10. hét, 2024. április 30.

Analízis 2A Előadás

A π szám irracionális.

Bizonyítás: Indirekt.

Tegyük fel, hogy $\exists\ p, q \in \mathbb{N}^+$, amelyre $\pi = \frac{p}{q}$.

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges, és tekintsük a következő polinomokat:

$$f(x) := \frac{x^n\,(p - q\,x)^n}{n!}\,,$$
$$F(x) := f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x) \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Mivel

$$f(x) := \sum_{k=n}^{2n} \frac{c_k}{n!} x^k = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\,,$$

ahol $c_k \in \mathbb{Z}$, ezért $f^{(k)}(0)$ is egész minden $k \in \mathbb{N}$-re.

Másrészt

$$f\big(\tfrac{p}{q} - x\big) = \frac{(\frac{p}{q} - x)^n\,\big(p - q\,(\frac{p}{q} - x)\big)^n}{n!} = \frac{(\frac{p}{q} - x)^n\,(q\,x)^n}{n!} = f(x)\,.$$

Következésképpen

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}\left(\tfrac{p}{q} - x\right) \quad \text{és így} \quad \Longrightarrow f^{(2k)}(\pi) = f^{(2k)}(0)$$

is egész minden $k \in \mathbb{N}$-re.

Ekkor $F(0), F(\pi)$ egész szám.

Könnyű ellenőrizni, hogy $F''(x) + F(x) = f(x)$, ezért

$$\Big(F'(x)\cdot \sin x - F(x)\cdot \cos x\Big)' = F''(x)\cdot \sin x + F(x)\cdot \sin x = f(x)\cdot \sin x$$

és

$$\int_0^\pi f(x)\cdot \sin x\, dx = \big[F'(x)\cdot \sin x - F(x)\cdot \cos x\big]_0^\pi = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}\,.$$

Másrészt

$$0 < f(x)\cdot \sin x < \frac{\pi^n p^n}{n!}, \quad \text{ha } 0 < x < \pi.$$

Válasszuk meg $n \in \mathbb{N}$-et úgy, hogy $\pi^{n+1} p^n < n!$ legyen!

Ekkor

$$0 < \int_0^\pi f(x)\cdot \sin x\, dx < \pi \cdot \frac{\pi^n p^n}{n!} < 1,$$

ami ellentmondás, hiszen fent megmutattuk, hogy az integrál egész szám. □

Megjegyzés: Az első bizonyítást erre az alapvető tulajdonságra *J. H. Lambert* adta 1766-ban. Ezt az elegáns bizonyítást *I. Niven* publikálta 1947-ben. További bizonyításokat illetően l. Wikipédia

Az integrálfüggvény fogalma és tulajdonságai

Definíció

Legyen $f \in R[a,b]$ és $x_0 \in [a,b]$.

Ekkor a

$$F : [a,b] \ni x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

függvényt a f függvény x_0-ban eltűnő integrálfüggvényének nevezzük.

Megjegyzés: Az „x_0-ban eltűnő” arra utal, hogy $F(x_0) = 0$.

Példák:

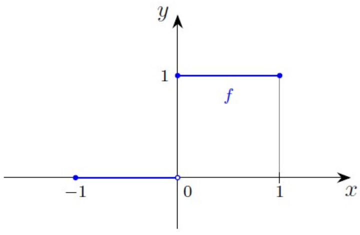
a) Ha $f(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ és $x_0 = 0$, akkor

$$F(x) = \int_0^x t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

b) Ha

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } -1 \le x < 0 \\ 1, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{és} \quad x_0 := 0, \text{ akkor}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } -1 \le x < 0 \\ x, & \text{ha } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$



A következő tételekben az integrálfüggvény alapvető tulajdonságait soroljuk fel.

A következő tételekben az integrálfüggvény alapvető tulajdonságait soroljuk fel.

