4. gyakorlat

VALÓS SOROZATOK 1.

Emlékeztető. Legyen $(a_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy valós sorozat. Ekkor

- (a_n) ***konvergens***, ha
$$\exists A \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon |a_n - A| < \varepsilon.$$
A-t a sorozat határértékének nevezzük,
- (a_n) ***divergens***, ha nem konvergens, azaz
$$\forall A \in \mathbb{R}\text{-hez } \exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\text{-hoz } \ \exists n > n_0 \colon |a_n - A| \geq \varepsilon,$$
- (a_n) ***határértéke*** $+\infty$ (vagy a ***sorozat*** $+\infty$***-hez tart***), ha
$$\forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon a_n > P,$$
- (a_n) ***határértéke*** $-\infty$ (vagy a ***sorozat*** $-\infty$***-hez tart***), ha
$$\forall P < 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon a_n < P.$$
- Az (a_n) sorozatnak ***van határértéke***, ha konvergens, vagy $(+\infty)$-hez vagy pedig $(-\infty)$-hez tart. Azt a tényt, hogy a sorozatnak a határérték $A \in \overline{\mathbb{R}}$, az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:
$$\lim(a_n) := A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n := A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad a_n \to A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{ha} \quad n \to +\infty.$$

A továbbiakban
$$\boxed{\lim(a_n) \in \mathbb{R}}$$
jelöli azt, hogy az (a_n) sorozat *konvergens*, vagyis véges a határértéke, a
$$\boxed{\lim(a_n) \in \overline{\mathbb{R}}}$$
jelölés pedig azt fejezi ki, hogy az (a_n) sorozatnak *van határértéke*, azaz a sorozat vagy konvergens, vagy $+\infty$, vagy pedig $-\infty$ a határértéke.

Megjegyzések.

1. Sorozatok határértékének a vizsgálata a *definíció alapján* nem egyszerű feladat. A határértéket ui. először meg kell *sejteni.* (Ilyen „technikákra” előadáson láttunk példákat).

   Most foglalkozzunk csak azzal, hogy a definíció alapján hogyan lehet *belátni* azt, hogy egy sorozat határértéke egy $\overline{\mathbb{R}}$-beli A elem. Ehhez azt kell igazolni, hogy *tetszőlegesen* rögzített $\varepsilon > 0$, illetve $P \in \mathbb{R}$ számhoz (az ún. *hibakorláthoz*) van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ (ezt *küszöbindexnek* nevezzük), hogy a sorozat ennél nagyobb indexű tagjaira bizonyos egyenlőtlenségek teljesülnek.

   Az n_0 küszöbindex függ az ε-tól, illetve a P hibakorláttól. Világos, hogy egy küszöbindexnél nagyobb természetes szám is jó küszöbindex. A küszöbindex megadásánál nem törekszünk a legkisebb küszöbindex meghatározására.

2. Egy hibakorláthoz tartozó n_0 küszöbindex keresése mindig egy egyenlőtlenség vizsgálatára vezet. Azt kell belátnunk, hogy az egy n_0-tól kezdve minden indexre teljesül. Ennek igazolásához megoldhatnánk a szóban forgó egyenlőtlenséget is; ez azonban az esetek többségében reménytelen feladat. Ezért küszöbindex keresésénél rendszerint a következő *ötletet* alkalmazzuk:

   A sorozat tagjait megadó képletet (a határérték-típustól függően) több lépésben növeljük vagy csökkentjük addig, amíg a végén a küszöbindexre egy „ránézésre” megoldható egyenlőtlenséget nem kapunk.

1. Feladat. *Tekintsük az (a_n) sorozat konvergenciájának a definícióját:*

$$\exists A \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

Módosítsuk ezt a következőképpen:

$$(*) \qquad \exists A \in \mathbb{R} \text{ és } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0 \text{ és } \forall n > n_0 \colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

Az (a_n) sorozat milyen tulajdonságát fejezi ki az utóbbi állítás?

Megoldás. Figyeljük meg, hogy $(*)$ csupán sorrendben különbözik a konvergencia definíciójától.

Mit jelent a $(*)$ állítás? Azt, hogy van olyan $A \in \mathbb{R}$ és $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy az

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség *minden* pozitív ε számra igaz, ha $n > n_0$. Mivel $|a_n - A| \geq 0$, ezért ez csak úgy lehetséges, ha

$$|a_n - A| = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n = A$$

minden $n > n_0$ indexre. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy a sorozat n_0-nál nagyobb indexű tagjai mind A-val egyenlők, röviden: (a_n) „majdnem konstans sorozat”.

Világos, hogy $(*) \implies (a_n)$ konvergens sorozat. A fordított állítás azonban nem igaz, hiszen például az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat konvergens és 0 a határértéke, de erre a sorozatra a $(*)$ állítás nyilván nem teljesül.

2. Feladat. *A konvergencia definíciója alapján mutassuk meg, hogy*

$$a)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n-3} = \frac{1}{2}, \qquad b)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+n+2} = \frac{1}{2}, \qquad c)\ \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}\right) = 0.$$

Megoldás. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz meg kell határozni egy lehetséges n_0 küszöbindexet!

a) A határérték definíciója szerint azt kell belátni, hogy

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon \left|\frac{n}{2n-3} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Ezt az állítást az egyenlőtlenség megoldásával is igazolhatnánk. Figyeljük meg, hogy elég azt bebizonyítani, hogy a szóban forgó egyenlőtlenség teljesül alkalmas n_0 küszöbindexnél nagyobb n-ekre. Ezért az egyenlőtlenség megoldása helyett egy lényegesen egyszerűbb utat fogunk követni: az

$$\left|\frac{n}{2n-3} - \frac{1}{2}\right|$$

kifejezést több lépésben egyre egyszerűbb kifejezésekkel *növeljük* addig, ameddig a végén a küszöbindexre egy „ránézésre” megoldható egyenlőtlenséget nem kapunk.

Legyen $\varepsilon > 0$ egy rögzített valós szám. Ekkor

$$\left|\frac{n}{2n-3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-(2n-3)}{2(2n-3)}\right| = \frac{3}{2|2n-3|} = \ (2n-3>0 \text{ ha } \underline{n>1}) \ =$$

$$= \frac{3}{2(2n-3)} = \frac{3}{4n-6} = \frac{3}{n+\underbrace{3(n-2)}_{\geq 0,\text{ ha } n>1}} \leq \underbrace{\frac{3}{n}}_{n>\frac{3}{\varepsilon}} < \varepsilon\,.$$

Az utolsó egyenlőtlenség teljesül, ha $n > \dfrac{3}{\varepsilon}$. Legyen

$$n_0 := \max\left\{\left[\frac{3}{\varepsilon}\right], 1\right\}.$$

Ha $n > n_0$ tetszőleges természetes szám, akkor az előzőek alapján fennáll az

$$\left|\frac{n}{2n-3} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség, ezért ε-hoz n_0 egy alkalmas küszöbindex. A $(*)$ állítást, így a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n-3} = \frac{1}{2}$$

egyenlőséget bebizonyítottuk.

b) A határérték definíciója szerint azt kell belátni, hogy

$$(*) \qquad \forall\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon \left|\frac{n^2+1}{2n^2+n+2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Most is meg tudnánk oldani az utolsó egyenlőtlenséget, de az előző feladat megoldásában vázolt utat fogjuk követni. Legyen $\varepsilon > 0$ egy rögzített valós szám. Ekkor

$$\left|\frac{n^2+1}{2n^2+n+2} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2(n^2+1)-(2n^2+n+2)}{2(2n^2+n+2)}\right| = \frac{|-n|}{2(2n^2+n+2)} =$$

$$= \frac{n}{2(2n^2+n+2)} \leq \ (\text{ha } n>0) \ \leq \frac{n}{4n^2} = \underbrace{\frac{1}{4n}}_{n>\frac{1}{4\varepsilon}} < \varepsilon\,.$$

Az utolsó egyenlőtlenség teljesül, ha $n > \dfrac{1}{4\varepsilon}$. Legyen

$$n_0 := \left[\frac{1}{4\varepsilon}\right].$$

Ekkor minden $n > n_0$ index esetén az

$$\left|\frac{n^2+1}{2n^2+n+2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesül, ezért ε-hoz n_0 egy alkalmas küszöbindex. A $(*)$ állítást, így a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+n+2} = \frac{1}{2}$$

egyenlőséget bebizonyítottuk.

c) A határérték definíciója szerint azt kell belátni, hogy

$$(*)\qquad \forall\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon \left|\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}\right)-0\right| < \varepsilon.$$

Az utolsó egyenlőtlenség megoldása most hosszadalmas lenne, viszont az előző feladatokban mutatott utat követve egyszerűen igazolhatjuk a $(*)$ állítást.

Először azonban „gyöktelenítéssel” átalakítjuk a sorozat tagjait megadó kifejezést:

$$\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} = \frac{(n+3)-(n+1)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}$$

minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. (Ebből már világosabb képet alkothatunk a sorozat tagjainak a viselkedéséről, ti. elég nagy n-ekre a sorozat tagjai tetszőlegesen közel lesznek 0-hoz.)

Legyen $\varepsilon > 0$ egy rögzített valós szám. Ekkor

$$\left|\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}\right)-0\right| = \sqrt{n+3}-\sqrt{n+1} = \frac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} <$$

$$< \ \text{(elhagyjuk } \sqrt{n+3} > 0\text{-t)}\ < \frac{2}{\sqrt{n+1}} < \ \text{(ha } n > 0\text{)}\ < \underbrace{\frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon}_{n > \frac{4}{\varepsilon^2}}.$$

Az utolsó egyenlőtlenség teljesül, ha $n > \frac{4}{\varepsilon^2}$. Legyen

$$n_0 := \left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right].$$

Ekkor minden $n > n_0$ index esetén az

$$\left|\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}\right)-0\right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesül, ezért ε-hoz n_0 egy alkalmas küszöbindex. A $(*)$ állítást, így a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}\right) = 0$$

egyenlőséget bebizonyítottuk.

