1. hét, 2024. február 19.

# Analízis 2A Előadás

# Tartalom

a) Hatványsor deriválása

b) Az inverzfüggvény deriválása

c) Egyoldali deriváltak

d) Magsabbrendű deriváltak

e) A szélsőérték létezésének elsőrendű szükséges feltétele

f) Középértéktételek

**Tétel (Hatványsor összegfüggvényének a deriválása.)**
Tegyük fel, hogy a $\sum(\alpha_n(x-a)^n)$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor $R$ konvergencia sugara pozitív.
Legyen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n \qquad (x \in K_R(a))$$

a hatványsor összegfüggvénye.
Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban $f \in D\{x\}$ és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n(x-a)^{n-1}.$$

**Bizonyítás**
Bizonyítás nélkül! (az $x = a$ eset könnyű.) $\square$

Hatványsor tagonkénti differenciálható: gyakorlaton $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

## Példák

**a)** Az $\exp x := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény deriválható, és

$$\exp'(x) = \big(e^x\big)' = e^x \quad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Bizonyítás.

Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ pontban

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \ (k := n-1)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp x. \quad \square$$

Megjegyzés: Az exp függvény deriváltja önmaga.

## Példák

**b)** A $\sin x := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény deriválható, és

$$\sin'(x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Bizonyítás.

Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ pontban

$$\sin'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x\,.$$

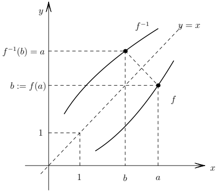
Hasonlóan: $\cos' x = -\sin x \;\; (x \in \mathbb{R})$.

# Az inverz függvény deriválása

GRAFIKUS SZEMLÉLTETÉS

Tegyük fel, hogy az $f$ függvény invertálható, és ábrázoljuk $f$ és $f^{-1}$ grafikonját. Vegyük $f$ grafikonjának egy $(a, b)$ pontját, azaz legyen $b = f(a)$.
Ekkor $f^{-1}(b) = a$, vagyis az $(b, a)$ pont rajta van az $f^{-1}$ függvény grafikonján. Ha egy pont két koordinátáját felcseréljük, akkor a pont tükörképét kapjuk meg a két tengely szögfelező egyenesére (vagyis az $y = x$ egyenletű egyenesre) vonatkozóan. Ez azt jelenti, hogy $f$ és $f^{-1}$ grafikonjai egymás tükörképei a szóban forgó szögfelezőre vonatkozóan.
Ugyanez áll fenn az érintőkre is. Ha az $f$ függvény $(a, b)$ pontbeli érintője az $y = f'(a)(x - a) + b$ egyenletű egyenes, akkor az inverz egyenes egyenlete $x = \dfrac{1}{f'(a)}(y - b) + a$ feltéve, hogy $f'(a) \neq 0$, azaz az érintő nem vízszintes.
Következésképpen, az inverz függvény érintőjének a meredeksége reciproka az eredeti függvény érintő meredekségének.

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(b)} \,.$$



## Bizonyítás(?) a közvetett függvény deriválási szabálya alapján

Az inverz definíciójából következik, hogy $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$, ezért $\big(f^{-1} \circ f\big)'(x) = 1$. A láncszabályt alkalmazva tehát

$$1 = (f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) \qquad \Longrightarrow \qquad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} .$$

Ez a "bizonyítás" meglehetősen népszerű, de nem korrekt. Hallgatólagosan feltételezi ugyanis azt a nem igazolt tényt, hogy az inverz függvény differenciálható.

**Tétel (Az inverz függvény deriválása)**

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f\colon I \to \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy

**a)** $f$ szigorúan monoton és folytonos $I$-n,

**b)** $f$ differenciálható az $a \in I$ és $f'(a) \neq 0$.

Ekkor az $f^{-1}$ inverz függvény deriválható a $b := f(a)$ pontban, és

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

**Bizonyítás**

Először azt igazoljuk, hogy $b \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$.

Valóban: Az a)-beli feltételből következik hogy $f$ invertálható, $\mathcal{R}_f = \mathcal{D}_{f^{-1}}$ nyílt intervallum és $f^{-1}$ folytonos $\mathcal{D}_{f^{-1}}$-en. Következésképpen $b = f(a) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f^{-1}}$.

