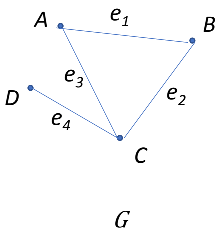
A $G = (V, E, \varphi)$ hármas egy gráf, ha V és E halmazok, és $\varphi: E \to P(V)$ úgy, hogy minden $e \in E$-re $2 \geq |\varphi(e)| \in \mathbb{N}^+$. V a gráf csúcsainak, E az éleinek a halmaza, és ha $\varphi(e) = \{u, v\}$ (ahol u nem feltétlenül különbözik v-től), akkor u és v az e él végpontjai. Ha $u = v$, akkor e hurokél, míg ha $\varphi(e_1) = \varphi(e_2)$, ahol e_1 és e_2 a gráf két különböző éle, akkor ez a két él párhuzamos. A gráf véges, ha mind V, mind E véges, ellenkező esetben a gráf végtelen. Egyszerű a gráf, ha nem tartalmaz hurokélt és párhuzamos élt. Egyszerű gráf esetén minden e-re $\varphi(e)$ a V kételemű részhalmaza, és különböző élhez különböző ilyen kételemű halmaz tartozik, ezért az éleket lényegében véve azonosíthatjuk a V egy-egy kételemű részhalmazával. A V r-elemű részhalmazainak halmazát esetenként $\binom{V}{r}$-rel jelöljük, és az $r = 2$ esetén $\binom{V}{2}$-vel. Ezzel a jelöléssel egyszerű gráf esetén $\varphi: E \to \binom{V}{2}$.

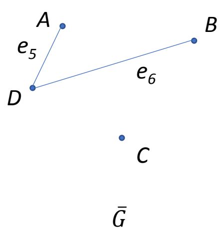
A véges gráf egy v csúcsára illeszkedő élek száma (vagyis azon élek száma, amelyek valamelyik végpontja a gráf ezen pontja), a v pont $d(v)$ foka, de figyelembe véve, hogy egy hurokél két végpontjával illeszkedik erre a csúcsra, tehát a hurokélt kétszer kell beszámítani. A fokszámok monoton sorozata a gráf fokszámsorozata.

Ha a $G_1 = (V_1, E_1, \varphi_1)$ gráf a G gráf részgráfja, azaz $V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$ és φ_1 a φ E_1-re való megszorítása, akkor a G G_1-re vonatkozó komplementere a G $G_2 = (V, E \setminus E_1, \varphi_2)$ részgráfja. Ha G_1 egy n-pontú egyszerű gráf, akkor részgráfja az n-pontú teljes gráfnak, azaz annak az n-pontú egyszerű gráfnak, amelyben minden pont szomszédos minden, tőle különböző ponttal, vagyis amelyben bármely két különböző pontot él köt össze. n-pontú teljes gráfban minden pontnak pontosan $n-1$ szomszédja van, így minden pont foka $n-1$, és a gráf éleinek száma ebből következően $\frac{n(n-1)}{2}$. Ha G n-pontú egyszerű gráf, akkor az n-pontú teljes gráfra, K_n-re vonatkozó komplementere a G komplementere, és ezt $\bar{G}$ jelöli. Ha tehát egy gráfnak van komplementere (nem valamely gráfra vonatkozó komplementere), akkor a gráf egyszerű. Legyen az n-pontú egyszerű gráf fokszámsorozata $d_0, \cdots, d_{n-1}$. Egyszerű gráf komplementere is egyszerű gráf, és az előbbi gráf komplementerének fokszámsorozata $n-1-d_0, \cdots, n-1-d_{n-1}$.

1. feladat

Ábrázoljuk a következő irányítatlan gráfot: $G = (V, E, \varphi)$, $V = \{A, B, C, D\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ $\varphi = \{(e_1, \{A, B\}), (e_2, \{B, C\}), (e_3, \{A, C\}), (e_4, \{C, D\})\}$. Határozza meg a következőket: $d(A)$; $d(B)$; $d(C)$; $d(D)$. Rajzolja le G-t. Izomorf-e G és $\bar{G}$?





v	$d(v)$
A	2
B	2
C	3
D	1

A $G_1 = (V_1, E_1, \varphi_1)$ és $G_2 = (V_2, E_2, \varphi_2)$ gráf izomorf, ha létezik egy f bijekció V_1 és V_2, valamint egy g bijekció E_1 és E_2 között úgy, hogy minden E_1-beli e-re $\varphi_2\big(g(e)\big) = f\big(\varphi_1(e)\big)$, azaz e képének G_2-beli végpontjai az e G_1-beli végpontjainak képei.

