6. feladatsor: Gauss-számsík, egységgyökök

Az alábbiakban egy $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex számot röviden (r,φ) formában adunk meg, ahol $(r_1,\varphi_1) = (r_2,\varphi_2)$ akkor és csak akkor, ha $r_1 = r = r_2$, és vagy $r = 0$, vagy $\varphi_2 - \varphi_1 = k \cdot 2\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

1. feladat

A sík mely geometriai transzformációjának felelnek meg a következő leképezése?

(a) $z \mapsto 3z + 2$;
(b) $z \mapsto (1 + i)$z;
(c) $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$.

A feladatokat általánosabban oldjuk meg. Általában legyen $z = a + bi = (r,\varphi)$.

1) Legyen $c \in \mathbb{R}^+$. Ekkor $cz = (c,0)(r,\varphi) = (cr,\varphi)$ egy, a z-vel párhuzamos, vele azonos irányítású vektor, amelynek a hossza az eredeti komplex szám hosszának c-szerese. Ez a transzformáció egy, az origóból való c-szeres nyújtás, amely $c > 1$ esetén valóban nyújtás, $c = 1$ esetén minden komplex szám képe önmaga, míg $1 > c \in \mathbb{R}^+$ esetén a transzformáció zsugorítás;

2) $(-1)z = -z$, és ez az origóra való tükrözés;

3) ha $0 > c \in \mathbb{R}$, akkor $c = -|c| = (-1)|c|$, így $cz = -(|c|z)$, vagyis egy $|c|$ szerinti nyújtás, majd ezt követően egy tükrözés az origóra;

4) $c \in \mathbb{C}$, $c = (1,\psi)$. Ekkor $cz = (r,\varphi)(1,\psi) = (r,\varphi + \psi)$, azaz cz a z-vel azonos hosszúságú komplex szám, amelyet z-ből az origó körüli ψ szöggel való elforgatással kapunk;

5) tetszőleges $c \in \mathbb{C}$-re $c = (|c|,\psi) = |c|(1,\psi)$, tehát $cz = |c|(1,\psi)z$, vagyis a transzformált komplex számot z-ből annak ψ szöggel való elforgatásával, majd az így kapott komplex szám $|c|$-vel való nyújtásával kapjuk (a két transzformáció sorrendje felcserélhető).

6) Legyen $u \in \mathbb{C}$ egy tetszőleges komplex szám. Ekkor $z + u$ a z vektornak az u vektor szerinti eltoltja.

7) A $z \mapsto cz + u$ komplex számot a fentiek szerint úgy kapjuk z-ből, hogy először elvégezzük a $z \mapsto cz$ transzformációt, majd az így kapott komplex számot eltoljuk u-val.

8) Az eddigi eredmények alapján $3z + 2$ a z háromszoros nyújtásával kapott komplex számnak a valós tengely irányában való 2-vel való eltolásával kapott komplex szám. $(1 + i)z = \sqrt{2}\left(1,\frac{\pi}{4}\right)z$ a $\sqrt{2}$-szeresre nyújtott z $\frac{\pi}{4}$ szöggel való elforgatásával kapott komplex szám.

9) Most a $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ transzformációval foglalkozunk. A konjugálás a valós tengelyre való tükrözés, így a konjugált hossza azonos az eredeti komplex szám hosszával, míg a szöge a z szögének az ellentettje: $\bar{z} = (r,-\varphi)$. Mivel egy nem nulla komplex szám reciproka a konjugáltnak és az abszolút érték négyzetének a hányadosa, így $\frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r},-\varphi\right)$, és ebből $\frac{1}{\bar{z}} = \left(\frac{1}{r},\varphi\right)$, vagyis $\frac{1}{\bar{z}}$ a z-vel azonos állású olyan komplex szám, amelynek a hossza a z hosszának a reciproka. Ez azt jelenti, hogy az 1-nél nagyobb hosszúságú komplex szám esetén egy 1-nél kisebb hosszúságú komplex számot kapunk és fordítva, míg az 1-hosszúságú, és csak az 1-hosszúságú komplex számok helyben maradnak. Ez összefoglalóan azt jelenti, hogy a $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ transzformáció az origó középpontú, egységsugarú körre való tükrözés. Ezt a transzformációt az **origó-középpontú, egységsugarú körre való inverzió**nak nevezzük.

