# Diszkrét matematika

## 1. gyakorlat: Halmazok,

*avagy: más halmozza az élvezeteket,*

*míg a matematikus élvezi a halmazokat…*

*(A diasort készítette Németh Gábor Árpád, Gonda János, Koch-Gömöri Richárd, Mérai László anyagait felhasználva)*

*2022 Korach Mór születése napján (február 8)*

# 1. Feladat (metszet, unió, különbség, komplementer)

Legyen az alaphalmaz $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

$A = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 4\}$,

$B = \{0,2,4,8\}$,

$C = \{\text{az egyjegyű prímszámok}\}$.

a. Határozza meg a következő halmazokat:

- $A \cap B$
- $B \cup C$
- $A \setminus C$
- $\bar{C}$

# 1. feladat

Legyen az alaphalmaz $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

$A = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 4\}$,

$B = \{0,2,4,8\}$,

$C = \{\text{az egyjegyű prímszámok}\} = \{2,3,5,7\}$.

a. Határozza meg a következő halmazokat:

- $A \cap B$:

  $u \in A \cap B \Leftrightarrow u \in A \wedge u \in B$

  $A \cap B = \{2,4\}$

- $B \cup C$:

  $u \in B \cup C \Leftrightarrow u \in B \vee u \in C$

  $B \cup C = \{0,2,3,4,5,7,8\}$

- $A \setminus C$:

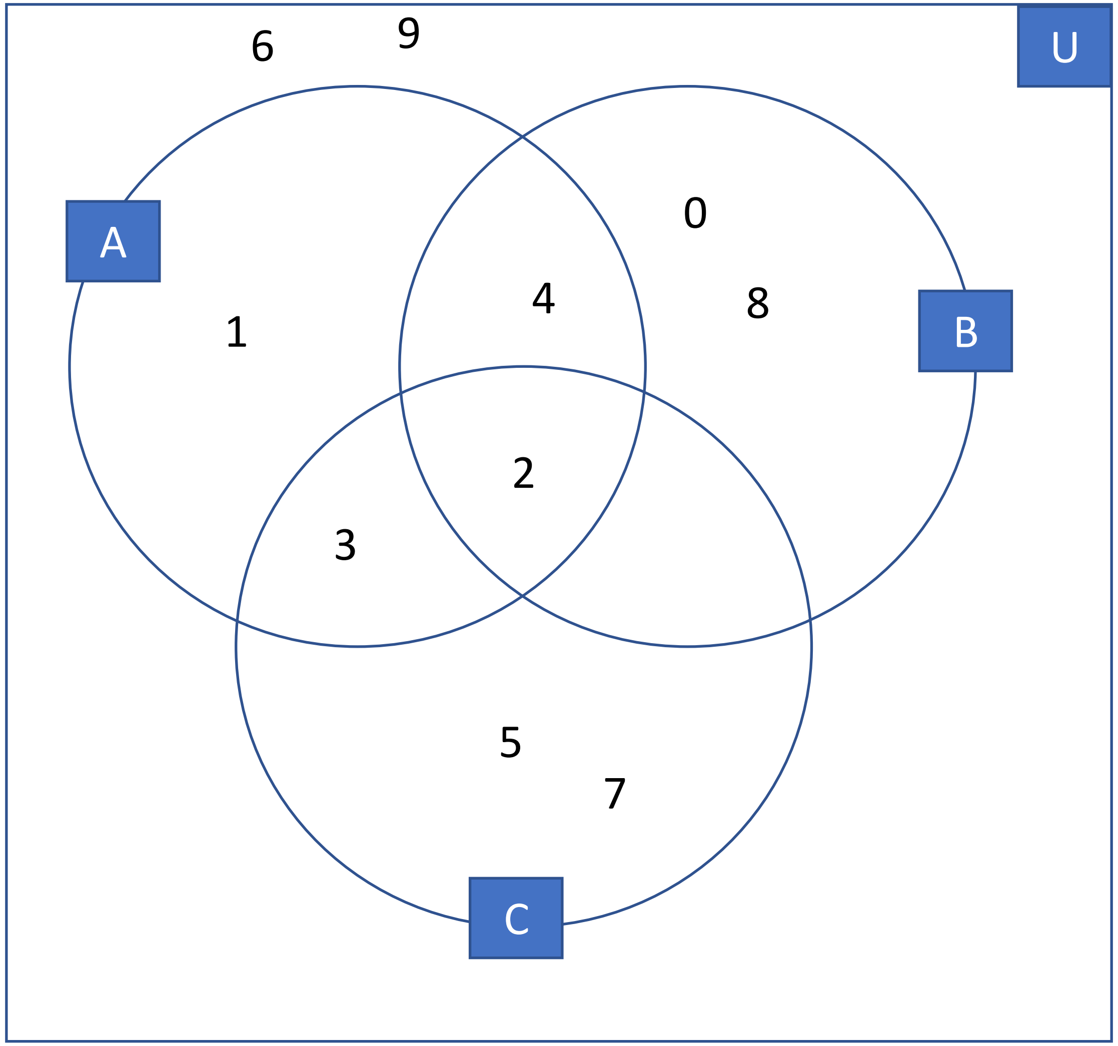
  $u \in A \setminus C \Leftrightarrow u \in A \wedge u \notin C$

  $A \setminus C = \{1,4\}$

- $\bar{C}$:

  $u \in \bar{C} = U \setminus C \Leftrightarrow u \in U \wedge u \notin C$

  $C = \{0,1,4,6,8,9\}$



# 1. feladat

Legyen az alaphalmaz $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

$A = \{x | x \in \mathbb{N} \land 1 \leq x \leq 4\}$,

$B = \{0,2,4,8\}$,

$C = \{\text{az egyjegyű prímszámok}\} = \{2,3,5,7\}$.

b. Tekintsük az X = {A,B,C} halmazrendszert.

