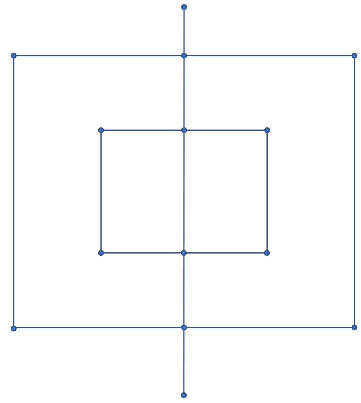
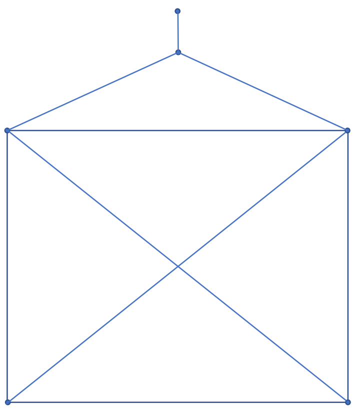
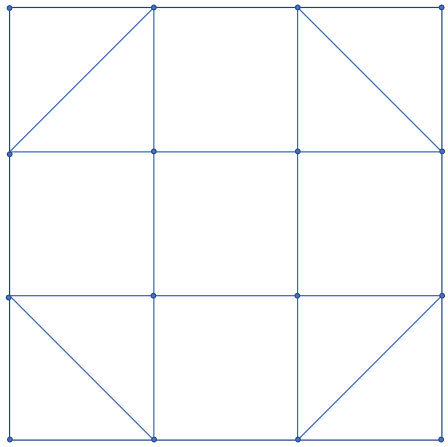
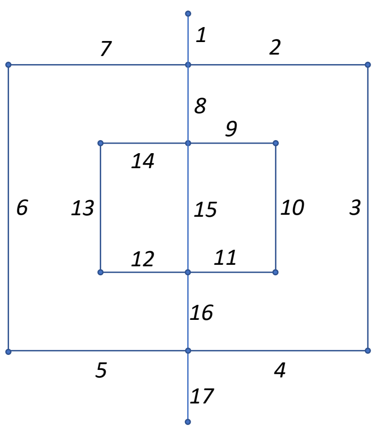
Diszkrét matematika 1 11. feladatsor

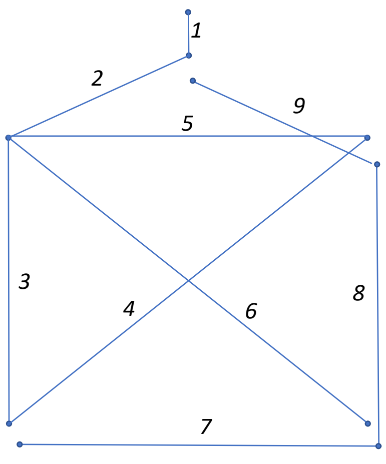
1. feladat

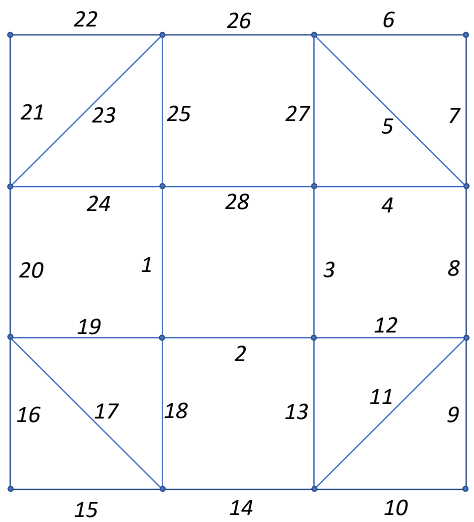
Lerajzolhatóak-e a ceruza felemelése nélkül az alábbi gráfok úgy, hogy minden élet pontosan egyszer húzunk be (=van-e nyílt/zárt Euler vonala a gráfnak)? Igazoljuk állításunk.

A G gráf egy vonala Euler-vonal, ha tartalmazza a gráf minden élét. Ez a vonal lehet zárt, ekkor a gráf egy Euler-gráf, és lehet nyílt. A G gráf akkor és csak akkor Euler-gráf, ha összefüggő és minden csúcsának foka páros. Euler-gráf élfüggetlen körök uniója. Ha az összefüggő G gráfban a páratlan fokszámú csúcsok száma $2k$, ahol k pozitív egész szám, akkor a gráf k élfüggetlen nyílt vonal uniója. Ezek alapján a bal oldali ábra gráfja egy nyílt Euler-vonal, a középső két éldiszjunkt vonal uniója, míg a jobb szélső gráf Euler-gráf, amint az alábbi ábrák mutatják. Az ábrákon a számok a bejárás egy lehetséges sorrendjét jelzik.



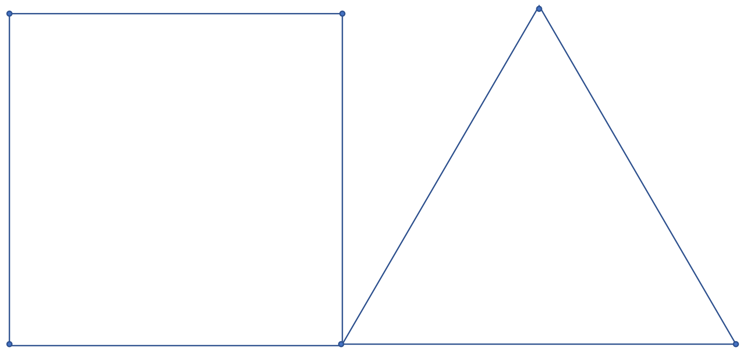




2. feladat

Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben van zárt Euler-vonal, páros sok csúcsa és páratlan sok éle van?

Igen, amint az alábbi ábra mutatja.



3. feladat (*)

Mutassuk meg, hogy ha egy hurokélmentes gráf minden pontjának foka 4, akkor élei színezhetőek piros és kék színekkel úgy, hogy minden csúcshoz két-két piros és kék él illeszkedjen!

A feladatban megfogalmazott feltétel a gráf minden komponensében külön-külön teljesül, így elegendő az állítást összefüggő gráfban igazolni.
Ha egy összefüggő gráf minden csúcsának foka 4 és a gráfban van legalább két pont, akkor minden csúcsnál legfeljebb egy hurokél lehet. Amennyiben egy ilyen gráfban van hurokél, akkor az adott csúcsra három él illeszkedik, így a színezés a megadott módon nemvégezhető el, vagyis a hurokél-mentesség szükséges feltétel.
Ha az összefüggő gráf minden csúcsának foka 4, tehát páros, akkor a gráf egy Euler-gráf, így van zárt Euler-vonala. A gráf nem tartalmaz hurokélt, így a vonalon bármely két szomszédos csúcs különböző, és minden csúcs pontosan kétszer fordul elő a zárt vonalon, hiszen egy csúcs a vonalon minden előfordulásánál pontosan két különböző élhez csatlakozik. Ebből következik, hogy a zárt vonalban az élek száma páros, így kiszínezhetjük őket felváltva piros és kék színnel. De ily módon minden csúcsra mindkét előfordulásánál egy piros és egy kék él illeszkedik, ami igazolja az állítást.