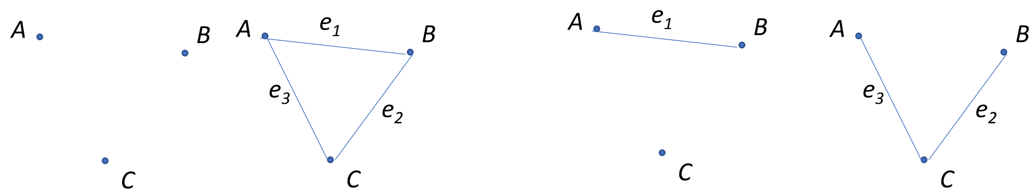
G és $\bar{G}$ nem izomorf, például azért, mert $\bar{G}$-ben van izolált pont, a C (tehát olyan pont, amelyre nem illeszkedik egyetlen él sem, azaz amelynek a foka 0), míg G-ben ilyen pont nincs.

Közbeékelt, a feladatsoron nem szereplő feladat:
Rajzolja le az összes páronként nem izomorf 3-, 4- illetve 5-csúcsú egyszerű gráfot. Hány összefüggő illetve reguláris van közöttük?
A 4 csúcsúakat órán felrajzoltuk.

n=|V|=3

|E|=0   *|E|=1*

000   222   011   112



G1 — *nem összefüggő reguláris*

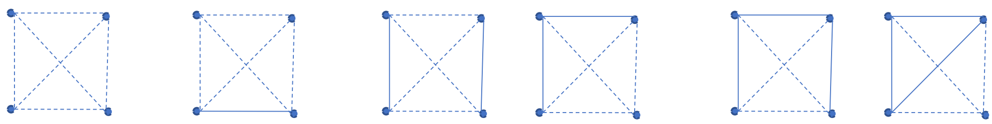
G4 — *összefüggő reguláris*

G2 — *nem összefüggő nem reguláris*

G3 — *összefüggő nem reguláris*

n=|V|=4

|E|=0	*|E|=1*	*|E|=2*		*|E|=3*	
0000 3333	0011 2233	1111 2222	0112 1223	1122 1122	0222 1113

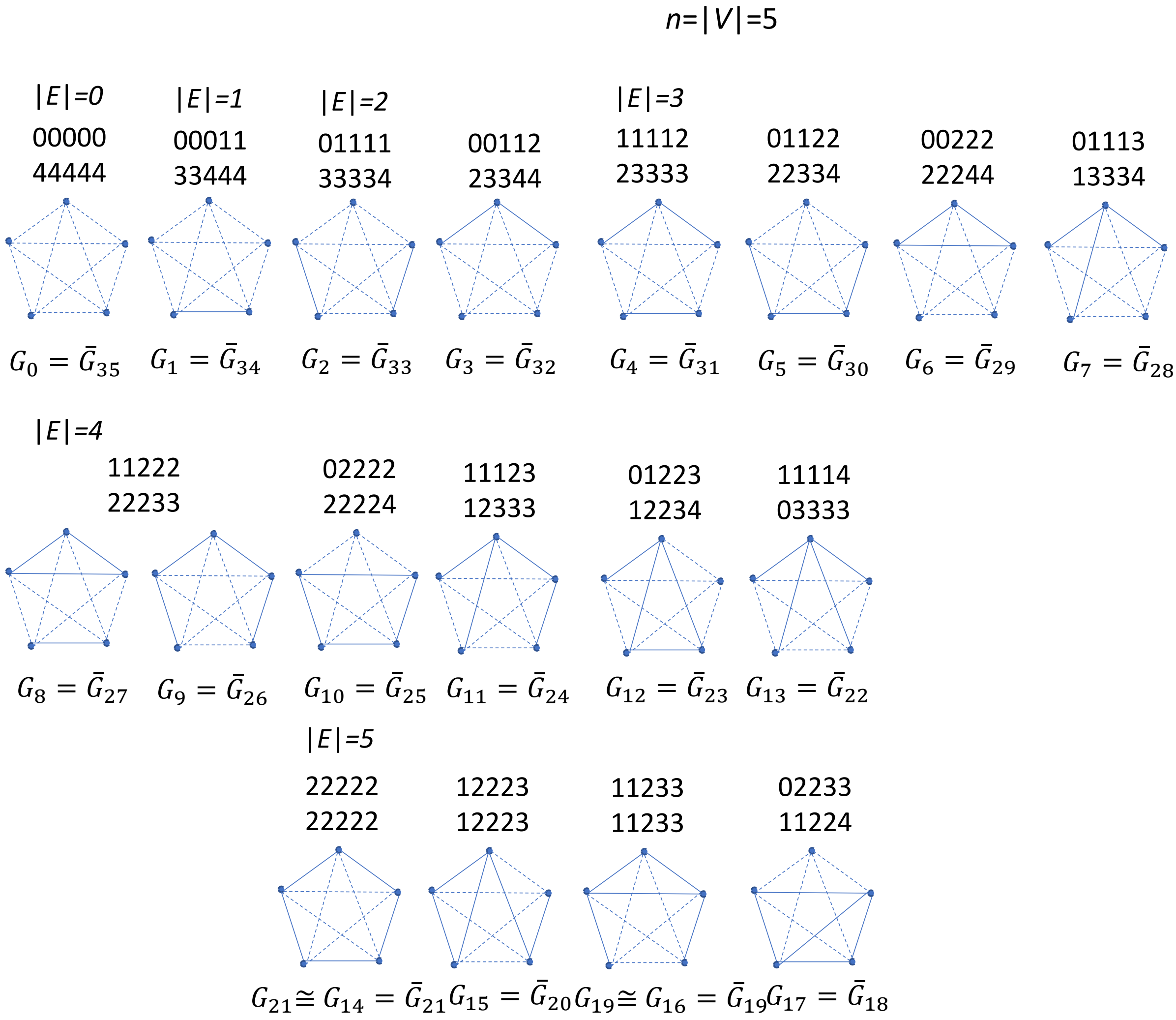


$G_1 = \bar{G}_{12}$ $G_2 = \bar{G}_{11}$ $G_3 = \bar{G}_{10}$ $G_4 = \bar{G}_9$ $G_8 \cong G_5 = \bar{G}_8$ $G_6 = \bar{G}_7$

	összefüggő	reguláris	$G \cong \bar{G}$	reguláris	összefüggő	
G_1	*n*	*i*		*i*	*i*	G_{12}
G_2	*n*	*n*		*n*	*i*	G_{11}
G_3	*n*	*i*		*i*	*i*	G_{10}
G_4	*n*	*n*		*n*	*i*	G_9
G_5	*i*	*n*	*i*	*n*	*i*	G_8
G_6	*n*	*n*		*n*	*i*	G_7
	1 *igen*+5 *nem*	2 *igen*+4 *nem*	*1*	2 *igen*+4 *nem*	6 *igen*+0 *nem*	

Összesen 3 nem összefüggő, nem reguláris, 2 nem összefüggő, reguláris, 5 összefüggő, nem reguláris és 2 összefüggő, reguláris 4-csúcsú egyszerű gráf van. Ezek között van 1 olyan, amely izomorf a komplementerével, ez összefüggő és nem reguláris, vagyis a páronként nem izomorf 4-csúcsú gráfok száma 11.

