Diszkrét matematika I. gyakorlat
8. alkalom

Összetett leszámlálási feladatok

1. Feladat: A 2, 3, 4, 5, 7 számjegyek *egyszeri* felhasználásával képezzünk ötjegyű számokat.

a) Hány számot képezhetünk?

b) Hány páros van közöttük?

c) Hány olyan van, amely osztható néggyel?

Megoldás: a) $5!$ b) Aminek az ötödik jegye 2, olyanból $4!$, és aminek az ötödik jegye 4, olyanból is $4!$, tehát összesen $2 \cdot 4!$ c) Az utolsó két számjegy most: 24, 32, 44, 52, vagy 72 lehetne, de a 44 végződésben kétszer használnánk ugyanazt a jegyet, ami tilos, azaz négy eset van. Mind a négy esetben $3!$ féleképpen alakulhat az első 3 jegy, azaz összesen $4 \cdot 3!$ féle ilyen szám van.

2. Feladat: Hány 5-tel osztható hatjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számokból, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

Megoldás: Esetszétválasztás: vagy 5-re, vagy 0-ra végződhet. Az első esetben az első jegy négyféle lehet, a második újra négyféle (mert nem lehet az, amit az első jegyre elhasználtunk, de lehet a 0), a harmadik jegy háromféle, a negyedik kétféle, és az ötödik már csak egyféle. A második esetben eleve elhasználtuk a nullát az utolsó helyre, így az első jegy 5-féle, lehet, a második 4-féle, és így tovább. A két esetszám összege: $4 \cdot 4! + 5!$

3. Feladat: Egy tíztagú társaság tagjai között 4 különböző könyvet sorsolnak ki úgy, hogy egy-egy személy csak egy könyvet nyerhet. Hányféleképpen végződhet a sorsolás?

Megoldás: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

4. Feladat: Egy műhelyben egy műszak alatt elkészített 500 db zár 4%-a selejtes. Hányféleképpen lehet kiválasztani 10 zárat úgy, hogy a kiválasztottak közül

a) pontosan 5 selejtes legyen

b) legalább 2 selejtes legyen

Megoldás: Összesen 20 selejtes és 480 megfelelő zár van (és minden zárat *különbözőnek* kell tekintenünk, például azért is, mert más-más kulcs nyitja mind az 500-at). a) 5 selejtest választunk a 20 közül és utána 5 megfelelőt választunk a 480 közül: $\binom{20}{5} \cdot \binom{480}{5}$.

b) Hasonlóan, olyan választás, amiben pontosan egy selejtes, olyan $\binom{20}{1} \cdot \binom{480}{9} = 20 \cdot \binom{480}{9}$ féle van. Olyan választás, amiben egy sem selejtes, olyan $\binom{20}{0} \cdot \binom{480}{10} = \binom{480}{10}$ féle van. Ezek összege $20 \cdot \binom{480}{9} + \binom{480}{10}$ adja azon esetek számát, amikor *kettőnél kevesebb* selejtest választunk. Az összes lehetséges választás $\binom{500}{10}$. Ezek közül azok száma, amikor legalább kettő selejtest választottunk: $\binom{500}{10} - 20 \cdot \binom{480}{9} - \binom{480}{10}$, vagyis az összes lehetőségek számából levonjuk a számunkra nem megfelelő lehetőségek számát.

5. Feladat: Egy 32 létszámú osztály, amelynek Nagy Pál is tagja, diákbizottságot választ. A bizottság összetétele: 1 titkár és 4 bizottsági tag. Hány olyan eset lehetséges, amikor Nagy Pál

a) titkára a bizottságnak

b) nem titkárként tagja a bizottságnak

c) szerepel a bizottságban

Megoldás: a) Nagy Pál mellé választunk 4 egyszerű tagot a 31 osztálytársa közül: $\binom{31}{4}$. b) Választunk egy titkárt Nagy Pál 31 osztálytársa közül (31-féleképpen), majd a maradék 30 osztálytársa közül Nagy Pál mellé még választunk további 3 tagtársat ($\binom{30}{3}$ féleképpen). Ez összesen $31 \cdot \binom{30}{3}$ lehetőség. c) Ez esetszétválassztással a két előző eset összesen (és nincs olyan, amit mindkettőben számoltunk volna, mert Nagy Pál vagy titkár, vagy nem titkár), azaz összesen: $\binom{31}{4} + 31 \cdot \binom{30}{3}$.

