

Теория вероятностей

МФТИ

Осень 2012 г.

Содержание

Введение	3
Вероятностное пространство	3
Дискретные вероятностные пространства	6
Условные вероятности	8
Системы множеств	9
Независимость событий	12
Вероятностная мера на $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$	13
Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой	15
Вероятностные меры в \mathbb{R}^n	18
Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах	20
Случайные элементы	23
Действия над случайными величинами и векторами	25
Характеристики случайных величин и векторов	26
Независимость случайных величин и векторов	33
Неравенства	36
Виды сходимостей случайных величин	37
Усиленный закон больших чисел для случайных величин с ограниченными дисперсиями	40
Предельный переход под знаком E	44
Усиленный закон больших чисел для с.в. с конечным математическим ожиданием	45

Замена переменных в интеграле Лебега	48
Прямое произведение вероятностных пространств	51
Слабая сходимость вероятностных мер	53
Предельные теоремы для схемы Бернулли	55
Характеристические функции	56

Введение

Предмет изучения теории вероятностей:
Математический анализ случайных явлений.

Эксперименты бывают:

- Детерминированный результат (изучают другие науки)
- Случайный результат (теория вероятностей)

Одиночные результаты случайных экспериментов не позволяют обнаружить закономерности, однако при большом числе результатов однородных случайных экспериментов обнаруживается *устойчивость частот*.

Пример 1. Подбрасывание монетки:

Бюффон, XVIII век, 4040 подбрасываний, 2048 раз выпал орел, частота 0,508...

Пирсон, XIX век, 24000 подбрасываний, 12012 раз выпал орел, частота 0,5005...

Принцип устойчивости частот:

Частота осуществления какого-либо исхода в последовательности однородных случайных экспериментов сходится к некоторому числу $p \in [0, 1]$.

Пусть A - некоторое событие, $U_n(A)$ - количество появлений в результатах случайных экспериментов после n испытаний. Тогда

$$\frac{U_n(A)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p(A) - \text{вероятность события } A.$$

Однако с математической точки зрения это неудобно. Нужно предложить другое определение вероятности, для которого будет наблюдаться устойчивость частот.

Вероятностное пространство

В основе теории вероятностей лежит понятие вероятностного пространства (Ω, \mathcal{F}, P) (т.н. “тройки Колмогорова”)

- ① Ω — пространство элементарных событий.
 $\omega \in \Omega$ — называется элементарным событием.
В результате случайного эксперимента получаем один и ровно один элемент Ω .
- ② \mathcal{F} — σ -алгебра подмножеств на Ω .
Элементы \mathcal{F} называются *событиями*.
 $\forall A \in \mathcal{F} \implies A \subset \Omega$.

Определение 1. Система подмножеств \mathcal{F} множества Ω называется *алгеброй*, если:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$
3. $\forall A, B \in \mathcal{F} \implies A \triangle B \in \mathcal{F}$

Упражнение 1. Алгебра замкнута относительно операций:

1. $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$
2. $A, B \in \mathcal{F} \implies A \setminus B \in \mathcal{F}$
3. $A \in \mathcal{F} \implies \bar{A} \in \mathcal{F}$

Определение 2. $\bar{A} = \Omega \setminus A$, называется дополнительным событием к событию A .

Пример 2.

1. $\mathcal{F}_* = \{\emptyset, \Omega\}$ — тривиальная алгебра
2. $\mathcal{F}^* = 2^\Omega$ (все подмножества Ω) — дискретная алгебра
3. $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ — алгебра “порожденная” A
4. Конечные объединения подмножеств вида $[a, b), (-\infty; c), [d, +\infty)$ образуют алгебру.

Определение 3. Система подмножеств \mathcal{F} множества Ω называется σ -алгеброй, если:

1. \mathcal{F} — алгебра
2. $\forall \{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F} \forall n \implies \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Упражнение 2. Условие $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$ можно заменить на $\bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$

Пример 3.

1. \mathcal{F}_* — тривиальная σ -алгебра
2. \mathcal{F}^* — дискретная σ -алгебра
3. \forall конечная алгебра является σ -алгеброй.
4. $[a, b), (-\infty; c), [d, +\infty)$ — не σ -алгебра.

③ P - вероятностная мера на (Ω, \mathcal{F})

Определение 4. Пара (Ω, \mathcal{F}) множества Ω с заданной на нем σ -алгеброй \mathcal{F} называется *измеримым пространством*.

Определение 5. Отображение $P: \mathcal{F} \rightarrow [0; 1]$ называется вероятностной мерой (или вероятностью) на (Ω, \mathcal{F}) , если:

1. $P(\Omega) = 1$
2. Для \forall последовательности $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F} \forall n$ такой, что $\forall i \neq j: A_i \cap A_j = \emptyset$ выполнено свойство счетной аддитивности:

$$P\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Утверждение 1.

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Если $A \cap B = \emptyset$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (свойство конечной аддитивности)
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $\forall A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^m A_n\right) \leq \sum_{n=1}^m P(A_n)$$
6. Если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$

Доказательство.

$$1. \forall n \ A_n = \emptyset \implies P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset) < +\infty \implies P(\emptyset) = 0$$

$$2. A_1 = A, A_2 = B, A_3 = A_4 = \dots = A_n = \dots = \emptyset$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(A \cup B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = P(A) + P(B)$$

$$3. \Omega = A \sqcup \bar{A} \implies |\text{по 2}| \implies 1 = P(A) + P(\bar{A})$$

$$4. A \cup B = A \sqcup (B \setminus (A \cap B))$$

$$\implies P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B))$$

$$B = (A \cap B) \sqcup (B \setminus (A \cap B))$$

$$\implies P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus (A \cap B))$$

Осталось вычесть одно равенство из другого.

5. Если $m = 2$ — то это пункт 4).

По индукции

$$P\left(\bigcup_{n=1}^m A_n\right) \leq P(A_m) + P\left(\bigcup_{n=1}^{m-1} A_n\right) \leq |\text{индукция}| \leq P(A_m) + \sum_{n=1}^{m-1} P(A_n) = \sum_{n=1}^m P(A_n)$$

6. Следует из 4).

□

Определение 6. Будем обозначать $A_n \downarrow A$ при $n \rightarrow +\infty$, если для последовательности событий $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ выполнены свойства:

1. $A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$
2. $A = \bigcap_n A_n$

Теорема 1 (О непрерывности в нуле вероятностной меры).

Пусть (Ω, \mathcal{F}) - измеримое пространство, а $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ удовлетворяет двум свойствам:

1. $P(\Omega) = 1$
2. P - конечно-аддитивна.

Тогда P - вероятностная мера $\iff P$ - непрерывна в нуле (т.е. если $A_n \downarrow \emptyset$, то $P(A_n) \rightarrow 0$).

Доказательство.

(\implies) Пусть P - вероятностная мера, а $A_n \downarrow \emptyset$.

Рассмотрим $B_m = A_m \setminus A_{m+1}$. Тогда в силу $\bigcap_n A_n = \emptyset \implies \bigcup_{m=n}^{\infty} B_m = A_n$

Тогда в силу счетной аддитивности $P(A_n) = \sum_{m=n}^{\infty} P(B_m)$

Но ряд $P(A_1) = \sum_{m=1}^{\infty} P(B_m)$ сходится $\implies \sum_{m=n}^{\infty} P(B_m)$ есть остаток сходящегося ряда $\implies P(A_n) \rightarrow 0$

(\impliedby) Пусть P непрерывна в нуле. Покажем её счетную аддитивность:

Пусть $A_n, n \in \mathbb{N}$ т.ч. $A_n \in \mathcal{F} \forall n$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$

Рассмотрим $B_m = \bigcup_{n=m}^{+\infty} A_n$. Тогда $B_m \supset B_{m+1} \supset \dots$

Покажем, что $\bigcap_m B_m = \emptyset$.

Пусть $\omega \in \bigcap_m B_m \implies \omega \in B_1 \implies \exists k : \omega \in A_k \implies \omega \notin B_{k+1}$. Противоречие.

Следовательно, $\bigcap_m B_m = \emptyset$ и в силу непрерывности в нуле $P(B_m) \rightarrow 0$.

Далее $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^m A_n \sqcup B_{m+1}\right) = |\text{конечная аддитивность}| =$

$= \sum_{n=1}^m P(A_n) + P(B_{m+1}) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n), m \rightarrow \infty$

$\implies P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)$

□

Следствие 1 (непрерывность вероятностной меры).

1. Если $A_n \downarrow A$, то $P(A_n) \rightarrow P(A)$

2. Если $A_n \uparrow A$ (т.е. $A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$, и $A = \bigcup_n A_n$, то $P(A_n) \rightarrow P(A)$)

Доказательство.

1. Надо рассмотреть $B_n = A_n \setminus A$

2. Надо рассмотреть $B_n = \overline{A_n}$

□

Дискретные вероятностные пространства

В дискретном случае множество элементарных исходов Ω – счетно или конечно.

Сигма-алгебру \mathcal{F} на Ω выбирают дискретной, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^* = 2^{\Omega}$

Тогда вероятность P можно задать как функцию на Ω :

$$P: \Omega \rightarrow [0, 1], \text{ т.ч. } \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

В этом случае $\forall A \subset \Omega : P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$

Ⓘ Классическая модель

В классической модели Ω – конечно, все элементарные события равновероятны:

$$\forall \omega \in \Omega : P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Тогда $\forall A \subset \Omega : P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Пример 4.

1. Бросок монеты. $\Omega = \{\text{Орел}, \text{Решка}\}$.
 $P(\text{Орел}) = P(\text{Решка}) = 1/2$

2. Бросок кости. $\Omega = \{1, \dots, 6\}$
 $P(i) = 1/6 \quad \forall i = 1 \dots 6$

3. Бросок двух монет. "Заблуждение Даламбера". $\Omega = \{OO, OP, PP\}$
Кажется, что все исходы имеют вероятность $1/3$

Проблема в различимости монет.

Если они различимы, то $\Omega = \{OO, OP, PO, PP\}$, и вероятности событий равны $1/4$
 $P(\text{выпал 1 орел и 1 решка}) = 1/2$

4. Схема испытаний Бернулли. $\Omega = \{\vec{w} = (w_1, \dots, w_n) \mid w_i \in \{0, 1\}\}$. $|\Omega| = 2^n$
Эта модель отвечает броскам n различных монет.

Ⓜ Геометрические вероятности

Здесь $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ и для Ω определен, конечен и положителен его объем $\mu(\Omega) > 0$.

Сигма-алгебра \mathcal{F} состоит из тех $A \subset \Omega$ для которых тоже определен объем $\mu(A)$

Тогда вероятность P задается так:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Подобная модель – естественное продолжение классической модели на случай непрерывных пространств.

Пример 5. Задача о встрече:

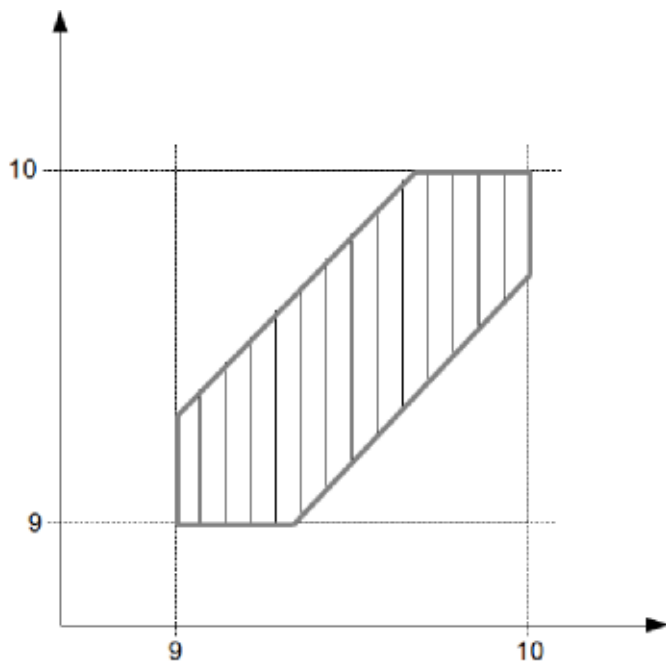
Два товарища договорились встретиться утром на остановке. Каждый приходит в случайное время между 9 и 10, ждет 15 минут, потом уезжает.

Какова вероятность встречи?

Решение. Пространство элементарных событий – это квадрат $[9, 10] \times [9, 10]$.

Время прихода первого и время прихода второго – случайная точка $(u, v) \in [9, 10] \times [9, 10]$.

Изобразим пространство событий геометрически:



Заштрихованная область $A = \{(u, v) \mid u, v \in [9; 10], |u - v| < 1/4\}$.

Нужно найти меру этой области:

$$\mu(A) = 1 - (3/4)^2 = 7/16$$

$$\mu(\Omega) = 1$$

$$\Rightarrow P(\text{они встретятся}) = \mu(A)/\mu(\Omega) = 7/16$$

Условные вероятности

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) – вероятностное пространство.

Определение 1. Для $\forall A \in \mathcal{F}$, т.ч. $P(A) > 0$ *условной вероятностью* события $B \in \mathcal{F}$ при условии A называют

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

если же $P(A) = 0$, то $P(B \mid A) = 0$, $\forall B \in \mathcal{F}$

Упражнение 3. Если $P(A) > 0$, то функция $\bar{P}(B) = P(B \mid A)$

тоже является вероятностной мерой на (Ω, \mathcal{F}) .

Определение 2. Систему событий $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют разбиением множества Ω , если:

$$1. \forall i \neq j : B_i \cap B_j = \emptyset$$

$$2. \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$$

В этом случае также говорят, что $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует полную группу несовместных событий.

Лемма 1 (формула полной вероятности).

Пусть $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ – разбиение Ω . Тогда для $\forall A \in \mathcal{F}$:

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \mid B_n)P(B_n)$$

Доказательство. Рассмотрим событие A

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) = P\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap B_n\right) = \\ &= |\text{счетная аддитивность}| = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A | B_n)P(B_n) \end{aligned}$$

□

Пример 6. В ящике всего n шаров, из них k - белых. Последовательно, без возвращения, вынимаем по одному шару. Обозначим $A_j = \{\text{на } j\text{-том шаге вынули белый шар}\}$.

Доказать:

$$P(A_j) = \frac{k}{n}$$

Первое решение: воспользоваться симметрией.

Второе решение: в лоб

Введем события $B_j(i) = \{\text{среди первых } j-1 \text{ шара вынули ровно } i \text{ белых}\}$

Тогда $B_j(i)$ образуют разбиение, $i = 0 \dots k$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} P(A_j | B_j(i)) &= \frac{k-i}{n-j+1} \\ P(B_j(i)) &= C_{j-1}^i \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)(n-k)\dots(n-k-j+1+i)}{n(n-1)\dots(n-j+1)} = \\ &= \frac{C_{j-1}^i C_k^i i! C_{n-k}^{j-1-i} (j-i-1)!}{C_n^{j-1} (j-1)!} = \frac{C_k^i C_{n-k}^{j-1-i}}{C_n^{j-1}} \end{aligned}$$

Отсюда:

$$P(A_j) = \sum_{i=0}^k \frac{k-i}{n-j+1} \frac{C_k^i C_{n-k}^{j-1-i}}{C_n^{j-1}} = \frac{k}{n} \sum_{i=0}^k \frac{C_{k-1}^i C_{n-k}^{j-1-i}}{C_{n-1}^{j-1}} = \frac{k}{n}$$

Лемма 2 (формула Байеса).

Пусть $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ - разбиение Ω , а $A \in \mathcal{F} : P(A) > 0$. Тогда $\forall n$

$$P(B_n | A) = \frac{P(A | B_n)P(B_n)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(A | B_k)P(B_k)}$$

Определение 3. $P(B_n)$ называется *априорной вероятностью*.

$P(B_n | A)$ называется *апостериорной вероятностью* (относительная вероятность при условии известного результата эксперимента)

Системы множеств

Пусть Ω - некоторое множество

Определение 1. Система подмножеств \mathcal{M} множества Ω называется π - *системой*, если $\forall A, B \in \mathcal{M}$ выполнено $A \cap B \in \mathcal{M}$

Определение 2. Система подмножеств \mathcal{L} множества Ω называется λ - *системой*, если

1. $\Omega \in \mathcal{L}$

2. Если $A, B \in \mathcal{L}$ и $A \subset B$, то $B \setminus A \in \mathcal{L}$

3. Если последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n \in \mathcal{L} \quad \forall n$,
удовлетворяет $A_n \uparrow A$ (т.е. $A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$ и $A = \bigcup_n A_n$), то $A \in \mathcal{L}$

Лемма 3 (о π - и λ -системах). Система \mathcal{F} подмножеств Ω является σ -алгеброй
 \iff она является π -системой и λ -системой одновременно.

Доказательство.

(\implies) очевидно.

(\impliedby) Для $\forall A, B \in \mathcal{F}$

$\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ т.к. \mathcal{F} – λ -система ($A \subset \Omega$ и $\Omega \in \mathcal{F}$, свойство 2)

Также имеется замкнутость относительно \cap в \mathcal{F} (\mathcal{F} – π -система)

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{F}$

$A \cup B = \overline{(\Omega \setminus A) \setminus (B \setminus A)} \in \mathcal{F}$

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$\implies \mathcal{F}$ является алгеброй

Покажем, что она σ -алгебра:

Пусть $\{B_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность элементов из \mathcal{F} , Проверим, что $\bigcup_n B_n \in \mathcal{F}$

Положим $A_m = \bigcup_{n=1}^m B_n$.

Тогда $A_m \in \mathcal{F}$ т.к. \mathcal{F} – алгебра. Кроме того $A_m \subset A_{m+1}$ и $A_m \uparrow \bigcup_n B_n = B$

Тогда в силу свойства 3) λ -системы, $B \in \mathcal{F}$. Значит \mathcal{F} – σ -алгебра

□

Пример 7. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathcal{L} = \{\emptyset; (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (3, 4); \Omega\}$

Тогда \mathcal{L} – это λ -система, но не алгебра.

Лемма 4 (о существовании минимальной системы).

Пусть \mathcal{M} – система подмножеств Ω .

Тогда существует минимальная (по включению) алгебра (или σ -алгебра, π -система, λ -система) содержащая \mathcal{M} и обозначаемая $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ ($\sigma(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M})$)

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{F}^* = 2^\Omega$ – дискретная σ -алгебра. Она является алгеброй (σ -алгеброй, π -системой, λ -системой), содержащей \mathcal{M} , т.е. множество интересующих нас систем не пусто.

Рассмотрим $\alpha(\mathcal{M})$ ($\sigma(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M})$) – пересечение всех алгебр (σ -алгебр, π -систем, λ -систем), содержащих \mathcal{M} . Тогда $\alpha(\mathcal{M})$ ($\sigma(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M})$) тоже будет являться алгеброй (σ -алгеброй, π -системой, λ -системой), содержащей \mathcal{M} .

При этом она будет минимальной по включению.

□

Пример 8.

1. Пусть $\mathcal{M} = \{(a, b) \mid a < b \in \mathbb{R}\}$ – система интервалов.

Тогда минимальная σ -алгебра, содержащая \mathcal{M} , называется борелевской σ -алгеброй на прямой и обозначается $B(\mathbb{R})$

$$B(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{M})$$

2. Рассмотрим в \mathbb{R}^n систему подмножеств вида

$$\mathcal{M} = \{ B_1 \times \dots \times B_n \mid B_i \in B(\mathbb{R}) \}$$

$$\mathcal{M} = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in B_i \quad \forall i = 1 \dots n \}$$

Тогда минимальная σ -алгебра, содержащая \mathcal{M} называется *борелевской σ -алгеброй* в \mathbb{R}^n и обозначается $B(\mathbb{R}^n)$

3. $\mathbb{R}^\infty = \{ (x_1, x_2, \dots) \mid x_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \}$ – числовые последовательности.

