

Formális nyelvek és a fordítóprogramok alapjai

4. előadás

Előadó: Nagy Sára, mesteroktató
Algoritmusok és Alkalmazásaik Tanszék

Véges determinisztikus automata (VDA)

Definíció:

$A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ rendezett ötöst véges determinisztikus automatának nevezzük, ahol

- Q az állapotok nem üres véges halmaza,
- T az input szimbólumok ábécéje,
- $\delta: Q \times T \rightarrow Q$ leképezés az állapot-átmeneti függvény,
- $q_0 \in Q$ a kezdőállapot,
- $F \subseteq Q$ elfogadóállapotok halmaza.

Véges determinisztikus automata (VDA)

Véges determinisztikus automata esetén a

$\delta: Q \times T \rightarrow Q$ állapot-átmeneti függvény

minden (q,a) párra értelmezett, ahol

$(q,a) \in Q \times T$ és egyetlen olyan $p \in Q$ állapot van, amelyre $\delta(q,a) = p$.

Alternatív jelölés az állapot-átmenetre

$\delta(q, a) = p$ állapot átmenetet jelölhetjük egy

$qa \rightarrow p$ szabállyal.

Ha minden egyes (q, a) párra egyetlen $qa \rightarrow p$ szabály van, akkor a véges automata determinisztikus, egyébként nemdeterminisztikus.

Konfiguráció: A $v \in QT^*$ egy konfigurációja egy VDA-nak, ha az aktuális állapotot és az input hátralévő részét tartalmazza, azaz $v=qu$.

Közvetlen redukció

Legyen $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ egy véges determinisztikus automata és legyenek $u, v \in QT^*$.

Azt mondjuk, hogy az A automata az u konfigurációt a v konfigurációra redukálja közvetlenül (jelölés: $u \Rightarrow_A v$), ha van olyan

$qa \rightarrow p$ szabály (azaz $\delta(q, a) = p$) és van olyan $w \in T^*$ szó, amelyre

$u = qaw$ és $v = pw$ teljesül.

Redukció

Definíció:

Az $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ véges automata az $u \in QT^*$ konfigurációt a $v \in QT^*$ konfigurációra redukálja (jelölés: $u \Rightarrow_A^* v$), ha vagy $u = v$, vagy van olyan $z \in QT^*$, amelyre $u \Rightarrow_A^* z$ és $z \Rightarrow_A v$ teljesül.

Automata által elfogadott nyelv

Definíció:

Az $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ véges automata által elfogadott nyelv alatt az

$$L(A) := \{u \in T^* \mid q_0 u \xRightarrow[A]{*} p \text{ és } p \in F\}$$

szavak halmazát értjük.

Megjegyzés: Ez azt jelenti, hogy az automata a kezdőállapotból indulva végig olvasva az inputot elfogadóállapotba jut.

Véges nemdeterminisztikus automata (VNDA)

Definíció:

$A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ rendezett ötöst véges **nemdeterminisztikus** automatának nevezzük, ahol

- Q az állapotok nem üres véges halmaza,
- T az input szimbólumok ábécéje,
- $\delta: Q \times T \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ (a Q részhalmazába képez)
- $Q_0 \subseteq Q$ a kezdőállapotok halmaza,
- $F \subseteq Q$ elfogadó állapotok halmaza.

Megjegyzés: VNDA a VDA általánosítása

Példa

Legyen $A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ a következő, ahol

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $T = \{a, b\}$, $Q_0 = \{q_0\}$, $F = \{q_2\}$ és

$\delta(q_0, a) = \{q_1\}$, $\delta(q_0, b) = \emptyset$

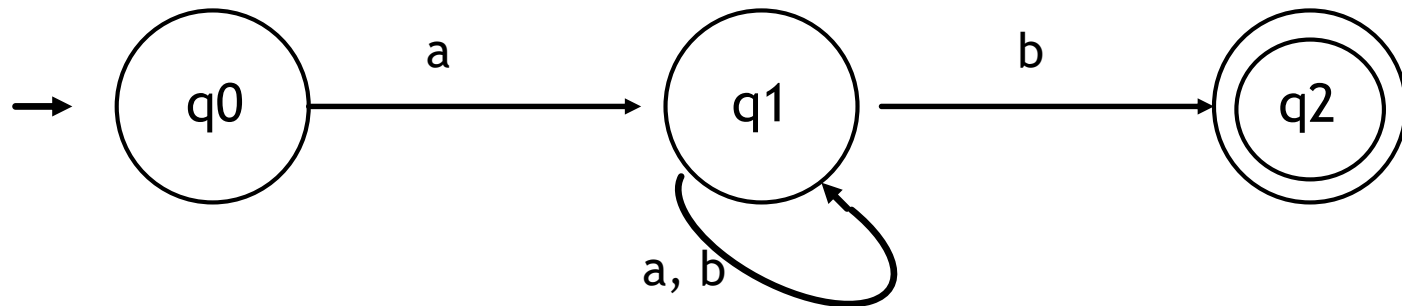
$\delta(q_1, a) = \{q_1\}$, $\delta(q_1, b) = \{q_1, q_2\}$

$\delta(q_2, a) = \emptyset$, $\delta(q_2, b) = \emptyset$

$L(A) = \{u \in T^* \mid \text{az } u \text{ szó 'a' betűvel kezdődik és 'b' betűre végződik}\}$

Példa - nemdeterminisztikus automata megadása táblázattal és gráffal

δ	a	b
\rightarrow q0	q1	
q1	q1	q1, q2
\leftarrow q2		



Közvetlen redukció

Legyen $A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ egy véges nemdeterminisztikus automata és legyenek $u, v \in QT^*$.