A fentiek alapján a megoldások az alábbiak:

(a) először egy origó-középpontú 3-szoros nyújtás, majd utána 2 egységgel való eltolás a valós tengellyel párhuzamosan;

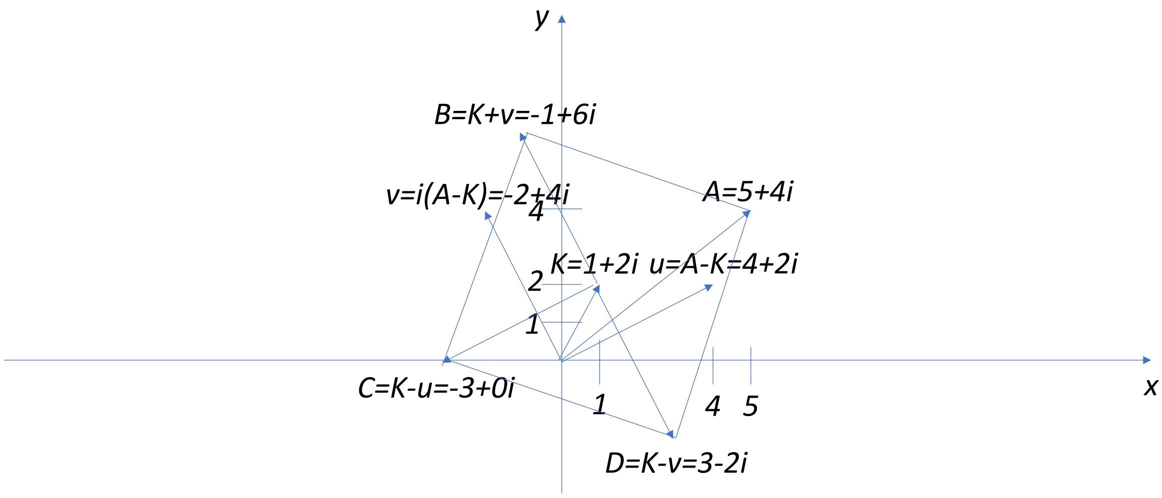
(b) $1+i=\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$, így ez most egy origó középpontú $\sqrt{2}$-szörös nyújtás és egy, az origó körüli $\frac{\pi}{4}$ szöggel ($45°$-os) elforgatás (most a sorrend lényegtelen);

(c) origó-középpontú, egységsugarú körre való inverzió.

2. feladat

A Gauss-számsíkon egy négyzet középpontja a $K=1+2i$ illetve egyik csúcsa az $A=5+4i$ komplex számok megfelelő pontban van. Határozza meg a négyzet többi csúcsának megfelelő komplex számokat.

A további három csúcs az $A-K=P$ komplex szám $\frac{\pi}{2}$, π és $\frac{3\pi}{2}$ szöggel való elforgatásával kapott, a K-ból induló komplex szám, így magát A-t is tekintve, a négyzet négy csúcsa A, $B=K+Pi$, $C=K-P$ és $D=K-Pi$. A konkrét számokkal $P=4+2i$, $A=5+4i$, $B=(1+2i)+(4+2i)i=-1+6i$, $C=(1+2i)-(4+2i)=-3$, $D=(1+2i)-(4+2i)i=3-2i$.



3. feladat

Legyen z, w két különböző komplex szám! Írja fel az őket összekötő szakasz felezőpontját, valamint annak a két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát, illetve súlypontját, amelyeknek z, w csúcsai!

A felezőpont $F=\frac{z+w}{2}$. A harmadik csúcsok, v és u a z pontból induló, a $w-z$ vektor $\pm\frac{\pi}{3}$ szöggel való elforgatásával nyert vektor végpontjai

$$v=z+(w-z)\varepsilon_1^{(6)}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)w=z\overline{\varepsilon_1^{(6)}}+w\varepsilon_1^{(6)}$$

$$u=z+(w-z)\overline{\varepsilon_1^{(6)}}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)w=z\varepsilon_1^{(6)}+w\overline{\varepsilon_1^{(6)}},$$

ahol $\varepsilon_1^{(6)}=\left(1,\frac{\pi}{3}\right)$ egy hatodik egységgyök. Általában az a, b és c komplex számok által meghatározott háromszög súlypontja az $S=\frac{a+b+c}{3}$ komplex szám, és a konkrét esetben

$$S_v=\frac{z+w+v}{3}=\frac{z+w+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)w}{3}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)z+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)$$

$$S_u = \frac{z+w+u}{3} = \frac{z + w + \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)w}{3} = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)z + \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right).$$

4. feladat

Forgassa el síkban a $\begin{bmatrix} 2 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektort

(a) $45°$-kal;
(b) $30°$-kal;
(c) $-60°$-kal.