Для $\forall n \forall B_n \in B(\mathbb{R}^n)$ введем

$$\mathcal{M}_n(B_n) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^\infty, \vec{x} = (x_1, x_2, \dots) \mid (x_1, \dots, x_n) \in B_n \}$$

– цилиндр с основанием B_n

Минимальная σ -алгебра, содержащая все цилиндры, называется борелевской σ -алгеброй в \mathbb{R}^∞ и обозначается $B(\mathbb{R}^\infty)$. Формально:

$$B(\mathbb{R}^\infty) = \sigma(\{ \mathcal{M}_n(B_n) \mid n \in \mathbb{N}, B_n \in B(\mathbb{R}^n) \})$$

Теорема 2 (о монотонных классах).

Пусть \mathcal{M} – π -система на Ω . Тогда $\lambda(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{M})$.

Доказательство. Заметим, что $\sigma(\mathcal{M})$ – σ -алгебра, содержащая $\mathcal{M} \implies \sigma(\mathcal{M})$ – λ -система, содержащая $\mathcal{M} \implies \lambda(\mathcal{M}) \subset \sigma(\mathcal{M})$ в силу минимальности.

Согласно лемме о π - и λ -системах для того, чтобы доказать $\sigma(\mathcal{M}) \subset \lambda(\mathcal{M})$, достаточно проверить, что $\lambda(\mathcal{M})$ является π -системой.

Действительно, тогда $\lambda(\mathcal{M})$ будем σ -алгеброй, содержащей $\mathcal{M} \implies \sigma(\mathcal{M}) \subset \lambda(\mathcal{M})$

Рассмотрим следующую систему подмножеств:

$$\mathcal{M}_1 = \{ B \in \lambda(\mathcal{M}) \mid \forall A \in \mathcal{M} \hookrightarrow A \cap B \in \lambda(\mathcal{M}) \}$$

Покажем, что \mathcal{M}_1 , является λ -системой,

1. $\Omega \in \mathcal{M}_1$? Для $\forall A \in \mathcal{M}$
 $\Omega \cap A = A \in \mathcal{M} \subset \lambda(\mathcal{M}) \implies \Omega \in \mathcal{M}_1$.
2. Пусть $A, B \in \mathcal{M}_1$ и $A \subset B$. Верно ли, что $B \setminus A \in \mathcal{M}_1$?
Пусть $C \in \mathcal{M}$. Тогда $(B \setminus A) \cap C = (B \cap C) \setminus (A \cap C)$
Причем $(A \cap C) \subset (B \cap C) \implies$ по свойству 2) λ -системы
получаем, что $(B \setminus A) \cap C \in \lambda(\mathcal{M}) \implies (B \setminus A) \in \mathcal{M}_1$
3. Пусть $\{B_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность из \mathcal{M}_1 , причем $B_n \uparrow B$. Верно ли, что $B \in \mathcal{M}_1$?
Для $\forall A \in \mathcal{M}$ $(B_n \cap A) \uparrow (B \cap A)$. Но $(B_n \cap A) \in \lambda(\mathcal{M}) \implies (B \cap A) \in \lambda(\mathcal{M})$ по свойству 3)
 λ -системы. $\implies B \in \mathcal{M}_1$.

Мы показали, что \mathcal{M}_1 – λ -система.

В силу того, что \mathcal{M} – π -система, $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1 \implies \lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_1$. В силу минимальности. Но $\mathcal{M}_1 \subset \lambda(\mathcal{M})$ по построению.

Следовательно, $\lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_1$, т.е. $\forall A \in \lambda(\mathcal{M}) \quad \forall B \in \mathcal{M} \quad A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})$ (*)

Рассмотрим систему

$$\mathcal{M}_2 = \{ B \in \lambda(\mathcal{M}) \mid \forall A \in \lambda(\mathcal{M}) \hookrightarrow A \cap B \in \lambda(\mathcal{M}) \}$$

Точно так же проверяется, что \mathcal{M}_2 – это λ -система.

$\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_2$ т.к. $\forall X \in \mathcal{M} : X \in \mathcal{M}_2$ (см. (*)). Значит $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_2 \implies \lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_2$

Значит $\lambda(\mathcal{M})$ – π -система. То есть

$$\forall A, B \in \lambda(\mathcal{M}) \hookrightarrow A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})$$

□

Следствие 1. Пусть \mathcal{M} – π -система на Ω , \mathcal{L} – λ -система на Ω , $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$. Тогда $\sigma(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$

Доказательство. В силу минимальности $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$. По теореме о монотонных классах $\sigma(\mathcal{M}) = \lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$. □

Независимость событий

Определение 1. События A и B на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) называются *независимыми*, если

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Упражнение 4. Пусть A и B независимы. Тогда независимыми будут и такие пары:
 $\overline{A}, B \quad A, \overline{B} \quad \overline{A}, \overline{B}$

Определение 2. Набор событий $A_1 \dots A_n$ называются попарно независимыми, если $\forall i \neq j$ A_i независимо с A_j .

Определение 3. События $A_1 \dots A_n$ называются независимыми в совокупности, если $\forall k \leq n, \forall i_1, \dots, i_k : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ выполнено:

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$$

Определение 4. Системы событий $\mathcal{M}_1 \dots \mathcal{M}_n$, $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{F}$ называются *независимыми в совокупности*, если $\forall A_1 \in \mathcal{M}_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n$ события $A_1 \dots A_n$ – независимы в совокупности.

Лемма 5 (критерий независимости σ -алгебр).

Пусть \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 – π -системы в \mathcal{F} . Тогда $\sigma(\mathcal{M}_1)$ и $\sigma(\mathcal{M}_2)$ независимы $\iff \mathcal{M}_1$ и \mathcal{M}_2 – независимы.

Доказательство.

(\implies) очевидно из определения

(\impliedby) используем принцип подходящих множеств.

Рассмотрим такую систему:

$$\mathcal{L}_1 = \{ A \in \sigma(\mathcal{M}_2) \mid A \text{ независимо с } \mathcal{M}_1 \}$$

Проверим, что \mathcal{L}_1 – это λ -система.

1. $\Omega \in \mathcal{L}_1$?

$$P(\Omega \cap A) = P(A) = P(A)P(\Omega) \implies \text{независимы} \implies \Omega \in \mathcal{L}_1$$

2. Пусть $A, B \in \mathcal{L}_1$, причем $A \subset B$. $B \setminus A \in \mathcal{L}_1$?

Пусть $C \in \mathcal{M}_1$. Тогда

$$\begin{aligned} P(B \setminus A \cap C) &= P((B \cap C) \setminus (A \cap C)) = P(B \cap C) - P(A \cap C) = \\ &= P(B)P(C) - P(A)P(C) = (P(B) - P(A))P(C) = P(B \setminus A)P(C) \\ &\implies B \setminus A \text{ независимо с } C \implies \text{независимо с } \mathcal{M}_1 \implies B \setminus A \in \mathcal{L}_1 \end{aligned}$$

3. Пусть $B_n \uparrow B, B_n \in \mathcal{L}_1$. Верно ли, что $B \in \mathcal{L}_1$?

Да:

Пусть $A \in \mathcal{M}_1$. Тогда $(B_n \cap A) \uparrow (B \cap A)$.

$$P(B \cap A) = |\text{по теореме о непрерывности меры}| = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n \cap A) =$$

$$= |B_n \in \mathcal{L}_1 \implies B \text{ независимо с } A| = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n)P(A) = |\text{по теореме о непрерывности}| = P(B)P(A)$$

$$\implies B \text{ и } A \text{ независимы} \implies B \in \mathcal{L}_1$$

Значит \mathcal{L}_1 – λ -система. По условию мы знаем, что \mathcal{M}_2 независима с $\mathcal{M}_1 \implies \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{L}_1 \implies$ по следствию из теоремы о монотонности $\implies \sigma(\mathcal{M}_2) \subset \mathcal{L}_1 \iff$ т.е. $\sigma(\mathcal{M}_2)$ независимо с \mathcal{M}_1

Рассмотрим по аналогии

$$\mathcal{L}_2 = \{ A \in \mathcal{F} \mid A \text{ независимо с } \sigma(\mathcal{M}_2) \}$$

Аналогично $\implies \mathcal{L}_2$ – λ -система.

По теореме о монотонных классах, в силу того, что $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{L}_2$, получаем, что $\sigma(\mathcal{M}_1) \subset \mathcal{L}_2 \implies \sigma(\mathcal{M}_1)$ независимо с $\sigma(\mathcal{M}_2)$.

□

Следствие 1. Пусть $\mathcal{M}_1 \dots \mathcal{M}_n$ – π -системы в \mathcal{F} . Тогда $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$ независимы в совокупности $\iff \sigma(\mathcal{M}_1), \dots, \sigma(\mathcal{M}_n)$ независимы в совокупности.

Определение 5. Пусть $\{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ – произвольный набор систем событий из \mathcal{F} . Тогда этот набор называется независимым в совокупности, если $\forall n \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathfrak{A}, \alpha_i \neq \alpha_j$, системы $\mathcal{M}_{\alpha_1} \dots \mathcal{M}_{\alpha_n}$ независимыми в совокупности, то есть любой конечный поднабор независим.

Вероятностная мера на $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$

Теорема 3 (Каратеодори, о продолжении меры). Пусть Ω – некоторое множество, \mathcal{A} – алгебра на нем, P_σ – вероятностная мера на (Ω, \mathcal{A}) . Тогда $\exists!$ вероятностная мера P на $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$, являющаяся продолжением меры P_σ , т.е. $\forall A \in \mathcal{A} \hookrightarrow P_\sigma(A) = P(A)$

Лемма 6. Пусть (Ω, \mathcal{F}) – измеримое пространство, \mathcal{M} – π -система в \mathcal{F} , а P и Q – две вероятностные меры на (Ω, \mathcal{F}) . Тогда если $P|_{\mathcal{M}} = Q|_{\mathcal{M}}$, то

$$P|_{\sigma(\mathcal{M})} = Q|_{\sigma(\mathcal{M})}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\mathcal{L} = \{ A \in \mathcal{F} \mid P(A) = Q(A) \}$$

Покажем, что \mathcal{L} – это λ -система.

$$1. \Omega \in \mathcal{L} : P(\Omega) = Q(\Omega)$$

$$2. \text{ Пусть } A, B \in \mathcal{L}. A \subset B \implies$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A) = Q(B) - Q(A) = Q(B \setminus A) \implies (B \setminus A) \in \mathcal{L}$$

$$3. \text{ Пусть } A_n \uparrow A, A_n \in \mathcal{L} \quad \forall n. \text{ Тогда}$$

$$P(A) = |\text{непрерывность вероятностной меры}| = \lim_n P(A_n) = \lim_n Q(A_n) =$$

$$= |\text{непрерывность вероятностной меры}| = Q(A)$$

$$\implies A \in \mathcal{L}$$

Доказали, что \mathcal{L} – λ -система. По условию $\mathcal{M} \subset \mathcal{L} \implies \lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$. По теореме о монотонных классах получаем, что $\sigma(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$, т.е.

$$P|_{\sigma(\mathcal{M})} = Q|_{\sigma(\mathcal{M})}$$

□

Следствие 1 (единственность в теореме Каратеодори).

Пусть P и Q – два продолжения P_σ на $\sigma(\mathcal{A})$. Но \mathcal{A} – алгебра $\implies \pi$ -система.

$$P|_{\mathcal{A}} = P_\sigma = Q|_{\mathcal{A}}$$

\implies по лемме получаем, что $\forall A \in \sigma(\mathcal{A})$
 $P(A) = Q(A)$, т.е продолжение единственно.

Пусть P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$

Определение 1. Функция $F(x), x \in \mathbb{R}$, заданная по правилу

$$F(x) = P((-\infty, x])$$

называется *функцией распределения вероятностной меры P* .

Лемма 7 (свойства функции распределения).

Пусть $F(x)$ – функция распределения вероятностной меры P . Тогда

1. $F(x)$ – неубывающая
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
3. $F(x)$ непрерывная справа.

Доказательство.

1. Пусть $y \geq x$. Тогда

$$F(y) - F(x) = P((-\infty; y]) - P((-\infty; x]) = P((x, y]) \geq 0$$

2. Пусть $x_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $(-\infty; x_n] \downarrow \emptyset \implies$ по непрерывности вероятностной меры.

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(\emptyset) = 0$$

Аналогично, если $x_n \rightarrow +\infty$, то $(-\infty; x_n] \uparrow \mathbb{R} \implies$ в силу непрерывности вероятностной меры.

$$F(x_n) = P((-\infty; x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(\mathbb{R}) = 1$$

3. Пусть убывающая $x_n \rightarrow x + 0$ Тогда $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty; x] \implies$ в силу непрерывности вероятностной меры.

$$F(x_n) = P((-\infty; x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P((-\infty; x]) = F(x)$$

□

Следствие 2. Функция распределения имеет предел слева в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, при этом точек разрыва у нее не более чем счетное множество.

Доказательство.

$$\lim_{x \rightarrow a-0} F(x) = P((-\infty; a))$$

Каждая точка разрыва является скачком. Каждому скачку сопоставим отрезок. Отрезки скачков не пересекаются, так как функция монотонная. В каждом из них найдется рациональная точка \implies точек разрыва не более чем счетно. \square

Определение 2. Функция $F(x)$ называется функцией распределения на \mathbb{R} , если она удовлетворяет свойствам 1), 2), 3) из леммы.

Теорема 4 (взаимнооднозначное соответствие между функциями распределения и вероятностными мерами). $F(x)$ – функция распределения на \mathbb{R} . Тогда существует единственная вероятностная мера P на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, т.ч. $F(x)$ является функцией распределения P , т.е. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = P((-\infty; x])$$

Идея доказательства Рассмотрим \mathcal{A} – алгебру, состоящую из конечных объединений непересекающихся полуинтервалов вида $(a, b]$, т.е. $\forall A \in \mathcal{A}$ имеет вид:

$$A = \bigsqcup_{k=1}^n (a_k, b_k] \quad (*)$$

где $-\infty \leq a_1 < b_1 < a_2 < \dots < b_n \leq +\infty$

Рассмотрим функцию P_0 на \mathcal{A} , заданную по правилу: Если A имеет вид $(*)$, то

$$P_0(A) = \sum_{k=1}^n (F(b_k) - F(a_k))$$

Легко видеть, что P_0 обладает свойствами

1. $P_0(A) \in [0, 1] \quad \forall A \in \mathcal{A}$
2. $P_0(\mathbb{R}) = F(+\infty) - F(-\infty) = 1$
3. P_0 – конечно-аддитивна, т.е. $\forall A, B \in \mathcal{A}$
 $A \cap B = \emptyset \iff P_0(A \cup B) = P_0(A) + P_0(B)$

Если бы удалось доказать, что P_0 счетно-аддитивна на \mathcal{A} , то P_0 стала бы вероятностной мерой на $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ и по теореме Каратеодори её можно было бы продолжить единственным образом до вероятностной меры P на $(\mathbb{R}, \sigma(\mathcal{A}))$, а $\sigma(\mathcal{A}) = B(\mathbb{R})$.

Тогда бы $F(x)$ была функцией распределения меры P

$$F(x) = P_0((-\infty; x]) = P((-\infty; x])$$

Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой

① Дискретные распределения

Пусть $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ – не более чем счетное множество.

Определение 1. Вероятностная мера P на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, удовлетворяющая свойству $P(\mathbb{R} \setminus \mathcal{X}) = 0$, называется дискретной вероятностной мерой на \mathcal{X} . Её функция распределения называется дискретной.

Пусть $\mathcal{X} = \{x_k\}$ и положим $p_k = P(\{x_k\})$

Тогда $P(\mathcal{X}) = 1 = \sum_k P(\{x_k\}) = \sum_k p_k$

Определение 2. Набор чисел (p_0, p_1, \dots) называется распределением вероятностей на \mathcal{X} .

Как выглядит функция распределения дискретной вероятностной меры P ?

$F(x)$ – кусочно-постоянная разрывная в точках $x_k \in \mathcal{X}$. При этом величина скачка равна

$$\Delta F(x_k) = F(x_k) - F(x_k - 0) = P(\{x_k\}) = p_k$$

Примеры дискретных распределений

1. Дискретное равномерное $\mathcal{X} = \{1, \dots, N\}$, $k = 1, \dots, N$ и $p_k = 1/N$ для $\forall k \in \mathcal{X}$.
2. Бернуллиевское

$$\mathcal{X} = \{0, 1\}, k = 0, 1$$

$$p_k = p^k(1-p)^{1-k},$$

где $p \in [0, 1]$ - параметр.

3. Биномиальное распределение

$$\mathcal{X} = \{0, \dots, n\}$$

$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

где $p \in [0, 1]$ - параметр.

4. Пуассоновское распределение

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}_+$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0 - \text{параметр}$$

Моделирование: биномиальное \rightarrow пуассоновское

Число событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что они происходят с некоторой фиксированной вероятностью и независимы.

② Абсолютно непрерывные распределения

Определение 3. Пусть $F(x)$ – функция распределения вероятностной меры P на \mathbb{R} , причем для $\forall x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

где $p(t) \geq 0$ – неотрицательная функция т.ч

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = 1$$

В этом случае вероятностная мера P называется *абсолютно непрерывной*, а $F(x)$ – *абсолютно непрерывной функцией распределения*. Функция $p(t)$ называется *плотностью распределения P* (или просто *плотностью*)

Пример 9.

1. Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

2. Нормальное распределение (с параметрами (a, σ^2))

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

Моделирование: измерения величины $a = a + \text{ошибка измерения}$.

3. Гамма-распределение (с параметрами (d, λ))

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} e^{-\alpha x}, & x > 0, \quad \alpha, \lambda > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Определение 4.

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{+\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx \quad \text{для } \lambda > 0$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

4. Экспоненциальное распределение (или показательное) (с параметром $\lambda > 0$).

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Моделирование: время ожидания (время работы приборов)

5. Распределение Коши (с параметром $\Theta > 0$)

$$p(x) = \frac{\Theta}{\pi(\Theta^2 + x^2)}$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\Theta}\right) + \frac{1}{2}$$

③ Сингулярные распределения

Определение 5. Пусть $F(x)$ – функция распределения на \mathbb{R} .
Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *точкой роста* для $F(x)$, если для $\forall \varepsilon > 0$

$$F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0 - \varepsilon) > 0$$

Определение 6. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется множеством лебеговой меры нуль, если для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ счетный набор интервалов $((a_k, b_k), k \in \mathbb{N})$ т.ч

$$\sum_k (b_k - a_k) \leq \varepsilon$$

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$$

Пример 10. \forall счетное множество \mathcal{X} имеет меру нуль.
Пусть

$$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$$

$$(a_k, b_k) = \left(x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

Определение 7. Функция распределения $F(x)$ называется *сингулярной*, если она непрерывна и её множество точек роста имеет лебегову меру нуль.

Теорема 5 (Лебег). Пусть $F(x)$ – произвольная функция распределения. Тогда существует разложение вида

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x)$$

где

F_1 – дискретная функция распределения
 F_2 – абсолютно непрерывная функция распределения
 F_3 – сингулярная функция распределения

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

Вероятностные меры в \mathbb{R}^n

Определение 1. Пусть P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$

Тогда функция $F(\vec{x}), \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$$F(\vec{x}) = P((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n])$$

называется функцией распределения вероятностной меры P в \mathbb{R}^n .