(Konfiguráció: aktuális állapot, input hátralévő része.)

Azt mondjuk, hogy az A automata az u konfigurációt a v konfigurációra redukálja közvetlenül (jelölés: $u \Rightarrow_A v$), ha van olyan

$qa \rightarrow p$ szabály (azaz $\delta(q, a) = p$) és van olyan $w \in T^*$ szó, amelyre

$u = qaw$ és $v = pw$ teljesül.

Redukció

Definíció:

Az $A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ véges automata az $u \in QT^*$ konfigurációt a $v \in QT^*$ konfigurációra redukálja (jelölés: $u \Rightarrow_A^* v$), ha vagy $u = v$, vagy van olyan $z \in QT^*$, amelyre $u \Rightarrow_A^* z$ és $z \Rightarrow_A v$ teljesül.

Automata által elfogadott nyelv

Definíció:

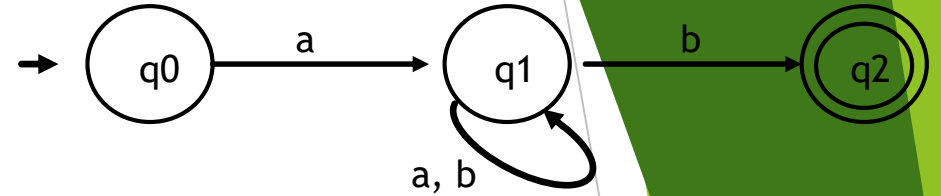
Az $A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ véges automata által elfogadott nyelv alatt az

$$L(A) := \{u \in T^* \mid \exists q_0 u \xRightarrow[A]{*} p, \quad q_0 \in Q_0 \text{ és } p \in F\}$$

szavak halmazát értjük.

Megjegyzés: Ez azt jelenti, hogy van olyan működése az automatának, hogy egy kezdőállapotból indulva és végig olvasva az inputot elfogadóállapotba jut.

Példa



$A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_2\})$

$\delta: q_0a \rightarrow q_1, q_1a \rightarrow q_1, q_1b \rightarrow q_1, q_1b \rightarrow q_2$

Redukálás:

Kérdés: $aabb \in L(A)$?

Első próbálkozás:

$q_0aabb \Rightarrow q_1abb \Rightarrow q_1bb \Rightarrow q_1b \Rightarrow q_1$ $q_1 \notin F$

Második próbálkozás:

$q_0aabb \Rightarrow q_1abb \Rightarrow q_1bb \Rightarrow q_1b \Rightarrow q_2$ $q_2 \in F$,
azaz az **aabb** jó szó.

Harmadik próbálkozás:

$q_0aabb \Rightarrow q_1abb \Rightarrow q_1bb \Rightarrow q_2b$ Nem tudtuk végig olvasni a szót.

Emlékeztető:

3-típusú grammatikák normálformája

Tétel:

Minden 3-as típusú nyelv generálható egy olyan grammatikával, amelynek szabályai

$A \rightarrow aB$, ahol $A, B \in N$ és $a \in T$ vagy

$A \rightarrow \varepsilon$ alakúak, ahol $A \in N$.

3-as típusú nyelvek kapcsolata a véges automátákkal

Tétel:

Minden 3-as típusú L nyelvhez megadható egy véges nemdeterminisztikus automata, és fordítva, minden nemdeterminisztikus automata 3-as típusú nyelvet ismer fel.

$$(\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_{\text{VNDA}} , \mathcal{L}_{\text{VNDA}} \subseteq \mathcal{L}_3)$$

Megjegyzés: Már láttuk, hogy $\mathcal{L}_{\text{reg}} \subseteq \mathcal{L}_3$, így a reguláris kifejezésekhez (lexikális egységekhez) építhető automata.

3-as típusú nyelvek kapcsolata a véges automátákkal

Bizonyítás vázlat:

Legyen L egy 3-as típusú nyelv. Ez azt jelenti, hogy megadható egy $G=(N,T,P,S)$ 3-as normál formájú grammatikával is.

G alapján megkonstruálható egy

$A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ egy véges nemdeterminisztikus automata úgy, hogy $L=L(G)=L(A)$.

3-as típusú nyelvek kapcsolata a véges automatákkal

Bizonyítás vázlat:

Feleltessünk meg minden nemterminálisnak egy állapotot. Jelölje q_A az $A \in N$ -hez rendelt állapotot.

$$A = (\{q_A \mid A \in N\}, T, \delta, q_s, F)$$

3-as típusú nyelvek kapcsolata a véges automatákkal

Bizonyítás vázlat:

Legyen $\delta(q_A, a) = q_B$, akkor és csak akkor, ha $A \rightarrow aB \in P$.

$$q_A a \rightarrow q_B$$



Legyen $q_A \in F$, akkor és csak akkor, ha $A \rightarrow \varepsilon \in P$.

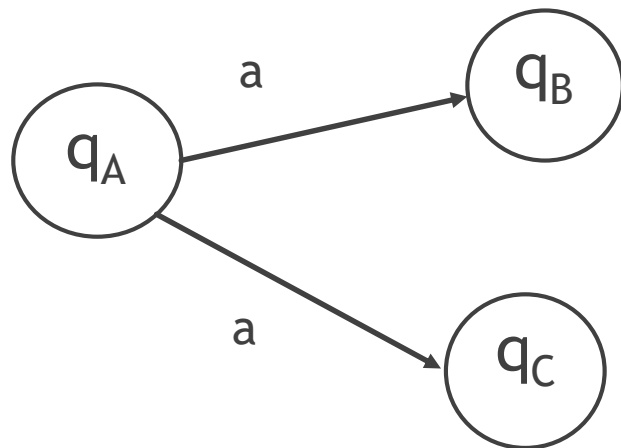


3-as típusú nyelvek kapcsolata a véges automatákkal

Bizonyítás vázlat:

Az így létrehozott automata lehet nemdeterminisztikus.

