Diszkrét matematika I.

8. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagygabor@inf.elte.hu
Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2021. tavasz

Szita módszer

Tétel

Legyenek A_1, A_2, ..., A_n véges halmazok. Ekkor

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots$$

Bizonyítás

Legyen $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ olyan, hogy az n halmaz közül pontosan t darabnak eleme. Számoljuk meg, hányszor vettük figyelembe x-et a formula jobb oldalán:
$\sum_{i=1}^n |A_i|$-ben t-szer, $\sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$-ben $\binom{t}{2}$-ször,
$\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$-ben $\binom{t}{3}$-szor, ... Ez összesen:

$$t - \binom{t}{2} + \binom{t}{3} - \dots + (-1)^{t+1}\binom{t}{t} =$$
$$= -\left(\binom{t}{1}(-1)^1 1^{t-1} + \binom{t}{2}(-1)^2 1^{t-2} + \binom{t}{3}(-1)^3 1^{t-3} + \dots + \binom{t}{t}(-1)^t 1^0\right) =$$
$$= -\left((-1+1)^t - \binom{t}{0}(-1)^0 1^t\right) = -\left(0^t - 1 \cdot 1 \cdot 1\right) = -(0-1) = 1$$

Vagyis x-et egyszer számoltuk a formula jobb oldalán is és a bal oldalán is.

Véges halmazok

Definíció

Az X és Y halmazokat ekvivalensnek nevezzük, ha létezik $f : X \to Y$ bijekció. Jelölése: $X \sim Y$.

Állítás

Ha n természetes szám, akkor $\{1, 2, \dots n\}$ nem ekvivalens egyetlen valódi részhalmazával sem.

Definíció

Egy X halmazt végesnek nevezünk, ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén ekvivalens az $\{1, 2, \dots n\}$ halmazzal, egyébként végtelennek nevezzük.
Azt az egyértelműen meghatározott természetes számot, amire egy adott X halmaz ekvivalens az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazzal, az X számosságának nevezzük, jelölése: $|X|$ (esetleg $card(X), \natural(X), \#(X)$).

Véges halmazok

Tétel

Legyenek X és Y halmazok. Ekkor

1. ha X véges, és $Y \subseteq X$, akkor Y is véges, és $|Y| \leq |X|$;
2. ha X véges, és $Y \subsetneq X$, akkor $|Y| < |X|$;
3. ha X és Y végesek és diszjunktak, akkor $X \cup Y$ is véges, és $|X \cup Y| = |X| + |Y|$;
4. ha X és Y végesek, akkor $|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y|$;
5. ha X és Y végesek, akkor $X \times Y$ is véges, és $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$;
6. ha X véges, akkor 2^X is véges, és $|2^X| = 2^{|X|}$.

Véges halmazok

Állítás (Skatulyaelv)

Ha X és Y véges halmazok, és $|X| > |Y|$, akkor egy $f : X \to Y$ függvény nem lehet injektív.

Állítás (Skatulyaelv)

Ha X és Y véges halmazok, és $|X| < |Y|$, akkor egy $f : X \to Y$ függvény nem lehet szürjektív.

Állítás (Skatulyaelv)

Ha X és Y véges halmazok, és $|X| = |Y|$, akkor egy $f : X \to Y$ függvény pontosan akkor injektív, ha szürjektív.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

A $G = (\varphi, E, V)$ hármast (irányítatlan) gráfnak nevezzük, ha E, V halmazok, $V \neq \emptyset$, $V \cap E = \emptyset$ és $\varphi\colon E \to \{\{v, v'\} \,|\, v, v' \in V\}$.
E-t az élek halmazának, V-t a csúcsok (pontok) halmazának és φ-t az illeszkedési leképezésnek nevezzük. A φ leképezés E minden egyes eleméhez egy V-beli rendezetlen párt rendel.