Обозначения. Пусть $\vec{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$

Будем писать $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$, если:

$\forall i \quad x_i^{(k)} \geq x_i^{(k+1)} \geq y_i$ и $x_i^{(k)} \rightarrow y_i$ при $k \rightarrow \infty$

Лемма 8 (свойства многомерной функции распределения).

Пусть $F(\vec{x})$ – функция распределения вероятностной меры P в \mathbb{R}^n Тогда:

1. Если $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{x}$, то $F(\vec{x}^{(k)}) \rightarrow F(\vec{x})$
2. $\lim_{\forall i: x_i \rightarrow +\infty} F(\vec{x}) = 1$ и $\forall i \quad \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(\vec{x}) = 0$

3. Для $\forall i = 1 \dots n \quad \forall a_i < b_i \in \mathbb{R}$ введем оператор

$$\Delta_{a_i, b_i}^i F(\vec{x}) = F(x_1, \dots, b_i, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, a_i, \dots, x_n)$$

Тогда $\forall a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$:

$$\Delta_{a_1, b_1}^1 \dots \Delta_{a_n, b_n}^n F(\vec{x}) \geq 0$$

Доказательство.

1. Если $\vec{x}^{(k)} \downarrow \vec{x}$, то множество

$$(-\infty, x_1^{(k)}] \times \dots \times (-\infty, x_n^{(k)}] \downarrow (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]$$

\implies [по непрерывности вероятностной меры] \implies

$$F(\vec{x}^{(k)}) = P((-\infty, x_1^{(k)}] \times \dots \times (-\infty, x_n^{(k)}]) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} P((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) = F(\vec{x})$$

2. Если $x_1 \dots x_n \rightarrow +\infty$, то $(-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n] \uparrow \mathbb{R}^n$

В силу непрерывности вероятностной меры:

$$\lim_{\forall i: x_i \rightarrow \infty} F(\vec{x}) = P(\mathbb{R}^n) = 1$$

Если же $\vec{x}^{(k)} \rightarrow -\infty$, $k \rightarrow \infty$, то $(-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_i^{(k)}] \times \dots \times (-\infty, x_n] \downarrow \emptyset$

Отсюда в силу непрерывности вероятностной меры:

$$\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(\vec{x}) = P(\emptyset) = 0$$

3. Докажем, только для $n = 2$

$$\begin{aligned} \Delta_{a_1 b_1}^1 \Delta_{a_2 b_2}^2 F(\vec{x}) &= \Delta_{a_1 b_1}^1 (F(x_1, b_2)) - F(x_1, a_2) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) = \\ &= P((-\infty, b_1] \times (-\infty, b_2]) - P((-\infty, b_1] \times (-\infty, a_2]) - P((-\infty, a_1] \times (-\infty, b_2]) + \\ &+ P((-\infty, a_1] \times (-\infty, a_2]) = P((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) - P((-\infty, a_1] \times (-\infty, a_2]) + \\ &+ P((-\infty, a_1] \times (-\infty, a_2]) = P((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) \geq 0 \end{aligned}$$

□

Теорема 6 (о взаимно однозначном соответствии).

Если $F(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяет свойствам 1) - 3) из леммы, то $\exists!$ вероятностная мера P в $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$, для которой $F(\vec{x})$ является функцией распределения т.е.

$$\forall a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$$

$$\Delta_{a_1 b_1}^1 \dots \Delta_{a_n b_n}^n F(\vec{x}) = P((a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n])$$

Примеры многомерных функций распределения

Пример 11. 1. Пусть $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$ – одномерные функции распределения. Тогда

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n)$$

— многомерная функция распределения в \mathbb{R}^n .

Заметим, что

$$\Delta_{a_1 b_1}^1 \dots \Delta_{a_n b_n}^n F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n (F_k(b_k) - F_k(a_k)) \geq 0$$

Если $F_i(x_i) = x_i$, для $\forall i = 1 \dots n$ при $x_i \in [0, 1]$, то

$$F(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists i : x_i < 0 \\ \prod_{i=1}^n (x_i I\{x_i \in [0, 1]\} + I\{x_i \geq 1\}), & \text{иначе} \end{cases}$$

Такая F соответствует для меры Лебега на $[0, 1]^n$.

2. Пусть $f(t_1, \dots, t_n)$, $t_i \in \mathbb{R}$ - функция в \mathbb{R}^n т.ч.
 $\int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n = 1$ и $f(t_1, \dots, t_n) \geq 0$

Тогда

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1 \dots t_n) dt_1 \dots dt_n$$

— многомерная функция распределения

$$\Delta_{a_1 b_1}^1 \dots \Delta_{a_n b_n}^n F(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(t_1 \dots t_n) dt_1 \dots dt_n \geq 0$$

В этом случае $f(t_1 \dots t_n)$ называется плотностью функции распределения $F(x_1 \dots x_n)$ (или просто плотностью). Ясно, что

$$f(x_1 \dots x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F(x_1 \dots x_n)$$

Вероятностные меры в $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Пусть P – вероятностная мера в $(\mathbb{R}^\infty, B(\mathbb{R}^\infty))$. Для $\forall B_n \in B(\mathbb{R}^n)$ введем

$$\mathcal{F}_n(B_n) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^\infty \mid (x_1, \dots, x_n) \in B_n \}$$

— цилиндр с основанием B_n

Тогда $P_n(B_n) = P(\mathcal{F}_n(B_n))$ является вероятностной мерой в $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$. При этом имеет место свойство согласованности:

$$P_{n+1}(B_n \times \mathbb{R}) = P_n(B_n)$$

Теорема 7 (Колмогорова, о мерах в \mathbb{R}^∞).

Пусть $\forall n$ задана вероятностная мера P_n в $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$, причем для $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ выполнено свойство согласованности.

Тогда $\exists!$ вероятностная мера P в $(\mathbb{R}^\infty, B(\mathbb{R}^\infty))$, т.ч. $\forall n \forall B_n \in B(\mathbb{R}^n)$:

$$P_n(B_n) = P(\mathcal{F}_n(B_n))$$

Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах

Пусть (Ω, P) – дискретное вероятностное пространство.

Определение 1. Отображение $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*.

Т.к Ω не более чем счетно, то ξ принимает не более чем счетное число значений (a_1, a_2, \dots)

Введем события $A_i = \{ \omega \mid \xi(\omega) = a_i \}$ – состоит в том, что ξ приняло значение a_i .

$$p_i = P(A_i) = P(\xi = a_i) \quad \text{и} \quad \sum_i p_i = 1 = \sum_i P(A_i)$$

Определение 2. Набор значений (a_1, a_2, \dots) и вероятностей (p_1, p_2, \dots) , с которыми эти значения принимаются, вместе образуют распределение случайной величины ξ .

Замечание. $\xi_1 \dots \xi_n$ – случайные величины, $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, то $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ – тоже случайная величина.

Определение 3. Пусть ξ – случайная величина со значениями (a_1, a_2, \dots) и η – случайная величина со значениями (b_1, b_2, \dots) . Случайные величины ξ и η называются независимыми, если $\forall i \forall j$ события $\{\xi = a_i\}$ и $\{\eta = b_j\}$ независимы, т.е.

$$P(\xi = a_i, \eta = b_j) := P(\{\xi = a_i\} \cap \{\eta = b_j\}) = P(\xi = a_i)P(\eta = b_j)$$

Определение 4. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n – случайные величины, ξ_i принимает значения $(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots)$. Тогда ξ_1, \dots, ξ_n называют независимыми в совокупности (взаимно независимыми), если $\forall j_1, \dots, j_n$ выполнено:

$$P(\xi_1 = a_{j_1}^{(1)}, \dots, \xi_n = a_{j_n}^{(n)}) = \prod_{k=1}^n P(\xi_k = a_{j_k}^{(k)})$$

Пример 12.

1. Бросок игральной кости.

η – число очков, выпавшее на кости.

Распределение η – равномерное на $\{1, \dots, 6\}$

2. Пусть $A \subset \Omega$ – событие. Тогда случайная величина

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

Называется индикатором события A .

Другое обозначение: $I\{A\}$.

3. ξ называется биномиальной случайной величиной, если она принимает значения $\{1, 2, \dots, n\}$ и

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$$

Обозначение: $\xi \sim Bin(n, p)$

4. ξ называется пуассоновской случайной величиной, $\xi \sim Pois(\lambda)$, если ξ принимает значения в \mathbb{Z}_+ и

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

$\lambda > 0$ – параметр распределения.

Упражнение 5.

1. I_A и I_B независимы $\iff A$ и B независимы
2. ξ_1, \dots, ξ_n – с.в. Тогда они независимы в совокупности $\iff \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \prod_{k=1}^n P(\xi_k = x_k)$$

3. Если ξ и η – независимы, и $\xi \sim Bin(n, p)$, $\eta \sim Bin(m, p)$, то $\xi + \eta \sim Bin(n + m, p)$.
4. Если $\xi \sim Pois(\lambda_1)$, $\eta \sim Pois(\lambda_2)$, то $\xi + \eta \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Определение 5. Пусть ξ – случайная величина. Её *математическим ожиданием* называют

$$E\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)P(\omega)$$

Если ряд в правой части сходится абсолютно.

Пример 13. В классической модели Ω – конечно и $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ для $\forall \omega \in \Omega$. Тогда

$$E\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{\xi(\omega)}{|\Omega|} = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)$$

— среднее арифметическое значений.

Лемма 9 (свойства математического ожидания).

1. *Линейность*

$$E(a\xi + b\eta) = aE\xi + bE\eta, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

2. Пусть ξ принимает значения (a_1, a_2, \dots) . Тогда

$$E\xi = \sum_i a_i P(\xi = a_i)$$

3. Пусть ξ - принимает значения (a_1, a_2, \dots)

Тогда для \forall функции $\varphi(x)$:

$$E\varphi(\xi) = \sum_i \varphi(a_i)P(\xi = a_i)$$

4. Если $\xi \leq \eta$, то $E\xi \leq E\eta$

5. Если ξ и η - независимы, то

$$E\xi\eta = E\xi E\eta$$

Доказательство.

1. Очевидно из определения.

2.

$$\begin{aligned} E\xi &= \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)P(\omega) = \sum_i \sum_{\omega: \xi(\omega)=a_i} \xi(\omega)P(\omega) = \\ &= \sum_i \sum_{\omega: \xi(\omega)=a_i} a_i P(\omega) = \sum_i a_i \sum_{\omega: \xi(\omega)=a_i} P(\omega) = \sum_i a_i P(\xi = a_i) \end{aligned}$$

3. Аналогично 2)

4. Очевидно из определения.

5.

$$\begin{aligned} E\xi\eta &= \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)\eta(\omega)P(\omega) = \sum_{i,j} \sum_{\substack{\omega: \xi(\omega)=a_i \\ \eta(\omega)=b_j}} \eta(\omega)\xi(\omega)P(\omega) = \sum_{i,j} a_i b_j \sum_{\substack{\omega: \xi(\omega)=a_i \\ \eta(\omega)=b_j}} P(\omega) = \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j P(\xi = a_i, \eta = b_j) = |\text{независимость}| = \sum_{i,j} a_i b_j P(\xi = a_i)P(\eta = b_j) = \\ &= \left(\sum_i a_i P(\xi = a_i) \right) \left(\sum_j b_j P(\eta = b_j) \right) = E\xi E\eta \end{aligned}$$

□

Следствие 1. Для матожидания $E\xi$ (и $E\varphi(\xi)$) достаточно знать распределение случайной величины ξ .

Определение 6. $E\xi^k$ – момент порядка k случайной величины ξ (k -й момент)

$E(\xi - E\xi)^k$ – центральный момент порядка k случайной величины ξ (k -й центральный момент).

$E\xi(\xi - 1) \dots (\xi - k + 1)$ – факториальный момент порядка k случайной величины ξ , $k \in \mathbb{N}$

$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$ – дисперсия случайной величины ξ

Лемма 10 (свойства дисперсии).

1. $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \text{линейность} = E(\xi^2) - 2E(\xi E\xi) + E(E\xi)^2 = E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$
2. $D\xi \geq 0$
3. $D(c\xi) = c^2 D\xi$
4. $D\xi = 0 \iff P(\xi = E\xi) = 1$

Утверждение 2. Если ξ – биномиальная: $\xi \sim \text{Bin}(n, p)$, то $D\xi = np(1 - p)$

Определение 7. Пусть ξ и η – две случайные величины. Ковариацией случайных величин ξ и η называется

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

Если $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, то ξ и η называются некоррелированными.

1. $\text{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$
2. Если ξ и η независимы, то они не коррелируют. (обратное неверно!)
3. $D\xi = \text{cov}(\xi, \xi)$

Утверждение 3.

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} D(\xi + \eta) &= E(\xi + \eta - E(\xi + \eta))^2 = E(\xi - E\xi)^2 + E(\eta - E\eta)^2 + 2E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = \\ &= D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta) \end{aligned}$$

□

Следствие 2. Если ξ и η независимы, то $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

Случайные элементы

Определение 1. Пусть (Ω, \mathcal{F}) и (E, \mathcal{E}) – два измеримых пространства. Отображение $X: \Omega \rightarrow E$ называется случайным элементом, если оно является \mathcal{F} - измеримым. (или $\mathcal{F} \setminus \mathcal{E}$ - измеримым) т.е. $\forall B \in \mathcal{E}$

$$\{x \in B\} = X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Определение 2.

Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, то случайный элемент X называется *случайной величиной*.

Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$, то X называется *случайным вектором*.

Лемма 11 (достаточное условие измеримости отображения).

Пусть (Ω, \mathcal{F}) и (E, \mathcal{E}) – два измеримых пространства, $X: \Omega \rightarrow E$. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ таково, что $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$. Тогда X является случайным элементом \iff для $\forall B \in \mathcal{M}$

$$X^{-1}(B) = \{ \omega \mid X(\omega) \in B \} \in \mathcal{F}$$

Доказательство.

(\implies) очевидно из определения

(\impliedby)

Рассмотрим систему множеств

$$D = \{ B \in \mathcal{E} \mid X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \}$$

Убедимся в том, что D – это σ -алгебра. Операция прообраз сохраняет все теоретико-множественные операции.

$$X^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} D_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} X^{-1}(D_{\alpha})$$

$$X^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} D_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha} X^{-1}(D_{\alpha})$$

$$X^{-1}(B \setminus A) = X^{-1}(B) \setminus X^{-1}(A)$$

Тогда

1. $X^{-1}(E) = \Omega \in \mathcal{F} \implies E \in D$
2. $X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \{D_n \in D\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(D_n) \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in D$
3. Если $B, A \in D$, то $X^{-1}(B \setminus A) = X^{-1}(B) \setminus X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \implies B \setminus A \in D$

D – σ -алгебра и по условию $\mathcal{M} \subset D \implies$ в силу минимальности $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E} \subset D$ (А значит $E = D$)

т.е $\forall B \in \mathcal{E} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ и, стало быть, X – случайный элемент. \square

Следствие 1.

1. X – случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}) \iff \forall x \in \mathbb{R} : \{X \leq x\} = \{ \omega \mid X(\omega) \leq x \} \in \mathcal{F}$
2. $X = (X_1, \dots, X_n)$ – случайный вектор на $(\Omega, \mathcal{F}) \iff \forall i : X_i$ – случайная величина.

Доказательство.

(\implies) 1) и 2) очевидно из определения случайных величин и векторов

(\impliedby)

1. Рассмотрим систему $\mathcal{M} = \{(-\infty; x] \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Тогда $\sigma(\mathcal{M}) = B(\mathbb{R})$. По условию $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ для $\forall B \in \mathcal{M}$. По лемме о достаточном условии измеримости получим, что X – случайная величина.

2. Рассмотрим систему $\mathcal{M} = \{B_1 \times \dots \times B_n \mid B_i \in B(\mathbb{R})\}$

Тогда $\sigma(\mathcal{M}) = B(\mathbb{R}^n)$

$$X^{-1}(B_1 \times \dots \times B_n) = \{\omega \mid X_1(\omega) \in B_1, \dots, X_n(\omega) \in B_n\} = \bigcap_{i=1}^n X_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}$$

$\implies X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ для $\forall B \in \mathcal{M}$. По лемме получаем, что X – случайный вектор.

□

Смысл условия измеримости

Случайные величины и векторы — это численные и векторные характеристики случайных экспериментов. Нам нужно уметь вычислять вероятности вида $P(\xi \leq x)$ или $P(\xi \in [a, b])$

Но P задана формально только на σ -алгебре \mathcal{F}

Значит, нам нужно требовать, чтобы события вида $\{\xi \leq x\}$ и $\{\xi \in [a, b]\}$ лежали в \mathcal{F} .

Действия над случайными величинами и векторами

Определение 1. Функция $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется борелевской, если для $\forall B \in B(\mathbb{R}^m)$

$$\varphi^{-1}(B) = \{x \mid \varphi(x) \in B\} \in B(\mathbb{R}^n)$$

Лемма 12. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – случайный вектор. $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – борелевская функция. Тогда $\varphi(\xi)$ – тоже случайный вектор.

Доказательство. Пусть $B \in B(\mathbb{R}^m)$. Тогда

$$(\varphi(\xi))^{-1}(B) = \{\omega \mid \varphi(\xi(\omega)) \in B\} = \{\omega \mid \xi(\omega) \in \varphi^{-1}(B)\} \in \mathcal{F} \quad (\text{т.к. } \varphi^{-1}(B) \in B(\mathbb{R}^n))$$

$\implies \varphi(\xi)$ – случайный вектор.

□

Теорема 8. Любая непрерывная или кусочно-непрерывная функция является борелевской.

Следствие 1.

Пусть ξ и η – случайные величины, $c \in \mathbb{R}$.

Тогда $c\xi$, $\xi + c$, $\xi + \eta$, $\xi - \eta$ и $\frac{\xi}{\eta}$ (считаем, что $\eta(\omega) \neq 0 \forall \omega \in \Omega$) – тоже случайные величины.

Доказательство. $\varphi(x, y) = xy$ или $x + y$ – непрерывные функции в $\mathbb{R}^2 \implies$ борелевские.

Константа c – случайная величина \implies по лемме получаем, что $c\xi$, $\xi + c$, $\xi + \eta$, $\xi - \eta$ – случайные величины.

Рассмотрим

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Она тоже борелевская (кусочно-непрерывная) $\implies \varphi(\xi, \eta) = \frac{\xi}{\eta}$ – тоже случайная величина.

□

Лемма 13 (пределы случайной величины).

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность случайных величин.

Тогда $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n, \sup_n \xi_n, \inf_n \xi_n$ – тоже случайная величина.

(Они могут принимать значения $\pm\infty$)

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left\{ \omega \mid \sup_n \xi_n(\omega) \leq x \right\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\xi_n \leq x\} \in \mathcal{F} \\ \Rightarrow \sup_n \xi_n(\omega) &- \text{случайная величина} \\ \left\{ \omega \mid \inf_n \xi_n(\omega) \geq x \right\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\xi_n \geq x\} \in \mathcal{F} \\ \Rightarrow \inf_n \xi_n(\omega) &- \text{случайная величина} \\ \left\{ \omega \mid \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) \leq x \right\} &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ \xi_n \leq x + \frac{1}{k} \right\} \in \mathcal{F} \\ \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) &- \text{случайная величина} \\ \left\{ \omega \mid \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) \geq x \right\} &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ \xi_n \geq x - \frac{1}{k} \right\} \in \mathcal{F} \\ \Rightarrow \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) &- \text{случайная величина} \end{aligned}$$

□

Характеристики случайных величин и векторов

Распределение случайной величины вектора.