A $\begin{bmatrix} 2 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektornak megfelelő komplex szám $z = 2 - 2\sqrt{3}i = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4\left(1, -\frac{\pi}{3}\right)$.

(a) $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)\left(4, -\frac{\pi}{3}\right) = \left(4, -\frac{\pi}{12}\right)$. $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ és $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, így $\left(4, -\frac{\pi}{12}\right) = -2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2\sqrt{2-\sqrt{3}}i$, tehát az elforgatott vektor $\begin{bmatrix} -2\sqrt{2+\sqrt{3}} \\ -2\sqrt{2-\sqrt{3}} \end{bmatrix}$;

(b) $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)\left(4, -\frac{\pi}{3}\right) = \left(4, -\frac{\pi}{6}\right)$. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, így $\left(4, -\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} - 2i$, tehát az elforgatott vektor $\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ -2 \end{bmatrix}$;

(c) $\left(1, -\frac{\pi}{3}\right)\left(4, -\frac{\pi}{3}\right) = \left(4, -\frac{2\pi}{3}\right)$. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ és $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, így $\left(4, -\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, tehát az elforgatott vektor $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.

5. feladat

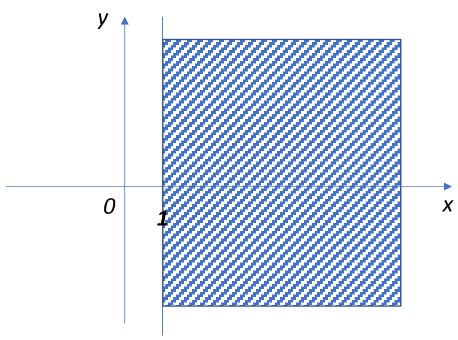
Tekintsük a következő halmazokat:

$$A = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}z > 1\}$$
$$B = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}z < 2\}$$
$$C = \{z \in \mathbb{C} | |z-2| = 3\}$$
$$D = \{z \in \mathbb{C} | z^2 - (3+i)z + (5+5i) = 0\}$$

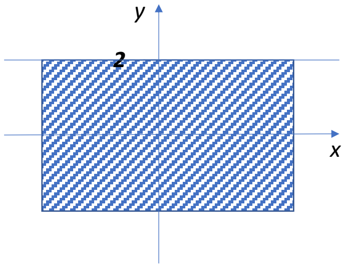
Ábrázolja a következő halmazokat a Gauss-számsíkon:

(a) A

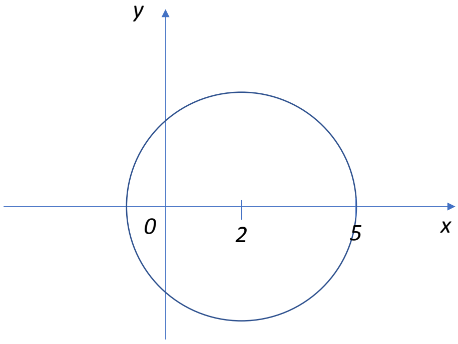
$z = x + yi$, és $\mathrm{Re}z = x$, vagyis a feladatnak megfelelő pontok a síkon az $x = 1$ egyenestől (az y tengellyel párhuzamos, az $x = 1$ ponton átmenő egyenestől) jobbra (vagyis a pozitív x irányában) lévő pontok (az egyenes pontjai nem tartoznak hozzá a halmazhoz).



(b) B
Most az $y < 2$ feltételt kielégítő pontokról van szó. Ezek a pontok az $y = 2$ egyenes (az x tengellyel párhuzamos, az y tengelyt a 2 pontban metsző egyenes) alatti, vagyis a negatív y-ok irányába eső pontok összessége (az egyenes pontjai most sem tartoznak hozzá a megadott halmazhoz).