Határozza meg a következő halmazokat:

- $\cap X$

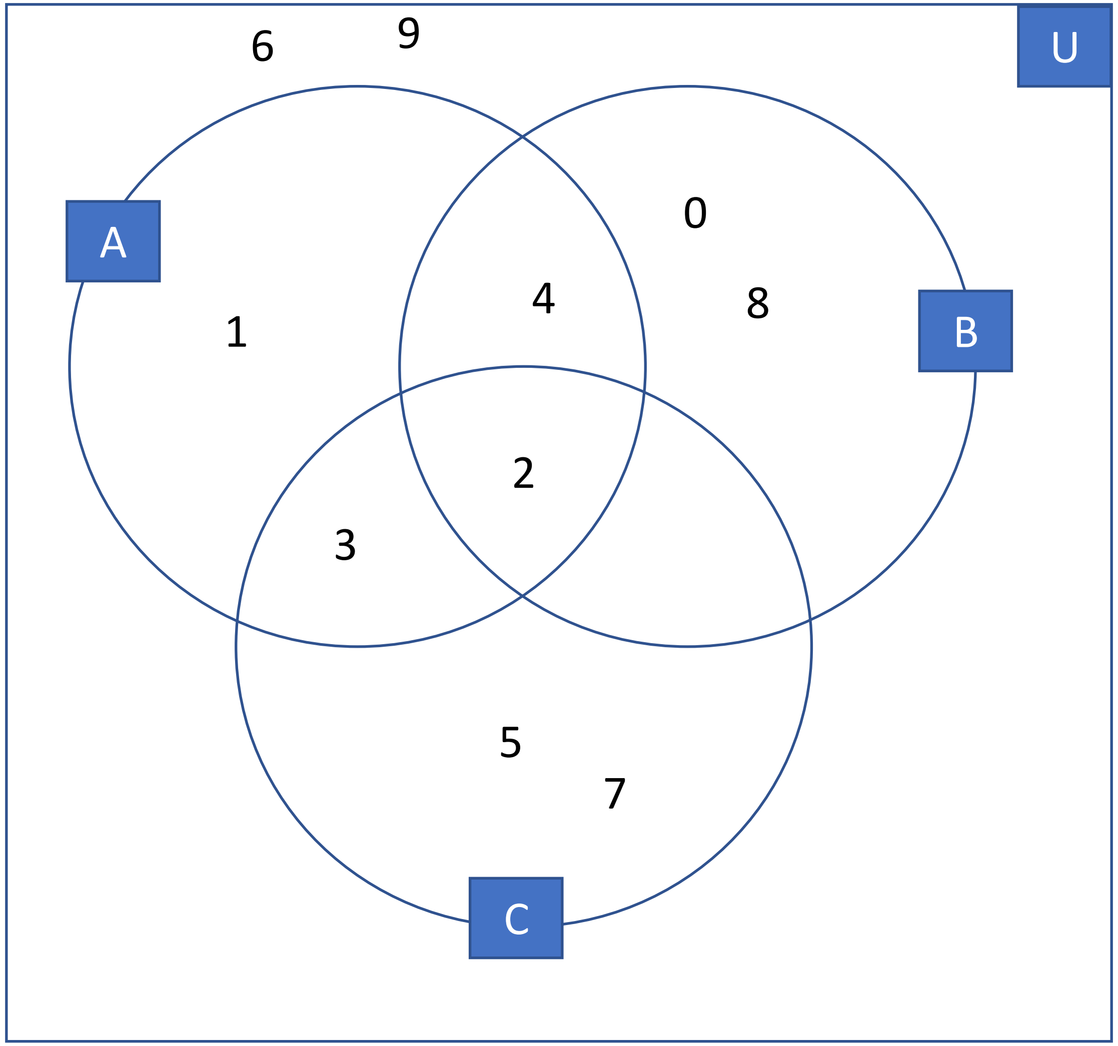
$$u \in \cap X \Leftrightarrow \forall (A \in X): u \in A$$