Ha például $A \rightarrow aB \in P$ és $A \rightarrow aC \in P$ szabály is van, akkor ennek az alábbi automata felel meg.



3-as típusú nyelvek kapcsolata a véges automatákkal

Bizonyítás vázlat:

A konstrukcióból adódik, ha

$S \Rightarrow_G^* u$, akkor $q_s \Rightarrow_A^* u$ és fordítva.

A tétel megfordításának bizonyítása hasonló, csak ott A automatóhoz konstruáljuk meg a G 3-as típusú grammatikát.

Példa

$L := \{u \in \{a,b\}^* \mid \text{az } u \text{ szó 'a' betűvel kezdődik és 'b' betűre végződik}\}$

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$

$A = (\{q_S, q_A, q_B\}, \{a, b\}, \delta, \{q_S\}, \{q_B\})$

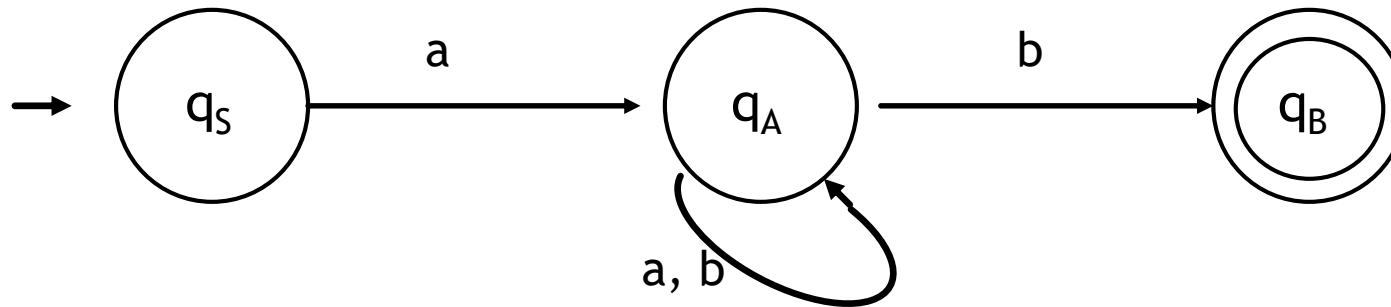
P: $S \rightarrow aA$

$A \rightarrow aA$

$A \rightarrow bA$

$A \rightarrow bB$

$B \rightarrow \varepsilon$



Nemdeterminisztikus automaták determinisztikussá tétele

Tétel:

Minden $A=(Q,T,\delta,Q_0,F)$ nemdeterminisztikus automatóhoz megadható egy $A'=(Q',T,\delta',q_0',F')$ véges determinisztikus automata, hogy $L(A')=L(A)$.

$$(\mathcal{L}_{\text{VNDA}} \subseteq \mathcal{L}_{\text{VDA}})$$

3-as típusú nyelvek és automaták kapcsolata

$$\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_{\text{VNDA}} \text{ és } \mathcal{L}_{\text{VNDA}} \subseteq \mathcal{L}_3$$

(3-as normál formájú grammatika átírható automatává és fordítva.)

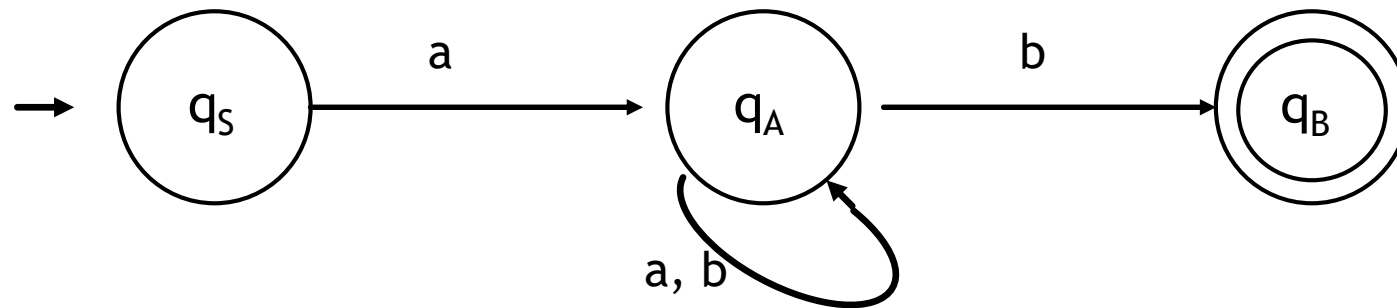
$$\mathcal{L}_{\text{VDA}} \subseteq \mathcal{L}_{\text{VNDA}} \text{ (Definíció alapján triviális.)}$$

Ha $\mathcal{L}_{\text{VNDA}} \subseteq \mathcal{L}_{\text{VDA}}$ is teljesülne, akkor

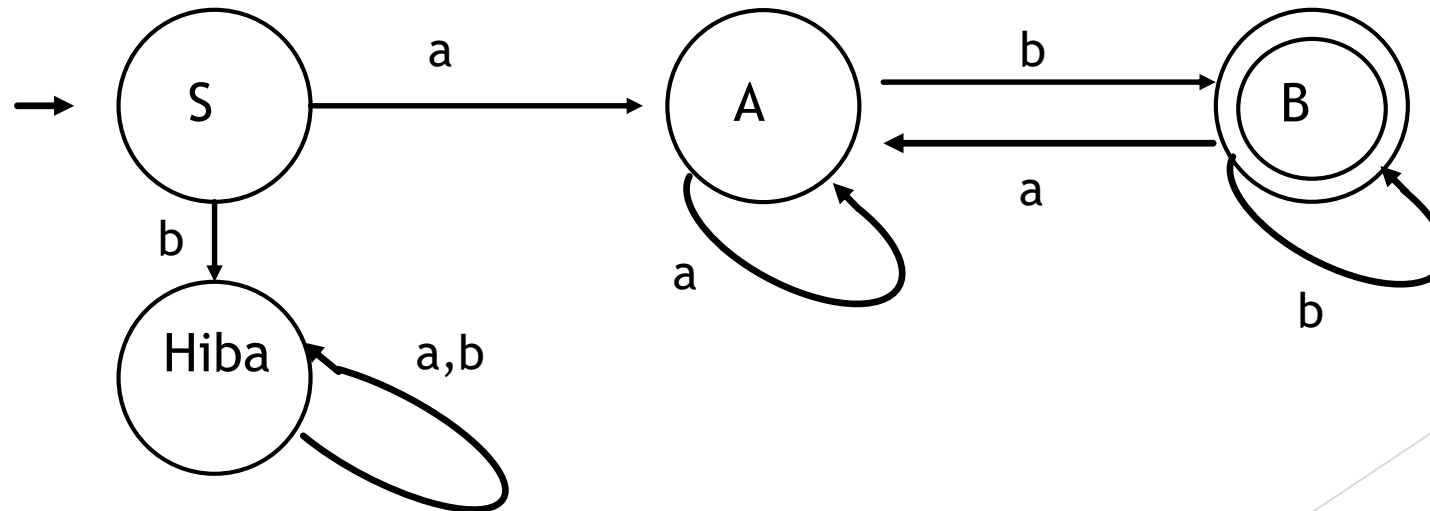
$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{\text{VNDA}} = \mathcal{L}_{\text{VDA}}.$$

Példa

$L := \{u \in \{a,b\}^* \mid \text{az } u \text{ szó 'a' betűvel kezdődik és 'b' betűre végződik}\}$



Mj.: Ez VNDA.



Mj.: Ez VDA.

Determinisztikus automata megkonstruálása:

Legyen $Q' := \mathcal{P}(Q)$, azaz Q összes részhalmazainak halmaza, azaz hatványhalmaza.

Legyen a $\delta': Q' \times T \rightarrow Q'$ a következőképpen definiálva:

$$\delta'(q', a) := \bigcup_{q \in q'} \delta(q, a), \text{ ahol } q' \in Q' \text{ és } a \in T.$$

Legyen $q_0' := Q_0$ és $F' := \{q' \in Q' \mid q' \cap F \neq \emptyset\}$.

Konstrukció helyességének bizonyítása

($L(A) \subseteq L(A')$)

Lemma1:

$\forall q, p \in Q$ és $q' \in Q'$ és $u, v \in T^*$ esetén, ha

$qu \xRightarrow[A]{*} pv$ és $q \in q'$, akkor

$\exists p' \in Q'$ úgy, hogy

$q'u \xRightarrow[A']{*} p'v$ és $p \in p'$.

Ha $u \in L(A)$, akkor $\exists q_0 u \xRightarrow[A]{*} p$, ahol $q_0 \in Q_0$ és $p \in F$.

Lemma1 alapján $\exists p' \in Q'$ úgy, hogy $q_0'u \xRightarrow[A']{*} p'$ és $p \in p'$.

De $p \in F$, így $p' \cap F \neq \emptyset$, azaz $p' \in F'$ azaz $u \in L(A')$.

Konstrukció helyességének bizonyítása

($L(A') \subseteq L(A)$)

Lemma2:

$\forall q', p' \in Q'$ és $p \in Q$ és $u, v \in T^*$ esetén, ha

$q'u \Rightarrow_{A'}^* p'v$ és $p \in p'$, akkor

$\exists q \in Q$ úgy, hogy

$qu \Rightarrow_A^* pv$ és $q \in q'$.

Ha $u \in L(A')$, akkor $\exists q_0' u \Rightarrow_{A'}^* p'$ és $p' \in F'$.

F' definíciója alapján van olyan $p \in p'$, hogy $p \in F$.

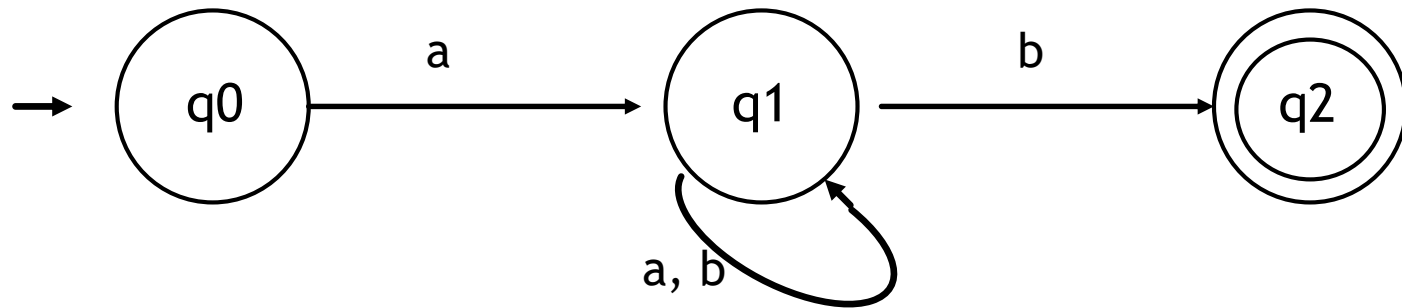
Lemma2 alapján $\exists q_0 \in Q$ úgy, hogy $q_0 u \Rightarrow_A^* p$, ahol $q_0 \in q_0' (=Q_0)$.