6. Feladat: Három kocsiból álló villamosra 9 ember száll fel úgy, hogy minden kocsira 3 ember jut. Hányféleképpen történhet ez?

Megoldás: A kilenc emberből választunk hármat az első kocsiba, utána a maradék hatból hármat a második kocsiba, majd a maradék három kerül a harmadik kocsiba: $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!}$. Ez utóbbi képlet úgy is kijöhet, hogy a kilenc embert 9! féle sorrendbe állíthatjuk, közülük az első három az első kocsiba száll (és ennek a 3! féle sorrendje egymás között nem számít), a második három a második kocsiba (és ennek a 3! féle sorrendje egymás között nem számít), az utolsó három az utolsó kocsiba (és ennek a 3! féle sorrendje egymás között nem számít).

7. Feladat: Egy 32 lapos magyarkártya-csomagból egyszerre kiveszünk 5 lapot. Hány olyan húzás lehetséges, ahol a kihúzott lapok között

a) csak piros fordul elő

b) pontosan 1 piros van

c) van piros

d) 2 piros és 3 zöld van

e) minden szín előfordul

f) pontosan 1 ász és 4 piros található

g) mind ász vagy piros

Megoldás: Nyolc piros, nyolc zöld, nyolc tök és nyolc makk (mind a négy színből egy-egy ász, király, felső, alsó, X, IX, VIII, VII).

a) $\binom{8}{5}$

b) $\binom{8}{1} \cdot \binom{24}{4}$ a nyolc piros közül egy, a 24 nem piros közül a többi négy.

c) Összes mínusz rosszak (rossz = nincs benne piros, azaz ha mind az öt a 24 nempiros közül választódik): $\binom{32}{5} - \binom{24}{5}$

d) $\binom{8}{2} \cdot \binom{8}{3}$.

e) Szita-formulával összes mínusz rosszak, de most négyféle rossz van: az is, amikor piros nincs (jelölje ezek hamazát P, az is amikor zöld nincs (ezek halmaza Z), amikor makk nincs (M), és amikor tök nincs (T). Összes: Ö$=\binom{32}{5}$. A rossz halmazok méretei: $|P| = |Z| = |T| = |M| = \binom{24}{5}$ amikor a másik három színből van az összes lap. Bármely két rossz metszete ugyanakkora (amikor a másik két színből van az összes lap): $|P \cap Z| = |P \cap M| = |P \cap T| = |Z \cap M| = |Z \cap T| = |M \cap T| = \binom{16}{5}$. Bármely három rossz metszete is ugyanakkora (amikor a negyedik színű az összes lap): $|Z \cap T \cap M| = |P \cap T \cap M| = |P \cap Z \cap M| = |P \cap Z \cap T| = \binom{8}{5}$. A négy rossz metszete üres, hiszen nem lehet, hogy egyik szín sem szerepel a kihúzott öt lap között. Tehát: Ö$-|P|-|Z|-|T|-|M|+|P\cap Z|+|P\cap M|+|P\cap T|+|Z\cap M|+|Z\cap T|+|M\cap T|-|Z\cap T\cap M|-|P\cap T\cap M|-|P\cap Z\cap M|-|P\cap Z\cap T|+|P\cap Z\cap T\cap M| = \binom{32}{5} - 4\cdot\binom{24}{5} + 6\cdot\binom{16}{5} - 4\cdot\binom{8}{5} + 0.$

f) Ha az az egy ász *nem* piros, akkor ő háromféle lehet, és mellé kell még négy piros a *hét* közül (a piros ász kizárva): $\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{4}$. Ha az az egy ász piros, akkor mellé kell még *három* piros a maradék hét közül, és még egy *nem ász* a maradék 21 nem piros nem ászok közül: $\binom{7}{3} \cdot \binom{21}{1}$. Azaz összesen: $\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{4} + \binom{7}{3} \cdot \binom{21}{1}$.

