8. hét, 2024. április 16.

Analízis 2A Előadás

Tartalom

a) Műveletek integrálható függvényekkel

b) A Riemann-integrál tulajdonságai

c) Egyenlőtlenségek

Műveletek integrálható függvényekkel

Tétel (integrálható függvények összege, konstansszorosa)

Tegyük fel, hogy $f, g \in R[a,b]$.

Ekkor

a) $\lambda \cdot f \in R[a,b]$ és $\displaystyle\int_a^b (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \int_a^b f \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$;

b) $f + g \in R[a,b]$ és $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;

$\Big($Az $I : R[a,b] \to \mathbb{R}$, $If = \int_a^b f$ lineáris funkcionál: $I(\alpha f + \beta g) = \alpha If + \beta Ig$.$\Big)$

Bizonyítás

a) Az állítás nyilvánvalóan következik abból, hogy ha $\lambda \geq 0$, akkor $\forall\ \tau \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztásra

$$s(\lambda \cdot f, \tau) = \lambda \cdot s(f, \tau) \quad \text{és} \quad S(\lambda \cdot f, \tau) = \lambda \cdot S(f, \tau)\,,$$

és így $I_*(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot I_*(f) = \lambda \cdot I^*(f) = I^*(\lambda \cdot f)$.

Az $\lambda < 0$, eset hasonlóan igazolható, mivel

$$s(\lambda \cdot f, \tau) = \lambda \cdot S(f, \tau) \qquad \text{és} \qquad S(\lambda \cdot f, \tau) = \lambda \cdot s(f, \tau)\,. \quad \square$$

Bizonyítás (folytatás)

b) Legyen $\tau = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ és

$$f_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f\,, \qquad F_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f\,, \qquad g_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} g\,, \qquad G_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} g\,.$$

Mivel

$$f_i + g_i \le f(x) + g(x) \le F_i + G_i \qquad (x \in [x_{i-1}, x_i])\,,$$

ezért

$$f_i + g_i \le \inf_{[x_{i-1},x_i]} (f+g) \le \sup_{[x_{i-1},x_i]} (f+g) \le F_i + G_i.$$

Ebből $(x_i - x_{i-1})$-gyel való szorzás és összegzés után az adódik, hogy

$$s(f,\tau) + s(g,\tau) \le s(f+g,\tau) \le S(f+g,\tau) \le S(f,\tau) + S(g,\tau).$$

Tegyük fel, hogy $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$, és legyen $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$.

Ekkor

$$s(f,\tau_1) + s(g,\tau_2) \le s(f,\tau) + s(g,\tau) \le s(f+g,\tau) \le I_*(f+g).$$

Innen – először a $\tau_1 \in \mathcal{F}[a,b]$, majd a $\tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztásokra a bal oldal felső határát véve – következik, hogy

$$I_*(f) + I_*(g) \le I_*(f+g).$$

Bizonyítás (folytatás)

Hasonlóan igazolható, hogy

$$I^*(f+g) \leq I^*(f) + I^*(g).$$

Azt kaptuk, hogy

$$I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f+g) \leq I^*(f+g) \leq I^*(f) + I^*(g)\,.$$

Mivel $f, g \in R[a,b]$, ezért

$$I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f \quad \text{és} \quad I_*(g) = I^*(g) = \int_a^b g\,,$$

tehát $I_*(f+g) = I^*(f+g)\,.$

Következésképpen $f+g \in R[a,b]$ és $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g\,.$ $\square$

Tétel (integrálható függvények szorzata)

Ha $f, g \in R[a,b]$, akkor $f \cdot g \in R[a,b]$.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy csak a szorzat integrálhatóságát bizonyítjuk, a kiszámolásra nem adunk módszert.

Bizonyítás

A bizonyításban az integrálhatóságnak az oszcillációs összegekkel való karakterizációját fogjuk alkalmazni.

i) Először tegyük fel, hogy $f, g \geq 0$.

Legyen $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n\} \in \mathcal{F}[a, b]$.

