

**1. zárthelyi dolgozat minta – 2022-04-06**

Felhasználható idő: 105 perc, használható segédeszközök: üres papír és toll vagy digitális változatuk. Gyorssegély, ne ezen múljon:  $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ ,  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$ ,  $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = 1/2$ ,  $180^\circ = \pi$ ,  $i^2 = -1$ .

**1. feladat 6 pont**

- (a) Döntse el, hogy a következő állítások igazak vagy hamisak (helyes válasz: fél pont, nincs válasz/helytelen válasz: 0 pont). **2 pont**
- (1) Ha  $a, b, c, d$  valósak, és  $a + bi = c + di$ , akkor  $a = c$ , és  $b = d$ . **I H**
  - (2) Egy reláció nem lehet egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus. **I H**
  - (3) Egy ekvivalenciareláció esetén az ekvivalenciaosztályok uniója a reláció értelmezési tartománya. **I H**
  - (4) Ha  $f$  és  $g$  injektív függvények, akkor  $f \circ g$  is injektív. **I H**
- (b) Határozza meg az  $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 10x - 5 = y\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  reláció értelmezési tartományát és az  $R^{-1}(\{-20\})$  inverz képet. **2 pont**
- (c) Konstruáljon az  $\{1, 2, 3\}$  halmazon olyan  $R$  relációt mely nem szimmetrikus és nem tranzitív. **2 pont**

**2. feladat 10 pont**

- (a) Igazolja, hogy az  $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y - x \text{ nemnegatív páros szám}\}$  reláció részbenrendezés. Adjunk meg olyan  $a, b$  egészeket, melyekre sem  $(a, b)$ , sem  $(b, a)$  nem eleme a relációnak. **5 pont**
- (b) Adjunk meg olyan  $A, B$  és  $C$  halmazokat, amelyekre teljesül a következő összefüggés:  
 $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ . **2 pont**
- (c) Igazolja, hogy tetszőleges  $A, B$  és  $C$  halmazok esetén igaz a következő összefüggés:  
 $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ . **3 pont**

**3. feladat 5 pont**

Legyen  $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3y + 5 = -8x\}$  és  $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |3x| = |-8y + 4|\}$ . Határozza meg az  $S \circ R$  és  $R \circ S$  kompozíciót.

**4. feladat 5 pont**

- (a) Döntse el, hogy az  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := 2\sqrt{x + 13}$  függvény injektív-, illetve szürjektív-e. **2 pont**
- (b) Tekintsük a következő relációt:  $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x = y^2 - 6y + 10\}$ . Ez a reláció nem függvény. Távolítsunk el  $R$ -ből a lehető legkevesebb rendezett párt úgy, hogy a kapott reláció már függvény legyen.

**5. feladat 7 pont**

A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki  $z$  értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan  $w$  komplex számot trigonometrikus alakban, melyekre  $w^3 = z$ , ahol

$$z = \frac{(1 + i)^{32}}{(-1 - \sqrt{3}i)^{12}}.$$

**6. feladat 7 pont**

Oldja meg a következő egyenletet a komplex számok halmazán:

$$\frac{3z + 6i + 3i\bar{z}}{z - 1} = 3$$