Diszkrét matematika I.

7. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagygabor@inf.elte.hu
Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2021. tavasz

Kombináció

Tétel

Egy n elemű $\mathcal{A}$ halmaznak a k elemű részhalmazainak száma

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Bizonyítás

Először válasszunk $\mathcal{A}$ elemei közül k darabot a sorrendet figyelembe véve. Ezt $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$-féleképpen tehetjük meg. Ha a sorrendtől eltekintünk, akkor az előző leszámlálásnál minden k elemű részhalmaz pontosan $k!$-szor szerepel. Ezzel leosztva kapjuk a k elemű részhalmazok számát. □

Példa

Egy lottószelvény (90 számból 5) lehetséges kitöltéseinek száma:

$$\binom{90}{5} = \frac{90!}{5! \cdot 85!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 43\,949\,268.$$

Ismétléses kombináció

Tétel

Egy n elemű $\mathcal{A}$ halmaz elemeiből ha k-szor választunk úgy, hogy egy elemet többször is választhatunk és a sorrend nem számít, akkor a lehetséges választások száma

$$^{i}C_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás

Legyen $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Minden egyes lehetőségnek megfeleltetünk egy $0-1$ sorozatot:

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_1\text{-ek száma}}, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_2\text{-k száma}}, 0, \ldots, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_n\text{-ek száma}}.$$

Ekkor a sorozatban k darab 1-es van (választott elemek száma), $n-1$ darab 0 van (szeparátorok száma). Összesen $n-1+k$ pozíció, ezekből k-t választunk. Ilyen sorozat $\binom{n+k-1}{k}$ darab van. □

Ismétléses kombináció

Példa

5-féle sütemény van a cukrászdában, 8 darabot szeretnénk vásárolni.
Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
Itt $n = 5$, $k = 8$:

$$\binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = 495.$$

Hányféleképpen dobhatunk 5 dobókockával?

Az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazból 5-ször választunk (sorrend nem számít, egy elemet többször is választhatunk).
Ismétléses kombináció $n = 6$, $k = 5$ választással:

$$\binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252.$$

Összefoglaló (kombinatorikai alapesetek)

Ismétlés nélküli permutáció $P_n = n!$, n elem lehetséges sorrendje (sorrend számít, egy elem (pontosan) egyszer).

Ismétléses permutáció $P_n^{k_1,k_2,\dots,k_m} = \dfrac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$, $n = k_1+k_2+\ldots+k_m$ elem lehetséges sorrendje, ahol az i típusú elemet k_i-szer választjuk (sorrend számít, egy elem többször).

Ismétlés nélküli variáció $V_n^k = n!/(n-k)!$, n elemből k-t választunk (sorrend számít, egy elem legfeljebb egyszer).

Ismétléses variáció ${}^iV_n^k = n^k$, n elemből k-szor választunk (sorrend számít, egy elem akár többször is).

Ismétlés nélküli kombináció $C_n^k = \binom{n}{k}$, n elemből k-t választunk (sorrend nem számít, egy elem legfeljebb egyszer).

Ismétléses kombináció ${}^iC_n^k = \binom{n+k-1}{k}$, n elemből k-szor választunk (sorrend nem számít, egy elem akár többször is).

Binomiális tétel

Tétel

Adott $x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Bizonyítás

$$(x+y)^n = (x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)$$

Ha elvégezzük a beszorzást, akkor $x^k y^{n-k}$ alakú tagokat kapunk, és ezen tagot annyiszor kapjuk meg, ahányszor az n tényezőből k darab x-et választunk. □

Definíció

Az $\binom{n}{k}$ alakú számokat ($n, k \in \mathbb{N}$) binomiális együtthatónak nevezzük.

Binomiális együtthatók

Tétel

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Bizonyítás

$\binom{n}{k}$ azon n hosszú $0-1$ sorozatok száma, melyben k darab 1-es van.

1. Az n hosszú $0-1$ sorozatok közül azok száma, melyek k darab 1-est tartalmaznak megegyezik azok számával, melyek $n-k$ darab 1-est tartalmaznak.
2. Azon n hosszú, k darab 1-est tartalmazó $0-1$ sorozatok száma, melynek első tagja 1: $\binom{n-1}{k-1}$.
   Azon n hosszú, k darab 1-est tartalmazó $0-1$ sorozatok száma, melynek első tagja 0: $\binom{n-1}{k}$.

$\square$

Binomiális együtthatók - Pascal-háromszög

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}: \ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

n	$\binom{n}{k}$	$(x+y)^n$
0	1	1
1	1 1	$x+y$
2	1 2 1	$x^2+2xy+y^2$
3	1 3 3 1	$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
4	1 4 6 4 1	$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$
5	1 5 10 10 5 1	$x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

Skatulyaelv

Skatulyaelv

Ha n darab gyufásdobozunk és $n+1$ gyufaszálunk van, akkor akárhogyan rakjuk bele az összes gyufát a skatulyákba, valamelyikben legalább kettő gyufa lesz.

Példa

Nyolc ember közül van legalább kettő, aki a hét ugyanazon napján született.

Az $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ halmazból bárhogyan választunk ki ötöt, akkor lesz közülük kettő, melyek összege 9.

