1. hét, 2024. február 13.

Analízis 2AB Előadás

Tartalom

a) Érintő és pillanatnyi sebesség

b) A differenciálhányados fogalma

c) Műveleti szabályok

d) Példák

Differenciálszámítás

Érintő iránytangense

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy az f függvény az $a \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében értelmezve van.

Kérdés: Van-e, és ha igen, akkor mi az f függvény görbéjének az $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli érintője?

Az $\big(a, f(a)\big)$ ponton átmenő (nem függőleges) egyenesek egyenlete:

$$y = m(x - a) + f(a) \qquad (m \in \mathbb{R}).$$

A kérdés tehát az m, azaz az egyenes meredekségének az értéke az érintő esetében?

Megjegyzés: az m meredekség nem más, mint az egyenes és az ”x” tengely által bezárt szög tangense. Iránytangens.

Szelők: Az $\big(a, f(a)\big)$, $\big(a + h,\ f(a + h)\big)$ pontokon átmenő húr, szelő egyenlete

$$y = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x - a) + f(a)\,.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy az egyenes átmegy az $\big(a, f(a)\big)$, $\big(a + h, f(a + h)\big)$ pontokon.

Példa: parabola érintője

Legyen $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$, $a = 1$.

Ekkor az $(1,1)$, $\big(1+h, (1+h)^2\big)$ pontkon átmenő szelő egyenlete

$$y = \frac{(1+h)^2 - 1}{h}(x-1) + 1 = (2+h)(x-1) + 1\,.$$

Ha a meredekség nem 2, azaz $h \neq 0$, akkor az egyenes nem lehet érintő, mert átmegy a parabola $(1+h, (1+h)^2)$ pontján is.

Az érintő meredeksége tehát 2.

Hogyan származik az érintő meredeksége a szelők meredekségéből?

"Az érintő a szelők határértéke":

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2.$$

Általában: az $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli érintő meredeksége, iránytangense

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,.$$

https://www.geogebra.org/m/TymMwUtc

Pillanatnyi sebesség

Legyen az egyenes vonalú mozgást végző pont t időpillantbeli helye az egyenesen $s(t)$ $(t \in \mathbb{R})$.

A mozgó pont átlagsebessége a $[t_0, t_1]$ időintervallumban: $v_{[t_0,t_1]} = \dfrac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$.

Kérdés: mennyi a $v(t_0)$ pillanatnyi sebesség a t_0 időpillanatban?

Válasz:

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} .$$

Példa

Függőleges hajítás: $s(t) = -5t^2 + 24t + 2$.

Gravitációs gyorsulás: -5. Kezdősebesség: 24. Kezdeti magasság: 2.

Az átlagsebesség a $[2, 2 + h]$ időintervallumban

$$v_{[2,2+h]} = \frac{(-5(2+h)^2 + 24(2+h) + 2) - (-5 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 + 2)}{h} = -5h + 4$$

A pillanatnyi sebesség a 2 időpillanatban

$$v(2) = \lim_{h \to 0} v_{[2,2+h]} = \lim_{h \to 0} (-5h + 4) = 4 .$$

Az előző példák alapján: pontosítás, általánosítás.

Halmaz belső pontja

Definíció

Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont az A halmaz egy belső pontja, ha $\exists\ \delta > 0$ olyan, hogy $k_\delta(a) \subset A$.

Emlékeztető: $k_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$.

Jelölés: az A belső pontjainak halmazát az A belsejének hívjuk és $\operatorname{int} A$-val jelöljük.

Példák

a) $\operatorname{int}[0,1] = (0,1)$,

b) $\operatorname{int}(a,b) = (a,b)$,

c) $\operatorname{int}\mathbb{R} = \mathbb{R}$,

d) $\operatorname{int}\mathbb{N} = \emptyset$,

e) $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$,

f) A véges halmaz esetén $\operatorname{int} A = \emptyset$.

A differenciálhányados definíciója

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, pontban, ha

$$\exists \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}\,.$$

Jelölés: $f \in D\{a\}$.