Определение 1. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) – вероятностное пространство, ξ – случайная величина на нем. Тогда распределением ξ называется вероятностная мера P_ξ на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, заданная по правилу.

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B), \quad B \subset B(\mathbb{R}).$$

Определение 2. Пусть ξ – случайный вектор размерности n на (Ω, \mathcal{F}, P) . Тогда его распределением P_ξ называется вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$, заданная по правилу

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B), \quad B \in B(\mathbb{R}^n)$$

Функция распределения

Определение 3. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) – вероятностное пространство. ξ – случайная величина на нем. Тогда функцией распределения случайной величины ξ называется

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$$

Определение 4. Случайная величина ξ называется

- дискретной, если её функция распределения дискретная.
- абсолютно непрерывной, если её функция распределения абсолютно непрерывна. В этом случае

$$P(\xi \leq x) = F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(t) dt$$

и функция $p_\xi(t)$ называется плотностью случайной величины ξ .

- сингулярной, если её функция распределения сингулярна
- непрерывной, если её функция распределения непрерывна.

Определение 5. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – случайный вектор на (Ω, \mathcal{F}, P) . Тогда его *функцией распределения* называется

$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n).$$

Порожденная σ -алгебра

Определение 6. Пусть ξ – случайная величина на (Ω, \mathcal{F}, P) . Тогда σ -алгеброй \mathcal{F}_ξ , порожденной ξ называется

$$\mathcal{F}_\xi = \{ \{ \xi \in B \} \mid B \in B(\mathbb{R}) \}$$

Определение 7. Если ξ – случайный вектор размерности n на (Ω, \mathcal{F}, P) , то σ -алгеброй, порожденной ξ называется

$$\mathcal{F}_\xi = \{ \{ \xi \in B \} \mid B \in B(\mathbb{R}^n) \}$$

Схема:

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{\xi} (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$$

$$P \rightarrow P_\xi$$

$$\mathcal{F}_\xi \leftarrow B(\mathbb{R})$$

Определение 8. Пусть ξ и η – случайные величины. Будем говорить, что η является \mathcal{F}_ξ – измеримой, если $\mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\xi$.

Упражнение 6. Пусть $\varphi(x)$ – борелевская функция, $\eta = \varphi(\xi)$. Тогда η – \mathcal{F}_ξ – измерима.

Теорема 9. Пусть η – \mathcal{F}_ξ – измерима. Тогда \exists борелевская функция $\varphi(x)$ т.ч. $\eta = \varphi(\xi)$

Определение 9.

Пусть $A \in \mathcal{F}$ – событие на (Ω, \mathcal{F}, P)

Тогда случайная величина

$$I_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

называется индикатором события A

Определение 10. Случайная величина ξ называется *простой*, если она принимает конечное число значений.

Тогда \exists набор $\{x_1, \dots, x_n\}$ из различных чисел т.ч

$$\xi = \sum_{k=1}^n x_k I_{A_k}$$

где события $A_1 \dots A_n$ – разбиение Ω . т.е. $A_k = \{\xi = x_k\}$

Определение 11. Пусть ξ – случайная величина.

Тогда обозначим: $\xi^+ = \max(\xi, 0)$ и $\xi^- = \max(-\xi, 0)$

Ясно, что $\xi = \xi^+ - \xi^-$, $|\xi| = \xi^+ + \xi^-$

Теорема 10 (о приближении простыми).

Пусть ξ – случайная величина. Тогда

1. Если $\xi \geq 0$, то \exists последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ простых неотрицательных случайных величин, т.ч. $\xi_n \uparrow \xi$ (т.е. $\forall \omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \leq \xi_{n+1}(\omega)$ и $\xi(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)$) и ξ_n явл. \mathcal{F}_ξ - измеримыми.
2. Если ξ - произвольная случайная величина, то \exists последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ простых \mathcal{F}_ξ - измеримых случайных величин т.ч. $|\xi_n| \leq |\xi| \forall n$ и $\xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)$

Доказательство.

1. Положим

$$\xi_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} I \left\{ \frac{k-1}{2^n} \leq \xi(\omega) < \frac{k}{2^n} \right\} + n I \{ \xi(\omega) \geq n \}$$

Легко видеть, что $\xi_n \uparrow \xi$ и ξ_n является \mathcal{F}_ξ - измеримым (т.к. $\left\{ \frac{k-1}{2^n} \leq \xi < \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathcal{F}_\xi$)

by А.Д.: не понял примера. Мой(возможно похож/такой же):

$\xi_n = \varphi_n(\xi)$, где $[\varphi_n(x)] = \min(n, [x])$, $\{\varphi_n(x)\}$ = максимальное число, не превосходящее $\{x\}$, представимое в виде $\frac{k}{2^n}$.

Очевидно, что $\xi_n \leq \xi$.

Ясно, что $\xi_n \uparrow \xi$, ибо целая часть в какой-то момент совпадет, а дробные части - двоично-рациональные приближения.

Покажем, что функции φ_n - борелевские, тогда ξ_n - \mathcal{F}_ξ -измеримы. Найдем прообраз $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Это тоже самое, что прообраз двоично-рациональных точек из B . В каждую двоично-рациональную дробь a переходит не более чем счетное кол-во полуинтервалов вида $[a + k, a + k + \frac{1}{2^n})$, где k - какое-то целое. (Бесконечно, только если $[a] = n$, иначе не более 1 полуинтервала). Но тогда искомый прообраз - счетное объединение полуинтервалов, а значит лежит в $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

2. Пусть $\xi = \xi^+ - \xi^-$ и пусть $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$ - последовательность простых \mathcal{F}_ξ - измеримых с.в. т.ч. $\eta_n \uparrow \xi^+$, а $\{\zeta_n, n \in \mathbb{N}\}$ - последовательность простых \mathcal{F}_ξ - измеримых т.ч. $\zeta_n \uparrow \xi^-$

Положим $\xi_n = \eta_n - \zeta_n$.

Тогда $\xi_n \rightarrow \xi \quad \forall \omega \in \Omega$ и $|\xi_n| = |\eta_n| + |\zeta_n| \leq |\xi^+| + |\xi^-| = |\xi|$

□

Математическое ожидание случайных величин

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) - вероятностное пространство, ξ - случайная величина на нем. Что такое $E\xi$?

Простые случайные величины.

Пусть ξ - простая случайная величина, т.е.

$$\xi = \sum_{k=1}^n x_k I_{A_k},$$

где $x_1 \dots x_n$ - различные числа, A_1, \dots, A_n - разбиение Ω , т.е. $A_k = \{\xi = x_k\}$

Определение 12. Для простой случайной величины ξ её математическим ожиданием называют

$$E\xi = \sum_{k=1}^n x_k P(A_k)$$

Свойства математического ожидания для простых случайных величин

1. $\xi = c = \text{const} \implies E\xi = c$

2. Линейность

$$E(a\xi + b\eta) = aE\xi + bE\eta, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Доказательство. Обозначим $\zeta = a\xi + b\eta$, пусть ξ принимает значения $x_1 \dots x_n$, η — значения $y_1 \dots y_m$, ζ — значения $z_1 \dots z_l$

Обозначим $C_{k,j} = \{\xi = x_k, \eta = y_j\}$.

Тогда

$$\begin{aligned} E\zeta &= \sum_{i=1}^l z_i P(\zeta = z_i) = \sum_{i=1}^l z_i \sum_{\substack{k,j: \\ ax_k + by_j = z_i}} P(\xi = x_k, \eta = y_j) = \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{\substack{k,j: \\ ax_k + by_j = z_i}} (ax_k + by_j) P(\xi = x_k, \eta = y_j) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (ax_k + by_j) P(\xi = x_k, \eta = y_j) = \\ &= \sum_{k=1}^n ax_k P(\xi = x_k) + \sum_{j=1}^m by_j P(\eta = y_j) = aE\xi + bE\eta \end{aligned}$$

□

3. Если $\xi \geq 0$, то $E\xi \geq 0$

Доказательство. Если $\xi \geq 0$, то все $x_k \geq 0 \implies E\xi \geq 0$

□

4. Если $\xi \leq \eta$, то $E\xi \leq E\eta$

Доказательство. Рассмотрим $\zeta = \eta - \xi \geq 0$. По свойству 3

$$0 \leq E\zeta = E(\eta - \xi) = E\eta - E\xi$$

□

Неотрицательные случайные величины

Определение 13. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина, а $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} - \forall$ последовательность неотрицательных простых случайных величин, т.ч. $\xi_n \uparrow \xi$.

Тогда $E\xi_n \leq E\xi_{n+1} \implies \exists$ предел $E\xi_n$ и

$$E\xi := \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n$$

Лемма 14. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ и η — простые неотрицательные случайные величины, причем $\xi_n \uparrow \xi \geq \eta$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \geq E\eta$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Рассмотрим $A_n = \{\omega \mid \xi_n - \eta \geq -\varepsilon\}$

Тогда

$$\begin{aligned} E\xi_n &= E(\xi_n I_{A_n}) + E(\xi_n I_{\bar{A}_n}) \geq E((\eta - \varepsilon) I_{A_n}) = \\ &= E\eta - \varepsilon P(A_n) \geq E\eta - \varepsilon P(\bar{A}_n) - \varepsilon P(A_n); \end{aligned}$$

где $c = \max_{\omega \in \Omega} \eta(\omega)$.

Заметим, что $A_n = \{\xi_n \geq \eta - \varepsilon\} \uparrow \Omega$ т.к. $\xi_n \uparrow \xi \geq \eta \implies P(A_n) \rightarrow P(\Omega) = 1$

Значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (E\eta - cP(\overline{A_n}) - \varepsilon P(A_n)) = E\eta - \varepsilon$$

В силу произвольности ε : $\lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \geq E\eta$ □

Следствие 1. *Определение математического ожидания для неотрицательных случайных величин корректно.*

Доказательство. Пусть $\xi \geq 0$ и $\xi_n \uparrow \xi$, $\eta_m \uparrow \xi$ – последовательность простых неотрицательных случайных величин. Тогда $\forall m$ в силу леммы

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n &\geq E\eta_m \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} E\eta_m \end{aligned}$$

Меняем ξ и η местами в рассуждении.

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} E\eta_m &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n &= \lim_{m \rightarrow \infty} E\eta_m \end{aligned}$$

□

Замечание. Если ξ – неотрицательная с.в., то

$$E\xi = \sup_{\eta: \eta \leq \xi} E\eta, \quad \text{где } \eta - \text{неотриц. простая с.в.}$$

Произвольные случайные величины

Определение 14. Пусть ξ – произвольная случайная величина, $\xi = \xi^+ - \xi^-$

1. Если $E\xi^+$ и $E\xi^-$ – конечны, то $\boxed{E\xi := E\xi^+ - E\xi^-}$
2. Если $E\xi^+ = +\infty$ и $E\xi^-$ – конечно, то $\boxed{E\xi := +\infty}$
3. Если $E\xi^+$ конечно и $E\xi^- = +\infty$, то $\boxed{E\xi := -\infty}$
4. Если $E\xi^+ = E\xi^- = +\infty$, то $E\xi$ не существует (не определено)

Замечание.

1. Математическое ожидание случайной величины это интеграл Лебега по вероятностной мере P

$$E\xi := \int_{\Omega} \xi dP = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega)$$

2. $E\xi$ – конечно $\iff E|\xi|$ – конечно.
3. Множество случ. величин ξ на (Ω, \mathcal{F}, P) с условием: $E\xi$ – конечно, образует пространство $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Далее мы убедимся, что это линейное пространство.

Свойства математического ожидания

- ① Пусть ξ – случайная величина, $E\xi$ – конечно.

Тогда для $\forall c \in \mathbb{R}$ $E(c\xi)$ конечно и

$$E(c\xi) = cE\xi$$

Доказательство. Для простых ξ , доказано ранее. Пусть $\xi \geq 0$.

Если $c \geq 0$, то возьмем последовательность простых неотрицательных случайных величин ξ_n т.ч. $\xi_n \uparrow \xi$. Тогда $c\xi_n \uparrow c\xi \implies$

$$E(c\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(c\xi_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n = cE\xi$$

Если $c < 0$, то $c\xi = -(c\xi)^- = -(-c\xi)$

$$\implies E(c\xi) = -E(c\xi)^- = -E((-c)\xi) = cE\xi$$

Пусть ξ – произвольная, $c \geq 0$

Тогда

$$E(c\xi) = E(c\xi)^+ - E(c\xi)^- = Ec\xi^+ - Ec\xi^- = c(E\xi^+ - E\xi^-) = cE\xi$$

Для $c < 0$ действуем аналогично. □

- ② Если $\eta \leq \xi$ и $E\eta, E\xi$ – конечны, то

$$E\eta \leq E\xi$$

Доказательство. Для простых ξ и η – доказано. Пусть ξ и η – неотрицательны. Тогда

$$E\eta = \sup_{\mu: \mu \leq \eta} E\mu \leq \sup_{\mu: \mu \leq \xi} E\mu = E\xi$$

Пусть ξ и η – произвольные.

Тогда $\xi^+(\omega) \geq \eta^+(\omega)$ и $\xi^-(\omega) \leq \eta^-(\omega)$

$$\implies E\eta = E\eta^+ - E\eta^- \leq E\xi^+ - E\xi^- = E\xi$$
□

- ③ Если $E\xi$ – конечно, то

$$|E\xi| \leq E|\xi|$$

Доказательство. $|\xi| = \xi^+ + \xi^- \implies E|\xi|$ – конечно.

По свойству 2

$$E(-|\xi|) \leq E\xi \leq E|\xi| \implies -E|\xi| \leq E\xi \leq E|\xi| \implies |E\xi| \leq E|\xi|$$
□

- ④ Аддитивность

Пусть ξ и η – случайные величины. $E\xi$ и $E\eta$ – конечны.

Тогда $E(\xi + \eta)$ – конечно и

$$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$$

Доказательство. Для простых доказано ранее. Пусть ξ и η – неотрицательные случайные величины. Возьмем ξ_n, η_n – последовательности простых неотрицательных случайных величин, т.ч. $\xi_n \uparrow \xi, \eta_n \uparrow \eta$. Тогда $\xi_n + \eta_n \uparrow \xi + \eta$

$$E(\xi + \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(\xi_n + \eta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n + \lim_{n \rightarrow \infty} E\eta_n = E\xi + E\eta$$

Пусть ξ и η – произвольные случайные величины.

Тогда $(\xi + \eta)^+ \leq (\xi^+ + \eta^+)$

Обозначим $\delta = (\xi^+ + \eta^+) - (\xi + \eta)^+ \geq 0$.

По доказанному, $E\delta = E\xi^+ + E\eta^+ - E(\xi + \eta)^+$

Рассмотрим $(\xi + \eta)^- = (\xi + \eta)^+ - (\xi + \eta) = \xi^+ + \eta^+ - \delta - (\xi + \eta) = \xi^- + \eta^- - \delta$.

Следовательно $E(\xi + \eta)^- = E\xi^- + E\eta^- - E\delta$

Тогда $E(\xi + \eta) = E(\xi + \eta)^+ - E(\xi + \eta)^- = E\xi^+ + E\eta^+ - E\delta - E\xi^- + E\eta^- + E\delta = E\xi + E\eta$ □

- ⑤ 1) Пусть $|\xi| \leq \eta$ и $E\eta$ – конечно. Тогда $E\xi$ конечно.
 2) Пусть $\xi \leq \eta$ и $E\eta < +\infty$, тогда $E\xi < +\infty$
 Если $\xi \geq \eta$ и $E\eta > -\infty$, то $E\xi > -\infty$.
 3) Если $E\xi$ конечно и $A \in \mathcal{F}$, то $E(\xi I_A)$ тоже конечно.

Доказательство.

- 1) $\xi^-, \xi^+ \leq \eta \implies E\xi^+ = \sup_{0 \leq \xi \leq \xi^+} E\xi \leq \sup_{0 \leq \xi \leq \eta} E\xi = E\eta < +\infty$
 Аналогично с $E\xi^-$. Тогда $E\xi = E\xi^+ - E\xi^-$ – тоже конечно
 2) $\xi^+ \leq \eta^+$ и $E\eta^+ < +\infty \implies$ по доказанному в 1), что
 $E\xi^+ < +\infty \implies E\xi < +\infty$
 3) $(\xi I_A)^+ = \xi^+ I_A \leq \xi^+ \implies E(\xi I_A)^+ -$ конечно.
 Аналогично, $E(\xi I_A)^- -$ тоже конечно. □

Определение 15. Говорят, что событие A происходит почти наверное, если $P(A) = 1$

- ⑥ $\xi = 0$ п.н. Тогда $E\xi = 0$

Доказательство. Пусть ξ – простая случайная величина.

$$\xi = \sum_{k=1}^n x_k I_{A_k}, \quad \text{где } x_1, \dots, x_n \text{ – различные и } A_1 \dots A_n \text{ – разбиение } \Omega : A_k = \{\xi = x_k\}$$

Тогда, если $x_k \neq 0$, то $A_k = \{\xi = x_k\} \subset \{\xi \neq 0\}$

$$\implies P(A_k) \leq P(\xi \neq 0) = 0$$

$$\implies E\xi = \sum_{k=1}^n x_k P(A_k) = 0$$

Если $\xi \geq 0$ – неотрицательная случайная величина, то $E\xi = \sup_{\eta \leq \xi} E\eta$, где η – простая неотрицательная с.в.

Но для таких $\eta : 0 \leq \eta \leq \xi = 0 \implies \eta = 0$ п.н.

Значит $E\eta = 0$

Если ξ – произвольная случайная величина, то $\xi^+ = 0$ п.н., $\xi^- = 0$ п.н.

По доказанному $E\xi^+ = E\xi^- = 0 \implies E\xi = E\xi^+ + E\xi^- = 0$ □

⑦ Если $\xi = \eta$ п.н. и $E\eta$ - конечно, то $E\xi$ - конечно и $E\xi = E\eta$

Доказательство. Рассмотрим $A = \{\xi \neq \eta\}$. Тогда $I_A = 0$ п.н. $\implies \xi I_A = 0$ п.н., $\eta I_A = 0$ п.н.

$$\begin{aligned}\xi &= \xi I_A + \xi I_{\bar{A}} = \xi I_A + \eta I_{\bar{A}} \implies E\xi \text{ конечно и} \\ E\xi &= E\xi I_A + E\eta I_{\bar{A}} = E\eta I_A + E\eta I_{\bar{A}} = E\eta\end{aligned}$$

□

⑧ Пусть $\xi \geq 0$ и $E\xi = 0$.

Тогда $\xi = 0$ п.н.

Доказательство. Рассмотрим $A = \{\xi > 0\}$ и $A_n = \{\xi > \frac{1}{n}\}$
Тогда $A_n \uparrow A$. Но

$$P(A_n) = EI_{A_n} \leq E(n\xi I_{A_n}) \leq nE\xi = 0$$

Отсюда в силу непрерывности вероятностной меры

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$$

□

⑨ Пусть $E\xi$ и $E\eta$ - конечно и для $\forall A \in \mathcal{F}$ выполнено:

$$E(\xi I_A) \leq E(\eta I_A)$$

Тогда $\xi \leq \eta$ п.н.

