# Formális nyelvek és a fordítóprogramok alapjai

Előadók: Nagy Sára, mesteroktató
Algoritmusok és Alkalmazásaik Tanszék
Dr. Horpácsi Dániel, adjunktus
Programozási Nyelvek és Fordítóprogramok Tanszék

# Elérhetőség:

Nagy Sára

Fogadóóra: csütörtök 14-16 óráig,

2.608-as szoba vagy Teams-ben

(2023/24. 2. félévben)

E-mail: saci@inf.elte.hu

# A formális nyelvek rész tartalma:

- A formális nyelvek és automaták alapvető fogalmainak megismertetése, a közöttük fennálló összefüggések bemutatása.
- A formális nyelvek elmélete szimbólumsorozatok halmazainak véges, tömör leírásának különféle módszereit adja. Módszereket ad annak eldöntésére, hogy egy szimbólumsorozat hozzátartozik-e egy adott formális nyelvhez vagy sem.

# Kapcsolódó tudományágak

- Fordítóprogramok
- Természetes nyelvek gépi feldolgozása
- Képfeldolgozás
- Molekuláris számítás (DNS számítás)
- stb.

# Irodalom:


- A. Salomaa, Formal Languages, Academic Press, 1973.
- Révész György, Bevezetés a formális nyelvek elméletébe, Tankönyvkiadó, 1977.
- Bach Iván: Formális nyelvek, Typotex, 2001.
- Fülöp Zoltán, Formális nyelvek és szintaktikus elemzésük, Polygon, Szeged, 2004.
- Hunyadvári László, Manhertz Tamás, Automaták és formális nyelvek, Elektronikus előadásjegyzet, 2006.
- Csima Judit, Friedl Katalin: Nyelvek és  automaták, BMGE jegyzet, 2013.

# Alapfogalmak és jelölések

**Ábécé:** Ábécének nevezzük a jelek egy nem üres véges halmazát. Jele: V

**Betű:** Az ábécé elemeit betűknek hívjuk. ($a \in V$ )

**Szó:** A V ábécé elemeinek egy tetszőleges véges sorozatát a V ábécé feletti szónak nevezzük. (Ha V nem lényeges vagy egyértelmű, akkor szóról beszélünk.)

Ha u egy tetszőleges szó, akkor $\ell(u)$ jelöli a szó hosszát.

$0 \leq \ell(u) < \infty$ ; $\ell(\varepsilon) = 0$, ahol $\varepsilon$ az üres szó.

# Alapfogalmak és jelölések

A V ábécé feletti szavak halmazát $V^*$-gal jelöljük. A nem üres szavakét $V^+$-szal.

**Nyelv:** $V^*$ valamely részhalmazát a V ábécé feletti nyelvnek nevezzük. Jele: L

$$L \subseteq V^*$$

**Nyelvosztály (nyelvcsalád):** Nyelvek valamely összességét nyelvosztálynak hívjuk.

# Példák nyelvekre

$V_1 = \{a,b,c\}$

$L_1$ = { aab, b, acc, bab, a, bb }

$L_2 = \{ u \in V_1^* \mid$ u-ban pontosan egy darab ‚a' betű van. }

Lexikografikusan felsorolva:

$L_2$ = { a, ab, ac, ba, ca, abb, abc, acb, acc, bab, bac, bba, bca, cab, cac, cba, cca, … }

---

$V_2$ = {!,#,@}

$L_3 = \{ u \in V_2^* \mid$ u-ban nincs @ betű. }

Lexikografikusan felsorolva:

$L_3$ = {ε, !, #, !!, !#, #!, ##, !!!, !!#, … }

---

$L_4$ = {ε} az üres szót tartalmazó nyelv.

$L_5$ = Ø az üres nyelv, ami egy üres halmaz.

# Műveletek szavakon

**Két szó konkatenációja:**

Legyenek $u = t_1 \dots t_k$ és $v = q_1 \dots q_m$ szavak egy $V^*$ felett értelmezve.
Ekkor a két szó konkatenáltja az

$uv := t_1 \dots t_k q_1 \dots q_m$

(A két szó egymás utáni leírásával kapott szó.)

# Műveletek szavakon

V* zárt a konkatenáció műveletére.

V* a konkatenációra nézve egységelemes félcsoportot alkot.

Asszociatív: $u,v,w \in V^*$

$$(uv)w = u(vw)$$

Egységelem: $\varepsilon$ (üres szó) és $v \in V^*$

$$\varepsilon v = v = v\varepsilon$$

# Műveletek szavakon

**Szó hatványa:**

Legyen u egy tetszőleges szó.

