Diszkrét matematika I.

1. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagygabor@inf.elte.hu
Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2021. tavasz

Emlékeztető - Logikai jelek/műveletek

Tagadás, jele: $\neg A$.

És, jele: $A \wedge B$.

Vagy (megengedő), jele: $A \vee B$.

Ha..., akkor... (implikáció), jele: $A \Rightarrow B$.

Ekvivalencia, jele: $A \Leftrightarrow B$.

Igazságtáblázat

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
I	I	H	I	I	I	I
I	H	H	H	I	H	H
H	I	I	H	I	I	H
H	H	I	H	H	I	I

Emlékeztető - Az implikáció

Nagyon sokszor fogjuk használni az implikációt ($A \Rightarrow B$).

$A \Rightarrow B$	I	H
I	I	H
H	I	I

Fontos: csak logikai összefüggést jelent, és nem okozatit!

Példa

$2 \cdot 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1$

$2 \cdot 2 = 4 \quad \Rightarrow$ csütörtök van

Hamis állításból minden következik:

Példa

$2 \cdot 2 = 5 \quad \Rightarrow \quad i^2 = -2$

Adott logikai jel, más módon is kifejezhető:

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Emlékeztető

Predikátumokból (nyitott kijelentés) a kvantorok és logikai jelek (logikai műveletek) segítségével formulákat alkotunk.

Definíció(Formulák)

- A predikátumok a legegyszerűbb, ún. elemi formulák.
- Ha $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ két formula, akkor $\neg\mathcal{A}$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$ is formulák.
- Ha $\mathcal{A}$ egy formula és x egy változó, akkor $(\exists x\mathcal{A})$ és $(\forall x\mathcal{A})$ is formulák.

Példa

Minden veréb madár, de nem minden madár veréb.

$(\forall x(V(x) \Rightarrow M(x))) \wedge (\exists x(M(x) \wedge \neg V(x)))$.

Ez egy formula.

Ha nem okoz félreértést, a zárójelek elhagyhatóak.

A logikai műveletek tulajdonságai, ítéletlogikai tételek

Állítás

$\forall A, B, C$-re

1. $(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$, $(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ (asszociativitás);
2. $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$, $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ (kommutativitás);
3. $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$, $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ (disztributivitás);
4. $(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$, $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ (De Morgan);
5. $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$ (modus ponens);
6. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (szillogizmus);
7. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (a kontrapozíció tétele);
8. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$.

A logikai műveletek tulajdonságai, ítéletlogikai tételek

Bizonyítás (példa)

1. $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ (a logikai vagy asszociativitása)

A	B	C	$B \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$	$(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$
I	I	I	I	I	I	I	I
I	I	H	I	I	I	I	I
I	H	I	I	I	I	I	I
H	I	I	I	I	I	I	I
H	H	I	I	I	H	I	I
H	I	H	I	I	I	I	I
I	H	H	H	I	I	I	I
H	H	H	H	H	H	H	I

Halmazok

A halmazelméletben két alapvető fogalmat (predikátum) fogunk használni:

- A **halmaz** (rendszer, osztály, összesség,...) elemeinek gondolati burka.
- $x \in \mathcal{A}$, ha az x eleme az $\mathcal{A}$ halmaznak.

A halmazok alapvető tulajdonságai axiómák, nem bizonyítjuk őket.
Példa:

Meghatározottsági axióma

Egy halmazt az elemei egyértelműen meghatároznak.

- Két halmaz pontosan akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik.
- Egy halmaznak egy elem csak egyszer lehet eleme.

Halmazok megadása speciális esetben

Üres halmaz Annak a halmaznak, melynek nincs eleme, a jele: $\emptyset$. A meghatározottsági axióma alapján ez egyértelmű.

Halmaz megadása elemei felsorolásával. Annak a halmaznak, melynek csak az a elem az eleme a jelölése: $\{a\}$. Annak a halmaznak, melynek pontosan az a és b az elemei a jelölése: $\{a, b\}$,...

Speciálisan $\emptyset = \{\}$, illetve, ha $a = b$, akkor $\{a\} = \{a, b\} = \{b\}$.

Halmaz számossága. Ha az A halmaznak $n \in \mathbb{N}$ (különböző) eleme van, akkor azt mondjuk, hogy a számossága n, amit így jelölünk: $|A| = n$.

Részhalmaz

Definíció

Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak: $A \subseteq B$, ha
$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$.
Ha $A \subseteq B$-nek, de $A \neq B$, akkor A valódi részhalmaza B-nek: $A \subsetneq B$.

Megjegyzés

Az üres halmaz bármely halmaznak részhalmaza, illetve minden halmaz önmaga részhalmaza.

A részhalmazok tulajdonságai:

Állítás (Biz. HF)

(1) $\forall A \quad A \subseteq A$ (reflexivitás).
(2) $\forall A, B, C \quad (A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ (tranzitivitás).
(3) $\forall A, B \quad (A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow A = B$ (antiszimmetria).

Halmazok egyenlősége egy további tulajdonságot is teljesít:
(3'). $\forall A, B \quad A = B \Rightarrow B = A$ (szimmetria).

