Diszkrét matematika I.

6. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagygabor@inf.elte.hu
Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2021. tavasz

Moivre-azonosságok

Tétel (HF)

Legyenek $z, w \in \mathbb{C}$ trigonometrikus alakban megadott komplex számok:
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$,
és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor
$z \cdot w = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$;

$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))$, ha $w \neq 0$;

$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

A szögek összeadódnak, kivonódnak, szorzódnak. Az argumentumot ezek után redukcióval kapjuk!

Bizonyításhoz

$1/w = \frac{1}{|w|}(\cos(-\psi) + i\sin(-\psi))$

Geometriai jelentés

Legyen $z_0 = |z_0|(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0) \in \mathbb{C}$ rögzített és $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}$ tetszőleges. Ekkor:

$$z \cdot z_0 = |z||z_0|(\cos(\varphi + \varphi_0) + i\sin(\varphi + \varphi_0))$$

Egy $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex számmal való szorzás ($z \mapsto z \cdot z_0$) a komplex számsíkon mint nyújtva-forgatás hat: $|z_0|$-lal nyújt, $arg(z_0)$ szöggel forgat.

Komplex számok gyökei

Példa

Számoljuk ki $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8$-t:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^8 =$$
$$= \cos\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

További komplex számok, melyeknek a 8-adik hatványa 1:

- 1;
- -1;
- i : $i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$;
- $-i$;
- $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$;
- sőt: $\pm i\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}$: $\left(i\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = i^8\cdot\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = 1\cdot 1 = 1.$

Gyökvonás

A $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ trigonometrikus alakban megadott komplex számok pontosan akkor egyenlőek:

$$|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

ha

- $|z_1| = |z_2|$
- $\varphi_1 = \varphi_2 + k\cdot 2\pi$ valamely $k \in \mathbb{Z}$ szám esetén.

n-edik gyökvonás: Legyen $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ és $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$, továbbá $w^n = z$:

$$w^n = |w|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Ekkor

- $|w|^n = |z| \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}$
- $n\psi = \varphi + k\cdot 2\pi$ valamely $k \in \mathbb{Z}$ esetén, vagyis:

  $\psi = \frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}$ valamely $k \in \mathbb{Z}$ esetén.

Ha $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, akkor ezek mind különböző komplex számot adnak.

Gyökvonás

Tétel

Legyen $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor a z n-edik gyökei azok a w-k, amikre $w^n = z$:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1.$

Gyökvonás

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right) : k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Példa

Számítsuk ki a $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$ értékét!

$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Mivel $\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{19\pi}{12}$, ezért:

$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}} = \sqrt[6]{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)} =$
$= \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{19\pi+24k\pi}{72} + i\sin\frac{19\pi+24k\pi}{72}\right) : k = 0, 1, \ldots, 5.$

Komplex egységgyökök

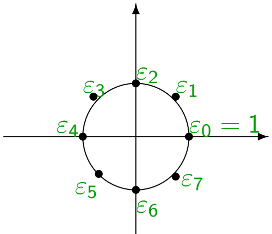
Definíció

Az $\varepsilon^n = 1$ feltételnek eleget tevő komplex számok az *n*-edik egységgyökök:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^{(n)} = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) : k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Példa

Nyolcadik komplex egységgyökök



Gyökvonás

Pozitív valós számok négyzetgyöke: legyen $r > 0$ valós szám, ekkor az $x^2 = r$ megoldásai: $\pm\sqrt{r}$.

Tétel

Legyen $z \in \mathbb{C}$ nemnulla komplex szám. $n \in \mathbb{N}$ és $w \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $w^n = z$. Ekkor z n-edik gyökei felírhatóak a következő alakban: $w\varepsilon_k : k = 0, 1, \dots n-1$.

Bizonyítás

A $w\varepsilon_k$ számok mind n-edik gyökök: $(w\varepsilon_k)^n = w^n\varepsilon_k^n = z \cdot 1 = z$.
Ez n különböző szám, így az összes gyököt megkaptuk.

Rend

Bizonyos komplex számok hatványai periodikusan ismétlődnek:

- $1, 1, 1, \dots$
- $-1, 1, -1, 1, \dots$
- $i, -1, -i, 1, i, -1, \dots$
- $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, i, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, -1, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, -i, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, i, \dots$

Általában:
$\cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$-nek n darab különböző hatványa van.