4. feladat

Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban van Hamilton-kör, akkor bárhogyan töröljük egyetlen élét, a maradék gráf összefüggő. Mi a helyzet, ha él helyett egy csúcsot törlünk?

Ha egy gráfban van Hamilton-kör, akkor összefüggő. Amennyiben a gráf egy olyan élét töröljük, amely nincs rajta a körön, akkor a kör nem változik, a gráf összefüggő marad. Másrészt egy körből egy élt törölve egy eggyel rövidebb utat kapunk, amely ismét összefüggő, így, ha van a gráfban Hamilton-kör, akkor a gráf bármely élét töröljük, összefüggő marad.
Csúcs törlése együtt jár a rá illeszkedő élek törlésével. Egyszerű gráfban egy kör legalább három hosszúságú. Ha a körből törlünk egy csúcsot, akkor a körből pontosan két él törlődik, és a kör megmaradt része egy, az eredeti körnél kettővel rövidebb út, amely a gráf valamennyi, a törölt csúcstól különböző, azaz a maradék gráf minden csúcsát tartalmazza, így ez a gráf összefüggő. Hamilton-kör a gráf minden csúcsát tartalmazza, így bármely csúcsot törölve a gráfból, az előbbi esetet kapjuk.

5. feladat

Bizonyítsuk be, hogy amennyiben egy gráfban található k pont, melyeket elhagyva a gráf több, mint k komponensre esik szét, akkor a gráfnak nincs Hamilton-köre!

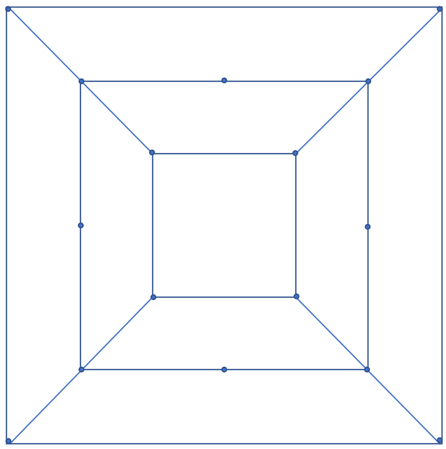
A feladatban k pozitív egész szám. Egy legalább k hosszúságú körből k pontot elhagyva a kör legfeljebb k csúcsdiszjunkt útra esik szét (mert körből egy pontot törölve utat kapunk, amely összefüggő, majd útból pontot törölve legfeljebb két pontdiszjunkt út keletkezik), így, ha a gráfban van Hamilton-kör, akkor a k pontot (a rá illeszkedő élekkel) elhagyva a gráf legfeljebb k komponensre esik szét.

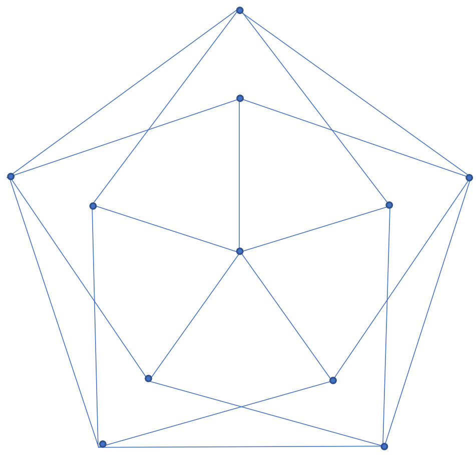
Kiegészítés: ha egy gráfból $k \in \mathbb{N}^+$ pontot elhagyva a gráf több, mint $k+1$ részre esik szét, akkor a gráfban nincs Hamilton-út (és akkor Hamilton-kör sem). Ez következik abból, hogy egy minimum k hosszúságú útból k pontot a rá illeszkedő élekkel törölve az út legfeljebb $k+1$ csúcsdiszjunkt útra bomlik.

Megjegyzés: a fenti eredmények akkor is igazak, ha csúcsok helyett éleket törlünk. Valóban, körből egy élt törölve egy eggyel rövidebb hosszúságú utat, útból egy élt törölve két csúcsdiszjunkt utat kapunk, amelyek együttes hossza eggyel kisebb, mint az eredeti út hossza.

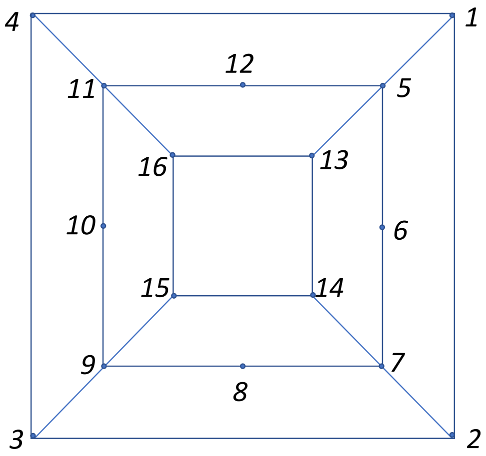
6. feladat

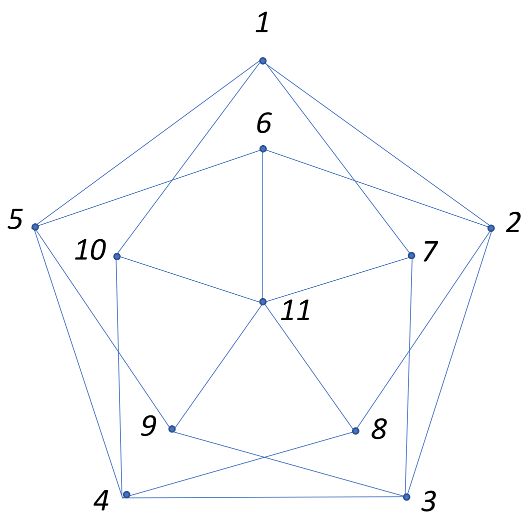
Van-e az alábbi gráfoknak Hamilton-köre (útja)? Igazoljuk állításunk.



