Diszkrét matematika I.

2. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagygabor@inf.elte.hu
Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2021. tavasz

Műveletek halmazokkal (Az unió alaptulajdonságai)

Állítás

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (asszociativitás)
3. $A \cup B = B \cup A$ (kommutativitás)
4. $A \cup A = A$ (idempotencia)
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Bizonyítás

- 1. $x \in A \cup \emptyset \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in \emptyset) \Leftrightarrow x \in A$.
- 2. $x \in (A \cup (B \cup C)) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in (B \cup C)) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x \in A) \vee ((x \in B) \vee (x \in C)) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \vee (x \in C) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x \in (A \cup B)) \vee (x \in C) \Leftrightarrow x \in ((A \cup B) \cup C)$
- 3-as, 4-es hasonló.
- 5. $\Rightarrow$: $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B \subseteq B$, de $A \cup B \supseteq B$ mindig teljesül, így $A \cup B = B$.
  $\Leftarrow$: Ha $A \cup B = B$, akkor A minden eleme eleme B-nek (indirekt).

Műveletek halmazokkal - Metszet

A metszet alaptulajdonságai:

Állítás (Biz. HF)

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asszociativitás)
3. $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás)
4. $A \cap A = A$ (idempotencia)
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Műveletek halmazokkal

Az unió és metszet disztributivitási tulajdonságai:

Állítás

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

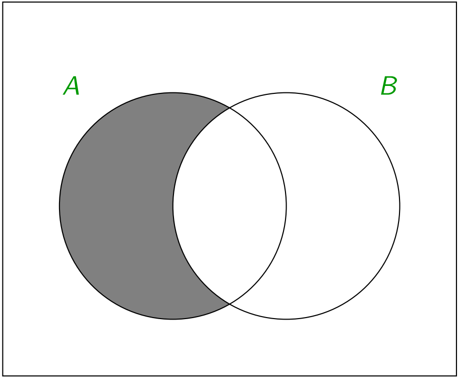
Bizonyítás

1. $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. HF. hasonló

Műveletek halmazokkal - Különbség

Definíció

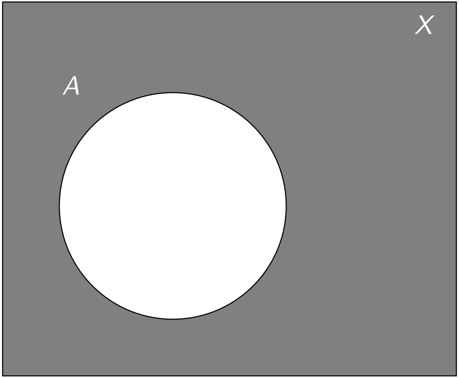
Az A és B halmazok **különbsége** az $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.



Műveletek halmazokkal - Komplementer

Definíció

Egy rögzített X alaphalmaz és $A \subseteq X$ részhalmaz esetén az A halmaz komplementere az $\overline{A} = A' = X \setminus A$.



Műveletek halmazokkal

Állítás

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Bizonyítás

$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}$

Komplementer tulajdonságai

Állítás (Biz. HF)

Legyen X az alaphalmaz.

1. $\overline{\overline{A}} = A$;
2. $\overline{\emptyset} = X$;
3. $\overline{X} = \emptyset$;
4. $A \cap \overline{A} = \emptyset$;
5. $A \cup \overline{A} = X$;
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$;
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

A 7. és 8. összefüggések az ún. de Morgan szabályok.

Komplementer tulajdonságai

Bizonyítás (Példa)

$\vdots$

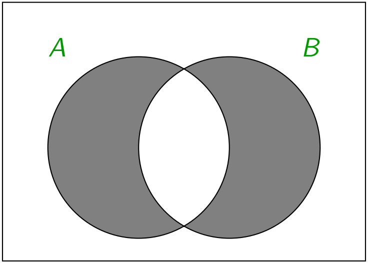
- $x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \land x \in B) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \neg(x \in A) \lor \neg(x \in B) \Leftrightarrow (x \in \overline{A}) \lor (x \in \overline{B}) \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

$\vdots$

Szimmetrikus differencia

Definíció

Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája az
$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.



Állítás (Biz. HF)

$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Hatványhalmaz

Definíció

Ha A egy halmaz, akkor azt a halmazrendszert, melynek elemei pontosan az A halmaz részhalmazai, az A **hatványhalmazának** nevezzük, és 2^A-val vagy $\mathcal{P}(A)$-val jelöljük.

- $A = \emptyset$ esetén $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$.
- $A = \{a\}$ esetén $2^{\{a\}} = \{\emptyset, \{a\}\}$.
- $A = \{a, b\}$ esetén $2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Állítás (Biz. később)

$|2^A| = 2^{|A|}$

Relációk

A relációk

- a függvényfogalom általánosításai;
  - ,,hagyományos'' függvények pontos definiálása;
  - ,,többértékű függvények''
- kapcsolatot ír le
  - $=$, $<$, $\leq$, $\subseteq$, oszthatóság, ...

Rendezett pár

Adott $x \neq y$ és (x, y) rendezett pár esetén számít a sorrend:

- $\{x, y\} = \{y, x\}$
- $(x, y) \neq (y, x)$.

Definíció

Az (x, y) rendezett párt a $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ halmazzal definiáljuk. Az (x, y) rendezett pár esetén a x az első, az y a második koordináta.

Definíció

Az X, Y halmazok Descartes-szorzatán (direkt szorzatán) az

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

rendezett párokból álló halmazt értjük.