Definíció

Egy z komplex szám különböző (egész kitevős) hatványainak számát a z rendjének nevezzük.

Példa

- 1 rendje 1;
- 2 rendje ∞ : $2, 4, 8, 16, \dots$;
- -1 rendje 2: $1, -1$;
- i rendje 4: $1, i, -1, -i$.

Primitív egységgyökök

Az n-edik egységgyökök rendje nem feltétlenül n:
4-edik egységgyökök: $1, i, -1, -i$.

- 1 rendje 1;
- -1 rendje 2;
- i rendje 4.

Definíció

Az n-ed rendű n-edik egységgyökök a primitív n-edik egységgyökök.

Példa

- Primitív 1. egységgyök: 1;
- Primitív 2. egységgyök: -1;
- Primitív 3. egységgyökök: $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$;
- Primitív 4. egységgyökök: $\pm i$;
- Primitív 6. egységgyökök: $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Állítás

Egy primitív n-edik egységgyök hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

Összefoglaló (kombinatorikai alapesetek)

Ismétlés nélküli permutáció $P_n = n!$, n elem lehetséges sorrendje (sorrend számít, egy elem (pontosan) egyszer).

Ismétléses permutáció $P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \dfrac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$, $n = k_1+k_2+\ldots+k_m$ elem lehetséges sorrendje, ahol az i típusú elemet k_i-szer választjuk (sorrend számít, egy elem többször).

Ismétlés nélküli variáció $V_n^k = n!/(n-k)!$, n elemből k-t választunk (sorrend számít, egy elem legfeljebb egyszer).

Ismétléses variáció ${}^iV_n^k = n^k$, n elemből k-szor választunk (sorrend számít, egy elem akár többször is).

Ismétlés nélküli kombináció $C_n^k = \binom{n}{k}$, n elemből k-t választunk (sorrend nem számít, egy elem legfeljebb egyszer).

Ismétléses kombináció ${}^iC_n^k = \binom{n+k-1}{k}$, n elemből k-szor választunk (sorrend nem számít, egy elem akár többször is).

Elemi leszámlálások

Adott két véges, diszjunkt halmaz:
$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad \mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$.

Hányféleképpen tudunk választani egy elemet $\mathcal{A}$-ból vagy $\mathcal{B}$-ből?

Lehetséges választások: $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$.

Számuk: $n + m$.

Példa

Egy cukrászdában 3-féle édes sütemény (isler, zserbó, kókuszkocka) és 2-féle sós sütemény (pogácsa, perec) van. Hányféleképpen tudunk egy édes vagy egy sós sütemény enni? Megoldás: $3 + 2 = 5$.

Elemi leszámlálások

Adott két véges, diszjunkt halmaz:
$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad \mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$.

Hányféleképpen tudunk választani elemet $\mathcal{A}$-ból és $\mathcal{B}$-ből?

Lehetséges választások:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & b_1 & b_2 & \ldots & b_m \\
\hline
a_1 & (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \ldots & (a_1, b_m) \\
a_2 & (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \ldots & (a_2, b_m) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_n & (a_n, b_1) & (a_n, b_2) & \ldots & (a_n, b_m)
\end{array}$$

Számuk: $n \cdot m$.

Példa

Egy cukrászdában 3-féle édes sütemény (isler, zserbó, kókuszkocka) és 2-féle sós sütemény (pogácsa, perec) van. Hányféleképpen tudunk egy édes és egy sós sütemény enni? Megoldás: $3 \cdot 2 = 6$.

Permutáció

Tétel

Legyen $\mathcal{A}$ egy n elemű halmaz. Ekkor az $\mathcal{A}$ elemeinek lehetséges sorrendje: $P_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ (n faktoriális). Itt $0! = 1$.

Példa

Reggelire a
2 különböző szendvicset $2! = 2 \cdot 1 = 2$-féle sorrendben lehet megenni.
3 különböző szendvicset $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-féle sorrendben lehet megenni.
4 különböző szendvicset $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féle sorrendben lehet megenni.

A 200 fős évfolyam $200! = 200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \approx 7,89 \cdot 10^{374}$-féle sorrendben írhatja alá a jelenléti ívet.

Bizonyítás

Az n elemből az első helyre n-féleképpen választhatunk, a második helyre $n-1$-féleképpen választhatunk, ...
Így az összes lehetőségek száma $n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. $\square$

Ismétléses permutáció

Példa

Egy vizsgán 5 hallgató vett részt, 2 darab 4-es, 3 darab 5-ös született. Hány sorrendben írhatjuk le az eredményeket?

