

# Természetes levezetés

## Gyakorlat

Logika

2022/2023 2. félév

# Természetes levezetés alapjai

az azonosság törvénye

$$\Gamma, A \vdash_0 A$$

a bővítés szabálya

$$\frac{\Gamma \vdash_0 A}{\Gamma, B \vdash_0 A}$$

a szűkítés szabálya

$$\frac{\Gamma, B, B, \Delta \vdash_0 A}{\Gamma, B, \Delta \vdash_0 A}$$

a felcserélés szabálya

$$\frac{\Gamma, B, C, \Delta \vdash_0 A}{\Gamma, C, B, \Delta \vdash_0 A}$$

a vágás szabálya

$$\frac{\Gamma \vdash_0 A \quad \Delta, A \vdash_0 B}{\Gamma, \Delta \vdash_0 B}$$

*bevezető szabályok*

$$\begin{array}{l} (\supset b) \quad \frac{\Gamma, A \vdash_0 B}{\Gamma \vdash_0 A \supset B} \\ (\wedge b) \quad \frac{\Gamma \vdash_0 A \quad \Gamma \vdash_0 B}{\Gamma \vdash_0 A \wedge B} \\ (\vee b) \quad \frac{\Gamma \vdash_0 A}{\Gamma \vdash_0 A \vee B} \quad \frac{\Gamma \vdash_0 B}{\Gamma \vdash_0 A \vee B} \\ (\neg b) \quad \frac{\Gamma, A \vdash_0 B \quad \Gamma, A \vdash_0 \neg B}{\Gamma \vdash_0 \neg A} \end{array}$$

*alkalmazó szabályok*

$$\begin{array}{l} (\supset a) \quad \frac{\Gamma \vdash_0 A \quad \Gamma \vdash_0 A \supset B}{\Gamma \vdash_0 B} \\ (\wedge a) \quad \frac{\Gamma, A, B \vdash_0 C}{\Gamma, A \wedge B \vdash_0 C} \\ (\vee a) \quad \frac{\Gamma, A \vdash_0 C \quad \Gamma, B \vdash_0 C}{\Gamma, A \vee B \vdash_0 C} \\ (\neg a) \quad \frac{\Gamma \vdash_0 \neg \neg A}{\Gamma \vdash_0 A} \end{array}$$

*bevezető szabályok*

$$\begin{array}{l} (\forall b) \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A} \quad (x \notin \text{Par}(\Gamma)) \\ (\exists b) \quad \frac{\Gamma \vdash [A(x \parallel t)]}{\Gamma \vdash \exists x A} \end{array}$$

*alkalmazó szabályok*

$$\begin{array}{l} (\forall a) \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash [A(x \parallel t)]} \\ (\exists a) \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \exists x A \vdash B} \quad (x \notin \text{Par}(\Gamma, B)) \end{array}$$

- Levezetési szabály két része:  
felső - premisszák, alsó -  
konklúzió (Ha a felső levezetés  
megkonstruálható, akkor az alsó  
is.)
- Levezetési szabályokat lentől  
felfele fogjuk alkalmazni
- Három szabály, amelynek a  
használata nem egyértelmű:  
( $\supset a$ ), ( $\neg b$ ) és vágás szabálya

# Egyszerű levezetések

- **B1:**  $\vdash_0 A \supset A$

$$(\supset b) \frac{\frac{\checkmark}{A \vdash_0 A}}{\vdash_0 A \supset A}$$

- **B4:**  $\neg\neg A \vdash_0 A$

$$(\neg a) \frac{\frac{\checkmark}{\neg\neg A \vdash_0 \neg\neg A}}{\neg\neg A \vdash_0 A}$$

- **B3:**  $A \vdash_0 \neg\neg A$

$$(\neg b) \frac{\frac{\checkmark}{A, \neg A \vdash_0 A} \quad \frac{\checkmark}{A, \neg A \vdash_0 \neg A}}{A \vdash_0 \neg\neg A}$$

# Összetettebb levezetés

**B2:**  $\{A \supset B, B \supset C\} \vdash_0 A \supset C$

$$\frac{\frac{\frac{\checkmark}{\{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash_0 A}}{\{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash_0 B} \quad \frac{\frac{\checkmark}{\{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash_0 A \supset B}}{\{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash_0 B} (\supset b)}{\{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash_0 B} (\supset b) \quad \frac{\frac{\checkmark}{\{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash_0 B \supset C}}{\{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash_0 B \supset C} (\supset a)}{\frac{\{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash_0 C}{\{A \supset B, B \supset C\} \vdash_0 A \supset C} (\supset b)}$$

# Összetettebb levezetés

**B5:**  $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{}{\checkmark}}{A \supset B, \neg\neg A, \neg B \vdash_0 \neg\neg A}}{A \supset B, \neg\neg A, \neg B \vdash_0 A} (\neg a)}{A \supset B, \neg\neg A, \neg B \vdash_0 B} (\supset a) \quad \frac{\frac{\frac{}{\checkmark}}{A \supset B, \neg\neg A, \neg B \vdash_0 A \supset B}}{A \supset B, \neg\neg A, \neg B \vdash_0 \neg B} (\neg b)}{A \supset B, \neg\neg A \vdash_0 \neg\neg B} (\supset b) \end{array}$$