3. Feladat. *A definíció szerint az (a_n) sorozat $(+\infty)$-hez tart, ha*

$$\forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon a_n > P.$$

Módosítsuk ezt a következőképpen:

$$(**)\qquad \exists P > 0 \text{ és } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon a_n > P.$$

Az (a_n) sorozat milyen tulajdonságát fejezi ki az utóbbi állítás?

Megoldás. Figyeljük meg, hogy $(**)$ *csak* abban különbözik a $(+\infty)$-hez tartás definíciójától, hogy ez utóbbiban az első „$\forall$” kvantor helyett a „$\exists$” kvantor szerepel.

Világos, hogy a $(**)$ állítás azt fejezi ki, hogy a sorozat n_0 indexnél nagyobb indexű tagjai P-nél nagyobbak.

Nyilvánvaló, hogy $\lim(a_n) = +\infty \implies$ a $(**)$ állítás. Ennek a megfordítása azonban nem igaz, hiszen például az $a_n = 2$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatra $(**)$ $P = 1$-val teljesül, de (a_n) határértéke nem $+\infty$.

4. Feladat. *A határérték definíciója alapján mutassuk meg, hogy*

$$a)\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+1}{n+3} = +\infty, \qquad\qquad b)\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2-3n^2}{n+1} = -\infty.$$

Megoldás. Tetszőleges P hibakorláthoz meg kell határozni egy lehetséges n_0 küszöbindexet!

a) A $(+\infty)$-hez definíciója szerint azt kell megmutatni, hogy

$$(*)\qquad\qquad \forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon \frac{n^2+3n+1}{n+3} > P.$$

Ezt az állítást az utolsó egyenlőtlenség megoldása helyett a 2. feladat megoldásaiban szereplő gondolatok felhasználásával igazoljuk. Nevezetesen: most az

$$\frac{n^2+3n+1}{n+3}$$

kifejezést több lépésben addig *csökkentjük*, ameddig a küszöbindexre egy olyan egyszerű egyenlőtlenséget nem kapunk, amelynek a megoldása már „ránézésre” is megállapítható.

Legyen tehát $P > 0$ egy tetszőlegesen rögzített valós szám. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{n^2+3n+1}{n+3} > \frac{n^2}{n+3} > \text{(ha } n > 0) > \frac{n^2}{n+3n} = \frac{n^2}{4n} = \underbrace{\frac{n}{4} > P}_{n>4P}.$$

Az utolsó egyenlőtlenség igaz, ha $n > 4P$. Legyen

$$n_0 := [4P].$$

Ekkor $\forall n > n_0$ indexre az

$$\frac{n^2+3n+1}{n+3} > P$$

egyenlőtlenség teljesül, ezért $P > 0$-hoz n_0 egy alkalmas küszöbindex.

A $(*)$ állítást, így a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+1}{n+3} = +\infty$$

egyenlőséget is bebizonyítottuk.

b) A $(-\infty)$-hez definíciója szerint azt kell igazolni, hogy

$$(*) \qquad \forall P < 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon \ \frac{2-3n^2}{n+1} < P.$$

Szorozzuk meg az utolsó egyenlőtlenséget (-1)-gyel, és vegyük figyelembe, hogy ekkor az egyenlőtlenség iránya megfordul:

$$\frac{2-3n^2}{n+1} < P \quad\iff\quad (-1)\cdot\frac{2-3n^2}{n+1} > (-1)\cdot P \quad\iff\quad \frac{3n^2-2}{n+1} > -P.$$

Legyen $P<0$ egy tetszőlegesen rögzített valós szám. Azt kell belátni, hogy az utolsó egyenlőtlenség egy alkalmas n_0 küszöbindextől kezdve igaz. Az előző megoldásban alkalmazott módszert követve azt kapjuk, hogy

$$\frac{3n^2-2}{n+1} = \frac{2n^2+(n^2-2)}{n+1} > \ (\text{ha } \underline{n>1}, \text{ akkor } n^2-2>0)\ >$$
$$> \frac{2n^2}{n+1} \geq \frac{2n^2}{n+n} = \frac{2n^2}{2n} = \underbrace{n > -P}.$$

Legyen

$$n_0 := \max\Big\{1,\ [-P]\Big\}.$$

Ekkor $\forall n > n_0$ indexre a

$$\frac{3n^2-2}{n+1} > -P \qquad\iff\qquad \frac{2-3n^2}{n+1} < P$$

egyenlőtlenség teljesül, ezért $P<0$-hoz n_0 egy alkalmas küszöbindex.

A $(*)$ állítást, így a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2-3n^2}{n+1} = -\infty$$

egyenlőséget is bebizonyítottuk.