Halmazok megadása formulával

Definíció

A halmaz és $\mathcal{F}(x)$ formula esetén $\{x \in A : \mathcal{F}(x)\} = \{x \in A | \mathcal{F}(x)\}$ halmaz elemei pontosan azon x elemei A-nak, melyre $\mathcal{F}(x)$ igaz.

Példa

- $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0\}$: valós számok halmaza.
- $\{n \in \mathbb{Z} \,| \exists m \ (m \in \mathbb{Z} \wedge n = m^2)\}$: a négyzetszámok halmaza.

Műveletek halmazokkal - Unió

Definíció

Az A és B halmazok uniója: $A \cup B$ az a halmaz, mely pontosan az A és a B elemeit tartalmazza. Általában: Legyen $\mathcal{A}$ egy olyan halmaz, melynek az elemei is halmazok (halmazrendszer). Ekkor $\cup\mathcal{A} = \cup\{A : A \in \mathcal{A}\} = \cup_{A\in\mathcal{A}} A$ az a halmaz, mely az $\mathcal{A}$ összes elemének elemét tartalmazza:

$$\cup\mathcal{A} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{A} : \ x \in A\}.$$

Speciálisan: $A \cup B = \cup\{A, B\}$.

Példa

- $\{a, b, c\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- Ha $I_n = \{x \in \mathbb{R} : n \leq x \leq n+1\}$ $(n \in \mathbb{Z})$, illetve $\mathcal{I} = \{I_n | n \in \mathbb{Z}\}$, akkor:
  - $I_2 \cup I_3 = [2, 4]$;
  - $I_n \cup I_{n+1} = [n, n+2]$;
  - $\cup\mathcal{I} = \mathbb{R}$.

Műveletek halmazokkal (Az unió alaptulajdonságai)

Állítás

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (asszociativitás)
3. $A \cup B = B \cup A$ (kommutativitás)
4. $A \cup A = A$ (idempotencia)
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Bizonyítás

Később

Műveletek halmazokkal - Metszet

Definíció

Az A és B halmazok metszete: $A \cap B$ az a halmaz, mely pontosan az A és a B közös elemeit tartalmazza: $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$.
Általában: Legyen $\mathcal{A}$ egy olyan halmaz, melynek az elemei is halmazok (halmazrendszer). Ekkor $\cap\mathcal{A} = \cap\{A : A \in \mathcal{A}\} = \cap_{A\in\mathcal{A}} A$ a következő halmaz:

$$\cap\mathcal{A} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{A} : \; x \in A\}.$$

Speciálisan: $A \cap B = \cap\{A, B\}$.

Példa

- $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\}$.
- Ha $I_n = \{x \in \mathbb{R} : n \leq x \leq n + 1\}$ $(n \in \mathbb{Z})$, illetve $\mathcal{I} = \{I_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, akkor:
  - $I_2 \cap I_3 = \{3\}$;
  - $I_8 \cap I_{11} = \emptyset$;
  - $I_n \cap I_{n+1} = \{n + 1\}$;
  - $\cap\mathcal{I} = \emptyset$.

Műveletek halmazokkal - Metszet

Definíció

Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor A és B diszjunktak.
Ha $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer, és $\cap\mathcal{A} = \emptyset$, akkor $\mathcal{A}$ diszjunkt, illetve $\mathcal{A}$ elemei diszjunktak.
Ha $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer, és $\mathcal{A}$ bármely két eleme diszjunkt, akkor $\mathcal{A}$ elemei páronként diszjunktak.

Példa

- Az $\{1,2\}$ és $\{3,4\}$ halmazok diszjunktak.
- Az $\{1,2\}$, $\{2,3\}$ és $\{1,3\}$ halmazok diszjunktak, de nem páronként diszjunktak.
- Az $\{1,2\}$, $\{3,4\}$ és $\{5,6\}$ halmazok páronként diszjunktak.

Műveletek halmazokkal - Metszet

A metszet alaptulajdonságai:

Állítás (Biz. HF)

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asszociativitás)
3. $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás)
4. $A \cap A = A$ (idempotencia)
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Műveletek halmazokkal

Az unió és metszet disztributivitási tulajdonságai:

Állítás

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

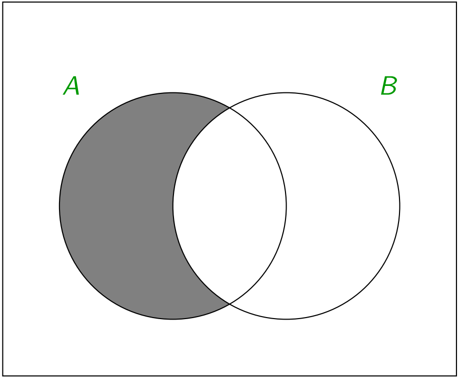
Bizonyítás

Később

Műveletek halmazokkal - Különbség

Definíció

Az A és B halmazok **különbsége** az $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.



Műveletek halmazokkal - Komplementer

Definíció

Egy rögzített X alaphalmaz és $A \subseteq X$ részhalmaz esetén az A halmaz **komplementere** az $\overline{A} = A' = X \setminus A$.