$$\cap X = \{2\}$$

- $\cup X$

$$u \in \cup X \Leftrightarrow \exists (A \in X): u \in A$$

$$\cup X = \{0,1,2,3,4,5,7,8\}$$



# 1. feladat

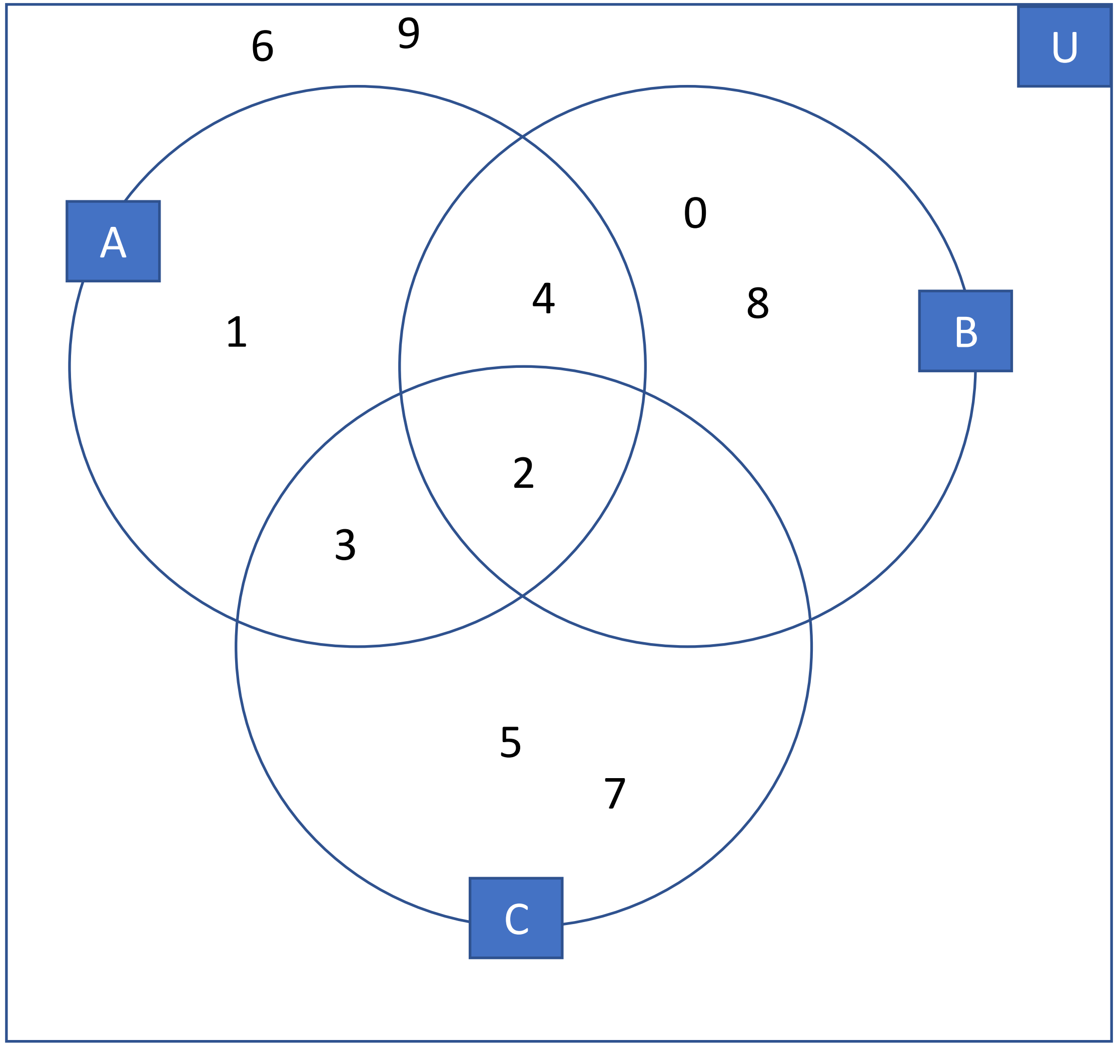
- Legyen az alaphalmaz $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

$A = \{x|x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 4\}$,

$B = \{0,2,4,8\}$,

$C = \{\text{az egyjegyű prímszámok}\} = \{2,3,5,7\}$.

X = {A,B,C} halmazrendszer.




c. Állapítsa meg a következő kijelentések logikai értékét, ha

$Y = \{\{x|x \in U \text{ és } x \text{ páros}\}, \{x|x \in U \text{ és } x \text{ páratlan}\}\}$.

- $A \subseteq B$

  $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall(u \in A): u \in B$

  $\color{red}{hamis}: 1 \in A \wedge 1 \notin B;$

- $\{\emptyset\} \subseteq X \cup Y;$

  $X \cup Y = \{A, B, C, Y_{páros}, Y_{ptlan}\}$

  $\color{red}{hamis}$: $\{\emptyset\} \subseteq X \cup Y \Leftrightarrow \emptyset \in X \cup Y; egyik\ sem$ üreshalmaz$: \emptyset \neq A, \emptyset \neq B, \emptyset \neq C, \emptyset \neq Y_{páros}, \emptyset \neq Y_{ptlan}$

- $A \in X \cup Y;$

  $\color{red}{igaz}$: $A \in \{A, B, C, Y_{páros}, Y_{ptlan}\} = X \cup Y;$

# 1. feladat

- Legyen az alaphalmaz $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

$A = \{x|x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 4\}$,

$B = \{0,2,4,8\}$,

$C = \{\text{az egyjegyű prímszámok}\} = \{2,3,5,7\}$.

X = {A,B,C} halmazrendszer.

c. Állapítsa meg a következő kijelentések logikai értékét, ha

$Y = \{\{x|x \in U \text{ és } x \text{ páros}\}, \{x|x \in U \text{ és } x \text{ páratlan}\}\}$.

- $C \cap \emptyset = \emptyset$;

  $u \in A \cap B \Rightarrow u \in A \wedge u \in B \Rightarrow u \in B \Rightarrow A \cap B \subseteq B$