Legyen $(y_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_{f^{-1}} \setminus \{b\}$ olyan sorozat, amelyre $\lim_{n\to+\infty} y_n = b$ és legyen

$$x_n := f^{-1}(y_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \big(\text{így } f(x_n) = y_n\big).$$

Mivel $f^{-1} \in C\{b\}$, ezért $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(b) = a$.

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}}.$$

A határértékre vonatkozó átviteli elvet alkalmazva

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Ugyancsak az átviteli elv alapján kapjuk, hogy

$$\exists \quad \left(f^{-1}\right)'(b) = \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)},$$

ezért $f^{-1} \in D\{b\}$ és $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$. $\square$

## Példák

**1)** A $g(x) := \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ függvény deriválható minden $x \in (0, +\infty)$ pontban, és

$$g'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)\,.$$

Bizonyítás: A $g$ függvény az $\mathbb{R}_0^+$ halmazon szigorúan monoton növekedő $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény inverze:

$$g(x) = \sqrt{x} = f^{-1}(x) \quad (x \geq 0).$$

Mivel $f \in D$ és $f'(x) = 2x > 0$, ha $x > 0$, ezért minden $x > 0$ esetén $g \in D\{x\}$ és

$$g'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \qquad \square$$

**2)** Az $\ln := \exp^{-1}$ függvény minden $x \in \mathcal{D}_{\ln} = (0, +\infty)$ pontban deriválható, és

$$\ln' x = \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x} \qquad \left(x \in (0, +\infty)\right)\,.$$

Bizonyítás: Mivel $\exp \uparrow$, folytonos és deriválható $\mathcal{D}_{\exp} = \mathbb{R}$-en, továbbá $\exp'(x) = \exp x \neq 0$ $(x \in \mathbb{R})$, ezért minden $x \in \mathcal{D}_{\ln} = (0, +\infty)$ pontban $f \in D\{x\}$ és

$$\ln' x = \left(\ln x\right)' = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}\,. \qquad \square$$

## EGYOLDALI DERIVÁLTAK

**Definíció**

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$, és tegyük fel, hogy $\exists\ \delta > 0$, amelyre $[a, a+\delta) \subset \mathcal{D}_f$.

Azt mondjuk, hogy az $f$ függvény az $a$ pontban jobbról deriválható (differenciálható), ha

$$\exists \quad \text{és véges a} \quad \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{határérték.}$$

Ezt a határértéket az $f$ függvény $a$ pontbeli jobb oldali deriváltjának, és $f'_+(a)$-val jelöljük.

Az $a$ pontbeli bal oldali deriváltat ehhez hasonlóan értelmezzük, és $f'_-(a)$-vel jelöljük.

A definíciókból közvetlenül adódik, hogy

$$f \in D\{a\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\ f'_+(a),\ \exists\ f'_-(a) \quad \text{és} \quad f'_+(a) = f'_-(a)\ (= f'(a)).$$

**Példa.**

abs $\notin D\{0\}$, de $\text{abs}'_+(0) = 1$ és $\text{abs}'_-(0) = -1$

A magasabb rendű deriváltak fogalmát rekurzióval értelmezzük. Bevezetésként először a kétszer deriválhatóság fogalmát definiáljuk.

**Definíció**

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.

Azt mondjuk, hogy az $f$ függvény kétszer deriválható az $a$ pontban, ha

**a)** $f$ deriválható az $a$ pont egy környezetében $\big(\,\exists\, r > 0$, hogy $f \in D\big(K_r(a)\big)\,\big)$, és

**b)** az $f'$ deriváltfüggvény deriválható $a$-ban, azaz $f' \in D\{a\}$.

Jelölése: $f \in D^2\{a\}$.

Ekkor $f''(a) := (f')'(a)$ az $f$ függvény második deriváltja az $a$ pontban.

Ha $H := \{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f : f \in D^2\{x\}\} \neq \emptyset$, akkor

$$f'' : H \to \mathbb{R}, \quad f''(x) := (f')'(x)$$

az $f$ függvény második deriváltfüggvénye.