Figyelem!!!

a) Csak az értelmezési tartomány belső pontjaiban vizsgálhatjuk, hogy differenciálható-e a függvény.

b) Csak véges határárték esetében nevezzük a függvényt differenciálhatónak az adott pontban.

Differenciálhányados

Ha $f \in D\{a\}$, akkor az $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ véges határértéket az f függvény a-pontbeli differenciálhányadosának, deriváltjának nevezzük.

Jelölés: $f'(a) := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Megjegyzés: sorozatok nem diffenciálhatók egy pontban sem. Diszkretizáció során elveszítjük a differenciálhatóságot. Diszkrét deriválás.

Differenciálhatóság és a különbségihányados függvény

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.

Ekkor a $\Delta_a f(x) : \mathcal{D}_f \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ $\Delta_a f(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ függvényt az f függvény a ponthoz tartozó különbségihányados függvényének nevezzük.

A definícióval való összehasonlítás alapján

$$f \in D\{a\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \quad \lim_{x \to a} \Delta_a f(x) = f'(a) \in \mathbb{R}\,.$$

Megjegyzés: a határérték és a folytonosság közötti kapcsolat miatt ahelyett, hogy a különbségihányados függvénynek van véges határértéke az a pontban, mondhatjuk azt is, hogy különbségihányados függvény kiterjeszthető folytonosan az a pontban.

A különbségihányados jelentése: $\Delta_a f(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ az f függény grafikonjának $\big(a, f(a)\big)$, $\big(x, f(x)\big)$ koordinátájú pontjait összekötő szelő meredeksége.

A differenciálhatóság átfogalmazása, érintő, lineáris közelítés

Állítás (A differenciálhatóság átfogalmazása)

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in D\{a\}$$

$$\Updownarrow$$

$\exists \quad A \in \mathbb{R}$, és $\varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim_a \varepsilon = 0$ úgy, hogy $f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)$

Bizonyítás

$\Longrightarrow \quad f \in D\{a\}$ esetén legyen $A := f'(a)$, és $\varepsilon(x) := \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$.

Ezzel a választással egyrészt

$$A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) = f'(a)(x-a) + \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right)(x-a) = f(x) - f(a),$$

másrészt a differenciálhatóság miatt

$$\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0\,.$$

$\Longleftarrow \quad$ Ha az A szám és az ε függvény teljesítik az állítás feltételeit, akkor
$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = A + \varepsilon(x)$, és $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = A =: f'(a) \in \mathbb{R}\,.$ $\square$

Az átfogalmazás alkalmazása

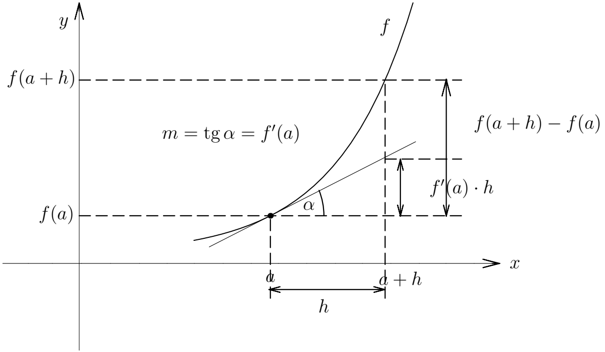
Ha $f \in D\{a\}$, akkor $\exists \ \ \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim_a \varepsilon = 0$, hogy

$$f(x) = f'(a)(x-a) + f(a) + \varepsilon(x)(x-a)\,.$$

A jobb oldalon lévő $f'(a)(x-a) + f(a)$ lineáris függvény az f függvény grafikonjának az $(a, f(a))$ pontján átmenő $f'(a)$ meredekségű egyenes.
Más formában:

$$f(a+h) = f'(a)(h) + f(a) + \varepsilon(a+h)\cdot h\,.$$

Szemléletes jelentés:



Az érintő definíciója

Legyen $f \in D\{a\}$. Ekkor az

$$e_af : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad e_af(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$$

egyenest az f függvény a pontbeli érintőjének hívjuk.

Mitől érintő az érintő?