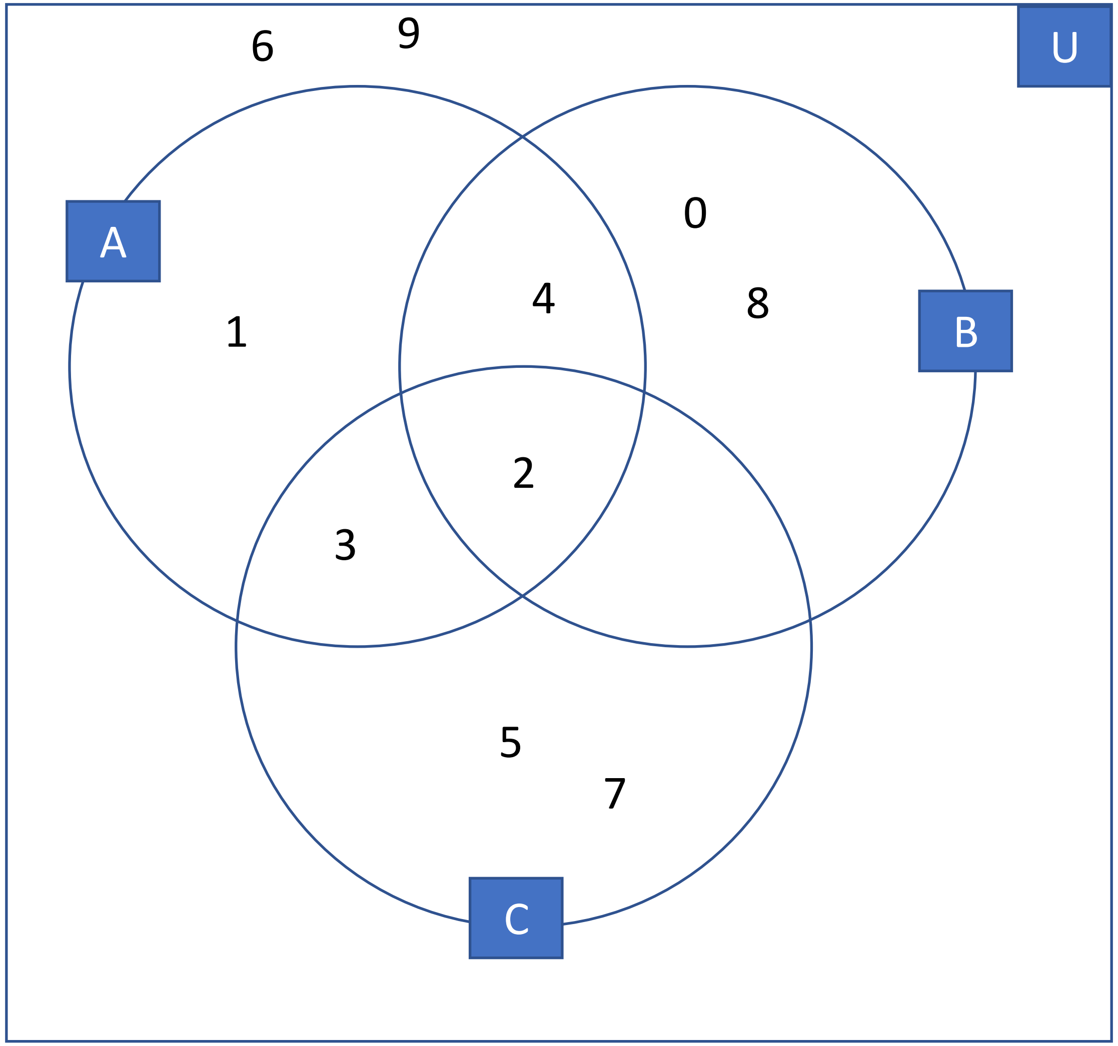
  $igaz$: $\emptyset \subseteq C \cap \emptyset \subseteq \emptyset \Rightarrow C \cap \emptyset = \emptyset$;

- $2 \subseteq A$;

  $hamis$: 2 nem halmaz;

- $\{2\} \subseteq A$;

  $igaz$: $\{2\} \subseteq A \Leftrightarrow 2 \in A = \{1,2,3,4\}$;



# 1. feladat

- Legyen az alaphalmaz $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

$A = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 4\}$,

$B = \{0,2,4,8\}$,

$C = \{\text{az egyjegyű prímszámok}\} = \{2,3,5,7\}$.

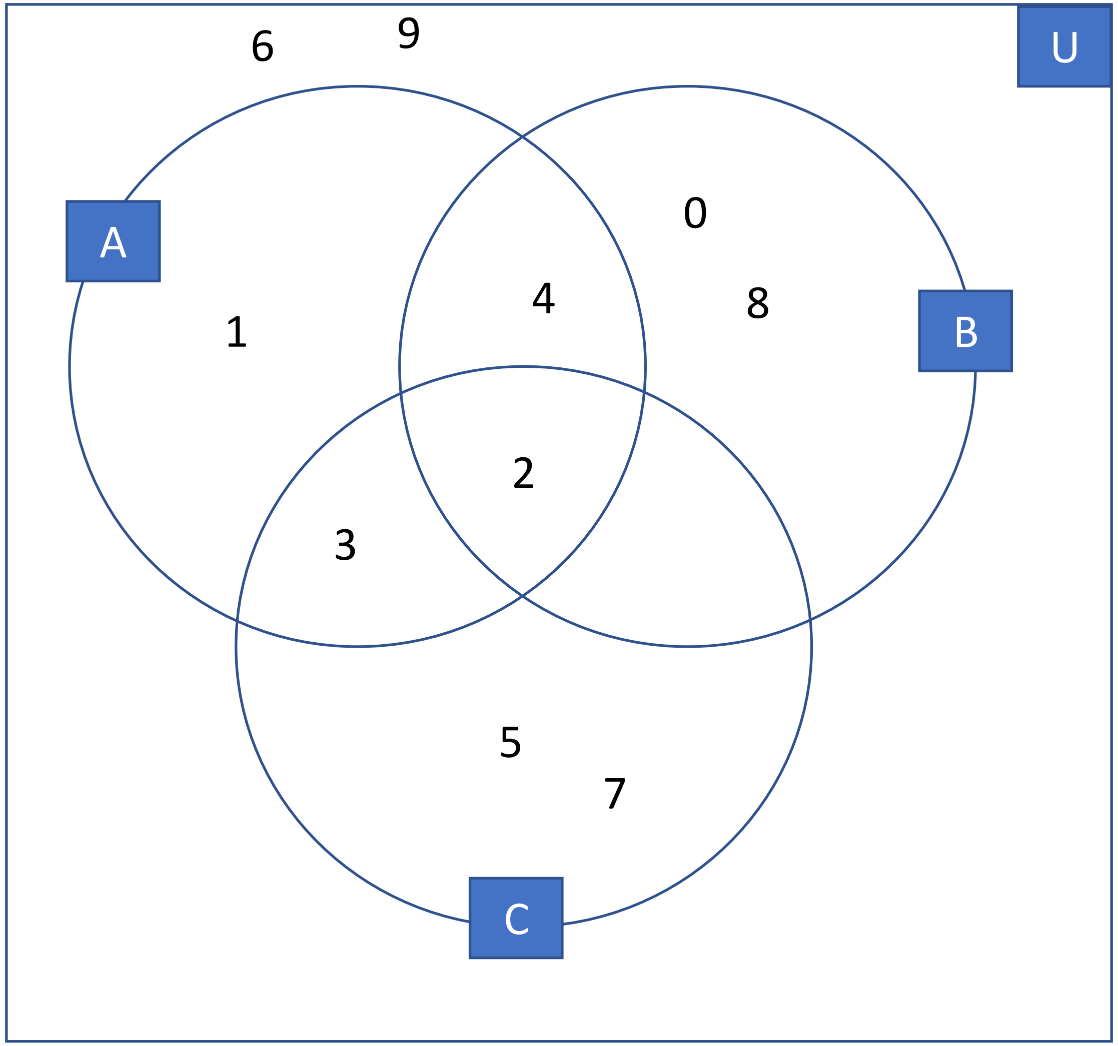
X = {A,B,C} halmazrendszer.

c. Állapítsa meg a következő kijelentések logikai értékét, ha

$Y = \{\{x | x \in U \text{ és } x \text{ páros}\}, \{x | x \in U \text{ és } x \text{ páratlan}\}\}$.

- $4 \in B$
- $3 \in A \cap B$;
- $\{1,2\} \subseteq A$;
- $2 \in X \cup Y$;
- $\{2\} \in X \cup Y$;

Házi feladat



# 2. feladat

Keressünk olyan $A, B, C$ halmazokat, amelyekre egyszerre teljesülnek a következők:

1. $A \cap B \neq \emptyset$,
2. $A \cap C = \emptyset$,
3. $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$

Jelöljük az alaphalmazt megint *U*-val:

$$\emptyset \neq A \cap B = (A \cap B) \cap U =$$

$$(A \cap B) \cap (\bar{C} \cup C) =$$

*disztributívitás…* $$(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap C) =$$

*Komplementer def.-ból* $$\big((A \cap B) \setminus C\big) \cup \big((A \cap C) \cap B\big) =$$

*1. és 2. behelyettesítével…*

$$= (\emptyset \setminus C) \cup (\emptyset \cap B) =$$

$$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

…tehát $A \cap B \neq \emptyset$ és $A \cap B = \emptyset$ kellene, hogy teljesüljön, ami **ellentmondás**.

# 3. feladat

Legyen $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d\}$, $C = \{a, e\}$. Mutassuk meg, hogy ekkor $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (B \cap C)$. Igaz-e ez az állítás tetszőleges $A, B, C$ halmazokra?

Házi feladat

# 4. feladat (Halmazrendszer)

Tekintsük az $X = \{\{1,2,3\}, \{2,3,4,5\}, \{0,2,3,7\}\}$ halmazrendszert. Határozza meg a következő halmazokat:

- $\cap X$;
- $X \cup \{\{3,5,7\}, \{1\}, \{2\}\}$;
- $\cup (X \cup \{\{3,5,7\}, \{1\}, \{2\}\})$;
- $\cap (X \cup \{\{3,5,7\}, \{1\}, \{2\}\})$.

# 4. feladat

Tekintsük az $X = \{\{1,2,3\},\{2,3,4,5\},\{0,2,3,7\}\}$ halmazrendszert. Határozza meg a következő halmazokat:

- $\cap X$;

$\cap X = \{2,3\}$

- $X \cup \{\{3,5,7\},\{1\},\{2\}\}$;

$X \cup \{\{3,5,7\},\{1\},\{2\}\} = \{\{1,2,3\},\{2,3,4,5\},\{0,2,3,7\},\{3,5,7\},\{1\},\{2\}\}$

- $\cup (X \cup \{\{3,5,7\},\{1\},\{2\}\})$;

$\cup \left(X \cup \{\{3,5,7\},\{1\},\{2\}\}\right) = \cup \{\{1,2,3\},\{2,3,4,5\},\{0,2,3,7\},\{3,5,7\},\{1\},\{2\}\}$
$= \{0,1,2,3,4,5,7\}$

- $\cap (X \cup \{\{3,5,7\},\{1\},\{2\}\})$. Házi feladat

# 5. feladat

Legyen $A = \{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\}$. Mi lesz $\cup A$ és $\cap A$?

Házi feladat

# 6. feladat

Határozza meg az $A, B, C$ halmazok elemeit, ha tudjuk, hogy

1. $A \setminus B = \{1,3,5\}$,
2. $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$,
3. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$,
4. $C \setminus B = \{2,4\}$ és
5. $(A \cap B) \setminus C = \{6\}$.

- *3-ból:* $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$
  $\Rightarrow A \cap C = \emptyset \wedge B \cap C = \emptyset$
- *amiből:* $A \cap C = \emptyset$
  *5.*
  $\Rightarrow (A \cap B) \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cap B = (A \cap B) \setminus C = \{6\}$
- *amiből:* $B \cap C = \emptyset$
  *(felhasználva 4–t)* $\Rightarrow \underline{C} = C \setminus B = \underline{\{2,4\}}$
- *1-ből és 5–ből:* $\underline{A} = (A \setminus B) \cup (A \cap B) = \{1,3,5\} \cup \{6\} = \underline{\{1,3,5,6\}}$
- *3–ból:* $\emptyset = (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
  *(felhasználva 2-t)*$\Rightarrow A \cup B = (A \cup B \cup C) \setminus C = \{1,2,3,4,5,6\} \setminus \{2,4\} = \{1,3,5,6\}$
  $\Rightarrow \underline{B} = (A \cup B) \setminus (A \setminus B) = \{1,3,5,6\} \setminus \{1,3,5\} = \underline{\{6\}}$
- Összegezve: $A = \{1,3,5,6\}$, $B = \{6\}$, $C = \{2,4\}$.

# 6. feladat

Határozza meg az $A, B, C$ halmazok elemeit, ha tudjuk, hogy

1. $A \setminus B = \{1,3,5\}$,
2. $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$,
3. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$,
4. $C \setminus B = \{2,4\}$ és
5. $(A \cap B) \setminus C = \{6\}$.

## *Ellenőrzés:*

1. $A \setminus B = \{1,3,5,6\} \setminus \{6\} = \{1,3,5\}$
2. $A \cup B \cup C = \{1,3,5,6\} \cup \{6\} \cup \{2,4\} = \{1,2,3,4,5,6\}$
3. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = (\{1,3,5,6\} \cap \{2,4\}) \cup (\{6\} \cap \{2,4\}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
4. $C \setminus B = \{2,4\} \setminus \{6\} = \{2,4\}$
5. $(A \cap B) \setminus C = (\{1,3,5,6\} \cap \{6\}) \setminus \{2,4\} = \{6\} \setminus \{2,4\} = \{6\}$.

# 7. feladat

Legyen $U$ az alaphalmaz, és $A, B, C \subseteq U$ tetszőleges halmazok. Igazoljuk a következő azonosságokat.

- $A \cup B = B \cup A$

  $u \in A \cup B \Leftrightarrow u \in A \vee u \in B \Leftrightarrow u \in B \vee u \in A \Leftrightarrow u \in B \cup A$

  *A halmazok uniója kommutatív*

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

  $u \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow u \in A \cap B \wedge u \in C \Leftrightarrow (u \in A \wedge u \in B) \wedge u \in C$
  $\Leftrightarrow u \in A \wedge (u \in B \wedge u \in C) \Leftrightarrow u \in A \wedge u \in B \cap C \Leftrightarrow u \in A \cap (B \cap C)$

  *A halmazok metszete kommutatív*

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

  $u \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow u \in A \vee u \in B \cap C \Leftrightarrow u \in A \vee (u \in B \wedge u \in C)$
  $\Leftrightarrow (u \in A \vee u \in B) \wedge (u \in A \vee u \in C)$
  $\Leftrightarrow u \in A \cup B \wedge u \in A \cup C \Leftrightarrow u \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

  *A halmazok metszete disztributív azok unióra nézve*

# 7. feladat

Legyen $U$ az alaphalmaz, és $A, B, C \subseteq U$ tetszőleges halmazok. Igazoljuk a következő azonosságokat.

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

*de Morgan azonosság (1)*

$u \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow u \notin A \cup B$
$\Leftrightarrow u \notin A \wedge u \notin B$
$\Leftrightarrow u \in \bar{A} \wedge u \in \bar{B}$
$\Leftrightarrow u \in \bar{A} \cap \bar{B}$

VAGY

$(\bar{A} \cap \bar{B}) \cap (A \cup B) = \big((\bar{A} \cap \bar{B}) \cap A\big) \cup \big((\bar{A} \cap \bar{B}) \cap B\big) =$
$\big((\bar{A} \cap A) \cap \bar{B}\big) \cup \big(\bar{A} \cap (\bar{B} \cap B)\big) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
$(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cup B) = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \big((A \cap \bar{B}) \cup A\big) \cup B =$
$\big((\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{B})\big) \cup B \cup A =$
$\bar{B} \cup B \cup A = U \cup A = U$

Ezekből pedig következik, hogy:

$\overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = A \cup B$ tehát $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

# 7. feladat

Legyen $U$ az alaphalmaz, és $A, B, C \subseteq U$ tetszőleges halmazok. Igazoljuk a következő azonosságokat.

- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

  *de Morgan azonosság (2)*

  $u \in \overline{A \cap B}$
  $\Leftrightarrow u \notin A \cap B$
  $\Leftrightarrow u \notin A \vee u \notin B$
  $\Leftrightarrow u \in \bar{A} \vee u \in \bar{B}$
  $\Leftrightarrow u \in \bar{A} \cup \bar{B}$

  VAGY

  $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (A \cap B) = \big(\bar{A} \cap (A \cap B)\big) \cup \big(\bar{B} \cap (A \cap B)\big) =$
  $\big((\bar{A} \cap A) \cap B\big) \cup \big((\bar{B} \cap B) \cap A\big) = (\emptyset \cap B) \cup (\emptyset \cap A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
  $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cup (A \cap B) = \big((\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)\big) \cup (A \cap B) \cup \bar{B} =$
  $(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \big((\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)\big) \cup \overline{B} =$
  $(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup B \cup \bar{B} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup U = U$

  A fentiekből tehát: $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = A \cap B$, azaz $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

# 7. feladat

Legyen $U$ az alaphalmaz, és $A, B, C \subseteq U$ tetszőleges halmazok. Igazoljuk a következő azonosságokat.

- $A \cup \bar{A} = U$

  Egyik irány:
  $A \subseteq U \wedge \bar{A} \subseteq U \Rightarrow A \cup \bar{A} \subseteq U$

  Másik irány:

  ha $u \in U$ és $u \notin A$, akkor $u \in \bar{A}$, így $u \in A \cup \bar{A}$, tehát $U \subseteq A \cup \bar{A}$, ezért $A \cup \bar{A} = U$

- $A \cap \bar{A} = \emptyset$

  Egyik irány:
  $\emptyset \subseteq A \wedge \emptyset \subseteq \bar{A} \Rightarrow \emptyset \subseteq A \cap \bar{A}$.

  Másik irány:

  ha az $U$ egy $u$ elemére $u \in A$, akkor $u \notin \bar{A}$, így $u \notin A \cap \bar{A}$, tehát $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

- $\bar{\bar{A}} = A$.
  $u \in \bar{\bar{A}} \Leftrightarrow u \notin \bar{A} \Leftrightarrow u \in A$.

# 7. feladat

Legyen $U$ az alaphalmaz, és $A, B, C \subseteq U$ tetszőleges halmazok. Igazoljuk a következő azonosságokat.

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cap B = B \cap A$

Házi feladat

# 8. feladat

Igazolja a következő azonosságokat:

- $A \triangle \emptyset = A$;
- $A \triangle A = \emptyset$;
- $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$;
- $A \triangle (A \triangle B) = B$.

Házi feladat

# 9. feladat

Legyen $A, B, C$ tetszőleges halmazok. Igazoljuk a következő állításokat:

- ha $A \subseteq C$ és $B \subseteq C$, akkor $A \cup B \subseteq C$;
- ha $A \subseteq B$ és $A \subseteq C$, akkor $A \subseteq B \cap C$;
- $A \cup (B \cap A) = A$.

Házi feladat

# 10. feladat

Legyen $A$ és $B$ nemüres halmazok. Igazolja a következő egyenlőségeket:

- $(A \backslash B) \cap B = \emptyset$;
- $(A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \bar{B}$.

Házi feladat

# 11. feladat

Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:
$(A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C)$.

Házi feladat

# 12. feladat

Legyen az alaphalmaz $U$ továbbá $A, B, C \subseteq U$ tetszőleges halmazok. Igazolja a következő egyenlőségeket:

- $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
- $A \setminus (A \setminus (B \setminus C)) = A \cap B \cap C$.

Házi feladat

# 13. Feladat (Descartes szorzat és szimmetrikus differencia)

Legyen $A = \{1,2\}$, $B = \{a,b,c\}$ és $C = \{2,3,4\}$. Határozza meg az alábbi halmazokat:

*a)* $A \times A$
$= \{1,2\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

*b)* $A \times B$
$= \{1,2\} \times \{a,b,c\} = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$

*c)* $A \times A \times B$
$= \{1,2\} \times \{1,2\} \times \{a,b,c\}$
$= \{(1,1,a),(1,1,b),(1,1,c),(1,2,a),(1,2,b),(1,2,c),(2,1,a),(2,1,b),(2,1,c),(2,2,a),(2,2,b),(2,2,c)\}$

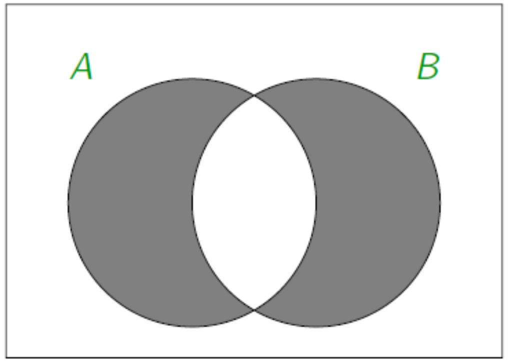
*d)* $B \times A$
$= \{a,b,c\} \times \{1,2\} = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$

*e)* $(A \times A) \times B$
$= (\{1,2\} \times \{1,2\}) \times \{a,b,c\}$
$= \{\big((1,1),a\big),\big((1,1),b\big),\big((1,1),c\big),\big((1,2),a\big),\big((1,2),b\big),\big((1,2),c\big),\big((2,1),a\big),\big((2,1),b\big),\big((2,1),c\big),\big((2,2),a\big),\big((2,2),b\big),\big((2,2),c\big)\}$

*f)* $A \times (A \times B)$
$= \{1,2\} \times (\{1,2\} \times \{a,b,c\})$
$= \{\big(1,(1,a)\big),\big(1,(1,b)\big),\big(1,(1,c)\big),\big(1,(2,a)\big),\big(1,(2,b)\big),\big(1,(2,c)\big),\big(2,(1,a)\big),\big(2,(1,b)\big),\big(2,(1,c)\big),\big(2,(2,a)\big),\big(2,(2,b)\big),\big(2,(2,c)\big)\}$

*g)* $A \triangle B$
$= \{1,2\} \triangle \{a,b,c\} = \{1,2,a,b,c\}$

*h)* $A \triangle C$
$= \{1,2\} \triangle \{2,3,4\} = \{1,3,4\}$



## 14. feladat

Házi feladatok

Legyen $A, B, C$ nemüres halmaz. Igazolja a következő egyenlőséget:
$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

## 15. feladat

Legyen $A, B, C, D$ nemüres halmaz. Bizonyítsuk be, hogy $A \times B \subseteq C \times D$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subseteq C$ és $B \subseteq D$.

## 16. feladat

Bizonyítsa be a következő összefüggést: $\overline{(\overline{A \cap B} \cup C) \cap \bar{A}} \cup \bar{B} \cup \bar{C} = A \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

## 17. feladat

Legyen $A$ és $B$ tetszőleges halmaz. Bizonyítsuk be, hogy $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$, ahol $P(A)$ jelöli $A$ hatványhalmazát. Igaz-e az állítás unióval?

# 18. feladat

Döntse el, hogy igazak-e a következő egyenlőségek tetszőleges $A, B, C$ halmazokra. Állításait bizonyítsa!

1. $\bar{A} \cap B = B \backslash A$

   $u \in \bar{A} \cap B$
   $\Leftrightarrow u \in \bar{A} \wedge u \in B$
   $\Leftrightarrow u \notin A \wedge u \in B$
   $\Leftrightarrow u \in B \backslash A$
   Tehát igaz

2. $(A \cap B) \backslash C = (A \backslash B) \cap C$

   Ha például $C = \emptyset$, akkor $A \cap B = (A \cap B) \backslash C = (A \backslash B) \cap C = \emptyset$
   tehát NEM igaz tetszőleges A,B halmazokra.

   Másként:
   $(A \cap B) \backslash C = A \cap B \cap \bar{C} =$
   $(A \backslash B) \cap C = A \cap \bar{B} \cap C$
   $\Leftrightarrow \emptyset = (A \cap B \cap \bar{C}) \triangle (A \cap \bar{B} \cap C) =$
   $A \cap \left((B \cap \bar{C}) \triangle (\bar{B} \cap C)\right) =$ *(2 halmaz szimmetrikus differenciája a 2 halmaz uniójának részhalmaza)*
   $A \cap \left((B \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C)\right) = A \cap (B \triangle C)$

   tehát $(A \cap B) \backslash C = (A \backslash B) \cap C$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $A$ és $B \triangle C$ diszjunkt.

# 18. feladat

Döntse el, hogy igazak-e a következő egyenlőségek tetszőleges $A, B, C$ halmazokra. Állításait bizonyítsa!

3. $(A \cup B) \cap (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \setminus B)$
   $(A \cup B) \cap (B \setminus A) = (A \cup B) \cap (B \cap \bar{A}) = B \cap \bar{A} = B \setminus A$
   $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cap B) = B$

$B \setminus A = B$ akkor és csak akkor, ha $A \cap B = \emptyset$, így az egyenlőség általában nem igaz.

4. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
   $(A \cap B) \setminus C = A \cap B \cap \bar{C}$
   $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap \bar{C}) \cap (B \cap \bar{C}) = A \cap B \cap \bar{C} \cap \bar{C}$

A két oldal egyenlő, tehát az egyenlőség igaz.

# 18. feladat

Döntse el, hogy igazak-e a következő egyenlőségek tetszőleges $A, B, C$ halmazokra. Állítását bizonyítsa!

*5.* $(A \cup B) \setminus A = B$

Nem igaz, mert például $A = B$ esetén $(A \cup B) \setminus A = \emptyset$ ,

azaz ekkor *B* (és így *A* is) csak ∅ lehet.

*6.* $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus B) \cap C$

Legyen például $A = B$.

ekkor $(A \cup B) \setminus C = A \setminus C$

és $A \cup (B \setminus C) = A$

Az egyenlőség tehát csak akkor lehet igaz, ha $A$ és $C$ diszjunkt,

tehát nem igaz tetszőleges A és C halmazokra.

# Szorgalmi feladatok

**19. feladat**

Mutassa meg, hogy

*a.* $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$;

*b.* $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$.

**20. feladat**

Legyen $A$, $B$ és $C$ a $H$ alaphalmaz részhalmaza. Igaz-e, hogy

a. ha $A = B$, akkor $A \triangle C = B \triangle C$;

b. ha $A \triangle C = B \triangle C$, akkor $A = B$;

c. ha $A \subseteq B$, akkor $A \triangle C \subseteq B \triangle C$;

d. ha $A \triangle C \subseteq B \triangle C$, akkor $A \subseteq B$.

**21. feladat**

Legyen $U$ az alaphalmaz, $A$, $B$ és $C$ az $U$ részhalmazai. Mutassa meg, hogy

*a.* $A \setminus B = A \cap \bar{B}$;

*b.* $\emptyset \subseteq A \setminus B \subseteq A$;

*c.* $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$;

*d.* $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;

*e.* $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$;

*f.* $A \setminus B = B \setminus A \Leftrightarrow A = B$;

*g.* $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$;

*h.* $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C) \Leftrightarrow A \cap C = \emptyset$;

# Szorgalmi feladatok

**22. feladat**

Legyen $A$, $B$ és $C$ a $H$ alaphalmaz részhalmaza. Igaz-e, hogy $B = C$, ha

*a.* $A \cap B = A \cap C$;

*b.* $A \cup B = A \cup C$;

*c.* $A \cup B = A \cup C$ és A∩B=A∩C ?

Válaszát indokolja!

**23. feladat**

Legyen $A$ és $B$ a $H$ alaphalmaz részhalmaza. Van-e megoldása az

*a.* $A \cup X = B$

*b.* $A \cap X = B$

egyenletnek, vagyis van-e $H$-nak olyan $U$ részhalmaza, amellyel $A \cup U = B$ illetve $A \cap U = B$? Ha van megoldás, adja meg az összes megoldást. Mi a feltétele, hogy pontosan egy megoldása legyen az egyenletnek?

c. Van-e egyszerre megoldása az az $A \cup X = B$ és $A \cap Y = B$ egyenletnek? Ha van, adja meg az összes megoldást. Van-e közös megoldása a két egyenletnek?