Diszkrét matematika I.

9. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagygabor@inf.elte.hu
Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2021. tavasz

Gráfok alapfogalmai

Példa

Ha egy egyszerű gráfban bármely két különböző csúcs szomszédos, akkor teljes gráfról beszélünk.
Teljes gráfok esetén, ha a csúcsok halmazai között létezik bijektív leképezés, akkor a két teljes gráf a csúcsok és élek elnevezésétől eltekintve megegyezik. Ebben az értelemben beszélünk bármely $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén az n csúcsú teljes gráfról.

Megjegyzés

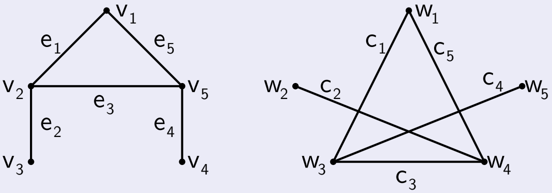
Az n csúcsú teljes gráfnak $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ éle van, és K_n-nel jelöljük.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

A $G = (\varphi, E, V)$ és $G' = (\varphi', E', V')$ gráfok izomorfak, ha léteznek $f: E \to E'$ és $g: V \to V'$ bijektív leképezések, hogy minden $e \in E$-re és $v \in V$-re e pontosan akkor illeszkedik v-re, ha $f(e)$ illeszkedik $g(v)$-re.

Példa



Megfelelő f és g bijekciók:

$f = \{(e_1, c_5), (e_2, c_2), (e_3, c_3), (e_4, c_4), (e_5, c_1)\}$

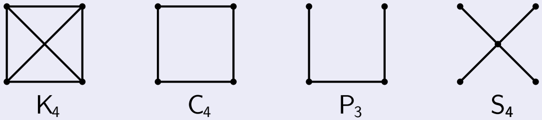
$g = \{(v_1, w_1), (v_2, w_4), (v_3, w_2), (v_4, w_5), (v_5, w_3)\}$

További példák

Definíció

A C_n ciklus pontjai egy szabályos n-szög csúcsainak felelnek meg, és pontosan a szomszédos csúcsoknak megfelelő pontok szomszédosak.
A P_n ösvényt C_{n+1}-ből valamely él törlésével kapjuk.
Az S_n csillagban egy szabályos n-szög csúcsainak és középpontjának felelnek meg a pontok, melyek közül a középpontnak megfelelő pont szomszédos az összes többivel.

Példák



Gráfok alapfogalmai

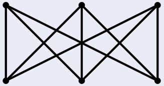
Definíció

A $G = (\varphi, E, V)$ gráfot páros gráfnak nevezzük, ha V-nek létezik V' és V'' diszjunkt halmazokra való felbontása úgy, hogy minden él egyik végpontja V'-nek, másik végpontja pedig V''-nek eleme.

Definíció

Azt az egyszerű páros gráfot, amelyben $|V'| = m$, $|V''| = n$ és minden V'-beli csúcs minden V''-beli csúccsal szomszédos, $K_{m,n}$-nel jelöljük.

Példa



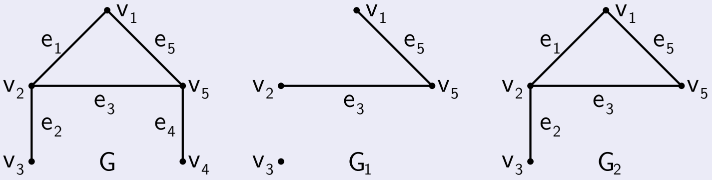
$K_{3,3}$

Gráfok alapfogalmai

Definíció

A $G' = (\varphi', E', V')$ gráfot a $G = (\varphi, E, V)$ gráf **részgráfjának** nevezzük, ha $E' \subseteq E$, $V' \subseteq V$ és $\varphi' \subseteq \varphi$. Ekkor G-t a G' **szupergráfjának** hívjuk. Ha E' pontosan azokat az éleket tartalmazza, melyek végpontjai V'-ben vannak, akkor G'-t a V' által meghatározott **feszített** (vagy **telített**) részgráfnak nevezzük.

Példa



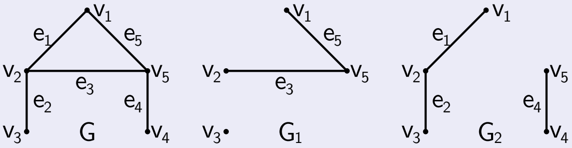
G-nek G_1 részgráfja, de nem feszített részgráfja, míg G_2 feszített részgráfja.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Ha $G' = (\varphi', E', V')$ részgráfja a $G = (\varphi, E, V)$ gráfnak, akkor a G'-nek a G-re vonatkozó komplementerén a $(\varphi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ gráfot értjük.

Példa



G_2 a G_1 gráf G-re vonatkozó komplementere.

Megjegyzés

Ha G' egyszerű gráf, és külön nem mondjuk, akkor a V'-beli csúcspontokkal rendelkező teljes gráfra vonatkozó komplementert értjük G' komplementere alatt.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Ha $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf, és $E' \subseteq E$, akkor a G-ből az E' élhalmaz törlésével kapott gráfon a $G' = (\varphi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ részgráfot értjük.

Definíció

Ha $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf, és $V' \subseteq V$, akkor legyen E' az összes olyan élek halmaza, amelyek illeszkednek valamely V'-beli csúcsra. A G-ből a V' csúcshalmaz törlésével kapott gráfon a $G' = (\varphi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V \setminus V')$ részgráfot értjük.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Legyen $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf. A

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

sorozatot sétának nevezzük v_0-ból v_n-be, ha

- $v_j \in V \quad 0 \leq j \leq n$,
- $e_k \in E \quad 1 \leq k \leq n$,
- $\varphi(e_m) = \{v_{m-1}, v_m\} \quad 1 \leq m \leq n$.

A séta hossza a benne szereplő élek száma (n).
Ha $v_0 = v_n$, akkor zárt sétáról beszélünk, különben nyílt sétáról.

Definíció

Ha a sétában szereplő élek mind különbözőek, akkor vonalnak nevezzük.
Az előzőeknek megfelelően beszélhetünk zárt vagy nyílt vonalról.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Ha a sétában szereplő csúcsok mind különbözőek, akkor **útnak** nevezzük.

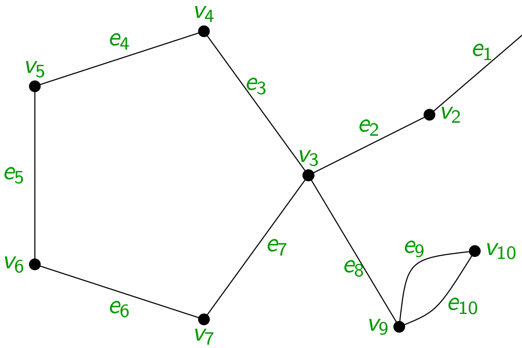
Megjegyzés

Egy út mindig vonal.
A nulla hosszú séták mind utak, és egyetlen csúcsból állnak.
Egy egy hosszú séta pontosan akkor út, ha a benne szereplő él nem hurokél.

Definíció

Egy legalább egy hosszú zárt vonalat **körnek** nevezünk, ha a kezdő- és végpont megyegyeznek, de egyébként a vonal pontjai különböznek.

Példa



út: $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, v_6, e_6, v_7$
vonal, de nem út: $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, \ldots, v_7, e_7, v_3, e_8, v_9$
kör: $v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_6, e_6, v_7, e_7, v_3$

Gráfok alapfogalmai

Állítás

Egy G gráfban a különböző v és v' csúcsokat összekötő sétából alkalmasan törölve éleket és csúcsokat a v-t v'-vel összekötő utat kapunk.

Bizonyítás

Legyen az állításban szereplő séta a következő:

$$v = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n = v'.$$

Ha valamely $i < j$ esetén $v_i = v_j$, akkor töröljük az

$$e_{i+1}, v_{i+1}, e_{i+2}, v_{i+2}, \ldots, v_{j-1}, e_j, v_j$$

részt, és ismételjük ezt, amíg van csúcsismétlődés. Ha már nincs, akkor utat kaptunk. Mivel minden lépésben csökken a séta hossza, ezért az eljárás véges sok lépésben véget ér.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Egy gráfot összefüggőnek nevezünk, ha bármely két csúcsa összeköthető sétával.

A $G = (\varphi, E, V)$ gráf esetén V elemeire vezessük be a $\sim$ relációt: $v \sim v'$ pontosan akkor, ha G-ben vezet út v-ből v'-be.

A $\sim$ ekvivalenciareláció (Miért?), így meghatároz egy osztályozást V-n.

A csúcsok egy adott ilyen osztálya által meghatározott feszített részgráf a gráf egy komponense.

Megjegyzés

Bármely él két végpontja azonos osztályba tartozik (Miért?), így a gráf minden éle hozzátartozik egy komponenshez.

Megjegyzés

Egy gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha minden csúcs ugyanabba az osztályba tartozik, azaz ha csak egyetlen komponense van.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Egy gráfot fának nevezünk, ha összefüggő és körmentes.

Tétel

Egy G egyszerű gráfra a következő feltételek ekvivalensek:

1. G fa;
2. G összefüggő, de bármely él törlésével kapott részgráf már nem összefüggő;
3. ha v és v' a G különböző csúcsai, akkor pontosan 1 út van v-ből v'-be;
4. G-nek nincs köre, de bármilyen új él hozzávételével kapott gráf már tartalmaz kört.