

Szekvent kalkulus

Gyakorlat

Logika

2020/2021 2. félév

Szekvent kalkulus alapjai

Hogy néz ki egy szekvent?

$$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \longrightarrow \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$$

Mi egy szekvent szemantikája?

$$\top \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \supset \perp \vee B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m$$

Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján.

Teljesül-e a következő szekvent: $\neg(A \vee C), A \longrightarrow B$

Írjuk fel a jelentését: $\neg(A \vee C) \wedge A \supset B$

A de Morgan-azonosság alapján ez a következővel ekvivalens:

$$\neg A \wedge \neg C \wedge A \supset B$$

Az implikáció bal oldala mindig hamis, így az implikáció mindig igaz, tehát a szekvent teljesül.

Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján

Teljesül-e a következő szekvent: $\rightarrow A \supset A$

Írjuk fel a jelentését: $\top \supset (A \supset A)$

Az implikáció bal- és jobb oldalán is azonosan igaz állítás szerepel, így az implikáció mindig igaz, tehát a szekvent teljesül.

Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján

Teljesül-e a következő szekvent: $(\neg A \vee \neg B), \neg A \supset B \longrightarrow A \wedge B, \neg A \wedge \neg B$

Írjuk fel a jelentését: $(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \supset B) \supset A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B$

A	B	$(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \supset B) \supset A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B$
i	i	i
i	h	i
h	i	h
h	h	i

Szekvent kalkulus alapjai

- A szekvent kalkulus a természetes technikához hasonlóan szintaktikus módszer: a vizsgált szekvent tényleges jelentésével nem foglalkozunk, csak a levezetési szabályokat használhatjuk.
- Levezetési szabályok a természetes levezetéshez hasonlóan: ha a felső levezetés megkonstruálható, akkor az alsó is.
- A szabályokat lentről felfelé fogjuk alkalmazni.
- A cél a kitüntetett szekvent (axióma) elérése.
- Minden logikai összekötő jelhez két szabály tartozik: $\circ \rightarrow$ és $\rightarrow \circ$, aszerint, hogy a \circ művelet az alsó szekventben a nyíl bal- vagy jobboldalán található.

A C-kalkulus szabályrendszere

C-kalkulus

axiómaséma

$$X, \Gamma \rightarrow \Delta, X$$

levezetési szabályok

$$(\rightarrow \supset) \quad \frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \supset Y)}$$

$$(\supset \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X \quad Y, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \supset Y), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow \wedge) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X \quad \Gamma \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \wedge Y)}$$

$$(\wedge \rightarrow) \quad \frac{X, Y, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \wedge Y), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow \vee) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \vee Y)}$$

$$(\vee \rightarrow) \quad \frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta \quad Y, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \vee Y), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow \neg) \quad \frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg X}$$

$$(\neg \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X}{\neg X, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$$(\forall \rightarrow) \quad \frac{[A(x \parallel t)], \forall x A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$$(\exists \rightarrow) \quad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad (x \notin \text{Par}(\Gamma, \Delta))$$

$$(\rightarrow \forall) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, \forall x A} \quad (x \notin \text{Par}(\Gamma, \Delta))$$

$$(\rightarrow \exists) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, [A(x \parallel t)], \exists x A}{\Gamma \rightarrow \Delta, \exists x A}$$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\longrightarrow A \supset A$

$$(\rightarrow \supset) \frac{\frac{\checkmark}{A \longrightarrow A}}{\longrightarrow A \supset A}$$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekventet: $A \longrightarrow \neg\neg A$

$$\begin{array}{c} \frac{\checkmark}{A \longrightarrow A} \\ (\neg \rightarrow) \frac{A \longrightarrow A}{A, \neg A \longrightarrow} \\ (\rightarrow \neg) \frac{A, \neg A \longrightarrow}{A \longrightarrow \neg\neg A} \end{array}$$

Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekventet: $A \wedge C, A \supset B \longrightarrow A \supset B$

$$\frac{\checkmark}{A \wedge C, A \supset B \longrightarrow A \supset B}$$

1.feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{\checkmark}{A, B \longrightarrow \neg A, B}}{(\rightarrow \neg) \frac{A \longrightarrow \neg A, \neg B, B}}{(\rightarrow \supset) \frac{\longrightarrow \neg A, \neg B, A \supset B}}{(\neg \rightarrow) \frac{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A, \neg B}}{(\rightarrow \vee) \frac{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B}} \end{array}$$

2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \checkmark \\
 \hline
 A \longrightarrow A, B, C \\
 (\rightarrow \supset) \frac{}{\longrightarrow A, B, A \supset C} \\
 (\rightarrow \vee) \frac{}{\longrightarrow A \vee B, A \supset C} \\
 (\supset \rightarrow) \frac{}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow A \supset C} \\
 (\rightarrow \wedge) \frac{}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow (A \supset C) \wedge (B \supset C)}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \checkmark \\
 \hline
 A, C \longrightarrow C \\
 (\rightarrow \supset) \frac{}{C \longrightarrow A \supset C}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \checkmark \\
 \hline
 B \longrightarrow C, A, B \\
 (\rightarrow \vee) \frac{}{B \longrightarrow C, A \vee B} \\
 (\supset \rightarrow) \frac{}{B, (A \vee B) \supset C \longrightarrow C} \\
 (\rightarrow \supset) \frac{}{(A \vee B) \supset C \longrightarrow B \supset C}
 \end{array}
 \end{array}$$

3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))$

Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \hline \checkmark \\
 \hline P(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), R(y), P(x) \\
 \hline (\rightarrow \supset) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), P(x) \supset R(y), P(x) \\
 \hline (\rightarrow \exists) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), P(x) \\
 \hline (\rightarrow \forall) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), \forall xP(x) \\
 \hline (\neg \rightarrow) \neg\forall xP(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)) \\
 \hline (\vee \rightarrow) \neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \hline \checkmark \\
 \hline R(y), P(x) \longrightarrow R(y), \exists x(P(x) \supset R(y)) \\
 \hline (\rightarrow \supset) R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y)) \\
 \hline (\rightarrow \exists) R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))
 \end{array}
 \end{array}$$

Példa elakadásra (C-kalkulus)

Bizonyítsuk a következő szekventet: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\rightarrow \exists) \frac{\frac{?}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(y)}}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)}} \quad (\rightarrow \wedge) \frac{(\rightarrow \exists) \frac{\frac{?}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(x)}}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}}
 \end{array}$$

Rosszul helyettesítettünk a $(\rightarrow \exists)$ szabály alkalmazásakor: x -nek lett szabad előfordulása, emiatt nem alkalmazható a $(\exists \rightarrow)$ szabály. Jó sorrendben:

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\rightarrow \exists) \frac{\frac{\checkmark}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}}{(\rightarrow \wedge) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}} \quad \frac{(\rightarrow \exists) \frac{\frac{\checkmark}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x), R(x)}}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}}{(\rightarrow \wedge) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}} \\
 \frac{(\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \\
 (\exists \rightarrow) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}
 \end{array}$$