g) Van három nem piros ász, egy piros ász és hét nem ász piros. Ez összesen 11 lap. Ha csak ezek közül húzunk, akkor minden húzott lap piros, vagy ász. És minden olyan húzás, amiben minden lap piros vagy ász, az ebből a 11-ből húzással megkapható. Tehát: $\binom{11}{5}$.

8. Feladat: Egy összejövetelen 9 férfi és 12 nő vesz részt. Hányféleképpen táncolhat 7 pár?

Megoldás: (Feltesszük, hogy férfi csak nővel, nő csak férfival táncol.) Választok 7 férfit a 9 közül, és névsor szerint sorbaállítom őket. Az első férfinak 12 nő közül választhatok párt, a másodiknak 11 közül, és így tovább: $\binom{9}{7} \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \binom{9}{7} \cdot \frac{12!}{5!}$ vagy, ha úgy jobban tetszik: $\binom{9}{7} \cdot \binom{12}{7} \cdot 7!$.

9. Feladat: Hányféleképpen lehet 24 egyforma golyót 8 különböző dobozba szétosztani úgy, hogy

a) a dobozokba akár 0 golyó is kerülhet

b) minden dobozban legyen legalább 1 golyó

c) minden dobozban legyen legalább 2 golyó

Megoldás:

a) 24 golyó és 7 pálcika (a pálcikák határolják el egymástól az egymás utáni dobozokba kerülő golyókat, ezért van $7 = 8 - 1$ pálcika). Összes lehetséges sorrend: $\binom{31}{7} = \binom{8+24-1}{24}$.

b) Mivel a golyók egyformák, megtehetjük, hogy eleve kiosztunk nyolcat közülük, minden dobozba egyet. Majd a maradék 16 golyóval és 7 pálcikával lejátsszuk a többiek kiosztását: $\binom{23}{7} = \binom{8+16-1}{16}$. Vagy: leteszem a 24 golyót, ezeknek van 23 „köze”. A hét pálcikát csak ezekbe a közökbe tehetem (hogy ne kerüljön két pálcika közvetlenül egymás mellé, mert az jelentené azt, hogy egy doboz üresen maradna). Ez 23 helyből 7 választása: $\binom{23}{7}$.

c) Az előző megoldás első gondolatmenetéhez hasonlóan: két-két golyó minden dobozba, a maradék 8 golyót és 7 pálcikát kell sorbarakni: $\binom{15}{7} = \binom{8+8-1}{8}$.

10. Feladat: Egy bolha ugrál a számegyenesen, minden ugrásnál 1 egységet lép a pozitív vagy a negatív irányba. Hányféleképpen juthat el a 0-ból 10-be pontosan 18 ugrással?

Megoldás: Legyen x a pozitív ugrások száma, azaz $18 - x$ a negatív irányú ugrások száma. 0-ból 10-be akkor jut a bolha, ha $x - (18 - x) = 10$, azaz 10-zel többször ugrik pozitív irányba, mint negatívba. $2x - 18 = 10$, $2x = 28$, $x = 14$, azaz 14-szer ugrik jobbra, és 4-szer balra. Csak azt kell eldöntenünk, hogy a 18 ugrás közül melyik az a négy, amikor balra ugrik: $\binom{18}{4}$.

11. Feladat: Egy buszjegyen 9 számjegy található, amelyek közül érvényesítéskor 3-at vagy 4-et lyukasztunk ki. Hányféle lyukkombináció lehetséges?

Megoldás: $\binom{9}{3} + \binom{9}{4}$.

12. Feladat: Adott a síkon két egyenes, az egyiken 5, a másikon 7 pont. Hány olyan háromszög van, amelyek csúcsai az adott pontok közül valók?