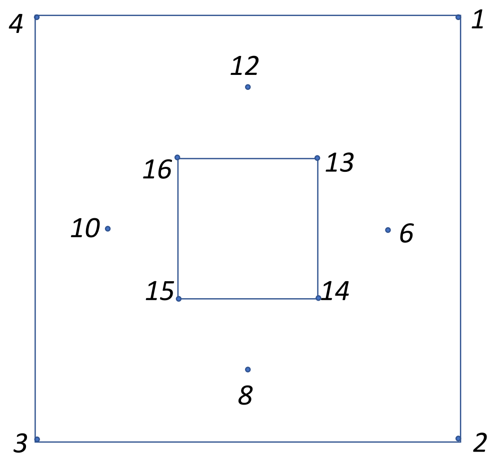


A fenti gráfok a csúcsok megjelölésével:

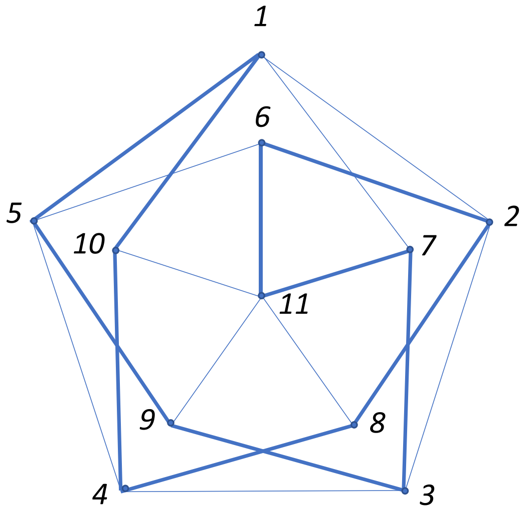




A bal oldali gráfból törölve az 5, 7, 9 és 11-es csúcsot a ráilleszkedő élekkel, az alábbi gráfot kapjuk:



Négy csúcsot töröltünk, és az eredetileg összefüggő, tehát egy komponensből álló gráf hat részre esett, vagyis kettővel többre, mint a törölt pontok száma, így ebben a gráfban még Hamilton-út sincs. A másik gráfban viszont van Hamilton-kör, amint a következő ábra vastagított része mutatja:



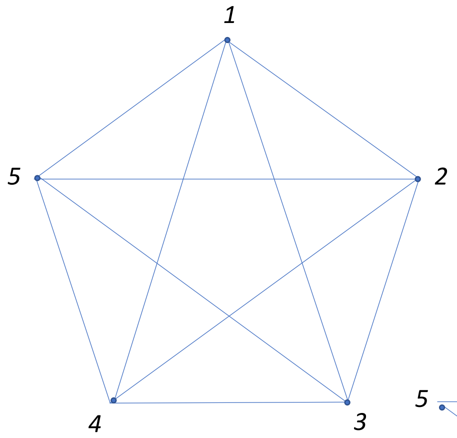
7. feladat
Bizonyítsuk be, hogy ha egy véges összefüggő gráf K köréből valamelyik élt eltörölve a gráf egy leghosszabb útját kapjuk, akkor K Hamilton-köre a gráfnak!

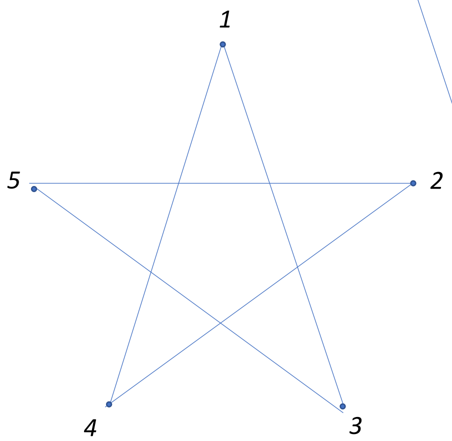
Legyen a leghosszabb út hossza L. Ha K nem Hamilton-kör, akkor nem tartalmazza a gráf minden csúcsát, van tehát a gráfnak körön kívüli csúcsa. A gráf összefüggő, így minden, a körhöz nem tartotó pontból vezet út a kör bármely pontjába. Ebből következően van olyan, a körön kívüli pont, amely szomszédos a kör valamely pontjával. Legyen a egy, a körön kívüli ilyen pont, b a körön lévő egyik szomszédja, és legyen c a b körön lévő szomszédja, továbbá legyen u a kör egy mind a-tól, mind b-től különböző pontja. Ekkor a kör b és c közötti, az u-t tartalmazó részét b-nél megtoldva az a és b közötti éllel egy $L+1$ hosszúságú utat kapunk, ami lehetetlen, hiszen ez az út hosszabb lenne a gráf leghosszabb útjánál.

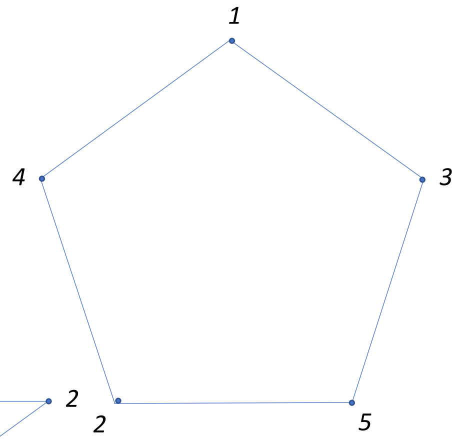
8. feladat
Mutassuk meg, hogy minden $n \geq 5$-re igaz, hogy

(a) létezik olyan n-csúcsú G gráf, hogy G is és $\bar{G}$ is tartalmaz Hamilton-kört;

Legalább 3-pontú teljes gráf tartalmaz Hamilton-kört (ezt a 11. feladatban igazoljuk). Ekkor a komplementer gráfban minden csúcs foka $n-1-2=n-3$, és $n-3 \geq \frac{n}{2}$, ha $n \geq 6$. Ekkor a Dirac-tétel szerint (lásd a 11. feladatban) a gráfban van Hamilton-kör. $n=5$ esetén is igaz az állítás, mert ekkor a komplementer gráf egy ötágú csillag, amely maga is egy 5-hosszúságú kör, tehát Hamilton-köre K_5-nek (alább az ábra). Ha $n=4$ vagy $n=3$, és a gráfban van Hamilton-kör, akkor a komplementer gráfban minden csúcs foka 1 illetve 0, így a komplementer gráfban nincs kör. Ha pedig $n<3$, akkor kör sincs egy egyszerű gráfban.

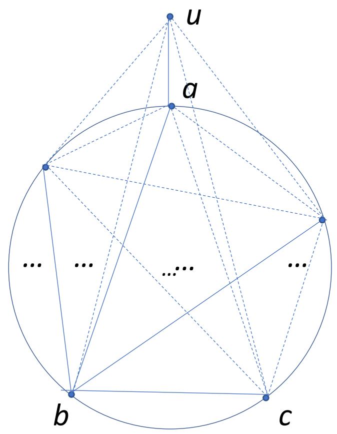






(b) létezik olyan n-csúcsú G gráf, hogy sem G sem $\bar{G}$ nem tartalmaz Hamilton-kört.

Legyen $n \geq 5$. Ha egy $n-1$-pontú kör egyik pontját, a-t a körön kívüli egyetlen ponttal, u-val összekötjük egy éllel, majd a kör egy és csak egy, az előbbi ponttól különböző b pontját összekötjük a kör minden más pontjával, akkor mind a gráfban, mind a komplementerében lesz 1-fokú csúcs (a komplementer gráfban b), így egyikben sem lehet Hamilton-kör.
Ebben az esetben mind a gráf mind a komplementere összefüggő. A gráf egy kör és egyetlen körön kívüli pont, amely egy éllel csatlakozik a körhöz, tehát a gráf összefüggő. A komplementer gráfban az a pont kivételével mindegyik pont szomszédos u-val. Az eredeti körnek van legalább négy pontja, így van a-tól és b-től különböző c pont, és a komplementer gráfban a szomszédos c-vel, amiből következik a komplementer gráf összefüggősége.



