7. hét, 2024. április 9.

Analízis 2A Előadás

Tartalom

a) Motiváció, példa

b) A határozott integrál definíciója

c) Az integrálhatóság átfogalmazásai

MOTIVÁCIÓ

Emlékeztető

A differenciálhányados esetében a bevezető fogalmak: érintő, sebesség.

Később jóval általánosabb alkalmazások.

Határozott integrál: a bevezető fogalom a terület.

A későbbiekben számos alkalmazás a matematikában, a fizikában és a természettudományok egyéb területein. Például: térfogat, ívhossz, felszín, munka, tehetetlenségi nyomaték stb.

Parabola alatti terület kiszámítása

Feladat: Számoljuk ki az $f(x) = x^2$ $(x \in [0, 1])$ grafikonja alatti területet.

Másképp fogalmazva: az xy síkon a normál parabola, az x tengely, és az $x = 2$ egyenes által határolt síkrész területét.

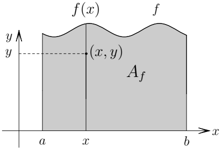
Van-e területe a szóban forgó síkidomnak?

Síkidom területének a problémája

Legyen $f \geq 0$ korlátos függvény az $[a, b]$ intervallumon, és tekintsük az f grafikonja alatti

$$A_f := \{(x, y) \mid x \in [a, b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

síkrészt, síkidomot:



A következő kérdéseket vetjük fel:

i) Hogyan lehet A_f területét kiszámolni?

ii) Egyáltalán, van-e neki területe?

iii) Hogyan értelmezzük a területet?

iv) Mit tudunk eddig a terület fogalmáról? Mik a ”szabályok”?

Visszatérés a parabola alatti terület kiszámítására

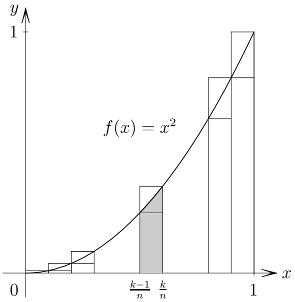
Feladat: Számoljuk ki az $f(x) = x^2$ $(x \in [0,1])$ grafikonja alatti területet.

Rögzítsünk egy $1 \leq n \in \mathbb{N}$ számot, és osszuk fel a $[0,1]$ intervallumot egyenletesen az $x_k := \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ osztópontokkal.

Vessük össze az A_f halmaz $t(A_f)$ területét (ha van) az alábbi ábrán szemléltetett,

i) az A_f halmaz által tartalmazott úgynevezett beírt, valamint

ii) az A_f halmazt lefedő úgynevezett körülírt téglalapokkal.



A $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ intervallum fölé rajzolt beírt téglalap területe:

$f(\frac{k-1}{n})\cdot\frac{1}{n}=\frac{(k-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}=(k-1)^2\cdot\frac{1}{n^3}.$

Hasonlóan, a $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ intervallum fölé rajzolt körülírt téglalap területe:

$f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\frac{k^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}=k^2\cdot\frac{1}{n^3}.$

Jelölje s_n, illetve S_n a szóban forgó téglalapok területeinek az összegét.

Ekkor

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\frac{1}{n^3}\qquad \text{és}\qquad S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2\frac{1}{n^3}\,.$$

Ha $t(A_f)$ jelöli az A_f sík rész területét, akkor nyilvánvalóan fennáll az

$$s_n\le t(A_f)\le S_n\qquad (n\in\mathbb{N})$$

egyenlőtlenség.

Mivel

$$\sum_{j=1}^{m} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \qquad (1 \leq m \in \mathbb{N}),$$

ezért

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 \frac{1}{n^3} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{1}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) .$$

Világos, hogy $(s_n) \uparrow$, és $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3}$.

Hasonlóan, $(S_n) \downarrow$, és $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

Innen az adódik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3} \leq t(A_f) \qquad \text{és} \qquad t(A_f) \leq \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Következéséppen, egyetlen egy szám elégíti ki a feltételeket, és ez az $\frac{1}{3}$.

Azt kaptuk, hogy $t(A_f)$ csak $\frac{1}{3}$ lehet.

Kézenfekvő tehát azt mondani, hogy az A_f halmaznak van területe, és az legyen $1/3$.

A HATÁROZOTT INTEGRÁL ÉRTELMEZÉSE

A továbbiakban $[a, b]$ mindig egy korlátos és zárt $\mathbb{R}$-beli intervallumot jelöl, azaz $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. A határozott integrál fogalmát adott $[a, b]$-n értelmezett korlátos függvényekre vezetjük be. Jelöljük az ilyen függvények halmazát $K[a, b]$-vel:

$$K[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ korlátos } [a, b]\text{-n}\}.$$

Definíció

Az $[a, b]$ intervallum olyan véges részhalmazait, amik tartalmazzák az intervallum végpontjait, azaz az a, b pontokat az $[a, b]$ intervallum felosztásainak nevezzük.

Az $[a, b]$ intervallum felosztásainak a halmazát $\mathcal{F}[a, b]$-vel jelöljük.

A fentiek alapján

$$\tau \in \mathcal{F}[a, b] \quad \Longleftrightarrow \quad i) \ \tau \subset [a, b], \quad ii) \ \tau \text{ véges halmaz}, \quad iii) \ a, b \in \tau\,.$$

Ha $\tau \in \mathcal{F}[a, b]$, akkor $\exists \ n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\tau := \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}\,.$$

Definíció

Legyen $\tau \in \mathcal{F}[a, b]$, $\tau := \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$.

A

$$\|\tau\| := \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \ldots, n\}$$

számot a τ felosztás finomságának nevezzük.

Megjegyzés: Ha τ_1, $\tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$, akkor $\tau_1 \cup \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$, és $\tau_1 \cap \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$.

Definíció

Legyen $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$. Ha $\tau_1 \subset \tau_2$, akkor azt mondjuk, hogy τ_2 egy finomítása a τ_1-nek.

Ekkor τ_2 a τ_1-ből újabb osztópontok hozzáadásával származtatható.

Definíció

Legyen $f \in K[a,b]$, $\tau \in \mathcal{F}[a,b]$, $\tau = \{a = x_0 < x_1, \ldots, x_n = b\}$, továbbá

$$m_i := \inf \left\{ f(x) \ : \ x_{i-1} \le x \le x_i \right\} = \inf f_{\big|[x_{i-1}, x_i]} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

és

$$M_i := \sup \left\{ f(x) \ : \ x_{i-1} \le x \le x_i \right\} = \sup f_{\big|[x_{i-1}, x_i]} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Az

$$s(f,\tau) := \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})\,, \qquad S(f,\tau) := \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

számokat az f függvény τ felosztáshoz tartozó alsó, illetve felső közelítő összegének nevezzük.

Megjegyzések:

i) Mivel f korlátos $[a,b]$-n, ezért m_i és a M_i valós számok.

ii) Az $\inf$, ill. a $\sup$ helyett általában nem vehetünk $\min$-ot, ill. $\max$-ot.

iii) Ha $f \geq 0$, akkor az s_n összegben szereplő $m_i(x_i - x_{i-1})$ $(i = 1, \ldots s, n)$ tag az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallum fölé rajzolt beírt téglalap területe.

Ha $f \geq 0$, akkor az S_n összegben szereplő $M_i(x_i - x_{i-1})$ $(i = 1, \ldots s, n)$ tag az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallum fölé rajzolt körülírt téglalap területe.

iv) $f \geq 0$ esetén az s_n alsó közelítő összeg a τ felosztáshoz tartozó beírt téglalapok területének az összege. Hasonlóan, S_n a körülírt téglalapok területének az összege.

Vizsgáljuk meg a közelítő összegek halmazának a szerkezetét.

Erre vonatkozik a következő tétel.

Tétel

Legyen $f \in K[a,b]$, és tegyük fel, hogy $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$.

Ekkor az alábbi állítások igazak.

i) Ha τ_2 finomabb τ_1-nél (, azaz $\tau_1 \subset \tau_2$), akkor

$$s(f,\tau_1) \le s(f,\tau_2) \qquad \text{és} \qquad S(f,\tau_1) \ge S(f,\tau_2)\,.$$

Szóban kifejezve: felosztás finomításakor az alsó közelítő összeg nem csökken, a felső közelítő összeg pedig nem nő.

ii) Tetszőleges $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$ esetén

$$s(f,\tau_1) \le S(f,\tau_2)\,.$$

Szóban kifejezve: bármely felosztáshoz tartozó alsó közelítő összeg kisebb, vagy egyenlő mint akármelyik felosztáshoz tartozó felső közelítő összeg.

