subset B$. Верно ли, что $B \setminus A \in \mathcal{M}_1$?
   Пусть $C \in \mathcal{M}$. Тогда $(B \setminus A) \cap C = (B \cap C) \setminus (A \cap C)$
   Причем $(A \cap C) \subset (B \cap C) \Rightarrow$ по свойству 2) λ-системы
   получаем, что $(B \setminus A) \cap C \in \lambda(M) \Rightarrow (B \setminus A) \in \mathcal{M}_1$

3. Пусть $\{B_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность из $\mathcal{M}_1$, причем $B_n \uparrow B$. Верно ли, что $B \in \mathcal{M}_1$?
   Для $\forall A \in \mathcal{M} \quad (B_n \cap A) \uparrow (B \cap A)$. Но $(B_n \cap A) \in \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow (B \cap A) \in \lambda(\mathcal{M})$ по свойству 3) λ-системы. $\Rightarrow B \in \mathcal{M}_1$.

Мы показали, что $\mathcal{M}_1$ – λ-система.

В силу того, что $\mathcal{M}$ – π-система, $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1 \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_1$. В силу минимальности. Но $\mathcal{M}_1 \subset \lambda(\mathcal{M})$ по построению.
Следовательно, $\lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_1$, т.е. $\forall A \in \lambda(\mathcal{M}) \quad \forall B \in \mathcal{M} \quad A \cap B \in \lambda(\mathcal{M}) (*)$

Рассмотрим систему

$$\mathcal{M}_2 = \{\, B \in \lambda(\mathcal{M}) \mid \forall A \in \lambda(\mathcal{M}) \hookrightarrow A \cap B \in \lambda(\mathcal{M}) \,\}$$

Точно также проверяется, что $\mathcal{M}_2$ – это λ-система.

$\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_2$ т.к $\forall X \in \mathcal{M} : X \in \mathcal{M}_2$ (см. $(*)$). Значит $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_2 \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_2$

Значит $\lambda(\mathcal{M})$ – π-система. То есть

$$\forall A, B \in \lambda(\mathcal{M}) \hookrightarrow A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})$$

$\square$

Независимость событий

Определение 1. События A и B на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называются *независимыми*, если

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Упражнение 4. Пусть A и B независимы. Тогда независимыми будут и такие пары:
$\overline{A}, B \quad A, \overline{B} \quad \overline{A}, \overline{B}$

Определение 2. Набор событий $A_1 \dots A_n$ называются попарно независимыми, если $\forall i \neq j$
A_i независимо с A_j.

Определение 3. События $A_1 \dots A_n$ называются независимыми в совокупности, если $\forall k \leqslant n, \forall i_1, \dots i_k$: $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n$ выполнено:

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$$

Определение 4. Системы событий $\mathcal{M}_1 \dots \mathcal{M}_n,\ \mathcal{M}_i \subset \mathcal{F}$ называются *независимыми в совокупности*, если $\forall A_1 \in \mathcal{M}_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n$ события $A_1 \dots A_n$ – независимы в совокупности.

Лемма 5 (критерий независимости σ-алгебр)**.**

Пусть $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ – π-системы в $\mathcal{F}$. Тогда $\sigma(\mathcal{M}_1)$ и $\sigma(\mathcal{M}_2)$ независимы $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ – независимы.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ очевидно из определения

$(\Leftarrow)$ используем принцип подходящих множеств.

Рассмотрим такую систему:

$$\mathcal{L}_1 = \{\, A \in \sigma(\mathcal{M}_2) \mid A \text{ независимо с } \mathcal{M}_1 \,\}$$

Проверим, что $\mathcal{L}_1$ – это λ-система.

1. $\Omega \in \mathcal{L}_1$?

   $P(\Omega \cap A) = P(A) = P(A)\,P(\Omega) \Rightarrow$ независимы $\Rightarrow \Omega \in \mathcal{L}_1$

2. Пусть $A, B \in \mathcal{L}_1$, причем $A \subset B$. $\quad B \setminus A \in \mathcal{L}_1$?
   Пусть $C \in \mathcal{M}_1$. Тогда

   $$P(B \setminus A \cap C) = P((B \cap C) \setminus (A \cap C)) = P(B \cap C) - P(A \cap C) =$$
   $$P(B)\,P(C) - P(A)\,P(C) = (P(B) - P(A))P(C) = P(B \setminus A)\,P(C)$$
   $$\Rightarrow B \setminus A \text{ независимо с } C \Rightarrow \text{ независимо с } \mathcal{M}_1 \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L}_1$$

3. Пусть $B_n \uparrow B, B_n \in \mathcal{L}_1$. Верно ли, что $B \in \mathcal{L}_1$?

   Да:
   Пусть $A \in \mathcal{M}_1$. Тогда $(B_n \cap A) \uparrow (B \cap A)$.

   $P(B \cap A) = |\text{по теореме о непрерывности меры}| = \lim\limits_{n \to \infty} P(B_n \cap A) =$

   $= |B_n \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow B \text{ независимо с } A| = \lim\limits_{n \to \infty} P(B_n)P(A) = |\text{по теореме о непрерывности}| = P(B)P(A)$

   $\Rightarrow B$ и A независимы $\Rightarrow B \in \mathcal{L}_1$

Значит $\mathcal{L}_1$ – λ-система. По условию мы знаем, что $\mathcal{M}_2$ независима с $\mathcal{M}_1 \Rightarrow \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{L}_1 \Rightarrow$ по следствию из теоремы о монотонности $\Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_2) \subset \mathcal{L}_1 \Leftrightarrow$ т.е. $\sigma(\mathcal{M}_2)$ независимо с $\mathcal{M}_1$

Рассмотрим по аналогии

$$\mathcal{L}_2 = \{\, A \in \mathcal{F} \mid A \text{ независимо с } \sigma(\mathcal{M}_2) \,\}$$

Аналогично $\Rightarrow \mathcal{L}_2$ – λ-система.

По теореме о монотонных классах, в силу того, что $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{L}_2$, получаем, что $\sigma(\mathcal{M}_1) \subset \mathcal{L}_2 \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_1)$ независимо с $\sigma(\mathcal{M}_2)$.

$\square$

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{M}_1 \dots \mathcal{M}_n$ – π-системы в $\mathcal{F}$. Тогда $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow \sigma(\mathcal{M}_1), \dots \sigma(\mathcal{M}_n)$ независимы в совокупности.*

Определение 5. Пусть $\{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ – произвольный набор систем событий из $\mathcal{F}$. Тогда этот набор называется независимым в совокупности, если $\forall n \, \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathfrak{A}, \; \alpha_i \neq \alpha_j$, системы $\mathcal{M}_{\alpha_1} \dots \mathcal{M}_{\alpha_n}$ независимыми в совокупности, тоесть любой конечный поднабор независим.

Вероятностная мера на $(\mathbb{R}, B_\mathbb{R})$

Теорема 1 (Каратеодори, о продолжении меры)**.** *Пусть Ω – некоторое множество, $\mathcal{A}$ - алгебра на нем, P_σ – вероятностая мера на $(\Omega, \mathcal{A})$ Тогда $\exists!$ вероятностная мера P на $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$, являющаяся продолжением меры P_σ, т.е $\forall A \in \mathcal{A} \hookrightarrow P_\sigma(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A})$*

Лемма 6. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ – измеримое пространство, $\mathcal{M}$ – π-система в $\mathcal{F}$, а P и Q – две вероятностные меры на $(\Omega, \mathcal{F})$. Тогда если $P|_\mathcal{M} = Q|_\mathcal{M}$, то*

$$P|_{\sigma(\mathcal{M})} = Q|_{\sigma(\mathcal{M})}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\mathcal{L} = \{ \, A \in \mathcal{F} \mid P(A) = Q(A) \, \}$$

Покажем, что $\mathcal{L}$ – это λ-система.

1. $\Omega \in \mathcal{L} : P(\Omega) = Q(\Omega)$
2. Пусть $A, B \in \mathcal{L}$. $A \subset B \Rightarrow$
$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A) = Q(B) - Q(A) = Q(B \setminus A) \Rightarrow (B \setminus A) \in \mathcal{L}$$
3. Пусть $A_n \uparrow A, \; A_n \in \mathcal{L} \quad \forall n$. Тогда
$$\begin{aligned} &P(A) = |\text{непрерывность вероятностной меры}| = \lim_n P(A_n) = \lim_n Q(A_n) = \\ &= |\text{непрерывность вероятностной меры}| = Q(A) \\ &\Rightarrow A \in \mathcal{L} \end{aligned}$$

Доказали, что $\mathcal{L}$ – λ-система. По условию $\mathcal{M} \subset \mathcal{L} \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$. По теореме о монотонных классах получаем, что $\sigma(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$, т.е.

$$P|_{\sigma(\mathcal{M})} = Q|_{\sigma(\mathcal{M})}$$

$\square$

Следствие 1 (единственность в теореме Каратеодори)**.**

Пусть P и Q – два продолжения P_σ на $\sigma(\mathcal{A})$. Но $\mathcal{A}$ – алгебра $\Rightarrow$ π-система.

$$P|_\mathcal{A} = P_\sigma = Q|_\mathcal{A}$$

$\Rightarrow$ по лемме получаем, что $\forall A \in \sigma(\mathcal{A})$
$P(A) = Q(A)$, т.е продолжение единственно.

Пусть P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$

Определение 1. Функция $F(x), x \in \mathbb{R}$, заданная по правилу

$$F(x) = P((-\infty, x])$$

называется *функцией распределения вероятностной меры* P.

Лемма 7 (свойства функции распределения)**.**
Пусть $F(x)$ – функция распределения вероятностной меры P. Тогда

1. *$F(x)$ - неубывающая*
2. *$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$*
3. *$F(x)$ непрерывная справа.*

Доказательство.

1. Пусть $y \geqslant x$. Тогда

$$F(y) - F(x) = P((-\infty; y]) - P((-\infty; x) = P((x, y]) \geqslant 0$$

2. Пусть $x_n \to -\infty$ при $n \to \infty$. Тогда $(-\infty; x_n] \downarrow \varnothing \ \Rightarrow$ по непрерывности вероятностной меры.

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow[n \to \infty]{} P(\varnothing) = 0$$

Аналогично, если $x_n \to +\infty$, то $(-\infty; x_n] \uparrow \mathbb{R} \ \Rightarrow$ в силу непрерывности вероятностой меры.

$$F(x_n) = P((-\infty; x_n])) \xrightarrow[n \to \infty]{} P(\mathbb{R}) = 1$$

3. Пусть $x_n \to x + 0$ Тогда $(-\infty, x_n]) \downarrow (-\infty; x] \ \Rightarrow$ в силу непрерывности вероятностой меры.

$$F(x_n) = P((-\infty; x_n]) \xrightarrow[n \to \infty]{} P((-\infty; x]) = F(x)$$

□

Следствие 2. *Функция имеет предел слева в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, при этом точек разрыва у нее не более чем счетное множество.*

Доказательство. Каждая точка разрыва является скачком. Каждому скачку сопоставим отрезок. Отрезки скачков не пересекаются, так как функция монотонная. В каждом из них найдется рациональная точка $\Rightarrow$ точек разрыва не более чем счетно. □

Определение 2. Функция $F(x)$ называет функцией распределения на $\mathbb{R}$, если она удовлетворяет свойствам 1), 2), 3) из леммы.

Теорема 2 (взаимнооднозначное соответствие функции распределения и вероятностной меры)**.**
$F(x)$ – функция распределения на $\mathbb{R}$. Тогда существует единственная вероятностная мера P на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, т.ч. $F(x)$ является функцией распределния P, т.е. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = P((-\infty; x])$$

Идея доказательства Рассмотрим $\mathcal{A}$ – алгебру, состоящую из конечных объединений непересекающихся полуинтервалов вида $(a, b]$, т.е. $\forall A \in \mathcal{A}$ имеет вид:

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k] \quad (*)$$

где $-\infty \leqslant a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < b_n \leqslant +\infty$

Рассмотрим функцию P_0 на $\mathcal{A}$, заданную по правилу: Если A имеет вид $(*)$, то

$$P_0(A) = \sum_{k=1}^{n} (F(b_k) - F(a_k))$$

Легко видеть, что P_0 обладает свойствами

1. $P_0(A) \in [0, 1] \quad \forall A \in \mathcal{A}$
2. $P_0(\mathbb{R}) = F(+\infty) - F(-\infty) = 1$
3. P_0 – конечно-аддитивна, т.е. $\forall A, B \in \mathcal{A}$
   $A \cap B = \varnothing \hookrightarrow P_0(A \cup B) = P_0(A) + P_0(B)$

Если бы удалось доказать, что P_0 счетно-аддитивна на $\mathcal{A}$, то P_0 стала бы вероятностной мерой на $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ и по теореме Каратеодори её можно было бы продолжить единственным образом до вероятностной меры P на $(\mathbb{R}, \sigma(\mathcal{A}))$. Но $\sigma(\mathcal{A}) = B(\mathbb{R})$.

Тогда бы $F(x)$ была бы функциеи распределения меры P

$$F(x) = P_0((-\infty; x]) = P((-\infty; x])$$

Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой

1. **Дискретные распределения**

   Пусть $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ – не более чем счетное множество.

   Определение 1. Вероятностная мера P на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, удовлетворяющая свойству $P(\mathbb{R} \setminus \mathcal{X}) = 0$, называется дискретной вероятностой мерой на $\mathcal{X}$. Её функция функция распределения называется дискретной.
   Пусть $\mathcal{X} = \{x_k\}$ и положим $p_k = P(\{x_k\})$
   Тогда $P(\mathcal{X}) = 1 = \sum\limits_k P(\{x_k\}) = \sum\limits_k p_k$

Определение 2. Набор чисел $(p_0, p_1, \ldots)$ называется распределением вероятностей на $\mathcal{X}$.

Как выглядит функция распределения дискретной верятностной меры P?
$F(x)$ – кусочно-постоянная разрывная в точках $x_k \in \mathcal{X}$. При этом величина скачка равна

$$\Delta F(x_k) = F(x_k) - F(x_k - 0) = P(\{x_k\}) = p_k$$

Примеры дискретных распределений

1. Дискретное равномерное $\mathcal{X} = \{1, \ldots, N\}$, $k = 1, \ldots, N$ и $p_k = 1/N$ для $\forall k \in \mathcal{X}$.

2. Бернуллиевское

$$\mathcal{X} = \{0,1\}, k = 0,1$$
$$p_k = p^k(1-p)^{1-k},$$

где $p \in [0,1]$ - параметр.

3. Биномиальное распределение

$$\mathcal{X} = \{0,\dots,n\}$$
$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

где $p \in [0,1]$ - параметр.

4. Пуассоновское распределение

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}_+$$
$$k = 0,1,2,\dots$$
$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \lambda > 0 - -\text{параметр}$$

Моделирование: биномиальное $\to$ пуассоновское

2 Абсолютно непрерывные распределения

Определение 3. Пусть $F(x)$ – функция распределения вероятностой меры P на $\mathbb{R}$, причем для $\forall x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$$

где $p(t) \geqslant 0$ – неотрицательная функция т.ч

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt = 1$$

В этом случае вероятностная мера P называется *абсолютно непрерывной*, а $F(x)$ - *абсолютно непрерывной функцией распределения.* Функция $p(t)$ называется *плотностью распределения* P (или просто плотностью)

Пример 9.

1. Равномерное распределение на отрезке $[a,b]$.

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 1, & x \geqslant b \end{cases}$$

2. Нормальное распределение (с параметрами (a,σ^2))

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

Моделирование: измерения величины $a = a +$ ошибка измерения.

3. Гамма распределение (с параметрами (d, λ))

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^\lambda x^{\lambda-1}}{\Gamma(x)} e^{-\alpha x}, & x > 0, \quad \alpha, \lambda > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Определение 4.

$$\Gamma(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx \quad \text{для } \lambda > 0$$
$$\Gamma(n) = (n-1)!$$
$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda)$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

4. Экспоненциальное распределение(или показательное) (с параметром $\lambda > 0$).

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Моделирование: время ожидания(время работы приборов)

5. Распределение Коши (с параметром $\Theta > 0$)

$$p(x) = \frac{\Theta}{\pi(\Theta^2 + x^2)}$$
$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\Theta}\right) + \frac{1}{2}$$

3 Сингулярные распределения

Определение 5. Пусть $F(x)$ – функция распределения на $\mathbb{R}$.
Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *точкой роста* для $F(x)$, если для $\forall \varepsilon > 0$

$$F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0 - \varepsilon) > 0$$

Определение 6. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется множеством лебеговой меры нуль, если для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ счетный набор интервалов $((a_k, b_k), k \in \mathbb{N})$ т.ч

$$\sum_k (b_k - a_k) \leqslant \varepsilon$$
$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$$

Пример 10. $\forall$ счетное множество $\mathcal{X}$ имеет меру нуль.
Пусть

$$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$$
$$(a_k, b_k) = \left(x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

Определение 7. Функция распределения $F(x)$ называется *сингулярной*, если она непрерывна и её множество точек роста имеет лебегову меру нуль.

Теорема 1 (Лебег)**.** *Пусть $F(x)$ – произвольная функция распределения. Тогда существует разложение вида*

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x)$$

где

F_1 – *дискретная функция рапределения*

F_2 – *абсолютно непрерывная функция рапределения*

F_3 – *сингулятная функция рапределения*

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geqslant 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$

Вероятностные меры в $\mathbb{R}^n$

Определение 1. Пусть P – вероятносная мера на $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$

Тогда функция $F(\vec{x}), \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

$$F(\vec{x}) = P((-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n])$$

называется функцией распределения вероятностой меры P в $\mathbb{R}^n$.