Az 5-csúcsú, páronként nem izomorf egyszerű gráfokat mutatja a következő ábra és alatta az összefoglaló táblázat. Ezek szerint most összesen 12 nem összefüggő, nem reguláris, 1 nem összefüggő, reguláris, 20 összefüggő, nem reguláris és 3 összefüggő, reguláris 4-csúcsú egyszerű gráf van. Ezek között van 2 olyan, amely izomorf a komplementerével, mindkettő összefüggő és egyikük nem reguláris, a másik az, vagyis a páronként nem izomorf 5-csúcsú gráfok száma 34.



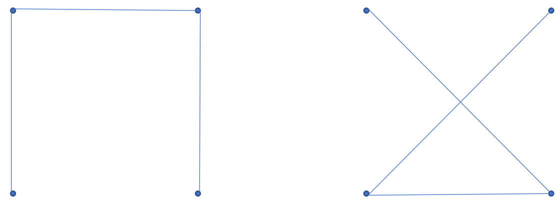
Az $n = 4$ és $n = 5$ esetén a rajzokon az egy-egy gráf felett lévő két számsorozat közül a felső a folytonos vonallal, míg az alsó a szaggatott vonallal rajzolt gráf fokszámsorozata, és ez a két gráf egymás komplementere. Az élek száma, $|E|$, a folytonos vonalhoz tartozó gráf éleinek száma, és mivel az n-pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2}$, ezért elegendő a $0 \leq |E| \leq \frac{n(n-1)}{4}$ eseteket nézni, a többi gráf ezen gráfok valamelyikének komplementere.

	összefüggő	reguláris	$G \cong \bar{G}$	reguláris	összefüggő	
G_0	*n*	*i*		*i*	*i*	G_{35}
G_1	*n*	*n*		*n*	*i*	G_{34}
G_2	*n*	*n*		*n*	*i*	G_{33}
G_3	*n*	*n*		*n*	*i*	G_{32}
G_4	*n*	*n*		*n*	*i*	G_{31}
G_5	*n*	*n*		*n*	*i*	G_{30}
G_6	*n*	*n*		*n*	*i*	G_{29}
G_7	*n*	*n*		*n*	*i*	G_{28}
G_8	*n*	*n*		*n*	*i*	G_{27}
G_9	*i*	*n*		*n*	*i*	G_{26}
G_{10}	*n*	*n*		*n*	*i*	G_{25}
G_{11}	*i*	*n*		*n*	*i*	G_{24}
G_{12}	*n*	*n*		*n*	*i*	G_{23}
G_{13}	*i*	*n*		*n*	*n*	G_{22}
G_{14}	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	G_{21}
G_{15}	*i*	*n*		*n*	*i*	G_{20}
G_{16}	*i*	*n*	*i*	*n*	*i*	G_{19}
G_{17}	*n*	*n*		*n*	*i*	G_{18}
	12 nem+6 igen	*2 igen+16 nem*	*2*	*2 igen+16 nem*	*1 nem+17 igen*	