Bizonyítás

i) Elég azt az esetet igazolnunk, amikor τ_2 csak eggyel több pontot tartalmaz, mint τ_1, ugyanis egy-egy pont hozzádásával véges sok lépésben megkaphatjuk τ_1-ből τ_2-t.

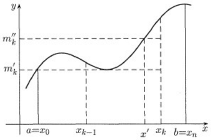
Legyen tehát most $\tau_2 := \tau_1 \cup \{x'\}$, ahol $\tau_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.

Ekkor van olyan $k \in \{1, \ldots, n\}$, amelyre $x_{k-1} < x' < x_k$.

Mivel $[x_{k-1}, x'] \subset [x_{k-1}, x_k]$ és $[x', x_k] \subset [x_{k-1}, x_k]$, ezért a bevezetett jelöléseket használva

$$m_k = \inf f\big|_{[x_{k-1},x_k]} \le \inf f\big|_{[x_{k-1},x']} =: m_k'$$

$$m_k = \inf f\big|_{[x_{k-1},x_k]} \le \inf f\big|_{[x',x_k]} =: m_k''\,.$$



Mivel az x'-t nem tartalmazó $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumokhoz tartozó tagok az $s(f, \tau_1)$ és az $s(f, \tau_2)$ összegekben megegyeznek, ezért

$$s(f, \tau_2) - s(f, \tau_1) = m_k'(x' - x_{k-1}) + m_k''(x_k - x') - m_k(x_k - x_{k-1}) \ge$$
$$m_k(x' - x_{k-1}) + m_k(x_k - x') - m_k(x_k - x_{k-1}) = 0\,.$$

Bizonyítás (folytatás)

Azt kaptuk, hogy $s(f,\tau_2) \geq s(f,\tau_1)$, tehát egy osztópont hozzávételével az alsó összeg nem csökkenhet.

A felső közelítő összegekre vonatkozó állítás hasonlóan adódik a

$$M_k = \sup f\big|_{[x_{k-1},x_k]} \geq \sup f\big|_{[x_{k-1},x']} =: M_k'$$
$$M_k = \sup f\big|_{[x_{k-1},x_k]} \geq \sup f\big|_{[x',x_k]} =: M_k''.$$

egyenlőtlenségekből.

ii) Legyenek $\tau_1,\ \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges felosztások, és tekintsük a $\tau := \tau_1 \cup \tau_2$ felosztást.

Világos, hogy τ mind τ_1-nek, mind pedig τ_2-ek a finomítása.

Innen az i) állítást alkalmazva adódik, hogy

$$s(f,\tau_1) \leq s(f,\tau) \leq S(f,\tau) \leq S(f,\tau_2)\,. \quad \square$$

Definíció (Darboux-féle alsó integrál)

Legyen $f \in K[a,b]$.

Az alsó közelítő összegek szuprémumát, azaz az

$$I_* f := \sup\{s(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} \in \mathbb{R}$$

számot az f függvény Darboux-féle alsó integráljának nevezzük.

Megjegyzés: Mivel az f függvény bármely felső közelítő összege felső korlátja az alsó közelítő összegek halmazának, ezért $I_* f$ valós szám.

Definíció (Darboux-féle felső integrál)

Legyen $f \in K[a,b]$.

A felső közelítő összegek infímumát, azaz az

$$I^* := f \inf\{S(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} \in \mathbb{R}$$

számot az f függvény Darboux-féle felső integráljának nevezzük.

Megjegyzések: Mivel az f függvény bármely alsó közelítő összege alsó korlátja az felső közelítő összegek halmazának, ezért $I^* f$ valós szám.

A fentiekből az is világos, hogy $I_*(f)$ és $I^*(f)$ minden $f \in K[a,b]$ függvényre létezik és

$$I_*(f) \le I^*(f) \qquad \big(\forall\, f \in K[a,b]\big).$$

Definíció (Riemann-integrálhatóság)

Azt mondjuk, hogy az $f \in K[a,b]$ függvény Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon (röviden integrálható $[a,b]$-n), ha

$$I_*(f) = I^*(f).$$

Ezt a számot az f függvény $[a,b]$ intervallumon vett Riemann-integráljának (vagy más szóval határozott integráljának) nevezzük, és a következőképpen jelöljük:

$$\int_a^b f \qquad \text{vagy} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

$R[a,b]$-val fogjuk jelölni az $[a,b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvények halmazát.

A következő kérdéseket fogjuk megvizsgálni.

i) Milyen függvények integrálhatók?

ii) Hogyan lehet az $\int_a^b f$ integrált kiszámítani?

iii) Mire lehet a határozott integrált alkalmazni?

Példa nem integrálható függvényre

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy minden $\tau \in \mathcal{F}[0,1]$ esetén $s(f,\tau) = 0$ és $S(f,\tau) = 1$.

Ekkor $I_*(f) = 0$ és $I^*(f) = 1$, ezért $f \notin R[0,1]$.

Egyszerű példa integrálható függvényre

Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. A definíció alapján mutassuk meg, hogy tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén az $f(x) := c \ \big(x \in [a,b]\big)$ függvény integrálható az $[a,b]$ intervallumon, és $\int_a^b f(x)\,dx = c \cdot (b-a)$.

Megoldás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$.

Ekkor

$$m_i = \inf f_{\big|[x_{i-1},x_i]} f = \sup f_{\big|[x_{i-1},x_i]} f = M_i = c$$

minden $i = 1, 2, \ldots, n$ indexre.

Mivel

$$s(f,\tau) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = c \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = c \cdot (b-a),$$

$$S(f,\tau) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = c \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = c \cdot (b-a),$$

ezért

$$I_*(f) = \sup\{s(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} = c \cdot (b-a),$$
$$I^*(f) = \inf\{S(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} = c \cdot (b-a).$$

Így $I_*(f) = I^*(f) = c \cdot (b-a)$, ez pedig azt jelenti, hogy $f \in R[a,b]$, és $\int_a^b f(x)\,dx = c \cdot (b-a)$. $\square$

Megjegyzés: Később jól használható feltételeket igazolunk függvény integrálhatóságára.

A terület fogalma

Az előző meggondolásainkból, eredményeinkből következik, hogy $f \in K[a,b]$, $f \geq 0$ esetén az f grafikonja alatti síkidom területét a következőképpen célszerű értelmezni.

Definíció

Legyen $f \in K[a,b]$, $f \geq 0$.

Azt mondjuk, hogy az f grafikonja alatti

$$A_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

síkidomnak van területe, ha $f \in R[a,b]$.

Ekkor a

$$t(A_f) := \int_a^b f(x)\,dx$$

valós számot az A_f síkidom területének nevezzük.

Megjegyzés: Az integrálhatóság igazolása, és az integrál kiszámítása általában nem egyszerű feladat. Az eddigi példákban az volt a „szerencse”, hogy az egyenletes felosztás esetén az alsó-, ill. a felső közelítő öszegekre van zárt képlet, és a sorozatuk határértéke ugyanaz.

Az integrálhatóság ekvivalens átfogalmazásai

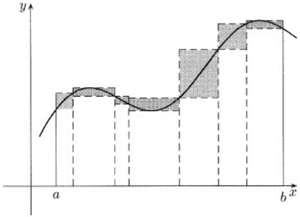
Definíció (Oszcillációs összegek)

Ha $f \in K[a, b]$ és $\tau \in \mathcal{F}[a, b]$, akkor az

$$\Omega(f, \tau) := S(f, \tau) - s(f, \tau)$$

számot az f függvény τ felosztáshoz tartozó oszcillációs összegének nevezzük.

Szemléltetés:



$\Omega(f, \tau)$ a jelölt téglalapok területeinek az összege.

A definíció alapján várható, hogy az integrálhatóságnak van kapcsolata az oszcillációs összegekkel.

Az integrálhatóság jellemzése oszcillációs összegekkel

Tétel

$$f \in R[a,b] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\ \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, \tau \in \mathcal{F}[a,b]\,, \quad \text{amelyre} \quad \Omega(f,\tau) < \varepsilon\,.$$

Bizonyítás

$\Longrightarrow$ Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$, azaz $I_*(f) = I^*(f) =: I(f)$.

$\sup\{s(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} = I_*(f) = I(f) \implies$ (a sup def.)

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, \tau_1 \in \mathcal{F}[a,b]: \; I(f) - \tfrac{\varepsilon}{2} < s(f,\tau_1) \le I(f);$$

$\inf\{S(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} = I^*(f) = I(f) \implies$ (az inf def.)

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]: \; I(f) \le S(f,\tau_2) < I(f) + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $\tau := \tau_1 \cup \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$. Ekkor τ finomítása τ_1, τ_2-nek, ezért

$$\begin{aligned} I(f) - \frac{\varepsilon}{2} &< s(f,\tau_1) \le s(f,\tau) \le I_*(f) \\ &\le I^*(f) \le S(f,\tau) \le S(f,\tau_2) \le I(f) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Következésképpen

$$\Omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon.$$

Bizonyítás (folytatás)

$\Longleftarrow$ Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A feltétel szerint van olyan $\tau \in \mathcal{F}[a, b]$, amelyre $\Omega(f, \tau) < \varepsilon$.

Mivel $s(f, \tau) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S(f, \tau)$, ezért

$$0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq S(f, \tau) - s(f, \tau) = \Omega(f, \tau) < \varepsilon\,.$$

Következésképpen

$$0 \leq I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0\,,$$

ami azt jelenti, hogy $I^*(f) - I_*(f) = 0$, azaz $I^*(f) = I_*(f)$, és így $f \in R[a, b]$. $\square$

Megjegyzés: Az oszcillációs összeg segítségével csak az integrálhatóságot tudjuk igazolni, magát az integrál értékét nem tudjuk kiszámolni.

Az integrálhatóság jellemzése sorozatokkal

Tétel

$f \in R[a,b]$ és $\int_a^b f = I$ akkor és csak akkor, ha

$\exists$ olyan $\tau_n \in \mathcal{F}[a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$ felosztássorozat, amelyre

$$\lim_{n\to+\infty} s(f,\tau_n) = \lim_{n\to+\infty} S(f,\tau_n) = I.$$

Bizonyítás

$\Longrightarrow$ Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$ és $\int_a^b f = I$.

Ekkor $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re $\exists$ $\tau_n^{(1)} \in \mathcal{F}[a,b]$, amelyre

$$I_*(f) - \frac{1}{n} < s\big(f, \tau_n^{(1)}\big)\,.$$

Hasonlóan, $\exists$ $\tau_n^{(2)} \in \mathcal{F}[a,b]$, amelyre

$$S\big(f, \tau_n^{(2)}\big) < I^*(f) + \frac{1}{n}\,.$$

Legyen $\tau_n = \tau_n^{(1)} \cup \tau_n^{(2)}$). Ez mindkét felosztás finomítása, ezért

$$I - \frac{1}{n} = I_*(f) - \frac{1}{n} < s(f,\tau_n) \le I \le S(f,\tau_n) < I^*(f) + \frac{1}{n} = I + \frac{1}{n}\,.$$

Az $n \to +\infty$ határátmenetet véve azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} s(f,\tau_n) = \lim_{n\to+\infty} S(f,\tau_n) = I.$$

Bizonyítás (folytatás)

$\Longleftarrow$ Tegyük fel, hogy $\tau_n \in \mathcal{F}[a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan felosztássorozat, amelyre

$$\lim_{n\to+\infty} s(f,\tau_n) = \lim_{n\to+\infty} S(f,\tau_n) = I\,.$$

Ekkor

$$s(f,\tau_n) \le I_*(f) \quad \text{miatt} \quad I \le I_*(f)\,,$$

valamint

$$S(f,\tau_n) \ge I^*(f) \quad \text{miatt} \quad I \ge I^*(f)\,.$$

Azt kaptuk, hogy $I \le I_*(f) \le I^*(f) \le I$.

Következésképpen $I = I_*(f) = I^*(f)$, tehát $f \in R[a,b]$ és $\int\limits_a^b f = I$. $\square$

Az integrálhatóság jellemzése Riemann-féle közelítő összegekkel

Definíció

Legyen $f \in K[a,b]$, és $\tau = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$.

Tegyük fel, hogy $\xi := \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ olyan vektor, hogy az elemeire $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Ekkor a

$$\sigma(f, \tau, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

összeget az f függvény τ felosztáshoz és a ξ közbülső helyekhez tartozó Riemann-féle közelítő összegének nevezzük.

Megjegyzés: A definícióból nyilvánvaló, hogy $s(f,\tau) \le \sigma(f,\tau,\xi) \le S(f,\tau)$.

Tétel

$f \in R[a,b]$ és $\int_a^b f = I$ akkor és csak akkor, ha

$$\forall \ \varepsilon > 0\text{-hoz} \ \exists \ \delta > 0 \text{ olyan, hogy}$$

$\forall \, \tau \in \mathcal{F}[a,b], \ \|\tau\| < \delta$ és ahhoz tartozó ξ közbülső helyek esetén fennáll a

$$\left|\sigma(f,\tau,\xi) - I\right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás nélkül.

Megjegyzés

Történeti utalások: (l. `MacTutor History of Mathematics`)

A matematikai analízis alapgondolatának a felfedezése – vagyis hogy a keresett mennyiséget tetszőleges pontossággal való megközelítések segítségével határozzuk meg – **Eudoxus** (i.e. 408–355) nevéhez fűződik, aki megalkotta a *kimerítés módszerét*.

Arkhimédész (i.e. 287–212) minden idők egyik legnagyobb, de az ókornak minden bizonnyal legnagyobb matematikusa volt. A kimerítés módszerét továbbfejlesztve kiszámította különböző görbevonalú idomok (pl. parabolaszelet) területét, meghatározta a gömb térfogatát és felszínét, bizonyos spirálok ívhosszúságát, vizsgálta a forgási paraboloidokat és hiperboloidokat. Munkásságának nagyobb része elveszett, de így is hatalmas művet hagyott hátra. Meg kell jegyezni azonban azt is, hogy gondolatai nagyon sokáig nem találtak méltó folytatásra.

Az analízis mint széles körben alkalmazható általános módszer, mint tudományág csak akkor született meg, amikor XVII. századi európai matematikusok kidolgoztak egy elméletet, az ún. **kalkulust** vagy a mai szóval **differenciálszámítást**. Ezt nagy matematikusok sora (*Barrow, Cavalieri, Fermat, Kepler* és sokan mások) fejlesztették ki, majd *Isaac* ***Newton*** (1643–1727) és *Gottfried Wilhelm* ***Leibniz*** (1646–1716) foglalták össze. Így a század végére már megérett az idő egy nagyszabású monográfia megírására. Ez ***L'Hospital*** (1661–1704) *Infinitézimál-számítás* (azaz végtelen kicsiny mennyiségekkel való számolás) című műve volt (1696), amely csaknem 100 évig a téma legfontosabb tankönyve maradt.

A kalkulust kezdettől fogva sok kritika és támadás érte – tegyük hozzá teljes joggal. A módszer logikai tisztasága nagyon is vitatható volt, mert homályos fogalmakkal dolgozott, és a gondolatmenetei néha zavarosak voltak. Mert pl. mit jelent az, hogy végtelenül kicsiny mennyiség? A kalkulus körüli vita egészen a XIX. század végéig zajlott, és nemegyszer filozófiai síkra terelődött (Berkeley, Hegel).
Ezeket a belső problémákat végül mégis a matematikusok oldották meg a XIX. században, amennyiben a kalkulus intuitív, de homályos és ellentmondásos fogalmait precízen definiált matematikai fogalmakkal helyettesítették. A változó mennyiség fogalmát a függvény fogalmával, a differenciált a határértékkel, a differenciálhányadost pedig a deriválttal váltották fel. Ennek a tisztázási folyamatnak az eredményeképpen – amelyben *Augustin* ***Cauchy*** (1789–1857), *Karl* ***Weierstrass*** (1815–1897) és *Richard* ***Dedekind*** (1831–1916) vállaltak úttörő szerepet – a XIX. század végére a **differeciál- és integrálszámítás** (röviden **analízis**) elérte a logikai tisztaságnak azt a fokát, amelyet a matematika megkövetel.

Az analízis precíz elméletének kidolgozása az újkori nyugati kultúra egyik legnagyobb szellemi teljesítménye volt. Ne csodálkozzunk hát, ha ezt az elméletet – főleg az alapjait, mindenekelőtt pedig annak centrális fogalmát, a határértéket – nehéznek találjuk.