Ha nem feltétel mindkét gráf összefüggősége, akkor van a fenti példánál egyszerűbb, a feltételnek megfelelő gráf, például az n-pontú csillag.

9. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha egy páros gráfban van Hamilton-kör, akkor a két csúcsosztálya azonos elemszámú!

Páros gráfban minden körön a csúcsok felváltva az egyik és a másik csúcshalmazból vannak, páros gráfban minden kör azonos számú pontot tartalmaz a két osztályból. Ez igaz a Hamilton-körre is, amelyben a gráf minden csúcsa benne van.

10. feladat

Bejárható-e a 9×9-es sakktábla lóugrással úgy, hogy a kiindulási mezőre érjünk vissza?

A sakktáblán minden sorban felváltva követ egymást egy fehér és egy fekete négyzet, és a szomszédos sorokban az egymás alatt lévő mezők ellenétes színűek. A ló úgy ugrik, hogy egy-egy ugrás alkalmával egyet lép a tábla egyik szélével párhuzamosan és kettőt a másik széllel párhuzamosan. Az előbbinél a kiinduló ponthoz képest ellenkező színű négyzetre kerül, majd innen egy ezzel megegyezőre, vagyis minden ugrásnál a kiinduló ponthoz képes ellenkező színű mezőre ugrik. A feladatban az a kérdés, hogy egymás utáni ugrásokkal visszaérhet-e a kiinduló pontra úgy, hogy közben minden mezőre pontosan egyszer ugrik. A feladatnak megfeleltethető egy $9 \times 9 = 81$-pontú olyan gráf, ahol a pontok a sakktábla mezői, és két pont pontosan akkor szomszédos, ha az egyik pontból a másik pont egyetlen lóugrással elérhető. Ekkor a kérdés az, hogy van-e ebben a gráfban Hamilton-kör. Ha van, akkor ennek a körnek 81 éle van, és mindenegyes él egy-egy ugrásnak felel meg. De páratlan sok ugrás végén a kiinduláshoz képest ellentétes színű mezőre érkezünk, amiből következik, hogy nem érhetünk vissza a kiinduló pontra, ez a sakktábla nem járható be lóugrással.

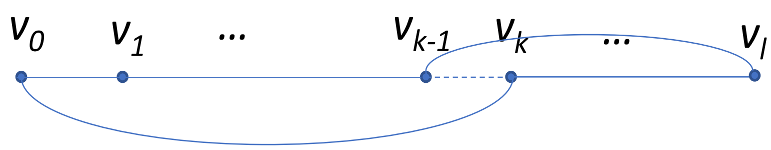
Á feladat minden olyan sakktábla esetén ugyanezt a megoldást adja, amelyben a sorok száma (és az oszlopok ugyanazon száma) páratlan.

11. feladat (*)

Legyen $n \geq 3$ pozitív egész, és G egy n-pontú egyszerű gráf. Bizonyítsa be, hogy ha G minden csúcsának foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-nek van Hamilton-köre!

A feladatban megfogalmazott állítás a Dirac-tétel. Ennél egy kicsit általánosabb (azaz enyhébb feltételt tartalmazó) tétel Ore tétele: ha egy $3 \leq n$-pontú egyszerű gráf bármely két, nem szomszédos csúcsa fokszámának összege legalább n, akkor a gráfban van Hamilton-kör. Ebből a tételből valóban következik Dirac tétele, mert ha bármely csúcs fokszáma legalább $\frac{n}{2}$, akkor bármely két, és így bármely két nem szomszédos csúcs fokszámának összege minimum n.

Ore tételét bizonyítjuk. Ehhez először megmutatjuk, hogy ha egyszerű gráfban egy maximális út két végpontja fokszámának összege nagyobb, mint az út hossza, akkor van olyan kör a gráfban, amelynek a pontjai az út pontjai (vagyis egy $l + 1$ hosszúságú kör).



Most az út hossza l. Legyen a két végpont fokszáma r és s (r a bal oldali végpont fokszáma), ahol $r + s > l$. Mivel az út maximális, ezért a v_0-ból és a v_l-ből induló minden él másik végpontja az út egy-egy pontja úgy, hogy az egyik végpontból induló élek másik végpontjai az út más-más pontjához csatlakoznak. A v_0-ra illeszkedő élek v_0-tól különböző végpontjai indexeinek halmaza az $[1..l]$ halmaz r-elemű részhalmaza (amelynek biztosan eleme 1, a v_0-v_1 él jobb oldali végpontjának indexe). Hasonlóan, a v_l-re illeszkedő élek v_l-től különböző végpontjai indexei a $[0..l-1]$ halmaz elemei, és $l-1$ szerepel az indexek között. A v_0-hoz kapcsolódó élek jobb oldali végpontjaival balról szomszédos pontok indexei a $[0..l-1]$ halmazban vannak. Ekkor ebbe a halmazba esik egyrészt r, másrészt s egész szám. Ezek száma együtt nagyobb, mint a halmaz elemeinek száma, így van legalább egy közös pont, mondjuk $k-1$. De ekkor van az út pontjait és csak ezeket a pontokat tartalmazó kör, amint a fentebbi ábra mutatja. Meg kell jegyezni, hogy ha $k=1$, akkor a kimaradó él és az új, v_0-t v_k-val összekötő él egyaránt a v_0-v_1 él, vagyis ebben az esetben az út két végpontja szomszédos, és a két végpont közötti él zárja az utat körré.

Másodikként megmutatjuk, hogy minden $3 \le n \in \mathbb{N}$ esetén az n-pontú teljes gráfban, K_n-ben van Hamilton-kör. Ez $n=3$ esetén igaz, hiszen a 3-pontú teljes gráf egy háromszög, azaz egy három hosszúságú kör, így ebben az esetben a teljes gráf maga a gráf Hamilton-köre. Tegyük fel, hogy valamilyen, a 3-nál nem kisebb n esetén van K_n-ben Hamilton-kör, és nézzük K_{n+1}-et. Rögzítsük ennek a gráfnak egy tetszőleges pontját. Legyen ez a pont w. Az ettől a ponttól különböző többi pont által feszített részgráf egy n-pontú teljes gráf, így, az indukciós feltevés alapján, ebben a gráfban van Hamilton-kör. Legyen ennek a körnek két szomszédos pontja u és v. Az eredeti gráfban, K_{n+1}-ben mindkét pont szomszédos w-vel. Ha most töröljük az előbbi Hamilton-körből az u-t és v-t összekötő élt, majd az így kapott, u és v közötti $n-1$ hosszúságú utat kiegészítjük az u és w valamint a w és v közötti (nyilván egymástól és az elhagyott éltől is különböző) éllel, akkor egy $n+1$-hosszúságú kört kapunk, egy olyan kört, amely K_{n+1} minden csúcsát tartalmazza, azaz a K_{n+1} egy Hamilton-körét, azaz K_{n+1}-ben is van Hamilton-kör. Mindebből következik az állítás.