Tekintsük az $\big(a, f(a)\big)$ ponton átmenő (nem függőleges) egyenesek általános alakját:

$$\ell(x) = m(x-a) + f(a).$$

a) Az $m \in \mathbb{R}$ meredekség tetszőleges értéke esetén: $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - \ell(x)) = 0$.

b) Másrészt viszont

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-\ell(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \Big(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - m\Big) = f'(a) - m,$$

ami akkor és csak akkor 0, ha $m = f'(a)$, azaz ℓ az érintő.

Csak az érintőre igaz, hogy a függvénytől való különbség még $(x-a)$-val való leosztás után is 0-hoz tart. A függvény és az érintő különbsége ”kis ordó” függvény.

Az érintő átgondolása

a) Lokális közelítés lineáris függvénnyel.

b) $f \in D\{a\}$: f "jól közelíthető" lineáris függvénnyel az a közelében. Lineáris modellek, linearizálás.

Differenciálok

Megváltozás: $\Delta y = f(x) - f(a)$, $\Delta x = x - a$.

Differenciálok: $dy = f'(a)(x - a)$, $dx = x - a$.

Differenciálhányados: $\dfrac{dy}{dx} = f'(a)$.

A megváltozás közelítése: $\Delta y = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x \approx \dfrac{dy}{dx}\Delta x = f'(a)(x - a)$.

Deriváltfüggvény

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H = \big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \ : \ f \in D\{x\}\big\} \neq \emptyset$.

A deriváltfüggvény az a H halmazon értelmezett valós függvény, amely az $x \in H$ pontban az $f'(x)$ értéket veszi fel.

Jelölés: f'.

Terminológia: Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható, ha az értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, azaz a fenti jelölésekkel $H = \mathcal{D}_f$.

Példák

Gyakorlaton szerepel(t) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ típusú határértékek, azaz $f'(a)$ számolása.

a) Legyen $c \in \mathbb{R}$, és $f(x) = c \;\; (x \in \mathbb{R})$. Ekkor $f'(x) = 0 \;\; (x \in \mathbb{R})$.

b) $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3 \;\; (x \in \mathbb{R})$.

c) $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x \;\; (x \in \mathbb{R})$. Más jelöléssel $\left(e^x\right)' = e^x$.

d) $\sin' = \cos, \; \cos' = -\sin$.

Példa nem differenciálható függvényre: $f(x) = |x|$. $f \notin D\{0\}$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \;\;1, & x > 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0+0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 0-0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

Nincs érintő az abszolútérték függvény csúcsában!

Tétel (A folytonosság és a differenciálhatóság kapcsolata)

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \in D\{a\} \qquad \Longrightarrow \qquad f \in C\{a\}\,.$$

Szóban: Ha egy valós-valós függvény differenciálható egy pontban, akkor folytonos abban a pontban.

Megjegyzés: Fordítva nem igaz. Az abszolútérték függvény folytonos a 0 pontban, de nem deriválható 0-ban. Kompatibilitási probléma is van: folytonosság esetében nem szükséges, hogy a pont az értelmezési tartomány belső pontja legyen.

Bizonyítás

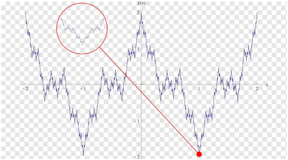
Nyilván $f(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a)$. f differenciálhatósága miatt, ezért

$$\lim_a f = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a) \right) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)\,. \quad \square$$

$\mathbb{R}$-EN FOLYTONOS, DE SEHOL SEM DERIVÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK

K. Weierstrass (1861)

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(15^n \pi x)}{2^n} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

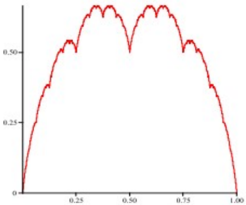


T. Takagi (1903)

B.L. van der Waerden (1930)

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{< 10^n x >}{10^n} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$< \alpha > := \min\{|\alpha - k| \mid k \in \mathbb{Z}\}$$



Műveletek deriválható függvényekkel

Tétel (Deriválási szabályok)

