Diszkrét matematika

2. gyakorlat:

Relációk tulajdonságai, osztályfelbontás, ekvivalenciareláció

(A diasort készítette Németh Gábor Árpád, Koch-Gömöri Richárd feladait, Gonda János bizonyítás ötleteit, Nagy Gábor előadás diasorát (aki Mérai László előadás diasorát használta fel) és Kovács Attila Az informatika matematikai alapjai című jegyzetét is felhasználva)

1. feladat:

Legyen A={1, 2, 3, 4} és B={5, 6, 7, 8, 9}. Tekintsük a következő $\rho \subseteq A \times B$ binér (kétváltozós) relációt:

$\rho = \{(1,5), (1,6), (1,7), (3,6), (3,9), (4,5), (4,7), (4,9)\}$.

a) Határozza meg a ρ reláció értelmezési tartományát (dmn) és értékkészletét (rng).

b) Rajzolja meg a reláció gráfját.

c) Legyen $H_1=\{1, 2, 3\}$ és $H_2 =\{4\}$. Határozza meg a ρ reláció H_1 illetve H_2 halmazra való leszűkítését.

d) A következő relációk közül melyek lehetnek a ρ reláció kiterjesztései?

- $\rho_1=\{(1,5), (1,6), (1,7), (2,2), (2,4), (3,6), (3,9), (4,3), (4,5), (4,7), (4, 9)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} X \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $\rho_2 =\{(1,5), (1,6), (1,7), (3,6), (3,8), (4,5), (4,6), (4,7), (4,9)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{5, 6, 7, 8, 9\}$
- $\rho_3 =A \times B$
- $\rho_4 =B \times A$

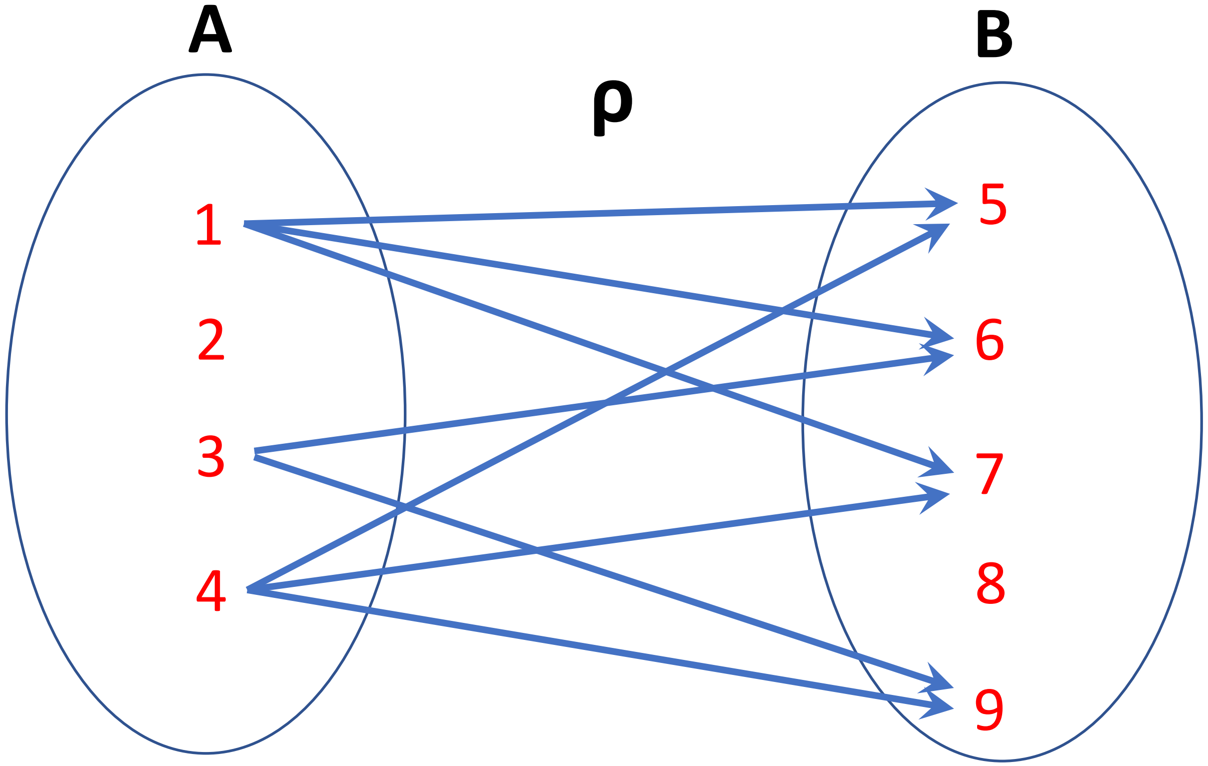
e) Határozza meg a ρ reláció inverzét, $\rho(\{1, 2\})$ képet és $\rho^{-1}(\{5, 6\})$ inverz képet.

1. feladat:

Legyen $A=\{1, 2, 3, 4\}$ és $B=\{5, 6, 7, 8, 9\}$. Tekintsük a következő $\rho \subseteq A \times B$ binér (kétváltozós) relációt:
$\rho = \{(1,5), (1,6), (1,7), (3,6), (3,9), (4,5), (4,7), (4,9)\}$.

a) Határozza meg a ρ reláció értelmezési tartományát (dmn) és értékkészletét (rng).
   - ÉT: $dmn(\rho)=\{x \in A \mid y \in B: (x,y) \in \rho\}=\{1,3,4\}$
   - ÉK: $rng(\rho) =\{y \in B \mid x \in A: (x,y) \in \rho\}=\{5,6,7,9\}$

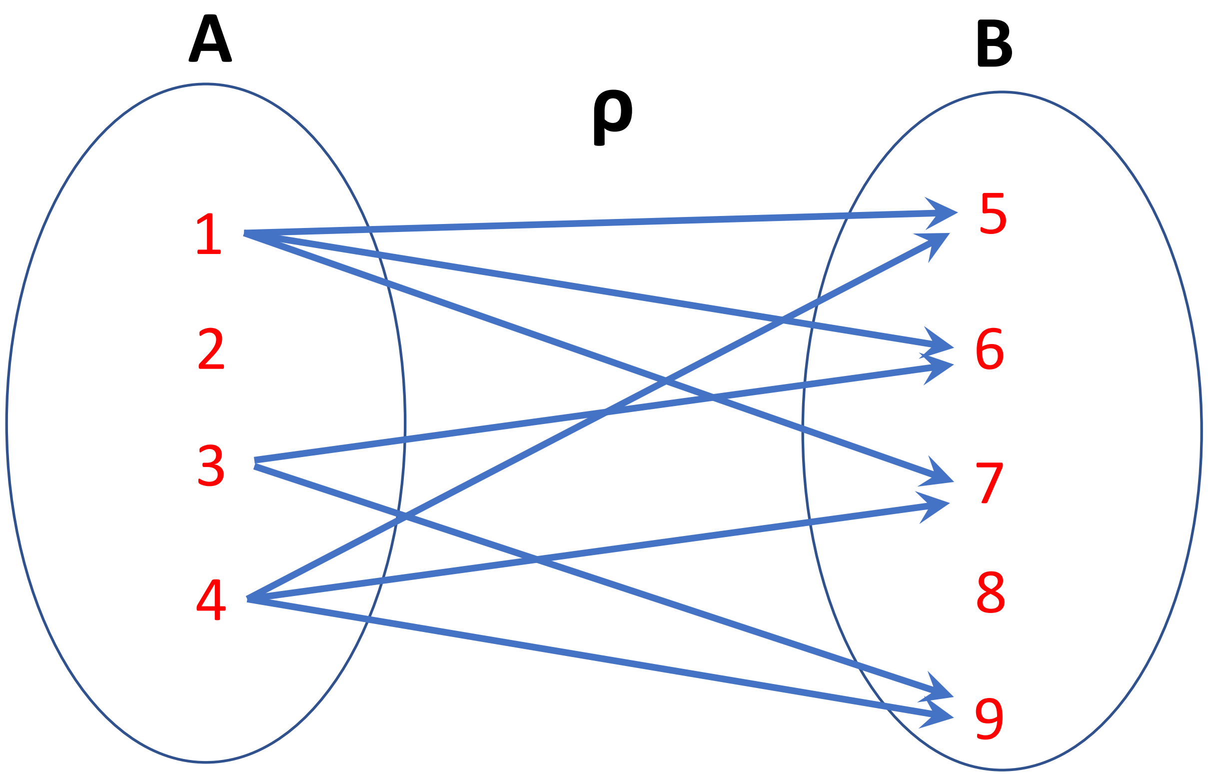
b) Rajzolja meg a reláció gráfját.