Обозначения. *Пусть $\vec{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$*

Будем писать $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, если:

$\forall i \quad x_i^{(k)} \geqslant x_i^{(k+1)} \geqslant y_i$ *и* $x_i^{(k)} \to y_i$ *при* $k \to \infty$

Лемма 8 (свойства многомерной функции распределения)**.**

Пусть $F(\vec{x})$ – функция распределения вероятностной меры P в $\mathbb{R}^n$ Тогда:

1. *Если $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{x}$, то $F(\vec{x}^{(k)}) \to F(\vec{x})$*
2. $\lim\limits_{\forall i:\, x_i \to +\infty} F(\vec{x}) = 1$ *и* $\forall i \lim\limits_{x_i \to -\infty} F(\vec{x}) = 0$
3. *Для $\forall i = 1 \ldots n \quad \forall a_i < b_i \in \mathbb{R}$ введем оператор*

$$\Delta^i_{a_i, b_i} F(\vec{x}) = F(x_1, \ldots b_i, \ldots x_n) - F(x_1, \ldots a_i, \ldots x_n)$$

Тогда $\forall a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$:

$$\Delta^1_{a_1, b_1} \ldots \Delta^n_{a_n, b_n} F(\vec{x}) \geqslant 0$$

Доказательство.

1. Если $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{x}$, то множество
   $(-\infty, x_1^{(k)}] \times \ldots \times (-\infty, x_n^{(k)}] \downarrow (-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n]$
   $\Rightarrow$ |по непрерывности вероятностной меры| $\Rightarrow$
   $F(\vec{x}^{(k)}) = P((-\infty, x_1^{(k)}] \times \ldots \times (-\infty, x_n^{(k)}]) \xrightarrow[k \to \infty]{} P((-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n]) = F(\vec{x})$
2. Если $x_1 \ldots x_n \to +\infty$, то $(-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n] \uparrow \mathbb{R}^n$
   В силу непрерывности вероятностной меры:

   $$\lim_{\forall i:\, x_i \to \infty} F(\vec{x}) = P(\mathbb{R}^n) = 1$$

   Если же $\vec{x}^{(k)} \to -\infty,\ k \to \infty$, то $(-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_i^{(k)}] \times \ldots \times (-\infty, x_n] \downarrow \varnothing$

   Отсюда в силу непрерывности вероятностной меры:

   $$\lim_{x_i \to -\infty} F(\vec{x}) = P(\varnothing) = 0$$

3. Докажем, только для $n = 2$

$$\begin{aligned}
&\Delta^1_{a_1b_1}\Delta^2_{a_2b_2}F(\vec{x}) = \Delta^1_{a_1b_1}(F(x_1, b_2)) - F(x_1, a_2)) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) = \\
&= P((-\infty, b_1] \times (-\infty, b_2]) - P((-\infty, b_1] \times (-\infty, a_2]) - P((-\infty, a_1] \times (-\infty, b_2]) + \\
&+ P((-\infty, a_1] \times (-\infty, a_2]) = P((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) - P((-\infty, a_1] \times (-\infty, a_2]) + \\
&+ P((-\infty, a_1] \times (-\infty, a_2]) = P((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) \geqslant 0
\end{aligned}$$

□

Теорема 1 (о взаимно однозначном соответствии).

Если $F(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяет свойствам 1) - 3) из леммы, то $\exists!$ вероятностная мера P в $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$, для которой $F(\vec{x})$ является функцией распределения т.е.

$$\begin{aligned}
&\forall a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n \\
&\Delta^1_{a_1b_1}\ldots\Delta^n_{a_nb_n}F(\vec{x}) = P((a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n])
\end{aligned}$$

Примеры многомерных функций распределения

Пример 11. 1. Пусть $F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)$ – одномерные функции распределения. Тогда

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1)\ldots F_n(x_n)$$

— многомерная функция распределения в $\mathbb{R}^n$.

Заметим, что

$$\Delta^1_{a_1b_1}\ldots\Delta^n_{a_nb_n}F(x_1, \ldots x_n) = \prod_{k=1}^{n}(F_k(b_k) - F_k(a_k))) \geqslant 0$$

Если $F_i(x_i) = x_i$, для $\forall i = 1\ldots n$ при $x_i \in [0, 1]$, то

$$F(x_1, \ldots x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists i : x_i < 0 \\ \prod\limits_{i=1}^{n}(x_i I\{x_i \in [0, 1]\} + I\{x_i \geqslant 1\}), & \text{иначе} \end{cases}$$

Такая F соответствует для меры Лебега на $[0, 1]^n$.

2. Пусть $f(t_1, \ldots t_n)$, $t_i \in \mathbb{R}$ - функция в $\mathbb{R}^n$ т.ч $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n = 1$ и $f(t_1, \ldots, t_n) \geqslant 0$

Тогда

$$F(x_1, \ldots x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t_1 \ldots t_n)\, dt_1 \ldots dt_n$$

— многомерная функция распределения

$$\Delta^1_{a_1b_1}\ldots\Delta^n_{a_nb_n}F(x_1, \ldots x_n) = \int\limits_{a_1}^{b_1} \ldots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(t_1 \ldots t_n)\, dt_1 \ldots dt_n \geqslant 0$$

В этом случае $f(t_1 \ldots t_n)$ называется плотностью функции распределения $F(x_1 \ldots x_n)$ (или просто плотностью). Ясно, что

$$f(x_1 \ldots x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} F(x_1 \ldots x_n)$$

Вероятностные меры в $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^\mathbb{N}$

Пусть P – вероятностная мера в $(\mathbb{R}^\infty, B(\mathbb{R}^\infty))$. Для $\forall B_n \in B(\mathbb{R}^n)$ введем

$$\mathcal{F}_n(B_n) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^\infty \mid (x_1, \ldots, x_n) \in B_n \}$$

— цилиндр с основанием B_n

Тогда $P_n(B_n) = P(\mathcal{F}_n(B_n))$ является вероятностной мерой в $(\mathbb{R}^\infty, B(\mathbb{R}^\infty))$. При этом имеет место свойство согласованности:

$$P_{n+1}(B_n \times \mathbb{R}) = P(\mathbb{R})$$

Теорема 2 (Колмоговора, о мерах в $\mathbb{R}^\infty$)**.**

Пусть $\forall n$ задана вероятностная мера P_n в $(\mathbb{R}^\infty, B(\mathbb{R}^\infty))$, причем для $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ выполнено свойтсво согласованности.
Тогда $\exists!$ вероятностная мера P в $(\mathbb{R}^\infty, B(\mathbb{R}^\infty))$, т.ч. $\forall n \forall B_n \in B(\mathbb{R}^n)$:

$$P_n(B_n) = P(\mathcal{F}_n(B_n))$$

Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах

Пусть (Ω, P) – дискретное вероятностное пространство.

Определение 1. Отображение $\xi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной.*

Т.к Ω не более чем счетно, то ξ принимает не более чем счетное число значений $(a_1, a_2, \ldots)$

Введем события $A_i = \{ \omega \mid \xi(\omega) = a_i \}$ – состоит в том, что ξ приняло значение a_i.

$p_i = P(A_i) = P(\xi = a_i)$ и $\sum\limits_i p_i = 1 = \sum\limits_i P(A_i)$

Определение 2. Набор значений $(a_1, a_2, \ldots)$ и вероятностей $(p_1, p_2, \ldots)$, с которыми эти значения принимаются, вместе образуют распределение случайной величины ξ.

Замечание. $\xi_1 \ldots \xi_n$ – случайные величины, $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – функция, то $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – тоже случайная величина.

Определение 3. Пусть ξ – случайная величина со значениями $(a_1, a_2, \ldots)$ и η – случайная величина со значениями $(b_1, b_2, \ldots)$. Случайные величины ξ и η называются независимыми, если $\forall i \, \forall j$ события $\{\xi = a_i\}$ и $\{\eta = b_j\}$ независимы, т.е

$$P(\xi = a_i, \eta = b_j) := P(\{\xi = a_i\} \cap \{\eta = b_j\}) = P(\xi = a_i)P(\eta = b_j)$$

Определение 4. Пусть $\xi_1, \ldots \xi_n$ - случайные величины, ξ_i принимает значения $(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots)$. Тогда $\xi_1, \ldots \xi_n$ называют *независимыми в совокупности*(взаимно независимыми), если $\forall j_1, \ldots j_n$ выполнено:

$$P(\xi_1 = a_{j_1}^{(1)}, \ldots, \xi_n = a_{j_n}^{(n)}) = \prod_{k=1}^{n} P(\xi = a_{j_k}^{(k)})$$

Пример 12.

1. Бросок игральной кости.

   η – число очков, выпавшее на кости.
   Распределение η – равномерное на $\{1, \ldots 6\}$

2. Пусть $A \subset \Omega$ – событие. Тогда случайная величина

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega! \in A \end{cases}$$

Называется индикатором события A.
Другое обозначение: $I\{A\}$.

3. ξ называется *биномиальной случайной величиной*, если она принимает значения $\{1, 2, \ldots, n\}$ и

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, \ldots, n$$

Обозначение: $\xi \sim Bin(n, p)$

4. ξ называется пуассоновской случайной величиной, $\xi \sim Pois(\lambda)$, если ξ принимает значения в $\mathbb{Z}_+$ и

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k \in \mathbb{Z}_+$$

$\lambda > 0$ – параметр распределения.

Упражнение 5.

1. I_A и I_B независимы $\Leftrightarrow$ A и B независимы

2. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – с.в. Тогда они независимы в совокупности $\Leftrightarrow \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$P(\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} P(\xi_k = x_k)$$

3. Если ξ и η – независимы, и $\xi \sim Bin(n, p)$, $\eta \sim Bin(m, p)$, то $\xi + \eta \sim Bin(n + m, p)$.

4. Если $\xi \sim Pois(\lambda_1)$, $\eta \sim Pois(\lambda_2)$, то $\xi + \eta \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Определение 5. Пусть ξ – случайная величина. Её *математическим ожиданием* называют

$$E\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega)$$

Если ряд в правой части сходится абсолютно.

Пример 13. В классической модели Ω – конечно и $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ для $\forall \omega \in \Omega$. Тогда

$$E\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{\xi(\omega)}{|\Omega|} = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)$$

— среднее арифметическое значений.

Лемма 9 (свойства математического ожидания)**.**

1. *Линейность*

$$E(a\xi + b\eta) = aE\xi + bE\eta, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

2. *Пусть* η *принимает значения* $(a_1, a_2, \ldots)$*. Тогда*

$$E\xi = \sum_i a_i P(\xi = a_i)$$

3. *Пусть ξ - принимает значения $(a_1, a_2, \dots)$*
   Тогда для $\forall$ функции $\varphi(x)$:
$$E\varphi(\xi) = \sum_i \varphi(a_i) P(\xi = a_i)$$
4. *Если $\xi \leqslant \eta$, то $E\xi \leqslant E\eta$*
5. *Если ξ и η - независимы, то*
$$E\xi\eta = E\xi E\eta$$

Доказательство.

1. Очевидно из определения.
2.
$$E\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega) = \sum_i \sum_{\omega : \xi(\omega) = a_i} \xi(\omega) P(\omega) =$$
$$\sum_i \sum_{\omega : \xi(\omega) = a_i} a_i P(\omega) = \sum_i a_i \sum_{\omega : \xi(\omega) = a_i} P(\omega) = \sum_i a_i P(\xi = a_i)$$
3. Аналогично 2)
4. Очевидно из определения.
5.
$$E\xi\eta = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)\eta(\omega) P(\omega) = \sum_{i,j} \sum_{\substack{\omega : \xi(\omega) = a_i \\ \eta(\omega) = b_j}} \eta(\omega)\xi(\omega) P(\omega) = \sum_{i,j} a_i b_j \sum_{\substack{\omega : \xi(\omega) = a_i \\ \eta(\omega) = b_j}} P(\omega) =$$
$$= \sum_{i,j} a_i b_j P(\xi = a_i, \eta = b_j) = |\text{независимость}| = \sum_{i,j} a_i b_j P(\xi = a_i) P(\eta = b_j) =$$
$$= \left(\sum_i a_i P(\xi = x_i) \right) \left(\sum_j b_j P(\eta = b_j) \right) = E\xi E\eta$$

$\square$

Следствие 1. *Для матожидания $E\xi$ (и $E\varphi(\xi)$) достаточно знать распределение случайной величины ξ.*

Определение 6. $E\xi^k$ – *момент порядка k* случайной величины ξ (k-й момент)

$E(\xi - E\xi)^k$ – *центральный момент порядка k* случайной величины η (k-й центральный момент).

$E\xi(\xi - 1)\dots(\xi - k + 1)$ – *факториальный момент порядка k* случайной величины η, $k \in \mathbb{N}$

$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$ – *дисперсия* случайной величины ξ

Лемма 10 (свойства дисперсии)**.**

1. *$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$*
2. *$D\xi \geqslant 0$*
3. *$D(c\xi) = c^2 D\xi$*

4. $D\xi = 0 \Leftrightarrow P(\xi = E\xi) = 1$

Утверждение 2. *Если ξ – биномиальная: $\xi \sim Bin(n,p)$, то $D\xi = np(1-p)$*

Определение 7. Пусть ξ и η - две случайные величины. Ковариацией случайных величин ξ и η называется

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

Если $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0$, то ξ и η называются некоррелированными.

1. $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$
2. Если ξ и η независимы, то они не коррелируют. (обратное неверно!)
3. $D\xi = \operatorname{cov}(\xi,\xi)$

Утверждение 3.

$$D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta + 2\operatorname{cov}(\xi,\eta)$$

Доказательство.

$$D(\xi+\eta) = E(\xi+\eta - E(\xi+\eta))^2 = E(\xi - E\xi)^2 + E(\eta - E\eta)^2 + 2E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = \\ = D\xi + D\eta + 2\operatorname{cov}(\xi,\eta)$$

□

Следствие 2. *Если ξ и η независимы, то $D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta$*

Случайные элементы

Определение 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$ – два измеримых пространства. Отображение $X\colon \Omega \to E$ называется случайным элементом, если оно является $\mathcal{F}$ - измеримым. (или $\mathcal{F} \setminus \mathcal{E}$ - измеримым) т.е $\forall B \in \mathcal{E}$

$$\{x \in B\} = X^{-1}(B) = \{\,\omega \mid X(\omega) \in B\,\} \in \mathcal{F}.$$

Определение 2.

Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, то случайный элемент X называется *случайной величиной.*

Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$, то X называется *случайным вектором.*

Лемма 11 (достаточное условие измеримости отображения)**.**

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$ – два измеримых пространства, $X\colon \Omega \to E$. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ таково, что $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$. Тогда X является случайным элементом $\Leftrightarrow$ для $\forall B \in \mathcal{M}$

$$X^{-1}(B) = \{\,\omega \mid X(\omega) \in B\,\} \in \mathcal{F}$$

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ очевидно из определения

$(\Leftarrow)$
Рассмотрим систему множеств

$$D = \left\{\, B \in \mathcal{E} \mid X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \,\right\}$$

Убедимся в том, что D – это σ-алгебра. Операция праобраз сохраняет все теоретико-множественные операции.

$$X^{-1}\left(\bigcup_\alpha D_\alpha\right) = \bigcup_\alpha X^{-1}(D_\alpha)$$

$$X^{-1}\left(\bigcap_\alpha D_\alpha\right) = \bigcap_\alpha X^{-1}(D_\alpha)$$

$$X^{-1}(B \setminus A) = X^{-1}(B) \setminus X^{-1}(A)$$

Тогда

1. $X^{-1}(E) = \Omega \in \mathcal{F} \Rightarrow E \in D$
2. $X^{-1}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \{D_n \in D\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X^{-1}(D_n) \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n \in D$
3. Если $B, A \in D$, то $X^{-1}(B \setminus A) = X^{-1}(B) \setminus X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \Rightarrow B \setminus A \in D$

D – σ-алгебра и по условию $\mathcal{M} \subset D \Rightarrow$ в силу минимальности $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E} \subset D$
т.е $\forall B \in \mathcal{E} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ и, стало быть, X – случайный элемент. □

Следствие 1.

1. *X – случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \{X \leqslant x\} = \{\, \omega \mid X(\omega) \leqslant x \,\} \in \mathcal{F}$*
2. *$X = (X_1, \ldots, X_n)$ – случайный вектор на $(\Omega, \mathcal{F}) \Leftrightarrow \forall i : X_i$ – случайная величина.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) 1) и 2) очевидно из определения случайных величин и векторов

($\Leftarrow$)

1. Рассмотрим систему $\mathcal{M} = \{\, (-\infty; x] \mid x \in \mathbb{R} \,\}$.
   Тогда $\sigma(\mathcal{M}) = B(\mathbb{R})$. По условию $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ для $\forall B \in \mathcal{M}$. По лемме о достаточном условии измеримости получим, что X – случайная величина.
2. Рассмотрим систему $\mathcal{M} = \{\, B_1 \times \ldots B_n \mid B_i \in B(\mathbb{R}) \,\}$
   Тогда $\sigma(\mathcal{M}) = B(\mathbb{R}^n)$

   $$X^{-1}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \{\, \omega \mid X_1(\omega) \in B_1, \ldots, X_n(\omega) \in B_n \,\} = \bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}$$

   $\Rightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ для $\forall B \in \mathcal{M}$. По лемме получаем, что X – случайный вектор.