Jelölések:

$$\begin{array}{lcl} f^{(1)}(a) := f'(a) & \text{és} & f^{(1)} := f' \\ f^{(2)}(a) := f''(a) & \text{és} & f^{(2)} := f'' \\ f^{(0)}(a) := f(a) & \text{és} & f^{(0)} := f \end{array}$$

## Magasabbrendű derivált definíciója indukcióval

Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ esetén már értelmeztük azt, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $(n-1)$-szer differenciálható egy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban.

Jelölés: $f \in D^{n-1}\{a\}$. Jelölje továbbá $f^{(n-1)}$ az $(n-1)$-drendű deriváltfüggvényt.

**Definíció**

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és valamely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ esetén $\exists$ az $f^{(n-1)}$ deriváltfüggvény az $a$ egy környezetében.

Azt mondjuk, hogy $f$ $n$-szer deriválható az $a$ pontban (Jelöés $f \in D^n\{a\}$), ha az $f^{(n-1)}$ függvény deriválható $a$-ban, azaz $f^{(n-1)} \in D\{a\}$.

Ekkor

$$f^{(n)}(a) := \left(f^{(n-1)}\right)'(a)$$

az $f$ függvény $a$-beli $n$-edik deriváltja.

Az $n$-edik deriváltfüggvény $f^{(n)}$ az előzőek alapján értelemszerűen definiálható.

**Végelen sokszor deriválható függvények**

Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény végtelen sokszor differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, ha $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ esetén $f \in D^n\{a\}$.

Jelölés: $f \in D^\infty\{a\}$.

### Példák

**a)** $\exp \in D^{\infty}$ és $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x \quad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$.

**b)** $\sin, \cos \in D^{\infty}$ és $\forall\, x \in \mathbb{R}$ és $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(\sin x\right)^{(2n)} = (-1)^n \cdot \sin x\,, \quad \left(\sin x\right)^{(2n+1)} = (-1)^n \cdot \cos x\,,$$
$$\left(\cos x\right)^{(2n)} = (-1)^n \cdot \cos x\,, \quad \left(\cos x\right)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \cdot \sin x\,.$$

**c)** Ha

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

akkor $f \in D^{\infty}$ és $f^{(n)}(0) = 0 \ (n \in \mathbb{N})$.

A deriválási szabályok magasabb rendű deriváltakra.

### Tétel

Ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $f, g \in D^n\{a\}$, akkor

**a)** $f + g \in D^n\{a\}$ és $\left(f + g\right)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$,

**b)** $f \cdot g \in D^n\{a\}$ és $\left(f \cdot g\right)^{(n)}(a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$.

(Leibniz-szabály)

Megjegyzés: Mindkét állítás teljes indukcióval igazolható.

Abszolút szélsőérték: azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek van abszolút maximuma, ha $\exists\ \max \mathcal{R}_f$. Jel: $\max f$.

Célszerű bevezetni a szélsőértékhelyek lokális változatait.

**Definíció.**
Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban lokális maximuma van, ha

$$\exists\ K(a), \quad \text{hogy} \quad \forall\ x \in K(a) \bigcap \mathcal{D}_f \quad \text{esetén} \quad f(x) \leq f(a)\,.$$

Ekkor az $a \in \mathcal{D}_f$ pontot az $f$ lokális maximumhelyének nevezzük, $f(a)$ pedig az $f$ lokális maximuma.

Megjegyzések:

**a)** A lokális minimumhelyet és a lokális minimumot hasonlóan értelmezzük. A lokális maximum(hely), minimum(hely) közös elnezevése lokális szélsőértékhely.

**b)** Szigorú lokális szélsőérték(hely)ekről beszélünk akkor, ha a definícióban "$\leq$", ill. "$\geq$" helyett "$<$" ill. "$>$" teljesül, ha $x \neq a$, azaz szigorú lokális maximum esetén

$$\exists\ K(a), \quad \text{hogy} \quad \forall\ x \in K(a) \bigcap \mathcal{D}_f \setminus \{a\} \quad \text{esetén} \quad f(x) < f(a)\,.$$

**b)** A definíció alapján minden abszolút szélsőértékhely egyben lokális szélsőértékhely is, de egy lokális szélsőértékhely nem szükségképpen abszolút szélsőértékhely.