1. feladat:

Legyen A={1, 2, 3, 4} és B={5, 6, 7, 8, 9}. Tekintsük a következő $\rho \subseteq A \times B$ binér (kétváltozós) relációt:
$\rho = \{(1,5), (1,6), (1,7), (3,6), (3,9), (4,5), (4,7), (4,9)\}$.

c) Legyen $H_1=\{1, 2, 3\}$ és $H_2 =\{4\}$. Határozza meg a ρ reláció H_1 illetve H_2 halmazra való leszűkítését.



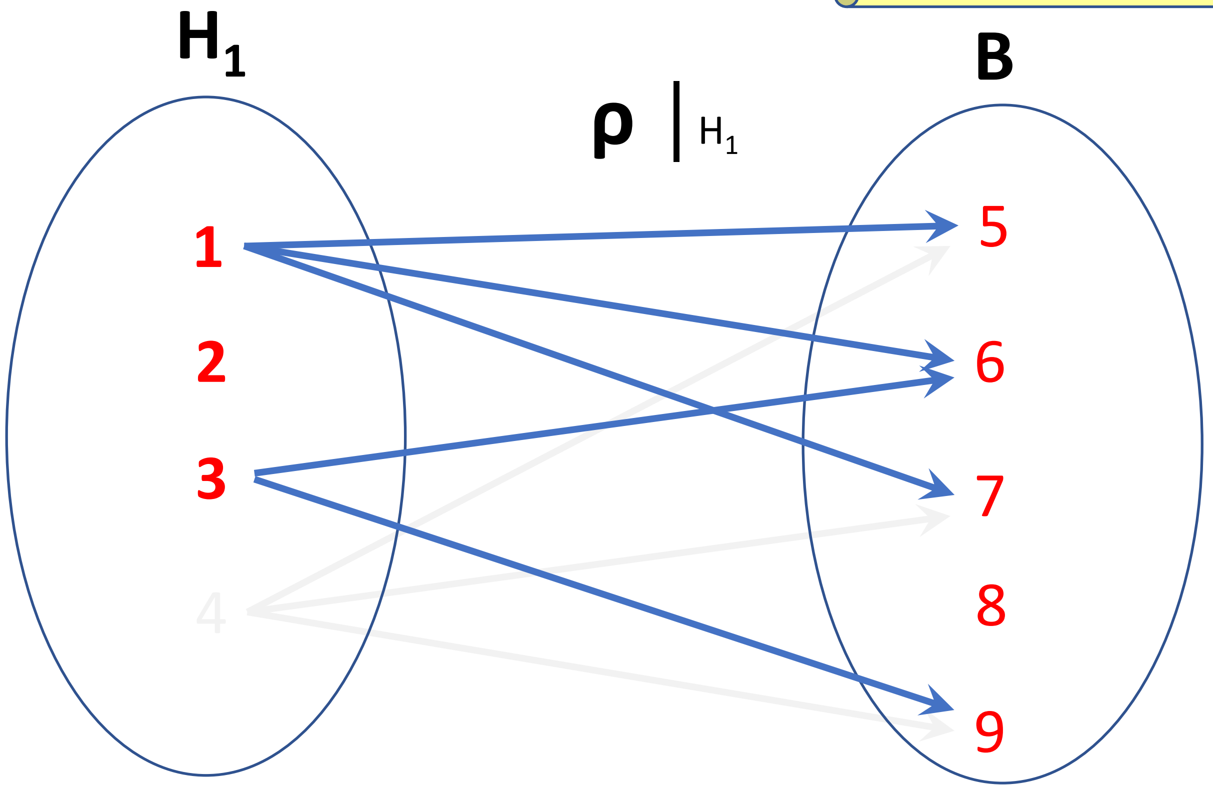
1. feladat:

Legyen A={1, 2, 3, 4} és B={5, 6, 7, 8, 9}. Tekintsük a következő $\rho \subseteq A \times B$ binér (kétváltozós) relációt:
ρ = {(1,5), (1,6), (1,7), (3,6), (3,9), (4,5), (4,7), (4,9)}.

c) Legyen H_1={1, 2, 3} és H_2 ={4}. Határozza meg a ρ reláció H_1 illetve H_2 halmazra való leszűkítését.

$\rho|_{H_1}$= {(1,5), (1,6), (1,7), (3,6), (3,9)}

Def.: ρ reláció Q halmazra történő leszűkítése:
$\rho|_Q$={(x,y)∈ ρ: x∈ Q}
(ahol most x∈A és y x∈B, $\rho \subseteq A \times B$)



1. feladat:

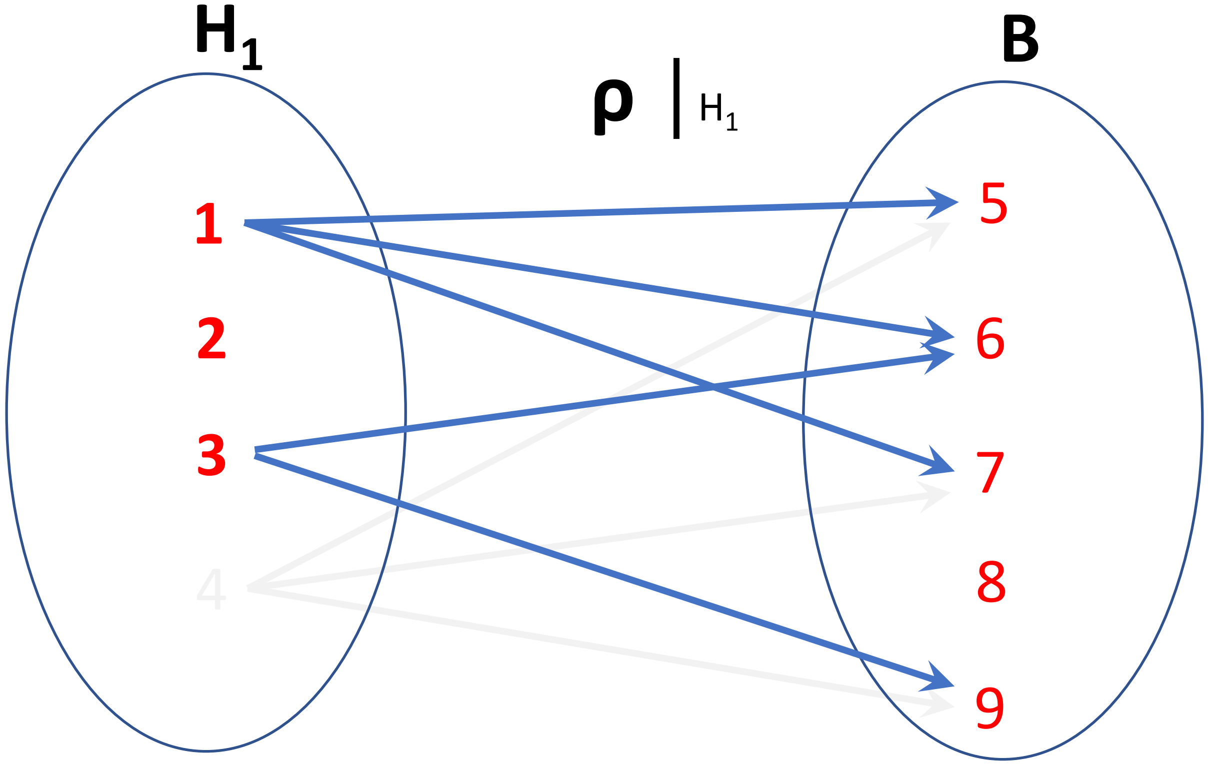
Legyen A={1, 2, 3, 4} és B={5, 6, 7, 8, 9}. Tekintsük a következő $\rho \subseteq A \times B$ binér (kétváltozós) relációt:
$\rho = \{(1,5), (1,6), (1,7), (3,6), (3,9), (4,5), (4,7), (4,9)\}$.

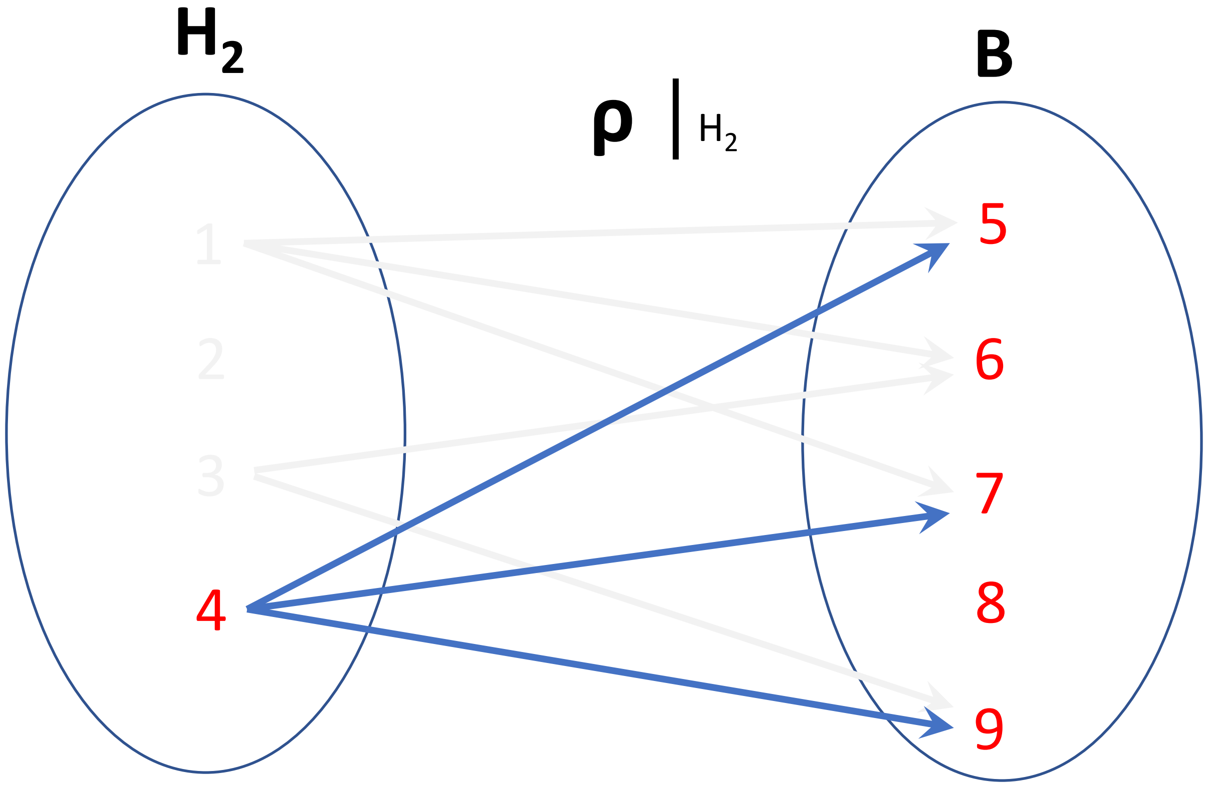
c) Legyen H_1={1, 2, 3} és H_2 ={4}. Határozza meg a ρ reláció H_1 illetve H_2 halmazra való leszűkítését.

$\rho|_{H_1} = \{(1,5), (1,6), (1,7), (3,6), (3,9)\}$

$\rho|_{H_2} = \{(4,5), (4,7), (4,9)\}$

Def.: ρ reláció Q halmazra történő leszűkítése:
$\rho|_Q=\{(x,y)\in \rho: x\in Q\}$
(ahol most $x\in A$ és y $x\in B$, $\rho \subseteq A \times B$)





1. feladat:

Legyen A={1, 2, 3, 4} és B={5, 6, 7, 8, 9}. Tekintsük a következő $\rho \subseteq A \times B$ binér (kétváltozós) relációt:
$\rho = \{(1,5), (1,6), (1,7), (3,6), (3,9), (4,5), (4,7), (4,9)\}$.

d) A következő relációk közül melyek lehetnek a ρ reláció kiterjesztései?

Def.: R relációt a ρ reláció kiterjesztésének nevezzük, ha $\rho \subseteq R$

- $\rho_1=\{(1,5), (1,6), (1,7), (2,2), (2,4), (3,6), (3,9), (4,3), (4,5), (4,7), (4, 9)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
  - ρ reláció kiterjesztése, mert:

    $\rho_1 =\{(1,5), (1,6), (1,7), (2,2), (2,4), (3,6), (3,9), (4,3), (4,5), (4,7), (4, 9)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $\rho_2 =\{(1,5), (1,6), (1,7), (3,6), (3,8), (4,5), (4,6), (4,7), (4,9)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{5, 6, 7, 8, 9\}$
  - NEM ρ reláció kiterjesztése, mert:

    $\rho_2 =\{(1,5), (1,6), (1,7), (3,6), (3,8), \cancel{(3,9)}, (4,5), (4,6), (4,7), (4,9)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{5, 6, 7, 8, 9\}$
- $\rho_3 =A \times B$
  - A ρ reláció kiterjesztése, mert $\rho \subseteq \rho_3 = A \times B$
- $\rho_4 =B \times A$
  - NEM ρ reláció kiterjesztése, mert $\rho \subseteq \rho_4$ nem áll fenn *(ρ^{-1} inverz reláció kiterjesztése amúgy)*

1. feladat:

Legyen A={1, 2, 3, 4} és B={5, 6, 7, 8, 9}. Tekintsük a következő $\rho \subseteq A \times B$ binér (kétváltozós) relációt:
$\rho = \{(1,5), (1,6), (1,7), (3,6), (3,9), (4,5), (4,7), (4,9)\}$.
e) Határozza meg a ρ reláció inverzét, ρ({1, 2}) képet és $\rho^{-1}(\{5, 6\})$ inverz képet.

Def.: ρ reláció inverze: $\rho^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \rho\}$
(ahol most x∈A és y x∈B, ρ ⊆ A × B)

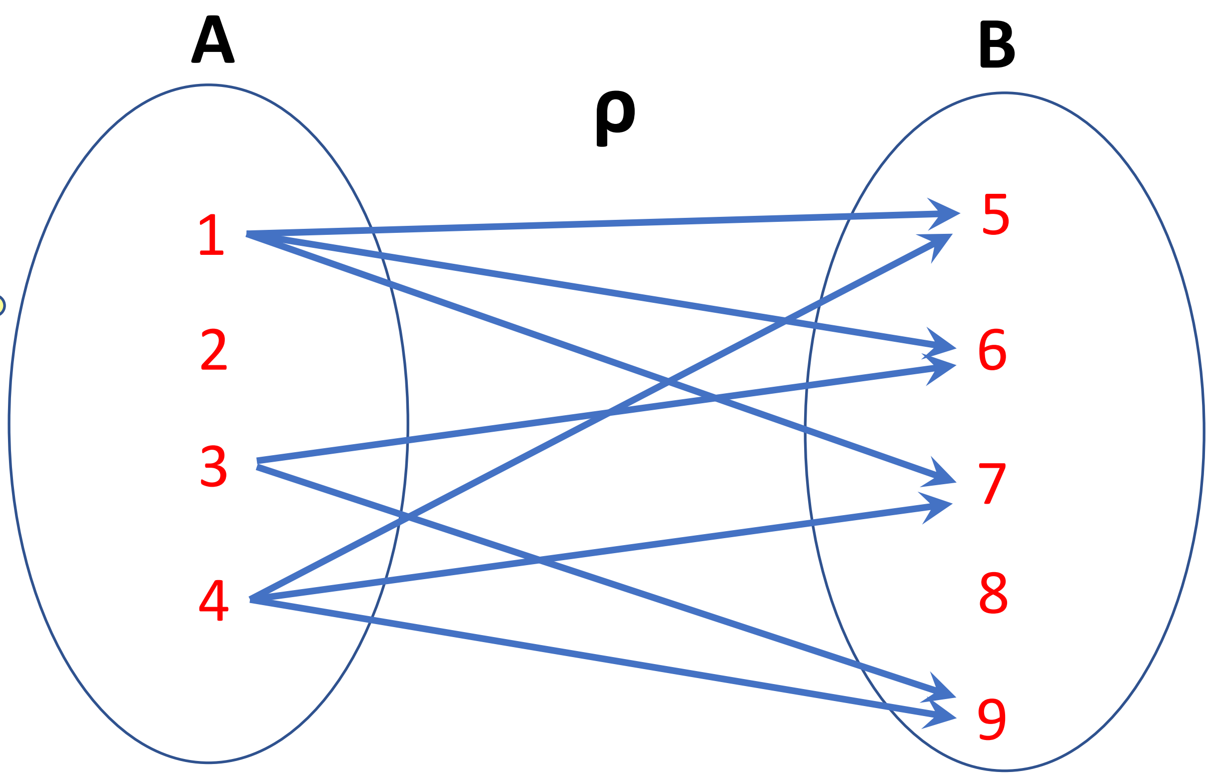
- $\rho^{-1} = \{(5,1),(5,4),(6,1),(6,3),(7,1),(7,4),(9,3),(9,4)\}$

Def.: A C halmaz ρ reláció szerinti képe:
$\rho(C)=\{y \in B \mid \exists x \in C: (x,y) \in \rho\}$

- ρ({1, 2})={5, 6, 7} *(ρ {1, 2} halmazra szűkítésének az értékkészlete)*

Def.: Adott C halmaz inverz képe, vagy teljes ősképe az $\rho^{-1}(C)$ vagyis a C halmaz ρ^{-1} szerinti képe

- $\rho^{-1}(\{5, 6\})=\{1, 3, 4\}$



2. feladat:

Legyen $\rho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ és $\rho = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | a = 2b\}$.
Határozza meg…

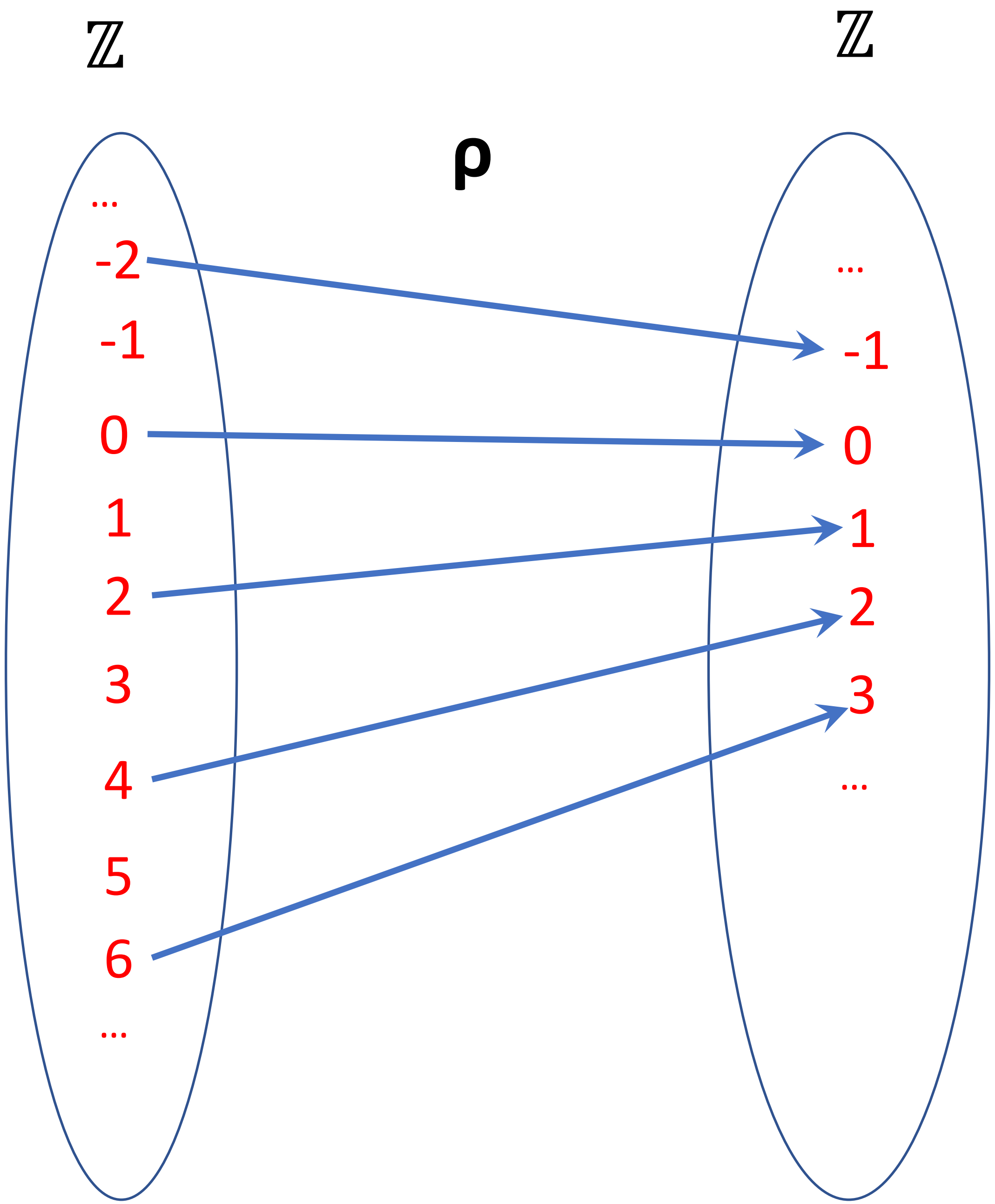
a) a ρ reláció értelmezési tartományát:
   a=2b páros egész szám, tehát
   dmn(ρ)= $2\mathbb{Z} = \{2u | u \in \mathbb{Z}\}$

b) a ρ reláció érték készletét:
   rng(ρ)= $\mathbb{Z}$.

c) a ρ reláció inverzét:
   (a,b) $\in \rho^{-1}$ *iff*, ha $(b,a) \in \rho$, azaz b=2a, tehát:
   $$\rho^{-1} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | 2a = b\}.$$

d) a ρ reláció ρ({3,4,…10}) képét:
   ρ({3,4,…10})={2,3,4,5}

e) és ρ reláció leszűkítését {1,2,…6}-ra:
   $\rho|_{\{1,2,\dots 6\}}$ = *{(2,1),(4,2)(6,3)}*



3. feladat:

Az $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = 2 - x - x^2\}$ relációra határozza meg a $\{0\}$ halmaz képét és teljes inverz képét. Mely $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazokra lesz $R(A)$, illetve $R^{-1}(A)$ egyelemű?

Házi feladat

4. feladat:

Legyen $\rho \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ reláció.
Döntse el, hogy az alábbiakból mely reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus vagy tranzitív:

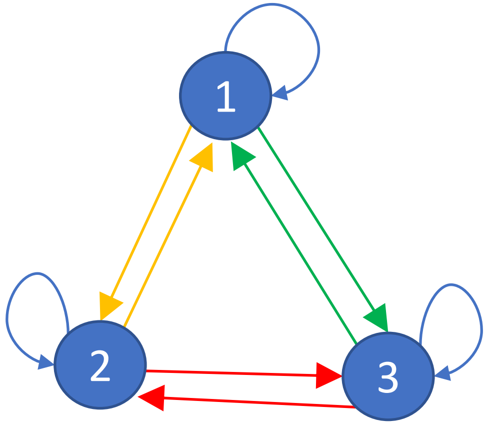
a) $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
b) $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$
c) $\rho = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$
d) $\rho = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$
e) $\rho = \{(1, 2)\}$
f) $\rho = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
g) $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$
h) $\rho = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;
7. R trichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül;
8. R dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén xRy vagy yRx (esetleg mindkettő).

4. feladat:

„Reláció gráf”



Legyen ρ ⊆{1,2,3} × {1,2,3} reláció.
Döntse el, hogy az alábbiakból mely reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus vagy tranzitív:

a) ρ ={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}

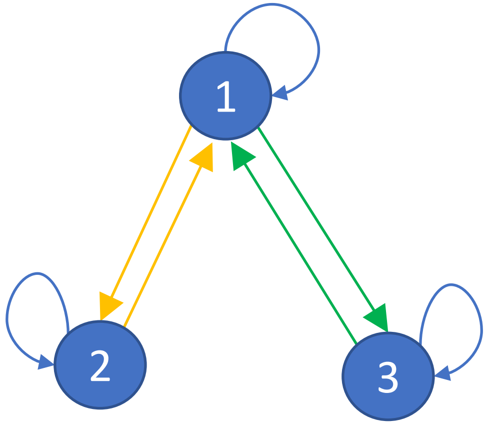
- Reflexív: ρ ={ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}
- Szimmetrikus: ρ ={ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}
- NEM antiszimmetrikus: ρ ={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)} és 1≠2
- Tranzitív: ρ ={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}

Mivel {1,2,3} ×{1,2,3} minden lehetséges kombinációja előáll ebben, ezért amúgy is tranzitív (és reflexív és szimmetrikus persze)…

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;
7. R trichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül;
8. R dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén xRy vagy yRx (esetleg mindkettő).

4. feladat:



Legyen ρ ⊆{1,2,3} × {1,2,3} reláció.
Döntse el, hogy az alábbiakból mely reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus vagy tranzitív:
b) ρ ={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)}

- Reflexív: ρ ={ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)}
- Szimmetrikus: ρ ={ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)}
- NEM antiszimmetrikus: ρ ={ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)} és 1≠2
- NEM tranzitív: (2, 1) és (1 , 3) van, de nincs (2,3)

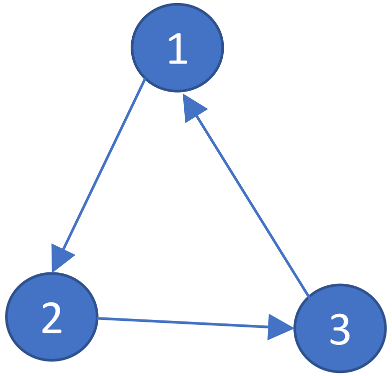
Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;
7. R trichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül;
8. R dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén xRy vagy yRx (esetleg mindkettő).

4. feladat:

Legyen ρ ⊆{1,2,3} × {1,2,3} reláció.
Döntse el, hogy az alábbiakból mely reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus vagy tranzitív:
d) ρ ={(1, 2), (2, 3), (3, 1)}

- NEM Reflexív (nincs benne (1, 1), (2, 2) és (3, 3))
- NEM Szimmetrikus (nincs benne (2, 1), (3, 2) és (1, 3))
- Antiszimmetrikus
- NEM Tranzitív: (1, 2) és (2, 3) van, de nincs (1, 3)



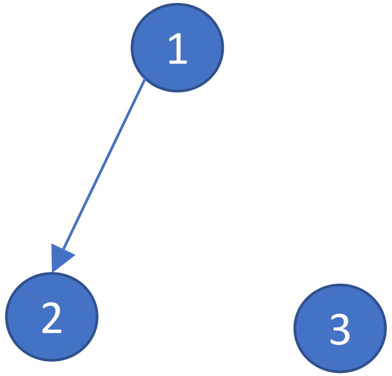
Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;
7. R trichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül;
8. R dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén xRy vagy yRx (esetleg mindkettő).

4. feladat:

Legyen ρ ⊆{1,2,3} × {1,2,3} reláció.
Döntse el, hogy az alábbiakból mely reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus vagy tranzitív:
e) ρ ={(1, 2)}

- NEM Reflexív (nincs benne (1, 1) és (2, 2))
- NEM Szimmetrikus (nincs benne (2, 1))
- Antiszimmetrikus (nincs benne (2, 1))
- Tranzitív



Nem kell, hogy x,y és z különböző legyen

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;
7. R trichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül;
8. R dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén xRy vagy yRx (esetleg mindkettő).

4. feladat:

Legyen $\rho \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ reláció.

Döntse el, hogy az alábbiakból mely reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus vagy tranzitív:

- $\rho = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$
- $\rho = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
- $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$
- $\rho = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$

Házi feladat

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;
7. R trichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül;
8. R dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén xRy vagy yRx (esetleg mindkettő).

5. feladat:

☺ „iff”: if and only if, $\Leftrightarrow$
akkor és csak akkor („csakkor”),
pontosan akkor

a) Lehet-e egy *R* reláció egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus? Illetve reflexív és irreflexív? Állítását indokolja.

- *R* szimmetrikus *iff* $R \subseteq R^{-1}$
- *R* antiszimmetrikus *iff* $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$ (*A*: alaphalmaz és $\Delta_A = \{(a,a) | a \in A\}$ *(Δ_A A átlója)*
- $R \subseteq R^{-1}$ -ből *(szimmetria felt.)*:
  - $R^{-1} \subseteq (R^{-1})^{-1} = R \to$ egy reláció szimmetrikus *iff* $R = R^{-1}$.
- *(szimmetria és aszimmetria feltételéből:)*
  - *R* reláció egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus *iff* $R = R \cap R = R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$,
  (A alaphalm. minden eleme legfeljebb önmagával áll relációban, reláció gráf csak hurokél(eke)t tartalmaz)
  Adott *A* esetén a legbővebb ilyen reláció Δ_A (egyenlőség), legszűkebb pedig az üres reláció.

- *R* reflexív *iff* $\Delta_A \subseteq R$ és irreflexív iff $R \cap \Delta_A = \emptyset$.
  - Ezek ekkor teljesülnek egyszerre: $\Delta_A = \Delta_A \cap \Delta_A \subseteq R \cap \Delta_A = \emptyset$. → *tehát ha A üreshalmaz*

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy
1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

5. feladat:

b) Bizonyítsuk be, hogy minden reláció, amely egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus, egyúttal tranzitív is.

- Ha egy R reláció része Δ_A átlónak, és R értelmezési tartománya B, akkor $(u,v)\in$R iff $v=u\in B$, azaz R$=\Delta_B=\Delta_A|B$.

- *Az a) feladat alapján:*
  - az egyszerre szimmetrikus és antiszimmetikus reláció része az átlónak

- Az átló tranzitív,
  - mert ha $(u,v)\in\Delta_A$ és $(v,w)\in\Delta_A$, akkor $u=v=w$, tehát $(u,w)\in\Delta_A$

- Egy tranzitív reláció minden, valamely részhalmazra való megszorítása tranzitív:
  - ha az A-beli R reláció az A-beli R reláció $B\subseteq A$-ra való megszorítása, és $(u,v)\in$R, $(v,w)\in$R, akkor u, v és w eleme B-nek, és $(u,v)\in R$ és $(v,w)\in R$-ből $(u,w)\in R$, tehát $(u,w)\in$R.

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy
1. R tranzitív, ha $\forall x,y,z\in X:(xRy\wedge yRz)\Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x,y\in X: xRy\Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha$\forall x,y\in X:(xRy\wedge yRx)\Rightarrow x=y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x\in X: xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x\in X:\neg xRx$;

5. feladat:

c) Bizonyítsuk be, hogy minden nemüres reláció, amely egyszerre irreflexív és szimmetrikus, az nem lehet tranzitív

- A reláció nem üres, így ∃ egy eleme: jelöljük ezt (a, b) -vel.
- *A szimmetria következtében*: a relációnak eleme (b, a) is,
- *de az irreflexivitás miatt:* nem eleme (a, a)
  - emiatt viszont a reláció nem lehet tranzitív!

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha$\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

6. feladat:

Házi feladat

Döntse el, mely reláció reflexív, irreflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív, továbbá határozza meg a relációk értelmezési tartományát és értékkészletét.

(a) $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b \text{ páratlan}\}$

(b) $S = \{(a, b) \in B \times B \mid a \text{ vezetékneve rövidebb mint } b\text{-é}\}$ ahol $B = \{\text{budapesti lakosok}\}$

(c) $T_X = \{(A, B) \in P(X) \times P(X) \mid A \cap B \neq \emptyset\}$ ahol X adott halmaz

(d) $V = \{(x, y) \in K \times K| \mid x \text{ belülről érinti } y\text{-t}\}$ ahol $K = \{\text{egy adott sík körvonalai}\}$

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha$\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

7. feladat:

Tekintsük a következő relációt.

(b) $\rho = \{(1, 1), (1, 5), (1, 6), (1, 8), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 7), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (5, 6), (5, 8), (6, 1), (6, 5), (6, 6), (6, 8), (7, 3), (7, 7), (8, 1), (8, 5), (8, 6), (8, 8)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

1) Mutassa meg, hogy ρ ekvivalenciareláció

2) Határozza meg az A halmaz ρ ekvivalenciareláció szerinti osztályfelbontását

(másképp: Határozza meg az A/ρ hányadoshalmazt).

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

7. feladat:

Tekintsük a következő reláció.

(b) $\rho = \{(1, 1), (1, 5), (1, 6), (1, 8), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 7), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (5, 6), (5, 8), (6, 1), (6, 5), (6, 6), (6, 8), (7, 3), (7, 7), (8, 1), (8, 5), (8, 6), (8, 8)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

1) Mutassa meg, hogy ρ ekvivalenciareláció

A reláció (1) reflexív, — *Hurokélek a reláció gráfban*

(2) szimmetrikus és — *Reláció gráfban bármely 2 pont között élek mindkét irányban*

(3) tranzitív

(ekvivalenciareláció def.) → ekvivalencia reláció

2) Határozza meg az A halmaz ρ ekvivalenciareláció szerinti osztályfelbontását

(másképp: Határozza meg az A/ρ hányadoshalmazt).

ρ = {(1,5,6,8),(2,4),(3,7)}

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

2.2.12. definíció. *Adott $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció esetén az A halmaz mindazon elemeinek halmazát, amelyek egy $a \in A$ elemmel ϱ relációban állnak, az a által meghatározott $[a]$* ***ekvivalenciaosztálynak*** *nevezzük:*

$$[a] := \{\, b \in A \mid a\varrho b \,\} \subseteq A.$$

7. feladat:

Tekintsük a következő relációt.

a) $\rho = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 5)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$

1) Mutassa meg, hogy ekvivalenciareláció.

2) Határozza meg az A halmaz ekvivalenciareláció szerinti osztályfelbontását

(másképp: Határozza meg az A/ρ hányadoshalmazt).

Házi feladat

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

2.2.12. definíció. *Adott $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció esetén az A halmaz mindazon elemeinek halmazát, amelyek egy $a \in A$ elemmel ϱ relációban állnak, az a által meghatározott $[a]$* ***ekvivalenciaosztálynak*** *nevezzük:*

$$[a] := \{ b \in A \mid a\varrho b \} \subseteq A.$$

8. feladat:

Írja fel azt az ekvivalenciarelációt, amely az {a, b, c, d, e, f} halmaz következő osztályfelbontását határozza meg:

a) {{a,b,f},{c},{d,e}};

Az osztályozás által meghatározott ekvivalenciareláció:

tehát amelyre az R reláció (1) reflexív, (2) szimmetrikus és (3) tranzitív:

R={(a,a),(a,b),(a,f),(b,a),(b,b),(b,f),(f,a),(f,b),(f,f),(c,c),(d,d),(d,e),(e,d),(e,e)}

1. 1. 1. 1. 1. 1.

2. — 2.

2. — 2.

2. — 2.

2. — 2.

3. → 3. ← 3.

3. → 3. ← 3.

… 3. …

2.2.12. definíció. *Adott $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció esetén az A halmaz mindazon elemeinek halmazát, amelyek egy $a \in A$ elemmel ϱ relációban állnak, az a által meghatározott $[a]$* ***ekvivalenciaosztálynak*** *nevezzük:*

$$[a] \ := \ \{ \ b \in A \mid a \varrho b \ \} \subseteq A.$$

8. feladat:

Írja fel azt az ekvivalenciarelációt, amely az {a, b, c, d, e, f} halmaz következő osztályfelbontását határozza meg:

b) {{a},{b},{c},{d},{e,f}};

Házi feladat

2.2.12. definíció. *Adott $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció esetén az A halmaz mindazon elemeinek halmazát, amelyek egy $a \in A$ elemmel ϱ relációban állnak, az a által meghatározott $[a]$* ***ekvivalenciaosztálynak*** *nevezzük:*

$$[a] \ := \ \{ \ b \in A \mid a \varrho b \ \} \subseteq A.$$

9. feladat:

Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációk ekvivalenciarelációk. Adja meg az ekvivalenciaosztályokat.

a) $R = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | m + n \text{ páros szám}\};$

Ekvivalencia reláció: (1) reflexív, (2) szimmetrikus és (3) tranzitív:

1. *Reflexívitás:* $m + m = 2m$ páros, így minden m egész számra $(m, m) \in R \rightarrow R$ reláció reflexív;
2. *Szimmetria:* $m + n = n + m, \rightarrow R$ reláció szimmetrikus.
3. *Tranzitivitás:* Ha $(u, v) \in R$ és $(v, w) \in R$, akkor $u + v$ és $v + w$ páros,
   de ekkor $(u + v) - (v + w) = u - w$ is páros,
   és *(előbbiből és szimmetriából:)* páros lesz $u - w + 2w = u + w$, $(u, w) \in R$.

Ekvivalenciaosztályok:

Két egész szám összege akkor és csak akkor páros, ha mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan

- Emiatt az adott ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályozásnak két osztálya van:
  - (1) páros számok halmaza és (2) páratlan számok halmaza: $\mathbb{Z}/R = \{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1\}$.

2.2.12. definíció. *Adott $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció esetén az A halmaz mindazon elemeinek halmazát, amelyek egy $a \in A$ elemmel ϱ relációban állnak, az a által meghatározott $[a]$* ***ekvivalenciaosztálynak*** *nevezzük:*

$$[a] := \{ b \in A \mid a \varrho b \} \subseteq A.$$

9. feladat:

Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációk ekvivalenciarelációk. Adja meg az ekvivalenciaosztályokat.

$b)$ $R = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | a - b$ racionális szám$\}$;

Ekvivalencia reláció: (1) reflexív, (2) szimmetrikus és (3) tranzitív:

A 0 racionális szám, mint ahogy egy racionális szám ellentettje is, és két racionális szám összege is racionális, így a reláció ekvivalenciareláció.

Ekvivalenciaosztályok:

Ha u egy valós szám, akkor egy v valós szám ekvivalens R szerint u-val *iff* $v - u = r$ ahol r racionális szám, tehát $v = u + r$.
Fordítva, ha s tetszőleges racionális szám, és $v = u + s$, akkor $v - u = s \in \mathbb{Q}$, tehát $(u, v) \in R$
Emiatt az u-val R szerint ekvivalens valós számok halmaza az $u + \mathbb{Q} = \{u + r | r \in \mathbb{Q}\}$ halmaz.
A két osztály vagy egybeesik vagy diszjunkt, és az u-t illetve a v-t tartalmazó $u + \mathbb{Q}$ és $v + \mathbb{Q}$ osztály azonos iff $(u, v) \in R$, azaz ha $u - v \in \mathbb{Q}$. Ezek alapján $\mathbb{R}/R = \{u + \mathbb{Q} | u \in \mathbb{R}\}$.

2.2.12. definíció. *Adott $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció esetén az A halmaz mindazon elemeinek halmazát, amelyek egy $a \in A$ elemmel ϱ relációban állnak, az a által meghatározott $[a]$* ***ekvivalenciaosztálynak*** *nevezzük:*

$$[a] := \{ b \in A \mid a \varrho b \} \subseteq A.$$

9. feladat:

Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációk ekvivalenciarelációk. Adja meg az ekvivalenciaosztályokat.

- $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x^2 + y^2 \text{ osztható } 2\text{–vel}\};$
- $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 | x_1 + y_1 = x_2 + y_2\};$
- $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 | x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2\}.$

Házi feladat

2.2.12. definíció. *Adott $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció esetén az A halmaz mindazon elemeinek halmazát, amelyek egy $a \in A$ elemmel ϱ relációban állnak, az a által meghatározott $[a]$* ***ekvivalenciaosztálynak*** *nevezzük:*

$$[a] := \{ b \in A \mid a \varrho b \} \subseteq A.$$

10. feladat:

Házi feladat

Legyen $f \subseteq A \times A$ reláció. Bizonyítsuk be, hogy $f = f^{-1}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f \subseteq f^{-1}$.

11. feladat:

Konstruáljon az {1,2,3,4} halmazon olyan relációt, amely

a) reflexív és nem irreflexív,

Nem üres halmazon reflexív reláció biztosan nem irreflexív.

Példa: R={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)}

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

11. feladat:

Konstruáljon az {1,2,3,4} halmazon olyan relációt, amely

b) antiszimmetrikus és nem szimmetrikus,

Ha egy antiszimmetrikus reláció tartalmaz legalább egy olyan párt, amelynek a két komponense különböző, akkor biztosan nem szimmetrikus

Példa: R={(3,4)}

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \land yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \land yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

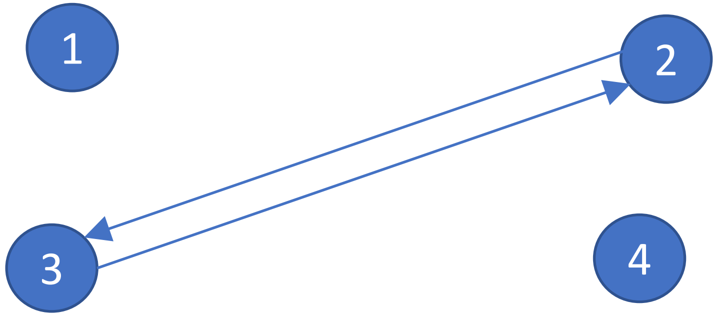
11. feladat:

Konstruáljon az {1,2,3,4} halmazon olyan relációt, amely

c) szimmetrikus és nem antiszimmetrikus,

Ha egy szimmetrikus reláció tartalmaz legalább egy olyan párt, amelynek a két komponense különböző, akkor biztosan nem antiszimmetrikus

Példa: R={(2,3),(3,2)}



Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

11. feladat:

Konstruáljon az {1,2,3,4} halmazon olyan relációt, amely

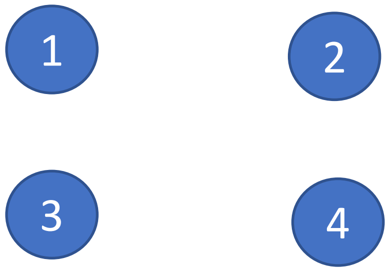
d) szimmetrikus és antiszimmetrikus,

← *irány:* Ha egy antiszimmetrikus reláció tartalmaz legalább egy olyan párt, amelynek a két komponense különböző, akkor biztosan nem szimmetrikus

→ *irány:* ha egy szimmetrikus reláció tartalmaz legalább egy olyan párt, amelynek a két komponense különböző, akkor biztosan nem antiszimmetrikus

»: egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus reláció csak olyan párokat tartalmazhat, amelynek a két komponense azonos

Példa: R={} *Üres reláció*



Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

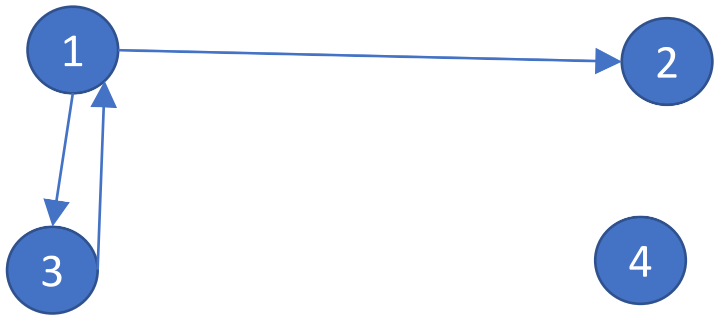
1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

11. feladat:

Konstruáljon az {1,2,3,4} halmazon olyan relációt, amely

e) Nem szimmetrikus és nem antiszimmetrikus,

Példa: R={(1,2), (1,3), (3,1)}



Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \land yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \land yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

11. feladat:

Konstruáljon az {1,2,3,4} halmazon olyan relációt, amely
f) reflexív és trichotóm,

trichotóm reláció irreflexív, és egy irreflexív reláció reflexív *iff* az alaphalmaz az üres halmaz

Példa: R={} *ilyen reláció csak az üres halmazon van (ahol egy és csak egy reláció van, az üres reláció)*

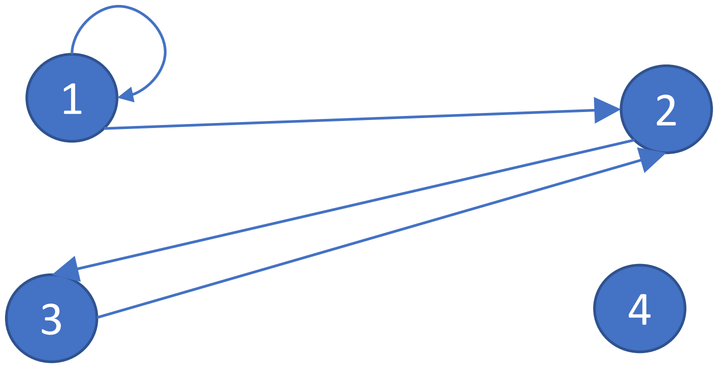
Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy
1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;
7. R trichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül;
8. R dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén xRy vagy yRx (esetleg mindkettő).

11. feladat:

Konstruáljon az {1,2,3,4} halmazon olyan relációt, amely

g) nem reflexív, nem tranzitív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem trichotóm;

Példa: R={(1,1),(1,2),(2,3),(3,2)}



Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;
7. R trichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül;
8. R dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén xRy vagy yRx (esetleg mindkettő).

Szorgalmi feladatok:

12. feladat

Legyen $R \subseteq A \times B$ és $A' \subseteq A$. Igazolja, hogy

(a) ha $A'' \subseteq A'$, akkor $R(A'') \subseteq R(A')$;
(b) $R(A') = \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $A' \cap \mathrm{dmn}(R) = \emptyset$;
(c) $R(A') = R\big(A' \cap \mathrm{dmn}(R)\big)$;
(d) $A' \cap \mathrm{dmn}(R) \subseteq R^{-1}\big(R(A')\big)$;
(e) $R(A') \subseteq (R \circ R^{-1} \circ R)(A')$.

13. feladat

Legyen $R \subseteq A \times B$, Γ egy indexhalmaz, és minden $\gamma \in \Gamma$-ra $A_\gamma \subseteq A$, továbbá legyen U és V is az A részhalmaza.
Mutassa meg, hogy

(a) $R\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} R\big(A_\gamma\big)$;
(b) $R\big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big) \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Gamma} R\big(A_\gamma\big)$, és általában $R\big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big) \neq \bigcap_{\gamma\in\Gamma} R\big(A_\gamma\big)$.
(c) $R(U \setminus V)$ és $R(U)\setminus R(V)$ között;
(d) $R(\overline{U})$ és $\mathrm{rng}(R)\setminus R(U)$ között?
(e) Igaz-e, hogy $R(\overline{U}) \subseteq \overline{R(U)}$ vagy $\overline{R(U)} \subseteq R(\overline{U})$?

Szorgalmi feladatok:

14. feladat

Mutassa meg, hogy az A halmazban értelmezett R reláció akkor és csak akkor

i. reflexív, ha $\Delta_A \subseteq R$;
ii. irreflexív, ha $R \cap \Delta_A = \emptyset$;
iii. szimmetrikus, ha $R \subseteq R^{-1}$;
iv. antiszimmetrikus, ha $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
v. szigorúan antiszimmetrikus, ha $R \cap R^{-1} = \emptyset$;
vi. tranzitív, ha $R^2 \subseteq R$;
vii. dichotóm, ha $R \cup R^{-1} = A \times A$ és $R \cap R^{-1} = \Delta_A$;
viii. trichotóm, ha $R \cup R^{-1} = (A \times A) \setminus \Delta_A$ és $R \cap R^{-1} = \emptyset$.

15. feladat

Legyen A egy halmaz és $R \subseteq A \times A$ egy A-beli reláció. Igaz-e, hogy

a) $R \cap R^{-1}$ szimmetrikus;
b) ha $S \subseteq R$ és S szimmetrikus, akkor $S \subseteq R \cap R^{-1}$;
c) $R \cup R^{-1}$ szimmetrikus;
d) ha $R \subseteq T \subseteq A \times A$ és T szimmetrikus, akkor $R \cup R^{-1} \subseteq T$.

Állításait igazolja.