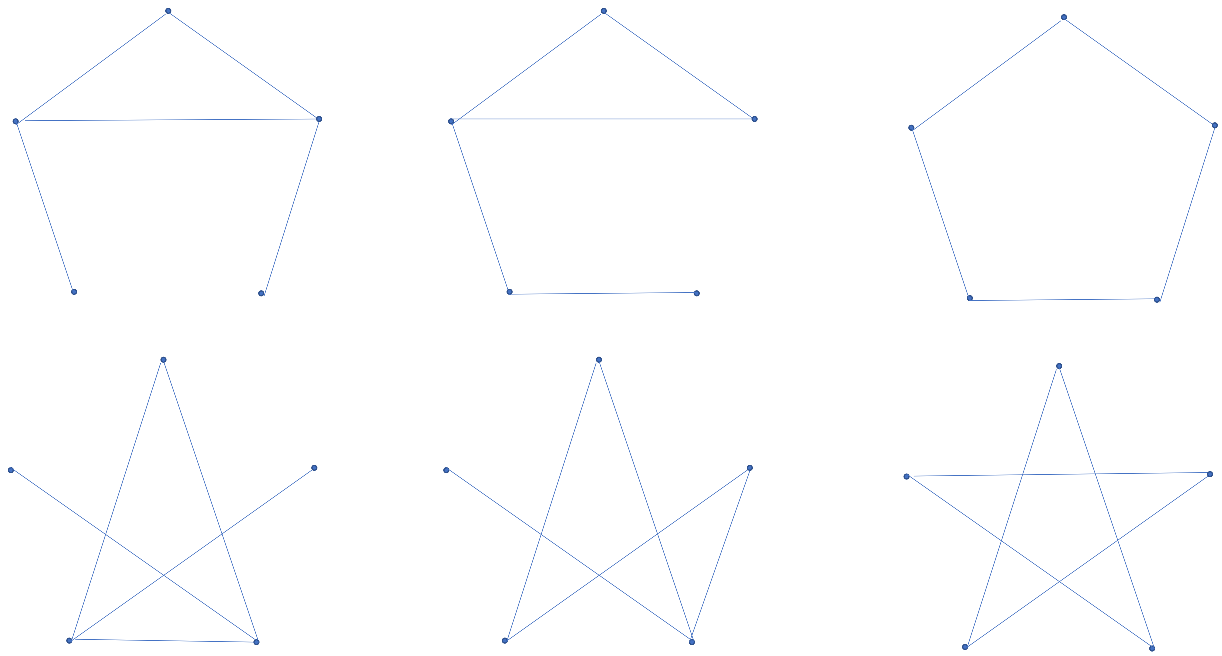
2. feladat

Hány olyan 3-, 4- illetve 5-csúcsú gráf van, amelyik izomorf a komplementerével?

Ezt az előző feladatban megoldottuk: 3-csúcsú nincs, 4-csúcsú 1 és 5-csúcsú 2 van.
A feladatot közvetlenül is megoldjuk. Egy gráf csak akkor lehet izomorf a saját komplementerével, ha a két gráf éleinek száma és fokszámsorozata azonos (de ez visszafelé általában nem igaz). Ez azt jelenti, hogy az n-pontú, $d_0, \cdots, d_{n-1}$ fokszám-sorozatú gráf csak akkor lehet izomorf a komplementerével, ha $e = \frac{n(n-1)}{2} - e$, azaz $e = \frac{n(n-1)}{4}$, és a $0 \leq i < n$ indexek mindegyikére $n - 1 - d_i = d_{n-1-i}$. Mivel két szomszédos egész szám közül egyik és csak egyik páros, és akkor annak kell most 4-gyel oszthatónak lennie, ezért egy gráf csak akkor lehet izomorf a komplementerével, ha n osztható 4-gyel, vagy 4-gyel osztva a maradék 1, másként, ha $n = 4k$ vagy $n = 4k + 1$ egy nemnegatív egész k-val. $3 = 0 \cdot 4 + 3$, $4 = 4 \cdot 1$ és $5 = 4 \cdot 1 + 1$, tehát nincs olyan 3-csúcsú egyszerű gráf, amely izomorf a komplementerével. A fokszámsorozatra vonatkozó feltételből pedig következik, hogy a legkisebb fokszám nem lehet 0, mert ellenkező esetben a gráfban lenne $n - 1$-fokú csúcs, ami azt jelentené, hogy ez a csúcs minden más csúccsal, tehát a 0-fokszámú csúccsal is össze lenne kötve. A fokszámsorozat-feltételből az is következik, hogy a sorozatban szimmetrikusan elhelyezkedő fokszámok összege $n - 1$.
Nézzük az $n = 4$ és az $n = 5$ esetet. Az előbbinél a lehetséges fokszámsorozat csak 1122 lehet. Ez egy olyan fokszámsorozat, amelyhez tartozó gráf például a négyszög három oldala, és ekkor a komplementer gráf a negyedik oldal és a két átló, amely izomorf az előbbi gráffal, tehát ez és csak ez a gráf egy, a saját komplementerével izomorf 4-pontú gráf:



Most áttérünk az $n = 5$ esetre. A lehetséges fokszámsorozatok 11233, 12223 és 22222. A megfelelő gráfok és komplementereik az előbbi sorrendben az alábbi ábrán láthatóak, ahol a gráf alatt van a komplementere. Látszik, hogy a két szélső gráf izomorf a komplementerével, de a középső nem.



3. feladat

Bizonyítsuk be, hogy egy gráfban a páratlan fokszámú csúcsok száma mindig páros.

A feladatot kicsit tágabban nézve bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban az élek száma (és így egy véges gráfban) véges, akkor a páratlan fokszámú csúcsok száma mindig páros.

A fokszámok összege az élek számának kétszerese, feltéve, hogy az élek száma véges, ugyanis minden élnek két végpontja van (ez a hurokél esetén is igaz, csak ott a két végpont egybeesik). Páros számok összege páros, míg páratlan sok páratlan szám összege páratlan, páros sok páratlan szám összege páros, vagyis a fokszámok teljes összege, amely páros szám, akkor és csak akkor páros, ha a páratlan fokszámok száma páros.

Ha az élek száma végtelen, akkor lehet, hogy végtelen sok olyan csúcs van, amelyre páratlan sok olyan él illeszkedik, amelyeknek a másik végpontja nem ez a csúcs (vagyis amelyek nem hurokélek), és így a páratlan fokszámú csúcsok száma ekkor nem egy páros pozitív egész szám.

4. feladat

Lehet-e egy 7 pontú egyszerű gráf fokszámsorozata

a) $4,4,3,3,2,2,1$;

Nem, mert egy véges gráfban a páratlan fokszámú csúcsok száma páros, míg a fenti sorozatban a páratlan számok száma három, azaz páratlan>

b) $6,3,3,3,3,2,0$;

Nem. Egy $n \in \mathbb{N}^+$-pontú egyszerű gráfban egy csúcs foka maximum $n-1$ lehet. Ha a gráfban a 0 fokszámú csúcsok, azaz az izolált csúcsok száma r (ahol tehát $n \geq r \in \mathbb{N}$), akkor a gráf lényegében véve egy $n-r$-csúcsú egyszerű gráf. Ha van a gráfban izolált csúcs, akkor $0 < r$, tehát $n - r < n$, és ekkor a gráfban egy csúcs foka legfeljebb $n - r - 1 < n - 1$ lehet. Rövidebben: ha az n-csúcsú egyszerű gráfban van $n-1$-fokú csúcs, akkor ez a csúcs szomszédos a gráf valamennyi, tőle különböző csúcsával, de akkor minden csúcsra illeszkedik legalább egy él, minden csúcs foka legalább 1. Egy n-csúcsú egyszerű gráfban tehát vagy nincs izolált csúcs, vagy nincs $n-1$-fokú csúcs.

c) $5,5,5,2,2,2,1$;

Nem, mert elhagyva a gráfból a 2- és 1-fokú csúcsokat a rájuk illeszkedő élekkel, akkor a maradék 3-csúcsú gráfban a fokszámok összege legalább $15 - 7 = 8$ lenne. De egy n-csúcsú egyszerű gráfban a fokszámok összege maximum $n(n-1)$ (mert minden csúcs egymástól függetlenül legfeljebb $n-1$ csúccsal lehet szomszédos), így a 3-csúcsú egyszerű gráfban ez a szám maximum 6 lehet.

Más megoldás: az órán tanult módszer: nagy fokú – kis fokú csúcsokra való szétosztás. Legyenek a nagy fokúak a három ötödfokú. A nagy fokúakat egymással összekötjük, ez elfogyaszt max. 3*2=6 fokszámot. A nagy fokúakból induló maradék legalább 3*5-3*2=9 élt a kis fokúaknak kell befogadniuk. Azonban a kis fokúak max. a fokszámuk összege, 3*2+1=7 élt tudnak befogadni, nincs ilyen egyszerű gráf.

d) $2,2,2,2,2,2,2$;

Ha a véges egyszerű gráf minden csúcsának foka 2, akkor a gráf lehet egy kör, de ha a csúcsok száma legalább 6, akkor akár több olyan kör egyesítése is, ahol két különböző körnek nincs közös pontja. Most a pontok száma 6, így a fenti fokszámokkal a gráf lehet egy 6-pontú kör, de lehet két olyan 3-pontú kör is, ahol a két körnek nincs közös pontja.