Tekintsük az $\{1, 8\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$ halmazokat. Ekkor a kiválasztott öt elem közül lesz kettő, melyek azonos halmazban lesznek, így összegük 9.

Skatulyaelv általánosítása

Általános skatulyaelv

Ha n darab gyufásdobozunk és m gyufaszálunk van, akkor akárhogyan rakjuk bele az összes gyufát a skatulyákba, lesz olyan, amelyikben legalább $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor + 1 = \lceil \frac{m}{n} \rceil$ gyufa lesz.

Példa

Huszonhárom ember közül van legalább négy, aki a hét ugyanazon napján született.

Szita módszer

Legyen adott S_0 darab objektum, továbbá $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ tulajdonságok úgy, hogy minden objektumról el tudjuk dönteni, hogy az egyes tulajdonságokkal rendelkezik-e.
Vezessük be a következő jelöléseket:
$N(\alpha_i) =$ azon objektumok száma, amire teljesül α_i;
$S_1 = \sum_{k=1}^{r} N(\alpha_k)$;
$N(\alpha_i, \alpha_j) =$ azon objektumok száma, amire teljesül α_i és α_j;
$S_2 = \sum_{1 \le k < m \le r} N(\alpha_k, \alpha_m)$;

$\vdots$

$N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) =$ azon objektumok száma, amire teljesül α_1 és α_2 és ... és α_r;
$S_r = N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$;
$N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_r}) =$ azon objektumok száma, amire nem teljesül sem α_1, sem α_2,..., sem α_r. Ekkor:

$$N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_r}) = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^r S_r$$

Szita módszer

Feladat: Hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel?

Megoldás: Legyen az α_1 tulajdonság az, hogy egy szám osztható 2-vel, az α_2 tulajdonság az, hogy egy szám osztható 3-mal és az α_3 tulajdonság az, hogy egy szám osztható 5-tel.
Az 1000-nél kisebb számok közül:

összes	999	S_0	999
2-vel osztható	$\left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor = 499$	$N(\alpha_1)$	$-\,499$
3-mal osztható	$\left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor = 333$	$N(\alpha_2)$	$-\,333$
5-tel osztható	$\left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor = 199$	$N(\alpha_3)$	$-\,199$
$2 \cdot 3$-mal osztható	$\left\lfloor \frac{999}{2 \cdot 3} \right\rfloor = 166$	$N(\alpha_1, \alpha_2)$	$+\,166$
$2 \cdot 5$-tel osztható	$\left\lfloor \frac{999}{2 \cdot 5} \right\rfloor = 99$	$N(\alpha_1, \alpha_3)$	$+\;\;99$
$3 \cdot 5$-tel osztható	$\left\lfloor \frac{999}{3 \cdot 5} \right\rfloor = 66$	$N(\alpha_2, \alpha_3)$	$+\;\;66$
$2 \cdot 3 \cdot 5$-tel osztható	$\left\lfloor \frac{999}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right\rfloor = 33$	$N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$	$-\;\;33$
			$= 266$

Szita módszer

Tétel

Legyenek A_1, A_2, ..., A_n véges halmazok. Ekkor

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots$$

Példa

Hány olyan 1000-nél kisebb szám van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel?

Először: Hány olyan 1000-nél kisebb szám van, amely osztható 2-vel vagy 3-mal vagy 5-tel?

$A_1 = \{1 \le n \le 999 : 2|n\} \ \to |A_1| = \left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor$;

$A_2 = \{1 \le n \le 999 : 3|n\} \ \to |A_2| = \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor$;

$A_3 = \{1 \le n \le 999 : 5|n\} \ \to |A_3| = \left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor$.

Hasonlóan $|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3} \right\rfloor$, $|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 5} \right\rfloor$, $|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{999}{3\cdot 5} \right\rfloor$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor$.

2-vel vagy 3-mal vagy 5-tel osztható számok száma:

$$\left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{3\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor = 733.$$

Szita módszer

Tétel

Legyenek A_1, A_2, ..., A_n véges halmazok. Ekkor

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

Bizonyítás

Legyen $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ olyan, hogy az n halmaz közül pontosan t darabnak eleme. Számoljuk meg, hányszor vettük figyelembe x-et a formula jobb oldalán:

$\sum_{i=1}^n |A_i|$-ben t-szer, $\sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$-ben $\binom{t}{2}$-ször,

$\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$-ben $\binom{t}{3}$-szor, ... Ez összesen:

$$t - \binom{t}{2} + \binom{t}{3} - \ldots + (-1)^{t+1}\binom{t}{t} =$$
$$= -\left(\binom{t}{1}(-1)^1 1^{t-1} + \binom{t}{2}(-1)^2 1^{t-2} + \binom{t}{3}(-1)^3 1^{t-3} + \ldots + \binom{t}{t}(-1)^t 1^0\right) =$$
$$= -\left((-1+1)^t - \binom{t}{0}(-1)^0 1^t\right) = -\left(0^t - 1\cdot 1\cdot 1\right) = -(0-1) = 1$$

Vagyis x-et egyszer számoltuk a formula jobb oldalán is és a bal oldalán is.