6. hét, 2024. március 26.

Analízis 2AB Előadás

Tartalom

a) Primitív függvények

b) Határozatlan integrál

b) Integrálási szabályok

A PRIMITÍV FÜGGVÉNY FOGALMA

Feladat: egy adott függvényhez keressünk olyan függvényt, hogy ez utóbinak a deriváltja a kiindulási függvény legyen.

Definíció

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ egy adott függvény.

Azt mondjuk, hogy a $F : I \to \mathbb{R}$ függvény az f egy primitív függvénye, ha

$$F \in D(I) \quad \text{és} \quad F'(x) = f(x) \ \ (\forall\, x \in I).$$

Példák

a) $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$,

b) $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x$ $(x \in \mathbb{R})$.

Felmerülő kérdések

i) Milyen függvényeknek van primitív függvényük?

ii) Ha egy függvénynek van primitív függvénye, akkor hány van?

iii) Ha egy függvénynek van(nak) primitív függvénye(i), akkor azt(azokat) hogyan tudjuk meghatározni?

A második kérdést könnyű megválaszolni.

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Nyilvánvaló, hogy ha az $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek a $F : I \to \mathbb{R}$ egy primitív függvénye, akkor $\forall \; C \in \mathbb{R}$ esetén $F + C$ szintén primitív függvénye az f-nek.

Másrészt, ha F és G is primitív függvénye f-nek, akkor $(G - F)' = f - f \equiv 0$, azaz az $G - F$ függvény konstans az I intervallumon. Van tehát olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy $G - F \equiv C$, és így $G = F + C$.

Következmény: Ha F primitív függvénye f-nek, akkor az f primitív függvényeinek halmaza

$$\{F + C \; : \; C \in \mathbb{R}\} \, .$$

Ez motiválja az alábbi fogalom bevezetését.

Határozatlan integrál

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$.

Az f függvény primitív függvényeinek halmazát az f határozatlan integráljának nevezzük.

Jelölések: $\int f$, $\int f(x) \, dx$.

Példák határozatlan integrálra

a) $\int \exp = \{exp + C \,:\, C \in \mathbb{R}\}, \ \int e^x\,dx = \{e^x + C \,:\, C \in \mathbb{R}\},$

b) $\int \sin = \{-\cos + C \,:\, C \in \mathbb{R}\}, \ \int \sin x\,dx = \{-\cos x + C \,:\, C \in \mathbb{R}\}.$

Egyszerűsített jelölés: $\int f = F + C.$

Például: $\int e^x\,dx = e^x + C$, $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

Vigyázat: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = ?$

Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ami nem intervallum.

Ha $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$, akkor $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C.$

Ha $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$, akkor $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C.$

A terminológia angolul:

primitív függvény $\longrightarrow$ antiderivative,

határozatlan integrál $\longrightarrow$ indefinite integral.

További példa.

$$f(x) := \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \in (0,1) \\ 0, & \text{ha } x \in (2,3) \end{cases},$$

és legyen

$$F_1(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in (0,1) \\ 1, & \text{ha } x \in (2,3) \end{cases}, \quad F_2(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in (0,1) \\ 0, & \text{ha } x \in (2,3). \end{cases}$$

Ekkor $F_1' = f = F_2'$, de F_1 és F_2 nem csak egy konstansban különböznek egymástól, mert

$$F_1(x) - F_2(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in (0,1) \\ 1, & \text{ha } x \in (2,3). \end{cases}$$

MIKOR LÉTEZIK PRIMITÍV FÜGGVÉNY?

Tétel (A primitív függvény létezésének elégséges feltétele)

Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $f \in C$, akkor f-nek van primitív függvénye.

Bizonyítás: később.

A folytonosság nem szükséges feltétele a primitív függvény létezésének

Legyen

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } 0 \neq x \in \mathbb{R}, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Ekkor $F \in D(\mathbb{R})$. Valóban, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor $F'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.

Másrészt $F'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0.$

A $\cos \frac{1}{x}$ határértéke nem létezik a 0-ban. Tehát az $f := F'$ függvény ugyan nem folytonos, de van primitív függvénye. $\square$

Egy szükséges feltétel megadásához bevezetjük Darboux-tulajdonság fogalmát.

Definíció

Legyen I nyílt intervallum, $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathcal{D}_f$.

Azt mondjuk, hogy az f függvény Darboux-tulajdonságú az I intervallumon, ha tetszőleges $a, b \in I$, $a < b$ és bármely $f(a)$ és $f(b)$ közé eső c esetén van olyan $\xi \in [a, b]$, hogy $f(\xi) = c$.