Harmadikként belátjuk, hogy ha egy gráf megfelel a tételben megfogalmazott feltételeknek (egyszerű, és bármely két, nem szomszédos csúcsának fokszáma nem kisebb, mint a csúcsok száma), akkor a gráf összefüggő. Ha ugyanis nem így lenne, akkor csak a gráfban nem szomszédos csúcsok lehetnek a gráf különböző komponensében. Különböző komponensek csúcsainak halmazai diszjunktak. Ha most u és v a gráf két olyan pontja, amelyek a gráf két különböző komponensében vannak, u fokszáma r és v fokszáma s, akkor u-nak van r, v-nek s páronként különböző szomszédja. Ebből következően az u-t tartalmazó komponensnek legalább $r+1$, a másik komponensnek legalább $s+1$ különböző pontja, azaz a gráfnak legalább $(r+1)+(s+1)=(r+s)+2$ csúcsa van. Ám a tétel feltétele szerint $r+s \ge n$, és ez az előbbi értékkel nem egyeztethető össze.

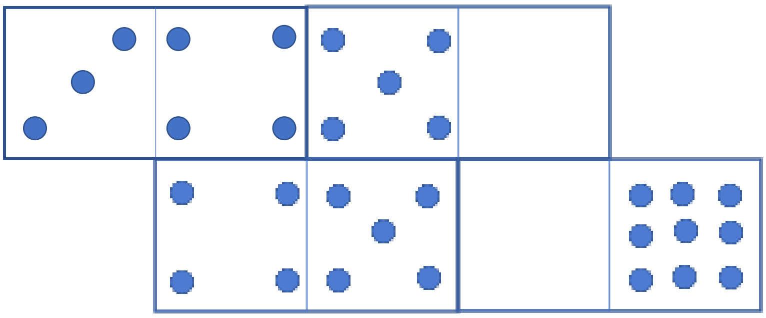
Ezeket az eredményeket használva bizonyítjuk Ore tételét. Legyen G a gráf. Ez a gráf összefüggő. Ha a gráfban van Hamilton-kör, akkor készen vagyunk. Ha nincs, akkor húzzunk be a gráf valamely két nem szomszédos pontja közé egy élt. Ezt addig folytassuk, míg a kapott gráfban már lesz Hamilton-kör. Véges sok lépésben biztosan eljutunk egy ilyen gráfhoz, hiszen minden legalább 3 pontot tartalmazó teljes gráfban van Hamilton-kör. Legyen G' az a gráf, amelyben még nincs Hamilton-kör, de egy élt behúzva már lesz. Ekkor ebben a gráfban van Hamilton-út (mert ezt a gráfot egy Hamilton-kört tartalmazó gráfból egy él törlésével kapjuk, így egy olyan utat kapunk, amely a gráf minden csúcsát tartalmazza). Ennek az útnak a két végpontja G'-ben nem szomszédos (ha szomszédos lenne, akkor a két pontot összekötő éllel bővítve az utat már kört kapánk). Amikor mindig egy-egy éllel bővítjük a gráfot, akkor egyetlen csúcs foka sem csökken, ezért G'-re is igaz, hogy benne a nem szomszédos csúcsok fokszámának, tehát a Hamilton-út két végpontja fokszámának összege legalább n, ami nagyobb, mint a Hamilton út $n-1$ hossza. Ám ekkor, az előzőekben bizonyítottak alapján, lenne G'-ben a Hamilton-út minden pontját, azaz G' minden pontját tartalmazó kör, azaz lenne G'-ben Hamilton-kör, ami nincs. Mindebből következik, hogy érvényes Ore tétele.

12. feladat
Egy hotelbe 100 fős társaság érkezik, akik közül kezdetben bármely két ember jóban van egymással. Esténként egyetlen nagy kerek asztal köré ül le mindenki. Sajnos egy vacsora alatt az egymás mellé került emberek örökre összevesznek egymással. A társaság minden vacsora előtt úgy ül le, hogy a szomszédjaival jóban legyen. Ha ez lehetetlen, akkor minden résztvevő aznap este hazamegy. Mutasd meg, hogy legalább 25 éjszakát a hotelben tud tölteni a társaság!

A feladathoz legyen G egy 100-pontú gráf, amelyben a pontok a társaság tagjai, és két pont legyen szomszédos akkor és csak akkor, ha a megfelelő két ember jóban van. A kiinduló feltétel alapján ez a gráf a 100-pontú teljes gráf. Ebben a gráfban van Hamilton-kör, tehát le tudnak ülni egy kerek asztal mellé úgy, hogy mindenki jóban van mindkét mellette ülő emberrel. Ha $G_0 = G$, akkor legyen G_1 az a gráf, amelyet az előbbiből úgy kapunk, hogy elhagyjuk azokat az éleket, amelyek az előző körben egymás mellett ülő embereket kötötte össze. Ez a gráf az első este utáni állapotot reprezentálja. Ha G_1-ben van Hamilton-kör, akkor a 2. estén is le tudnak ülni egy kerek asztal mellé úgy, hogy szomszédos emberek jóban vannak. A nap végén megint törlünk éleket, most G_1-ből, és így a G_2 gráfhoz jutunk. Legyen k az a pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy a k-adik estén még le tudnak ülni egy kerek asztal mellé, de a $k+1$-edik napon már nem, azaz az egymás után keletkező G_i gráfokban, ahol $0 \le i < k$-ra G_i-ben van Hamilton-kör, de G_k-ban már nincs. G_i-ből G_{i+1} úgy keletkezik, hogy minden csúcsnál törlünk két-két élt. G_0-ban minden csúcs foka 99, és G_i-ben $99-2i$. G_i-ben biztosan van Hamilton-kör, ha minden csúcs foka legalább a csúcsok számának a fele, azaz ha minden csúcs fokára teljesül a $99-2i \ge \frac{100}{2} = 50$. Ez minden $0 \le i \le \frac{49}{2}$-re fennáll, tehát az első rossz gráf indexe legalább 25, ami azt jelenti, hogy $G_0, \cdots, G_{24}$-ben van Hamilton-kör, az első 25 este biztosan le tudnak ülni egy kerek asztal mellé úgy, hogy a szomszédos emberek jó viszonyban vannak.

13. feladat (*)
Mutassuk meg, hogy egy dominócsomagból kirakható kör.