Доказательство. Рассмотрим $B = \{\xi > \eta\}$. Тогда $E\eta I_B \leq E\xi I_B \leq E\eta I_B$

Тогда $E\xi I_B = E\eta I_B \implies E(\xi - \eta)I_B = 0 \implies$ |по свойству 8| $\implies (\xi - \eta)I_B = 0$ п.н.

Но $(\xi - \eta)I_B = 0 \iff I_B = 0$

$\implies I_B = 0$ п.н. и, значит, $P(B) = 0$ □

Независимость случайных величин и векторов

Определение 1. Набор случайных векторов (величин) $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ называется *независимым в совокупности*, если независимы в совокупности $\{\mathcal{F}_{\xi_\alpha}\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ сигма-алгебры, ими порожденные.

Следствие 1. Случайные величины $\xi_1 \dots \xi_n$ - независимы в совокупности $\iff \forall B_1 \dots B_n \in B(\mathbb{R})$ события $\{\xi_1 \in B_1\} \dots \{\xi_n \in B_n\}$ - независимы в совокупности.

Теорема 11 (критерий независимости для функции распределения).

Случайные величины $\xi_1 \dots \xi_n$ - независимы в совокупности $\iff \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n) = P(\xi_1 \leq x_1) \dots P(\xi_n \leq x_n)$$

(функция распределения вектора $(\xi_1 \dots \xi_n)$ распадается в произведение функций распределения компонент)

Доказательство. $\xi_1 \dots \xi_n$ – независимы в совокупности $\iff \sigma$ -алгебры $\mathcal{F}_{\xi_1} \dots \mathcal{F}_{\xi_n}$ – независимы в совокупности \iff [критерий независ. σ -алгебр] $\iff \pi$ -системы порождающие эти σ -алгебры независимы.

Для σ -алгебры $\mathcal{F}_{\xi_i} = \{ \{ \xi_i \in B \} \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$ такой π -системой будет $\{ \{ \xi_i \leq x \} \mid x \in \mathbb{R} \}$.

Это следует из того, что $\sigma((-\infty; x] : x \in \mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\iff \pi$ -системы $\{ \{ \xi_i \leq x_i \} \mid x_i \in \mathbb{R} \}$ – независимы

$\iff \forall x_1 \dots x_n$ – события. $\{ \xi_1 \leq x_1 \} \dots \{ \xi_n \leq x_n \}$ независимы в совокупности

$$\iff P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n) = P(\xi_1 \leq x_1) \dots P(\xi_n \leq x_n), \quad \forall x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$$

□

Теорема 12 (функции от независимых – тоже независимы).

Пусть $\xi_1 \dots \xi_m$ – независимые случайные векторы, ξ_i имеет размерность n_i .

Пусть $f_i: \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{k_i}$ – борелевская функция, $\forall i = 1 \dots m$

Тогда $f_1(\xi_1), \dots, f_m(\xi_m)$ – независимы в совокупности.

Доказательство. Обозначим $\eta_i = f_i(\xi_i)$.

Тогда $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_i})$:

$$\{ \eta_i \in B \} = \{ f_i(\xi_i) \in B \} = \{ \xi_i \in (f_i^{-1})(B) \} \in \mathcal{F}_{\xi_i}$$

то есть $\mathcal{F}_{\eta_i} \subset \mathcal{F}_{\xi_i}$

По условию $\mathcal{F}_{\xi_1} \dots \mathcal{F}_{\xi_m}$ – независимы $\implies \mathcal{F}_{\eta_1} \dots \mathcal{F}_{\eta_m}$ – тоже независимы.

$\iff \eta_1 \dots \eta_m$ – независимы в совокупности.

□

Теорема 13. Пусть случайные величины ξ и η – независимы, причем $E\xi$ и $E\eta$ – конечны. Тогда $E\xi\eta$ тоже конечно и $E\xi\eta = E\xi E\eta$

Доказательство. Пусть ξ и η – простые случайные величины,

ξ – принимает значения $x_1 \dots x_n$, η – принимает значения $y_1 \dots y_m$.

Тогда по линейности:

$$\begin{aligned} E\xi\eta &= \sum_{k,j} x_k y_j P(\xi = x_k, \eta = y_j) = |\text{независимость}| = \sum_{k,j} x_k y_j P(\xi = x_k) P(\eta = y_j) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n x_k P(\xi = x_k) \right) \left(\sum_{j=1}^m y_j P(\eta = y_j) \right) = E\xi E\eta \end{aligned}$$

Пусть теперь η и ξ – неотрицательные случайные величины.

Тогда по теореме о приближении простыми \exists последовательность простых \mathcal{F}_ξ – измеримых неотрицательных случайных величин $\{ \xi_n, n \in \mathbb{N} \}$, т.ч. $\xi_n \uparrow \xi$. Аналогично $\exists \{ \eta_n, n \in \mathbb{N} \}$ – последовательных простых неотрицательных \mathcal{F}_η – измеримых случайных величин, т.ч. $\eta_n \uparrow \eta$

Тогда $\xi_n \eta_n \uparrow \xi\eta$ и $\forall n: \xi_n$ и η_n – независимы.

$$\implies E\xi\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n \eta_n = |\text{независимость } \xi_n \text{ и } \eta_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n E\eta_n = E\xi E\eta$$

Пусть ξ и η – произвольные с.в. Тогда ξ^+, ξ^- – функции от ξ , η^+, η^- – функции от $\eta \implies \xi^+, \xi^-$ – независимы с η^+, η^-

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} (\xi\eta)^+ &= \xi^+ \eta^+ + \xi^- \eta^- \implies E(\xi\eta)^+ = E(\xi^+ \eta^+) + E(\xi^- \eta^-) = \\ &= |\text{независимость } \xi^+ \text{ с } \eta^+ \text{ и } \xi^- \text{ с } \eta^-| = E\xi^+ E\eta^+ + E\xi^- E\eta^- \end{aligned}$$

Аналогично $E(\xi\eta)^- = E\xi^+ E\eta^- + E\xi^- E\eta^+$

$$\implies E\xi\eta \text{ конечно и } E\xi\eta = E\xi^+\eta^+ + E\xi^-E\eta^- - E\xi^+\eta^- - E\xi^-E\eta^+ = E\xi E\eta$$

□

Дисперсия и ковариация

Определение 2. Дисперсией с.в. ξ называют

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2, \quad \text{если } E\xi \text{ существует}$$

Определение 3. Ковариацией случайных величин ξ и η называют

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

Если $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, то ξ и η называются *некоррелированными*.

Если $D\xi$ и $D\eta$ – конечны и положительны, то можно определить расстояние

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

которое называется *коэффициентом корреляции* ξ и η

Лемма 15 (свойства дисперсии и ковариации).

Если все математические ожидания конечны, то

1. Ковариация билинейна.
2. $\text{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$
 $D\xi = \text{cov}(\xi, \xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2$
3. $D(c\xi) = c^2 D\xi, D(\xi + c) = D\xi$
4. Неравенство Коши-Буняковского.

$$|E\xi\eta|^2 \leq E\xi^2 E\eta^2$$

5. $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$, причем $\rho(\xi, \eta) = 1 \iff \xi$ и η – п.н. линейно зависимы.

Доказательство.

Свойства 1) – 3) легко вытекают из свойств математического ожидания.

4. Рассмотрим для $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda) = E(\xi + \lambda\eta)^2 \geq 0$$

$$\text{Но } f(\lambda) = E\xi^2 + 2E\xi\eta\lambda + \lambda^2 E\eta^2 \geq 0 \iff \text{дискриминант} \leq 0, \text{ т.е. } 4[(E\xi\eta)^2 - E\xi^2 E\eta^2] \leq 0$$

5. Рассмотрим $\xi_1 = \xi - E\xi, \eta_1 = \eta - E\eta$

$$\text{Тогда } \text{cov}(\xi, \eta) = E\xi_1\eta_1, \quad D\xi = E\xi_1^2, \quad D\eta = E\eta_1^2$$

$$\implies |\rho(\xi, \eta)| = \left| \frac{E\xi_1\eta_1}{\sqrt{E\xi_1^2 E\eta_1^2}} \right| \leq 1, \text{ по нер-ву Коши-Буняковского.}$$

$$\text{При этом } |\rho(\xi, \eta)| = 1 \iff \text{дискриминант} = 0 \iff \exists! \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ т.ч. } f(\lambda_0) = 0. \text{ т.е. } E(\xi_1 + \lambda_0\eta_1)^2 = 0$$

$$\implies \xi_1 + \lambda_0\eta_1 = 0 \text{ п.н. т.е.}$$

$$\xi = E\xi - \lambda_0(\eta - E\eta) \text{ п.н.}$$

□

Следствие 2. Если ξ_1, \dots, ξ_n – попарно некоррелируют, $D\xi_i < +\infty$, тогда

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{k=1}^n D\xi_k$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} D(\xi_1 + \dots + \xi_k) &= \text{cov}(\xi_1 + \dots + \xi_k, \xi_1 + \dots + \xi_k) = \\ &= \sum_{i,j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_i \text{cov}(\xi_i, \xi_i) = \sum_i D\xi_i \end{aligned}$$

□

Следствие 3. ξ_1, \dots, ξ_n – независимы, $D\xi_i < +\infty$. Тогда $D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{k=1}^n D\xi_k$

Определение 4. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – случ. вектор.

Тогда его *мат. ожиданием* называется вектор из мат. ожиданий его компонент:

$$E\xi = (E\xi_1, \dots, E\xi_n)$$

Определение 5. Дисперсией вектора ξ называется его матрица ковариаций:

$$D\xi = \|\text{cov}(\xi_i, \xi_j)\|_{i,j=1}^n \text{ — матрица } n \times n$$

Лемма 16. Матрица ковариаций случайного вектора является симметрической и неотрицательно определенной.

Доказательство. $D\xi = \|\text{cov}(\xi_i, \xi_j)\|_{i,j=1}^n$ – симметричная т.к. $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \text{cov}(\xi_j, \xi_i)$

Пусть $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ – вектор.

$$\begin{aligned} \langle D\xi x, x \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) x_i x_j = |\text{линейность ковариации}| = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(x_i \xi_i, x_j \xi_j) = \\ &= |\text{суммируем по } i| = \sum_{j=1}^n \text{cov}(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n, x_j \xi_j) = \\ &= |\text{суммируем по } j| = \text{cov}(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n, x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n) = D(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n) \geq 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow неотр. определенная

□

Неравенства

① Неравенство Маркова

Пусть $\xi \geq 0$ – неотрицательная случайная величина.

Тогда для $\forall \varepsilon > 0$:
$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}$$

Доказательство. $P(\xi \geq \varepsilon) = E I\{\xi \geq \varepsilon\} \leq E \left(\frac{\xi}{\varepsilon} I\{\xi \geq \varepsilon\} \right) \leq E \left(\frac{\xi}{\varepsilon} \right) = \frac{E\xi}{\varepsilon}$

□

② Неравенство Чебышева

Если $D\xi < +\infty$, то для $\forall \varepsilon > 0$:
$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Доказательство.

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) = P(|\xi - E\xi|^2 \geq \varepsilon^2) \leq |\text{нер-во Маркова}| \leq \frac{E|\xi - E\xi|^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

□

③ Неравенство Йенсена

Пусть $g(x)$ – выпуклая вниз функция. Пусть $E\xi$ – конечно. Тогда

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi)$$

Доказательство. Т.к $g(x)$ – выпуклая вниз функция, то $\forall x_0 \in \mathbb{R} \exists \lambda(x_0) : \text{т.ч. } \forall x \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$g(x) \geq g(x_0) + \lambda(x_0)(x - x_0)$$

Положим $x = \xi$, $x_0 = E\xi$. Тогда

$$g(\xi) \geq g(E\xi) + \lambda(E\xi)(\xi - E\xi)$$

Берем математическое ожидание от обеих частей:

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi) + \lambda(E\xi)E(\xi - E\xi) = g(E\xi)$$

□

Виды сходимостей случайных величин

Определение 1.

1. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится по вероятности* к случайной величине ξ (обозначение $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$), если для $\forall \varepsilon > 0$:

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

2. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится с вероятностью 1* к случайной величине ξ (или *сходится почти наверное*), если

$$P(\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)) = 1$$

Обозначения: $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, $\xi_n \rightarrow \xi$ п.н. или $\xi_n \rightarrow \xi$ P -п.н.

3. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится в среднем порядка $p > 0$* к случайной величине ξ (или *сходится в пространстве L^p*), если

$$E|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$

4. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится по распределению* к случайной величине ξ , если для \forall ограниченной непрерывной ф-ции $f(x)$ выполнено

$$Ef(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Ef(\xi)$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$

Теорема 14 (Закон больших чисел в форме Чебышева).

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность попарно некоррелированных случайных величин, т.ч. $\forall n : D\xi_n \leq C$.

Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) &\leq |\text{нер-во Чебышева}| \leq \frac{D\left(\frac{S_n - ES_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D(S_n - ES_n)}{n^2\varepsilon^2} = \\ &= \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} = |\xi_i \text{ и } \xi_j - \text{некорр.}| = \frac{\sum_{j=1}^n D\xi_j}{n^2\varepsilon^2} \leq \frac{Cn}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

□

Следствие 1. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые случайные величины, т.ч. $D\xi_n \leq C, \forall n$ и $E\xi_n = a, \forall n$.

Тогда, обозначив $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, получаем

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a$$

Смысл ЗБЧ:

$\xi_1 \dots \xi_n \dots$ – результаты независимых проведенных одного и того же эксперимента.

Тогда их среднее арифметическое сходится к среднему значению результата одного эксперимента $E\xi_i$

Если ξ_i – индикаторы наступления некоторого события A :

$$\xi_i = I\{A \text{ наступило в } i\text{-м эксперименте}\}$$

то

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} E\xi_i = P(A)$$

Таким образом ЗБЧ – это принцип устойчивости частот постулировавшийся в начале курса.

Лемма 17 (критерий сходимости почти наверное).

$$\xi_n \xrightarrow{n.n.} \xi \iff \text{для } \forall \varepsilon > 0 : P(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Доказательство.

Обозначим $A_k^\varepsilon = \{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\}$ и $A^\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon$

Тогда $\{\xi_n \rightarrow \xi\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m^{\frac{1}{m}}$

Получаем

$$P(\xi_n \rightarrow \xi) = 0 \iff P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \iff \forall m : P\left(A_m^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 : P(A^\varepsilon) = 0.$$

$$\text{Но } \bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon \downarrow A^\varepsilon, \text{ поэтому } P(A^\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon\right) = 0 \iff P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Осталось заметить, что $\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon = \{\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\}$ (by А.Д.: почему это верно? Верю только при строгом неравенстве)

□

Теорема 15 (взаимоотношение различных видов сходимости).

Выполнены соотношения

$$1. \xi_n \xrightarrow{n.n.} \xi \implies \xi_n \xrightarrow{P} \xi$$

$$2. \xi_n \xrightarrow{L^P} \xi \implies \xi_n \xrightarrow{P} \xi$$

$$3. \xi_n \xrightarrow{P} \xi \implies \xi_n \xrightarrow{d} \xi$$

Доказательство.

1. Если $\xi_n \xrightarrow{n.n.} \xi$, то по лемме для $\forall \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} P(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{но событие } \{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} \subset \{\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \\ \implies P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) &\leq P(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$2. P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^P \geq \varepsilon^P) \leq |\text{нер-во Маркова}| \leq \frac{E|\xi_n - \xi|^P}{\varepsilon^P} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

3. Пусть $f(x)$ - ограниченная непрерывная функция, $|f(x)| \leq C, \forall x \in \mathbb{R}$.

Пусть $\varepsilon > 0$ - фиксировано. Возьмем такое N , что

$$P(|\xi| > N) \leq \frac{\varepsilon}{4C}$$

Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[-N, N]$, т.е. $\exists \delta > 0 : \forall x, y$ с условием $|x| \leq N$ и $|x - y| \leq \delta$ выполнено

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим следующее разбиение Ω

$$A_1 = \{|\xi_n - \xi| \leq \delta, |\xi| \leq N\}$$

$$A_2 = \{|\xi_n - \xi| \leq \delta, |\xi| > N\}$$

$$A_3 = \{|\xi_n - \xi| > \delta\}$$

Тогда

$$|Ef(\xi_n) - Ef(\xi)| \leq E|f(\xi_n) - f(\xi)| = E(|f(\xi_n) - f(\xi)|(I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3})) \left(\leq \right)$$

Если выполнено A_1 , то $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies E|f(\xi_n) - f(\xi)|I_{A_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}EI_{A_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Если выполнено A_2 или A_3 , то $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq 2C$

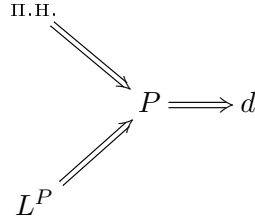
$$\begin{aligned} \implies \left(\leq \right) \frac{\varepsilon}{2} + 2CE(I_{A_2} + I_{A_3}) &= \frac{\varepsilon}{2} + 2C(P(A_2) + P(A_3)) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2CP(|\xi| > N) + 2CP(|\xi_n - \xi| > \delta) \leq \varepsilon + 2CP(|\xi_n - \xi| > \delta) \end{aligned}$$

По условию $P(|\xi_n - \xi| > \delta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Значит в силу произвольности $\varepsilon > 0$, $Ef(\xi_n) \rightarrow Ef(\xi)$, т.е. $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$

□

Замечание. Сходимость по распределению случайных величин — это, на самом деле, сходимость их распределений.



Обратных стрелок нигде нет. Можно привести контрпримеры.

Усиленный закон больших чисел для случайных величин с ограниченными дисперсиями

Определение 1. Последовательность $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ чисел из \mathbb{R} называется *фундаментальной*, если

$$|x_n - x_m| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow +\infty$$

Теорема 16 (критерий Коши). *Последовательность $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходится \iff она фундаментальна.*

Теорема 17 (критерий Коши сходимости почти наверное). *Последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходится почти наверное $\iff \{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна с вероятностью 1.*

Доказательство.

(\implies) Пусть $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$.

Тогда если $\omega \in \left\{ \omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega) \right\}$, то $\omega \in \{ \{\xi_n(\omega)\} - \text{фундаментальна} \}$

$$\implies P(\{ \xi_n \} - \text{фундаментальна}) \geq P(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi) = 1$$

(\impliedby) Обозначим $A = \{ \{\xi_n\} - \text{фундаментальна} \}$

Тогда $\forall \omega \in A$ у $\xi_n(\omega)$ \exists предел $\xi(\omega)$

$$\xi(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega), \quad \text{если } \omega \in A$$

Если же $\omega \notin A$, то положим $\xi(\omega) := 0$

Тогда $\xi_n I_A \rightarrow \xi \implies \xi$ — случайная величина (как предел случайных величин)

$$\begin{aligned}
 P(\xi_n \rightarrow \xi) &\geq P(\{ \xi_n \rightarrow \xi \} \cap A) = P(A) = 1 \\
 &\implies \xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi
 \end{aligned}$$

□

Лемма 18 (критерий фундаментальности с вероятностью 1).

Последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна с вероятностью 1 \iff для $\forall \varepsilon > 0$:

$$P(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi_n| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Доказательство. Полностью аналогично док-ву критерия сходимости почти наверное. □

Теорема 18 (Колмогоров-Хинчин, достаточное условие для сходимости ряда почти наверное).

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность независимых случайных величин т.ч. $E\xi_n = 0, \forall n$ и $E\xi_n^2 < +\infty, \forall n$

Тогда если сходится $\sum_n E\xi_n^2 < +\infty$, то ряд $\sum_n \xi_n$ сходится почти наверное.