Binér relációk

Adott X, Y halmazok esetén az $R \subseteq X \times Y$ halmazokat binér (kétváltozós) relációknak nevezzük.
Ha R binér reláció, akkor gyakran $(x, y) \in R$ helyett xRy-t írunk.

Példa

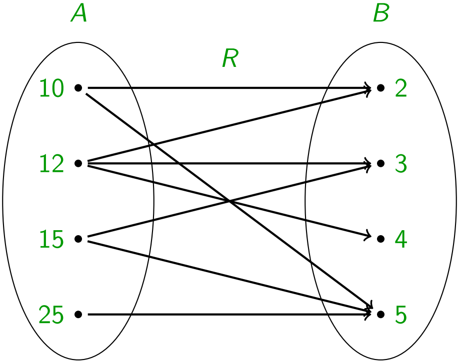
1. $\mathbb{I}_X = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ az egyenlőség reláció (X-en).
2. $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \mid y\}$ az osztója reláció ($\mathbb{Z}$-n).
3. $\mathcal{F}$ halmazrendszer esetén az $\{(X, Y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : X \subseteq Y\}$ a részhalmaza reláció.
4. Adott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén a függvény grafikonja $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$.

Definíció

Ha valamely X, Y halmazokra $R \subseteq X \times Y$, akkor azt mondjuk, hogy R reláció X és Y között. Ha $X = Y$, akkor azt mondjuk, hogy R X-beli reláció (homogén binér reláció).

Binér relációk ábrázolása - Egy példa

Tekintsük az $A = \{10, 12, 15, 25\}$ és $B = \{2, 3, 4, 5\}$ halmazok közötti R relációt, amire $aRb \iff b$ osztója a-nak.



Relációk értelmezési tartománya, értékkészlete

Ha R reláció X és Y között ($R \subseteq X \times Y$) és $X \subseteq X'$, $Y \subseteq Y'$, akkor R reláció X' és Y' között is!

Definíció

Az $R \subseteq X \times Y$ reláció értelmezési tartománya:

$$\mathrm{dmn}(R) = \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R\},$$

értékkészlete:

$$\mathrm{rng}(R) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in R\}.$$

Példa

1. Ha $R = \{(x, 1/x^2) : x \in \mathbb{R}\}$, akkor $\mathrm{dmn}(R) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$, $\mathrm{rng}(R) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
2. Ha $R = \{(1/x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$, akkor $\mathrm{dmn}(R) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\mathrm{rng}(R) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

Relációk kiterjesztése, leszűkítése, inverze

Definíció

Egy R binér relációt az S binér reláció kiterjesztésének, illetve S-et az R leszűkítésének (megszorításának) nevezzük, ha $S \subseteq R$. Ha A egy halmaz, akkor az R reláció A-ra való leszűkítése (az A-ra való megszorítása) az

$$R|_A = \{(x, y) \in R : x \in A\}.$$

Példa

Legyen $R = \{(x, x^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$, $S = \{(\sqrt{x}, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$.
Ekkor R az S kiterjesztése, S az R leszűkítése, $S = R|_{\mathbb{R}_0^+}$
(ahol $\mathbb{R}_0^+$ a nemnegatív valós számok halmaza).

Definíció

Egy R binér reláció inverze az $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$.

Példa

$R^{-1} = \{(x^2, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$, $S^{-1} = \{(x, \sqrt{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$

Halmaz képe, teljes inverz képe

Definíció

Legyen $R \subseteq X \times Y$ egy binér reláció, A egy halmaz. Az A halmaz R reláció szerinti képe az $R(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A : (x, y) \in R\}$.
Adott B halmaz inverz képe, vagy teljes ősképe az $R^{-1}(B)$, vagyis a B halmaz R^{-1} reláció szerinti képe.

Példa

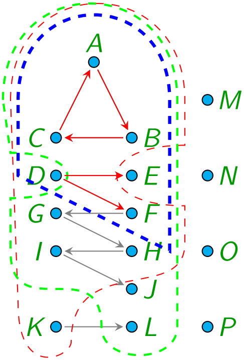
Legyen $R = \{(x^2, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$, $S = \{(x, \sqrt{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$.

- $R(\{9\}) = \{-3, +3\}$ (vagy röviden $R(9) = \{-3, +3\}$),
- $S(\{9\}) = \{+3\}$.

Példa

Legyen R reláció az $X = \{A, B, C, \ldots, P\}$ halmazon, és jelöljük $T \to T'$-vel, ha $(T, T') \in R$.

- $\mathrm{dmn}(R) = \{A, B, C, D, F, G, H, I, K\}$.
- $\mathrm{rng}(R) = \{A, B, C, E, F, G, H, I, J, L\}$.
- $R|_{\{A,B,C,D\}} = \{(A, B), (B, C), (C, A), (D, E), (D, F)\}$.



Relációk tulajdonságai

Példa

Relációk: $=$, $<$, $\leq$, $|$, $\subseteq$, $T = \{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < 1\}$.

Definíció

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;($=$, $<$, $\leq$, $|$, $\subseteq$)
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$; ($=$, T)
3. R antiszimmetrikus, ha$\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;($=$, $\leq$, $\subseteq$)
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet; ($<$)
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$; ($=$, $\leq$, $|$, $\subseteq$, T)
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$; ($<$)
7. R trichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül; ($<$)
8. R dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén xRy vagy yRx (esetleg mindkettő). ($\leq$)