Megjegyzés: Ha $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor f Darboux-tulajdonságú az I-n.

Tétel

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és tegyük fel, hogy $f \in D(I)$.

Ekkor az f' deriváltfüggvény Darboux-tulajdonságú az I-n.

Bizonyítás

Tekintsük a

$$\varphi(x) := f(x) - cx \quad (x \in I)$$

függvényt. Világos, hogy $\varphi \in D(I)$ és $\varphi'(x) = f'(x) - c \ (x \in I)$.

Elég azt igazolni, hogy φ-nek egy $\xi \in (a, b)$ pontban lokális szélsőértéke van. Valóban, ekkor $\varphi'(\xi) = f'(\xi) - c = 0$, azaz $f'(\xi) = c$.

Mivel $\varphi \in C[a, b]$, ezért a φ függvénynek vannak abszolút szélsőértékei (ld. a Weierstrass-tételt).

A belső pontbeli lokális szélsőérték létezésének igazolásához tekintsük azt az esetet, amikor

$$f'(a) < c < f'(b), \quad \text{azaz} \quad \varphi'(a) = f'(a) - c < 0 \quad \text{és} \quad \varphi'(b) = f'(b) - c > 0.$$

Mivel

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi'(a) < 0,$$

ezért van olyan $\delta > 0$, hogy $\forall \ 0 < |x - a| < \delta$ esetén $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} < 0$. Ez azt jelenti, hogy az $a < x < a + \delta$ helyeken $\varphi(x) - \varphi(a) < 0$, tehát $\varphi(x) < \varphi(a)$.

Következésképpen a φ függvénynek nincs minimuma az a pontban.

Bizonyítás (folytatás)

Hasonlóan:

$$\lim_{x\to b} \frac{\varphi(x)-\varphi(b)}{x-b} = \varphi'(b) > 0$$

miatt $\exists \quad \delta > 0$, hogy $\forall \ 0 < |x-b| < \delta$ esetén $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(b)}{x-b} > 0$. Ekkor $\forall$ $b-\delta < x < b$ helyen $\varphi(x)-\varphi(b) < 0$, tehát $\varphi(x) < \varphi(b)$. Következésképpen a φ függvénynek nincs minimuma a b pontban.

A $\varphi\big|_{[a,b]}$ függvénynek az abszolút minimum helye tehát valamely $\xi \in (a,b)$ pontban van.

A $f'(b) < c < f'(a)$ eset hasonlóan igazolható. $\square$

Következmény: Van olyan függvény, aminek nincs primitív függvénye.

Az

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvény nem Darboux tulajdonságú.

A HATÁROZATLAN INTEGRÁL KISZÁMÍTÁSA

Alapintegrálok

Az alapintegrálokat `ebben a táblázatban` soroltuk fel.

Például

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C \quad \big(x \in (0, +\infty)\big),$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + C \quad \big(x \in (-\infty, 0)\big),$

c) $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \big(x \in (0, +\infty),\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\big).$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C;$

e) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

Műveletek integrálható függvényekkel

Tétel (A határozatlan integrál linearitása)

Legyen I nyílt intervallum. Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye és

$$\int \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx \quad (x \in I).$$

Bizonyítás

Legyen $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, $\int g(x)\, dx = G(x) + C$. Ekkor
$\left(\alpha F(x) + \beta G(x)\right)' = \alpha f(x) + \beta g(x)$, azaz $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = F(x) + G(x) + C$.

Megjegyzés: A tétel jobb oldalán a függvényhalmazok összeadását úgy értjük, hogy

$$\alpha \int f + \beta \int g = \left\{\alpha u + \beta v \,:\, u \in \int f,\ v \in \int g\right\}.$$

Példa:

$$\int \left(6x^2 - 8x + 3\right) dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Az első helyettesítési szabály

Az összetett függvény deriválására vonatkozó tételnek a megfordításának alkalmazásával két úgynevezett helyettesítéses integrálási állítást fogunk megmutatni.

Tétel (Helyettesítéses integrálás 1.)

Legyenek adottak az I, J nyílt intervallumok és a $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ függvények.

Tegyük fel, hogy $g \in D(I)$, $\mathcal{R}_g \subset J$ és az f függvénynek van primitív függvénye.
Ekkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big) + C \qquad (x \in I),$$

ahol F a f függvény egy primitív függvénye.

Bizonyítás

Legyen $F \in \int f$. Ekkor $F \in D(J)$ és $F' = f$. Az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel szerint ekkor $F \circ g \in D(I)$ és

$$(F \circ g)' = \big(F' \circ g\big) \cdot g' = f \circ g \cdot g',$$

és ez azt jelenti, hogy $F \circ g \in \int f \circ g \cdot g'$. $\square$

Megjegyzés: Ez a tétel akkor használható, ha az $\int f \circ g \cdot g'$ integrált kell kiszámítanunk, és ismerjük f egy primitív függvényét.

