5. hét, 2024. március 11.

Analízis 2B Előadás

Tartalom

a) Taylor-sorok

b) Taylor-polinomok

Taylor-sorok

Hatványsorok

a) Hatványsor: $\sum \left(c_n(x-a)^n\right)$, ahol $a,\ x,\ c_n \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$.

b) Hatványsor konvergencia sugara, konvergencia halmaza: Cauchy–Hadamard-tétel.

c) Hatványsor összegfüggvénye: $f : H \to \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, ahol H a hatványsor konvergenciahalmaza.

Példák: exp, sin, cos.

Eddig: Hatványsor $\Longrightarrow$ (analitikus) Függvény.

Mostani probléma: Függvény $\Longrightarrow$ Hatványsor.

Miért?

a) A hatványsorokról sok jó tulajdonságot bizonyítottunk pl. folytonosság, differenciálhatóság.

b) A sor alakban történő előállítás a részletösszegeket véve lehetőséget ad polinomokkal történő approximációra.

c) A helyettesítési értékek tetszőleges közelítő kiszámolása az alapműveletekkel.

Kérdések

Adott $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esetén:

a) Van-e olyan hatványsor, aminek az összegfüggvénye az f függvény?

b) Ha van, akkor az egyértelmű-e?

c) Hogyan tudjuk előállítani a kérdéses hatványsort?

A hatványsor együtthatóinak meghatározása

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.

Tegyük fel, hogy van olyan $\sum \big(c_n(x-a)^n\big)$ hatványsor, amelyik az a pont egy $k_\delta(a)$ $(\delta > 0)$ környezetében előállítja az f függvényt, azaz

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad (x \in k_\delta(a)) .$$

A $k_\delta(a)$ környezet nyilván része a hatványsor konvergencia tartományának.

Tudjuk: hatványsor összegfüggvénye végtelen sokszor differenciálható, és a hatványsor "tagonként deriválható".

Ekkor $f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)c_k(x-a)^{k-n} \quad (n \in \mathbb{N}) .$

A kapott eredmény

Tekintsük az előző egyenlőséget az $x = a$ pontban:

$$f^{(n)}(a) = n!c_n\,, \qquad \text{azaz} \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Következmény

Tétel

Ha az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény előállítható a $\sum \big(c_n(x-a)^n\big)$ hatványsor összegfüggvényeként az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont valamely $\delta > 0$ sugarú környezetében, akkor

i) $f \in D^\infty(a)$, azaz f végtelen sokszor differenciálható az a pontban,

ii) $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N})\,.$

Megjegyzés: A formula $n = 0$ esetén is igaz.

Összefoglalás: Megtudtuk, hogy ha f előállítható hatványsor összegfüggvényeként egy pont környezetében, akkor

a) f végtelen sokszor differenciálható abban a pontban,

b) csak egy ilyen hatványsor lehet,

c) a hatványsor együtthatóit meghatározzák az f függvény adott pontbeli deriváltjai.

Definíció.

Ha $f \in D^{\infty}\{a\}$, akkor a

$$T_a f(x) := \sum \left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsort az f függvény $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ ponthoz tartozó Taylor-sorának nevezzük.

Az f függvény $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát szokásos f Maclaurin-sorának is nevezni.

Megjegyzések.

a) Az előző tételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy minden konvergens hatványsor az összegfüggvényének a konvergencia középpont körüli Taylor-sorával egyenlő.

b) Ha egy f függvény előállítható konvergens hatványsor összegfüggvényeként, akkor a szóban forgó sor szükségképpen az f függvénynek a konvergencia középpont körüli Taylor-sora.

c) Az $\exp, \sin, \cos, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}$ függvények definícióiban megadott hatványsorok a szóban forgó függvények $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorai.

Kérdések

Ha $f \in D^\infty\{a\}$, akkor

i) mely pontokban lesz konvergens a $T_a f$ Taylor-sor,

ii) ahol konvergens, ott eőállítja-e az f függvényt, azaz teljesül-e azokban az x pontokban, hogy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\,?$$

Rövid válasz: nem

Legyen

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0\,. \end{cases}$$

Ekkor $f \in D^\infty(\mathbb{R})$ és $f^{(n)}(0) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Következésképpen a $T_0 f$ Taylor-sor minden együtthatója 0, a $T_0 f$ Taylor-sor összegfüggvénye az $\mathbb{R}$-en azonosan 0 függvény, ami az f-et egyetlen $x \neq 0$ pontban sem állítja elő, mert $f(x) > 0$ $(x \in \mathbb{R},\ x \neq 0)$.

Az általános eset vizsgálata

A sorfejtés problémájának a vizsgálatához az általános esetben az függvény és a Taylor-sor részletösszegeinek a különbségét kell vizsgálni.

Az előző jelölésekkel:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Vezessük be a

$$T_{a,n}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

jelölést.

Definíció

Legyen $f \in D^{(n)}(a)$.

A $T_{a,n}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ $(x \in \mathbb{R})$ polinomot az f függvény $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ ponthoz tartozó n-edik Taylor-polinomjának nevezzük.

Figyelem: $T_{a,n}f$ létezéséhez nem kell, hogy az f végtelen sokszor differenciálható legyen. Elég, ha $f \in D^{(n)}(a)$.

Ha $f \in D^{\infty}(a)$, akkor az n-edik $T_{a,n}f$ Taylor-polinom a $T_a f$ Taylor-sor n-edik részletösszege.

A Taylor-polinomok tulajdonságai

Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy $f \in D^n\{a\}$.

Ekkor a

$$T_{a,n}f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

Taylor-polinomra az alábbi interpolációs tulajdonságok teljesülnek:

$$T_{a,n}f(a) = f(a),\ \big(T_{a,n}f\big)'(a) = f'(a),\ \big(T_{a,n}f\big)''(a) = f''(a),\ \ldots,\ \big(T_{a,n}f\big)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)\,.$$

$T_{a,n}f$ az egyetlen ilyen "jó" tulajdonságú legfeljebb n-edfokú polinom.

Valóban: Tegyük fel, hogy egy ilyen P polinomra teljesül

$$P(a) = f(a),\ P'(a) = f'(a),\ P''(a) = f''(a),\ \ldots,\ P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)\,.$$

Legyen $Q := P - T_{a,n}f$.

Ekkor $Q(a) = Q'(a) = \cdots = Q^{(n)}(a) = 0\,.$

Ebből következik, hogy az a szám a Q legfeljebb n-edfokú polinomnak legalább $(n+1)$-szeres gyöke.

Következésképpen $Q \equiv 0$, azaz $P \equiv T_{a,n}f$.

A következő tételben az $f - T_{a,n}f$ különbséget egy jól kezelhető alakban állítjuk elő.

Tétel (Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.)

Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy $f \in D^{n+1}\big(K(a)\big)$.

Ekkor $\forall\, x \in K(a)$ ponthoz $\exists$ olyan a és x közé eső ξ szám, hogy

$$f(x) - T_{a,n}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy $a < x$ (az $x < a$ eset hasonlóan kezelhető).

Tudjuk, hogy $f^{(k)}(a) = \big(T_{a,n}f\big)^{(k)}(a)$ $(k = 0, \ldots, n)$.

Következésképpen az $F := f - T_{a,n}f$ függvényre teljesül, hogy $F^{(k)}(a) = 0$ $(k = 0, \ldots, n)$.

Legyen $G(t) = (t-a)^{n+1}$ $(t \in \mathbb{R})$. Erre a függvényre is igaz, hogy $G^{(k)}(a) = 0$ $(k = 0, \ldots, n)$.

Könnyű ellenőrizni, hogy az F, G függvényekre alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel:

$$\exists\; a < \xi_1 < x\,, \quad \text{amelyre} \quad \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}\,.$$

(A második tagban $F(a) = G(a) = 0$.)

Bizonyítás (folytatás)

Megismételhetjük az előző gondolatmenetet az F', G' függvényekre:

$$\exists\ a < \xi_2 < \xi_1\,, \quad \text{amelyre} \quad \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}\,.$$

$F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a)$ $(k = 0, \dots, n)$ miatt ezt tovább folytathatjuk. Azt kapjuk, hogy $\exists\ a < \xi_{n+1} < \xi_n$, amelyre

$$\frac{f(x) - T_{a,n}f(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n)}(\xi_n) - F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(\xi_n) - G^{(n)}(a)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})}\,.$$

(Az utolsó előtti tagban $F^{(n)}(a) = G^{(n)}(a) = 0$.)

Mivel $T_{a,n}f$ legfeljebb n-edfokú polinom, ezért $\left(T_{a,n}f\right)^{(n+1)} \equiv 0$, így $F^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = \left(f(x) - T_{a,n}f(x)\right)^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = f^{(n+1)}(\xi_{n+1})$.

Másrészt $G(t) = (t-a)^{n+1}$, ezért $G^{(n+1)} \equiv (n+1)!$.

Következésképpen

$$f(x) - T_{a,n}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,. \quad \square$$

Hibaformula

Az

$$R_n f(x) = f(x) - T_{a,n} f(x) \quad (x \in \mathcal{D}_f)$$

függvény értéke az n-edfokú Taylor-polinommal való közelítés hibája az x pontban.

Az előző tétel következménye:

Ha $\exists \;\; M > 0$ olyan, hogy $\left|f^{(n+1)}(x)\right| < M \;\; \forall \;\; x \in K_r(a)$, akkor

$$|R_n f(x)| < \frac{M}{(n+1)!} |x - a|^{n+1} \qquad (x \in K_r(a)) .$$

Függvények egy fontos osztályára igaz, hogy egy rögzített a helyhez tartozó Taylor-polinomok sorozata egy $K(a)$ környezet bármely x helyén $f(x)$-hez tart, ha $n \to +\infty$. Az egyik legegyszerűbb, de fontos ilyen jellegű tétel a következő.

Tétel (Elégséges feltétel az előállításra)

Legyen $f \in D^{\infty}\big(K(a)\big)$, és tegyük fel, hogy

$$\exists\, M > 0, \quad \text{amelyre} \quad \big|f^{(n)}(x)\big| \le M \quad \big(\forall\, x \in K(a), \ \ \forall \ \ n \in \mathbb{N}\big).$$

Ekkor f-nek az a ponthoz tartozó Taylor-sora a $K(a)$ halmazon előállítja az f függvényt, vagyis fennáll az

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ \big(x \in K(a)\big)$$

egyenlőség.

Bizonyítás

Legyen $x \in K(a)$ egy tetszőleges pont. Ekkor az előző tétel alapján létezik olyan ξ pont a és x között, hogy

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \le M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ebből a tétel állítása már következik, mert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \qquad \square$$

Példák

a) $f = \exp$, $f^{(n)} = \exp$, $\exp\ \uparrow$. Az $f^{(n)}$ függvénynek a 0 minden környezetében n-től független korlátja van: $|f^{(n)}(x)| \le \exp r =: M\ \ (x \in K_r(0))$.

b) $f(x) = \sin(x)$. A sin függvény "hagyományos, geometriai" definícióját tekintjük.

Volt: $\sin^{(2n)} = (-1)^n \sin,\ \sin^{(2n+1)} = (-1)^n \cos$.

A fenti feltételek teljesülnek: $a = 0$ esetén tetszőleges $r > 0$-ra $M = 1$ választással.

Következésképpen

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k+1} .$$

c) $f(x) = \cos x$ a b)-hez hasonlóan.

Nevezetes sorfejtések

1° $$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)}$$

Bizonyítás. Legyen $f(x) := \dfrac{1}{1+x}$ $(x > -1)$. Ekkor $f \in D^\infty$ és $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$ $(x > -1)$, így

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n n! \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow$$

$$T_0 f(x) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0} (-1)^n x^n \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ez $(-x)$ hányadosú geometriai sor, és konvergens $\Longleftrightarrow$ $|x| < 1$, és ekkor az összege:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad (|x| < 1). \qquad \square$$

2° $$\boxed{\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \quad (|x| < 1)}$$

Bizonyítás. 1°-ben x helyett x^2-et írva kapjuk az állítást. □

3° $$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots \quad (x \in (-1,1])}.$$

Ha $x = 1$, akkor

$$\boxed{\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots}.$$

Bizonyítás. (Vázlat.) Legyen $f(x) := \ln(1+x)$ $(x > -1)$. Ekkor $f \in D^\infty$ és $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n}$, így

$$f(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!\ (n \in \mathbb{N}^+) \quad \Longrightarrow$$

$$T_0 f(x) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A sor konvergenciahalmaza a $(-1, 1]$ intervallum.

Az előállítás. Legyen g a $T_0 f$ sor összegfüggvénye:

$$g(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \big(x \in (-1, 1]\big).$$

Ekkor $g \in D(-1, 1)$ és $\forall\, x \in (-1, 1)$ pontban

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot \frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}.$$

Mivel $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $(x > -1) \Longrightarrow f' = g'$ $(-1, 1)$-en $\Longrightarrow$
$\exists\, c \in \mathbb{R}$: $f(x) - g(x) = c$ $\big(x \in (-1, 1)\big)$. Ugyanakkor
$f(0) - g(0) = 0 \Longrightarrow c = 0$. Így $\forall\, x \in (-1, 1)$ pontban

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots.$$

Az $x = 1$ pontban az állítás f és g folytonosságából következik. □

4° $$\boxed{\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \cdots \quad (x \in [-1,1])}.$$

Ha $x = 1$, akkor

$$\boxed{\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots}.$$

Megjegyzés. Az $f(x) := \operatorname{arctg} x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény $T_0 f$ Taylor-sorának előállítása a definíció alapján nem egyszerű feladat. □

Bizonyítás. (Vázlat.) **Ötlet:** Az $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény sorösszeg előállítását már ismerjük (l. a **2°** példát):

$$T_0 f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \quad (|x| < 1).$$

Vegyük észre azt, hogy ha

$$g(x) := x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (|x| < 1), \text{ akkor}$$
$$g'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \quad (|x| < 1).$$

A **3^o^** példában alkalmazott gondolatmenetet követve kapjuk, hogy

$$g(x) = f(x) = \operatorname{arctg} x, \text{ ha } x \in (-1, 1).$$

A ± 1 pontbeli előállítást is hasonlóan bizonyíthatjuk be. $\square$

5^o A binomiális sor

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (x \in (-1,1),\ \alpha \in \mathbb{R})},$$

ahol

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \text{ és } \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \text{ ha } n \in \mathbb{N}^+$$

a binomiális együtthatók.

Bizonyítás. (Vázlat.) Legyen

$$f(x) := (1+x)^\alpha \quad (x > -1,\ \alpha \in \mathbb{R}).$$

1. lépés. Az f függvény 0 pont körüli Taylor-sora:

$$T_0 f(x) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ui. $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$ $(n \in \mathbb{N}^+)$.

2. lépés. A $T_0 f$ sor konvergens a $(-1, 1)$ intervallumon (l. a hányadoskritériumot). Legyen

$$g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (|x| < 1).$$

3. lépés. $f \in D^{\infty}(-1, +\infty)$ és

$$(1+x) \cdot f'(x) = \alpha \cdot f(x) \quad (x > -1).$$

$g \in D^{\infty}(-1, 1)$, és **igazolható**, hogy

$$(1+x) \cdot g'(x) = \alpha \cdot g(x) \quad (|x| < 1).$$

4. lépés. Igazoljuk, hogy

$$(1+x)^{\alpha} = f(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (|x|<1),$$

Valóban, minden $x \in (-1, 1)$ pontban

$$\left(\frac{g(x)}{(1+x)^{\alpha}}\right)' = \frac{g'(x)\cdot(1+x)^{\alpha} - g(x)\cdot\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} =$$

$$= \frac{(1+x)\cdot g'(x) - \alpha\cdot g(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0.$$

Ezért $\exists\, c \in \mathbb{R} : \dfrac{g(x)}{(1+x)^{\alpha}} = c$ $(|x| < 1)$. Mivel $g(0) = \binom{\alpha}{0} = 1$, ezért $c = 1$, tehát

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \big(x \in (-1,1),\ \alpha \in \mathbb{R}\big). \blacksquare$$

6° A binomiális sorban $\alpha = -\frac{1}{2}$ esetén x helyett $(-x^2)$-et írva azt kapjuk, hogy

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{n} \cdot x^{2n} \quad (|x| < 1)},$$

ahol $\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \cdot \binom{2n}{n}/4^n$.

7° Ha $f(x) := \arcsin(x)$ $\big(x \in [-1, 1]\big)$, akkor $f \in D(-1, 1)$ és

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \big(|x| < 1\big).$$

A **6°** példát, valamint a **3°** példa gondolatmenetét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\boxed{\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \big(|x| < 1\big)}.$$