(c) C
Általánosabban nézve, legyen u egy tetszőleges, rögzített komplex szám és r egy pozitív valós szám. Ekkor a $|z - u| = r$ feltételnek megfelelő komplex számok az u-tól r távolságra lévő pontok. De ezek a pontok az u középpontú, r-sugarú kör(vonal) pontjai. A konkrét példában $u = 2 = 2 + 0i, r = 3$.



(d) D
A feltételnek megfelelő pontok az adott másodfokú egyenlet gyökei. Egy komplex együtthatós n-edfokú egyenlet komplex gyökeinek száma (beleértve a valós gyököket is), minden gyököt a többszörösségének megfelelően figyelembe véve pontosan n, így most a D halmaznak egy vagy két pontja lesz.

$$z_{1,2} = \frac{(3+2i) \pm \sqrt{(3+2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5+5i)}}{2}.$$

$$(3+2i)^2 = (3^2 - 2^2) + (2 \cdot 3 \cdot 2)i = 5 + 12i$$
$$4 \cdot 1 \cdot (5+5i) = 20 + 20i$$
$$(3+i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5+5i) = -15 - 8i$$

Ha $(x + iy)^2 = -15 - 8i$, akkor

$$x^2 - y^2 = -15$$
$$2xy = -8.$$

$x \neq 0$ esetén

$$y = \frac{-8}{2x} = -\frac{4}{x},$$

és ezzel

$$-15 = x^2 - \left(-\frac{4}{x}\right)^2,$$

majd ebből

$$x^4 + 15x^2 - 16 = 0,$$

illetve az $x^2 = v$ helyetesítéssel

$$v^2 + 15v - 16 = 0.$$

Ennek az egyenletnek a megoldásai

$$v_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ -16 \end{cases},$$

de x valós szám, így a négyzete, $v = x^2$ nem lehet negatív, ennél fogva a keresett x értéke

$$x_{1,2} = \pm 1,$$

majd ebből

$$y_{1,2} = \mp 4.$$

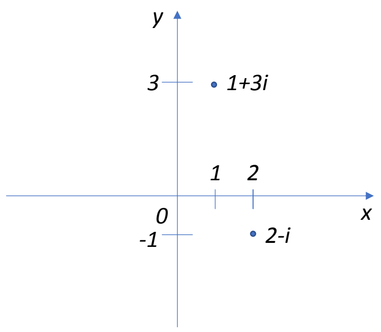
Most

$$z_{1,2} = \frac{(3+2i) \pm \langle 1-4i \rangle}{2} = \begin{cases} 2-i \\ 1+3i \end{cases}.$$

Ellenőrizve:

$$\begin{aligned}(2-i)^2 &- (3+2i)(2-i) + (5+5i) \\ &= \big((4-1) - (6+2) + 5\big) + \big((-2 \cdot 2 \cdot 1) - (-3+4) + 5\big)i = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+3i)^2 &- (3+2i)(1+3i) + (5+5i) \\ &= \big((1-9) - (3-6) + 5\big) + \big((2 \cdot 1 \cdot 3) - (9+2) + 5\big)i = 0.\end{aligned}$$



A megoldás során egy komplex szám négyzetgyökeit is meg kellett határozni. Ezt a trigonometrikus alak segítségével is meg tudjuk oldani anélkül, hogy magát a szöget meg kellene állapítani. Általánosságban legyen a feladat egy $0 \neq z = a + bi$ komplex szám négyzetgyökeinek kiszámítása. z trigonometrikis alakja $z = (r, \varphi)$, ahol $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ és $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ ($z \neq 0$, tehát $r \neq 0$). Legyen w olyan komplex szám, amelyre $w^2 = z$, és legyen $w = (\varrho, \psi)$ a w trigonometrikus alakja. Ekkor $\varrho = \sqrt{r}$ és $\psi_k = \frac{\varphi}{2} + k\pi, 2 > k \in \mathbb{N}$, vagyis, ahogy annak lennie is kell, a két gyök egymás ellentettje (azaz a szögük π-vel tér el egymástól) A w algebrai alakjában a valós rész $u = \varrho \cos\psi = \varrho\cos\frac{\varphi}{2}$ és a képzetes része $v = \varrho \sin\psi = \varrho \sin\frac{\varphi}{2}$. De $\cos\frac{\varphi}{2}$ és $\sin\frac{\varphi}{2}$ megadható a φ koszinuszának ismeretében is, nevezetesen