$f,\ g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) $f \in D\{a\}$ és $c \in \mathbb{R} \implies c \cdot f \in D\{a\}$, és $(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)\,,$

a) $f, g \in D\{a\} \implies f + g \in D\{a\}$, és $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\,,$

b) $f, g \in D\{a\} \implies f \cdot g \in D\{a\}$, és $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,,$

c) $f, g \in D\{a\}$ és $g(a) \neq 0 \implies \dfrac{f}{g} \in D\{a\}$, és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}\,,$$

Megjegyzések:

1. Mivel $f,\ g \in \in D\{a\}$, ezért $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$. Könnyű meggondolni, hogy ekkor $a \in \operatorname{int} \left(\mathcal{D}_f \bigcap \mathcal{D}_g\right) = \operatorname{int} \mathcal{D}_{f+g} = \operatorname{int} \mathcal{D}_{f \cdot g}$.

Megjegyzések (folytatás):

2. A hányados esetén a g nevező nem nulla az a pontban. g differenciálható, ezért folytonos is az a pontban. Ez azt jelenti, hogy g nem nulla az a egy környezetében is. Ezzel az észrevétellel az előbbiekhez hasonlóan kapjuk, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f/g}$.

Bizonyítás

b) Az összegfüggvény deriválása.

Az $f+g$ függvény különbségihányados függvénye az a pontban

$$\begin{aligned}\Delta_a(f+g)(x) &= \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} \\ &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \Delta_a f(x) + \Delta_a g(x)\,.\end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy

$$\Delta_a(f+g)(x) = \Delta_a f(x) + \Delta_a g(x) \quad \left(x \in \mathcal{D}_{f+g} \setminus \{a\}\right).$$

Innen $(f+g)'(a) = \lim_a \Delta_a(f+g) = \lim_a \Delta_a f + \lim_a \Delta_a g = f'(a) + g'(a)$. $\square$

c) A szorzatfüggvény deriválása.

$$
\begin{aligned}
\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)}{x-a} \\
&= \frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g(x)}{x-a} \\
&= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(x)+f(a)\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \quad \big(x\in\mathcal{D}_{f\cdot g}\setminus\{a\}\big).
\end{aligned}
$$

Következésképpen

$$
\Delta_a f\cdot g(x)=g(x)\cdot\Delta_a f(x)+f(a)\cdot\Delta_a g(x) \quad \big(x\in\mathcal{D}_{f\cdot g}\setminus\{a\}\big)\,.
$$

Mivel $g\in D\{a\}$, ezért $g\in C\{a\}$ és így $\lim_a g=g(a)$.

Ezek alapján

$$
\begin{aligned}
(f\cdot g)'(a) &= \lim_a \Delta_a(f\cdot g)=\lim_a(g\cdot\Delta_a f)+\lim_a(f(a)\cdot\Delta_a g) \\
&= g(a)\cdot f'(a)+f(a)\cdot g'(a)\,. \quad \square
\end{aligned}
$$

c) A hányadosfüggvény deriválása.

Az előző módszert követve kifejezzük a hányadosfüggvény különbségi hányados fúggvényét a számláló és a nevező különbségi hányados függvényével

$$
\begin{aligned}
\Delta_a\Big(\frac{f}{g}\Big)(x) &= \frac{\Big(\frac{f}{g}\Big)(x) - \Big(\frac{f}{g}\Big)(a)}{x-a} = \frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \\
&= \frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{f(x)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(x)}{x-a} = \\
&= \frac{1}{g(a)g(x)}\Big(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(a) - f(a)\cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\Big) \\
&= \frac{1}{g(a)g(x)}\big(g(a)\cdot\Delta_a f(x) - f(a)\cdot \Delta_a g(x)\big)\,.
\end{aligned}
$$

Innen mindkét oldal a-beli határértékét véve kapjuk a bizonyítandó

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

összefüggést.

Tétel (Az összetett függvény deriválása)

Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Tegyük fel, hogy az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$ pontban $g \in D\{a\}$, továbbá $f \in D\{g(a)\}$.

Ekkor $f \circ g \in D\{a\}$, és $\left(f \circ g\right)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a)\,.$

Bizonyítás

Először azt igazoljuk, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f \circ g}$.

Valóban, mivel $f \in D\{g(a)\}$, ezért $g(a) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \implies \exists\ \varepsilon > 0$, hogy $k_\varepsilon(g(a)) \subset \mathcal{D}_f$.

$g \in D\{a\}$ miatt $g \in C\{a\}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$, így $\exists\ \delta > 0$, hogy egyrészt $k_\delta(a) \subset \mathcal{D}_g$, másrészt $\forall\ x \in k_\delta(a)$ esetén $g(x) \in k_\epsilon(g(a))$.

Következésképpen $k_\delta(a) \subset \mathcal{D}_{f \circ g}$, azaz $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f \circ g}$.

Bizonyítás (folyt.)

A differenciálhatóság definíciójának az átfogalmazását fogjuk alkalmazni (lineáris közelítés)

Eszerint

$$
\begin{aligned}
g \in D\{a\} \quad \Longrightarrow \quad & \exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R},\ \varepsilon \in C\{a\},\ \varepsilon(a) = 0\,, \\
& g(x) - g(a) = g'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad (x \in \mathcal{D}_g)\,.
\end{aligned}
$$

Hasonlóan

$$
\begin{aligned}
f \in D\{g(a)\} \Longrightarrow \quad & \exists\, \eta : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R},\ \eta \in C\{g(a)\},\ \eta\big(g(a)\big) = 0\,, \\
& f(y) - f\big(g(a)\big) = f'\big(g(a)\big)\big(y - g(a)\big) + \eta(y)\big(y - g(a)\big) \\
& (y \in \mathcal{D}_f).
\end{aligned}
$$

Ez utóbbit vegyük az $y = g(x)$ helyen:

$$
\begin{aligned}
\big(f \circ g\big)(x) - \big(f \circ g\big)(a) &= f(g(x)) - f(g(a)) \\
&= f'\big(g(a)\big)\big(g(x) - g(a)\big) + \eta\big(g(x)\big)\big(g(x) - g(a)\big) \quad (x \in \mathcal{D}_{f\circ g}).
\end{aligned}
$$

A $(g(x)-g(a))$ helyébe írjuk be a g függvény a-beli differenciálhatóságából következő előállítást. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\big(f\circ g\big)(x)-\big(f\circ g\big)(a) =& f'\big(g(a)\big)\big(g'(a)(x-a)+\varepsilon(x)(x-a)\big)\\ &+\eta\big(g(x)\big)\big(g'(a)(x-a)+\varepsilon(x)(x-a)\big)\end{aligned}$$

Ez így nagyon bonyolultnak tűnik, de a tagok csoportosításával azt kapjuk, hogy az alábbi alakba írható át

$$\big(f\circ g\big)(x)-\big(f\circ g\big)(a)=A\cdot(x-a)+\delta(x)(x-a)\quad\big(x\in\mathcal{D}_{f\circ g}\big)\,,$$

ahol

$$A:=f'\left(g(a)\right)\cdot g'(a)$$

és

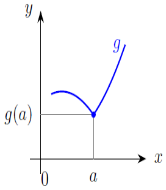
$$\delta(x):=f'\left(g(a)\right)\cdot\varepsilon(x)+\eta\left(g(x)\right)\cdot\big(g'(a)+\varepsilon(x)\big)\,.$$

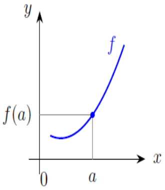
Az ε és η függvényekre vonatkozó feltételből következik, hogy $\delta\in C\{a\}$ és $\delta(a)=0$.

Következésképpen, $f\circ g\in D\{a\}$ és $(f\circ g)'(a)=f'\left(g(a)\right)\cdot g'(a)\,.$ $\square$

Függvénygrafikon „töréspontja”, „simasága”, „érintője”.

A fogalmak szemléletes jelentése világos.





A g grafikonjának az $(a, g(a))$ pont egy „töréspontja”. Az f grafikonja „sima”, nincs „töréspontja”.

A különbség pontos leírásához induljunk ki abból az *ötletből*, hogy húzzunk szelőt a grafikon $(a, f(a))$ pontjában: