9. feladatsor: Binomiális/polinomiális tétel, szita formula, skatulya-elv (teljes)

1. **feladat**

(a) Legyen $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Határozza meg az $\left(\frac{1}{a} + a^2\right)^9$ kifejezésben azt a tagot, amely nem tartalmazza az a paramétert.

A **binomiális tétel** szerint $(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k$, ahol $n \in \mathbb{N}$ és u, v tetszőleges valós számok. $a \neq 0$-ból $\frac{1}{a}$ létezik és egy egyértelműen meghatározott (nem nulla) valós szám. Ekkor

$$\left(\frac{1}{a} + a^2\right)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} \left(\frac{1}{a}\right)^{9-k} (a^2)^k = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (a^{-1})^{9-k} a^{2k} = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} a^{k-9} a^{2k} = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} a^{3k-9},$$

és a fenti összeg azon és csak azon tagja nem tartalmazza (ténylegesen) a-t, amelyben a kitevője 0. $3k - 9 = 0$ pontosan akkor teljesül, amikor $k = 3$, így a $\underline{k = 3}$-hoz tartozó tag nem tartalmazza a-t. Lényeges észrevenni, hogy most $u = \frac{1}{a}$ és $v = a^2$.

(b) Határozzuk meg az $(x^7 + 2x^3)^{27}$ kifejezésben az x^{97} tag együtthatóját.

$$(x^7 + 2x^3)^{27} = \sum_{k=0}^{27} \binom{27}{k} (x^7)^{27-k} (2x^3)^k = \sum_{k=0}^{27} \binom{27}{k} x^{189-7k} 2^k x^{3k} = \sum_{k=0}^{27} 2^k \binom{27}{k} x^{189-4k}.$$

$$\begin{aligned} 189 - 4k = 97 \Rightarrow k = 23 \Rightarrow 2^k \binom{27}{k} &= 2^{23} \binom{27}{23} = 2^{23} \frac{27!}{23! \cdot 4!} \\ &= 2^{23} \frac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 2^{23} \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \\ &= 2^{22} \cdot 27 \cdot 13 \cdot 10^2 = 147\,220\,070\,400 \end{aligned}$$

Most $u = x^7$ és $v = 2x^3$.

(c) Határozzuk meg az $(x^{11} + 5x^4)^{57}$ kifejezésben az x^{417} tag együtthatóját.

$$(x^{11} + 5x^4)^{57} = \sum_{k=0}^{57} \binom{57}{k} (x^{11})^{57-k} (5x^4)^k = \sum_{k=0}^{57} \binom{57}{k} x^{627-11k} 5^k x^{4k} = \sum_{k=0}^{57} 5^k \binom{57}{k} x^{627-7k}.$$

$$\begin{aligned} &627 - 7k = 417 \Rightarrow k = 30 \Rightarrow 5^k \binom{57}{k} = 5^{30} \binom{57}{30} \\ &= 13\,067\,751\,222\,401\,067\,614\,555\,358\,886\,718\,750\,000. \end{aligned}$$

Ebben a feladatban $u = x^{11}$ és $v = 5x^4$.

(d) Határozzuk meg a $(6x^8 - 11x^5)^{32}$ kifejezésben az x^{179} tag együtthatóját.

$$(6x^8 - 11x^5)^{32} = \sum_{k=0}^{32} \binom{32}{k} (6x^8)^{32-k} (-11x^5)^k = \sum_{k=0}^{32} 6^{32-k} (-11)^k \binom{32}{k} x^{256-3k}.$$

$$256 - 3k = 179 \Rightarrow 3k = 77,$$

ahol k egész szám. De ilyen egész szám nincs, így $(6x^8 - 11x^5)^{32}$-ben x^{179} tag együtthatója 0.

Ebben a feladatban $u = 6x^8$ és $v = -11x^5$.

2. **feladat**

Mennyi lesz az $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^{73}$ kifejezésben az
 (a) $x_1^{10}x_2^{23}x_3^{28}x_4^{12}$;
 (b) $x_1^{9}x_2^{21}x_3^{28}x_4^{23}$;
 (c) $x_1^{52}x_2^{7}x_3x_4^{13}$;
 (d) $x_1^{37}x_2^{11}x_3^{12}x_4^{14}$

tagok együtthatója?

Most a **polinomiális tétel**t kell alkalmazni: ha m és n nemnegatív egész számok, és $1 \le i \le m$-re u_i valós szám, akkor

$$\left(\sum_{i=1}^{m} u_i\right)^n = \sum_{\substack{(k_1,\cdots,k_m)\in\mathbb{N}^m \\ \sum_{i=1}^{m} k_i = n}} \left(P_n^{(k_1,\cdots,k_m)} \prod_{i=1}^{m} x_i^{k_i}\right),$$

ahol $P_n^{(k_1,\cdots,k_m)}$ egy **polinomiális együttható**:

$$P_n^{(k_1,\cdots,k_m)} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{m}(k_i!)}.$$

Érdemes megfigyelni, hogy a $\prod_{i=1}^{m} x_i^{k_i}$ szorzatban a kitevők összege n, hiszen a szummajel alatt ez feltételként szerepel, azzal együtt, hogy valamennyi kitevő nemnegatív egész szám.
 (a) $P_{73}^{(10,23,28,12)} = \frac{73!}{10!\cdot 23!\cdot 28!\cdot 12!} = 326\,274\,770\,778\,896\,897\,767\,002\,571\,084\,067\,961\,600$;
 (b) 0, mert $9 + 21 + 28 + 23 = 81 \ne 73$;
 (c) $P_{73}^{(52,7,1,13)} = \frac{73!}{52!\cdot 7!\cdot 1!\cdot 13!} = 1\,765\,873\,120\,418\,314\,300\,229\,760$;
 (d) 0, mert $37 + 11 + 12 + 14 = 74 \ne 73$.

3. **feladat**

Bizonyítsa be, hogy minden $x \ge 0$ valós számra $(x^3 + 7)^{61} \ge 7^{60}(7 + 61x^3)$.

$$\begin{aligned}(x^3+7)^{61} &= \sum_{k=0}^{61}\binom{61}{k}(x^3)^{61-k}7^k = \sum_{k=0}^{61} 7^k\binom{61}{k}x^{183-3k} \\ &= \sum_{k=0}^{59} 7^k\binom{61}{k}x^{183-3k} + 7^{60}\binom{61}{60}x^3 + 7^{61}\binom{61}{61} \\ &= 7^{61} + 61\cdot 7^{60}\cdot x^3 + \sum_{k=0}^{59} 7^k\binom{61}{k}x^{183-3k} \\ &\ge 7^{61} + 61\cdot 7^{60}\cdot x^3 = 7^{60}(7+61x^3).\end{aligned}$$

4. **feladat**

Egy felmérés során 100 embert megkérdeztek, hogy milyen forrásból szerzi a híreket. A következő válaszokat adták: tévéből 65, rádióból 38, újságból 39, tévéből és rádióból 20, tévéből és újságból 20, rádióból és újságból 9 illetve tévéből, rádióból és újságból 6. Hányan vannak, akik a felsoroltak közül egyik forrásból sem szerzik a híreket?

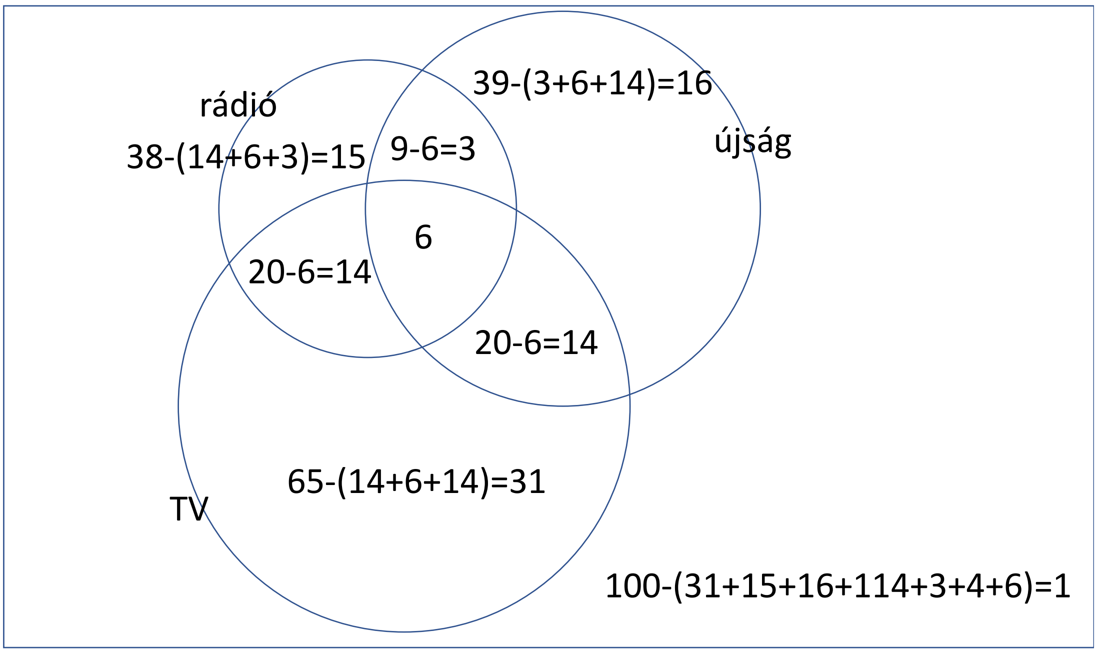
A feladat a **logikai szita** (a **tartalmazás és kizárás elve**) segítségével oldható meg: ha adott egy A halmaz és egy, az A részhalmazain értelmezett olyan f függvény, amelynél a függvényértékek összeadhatóak, és a függvény értéke diszjunkt halmazok unióján az egyes halmazokon felvett értékek összege (vagyis ha U és V az A olyan részhalmazai, hogy $U \cap V = \emptyset$, akkor $f(U \cup V) = f(U) + f(V)$), akkor az A részhalmazainak egy $\{A_k | n \geq k \in \mathbb{N}^+\}$ rendszerére

$$f\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\cdots,n\} \\ |I|=k}} f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$

Ha f a fentiek szerinti, akkor az is igaz, hogy az A egy U részhalmaza esetén $f(\overline{U}) = f(A) - f(U)$. A fenti feladatban az A halmaz a megkérdezett emberek összessége, így $f(A) = 100$, egy-egy U részhalmaz esetén $f(U)$ az U halmazhoz tartozó emberek összessége, és diszjunkt részhalmazok uniójában lévő emberek száma az egyes részhalmazokban lévő emberek számának összege, tehát alkalmazható a logikai szita. Legyen T a tévéből, R a rádióból és U az újságból tájékozódó emberek összessége, végül N azon emberek halmaza, akik egyik hírforrást sem használják. Most az A egy V részhalmazára $f(V) = |V|$, és

$$\begin{aligned} |N| &= |A| - \big((|T| + |R| + |U|) - (|T \cap R| + |T \cap U| + |R \cap U|) + |T \cap R \cap U|\big) \\ &= 100 - \big((65 + 38 + 39) - (20 + 20 + 9) + 6\big) = 100 - 1 = 99, \end{aligned}$$

vagyis a tévé, rádió és újság egyikének híreit nem figyelő, megkérdezett emberek száma 1.
A konkrét feladatban csupán három részhalmaz (és ezek közös részei) volt. Ilyen esetben közvetlen gondolkodással is megkapjuk a választ a kérdésre. $|T \cap R \cap U| = 6$ és $|T \cap R| = 20$. De az utóbbi számban benne van az előbbi is, így azok száma, akik a tévét és rádiót is figyelik, de nem olvasnak újságot, a két szám különbsége, azaz 14. Ugyanígy, a tévéből és újságból de a rádióból nem tájékozódók száma ismét 14, és a rádiót, újságot követők, de tévét nem nézők száma $9 - 6 = 3$. Végül a csak a tévét figyelők száma a tévét figyelők száma mínusz a csak a tévét és a rádiót, a csak a tévét és újságot valamint a mindhármat figyelők száma azaz $65 - (14 + 14 + 6) = 31$. Ezt mutatja az alábbi ábra:



5. **feladat**

Egy 8-tagú társaság moziba megy. Hányféleképpen ülhetnek le egy sorba úgy, hogy Anna és Béla valamint Dani és Eszmeralda ne kerüljön egymás mellé?

A feladatot általánosítva oldjuk meg. Adott $n \in \mathbb{N}$ ember, akiket egy sorba kell leültetni. Van közöttük k olyan, páronként diszjunkt pár, amelynek a két tagja semmiképpen nem akar egymás mellé kerülni. Nyilván $k \in \mathbb{N}$ most olyan, hogy $2k \leq n$. Hányféle sorrend lehetséges?
A feladat a logikai szitával oldható meg. Az összes lehetséges sorrendből, P_n-ből ki kell hagyni azokat, ahol legalább egy pár két tagja egymás mellé kerül. Ha egy adott pár szomszédos helyre kerül, akkor az ilyen ülések számát úgy tudjuk megadni, hogy a párt egyetlen tagnak tekintjük, így most $n-1$ elem van, amelyeket sorba kell állítani, és minden ilyen sorrendnél a pár két tagja kétféle sorrendben ülhet, tehát összesen $C_k^1 P_{n-1} P_2$-t kell kivonni P_n-ből. Ám ekkor kétszer vontuk ki azokat az üléseket, amikor legalább két pár két tagja egymás mellé kerül. Ezzel korrigálni kell az előző eredményt, vagyis vissza kell adni az ilyen esetek számát. Most először meg kell mondanunk, hogy melyik két párról van szó, vagyis ki kell választani a k párból (ismétlés és a sorrendre való tekintet nélkül) kettőt, ezt a két párt egy-egy tagnak tekintve sorba rendezzük az $n-2$ elemet, és ezen belül, egymástól függetlenül, a pár két emberét kétféleképpen ültethetjük, vagyis a korábbi különbséghez hozzá kell adni $C_k^2 P_{n-2}(P_2)^2$-t. Amennyiben a párok száma nagyobb, mint kettő, akkor még mindig baj van, ugyanis a legalább három szomszédos helyre kerülő párokat ismét többször vettük figyelembe, és így tovább. Mindezt figyelembe véve a helyes sorrendek száma

$$\sum_{l=0}^{k} (-1)^l C_k^l P_{n-l} (P_2)^l = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} (n-l)!\, 2^l.$$

A konkrét feladat esetén $n = 8$ és $k = 2$, így

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2} (-1)^k C_2^k P_{8-k} (P_2)^k &= C_2^0 P_{8-0}(P_2)^0 - C_2^1 P_{8-1}(P_2)^1 + C_2^2 P_{8-2}(P_2)^2 \\ &= P_8 - C_2^1 P_{8-1} P_2 + P_{8-2}(P_2)^2 = 8! - \binom{2}{1} 7!\, 2! + 6!\,(2!)^2 \\ &= 8! - 2 \cdot 7!\, 2 + 6!\, 2^2 = 40\,320 - 4 \cdot 5\,040 + 4 \cdot 720 = 23\,040.\end{aligned}$$

6. **feladat**

Egy ismerősünknek el akarunk küldeni 8 különböző fényképet. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha pontosan 5 különböző borítékot akarunk felhasználni?
A feladat azonos azzal, hogy hány különböző leképezés adható meg egy 8-elemű A halmazról egy 5-elemű halmazra, azaz hány szürjekció adható meg egy 8-elemű halmazról egy 5-elemű halmazra. Ehhez előbb tudnunk kell, hogy összesen hány, a 8-elemű halmazt az 5-elemű halmazba képező függvény létezik. Az első elem képe a másik halmaz 5 eleme közül bármelyik lehet, ez 5 lehetőség. A második elem képe független az első elem képétől, ez tehát az előbbi 5 lehetőségtől függetlenül ismét 5 különböző választást jelent, és a két elem lehetséges képeinek száma a két lehetőség szorzata, tehát 5^2. A gondolatot folytatva, az összes leképezés száma 5^8. Ez egy ismétléses variáció, hiszen ugyanazt az elemet (ugyanazt a képpontot) akárhányszor kiválaszthatjuk, és számít a sorrend, hiszen az eredeti pontok is különbözőek. Általában egy n-elemű halmazt egy m-elemű halmazba képező függvények száma ${}^{(i)}V_m^n = m^n$. Ha most a szürjektív függvények számát akarjuk meghatározni, akkor az összes leképezésből el kell hagyni a nem szürjektíveket, tehát azokat, amelyeknél a képhalmaz legalább egy pontja nem képpont. Ezt az egy pontot $C_m^1 = \binom{m}{1}$-féleképpen kapjuk. De ekkor azokat a leképezéseket, amelyeknél legalább két pont nem képpont, kétszer is elhagytunk, így ezek számával korrigálni kell az előző eredményt, figyelembe véve, hogy a két pontok száma $C_m^2 = \binom{m}{2}$. Ám ekkor ismét probléma van a minimum három pontot nem tartalmazó leképezésekkel, és így tovább. A feladat tehát láthatóan egy logikai szita: az n-elemű halmazt az m-elemű halmazra képező szürjektív függvények száma

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\, C_m^{k\,(i)} V_{m-k}^{n} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k}(m-k)^n.$$

A konkrét esetben $n = 8$ és $m = 5$, tehát a 8 különböző fénykép pontosan 5 különböző borítékban való elhelyezések száma

$$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k \binom{5}{k}(5-k)^8 = 1\cdot 5^8 - 5\cdot 4^8 + 10\cdot 3^8 - 10\cdot 2^8 + 5\cdot 1^8 + 1\cdot 0^8$$
$$= 1\cdot 390\,625 - 5\cdot 65\,536 + 10\cdot -10\cdot 2^8 + 5\cdot 1^8 + 1\cdot 0^8 = 786\,480.$$

7. **feladat**

(a) Igaz-e, hogy 8 gyerek között mindig van legalább 2, akik a hét ugyanazon napján születtek?
Ez a feladat a skatulyaelv: ha n dobozba n-nél több elemet kell elhelyezni, akkor legalább egy dobozba egynél több elem kerül (másként ez azt fejezi ki, hogy ha A és B véges halmazok, akkor akkor és csak akkor van A-t B-be képező injektív függvény, ha B-nek legalább annyi eleme van, mint A-nak). Mivel a hétnek 7 különböző napja van, mindegyik gyerek születésnapja ezek egyike és csak egyike, és összesen 8 gyerek van, ezért **igaz** az állítás.

(b) Egy 34 fős társaságban mindenkinek legfeljebb 10 ismerőse van jelen. Igaz-e, hogy van közöttük 4 olyan ember, akiknek ugyanannyi ismerőse van jelen a társaságban.
Legyen a társaság két tagja adott sorrendben relációban akkor és csak akkor, ha ugyanannyi ismerősük van a társaságban. Ez a reláció ekvivalencia-reláció, mert minden embernek önmagával azonos számú ismerőse van, a reláció reflexív; a közös ismerősök száma nyilván nem függ a két ember sorrendjétől, a reláció szimmetrikus, és ha a-nak és b-nek azonos zsámú ismerőse van, és b és c is ugyannyi embert ismer, akkor mind a, mind c ugyanannyi embert ismer, mint b, tehát nekik is azonos számú közös ismerősük van, a reláció tranzitív. A különböző osztályokhoz különböző számú közös ismerős tartozik, így az osztályok száma legfeljebb 11. Ha a fenti állítás nem lenne igaz, akkor minden osztályban legfeljebb hárman vannak, tehát összesen csak $11\cdot 3 = 33$ lehetne a társaság létszáma, következésképpen az állítás **igaz**.

(c) Bizonyítsuk be, hogy ha egy egységoldalú négyzetben felveszünk 33 tetszőleges pontot, akkor mindig lesz köztük 3 olyan, amelyek által meghatározott háromszög területe nem nagyobb, mint $\frac{1}{32}$.
Osszuk fel a négyzetet 16 darab egyforma nagyságú négyzetre. Ekkor kell, hogy legyen legalább egy olyan kis négyzet, amelyben legalább három pont van. Ha mindhárom pont egy adott kis négyzetben van, akkor a három pont által meghatározott háromszög területe nem lehet nagyobb, mint a négyzet területének a fele, amely most $\frac{1}{32}$.