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}, \sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}.$$

Még figyelembe kell venni, hogy $\cos\varphi = \cos(2\pi - \varphi) = \cos(-\varphi)$. De ebből következik, hogy

$$\cos\left(\frac{-\varphi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

ami azt fejezi ki, hogy $\bar{z}$ négyzetgyöke a z négyzetgyökének konjugáltja (amit közvetlenül is megkaphatunk, ugyanis $\overline{w}^2 = \overline{w^2}$). Annak eldöntésére, hogy az adott z komplex szám négyzetgyökéhez melyik szög tartozik azt kell megnézni, hogy z melyik térnegyedben van. Ha az I. vagy a II. térnegyedbe esik z, akkor az egyik négyzetgyöke az I. térnegyedben lesz, így a szöge a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumba esik (beleértve azt a két esetet is, amikor z egy valós szám), míg a másik esetben az egyik négyzetgyök a IV. térnegyedben található, és ekkor a szöge megadható olyan alakban, ahol ez a szög a $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ intervallum eleme (ahol ismét lehet, hogy z valós szám). Ebben a második esetben

$$\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right) = -\sin\frac{\varphi}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}$$

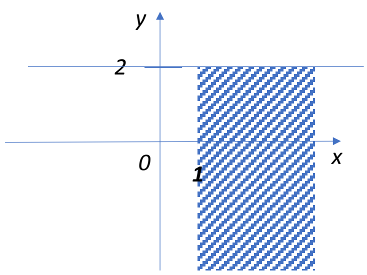
A konkrét esetben $-15 - 8i$ négyzetgyökét kell kiszámolni. Most $r = \sqrt{(-15)^2 + (-8)^2} = \sqrt{289} = 17$ és $\cos\varphi = \frac{-15}{17}$. Ebből $\varrho = \sqrt{17}$ és $\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{15}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$. Mivel $-15 - 8i$ a III. térnegyedben van, ezért $\sin\frac{\varphi}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{15}{17}}{2}} = -\sqrt{\frac{16}{17}} = -\frac{\sqrt{16}\sqrt{17}}{17}$. Ezen adatokkal a négyzetgyök algebrai alakja

$$\sqrt{-15-8i} = \sqrt{17}\frac{\sqrt{17}}{17} + \sqrt{17}\left(-\frac{\sqrt{16}\sqrt{17}}{17}\right)i = 1 - 4i,$$

ami megegyezik a korábbi eredménnyel.

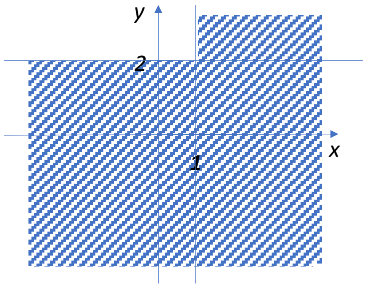
(e) $A \cap B$

Az $x = 1$ egyenestől jobbra és az $y = 2$ egyenes alatt elhelyezkedő pontok.



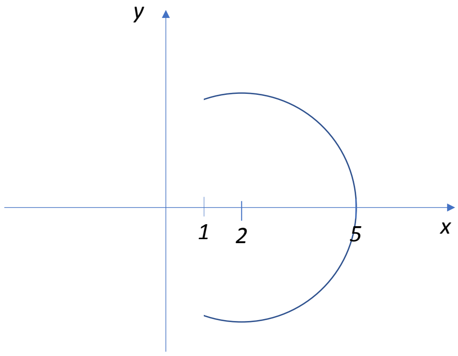
(f) $A \cup B$

A sík pontjai, kivéve azokat, amelyek az $x = 1$ egyenestől balra és az $y = 2$ egyenes fölött helyzkednek el, beleértve az egyenesek pontjait is.