□

<u>Смысл условия измеримости</u>

Случайные величины и векторы — это численные и векторные характеристики случайных экспериментов. Нам нужно уметь вычилсять вероятности вида $P(\xi \leqslant x)$ или $P(\xi \in [a, b])$

Но P задана формально только на σ-алгебре $\mathcal{F}$
Значит, нам нужно требовать, чтобы события вида $\{\xi \leqslant x\}$ и $\{\xi \in [a, b]\}$ лежали в $\mathcal{F}$.

Действия над случайными величинами и векторами

Определение 1. Функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется борелевской, если для $\forall B \in B(\mathbb{R}^m)$

$$\varphi^{-1}(B) = \{\, x \mid \varphi(x) \in B \,\} \in B(\mathbb{R}^n)$$

Лемма 12. *Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – случайный вектор. $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – борелевская функция. Тогда $\varphi(\xi)$ – тоже случайный вектор.*

Доказательство. Пусть $B \in B(\mathbb{R}^m)$. Тогда

$$(\varphi(\xi))^{-1}(B) = \{\, \omega \mid \varphi(\xi(\omega)) \in B \,\} = \left\{\, \omega \mid \xi(\omega) \in \varphi^{-1}(B) \,\right\} \in \mathcal{F} \quad (\text{т.к } \varphi^{-1}(B) \in B(\mathbb{R}^n))$$

$\Rightarrow \varphi(\xi)$ – случайный вектор. □

Теорема 1. *Любая непрерывная или кусочно-непрерывная функция является борелевской.*

Следствие 1.

Пусть ξ и η – случайные величины, $c \in \mathbb{R}$.

Тогда $c\xi,\ \xi + c,\ \xi + \eta,\ \xi - \eta$ и $\dfrac{\xi}{\eta}$ (считаем, что $\eta(\omega) \neq 0\ \forall \omega \in \Omega$) – тоже случайные величины.

Доказательство. $\varphi(x, y) = xy$ или $x + y$ – непрерывная функция в $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ борелевская.
Константа c – случайная величина $\Rightarrow$ по лемме получаем, что $c\xi,\ \xi + c,\ \xi + \eta,\ \xi - \eta$ — случайные величины.

Рассмотрим

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Она тоже борелевская(кусочно-непрерывная) $\Rightarrow \varphi(\xi, \eta) = \dfrac{\xi}{\eta}$ — тоже случайная величина. □

Лемма 13 (пределы случайной величины)**.**

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность случайных величин.

Тогда $\overline{\lim\limits_n}\, \xi_n,\ \underline{\lim\limits_n}\, \xi_n,\ \sup\limits_n \xi_n,\ \inf\limits_n \xi_n$ – тоже случайная величина.

(Они могут принимать значения $\pm\infty$)

Доказательство.

$$\left\{\omega \mid \sup_n \xi_n(\omega) \leqslant x\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{\xi_n \leqslant x\} \in \mathcal{F}$$

$\Rightarrow \sup\limits_n \xi_n(\omega)$ – случайная величина

$$\left\{\omega \mid \inf_n \xi_n(\omega) \geqslant x\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{\xi_n \geqslant x\} \in \mathcal{F}$$

$\Rightarrow \inf\limits_n \xi_n(\omega)$ – случайная величина

$$\left\{\omega \mid \overline{\lim_n}\, \xi_n(\omega) \leqslant x\right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{\xi_n \leqslant x + 1/k\} \in \mathcal{F}$$

$\Rightarrow \overline{\lim\limits_n}\, \xi_n(\omega)$ – случайная величина

$$\left\{\omega \mid \underline{\lim_n}\, \xi_n(\omega) \geqslant x\right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{\xi_n \geqslant x + 1/k\} \in \mathcal{F}$$

$\Rightarrow \underline{\lim\limits_n}\, \xi_n(\omega)$ – случайная величина

□

Характеристики случайных величин и векторов

Распределение случайной величины вектора.

Определение 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – ветоятностное пространство, ξ - случайная величина на нем. Тогда распределением ξ называется вероятностная мера P_ξ на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ Заданная по правилу

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B),\ B \subset B(\mathbb{R}).$$

Определение 2. Пусть ξ - случайный вектор размерности n на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда его распределением P_ξ называется вероятностая мера $\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^m)$, заданная по правилу

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B),\ B \in B(\mathbb{R})$$

Функция распределения

Определение 3. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство. ξ - случайная велличина на нем. Тогда *функцией распределения* случайной величины ξ называется

$$F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x)$$

Определение 4. Случайная величина ξ называется

- дискретной, если её функция распределения дискретная.
- абсолютно непрерывной, если её функция распределения абсолютно непрерывна. В этом случае

  $$P(\xi \leqslant x) = F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x P_\xi(t)\, dt$$

  и функция $p_\xi(t)$ называется плотностью случайной величины ξ.

- сингулярной, если её функция распределения сингулярна

- непрерывной, если её функция рапределение непрерывна.

Определение 5. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – случайный вектор на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда его *функцией распределения* называется

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n) = P(\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_n \leqslant x_n).$$

Порожденная σ-алгебра

Определение 6. Пусть ξ - случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда *σ-алгеброй $\mathcal{F}_\xi$, порожденной* ξ называется

$$F_\xi = \{\, \{\xi \in B\} \mid B \in B(\mathbb{R}^n) \,\}$$

Определение 7. Если ξ – случайный вектор размерности n на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, то σ-алгеброй, порожденной ξ называется

$$F_\xi = \{\, \{\xi \in B\} \mid B \in B(\mathbb{R}^n) \,\}$$

Схема:

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{\xi} (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$$
$$P \to P_\xi$$
$$F_\xi \leftarrow B(\mathbb{R})$$

Определение 8. Пусть ξ и η – случайные величины. Будем говорить, что η является $\mathcal{F}_\xi$ - *измеримой*, если $\mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\xi$.

Упражнение 6. Пусть $\varphi(x)$ – борелевская функция, $\eta = \varphi(\xi)$. Тогда η – $\mathcal{F}_\xi$ - измерима.

Теорема 1. *Пусть η - F_ξ - измерима. Тогда $\exists$ борелевская функция $\varphi(x)$ т.ч $\eta = \varphi(\xi)$*

Определение 9.

Пусть $A \in \mathcal{F}$ – событие на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
Тогда случайная величина

$$I_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

называется индикатором события A

Определение 10. Случайная величина ξ называется *простой*, если она принимает конечное число значений.

Тогда $\exists$ набор $\{x_1, \ldots, x_n\}$ из различных чисел т.ч

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k I_{A_k}$$

где события $A_1 \ldots A_n$ – разбиение Ω. т.е $A_k = \{\xi = x_k\}$

Определение 11. Пусть ξ – случайная величина.

Тогда обозначим: $\xi^+ = \max(\xi, 0)$ и $\xi^- = \max(-\xi, 0)$

Ясно, что $\xi = \xi^+ - \xi^-$, $|\xi| = \xi^+ + \xi^-$

Теорема 2 (о приближении простыми)**.**

Пусть ξ – случайная величина. Тогда

1. *Если $\xi \geqslant 0$, то $\exists$ последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ простых неотрицательных случайных величин, т.ч $\xi_n \uparrow \xi$ (т.е. $\forall \omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \leqslant \xi_{n+1}(\omega)$ и $\xi(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$) и ξ_n явл. $\mathcal{F}_\xi$ - измеримыми.*

2. *Если ξ – произвольная случайная величина, то $\exists$ последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ простых $\mathcal{F}_\xi$ - измеримых случайных величин т.ч. $|\xi_n| \leqslant |\xi|$ $\forall n$ и $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$*

Доказательство.

1. Положим

$$\xi_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} I\left\{\frac{k-1}{2^n} \leqslant \xi(\omega) < \frac{k}{2^n}\right\} + nI\{\xi(\omega) \geqslant n\}$$

   Легко видеть, что $\xi_n \uparrow \xi$ и ξ_n является $\mathcal{F}_\xi$ - измеримым (т.к. $\left\{\frac{k-1}{2^n} \leqslant \xi < \frac{k}{2^n}\right\} \in \mathcal{F}_\xi$)

2. Пусть $\xi = \xi^+ - \xi^-$ и пусть $\{\eta_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность простых $\mathcal{F}_\xi$ - измеримых с.в. т.ч. $\eta_n \uparrow \xi^+$, а $\{\zeta_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность простых $\mathcal{F}_\xi$ - измеримых т.ч. $\zeta_n \uparrow \xi^-$

   Положим $\xi_n = \eta_n - \zeta_n$.
   Тогда $\xi_n \to \xi \quad \forall \omega \in \Omega$ и $|\xi_n| = |\eta_n| + |\zeta_n| \leqslant |\xi^+| + |\xi^-| = |\xi|$

$\square$

Математическое ожидание случайных величин

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, ξ - случайная величина на нем. Что такое $E\xi$?

Простые случайные величины.

Пусть ξ – простая случайная величина, т.е.

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k I_{A_k},$$

где $x_1 \ldots x_n$ – различные числа, $A_1, \ldots, A_n$ – разбиение Ω, т.е. $A_k = \{\xi = x_k\}$

Определение 12. Для простой случайной величины ξ её математическим ожиданием называют

$$E\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k P(A_k)$$

Свойства математического ожидания для простых случайных величин

1. $\xi = c = const \Rightarrow E\xi = c$

2. Линейность

$$E(a\xi + b\eta) = aE\xi + bE\eta, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

   Доказательство. Обозначим $\zeta = a\xi + b\eta$, пусть ξ принимает значения $x_1 \ldots x_n$, η – значения $y_1 \ldots y_m$, ζ – значения $z_1 \ldots z_l$

Обозначим $C_{k,j} = \{\xi = x_k, \eta = y_j\}$.
Тогда

$$E\zeta = \sum_{i=1}^{l} z_i P(\zeta = z_i) = \sum_{i=1}^{l} z_i \sum_{\substack{k,j: \\ ax_k+by_j=z_i}} P(\xi = x_k, \eta = y_j) =$$
$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{\substack{k,j: \\ ax_k+by_j=z_i}} (ax_k + by_j) P(\xi = x_k, \eta = y_j) =$$
$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (ax_k + by_j) P(\xi = x_k, \eta = y_j) =$$
$$\sum_{k=1}^{n} ax_k P(\xi = x_k) + \sum_{j=1}^{m} by_j P(\eta = y_j) = aE\xi + bE\eta$$

□

3. Если $\xi \geqslant 0$, то $E\xi \geqslant 0$

Доказательство. Если $\xi \geqslant 0$, то все $x_k \geqslant 0 \Rightarrow E\xi \geqslant 0$ □

4. Если $\xi \leqslant \eta$, то $E\xi \leqslant E\eta$

Доказательство. Рассмотрим $\zeta = \eta - \xi \geqslant 0$. По свойству 3

$$0 \leqslant E\zeta = E(\eta - \xi) = E\eta - E\xi$$

□

Неотрицательные случайные величины

Определение 13. Пусть ξ – неотрицательная случайная величина, а $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ – $\forall$ последовательность неотрицательных простых случайных величин, т.ч. $\xi_n \uparrow \xi$.

Тогда $E\xi_n \leqslant E\xi_{n+1} \Rightarrow \exists$ предел $E\xi_n$ и

$$E\xi := \lim_{n\to\infty} E\xi_n$$

Лемма 14. *Пусть $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ и η – простые неотрицательные случайные вечилины, причем $\xi_n \uparrow \xi \geqslant \eta$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} E\xi_n \geqslant E\eta$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Рассмотрим $A_n = \{\, \omega \mid \xi_n - \eta \geqslant -\varepsilon \,\}$

Тогда

$$E\xi_n = E(\xi_n I_{A_n} + E(\xi_n I_{\overline{A}_n} \geqslant E((\eta - \varepsilon) I_{A_n}) =$$
$$E\eta - E\eta I_{\overline{A}_n} - \varepsilon E I_{A_n} \geqslant E\eta - c\, P(\overline{A}_n) - \varepsilon P(A_n);$$

где $c = \max\limits_{\omega\in\Omega} \eta(\omega)$ Заметим, что $A_n = \{\xi_n \geqslant \eta - \varepsilon\} \uparrow \Omega$
т.к. $\xi_n \uparrow \xi \geqslant \eta \Rightarrow P(A_n) \to 1$
Значит

$$\lim_{n\to\infty} E\xi_n \geqslant E\eta_n \geqslant E\eta - \varepsilon$$

В силу произвольности ε: $\lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n \geqslant E\eta$ □

Следствие 1. *Определение математического ожидания для неотрицательных случайных величин корректно.*

Доказательство. Пусть $\xi \geqslant 0$ и $\xi_n \uparrow \xi,\ \ \eta_n \uparrow \xi$ – последовательность простых неотрицательных случайных величин. Тогда $\forall m$ в силу леммы

$$\lim_{n\to\infty} E\xi_n \geqslant E\eta_m$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} E\xi_n \geqslant \lim_{m\to\infty} E\eta_m$$

Меняем ξ и η местами в рассуждении.

$$\lim_{m\to\infty} E\eta_m \geqslant \lim_{n\to\infty} E\xi_n$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} E\xi_n = \lim_{m\to\infty} E\eta_m$$

□

Замечание. Если ξ – неотрицательная с.в., то

$$E\xi = \sup_{\eta:\eta\leqslant\xi} E\eta, \qquad \text{где } \eta \text{ – неотриц. простая с.в.}$$

Произвольные случайные величины

Определение 14. Пусть ξ – произвольная случайная величина, $\xi = \xi^+ - \xi^-$

1. Если $E\xi^+$ и $E\xi^-$ – конечны, то $\boxed{E\xi := E\xi^+ - E\xi^-}$
2. Если $E\xi^+ = +\infty$ и $E\xi^-$ – конечно, то $\boxed{E\xi := +\infty}$
3. Если $E\xi^+$ конечно и $E\xi^- = +\infty$, то $\boxed{E\xi := -\infty}$
4. Если $E\xi^+ = E\xi^- = +\infty$, то $E\xi$ не существует(не определено)

Замечание.

1. Математическое ожидание случайной величины это интеграл Лебега по вероятностной мере P
$$E\xi := \int\limits_{\Omega} \xi dP = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)P(d\omega)$$
2. $E\xi$ – конечно $\Leftrightarrow E|\xi|$ – конечно.
3. Множество случ. величин ξ на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с условием: $E\xi$ – конечно, образует пространство $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Далее мы убедимся, что это линейное пространство.

Свойства математического ожидания

1 Пусть ξ – случайная величина, $E\xi$ - конечно.

Тогда для $\forall c \in \mathbb{R}$ $E(c\xi)$ конечно и

$$E(c\xi) = cE\xi$$

Доказательство. Для простых ξ, доказано ранее. Пусть $\xi \geqslant 0$.

Если $c \geqslant 0$, то возьмем последовательность простых неотрицательных случайных величин ξ_n т.ч. $\xi_n \uparrow \xi$. Тогда $c\xi_n \uparrow c\xi \Rightarrow$

$$E(c\xi) = \lim_{n\to\infty} E(c\xi_n) = c\lim_{n\to\infty} E\xi_n = cE\xi$$

Если $c < 0$, то $c\xi = -(c\xi)^- = -(-c\xi)$

$\Rightarrow E(c\xi) = -E(c\xi)^- = -E((-c)\xi) = cE\xi$

Пусть ξ - произвольная, $c \geqslant 0$

Тогда

$$E(c\xi) = E(c\xi)^+ - E(c\xi)^- = Ec\xi^+ - Ec\xi^- = c(E\xi^+ - E\xi^-) = cE\xi$$

Для $c < 0$ действуем аналогично. □

2. Если $\xi \leqslant \eta$ и $E\eta, E\xi$ - конечны, то

$$E\eta \leqslant E\xi$$

Доказательство. Для простых ξ и η - доказано. Пусть ξ и η - неотрицательны. Тогда

$$E\eta = \sup_{\mu:\mu\leqslant\eta} E\mu \leqslant \sup_{\mu:\mu\leqslant\xi} E\mu = E\xi$$

Пусть ξ и η - произвольные.

Тогда $\xi^+(\omega) \geqslant \eta^+(\omega)$ и $\xi^-(\omega) \leqslant \eta^-(\omega)$

$\Rightarrow E\eta = E\eta^+ - E\eta^- \leqslant E\xi^+ - E\xi^- = E\xi$ □

3. Если $E\xi$ - конечно, то

$$|E\xi| \leqslant E|\xi|$$

Доказательство. $|\xi| = \xi^+ + \xi^- \Rightarrow E|\xi|$ – конечно.

По свойству 2

$$E(-|\xi|) \leqslant E\xi \leqslant E|\xi| \Rightarrow -E|\xi| \leqslant E\xi \leqslant E|\xi| \Rightarrow |E\xi| \leqslant E|\xi|$$

□

4. Аддитивность

Пусть ξ и η - случайные величины. $E\xi$ и $E\eta$ - конечны.

Тогда $E(\xi + \eta)$ - конечно и

$$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$$

Доказательство. Для простых доказано ранее. Пусть ξ и η – неотрицательные случайные величины. Возьмем ξ_n, η_n - последовательности простых неотрицательных случайных величин, т.ч. $\xi_n \uparrow \xi$ $\eta_n \uparrow \eta$. Тогда $\xi_n + \eta_n \uparrow \xi + \eta$

$$E(\xi + \eta) = \lim_{n\to\infty} E(\xi_n + \eta_n) = \lim_{n\to\infty} E\xi_n + \lim_{n\to\infty} E\eta_n = E\xi + E\eta$$

Пусть ξ и η - произвольные случайные величины.