A feladatot úgy kell érteni, hogy a dominójáték szabályai szerint kirakva kapunk kört (nem a gráf értelmében kört, hanem fizikailag.)
A dominó olyan lapokból áll, amelyek két felén egy-egy, egy előre rögzített n nemnegatív egész számnál nem nagyobb k egész számnak megfelelő számú „pötty” van, és minden ilyen k, l nem rendezett pár egy és csak egy dominólapon található (a k, k párok is szerepelnek a készletben). A lapok száma így ${}^{(i)}C_n^2 = C_{n+1}^2 = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$. A klasszikus dominóban $n = 9$, így a lapok száma 45. A játékban a lapokat úgy kell téglaszerűen egymás mellé helyezni, hogy az érintkező két lapfélen a pöttyök száma azonos legyen, amint az alábbi ábra mutatja $n = 9$-re:

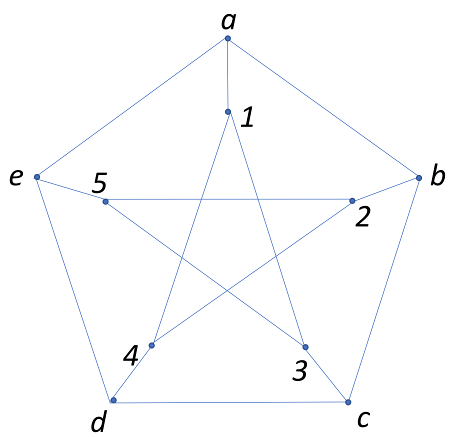


A feladat azt kérdezi, hogy kirakható-e a teljes készlet úgy, hogy a bal szélső lapfélen lévő pöttyök száma azonos legyen a jobb szélső lapfélen lévők számával.
A feladathoz hozzá rendelünk egy gráfot. A gráf pontjai a $0,1,\cdots,n$ számok, és az élek az egyes lapok: egy lapnak megfelel az az él, amelynek két végpontja a lapon lévő pöttyök száma. Ez a gráf egy $n+1$-pontú teljes gráf kiegészítve minden csúcsnál egy-egy hurokéllel. A dominó egy kirakása egy vonal ebben a gráfban, amely zárt, ha a vonal két végpontja azonos. A kérdés az, hogy létezik-e ebben a gráfban zárt Euler-vonal. A gráf nyilván összefüggő, és pontosan akkor lesz benne zárt Euler-vonal, ha minden csúcs foka páros. Most egy csúcsa foka n, tehát akkor és csak akkor lehet körként kirakni a dominó lapjait, ha n páros.

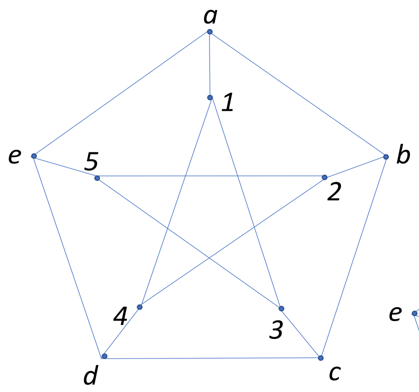
Az eredményünk alapján $n=1$ esetén nem lehet kört képezni, míg $n=2$-nél igen. Az előbbi esetben a párok a 00, 01 és 11, ezeket csak kétféleképpen lehet úgy kirakni, hogy mindegyik lap szerepeljen, vagy a 00-val vagy az 11-gyel kezdve, és az előbbinél az egyetlen lehetséges kirakás a 00, 01, 11 sorozat, míg a másik ebből a fordított sorrenddel adódik. $n=2$-nél egy körberakást ad a következő sorrendű kirakás: 00, 01, 11, 12, 22, 20. És az eredményből azt is kaptuk, hogy az „igazi”, 45-lapos dominót nem lehet körként kirakni, mert ott $n=9$, azaz n páratlan.

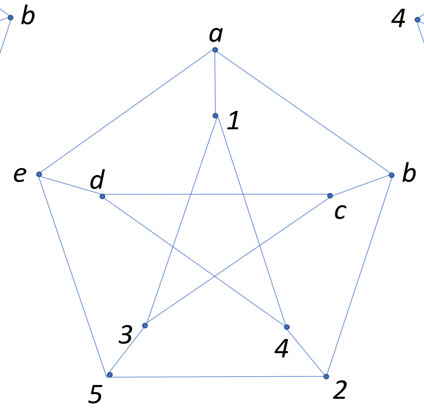
14. feladat (*)
Mutassuk meg, hogy a Petersen-gráfban nincs Hamilton-kör, de bárhogy töröljük egyetlen csúcsát, a maradékban már lesz.

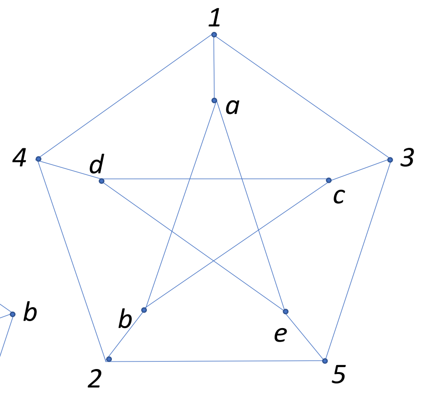
A Petersen-gráf egy lehetséges realizációja látható az alábbi ábrán.



Látszik, hogy a gráf 3-reguláris. $abcdea$ egy 5-hosszúságú kör. De 5-hosszúságú az 135241 pontsorozat is. A gráf rajzolható úgy, hogy ez utóbbi legyen kívül, és az előbbi kör legyen belül egy ötágú csillag. És olyan rajzolat is van, ahol a kívül lévő kör pontjai részben az eredeti gráf külső köréhez, a többi a belső csillaghoz tartoznak:







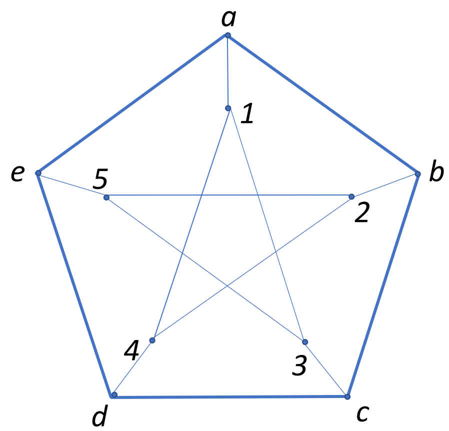
Fogalmazzuk át a feladatot úgy, hogy van-e a Petersen-gráfban Hamilton-kör vagy Hamilton-út. A kérdés megválaszolásához elsőként vizsgáljuk meg a korábban már megismert Ore-tételt valamint a csúcsok törlésére vonatkozó megállapításokat. Az alábbiakban a belül lévő csillagot belső körnek, a másik kört külső körnek, míg a többi élt kötőélnek nevezzük.

Ha Ore tételének a feltételei teljesülnének, akkor a gráfban biztosan lenne Hamilton-kör. Ám a Petersen-gráfban a csúcsok száma 10, ugyanakkor minden csúcs foka 3, tehát bármely két, nem szomszédos csúcs fokszámának összege 6, ami kisebb a csúcsok számánál, így Ore tétele nem ad választ a kérdésre (Ore tétele ezen adatokkal sem azt nem adja, hogy van a gráfban Hamilton-kör, sem azt, hogy nincs ilyen kör a gráfban).

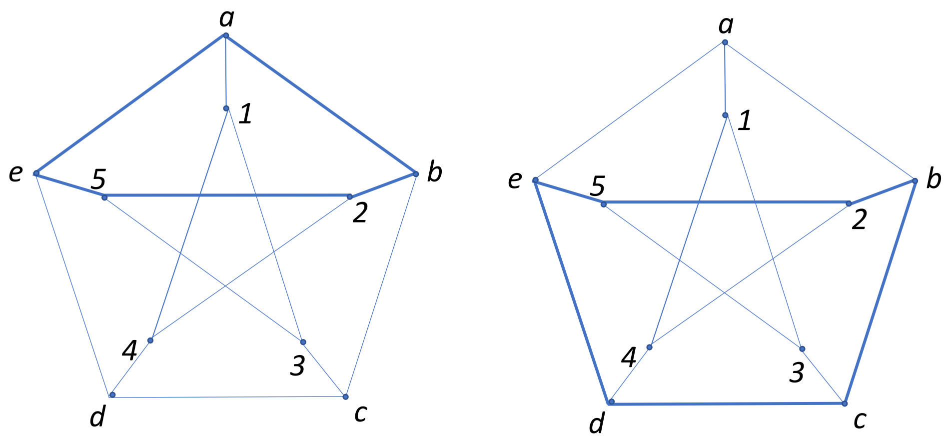
Most töröljünk a gráfból k csúcsot, amelyből r az egyik, s a másik körön van, tehát $k = r + s$. Egy körből t pontot törölve a kör legfeljebb t részre esik szét. Ha a Petersen-gráf egyik köréből töröljük az r pontot, akkor ez a kör legfeljebb r részre esik szét, de ezen pontok elhagyása a másik körön semmilyen változást nem okoz. Utána a másik körből törölve s pontot, maga ez a kör is legfeljebb s részre esik szét, vagyis a pontok törlése után a két kör még akkor is, ha semmi összeköttetés nem lenne közöttük, maximum $r + s = k$ komponensű gráfot eredményezne. Ez azt jelenti, hogy nem kaptunk bizonyítékot arra, a Petersen-gráfban nincs Hamilton-kör vagy Hamilton út.

A fenti negatív eredmények után nézzük meg, milyen körök vannak ebben a gráfban. Egy kör vagy csak a $K^{(k)}$-val jelölt $abcdea$ külső, vagy csak a $K^{(b)}$-vel jelölt 135241 külső körből tartalmaz élt, vagy mindkettőből. $K^{(k)}$-nak és $K^{(b)}$-nek nincs közös csúcsa, és így közös éle sincs, a két kör pontdiszjunkt. A két kört páronként nem szomszédos élek, a kötőélek kötik össze úgy, hogy a külső kör minden pontjára egy és csak egy kötőél illeszkedik. Két különböző kötőél mind a külső, mind a belső kört két olyan útra bontja, ahol a két út hossza vagy 4 és 1 vagy 3 és 2. Azt is érdemes megfigyelni, hogy ha egy kötőélpár az egyik kört 4-1 arányban osztja, akkor a kötőélek másik végpontjai a másik kört 3-2 hosszúságú részekre vágják és fordítva.
Mivel kötőélek nem szomszédosak, ezért egy körön kötőélek nem követhetik egymást, és a körön valamely irányban haladva két kötőél egymást követő előfordulása között vagy csak a külső, vagy csak a belső kör élei követik egymást, kötőélenként váltakozva úgy, hogy a kötőélek között legalább egy nem kötőél van. A kör a kiinduló pontjában végződik, így egy, a külső

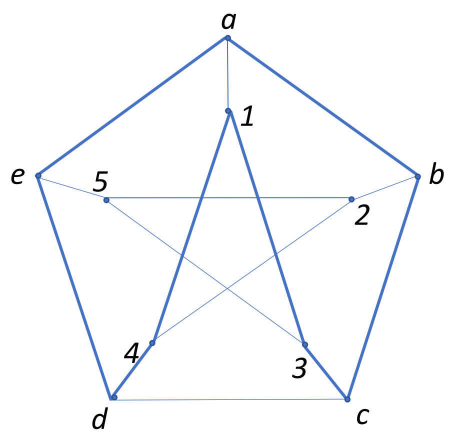
körből induló kör a külső körön végződik és fordítva. Ez csak úgy lehetséges, ha páros sok kötőél van a körön. Mivel összesen öt kötőél van, ezért a gráf bármely körében 0, 2 vagy 4 kötőél állhat.
Szimmetriaokokból elegendő csak az olyan köröket keresni, amelyek a külső körből legalább annyi élt tartalmaznak, mint a belsőből.
Olyan kör, amely csak a külső körből tartalmaz élt, egy és csak egy van:



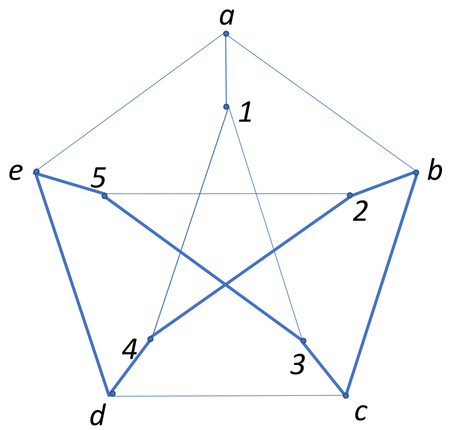
A belső körből egyetlen élt tartalmazó, nem izomorf gráf kettő van:

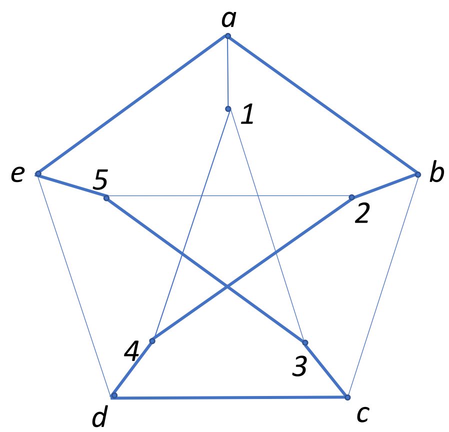


Az egyik 5-, a másik 6-hosszúságú, és az első izomorf a külső körrel, így a jobb oldali ábra gráfja jelent egy lényegesen új kört.
A belső kör két éle lehet szomszédos és nem szomszédos. Az előbbihez egyetlen kör rendelhető (figyelembe véve, hogy a külső körön legalább annyi él legyen, mint a belsőn):