De $p \in F$, azaz $u \in L(A)$.

Példa:

$L := \{u \in \{a,b\}^* \mid \text{az } u \text{ szó 'a' betűvel kezdődik és 'b' betűre végződik}\}$

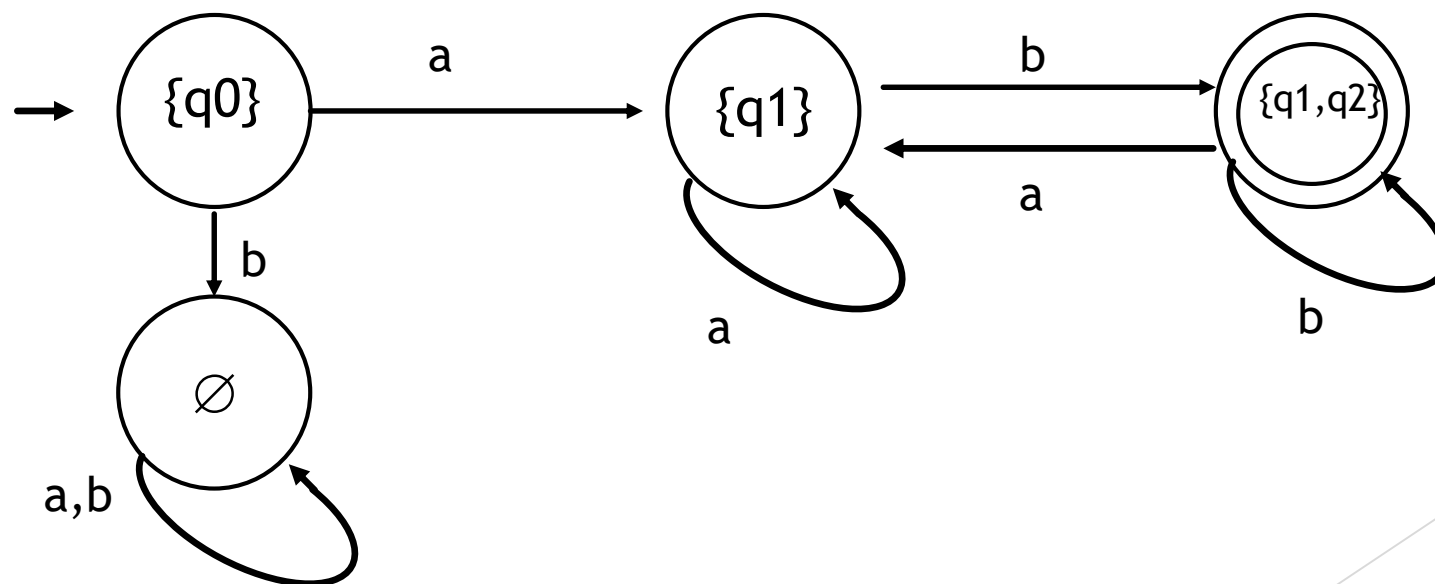
δ	a	b
$\rightarrow q_0$	q1	
q1	q1	q1, q2
$\leftarrow q_2$		



Példa: $L := \{u \in \{a,b\}^* \mid \text{az } u \text{ szó 'a' betűvel kezdődik és 'b' betűre végződik}\}$

δ	a	b
$\rightarrow q_0$	q_1	
q_1	q_1	q_1, q_2
$\leftarrow q_2$		

δ'	a	b
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_1\}$	\emptyset
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\leftarrow \{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
\emptyset	\emptyset	\emptyset



Kleene tétele

Tétel: $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{\text{reg}}$

Minden reguláris nyelvhez adható 3-as típusú grammatika, és fordítva minden 3-as típusú nyelv felépíthető az elemi reguláris nyelvekből a reguláris műveletek véges sokszori alkalmazásával.

Kleene tétele: $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{\text{reg}}$

Bizonyítás vázlat:

1. $\mathcal{L}_{\text{reg}} \subseteq \mathcal{L}_3$ korábbi előadáson láttuk
2. $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{\text{VDA}}$ előbb láttuk
3. $\mathcal{L}_{\text{VDA}} \subseteq \mathcal{L}_{\text{reg}}$

Kleene tétele: $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{\text{reg}}$

Bizonyítás vázlat:

3. $\mathcal{L}_{\text{VDA}} \subseteq \mathcal{L}_{\text{reg}}$ kiszámítható egy reguláris kifejezés

Legyen A egy n állapotú VDA, azaz

$Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ és

q_1 a kezdőállapot.

Kleene tétele bizonyítás folytatása:

$$\mathcal{L}_{\text{VDA}} \subseteq \mathcal{L}_{\text{reg}}$$

Azt mondjuk, hogy $q_i u \xRightarrow[A]{*} q_j$ redukció érinti a q_m állapotot, ha q_m előfordul a redukciós levezetés valamely közbülső lépésében.

Azt mondjuk, hogy a redukció k -megszorított, ha a redukció csak 1 és k közötti indexű állapotot érint közbülső lépésként.

Kleene tétele bizonyítás folytatása:

$$\mathcal{L}_{\text{VDA}} \subseteq \mathcal{L}_{\text{reg}}$$

$$E_{i,j}^k := \{ u \in T^* \mid \exists q_i u \xRightarrow[A]{*} q_j \text{ k-megszorított redukció} \}$$

, ahol $0 \leq k \leq n$ és $1 \leq i, j \leq n$.

$$E_{i,j}^0 := \{ a \in T \mid \exists q_i a \rightarrow q_j \text{ állapotátmenet} \}, \text{ ahol } i \neq j.$$

$$E_{i,i}^0 := \{ \varepsilon \} \cup \{ a \in T \mid \exists q_i a \rightarrow q_i \text{ állapotátmenet} \}$$

$$E_{i,j}^k = E_{i,j}^{k-1} \cup E_{i,k}^{k-1} (E_{k,k}^{k-1})^* E_{k,j}^{k-1}$$

Kleene tétele bizonyítás folytatása:

$$\mathcal{L}_{\text{VDA}} \subseteq \mathcal{L}_{\text{reg}}$$

Legyen $I := \{\text{elfogadó állapotok indexei}\}$.

$$L(A) = \bigcup_{i \in I} E_{1,i}^n$$

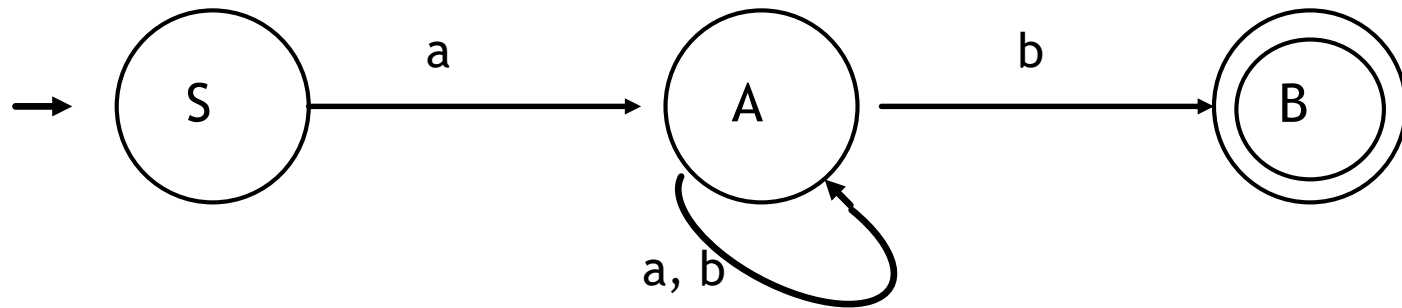
Megjegyzés: A kifejezésekben csak reguláris műveletek (unió, konkatenáció, lezárás) szerepeltek.

