9. hét, 2022. november 15.

Analízis 2A Előadás

Tartalom

Tétel (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség)

Tetszőleges $f, g \in R[a, b]$ függvények esetén

$$\left|\int_a^b f \cdot g\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}\,.$$

Megjegyzés:

a) Skaláris szorzat: $< f, g >= \int_a^b f \cdot g$. Norma: $\|f\| = \sqrt{< f, f >} = \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2}$.

b) Az $|f|$, $|g|$ függvényekre alkalmazva az erősebb $\int_a^b |f \cdot g| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}$ alakban is igaz az egyenlőtlenség.

Bizonyítás

Ha $\int_a^b f^2 = \int_a^b g^2 = 0$, akkor az

$$|f(x)g(x)| \leq \tfrac{1}{2}\left(f^2(x) + g^2(x)\right) \quad \left(x \in [a, b]\right)$$

egyenlőtlenségből

$$0 \leq \left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \frac{1}{2}\left[\int_a^b f^2(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx\right] = 0$$

következik, vagyis ekkor igaz az állítás.

Bizonyítás (folytatás)

Tegyük fel, hogy $\int_a^b f^2$ és $\int_a^b g^2$ közül legalább az egyik 0-tól különböző.

Legyen például $\int_a^b f^2 > 0$.

Minden λ valós paraméter esetén az $F := (\lambda f + g)^2 \geq 0$ függvény integrálható $[a, b]$-n, és az integrálja nemnegatív, azaz

$$0 \leq \int_a^b (\lambda f + g)^2 = \lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2 \qquad (\lambda \in \mathbb{R})\,.$$

A jobb oldal λ-nak egy olyan másodfokú polinomja, amelyik minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén nemnegatív.

Ez azt jelenti, hogy nincs két különböző valós gyöke, tehát a diszkriminánsa ≤ 0

$$\left(2\int_a^b fg\right)^2 - 4\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \leq 0,$$

amiből átrendezéssel már következik az állítás. $\square$

Speciális eset.

Tétel (Cauchy-egyenlőtlenség)

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor minden $a_1, \ldots, a_n$ és $b_1, \ldots, b_n$ valós számra

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Bizonyítás

Alkalmazzuk az előző tételt az $f, g : [0, n] \to \mathbb{R},\ f(x) = a_k,\ g(x) = b_k\ \ x \in [k-1, k)$, $k = 1, \ldots, n$ lépcsősfüggvényekre.

Megjegyzések

a) Az egyenlőtlenség történetét illetően ld. `Wikipédia`.

b) A fenti egyenlőtlenség geometriai tartalma $n = 2$ esetén.
Tekintsük az $\underline{a} = (a_1, a_2)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2)$ síkbeli vektorokat.
Ezek hossza $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},\ |\underline{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$,
skaláris szorzata pedig $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\gamma$,
ahol γ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által bezárt szög,
amit koordinátákkal így fejezhetünk ki: $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.
Mivel $|\cos\gamma| \leq 1$, ezért ebből $|\underline{a} \cdot \underline{b}| \leq |\underline{a}| \cdot |\underline{b}|$, azaz

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\,.$$

Monoton függvények integrálhatósága

A következő tételben azt igazoljuk, hogy a monotonitás az integrálhatóság egy elégséges feltétele.

Tétel

Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény monoton, akkor integrálható.

Bizonyítás

Az integrálhatóságnak oszcillációs összegekkel való jellemzését alkalmazzuk.

Nevezetesen, azt igazoljuk, hogy

$$\forall \ \varepsilon > 0\text{-hoz} \ \exists \ \tau \in \mathcal{F}[a, b], \text{ amelyre } \Omega(f, \tau) < \varepsilon \, .$$

Legyen $f \ \nearrow$.

Minden $\forall \ \tau = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a, b]$ felosztásra

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_{i-1}) \quad \text{és} \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_i) \, ,$$

ezért

$$\Omega(f, \tau) = S(f, \tau) - s(f, \tau) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1}) \big) \cdot (x_i - x_{i-1}) \, .$$

Bizonyítás (folytatás)

Speciálisan, ha τ az $[a,b]$ intervallum $n \in \mathbb{N}^+$ részre való egyenletes felosztása, akkor

$$\begin{aligned}\Omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) \\ &= \frac{b-a}{n}\Big(\big(\cancel{f(x_1)} - \underbrace{f(x_0)}_{f(a)}\big) + \big(\cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)}\big) + \cdots + \big(\underbrace{f(x_n)}_{f(b)} - \cancel{f(x_{n-1})}\big)\Big) \\ &= \frac{b-a}{n}\big(f(b) - f(a)\big)\,.\end{aligned}$$

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\dfrac{b-a}{n}(f(b) - f(a) < \varepsilon\,.$

Az ehhez az n-hez tartozó τ egyenletes felosztásra $\Omega(f,\tau) < \varepsilon\,.$

Következésképpen $f \in R[a,b]\,.$ $\square$

Az integrál intervallum szerinti additivitását alkalmazva kiterjeszthetjük a fenti eredményt az úgynevezett szakaszonként monoton függvényekre.