Nemnegatív egész hatványai:

$u^0 := \varepsilon$

$u^1 := u$

$u^n := u^{n-1}u$ , ahol $n \geq 1$.

# Műveletek szavakon

**Szó megfordítása:**

Ha u egy tetszőleges szó és $u = t_1 \ldots t_k$
és $v = t_k \ldots t_1$ ,akkor v az u fordítottja, másképpen mondva a tükörképe.

Jelölése: $u^{-1} = v$

# További alapfogalmak

- **Részszó:** A $v$ $u$-nak részszava, ha léteznek olyan $w_1;w_2$ szavak, hogy $u = w_1vw_2$.
- **Szó prefixe:** A $v$ az $u$ szó prefixe, ha van olyan $w$ szó, hogy $u = vw$.
  Valódi prefix, ha $v \neq \varepsilon$ és $v \neq u$.
- **Szó suffixe:** A $v$ az $u$ szó suffixe, ha van olyan $w$ szó, hogy $u = wv$.
  Valódi suffix, ha $v \neq \varepsilon$ és $v \neq u$.

# Példák

Legyen V={a,b,c}.

u=aabbabbc

v=aab //v prefixsze az u-nak

u=aabbabbc

w=abbc // w suffixe u-nak

u=aabbabbc

z=bb // z részszava u-nak, két helyen is

# Műveletek nyelveken

**Két nyelv uniója:**

Legyenek $L_1$ és $L_2$ nyelvek $V^*$ felettiek.

Ekkor az $L_1$ és $L_2$ nyelvek unióján az

$L_1 \cup L_2 := \{u \in V^* \mid u \in L_1 \text{ vagy } u \in L_2 \}$ nyelvet értjük.

# Műveletek nyelveken

Az unió kommutatív, asszociatív és egység-elemes művelet.

Az egységelem az üres nyelv (üres halmaz).

Jele: $\emptyset$

$\emptyset \cup L = L = L \cup \emptyset$

# Műveletek nyelveken

**Két nyelv metszete:**

Legyenek $L_1$ és $L_2$ nyelvek $V^*$ felettiek.

Ekkor az $L_1$ és $L_2$ nyelvek metszetén az

$L_1 \cap L_2 := \{u \in V^* \mid u \in L_1$ és $u \in L_2 \}$ nyelvet értjük.

## Műveletek nyelveken

Az $L \subseteq V^*$ nyelv **komplementere** a

V ábécére vonatkozóan:

$$\overline{L} := V^* \setminus L$$

,azaz minden olyan szó, ami nem tartozik az L nyelvbe.

$\overline{L} \cap L = \emptyset$ és $\overline{L} \cup L = V^*$

# Műveletek nyelveken

Az $L \subseteq V^*$ nyelv **tükörképe** az a nyelv, amely a szavainak megfordítottját tartalmazza. Jele: $L^{-1}$

$L^{-1} := \{u \in V^* \mid u^{-1} \in L\}$

Példa:

$L = \{abc, aabb, acaa, baab\}$

$L^{-1} = \{cba, aaca, baab, bbaa\}$

# Műveletek nyelveken

**Két nyelv konkatenációja:**

Legyenek $L_1$ és $L_2$ nyelvek. Ekkor az $L_1$ és $L_2$ nyelvek konkatenációján az

$\mathbf{L_1L_2 := \{uv \mid u \in L_1 \text{ és } v \in L_2\}}$ nyelvet értjük.

A nyelvek halmaza a konkatenációra nézve egység elemes félcsoport alkot.

Egység elem: $\{\varepsilon\}$
(az üres szót tartalmazó nyelv)

$\{\varepsilon\}L = L = L\{\varepsilon\}$

$\emptyset L = \emptyset = L\emptyset$

# Pédák

Legyen $L_1 = \{a, ab, bb\}$ és $L_2 = \{b, ba\}$ .

$L_1L_2 = \{ ab, abb, bbb\} \cup \{aba, abba, bbba \}$
$= \{ ab, aba, abb, bbb, abba, bbba\}$

---

Legyen $L_1 = \{a, ab\}$ és $L_2 = \{\varepsilon, b\}$ .

$L_1L_2 = \{ a\varepsilon, \underline{ab\varepsilon}\} \cup \{\underline{ab}, abb\} = \{ a, ab, abb\}$

---

Legyen $L = \{a, ab, b\}$.

$LL = \{ aa, aba, ba\} \cup \{aab, abab, bab\} \cup \{ab, abb, bb\}$
$= \{ aa, ab, ba, bb ,aab, aba, abb, bab, abab\}$

# Műveletek nyelveken

**Nyelv hatványa:**

Legyen L egy tetszőleges nyelv.