Лемма 19 (Неравенство Колмогорова).

Пусть $\xi_1 \dots \xi_n$ – независимые с.в.

$E\xi_i = 0$ и $E\xi_i^2 < +\infty$. Обозначим $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$

Тогда

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{ES_n^2}{\varepsilon^2}$$

Доказательство. Обозначим $A = \left\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right\}$

Разделим A на следующие части:

$A_k = \{|S_k| \geq \varepsilon \text{ и } |S_i| < \varepsilon \text{ для } i = 1 \dots k-1\}$.

Тогда $A_k \cap A_j = \emptyset$ при $k \neq j$ и $A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$

Рассмотрим

$$ES_n^2 \geq E(S_n^2 I_A) = E \sum_{k=1}^n (S_n^2 I_{A_k}) = \sum_{k=1}^n E(S_n^2 I_{A_k})$$

$$\begin{aligned} ES_n^2 I_{A_k} &= E(S_k + \xi_{k+1} + \dots + \xi_n)^2 I_{A_k} = \\ &= ES_k^2 I_{A_k} + 2ES_k(\xi_{k+1} + \dots + \xi_n) I_{A_k} + E(\xi_{k+1} + \dots + \xi_n)^2 I_{A_k} \end{aligned}$$

Но I_{A_k} зависит от $S_1 \dots S_k \implies S_k I_{A_k}$ не зависит от $\xi_{k+1} \dots \xi_n$

Следовательно, второе слагаемое

$$\begin{aligned} ES_k I_{A_k} (\xi_{k+1} + \dots + \xi_n) &= ES_k I_{A_k} E(\xi_{k+1} + \dots \xi_n) = 0 \quad (\forall i : E\xi_i = 0) \\ \implies ES_n^2 I_{A_k} &= ES_k^2 I_{A_k} + E(\xi_{k+1} + \dots + \xi_n)^2 I_{A_k} \geq ES_k^2 I_{A_k} \geq \varepsilon^2 E I_{A_k} = \varepsilon^2 P(A_k) \end{aligned}$$

т.к. $S_k \geq \varepsilon$ на A_k .

В итоге

$$ES_n^2 \geq \sum_{k=1}^n E(S_n^2 I_{A_k}) \geq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^n P(A_k) = \varepsilon^2 P(A)$$

□

Док-во теоремы Колмогорова-Хинчина.

Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ сходится п.н. \iff (критерий Коши) \iff

$\iff \{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна с вероятностью 1 \iff (критерий фундаментальности) \iff

\iff для $\forall \varepsilon > 0 : P(\sup_{k \geq n} |S_k - S_n| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Оценим её: Рассмотрим.

$$\begin{aligned}
P(\sup_{k \geq n} |S_k - S_n| \geq \varepsilon) &= P\left(\bigcup_{k \geq n} \{|S_k - S_n| \geq \varepsilon\}\right) = |\text{непрерывность вер. меры}| = \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{N+n} \{|S_k - S_n| \geq \varepsilon\}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\max_{1 \leq k \leq N} |S_{k+n} - S_n| \geq \varepsilon\right) = |\text{нер-во Колмогорова}| \leq \\
&\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E(S_{n+N} - S_n)^2}{\varepsilon^2} = |\text{независимость, } E\xi_i = 0| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=n+1}^{n+N} E\xi_k^2}{\varepsilon^2} = \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} E\xi_k^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

т.к. это остаток сходящегося ряда (по условию $\sum_n E\xi_n^2 < +\infty$)

□

Лемма 20 (Тёплиц).

Пусть последовательность $x_n \rightarrow x$, $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ т.ч. $a_n \geq 0$ и $b_n = \sum_{j=1}^n a_j \uparrow +\infty$.

Тогда

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n a_j x_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное. Возьмём $n_0 = n_0(\varepsilon)$ т.ч. $\forall n > n_0 : |x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

Далее, возьмем $n_1 > n_0$, т.ч.

$$\frac{1}{b_{n_1}} \sum_{j=1}^{n_0} a_j |x_j - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда для $\forall n > n_1$

$$\begin{aligned}
\left| \left(\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n a_j x_j \right) - x \right| &= \left| \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n a_j (x_j - x) \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n_0} a_j |x_j - x| + \frac{1}{b_n} \sum_{j=n_0+1}^n a_j |x_j - x| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{b_n} \sum_{j=n_0+1}^n a_j \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Лемма 21 (Кронекер).

Пусть ряд $\sum_n x_n$ сходится.

$\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ – некоторая последовательность $a_n \geq 0$ т.ч. $b_n = \sum_{j=1}^n a_j \uparrow +\infty$

Тогда

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n b_j x_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Доказательство. Обозначим $S_n = x_1 + \dots + x_n$. Тогда $\{S_n\}$ сходится.

$$\sum_{j=1}^n b_j x_j = \sum_{j=1}^n b_j (S_j - S_{j-1}) = b_n S_n - \sum_{j=1}^n S_{j-1} (b_j - b_{j-1}) = b_n S_n - \sum_{j=1}^n S_{j-1} a_j$$

Делим на b_n :

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n b_j x_j = S_n - \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n S_{j-1} a_j$$

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$$

А по лемме Тёплица:

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n S_{j-1} a_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

\Rightarrow их разность стремится к нулю. □

Теорема 19 (Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова-Хинчина).

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые с.в. т.ч. $D\xi_n < +\infty \forall n$.

Пусть последовательность $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ т.ч. $b_n > 0, b_n \uparrow +\infty$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{b_n^2} < +\infty$$

Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Тогда

$$\boxed{\frac{S_n - ES_n}{b_n} \xrightarrow{n.н.} 0} \quad (\text{при } n \rightarrow \infty)$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\frac{S_n - ES_n}{b_n} = \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k \left(\frac{\xi_k - E\xi_k}{b_k} \right)$$

Далее с.в. $\eta_k = \frac{\xi_k - E\xi_k}{b_k}$ – независимы и $E\eta_k = 0$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} E\eta_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} E \left(\frac{\xi_k - E\xi_k}{b_k} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D\xi_k}{b_k^2} < +\infty$$

\Rightarrow по теореме о сходимости ряда, ряд $\sum_k \eta_k$ сходится п.н.

Но по лемме Кронекера $\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k \left(\frac{\xi_k - E\xi_k}{b_k} \right)$ сходится к нулю для всех ω , для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k - E\xi_k}{b_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k$$

сходится. А этот ряд сходится.

$$\Rightarrow \frac{S_n - ES_n}{b_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$$

□

Следствие 1. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые случайные величины т.ч. $D\xi_n \leq C \forall n \in \mathbb{N}$
Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$$

Если, к тому же, $E\xi_i = a \forall i$, то

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} a$$

Доказательство. Возьмем $b_n = n \implies b_n > 0, b_n \uparrow +\infty$.

Тогда

$$\sum_n \frac{D\xi_n}{b_n^2} = \sum_n \frac{D\xi_n}{n^2} \leq \sum_n \frac{c}{n^2} < +\infty$$

Согласно УЗБЧ

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

Если же $E\xi_n = a$, то $ES_n = na$

$$\frac{S_n}{n} - a \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \iff \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} a$$

□

Смысл УЗБЧ: обоснование феномена устойчивости частот появлений событий в последовательностях независимых экспериментов.

Если $\xi_i = I\{\text{событие } A \text{ произошло в } i\text{-том эксперименте}\}$ то

$$\nu_n(A) = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_1 = P(A)$$

Предельный переход под знаком E

Вопрос: $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \implies E\xi_n \rightarrow E\xi$?

Теорема 20 (О монотонной сходимости).

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi, \eta$ – с.в.

1. Если $\xi_n \uparrow \xi, \xi_n \geq \eta, \forall n \in \mathbb{N}$ и $E\eta > -\infty$, то $E\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n$
2. Если $\xi_n \downarrow \xi, \xi_n \leq \eta, \forall n \in \mathbb{N}$ и $E\eta < +\infty$, то $E\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n$

Теорема 21 (лемма Фату).

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \eta$ – с.в., $E\eta$ – конечно

1. Если $\xi_n \geq \eta, \forall n \in \mathbb{N}$, то $\varliminf_n E\xi_n \geq E \varliminf_n \xi_n$
2. Если $\xi_n \leq \eta, \forall n \in \mathbb{N}$, то $\varlimsup_n E\xi_n \leq E \varlimsup_n \xi_n$

3. Если $|\xi_n| \leq \eta, \forall n \in \mathbb{N}$, то $E \underline{\lim}_n \xi_n \leq \underline{\lim}_n E\xi_n \leq \overline{\lim}_n E\xi_n \leq E \overline{\lim}_n \xi_n$

Доказательство.

1. Обозначим $\psi_n = \inf_{k \geq n} \xi_k$. Тогда $\psi_n \uparrow \underline{\lim}_n \xi_n$ и $\psi_n \geq \eta, \forall n \in \mathbb{N}$.

По теореме о монотонной сходимости получаем

$$\lim_n E\psi_n = E \underline{\lim}_n \xi_n$$

Осталось заметить, что

$$E \underline{\lim}_n \xi_n = \lim_n E\psi_n = \underline{\lim}_n E\psi_n \leq \underline{\lim}_n E\xi_n$$

т.к. $\xi_n \geq \psi_n, \forall n$

2. Следует из 1) заменой ξ_n на $-\xi_n$

3. Сразу следует из 1) и 2)

□

Теорема 22 (Лебега о мажорируемой сходимости).

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность с.в. т.ч. $\xi_n \xrightarrow{n.н.} \xi$ и для $\forall n : |\xi_n| \leq \eta$, причем $E\eta$ конечно.

Тогда $E\xi = \lim_n E\xi_n$ и, более того, $E|\xi_n - \xi| \rightarrow 0$ (т.е. $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$)

Доказательство. Заметим, что $\xi = \lim_n \xi_n = \underline{\lim}_n \xi_n = \overline{\lim}_n \xi_n$ п.н.

\implies по лемме Фату

$$\begin{aligned} E\xi &= E \underline{\lim}_n \xi_n \leq \underline{\lim}_n E\xi_n \leq \overline{\lim}_n E\xi_n \leq E \overline{\lim}_n \xi_n = E\xi \\ &\implies \lim_n E\xi_n = E\xi \end{aligned}$$

Конечность $E\xi$ следует из того, что $|\xi| \leq \eta$ п.н. и конечности $E\eta$

Для обоснования сходимости в L^1 достаточно взять $\psi_n = |\xi_n - \xi|$.

Тогда $|\psi_n| \leq 2|\eta|$ п.н. и $\psi_n \xrightarrow{п.н.} 0 \implies E\psi_n \rightarrow 0$

□

Усиленный закон больших чисел для с.в. с конечным математическим ожиданием

Определение 1. Пусть $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность событий.

Тогда событием $\{A_n \text{ бесконечное число}\} = \{A_n \text{ б.ч}\}$ наз. событие, заключающееся в том, что произошло бесконечное число событий в последовательности $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$. Формально:

$$\{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

Лемма 22 (Борель-Кантелли).

1. Если $\sum_n P(A_n) < +\infty$, то $P(A_n \text{ б.ч.}) = 0$
2. Если $\sum_n P(A_n) = +\infty$ и все A_n - независимые, то $P(A_n \text{ б.ч.}) = 1$

Доказательство.

1.

$$P(A_n \text{ б.ч.}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq n} P(A_k) = 0$$

2.

$$P(A_n \text{ б.ч.}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - P\left(\bigcap_{k \geq n} \bar{A}_k\right)\right)$$

Но

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k \geq n} \bar{A}_k\right) &= |\text{непр. вер. меры}| = \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k \geq n}^N \bar{A}_k\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N P(\bar{A}_k) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N (1 - P(A_k)) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N e^{-P(A_k)} = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-\sum_{k=n}^N P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{т.к. } \forall n : \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = +\infty$$

$$\implies P(A_n \text{ б.ч.}) = 1$$

□

Лемма 23. Пусть ξ - неотр. с.в., $E\xi$ - конечно. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) \leq E\xi \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi \geq n)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(k \leq \xi < k+1) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(k \leq \xi < k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(k \leq \xi < k+1) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E(k I\{k \leq \xi < k+1\}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} E(\xi I\{k \leq \xi < k+1\}) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \xi I\{k \leq \xi < k+1\}\right) = \\ &= E\xi \leq E\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) I\{k \leq \xi < k+1\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) + \sum_{k=0}^{\infty} P(k \leq \xi < k+1) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) + 1 \end{aligned}$$

□

Определение 2. Случайные величины ξ и η наз. *одинаково распределенными*, если у них совпадают функции распределения.

Обозначение: $\xi \stackrel{d}{=} \eta$

Утверждение 4. Если $\xi \stackrel{d}{=} \eta$, то для \forall борелевской $g(x)$ т.ч. $Eg(\xi)$ конечно, выполнено:

$$Eg(\xi) = Eg(\eta)$$

Теорема 23 (Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова).

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые одинаково распределенные случ. величины (н.о.р.с.в), т.ч.: $E|\xi_i| < +\infty$.

Тогда

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} m = E\xi_1$$

Доказательство. $E|\xi_i|$ – конечно. Тогда по доказанной выше лемме:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_1| \geq n) < +\infty$$

В силу одинаковости распределенности:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_1| \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| \geq n) < +\infty$$

Согласно лемме Бореля-Кантелли:

$$P(\{|\xi_n| \geq n\} \text{ б.ч.}) = 0$$

\implies с вероятностью 1 $\forall n$, кроме конечного числа, выполнено $\{|\xi_n| \leq n\}$.

Обозначим $\tilde{\xi}_n = \xi_n I\{|\xi_n| \leq n\}$.

Тогда с вероятностью 1, $\tilde{\xi}_n = \xi_n$, кроме конечного числа элементов.

Считаем, что $E\xi_i = 0$, иначе его можно вычесть

Получаем, что

$$P\left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \rightarrow 0\right) = P\left(\frac{\tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_n}{n} \rightarrow 0\right)$$

Рассмотрим $E\tilde{\xi}_n$:

$$E\tilde{\xi}_n = E\xi_n I\{|\xi_n| \leq n\} = E\xi_1 I\{|\xi_1| < n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E\xi_1 = 0$$

Согласно лемме Тёплица

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\tilde{\xi}_k \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

Значит

$$\frac{\tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \iff \frac{(\tilde{\xi}_1 - E\tilde{\xi}_1) + \dots + (\tilde{\xi}_n - E\tilde{\xi}_n)}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$$

Обозначим $\bar{\xi}_n = \tilde{\xi}_n - E\tilde{\xi}_n$.

Согласно лемме Кронекера, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\xi}_k}{k}, \quad \text{то } \frac{\bar{\xi}_1 + \dots + \bar{\xi}_n}{n} \rightarrow 0$$

(для фикс. $\omega \in \Omega$)

Остается проверить, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\xi}_k}{k}$ сходится с вероятностью 1.

Согласно теореме Колмогорова-Хинчина для этого достаточно показать ($\bar{\xi}_k$ - нез., $E\bar{\xi}_k = 0$), что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\bar{\xi}_k^2}{k^2}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\bar{\xi}_k^2}{k^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D\tilde{\xi}_k}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\tilde{\xi}_k^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} E\xi_k^2 I\{|\xi_k| \leq k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} E(\xi_1^2 I\{|\xi_1| \leq k\}) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} E(\xi_1^2 \sum_{n=1}^k I\{n-1 < |\xi_1| \leq n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\xi_1^2 I\{n-1 < |\xi_1| \leq n\}) \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\xi_1^2 I\{n-1 < |\xi_1| \leq n\} \cdot \frac{2}{n}\right) \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} E(|\xi_1| I\{n-1 < |\xi_1| \leq n\}) = \\ &= 2E\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_1| I\{n-1 < |\xi_1| \leq n\}\right) = 2E|\xi_1| < +\infty \end{aligned}$$

□

Замена переменных в интеграле Лебега

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) – вероятностное пространство, ξ – с.в. на нем и $E\xi$ – конечно.

Обозначения.

1. $E\xi = \int_{\Omega} \xi dP$ – интеграл Лебега от ξ по вер. мере P .
2. $\int_A \xi dP := E(\xi I_A)$ для $\forall A \in \mathcal{F}$

Напоминание: Распределение P_{ξ} – это вероятностная мера на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ ($P_{\xi} = P(\xi \in B)$)

Для вер. пр-ва $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), P_{\xi})$ тоже можно ввести мат. ожидание.

1. $\int_{\mathbb{R}} g(x) P_{\xi}(dx)$ – мат. ожидание с.в. $g(x)$ на таком пространстве.
- 2.

$$\int_A g(x) P_{\xi}(dx) := \int_{\mathbb{R}} g(x) I_A(x) P_{\xi}(dx), \quad \forall A \in B(\mathbb{R})$$

3. Если $F_{\xi}(x)$ – ф.р. с.в. ξ , то

$$dF_{\xi}(x) := P_{\xi}(dx)$$

Вопрос: можно ли вычислить $Eg(\xi)$, зная только ее распределение?

Теорема 24 (замена переменных в интеграле Лебега).

Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – случайный вектор, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – борелевская функция.

Тогда для $\forall B \in B(\mathbb{R})$ выполнено:

$$E(g(\xi) I\{\xi \in B\}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{\xi \in B\}} g(\xi) dP = \int_B g(x) P_{\xi}(dx)$$

Доказательство. Пусть g – простая: $g(x) = I_A(x)$ для $A \in B(\mathbb{R}^n)$.

Тогда

$$\begin{aligned} E(g(\xi)I\{\xi \in B\}) &= E(I\{\xi \in A\}I\{\xi \in B\}) = EI\{\xi \in A \cap B\} = \\ &= \int_{A \cap B} P_\xi(dx) = \int_B I_A(x)P_\xi(dx) = \int_B g(x)P_\xi(dx) \end{aligned}$$

Если функция $g(x)$ – простая неотрицательна, то искомое равенство следует из линейности мат. ожидания. Если $g(x)$ – произвольная неотрицательная, то рассмотрим последовательность простых неотриц. $g_n(x)$ т.ч. $g_n(x) \uparrow g(x)$.

Тогда по теореме о монотонной сходимости:

$$\begin{aligned} Eg_n(\xi)I\{\xi \in B\} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} Eg(\xi)I\{\xi \in B\} \\ \int_B g_n(x)P_\xi(dx) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_B g(x)P_\xi(dx) \end{aligned}$$

\implies доказано для неотриц. $g(x)$.

В общем случае, пользуемся разложением $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$ и линейностью математического ожидания. \square

Следствие 1.

- ① Для вычисления $Eg(\xi)$ достаточно знать только распределение ξ .
- ② Для \forall борелевской $g(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и \forall случ. вектора ξ из \mathbb{R}^n :

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)P_\xi(dx)$$

Доказательство. Достаточно положить $B = \mathbb{R}^n$ в теореме. \square

- ③ Если ξ – с.в., то

$$E\xi = \int_{\mathbb{R}} xP_\xi(dx)$$

Доказательство. Достаточно положить $g(x) = x$ в ② \square

- ④ Если $\xi \stackrel{d}{=} \eta$ – одинаково распределены, то для \forall борелевской $g(x)$: $Eg(\xi) = Eg(\eta)$

Доказательство.

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}} g(x)P_\eta(dx) = Eg(\eta)$$

\square

- ⑤ Пусть ξ – дискретная с.в. со значениями в $\mathcal{X} = \{x_i\}_{i=1}^\infty$.