Тогда $(\xi+\eta)^+ \leqslant (\xi^+ + \eta^+)$

Обозначим $\delta = (\xi^+ + \eta^+) - (\xi+\eta)^+ \geqslant 0$.

Тогда $(\xi^- + \eta^-) - (\xi+\eta)^- = \delta$

Для неотрицательных случайных величин аддитивность доказали $\Rightarrow$

$$E(\xi+\eta)^+ + E\delta = E\xi^+ + E\eta^+ + E\xi^- + E\eta^- = E\delta + E(\xi+\eta)^-$$
$$\Rightarrow E(\xi+\eta) = E(\xi+\eta)^+ - E(\xi+\eta)^- = E\xi^+ + E\eta^+ - E\delta - E\xi^- - E\eta^- + E\delta = E\xi + E\eta$$

□

5.
1) Пусть $|\xi| \leqslant \eta$ и $E\eta$ - конечно. Тогда $E\xi$ конечно.
2) Пусть $\xi \leqslant \eta$ и $E\eta < +\infty$, тогда $E\xi < +\infty$
   Если $\xi \geqslant \eta$ и $E\eta > -\infty$, то $E\xi > -\infty$.
3) Если $E\xi$ конечно и $A \in \mathcal{F}$, то $E(\xi I_A)$ тоже конечно.

Доказательство.

1) $\xi^-, \xi^+ \leqslant \eta \Rightarrow E\xi^+ = \sup\limits_{0 \leqslant \xi \leqslant \xi^+} E\xi \leqslant \sup\limits_{0 \leqslant \xi \leqslant \eta} E\xi = E\eta < +\infty$
   Аналогично с $E\xi^-$. Тогда $E\xi = E\xi^+ - E\xi^-$ – тоже конечно

2) $\xi^+ \leqslant \eta^+$ и $E\eta^+ < +\infty \Rightarrow$ по доказанному в 1), что
   $E\xi^+ < +\infty \Rightarrow E\xi < +\infty$

3) $(\xi I_A)^+ = \xi^+ I_A \leqslant \xi^+ \Rightarrow E(\xi I_A)^+$ – конечно.
   Аналогично, $E(\xi I_A)^-$ – тоже конечно.

□

Определение 15. Говорят, что событие A происходит почти наверное, если $P(A) = 1$

6. $\xi = 0$ п.н. Тогда $E\xi = 0$

Доказательство. Пусть ξ – простая случайная величина.

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k I_{A_k}, \quad \text{где } x_1, \dots x_n \text{ — различные и } A_1 \dots A_n \text{ – разбиение } \Omega : A_k = \{\xi = x_k\}$$

Тогда, если $x_k \neq 0$, то $A_k = \{\xi = x_k\} \subset \{\xi \neq 0\}$

$$\Rightarrow P(A_k) \leqslant P(\xi \neq 0) = 0$$
$$\Rightarrow E\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k P(A_k) = 0$$

Если $\xi \geqslant 0$ – неотрицательная случайная величина, то $E\xi = \sup\limits_{\eta \leqslant \xi} E\eta$, где η – простая неотрицательная с.в.
Но для таких $\eta : 0 \leqslant \eta \leqslant \xi = 0 \Rightarrow \eta = 0$ п.н.

Значит $E\eta = 0$

Если ξ – произвольная случайная величина, то $\xi^+ = 0$ п.н., $\xi^- = 0$ п.н.

По доказанному $E\xi^+ = E\xi^- = 0 \Rightarrow E\xi = E\xi^+ + E\xi^- = 0$ □

(7) Если $\xi = \eta$ п.н. и $E\eta$ - конечно, то $E\xi$ - конечно и $E\xi = E\eta$

Доказательство. Рассмотрим $A = \{\xi \neq \eta\}$. Тогда $I_A = 0$ п.н. $\Rightarrow \xi I_A = 0$ п.н., $\eta I_A = 0$ п.н.

$$\xi = \xi I_A + \xi I_{\overline{A}} = \xi I_A + \eta I_{\overline{A}} \Rightarrow E\xi \text{ конечно и}$$
$$E\xi = E\xi I_A + E\eta I_{\overline{A}} = E\eta I_A + E\eta I_{\overline{A}} = E\eta$$

□

(8) Пусть $\xi \geqslant 0$ и $E\xi = 0$.
Тогда $\xi = 0$ п.н.

Доказательство. Рассмотрим $A = \{\xi > 0\}$ и $A_n = \{\xi > \frac{1}{n}\}$
Тогда $A_n \uparrow A$. Но

$$P(A_n) = EI_{A_n} \leqslant E(\xi_n)I_{A_n} \leqslant nE\xi = 0$$

Отсюда в силу непрерывности вероятностной меры

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$$

□

(9) Пусть $E\xi$ и $E\eta$ - конечно и для $\forall A \in \mathcal{F}$ выполнено:

$$E(\xi I_A) \leqslant E(\eta I_A)$$

Тогда $\xi \leqslant \eta$ п.н.

Доказательство. Рассмотрим $B\{\xi > \eta\}$. Тогда $E\eta I_B \leqslant E\xi I_B \leqslant E\eta I_B$
Тогда $E\xi I_B = E\eta I_B \Rightarrow E(\xi - \eta)I_B = 0 \Rightarrow |$по свойству $8| \Rightarrow (\xi - \eta)I_B = 0$ п.н.
Но $(\xi - \eta)I_B = 0 \Leftrightarrow I_B = 0$
$\Rightarrow I_B = 0$ п.н. и, значит, $P(B) = 0$

□

Независимость случайных величин и векторов

Определение 1. Набор случайных векторов (величин) $\{\xi_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ называется *независимым в совокупности*, если независимы в совокупности $\{\mathcal{F}_{\xi_\alpha}\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ сигма-алгебры, ими порожденные.

Следствие 1. *Случайные величины $\xi_1 \dots \xi_n$ - независимы в совокупности $\Leftrightarrow \forall B_1 \dots B_n \in B(\mathbb{R})$ события $\{\xi_1 \in B_1\} \dots \{\xi_n \in B_n\}$ - независимы в совокупности.*

Теорема 1 (критерий независимости для функции распределения)**.**
Случайные величины $\xi_1 \dots \xi_n$ – независимы в совокупности $\Leftrightarrow \forall x_1 \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$P(\xi_1 \leqslant x_1, \dots, \xi_n \leqslant x_n) = P(\xi_1 \leqslant x_1) \dots P(\xi_n \leqslant x_n)$$

(функция распределения вектора $(\xi_1 \dots \xi_n)$ распадается в произведение функций распределения компонент)

Доказательство. $\xi_1 \dots \xi_n$ – независимы в совокупности $\Leftrightarrow$ σ-алгебры $\mathcal{F}_{\xi_1} \dots \mathcal{F}_{\xi_n}$ – независимы в совокупности $\Leftrightarrow$ |критерий независ. σ-алгебр| $\Leftrightarrow$ π-системы порождающие эти σ-алгебры независимы.

Для σ-алгебры $\mathcal{F}_{\xi_i} = \{\, \{\xi_i \in B\} \mid B \in B(\mathbb{R})\,\}$ такой π-системой будет $\{\, \{\xi_i \leqslant x\} \mid x \in \mathbb{R}\,\}$.

Это следует из того, что $\quad \sigma((-\infty; x] : x \in \mathbb{R}) = B(\mathbb{R})$
$\Leftrightarrow$ π-системы $\{\, \{\xi_i \leqslant x_i\} \mid x_i \in \mathbb{R}\,\}$ – независимы
$\Leftrightarrow \forall x_1 \dots x_n$ - события. $\{\xi_1 \leqslant x_1\} \dots \{\xi_n \leqslant x_n\}$ независимы в совокупности

$$\Leftrightarrow P(\xi_1 \leqslant x_1, \dots, \xi_n \leqslant x_n) = P(\xi_1 \leqslant x_1) \dots P(\xi_n \leqslant x_n), \quad \forall x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$$

□

Теорема 2 (функции от независимых – тоже независимы).

Пусть $\xi_1 \dots \xi_m$ – независимые случайные векторы, ξ_i имеет размерность n_i.

Пусть $f_i \colon \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{k_i}$ – борелевская функция, $\forall i = 1 \dots n$

Тогда $f_1(\xi_1), \dots, f_n(\xi_n)$ – независимы в совокупности.

Доказательство. Обозначим $\eta_i = f_i(\xi_i)$.

Тогда $\forall B \in B(\mathbb{R}^{k_i})$:

$$\{\eta_i \in B\} = \{f_i(\xi_i) \in B\} = \{\xi_i \in (f_i^{-1})(B)\} \in \mathcal{F}_{\xi_i}$$

то есть $\mathcal{F}_{\eta_i} \subset \mathcal{F}_{\xi_i}$

По условию $\mathcal{F}_{\xi_1} \dots \mathcal{F}_{\xi_n}$ – независимы $\Rightarrow \mathcal{F}_{\eta_1} \dots \mathcal{F}_{\eta_n}$ – тоже независимы.

$\Leftrightarrow \eta_1 \dots \eta_n$ – независимы в совокупности. □

Теорема 3. *Пусть случайная величина ξ и η – независимы, причем $E\xi$ и $E\eta$ – конечны. Тогда $E\xi\eta$ тоже конечно и $E\xi\eta = E\xi E\eta$*

Доказательство. Пусть ξ и η - простые случайные величины,
ξ - принимает значения $x_1 \dots x_n$, $\quad \eta$ - принимает значения $y_1 \dots y_m$.

Тогда по линейности:

$$E\xi\eta = \sum_{k,j} x_k y_j P(\xi = x_k, \eta = y_j) = |\text{независимость}| = \sum_{k,j} x_k y_j P(\xi = x_k) P(\eta = y_j) =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k P(\xi = x_k)) \right) \left(\sum_{j=1}^{m} y_j P(\eta = y_j) \right) = E\xi E\eta$$

Пусть теперь η и ξ – неотрицательные случайные величины.

Тогда по теореме о приближении простыми $\exists$ последовательность простых $\mathcal{F}_\xi$ – измеримых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, т.ч. $\xi_n \uparrow \xi$. Аналогично $\exists \{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательных простых неотрицательных $\mathcal{F}_\eta$ - измеримых случайных величин, т.ч. $\eta_n \uparrow \eta$

Тогда $\xi_n \eta_n \uparrow \xi\eta$ и $\forall n : \xi_n$ и η_n – независимы.

$$\Rightarrow E\xi\eta = \lim_{n\to\infty} E\xi_n\eta_n = |\text{независимость } \xi_n \text{ и } \eta_n| = \lim_{n\to\infty} E\xi_n E\eta_n = E\xi E\eta$$

Пусть ξ и η - произвольные с.в. Тогда ξ^+, ξ^- – функции от ξ, $\quad \eta^+, \eta^-$ – функции от $\eta \Rightarrow \xi^+, \xi^-$ – независимы с η^+, η^-

Отсюда получаем

$$(\xi\eta)^+ = \xi^+\eta^+ + \xi^-\eta^- \Rightarrow E(\xi\eta)^+ = E(\xi^+\eta^+) + E(\xi^-\eta^-) =$$
$$= \left|\text{независимость } \xi^+ \text{ с } \eta^+ \text{ и } \xi^- \text{ с } \eta^-\right| = E\xi^+ E\eta^+ + E\xi^- E\eta^-$$

Аналогично $E(\xi\eta)^- = E\xi^+ E\eta^- + E\xi^- E\eta^+$

$\Rightarrow E\xi\eta$ конечно и $E\xi\eta = E\xi^+\eta^+ + E\xi^- E\eta^- - E\xi^+\eta^- - E\xi^- E\eta^+ = E\xi E\eta$

$\square$

Дисперсия и ковариация

Определение 2. *Дисперсией* с.в. ξ называетют

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2, \quad \text{если } E\xi \text{ существует}$$

Определение 3. *Ковариацией* случайных величин ξ и η называют

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

Если $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = 0$, то ξ и η называются *некоррелированными.*

Если $D\xi$ и $D\eta$ – конечны и положительны, то можно определить расстояние

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

которое называется *коэффициентом корреляции* ξ и η

Лемма 15 (свойства дисперсии и ковариации)**.**
Если все математические ожидания конечны, то

1. *Ковариация билинейна.*
2. $cov(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$
   $D\xi = cos(\xi,\xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2$
3. $D(c\xi) = c^2 D\xi, D(\xi + c) = D\xi$
4. *Неравенство Коши-Буняковского.*
   $$|E\xi\eta|^2 \leqslant E\xi^2 E\eta^2$$
5. $|\rho(\xi,\eta)| \leqslant 1$, *причем* $\rho(\xi,\eta) = 1 \Leftrightarrow \xi$ *и* η *– п.н. линейно зависимы.*

Доказательство.
Свойства $1) - 3)$ легко вытекают из свойств математического ожидания.

4. Рассмотрим для $\lambda \in \mathbb{R}:$
   $$f(\lambda) = E(\xi + \lambda\eta)^2 \geqslant 0$$
   Но $f(\lambda) = E\xi^2 + 2E\xi\eta\lambda + \lambda^2 E\eta^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$ дискриминант $\leqslant 0$, т.е. $4[(E\xi\eta)^2 - E\xi^2 E\eta^2] \leqslant 0$
5. Рассмотрим $\xi_1 = \xi - E\xi$, $\eta_1 = \eta - E\eta$
   Тогда $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = E\xi_1\eta_1, \quad D\xi = E\xi_1^2, \quad D\eta = E\eta_1^2$
   $\Rightarrow |\rho(\xi,\eta)| = \left|\frac{E\xi_1\eta_1}{\sqrt{E\xi_1^2 E\eta_1^2}}\right| \leqslant 1$, по нер-ву Коши-Буняковского.
   При этом $|\rho(\xi,\eta)| = 1 \Leftrightarrow$ дискриминант $= 0 \Leftrightarrow \exists! \lambda_0 \in \mathbb{R}$ т.ч. $f(\lambda_0) = 0$. т.е. $E(\xi_1 + \lambda_0\eta_1)^2 = 0$
   $\Rightarrow \xi_1 + \lambda_0\eta_1 = 0$ п.н. т.е.
   $$\xi = E\xi - \lambda_0(\eta - E\eta) \text{ п.н.}$$

$\square$

Следствие 2. *Если* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *– попарно некоррелируют,* $D\xi_i < +\infty$*, тогда*

$$D(\xi_1 + \ldots \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k$$

Доказательство.

$$D(\xi_1 + \ldots + \xi_k) = \operatorname{cov}(\xi_1 + \ldots + \xi_k, \xi_1 + \ldots \xi_k) =$$
$$\sum_{i,j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_i) = \sum_{i} D\xi_i$$

$\square$

Следствие 3. $\xi_1 \ldots \xi_n$ *– независимы,* $D\xi_i < +\infty$*. Тогда* $D(\xi_1 + \ldots \xi_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} D\xi_k$

Определение 4. Пусть $\xi = (\xi_1, ldots, \xi_n)$ – случ. вектор.

Тогда его *мат. ожиданием* называется вектор из мат. ожиданий его компонент:

$$E\xi = (E\xi_1, \ldots, E\xi_n)$$

Определение 5. *Дисперсией* вектора ξ называется его матрица ковариаций:

$$D\xi = \left\| \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) \right\|_{i,j=1}^{n} \quad \text{— матрица } n \times n$$

Лемма 16. *Матрица ковариаций случайного вектора является симметрической и неотрицательно определенной.*

Доказательство. $D\xi = \left\| \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) \right\|_{i,j=1}^{n}$ – симметричная т.к $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \operatorname{cov}(\xi_j, \xi_i)$

Пусть $x_1 \ldots x_n \in \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$ – вектор.

$$\langle D\xi x, x \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} cov(\xi_i, \xi_j) x_i x_j = |\text{линейность ковариации}| = \sum_{i,j=1}^{n} cov(x_i\xi_i, x_j\xi_j) =$$
$$= |\text{суммируем по } i| = \sum_{j=1}^{n} cov(x_1\xi_1 + \ldots x_n\xi_n, x_j\xi_j) =$$
$$= |\text{суммируем по } j| = cov(x_1\xi_1 + \ldots x_n\xi_n, x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n) = D(x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n) \geqslant 0$$

$\Rightarrow$ неотр. определенная $\square$

Неравенства

1. **Неравенство Маркова**

   Пусть $\xi \geqslant 0$ – неотрицательная случайная величина.

   Тогда для $\forall \varepsilon > 0$: $\boxed{P(\xi \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{E\xi}{\varepsilon}}$

   Доказательство. $P(\xi \geqslant \varepsilon) = E\, I\{\xi \geqslant \varepsilon\} \leqslant E\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon} I\{\xi \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant E\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon}\right) = \dfrac{E\xi}{\varepsilon}$ $\square$

2. **Неравенство Чебышева**

   Если $D\xi < +\infty$, то для $\forall \varepsilon > 0$: $\boxed{P(|\xi - E\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{D\xi}{\varepsilon^2}}$

Доказательство.

$$P(|\xi - E\xi| \geqslant \varepsilon) = P(|\xi - E\xi|^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant |\text{нер-во Маркова}| \leqslant \frac{E\,|\xi - E\xi|^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

□

3 **Неравенство Йенсена**

Пусть $g(x)$ – выпуклая вниз функция. Пусть $E\xi$ - конечно. Тогда

$$\boxed{Eg(\xi) \geqslant g(E\xi)}$$

Доказательство. Т.к $g(x)$ – выпуклая вниз функция, то $\forall x_0 \in \mathbb{R}\ \exists \lambda(x_0)$: т.ч. $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$g(x) \geqslant g(x_0) + \lambda(x_0)(x - x_0)$$

Положим $x = \xi,\ x_0 = E\xi$. Тогда

$$g(\xi) \geqslant g(E\xi) + \lambda(E\xi)(\xi - E\xi)$$

Берем математическое ожидание от обеих частей:

$$Eg(\xi) \geqslant g(E\xi) + \lambda(E\xi)E(\xi - E\xi) = g(E\xi)$$

□

Виды сходимостей случайных величин

Определение 1.

1. Последовательность случайных величин $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *сходится по вероятности* к случайной величине ξ (обозначение $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$), если для $\forall \varepsilon > 0$:

$$P\left(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2. Последовательность случайных величин $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *сходится с вероятностью 1* к случайной величине ξ (или сходится *почти наверное*), если

$$P(\omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)) = 1$$

Обозначения: $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi,\ \xi_n \to \xi$ п.н. или $\xi_n \to \xi$ P-п.н.

3. Последовательность случайных величин $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *сходится в среднем порядка* $p > 0$ к случайной величине ξ (или *сходится в пространстве* L^p), если

$$E|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$

4. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится по распределению* к случайной величине ξ, если для $\forall$ ограниченой непрерывной ф-ции $f(x)$ выполнено

$$Ef(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} Ef(\xi)$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$

Теорема 1 (Закон больших чисел в форме Чебышева).

Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *– последовательность попарно некоррелированных случайных величин, т.ч.* $\forall n : D\xi_n \leqslant C$.

Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. *Тогда*

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty$$

Доказательство.

$$P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant |\text{нер-во Чебышева}| \leqslant \frac{D\left(\frac{S_n - ES_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D(S_n - ES_n)}{n^2\varepsilon^2} =$$
$$= \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} = |\xi_i \text{ и } \xi_j \text{ - некорр.}| = \frac{\sum_{j=1}^n D\xi_j}{n^2\varepsilon^2} \leqslant \frac{Cn}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

□

Следствие 1. *Пусть* $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *– независимые случайные величины, т.ч.* $D\xi_n \leqslant C, \forall n$ *и* $E\xi_n = a, \forall n$.

Тогда, обозначив $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, *получаем*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a$$

<u>Смысл ЗБЧ:</u>

$\xi_1 \ldots \xi_n \ldots$ – результаты независимых проведений одного и того же эксперимента.

Тогда их среднее арифметическое сходится к среднему значению результата одного эксперимента $E\xi_i$

Если ξ_i – индикаторы наступления некоторого события A:

$$\xi_i = I\{A \text{ наступило в } i\text{-м эксперименте}\}$$

то

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} E\xi_i = P(A)$$

Таким образом ЗБЧ — это принцип устойчивости частот постулировавшийся в начале курса.

Лемма 17 (критерий сходимости почти наверное).

$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \quad \Leftrightarrow \quad$ *для* $\forall \varepsilon > 0 : P(\sup\limits_{k\geqslant n} |\xi_k - \xi| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Доказательство.

Обозначим $A_k^\varepsilon = \{|\xi_k - \xi| \geqslant \varepsilon\}$ и $A^\varepsilon = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k^\varepsilon$

Тогда $\{\xi_n \nrightarrow \xi\} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A^{\frac{1}{m}}$

Получаем

$$P(\xi_n \nrightarrow \xi) = 0 \Leftrightarrow P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall m : P\left(A^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : P(A^\varepsilon) = 0.$$

$$\text{Но } \bigcup_{k\geqslant n} A_k^\varepsilon \downarrow A^\varepsilon, \text{ поэтому } P(A^\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k^\varepsilon\right) = 0 \Leftrightarrow P\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k^\varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Оталось заметить, что $\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k^\varepsilon = \{\sup\limits_{k\geqslant n} |\xi_k - \xi| \geqslant \varepsilon\}$ □

Теорема 2 (взаимоотношение различных видов сходимости).

Выполнены соотношение

1. $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$
2. $\xi_n \xrightarrow{L^P} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$
3. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi$

Доказательство.

1. Если $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, то по лемме для $\forall \varepsilon > 0$:

$$P(\sup_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{но событие } \{|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\} \subset \{\sup_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi| \geqslant \varepsilon\}$$
$$\Rightarrow P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(\sup_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2. $P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^P \geqslant \varepsilon^P) \leqslant |\text{нер-во Маркова}| \leqslant \dfrac{E|\xi_n - \xi|^P}{\varepsilon^P} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

3. Пусть $f(x)$ - ограниченная непрерывная функция, $|f(x)| \leqslant C, \forall x \in \mathbb{R}$.

   Пусть $\varepsilon > 0$ – фиксировано. Возьмем такое N, что

$$P(|\xi| > N) \leqslant \frac{\varepsilon}{4C}$$

   Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[-N, N]$, т.е $\exists \delta > 0 : \forall x, y$ с условием $|x| \leqslant N$ и $|x - y| \leqslant \delta$ выполнено

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

   Рассмотрим следующее разбиение Ω

$$A_1 = \{|\xi_n - \xi| \leqslant \delta, |\xi| \leqslant N\}$$
$$A_2 = \{|\xi_n - \xi| \leqslant \delta, |\xi| > N\}$$
$$A_3 = \{|\xi_n - \xi| > \delta\}$$

   Тогда

$$|Ef(\xi_n) - Ef(\xi)| \leqslant E|f(\xi_n) - f(\xi)| = E(|f(\xi_n) - f(\xi)|(I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3})) \leqslant$$

   Если выполнено A_1, то $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow E|f(\xi_n) - f(\xi)|I_{A_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} EI_{A_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

   Если выполнено A_2 или A_3, то $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leqslant 2C$

$$\Rightarrow \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2CE(I_{A_2} + I_{A_3}) = \frac{\varepsilon}{2} + 2C(P(A_2) + P(A_3)) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2CP(|\xi| > N) + 2CP(|\xi_n - \xi| > \delta) \leqslant \varepsilon + 2CP(|\xi_n - \xi| > \delta)$$

   По условию $P(|\xi_n - \xi| > \delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

   Значит в силу произвольности $\varepsilon > 0$, $Ef(\xi_n) \to Ef(\xi)$, т.е. $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$

□

Замечание. Сходимость по распределению случайных величин — это, на самом деле, сходимость их распределений.

$$\begin{tikzcd}
\text{п.н.} \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
& P \arrow[r, Rightarrow] & d \\
L^P \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

Обратных стрелок нигде нет. Можно привести контрпримеры.

Усиленный закон больших чисел для случайных величин с ограниченными дисперсиями

Определение 1. Последовательность $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ чисел из $\mathbb{R}$ называется *фундаментальной*, если

$$|x_n - x_m| \to 0, \quad n, m \to +\infty$$

Теорема 1 (критерий Коши). *Последовательность $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ сходится $\Leftrightarrow$ она фундаментальна.*

Теорема 2 (критерий Коши сходимости почти наверное). *Последовательность $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ сходится почти наверное $\Leftrightarrow$ $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна с вероятностью 1.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$.

Тогда если $\omega \in \Big\{ \omega \mid \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega)\xi(\omega) \Big\}$, то $\omega \in \{\{\xi_n(\omega)\}$ – фундаментальна$\}$

$\Rightarrow P(\{\xi_n\}$ – фундаментальна$) \geqslant P(\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi) = 1$

($\Leftarrow$) Обозначим $A = \{\{\xi_n\}$ – фундаментальна$\}$

Тогда $\forall \omega \in A$ у $\xi_n(\omega)$ $\exists$ предел $\xi(\omega)$

$$\xi(\omega) := \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega), \qquad \text{если } \omega \in A$$

Если же $\omega \notin A$, то положим $\xi(\omega) := 0$

Тогда $\xi_n I_A \to \xi \Rightarrow \xi$ – случайная величина(как предел случайных величин)

$$P(\xi_n \to \xi) \leqslant P(\{\xi_n \to \xi\} \cap A) = P(A) = 1$$
$$\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$$

□

Лемма 18 (критерий фундаментальности с вероятностью 1).

Последовательность $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна с вероятностью 1 $\Leftrightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0$:

$$P(\sup_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi_n| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Доказательство. Полностью аналогично док-ву критерия сходимости почти наверное. □

Теорема 3 (Колмогоров-Хинчин, достаточное условие для сходимости ряда почти наверное)**.**

Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *– последовательность независимых случайных величин т.ч.* $E\xi_n = 0, \forall n$ *и* $E\xi_n^2 < +\infty, \forall n$

Тогда если сходится $\sum\limits_n E\xi_n^2 < +\infty$*, то ряд* $\sum\limits_n \xi_n$ *сходится почти наверное.*

Лемма 19 (Неравенство Колмогорова)**.**

Пусть $\xi_1 \dots \xi_n$ *– независимые с.в.*

$E\xi_i = 0$ *и* $E\xi_i^2 < +\infty$*. Обозначим* $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$

Тогда

$$P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{ES_n^2}{\varepsilon^2}$$

Доказательство. Обозначим $A = \left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon\right\}$

Разделим A на следующие части:

$A_k = \{|S_k| \geqslant \varepsilon$ и $|S_i| < \varepsilon$ для $i = 1 \dots k-1\}$.

Тогда $A_k \cap A_j = \varnothing$ при $k \neq j$ и $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$

Рассмотрим

$$ES_n^2 \geqslant E(S_n^2 I_A) = E\sum_{k=1}^{n}(S_n^2 I_{A_k}) = \sum_{k=1}^{n} E(S_n^2 I_{A_k})$$

$$\begin{aligned} ES_n^2 I_{A_k} &= E(S_k + \xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)^2 I_{A_k} = \\ &= ES_k^2 I_{A_k} + 2ES_k(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n) I_{A_k} + E(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)^2 I_{A_k} \end{aligned}$$

Но I_{A_k} зависит от $S_1 \dots S_k \Rightarrow S_k I_{A_k}$ не зависит от $\xi_{k+1} \dots \xi_n$

Следовательно, второе слагаемое

$$\begin{aligned} &ES_k I_{A_k}(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n) = ES_k E(\xi_{k+1} + \ldots \xi_n) = 0 \quad (\forall i : E\xi_i = 0) \\ &\Rightarrow ES_n^2 I_{A_k} = ES_k^2 I_{A_k} + E(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)^2 I_{A_k} \geqslant ES_k^2 I_{A_k} \geqslant \varepsilon^2 E I_{A_k} = \varepsilon^2 P(A_k) \end{aligned}$$

т.к $S_k \geqslant \varepsilon$ на A_k.

В итоге

$$ES_n^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} E(S_n^2 I_{A_k}) \geqslant \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \varepsilon^2 P(A)$$

□

Док-во теоремы Колмогорова-Хинчина.

Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k$ сходится п.н. $\Leftrightarrow$ (критерий Коши) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна с вероятностью 1 $\Leftrightarrow$ (критерий фундаментальности) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0 : P(\sup\limits_{k\geqslant n} |S_k - S_n| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Оценим её: Рассмотрим.

$$P(\sup_{k\geqslant n}|S_k-S_n|\geqslant\varepsilon)=P(\bigcup_{k\geqslant n}\{|S_k-S_n|\geqslant\varepsilon\})=|\text{непрерывность вер. меры}|=$$

$$=\lim_{N\to\infty}P(\bigcup_{k=n}^{N+n}\{|S_k-S_n|\geqslant\varepsilon\})=\lim_{N\to\infty}P(\max_{1\leqslant k\leqslant N}|S_{k+n}-S_n|\geqslant\varepsilon)=|\text{нер-во Колмогорова}|\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{N\to\infty}\frac{E(S_{n+N}-S_n)^2}{\varepsilon^2}=\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{k=n+1}^{n+N}E\xi_k^2}{\varepsilon^2}=\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}E\xi_k^2}{\varepsilon^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

т.к. это остаток сходящегося ряда (по условию $\sum\limits_n E\xi_n^2<+\infty$)

□

Лемма 20 (Тёплиц).

Пусть последовательность $x_n\to x$, $\{a_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ *т.ч.* $a_n\geqslant 0$ *и* $b_n=\sum\limits_{j=1}^n a_j\uparrow+\infty$.

Тогда

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n a_jx_j\xrightarrow[n\to\infty]{}x$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное. Возьмём $n_0=n_0(\varepsilon)$ т.ч. $\forall n>n_0:|x-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$
Далее, возьмем $n_1>n_0$, т.ч.

$$\frac{1}{b_{n_1}}\sum_{j=1}^{n_0}a_j|x_j-x|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда для $\forall n>n_1$

$$\left|\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^n a_jx_j-x\right|=\left|\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^n a_j(x_j-x)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n_0}a_j|x_j-x|+\frac{1}{b_n}\sum_{j=n_0+1}^{n_1}a_j|x_j-x|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{b_n}\sum_{j=n_0+1}^{n}a_j\leqslant\varepsilon$$

□

Лемма 21 (Кронекер).
Пусть ряд $\sum\limits_n x_n$ *сходится.*

$\{a_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ – *некоторая последовательность* $a_n\geqslant 0$ *т.ч.* $b_n=\sum\limits_{j=1}^n a_j\uparrow+\infty$

Тогда

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^n b_jx_j\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Доказательство. Обозначим $S_n=x_1+\ldots+x_n$. Тогда $\{S_n\}$ сходится.

$$\sum_{j=1}^n b_jx_j=\sum_{j=1}^n b_j(S_j-S_{j-1})=b_nS_n-\sum_{j=1}^n S_{j-1}(b_j-b_{j-1})=b_nS_n-\sum_{j=1}^n S_{j-1}a_j$$

Делим на b_n:

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} b_j x_j = S_n - \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} S_{j-1}a_j$$

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$$

А по лемме Тёплица:

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} S_{j-1}a_j \xrightarrow[n\to\infty]{} S$$

$\Rightarrow$ их разность стремится к нулю. □

Теорема 4 (Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова-Хинчина)**.**
Пусть $\{\xi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ *– независимые с.в. т.ч.* $D\xi_n < +\infty \forall n$.
Пусть последовательность $\{b_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ *т.ч.* $b_n > 0, b_n \uparrow +\infty$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D\xi_n}{b_n^2} < +\infty$$

Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots \xi_n$*. Тогда*

$$\boxed{\frac{S_n - ES_n}{b_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0} \quad (\textit{при } n\to\infty)$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\frac{S_n - ES_n}{b_n} = \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k\left(\frac{\xi_k - E\xi_k}{b_k}\right)$$

Далее с.в. $\eta_k = \frac{\xi_k - E\xi_k}{b_k}$ – независимы и $E\eta_k = 0$
Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} E\eta_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{\xi_k - E\xi_k}{b_k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{D\xi_k}{b_k^2} < +\infty$$

$\Rightarrow$ по теореме о сходимости ряда, ряд $\sum\limits_k \eta_k$ сходится п.н.

Но по лемме Кронекера $\frac{1}{b_n}\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\left(\frac{\xi_k - E\xi_k}{b_k}\right)$ сходится к нулю для всех ω, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k - E\xi_k}{b_k} = \sum_{k=1}^{\infty}\eta_k$$

сходится. А этот ряд сходится.

$$\Longrightarrow \frac{S_n - ES_n}{b_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$$

□

Следствие 1. *Пусть* $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *– независимые случайные величины т.ч.* $D\xi_n \leqslant C\ \forall n \in \mathbb{N}$
Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.
Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$$

Если, к тому же, $E\xi_i = a \forall i$, *то*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} a$$

Доказательство. Возьмем $b_n = n \Rightarrow b_n > 0,\ b_n \uparrow +\infty$.
Тогда

$$\sum_n \frac{D\xi_n}{b_n^2} = \sum_n \frac{D\xi_n}{n^2} \leqslant \sum_n \frac{c}{n^2} < +\infty$$

Согласно УЗБЧ

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0, \quad (n \to \infty)$$

Если же $E\xi_n = a$, то $ES_n = n - a$

$$\frac{S_n}{n} - a \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \Leftrightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} a$$

□

Смысл УЗБЧ: обоснование феномена устойчивости частот появлений событий в последовательностях независимых экспериментов.
Если $\xi_i = I\{\text{событие } A \text{ произошло в } i\text{- том эксперимете}\}$ то

$$\nu_n(A) = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_1 = P(A)$$

Предельный переход под знаком E

Вопрос: $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow E\xi \to E\xi?$

Теорема 1 (О монотонной сходимости)**.**
Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}, \xi, \eta$ *– с.в.*

1. *Если* $\xi_n \uparrow \xi,\ \xi_n \geqslant \eta, \forall n \in \mathbb{N}$ *и* $E\eta > -\infty$, *то* $E\xi = \lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n$
2. *Если* $\xi_n \downarrow \xi, \xi_n \leqslant \eta, \forall n \in \mathbb{N}$ *и* $E\eta < +\infty$, *то* $E\xi = \lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n$

Теорема 2 (лемма Фату)**.**
Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \eta$ *– с.в.,* $E\eta$ *- конечно*

1. *Если* $\xi_n \geqslant \eta, \forall n \in \mathbb{N}$, *то* $\quad \varliminf\limits_n E\xi_n \geqslant E\varliminf\limits_n \xi_n$
2. *Если* $\xi_n \leqslant \eta, \forall n \in \mathbb{N}$, *то* $\quad \varlimsup\limits_n E\xi_n \leqslant E\varlimsup\limits_n \xi_n$

3. *Если* $|\xi_n| \leqslant \eta, \forall n \in \mathbb{N}$, *то* $\quad E\varliminf_n \xi_n \leqslant \varliminf_n E\xi_n \leqslant \varlimsup_n E\xi_n \leqslant E\varlimsup_n \xi_n$

Доказательство.

1. Обозначим $\psi_n = \inf\limits_{k\geqslant n} \xi_k$. Тогда $\psi_n \uparrow \varliminf\limits_n \xi_n$ и $\psi_n \geqslant \eta, \forall n \in \mathbb{N}$.

   По теореме о монотонной сходимости получаем

   $$\lim_n E\psi_n = E\varliminf_n \xi_n$$

   Осталось заметить, что

   $$E\varliminf_n \xi_n = \lim_n E\psi_n = \varliminf_n E\psi_n \leqslant \varliminf_n E\xi_n$$

   т.к. $\xi_n \geqslant \psi_n, \forall n$

2. Следует из 1) заменой ξ_n на $-\xi_n$

3. Сразу следует из 1) и 2)

□

Теорема 3 (Лебега о мажорируюмой сходимости)**.**
Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *– последовательность с.в. т.ч.* $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ *и для* $\forall n : |\xi_n| \leqslant \eta$*, причем* $E\eta$ *конечно.*

Тогда $E\xi = \lim\limits_n E\xi_n$ *и, более того,* $E|\xi_n - \xi| \to 0$ *(т.е.* $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$*)*

Доказательство. Заметим, что $\xi = \lim\limits_n \xi_n = \varliminf\limits_n \xi_n = \varlimsup\limits_n \xi_n$ п.н.

$\Rightarrow$ по лемме Фату

$$\begin{aligned} &E\xi = E\varliminf_n \xi_n \leqslant \varliminf_n E\xi_n \leqslant \varlimsup_n E\xi_n \leqslant E\varlimsup_n \xi_n = E\xi \\ &\Rightarrow \lim_n E\xi_n = E\xi \end{aligned}$$

Конечность $E\xi$ следует из того, что $|\xi| \leqslant \eta$ п.н. и конечности $E\eta$

Для обоснования сходимости в L^1 достаточно взять $\psi_n = |\xi_n - \xi|$.

Тогда $|\psi_n| \leqslant 2|\eta|$ п.н. и $\psi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \Rightarrow E\psi_n \to 0$

□

Усиленный закон больших чисел для с.в. с конечным математическим ожиданием

Определение 1. Пусть $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность событий.

Тогда событием $\{A_n$ бесконечное число$\}$ = $\{A_n$ б.ч$\}$ наз. событие, заключающееся в том, что произошло бесконесное число событий в последовательности $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Формально:

$$\{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geqslant n} A_k$$

Лемма 22 (Борель-Кантелли)**.**

1. *Если* $\sum\limits_n P(A_n) < +\infty$, *то* $P(A_n$ *б.ч.*$) = 0$

2. *Если* $\sum\limits_n P(A_n) = +\infty$ *и все* A_n *- независимые, то* $P(A_n$ *б.ч.*$) = 1$

Доказательство.

1.
$$P(A_n \text{ б.ч.}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k\geqslant n} P(A_k) = 0$$

2.
$$P(A_n \text{ б.ч.}) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(1 - \bigcap_{k\geqslant n}\overline{A}_k\right)$$

Но
$$P\left(\bigcap_{k\geqslant n}\overline{A}_n\right) = |\text{непр. вер. меры}| = \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcap_{k\geqslant n}^{N}\overline{A}_k\right) = \lim_{N\to\infty}\prod_{k=n}^{N} P(\overline{A}_k) =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\prod_{k=n}^{N}(1 - P(A_k)) \leqslant \lim_{N\to\infty}\prod_{k=n}^{N} e^{-P(A_k)} = \lim_{N\to\infty} e^{-\sum\limits_{k=n}^{N} P(A_k)} = e^{-\sum\limits_{k=n}^{+\infty} P(A_k)} = 0$$

т.к. $\forall n : \sum\limits_{k=n}^{\infty} P(A_k) = +\infty$

$\Rightarrow P(A_n \text{ б.ч.}) = 1$

□

Лемма 23. *Пусть* ξ *- неотр. с.в.,* $E\xi$ *- конечно. Тогда*
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geqslant n) \leqslant E\xi \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geqslant n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi \geqslant n)$$

Доказательство.
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geqslant n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(k \leqslant \xi < k+1) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(k \leqslant \xi < k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(k \leqslant \xi < k+1) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} E(kI\{k \leqslant \xi < k+1\}) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} E(\xi I\{k \leqslant \xi < k+1\}) = E\left(\sum_{k=1}^{\infty}\xi I\{k \leqslant \xi < k+1\}\right) =$$
$$= E\xi \leqslant E\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)I\{k \leqslant \xi < k+1\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geqslant n) + \sum_{n=0}^{\infty} P(k \leqslant \xi < k+1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geqslant n) + 1$$

□

Определение 2. Случайные величины ξ и η наз. *одинаково распределенными*, если у них совпадают функции распределения.

Обозначение: $\xi \overset{d}{=} \eta$

Утверждение 4. *Если* $\xi \overset{d}{=} \eta$*, то для* $\forall$ *борелевской* $g(x)$ *т.ч.* $Eg(\xi)$ *конечно, выполнено:*
$$Eg(\xi) = Eg(\eta)$$

Теорема 1 (Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова).

Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *– независимые одинаково распределенные случ. величины (н.о.р.с.в), т.ч:* $E|\xi_i| < +\infty$.

Тогда

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} m = E\xi_1$$

Доказательство. $E|\xi_i|$ – конечно. Тогда по доказанной выше лемме:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_1| \geqslant n) < +\infty$$

В силу одинаковой распределенности:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_1| \geqslant n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| \geqslant n) < +\infty$$

Согласно лемме Бореля-Кантелли:

$$P(\{|\xi_n| \geqslant n\} \text{ б.ч.}) = 0$$

$\Rightarrow$ с вероятностью 1 $\forall n$, кроме конечного числа, выполнено $\{|\xi_n| \leqslant n\}$.

Обозначим $\widetilde{\xi_n} = \xi_n\ I\{|\xi_n| \leqslant n\}$.

Тогда с вероятностью 1, $\widetilde{\xi_n} = \xi_n$, кроме конечного числа элементов.

Считаем, что $E\xi_i = 0$

Получаем, что

$$P\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \to 0\right) = P\left(\frac{\widetilde{\xi_1} + \ldots + \widetilde{\xi_n}}{n} \to 0\right)$$

Рассмотрим $E\widetilde{\xi_n}$:

$$E\widetilde{\xi_n} = E\xi_n\ I\{|\xi_n| \leqslant n\} = E\xi_1\ I\{|\xi_1| < n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} E\xi_1 = 0$$

Согласно лемме Тёплица

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\widetilde{\xi_k} \to 0, \quad \text{при } n \to \infty$$

Значит

$$\frac{\widetilde{\xi_1} + \ldots + \widetilde{\xi_n}}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \Leftrightarrow \frac{(\widetilde{\xi_1} - E\widetilde{\xi_1}) + \ldots + (\widetilde{\xi_n} - E\widetilde{\xi_n})}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$$

Обозначим $\bar{\xi_n} = \widetilde{\xi_n} - E\widetilde{\xi_n}$.

Согласно лемме Кронекера, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\xi_k}}{k}, \quad \text{то} \frac{\bar{\xi_1} + \ldots + \bar{\xi_n}}{n} \to 0$$

(для фикс. $\omega \in \Omega$)

Остается проверить, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\xi_k}}{k}$ сходится с вероятностью 1.

Согласно теореме Колмогорова-Хинчина для этого достаточно показать ($\bar{\xi_k}$ - нез., $E\bar{\xi_k} = 0$), что сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{E\bar{\xi}_k^2}{k^2}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\bar{\xi}_k^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D\widetilde{\xi_k}}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\widetilde{\xi}_k^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} E\xi_k^2 \; I\{|\xi_k| \leqslant k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} E(\xi_1^2 \; I\{|\xi_1| \leqslant k\}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} E(\xi_1^2 \sum_{n=1}^{k} I\{n-1 < |\xi_1| \leqslant n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\xi_1^2 I\{n-1 < |\xi_1| \leqslant n\}) \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\xi_1^2 I\{n-1 < |\xi_1| \leqslant n\} \cdot \frac{2}{n}\right) \leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} E(|\xi_1| I\{n-1 < |\xi_1| \leqslant n\}) =$$
$$= 2E\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_1| I\{n-1 < |\xi_1| \leqslant n\}\right) = 2E|\xi_1| < +\infty$$

□

Замена переменных в интеграле Лебега

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, ξ – с.в. на нем и $E\xi$ – конечно.

Обозначения.

1. *$E\xi = \int\limits_{\Omega} \xi \, dP$ – интеграл Лебега от ξ по вер. мере P.*
2. *$\int\limits_{A} \xi \, dP := E(\xi I_A)$ для $\forall A \in \mathcal{F}$*

Напоминание: Распределение P_ξ – это вероятностная мера на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ ($P_\xi = P(\xi \in B)$)

Для вер. пр-ва $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), P_\xi)$ тоже можно ввести мат. ожидание.

1. $\int\limits_{\mathbb{R}} g(x) P_\xi(dx)$ – мат. ожидание с.в. $g(x)$ на таком пространстве.
2. $$\int_A g(x) P_\xi(dx) := \int_{\mathbb{R}} g(x) I_A(x) P_\xi(dx), \quad \forall A \in B(\mathbb{R})$$
3. Если $F_\xi(x)$ – ф.р. с.в. ξ, то
$$dF_\xi(x) := P_\xi(dx)$$

Вопрос: можно ли вычислить $Eg(\xi)$, зная только ее распределение?

Теорема 1 (замена переменных в интеграле Лебега)**.**
Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – случайный вектор, $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – борелевская функция.
Тогда для $\forall B \in B(\mathbb{R})$ выполнено:

$$E(g(\xi)) I\{\xi \in B\} \overset{\text{def}}{=} \int_{\{\xi \in B\}} g(\xi) dP = \int_B g(x) P_\xi(dx)$$

Доказательство. Пусть g – простая: $g(x) = I_A(x)$ для $A \in B(\mathbb{R}^n)$.

Тогда

$$Eg(\xi)I\{\xi \in B\} = EI\{\xi \in A\}I\{\xi \in B\} = EI\{\xi \in A \cap B\} =$$
$$= \int\limits_{A\cap B} P_\xi(dx) = \int\limits_B I_A(x)P_\xi(dx) = \int\limits_B g(x)P_\xi(dx)$$

Если функция $g(x)$ – простая неотрицательна, то искомое равенство следует из линейности мат. ожидания. Если $g(x)$ – произвольная неотрицательная, то рассмотрим последовательность простых неотриц. $g_n(x)$ т.ч. $g_n(x) \uparrow g(x)$.

Тогда по теореме о монотонной сходимости:

$$Eg_n(\xi)I\{\xi \in B\} \xrightarrow[n\to\infty]{} Eg(\xi)I\{\xi \in B\}$$
$$\int\limits_B g_n(x)P_\xi(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_B g(x)P_\xi(dx)$$

$\Rightarrow$ доказано для неотриц. $g(x)$.

В общем случае, пользуемся разложением $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$ и линейностью математического ожидания. □

Следствие 1.

1. *Для вычисления $Eg(\xi)$ достаточно знать только распределение ξ.*

2. *Для $\forall$ борелевской $g(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\forall$ случ. вектора ξ из $\mathbb{R}^n$:*

$$Eg(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)P_\xi(dx)$$

Доказательство. Достаточно положить $B = \mathbb{R}^n$ в теореме. □

3. *Если ξ – с.в., то*

$$E\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} xP_\xi(dx)$$

Доказательство. Достаточно положить $g(x) = x$ в 2 □

4. *Если $\xi \overset{d}{=} \eta$ – одинаково распределены, то для $\forall$ борелевской $g(x)$:* $\quad Eg(\xi) = Eg(\eta)$

Доказательство.

$$Eg(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)P_\xi(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)P_\eta(dx) = Eg(\eta)$$

□

5. *Пусть ξ – дискретная с.в. со значениями в $\mathcal{X} = \{x_i\}_{i=1}^\infty$.*
Тогда для $\forall$ борелевской функции $g(x)$:

$$Eg(\xi) = \sum_{i=1}^\infty g(x_i)P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^\infty g(x_i)P_\xi(\{x_i\})$$

Доказательство. Если $g(x) \geqslant 0$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} g(x_i) I\{\xi = x_i\} \uparrow g(\xi)$

$\Rightarrow$ по теореме о монотонной сходимости:

$$Eg(\xi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i) P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) P(\xi = x_i)$$

В общем, раскладываем $g(x)$ на g^+ и g^- и пользуемся линейностью мат. ожидания. □

Следствие 2. *если P_ξ – дискр. распр. на $\mathcal{X} = \{x_i\}$, то*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(x) P_\xi(dx) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) P_\xi(\{x_i\}) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) dF_\xi(x)$$

Пример 14. Пусть $\xi \sim Pois(\lambda)$. Найти $E\xi =?$

$$\xi \sim Pois(\lambda) \Rightarrow P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \text{для } \forall k \in \mathbb{Z}_+$$

Тогда

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda$$

6 *Пусть ξ – абсолютно непрерывная с.в. с плотностью $f_\xi(x)$.*
Тогда для $\forall g(x)$ – борелевской функции:

$$Eg(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) f_\xi(x) dx$$

Доказательство. Пусть F_ξ – ф.р. ξ. Тогда по определению плотности,

$$P(\xi \leqslant x) = F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(y) dy$$

С другой стороны,

$$P(\xi \leqslant x) = P_\xi((-\infty, x]) = \int\limits_{-\infty}^{x} P_\xi(dy)$$

$$\Rightarrow P_\xi(dy) = f_\xi(y) dy$$

В итоге,

$$Eg(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) P_\xi(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) f_\xi(x) dx$$

□

Пример 15. Пусть $\xi \sim N(a, \sigma^2)$. Вычислить $E\xi$.

Плотность $N(a, \sigma^2)$ равна:

$$f_\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Тогда

$$\Rightarrow E\xi = \int\limits_R x f_\xi(x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} (x-a) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx + a \int\limits_{\mathbb{R}} f_\xi(x) dx = a$$

Замечание. Если $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – случайный вектор с плотностью $f_\xi(x_1, \ldots, x_n)$, то для $\forall g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – борелевской функции:

$$Eg(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \ldots, x_n) f_\xi(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

Пример 16. Если (ξ, η) имеет плотность $f_{(\xi,\eta)}(x, y)$, то

$$E\xi\eta = \int\limits_{\mathbb{R}^2} xy f_{(\xi,\eta)}(x, y) dx dy$$

Прямое произведение вероятностных пространств

Определение 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}_1, P_1)$ и $(\Omega, \mathcal{F}_2, P_2)$ – два вероятностных пространства. Тогда вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ наз. их *прямым произведением*, если

- $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$
- $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, т.е.

  $\mathcal{F} = \sigma(\{ B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathcal{F}_1, B_2 \in \mathcal{F}_2 \})$
- $P = P_1 \otimes P_2$, т.е.

  P – это продолжение меры $P_1 \times P_2$, заданной на прямоугольниках $B_1 \times B_2$, $B_i \in \mathcal{F}_i$ по правилу $P(B_1 \times B_2) = P_1(B_1) \cdot P_2(B_2)$

Такое продолжение $\exists$ и единственно по теореме Каратеодори.

Теорема 1 (Фубини)**.**

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – прямое произведение $(\Omega, \mathcal{F}_1, P_1)$ и $(\Omega, \mathcal{F}_2, P_2)$.

Пусть с.в $\xi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ т.ч. $\int\limits_\Omega |\xi(\omega_1, \omega_2)| dP < +\infty$

Тогда интегралы $\int\limits_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) dP_1$ и $\int\limits_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) dP_2$ определены почти наверное относительно P_2 и P_1, являются измеримыми отностительно $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1$ соотв., и кроме того,

$$\int\limits_\Omega \xi(\omega_1, \omega_2) dP = \int\limits_{\Omega_1} \int\limits_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) dP_2 dP_1 = \int\limits_{\Omega_2} \int\limits_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) dP_1 dP_2$$

Смысл теоремы: Двойной интеграл = повторному интегралу

Утверждение 5. *Пусть ξ, η – независ. с.в.*

Тогда $(\mathbb{R}^2, B(\mathbb{R}^2), P_{(\xi,\eta)})$ явл. прямым произведением $(\mathbb{R}^2, B(\mathbb{R}^2), P_\xi)$ и $(\mathbb{R}^2, B(\mathbb{R}^2), P_\eta)$

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\
&B(\mathbb{R}^2) = B(\mathbb{R}) \otimes B(\mathbb{R}) \\
&P_{(\xi,\eta)}(B_1 \times B_2) = P_\xi(B_1) \cdot P_\eta(B_2)?
\end{aligned}
$$

Действительно,

$$
\begin{aligned}
&P_{(\xi,\eta)}(B_1 \times B_2) = P((\xi,\eta) \in B_1 \times B_2) = P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = |\text{независимость}| = \\
&= P(\xi \in B_1) \cdot P(\eta \in B_2) = P_\xi(B_1) \cdot P_\eta(B_2).
\end{aligned}
$$

□

Лемма 24 (О свертке распределений)**.**
Пусть ξ, η – нез. с.в. с ф.р. F_ξ и F_η.
Тогда:

1.

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x)dF_\eta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\eta(z-x)dF_\eta(x)$$

2. Если ξ имеет плотность $f_\xi(x)$, $\quad \eta$ – плотность $f_\eta(x)$, то $\xi+\eta$ имеет плотность

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\xi(z-x)f_\eta(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\eta(z-x)f_\xi(x)dx$$

Доказательство.

1.

$$
\begin{aligned}
&F_{\xi+\eta}(z) = P(\xi+\eta \leqslant z) = EI\{\xi+\eta \leqslant z\} = |\text{ф-ла замены переменных}| = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} I\{x+y \leqslant z\} P_{(\xi,\eta)}(dx,dy) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} I\{x+y \leqslant z\} P_\xi(dx) P_\eta(dy) = |\text{теор. Фубини}| = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} I\{x+y \leqslant z\} P_\xi(dx) \right) P_\eta(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}} P(\xi + y \leqslant z) P_\eta(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\eta(z-y) dF_\eta(dy)
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
&F_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} I\{x+y \leqslant z\} P_\xi(dx) P_\eta(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} I\{x+y \leqslant z\} f_\xi(x) f_\eta(y) dx dy = \\
&= \left| t = x+y, x' = x \right| = \int\limits_{\mathbb{R}^2} I\{t \leqslant z\} f_\xi(x') f_\eta(t-x') dx' dt = |\text{теорема Фубини}| = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{z} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f_\xi(x') f_\eta(t-x') dx' \right) dt = \int\limits_{-\infty}^{z} f_{\xi+\eta}(t) dt
\end{aligned}
$$

□

Замечание:
Если $\xi_1 \ldots \xi_n$ – незав. с.в., то $P_{(\xi_1,\ldots,\xi_n)} = P_{\xi_1} \otimes \ldots \otimes P_{\xi_n}$,
$dF_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1 \ldots x_n) = dF_{\xi_1}(x_1) \ldots dF_{\xi_n}(x_n)$

и если ξ_i имеет плотность $f_{\xi_i}(x_i)$, то вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ тоже имеет плотность

$$f_\xi(x_1 \dots x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{\xi_n}(x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_\xi(x_1 \dots x_n)$$

Слабая сходимость вероятностный мер

Определение 1. Последовательность $\{F_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ функций распределения на $\mathbb{R}$ назыв. *слабо сходящейся* к функции распределения $F(x)$, если $\forall f(x)$ – огр. непрер. функции на $\mathbb{R}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x) dF_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) dF(x)$$

Обозначение 1. $F_n \xrightarrow{w} F$

Следствие 1. *С.в.* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F_\xi$

Доказательство.

$$Ef(\xi_n) = |\text{замена переменной}| = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) dF_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} Ef(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) dF_\xi(x)$$

□

Определение 2. Последовательность $\{F_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ – функций распределения на $\mathbb{R}$ называется *сходящейся в основном* к функции распределения $F(x)$, если $\forall x \in \mathbb{C}(F)$:

$$F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$$

где $\mathbb{C}(F)$ – множество точек непр. функции $F(x)$

Обозначение 2. $F_n \Rightarrow F$

Пусть $\{P_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, P – вероятностная мера в $(\mathbb{R}^m, B(\mathbb{R}^m))$

Определение 3. Последовательность P_n наз. *слабо сходящейся* к вер. мере P, если $\forall f(x)$ – ограничен. непр. ф-ии в $\mathbb{R}^m$ выполнено:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) P_n(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) P(dx)$$

Обозначение 3. $P_n \xrightarrow{w} P$

Следствие 2. *С.в.* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F_\xi \Leftrightarrow P_{\xi_n} \xrightarrow{w} P_\xi$

Определение 4. Последовательность P_n сходится к вер. мере P в основном, если для $\forall A \in B(\mathbb{R}^m)$ с условием $P(\partial A) = 0$ выполнено:

$$P_n(A) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(A)$$

Обозначение 4. $P_n \Rightarrow P$

Теорема 1 (Александров).
Для вер. мер в $\mathbb{R}^m$ *следующие условия эквивалентны*

1. $P_n \xrightarrow{w} P$

2. $\overline{\lim\limits_n} P_n(A) \leqslant P(A), \quad \forall$ *замкнутого* A

3. $\underline{\lim\limits_n} P_n(A) \geqslant P(A), \quad \forall$ *открытого* A

4. $P_n \Rightarrow P$

Теорема 2 (Эквивательность пределений сходимости).

Пусть $\{P_n,\ n \in \mathbb{N}\}, P$ *– вероятностные меры на* $\mathbb{R}$*,* $\{F_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}, F(x)$ *– соответств. им функции распределения.*

Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $P_n \xrightarrow{w} P$

2. $P_n \Rightarrow P$

3. $F_n \xrightarrow{w} P$

4. $F_n \Rightarrow F$

Доказательство. По теореме Александрова достаточно проверить, что (2) эквивалентно (4).

$(2) \Rightarrow (4)$:

Пусть $x \in \mathbb{C}(F)$

Тогда $\partial((-\infty; x]) = \{x\}$.

Значит,

$$F_n(x) = P_n((-\infty; x]) \xrightarrow[P_n \to P]{} P((-\infty; x]) = F(x)$$

$(4) \Rightarrow (2)$:

Для установления (2) по теореме Александрова достаточно проверить, что $\underline{\lim\limits_n} P_n(A) \geqslant P(A), \forall A$ – откр. из $\mathbb{R}$

Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – открыто, тогда $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$, где $I_k = (a_k, b_k)$ – непересек. интервалы.

Для $\forall \varepsilon > 0$ выберем $I'_k = (a'_k, b'_k] \subset I_k$, т.ч. a'_k, b'_k – точки непрерывности $F(x)$ и

$$P(I'_k) \geqslant P(I_k) - \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Такой выбор $(a'_k, b'_k]$ возьмем в силу непр. вер. меры и того факта, что $F(x)$ имеет не более чем счетное число точек разрыва. Тогда

$$\underline{\lim_n} P_n(A) = \underline{\lim_n} \sum_{k=1}^{\infty} P_n(I_k) \geqslant |\forall N| \geqslant \underline{\lim_n} \sum_{k=1}^{N} P_n(I_k) \geqslant \sum_{k=1}^{N} \underline{\lim_n} P_n(I_k)$$

Устремим $N \to \infty$:

$$\underline{\lim_n} P_n(A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\lim_n} P_n(I_k) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\lim_n} P_n(I'_k) =$$

Но $P_n(I'_k) = P((a'_k, b'_k])) = F_n(b'_k) - F_n(a'_k) \xrightarrow[n \to \infty]{} F(b'_k) - F(a'_k)$, так как a'_k, b'_k – точки непр. $F(x)$. Значит $F_n \Rightarrow F$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (F(b'_k) - F(a'_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} P((a'_k, b'_k]) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} (P(I_k) - \frac{\varepsilon}{2^k}) = P(A) - \varepsilon$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, $\underline{\lim\limits_n} P_n(A) \geqslant P(A)$

$\square$

Следствие 3. *Пусть* $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, ξ *– с.в. Тогда* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow F_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_\xi(x)$ *для* $\forall x \in \mathbb{C}(F_\xi)$

Смысл сходимости по распределению:

Это апроксимация распределений.

Пусть η – нек. с.в. со "сложным"распр. (сложно вычислить ф.р. η).

Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, где распр. ξ "легко"вычислить(или оно известно).

Если $\xi_m \overset{d}{=} \eta$ для достаточно большого номера m, то ф.р. η можно апроксимировать ф.р. ξ.

Предельные теоремы для схемы Бернулли

Описание модели: проводим большое число независимых однородных случ. экспериментов, в которых мы фиксируем "успех"или "неудачу".

Нас интересует распределение числа успехов при проведении большого числа экспериментов.

Математическая модель:

$\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – нез. с.в. $P(\xi_n = 1) = p,\ P(\xi_n = 0) = 1 - p = q$

Определение 1. Распределение ξ_n наз. распр. Бернулли.

Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ – число "успехов"после проведения n испытаний.

Теорема 1 (Бернулли, 1703, ЗБЧ)**.** $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{p} p$

Несмотря на то, что распр. S_n известно, практическое вычисление вероятностей вида $P(a \leqslant S_n \leqslant b)$ при очень больших n затруднительно.

Теорема 2 (Пуассон)**.**

Если $np(n) \to \lambda > 0$, *то* $\forall k \in \mathbb{Z}_+$

$$P(S_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Доказательство.

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{k!}(np)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} (1-p)^n (1-p)^{-k}$$
$$= \frac{1}{k!}(\lambda + o(1))^k e^{-\lambda} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$$

□

Следствие 1. *Если* $\xi_n \sim Bin(n, p(n))$, *где* $np(n) \to \lambda > 0$, *то* $\xi_n \xrightarrow{d} \eta \sim Pois(\lambda)$

Доказательство. $\xi_n \xrightarrow{d} \eta \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}(F_\eta) : F_{\xi_n}(x) \to F_\eta(x)$ Но ξ_n и η принимает значения $\mathbb{Z}_+ \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_+ :$

$$F_{\xi_n}(x) = \sum_{\substack{k \leqslant x \\ k \in \mathbb{Z}_+}} P(\xi_n = k) \to |\text{по теор. Пуассона}| \to \sum_{\substack{k \leqslant x \\ k \in \mathbb{Z}_+}} P(\eta = k) = F_\eta(x)$$

□

Теорема 3 (Муавр-Лаплас).
Пусть $p = const$, $S_n \sim Bin(n,p)$. *Обозначим для* $\forall -\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$

$$P_n(a,b) = P\left(a \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\right)$$

Тогда имеет место сходимость:

$$\sup_{-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty} \left| P_n(a,b) - \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Следствие 2. *В условиях теоремы Муавра-Лапласа*

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{d} \eta \sim N(0,1)$$

Доказательство. Обозначим $\xi_n := \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$

Тогда $\xi_n \xrightarrow{d} \eta \sim N(0,1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

$$F_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_\eta(x) = \int\limits_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Но теорема Муавра-Лапласса именно это и утверждает □

Характеристические функции

Определение 1. Характеристической функцией с.в. ξ называется

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Замечание. Характеристическая функция, вообще говоря, явл. комплекснозначной. Мы понимаем $Ee^{it\xi}$ как

$$Ee^{it\xi} = E\cos(t\xi) + iE\sin(t\xi)$$

Определение 2. Пусть $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – функция распределения на $\mathbb{R}$
Её характеристической функцией наз.

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{it\xi} dF(x)$$

Если P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, то её характеристической ф-ей наз.

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{it\xi} P(dx)$$

Следствие 1. $\varphi_\xi(t)$ – *х.ф. с.в.* $\xi \Leftrightarrow \varphi_\xi(t)$ – *х.ф.* $F_\xi(x) \Leftrightarrow \varphi_\xi(t)$ – *х.ф.* P_ξ *(распр.* ξ*)*

Доказательство.

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} P_\xi(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_\xi(x)$$

□

Определение 3. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – случайный вектор. Его характеристической функцией наз.

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{i\langle t\xi\rangle}, \text{ где } t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ а } \langle t, \xi\rangle = \sum_{i=1}^{n} t_i \xi_i$$

Определение 4. Пусть $F(x),\ x \in \mathbb{R}$ – функция распр. в $\mathbb{R}^n$.

Её х.ф. наз.

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} dF(x), \quad t \in \mathbb{R}^n$$

Если P – вероятносная мера в $\mathbb{R}^n$, то её х.ф. наз

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} P(dx), \quad t \in \mathbb{R}^n$$

Следствие 2. *Если* $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ *– сл. вектор, то* $\varphi_\xi(t)$ *– х.ф.* $\xi \Leftrightarrow \varphi_\xi(t)$ *– х.ф.* $F_\xi(x), x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ $\varphi_\xi(t)$ *– х.ф.* P_ξ

Пример 17.

1. $\xi \sim Bern(p)$, бернуллевская с.в., $P(\xi = 1) = p, \quad P(\xi = 0) = 1 - p.$

   Тогда

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = e^{it}P(\xi = 1) + e^{it0}P(\xi = 0) = pe^{it} + 1 - p$$

2. $\xi \sim Pois(\lambda)$, пуассоновская с.в.

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!}\right) e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

3. $\xi \sim Exp(\lambda)$ экспоненциальная с.в.

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \int\limits_0^{+\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int\limits_0^{+\infty} e^{(it-\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Основные свойства характеристических функций

1) Пусть $\varphi(t)$ – х.ф. с.в. ξ.

   Тогда $|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0) = 1,\ \forall t \in \mathbb{R}$

   Доказательство.

$$|\varphi(t)| = |Ee^{it\xi}| \leqslant E|e^{it\xi}| = 1 = \varphi(0)$$

□

2) Пусть $\varphi(t)$ – хар. ф. с.в. ξ, а $\eta = a\xi + b,\ a, b \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\varphi_\eta(t) = e^{itb} \varphi_\xi(ta)$$

   Доказательство.

$$\varphi_\eta(t) = Ee^{it\eta} = Ee^{it(a\xi+b)} = e^{itb} E\varphi_{i(at)\xi} = e^{itb} \varphi_\xi(at)$$

□

(3) Пусть $\varphi(t)$ – х.ф.с.в. ξ. Тогда $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Доказательство.

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)| = \left|Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}\right| = \left|E(e^{i(t+h)\xi} - e^{it\xi})\right| = \left|E(e^{it\xi}(e^{ih\xi}-1))\right| = E|e^{ih\xi}-1|$$

При $h \to 0,\ e^{ih\xi} - 1 \to 0$ п.н.

Кроме того, $E|e^{ih\xi}-1| \leqslant 2 \Rightarrow$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости:

$E|e^{ih\xi}-1| \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \Rightarrow \varphi(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. □

(4) Пусть $\varphi(t)$ – х.ф. с. в. ξ. Тогда $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$

Доказательство.

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = Ee^{conj-it\xi} = \overline{Ee^{-it\xi}} = \overline{\varphi(-t)}$$

□

(5) Пусть $\varphi(t)$ – х.ф. с.в. ξ. Тогда $\varphi(t)$ – действительнозначная $\Leftrightarrow$ распределение ξ симметрично, т.е. $\forall B \in B(\mathbb{R})$

$$P(\xi \in B) = P(\xi \in -B)$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть распр. ξ – симметрично. Тогда $\xi \overset{d}{=} -\xi \Rightarrow$

$$Esin(t\xi) = Esin(-t\xi) = -Esin(t\xi)$$
$$\Rightarrow Esin(t\xi) = 0 \Rightarrow \varphi(t) = Ee^{it\xi} = Ecos(t\xi) \in \mathbb{R}$$

– действительнозначная.

($\Rightarrow$) Пусть $\varphi(t) \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Тогда по свойствам (2) и (4).

$$\varphi(t) = \varphi_\xi(t) = \overline{\varphi_\xi(-t)} = \varphi_\xi(-t) = \varphi_{-\xi}(t)$$

т.е. у ξ и у $-\xi$ одинаковая х.ф. $\Rightarrow$ по теореме о единственности функции распр. ξ и $-\xi$ совпадают.

$\Rightarrow \xi \overset{d}{=} -\xi$ и, значит, для $\forall B \in B(\mathbb{R})$:

$$P(\xi \in B) = P(-\xi \in B) = P(\xi \in -B)$$

□

(6) Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые с.в., $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ Тогда

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1} \varphi_{\xi_k}(t)$$

Доказательство.

$$\varphi_{S_n}(t) = Ee^{iS_nt} = Ee^{i\xi_1 t}\ldots e^{i\xi_n t} = |\text{с.в независимы} \Rightarrow e^{\text{с.в}}\text{ независимы}| =$$
$$= \left(Ee^{i\xi t}\right)\ldots\left(Ee^{i\xi_n t}\right) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t)$$

□

Теорема 1 (о производных х.ф.).

Пусть $E|\xi|^n < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда для* $\forall r \leqslant n : \exists \varphi_\xi^{(r)}(t)$, *причем*

1. $\varphi_\xi^{(r)}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} (ix)^r e^{itx} P_\xi(dx)$

2. $E\xi^r = \dfrac{\varphi_\xi^{(r)}(0)}{i^r}$

3. $\varphi_\xi(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \dfrac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t)$

   где $|\varepsilon_n(t)| \leqslant 3E|\xi|^n$ *и* $\varepsilon_n(t) \to 0$, *при* $t \to 0$

Доказательство.

1. Заметим, что $E|\xi|^r$ конечно для $\forall r \leqslant n$ т.к. $|\xi|^r \leqslant |\xi|^n + 1$

   Рассмотрим

$$\frac{\varphi_\xi(t+h) - \varphi_\xi(t)}{h} = \frac{Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}}{h} = E\left(e^{it\xi}\,\frac{e^{ih\xi}-1}{h}\right)$$

   При $h \to 0$, $\dfrac{e^{ih\xi}-1}{h} \to i\xi$ п.н., кроме того $\left|\dfrac{e^{ih\xi}-1}{h}\right| \leqslant |\xi|$

   $\Rightarrow$ по теореме Лебега.

$$E\left(e^{it\xi}\,\frac{e^{ih\xi}-1}{h}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} E(i\xi e^{it\xi}) = \int\limits_{\mathbb{R}} (ix)e^{itx}P_\xi(dx) = \varphi'_\xi(t)$$

   Установление формулы для $\varphi_\xi^{(r)}$ при $r > 1$ проводится по индукции аналогично.