Példa:

Ha $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) =: I$, akkor

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}\, dx = \int (\operatorname{tg} x)^{-3/2} \cdot (\operatorname{tg} x)'\, dx$$

$$= \frac{(\operatorname{tg} x)^{-1/2}}{-1/2} + C = -\frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + C \qquad (x \in I,\ C \in \mathbb{R}).$$

Speciális esetek

i) Ha $f : I \to \mathbb{R}$, $f > 0$ és $f \in D(I)$, akkor

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln f(x) + C \qquad (x \in I,\ C \in \mathbb{R})\,.$$

ii) Ha $f : I \to \mathbb{R}$, $f > 0$, $f \in D(I)$ és $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, akkor

$$\int f^{\alpha}(x) f'(x)\, dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C \qquad (x \in I,\ \in \mathbb{R})\,.$$

iii) Ha az $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van egy $F : I \to \mathbb{R}$ primitív függvénye, $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$, akkor

$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C \qquad (x \in I,\ C \in \mathbb{R})\,.$$

A parciális integrálás szabálya

A szorzatfüggvény deriválására vonatkozó tétel „megfordítását” fejezi ki a következő állítás.

Tétel (Parciális integrálás)

Legyen I nyílt intervallum.

Tegyük fel, hogy $f, g \in D(I)$ és az $f'g$ függvénynek létezik primitív függvénye I-n.

Ekkor az fg' függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \quad (x \in I).$$

Bizonyítás

Ha $F \in \int f'g$, akkor $F \in D(I)$ és $F' = f'g$.

Mivel $fg \in D(I)$ és $(fg)' = f'g + fg'$, ezért $(fg - F) \in D(I)$ és $(fg - F)' = f'g + fg' - f'g = fg'$.

Így $(fg - F) \in \int fg'$ valóban fennáll. $\square$

A parciális integrálás tételét akkor célszerű használni az fg' primitív függvényének a meghatározására, ha $f'g$ egy primitív függvényét már ismerjük.

Példák

Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a) $\displaystyle\int x \sin x \, dx \quad (x \in \mathbb{R}).$

Megoldás:

$$\int x \cdot \sin x \, dx = \int x \cdot (-\cos x)' \, dx = -x \cos x - \int (x)' \cdot (-\cos x) \, dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx - x \cos x + \sin x + C \qquad (x \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}).$$

b) $\displaystyle\int \ln x \, dx \quad (x \in (0, +\infty)).$

Megoldás:

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = \int (\ln x) \cdot (x)' \, dx = (\ln x) \cdot x - \int (\ln x)' \cdot x \, dx$$

$$= x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x (\ln x - 1) + C \qquad (x > 0,\ C \in \mathbb{R}).$$

c) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx \quad \big(x \in (-1,1)\big).$

Megoldás:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} - \int x \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{(1-x^2)-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\,.$$

Következésképpen

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + C \qquad (x \in (-1,1),\ C \in \mathbb{R})\,.$$

A második helyettesítési szabály

Az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel másik megfordítása az alábbi állítás.

Tétel (Helyettesítéses integrálás 2.)

Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok.

Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ bijekció, továbbá $g \in D(J)$, $g'(x) \neq 0$ $(x \in J)$.

Ha az $f \circ g \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye, akkor az f függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt_{\big|t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I).$$

Bizonyítás nélkül.

Példa

Számítsuk ki az

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \quad \big(x \in (-1,1)\big)$$

határozatlan integrált!

Megoldás: alkalmazzuk az

$$x = \sin t =: g(t) \quad \big(t \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\big)$$

helyettesítést!

$g'(t) = \cos t > 0 \ \big(t \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\big) \Longrightarrow g \uparrow \Longrightarrow g$ invertálható, és
$t = g^{-1}(x) = \mathrm{arc}\ \sin x \ \big(x \in (-1,1)\big)$.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt \\ &= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C\Big|_{t=\arcsin x} \\ &= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + C\,.\end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned}\sin(2\arcsin x) &= 2\,\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x)\\ &= 2\,x\,\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2} = 2\,x\,\sqrt{1-x^2},\end{aligned}$$

ezért azt kapjuk, hogy

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\cdot\arcsin x + \tfrac{1}{2}\cdot x\,\sqrt{1-x^2} + C \qquad \big(x\in(-1,1)\big)\,.$$