5. feladat

Van-e olyan 9 pontú gráf, melyben a csúcsok fokai rendre az alábbiak? És egyszerű gráf?

Ha egy nemnegatív egész számokból álló véges hosszúságú sorozatban a páratlan számok száma páros, akkor mindig van olyan gráf, amelynek fokszámsorozata a megadott sorozat. Legyen ugyanis minden számhoz egy-egy, egymástól különböző pont, és illeszkedjen minden pontra $\left\lfloor \frac{d_i}{2} \right\rfloor$ hurokél, ahol d_i a sorozat i-indexű eleme. Ha egy i-re d_i páros, akkor az adott csúcs foka megegyezik a megadott számmal. A páratlan számok esetén a pont fokszáma még eggyel kisebb a kelleténél. De a páratlan számok száma páros, így ezeket a csúcsokat páronként diszjunkt párokba állíthatjuk, és egy-egy ilyen párt egy éllel összekötve már minden csúcs foka az előírt érték. Ezek a gráfok azonban csak kivételes esetben egyszerűek.

Ha adott egy n-pontú egyszerű gráf fokszámsorozata, ahol az i-indexű csúcs fokszáma d_i ($n > d_i \in \mathbb{N}$), akkor a komplementer gráfban ezen csúcs foka $n - 1 - d_i$. Egy n hosszúságú d_i fokszámsorozathoz akkor és csak akkor van egyszerű gráf, ha az $n - 1 - d_i$ elemekből álló sorozat is lehet egy egyszerű gráf fokszámsorozata. Ebből következően a lenti feladatokban nézhetjük az esetleges komplementer sorozatot.

(a) $7,7,7,6,6,6,5,5,5$;

A komplementer sorozat $1,1,1,2,2,2,3,3,3$. Ilyen 9-pontú egyszerű gráf van: egy 3-pontú kör, ahol minden csúcsból kiindul egy 2-hosszúságú, páronként diszjunkt út.

(b) $6,6,5,4,4,3,2,2,1$;

Három páratlan szám van, így ez a sorozat nem lehet egy gráf fokszámsorozata.

(c) $2,2,3,5,6,6,6,8,8$?

A komplementer sorozat $0,0,2,2,2,3,5,6,6$. Ilyen 9-pontú egyszerű gráf nincs: a gráfból elhagyva a legfeljebb 2-pontú csúcsokat a rájuk illeszkedő élekkel, akkor egy 4-csúcsú gráfot kapunk, ahol a fokszámok összege legalább $(6+6+5+3)-(0+0+2+2+2)=14$, és ez nagyobb, mint $4\cdot(4-1)=12$. **Másképp ugyanez: az órán tanult megoldás: nagy és kis fokú csúcsokra szétosztás.** Legyenek a nagy fokúak a két 8-adfokú és a három 6-odfokú. A módszer leírását lásd **4. c)** feladat.

6. feladat

Van-e olyan 8 pontú gráf, melyben a csúcsok fokai rendre $6,6,6,6,3,3,2,2$? És egyszerű gráf?

Most is az esetleges komplementert érdemes nézni, amelynek a fokszámsorozata 11114455. Elhagyva a négy 1-fokú pontot a rájuk illeszkedő élekkel, a megmaradt 4-pontú gráfban a fokszámok összege legalább $18-4=14$ lenne, de 4-pontú egyszerű gráfban ez a szám maximum 12 lehet, így ilyen egyszerű gráf nincs. **Más módszer:** Itt is lehet a **nagy fokú – kis fokú** szétosztást alkalmazni. Azonban mindkét fokszámsorozathoz van nem egyszerű gráf, hiszen a páratlan számok száma páros. Az eredeti fokszámsorozat esetén például egy megfelelő gráf, amelyben négy ponton külön-külön 3-3, négy ponton 1-1 hurokél van, és ebből az utóbbi négy pontból kettőt összekötünk egy éllel. De ekkor a két gráf már nem egymás komplementere.

7. feladat

(a) Bizonyítsuk be, hogy véges, egyszerű gráfban létezik 2 különböző pont, melyek fokszáma egyenlő.

Fel kell tenni, hogy a gráf legalább két pontot tartalmaz.
n-pontú egyszerű gráfban egy csúcs foka maximum $n-1$ lehet, de ha van $n-1$-fokú pont, akkor ez a pont minden más ponttal szomszédos, így nem lehet 0-fokszámú pont, és fordítva, ha van izolált pont, akkor az összes többi pont legfeljebb csak $n-2$ ponttal lehet szomszédos. A fokszámok tehát vagy a $[0..n-2]$ vagy az $[1..n-1]$ intervallum egészei lehetnek. Mindkét intervallum $n-1$ egészt tartalmaz, a gráf pontjainak és így fokszámainak száma n, tehát a skatulyaelv miatt legalább egy fokszám legalább kétszer kell, hogy előforduljon.