Definíció

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

azt mondjuk, hogy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény szakaszonként monoton, ha

$$\exists\ m \in \mathbb{N}^+ \quad \text{és} \quad \tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\} \in \mathcal{F}[a, b]$$

úgy, hogy minden $i = 1, \ldots, m$ index esetén

i) az $f\big|_{(x_{i-1}, x_i)}$ függvény monoton,

ii) f korlátos $[a, b]$-n.

Megjegyzések:

a) A i) és az ii) feltétel garantálja az osztópontokban az egyoldali véges határértékek létezését.

b) Ha

$$f_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \lim_{x_{i-1}+0} f, & x = x_{i-1}; \\ f(x), & x_{i-1} < x < x_i; \\ \lim_{x_i - 0} f, & x = x_i. \end{cases}$$

akkor f_i monoton, és ezért $f_i \in R[x_{i-1}, x_i]$.

Tétel

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ szakaszonként monoton függvény, amelyre $a = x_0 < \ldots < x_m = b$, és $f_{\big|(x_{i-1}, x_i)}$ monoton $i = 0, \ldots, m-1$.

Ekkor $f \in R[a, b]$ és

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\,.$$

A folytonosság, mint az integrálhatóság elégséges feltétele

Megmutatjuk, hogy ha egy függvény folytonos $[a, b]$-n, akkor integrálható is az $[a, b]$ intervallumon. Ehhez szükségünk lesz az egyenletes folytonosság fogalmára.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény egyenletesen folytonos, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, \delta > 0, \text{ hogy}$$

$$\forall\ x, y \in \mathcal{D}_f,\ |x - y| < \delta \ \text{ esetén } \ \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon\,.$$

Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos a $H \subset \mathcal{D}_f$ halmazon, ha $f_{\big|H}$ egyenletesen folytonos.

Megjegyzés:

Ha a definícióban az $y \in \mathcal{D}_f$ elemet rögzítjük, akkor azt kapjuk, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, \delta > 0, \text{ hogy}$$

$$\forall\ x \in \mathcal{D}_f,\ |x-y| < \delta \ \text{ esetén } \ \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon\,,$$

azaz $f \in C\{y\}$.

Következésképpen minden egyenletesen folytonos függvény egyben folytonos is.

Példák

1.) Legyen $f(x) := x^2 \ \big(x \in (0,1)\big),\ \varepsilon > 0.$

Mivel

$$\big|f(x) - f(y)\big| = \big|x^2 - y^2\big| = \big|(x-y)(x+y)\big| \le 2\,|x-y| < \varepsilon\,,$$

ha $|x-y| < \frac{\varepsilon}{2} =: \delta$, ezért f egyenletesen folytonos.

2.) Legyen $f(x) := \frac{1}{x}$ $(x \in (0,1)$, és $\varepsilon = 1$.

Ekkor $f\big(\frac{1}{n+1}\big) - f\big(\frac{1}{n}\big) = 1$.

Mivel tetszőleges $\delta > 0$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \delta$, ezért f nem egyeletesen folytonos.

Megjegyzés: A 2. példa szerint nem minden folytonos függvény egyenletesen folytonos.

A következő tétel az mutatja, hogy bizonyos esetben a folytonosságból következik az egyenletes folytonosság is.

Heine-tétel

Korlátos és zárt interallumon értelmezett folytonos függvény egyenletesen folytonos.

Bizonyítás

Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f \in C[a,b]$.

Az állítást indirekt módon bizonyítjuk: tegyük fel, hogy f nem egyenletesen folytonos.

Ez azt jelenti, hogy

$$\exists \ \varepsilon > 0\,, \quad \text{hogy} \quad \forall \ \delta > 0\text{-hoz}$$

$$\exists \ x, y \in [a,b]\,, \quad |x-y| < \delta \quad \text{olyan, hogy} \quad \big|f(x) - f(y)\big| \geq \varepsilon.$$

A $\delta := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ választással kapjuk, hogy minden n-re létezik $x_n, y_n \in [a,b]$:

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad \big|f(x_n) - f(y_n)\big| \geq \varepsilon.$$

Mivel $(x_n) : \mathbb{N} \to [a,b]$ korlátos ezért van olyan (x_{n_k}) részsorozat, amelyik konvergens, és $\lim(x_{n_k}) = \alpha \in [a,b]$.

