Programozás
7. előadás

Tartalom

- Programozási tételek intervallumon
- Feladatspecifikáció → Programspecifikáció
- Programozási tételek általánosítása

Programozási tételek

- **Sorozat** → érték
  - Sorozatszámítás
  - Megszámolás
  - Maximum-kiválasztás
  - Keresés
  - Kiválasztás
  - Eldöntés

- **Sorozat** → sorozat
  - Másolás
  - Kiválogatás
  - Szétválogatás

A tételeket sorozatokra (tömbökre) mondtuk ki, mivel a feladatok többségében ilyen jellegű adatok szerepelnek.

Problémák

1. A tételek a sorozat egy-egy elemével dolgoznak
    1. Mit tegyünk akkor, ha a feladat bemenetén csak impliciten jelenik meg a sorozat?
    2. Mit tegyünk, ha nemcsak a sorozat aktuális elemével kell dolgozunk?
    3. Mit tegyünk, ha a sorozat elemét transzformálni kell?
2. Hogyan tudjuk jobban leírni, ha egy adatból nem előáll egy másik, hanem megváltozik?

1.a. Nincs tömb

Határozzuk meg egy természetes szám legkisebb páratlan valódi osztóját! → **Keresés**

Bemenet: N∈ℕ, $X_{1..N}$∈H^N, T:H→L
Kimenet: Van∈L, Ind∈ℕ, Ért∈H
Előfeltétel: –
Utófeltétel: (Van,Ind,Ért)= $\underset{i=1}{\overset{N}{\text{Keres}}}\ T(X_i)$

Specifikáció:

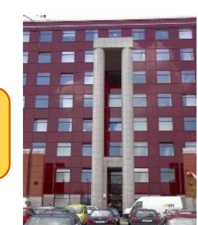
- Bemenet: $n \in \mathbb{N}$
- Kimenet: $van \in \mathbb{L}, pvo \in \mathbb{N}$
- Előfeltétel: $-$
- Utófeltétel: $x_{1..n} \in \mathbb{N}^n$ és $\forall i(1 \leq i \leq n): x_i = i$ és
  $(van, pvo, ért) = Keres_{i=2}^{n-1} x_i | n$ és $2 \nmid x_i$

Másolás

Keresés

$T: x_i \to x_i | n$ és $2 \nmid x_i$

Az x sorozat nem része a bemenetnek vagy a kimenetnek, hanem a feladat megoldásához segítségképpen vezettük be



1.a. Nincs tömb

Vegyük észre, hogy n/2 után már nincs értelme keresni!

Specifikáció:

- Utófeltétel: $x_{2..n/2} \in \mathbb{N}^{\frac{n}{2}-1}$ és $\forall i(2 \leq i \leq n/2): x_i = i$ és
  $(van, pvo, ért) = Keres_{i=2}^{n/2} x_i | n \text{ és } 2 \nmid x_i$

1.a. Nincs tömb

$\forall i(1 \le i \le N): Y_i = f(X_i)$

- Utófeltétel: $x_{1..n} \in \mathbb{N}^n$ és $\forall i(1 \le i \le n): x_i = i$ és
  $(van, pvo, ért) = Keres_{i=2}^{n/2}\, x_i | n \text{ és } 2 \nmid x_i$

$$(Van,Ind,Ért) = \underset{i=1}{\overset{N}{\text{Keres}}}\, T(X_i)$$

Visszavezetési táblázat		
y_i	$\sim$	x_i
$f(x_i)$	$\sim$	i

Visszavezetési táblázat		
$1..N$	$\sim$	$2..n \; div \; 2$
Ind	$\sim$	pvo
$T(X_i)$	$\sim$	$x_i \| n$ és $2 \nmid x_i$

1.a. Nincs tömb

Visszavezetési táblázat

y_i	$\sim$	x_i
$f(x_i)$	$\sim$	i

Visszavezetési táblázat

$1..N$	$\sim$	$2..n\ div\ 2$
Ind	$\sim$	pvo
$T(X_i)$	$\sim$	$x_i \mid n$ és $2 \nmid x_i$

```
i=1..N
    Y[i]:=f(X[i])
```

```
ind:=1
ind<=n és nem T(x[ind])
    ind:=ind+1
van := ind<=n
van
true: ért := x[ind]
false:
```

```
i=1..n
    x[i]:=i
pvo:=2
pvo<=n div 2 és nem(x[i]|n és 2∤x[i])
    pvo:=pvo+1
van:=(pvo<=n div 2)
```

1.a. Nincs tömb

Nincs szükség tömbre! Az uf. így is visszavezethető!

Specifikáció:

- Utófeltétel: $(van, pvo, ért) = Keres_{i=2}^{n/2} i|n \text{ és } 2\nmid i$

Visszavezetési táblázat		
$1..N$	~	$2..n \ div \ 2$
Ind	~	pvo
$T(X_i)$	~	$i\|n$ és $2\nmid i$

$$(Van,Ind,Ért) = \underset{i=1}{\overset{N}{Keres}} \ T(X_i)$$

```
ind:=1
ind<=n és nem T(x[ind])
    ind:=ind+1
van := ind<=n
```

```
pvo:=2
pvo<=n div 2 és nem(pvo|n és 2∤pvo)
    pvo:=pvo+1
van:=(pvo<=n div 2)
```

1.b. Elem helyett függvény

Egy számsorozatban mekkora a legnagyobb eltérés két szomszédos elem között? → **Maximum-kiválasztás**

$$(\text{Max}, \text{MaxÉrt}) = \underset{i=1}{\overset{N}{\text{Max}}}\ X_i$$

Specifikáció:

- Bemenet: $n \in \mathbb{N}, x_{1..n} \in \mathbb{R}^n$
- Kimenet: $maxind \in \mathbb{N}, maxkül \in \mathbb{R}$
- Előfeltétel: $n \geq 2$
- Utófeltétel: $k_{1..n-1} \in \mathbb{N}^{n-1}$ *és* $\forall i(1 \leq i \leq n-1){:}\ k_i = |x_{i+1} - x_i|$ és $(maxind, maxkül) = MAX_{i=1}^{n-1} k_i$

Másolás

➢ Utófeltétel: ∀i(1≤i≤N): Y_i=f(X_i)

Max.kiv.

$x_i \mapsto |x_{i+1} - x_i|$

Nem jön ki az f(x[i])-ből

A k segédsorozat segítségével.

1.b. Elem helyett függvény

➢ Utófeltétel: $\forall i(1 \leq i \leq N)$: $Y_i = f(X_i)$

➢ Utófeltétel: $k_{1..n-1} \in \mathbb{N}^{n-1}$ és
$\forall i(1 \leq i \leq n-1): k_i = |x_{i+1} - x_i|$ és
$(maxind, maxkül) = MAX_{i=1}^{n-1} k_i$

$$(\mathrm{Max}, \mathrm{MaxÉrt}) = \underset{i=1}{\overset{N}{\mathrm{Max}}}\ X_i$$

Visszavezetési táblázat		
$1..N$	~	$1..n-1$
y_i	~	k_i
$f(x_i)$	~	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$

Visszavezetési táblázat		
Max	~	$maxind$
$MaxÉrt$	~	$maxkül$
$1..N$	~	$1..n-1$
X_i	~	k_i

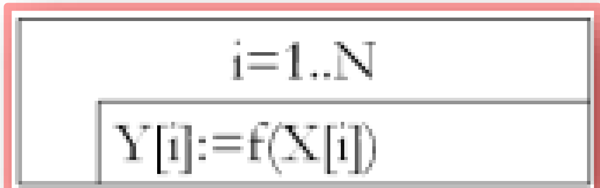
1.b. Elem helyett függvény

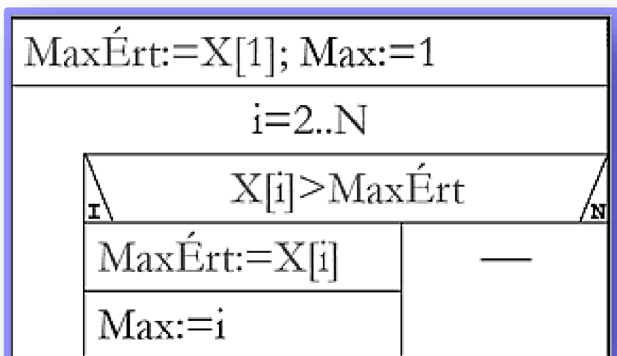
Visszavezetési táblázat

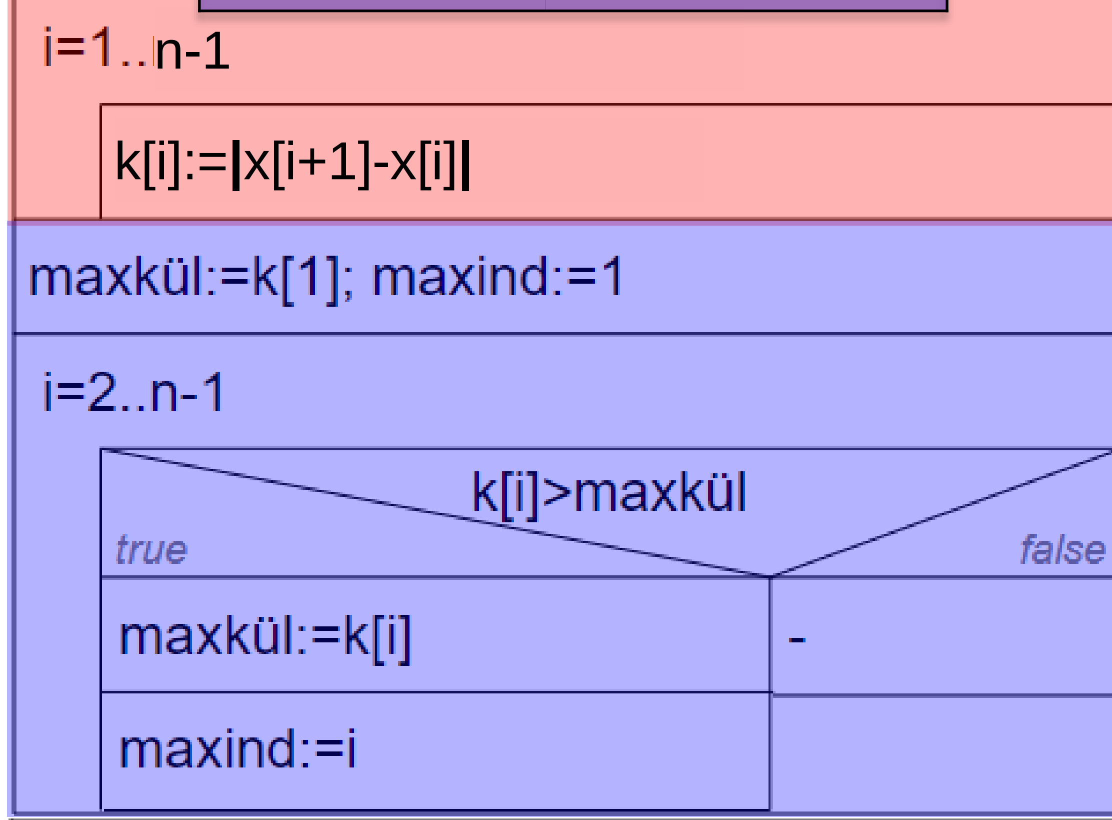
$1..N$	$\sim$	$1..n-1$
y_i	$\sim$	k_i
$f(x_i)$	$\sim$	$\lvert x_{i+1}-x_i \rvert$

Visszavezetési táblázat

Max	$\sim$	$maxind$
$MaxÉrt$	$\sim$	$maxkül$
$1..N$	$\sim$	$1..n-1$
X_i	$\sim$	k_i







1.b. Elem helyett függvény

Nincs szükség a köztes k tömbre! Az uf. visszavezetése anélkül is jó eredményt ad!

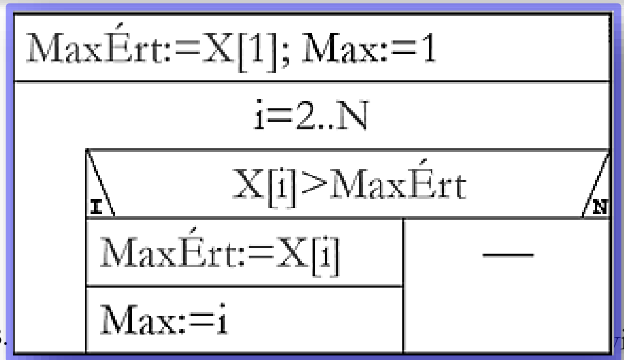
$$(Max, MaxÉrt) = \underset{i=1}{\overset{N}{Max}}\ X_i$$

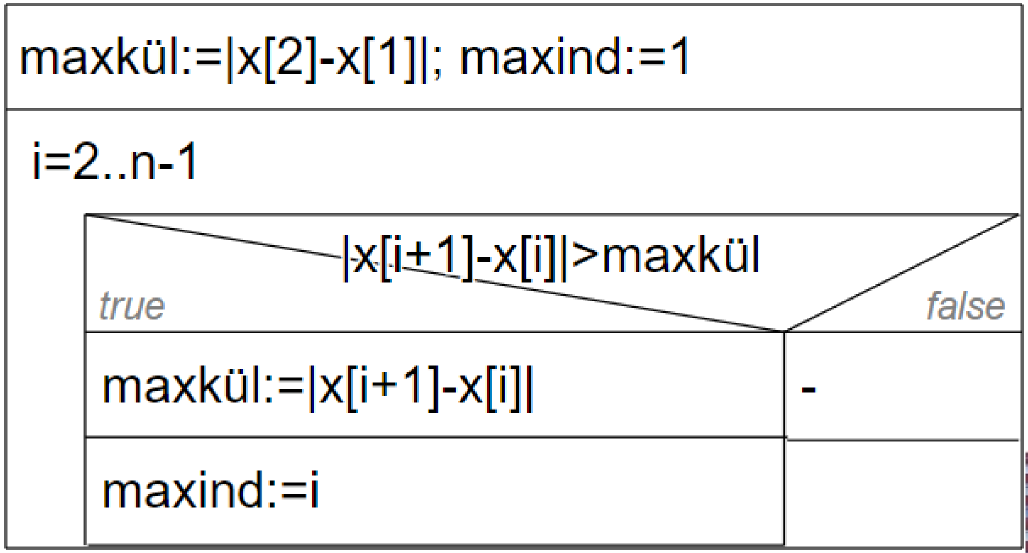
Specifikáció:

$f(i) = |x_{i+1} - x_i|$

- Utófeltétel: $(maxind, maxkül) = MAX_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - x_i|$

Visszavezetési táblázat		
$Max, MaxÉrt$	~	$maxind, maxkül$
$1..N$	~	$1..n-1$
X_i	~	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$





1. probléma megoldása

a) Nincs tömb → intervallum
b) x[i] → f(i)
c) f(x[i]) → f(i)

Intervallumon értelmezett függvényekre szükséges kimondani a tételeinket!

Példa: maximum-kiválasztás

Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in H^N$

Kimenet: $Max \in \mathbb{N}$, $MaxÉrt \in H$

Előfeltétel: $N>0$

Utófeltétel: $1 \leq Max \leq N$ és

$\forall i\ (1 \leq i \leq N): X_{Max} \geq X_i$ és

$MaxÉrt = X_{Max}$

másképp: $(Max, MaxÉrt) = \underset{i=1}{\overset{N}{\mathrm{Max}}}\ X_i$

Specifikáció:

- Definíció: $f:[e..u] \to \mathbb{H}$
- Bemenet: $e, u \in \mathbb{Z}$
- Kimenet: $Max \in \mathbb{Z}, MaxÉrt \in \mathbb{H}$
- Előfeltétel: $e \leq u$
- Utófeltétel: $e \leq Max \leq u$ és

  $\forall i\ (e \leq i \leq u): f(Max) \geq f(i)$ és

  $MaxÉrt = f(Max)$

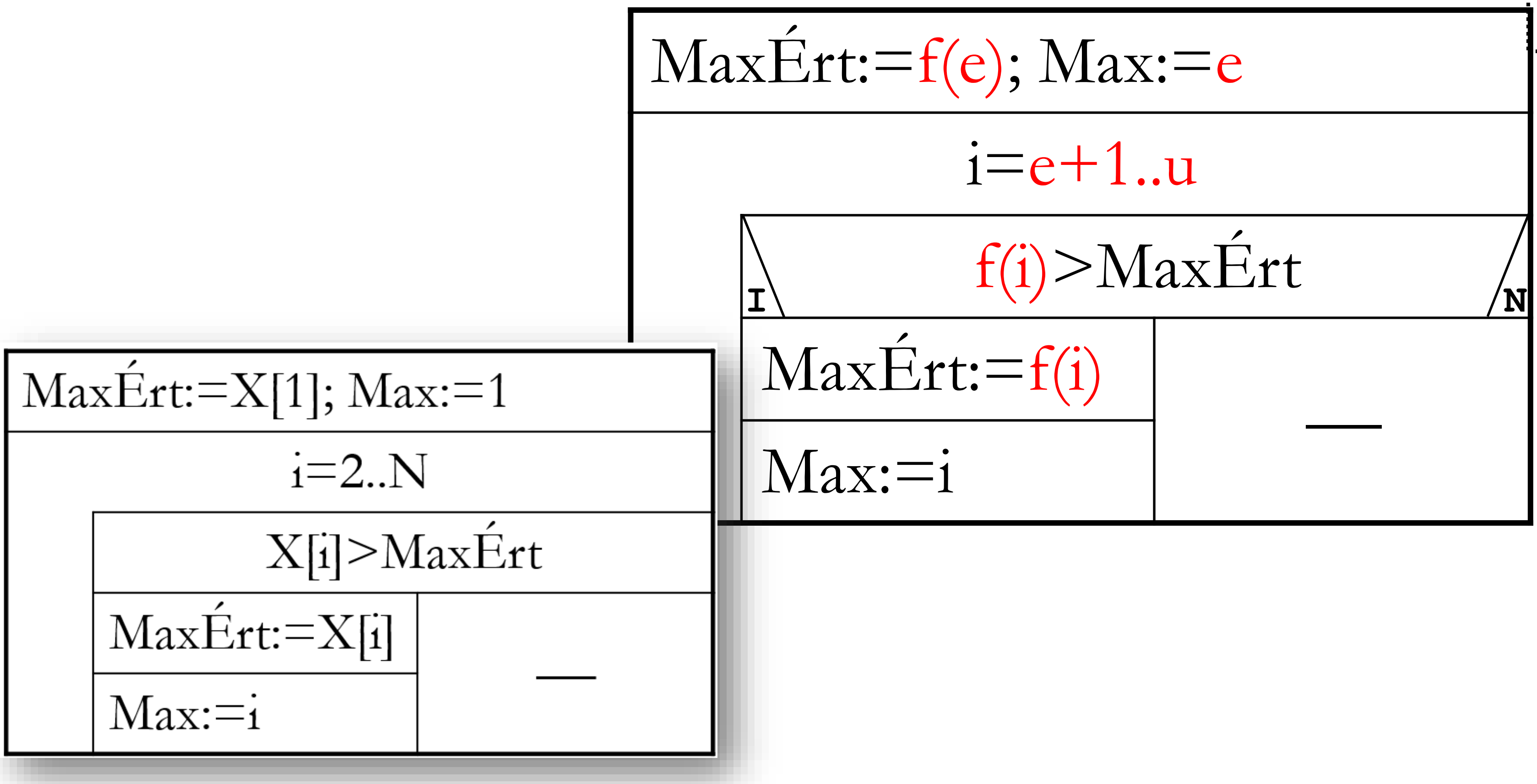
másképp: $(Max, MaxÉrt) = MAX_{i=e}^{u} f(i)$

Léteznie kell a $\geq: \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{L}$ rendezési relációnak!

Példa: maximum-kiválasztás

Algoritmus:

Változó
i:Egész



Példa: maximum-kiválasztás

Egy számsorozatban mekkora a legnagyobb eltérés két szomszédos elem között? → **Maximum-kiválasztás**

Specifikáció:

- Bemenet: $n \in \mathbb{N}, x_{1..n} \in \mathbb{R}^n$
- Kimenet: $maxind \in \mathbb{N}, maxkül \in \mathbb{R}$
- Előfeltétel: $n \geq 2$
- Utófeltétel: $(maxind, maxkül) = MAX_{i=2}^{n} |x_i - x_{i-1}|$

Visszavezetési táblázat

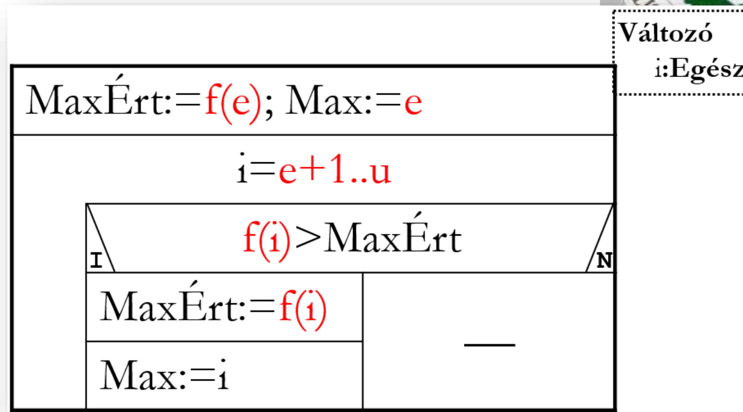
Max	~	$maxind$
$MaxÉrt$	~	$maxkül$
$e..u$	~	$2..n$
$f(i)$	~	$\|x_i - x_{i-1}\|$

$$(Max, MaxÉrt) = MAX_{i=e}^{u} f(i)$$

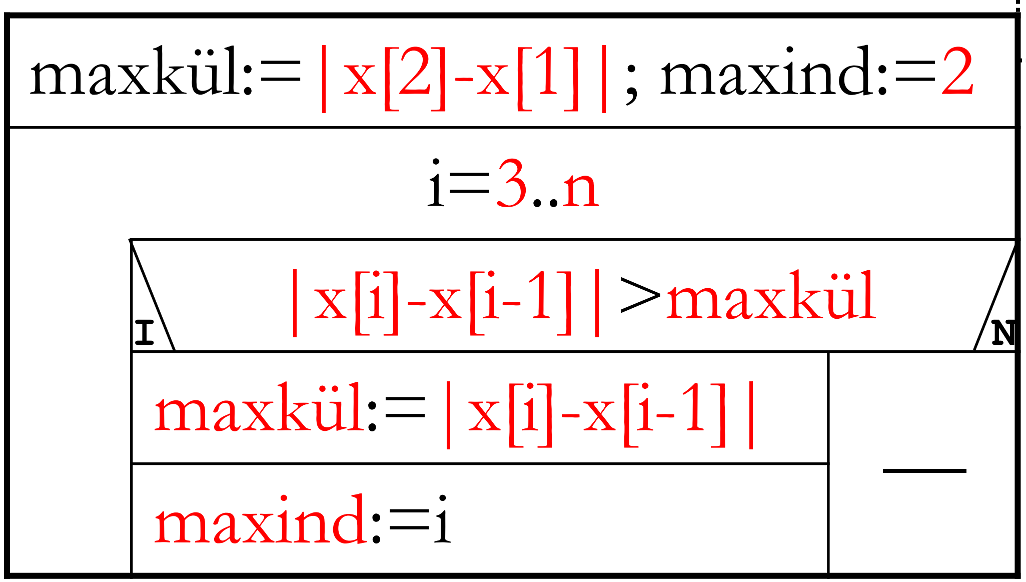
Példa: maximum-kiválasztás

Visszavezetési táblázat		
Max	~	$maxind$
$MaxÉrt$	~	$maxkül$
$e..u$	~	$2..n$
$f(i)$	~	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$

Változó
i:Egész



Változó
i:Egész



Példa: keresés

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}, X_{1..N} \in \mathbb{H}^N, T: \mathbb{H} \to \mathbb{L}$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}, Ind \in \mathbb{N}, Ért \in \mathbb{H}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i\ (1 \leq i \leq N): T(X_i)$ és $Van \to 1 \leq Ind \leq N$ és $T(X_{Ind})$ és $Ért = X_{Ind}$

  másképp: $(Van, Ind, Ért) = \underset{i=1}{\overset{N}{\text{Keres}}}\ T(X_i)$

Specifikáció$_1$:

- Definíció: $T: \mathbb{H} \to \mathbb{L}$

  $f: [e..u] \to \mathbb{H}$
- Bemenet: $e, u \in \mathbb{Z}$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}, Ind \in \mathbb{Z}, Ért \in \mathbb{H}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i (e \leq i \leq u): T(f(i))$ és

  $Van \to (e \leq Ind \leq u$ és $T(f(Ind)))$ és $Ért = f(i)$

Másképp: $(Van, Ind) = Keres_{i=e}^{u} T(f(i))$

Példa: keresés

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}, X_{1..N} \in \mathbb{H}^N, T: \mathbb{H} \to \mathbb{L}$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}, Ind \in \mathbb{N}$, ~~$Ért \in \mathbb{H}$~~
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i\ (1 \le i \le N): T(X_i)$ és
  $Van \to 1 \le Ind \le N$ és $T(X_{Ind})$ ~~és $Ért = X_{Ind}$~~

másképp: $(Van, Ind, \cancel{Ért}) = \underset{i=1}{\overset{N}{Keres}}\ T(X_i)$

Specifikáció$_2$:

- Definíció: $T: [e..u] \to \mathbb{L}$
- Bemenet: $e, u \in \mathbb{Z}$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}, Ind \in \mathbb{Z}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i(e \le i \le u): T(i)$ és
  $Van \to (e \le Ind \le u \text{ és } T(Ind))$

Másképp: $(Van, Ind) = Keres_{i=e}^{u} T(i)$

Példa: keresés

Algoritmus:

Specifikáció:

- Definíció: $T: [e..u] \to \mathbb{L}$
- Bemenet: $e, u \in \mathbb{Z}$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}, Ind \in \mathbb{Z}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i(e \le i \le u): T(i)$ és $Van \to (e \le Ind \le u \text{ és } T(Ind))$

Másképp: $(Van, Ind) = Keres_{i=e}^{u} T(i)$

```
ind:=e
ind<=u és nem T(ind)
    ind:=ind+1
van:=ind<=u
```

Megjegyzés:

Többlet tudás: a megoldás az első adott tulajdonságú elemet adja meg.

Példa: keresés

Határozzuk meg egy természetes szám legkisebb páratlan valódi osztóját! → **Keresés**

Specifikáció:

- Bemenet: $n \in \mathbb{N}$
- Kimenet: $van \in \mathbb{L}, pvo \in \mathbb{N}$
- Előfeltétel: $-$
- Utófeltétel: $(van, pvo) = Keres_{i=2}^{n/2}\, i|n \text{ és } 2\nmid i$

$$(Van, Ind) = Keres_{i=e}^{u} T(i)$$

Visszavezetési táblázat

Ind	$\sim$	pvo
$e..u$	$\sim$	$2..n\ div\ 2$
$T(i)$	$\sim$	$i|n \text{ és } 2\nmid i$

Példa: keresés

Visszavezetési táblázat		
Ind	$\sim$	pvo
$e..u$	$\sim$	$2..n\ div\ 2$
$T(i)$	$\sim$	$i\|n$ és $2\nmid i$

```
ind:=e
ind<=u és nem T(ind)
    ind:=ind+1
van:=ind<=u
```

```
pvo:=2
pvo<=n div 2 és nem(pvo|n és 2∤pvo)
    pvo:=pvo+1
van:=(pvo<=n div 2)
```

2. probléma: adatok helyett változók

- Hogyan írjuk le, ha a program során megváltozik az adat, és nem egy másik adat áll elő belőle?
- Eddig:

Bemeneti adatok → Program → Kimeneti adatok

- Például:

N, X → Program → Van, Ind

- De hogyan? (pl. helyben kiválogatás)

N, X_{be} → Program → Db, X_{ki}

Példa

Cseréljük fel két változó értékét!

Specifikáció:

- Bemenet: $\mathrm{a_{be}}, \mathrm{b_{be}} \in \mathbb{Z}$
- Kimenet: $\mathrm{a_{ki}}, \mathrm{b_{ki}} \in \mathbb{Z}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $a_{ki} = b_{be}$ és $b_{ki} = a_{be}$

Például:

Kezdetben: (a:5, b:3)

Végén: (a:3, b:5)

Feladatspecifikáció

- Adat mint egy értékhalmaz eleme
  (+ értékhalmazhoz „szokásosan” asszociált műveletek)
  - Pl. $a \in \mathbb{Z}$ $(aritmetikai\ műveletekkel)$
- Bemenő adatok, kimenő adatok
- Feladat: olyan előírás (reláció), amely megadja, hogy adott bemenetre adott kimenetet mikor fogadjuk el helyes kimenetként (tehát a feladat megoldásaként)
  - Bemenő adatok → Kimenő adatok

Programspecifikáció

- Adat típusa: értékhalmaz + műveletek
  - Pl. a: Egész
- Egy állapot: feladat minden adata felvesz egy-egy értéket
  - Pl. (a: 5, b: 3)
- Állapottér: összes lehetséges állapot
  - Változók: az állapottér adatainak „címkéi”
  - Pl. (a: Egész, b: Egész)

Programspecifikáció

- Kezdőállapot, célállapot
- Feladat: olyan előírás (reláció), amely megadja, hogy adott kezdőállapotra adott végállapotot mikor fogad-juk el helyesnek (tehát a feladat megoldásaként)
- Végrehajtás: az állapottér változóinak módosítása
  - Pl: (a:3, b:5) → (a:4, b:5)
- Program: egy végrehajtási sorozat, mely a kezdőállapotból indul és a célállapotban ér véget.
  - Pl: (a:3, b:5) → (a:3, b:5, sv:3) → (a:5, b:5, sv:3) → (a:5, b:3, sv:3) → (a:5, b:3)

sv : segédváltozó
állapottér-bővítés

Programspecifikáció

- Állapottér
  - A feladat lényeges adatainak típusérték-halmazai az egyes adatokhoz tartozó változónevekkel együtt
  - Bemeneti és kimeneti változók
- Előfeltétel
  - kezdőállapotok halmazát leíró logikai állítás
  - rögzíti a bemenő változók egy lehetséges, de tetszőleges kezdőértékét
- Utófeltétel
  - Logikai állítás, amely megadja, hogy adott kezdő-állapothoz milyen végállapot lehet helyes megoldás

Programspecifikáció
sematikus ábra

Programspecifikác

Példa

- **Állapottér**
  - A feladat lényeges adatainak típusérték-halmazai az egyes adatokhoz tartozó változónevekkel együtt
  - Bemeneti és kimeneti változók
- **Előfeltétel**
  - kezdőállapotok halmazát leíró logikai állítás
  - rögzíti a bemenő változók egy lehetséges, de tetszőleges kezdőértékét
- **Utófeltétel**
  - Logikai állítás, amely megadja, hogy adott kezdő-állapothoz milyen végállapot lehet helyes megoldás

Cseréljük fel két változó értékét!

Specifikáció:

- Bemenet: $a, b : Egész$
- Kimenet: $a, b : Egész$
- Előfeltétel: $a = a'$ és $b = b'$
- Utófeltétel: $a = b'$ és $b = a'$

Például: a'=3 és b'=5

Kezdetben: (a:5, b:3)

Végén: (a:3, b:5)

Másképp:

Állapottér: $a : Egész, b : Egész$

vagy

A: $(a : \mathbb{Z}, b : \mathbb{Z})$

Programspecifikáció
Példa

Cseréljük fel két változó értékét!

Specifikáció:

- Állapottér: $a, b : Egész$
- Előfeltétel: $a = a'$ és $b = b'$
- Utófeltétel: $a = b'$ és $b = a'$

A: $a : Egész, b : Egész$
vagy
A= $(a : \mathbb{Z}, b : \mathbb{Z})$

Algoritmus:

sv:=a
a:=b
b:=sv

Változó
sv:**Egész**

Programspecifikáció
Példa

Növeljük meg egy változó értékét!

Specifikáció:

- Bemenet: $a: Egész$
- Kimenet: $a: Egész$
- Előfeltétel: $a = a'$
- Utófeltétel: $a = a' + 1$

A: $a: Egész$
vagy
A= $(a: \mathbb{Z})$

Algoritmus:

```
a:=a+1
```

Programspecifikáció
Példa

Alakítsunk át egy Celsius értéket Fahrenheitté!

Specifikáció:

- Bemenet: $c: Valós$
- Kimenet: $f: Valós$
- Előfeltétel: $c = c'$
- Utófeltétel: Ef és $f = c * \frac{9}{5} + 32$

A: c: Valós, f: Valós
vagy
A= $(c: \mathbb{R}, f: \mathbb{R})$

A bemeneti adatok nem változnak a megoldás során, a program végén is ugyanaz az értékük, mint kezdetben.

Programspecifikáció
Eldöntés

Specifikáció:

- Bemenet: $n: \color{red}{Egész}$,
  $x: \color{red}{Tömb(1..n: H)}$,
  $T: H \rightarrow \color{red}{Logikai}$
- Kimenet: $van: \color{red}{Logikai}$
- Előfeltétel: $\color{red}{n = n' \text{ és } x = x' \text{ és } n \geq 0}$
- Utófeltétel: $\color{red}{Ef \text{ és}}\ van = \exists i(1 \leq i \leq n): T(x[i])$

- Másképp: $\color{red}{Ef \text{ és}}\ van = \exists_{i=1}^{n} T(x[i])$

A bemeneti adatok nem változnak a megoldás során

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$,
  $X_{1..N} \in H^N$,
  $T: H \rightarrow \mathbb{L}$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i(1 \leq i \leq N): T(X_i)$

Programspecifikáció
Példa

Adott tanulók neve és egy tárgyból kapott jegye.
Bukott-e meg valaki közülük a tárgyból?

Specifikáció:

- Bemenet: $n{:}\,Egész, tanulók{:}\,Tömb(1..n{:}\,Tanuló)$
  $Tanuló = Rekord(név{:}\,Szöveg, jegy{:}\,Természetes)$
- Kimenet: $van{:}\,Logikai$
- Előfeltétel: $n = n' \text{ és } tanulók = tanulók'$ és
  $n \geq 0$ és $\forall i(1 \leq i \leq n){:}\,1 \leq tanulók[i].jegy \leq 5$
- Utófeltétel: $Ef \text{ és } van = \exists_{i=1}^{n}\, tanulók[i].jegy = 1$

A bemeneti adatok nem változnak a megoldás során

Eldöntés		
$T(x[i])$	$\sim$	$tanulók[i].jegy = 1$

Programozási tételek

- Intervallumra
- Programspecifikációval
- Újracsoportosítva

Összegzés

Feladat: Adott az egész számok egy [e..u] intervalluma és egy f:[e..u]→H függvény. A H halmaz elemein értelmezett egy asszociatív, baloldali nulla elemmel rendelkező művelet (nevezzük összeadásnak és jelölje ezt a +). Határozzuk meg az f függvény [e..u]-on felvett értékeinek az összegét, azaz a $\sum_{i=e}^{u} f(i)$ kifejezés értékét! (e>u esetén ennek az értéke definíció szerint a nulla elem)

Összegzés

Specifikáció:

- Definíció: $f\colon [e..u] \to H$
- Bemenet: $e, u\colon Egész$
- Kimenet: $s\colon H$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $s = \sum_{i=e}^{u} f(i)$

Algoritmus:

Változó
i:Egész

s:=0
i=e..u
s:=s+f(i)

Feltételes összegzés
mint speciális összegzés

Specifikáció:

- Definíció: $T: [e..u] \to Logikai, f: [e..u] \to H$

  $g: [e..u] \to H, g(i) = \begin{cases} f(i) & ha\ T(i) \\ 0 & különben \end{cases}$
- Bemenet: $e, u: Egész$
- Kimenet: $s: H$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $s = \sum_{\substack{i=e \\ T(i)}}^{u} f(i)$
- Utófeltétel: Ef és $s = \sum_{i=e}^{u} g(i)$

Összegzés	
$f(i)$	~ $g(i)$ ~ $ha\ T(i), akkor\ f(i), különben\ 0$

Specifikáció:

- Definíció: $f: [e..u] \to H$
- Bemenet: $e, u: Egész$
- Kimenet: $s: H$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $s = \sum_{i=e}^{u} f(i)$

Feltételes összegzés
mint speciális összegzés

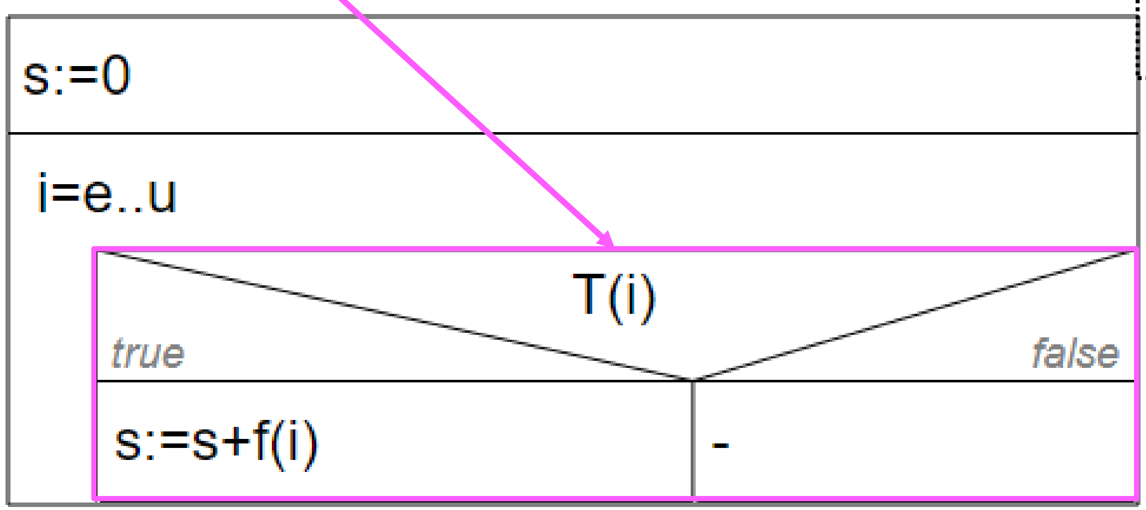
Algoritmus:

$$g(i) = \begin{cases} f(i) & ha\ T(i) \\ 0 & különben \end{cases}$$

Összegzés

$f(i) \sim \boxed{ha\ T(i), akkor\ f(i), különben\ 0}$

Változó
i:Egész

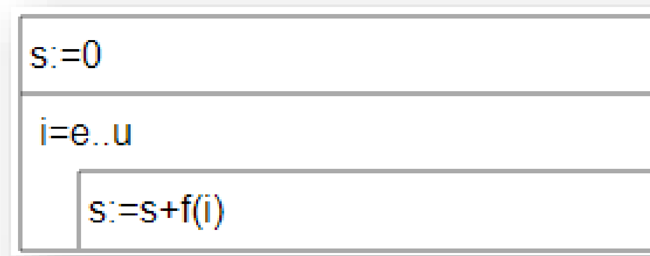


Összegzés
Példa

Adott egy számsorozat. Mennyi a páratlan számok szorzata?

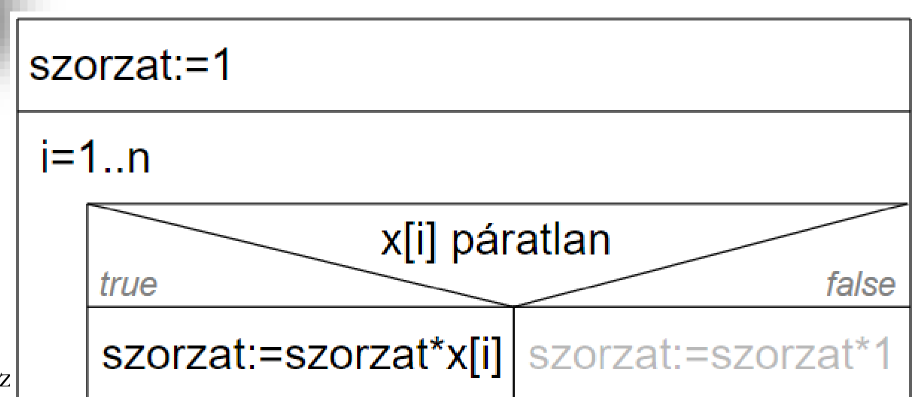
Specifikáció:

- Bemenet: $n: Egész, x: Tömb(1..n: Valós)$
- Kimenet: $szorzat: Valós$
- Előfeltétel: $n = n' \text{ és } x = x' \text{ és } n \geq 0$
- Utófeltétel: $Ef \text{ és } szorzat = \prod_{i=1}^{n} \begin{cases} x[i] & , ha\ x[i]\ páratlan \\ 1 & , \quad különben \end{cases}$



Összegzés $Ef \text{ és } s = \sum_{i=e}^{u} f(i)$

s	~	$szorzat$
$e..u$	~	$1..n$
$\sum, +, 0$	~	$\prod, *, 1$
$f(i)$	~	$ha\ x[i]\ páratlan, akkor\ x[i],$ $különben\ 1$



Megszámolás

Feladat: Adott az egész számok egy [e..u] intervalluma és egy T:[e..u]→L feltétel. Határozzuk meg, hogy az [e..u] intervallumon a T feltétel hányszor veszi fel az igaz értéket!

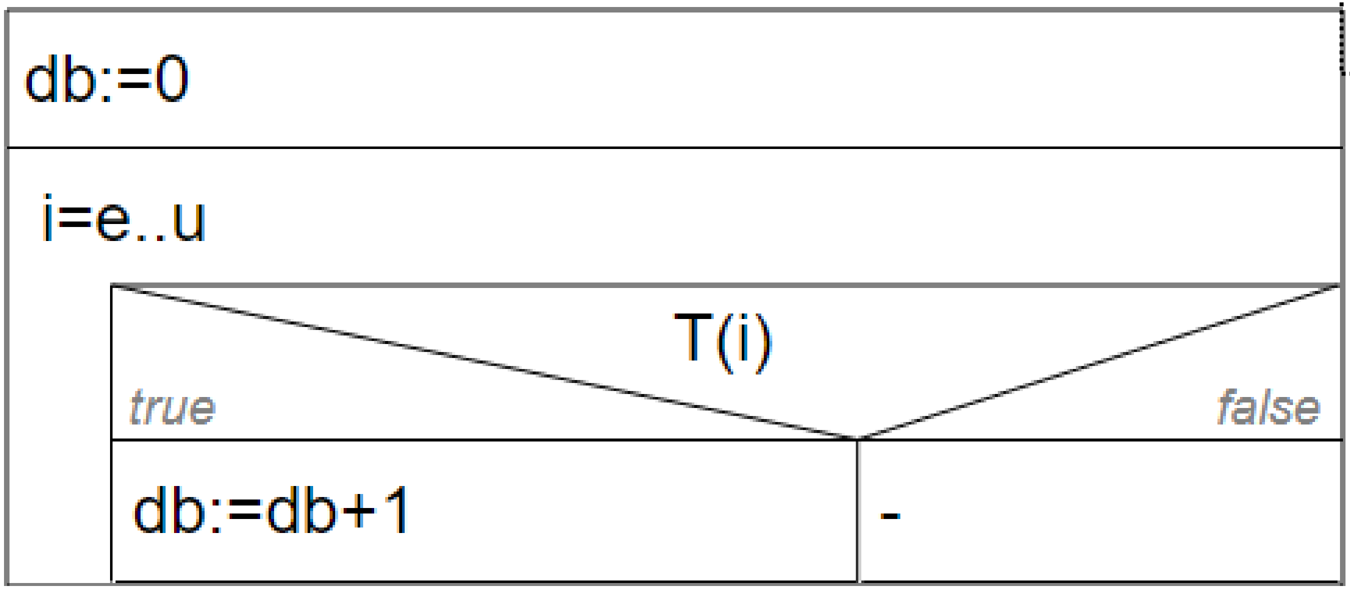
Specifikáció:

- Definíció: $T: [e..u] \rightarrow Logikai$
- Bemenet: $e, u: Egész$
- Kimenet: $db: Egész$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $db = \sum_{\substack{i=e \\ T(i)}}^{u} 1$

Megszámolás

Algoritmus:

Változó
  i:Egész



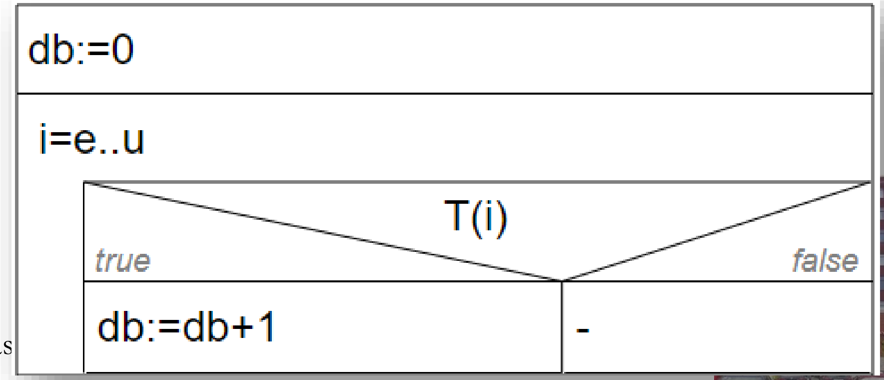
Megszámolás
mint speciális összegzés

Specifikáció:
- Definíció: $f:[e..u] \to H$
- Bemenet: $e,u: Egész$
- Kimenet: $s: H$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $s = \sum_{i=e}^{u} f(i)$

Specifikáció:
- Definíció: $T:[e..u] \to Logikai,$

  $$g:[e..u] \to \{0,1\}, g(i) = \begin{cases} 1 & ha\ T(i) \\ 0 & különben \end{cases}$$
- Bemenet: $e,u: Egész$
- Kimenet: $db: Természetes$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $db = \sum_{i=e}^{u} g(i)$

Összegzés		
s	$\sim$	db
$f(i)$	$\sim$	$ha\ T(i), akkor\ 1, különben\ 0$



Maximum-kiválasztás

Feladat: Adott az egész számok egy [e..u] intervalluma és egy f:[e..u]→H függvény. A H halmaz elemein értelmezett egy teljes rendezési reláció. Határozzuk meg, hogy az f függvény hol veszi fel az [e..u] nem üres intervallumon a legnagyobb értéket, és mondjuk meg, mekkora ez a maximális érték!

Maximum-kiválasztás

Specifikáció:

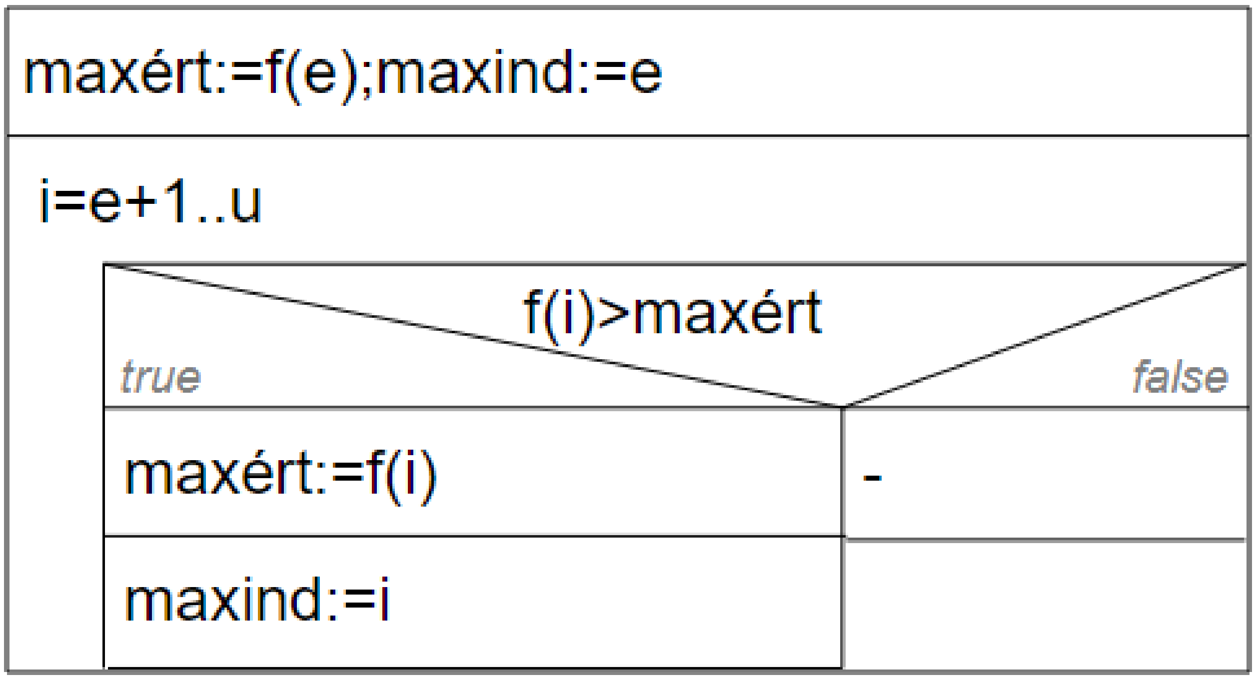
- Definíció: $f:[e..u] \to H,\ \geq: H \times H \to Logikai$
- Bemenet: $e, u: Egész$
- Kimenet: $maxért: H, maxind: Egész$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$ és $u \geq e$
- Utófeltétel: Ef és

  $e \leq maxind \leq u$ és
  $\forall i(e \leq i \leq u): maxért \geq f(i)$ és
  $maxért = f(maxind)$

- Másképp: Ef és $(maxért, maxind) = Max_{i=e}^{u} f(i)$

Maximum-kiválasztás

Algoritmus:



Maximum-kiválasztás

mint speciális összegzés

Specifikáció:
- Definíció: $f:[e..u] \to H$
- Bemenet: $e,u: Egész$
- Kimenet: $s: H$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $s = \sum_{i=e}^{u} f(i)$

Specifikáció:

- Definíció: $f:[e..u] \to H,\ \geq, >: H \times H \to Logikai$
- Bemenet: $e,u: Egész$
- Kimenet: $maxért: H, maxind: Egész$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$ és $u \geq e$
- Utófeltétel: Ef és $maxért = Max_{i=e}^{u} f(i)$

Összegzés

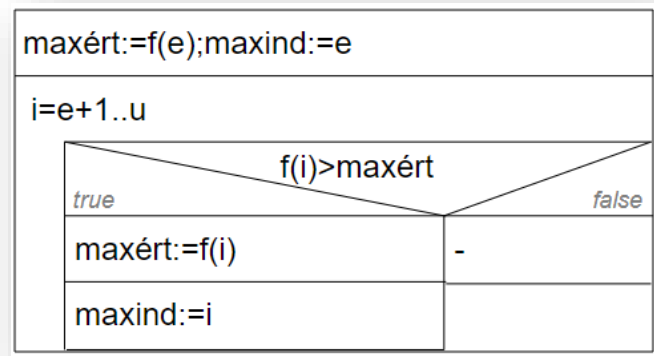
s	~	$maxért$
$\sum, +, 0$	~	Max, max, $-\infty$
$s := +(s, f(i))$	~	maxért := max$(maxért, f(i))$
$s := +(s, f(i))$	~	$ha\ f(i) > maxért$ $akkor\ maxért := f(i)$ $különben\ maxért := maxért$

s:=0
i=e..u
s:=s+f(i)

maxért:=-∞
i=e..u
f(i)>maxért
true
maxért:=f(i)
-

Maximum-kiválasztás
Példa

Egy számsorozatban mekkora a legnagyobb eltérés két szomszédos elem között?

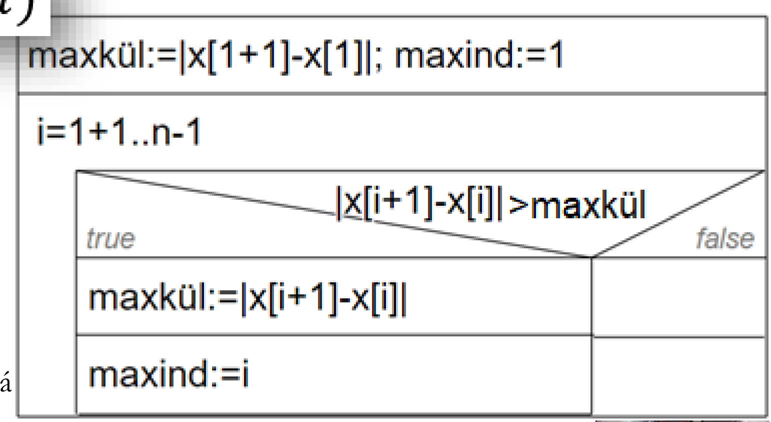


Specifikáció:

- Bemenet: $n\colon Egész, x\colon Tömb(1..n\colon Valós)$
- Kimenet: $maxkül\colon Valós$
- Előfeltétel: $n = n' \text{ és } x = x' \text{ és } n \geq 2$
- Utófeltétel: $Ef \text{ és } (maxkül, maxind) = MAX_{i=1}^{n-1} |x[i+1] - x[i]|$

$Ef \text{ és } (maxért, maxind) = Max_{i=e}^{u} f(i)$

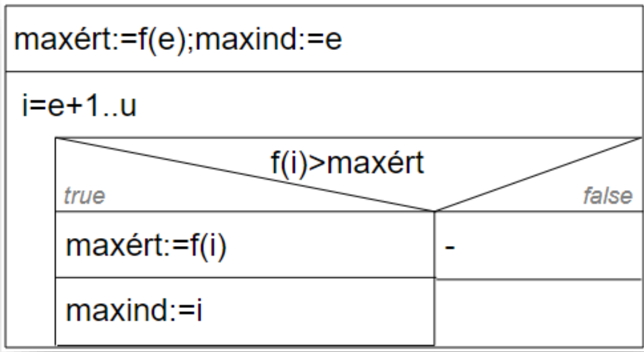
Maximum-kiválasztás		
$maxért$	$\sim$	$maxkül$
$e..u$	$\sim$	$1..n-1$
$f(i)$	$\sim$	$\lvert x[i+1] - x[i] \rvert$



Maximum-kiválasztás

Példa

Egy számsorozatban mekkora a legnagyobb eltérés két szomszédos elem között?

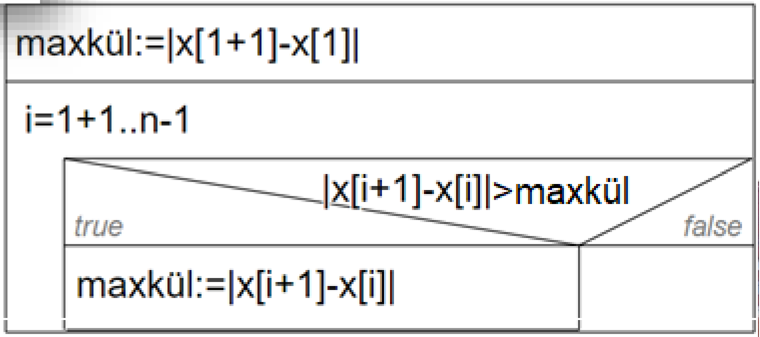


Specifikáció:

- Bemenet: $n\text{:}\,Egész, x\text{:}\,Tömb(1..n\text{:}\,Valós)$
- Kimenet: $maxkül\text{:}\,Valós$
- Előfeltétel: $n = n'$ és $x = x'$ és $n \geq 2$
- Utófeltétel: Ef és $(maxkül, maxind) = MAX_{i=1}^{n-1}|x[i+1] - x[i]|$

Ef és $(maxért, maxind) = Max_{i=e}^{u} f(i)$

Maximum-kiválasztás		
$maxért$	$\sim$	$maxkül$
$e..u$	$\sim$	$1..n-1$
$f(i)$	$\sim$	$\lvert x[i+1] - x[i] \rvert$



Feltételes maximumkeresés

Feladat: Adott az egész számok egy [e..u] intervalluma, egy f:[e..u]→H függvény és egy T:[e..u]→Logikai feltétel. A H halmaz elemein értelmezett egy teljes rendezési reláció. Határozzuk meg, hogy az [e..u] intervallum T feltételt kielégítő elemei közül az f függvény hol veszi fel a legnagyobb értéket, és mondjuk meg, mekkora ez az érték!

(Lehet, hogy egyáltalán nincs T feltételt kielégítő elem az [e..u] intervallumban vagy üres az intervallum.)

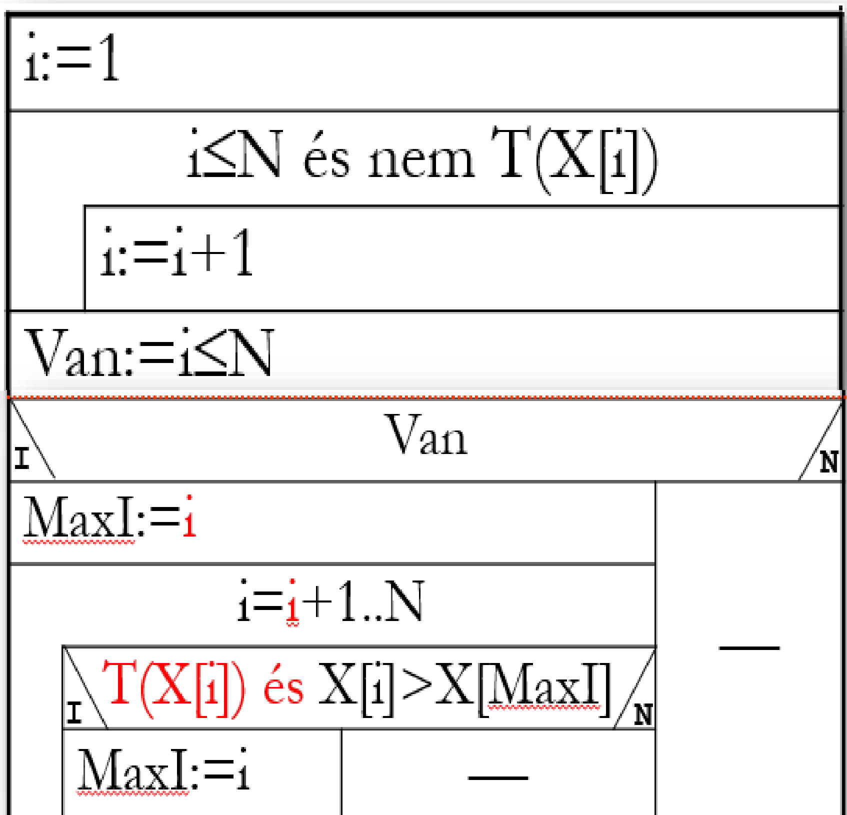
Feltételes maximumkeresés

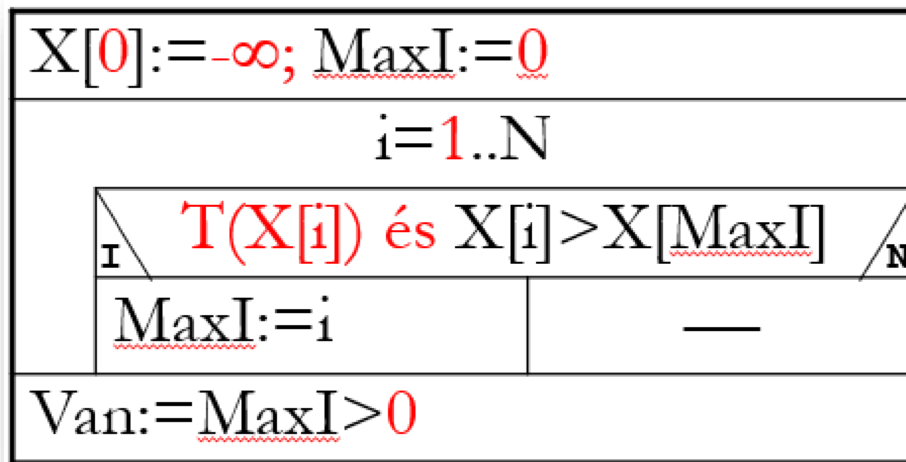
Specifikáció:

- Definíció: $f:[e..u] \to H,\ \geq: H \times H \to Logikai,$
  $T:[e..u] \to Logikai$
- Bemenet: $e, u: Egész$
- Kimenet: $van: Logikai,\ maxért: H,\ maxind: Egész$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $van = \exists i(e \leq i \leq u): T(i)$ és
  $van \to (e \leq maxind \leq u$ és $T(maxind)$ és
  $\forall i(e \leq i \leq u): \mathrm{T(i)} \to maxért \geq f(i)$ és
  $maxért = f(maxind))$
- Másképp: Ef és $(van, maxért, maxind) = \underset{T(i)}{Max_{i=e}^{u}} f(i)$

Feltételes maximumkeresés

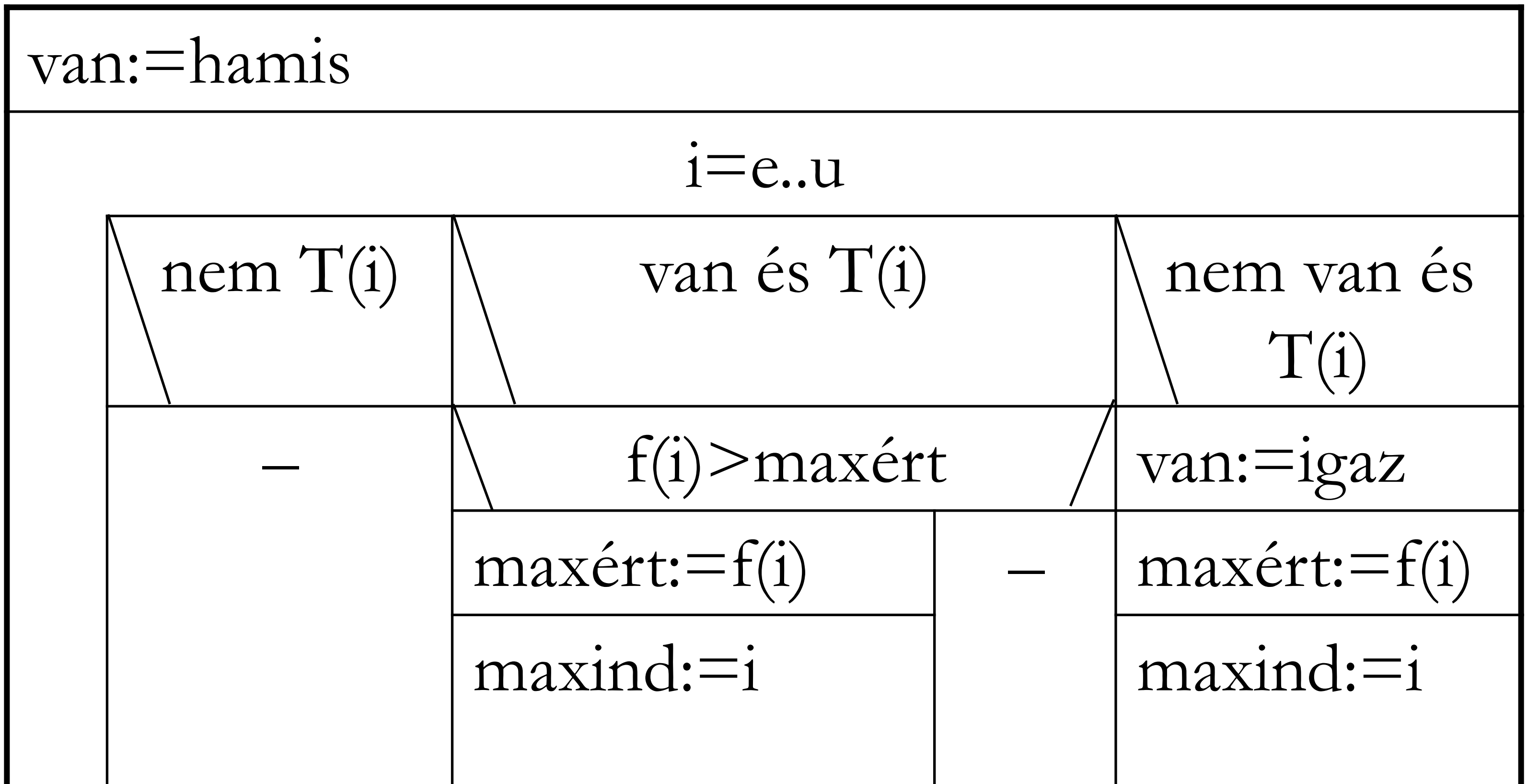
Algoritmusok korábbról:





Feltételes maximumkeresés

Algoritmus:



Keresés

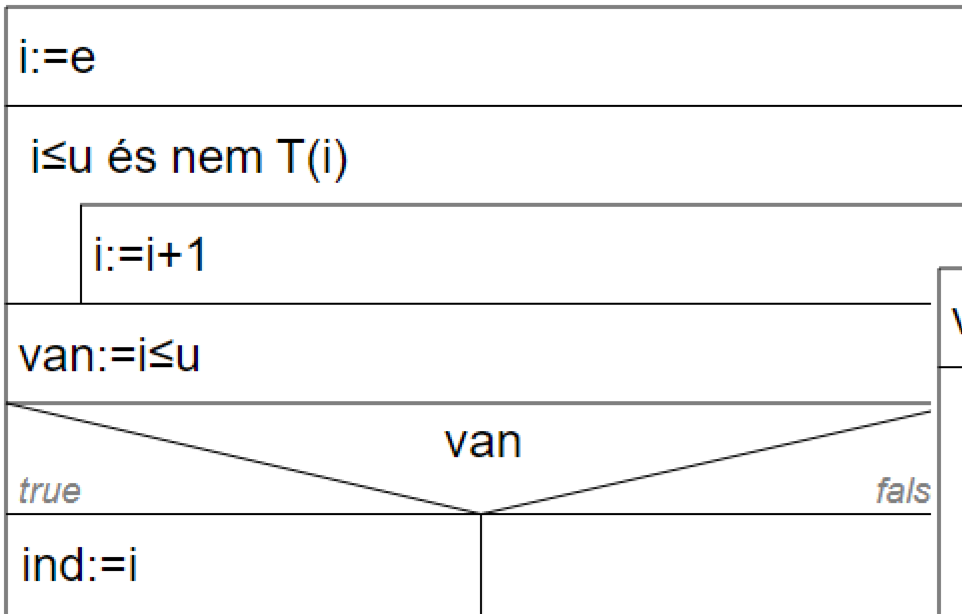
Feladat: Adott az egész számok egy [e..u] intervalluma és egy T:[e..u]→Logikai feltétel. Határozzunk meg az [e..u] intervallumban egy olyan számot, amely kielégíti a T feltételt!

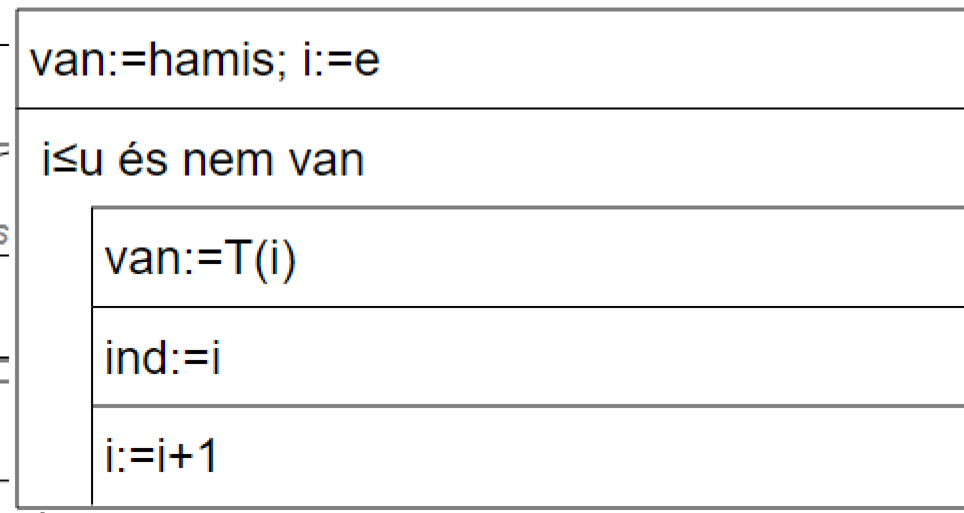
Specifikáció:

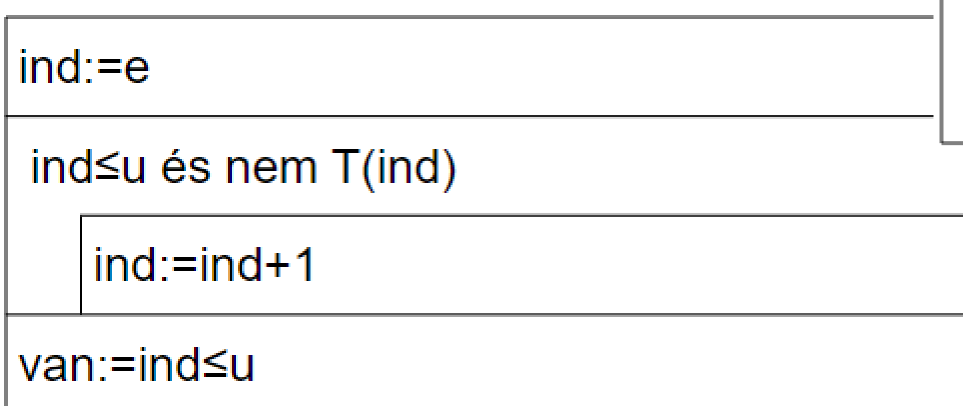
- Definíció: $T: [e..u] \rightarrow Logikai$
- Bemenet: $e, u: Egész$
- Kimenet: $van: Logikai, ind: Egész$
- Előfeltétel: $e = e' \text{ és } u = u'$
- Utófeltétel: $Ef \text{ és } van = \exists i(e \leq i \leq u): T(i) \text{ és}$
  $van \rightarrow (e \leq ind \leq u \text{ és } T(ind))$
- Másképp: $Ef \text{ és } (van, ind) = Keres_{i=e}^{u} T(i)$

Keresés

Algoritmus:

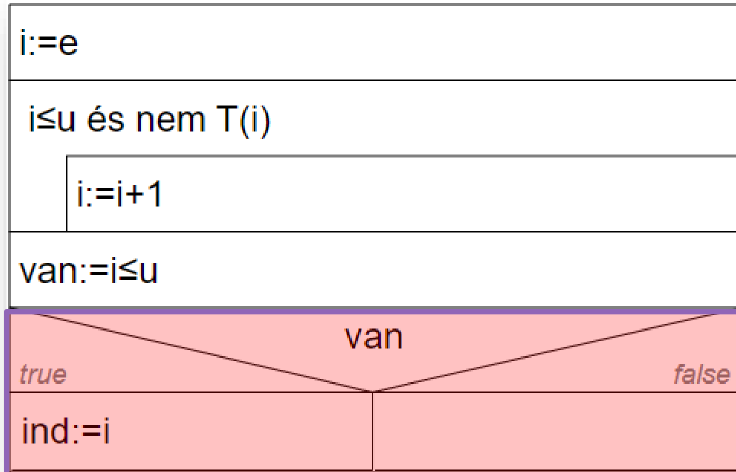






Eldöntés
mint speciális keresés

Az **eldöntés** tétel a keresés része: csupán nem vagyunk kíváncsiak a keresett érték helyére.



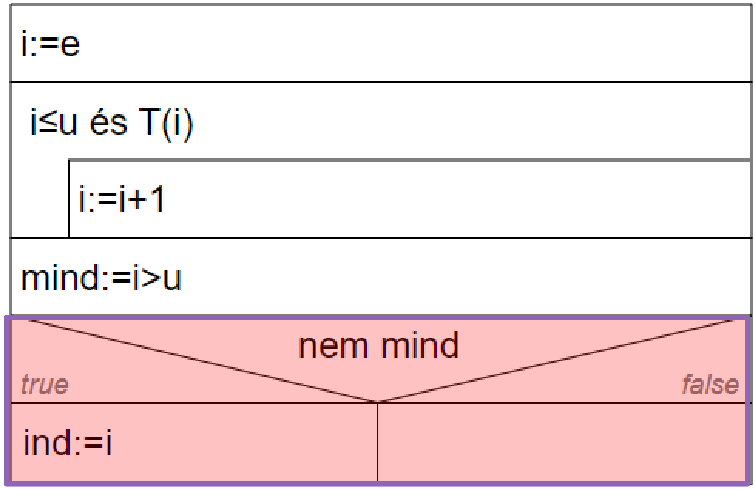
Specifikáció:

- Definíció: $T: [e..u] \rightarrow Logikai$
- Bemenet: $e, u: Egész$
- Kimenet: $van: Logikai\cancel{, ind: Egész}$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $van = \exists i(e \leq i \leq u): T(i)$ $\cancel{\text{és } van \rightarrow (e \leq ind \leq u \text{ és } T(ind))}$
- Másképp: Ef és $(van, \cancel{ind}) = Keres_{i=e}^{u} T(i)$

Optimista keresés
mint speciális keresés

Teljesül-e a T feltétel minden elemre? Ha nem, akkor adj meg egy ilyen elemet!

~ Van-e olyan elem, ami nem T? …



Specifikáció:

- Definíció: $T:[e..u] \to Logikai$
- Bemenet: $e,u:Egész$
- Kimenet: $mind:Logikai, ind:Egész$
- Előfeltétel: $e=e'$ és $u=u'$
- Utófeltétel: Ef és $mind = \forall i(e \le i \le u):T(i)$ és $\neg mind \to (e \le ind \le u$ és $\neg T(ind))$

- Másképp: Ef és $(mind, ind) = Mind_{i=e}^{u} T(i)$

Kiválasztás

Feladat: Adott egy e egész szám és egy e-től jobbra értelmezett T:Egész→Logikai feltétel. Határozzunk meg az e-től jobbra egy olyan számot, amely kielégíti a T feltételt, ha tudjuk, hogy ilyen szám biztosan van!

Specifikáció:
- Definíció: $T: Egész \rightarrow Logikai$
- Bemenet: $e: Egész$
- Kimenet: $ind: Egész$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $\exists i(i \geq e): T(i)$
- Utófeltétel: Ef és $e \leq ind$ és $T(ind)$

- Másképp: Ef és $ind = Kiválaszt_{i \geq e}\, T(i)$

Specifikáció:
- Def: $T: [e\cancel{..u}] \rightarrow Logikai$
- Be: $e\cancel{,u}: Egész$
- Ki: $\cancel{van: Logikai,} ind: Egész$
- Ef: $e = e'$ $\cancel{\text{és } u = u'}$
- Uf: Ef és $\cancel{van = \exists i(e \leq i \leq u): T(i) \text{ és } van \rightarrow (}e \leq ind \cancel{\leq u}$ és $T(ind))$

Kiválasztás

Algoritmus:

```
i:=e
nem T(i)
    i:=i+1
ind:=i
```

```
ind:=e
nem T(ind)
    ind:=ind+1
```

```
i:=e; van:=hamis
nem van
    van:=T(ind)
    ind:=i
    i:=i+1
```

Másolás

Feladat: Adott az egész számok egy [e..u] intervalluma és egy f:[e..u]→H függvény. Rendeljük az [e..u] intervallum minden értékéhez az f függvény értékét!

Specifikáció:

- Definíció: $f\colon [e..u] \to H$
- Bemenet: $e, u\colon Egész$
- Kimenet: $y\colon Tömb(1..u-e+1\colon H)$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $\forall i(e \le i \le u)\colon y_i = f(i)$
- Másképp: Ef és $y = Másol_{i=e}^{u} f(i)$

```
i=e..u
    y[i-e+1]:=f(i)
```

```
y:=()
i=e..u
    Végére(y,f(i))
```

Másolás
mint speciális összegzés

Specifikáció:
- Definíció: $f: [e..u] \rightarrow H$
- Bemenet: $e, u: Egész$
- Kimenet: $y: Tömb(1..u - e + 1: H)$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $y = \bigoplus_{i=e}^{u} [f(i)]$

Specifikáció:
- Definíció: $f: [e..u] \rightarrow H$
- Bemenet: $e, u: Egész$
- Kimenet: $s: H$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $s = \sum_{i=e}^{u} f(i)$

$\oplus$ az összefűzés jele
Tömbök összefűzése

Összegzés

s	~	y
$\sum$	~	$\bigoplus$
0	~	$(\,)$
$+$	~	$\oplus$
$s := s + f(i)$	~	$y := y \oplus [f(i)]$

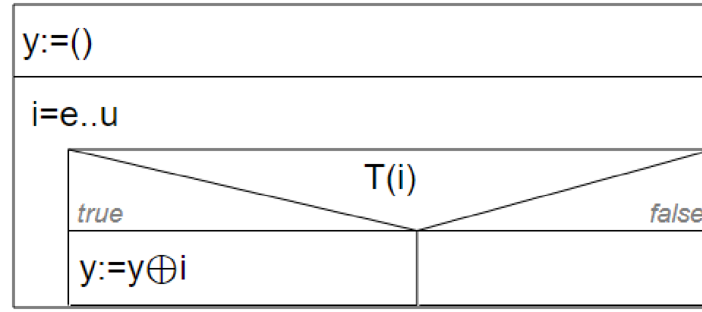
```
s:=0
i=e..u
    s:=s+f(i)
```

```
y:=()
i=e..u
    y:=y⊕[f(i)]
```


Kiválogatás

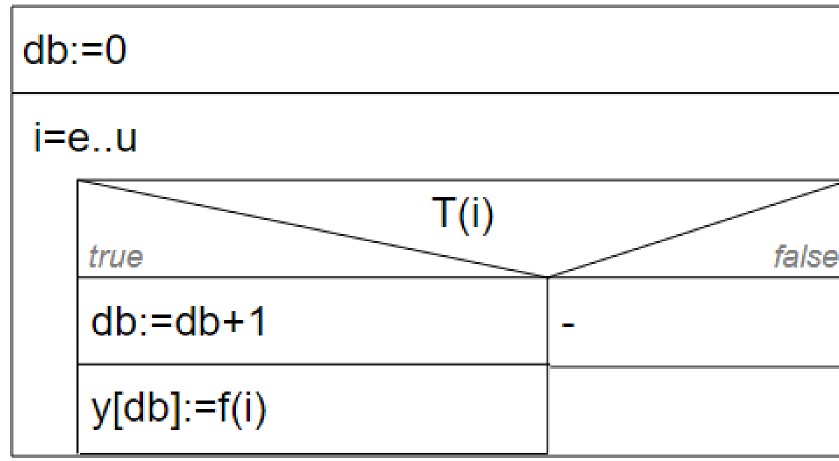
Feladat: Adott az egész számok egy [e..u] intervalluma, egy f:[e..u]→H függvény és egy T:[e..u]→Logikai feltétel. Határozzuk meg az f függvény értékét az [e..u] intervallum azon értékeire, amelyekre a T feltétel teljesül!

Kiválogatás



Specifikáció:

- Definíció: $f\colon [e..u] \to H,\ T\colon [e..u] \to Logikai$
- Bemenet: $e, u\colon Egész$
- Kimenet: $db\colon Egész,$
  $y\colon Tömb(1..db\colon H)$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $db = \sum_{\substack{i=e \\ T(i)}}^{u} 1$ és
  $ind\colon Tömb(1..db\colon Egész)$ és $ind \subseteq [e..u]$ és
  $\forall i (1 \le i \le db)\colon \big(T(ind[i])$ és $y[i] = f(ind[i])\big)$



- Másképp: Ef és $(db, y) = Kiválogat_{\substack{i=e \\ T(i)}}^{u}\ f(i)$

Kiválogatás

mint speciális összegzés

Specifikáció:

- Definíció: $f:[e..u] \to H$
- Bemenet: $e, u: Egész$
- Kimenet: $s: H$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $s = \sum_{i=e}^{u} f(i)$

s:=0	
i=e..u	
	s:=s+f(i)

Specifikáció:

- Definíció: $T:[e..u] \to Logikai, f:[e..u] \to H,$

  $$g:[e..u] \to Tömb, g(i) = \begin{cases} [f(\mathrm{i})] & ha\ T(i) \\ [\,] & különben \end{cases}$$

- Bemenet: $e, u: Egész$
- Kimenet: $db: Egész,$
  $y: Tömb(1..db: Egész)$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $y = \bigoplus_{i=e}^{u} g(i)$

Összegzés

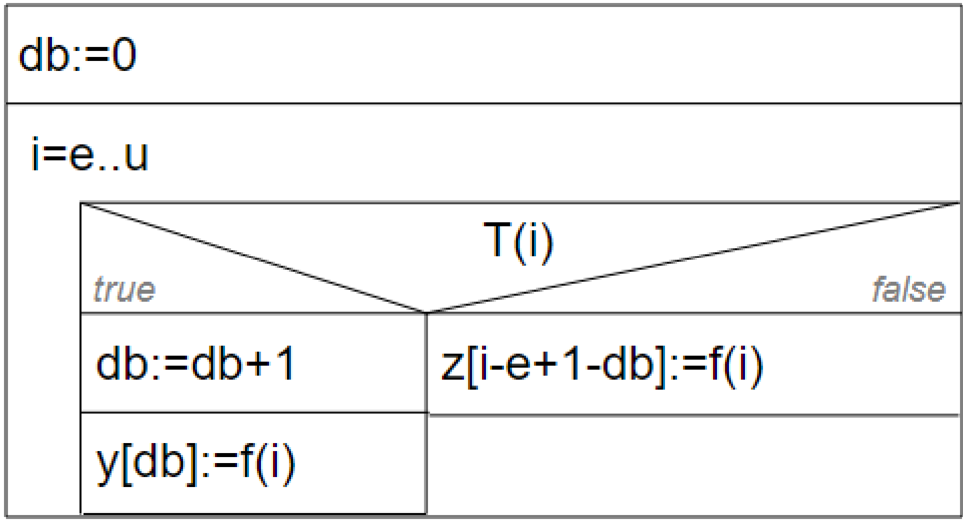
s	$\sim$	y
$\sum, +, 0$	$\sim$	$\bigoplus, \oplus, (\,)$
$f(i)$	$\sim$	$g(i)$
$s := s + f(i)$	$\sim$	$ha\ T(i)\ akkor\ y := y \oplus [f(i)]$ $különben\ y := y \oplus [\,]$

y:=()		
i=e..u		
	T(i)	
	true	false
	y:=y⊕[f(i)]	-

Szétválogatás

Feladat: Adott az egész számok egy [e..u] intervalluma, egy f:[e..u]→H függvény és egy T:[e..u]→Logikai feltétel. Határozzuk meg az f függvény értékét az [e..u] intervallum azon értékeire, amelyekre a T feltétel teljesül, és azokra is, amelyekre nem!

Szétválogatás



Specifikáció:

- Definíció: $f:[e..u] \to H,$
  $T:[e..u] \to Logikai$
- Bemenet: $e, u: Egész$
- Kimenet: $db: Egész,\ y: Tömb(1..db: H),$
  $z: Tömb(1..u-e+1-db: H)$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $db = \sum_{\substack{i=e \\ T(i)}}^{u} 1$ és
  $indy: Tömb(1..db: Egész)$ és $indy \subseteq [e..u]$ és
  $indz: Tömb(1..u-e+1-db: Egész)$ és $indz \subseteq [e..u]$ és
  $\forall i(1 \le i \le db): \big(T(indy[i])$ és $y_i = f(indy[i])\big)$ és
  $\forall i(1 \le i \le u-e+1-db): \big(\neg T(indz[i])$ és $z_i = f(indz[i])\big)$
- Másképp: Ef és $(db, y, z) = Szétválogat_{\substack{i=e \\ T(i)}}^{u} f(i)$

Szétválogatás
mint speciális összegzés

Specifikáció:
- Definíció: $f: [e..u] \to H$
- Bemenet: $e, u: Egész$
- Kimenet: $s: H$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $s = \sum_{i=e}^{u} f(i)$

Specifikáció:

- Definíció: $f: [e..u] \to H,\ T: [e..u] \to Logikai,$

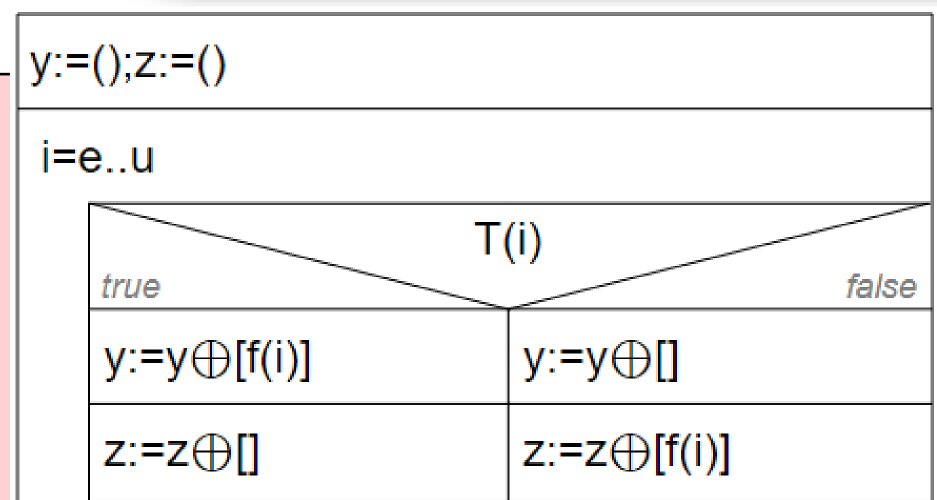
$$g: [e..u] \to (Tömb, Tömb), g(i) = \begin{cases} ([f(i)], [\,]) & ha\ T(i) \\ ([\,], [f(i)]) & különben \end{cases}$$

- Bemenet: $e, u: Egész$
- Kimenet: $db: Egész,$
  $y: Tömb(1..db: H),$
  $z: Tömb(1..u - e + 1 - db: H)$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $(y, z) = \bigoplus_{i=e}^{u} g(i)$

Összegzés

$s, \sum, +, 0, f(i) \sim y, \bigoplus, \oplus, (\,), g(i)$

$s := s + f(i) \sim$ $ha\ T(i)\ akkor$
$y := y \oplus [f(i)], z := z \oplus [\,]$
$különben$
$y := y \oplus [\,], z := z \oplus [f(i)]$



Szétválogatás
mint speciális összegzés

Specifikáció:
- Definíció: $f\colon [e..u] \to H$
- Bemenet: $e, u\colon Egész$
- Kimenet: $s\colon H$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $s = \sum_{i=e}^{u} f(i)$

```
s:=0
i=e..u
    s:=s+f(i)
```

Specifikáció:
- Definíció: $f\colon [e..u] \to H,\ T\colon [e..u] \to Logikai,$
  $g\colon [e..u] \to (Tömb, Tömb), g(i) = \begin{cases} ([f(\mathrm{i})], [\,]) & ha\ T(i) \\ ([\,], [f(i)]) & különben \end{cases}$
- Bemenet: $e, u\colon Egész$
- Kimenet: $db\colon Egész,$
  $y\colon Tömb(1..db\colon H),$
  $z\colon Tömb(1..u - e + 1 - db\colon H)$
- Előfeltétel: $e = e'$ és $u = u'$
- Utófeltétel: Ef és $(y, z) = \bigoplus_{i=e}^{u} g(i)$

Összegzés

$s, \sum, +, 0, f(i)$ ~ $y, \bigoplus, \oplus, (\,), g(i)$

$s \coloneqq s + f(i)$ ~ $ha\ T(i)\ akkor$
$y \coloneqq y \oplus [f(i)], z \coloneqq z \oplus [\,]$
$különben$
$y \coloneqq y \oplus [\,], z \coloneqq z \oplus [f(i)]$

```
y:=();z:=()
i=e..u
    T(i)
    true: y:=y⊕[f(i)]
    false: z:=z⊕[f(i)]
```

Programozási tételek – visszatekintés

1. Összegzés
2. Megszámolás
3. Maximum-kiválasztás
4. Feltételes maximumkeresés
5. Keresés
6. Kiválasztás
7. Másolás
8. Kiválogatás
9. Szétválogatás

Programozási tételek – visszatekintés

1. Összegzés
   - Feltételes összegzés
   - Megszámolás
   - Másolás
   - Kiválogatás
   - Szétválogatás
2. Maximum-kiválasztás
3. Feltételes maximumkeresés
4. Keresés
5. Kiválasztás