Ítéletlogika alapjai

Gyakorlat

Logika

2022/2023 1. félév

Bevezető

A tárgy a következő problémákat járja körbe:

Hogyan tudunk állításokat formalizálni?
Állítások egy halmazából következik-e egy állítás?
Létezik-e módszer ennek bizonyítására?

A félév során ezen problémák megválaszolására az ítéletlogika és egy elsőrendű logika nyelvét fogjuk megismerni, majd szemantikus és szintaktikus módszerek segítségével különböző válaszokat adunk.

A félév során szó lesz a következő témakörökről:

- Igazságtábla és elsőrendű formula értéktáblája
- Tablókalkulus
- Bizonyításelmélet
- Természetes levezetés
- Rezolúció

Követelmény: elérhető Teamsben/Canvasben! Aki nincs rajta, jelezze!

Alapvető fogalmak

Egyszerű állítások

Esik az eső.	E ítéletváltozó
Felhős az ég.	F ítéletváltozó

Összetett állítások

Nem süt a Nap.	$\neg N$	- negációs ($\neg$) formula
Esik az eső és nem süt a Nap.	$E \wedge \neg N$	- konjunkciós ($\wedge$) formula
Süt a Nap vagy felhős az ég.	$N \vee F$	- diszjunkciós ($\vee$) formula
Ha esik az eső, akkor felhős az ég.	$E \supset F$	- implikációs ($\supset$) formula

A feladat

Betörtek egy házba. A nyomok alapján próbálják megállapítani, hogy az épület melyik részében járt a betörő. Helyszíni szemle alapján ilyen kapcsolatok véltek felfedezni a helyszínelők a szobák között:

1. A konyhában az ajtó be volt törve, így a betörő ott biztos járt.
2. Ha a konyhában járt, akkor biztos nem volt a fürdőben.
3. A hálóban vagy a fürdőben volt, illetve nem járt a spájzban vagy járt a hálóban.
4. Nem igaz az az állítás, hogy: a hallban járt és ha nem járt a nappaliban, akkor a spájzban volt.
5. Akkor és csak akkor volt az spájzban, ha volt az étkezőben is.
6. A spájzt feldúlta a betörő, és csak akkor járt a nappaliban, ha a hallban is.
7. A betörő csak akkor járt a fürdőben, ha nem volt a spájzban vagy járt a fürdőben.

Mely szobákban járt a betörő?

Formalizáljuk az állításokat!

1. A konyhában az ajtó be volt törve, így a betörő ott biztos járt.
2. Ha a konyhában járt, akkor biztos nem volt a fürdőben.
3. A hálóban vagy a fürdőben volt, illetve nem járt a spájzban vagy járt a hálóban.
4. Nem igaz az az állítás, hogy: a hallban járt és ha nem járt a nappaliban, akkor a spájzban volt.
5. Akkor és csak akkor volt az spájzban, ha volt az étkezőben is.
6. A spájzt feldúlta a betörő, és csak akkor járt a nappaliban, ha a hallban is.
7. A betörő csak akkor járt a fürdőben, ha nem volt a spájzban vagy járt a fürdőben.

Mik lehetnének az atomi állítások - ítéletváltozók?

- A– A konyhában járt a betörő
- B– A fürdőben járt a betörő
- C– A hálóban járt a betörő
- D– A spájzban járt a betörő
- E– Az étkezőben járt a betörő
- F– A nappaliban járt a betörő
- G– A hallban járt a betörő

Hogyan nézzenek ki a formulák?

1. A
2. $(A \supset \neg B)$
3. $((C \vee B) \wedge (\neg D \vee C))$
4. $\neg(G \wedge (\neg F \supset D))$
5. $((D \supset E) \wedge (E \supset D))$
6. $(D \wedge (F \supset G))$
7. $(B \supset (\neg D \vee B))$

Műveletek

Műveletek prioritása csökkenő sorrendben

$\neg, \wedge, \vee, \supset$

Műveletek zárójelezésének iránya

- $\wedge, \vee$ zárójelezésének iránya tetszőleges
  - Pl.: $A \wedge B \wedge \neg C \approx ((A \wedge B) \wedge \neg C)$
    $\approx (A \wedge (B \wedge \neg C))$
- $\supset$ zárójelezése jobbról balra történik!
  - Pl.: $A \supset \neg B \supset C \approx (A \supset (\neg B \supset C))$

Honnan lehetne elhagyni a zárójelet?

$$
\begin{array}{lcl}
((C \vee B) \wedge (\neg D \vee C)) & = & (C \vee B) \wedge (\neg D \vee C) \\
\neg(G \wedge (\neg F \supset D)) & = & \neg(G \wedge (\neg F \supset D)) \\
((D \supset E) \wedge (E \supset D)) & = & (D \supset E) \wedge (E \supset D) \\
((C \vee B) \supset (\neg D \vee C)) & = & C \vee B \supset \neg D \vee C \\
(B \supset (\neg D \vee B)) & = & B \supset \neg D \vee B
\end{array}
$$

És ennél a formulánál? $((A \wedge B) \vee (A \supset (\neg B \supset A))) = A \wedge B \vee (A \supset \neg B \supset A)$

Igazságtábla, szemantikus tulajdonságok

Műveletek közös igazságtáblája

X	Y	$\neg X$	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \supset Y$
i	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	h	h	i

Igazságtábla, szemantikus tulajdonságok

Készítsük el a következő formulához a **kiterjesztett** igazságtáblát:

$$B \supset (\neg D \vee B)$$

B	D	$\neg D$	$\neg D \vee B$	$B \supset (\neg D \vee B)$
i	i	h	i	i
i	h	i	i	i
h	i	h	h	i
h	h	i	i	i

Igazságtábla, szemantikus tulajdonságok

Kielégíthetőség/kielégíthetetlenség/tautológia formulákra

Egy B formula **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.

Egy B formula **kielégíthetetlen**, ha egyetlen interpretáció sem elégíti ki.

Egy B formula **tautológia** ($\models_0 B$), ha minden interpretáció kielégíti. A tautológiát **ítéletlogikai törvény**nek is nevezik.

Igazságtábla, szemantikus tulajdonságok

Ezek alapján mit tudunk elmondani az előbb vizsgált formuláról?

- Kielégíthető?
- Kielégíthetetlen?
- Tautológia?

B	D	$\neg D$	$\neg D \vee B$	$B \supset (\neg D \vee B)$
i	i	h	i	i
i	h	i	i	i
h	i	h	h	i
h	h	i	i	i

$\Longrightarrow$ **Kielégíthető és tautológia!** *Minden interpretáció kielégíti.*

Igazságtábla, szemantikus tulajdonságok

Milyen tulajdonságúak a következő formulák?

A	B	$A \supset \neg B$
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	i

$\Longrightarrow$ **Kielégíthető!**

Van legalább 1 interpretáció, ami kielégíti.

A	B	$(\neg A \supset \neg B) \wedge \neg(A \vee \neg B)$
i	i	h
i	h	h
h	i	h
h	h	h

$\Longrightarrow$ **Kielégíthetetlen!**

Nincs olyan interpretáció, ami kielégítené.

Formulahalmaz szemantikus tulajdonságai

Formulahalmaz szemantikus tulajdonságai

Adott $F := \{F1, F2, .., Fn\}$ formulahalmaz.

F formulahalmaz **kielégíthető**, ha van olyan interpretáció, amely minden elemét kielégíti.
F formulahalmaz **kielégíthetetlen**, ha minden interpretációban van legalább 1 formulája, amely hamisra értékelődik ki.

Formula szemantikus tulajdonság $F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn$	Formulahalmaz szemantikus tulajdonság $\{F1, F2, \ldots, Fn\}$
kielégíthető	kielégíthető
kielégíthetetlen	kielégíthetetlen
tautológia	minden interpretációban kielégíthető

Szemantikus következmény

Szemantikus következmény

Adott az $F = \{F1, F2, ..., Fn\}$ formulahalmaz és G formula. Azt mondjuk, hogy G formula szemantikus következménye F formiulahalmaznak ($\{F1, F2, ..., Fn\} \models_0 G$), ha minden olyan I interpretáció, amely kielégíti az F formulahalmazt ($I \models_0 \{F1, F2, ...Fn\}$), az kielégíti a G következményformulát ($I \models_0 G$) is.

Szemantikus következmény - igazságtáblával

(1) A konyhában az ajtó be volt törve, így a betörő ott biztos járt.
(2) Ha a konyhában járt, akkor biztos nem volt a fürdőben.

Mire következtethetnénk ezekből az állításokból?

$$\{A, A \supset \neg B\} \models_0 \neg B$$

A	B	A	$A \supset \neg B$	$\neg B$
i	i	i	h	h
i	h	i	i	i
h	i	h	i	h
h	h	h	i	i

Tudjuk, hogy konyhában biztos járt, és a fürdőben nem.

Szemantikus következmény - igazságtáblával

(1+2) Tudjuk, hogy a fürdőben nem járt.

(3) A hálóban vagy a fürdőben volt, illetve nem járt a spájzban vagy járt a hálóban.

$$\{\neg B, (C \vee B) \wedge (\neg D \vee C)\} \models_0 C$$

B	C	D	$\neg B$	$(C \vee B) \wedge (\neg D \vee C)$	C
i	i	i	h	$(i \vee i) \wedge (\neg i \vee i) =$ i	
i	i	h	h	$(i \vee i) \wedge (\neg h \vee i) =$ i	
i	h	i	h	$(h \vee i) \wedge (\neg i \vee h) =$ h	
h	i	i	i	$(i \vee h) \wedge (\neg i \vee i) =$ i	i
i	h	h	h	$(h \vee i) \wedge (\neg h \vee h) =$ i	
h	i	h	i	$(i \vee h) \wedge (\neg h \vee i) =$ i	i
h	h	i	i	$(h \vee h) \wedge (\neg i \vee h) =$ h	
h	h	h	i	$(h \vee h) \wedge (\neg h \vee h) =$ h	

Tudjuk, hogy a hálóban járt betörő.

Szemantikus következmény - igazságtáblával

Egy kis előrekövetkeztetés:

A következőkből melyik formulák következményei a $\{A, B \supset A\}$ formulahalmaznak?

				✗	✓	✓	✗	✗	✓
A	B	A	$B \supset A$	$\neg B$	$A \vee D$	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \vee \neg A$
i	i	i	i	h	i	i	h	i	i
i	h	i	i	i	i	i	h	h	i
h	i	h	h	h	D	i	i	i	i
h	h	h	i	i	D	h	i	i	i

És a $\{A \wedge B, \neg B \vee \neg A\}$ formulahalmaznak?

				✓	✓	✓	✓
A	B	$A \wedge B$	$\neg B \vee \neg A$	A	$B \vee \neg B$	$\neg A \wedge A$	E
i	i	i	h	i	i	h	?
i	h	h	i	i	i	h	?
h	i	h	i	h	i	h	?
h	h	h	i	h	i	h	?

Szemantikus következmény alakítás tautológia vizsgálatra

Ellenőrizzük:
$\{\neg(G \wedge (\neg F \supset D)), (D \supset E) \wedge (E \supset D), D \wedge (F \supset G)\} \models_0 D \wedge E \wedge \neg F \wedge \neg G$

1 irány:

Dedukciós tétel

Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n, B (n \geq 1)$ tetszőleges ítéletlogikai formulák.
$\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n\} \models_0 B$ pontosan akkor, ha $\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\} \models_0 A_n \supset B$.

Az eldöntésprobléma tétele

Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ ítéletlogikai formulák. $\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n\} \models_0 B$ pontosan akkor, ha $\models_0 A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_{n-1} \supset A_n \supset B$, vagy másképp a $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_{n-1} \supset A_n \supset B$ formula tautológia.

Kéne:
$\neg(G \wedge (\neg F \supset D)) \supset ((D \supset E) \wedge (E \supset D)) \supset (D \wedge (F \supset G)) \supset (D \wedge E \wedge \neg F \wedge \neg G)$
tautológia?

Szemantikus következmény alakítás kielégíthetetlenség vizsgálatra

Ellenőrizzük:
$\{\neg(G \wedge (\neg F \supset D)), (D \supset E) \wedge (E \supset D), D \wedge (F \supset G)\} \models_0 D \wedge E \wedge \neg F \wedge \neg G$

2. irány:

Tétel

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n, B (n \geq 1)$ tetszőleges ítéletlogikai formulák. $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n\} \models_0 B$ pontosan akkor, ha az $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen, vagy másképp a $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$ formula kielégíthetetlen.

Kéne: $\{\neg(G \wedge (\neg F \supset D)), (D \supset E) \wedge (E \supset D), D \wedge (F \supset G), \neg(D \wedge E \wedge \neg F \wedge \neg G)$ **kielégíthetetlen?**