Тогда для \forall борелевской функции $g(x)$:

$$Eg(\xi) = \sum_{i=1}^\infty g(x_i)P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^\infty g(x_i)P_\xi(\{x_i\})$$

Доказательство. Если $g(x) \geq 0$, то $\sum_{i=1}^n g(x_i)I\{\xi = x_i\} \uparrow g(\xi)$

\implies по теореме о монотонной сходимости:

$$Eg(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i)P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)P(\xi = x_i)$$

В общем, раскладываем $g(x)$ на g^+ и g^- и пользуемся линейностью мат. ожидания. \square

Следствие 2. если P_ξ – дискр. распр. на $\mathcal{X} = \{x_i\}$, то

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)P_\xi(dx) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)P_\xi(\{x_i\}) = \int_{\mathbb{R}} g(x)dF_\xi(x)$$

Пример 14. Пусть $\xi \sim Pois(\lambda)$. Найти $E\xi$ = ?

$$\xi \sim Pois(\lambda) \implies P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \text{для } \forall k \in \mathbb{Z}_+$$

Тогда

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} kP(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda$$

⑥ Пусть ξ – абсолютно непрерывная с.в. с плотностью $f_\xi(x)$.

Тогда для $\forall g(x)$ – борелевской функции:

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f_\xi(x)dx$$

Доказательство. Пусть F_ξ – ф.р. ξ . Тогда по определению плотности,

$$P(\xi \leq x) = F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(y)dy$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} P(\xi \leq x) &= P_\xi((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x P_\xi(dy) \\ \implies P_\xi(dy) &= f_\xi(y)dy \end{aligned}$$

В итоге,

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f_\xi(x)dx$$

\square

Пример 15. Пусть $\xi \sim N(a, \sigma^2)$. Вычислить $E\xi$.

Плотность $N(a, \sigma^2)$ равна:

$$f_\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Rightarrow E\xi &= \int_{\mathbb{R}} x f_\xi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x-a) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx + a \int_{\mathbb{R}} f_\xi(x) dx = a \end{aligned}$$

Замечание. Если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – случайный вектор с плотностью $f_\xi(x_1, \dots, x_n)$, то для $\forall g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – борелевской функции:

$$Eg(\xi_1, \dots, \xi_n) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) f_\xi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Пример 16. Если (ξ, η) имеет плотность $f_{(\xi, \eta)}(x, y)$, то

$$E\xi\eta = \int_{\mathbb{R}^2} xy f_{(\xi, \eta)}(x, y) dx dy$$

Прямое произведение вероятностных пространств

Определение 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}_1, P_1)$ и $(\Omega, \mathcal{F}_2, P_2)$ – два вероятностных пространства. Тогда вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) наз. их *прямым произведением*, если

- $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$
- $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, т.е.
 $\mathcal{F} = \sigma(\{B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathcal{F}_1, B_2 \in \mathcal{F}_2\})$
- $P = P_1 \otimes P_2$, т.е.

P – это продолжение меры $P_1 \times P_2$, заданной на прямоугольниках $B_1 \times B_2$, $B_i \in \mathcal{F}_i$ по правилу $P(B_1 \times B_2) = P_1(B_1) \cdot P_2(B_2)$

Такое продолжение \exists и единственно по теореме Каратеодори.

Теорема 25 (Фубини).

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) – прямое произведение $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$.

Пусть с.в $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ т.ч. $\int_{\Omega} |\xi(\omega_1, \omega_2)| dP < +\infty$

Тогда интегралы $\int_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) dP_1$ и $\int_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) dP_2$ определены почти наверное относительно P_2 и P_1 , являются измеримыми относительно $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1$ соотв., и кроме того,

$$\int_{\Omega} \xi(\omega_1, \omega_2) dP = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) dP_2 dP_1 = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) dP_1 dP_2$$

Смысл теоремы: Двойной интеграл = повторному интегралу

Утверждение 5. Пусть ξ, η – независ. с.в.

Тогда $(\mathbb{R}^2, B(\mathbb{R}^2), P_{(\xi, \eta)})$ явл. прямым произведением $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), P_\xi)$ и $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), P_\eta)$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ B(\mathbb{R}^2) &= B(\mathbb{R}) \otimes B(\mathbb{R}) \\ P_{(\xi, \eta)}(B_1 \times B_2) &= P_\xi(B_1) \cdot P_\eta(B_2)?\end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}P_{(\xi, \eta)}(B_1 \times B_2) &= P((\xi, \eta) \in B_1 \times B_2) = P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = |\text{независимость}| = \\ &= P(\xi \in B_1) \cdot P(\eta \in B_2) = P_\xi(B_1) \cdot P_\eta(B_2).\end{aligned}$$

□

Лемма 24 (О свертке распределений).

Пусть ξ, η – нез. с.в. с ф.р. F_ξ и F_η .

Тогда:

1.

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x) dF_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} F_\eta(z-x) dF_\xi(x)$$

2. Если ξ имеет плотность $f_\xi(x)$, η – плотность $f_\eta(x)$, то $\xi + \eta$ имеет плотность

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(z-x) f_\eta(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_\eta(z-x) f_\xi(x) dx$$

Доказательство.

1.

$$\begin{aligned}F_{\xi+\eta}(z) &= P(\xi + \eta \leq z) = EI\{\xi + \eta \leq z\} = |\text{Ф-ла замены переменных}| = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} I\{x + y \leq z\} P_{(\xi, \eta)}(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}^2} I\{x + y \leq z\} P_\xi(dx) P_\eta(dy) = |\text{теор. Фубини}| = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} I\{x + y \leq z\} P_\xi(dx) \right) P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}} P(\xi + y \leq z) P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}} F_\eta(z-y) dF_\eta(dy)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}F_{\xi+\eta}(z) &= \int_{\mathbb{R}^2} I\{x + y \leq z\} P_\xi(dx) P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}^2} I\{x + y \leq z\} f_\xi(x) f_\eta(y) dx dy = \\ &= |t = x + y, x' = x| = \int_{\mathbb{R}^2} I\{t \leq z\} f_\xi(x') f_\eta(t - x') dx' dt = |\text{теорема Фубини}| = \\ &= \int_{-\infty}^z \left(\int_{\mathbb{R}} f_\xi(x') f_\eta(t - x') dx' \right) dt = \int_{-\infty}^z f_{\xi+\eta}(t) dt\end{aligned}$$

□

Замечание:

Если $\xi_1 \dots \xi_n$ – незав. с.в., то $P_{(\xi_1, \dots, \xi_n)} = P_{\xi_1} \otimes \dots \otimes P_{\xi_n}$,

$$dF_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1 \dots x_n) = dF_{\xi_1}(x_1) \dots dF_{\xi_n}(x_n)$$

и если ξ_i имеет плотность $f_{\xi_i}(x_i)$, то вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ тоже имеет плотность

$$f_{\xi}(x_1 \dots x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{\xi_n}(x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{\xi}(x_1 \dots x_n)$$

Слабая сходимость вероятностных мер

Определение 1. Последовательность $\{F_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ функций распределения на \mathbb{R} назыв. *слабо сходящейся* к функции распределения $F(x)$, если $\forall f(x)$ – огр. непрер. функции на \mathbb{R}

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dF_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x)$$

Обозначение 1. $F_n \xrightarrow{w} F$

Следствие 1. $C.в. \xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F_{\xi}$

Доказательство.

$$Ef(\xi_n) = |\text{замена переменной}| = \int_{\mathbb{R}} f(x) dF_{\xi_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Ef(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dF_{\xi}(x)$$

□

Определение 2. Последовательность $\{F_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ – функций распределения на \mathbb{R} называется *сходящейся в основном* к функции распределения $F(x)$, если $\forall x \in \mathbb{C}(F)$:

$$F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x)$$

где $\mathbb{C}(F)$ – множество точек непрер. функции $F(x)$

Обозначение 2. $F_n \implies F$

Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}, P$ – вероятностная мера в $(\mathbb{R}^m, B(\mathbb{R}^m))$

Определение 3. Последовательность P_n наз. *слабо сходящейся* к вер. мере P , если $\forall f(x)$ – огранич. непрер. ф-ии в \mathbb{R}^m выполнено:

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x) P_n(dx) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) P(dx)$$

Обозначение 3. $P_n \xrightarrow{w} P$

Следствие 2. $C.в. \xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F_{\xi} \iff P_{\xi_n} \xrightarrow{w} P_{\xi}$

Определение 4. Последовательность P_n сходится к вер. мере P в основном, если для $\forall A \in B(\mathbb{R}^m)$ с условием $P(\partial A) = 0$ выполнено:

$$P_n(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(A)$$

Обозначение 4. $P_n \implies P$

Теорема 26 (Александров).

Для вер. мер в \mathbb{R}^m следующие условия эквивалентны

1. $P_n \xrightarrow{w} P$

$$2. \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n(A) \leq P(A), \quad \forall \text{ замкнутого } A$$

$$3. \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n(A) \geq P(A), \quad \forall \text{ открытого } A$$

$$4. P_n \Rightarrow P$$

Теорема 27 (Эквивалентность определений сходимости).

Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}, P$ – вероятностные меры на \mathbb{R} , $\{F_n(x), n \in \mathbb{N}\}, F(x)$ – соответств. им функции распределения.

Тогда следующие условия эквивалентны:

$$1. P_n \xrightarrow{w} P$$

$$2. P_n \Rightarrow P$$

$$3. F_n \xrightarrow{w} F$$

$$4. F_n \Rightarrow F$$

Доказательство. По теореме Александрова достаточно проверить, что (2) эквивалентно (4).

$$(2) \Rightarrow (4):$$

Пусть $x \in \mathbb{C}(F)$

$$\text{Тогда } P(\partial((-\infty; x])) = P(\{x\}) = 0.$$

Значит,

$$F_n(x) = P_n((-\infty; x]) \xrightarrow{P_n \rightarrow P} P((-\infty; x]) = F(x)$$

$$(4) \Rightarrow (2):$$

Для установления (2) по теореме Александрова достаточно проверить, что $\underline{\lim}_n P_n(A) \geq P(A), \forall A$ – откp. из \mathbb{R}

Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – открыто, тогда $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, где $I_k = (a_k, b_k)$ – непересек. интервалы.

Для $\forall \varepsilon > 0$ выберем $I'_k = (a'_k, b'_k] \subset I_k$, т.ч. a'_k, b'_k – точки непрерывности $F(x)$ и

$$P(I'_k) \geq P(I_k) - \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Такой выбор $(a'_k, b'_k]$ возьмем в силу непр. вер. меры и того факта, что $F(x)$ имеет не более чем счетное число точек разрыва. Тогда

$$\underline{\lim}_n P_n(A) = \underline{\lim}_n \sum_{k=1}^{\infty} P_n(I_k) \geq |\forall N| \geq \underline{\lim}_n \sum_{k=1}^N P_n(I_k) \geq \sum_{k=1}^N \underline{\lim}_n P_n(I_k)$$

Устремим $N \rightarrow \infty$:

$$\underline{\lim}_n P_n(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_n P_n(I_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_n P_n(I'_k) \quad (\equiv)$$

Но $P_n(I'_k) = P((a'_k, b'_k]) = F_n(b'_k) - F_n(a'_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(b'_k) - F(a'_k)$, так как a'_k, b'_k – точки непр. $F(x)$.

Значит $F_n \Rightarrow F$

$$(\equiv) \sum_{k=1}^{\infty} (F(b'_k) - F(a'_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} P((a'_k, b'_k]) \geq \sum_{k=1}^{\infty} (P(I_k) - \frac{\varepsilon}{2^k}) = P(A) - \varepsilon$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, $\underline{\lim}_n P_n(A) \geq P(A)$

□

Следствие 3. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, ξ – с.в. Тогда $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_\xi(x)$ для $\forall x \in \mathbb{C}(F_\xi)$

Смысл сходимости по распределению:

Это аппроксимация распределений.

Пусть η – нек. с.в. со "сложным" распр. (сложно вычислить ф.р. η).

Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, где распр. ξ "легко" вычислить (или оно известно).

Если $\xi_m \stackrel{d}{=} \eta$ для достаточно большого номера m , то ф.р. η можно аппроксимировать ф.р. ξ .

Предельные теоремы для схемы Бернулли

Описание модели: проводим большое число независимых однородных случ. экспериментов, в которых мы фиксируем "успех" или "неудачу".

Нас интересует распределение числа успехов при проведении большого числа экспериментов.

Математическая модель:

$\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – нез. с.в. $P(\xi_n = 1) = p$, $P(\xi_n = 0) = 1 - p = q$

Определение 1. Распределение ξ_n наз. распр. Бернулли.

Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ – число "успехов" после проведения n испытаний.

Теорема 28 (Бернулли, 1703, ЗБЧ). $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} p$

Несмотря на то, что распр. S_n известно, практическое вычисление вероятностей вида $P(a \leq S_n \leq b)$ при очень больших n затруднительно.

Теорема 29 (Пуассон).

Если $np(n) \rightarrow \lambda > 0$, то $\forall k \in \mathbb{Z}_+$

$$P(S_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{k!} (np)^k \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} (1-p)^n (1-p)^{-k} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} (\lambda + o(1))^k e^{-\lambda} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} \end{aligned}$$

□

Следствие 1. Если $\xi_n \sim \text{Bin}(n, p(n))$, где $np(n) \rightarrow \lambda > 0$, то $\xi_n \xrightarrow{d} \eta \sim \text{Pois}(\lambda)$

Доказательство.

$\xi_n \xrightarrow{d} \eta \iff \forall x \in \mathbb{C}(F_\eta) : F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_\eta(x)$. Но ξ_n и η принимает значения $\mathbb{Z}_+ \implies \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_+ :$

$$F_{\xi_n}(x) = \sum_{\substack{k \leq x \\ k \in \mathbb{Z}_+}} P(\xi_n = k) \rightarrow |\text{по теор. Пуассона}| \rightarrow \sum_{\substack{k \leq x \\ k \in \mathbb{Z}_+}} P(\eta = k) = F_\eta(x)$$

□

Теорема 30 (Муавр-Лаплас).

Пусть $p = \text{const}$, $S_n \sim \text{Bin}(n, p)$. Обозначим для $\forall -\infty \leq a \leq b \leq +\infty$

$$P_n(a, b) = P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right)$$

Тогда имеет место сходимость:

$$\sup_{-\infty \leq a \leq b \leq +\infty} \left| P_n(a, b) - \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Следствие 2. В условиях теоремы Муавра-Лапласа

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{d} \eta \sim N(0, 1)$$

Доказательство. Обозначим $\xi_n := \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$

Тогда $\xi_n \xrightarrow{d} \eta \sim N(0, 1) \iff \forall x \in \mathbb{R}$

$$F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_\eta(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Но теорема Муавра-Лапласа именно это и утверждает □

Характеристические функции

Определение 1. Характеристической функцией с.в. ξ называется

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Замечание. Характеристическая функция, вообще говоря, явл. комплекснозначной. Мы понимаем $Ee^{it\xi}$ как

$$Ee^{it\xi} = E \cos(t\xi) + iE \sin(t\xi)$$

Определение 2. Пусть $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – функция распределения на \mathbb{R} . Её характеристической функцией наз.

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} dF(x)$$

Если P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, то её характеристической ф-ей наз.

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} P(dx)$$

Следствие 1. $\varphi_\xi(t)$ – х.ф. с.в. $\xi \iff \varphi_\xi(t)$ – х.ф. $F_\xi(x) \iff \varphi_\xi(t)$ – х.ф. P_ξ (распр. ξ)

Доказательство.

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_\xi(x)$$

□

Определение 3. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – случайный вектор. Его характеристической функцией наз.

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{i\langle t, \xi \rangle}, \text{ где } t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ а } \langle t, \xi \rangle = \sum_{i=1}^n t_i \xi_i$$

Определение 4. Пусть $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – функция распр. в \mathbb{R}^n .

Её х.ф. наз.

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, x \rangle} dF(x), \quad t \in \mathbb{R}^n$$

Если P – вероятностная мера в \mathbb{R}^n , то её х.ф. наз

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, x \rangle} P(dx), \quad t \in \mathbb{R}^n$$

Следствие 2. Если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – сл. вектор, то $\varphi_\xi(t)$ – х.ф. $\xi \iff \varphi_\xi(t) = \text{х.ф. } F_\xi(x), x \in \mathbb{R}^n \iff \varphi_\xi(t) = \text{х.ф. } P_\xi$

Пример 17.

1. $\xi \sim \text{Bern}(p)$, бернуллиевская с.в., $P(\xi = 1) = p$, $P(\xi = 0) = 1 - p$.

Тогда

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = e^{it}P(\xi = 1) + e^{it0}P(\xi = 0) = pe^{it} + 1 - p$$

2. $\xi \sim \text{Pois}(\lambda)$, пуассоновская с.в.

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} \right) e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

3. $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$ экспоненциальная с.в.

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \int_0^{+\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(it-\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Основные свойства характеристических функций

- ① Пусть $\varphi(t)$ – х.ф. с.в. ξ .

Тогда $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$

Доказательство.

$$|\varphi(t)| = |Ee^{it\xi}| \leq E|e^{it\xi}| = 1 = \varphi(0)$$

□

- ② Пусть $\varphi(t)$ – хар. ф. с.в. ξ , а $\eta = a\xi + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\varphi_\eta(t) = e^{itb} \varphi_\xi(ta)$$

Доказательство.

$$\varphi_\eta(t) = Ee^{it\eta} = Ee^{it(a\xi+b)} = e^{itb} Ee^{i(at)\xi} = e^{itb} \varphi_\xi(at)$$

□

- ③ Пусть $\varphi(t)$ – х.ф.с.в. ξ . Тогда $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на \mathbb{R} .

Доказательство.

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = |Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}| = |E(e^{i(t+h)\xi} - e^{it\xi})| = |E(e^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1))| = E|e^{ih\xi} - 1|$$

При $h \rightarrow 0$, $e^{ih\xi} - 1 \rightarrow 0$ п.н.

Кроме того, $E|e^{ih\xi} - 1| \leq 2 \implies$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости:

$$E|e^{ih\xi} - 1| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \implies \varphi(t) \text{ равномерно непрерывна на } \mathbb{R}.$$

□

- ④ Пусть $\varphi(t)$ – х.ф. с. в. ξ . Тогда $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$

Доказательство.

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = Ee^{\overline{-it\xi}} = \overline{Ee^{-it\xi}} = \overline{\varphi(-t)}$$

□

- ⑤ Пусть $\varphi(t)$ – х.ф. с.в. ξ . Тогда $\varphi(t)$ – действительнзначная \iff распределение ξ симметрично, т.е. $\forall B \in B(\mathbb{R})$

$$P(\xi \in B) = P(\xi \in -B)$$

Доказательство.

(\Leftarrow) Пусть распр. ξ – симметрично. Тогда $\xi \stackrel{d}{=} -\xi \implies$

$$\begin{aligned} E \sin(t\xi) &= E \sin(-t\xi) = -E \sin(t\xi) \\ \implies E \sin(t\xi) &= 0 \implies \varphi(t) = Ee^{it\xi} = E \cos(t\xi) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

– действительнзначная.

(\implies) Пусть $\varphi(t) \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$. Тогда по свойствам ② и ④.

$$\varphi(t) = \varphi_{\xi}(t) = \overline{\varphi_{\xi}(-t)} = \varphi_{\xi}(-t) = \varphi_{-\xi}(t)$$

т.е. у ξ и у $-\xi$ одинаковая х.ф. \implies по теореме о единственности функции распр. ξ и $-\xi$ совпадают.

