

Ítéletlogikai rezolúció

Gyakorlat

Logika

2020/2021 2. félév

- **Literál:** ítéletváltozók vagy azok negáltjai (pl. X , $\neg Y$)
- **Komplement literálpár:** ugyanannak a literálnak ellentétesen negált változatai (pl. X és $\neg X$)
- **Klóz:** literálokból álló diszjunkciós ("vagyos") láncok (pl. $\neg X \vee Y \vee Z$, X (egységklóz), \square (üresklóz))
- **KNF = konjunkciós normálforma:** diszjunkciók konjunkciója ("vagyos láncok, összeéselve") (pl. $(\neg X \vee Y \vee Z) \wedge X \wedge (X \vee \neg Y)$)

Rezolúció

Eldönti, hogy egy klózhalmozat kielégíthetetlen-e.

Lépések:

- 1 Klózhalmozat készítése
- 2 Rezolúciós levezetés

Klózthalmaz készítése

Lépések:

- ➊ Implikáció átalakítása
 - ▶ $A \supset B \equiv \neg A \vee B$
- ➋ Negálás bevitele a atomi formuláig
 - ▶ $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
 - ▶ $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
 - ▶ $\neg\neg A \equiv A$
- ➌ Egyéb átalakítások
 - ▶ $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
 - ▶ $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- ➍ KNF felbontása, klózthalmaz kialakítása
 - ▶ $A \wedge B \text{ (KNF)} \rightarrow \{A, B\}$

Klózthalmaz készítése

"Nyomozós" példa

Szemantikus következmény vizsgálat

$$\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \models_0 \neg F$$

↓ kielégíthetlenségre visszavezetjük a vizsgálatot

Formulahalmaz

$$\{F \supset K, K \supset A, \neg A, \neg\neg F\} \text{ kielégíthetetlen?}$$

↓ átalakítás

Klózthalmaz

$$S = \{\neg F \vee K, \neg K \vee A, \neg A, F\} \text{ kielégíthetetlen?}$$

Rezolúciós levezetés

Rezolvens képzés

Egy db komplement literálpár kell

- $\text{res}(X \vee Y, \neg X \vee Z) = Y \vee Z$
- $\text{res}(X, \neg X) = \square$
- $\text{res}(X \vee Y, \neg X \vee \neg Y) \rightarrow$ nem képezhető rezolvens!

Levezetés lépései lehetnek:

- Klózhalmazbeli elem ($\in S$)
- Két korábbi lépésbeli formula rezolvense (pl. $\text{res}(3, 4)$)

Cél: üresklóz levezetése

Rezolúciós levezetés - példa

$$S = \{\neg Y \vee X \vee Z, X \vee Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$$

1. $\neg Y \vee X \vee Z$ [$\in S$]
2. $X \vee Y$ [$\in S$]
3. $X \vee Z$ [$res(1, 2)$]
4. $\neg Z$ [$\in S$]
5. X [$res(3, 4)$]
6. $\neg X \vee Z$ [$\in S$]
7. Z [$res(5, 6)$]
8. \square [$res(4, 7)$]

Rezolúciós levezetés - Nyomozós feladat

$$S = \{\neg F \vee K, \neg K \vee A, \neg A, F\}$$

1. $\neg F \vee K$ [$\in S$]
2. $\neg K \vee A$ [$\in S$]
3. $\neg F \vee A$ [$res(1, 2)$]
4. $\neg A$ [$\in S$]
5. $\neg F$ [$res(3, 4)$]
6. F [$\in S$]
7. \square [$res(5, 6)$]

Lineáris inputrezolúciós stratégia

($\in S, \in S, res(1, 2), \in S, res(3, 4), \in S, res(5, 6) \dots$)

Rezolúciós levezetés - Nyomozós feladat

$$S = \{\neg F \vee K, \neg K \vee A, \neg A, F\}$$

1. $\neg F \vee K$ [$\in S$]
2. F [$\in S$]
3. K [$res(1, 2)$]
4. $\neg K \vee A$ [$\in S$]
5. A [$res(3, 4)$]
6. $\neg A$ [$\in S$]
7. \square [$res(5, 6)$]

Egységrezolúciós stratégia ($res(x, y)$ esetén x . vagy y . egységklóz)
Ez egyben lineáris inputrezolúciós stratégia is

1. Feladat

Készítsünk klózalmazt a következő formulahalmazból!

$$\{(Y \supset \neg(\neg X \wedge \neg Z)) \wedge (X \vee Y), \neg(X \wedge \neg Z), \neg Z\}$$

Rezolúciós levezetéssel bizonyítsuk a klózalmaz kielégíthetetlenségét!