### Tétel (A szélsőérték létezésének elsőrendű szükséges feltétele)

Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in D_f$ pontban lokális szélsőértéke van és $f \in D\{a\}$.

Ekkor

$$f'(a) = 0.$$

### Bizonyítás

Tegyük fel, hogy $f$-nek $a$-ban lokális maximuma van. Ekkor $\exists\, r > 0$, hogy

$$\forall\, x \in (a - r, a + r) \quad \text{esetén} \quad f(x) \le f(a), \quad \text{azaz} \quad f(x) - f(a) \le 0\,.$$

Tekintsük az $f$ függvény $a$-hoz tartozó különbségihányados-függvényét:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big)\,.$$

Ha $a < x < a + r$, akkor $x - a > 0$ és $f(x) - f(a) \le 0$ miatt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) \le 0\,.$$

Ha viszont $a - r < x < a$, akkor $x - a < 0$ és $f(x) - f(a) \le 0$ miatt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_-(a) \ge 0.$$

Mivel $f \in D\{a\}$, ezért

$$\underbrace{f'_-(a)}_{\ge 0} = \underbrace{f'_+(a)}_{\le 0} = f'(a) = 0.$$

A bizonyítás hasonló akkor is, ha $f$-nek $a$-ban lokális minimuma van. $\square$

Deriválható $f$ függvénynek csak olyan pontban lehet lokális szélsőértéke, ahol a függvény deriváltja nulla. Ezekben a pontokban az érintő egyenes vízszintes, azaz párhuzamos az $x$ tengellyel.
A lokális szélsőértékek meghatározásához tehát az $f'(x) = 0$ egyenletet kell megoldani.

**Példa**

Legyen $f(x) := x^3 - x \ (x \in \mathbb{R})$. Ekkor

$$f \in D, \qquad f'(x) = 3\,x^2 - 1 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Így a lehetséges lokális szélsőértékhelyek: $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Megjegyzés: az $f'(x) = 0$ a szélsőértéknek szükséges, de nem elégséges feltétele.

$f(x) = x^3 \ (x \in \mathbb{R})$ esetén $f'(x) = 3x^2$. A derivált csak a 0 pontban 0, ami viszont nyilvánvalóan nem lokális szélsőértékhely: $x < 0$ esetén $x^3 < 0$, míg $x > 0$ esetén $x^3 > 0$.

**Stacionárius pontok**

Legyen $f : \to \mathbb{R}$. Az olyan $a$ pontot, amelyben $f \in D\{a\}$, és $f'(a) = 0$ az $f$ függvény stacionárius pontjának nevezzük.

Az előbbiek alapján nem minden stacionárius pont szélsőértékhely.

Következmény: Ha az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek egy $a \in \mathcal{D}_f$ pontban lokális szélsőértéke van, akkor vagy $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = 0$, vagy $f \notin D\{a\}$.

**Tétel (Rolle-féle középértéktétel)**

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tegyük fel, hogy

$$a) \quad f \in C[a,b]\,, \qquad b) \quad f \in D(a,b) \qquad \text{és} \quad c) \quad f(a) = f(b)\,.$$

Ekkor

$$\exists \ \xi \in (a,b), \quad \text{hogy} \quad f'(\xi) = 0\,.$$

**Bizonyítás**

$f \in C[a,b] \implies$ (Weierstrass-tétel) $\exists\, \alpha,\ \beta \in [a,b]$, hogy

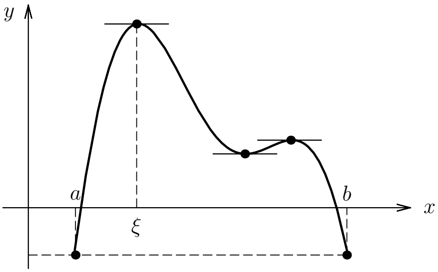
$$f(\alpha) = \min_{[a,b]} f =: m \qquad \text{és} \qquad f(\beta) = \max_{[a,b]} f =: M.$$

1. eset: $m = M$. Ekkor $f$ állandó, így $\forall\, \xi \in (a,b)$ esetén $f'(\xi) = 0$.