Megoldás: Vagy kettő az egyiken, és a harmadik a másikon, vagy fordítva. (Tegyük fel, hogy a két egyenes vagy párhuzamos, vagy a metszéspontjuk nincs a megadott 7, illetve 5 pont között.) Az első esetben $\binom{5}{2} \cdot 7$, a második esetben $5 \cdot \binom{7}{2}$, azaz összesen $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{1} + \binom{5}{1} \cdot \binom{7}{2}$.

13. Feladat:

a) Mennyi az $1, 2, 3$ számjegyek permutációjával képezhető háromjegyű számok összege?

b) Mennyi az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyek felhasználásával képezhető hatjegyű számok összege?

Megoldás: a) két (2!) olyan permutáció van, amiben a 100-as helyiérték 1, kettő olyan, amiben 2, és kettő olyan, amiben 3. A 10-es helyiértékre ugyanez mondható el. Az 1-es helyiértékre szintén. Tehát az összeg: $2! \cdot (1 + 2 + 3) \cdot 111 = 12 \cdot 111 = 1332$. b) Hasonló okoskodással: $5! \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot 111111 = 120 \cdot 21 \cdot 111111 = 279\,999\,720$.

14. Feladat: Egy dobókockával háromszor dobunk egymás után. Hány dobássorozat fordulhat elő, amelyben a 6-os dobás is szerepel?

Megoldás: Összes mínusz a rosszak száma (rossz, amikor *nem* fordul elő a hatos, csak a maradék 5 lehetőség valamelyike), azaz: $6^3 - 5^3$.

15. Feladat: Az 52-lapos francia kártyában 4 ász és 4 király van. Szétosztjuk a lapokat úgy, hogy 4 játékosnak 13-13 lapot adunk. Hányféle olyan szétosztás lehetséges, melyek során a 4 játékos mindegyikének 1-1 ász és 1-1 király jut, ha a játékosok sorrendjét megkülönböztetjük?

Megoldás: A négy ász 4!-féleképpen kerülhet az „A”, „B”, „C” és „D” játékosokhoz. A négy király megintcsak 4!-féleképpen kerülhet az „A”, „B”, „C” és „D” játékosokhoz. A maradék 44 lapból 11-et kap az „A” játékos, a maradék 33 lapból 11-et kap a „B”, a maradék 22 lapból 11-et kap a „C” és a maradék 11 lapot kapja „D”. Ez tehát $4! \cdot 4! \cdot \binom{44}{11} \cdot \binom{33}{11} \cdot \binom{22}{11} = 4! \cdot 4! \cdot \frac{44!}{(11!)^4}$ féle lehetőség.

16. Feladat: Hányféleképpen lehet 100 rekeszben 30 golyót elhelyezni, ha minden rekeszben vagy pontosan 6 golyó van, vagy egy sem, és

a) a golyók egyformák

b) a golyók különbözőek és minden rekeszben figyelembe vesszük a golyók sorrendjét is

c) a golyók különbözőek de nem vesszük figyelembe a golyók sorrendjét a rekeszeken belül