Megoldás

Ha figyelembe vesszük a hallgatókat is: $(2+3)! = 5!$ lehetséges sorrend van.

Ha a hallgatókat nem tüntetjük fel, egy lehetséges sorrendet többször is figyelembe vettünk:

5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	
5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	...
4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	

Az 5-ösöket $3! = 6$-féleképpen cserélhetjük, ennyiszer vettünk figyelembe minden sorrendet.

Hasonlóan a 4-eseket $2! = 2$-féleképpen cserélhetjük, ennyiszer vettünk figyelembe minden sorrendet.

Összes lehetőség: $\dfrac{5!}{2! \cdot 3!} = \dfrac{120}{2 \cdot 6} = 10.$

Ismétléses permutáció

Tétel

k_1 darab első típusú, k_2 második típusú, ..., k_m m-edik típusú elem lehetséges sorrendjét az elemek ismétléses permutációinak nevezzük, és számuk $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ esetén

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Bizonyítás

Ha minden elem között különbséget teszünk: $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!$ lehetséges sorrend létezik.
Ha az i-edik típusú elemek között nem teszünk különbséget, akkor az előbb megkapott lehetséges sorrendek között $k_i!$-szor fordulnak elő a különböző sorrendek.
Ha az azonos típusú elemek között nem teszünk különbséget, akkor az előbb megkapott lehetséges sorrendek között $k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!$-szor fordulnak elő a különböző sorrendek. Így ekkor a lehetséges sorrendek száma: $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!/(k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!)$. $\square$

Variáció

Példa

Az egyetemen 10 tárgyunk van, ezek közül 3-at szeretnénk hétfőre tenni. Hányféleképpen tehetjük meg ezt?

Megoldás

Hétfőn az első óránk 10-féle lehet. A második 9-féle, a harmadik 8-féle lehet.
Így összesen $10 \cdot 9 \cdot 8$-féleképpen tehetjük meg.

Tétel

Adott egy n elemű $\mathcal{A}$ halmaz. Ekkor k különböző elemet $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n!/(n-k)!$-féleképpen választhatunk ki, ha számít a sorrend. Egy ilyen választást az $\mathcal{A}$ halmaz k-ad osztályú variációjának nevezzük.

Bizonyítás

Az $\mathcal{A}$ halmazból először n-féleképpen választhatunk, második esetben $(n-1)$, ..., k-adik esetben $n-k+1$-féleképpen választhatunk. $\square$

Ismétléses variáció

Példa

A 0, 1, 2 számjegyekből hány legfeljebb kétjegyű szám képezhető?

Megoldás

Az első helyiértékre 3-féleképpen írhatunk számjegyet:

$$\begin{array}{c} \textvisiblespace 0 \\ \textvisiblespace 1 \\ \textvisiblespace 2 \end{array}$$

A második helyiértékre szintén 3-féleképpen írhatunk számjegyet:

$$\begin{array}{ccc} 00 & 10 & 20 \\ 01 & 11 & 21 \\ 02 & 12 & 22 \end{array}$$

Összesen:

$$\overset{\textvisiblespace}{3} \cdot \overset{\textvisiblespace}{3} = 9$$

Ismétléses variáció

Tétel

Egy n elemű $\mathcal{A}$ halmaz elemeiből ${}^{i}V_n^k = n^k$ darab k hosszú sorozat készíthető (ezek az $\mathcal{A}$ halmaz k-ad osztályú ismétléses variációi).

Bizonyítás

A sorozat első elemét n-féleképpen választhatjuk, a második elemét n-féleképpen választhatjuk, ... $\square$

Példa

Egy totószelvényt ($13 + 1$ helyre 1, 2 vagy X kerülhet) $3^{14} = 4\,782\,969$-féleképpen lehet kitölteni.

Mennyi egy n elemű halmaz összes részhalmazainak száma?
Legyen $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Ekkor minden részhalmaz megfelel egy n hosszú $0-1$ sorozatnak: ha a sorozat i-edik eleme 1, akkor a_i benne van a részhalmazban.
$\emptyset \leftrightarrow (0, 0, \ldots, 0)$, $\{a_1, a_3\} \leftrightarrow (1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $\mathcal{A} \leftrightarrow (1, 1, \ldots, 1)$
Hány n hosszú $0-1$ sorozat van: 2^n.