Nemnegatív egész hatványai:

$L^0 := \{\varepsilon\}$

$L^1 := L$

$L^n := L^{n-1}L$ , ahol $n \geq 1$.

# Műveletek nyelveken

**Nyelv lezártja (iteráltja):**

Legyen L egy tetszőleges nyelv.

$L^* := L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots$ az L nyelv lezártja.

Másképpen:

$L^* := \bigcup_{i \geq 0} L^i$ valamint $L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i$

# Pédák

Legyen $L = \{a,ab\}$ .

$L^* = \{\varepsilon\} \cup \{a,ab\} \cup \{aa,aab,aba,abab\} \cup \dots$

$(ab)^3 \in L^*$ , de $ab^3 \notin L^*$.  // $(ab)^3 = ababab$; $ab^3 = abbb$

$\{ a^nb \mid n>0 \} \subseteq L^*$, de $a^0b \notin L^*$.  // $a^0b = \varepsilon b = b$

$\varepsilon \in L^*$, de ebben a konkrét esetben $\varepsilon \notin L^+$ .

# Pédák

Legyen $L = \{\varepsilon, a, ab\}$ .

$L^* = \{\varepsilon\} \cup \{\varepsilon, a, ab\} \cup \{\varepsilon, a, aa, ab, aab, aba, abab\} \cup \ldots$

$(ab)^3 \in L^*$ , de $ab^3 \notin L^*$. // $(ab)^3 = ababab$; $ab^3 = abbb$

$\{ a^n b \mid n>0 \} \subseteq L^*$, de $a^0 b \notin L^*$. // $a^0 b = \varepsilon b = b$

$\varepsilon \in L^*$, de ebben a konkrét esetben $\varepsilon \in L^+$ -nak is.

Ebben az esetben $L^* \setminus \{\varepsilon\} \neq L^+$.

# Műveletek nyelveken

Az alábbi három nyelvi műveletet **reguláris** műveletnek nevezzük:

- unió,
- konkatenáció,
- lezárás.

# Nyelvek megadási módjai

- logikai formulával
- strukturális rekurzióval
- algoritmussal
- matematikai gépekkel
- produkciós rendszerekkel (szabályokkal)

# Programozási nyelvek szintaxisa

Gyakran Backus-Naur formában (BNF) adják meg.

Példa:

**<kifejezés> ::= <tag> | <tag> + <kifejezés>**

**<tag> :: = <faktor> | <faktor> * <tag>**

**<faktor> ::= i | ( <kifejezés> )**

Példák kifejezésekre:

i+i*i, (i+i)*i, i*i*i*i, ((i)), i

V={+,*,(,),i} felett értelmezett szavak

# Emlékeztető:

$V$ - ábécé, jelek nem üres véges halmaza;

$V^*$ - az adott jelkészlet felett értelmezett összes szó;

$L \subseteq V^*$ - formális nyelv, szavak halmaza.

# Nyelv megadása szabályrendszerrel

**Definíció:** Grammatikának (nyelvtannak) a következő négyest nevezzük:

**G=(N,T,P,S)**

- **N** a nemterminális ábácé,
- **T** a terminálisok ábécéje,
- **P** az átírási szabályok véges halmaza,
- **S** a kezdőszimbólum.

# Grammatika: $G=(N,T,P,S)$

- N és T diszjunkt halmazok, azaz $N \cap T = \emptyset$.
- $S \in N$, kezdőszimbólum.
- A szabályok $p \rightarrow q$ alakúak, ahol $p \in (N \cup T)^* N (N \cup T)^*$, $q \in (N \cup T)^*$ és p jelöli a szabály baloldalát, q a jobboldalát, $\rightarrow$ a két oldalt elválasztó jel.
- A szabályok baloldala kötelezően tartalmaz legalább egy nemterminális szimbólumot.
- $(N \cup T)^*$ elemeit *mondatformá*knak nevezzük.

# Grammatika által generált nyelv

Minden olyan szó, amely közvetetten levezethető a kezdőszimbólumból.

$$L(G) := \{ u \in T^* \mid S \underset{G}{\Rightarrow}^* u \}$$

# Generatív grammatika (nyelvtan)

Példa:

$G = (\{S\}, \{a,b\}, \{S \rightarrow aSb,\ S \rightarrow ab\}, S)$ egy ***grammatika***.

Ez a grammatika az $L=\{\ a^n b^n \mid n \geq 1\ \}$ ***nyelv***et definiálja, azaz $L(G)=L$.