Megoldás: a) Ha a golyók egyformák, akkor eleve hatosával összeragaszthatjuk őket gondolatban, és ezt az öt darab hatos fürtöt kell odaadni 100 közül öt különböző rekesznek: $\binom{100}{5}$ ennyiféleképpen választható ki az az öt rekesz, akibe jut golyó. b) Annyi a különbség az előzőhöz képest, hogy miután kiválasztottuk azt az öt rekeszt, amibe teszünk golyót, a legkisebb sorszámú kiválasztott rekeszbe $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25$ féleképpen választhatjuk a golyókat, majd a következő legkisebb sorszámú kiválasztott rekeszbe $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19$ féleképpen választhatjuk a golyókat, és így tovább, azaz: $\binom{100}{5} \cdot 30!$. c) Az előző megoldást el kell osztanuk az egyes rekeszeken belüli lehetséges sorrendek számaival, azaz $6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6!$-sal: $\binom{100}{5} \cdot \frac{30!}{(6!)^5}$. Vagy máshogy gondolkodva: kiválasztjuk az öt rekeszt, majd a 30 golyóból azt a hatot, amelyek az első (legkisebb sorszámú) kiválasztott rekeszbe mennek, a maradék 24 golyóbóll azt a hatot, amelyek a második legkisebb sorszámú kiválasztott rekeszbe mennek, a maradék 18 golyóbóll azt a hatot, amelyek a harmadik legkisebb sorszámú kiválasztott rekeszbe mennek, a maradék 12 golyóbóll azt a hatot, amelyek a negyedik legkisebb sorszámú kiválasztott rekeszbe mennek, a maradék 6 golyó kerül az ötödik legkisebb sorszámúba a kiválasztott rekeszek közül: $\binom{100}{5} \cdot \binom{30}{6} \cdot \binom{24}{6} \cdot \binom{18}{6} \cdot \binom{12}{6} \cdot \binom{6}{6}$. Ez utóbbi is ugyanaz a végeredmény, ha jól megnézzük (kiírjuk a binomiális együtthatókat, és egyszerűsítünk).

17. Feladat: Oldja meg a $\{0,1,2,...,23\}$ halmazon a $0,7\cdot\binom{25}{x}=\binom{23}{x}$ egyenletet.

Megoldás:

$$0,7\cdot\frac{25!}{x!\cdot(25-x)!}=\frac{23!}{x!\cdot(23-x)!}$$

$$0,7\cdot\frac{25\cdot 24}{(25-x)!}=\frac{1}{(23-x)!}$$

$$0,7\cdot 25\cdot 24\cdot(23-x)!=(25-x)!=(25-x)\cdot(24-x)\cdot(23-x)!$$

$$0,7\cdot 25\cdot 24=(25-x)\cdot(24-x)=25\cdot 24-49x+x^2$$

$$420=600-49x+x^2$$

Azaz $0=180-49x+x^2$ másodfokú egyenlet 0 és 23 közé eső esetleges egész gyökeit keressük. $\dfrac{49\pm\sqrt{49^2-4\cdot 1\cdot 180}}{2\cdot 1}=\dfrac{49\pm 41}{2}$. A két megoldás tehát 45 és 4. Ezek közül az $x=4$ megoldás jöhet szóba. És tényleg: $0,7\cdot\binom{25}{4}=0,7\cdot\dfrac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{4!}=0,7\cdot 12650=8855=\binom{23}{4}=\dfrac{23\cdot 22\cdot 21\cdot 20}{4!}$.

18. Feladat: Legyen $n,k\in\mathbb{N}$. Igazolja a következő azonosságokat:

a) $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$

b) $k\cdot\binom{n}{k}=n\cdot\binom{n-1}{k-1}$

Megoldás: a) Az $\{1,2,3,\ldots,n,n+1\}$ halmaz összes k-elemű részhalmazait esetszétválasztással is megszámolhatjuk: azok a k-elemű részhalmazok, amelyekben benne van az $n+1$ szám, azok megkaphatók úgy, hogy $\{1,2,3,\ldots,n\}$ halmaznak egy tetszőleges $k-1$ elemű részhalmazához hozzáuniózzuk az $\{n+1\}$ egyelemű halmazt. Azok a k-elemű részhalmazok, amelyekben nincs benne az $n+1$ szám, azok $\{1,2,3,\ldots,n\}$ halmaznak is az összes k-elemű részhalmazait alkotják.
b) Kétféleképpen számoljuk meg ugyanazt: hogy egy n-tagú parlamentből hányféleképpen választható ki egy olyan k-tagú bizottság, aminek az egyik tag az elnöke. Az egyik lehetőség: Kiválasztjuk a bizottság tagjait ($\binom{n}{k}$ féleképpen), majd közülük k-féleképpen eldönthető, hogy ki legyen az elnök. Vagy az n képviselő közül n-féleképpen eldöntjük, hogy ki lesz abizottság elnöke, és mellé még választunk $k-1$ mezei tagot a maradék $n-1$ képviselő közül.