1. Feladat - Klózhalmazzá alakítás

$$\{(Y \supset \neg(\neg X \wedge \neg Z)) \wedge (X \vee Y), \neg(X \wedge \neg Z), \neg Z\}$$

$$(Y \supset \neg(\neg X \wedge \neg Z)) \wedge (X \vee Y) = (\text{implikáció})$$

$$(\neg Y \vee \neg(\neg X \wedge \neg Z)) \wedge (X \vee Y) = (\text{negáció})$$

$$(\neg Y \vee (\neg\neg X \vee \neg\neg Z)) \wedge (X \vee Y) = (\text{negáció})$$

$$(\neg Y \vee X \vee Z) \wedge (X \vee Y) \Rightarrow (\text{klózokká alakítás})$$

$$\neg Y \vee X \vee Z, X \vee Y$$

$$\neg(X \wedge \neg Z) = (\text{negáció})$$

$$\neg X \vee \neg\neg Z = (\text{negáció})$$

$$\neg X \vee Z$$

$$\neg Z \text{ (ok)}$$

$$K = \{\neg Y \vee X \vee Z, X \vee Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$$

1. Feladat - Rezolúciós levezetés

$$K = \{\neg Y \vee X \vee Z, X \vee Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$$

Lineáris inputrezolúciós stratégiát alkalmazva:

1. $\neg Y \vee X \vee Z$ [$\in K$]
2. $X \vee Y$ [$\in K$]
3. $X \vee Z$ [$res(1, 2)$]
4. $\neg X \vee Z$ [$\in K$]
5. Z [$res(3, 4)$]
6. $\neg Z$ [$\in K$]
7. \square [$res(5, 6)$]

1. Feladat - Rezolúciós levezetés

$$K = \{\neg Y \vee X \vee Z, X \vee Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$$

Egységrezolúciós stratégiát alkalmazva:

1. $\neg Y \vee X \vee Z$ [$\in K$]
2. $X \vee Y$ [$\in K$]
3. $\neg X \vee Z$ [$\in K$]
4. $\neg Z$ [$\in K$]
5. $\neg X$ [$res(3, 4)$]
6. Y [$res(5, 2)$]
7. $X \vee Z$ [$res(1, 6)$]
8. X [$res(7, 4)$]
9. \square [$res(8, 5)$]

2. Feladat

Készítsünk klózalmazt a következő szemantikus következmény vizsgálathoz!

$$\{(A \vee B) \supset C\} \models_0 (A \supset C) \wedge (B \supset C)$$

Rezolúciós levezetéssel bizonyítsuk a klózalmaz kielégíthetetlenségét!

2. Feladat - Klózhalmazzá alakítás

$\{(A \vee B) \supset C\} \models_0 (A \supset C) \wedge (B \supset C) \Rightarrow$
 $\{(A \vee B) \supset C, \neg((A \supset C) \wedge (B \supset C))\}$ kielégíthetetlen?

$(A \vee B) \supset C =$ (implikáció)

$\neg(A \vee B) \vee C =$ (negáció)

$(\neg A \wedge \neg B) \vee C =$ (KNF-re hozás)

$(\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \Rightarrow$ (klózokká alakítás)

$(\neg A \vee C), (\neg B \vee C)$

$\neg((A \supset C) \wedge (B \supset C)) =$ (implikáció)

$\neg((\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)) =$ (negáció)

$\neg(\neg A \vee C) \vee \neg(\neg B \vee C) =$ (negáció)

$(\neg\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg\neg B \wedge \neg C) =$ (negáció)

$(A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C) =$ (KNF-re hozás)

$(A \vee B) \wedge \neg C \Rightarrow$ (klózokká alakítás)

$(A \vee B), \neg C$

$S = \{\neg A \vee C, \neg B \vee C, A \vee B, \neg C\}$

2. Feladat - Rezolúciós levezetés

$$S = \{\neg A \vee C, \neg B \vee C, A \vee B, \neg C\}$$

Egységrezolúciós stratégia

1. $\neg A \vee C$ [$\in S$]
2. $\neg C$ [$\in S$]
3. $\neg A$ [$res(1, 2)$]
4. $A \vee B$ [$\in S$]
5. B [$res(3, 4)$]
6. $\neg B \vee C$ [$\in S$]
7. C [$res(5, 6)$]
8. \square [$res(2, 7)$]

2. Feladat - Rezolúciós levezetés

$$S = \{\neg A \vee C, \neg B \vee C, A \vee B, \neg C\}$$

Lineáris inputrezolúciós stratégia (az előbbi átalakításával)

1. $\neg A \vee C$ [$\in S$]
2. $\neg C$ [$\in S$]
3. $\neg A$ [$\text{res}(1, 2)$]
4. $A \vee B$ [$\in S$]
5. B [$\text{res}(3, 4)$]
6. $\neg B \vee C$ [$\in S$]
7. C [$\text{res}(5, 6)$]
8. $\neg C$ [$\in S$]
9. \square [$\text{res}(7, 8)$]

2. Feladat - Rezolúciós levezetés

$$S = \{\neg A \vee C, \neg B \vee C, A \vee B, \neg C\}$$

Lineáris inputrezolúció (ismétlés nélküli)

1. $\neg A \vee C$ [$\in S$]
2. $A \vee B$ [$\in S$]
3. $C \vee B$ [$res(1, 2)$]
4. $\neg B \vee C$ [$\in S$]
5. C [$res(3, 4)$]
6. $\neg C$ [$\in S$]
7. \square [$res(5, 6)$]

3. Feladat

Készítsünk klózalmazt a következő szemantikus következmény vizsgálatához!

$$\{Z \supset Y, \neg(\neg(\neg X \wedge \neg Z) \supset (X \wedge Y)), X \supset Z\} \models Z$$

Rezolúciós levezetéssel bizonyítsuk a klózalmaz kielégíthetetlenségét!

3. Feladat - Klózhalmaz készítése

$$\{Z \supset Y, \neg(\neg(\neg X \wedge \neg Z) \supset (X \wedge Y)), X \supset Z\} \models Z \Rightarrow \\ \{Z \supset Y, \neg(\neg(\neg X \wedge \neg Z) \supset (X \wedge Y)), X \supset Z, \neg Z\}$$

$$\begin{array}{lll} Z \supset Y = (\text{implikáció}) & X \supset Z = (\text{implikáció}) & \neg Z \text{ (ok)} \\ \neg Z \vee Y & \neg X \vee Z & \end{array}$$

$$\neg(\neg(\neg X \wedge \neg Z) \supset (X \wedge Y)) = (\text{implikáció})$$

$$\neg(\neg\neg(\neg X \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y)) = (\text{negáció})$$

$$\neg\neg\neg(\neg X \wedge \neg Z) \wedge \neg(X \wedge Y) = (\text{negáció})$$

$$\neg(\neg X \wedge \neg Z) \wedge \neg(X \wedge Y) = (\text{negáció})$$

$$(\neg\neg X \vee \neg\neg Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y) = (\text{negáció})$$

$$(X \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \Rightarrow (\text{klózzokká alakítás})$$

$$X \vee Z, \neg X \vee \neg Y$$

$$K = \{\neg Z \vee Y, X \vee Z, \neg X \vee \neg Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$$

3. Feladat - Rezolúciós levezetés

$$K = \{\neg Z \vee Y, X \vee Z, \neg X \vee \neg Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$$

Lineáris inputrezolúciós stratégiát alkalmazva:

1. $X \vee Z$ $[\in K]$
2. $\neg X \vee Z$ $[\in K]$
3. Z $[res(1, 2)]$
4. $\neg Z$ $[\in K]$
5. \square $[res(3, 4)]$

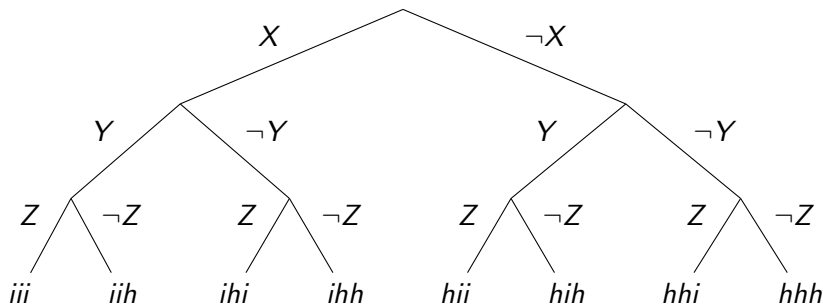
Szemantikus fa

$$X \vee Y \wedge \neg Z$$

Bázis: X, Y, Z

(**Bázis:** az ítéletváltozók egy rögzített sorrendje, pl. az igazságtáblában)

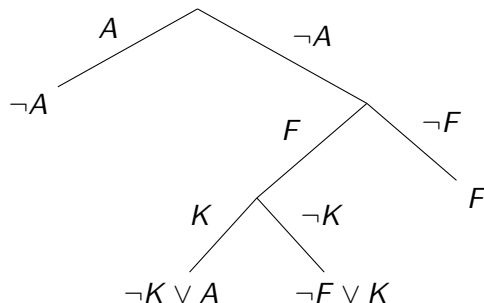
Interpretációk megadása szemantikus fával:



Szemantikus fa lezárás - Nyomozós feladat

$\{\neg F \vee K, \neg K \vee A, \neg A, F\}$

Bázis: A, F, K



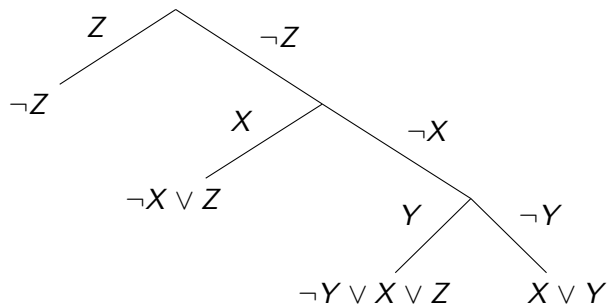
Minden ágat le tudtunk zárni ellentmondás alapján \rightarrow
A halmaz kielégíthetetlen

Szemantikus fa lezárása - példa

$\{\neg Y \vee X \vee Z, X \vee Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$

Bázis: Z, X, Y

(Érdemes a kisebb logikai összetettségű formulából kiindulni)

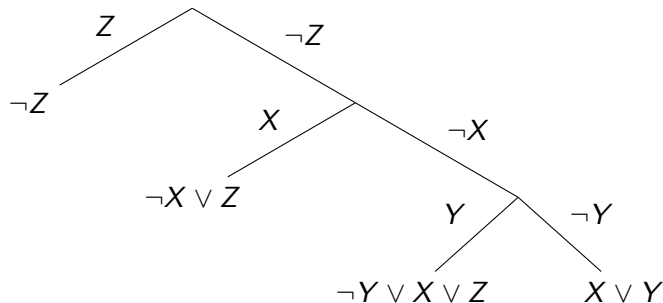


A klózalmaz kielégíthetetlen, mert a szemantikus fa minden ágon zárt.

Szemantikus fa lezárása - 1. Feladat

$$K = \{\neg Y \vee X \vee Z, X \vee Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$$

Bázis : Z, X, Y

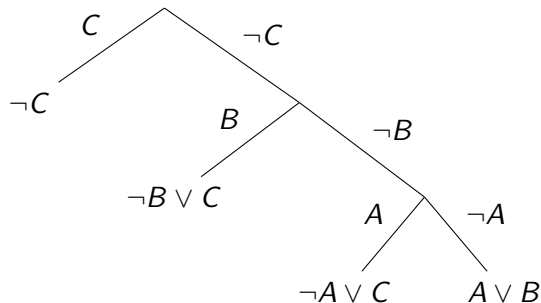


A klózalmaz kielégíthetetlen, mert a szemantikus fa minden ágon zárt.

Szemantikus fa lezárása - 2. Feladat

$$S = \{\neg A \vee C, \neg B \vee C, A \vee B, \neg C\}$$

Bázis: C, B, A

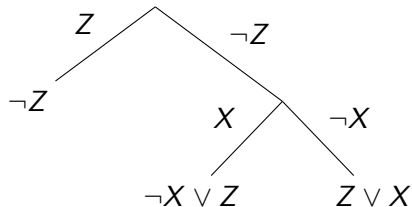


A klózhalmoz kielégíthetetlen, mert a szemantikus fa minden ágon zárt.

Szemantikus fa lezárása - 3. Feladat

$$K = \{\neg Z \vee Y, X \vee Z, \neg X \vee \neg Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$$

Bázis : Z, X, Y

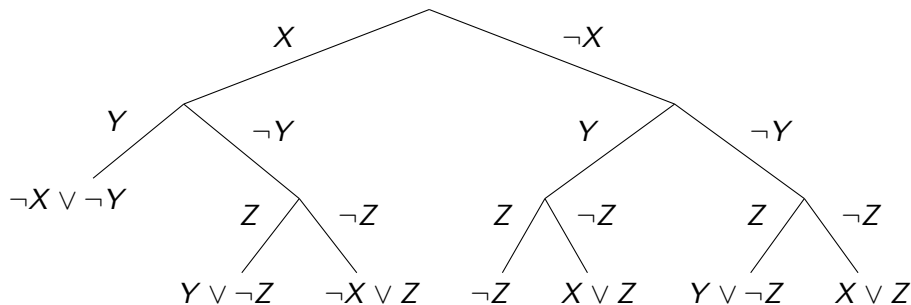


A klózalmaz kielégíthetetlen, mert a szemantikus fa minden ágon zárt.

Szemantikus fa lezárása - 3. Feladat (másik bázissal)

$$K = \{\neg Z \vee Y, X \vee Z, \neg X \vee \neg Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$$

Bázis : X, Y, Z



A klózalmaz kielégíthetetlen, mert a szemantikus fa minden ágon zárt.