Logika - Bizonyításelmélet

Alapvető axiomasémák

$(A1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(A2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(A3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\text{(MP)}\ \frac{A\ ;\ (A \supset B)}{B}$$

vagy

$$\{A, A \supset B\} \vdash B$$

Alapvető axiomasémák

($A1$)	$A \supset (B \supset A)$
($A2$)	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
($A3$)	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

Egy egyszerű levezetés

$\{A\} \vdash B \supset A$

1.	$A \supset (B \supset A)$	[A1]
2.	A	[hip]
3.	$B \supset A$	[MP(1,2)]

Helyesség (Soundness)

Tetszőleges A esetén,

$$\text{Ha} \vdash A, \text{ akkor} \models A.$$

Teljesség (Completeness)

Tetszőleges A esetén,

$$\text{Ha} \models A, \text{ akkor} \vdash A.$$

Alapvető axiomasémák

($A1$)	$A \supset (B \supset A)$
($A2$)	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
($A3$)	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\begin{array}{c} 1.\ A \supset B \\ 2.\ B \supset C \\ \hline K.\ A \supset C \end{array}$$

másképp:

$$\{A \supset B, B \supset C\} \models A \supset C$$

A teljesség miatt, tehát:

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$$

Alapvető axiomasémák

$(A1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(A2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(A3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$$

1. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ [A2]
2. $(B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$ [A1, ahol $A||B \supset C$, $B||A$]
3. $B \supset C$ [hip]
4. $(A \supset (B \supset C))$ [MP(2,3)]
5. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$ [MP(1,4)]
6. $A \supset B$ [hip]
7. $A \supset C$ [MP(5,6)]

Alapvető axiomasémák

(A1) $A \supset (B \supset A)$
(A2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
(A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

1. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset (B \supset C), B\} \vdash A \supset C$$

1. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ [A2]
2. $A \supset (B \supset C)$ [hip]
3. $(\mathrm{A} \supset B) \supset (A \supset C)$ [MP(1,2)
4. $B \supset (A \supset B)$ [A1, ahol $A||B$, $B||A$]
5. B [hip]
6. $(A \supset B)$ [MP(4,5)]
7. $A \supset C$ [MP(3,6)]

Alapvető axiomasémák

$(A1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(A2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(A3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

Dedukciós tétel

$$\{A_1, A_2, ..., A_n\} \vdash B \text{ akkor és csak akkor, ha } \{A_1, A_2, ..., A_{n-1}\} \vdash A_n \supset B$$

2. Feladat

$$\begin{array}{c} \{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C \\ \Downarrow \text{D} \\ \{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash C \end{array}$$

1.	$A \supset B$	[hip]
2.	$B \supset C$	[hip]
3.	A	[hip]
4.	B	[MP(1,3)]
5.	C	[MP(2,4)]