Ekkor a megfelelő (y_{n_k}) részsorozatra is

$$\lim(y_{n_k}) = \lim(y_{n_k} - x_{n_k}) + \lim(x_{n_k}) = 0 + \alpha = \alpha\,.$$

Mivel $f \in C[a,b]$, ezért $f \in C\{\alpha\}$ is teljesül.

Bizonyítás (folytatás)

A folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint tehát $f\left(x_{n_k}\right) \to f(\alpha)$ és $f\left(y_{n_k}\right) \to f(\alpha)$, ezért

$$\lim_{n\to+\infty} \left(f\left(x_{n_k}\right) - f\left(y_{n_k}\right)\right) = 0\,,$$

ami viszont ellentmond az $\left|f(x_n) - f(y_n)\right| \geq \varepsilon$ kiindulási feltételünknek. $\square$

A következő tétel azt állítja, hogy a folytonosság erősebb tulajdonság a Riemann-integrálhatóságnál.
Másként fogalmazva: A folytonosság az integrálhatóság elégséges feltétele.

Tétel

Ha $f \in C[a,b]$, akkor $f \in R[a,b]$.

Megjegyzés: Láttuk már, hogy a tétel megfordítása nem igaz (pl. integrálható függvény véges sok pontban való megváltoztatása).

Bizonyítás

Elég azt megmutatni, hogy $\forall \;\; f \in C[a,b]$ függvényre teljesül az integrálhatóságnak az oszcillációs összegekre vonatozó kritériuma:

$$\forall \;\; \varepsilon > 0\text{-hoz} \;\; \exists \;\; \tau \in \mathcal{F}[a,b] \quad \text{olyan, hogy} \quad \Omega(f,\tau) < \varepsilon\,.$$

Bizonyítás (folytatás)

Mivel $f \in C[a,b]$, ezért Heine tétele szerint f egyenletesen folytonos, azaz $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta > 0$, amelyre

$$\forall\ x, y \in [a,b],\ |x-y| < \delta \quad \text{esetén} \quad |f(x)-f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ és $\tau = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ olyan felosztás, amelyre $\|\tau\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1,\ldots,n\} < \delta$.

Weierstrass tétele szerint $\exists\ u_i,\ v_i$, hogy

$$m_i := \min_{[x_{i-1},x_i]} f = f(u_i)\,, \qquad M_i := \max_{[x_{i-1},x_i]} f = f(v_i) \qquad (i = 1,\ldots,n)\,.$$

Ekkor $|u_i - v_i| \le \|\tau\| < \delta$, és így $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ $(i = 1,\ldots,n)$.

Következésképpen

$$\Omega(f,\tau) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) < \tfrac{\varepsilon}{b-a}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $f \in R[a,b]$. $\square$

Következmény: Legyen $-\infty < a < b < +\infty$, és tegyük fel, hogy $f \in C(a,b)$. Ha léteznek és végesek a

$$\lim_{a+0} f \quad \text{és} \quad \lim_{b-0} f$$

határértékek, akkor $f \in R[a,b]$.

A monotonitáshoz hasonlóan ez az integrálhatósági tétel is kiterjeszthető az úgynevezett szakaszonként folytonos függvényekre.

Definíció

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Azt mondjuk, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény szakaszonként folytonos, ha

$$\exists \ m \in \mathbb{N}^+ \quad \text{és} \quad \tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\} \in \mathcal{F}[a, b]$$

úgy, hogy minden $i = 1, \ldots, m$ index esetén

i) az $f_{|(x_{i-1}, x_i)}$ függvény folytonos,

ii) léteznek és végesek a $\lim\limits_{x_{i-1}+0} f$, $\lim\limits_{x_i-0} f$ határértékek.

Az alábbi integrálhatósági tétel az folytonos esetre igazolt tétel kiterjesztése.

Tétel

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos függvény, és $\tau = \{a = x_0 < \ldots < x_m = b\}$ olyan felosztás, amelyre

$$f_{|(x_{i-1}, x_i)} \ \text{folytonos}, \qquad \exists \ \lim_{x_{i-1}+0} f, \ \lim_{x_i-0} f \in \mathbb{R}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Ekkor $f \in R[a, b]$ és

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f.$$

Az integrálszámítás alaptétele

A határozott integrál kiszámítása még a legegyszerűbb függvények esetén is hosszadalmas és bonyolult feladat.

gy olyan alapvető tételt igazolunk, amely ezt a feladatot lényegesen megkönnyíti.

Az ötlet bemutatásához az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $f \geq 0$, $\nearrow$ és $f \in C[a, b]$.

