Diszkrét matematika I.

4. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagygabor@inf.elte.hu
Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2021. tavasz

Kompozíció

Definíció

Legyenek R és S binér relációk. Ekkor az $R \circ S$ kompozíció (összetétel, szorzat) reláció:

$$R \circ S = \{(x, y) \mid \exists z : (x, z) \in S \wedge (z, y) \in R\}.$$

Kompozíció esetén a relációkat „jobbról-balra írjuk”:

Példa

Legyen

$$R_{\sin} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sin x = y\},$$
$$S_{\log} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \log x = y\}.$$

Ekkor

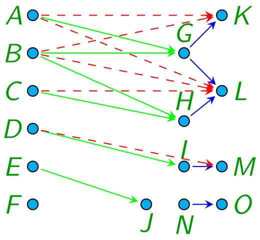
$$\begin{aligned} R_{\sin} \circ S_{\log} &= \{(x, y) | \exists z : \log x = z, \sin z = y\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sin \log x = y\}. \end{aligned}$$

Kompozíció

$$R \circ S = \{(x, y) | \exists z : (x, z) \in S \wedge (z, y) \in R\}$$

Példa

Legyen S, R két reláció, és tekintsük a $T = R \circ S$ kompozíciót:



Példa

Adott cég esetén legyenek A,B, . . . , J az alkalmazottak. A cég két projekten dolgozik: BANK, JÁTÉK.

beosztás	**alkalmazott**
menedzser	A, B
programozó	C, D, E
tesztelő	F, G, H
HR	I
tech. dolgozó	J

projekt	**alkalmazott**	**határidő**
BANK	A, C, D, F	2014.12.31.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, H	2015.01.31.

Legyen B a beosztás reláció: például A B menedzser.
P a projekt reláció: például A P BANK
H a határidő reláció: például BANK H 2014.12.31.

- Kik dolgoznak a BANK projekten? $P^{-1}(\text{BANK})$.
- Kik a tesztelők? $B^{-1}(\text{tesztelő})$.
- Mi a BANK projekt határideje? $H(\text{BANK})$.
- Milyen határidejei vannak az alkalmazottaknak? $H \circ P$.
- Milyen határidejei vannak a tesztelőknek? $H \circ P \circ B^{-1}(\text{tesztelő})$.

Kompozíció

$$R \circ S = \{(x,y) | \exists z : (x,z) \in S \wedge (z,y) \in R\}; \quad R^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in R\}$$

Állítás

Legyen R, S, T binér reláció. Ekkor

1. $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$ (a kompozíció asszociatív).
2. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Bizonyítás

1. $R \circ (S \circ T) = \{(w,z) | \exists y : (w,y) \in S \circ T \wedge (y,z) \in R\} =$
   $= \{(w,z) | \exists y : (\exists x : (w,x) \in T \wedge (x,y) \in S) \wedge (y,z) \in R\} =$
   $= \{(w,z) | \exists y \exists x : ((w,x) \in T \wedge (x,y) \in S) \wedge (y,z) \in R\} =$
   $= \{(w,z) | \exists x : (w,x) \in T \wedge (\exists y : (x,y) \in S \wedge (y,z) \in R)\} =$
   $= \{(w,z) | \exists x : (w,x) \in T \wedge (x,z) \in R \circ S\} = (R \circ S) \circ T$.
2. $(R \circ S)^{-1} = \{(y,x) | \exists z : (x,z) \in S \wedge (z,y) \in R\} =$
   $= \{(y,x) | \exists z : (z,x) \in S^{-1} \wedge (y,z) \in R^{-1}\} = S^{-1} \circ R^{-1}$. □

Függvények

Definíció

Egy $f \subseteq X \times Y$ relációt függvénynek (leképezésnek, transzformációnak, hozzárendelésnek, operátornak) nevezünk, ha $\forall x, y, y' : (x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$. Az $(x, y) \in f$ jelölés helyett ilyenkor az $f(x) = y$ (vagy $f : x \mapsto y$, $f_x = y$) jelölést használjuk. Az y az f függvény x helyen (argumentumban) felvett értéke.

Példa

- $f = \{(x, x^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$ reláció függvény: $f(x) = x^2$.
- Az $f^{-1} = \{(x^2, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$ inverz reláció nem függvény: $(4, 2), (4, -2) \in f^{-1}$.

Függvények

Definíció

Az $f \subseteq X \times Y$ függvények halmazát $X \to Y$ jelöli, így használható az $f \in X \to Y$ jelölés. Ha $\mathrm{dmn}(f) = X$, akkor az $f : X \to Y$ jelölést használjuk.

Megjegyzés
Ha $f : X \to Y$, akkor $\mathrm{dmn}(f) = X$ és $\mathrm{rng}(f) \subseteq Y$.

Példa

Legyen $f(x) = \sqrt{x}$. Ekkor

- $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de nem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$.
- $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$.

Függvények

Definíció

Az $f : X \to Y$ függvény

- injektív, ha $\forall x, x', y : (f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x'$;
- szürjektív, ha $\mathrm{rng}(f) = Y$;
- bijektív, ha injektív és szürjektív.

Megjegyzés Az injektivitás máshogy is jellemezhető:
$\forall x, x' : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
Megjegyzés Egy f függvény pontosan akkor injektív, ha f^{-1} reláció függvény.
Megjegyzés Az, hogy egy $f : X \to Y$ függvény szürjektív-e, függ Y-tól. Ha $Y \subsetneq Y'$, akkor $f \subseteq X \times Y \subseteq X \times Y'$, így az $f : X \to Y'$ függvény biztos nem szürjektív.

Függvények

Példa

- Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f:x\mapsto x^2$ függvény nem injektív, és nem szürjektív: $f(-1)=f(1)$, $\mathrm{rng}(f)=\mathbb{R}_0^+$.
- Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_0^+$, $f:x\mapsto x^2$ függvény nem injektív, de szürjektív.
- Az $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$, $f:x\mapsto x^2$ függvény injektív de nem szürjektív.
- Az $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$, $f:x\mapsto x^2$ függvény injektív és szürjektív, tehát bijektív.

Függvények kompozíciója

Emlékeztető

Relációk kompozíciója: $R \circ S = \{(a,b) \mid \exists c : (a,c) \in S \wedge (c,b) \in R\}$.
Függvény: az f reláció függvény, ha $(a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \Rightarrow b = c$.

Tétel

1. Ha f és g függvény, akkor $g \circ f$ is függvény.
2. Ha f és g függvény, akkor $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
3. Ha f és g injektív, akkor $g \circ f$ is injektív.
4. Ha $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ szürjektívek, akkor $g \circ f : X \to Z$ is szürjektív.

Bizonyítás

1. Legyen $(x,y) \in g \circ f$, $(x,y') \in g \circ f$:
   $\exists z : (x,z) \in f, (z,y) \in g$, $\exists z' : (x,z') \in f, (z',y') \in g$.
   Mivel f függény $z = z'$, mivel g függvény $y = y'$.

Függvények kompozíciója

Bizonyítás

2. Legyen $(g \circ f)(x) = y$ ($\Leftrightarrow (x, y) \in g \circ f$), tehát létezik z: $(x, z) \in f \wedge (z, y) \in g$.
   Mivel f és g függvények, ezért $f(x) = z$ és $g(z) = y$, így $g(f(x)) = y$.
3. Legyen $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, vagyis $g(f(x)) = g(f(x'))$. Mivel g injektív, ezért $f(x) = f(x')$. Mivel f injektív, ezért $x = x'$.
4. HF. $\square$

Monoton függvények

Definíció

Legyenek $(X; \preceq_1)$, $(Y; \preceq_2)$ részbenrendezett halmazok. Az $f : X \to Y$ függvény

1. monoton növekedő, ha $\forall x, y \in X$, $x \preceq_1 y \Rightarrow f(x) \preceq_2 f(y)$;
2. szigorúan monoton növekedő,ha $\forall x, y \in X$, $x \prec_1 y \Rightarrow f(x) \prec_2 f(y)$;
3. monoton csökkenő, ha $\forall x, y \in X$, $x \preceq_1 y \Rightarrow f(y) \preceq_2 f(x)$;
4. szigorúan monoton csökkenő, ha $\forall x, y \in X$, $x \prec_1 y \Rightarrow f(y) \prec_2 f(x)$.

Példa

- Legyen $X = \mathbb{R}$ a szokásos rendezéssel. Ekkor az $f(x) = x$; $g(x) = x^3$ szigorúan monoton növekedő függvények.
- Legyen X az $\{a, b, c\}$ hatványhalmaza a részhalmaza részbenrendezéssel.
  Ekkor az $f(A) = A \setminus \{a\}$ monoton növekedő: $A \subseteq B \Rightarrow$
  $f(A) = A \setminus \{a\} \subseteq B \setminus \{a\} = f(B)$;
  A $g(A) = \overline{A}$ szigorúan monoton csökkenő: $A \subsetneq B \Rightarrow \overline{B} \subsetneq \overline{A}$.

Monoton függvények

Megjegyzés

- Ha $(X;\preceq_1)$, $(Y;\preceq_2)$ rendezett halmazok, akkor egy szigorúan monoton növekedő (ill. csökkenő) függvény injektív is:
  $x \neq y \Rightarrow (x \prec_1 y \vee y \prec_1 x) \Rightarrow (f(x) \prec_2 f(y) \vee f(y) \prec_2 f(x)) \Rightarrow$
  $\Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
- Ha $(X;\preceq_1)$, $(Y;\preceq_2)$ rendezett halmazok, és f szigorúan monoton növekedő (ill. csökkenő) függvény, akkor f^{-1} is szigorúan monoton növekedő (ill. csökkenő) függvény:
  Mivel f injektív, f^{-1} is függvény.
  Ha $f(x) \prec_2 f(y)$, akkor nem lehet $y \preceq_1 x$, (hiszen $x = y$ esetén $f(x) = f(y)$, $y \prec_1 x$ esetén $f(y) \prec_2 f(x)$ következne), így $x \prec_1 y$ teljesül.

Példa

Legyen $X = \mathbb{R}$ a szokásos rendezéssel. Ekkor az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ szigorúan monoton növekedő függvény.

Műveletek

Definíció

Egy X halmazon értelmezett binér (kétváltozós) művelet egy $* : X \times X \to X$ függvény. Gyakran $*(x, y)$ helyett $x * y$-t írunk.
Egy X halmazon értelmezett unér (egyváltozós) művelet egy $* : X \to X$ függvény.

Példa

- $\mathbb{R}$ halmazon az $+$, $\cdot$ binér, $z \mapsto -z$ (ellentett) unér művelet.
- $\mathbb{R}$ halmazon az $\div$ (osztás) nem művelet, mert $\mathrm{dmn}(\div) \neq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon az $\div$ binér, az $x \mapsto 1/x$ (reciprok) unér művelet.
- $\mathbb{R}$ halmazon a 0 illetve 1 konstans kijelölése nullér művelet.