Tétel (Az integrálfüggvény folytonossága)

Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$ és $x_0 \in [a,b]$.

Ekkor a

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \big(x \in [a,b]\big)$$

integrálfüggvény folytonos.

Bizonyítás

Tetszőleges $x, y \in [a,b]$, $x < y$ esetén

$$\big|F(y) - F(x)\big| = \left|\int_{x_0}^{y} f - \int_{x_0}^{x} f\right| = \left|\int_{x_0}^{y} f + \int_{x}^{x_0} f\right| = \left|\int_{x}^{y} f\right| \leq$$
$$\leq \int_{x}^{y} |f| \leq M \cdot \int_{x}^{y} 1 = M \cdot (y - x),$$

ahol M az f függvény egy korlátja: $|f(x)| \leq M \ \big(x \in [a,b]\big)$. (Mivel $f \in R[a,b]$, ezért f korlátos $[a,b]$-n.)

Ha tehát $\varepsilon > 0$, és $\delta > 0$ olyan, hogy $M\delta < \varepsilon$, akkor $\forall \ x, y \in [a,b]$, $|x - y| < \delta$ esetén

$$\big|F(y) - F(x)\big| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy F egyenletesen folytonos $[a,b]$-n, így folytonos is az $[a,b]$ intervallumon. $\square$

Tétel (Az integrálfüggvény differenciálhatósága)

Tegyük fel, hogy $f \in R[a, b]$ és $x_0 \in [a, b]$.

Ha egy $d \in [a, b]$ pontban az f függvény folytonos, akkor az

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \big(x \in [a, b]\big)$$

integrálfüggvény deriválható a d pontban, és $F'(d) = f(d)$.

Megjegyzés: Ha $d = a$ vagy $d = b$, akkor $F'(d)$ értelemszerűen a jobb-, illetve a bal oldali deriváltat jelenti.

Következmény

Ha $f \in C[a, b]$, akkor $F \in D[a, b]$ és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in [a, b]$ pontban. Ez egyben azt is jelenti, f folytonos $[a, b]$-n, akkor van primitív függvénye.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy $f \in C\{d\}$ valamely $d \in (a,b)$ pontban.

Ekkor $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta > 0$ olyan, hogy

$$\forall\, t \in [a,b],\ |t-d| < \delta \quad \text{esetén} \quad |f(t)-f(d)| < \varepsilon\,.$$

Legyen $h \in \mathbb{R}$, amelyre $d+h \in (a,b)$.

Az integrál intervallum szerinti additivitása miatt

$$F(d+h) - F(d) = \int_{x_0}^{d+h} f - \int_{x_0}^{d} f = \int_{d}^{d+h} f.$$

Az F függvény d ponthoz tartozó különbségi hányados függvénye a h-ban tehát

$$\frac{F(d+h)-F(d)}{h} = \frac{1}{h} \int_{d}^{d+h} f(t)\,dt\,.$$

Másrészt $f(d) = \frac{1}{h} \cdot \int_{d}^{d+h} f(d)\,dt$, ezért

$$\frac{F(d+h)-F(d)}{h} - f(d) = \frac{1}{h} \int_{d}^{d+h} \big(f(t)-f(d)\big)\,dt.$$

Bizonyítás (folytatás)

Ha $0 < h < \delta$, akkor $|f(t) - f(d)| < \varepsilon$ miatt

$$\left| \frac{F(d+h) - F(d)}{h} - f(d) \right| \leq \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{d}^{d+h} \big| f(t) - f(d) \big| \, dt \leq \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{d}^{d+h} \varepsilon \, dt = \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \cdot h = \epsilon \, .$$

Ha $-\delta < h < 0$, akkor

$$\left| \frac{F(d+h) - F(d)}{h} - f(d) \right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot \int\limits_{d+h}^{d} \big| f(t) - f(d) \big| \, dt < \varepsilon \, .$$

Az előzőek alapján tehát $\forall \ \varepsilon > 0$-hoz $\exists \ \delta > 0$ olyan, hogy $\forall \ |h| < \delta$-ra

$$\left| \frac{F(d+h) - F(d)}{h} - f(d) \right| < \varepsilon \, .$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{F(d+h) - F(d)}{h} - f(d) \right) = 0 \, , \quad \textit{azaz} \quad \lim_{h \to 0} \frac{F(d+h) - F(d)}{h} = f(d) \, ,$$

tehát $F \in D\{d\}$ és $F'(d) = f(d)$.

A végpontokban az előzőekhez hasonlóan kapjuk az egyoldali deriváltakra vonatkozó állításokat. $\square$

Tétel (Parciális integrálás határozott integrálokra)

Tegyük fel, hogy $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f, g \in D[a,b]$ és $f', g' \in R[a,b]$.

Ekkor

$$\int_a^b f \cdot g' = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f' \cdot g\,.$$

Bizonyítás

Mivel $f,\ g \in D[a,b]$, ezért $f,\ g \in C[a,b]$, és így $f,\ g \in R[a,b]$.

Következésképpen $f \cdot g',\ g \cdot f', \in R[a,b]$.

$(f \cdot g)' = f'g + fg'$, ezért $f \cdot g$ primitív függvénye az $f' \cdot g + f \cdot g'$ függvénynek.

A Newton–Leibniz-tétel szerint ekkor

$$\int_a^b (f \cdot g' + f' \cdot g) = \big[f \cdot g\big]_a^b = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a).$$

A határozott integrál additivitását felhasználva rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b f \cdot g' = \Big[f \cdot g\Big]_a^b - \int_a^b f' \cdot g. \qquad \square$$

1. Példa: Bizonyítsuk be, hogy

1) $\int_0^\pi \sin^{2n} x\,dx = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\cdot\pi \qquad (n\in\mathbb{N}^+)\,,$

2) $\int_0^\pi \sin^{2n+1} x\,dx = \dfrac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\cdot 2 \qquad (n\in\mathbb{N})\,.$

Bizonyítás. Legyen $I_k := \int_0^\pi \sin^k x\,dx$ $(k\in\mathbb{N})$. Ekkor

$$I_0 = \pi \quad \text{és} \quad I_1 = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 2.$$

Ha $k\geq 2$, akkor parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_0^\pi \sin^{k-1} x\cdot(-\cos x)'\,dx \\
&= \Big[\sin^{k-1} x\cdot(-\cos x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (k-1)\cdot\sin^{k-2} x\cdot\cos x\cdot(-\cos x)\,dx \\
&= 0 + (k-1)\int_0^\pi \left(1-\sin^2 x\right)\cdot\sin^{k-2} x\,dx = (k-1)\cdot\left(I_{k-2} - I_k\right).
\end{aligned}$$

Következésképpen

$$I_k = \frac{k-1}{k}\cdot I_{k-2}\,.$$

Így

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2n-2} = \cdots = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot I_0 \,,$$

ami éppen az 1)-beli állítás.

Hasonlóan

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot I_{2n-1} = \cdots = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot I_1 \,,$$

ami pedig a 2)=beli állítás. □

2. Példa (Wallis-formula): Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^2}{1^2} \cdot \frac{4^2}{3^2} \cdots \frac{(2n)^2}{(2n-1)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \,.$$

Megoldás: Mivel minden n természetes számra

$$\sin^{2n+2} x \le \sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \quad (x \in (0, \pi/2)), \quad \text{ezért} \quad I_{2n+2} \le I_{2n+1} \le I_{2n} \quad (n \in \mathbb{N}) \,,$$

azaz

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdots \frac{1}{2} \cdot \pi \le \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 2 \le \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \pi.$$

Ebből

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \pi \le \frac{2^2}{1^2} \cdot \frac{4^2}{3^2} \cdots \frac{(2n)^2}{(2n-1)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot 2 \le \pi.$$

□

Tétel (Helyettesítéssel való integrálás határozott integrálokra)

Tegyük fel, hogy $f \in C[a,b]$ valamint, hogy a $g : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ függvény folytonosan deriválható.

Ekkor

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g'.$$

Bizonyítás

Tekintsük az

$$F(x) := \int_{g(\alpha)}^{x} f \quad \big(x \in [a,b]\big), \quad G(u) := \int_{\alpha}^{u} f \circ g \cdot g' \qquad \big(x \in [\alpha, \beta]\big)$$

integrálfüggvényeket.

Megmutatjuk, hogy

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = F\big(g(\beta)\big) = G(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g'\,.$$

Mivel $f \in C[a,b]$, ezért $F' = f\,.$

Hasonlóan, mivel $f \circ g \cdot g' \in C[\alpha, \beta]$, ezért $G' = f \circ g \cdot g'\,.$

Bizonyítás (folytatás)

Következésképpen $(F \circ g)' = F' \circ g \cdot g' = f \circ g \cdot g'$ és így $(F \circ g - G)' = 0$.

Ez azt jelenti, hogy $F \circ g - G$ konstans függvény, azaz $\exists \; C \in \mathbb{R}$, hogy $F \circ g - G = C$.

Ugyanakkor $F\big(g(\alpha)\big) = 0 = G(\alpha)$, ezért $C = 0$.

Azt kaptuk tehát, hogy $F \circ g = G$, ami egyben azt is jelenti, hogy $F\big(g(\beta)\big) = G(\beta)$. $\square$

Példa: Számítsuk ki a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx$ határozott integrált!

Megoldás: Legyen

$$g(x) := 3x + 1 \;\; (0 \le x \le 1), \quad f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (1 \le x \le 4).$$

Ekkor $g \in D[0,1]$ és $g'(x) = 3 \;\; (0 \le x \le 4)$.
Így az előző tétel szerint

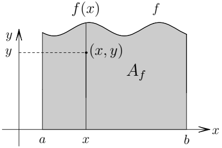
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx = \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 (f \circ g) \cdot g' = \frac{1}{3} \cdot \int_1^4 f = \frac{1}{3} \cdot \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{1}{3} \cdot \left(2\sqrt{4} - 2\sqrt{1}\right) = \frac{2}{3}. \quad \square$$

Síkidom területe

Emlékeztetünk arra, hogy azt mondtuk, hogy az $f \in K[a,b]$, $f \geq 0$ függvény grafikonja alatti

$$A_f := \big\{(x,y) \mid x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq f(x)\big\}$$



síkidomnak van területe, ha $f \in R[a,b]$.

Ekkor a

$$t(A_f) := \int_a^b f(x)\,dx$$

valós számot az A_f síkidom területének neveztük.

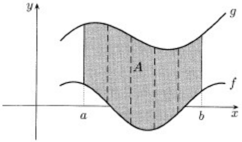
Most kissé általánosabban definiált halmazok területét fogjuk értelmezni.

Definíció

Legyen $f, g \in K[a, b]$, és tegyük fel, hogy $f(x) \leq g(x)$ minden $x \in [a, b]$-re.

Azt mondjuk, hogy az

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$$



síkidomnak van területe, ha $f, g \in R[a, b]$.
Ekkor a

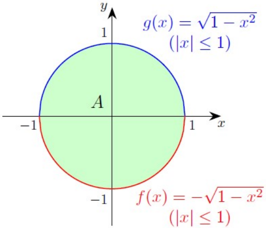
$$t(A) := \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\, dx$$

valós számot az A síkidom területének nevezzük.

Megjegyzés: Ez a definíció összhangban van a területtől elvárt tulajdonságokkal. Ezt $f \geq 0$ esetén könnyen meggondolhatjuk. Az ellenkező esetben toljuk fel A-t az x tengely fölé.

Példa: Az egységsugarú körlap területe

Helyezzük el a körlapot a koordináta-rendszerben úgy, hogy az origó legyen a körlap középpontja.



Mivel $f, g \in R[-1, 1]$, ezért az A körlapnak van területe, és

$$t(A) = \int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\, dx =$$
$$= 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

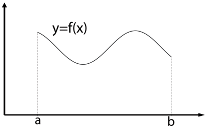
A Newton–Leibniz-tétel szerint

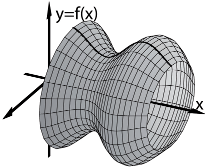
$$t(A) = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = 2 \cdot \left[\frac{\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}}{2} \right]_{-1}^{1} =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin (-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \qquad \square$$

Forgástest térfogata

A Riemann-integrál eszköztárát a térfogat problémájának a vizsgálatánál is felhasználhatjuk. A továbbiakban csak **forgástesteket** (vagyis olyan térrészt amelyet egy függvénygrafikon alatti tartomány *x* tengely körüli megforgatásával kapunk) fogunk csak vizsgálni. A terület és az ívhossz problémájánál alkalmazott gondolatmenetet követjük: a forgástestet beírt és körülírt hengerekkel (ezek térfogatát ismertnek tekintjük) közelítjük.





Legyen $f \in R[a, b]$, és t.f.h. $f \geq 0$ az $[a, b]$ intervallumon. Az f grafikonjának x tengely körüli megforgatásával adódó

$$H_f := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\ y^2 + z^2 \leq f^2(x)\ (y, z \in \mathbb{R})\right\}$$

forgástest térfogatának a definíciójához tekintsük az $[a, b]$ intervallum egy $\tau = \left\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\right\}$ felosztást, és vezessük be a következő jelöléseket: legyen $i = 1, \ldots, n$, továbbá

$$m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

$$h_i = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i \leq x \leq x_{i+1},\ y^2 + z^2 \leq m_i^2\right\},$$

$$H_i = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i \leq x \leq x_{i+1},\ y^2 + z^2 \leq M_i^2\right\}.$$

Ekkor a h_i és H_i hengerek egyesítésével adódó halmazokra nyilván

$$\bigcup_{i=1}^{n} h_i \subset H_f \subset \bigcup_{i=1}^{n} H_i$$

is teljesül, és a szóban forgó hengerek térfogatainak az összege

$$\sum_{i=1}^{n} \pi\, m_i^2 \cdot (x_i - x_{i-1}) = s\big(\pi\, f^2, \tau\big),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi\, M_i^2 \cdot (x_i - x_{i-1}) = S\big(\pi\, f^2, \tau\big).$$

Mivel $\pi\, f^2 \in R[a, b]$, ezért $\int\limits_a^b \pi\, f^2$ az egyetlen olyan szám, amely minden $\tau \in \mathcal{F}[a, b]$ esetén $s\big(\pi\, f^2, \tau\big)$ és $S\big(\pi\, f^2, \tau\big)$ közé esik. Ezek alapján kézenfekvő a H_f forgástest ($V(H_f)$-fel jelölt) térfogatát így értelmezni:

$$V(H_f) := \pi \int\limits_a^b f^2 \,.$$

Definíció

Legyen $0 \le f \in R[a,b]$. Ekkor f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával adódó

$$H_f := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ a \le x \le b,\ y^2 + z^2 \le f^2(x)\ (y, z \in \mathbb{R})\big\}$$

forgástestnek van térfogata, és az egyenlő a

$$\pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

intergrállal.

Példa: A gömb térfogata.

A $(0,0,0)$ középpontú R sugarú gömb az $f(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$ $\big(x \in [-R, R]\big)$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával adódó térrész.

E gömb térfogata:

$$\pi \int_{-R}^{R} \big(R^2 - x^2\big)\, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4R^3\pi}{3}. \quad \square$$