# 1. Feladat

**Bizonyítsuk, hogy a következő levezetés helyes:**

$\{(A \vee B) \supset C\} \vdash_0 (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{}{\checkmark}}{(A \vee B) \supset C, A \vdash_0 A}}{(\vee b) \frac{(A \vee B) \supset C, A \vdash_0 A \vee B}}{(\supset a) \frac{(A \vee B) \supset C, A \vdash_0 A \vee B \quad \frac{\frac{\frac{}{\checkmark}}{(A \vee B) \supset C, A \vdash_0 (A \vee B) \supset C}}{(\vee b) \frac{(A \vee B) \supset C, A \vdash_0 C}}{(\supset b) \frac{(A \vee B) \supset C \vdash_0 A \supset C}}{(\wedge b) \frac{(A \vee B) \supset C \vdash_0 A \supset C \quad \frac{\frac{}{\dots}}{(A \vee B) \supset C \vdash_0 B \supset C}}{(A \vee B) \supset C \vdash_0 (A \supset C) \wedge (B \supset C)}}} \end{array}$$

# 1. Feladat

**Bizonyítsuk, hogy a következő levezetés helyes:**

$\{(A \vee B) \supset C\} \vdash_0 (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

$$\begin{array}{c} \frac{\dots}{(A \vee B) \supset C \vdash_0 A \supset C} \quad \frac{\frac{\frac{\checkmark}{(A \vee B) \supset C, B \vdash_0 B}}{(\vee b) \quad (A \vee B) \supset C, B \vdash_0 A \vee B} \quad \frac{\frac{\checkmark}{(A \vee B) \supset C, B \vdash_0 (A \vee B) \supset C}}{(\supset a) \quad \frac{(A \vee B) \supset C, B \vdash_0 C}{(A \vee B) \supset C \vdash_0 B \supset C}}}{(\wedge b) \quad \frac{(A \vee B) \supset C \vdash_0 A \supset C \quad (A \vee B) \supset C \vdash_0 B \supset C}{(A \vee B) \supset C \vdash_0 (A \supset C) \wedge (B \supset C)}} \end{array}$$

## 2. Feladat

**Bizonyítsuk, hogy a következő formula bizonyítható:  $A \supset (\neg A \supset B)$**

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\checkmark}{A, \neg A, \neg B \vdash_0 A} \quad \frac{\checkmark}{A, \neg A, \neg B \vdash_0 \neg A}}{(\neg b) \quad \frac{A, \neg A \vdash_0 \neg \neg B}{(\neg a) \quad \frac{A, \neg A \vdash_0 B}{(\supset b) \quad \frac{A \vdash_0 \neg A \supset B}{(\supset b) \quad \frac{}{\vdash_0 A \supset (\neg A \supset B)}}}} \end{array}$$



### 3. Feladat

**Vizsgáljuk meg a szokásos "nyomozós" feladatot:**

$$\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \models_0 \neg F$$

$$(\neg b) \frac{\frac{\dots}{F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 A} \quad \frac{\checkmark}{F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 \neg A}}{F \supset K, K \supset A, \neg A \vdash_0 \neg F}$$

### 3. Feladat

**Vizsgáljuk meg a szokásos "nyomozós" feladatot:**

$$\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \models_0 \neg F$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \checkmark \\ \hline F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 F \end{array} \quad \begin{array}{c} \checkmark \\ \hline F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 F \supset K \end{array} \quad \begin{array}{c} \checkmark \\ \hline F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 K \supset A \end{array} \\
 (\supset a) \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad} \\
 \begin{array}{c} \hline F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 K \end{array} \quad \begin{array}{c} \hline F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 A \end{array} \\
 (\supset a) \frac{\quad}{\quad} \quad (\neg b) \frac{\quad}{\quad} \\
 \hline F \supset K, K \supset A, \neg A \vdash_0 \neg F
 \end{array}$$

## 4. feladat

**Bizonyítsuk, hogy a következő formula bizonyítható:**

$$\neg(A \wedge (B \supset \neg C)) \supset (A \supset C)$$

$$\frac{\frac{\frac{\dots}{\neg(A \wedge (B \supset \neg C)), A, \neg C \vdash A \wedge (B \supset \neg C)}{\neg(A \wedge (B \supset \neg C)), A, \neg C \vdash \neg(A \wedge (B \supset \neg C))} \quad \checkmark}{\neg(A \wedge (B \supset \neg C)), A \vdash \neg \neg C} \quad (\neg b)}{\frac{\frac{\neg(A \wedge (B \supset \neg C)), A \vdash \neg \neg C}{\neg(A \wedge (B \supset \neg C)), A \vdash C} \quad (\neg a)}{\neg(A \wedge (B \supset \neg C)) \vdash A \supset C} \quad (\supset b)}{\vdash \neg(A \wedge (B \supset \neg C)) \supset (A \supset C)} \quad (\supset b)$$

## 4. feladat

**Bizonyítsuk, hogy a következő formula bizonyítható:**

$$\neg(A \wedge (B \supset \neg C)) \supset (A \supset C)$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\checkmark}{\neg(A \wedge (B \supset \neg C)), A, \neg C \vdash A} \quad \frac{\frac{\checkmark}{\neg(A \wedge (B \supset \neg C)), A, \neg C, B \vdash \neg C} \quad (\supset b)}{\neg(A \wedge (B \supset \neg C)), A, \neg C \vdash B \supset \neg C} (\wedge b)}{\neg(A \wedge (B \supset \neg C)), A, \neg C \vdash A \wedge (B \supset \neg C)} \\
 \frac{\neg(A \wedge (B \supset \neg C)), A \vdash \neg \neg C}{\neg(A \wedge (B \supset \neg C)), A \vdash C} (\neg a) \\
 \frac{\neg(A \wedge (B \supset \neg C)), A \vdash C}{\neg(A \wedge (B \supset \neg C)) \vdash A \supset C} (\supset b) \\
 \frac{\neg(A \wedge (B \supset \neg C)) \vdash A \supset C}{\vdash \neg(A \wedge (B \supset \neg C)) \supset (A \supset C)} (\supset b)
 \end{array}$$