(b) Mutassuk meg, hogy minden társaságban van két ember, akiknek ugyanannyi ismerősük van a jelenlévők között! (Az ismeretségek kölcsönösek.)

A társaságnak megfeleltetve egy gráfot, ahol a csúcsok a társaság tagjai, és két különböző pont pontosan akkor szomszédos, ha a megfelelő két ember ismeri egymást, akkor a feladat azonos az (a) pont feldadatával.

8. feladat
Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő gráfnak kevesebb éle van, mint pontja, akkor van elsőfokú pontja.

A feladat üres gráf esetén nem igaz, ekkor ugyanis a gráf egyetlen élt sem tartalmaz. Ha $n = 1$, akkor a feladatnak megfelelő gráf egyetlen élt sem tartalmaz, így ekkor az egyetlen pont fokszáma 0. Legyen tehát $2 \leq n \in \mathbb{N}$, és az élek száma is legyen legalább 1. A fokszámok összege az élek számának kétszerese. Ha az állítás nem igaz, akkor minden csúcs foka legalább 2, és ekkor $2n > 2e = \sum_{v \in V} d(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V| = 2n$, ami nyilvánvaló ellentmondás, így az állítás igaz.

Szorgalmi feladat: Igaz-e a fenti állítás nem üres gráf esetén akkor is, ha a gráf nem összefüggő.

9. feladat
Ha egy véges egyszerű gráf nem összefüggő, akkor a komplementere összefüggő lesz-e?

Szorgalmi feladat: Ha a gráf nem összefüggő, akkor mekkora a komplementer gráf különböző pontjait összekötő utak hosszának maximuma?

10. feladat
Mutassuk meg, hogy ha egy $2n$ csúcsú gráf minden pontjának foka legalább n, akkor a gráf összefüggő! Mi történik, ha $n - 1$-fokú pontokat is megengedünk?

11. feladat
Legyen $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V| = 6$. Bizonyítsuk be, hogy G-ben vagy $\bar{G}$-ben létezik 3-csúcsú teljes gráf.

12. feladat

(a) Igaz-e, hogy ha egy gráf bármely két pontja között van séta, akkor út is van?

(b) Mutassuk meg, hogy ha a-ból vezet út b-be, és b-ből c-be, akkor a-ból is vezet c-be!

13. feladat
Legyen a $G = (V, E)$ összefüggő gráfnak $e \in E$ éle elvágó él. Bizonyítsuk be, hogy e nem lehet G-beli kör éle.

14. feladat
Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf minden pontjának fokszáma legalább 2, akkor a gráf tartalmaz kört.

A feladat véges gráf esetén igaz. A gráf egy útja maximális, ha egyik végén sem lehet úgy bővíteni, hogy ismét utat kapjunk. Véges gráfban van maximális út, hiszen egy úton a csúcsok páronként különbözőek. Legyen P egy maximális út a gráfban. Mivel minden csúcs foka legalább 2, ezért a végpontokra is illeszkedik legalább egy olyan él, amely nem része az útnak. Egy ilyen él másik végpontja csak az út egy pontja lehet, mert ha nem így lenne, akkor ezzel az éllel az utat folytathatnánk. De ekkor az előbbi él, valamint az útnak ezen él két végpontja közötti része egy kört ad.

15. feladat
Bizonyítsuk be, hogy minden, legalább 5-csúcsú gráf esetén maga a gráf vagy a komplementere tartalmaz kört.

16. feladat
Rajzoljuk le az összes (páronként nem izomorf) 3-, 4- és 5-csúcsú fát.

17. feladat
Mely fák izomorfak a komplementerükkel?

n-pontú, e élt tartalmazó gráf komplementerében az élek száma $\frac{n(n-1)}{2} - e$. Ha a gráf izomorf a komplementerével, akkor az élek száma azonos, tehát $e = \frac{n(n-1)}{2} - e$. Innen az önmaga komplementerével izomorf gráfban az élek száma $e = \frac{n(n-1)}{4}$. Fa esetén ez egyenlő $n - 1$-gyel, tehát vagy $n - 1 = 0$, vagy $n = 4$. Az egyetlen pontot tartalmazó egyszerű gráfban nincs él (tehát kör sem) és összefüggő, és ugyanez igaz a komplementerére, tehát ekkor a gráf egy olyan fa, amely izomorf a komplementerével. n-pontú, önmagával izomorf gráfban a fokszám-sorozatban a szimmetrikusan elhelyezkedő fokszámok összege $n - 1$. Fa esetén a négy fokszámból kettő értéke 1, így az előbbi feltételnek is megfelelő sorozat egy és csak egy van, az 1122. Az ennek megfelelő gráf például egy négyzet három oldala, a komplementer gráf élei a négyzet negyedik oldala, valamint a két átló, és ez izomorf a három oldalból álló gráffal. Végeredményként van két olyan fa, amely izomorf a saját komplementerével, az egypontú egyszerű gráf, valamint a négypontú út.