***Levezetés***:

$$S \underset{G}{\Rightarrow} aSb \underset{G}{\Rightarrow} aaSbb \underset{G}{\Rightarrow} aaaSbbb \underset{G}{\Rightarrow} aaaabbbb$$

$$S \underset{G}{\Rightarrow}^{*} a^4 b^4$$

# Közvetlen levezetés

Legyen $G = (N, T, P, S)$ egy adott grammatika.

Legyen $u, v \in (N \cup T)^*$.

Azt mondjuk, hogy a **v** mondatforma ***közvetlenül*** levezethető az **u** mondatformából, ha létezik $u_1$ , $u_2 \in (N \cup T)^*$ és $x \rightarrow y \in P$ úgy, hogy $u = u_1 x u_2$ és $v = u_1 y u_2$ .

Jelölése: $u \underset{G}{\Rightarrow} v$

# Példa

u = abBcaaAcb

v = abcaBAaAcb

Bca $\longrightarrow$ caBA $\in$ P

Az u modatformából közvetlenül levezethető a v mondatforma a megadott szabály segítségével.

$\underline{ab}Bca\underline{aAcb} \underset{G}{\Rightarrow} \underline{ab}caBA\underline{aAcb}$, ahol $u_1$=ab és $u_2$=aAcb

# Közvetett levezetés

Legyen $G = (N, T, P, S)$ egy adott grammatika.

Legyen $u, v \in (N \cup T)^*$.

Azt mondjuk, hogy a $v$ mondatforma ***közvetetten*** levezethető az $u$ mondatformából, ha létezik olyan $k \geq 0$ szám és $x_0, \ldots, x_k \in (N \cup T)^*$, hogy

$u = x_0$ és $v = x_k$ és $\forall\, i \in [0,k-1]$: $x_i \underset{G}{\Rightarrow} x_{i+1}$.

Jelölése: $u \underset{G}{\Rightarrow}^* v$

# Grammatika által generált nyelv

Minden olyan szó, amely közvetetten levezethető a kezdőszimbólumból.

$$L(G) := \{ u \in T^* \mid S \underset{G}{\Rightarrow}^* u \}$$

# Példa:

G = ({S,A,B}, {a,b}, P, S) egy grammatika.

P: $S \rightarrow ASB$

$S \rightarrow AB$

$AB \rightarrow BA$ //csere szabály

$A \rightarrow a$

$B \rightarrow b$

$L(G)=\{ u \in \{a,b\}^* \mid \ell_a(u)=\ell_b(u) \geq 1 \}$ nyelvet definiálja.

(Ugyanannyi ‚a' és ‚b' betű van a szavakban.)

Levezetés (példa egy szó levezetésére):

$S \underset{G}{\Rightarrow}^* A^nB^n \underset{G}{\Rightarrow} A^{n-1}BAB^{n-1} \underset{G}{\Rightarrow}^* BA^{n-1}AB^{n-1} \underset{G}{\Rightarrow}^* ba^nb^{n-1}$

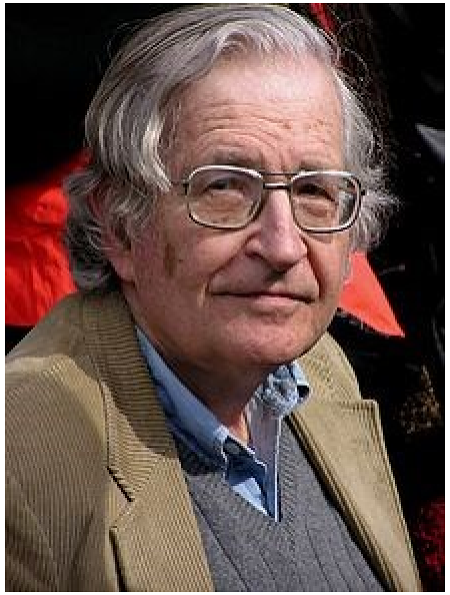
# Ekvivalencia

A $G_1$ es $G_2$ nyelvtanok ***ekvivalensek***, ha

$L(G_1) = L(G_2)$, azaz ugyanazt a nyelvet generálják.

Gyengén ekvivalensek, ha $L(G_1) \setminus \{\varepsilon\} = L(G_2) \setminus \{\varepsilon\}$.

# Noam Chomsky (született: 1928)



Noam Chomsky amerikai nyelvész, a Massachusetts Institute of Technology professzora, a generatív nyelvtan elméletének megalkotója, filozófus, politikai aktivista, előadó és lektor. Kidolgozója a róla elnevezett Chomsky-hierarchiának. (Wikipédia)

***Köszönöm a figyelmet!***