$\implies \xi \stackrel{d}{=} -\xi$ и, значит, для $\forall B \in B(\mathbb{R})$:

$$P(\xi \in B) = P(-\xi \in B) = P(\xi \in -B)$$

□

- ⑥ Пусть ξ_1, \dots, ξ_n – независимые с.в., $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ Тогда

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \varphi_{S_n}(t) &= Ee^{iS_nt} = Ee^{i\xi_1 t} \dots e^{i\xi_n t} = |\text{с.в. независимы} \implies e^{\text{с.в. независимы}}| = \\ &= (Ee^{i\xi_1 t}) \dots (Ee^{i\xi_n t}) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t) \end{aligned}$$

□

Теорема 31 (о производных х.ф.).

Пусть $E|\xi|^n < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для $\forall r \leq n : \exists \varphi_\xi^{(r)}(t)$, причем

$$1. \varphi_\xi^{(r)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^r e^{itx} P_\xi(dx)$$

$$2. E\xi^r = \frac{\varphi_\xi^{(r)}(0)}{i^r}$$

$$3. \varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t)$$

где $|\varepsilon_n(t)| \leq 3E|\xi|^n$ и $\varepsilon_n(t) \rightarrow 0$, при $t \rightarrow 0$

Доказательство.

1. Заметим, что $E|\xi|^r$ конечно для $\forall r \leq n$ т.к. $|\xi|^r \leq |\xi|^n + 1$

Рассмотрим

$$\frac{\varphi_\xi(t+h) - \varphi_\xi(t)}{h} = \frac{Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}}{h} = E\left(e^{it\xi} \frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right)$$

При $h \rightarrow 0$, $\frac{e^{ih\xi} - 1}{h} \rightarrow i\xi$ п.н., кроме того $\left|\frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right| \leq |\xi|$

\Rightarrow по теореме Лебега.

$$\varphi'_\xi(t) = E\left(e^{it\xi} \frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} E(i\xi e^{it\xi}) = \int_{\mathbb{R}} (ix) e^{itx} P_\xi(dx)$$

Установление формулы для $\varphi_\xi^{(r)}$ при $r > 1$ проводится по индукции аналогично.

2. Формула $E\xi^r = \frac{\varphi_\xi^{(r)}(0)}{i^r}$ сразу следует из формулы для $\varphi_\xi^{(r)}$

3. Имеет место разложение:

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iy)^k}{k!} + \frac{(iy)^n}{n!} (\cos \theta_1 y + i \sin \theta_2 y)$$

где $|\theta_1| \leq 1, |\theta_2| \leq 1$.

Тогда

$$\begin{aligned} e^{it\xi(\omega)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it\xi)^k}{k!} + \frac{(it\xi)^n}{n!} (\cos(\theta_1(\omega)t\xi(\omega)) + i \sin(\theta_1(\omega)t\xi(\omega))) \\ \Rightarrow \varphi_\xi(t) &= Ee^{it\xi} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} E(\xi^n (\cos(\theta_1 t\xi) + i \sin(\theta_1 t\xi))) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t) \end{aligned}$$

где $\varepsilon_n(t) = E(\xi^n (\cos(\theta_1 t\xi) + i \sin(\theta_1 t\xi) - 1))$

Легко увидеть, что $|\varepsilon_n(t)| \leq 3E|\xi|^n$ и $E(\xi^n (\cos(\theta_1 t\xi) + i \sin(\theta_1 t\xi) - 1)) \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$

По теореме Лебега, $\varepsilon_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$

□

Теорема 32 (о разложении в ряд х.ф.).

Пусть ξ – с.в. такова, что $E|\xi|^n < +\infty$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Если для некоторого $T > 0$ выполнено

$$\overline{\lim}_n \left(E \frac{|\xi|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{T},$$

то для $\forall t : |t| < T$, выполнено

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}$$

Доказательство.

Пусть t_0 такое, что $|t_0| < T$. Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(E \frac{|\xi|^n |t_0|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} < \frac{|t_0|}{T} < 1$$

По принципу Коши ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{E|\xi|^k |t_0|^k}{k!} \text{ сходитс}.$$

Рассмотрим t т.ч. $|t| < |t_0|$:

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t) \quad (*)$$

$$\text{Но } |R_n(t)| \leq \frac{|t|^n}{n!} 3E|\xi|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$ в $(*)$ получаем

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} E\xi^n$$

В силу произвольности t_0 с условием $|t_0| < T$, получаем, что разложение верно для всех $t \in (-T, T)$

□

Пример 18. Пусть $\xi \sim N(0, 1)$. Тогда $\varphi_\xi = e^{-\frac{t^2}{2}}$

Доказательство. Посчитаем моменты с.в. ξ .

$$E\xi^m = \int_{\mathbb{R}} x^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Если m - нечетно, то $E\xi^m = 0$

Если же m - четно, то

$$\begin{aligned} E\xi^m &= 2 \int_0^{+\infty} x^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left| y = \frac{x^2}{2} \right| = 2 \int_0^{+\infty} (2y)^{m/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y} \frac{dy}{\sqrt{2y}} \\ &= 2^{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} y^{\frac{m-1}{2}} e^{-y} dy = 2^{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) = 2^{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2^{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(m-1)!!}{2^{m/2}} \sqrt{\pi} = (m-1)!! \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_n \left(\frac{E|\xi|^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} &= \overline{\lim}_n \left(\frac{E|\xi|^{2n}}{(2n)!} \right)^{\frac{1}{2n}} = \overline{\lim}_n \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!} \right)^{\frac{1}{2n}} = \overline{\lim}_n \left(\frac{1}{(2n)!!} \right)^{\frac{1}{2n}} \\ &= \overline{\lim}_n \left(\frac{1}{2^n n!} \right)^{\frac{1}{2n}} = |\Phi\text{-ла Стирлинга}| = \overline{\lim}_n \left(\frac{e^n}{2^n n!} \right)^{\frac{1}{2n}} = 0 < \frac{1}{T}, \forall T\end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi_\xi(t)$ разлагается в ряд на всей прямой.

Осталось его посчитать

$$\begin{aligned}\varphi_\xi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(it)^{2m}}{(2m)!} E\xi^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^m}{(2m)!} (2m-1)!! \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^m}{(2m)!!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^m}{2^m m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{-t^2}{2} \right)^m \cdot \frac{1}{m!} = e^{-t^2/2}\end{aligned}$$

□

Следствие 3. Пусть $\xi \sim N(a, \sigma^2)$. Тогда

$$\varphi_\xi(t) = e^{ita - \frac{t^2 \sigma^2}{2}}$$

Доказательство. Если $\xi \sim N(a, \sigma^2)$, то $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$\Rightarrow \varphi_\xi(t) = e^{ita} \varphi_\eta(t\sigma) = e^{ita - \frac{t^2 \sigma^2}{2}}$$

□

Теорема 33 (единственности).

Пусть $F(x), G(x)$ – функции распределения на прямой. Если характеристические функции F и G совпадают, то $F = G$.

Доказательство. Пусть $a < b \in \mathbb{R}$. Для $\forall \varepsilon > 0$ рассмотрим функцию $f_\varepsilon(x)$:

линейна на $(a; a + \varepsilon], [b, b + \varepsilon]$, 1 на $[a + \varepsilon, b]$, 0 иначе.

Докажем, что

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dG(x)$$

Рассмотрим отрезок $[-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$ т.ч. $[-n, n] \supset [a, b + \varepsilon]$.

По теореме Вейерштрасса $f_\varepsilon(x)$ равномерно приближается тригонометрическими многочленами (т.к. непрерывна и периодична с периодом 2π на этом отрезке) от $\frac{x\pi}{n}$, т.е.

$$\exists f_\varepsilon^n(x) = \sum_{k \in K} a_k e^{i \frac{k\pi x}{n}}, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad K - \text{конечное подмно-во } \mathbb{Z}$$

т.ч. $|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon^n(x)| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall x \in [-n, n]$

Заметим, что $f_\varepsilon^n(x)$ явл. периодической с периодом $2n$

$$\Rightarrow \text{т.к. } |f_\varepsilon^n(x)| \leq 2 \text{ для } \forall x \in [-n, n], \text{ то } |f_\varepsilon^n(x)| \leq 2 \text{ для } \forall x \in \mathbb{R}.$$

По условию $\forall t \in \mathbb{R} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dG(x)$, а тогда $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^n(x) dG(x)$ по линейности

Теперь оценим:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon}(x) dF(x) - \int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon}(x) dG(x) \right| \leq \left| \int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon}^n(x) dF(x) - \int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon}^n(x) dG(x) \right| + \\
& + \int_{\mathbb{R}} |f_{\varepsilon}(x) - f_{\varepsilon}^n(x)| dF(x) - \int_{\mathbb{R}} |f_{\varepsilon}(x) - f_{\varepsilon}^n(x)| dG(x) \leq \\
& \leq \frac{1}{n} \int_{[-n,n]} dF(x) + \frac{1}{n} \int_{[-n,n]} dG(x) + 2 \left(\int_{\mathbb{R} \setminus [-n,n]} dF(x) + \int_{\mathbb{R} \setminus [-n,n]} dG(x) \right) \leq \\
& \leq \frac{2}{n} + 2 \left(\int_{-\infty}^{-n} dF(x) + \int_n^{+\infty} dF(x) + \int_{-\infty}^{-n} dG(x) + \int_n^{+\infty} dG(x) \right) = \\
& = \frac{2}{n} + 2(F(-n) + 1 - F(n) + G(-n) + 1 - G(n)) \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $\forall \varepsilon$

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon}(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon}(x) dG(x)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0, f_{\varepsilon}(x) \rightarrow I_{(a,b]}(x)$

При этом $|f_{\varepsilon}(x)| \leq 1$ для $\forall x \in \mathbb{R} \implies$ по теореме Лебега

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon}(x) dF(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} I_{(a,b]} dF(x) = F(b) - F(a)$$

Следовательно, для $\forall a < b$:

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

Устремим $a \rightarrow -\infty, \implies \forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = G(x)$$

□

Пример 19. Пусть ξ_1, ξ_2 – нез. с.в., $\xi_i \sim N(a_i, \sigma_i^2)$. Тогда $\xi_1 + \xi_2 \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Доказательство. х.ф.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\xi_j}(t) &= e^{ia_j t - \frac{1}{2}\sigma_j^2 t^2} \\
\implies \varphi_{\xi_1 + \xi_2}(t) &= |_{\text{нез.}}| = \varphi_{\xi_1}(t) \varphi_{\xi_2}(t) = e^{i(a_1 + a_2)t - \frac{1}{2}t^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}
\end{aligned}$$

– х.ф $N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

По теореме о единственности $\xi_1 + \xi_2 \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

□

Теорема 34 (критерий независимости компонент случайного вектора). Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – случайный вектор. Тогда $\xi_1 \dots \xi_n$ – независимы в совокупности \iff х.ф. вектора ξ распадается в произведение х.ф. ξ_j :

$$\varphi_{\xi}(t_1, \dots, t_n) = \varphi_{\xi_1}(t_1) \cdot \dots \cdot \varphi_{\xi_n}(t_n)$$

Доказательство.

(\Rightarrow) Пусть $\xi_1 \dots \xi_n$ – независимы. Тогда

$$\varphi_\xi(t_1 \dots t_n) = E e^{i \sum_{k=1}^n \xi_k t_k} = E(e^{it_1 \xi_1} \dots e^{it_n \xi_n}) = \prod_{k=1}^n E e^{it_k \xi_k} = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k)$$

(\Leftarrow) Пусть F_1, \dots, F_n – функции распределения ξ_1, \dots, ξ_n .

Рассмотрим $G(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \dots \cdot F_n(x_n)$ Посчитаем её х.ф.:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \langle t, x \rangle} dG(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \langle t, x \rangle} dF_1(x_1) \dots dF_n(x_n) = |\text{теорема Фубини}| = \\ &= \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{it_k x_k} dF_k(x_k) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k) = \varphi_\xi(t_1 \dots t_n) \end{aligned}$$

Но φ – х.ф. вектора ξ . \Rightarrow она является х.ф. ф.р. $F_\xi(x_1 \dots x_n)$.

По теореме о единственности

$$F_\xi(x_1 \dots x_n) = G(x_1 \dots x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n)$$

По критерию независимости для ф.р. получаем, что $\xi_1 \dots \xi_n$ независимы в совокупности. □

Теорема 35 (формула обращения).

Пусть $\varphi(t)$ – х.ф. ф.р. $F(x)$ Тогда

1. Для $\forall a < b$, $a, b \in \mathbb{C}(F)$ – точки непрерывности $F(x)$, выполнено:

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{it} \varphi(t) dt$$

2. Если $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < +\infty$, то у $F(x) \exists$ плотность $f(x)$ и

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

Пример 20. Пусть ξ имеет стандартное распр. Коши

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Найти х.ф. ξ .

Доказательство. Пусть η имеет распр. Лапласа, $p_\eta(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

Тогда $\varphi_\eta(t) = \frac{1}{1+t^2}$, и $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < +\infty$

\Rightarrow по формуле обращения

$$\begin{aligned} p_\eta(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{2} \varphi_\xi(-x) \\ \Rightarrow \varphi_\xi(t) &= e^{-|t|} \end{aligned}$$

□

Как понять, является ли функция характеристической?

Определение 5. Функция $(\varphi(t), t \in \mathbb{R})$ наз. неотрицательно определенной, если $\forall t_1 \dots t_n \in \mathbb{R}, z_1 \dots z_n \in \mathbb{C}$ выполнено:

$$\sum_{i,j=1}^n \varphi(t_i - t_j) z_i \overline{z_j} \geq 0$$

Теорема 36 (Бохнер - Хинчин).

Пусть $\varphi(t), t \in \mathbb{R}$ - непрерывна в нуле и $\varphi(0) = 1$. Тогда $\varphi(t)$ явл. хар. функцией $\iff \varphi(t)$ неотрицательно определена.

Доказательство. (\implies) Пусть $\varphi(t)$ - х.ф. с.в. ξ . Тогда $\forall t_1 \dots t_n \in \mathbb{R}, \forall z_1 \dots z_n \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^n \varphi(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} &= \sum_{j,k=1}^n E e^{i(t_j - t_k)\xi} z_j \overline{z_k} = E \left(\sum_{j,k=1}^n e^{it_j \xi} z_j e^{-it_k \xi} \overline{z_k} \right) = \\ &= E \left(\sum_{j,k=1}^n (e^{it_j \xi} z_j) \overline{(e^{it_k \xi} z_k)} \right) = E \left(\sum_j^n (e^{it_j \xi} z_j) \right) \cdot \overline{\left(\sum_k^n e^{it_k \xi} z_k \right)} = E \left| \sum_{j=1}^n e^{it_j \xi} z_j \right|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

□

Следствие 4. Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ - две х.ф., то $\forall \alpha \in (0, 1)$:

$$\alpha \varphi(t) + (1 - \alpha) \psi(t) - \text{тоже х.ф.}$$

Теорема 37 (непрерывности).

Пусть $\{F_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ - последовательность ф.р. на \mathbb{R} , а $\{\varphi_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ - последовательность их х.ф.

Тогда

1. Если $F_n \xrightarrow{w} F$, где $F(x)$ - ф.р. на \mathbb{R} , то для $\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ при $n \rightarrow \infty$, где $\varphi(t)$ - х.ф. $F(x)$
2. Пусть для $\forall t \in \mathbb{R} \exists$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$, причем $\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$ непрерывна в нуле. Тогда \exists ф.р. $F(x)$ т.ч. $F_n \xrightarrow{w} F$ и $\varphi(t)$ - х.ф. $F(x)$

Доказательство. 1. Если $F_n \xrightarrow{w} F$, то $\forall f(x)$ - огр. непр. выполнено:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dF_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x)$$

Функции $\cos tx$ и $\sin tx$ - огр. и непр., тогда

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos tx dF_n(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin tx dF_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \cos tx dF(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin tx dF(x) = \varphi(t) \end{aligned}$$

□

Следствие 5. С.в. $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff \forall t \in \mathbb{R} : \varphi_{\xi_n}(t) \rightarrow \varphi_{\xi}(t)$

Доказательство. $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F_{\xi} \iff \varphi_{\xi_n}(t) \rightarrow \varphi_{\xi}(t)$ для $\forall t \in \mathbb{R}$.

□

Теорема 38 (Центральная предельная теорема).

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных с.в. т.ч. $0 < D\xi_n < +\infty$.

Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

Доказательство.

Обозначим $a = E\xi_i, \sigma^2 = D\xi_i$. Рассмотрим $\eta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma} \implies E\eta_i = 0, D\eta_i = E\eta_i^2 = 1$

Тогда

$$T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = \text{[независимость]} = \frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{\sqrt{n}}$$

Рассмотрим х.ф. η_i :

$$\varphi_{\eta_i}(t) = \varphi(t) = 1 + E\eta_i(it) + \frac{1}{2}E\eta_i^2(it)^2 + o(t^2);$$

(t→0)

Отсюда получаем, что

$$\varphi_{T_n}(t) = \varphi_{\eta_1 + \dots + \eta_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \text{[независимость]} = \left(\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Но $e^{-\frac{t^2}{2}}$ – х.ф. $N(0, 1) \implies$ по теореме непрерывности мы получаем, что

$$T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

□

Следствие 6. В условиях ЦПТ для $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Доказательство. По ЦПТ $T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \xi \sim N(0, 1) \iff F_{T_n} \implies F_\xi$, где $F_\xi(x)$ – ф.р. $N(0, 1)$, т.е. $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$F_{T_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

□

Следствие 7. В условиях ЦПТ, если $E\xi_i = a, D\xi_i = \sigma^2$, то

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - a \right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

Доказательство.

$$\sigma T_n = \sigma \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = \sigma \frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} = \sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - a \right)$$

Но $T_n \xrightarrow{d} N(0, 1) \implies \sigma T_n \xrightarrow{d} \sigma N(0, 1) = N(0, \sigma^2)$

$$\implies \sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - a \right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

□

Теорема 39 (Теорема Берри - Эссен).

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – нез. с. в., $E|\xi_i|^3 < +\infty$,

$E\xi_i = a, D\xi_i = \sigma^2 > 0$.

Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$.

Тогда

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| \leq C \frac{E|\xi_1 - a|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$$

где C – абс. константа. Вместо ξ_1 можно взять любую из $\xi_1 \dots \xi_n$.

Что можно сказать про C ?

1. $C \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,399$ (Эссен)

2. Текущий рекорд $\forall n \forall \xi : C \leq 0.48$

Пример 21. Складываются 10^4 чисел, каждое из которых было вычислено с точностью 10^{-6} . Найти в каких пределах с вероятностью 0.99 лежит суммарная ошибка, считая, что все ошибки независимы и распределены $R(-10^{-6}, 10^{-6})$

Доказательство. $\xi_i \sim R(-10^{-6}, 10^{-6})$ – нез. с. в.

$E\xi_i = a = 0, D\xi_i = \sigma^2 = 10^{-12} \frac{2}{3}, S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

Согласно ЦПТ:

$$P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}\right| \leq u\right) \sim P(|\eta| \leq u), \text{ где } \eta \sim N(0, 1)$$

Из таблицы значений $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$

Получаем, что при $u = 2.58$

$$\begin{aligned} P(|\eta| \leq u) &\geq 0.99 \\ \implies P(|S_n| \leq 2.58 \sqrt{DS_n}) &\geq 0.99 \\ P\left(|S_n| \leq 2.58 \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 10^{-6}\right) &\geq 0.99 \end{aligned}$$

Суммарная ошибка: $2.58 \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 10^{-6}$

□