18. feladat
Hány olyan 8-csúcsú fa van, amelyben pontosan 2 db harmadfokú csúcs van?

19. feladat
Létezik-e 10-csúcsú erdő a következő fokszámsorozattal: 1,1,1,2,3,3,4,4,5,6? Bizonyítsuk állításunkat.

20. feladat
Igazoljuk, hogy véges gráfban a komponensek számának és az élek számának összege nem kisebb, mint a csúcsszám.

21. feladat
Jelöljük egy fa elsőfokú pontjanak számát f_1-gyel, a kettőnél nagyobb fokúak számát pedig c-vel. Mutassuk meg, hogy ha legalább két pontja van a gráfnak, akkor $f_1 \geq c + 2$.

22. feladat
Igazoljuk, hogy egy összefüggő véges gráfban bármely két leghosszabb útnak van közös pontja!

A leghosszabb út a gráf olyan útja, amelynek hossza maximális a gráfban lévő utak hosszainak halmazában. Minden leghosszabb út egyben maximális út, de ez fordítva általában nem igaz, például az 11113 fokszámsorozatú fában a leghosszabb út hossza 3, de ebben a fában van egy 2-hosszúságú maximális út is.
Legyen L_1 és L_2 a gráf két különböző leghosszabb útja, legyen a két-két végpontjuk a_1, b_1, valamint a_2 és b_2, és legyen a hosszuk l. Mivel a gráf összefüggő, ezért bármely két pont, tehát a két út tetszőleges pontpárja között van út. Egy ilyen útnak lehet közös pontja a leghosszabb utak bármelyikével, de ha L_1-nek és L_2-nek nincs közös pontja, akkor az L_1-beli p_1 pontból az L_2-n fekvő p_2 pontba vezető útnak lesz egy legutolsó olyan q_1 pontja, amely L_1-hez tartozik, és innen tovább haladva van egy első olyan pont, q_2, amely az L_2 pontja. Most a q_1 és q_2 közötti L út hossza, l_q, legalább 1. Jelölje $l_a^{(1)}$ az L_1 út a_1 és q_1, $l_b^{(1)}$ a b_1 és q_1 közötti

szakaszának hosszát, és ugyanez a 2 indexszel a másik út esetén. Ekkor $l_a^{(1)} + l_b^{(1)} = l = l_a^{(2)} + l_b^{(2)}$, és $l_a^{(1)}$ és $l_b^{(1)}$ maximuma legalább $\frac{l}{2}$. Hasonlóan, $l_a^{(2)}$ és $l_b^{(2)}$ maximuma is legalább $\frac{l}{2}$. De ekkor az L_1 és L_2 útnak az előbbi nem rövidebb részét kiegészítve a q_1-et q_2-vel összekötő L úttal egy legalább $\frac{l}{2} + 1 + \frac{l}{2} > l$ hosszúságú úthoz jutnánk, ami nem lehetséges, mert a leghosszabb út hossza l.

23. feladat
Mutassuk meg, hogy egy véges fában az összes leghosszabb út egy ponton megy át!

A 24-27. feladatokban legyen $G = (V, E)$ fagráf, $|V| = n$, $V_i = \{v \in V | d(v) = i\}$, $i = \{1, \cdots, n-1\}$. Legyen $f_i = |V_i|$, tehát f_i az i-edfokú csúcsok száma.

24. feladat
Döntse el, hogy létezik-e olyan fagráf, melyre $|V| = 8$ és $f_3 = 2$. Ha igen, rajzolja le őket.

25. feladat
Döntse el, hogy létezik-e olyan fagráf, melyre $|V| = 9$ és $f_3 = 2$.

26. feladat
Legyen $G = (V, E)$ fagráf, $|V| = n \geq 2$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $2 \cdot f_1 + f_2 \geq n + 2$.

$$2n - 2 = 2(n-1) = \sum_{i=1}^{n} d_i \geq f_1 \cdot 1 + f_2 \cdot 2 + \big(n - (f_1 + f_2)\big) \cdot 3 = 3n - 2f_1 - f_2,$$

és ebből közvetlenül kapjuk az egyenlőtlenséget.

27. feladat
Legyen $G = (V, E)$ fagráf, $|V| = n \geq 2$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $3 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + f_3 \geq 2 + 2 \cdot n$.

$$\begin{aligned} 2n - 2 = 2(n-1) = \sum_{i=1}^{n} d_i &\geq f_1 \cdot 1 + f_2 \cdot 2 + f_3 \cdot 3 + \big(n - (f_1 + f_2 + f_3)\big) \cdot 4 \\ &= 4n - 3f_1 - 2f_2 - f_3, \end{aligned}$$

és átrendezéssel a feladatban megadott egyenlőtlenséget kapjuk.