Példa: $L = \{a\}\{a,b\}^*\{b\}$ / reguláris kifejezéssel: $a(a|b)^*b$ /

$S \rightarrow aA$

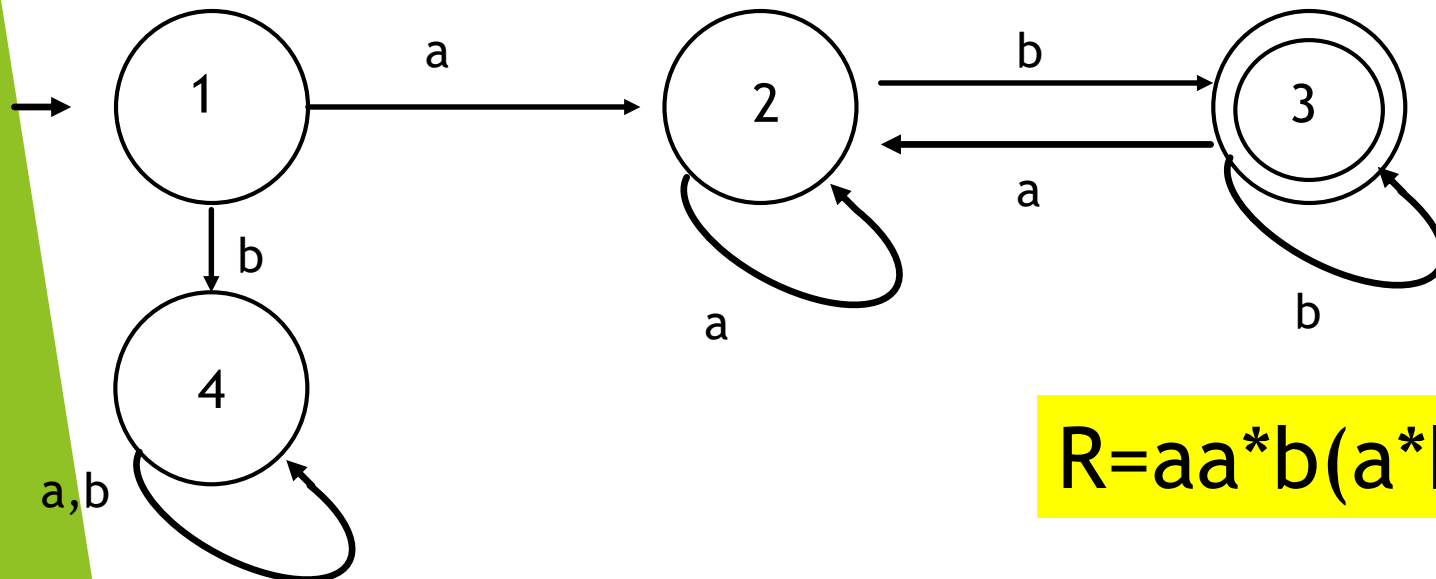
$A \rightarrow aA | bA | bB$

$B \rightarrow \epsilon$



Példa: $L = \{a\}\{a,b\}^*\{b\}$

δ'	a	b
\rightarrow 1	2	4
2	2	3
\leftarrow 3	2	3
4	4	4



$$L(A) = E_{1,3}^4$$

$$E_{1,3}^4 = E_{1,3}^3 \cup E_{1,4}^3 (E_{4,4}^3)^* E_{4,3}^3; \quad E_{4,3}^3 = \emptyset$$

$$E_{1,3}^3 = E_{1,3}^2 \cup E_{1,3}^2 (E_{3,3}^2)^* E_{3,3}^2;$$

$$E_{1,3}^2 = E_{1,3}^1 \cup E_{1,2}^1 (E_{2,2}^1)^* E_{2,3}^1;$$

$$E_{1,3}^1 = E_{1,3}^0 \cup E_{1,1}^0 (E_{1,1}^0)^* E_{1,3}^0; \quad E_{1,3}^0 = \emptyset$$

$$E_{1,3}^2 = \emptyset \cup \{a\}\{a\}^*\{b\};$$

$$E_{3,3}^2 = E_{3,3}^1 \cup E_{3,2}^1 (E_{2,2}^1)^* E_{2,3}^1;$$

$$E_{3,3}^2 = \{\varepsilon, b\} \cup \{a\}\{a\}^*\{b\};$$

$$L(A) = E_{1,3}^4 = E_{1,3}^3 = \{a\}\{a\}^*\{b\}\{\{a\}^*\{b\}\}^*$$

$$R = aa^*b(a*b)^*$$

Minimális véges determinisztikus automata

Definíció:

Az A véges determinisztikus automata minimális állapotszámú, ha nincs olyan A' véges determinisztikus automata, amely ugyanazt a nyelvet ismeri fel, mint A , de A' állapotainak száma kisebb, mint A állapotainak száma.

Tétel:

Az L reguláris nyelvet felismerő minimális véges determinisztikus automata az izomorfizmus erejéig egyértelmű.

Minimális véges determinisztikus automata

Tétel:

Az L reguláris nyelvet felismerő minimális véges determinisztikus automata (VDA) az izomorfizmus erejéig egyértelmű.

Bizonyítás lépései:

1. Automata összefüggővé tétele
2. Ekvivalens állapotok meghatározása

Összefüggő véges determinisztikus automata

Definíció:

Az $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ véges determinisztikus automata q állapotát **elérhetőnek** mondjuk, ha $\exists u \in T^*$ szó, hogy $q_0 u \xRightarrow[A]{*} q$.

(Gráfos ábrázolásban ez azt jelenti, hogy van irányított út q_0 -ból q -ba.)

Definíció:

Az $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ véges determinisztikus automatát **összefüggőnek** mondjuk, ha minden állapota elérhető a kezdőállapotból.

Összefüggő véges determinisztikus automata

Elérhető állapotok meghatározása:

Legyen $H_0 = \{q_0\}$,

$H_{i+1} = H_i \cup \{r \in Q \mid \delta(q, a) = r, q \in H_i, a \in T\}$ és $i \geq 0$.

$\exists k \geq 0 : H_k = H_m$, ahol $m \geq k$. Legyen $H = H_k$.

H halmaz tartalmazza az elérhető állapotokat.

A' legyen az A azon részautomatája, ahol $Q' = H$.

(A $Q \setminus H$ nemelérhető állapotok elhagyhatók.)

Ekvivalens állapotok meghatározása

Definíció:

$q \sim p$ (q és p ekvivalens állapotok),
ha $\forall u \in T^*$ szóra igaz, hogy $qu \xRightarrow[A]{*} r$ és $pu \xRightarrow[A]{*} r'$ esetén
 $r \in F$ akkor és csak akkor, ha $r' \in F$.

(Minden szóra igaz, hogy az automatát q -ból indítva vagy p -ből indítva, vagy mind kettő esetben elfogadja a szót, vagy mind kettő esetben elutasítja.)

Állítás: Ha q és p ekvivalens, akkor $qa \rightarrow s$ és $pa \rightarrow t$ esetén s és t is ekvivalens állapotok $\forall a \in T$ betűre.

Ekvivalens állapotok meghatározása

Definíció:

$q \sim^i p$ (q és r i -ekvivalens állapotok),
ha $\forall u \in T^*$ szóra, ahol $\ell(u) \leq i$ igaz, hogy
 $qu \xRightarrow[A]{*} r$ és $pu \xRightarrow[A]{*} r'$ esetén $r \in F$ akkor és csak akkor, ha $r' \in F$.

(Legfeljebb i hosszú szavak esetén a két állapot nem megkülönböztethető.)

Lemma: $q \sim^{i+1} p$ akkor és csak akkor, ha

$\forall a \in T$ -re $qa \rightarrow r$ és $pa \rightarrow t$ esetén $r \sim^i t$.

Ekvivalens állapotok meghatározása

Tegyük fel, hogy az A automata összefüggő.

$q \sim^0 p$ akkor és csak akkor, ha $q, p \in F$ vagy $q, p \in Q \setminus F$,

Azaz első lépésben két partícióra osztjuk az állapotokat, az elfogadó és a nem elfogadó állapotokra.

$Q = B_1 \cup B_2$, ahol $B_1 := F$ és $B_2 := Q \setminus F$.

Csak az ε szó hossza nulla. A B_1 -ben szereplő állapotok elfogadják az üres szót, B_2 -ben szereplők pedig elutasítják.

Ekvivalens állapotok meghatározása

Finomítsuk a szavak hossza szerint a partíciókat:

ha $q \sim^i p$ és az állapotok $k \geq 2$ partícióra vannak osztva, $Q = B_1 \cup \dots \cup B_k$, akkor p és q pontosan akkor maradnak együtt, ha $\forall a \in T$ -re $qa \rightarrow r$ és $pa \rightarrow t$ esetén r és t ugyanabba a B_i partícióba tartoznak, egyébként B_i -t szétbontjuk.

Ha p és $q \forall a \in T$ -re az előző lépés partíciói szerint mindig ugyanoda képeznek, akkor $q \sim^{i+1} p$.

Ezt az eljárást addig ismételjük, amíg változás van.

Minimális automata megadása

$$A' = (Q', T, \delta', q_0', F')$$

$Q' = \{\text{az előző eljárással nyert } B_i \text{ partíciók}\}$

$q_0' = \text{a } q_0\text{-t tartalmazó partíció.}$

$F' = \text{az } F\text{-ből keletkezett partíciók.}$

$\delta'(B_i, a) = B_j$, ha $\delta(q, a) = p$ és $q \in B_i$ és $p \in B_j$.

Példa VDA minimalizálására

$A = \langle \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \{a,b\}, \delta, 1, \{2,4,9\} \rangle$

δ	a	b
$\rightarrow 1$	3	6
$\leftarrow 2$	2	5
3	3	5
$\leftarrow 4$	9	4
5	2	5
6	8	7
7	8	1
8	9	3
$\leftarrow 9$	9	5

Példa VDA minimalizálására

Elérhető állapotok:

$$H_0 = \{1\}$$

$$H_1 = \{1\} \cup \{3, 6\} = \{1, 3, 6\}$$

$$H_2 = \{1, 3, 6\} \cup \{3, 6\} \cup \{3, 5\} \cup \{8, 7\} = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$$

$$H_3 = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\} \cup \{2, 9\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$H_4 = H_3$$

Nem elérhető állapot: 4. (Elhagyható.)

δ	a	b
$\rightarrow 1$	3	6
$\leftarrow 2$	2	5
3	3	5
$\leftarrow 4$	9	4
5	2	5
6	8	7
7	8	1
8	9	3
$\leftarrow 9$	9	5

Példa VDA minimalizálására

Partícionálás:

$A = \{1,3,5,6,7,8\}$, $B=\{2,9\}$

	a	b
1	A	A
3	A	A
5	B	A
6	A	A
7	A	A
8	B	A

	a	b
2	B	A
9	B	A

$C=\{1,3,6,7\}$, $D=\{5,8\}$

δ	a	b
$\rightarrow 1$	3	6
$\leftarrow 2$	2	5
3	3	5
$\leftarrow 4$	9	4
5	2	5
6	8	7
7	8	1
8	9	3
$\leftarrow 9$	9	5

Példa VDA minimalizálására

Partícionálás:

$B=\{2,9\}$, $C=\{1,3,6,7\}$, $D=\{5,8\}$

	a	b
1	C	C
3	C	D
6	D	C
7	D	C

	a	b
2	B	D
9	B	D

	a	b
5	B	D
8	B	C

$E=\{1\}$, $F=\{3\}$, $G=\{6,7\}$ $H=\{5\}$, $I=\{8\}$

δ	a	b
$\rightarrow 1$	3	6
$\leftarrow 2$	2	5
3	3	5
$\leftarrow 4$	9	4
5	2	5
6	8	7
7	8	1
8	9	3
$\leftarrow 9$	9	5

Példa VDA minimalizálására

Partícionálás:

$B=\{2,9\}$, $E=\{1\}$, $F=\{3\}$, $G=\{6,7\}$, $H=\{5\}$, $I=\{8\}$

	a	b
6	I	G
7	I	E

	a	b
2	B	H
9	B	H

$J=\{6\}$, $K=\{7\}$

δ	a	b
$\rightarrow 1$	3	6
$\leftarrow 2$	2	5
3	3	5
$\leftarrow 4$	9	4
5	2	5
6	8	7
7	8	1
8	9	3
$\leftarrow 9$	9	5

Példa VDA minimalizálására

Partícionálás:

$B=\{2,9\}$, $E=\{1\}$, $F=\{3\}$, $H=\{5\}$, $I=\{8\}$

$J=\{6\}$, $K=\{7\}$

	a	b
2	B	H
9	B	H

Nincs változás.

A 2,9 állapotok összevonhatók.

δ	a	b
$\rightarrow 1$	3	6
$\leftarrow 2$	2	5
3	3	5
$\leftarrow 4$	9	4
5	2	5
6	8	7
7	8	1
8	9	3
$\leftarrow 9$	9	5

Példa VDA minimalizálására

$A' = \langle \{1, 29, 3, 5, 6, 7, 8\}, \{a, b\}, \delta', 1, \{29\} \rangle$
a minimális automata.

δ'	a	b
$\rightarrow 1$	3	6
$\leftarrow 29$	29	5
3	3	5
5	29	5
6	8	7
7	8	1
8	29	3

Köszönöm a figyelmet!