Ekkor az előző tétel b) részében bevezetett jelölésekkel:

$$f_i \cdot g_i \leq f(x) \cdot g(x) \leq F_i \cdot G_i\,, \qquad \forall\, x \in [x_{i-1}, x_i]\,.$$

Következésképpen

$$f_i \cdot g_i \leq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot g \leq \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot g \leq F_i \cdot G_i\,.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\Omega(f \cdot g, \tau) &= S(f \cdot g, \tau) - s(f \cdot g, \tau) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot g - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot g \Big) (x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \Big(F_i \cdot G_i - f_i \cdot g_i \Big) \cdot (x_i - x_{i-1})\,.
\end{aligned}$$

Bizonyítás (folytatás)

Mivel f és g korlátos, ezért $\exists\, M : \ |f(x)|, |g(x)| \le M \ \ \forall\, x \in [a,b]$. Így

$$\begin{aligned}\Omega(f\cdot g,\tau) &\le \sum_{i=1}^{n}\Big[F_i\cdot(G_i-g_i)+(F_i-f_i)\cdot g_i\Big]\cdot(x_i-x_{i-1})\\ &\le M\cdot\sum_{i=1}^{n}(G_i-g_i)\cdot(x_i-x_{i-1})+M\cdot\sum_{i=1}^{n}(F_i-f_i)\cdot(x_i-x_{i-1})\\ &= M\cdot\big(\Omega(g,\tau)+\Omega(f,\tau)\big)\,.\end{aligned}$$

Mivel $f, g \in R[a,b]$, ezért $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \tau_1,\ \tau_2$, amelyre $\Omega(f,\tau_1) < \varepsilon, \Omega(g,\tau_2) < \varepsilon$.

$\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \tau = \tau_1 \bigcup \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$ tehát olyan felosztás, hogy

$$\Omega(f\cdot g,\tau) \le 2\cdot M\cdot\varepsilon\,,$$

ami azt jelenti, hogy $f\cdot g \in R[a,b]$.

ii) Legyen most f, g tetszőleges, és legyen $m_f := \inf\limits_{[a,b]} f, \quad m_g := \inf\limits_{[a,b]} g$.

Ekkor $f - m_f \ge 0$ és $g - m_g \ge 0$ $[a,b]$-n integrálható függvények. i) szerint tehát

$$f\cdot g = \underbrace{(f-m_f)\cdot(g-m_g)}_{\in R[a,b]} + \underbrace{m_f\cdot g + f\cdot m_g - m_f\cdot m_g}_{\in R[a,b]}\,,$$

következésképpen $f\cdot g \in R[a,b]$. $\square$

Tétel

Ha $f, g \in R[a,b]$, $|g(x)| \geq m > 0$ $\big(\forall\, x \in [a,b]\big)$, akkor $\dfrac{f}{g} \in R[a,b]$.

Bizonyítás

A szorzatra bizonyított tétel miatt elég azt igazolni, hogy a g-re tett feltétel esetén $\frac{1}{g} \in R[a,b]$.

Legyen $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$.

Ekkor $\forall\, x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ pontban

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} = \frac{g(y) - g(x)}{g(x) \cdot g(y)} \leq \frac{|g(y) - g(x)|}{|g(x) \cdot g(y)|} \leq \frac{G_i - g_i}{m^2}.$$

Ebből következik, hogy

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{g} - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{g} \leq \frac{G_i - g_i}{m^2}.$$

$(x_i - x_{i-1})$-gyel való szorzás és összegzés után azt kapjuk, hogy

$$\Omega\Big(\frac{1}{g}, \tau\Big) \leq \frac{1}{m^2} \cdot \Omega(g, \tau).$$

Mivel $g \in R[a,b]$, ezért $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \tau \in \mathcal{F}[a,b]$, amelyre $\Omega(g, \tau) < \varepsilon$.

Ekkor $\Omega\Big(\dfrac{1}{g}, \tau\Big) < \dfrac{\varepsilon}{m^2}$, amiből következik, hogy $\dfrac{1}{g} \in R[a,b]$. $\square$

A Riemann-integrál további tulajdonságai

Megmutatjuk, hogy a Riemann-integrál érzéketlen a függvény véges halmazon való megváltoztatására. Más szóval, ha egy Riemann-integrálható függvényt egy véges halmazon (tetszőlegesen) megváltoztatunk, akkor az így kapott függvény is Riemann-integrálható lesz, és a (Riemann-)integrálja ugyanaz marad, mint a kiindulási függvényé.

Tétel

Tegyük fel, hogy $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ha $f \in R[a, b]$, és az

$$A := \{x \in [a, b] \mid f(x) \neq g(x)\} \text{ halmaz véges,}$$

akkor $g \in R[a, b]$ és

$$\int_a^b g = \int_a^b f\,.$$

Bizonyítás

Elég azt az esetet megmutatni, amikor az f függvényt csak egy pontban változtatjuk meg, azaz f és g csak egy pontban különbözik.

Legyen tehát $\alpha \in [a, b]$, amelyre

$$f(x) = g(x) \quad (x \in [a, b],\ x \neq \alpha) \qquad \text{és} \qquad f(\alpha) \neq g(\alpha)\,.$$

Bizonyítás (folytatás)

Vezessük be a $h := g - f$ függvényt. Mivel $g = f + h$, ezért az integrál additivitása miatt megmutatni, hogy $h \in R[a,b]$, és $\int_a^b h = 0$.

A definíció szerint

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in [a,b] \text{ és } x \neq \alpha \\ g(\alpha) - f(\alpha), & \text{ha } x = \alpha \end{cases} \qquad \text{és} \qquad h(\alpha) \neq 0\,.$$

Elég azt az alapesetet venni, amikor $h(\alpha) = 1$. A többi ennek konstansszorosa.

Legyen $\varepsilon > 0$, és vegyük az $[a,b]$ intervallum n részre való, τ-val jelölt egyenletes felosztását úgy, hogy $\frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesüljön.

α nyilvánvalóan legfeljebb két részintervallumnak eleme (osztópont esete).

A többi részintervallumban $h \equiv 0$, ezért a $\sup$ és az $\inf$ is 0 ezeken az intervallumokon, így

$$S(h,\tau) \leq 2 \cdot \frac{b-a}{n} < \varepsilon\,.$$

Mivel $\epsilon > 0$ tetszőleges, ezért $I^*(h) = 0$.

$\forall\, \tau \in \mathcal{F}[a,b]$ esetén $s(h,\tau) = 0$, tehát $I_*(h) = 0$.

Ez azt jelenti, hogy $h \in R[a,b]$ és $\int_a^b h = 0$. $\square$

Megjegyzés: Az előző tétel lehetőséget ad az integrál értelmezésének kiterjesztésére olyan függvényekre, amelyek az $[a, b]$ intervallum véges sok pontjában nincsenek értelmezve.

Legyen ugyanis f egy ilyen függvény. Ha $\exists\, g \in R[a, b]$ olyan, hogy $g(x) = f(x)$ legfeljebb véges sok $[a, b]$-beli pont kivételével, akkor azt mondjuk, hogy f integrálható, és

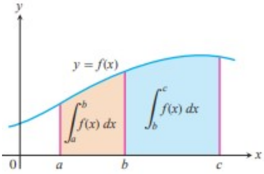
$$\int_a^b f := \int_a^b g.$$

Ha ilyen g nem létezik, akkor f nem integrálható.

Az előző tételből következik, hogy az integrálhatóság ténye és az integrál értéke független a g függvény megválasztásától.

Az integrál intervallum szerinti additivitása

Szemléltetés



Tétel

Tegyük fel, hogy $f \in K[a, b]$, és legyen $c \in (a, b)$.

Ekkor

i) $f \in R[a, b] \iff f \in R[a, c]$ és $f \in R[c, b]$,

ii) ha $f \in R[a, c]$ és $f \in R[c, b]$ (vagy $f \in R[a, b]$), akkor

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Megjegyzés: $f \in R[a, c]$ azt jelenti, hogy $f_1 := f_{\big|[a,c]} \in R[a, c]$. Hasonlóan, $f \in R[c, b]$ azt jelenti, hogy $f_2 := f_{\big|[c,b]} \in R[c, b]$.

Bizonyítás

i) $\Longrightarrow$

Ha $f \in R[a,b]$, akkor

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, \tau \in \mathcal{F}[a,b] \quad \text{amelyre} \quad \Omega(f,\tau) < \varepsilon\,.$$

Feltehetjük, hogy $c \in \tau$, különben τ-t kicserélve $\tau \cup \{c\}$-re azt kapjuk, hogy $\Omega(f,\tau \cup \{c\}) \leq \Omega(f,\tau) < \varepsilon$.

Legyen $\tau_1 := \tau \cap [a,c] \in \mathcal{F}[a,c]$ és $\tau_2 := \tau \cap [c,b] \in \mathcal{F}[c,b]|$. Ekkor

$$\Omega(f_1,\tau_1) + \Omega(f_2,\tau_2) = \Omega(f,\tau)$$

és így $\Omega(f,\tau) < \varepsilon$ miatt

$$\Omega(f_1,\tau_1) < \varepsilon \qquad \text{és} \qquad \Omega(f_2,\tau_2) < \varepsilon\,.$$

Ebből következik, hogy $f_1 \in R[a,c]$ és $f_2 \in R[c,b]$.

$\Longleftarrow$

Ha $f_1 \in R[a,c]$ és $f_2 \in R[c,b]$, akkor

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, \tau_1 \in \mathcal{F}[a,c], \quad \tau_2 \in \mathcal{F}[c,b], \text{ amelyekre}$$

$$\Omega(f_1,\tau_1) < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{és} \quad \Omega(f_2,\tau_2) < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor $\tau := \tau_1 \cup \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$, továbbá

$$\Omega(f,\tau) = \Omega(f_1,\tau_1) + \Omega(f_2,\tau_2) < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $f \in R[a,b]$. $\square$

Bizonyítás (folytatás)

ii)

Tegyük fel, hogy $f \in R[a,c]$ és $f \in R[c,b]$.

Az integrálhatóság definíciója alapján

$$\int_a^c f = I_*(f_1) = I^*(f_1)\,, \qquad \int_c^b f = I_*(f_2) = I^*(f_2)\,.$$

Legyen $\tau_1 \in \mathcal{F}[a,c]$, $\tau_2 \in \mathcal{F}[c,b]$ és $\tau := \tau_1 \cup \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$.

Ekkor

$$s(f_1,\tau_1) + s(f_2,\tau_2) = s(f,\tau) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S(f,\tau) = S(f_1,\tau_1) + S(f_2,\tau_2).$$

Ebből az adódik, hogy

$$I_*(f_1) + I_*(f_2) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq I^*(f_1) + I^*(f_2)\,,$$

azaz

$$\int_a^c f + \int_c^b f \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq \int_a^c f + \int_c^b f\,.$$

Következésképpen

$$I_*(f) = I^*(f), \quad \text{tehát} \quad f \in R[a,b], \quad \text{és} \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \qquad \square$$

Az integrál jelölésének kiterjesztése:

Az $\int\limits_a^b f$ jelölés használatánál eddig feltettük, hogy $a < b$.

Az $\int\limits_a^b f$ szimbólumnak $a = b$, valamint $a > b$ esetén is célszerű értelmet tulajdonítani. Megállapodunk abban, hogy

$$\int\limits_a^a f := 0, \qquad \text{és} \qquad \int\limits_a^b f := -\int\limits_b^a f\,, \quad \text{ha} \quad a > b\,.$$

Ekkor az intervallum szerinti additivitásra fennáll a következő általánosabb tétel.

Tétel

Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.

Ha $f \in R[\alpha, \beta]$, akkor minden $a, b, c \in [\alpha, \beta]$ esetén

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f.$$

Bizonyítás

Az állítás az összes lehetséges eset végiggondolásával azonnal következik az előzőekből. Ha pl. $a < b < c$, akkor

$$\int\limits_a^b f + \int\limits_b^c f = \int\limits_a^c f\,, \quad \text{azaz} \int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f - \int\limits_b^c f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f\,.$$

A többi eset is hasonló módon, átrendezéssel adódik az alapesetből. $\square$

Egyenlőtlenségek

Megjegyzés: A határozott integrál kiszámolása sok esetben nehéz feladat, ugyanakkor az integrál értékére egyszerűen kaphatunk hasznos becsléseket. Ezek még olyankor is fontosak lehetnek, amikor az adott integrál pontos kiszámolására is van lehetőség. A gyakorlatban egy jó becslés hasznosabb lehet, mint egy bonyolult, nehezen igazolható képlet.

Tétel

Tegyük fel, hogy $f, g \in R[a,b]$.

Ekkor

i) $f(x) \geq 0 \ (x \in [a,b])$ esetén $\int_a^b f \geq 0$,

(Az integrál előjeltartó.)

ii) $f(x) \leq g(x) \ (x \in [a,b])$ esetén $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(Az integrál az integrandusban monoton.)

Bizonyítás

i) $f \geq 0 \implies s(f,\tau) \geq 0 \ \forall \tau \in \mathcal{F}[a,b] \implies 0 \leq I_*(f) = \int_a^b f.$

ii) $f \leq g \implies g - f \geq 0 \implies \int_a^b (g-f) \geq 0 \implies \int_a^b g \geq \int_a^b f.$ $\square$

Tétel

Ha $f \in R[a,b]$, akkor

i) $|f| \in R[a,b]$,

ii) $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

Bizonyítás

i) Mivel $f \in R[a,b]$, ezért $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \tau \in \mathcal{F}[a,b]$, amelyre $\Omega(f,\tau) < \varepsilon$.

A háromszög egyenlőtlenség szerint $\big||f(x)| - |f(y)|\big| \le |f(x) - f(y)|$, ezért

$$\begin{aligned}
\Omega\big(|f|,\tau\big) &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} |f| - \inf_{[x_{i-1},x_i]} |f| \Big) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x,y \in [x_{i-1},x_i]} \big||f(x)| - |f(y)|\big| \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \sup_{x,y \in [x_{i-1},x_i]} |f(x) - f(y)| \cdot (x_i - x_{i-1}) = \Omega(f,\tau),
\end{aligned}$$

azaz $\Omega\big(|f|\big) \le \Omega(f,\tau) < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $|f| \in R[a,b]$.

Bizonyítás (folytatás)

ii) Mivel $-|f| \leq f \leq |f|$, ezért az integrál monotonitása miatt $-\int\limits_a^b |f| \leq \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b |f|$.

Következésképpen

$\left|\int\limits_a^b f\right| \leq \int\limits_a^b |f|$. $\square$

Megjegyzés. Az i)-beli állítás megfordítása nem igaz, azaz $|f| \in R[a, b]$-ből nem követezik, hogy $f \in R[a, b]$.

Példa:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ -1, & \text{ha } x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \end{cases}$$

akkor $1 \equiv |f| \in R[0, 1]$, de $f \notin R[0, 1]$.

Tétel (Az intergrálszámítás első középértéktétele.)

Tegyük fel, hogy $f, g \in R[a, b]$ és $g \geq 0$.

Ekkor

i) az $m := \inf\limits_{[a,b]} f$, $M := \sup\limits_{[a,b]} f$ jelölésekkel

$$m \cdot \int_a^b g \leq \int_a^b f \cdot g \leq M \cdot \int_a^b g,$$

ii) ha $f \in C[a, b]$ is teljesül, akkor $\exists\, \xi \in [a, b]$ olyan, hogy

$$\int_a^b f \cdot g = f(\xi) \cdot \int_a^b g\,.$$

Bizonyítás

i) Tetszőleges $x \in [a, b]$ esetén

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{és} \quad g(x) \geq 0$$

ezért

$$m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x).$$

Innen $m \cdot g$, $f \cdot g$, $M \cdot g \in R[a, b]$ felhasználásával adódik, hogy

$$m \cdot \int_a^b g \leq \int_a^b f \cdot g \leq M \cdot \int_a^b g\,.$$

Bizonyítás (folytatás)

ii) Ha $\int\limits_a^b g = 0$, akkor i) miatt bármelyik $\xi \in [a, b]$ választás megfelelő.

Ha viszont $\int\limits_a^b g > 0$, akkor az i)-ben igazolt egyenlőtlenség szerint

$$m \leq \frac{\int\limits_a^b f \cdot g}{\int\limits_a^b g} \leq M\,.$$

Ha $f \in C[a, b]$ akkor (ld. a Bolzano–Darboux-tételt) az f függvény minden m és M közötti értéket felvesz.

Van tehát olyan $\xi \in [a, b]$, hogy

$$f(\xi) = \frac{\int\limits_a^b f \cdot g}{\int\limits_a^b g}\,.$$

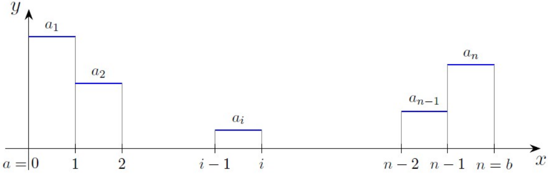
$\square$

Megjegyzések:

1) Ha az i)-beli egyenlőtlenségben $g(x) = 1 \ \big(x \in [a, b]\big)$, akkor

$$m = \inf_{[a,b]} f \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f}_{\text{integrálközép}} \leq \sup_{[a,b]} f = M.$$

2) Legyen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ az alábbi lépcsősfüggvény:
$a := 0,\ b := n,\ f(x) := a_i \ \big(x \in (i-1, i),\ i = 1, \ldots, n\big).$
(i-ben $(i = 0, 1, \ldots, n)$ f tetszőleges.)



Ekkor az integrál intervallum szerinti additivitásából, valamint az ii) állításból következik, hogy

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \int_{i-1}^{i} a_i \, dx = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}.$$

Az intergrálközepet tehát a számtani közép általánosításának tekinthetjük.
(Az integrál: „átlagolás”.)