Logika - Bizonyításelmélet

Alapvető axiomasémák

$(A1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(A2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(A3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$$\text{(MP)}\ \frac{A\ ;\ (A \supset B)}{B}$$

vagy

$$\{A, A \supset B\} \vdash B$$

Alapvető axiomasémák

$(A1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(A2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(A3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

Egy egyszerű levezetés

$\{A\} \vdash B \supset A$

1.	$A \supset (B \supset A)$	[A1]
2.	A	[hip]
3.	$B \supset A$	[MP(1,2)]

Helyesség (Soundness)

Tetszőleges A esetén,

$$\text{Ha} \vdash A, \text{ akkor} \models A.$$

Teljesség (Completeness)

Tetszőleges A esetén,

$$\text{Ha} \models A, \text{ akkor} \vdash A.$$

Alapvető axiomasémák

(A1) $A \supset (B \supset A)$

(A2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

(A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\begin{array}{c} 1.\ A \supset B \\ 2.\ B \supset C \\ \hline \mathrm{K.}\ A \supset C \end{array}$$

másképp:

$$\{A \supset B, B \supset C\} \models A \supset C$$

A teljesség miatt, tehát:

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$$

Alapvető axiomasémák

$(A1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(A2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(A3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

0. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$$

1. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ [A2]
2. $(B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$ [A1, ahol $A||B \supset C$, $B||A$]
3. $B \supset C$ [hip]
4. $(A \supset (B \supset C))$ [MP(2,3)]
5. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$ [MP(1,4)]
6. $A \supset B$ [hip]
7. $A \supset C$ [MP(5,6)]

Alapvető axiomasémák

(A1) $A \supset (B \supset A)$

(A2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

(A3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

1. Feladat

Mutassuk meg, hogy:

$$\{A \supset (B \supset C), B\} \vdash A \supset C$$

1. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ [A2]
2. $A \supset (B \supset C)$ [hip]
3. $(\mathrm{A} \supset B) \supset (A \supset C)$ [MP(1,2)
4. $B \supset (A \supset B)$ [A1, ahol $A||B$, $B||A$]
5. B [hip]
6. $(A \supset B)$ [MP(4,5)]
7. $A \supset C$ [MP(3,6)]

Alapvető axiomasémák

$(A1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(A2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(A3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

Dedukciós tétel

$\{A_1, A_2, ..., A_n\} \vdash B$ akkor és csak akkor, ha $\{A_1, A_2, ..., A_{n-1}\} \vdash A_n \supset B$

2. Feladat

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash A \supset C$$
$$\Downarrow \text{D}$$
$$\{A \supset B, B \supset C, A\} \vdash C$$

1. $A \supset B$ [hip]
2. $B \supset C$ [hip]
3. A [hip]
4. B [MP(1,3)]
5. C [MP(2,4)]

Használható axiomasémák

$(A1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(A2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(A3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
$(B1)$	$A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

3. Feladat

Mutassuk meg, hogy $\vdash \neg\neg A \supset A$ bizonyítható.

$$\vdash \neg\neg A \supset A$$
$$\Downarrow \text{D}$$
$$\{\neg\neg A\} \vdash A$$

1.	$(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg\neg A) \supset A)$	[A3; $A \| A$; $B \| \neg A$]
2.	$\neg A \supset \neg A$	[B1; $A \| \neg A$]
3.	$(\neg A \supset \neg\neg A) \supset A$	[MP(1,2)]
4.	$\neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg\neg A)$	[A1; $A \| \neg\neg A$; $B \| \neg A$]
5.	$\neg\neg A$	[hip]
6.	$\neg A \supset \neg\neg A$	[MP(4,5)]
7.	A	[MP(3,6)]

Ez után használható axiómaséma: B4 - $\neg\neg A \supset A$

Használható axiomasémák

$(A1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(A2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(A3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

$(B1)$	$A \supset A$
$(B3)$	$A \supset \neg\neg A$
$(B4)$	$\neg\neg A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést: $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$

Dedukciós tétel használata után a következő levezetés kell: $\{A \supset B, \neg\neg A\} \vdash_0 \neg\neg B$

1.	$B \supset \neg\neg B$	[B3; $A\|\|B$]
2.	$A \supset B$	[hip]
3.	$\neg\neg A \supset A$	[B4; $A\|\|A$]
4.	$\neg\neg A$	[hip]
5.	A	[MP(3,4)]
6.	B	[MP(2,5)]
7.	$\neg\neg B$	[MP(1,6)]

Ez után használható axiómaséma: B5 - $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

5. Feladat

Egy bál szervezése a feladatod. Mikor a bejáratot ellenőrzöd, két feliratot látsz kiírva. 1. Ha Ön időben érkezett, akkor az üdvözlő italokat a bejárat melletti asztalon találja. 2. Ha az üdvözlő italokat nem találja a bejárat melletti asztalon, akkor Ön nem érkezett időben.

Bár az információ, amit hordoznak nem túl egyértelmű, téged mégis a redundancia zavar, amit felismersz bennük. Hirtelen eszedbe jut, hogy az ítéletkalkulus segítségével egyszerűen el tudnád dönteni, hogy a két állítás ugyanaz-e. Neki is állsz az állítások formalizálásának, és kiszámolod a két levezetést, amely az ekvivalencia megállapításához szükséges. Kérlek írd le a folyamatot!

Bizonyítani kell:
$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$, illetve
$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$

Használható axiomasémák

$(A1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(A2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(A3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

$(B1)$	$A \supset A$
$(B3)$	$A \supset \neg\neg A$
$(B4)$	$\neg\neg A \supset A$
$(B5)$	$(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$

Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

1.	$(\neg\neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X)$	[A3; $A \| \neg X$; $B \| \neg Y$]
2.	$\neg Y \supset (\neg\neg X \supset \neg Y)$	[A1; $A \| \neg Y$; $B \| \neg\neg X$]
3.	$\neg Y$	[hip]
4.	$\neg\neg X \supset \neg Y$	[MP(2,3)]
5.	$(\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X$	[MP(1,4)]
6.	$(X \supset Y) \supset (\neg\neg X \supset \neg\neg Y)$	[B5; $A \| X$; $B \| Y$]
7.	$X \supset Y$	[hip]
8.	$\neg\neg X \supset \neg\neg Y$	[MP(6,7)]
9.	$\neg X$	[MP(5,8)]

Használható axiomasémák

$(A1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(A2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(A3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

$(B1)$	$A \supset A$
$(B3)$	$A \supset \neg\neg A$
$(B4)$	$\neg\neg A \supset A$
$(B5)$	$(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$

Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{\neg Y \supset \neg X, X\} \vdash_0 Y$

1.	$(\neg Y \supset X) \supset ((\neg Y \supset \neg X) \supset Y)$	[A3; $A\|\|Y$; $B\|\|X$]
2.	$X \supset (\neg Y \supset X)$	[A1; $A\|\|X$; $B\|\|\neg Y$]
3.	X	[hip]
4.	$\neg Y \supset X$	[MP(2,3)]
5.	$(\neg Y \supset \neg X) \supset Y$	[MP(1,4)]
6.	$\neg Y \supset \neg X$	[hip]
7.	Y	[MP(5,6)]

Használható axiomasémák

$(A1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(A2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(A3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
$(B1)$	$A \supset A$
$(B3)$	$A \supset \neg\neg A$
$(B4)$	$\neg\neg A \supset A$
$(B5)$	$(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió): $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

1.	$(\neg\neg F \supset \neg A) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F)$	[A3; $A \vert\vert \neg F$; $B \vert\vert \neg A$]
2.	$\neg A \supset (\neg\neg F \supset \neg A)$	[A1; $A \vert\vert \neg A$; $B \vert\vert \neg\neg F$]
3.	$\neg A$	[hip]
4.	$\neg\neg F \supset \neg A$	[MP(2,3)]
5.	$(\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F$	[MP(1,4)]
6.	$(F \supset A) \supset (\neg\neg F \supset \neg\neg A)$	[B5; $A \vert\vert F$; $B \vert\vert A$]
7.	$(F \supset (K \supset A)) \supset ((F \supset K) \supset (F \supset A))$	[A2; $A \vert\vert F$; $B \vert\vert K$; $C \vert\vert A$]
8.	$(K \supset A) \supset (F \supset (K \supset A))$	[A1; $A \vert\vert K \supset A$; $B \vert\vert F$]
9.	$K \supset A$	[hip]
10.	$F \supset (K \supset A)$	[MP(8,9)]
11.	$(F \supset K) \supset (F \supset A)$	[MP(7,10)]
12.	$F \supset K$	[hip]
13.	$F \supset A$	[MP(11,12)]
14.	$\neg\neg F \supset \neg\neg A$	[MP(6,13)]
15.	$\neg F$	[MP(5,14)]