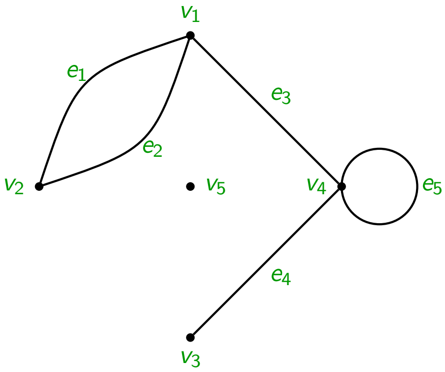
Elnevezés

$v \in \varphi(e)$ esetén e illeszkedik v-re, illetve v végpontja e-nek.

Megjegyzés

Az illeszkedési leképezés meghatározza az $I \subseteq E \times V$ illeszkedési relációt: $(e, v) \in I \Leftrightarrow v \in \varphi(e)$.

Példa



$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
$\varphi = \{(e_1, \{v_1, v_2\}), (e_2, \{v_1, v_2\}), (e_3, \{v_1, v_4\}), (e_4, \{v_3, v_4\}), (e_5, \{v_4\})\}$

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Ha E és V is véges halmazok, akkor a gráfot véges gráfnak nevezzük, egyébként végtelen gráfnak.
$E = \emptyset$ esetén üres gráfról beszélünk.

Megjegyzés

Az informatikában elsősorban a véges gráfok játszanak szerepet, így a továbbiakban mi is véges gráfokkal foglalkozunk.

Definíció

Ha egy él egyetlen csúcsra illeszkedik, azt hurokélnek nevezzük.
Ha $e \neq e'$ esetén $\varphi(e) = \varphi(e')$, akkor e és e' párhuzamos élek.
Ha egy gráfban nincs sem hurokél, sem párhuzamos élek, akkor azt egyszerű gráfnak nevezzük.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Az $e \neq e'$ élek szomszédosak, ha van olyan $v \in V$, amelyre $v \in \varphi(e)$ és $v \in \varphi(e')$ egyszerre teljesül. A $v \neq v'$ csúcsok szomszédosak, ha van olyan $e \in E$, amelyre $v \in \varphi(e)$ és $v' \in \varphi(e)$ egyszerre teljesül.

Definíció

A v csúcs fokszámán (vagy fokán) a rá illeszkedő élek számát értjük, a hurokéleket kétszer számolva.
Jelölése: $d(v)$ vagy $deg(v)$.

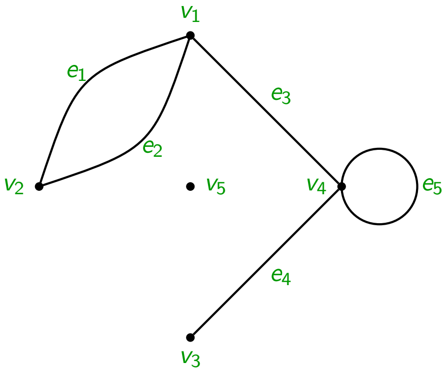
Definíció

Ha $d(v) = 0$, akkor v-t izolált csúcsnak nevezzük.

Definíció

Ha egy gráf minden csúcsának a foka n, akkor azt n-reguláris gráfnak hívjuk. Egy gráfot regulárisnak nevezünk, ha valamely n-re n-reguláris.

Példa



$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
$\varphi = \{(e_1, \{v_1, v_2\}), (e_2, \{v_1, v_2\}), (e_3, \{v_1, v_4\}), (e_4, \{v_3, v_4\}), (e_5, \{v_4\})\}$

A fokszámösszeg

Állítás

A $G = (\varphi, E, V)$ gráfra
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Bizonyítás

Élszám szerinti teljes indukció: $|E| = 0$ esetén mindkét oldal 0. Tfh. $|E| = n$ esetén igaz az állítás. Ha adott egy gráf, amelynek $n+1$ éle van, akkor annak egy élét elhagyva egy n élű gráfot kapunk. Erre teljesül az állítás az indukciós feltevés miatt. Az elhagyott élt újra hozzávéve a gráfhoz az egyenlőség mindkét oldala 2-vel nő.