2. eset: $m \neq M$. Mivel $f(a) = f(b)$, ezért $\alpha$ és $\beta$ közül legalább az egyik (pl. $\alpha$) $(a,b)$-be esik.

Ekkor $\xi := \alpha \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f = (a,b)$, és $f$-nek $\xi$-ben lokális minimuma van.

Mivel $f \in D\{\xi\}$ ezért innen a szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltételből következik, hogy $f'(\xi) = 0$. $\square$




**Tétel (Cauchy-féle középértéktétel)**

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tegyük fel, hogy

$a$) $f, g \in C[a, b]$, $b$) $f, g \in D(a, b)$ és $c$) $g'(x) \neq 0$ $\big(x \in (a, b)\big)$.

Ekkor

$$\exists \quad \xi \in (a, b), \text{ hogy } \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Megjegyzés: A $g(x) = x,\ f(a) = f(b)$ speciális esetben visszakapjuk a Rolle-tételt.

## Bizonyítás

A c) feltételből a Rolle-tétel alapján következik, hogy $g(a) \neq g(b)$, vagyis az állítás jobb oldalának a nevezője nem 0.

Valóban, $g(a) = g(b)$-ből az következne, hogy $g$ deriváltja nulla az $(a, b)$ intervallum legalább egy pontjában, amit kizártunk.

Legyen

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \big(g(x) - g(a)\big) \quad \big(x \in [a, b]\big).$$

Az $F$ függvény kielégíti a Rolle-tétel feltételeit: folytonos $[a, b]$-n, deriválható $(a, b)$-n és $F(a) = F(b) = 0$.

Következésképpen létezik olyan $\xi \in (a, b)$, amelyre $F'(\xi) = 0$, azaz

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(\xi)\,.$$

Mivel a feltételeink szerint $g'(\xi) \neq 0$, ezért átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad \square$$

## Tekintsük a $g(x) = x \ \big(x \in (a,b)\big)$ speciális esetet

**Tétel (Lagrange-fél középértéktétel)**
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tegyük fel, hogy

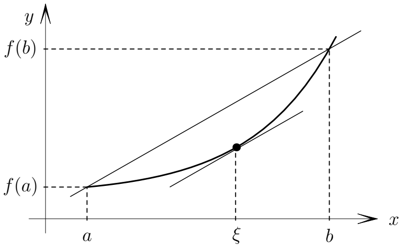
$$a) \quad f \in C[a,b]\,, \qquad b) \quad f \in D(a,b)\,.$$

Ekkor

$$\exists \ \xi \in (a,b), \quad \text{hogy} \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

### Mgjegyzés:

**a)** A Lagrange-féle középértéktétel szemléletes jelentése a következő: ha az $f$ függvény folytonos $[a,b]$-n és deriválható $(a,b)$-n, akkor $f$ grafikonjának van olyan pontja, amelyben húzott érintő párhuzamos az $\big(a, f(a)\big)$, $\big(b, f(b)\big)$ pontokon áthaladó szelővel:




**b)** Átlagsebességmérő traffipax.

**Tétel (A deriváltak egyenlősége)**

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tegyük fel, hogy $f, g \in D(a, b)$.

Ekkor

**a)** $f' \equiv 0 \quad (a, b)\text{-n} \quad \iff \quad f \equiv \text{állandó} \quad (a, b)\text{-n}$,

**b)** $f' \equiv g' \quad (a, b)\text{-n} \iff \exists\, c \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) + c \quad \big(x \in (a, b)\big)$.

**Bizonyítás**

**a)** $\Longleftarrow$ triviális, ugyanis a konstansfüggvény deriváltja 0.

$\Longrightarrow$ A Lagrange középértéktétel következménye.

Valóban, tetszőleges $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ esetén $f \in C[x_1, x_2]$, $f \in D(x_1, x_2)$, ezért

$$\exists\, \xi \in (x_1, x_2),\ \text{amelyre}\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2).$$

**b)** Az $F := f - g$ függvényre alkalmazzuk az a)-beli állítást. $\square$