2. Формула $E\xi^k = \dfrac{\varphi_\xi^{(r)}(0)}{i^r}$ сразу следует из формулы для $\varphi_\xi^{(r)}$

3. Имеет место разложение:

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} + \frac{(iy)^n}{n!}(\cos\theta_1 y + i\sin\theta_2 y)$$

   где $|\theta_1| \leqslant 1, |\theta_2| \leqslant 1$.

   Тогда

$$e^{it\xi(\omega)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it\xi)^k}{k!} + \frac{(it\xi)^n}{n!}(\cos(\theta_1(\omega)t\xi(\omega)) + i\sin(\theta_1(\omega)t\xi(\omega)))$$

$$\Rightarrow \varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!}E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!}E(\xi^n(\cos(\theta_1 t\xi) + i\sin(\theta_1 t\xi)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t)$$

   где $\varepsilon_n(t) = E(\xi^n(\cos(\theta_1 t\xi) + i\sin(\theta_1 t\xi) - 1))$

   Легко увидеть, что $|\varepsilon_n(t)| \leqslant 3E|\xi|^n$ и $E(\xi^n(\cos(\theta_1 t\xi) + i\sin(\theta_1 t\xi) - 1)) \to 0,\ t \to 0$

   По теореме Лебега, $\varepsilon_n(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

$\square$

Теорема 2 (о разложении в ряд х.ф.).

Пусть ξ – с.в. такова, что $E|\xi|^n < +\infty$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Если для некоторго $T > 0$ выполнено

$$\overline{\lim_n} \left(E\frac{|\xi|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{T},$$

то для $\forall t : |t| < T$, выполнено

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}$$

Доказательство.

Пусть t_0 такое, что $|t_0| < T$. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(E\frac{|\xi|^n |t_0|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} < \frac{|t_0|}{T} < 1$$

По принципу Коши ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{E|\xi|^n |t_0|^n}{n!} \text{ сходится.}$$

Рассмотрим t т.ч. $|t| < |t_0|$:

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t) \qquad (*)$$

Но $|R_n(t)| \leqslant \dfrac{|t|^n}{n!} 3E|\xi|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Устремляя $n \to \infty$ в $(*)$ получаем

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} E\xi^n$$

В силу произвольности t_0 с условием $|t_0| < T$, получаем, что разложение верно для всех $t \in (-T, T)$ $\square$

Пример 18. Пусть $\xi \sim N(0,1)$. Тогда $\varphi_\xi = e^{\frac{-t^2}{2}}$

Доказательство. Посчитаем моменты с.в. ξ.

$$E\xi^m = \int\limits_{\mathbb{R}} x^m \frac{1}{\sqrt(2\pi)} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

Если m - нечетно, то $E\xi^m = 0$

Если же m - четно, то

$$E\xi^m = 2\int\limits_0^{+\infty} x^m \frac{1}{\sqrt{2\xi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left| y = \frac{x^2}{2} \right| = 2\int\limits_0^{+\infty} (2y)^{m/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y} \frac{dy}{\sqrt{2y}}$$

$$= 2^{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} y^{\frac{m-1}{2}} e^{-y} dy = 2^{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) = 2^{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2^{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(m-1)!!}{2^{m/2}} \sqrt{\pi} = (m-1)!!$$

Рассмотрим

$$\varlimsup_n \left(\frac{E|\xi|^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \varlimsup_n \left(\frac{E|\xi|^{2n}}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{2n}} = \varlimsup_n \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{2n}} = \varlimsup_n \left(\frac{1}{(2n)!!}\right)^{\frac{1}{2n}}$$
$$= \varlimsup_n \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^{\frac{1}{2n}} = |\text{ф-ла Стирлинга}| = \varlimsup_n \left(\frac{e^n}{2^n n^n}\right)^{\frac{1}{2n}} = 0 < \frac{1}{T},\ \forall T$$

$\Rightarrow \varphi_\xi(t)$ разлагается в ряд на всей прямой.

Осталось его посчитать

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(it)^{2m}}{(2m)!} E\xi^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^m}{(2m)!}(2m-1)!!$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^m}{(2m)!!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^m}{2^m m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{-t^2}{2}\right)^m \cdot \frac{1}{m!} = e^{-t^2/2}$$

□

Следствие 3. *Пусть $\xi \sim N(a, \sigma^2)$. Тогда*

$$\varphi_\xi(t) = e^{ita - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

Доказательство. Если $\xi \sim N(a, \sigma^2)$, то $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$\Rightarrow \varphi_\xi(t) = e^{ita}\varphi_\eta(t\sigma) = e^{ita - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$ □

Теорема 3 (единственности)**.**

Пусть $F(x), G(x)$ – функции распределения на прямой. Если характеристические функции F и G совпадают, то $F = G$.

Доказательство. Пусть $a < b \in \mathbb{R}$. Для $\forall \varepsilon > 0$ рассмотрим функцию $f_\varepsilon(x)$:

Докажем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon dG(x)$$

Рассмотрим отрезок $[-n, n],\ n \in \mathbb{N}$ т.ч. $[-n, n] \supset [a, b + \varepsilon]$.

По теореме Вейерштрасса $f_\xi(x)$ равномерно приближается тригонометрическими многочленами от $\frac{x\pi}{n}$, т.е.

$$\exists f_\varepsilon^n(x) = \sum_{k \in K} a_k e^{i\frac{k\pi x}{n}},\ a_k \in \mathbb{R},\ K \text{ – конечное подмно-во } \mathbb{Z}$$

т.ч. $|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon^n(x)| \leqslant \frac{1}{n},\ \forall x \in [-n, n]$

Заметим, что $f_\varepsilon^n(x)$ явл. периодической с периодом $2n$

$\Rightarrow$ т.к. $|f_\varepsilon^n(x)| \leqslant 2$ для $\forall x \in [-n, n]$, то $|f(x)| \leqslant 1$ и $|f_\varepsilon^n(x)| \leqslant 2$, для $\forall x \in \mathbb{R}$.

По условию $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} dG(x)$$
$$\Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dG(x)$$

Теперь оценим:

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dF(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dG(x)\right| \leqslant \left|\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x)dF(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x)dG(x)\right| +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}} (f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon^n(x))dF(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} (f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon^n(x))dG(x) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n}\int\limits_{[-n,n]} dF(x) + \frac{1}{n}\int\limits_{[-n,n]} dG(x) + 2\left(\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} dF(x) + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} dG(x)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{n} + 2\left(\int\limits_{-\infty}^{-n} dF(x) + \int\limits_{n}^{+\infty} dF(x) + \int\limits_{-\infty}^{-n} dG(x) + \int\limits_{n}^{+\infty} dG(x)\right) =$$
$$= \frac{2}{n} + 2(F(-n) + 1 - F(n) + G(-n) + 1 - G(n)) \to 0, \text{ при } n \to \infty$$

Отсюда получаем, что $\forall\varepsilon$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dG(x)$$

При $\varepsilon \to 0, f_\varepsilon(x) \to I_{(a,b]}(x)$

При этом $|f_\varepsilon(x)| \leqslant 1$ для $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ по теореме Лебега

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dF(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int\limits_{\mathbb{R}} I_{(a,b]}dF(x) = F(b) - F(a)$$

Следовательно, для $\forall a < b:$

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

Устремим $a \to -\infty, \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = G(x)$$

□

Пример 19. Пусть ξ_1, ξ_2 – нез. с.в., $\xi_i \sim N(a_i, \sigma_i^2$. Тогда $\xi_1 + \xi_2 \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Доказательство. х.ф.

$$\varphi_{\xi_j}(t) = e^{ia_jt - \frac{1}{2}\sigma_j^2t^2}$$
$$\Rightarrow \varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = |\text{нез.}| = \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t) = e^{i(a_1+a_2)t - \frac{1}{2}t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}$$

– х.ф $N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

По теореме о единственности $\xi_1 + \xi_2 \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ □

Теорема 4 (критерий независимости компонент случайного вектора)**.** *Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – случайный вектор. Тогда $\xi_1 \ldots \xi_n$ – независимы в совокупности $\Leftrightarrow$ х.ф. вектора ξ распадается в произведение х.ф. ξ_j :*

$$\varphi_\xi(t_1, \ldots, t_n) = \varphi_{\xi_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_{\xi_n}(t_n)$$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\xi_1 \dots \xi_n$ – независимы. Тогда

$$\varphi_\xi(t_1 \dots t_n) = Ee^{i\sum_{k=1}^n \xi_k t_k} = E(e^{it_1\xi_1} \dots e^{it_n\xi_n}) = \prod_{k=1}^n Ee^{it_k\xi_k} = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k)$$

($\Leftarrow$) Пусть $F_1, \dots, F_n$ – функции распределения $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Рассмотрим $G(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n)$ Посчитаем её х.ф.:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} dG(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t,x\rangle} dF_1(x_1) \dots dF_n(x_n) = |\text{теорема Фубини}| =$$
$$= \prod_{k=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{it_kx_k} dF_k(x_k) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k) = \varphi_\xi(t_1 \dots t_n)$$

Но φ – х.ф. вектора ξ. $\Rightarrow$ она является х.ф. ф.р. $F_\xi(x_1 \dots x_n)$.

По теореме о единственности

$$F_\xi(x_1 \dots x_n) = G(x_1 \dots x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n)$$

По критерию независимости для ф.р. получаем, что $\xi_1 \dots \xi_n$ независимы в совокупности.

□

Теорема 5 (формула обращения)**.**
Пусть $\varphi(t)$ – х.ф. ф.р. $F(x)$ Тогда

1. *Для $\forall a < b$, $a, b \in \mathbb{C}(F)$ – точки непрерывности $F(x)$, выполнено:*

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \to +\infty} \int\limits_{-c}^{c} \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{it} \varphi(t) dt$$

2. *Если $\int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < +\infty$, то у $F(x)$ $\exists$ плотность $f(x)$ и*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

Пример 20. Пусть ξ имеет распр. Коши

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

Найти х.ф. ξ.

Доказательство. Пусть η имеет распр. Лапласа, $p_\eta(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$

Тогда $\varphi_\eta(t) = \frac{1}{1+t^2}$, и $\int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < +\infty$

$\Rightarrow$ по формуле обращения

$$p_\eta(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-itx} \frac{1}{\pi(1 + t^2)} dt = \frac{1}{2} \varphi_\xi(-x)$$
$$\Rightarrow \varphi_\xi(t) = e^{-|t|}$$

□

Как понять, является ли функция характеристической?

Определение 5. Функция $(\varphi(t), t \in \mathbb{R})$ наз. *неотрицательно определенной*, если $\forall t_1 \dots t_n \in \mathbb{R}\ z_1 \dots z_n \in \mathbb{C}$ выполнено:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varphi(t_i - t_j) z_i \overline{z_j} \geqslant 0$$

Теорема 6 (Бонхер - Хинчин).

Пусть $\varphi(t), t \in \mathbb{R}$ – непрерывна в нуле и $\varphi(0) = 1$. Тогда $\varphi(t)$ явл. хар. функцией $\Leftrightarrow$ $\varphi(t)$ неотрицательно определена.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\varphi(t)$ – х.ф. с.в. ξ. Тогда $\forall t_1 \dots t_n \in \mathbb{R}$, $\forall z_1 \dots z_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{j,k=1}^{n} \varphi(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} = \sum_{j,k=1}^{n} E e^{i(t_j - t_k)\xi} z_j \overline{z_k} = E\left(\sum_{j,k=1}^{n} e^{it_j\xi} z_j e^{-it_k\xi} \overline{z_k}\right) =$$

$$= E\left(\sum_{j,k=1}^{n} (e^{it_j\xi} z_j) \overline{(e^{it_k\xi} z_k)}\right) = E\left(\sum_{j}(e^{it_j\xi} z_j)\right) \cdot \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} e^{it_k\xi} z_k\right)} = E\left|\sum_{j=1}^{n} e^{it_j\xi} z_j\right|^2 \geqslant 0$$

□

Следствие 4. *Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – две х.ф., то $\forall \alpha \in (0,1)$:*

$$\alpha\varphi(t) + (1-\alpha)\psi(t) \text{ – тоже х.ф.}$$

Теорема 7 (непрерывности).

Пусть $\{F_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность ф.р. на $\mathbb{R}$, а $\{\varphi_n(t),\ n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность их х.ф.

Тогда

1. *Если $F_n \xrightarrow{w} F$, где $F(x)$ – ф.р. на $\mathbb{R}$, то для $\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_n(t) \to \varphi(t)$ при $n \to \infty$, где $\varphi(t)$ - х.ф. $F(x)$*
2. *Пусть для $\forall t \in \mathbb{R}$ $\exists$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$, причем $\varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ непрерывна в нуле. Тогда $\exists$ ф.р. $F(x)$ т.ч. $F_n \xrightarrow{w} F$ и $\varphi(t)$ - х.ф. $F(x)$*

Доказательство. 1. Если $F_n \xrightarrow{w} F$, то $\forall f(x)$ – огр. непр. выполнено:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dF_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x)$$

Функции $\cos tx$ и $\sin tx$ – огр. и непр., тогда

$$\varphi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos tx\, dF_n(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin tx\, dF_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} \cos tx\, dF(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin tx\, dF(x) = \varphi(t)$$

□

Следствие 5. *С.в.* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : \varphi_{\xi_n}(t) \to \varphi_\xi(t)$

Доказательство. $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F_\xi \Leftrightarrow \varphi_{\xi_n}(t) \to \varphi_\xi(t)$ для $\forall t \in \mathbb{R}$. □

Теорема 8 (Центральная предельна теорема).

Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *– последовательность независимых одинаково распределенных с.в. т.ч.* $0 < D\xi_n < +\infty$.

Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ *Тогда*

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Доказательство.

Обозначим $a = E\xi_i, \sigma^2 = D\xi_i$. Рассмотрим $\eta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma} \Rightarrow E\eta_i = 0, D\eta_i = E\eta_i^2 = 1$

Тогда

$$T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = |\text{независимость}| = \frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\eta_1 + \ldots \eta_n}{\sqrt{n}}$$

Рассмотрим х.ф. η_i :

$$\varphi_{\eta_i}(t) = \varphi(t) = 1 + E\eta_i(it) + \frac{1}{2}E\eta_i^2(it)^2 + \underset{(t\to 0)}{o(t^2)};$$

Отсюда получаем, что

$$\varphi_{T_n}(t) = \varphi_{\eta_1+\ldots+\eta_n}(\frac{t}{\sqrt{n}}) = |\text{независимость}| = \left(\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Но $e^{-\frac{t^2}{2}}$ – х.ф. $N(0,1) \Rightarrow$ по теорема непрерывности мы получаем, что

$$T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

□

Следствие 6. *В условиях ЦПТ для* $\forall x \in \mathbb{R}$ *выполнено*

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Доказательство. По ЦПТ $T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \xi \sim N(0,1) \Leftrightarrow F_{T_n} \Rightarrow F_\xi$, где $F_\xi(x)$ – ф.р. $N(0,1)$, т.е. $\forall x \in \mathbb{R}:$

$$F_{T_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

□

Следствие 7. *В условиях ЦПТ, если* $E\xi_i = a, D\xi_i = \sigma^2$, *то*

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

Доказательство.

$$\sigma T_n = \sigma \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = \sigma \frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} = \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right)$$

Но $T_n \xrightarrow{d} N(0,1) \Rightarrow \sigma T_n \xrightarrow{d} \sigma N(0,1) = N(0, \sigma^2)$

$\Rightarrow \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ □

Теорема 9 (Теорема Берри - Эссен).

Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *– нез. с.в.,* $E|\xi_i|^3 < +\infty$,

$E\xi_i = a,\ D\xi_i = \sigma^2 > 0.$

Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n,\ T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$.

Тогда

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant C \frac{E|\xi_1 - a|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$$

где C *– абс. константа. Вместо* ξ_1 *можно взять любую из* $\xi_1 \ldots \xi_n$.

Что можно сказать про C?

1. $C \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,399$ (Эссен)

2. Текущий рекорд $\forall n \forall \xi : C \leqslant 0.48$

Пример 21. Складываются 10^4 чисел, каждое из которых было вычислено с точностью 10^{-6}. Найти в каких пределах с вероятностью 0.99 лежит суммарная ошибка, считая, что все ошибки независимы и распределены $R(-10^{-6}, 10^{-6})$

Доказательство. $\xi_i \sim R(-10^{-6}, 10^{-6})$ – нез. с. в.

$E\xi_i = a = 0,\ D\xi_i = \sigma^2 = 10^{-12}\frac{2}{3},\ S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n.$

Согласно ЦПТ:

$$P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}\right| \leqslant u\right) \sim P(|\eta| \leqslant u), \text{где } \eta \sim N(0,1)$$

Из таблицы значений $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$

Получаем, что при $u = 2.58$

$$\begin{aligned} &P(|\eta| \leqslant u) \geqslant 0.99 \\ &\Rightarrow P\left(|S_n| \leqslant 2.58\sqrt{DS_n}\right) \geqslant 0.99 \\ &P\left(|S_n| \leqslant 2.58\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 10^{-6}\right) \geqslant 0.99 \end{aligned}$$

Суммарная ошибка: $2.58\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 10^{-6}$ $\square$