Diszkrét matematika I.

10. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagygabor@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2021. tavasz

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Egy gráfot fának nevezünk, ha összefüggő és körmentes.

Tétel

Egy G egyszerű gráfra a következő feltételek ekvivalensek:

1. G fa;
2. G összefüggő, de bármely él törlésével kapott részgráf már nem összefüggő;
3. ha v és v' a G különböző csúcsai, akkor pontosan 1 út van v-ből v'-be;
4. G-nek nincs köre, de bármilyen új él hozzávételével kapott gráf már tartalmaz kört.

A bizonyítás menete

$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$

Fák

Bizonyítás

$(1) \Rightarrow (2)$

G összefüggősége következik a fa definíciójából. Az állítás másik részét indirekten bizonyítjuk.

Tfh. létezik egy olyan e él (a végpontjai legyenek v és v') a gráfban, aminek a törlésével kapott gráf összefüggő. Ekkor létezne út v-ből v'-be, amit kiegészítve a törölt éllel és a megfelelő csúccsal egy kört kapnánk: $v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v', e, v$.

$(2) \Rightarrow (3)$

Legalább egy út létezik az összefüggőség miatt. Indirekten bizonyítjuk, hogy nem létezhet két különöző út:

Tfh. 2 út is létezik a különböző v és v' csúcsok között, legyenek ezek: $v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v'$ és $v, e_1', v_1', e_2', \ldots, v_{m-1}', e_m', v'$. Legyen k a legkisebb olyan index, amelyre $v_k \neq v_k'$. (Miért létezik ilyen?) Az e_k élt törölve összefüggő gráfot kapunk, mert a v_{k-1}, e_k, v_k séta helyettesíthető a $v_{k-1}, e_k', v_k', \ldots, e_m', v', e_n, v_{n-1}, e_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_{k+1}, e_{k+1}, v_k$ sétával.

Fák

Bizonyítás

(3) $\Rightarrow$ (4)

Annak a bizonyítása, hogy nincs kör a gráfban indirekt:
tfh. létezik kör: $v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v$. Ekkor v_1 és v között két különböző út is van: $v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v$, illetve v_1, e_1, v.
Ha a hozzávett e él hurokél, és a v csúcsra illeszkedik, akkor v, e, v kör lesz. Ha a hozzávett e él a különböző v és v' csúcsokra illeszkedik, akkor a köztük lévő utat megfelelően kiegészítve kapunk kört:
$v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v', e, v$.

(4) $\Rightarrow$ (1)

Az, hogy G-nek nincs köre triviálisan teljesül. Kell, hogy G összefüggő, vagyis tetszőleges v és v' csúcsa között van út. Vegyük a gráfhoz a v-re és v'-re illeszkedő e élet. Az így keletkező körben szerepel e (Miért?):
$v', e, v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v'$. Ekkor $v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v'$ út lesz v és v' között.

Fák

Lemma

Ha egy G véges gráfban nincs kör, de van él, akkor G-nek van legalább 2 elsőfokú csúcsa.

Bizonyítás

A G-beli utak között van maximális hosszúságú (hiszen G véges), és a hossza legalább 1, így a végpontjai különbözőek. Megmutatjuk, hogy ezek elsőfokúak. Legyen az említett út: $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$. Ha lenne az e_1-től különböző v_0-ra illeszkedő e él, annak másik végpontja (v') nem lehet az útban szereplő csúcsoktól különböző, mert akkor $v', e, v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ út hossza nagyobb lenne, mint a maximális út hossza, ami ellentmondás. Ha viszont e másik végpontja az út valamely v_k csúcsa, akkor $v_k, e, v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ kör lenne, ami szintén ellentmondás.

Fák

Tétel

Egy G egyszerű gráfra, amelynek n csúcsa van $(n \in \mathbb{Z}^+)$ a következő feltételek ekvivalensek:

1. G fa;
2. G-ben nincs kör, és $n-1$ éle van;
3. G összefüggő, és $n-1$ éle van.

Bizonyítás

$n = 1$ esetén az állítás triviális. (Miért?)
$(1) \Rightarrow (2)$: n szerinti TI: tfh. $n = k$-ra igaz az állítás. Tekintsünk egy $k+1$ csúcsú G fát. Ennek legyen v egy olyan csúcsa, aminek a foka 1. (Miért van ilyen?) Hagyjuk el a gráfból v-t. Az így kapott gráf, G' nyilván körmentes. Összefüggő is lesz, hiszen v egy G-beli útnak csak kezdő- vagy végpontja lehet, így a G' tetszőleges v' és v'' csúcsa közti G-beli út nem tartalmazhatja sem v-t, sem a rá illeszkedő élt, így G'-beli út is lesz egyben. Tehát G' fa, ezért alkalmazva az indukciós feltevést $k-1$ éle van, és így G-nek k éle van.

Fák

Bizonyítás

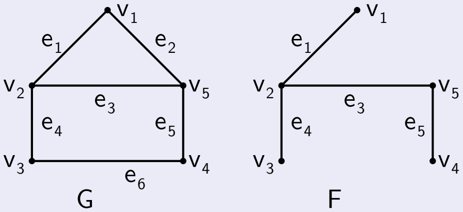
(2) $\Rightarrow$ (3): n szerinti TI: tfh. $n = k$-ra igaz az állítás. Tekintsünk egy $k+1$ csúcsú körmentes G gráfot, aminek k éle van. Ennek legyen v egy olyan csúcsa, aminek a foka 1. (Miért van ilyen?) Hagyjuk el a gráfból v-t. Az így kapott G' gráf az indukciós feltevés miatt összefüggő, tehát tetszőleges v' és v'' csúcsa között vezet út G'-ben, ami tekinthető G-beli útnak is. G' tetszőleges csúcsa és v közötti utat úgy kaphatunk, hogy az adott csúcs és a v-vel szomszédos csúcs közötti utat kiegészítjük az elhagyott éllel és v-vel.
(3) $\Rightarrow$ (1): Ha a feltételnek eleget tevő gráfban van kör, akkor az abban szereplő tetszőleges él elhagyásával összefüggő gráfot kapunk. (Miért?) Folytassuk az élek törlését, amíg már nincs több kör a kapott gráfban, tehát fa lesz. Ha k élt hagytunk el, akkor a kapott gráfnak $n-1-k$ éle van, ugyanakkor az (1) $\Rightarrow$ (2) rész miatt a kapott fának $n-1$ éle van, így $k=0$, tehát a gráfunkban nem volt kör, így fa.

Feszítőfa

Definíció

A G gráf egy F részgráfját a feszítőfájának nevezzük, ha a csúcsainak halmaza megegyezik G csúcsainak halmazával, és fa.

Példa



Feszítőfa

Állítás

Minden összefüggő véges gráfnak létezik feszítőfája.

Bizonyítás

Amíg van kör a gráfban, hagyjuk el annak egy élét. A kapott gráf összefüggő marad. Véges sok lépésben fát kapunk.

Feszítőfa

Állítás

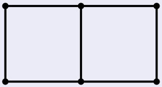
Egy $G = (\varphi, E, V)$ összefüggő véges gráfban létezik legalább $|E| - |V| + 1$ kör, amelyek élhalmaza különböző.

Bizonyítás

Tekintsük G-nek egy F feszítőfáját. Ennek $|V| - 1$ éle van. Jelöljük E'-vel G azon éleinek halmazát, amelyek nem élei F-nek. $e \in E'$-t hozzávéve F-hez keletkezik egy K_e kör (Miért?), ami kör G-ben. A K_e kör tartalmazza e-t (Miért?), és $e \neq e' \in E'$ esetén $K_{e'}$ nem tartalmazza e-t. Így kapunk $|E| - |V| + 1$ kört, amiknek az élhalmaza különbözik.

Megjegyzés

Előfordulhat, hogy a becslés nem pontos ($3 > 7 - 6 + 1 = 2$).



Erdő, feszítőerdő

Definíció

Egy körmentes gráfot erdőnek nevezünk.
Egy gráfnak olyan részgráfját, ami minden komponensből egy feszítőfát tartalmaz, feszítőerdőnek nevezzük.

Állítás

Tetszőleges gráfnak létezik feszítőerdeje.

Állítás

Egy véges erdő éleinek száma a csúcsainak és komponenseinek számának különbsége.

Megjegyzés

A nem összefüggő gráfoknál az erdők, illetve feszítőerdők azt a szerepet töltik be, mint összefüggő gráfok esetén a fák, illetve feszítőfák.