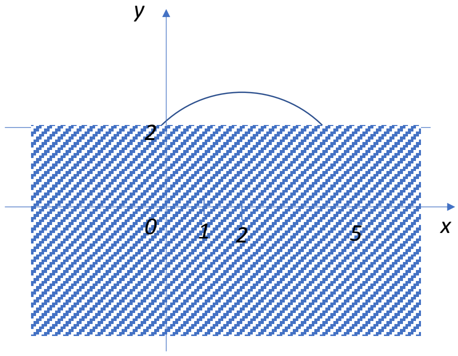
(g) $A \cap C$

Ez egy körív, a körnek az $x = 1$ egyenestől jobbra eső pontok összessége.



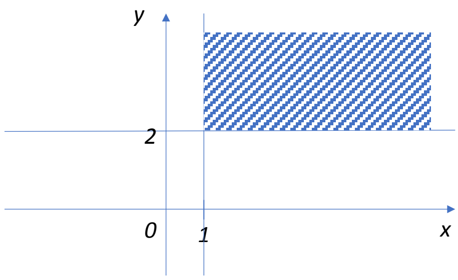
(h) $B \cup C$

A körvonal pontjai és az $y = 2$ egyenes alatt lévő pontok, vagyis egy félsík pontjai és a körnek a félsík fölött lévő pontjaiból álló körív pontjai, beleértve a körnek az egyenesre eső pontjait, vagyis a körív két végpontját.



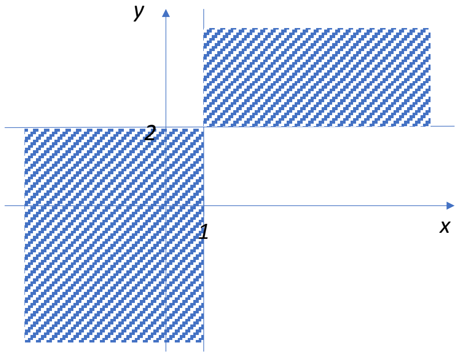
(i) $A \backslash B$

Az $x = 1$ egyenestől jobbra lévő, az $y = 2$ egyenes fölött lévő pontok, beleértve a utóbbi egyenesnek az 1-től jobbra lévő pontokat.



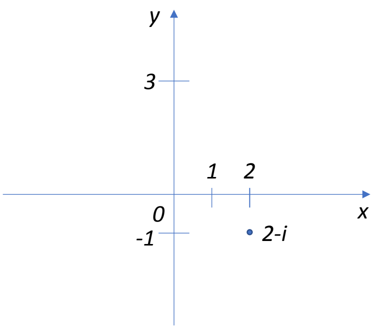
(j) $A \Delta B$

Az $(1,2)$ ponttól jobbra és fölötte illetve a tőle balra és alatta lévő pontok halmaza.



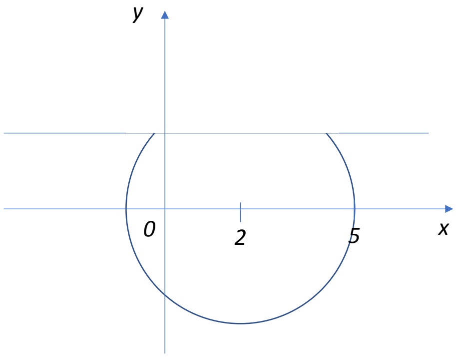
(k) $A \cap D$

$x + iy = 2 - i = 2 + (-1)i$, és $2 > 1$, $-1 < 2$, ezért ez a pont eleme a metszetnek. Ugyanakkor az $x + iy = 1 + 3i$ pontnál $1 \leq 1$, tehát $1 \ngtr 1$, így ez a pont nincs benne a metszetben, a metszet egy és csak egy pontot, a $(2,-1)$ pontot tartalmazza.



(l) $C \backslash \bar{B}$

$\bar{B}$ pontjai az $y = 2$ egyenesen lévő és fölötte lévő pontok összessége, és ezeket a pontokat kell elhagyni a körvonal pontjaiból, vagyis a körnek az egyenes alatti köríve lesz ez a halmaz.