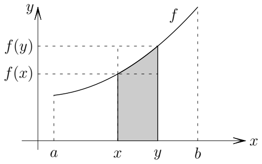
Jelöljük $T(x)$-szel az $[a, x]$ intervallum fölötti síkrész területét, azaz legyen

$$T(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad \big(x \in [a, b]\big).$$

Ha $a \leq x < y \leq b$, akkor $T(y) - T(x)$ egy olyan síkidom területe, amely tartalmaz egy $y - x$ szélességű és $f(x)$ magasságú téglalapot, és amely lefedhető egy $y - x$ szélességű és $f(y)$ magasságú téglalappal, ezért

$$f(x)(y - x) \leq T(y) - T(x) \leq f(y)(y - x).$$

Ezt szemlélteti a következő ábra:



$y-x$-szel való leosztás után
$$f(x) \leq \frac{T(y)-T(x)}{y-x} \leq f(y)\,.$$
Ebben rögzített x esetén az $y \to x$ határértéket véve azt kapjuk, hogy
$$f(x) \leq \lim_{y\to x} \frac{T(y)-T(x)}{y-x} = T'(x) \leq \lim_{y\to x} f(y) = f(x)\,,$$
Köveztkezésképpen
$$T'(x) = f(x) \quad \big(x \in [a,b]\big)\,.$$
Ezek szerint tehát az integrál fogalma kapcsolatba hozható a derivált fogalmával abban az esetben, ha a függvényre tett feltételek teljesülnek. Ezt az alapvetően fontos kapcsolatot a XVII. század végén egymástól fügetlenül *G. F. Leibniz* és *I. Newton* fedezték fel. Ennek révén az integrál értékét sokszor igen kevés fáradsággal meg lehet határozni.

Meg fogjuk mutatni azt, hogy az f-re tett feltételek lényegesen „gyengíthetők”.

Ehhez szükségünk lesz a primitívfüggény fogalmának kiterjesztése a korlátos és zárt intervallumon értelmezett függvények esetére.

Definíció

Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. A $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, ha
$$F \in C[a,b], \quad F \in D(a,b) \quad \text{és} \quad F'(x) = f(x) \qquad \big(x \in (a,b)\big).$$

Tétel (Newton–Leibniz-tétel)

Ha $f \in R[a,b]$ és az f függvénynek van primitívfüggvénye, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_a^b,$$

ahol F az f függvény egy primitív függvénye.

Bizonyítás

Legyen $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges.

A Lagrange-középértéktétel szerint $\forall\ i = 1,\ldots,n$ indexre $\exists\ \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, amelyre

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}).$$

Ha ezeket az egyenlőségeket összeadjuk $\forall\ i = 1,\ldots,n$ indexre, akkor a bal oldalon minden tag kiesik, kivéve a $F(x_n) = F(b)$ és $F(x_0) = F(a)$ tagokat.

Így azt kapjuk, hogy

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = \sigma(f,\tau,\xi).$$

Mivel $\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f \le f(\xi_i) \le \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$, ezért

$$s(f,\tau) \le \sigma(f,\tau,\xi) \le S(f,\tau,\xi).$$

Bizonyítás (folytatás)

Következésképpen

$$I_*(f) = \sup_{\tau \in \mathcal{F}[a,b]} s(f,\tau) \leq F(b) - F(a) \leq \inf_{\tau \in \mathcal{F}[a,b]} S(f,\tau,\xi) = I^*(f)$$

Mivel $f \in R[a,b]$, ezért $I_*(f) = I^*(f) = \int\limits_a^b f$.

Így $F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. $\square$

Megjegyzés: A tételben mindkét feltétel fontos. Tudjuk, hogy van olyan integrálható függvény, aminek nincs primitívfüggvénye. Másrészt van olzan valós függvény (Volterra-függvény), amelyik minden pontjában deriválható, és deriváltja ráadásul korlátos, azonban - egy jól viselkedő függvénytől szembeni elvárással ellentétben - a derivált integrálásával nem kapjuk vissza az eredeti függvényt, mivel a derivált nem is integrálható.

Példa: Számítsuk ki a $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx$ határozott integrált!

A $\sin x$ $\big(x \in [0,\pi]\big)$ függvényre teljesülnek a Newton–Leibniz-tétel feltételei és $F(x) = -\cos x$ $\big(x \in [0,\pi]\big)$ a $\sin$ függvény egy primitív függvénye $[0,\pi]$-n. Így

$$\int\limits_0^\pi \sin x\,dx = \big[-\cos x\big]_0^\pi = \big(-\cos\pi\big) - \big(-\cos 0\big) = 2.$$

Ezzel például megkaptuk a $\sin_{|\,[0,\pi]}$ függvény garfikonja alatti síkidom területét.