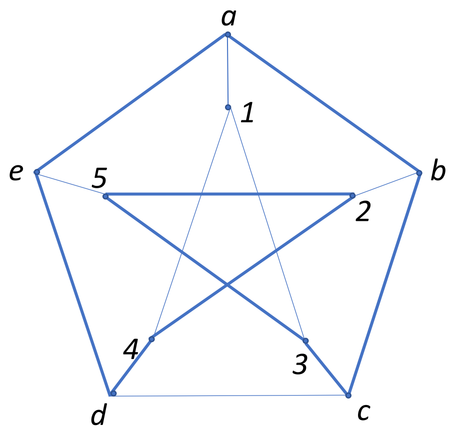
Ez egy 8-hosszúságú kör. A másik esethez két nem izomorf kör adható:



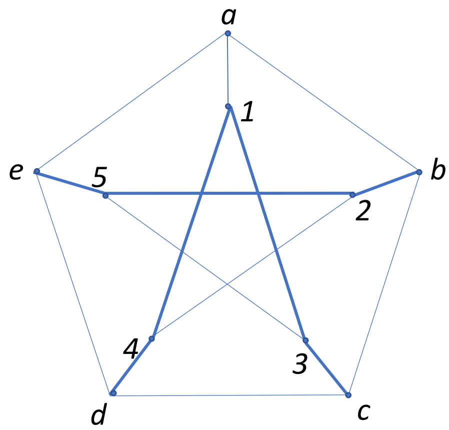


A bal oldalon egy 8-, a jobb oldalon egy 9-hosszúságú kör van, így a második jelent valóban új kört.

Belül három él megint lehet egy út vagy egy 1- és egy ehhez nem kapcsolódó 2-hosszúságú út uniója. Az előbbihez kapunk egy 9-hosszúságú kört, de ilyen már volt:



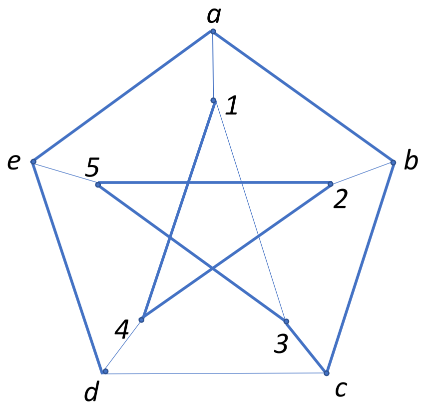
míg az utóbbi kiosztással nincs a gráfban kör, amint az alábbi ábrán látjuk:



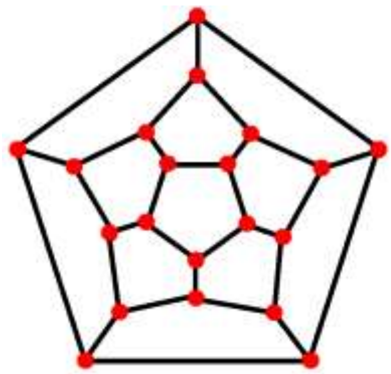
és a külső körön nincs olyan folytatás, amellyel ott legalább három él lenne.

Végül a belső körön négy él csak egy út lehet, ha ez egy 4-hosszúságú út. Ez a belső kört 4-1 arányban osztja. Ám ekkor a csatlakozó két kötőél a külső kört egy 3- és egy 2-hosszúságú részre osztja, és ezek egyike sem legalább olyan hosszúságú, mint a belső körön lévő 4-hosszúságú út, így az ennek a feltételnek megfelelő kör – ha van ilyen – már volt korábban, amikor a külső körből volt négy él.

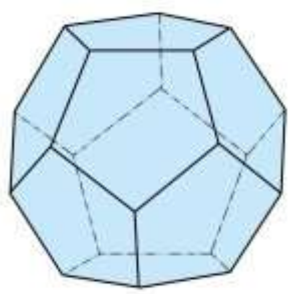
Az előbbiekben megadtuk a Petersen-gráfban lévő összes, páronként nem izomorf kört. A kapott körök hosszai rendre 5, 6, 8 és 9, vagyis nincs a Petersen-gráfban 5-nél rövidebb kör, és nincs sem 7-, sem 10-hosszúságú kör. Ez utóbbi eredmény azt jelenti, hogy a Petersen-gráfban nincs Hamilton-kör. De azt is láttuk, hogy 9-hosszúságú kör van, így az 1-gyel jelölt csúcsot a rá illeszkedő élekkel törölve a gráfból, a kapott részgráfban már van Hamilton-kör. Valójában a Petersen-gráfban lévő szimmetriák miatt bármely egyetlen csúcsot és a hozzá csatlakozó éleket törölve hasonló eredményre jutunk.
Bár Hamilton-kör nincs a Petersen-gráfban, de Hamilton-út van, amint az alábbi ábra mutatja:



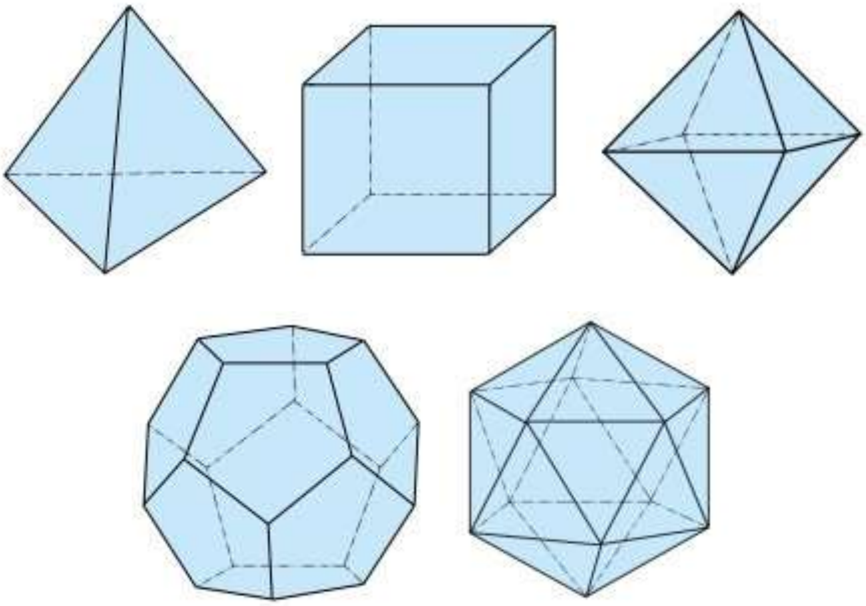
Szorgalmi feladat: Van-e az alábbi gráfban Hamilton-kör?



A fenti gráf a dodekaéder hálózata. Az alább látható dodekaéder az öt szabályos test egyike.



Az olyan térrészt, amelyet véges sok sokszöglap határol, és amely félegyenest nem tartalmaz, poliédernek (soklapú test), és azokat a konvex poliédereket, amelyeknek élei, élszögei és lapszögei is egyenlőek, szabályos testeknek nevezzük. Az öt szabályos test a tetraéder (négylapú test), hexaéder (hatlapú test, kocka), oktaéder (nyolclapú test), dodekaéder (tizenkétlapú test) és az ikozaéder (húszlapú test). Ezek láthatóak a következő ábrán a fenti sorrendben.



A dodekaéderben van Hamilton-kör, amint az alábbi ábrán látható: