Diszkrét matematika I. gyakorlat
7. alkalom

Permutációk, variációk, kombinációk

1. Feladat: Hányféleképpen lehet sorba rakni 1, 2, 3 illetve 5 különböző karaktert?

Megoldás: 1, $2 \cdot 1$, $3 \cdot 2 \cdot 1$ illetve $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ féleképpen. Az első karakter bármelyik lehet, a következő az elsőre leírt kivételével bármelyik, a következő az első kettő kivételével bármelyik, és így tovább.

2. Feladat:

a) Egy irodalmi esten 5 vers hangzik el. Hányféleképpen követhetik a versek egymást?

b) Hányféle sorrendben ültethetünk le 6 embert egymás mellé egy padra?

c) 12 hallgató találkozót beszélt meg egymással. Hányféle sorrendben érhettek oda, ha nem volt köztük kettő olyan, akik egyszerre érkeztek?

d) Hogyan változik az (b) kérdésben a lehetőségek száma, ha a résztvevőket egy kerekasztalhoz ültetjük?

Megoldás:

a) 5! féleképpen.

b) 6! féle sorrendben.

c) 12! féle sorrendben.

d) Ha a kerekasztal esetén bármely elforgatottját ugyanazon sorrendnek tekintjük, akkor mindig forgathatjuk úgy, hogy az első ember pont az asztal legészakibb pontjára ül. Mellette jobbra 5-féle ember kerülhet, amellé jobbra 4-féle ember, és így tovább. Ez 5! féle lehetőség. Vagy más meggondolással: az összes lehetséges sorrend között hat „egyforma” lesz, ezzel a hattal kell a „tehén-szabály” szerint elosztani 6!-t, így marad 5!

3. Feladat: Hányféleképpen lehet sorba rakni

a) 3 piros, 1 kék és 1 fehér

b) 3 piros, 2 kék és 1 fehér

golyót?

Megoldás:

a) $\dfrac{(3+1+1)!}{3! \cdot 1! \cdot 1!} = \dfrac{5!}{3!} = 5 \cdot 4$

b) $\dfrac{(3+2+1)!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \dfrac{6!}{6 \cdot 2} = 5 \cdot 4 \cdot 3$

féleképpen.

Tehén-szabály szerint az öt (illetve hat) golyó lehetséges sorrendjeinek számát el kell osztani az egyforma esetek számával, mivel minden egyforma esetet ugyanannyiszor számoltunk. (Első esetben a 3 piros golyó egymás közötti különböző sorrendjei adnak egyforma eseteket, a másodikban ezeken felül még a két kék egymás közti cserélgetése is egyforma eseteket ad.)

4. Feladat: Egy dobozban 16 golyó van: 10 fehér, 4 piros és 2 kék. Egymás után kihúzzuk a golyókat. Hányféle sorrend lehetséges, ha az azonos színű golyókat nem különböztetjük meg?

Megoldás: $\dfrac{16!}{10! \cdot 4! \cdot 2!}$

5. Feladat: Hány különböző ötjegyű számot lehet felírni az

a) 1, 2, 3, 4, 5

b) 1, 1, 2, 3, 4

c) 1, 1, 2, 2, 2

számjegyek felhasználásával? (Minden számjegyet pontosan annyiszor kell felhasználni ahányszor a felsorolásban szerepel.)

Megoldás:

a) $5!$

b) $5!/2!$

c) $5!/(2! \cdot 3!)$ azaz $\binom{5}{2}$ vagy ami ugyanaz $\binom{5}{3}$.

6. Feladat: Egy futóversenyen 15 tanuló vesz részt. Hányféleképpen alakulhat az első 3 hely sorsa, ha tudjuk hogy nem lesz holtverseny?

Megoldás: 15 ember kaphat aranyérmet, a maradék 14 bármelyike lehet ezüstérmes, és a maradék 13 bármelyike lehet bronzérmes. Tehát $15 \cdot 14 \cdot 13$ féleképpen.

7. Feladat: Hányféleképpen lehet 20 tanuló között 6 különböző könyvet kiosztani, ha mindegyikük legfeljebb egy könyvet kaphat?

Megoldás: Az első könyvet 20 féleképpen adhatjuk oda, a második könyvet már csak 19 féleképpen (hiszen aki már kapott könyvet, annak nem adhatjuk), és így tovább... tehát $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15$ féleképpen.

8. Feladat: Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számjegyek felhasználásával hány ötjegyű szám készíthető ha

a) mindegyik számjegy csak egyszer használható fel

b) mindegyik számjegy többször felhasználható

Megoldás:

a) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 8!/3!$

b) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^5$

9. Feladat: Hány olyan hatjegyű szám van (a) 10-es (b) 8-as (c) 12-es számrendszerben, amelyben nincs két egyforma számjegy?

Megoldás: Az első számjegy nem lehet a 0, a többi között az egyik lehet 0, de nem lehet olyan, amit már használtunk. Tehát: (a) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ (b) $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ (c) $11 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

10. Feladat: 10-szer feldobunk egy (a) pénzérmét (b) dobókockát. Hányféle dobássorozat alakulhat ki?

Megoldás: (a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10}$ (b) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^{10}$

11. Feladat: Egy tesztben 30 kérdés mindegyikéhez ötféle választ adtak meg, amelyek közül a válaszadónak pontosan egyet kell megjelölni. Hányféleképpen lehet kitölteni a tesztet?

Megoldás: $5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5 = 5^{30}$

12. Feladat: Hányféleképpen lehet 20 tanuló között 6 egyforma könyvet szétosztani, ha mindegyikük legfeljebb egy könyvet kaphat?

Megoldás: Azt kell eldönteni, hogy a 20 ember halmazának melyik legyen az a 6-elemű részhalmaza, akik az egyforma könyveket megkapják. Azaz $\binom{20}{6}$.

Másik megoldás: De ha a különböző könyvek esetére akarjuk visszavezetni, akkor a tehén-szabályt kell alkalmazni: a $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15$ féle sorrend között ugyanazt számolják azok az esetek, amikor ugyanaz a hat, könyvet kapó ember egymás között más sorrendben kapta meg a könyveket (mert az első könyv ugyanolyan, mint a második, a harmadik és így tovább). Azaz minden könyvkiosztást $6!$ különböző sorrendben számoltunk, ezzel el kell osztani a fenti szorzatot.

13. Feladat: Hányféleképpen oszthatunk ki a 32 lapos magyar kártyából egy játékosnak 4 lapot? (Nem lényeges, hogy a játékos a lapokat milyen sorrendben kapja.)

Megoldás: $\binom{32}{4}$

14. Feladat: Hányféleképpen lehet kitölteni egy ötöslottó-szelvényt?

Megoldás: $\binom{90}{5}$

15. Feladat: Tekintsük az $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ halmazt.

a) Hány 3-elemű részhalmaza van A-nak?

b) Hány olyan 5-elemű részhalmaza van A-nak, amelynek a 7 eleme?

c) Hány olyan 4-elemű részhalmaza van A-nak, amelynek elemei páratlanok?

d) Hány részhalmaza van A-nak?

Megoldás:

a) $\binom{10}{3}$

b) A 7 mellé még az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ 9-elemű halmazból kell választani 4 másik elemet: $\binom{9}{4}$

c) Az $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 5-elemű halmazból kell választani 4 különböző elemet: $\binom{5}{4} = 5$

d) 2^{10}

16. Feladat: Egy 32-lapos kártyacsomagból 6 lapot húzunk. Hányféleképpen alakulhat a húzás eredménye ha

a) a kihúzott lapok sorrendje is számít

b) a kihúzott lapok sorrendje nem számít

Megoldás:

a) $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$

b) $\dfrac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{32!}{26! \cdot 6!} = \dbinom{32}{6}$

17. Feladat: Hányféleképpen lehet 28 (különböző) gyerek között 4 (egyforma) almát szétosztani, ha egy gyerek több almát is kaphat?

Megoldás: Segédeszközül veszek 27 hurkapálcát, és leteszem a 4 almát és a 27 hurkapálcát egymás után tetszőleges sorrendben. ($\dfrac{(4+27)!}{4! \cdot 27!} = \dbinom{31}{4}$ féle sorrend lehetséges) Azt állítom, hogy ez pontosan ugyanannyi lehetséges sorrend, mint ahányféleképpen kioszthatjuk a 4 almát a 28 gyerek között. Ennek bizonyítására bijekciót (kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést) adunk a pálcika-alma sorrendek és az almakiosztások között:

A gyerekeket névsor szerint felállítom (az egyszerűség kedvéért ne legyen névazonosság). Az első pálca előtt lévő almákat kapja az első gyerek, az első és második pálca közötti almákat a második gyerek, és így tovább, a 27. pálca előtti almákat a 27. gyerek, a 27. pálca utáni almákat a 28. gyerek. Ezzel minden alma-pálca sorrendhez rendeltünk egy almakiosztást a gyerekek között. (Gondoljuk meg, hogy két különböző sorrendhez nem tartozhat ugyanaz az almakiosztás, tehát injektív a hozzárendelés.)

Azt kell még belátni, hogy ez egy szürjektív hozzárendelés, azaz minden almakiosztást megkaphatok egy megfelelő pálcika-alma sorrendből: Ha valahogy kiosztottam az almákat, akkor névsorba állítva a gyerekeket, a gyerekek közé letéve a 27 pálcikát, majd a gyerekekről elfelejtkezve csak a pálcikákat és az almákat nézve, ez pont egy pálcika-alma sorrend, méghozzá az, amihez az adott almakiosztás tartozik.

Azaz $\dfrac{(4+27)!}{4! \cdot 27!} = \dbinom{31}{4} = \dbinom{28+4-1}{4}$ féleképpen oszthatók ki az egyforma almák, ha egy gyerek többet is kaphat. Vagyis a gyerekek közül („visszatevéssel”) ennyiféleképpen választhatok négyet (ha egy gyereket kétszer is választok, az két almát kap, ha háromszor is, akkor hármat, ha mind a négyszer ugyanazt a gyereket választom ki, mind a négy almát ő kapja).

18. Feladat: Egy üzletben 12-féle képeslapot árulnak. Hányféleképpen vehetünk 5 darab képeslapot, ha mindegyik fajtából legalább 5 darab áll rendelkezésre?

Megoldás: A 12 féle képeslapból kell választani 5-öt „visszatevéssel” (azaz ugyanazt a fajtát többször is választhatom). Hasonlóan ahhoz, mint amikor a gyerekek közül választottuk ki azokat, akik kaptak almát (és akit többször választottunk, az több almát kapott). (Most 5 „alma” van és $12 - 1 = 11$ pálcika. Az első pálcika előtti „almák” száma mondja meg, hogy hány képeslapot veszek az első fajtából, az első és második pálcika közötti „almák” száma azt, hogy hányat veszek a második fajtából, és így tovább.) Azaz $\dbinom{5+12-1}{5} = \dbinom{12+5-1}{5} = \dbinom{16}{5}$ féleképpen választhatunk.

19. Feladat: Hányféleképpen ülhet le négy házaspár nyolc tagja egy padra, ha mindenki a házastársa mellett szeretne ülni?

Megoldás: Először azt döntsük el, hogy a négy házaspár egymáshoz képest milyen sorrendben üljön le: ez $4!$ féleképpen történhet. Ezután minden házaspár két tagja egymás közt eldönti, hogy jobbra ül egyikük, és balra a másikuk, vagy fordítva: ez mind a négy házaspárnál két-két lehetőség (egymástól függetlenül), azaz összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ féleképpen alakulhat az emberek sorrendje, mind a $4!$ házaspársorrend estén. Összesen tehát a nyolc embernek $4! \cdot 2^4$ féle sorrendje olyan, amiben mindenki a házastársa mellett ül.

20. Feladat: Egy 8 fős társaság leül egy kerekasztalhoz. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy Anna és Béla egymás mellett üljön?

Megoldás: Annát és Bélát tekintsük egy darab négylábú-négykezű androgün szörnyetegnek („Annabélának"). Akkor Annabélán kívül még hat másik személyt kell leültetni a kerek asztal köré. Feltehetjük, hogy Annabéla pont a legészakibb pontján ül az asztalnak. A többiek hozzá képest $6!$ féle sorrendben ülhetnek le (a jobboldalára 6 személy küzül választhatunk, amellé 5 személy közül, és így tovább). Ezután jobban szemügyre vesszük Annabélát, és észrevesszük, hogy két külön ember: és ők ketten kétféle sorrendben ülhetnek egymás mellett (jobbra Anna és balra Béla, vagy fordítva). Ezért tehát összesen $6! \cdot 2$ féle sorrend lehetséges.

21. Feladat: Az $n + 2$ elem permutációinak száma 20-szorosa az n elem permutációi számának. Mennyi n értéke?

Megoldás: $(n+2)! = 20 \cdot n!$, vagyis $(n+2) \cdot (n+1) \cdot n! = 20 \cdot n!$. Az $n!$ minden nemnegatív egészre nem nulla (definíció szerint $0! = 1$), ezért oszthatunk vele. Tehát $(n + 2) \cdot (n + 1) = 20$, ebből az egészek körében az $n + 2 = 5$ és $n + 1 = 4$ megoldás, azaz az $n = 3$ adódik.

Nézzük meg, nincs-e másik megoldás, ami elkerülte a figyelmünket. $n + 2 = x$ ismeretlennel ez egy $x \cdot (x - 1) = 20$, azaz $x^2 - x - 20 = 0$ másodfokú egyenlet, aminek két megoldása $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2}$ azaz vagy $x = 5$ (ez a már ismert $n = 3$ megoldás), vagy $x = -4$, ebből $n = -6$ adódna, de „negatív darabszámú" elemre nem értelmeztük a permutációik számát.