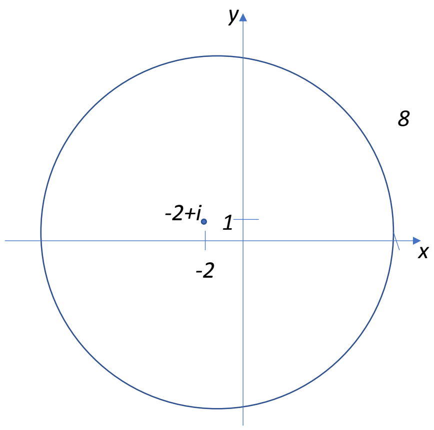


6. feladat

Ábrázolja a következő halmazokat a Gauss-számsíkon:

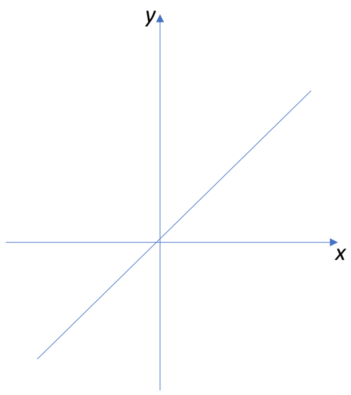
(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i + 2| = 10\}$;

Ez a $-2 + i$ középponzú, 10-sugarú körvonal;



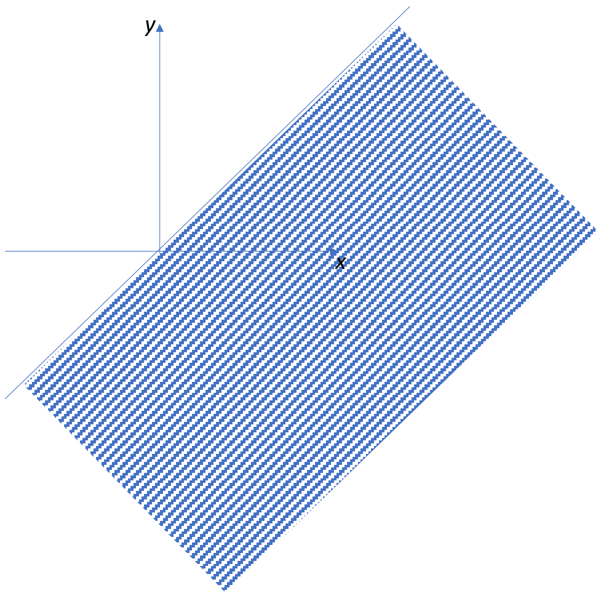
(b) $\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}z = \mathrm{Im}z\}$;

$z = x + iy$, $y = x$, és ez az origón átmenő, 1-meredekségű ($\frac{\pi}{4}$-hajlásszögű) egyenes;



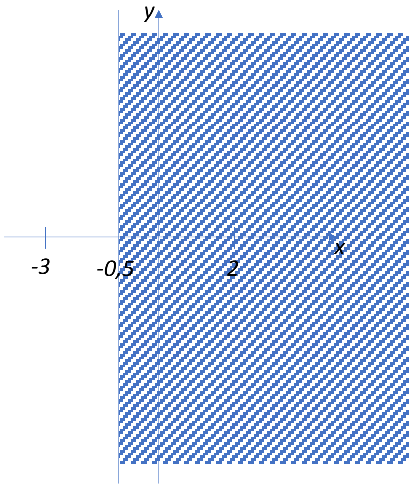
(c) $\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}z \geq \mathrm{Im}z\}$;

$y \leq x$, az előbbi egyenes és az egyenes alatt lévő pontok;



(d) $\{z \in \mathbb{C} | |z - 2| \leq |z + 3|\}$;

ez azon pontok összessége, amelyeknek a 2-től, azaz a $(2,0)$ ponttól való távolsága legfeljebb akkora, mint a -3-tól, vagyis a $(-3,0)$ ponttól mért távolságra. Ezek a pontok a két pontot összekötő szakasz felezőpontján átmenő, a szakaszra merőleges egyenes pontjai, másként az $x = -\frac{1}{2}$ ponton átmenő, az y tengellyel párhuzamos egyenes pontjai, valamint az ettől az egyenestől jobbra lévő pontok;



(e) $\{z \in \mathbb{C} | 2 < |z + i - 2| \leq 4\}$;
a $2 - i$ középpontú, 2 sugarú és 4-sugarú kör között lévő pontok, az utóbbi körvonal pontjait is beleértve.