Diszkrét matematika

5. gyakorlat:

Komplex számok algebrai és trigonometrikus alakja

(A diasort készítette Németh Gábor Árpád, Koch-Gömöri Richárd feladait és Nagy Gábor diasorában lévő definiciókat felhasználva)

Definíció

Definíció

Az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, komplex számoknak ($\mathbb{C}$) hívjuk, az ilyen formában való felírásukat algebrai alaknak nevezzük.

Összeadás: $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$.

Szorzás: $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$.

A $z = a + bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ komplex szám valós része: $\mathrm{Re}(z) = a \in \mathbb{R}$.

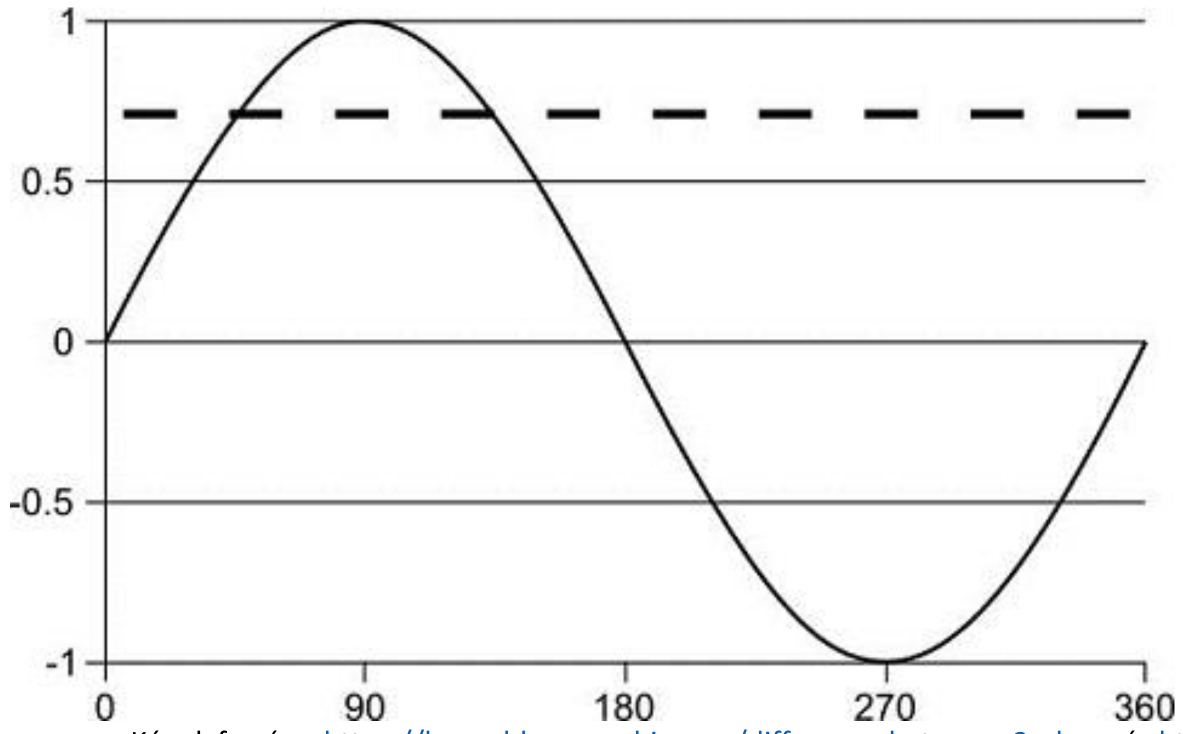
A $z = a + bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ komplex szám képzetes része: $\mathrm{Im}(z) = b \in \mathbb{R}$.

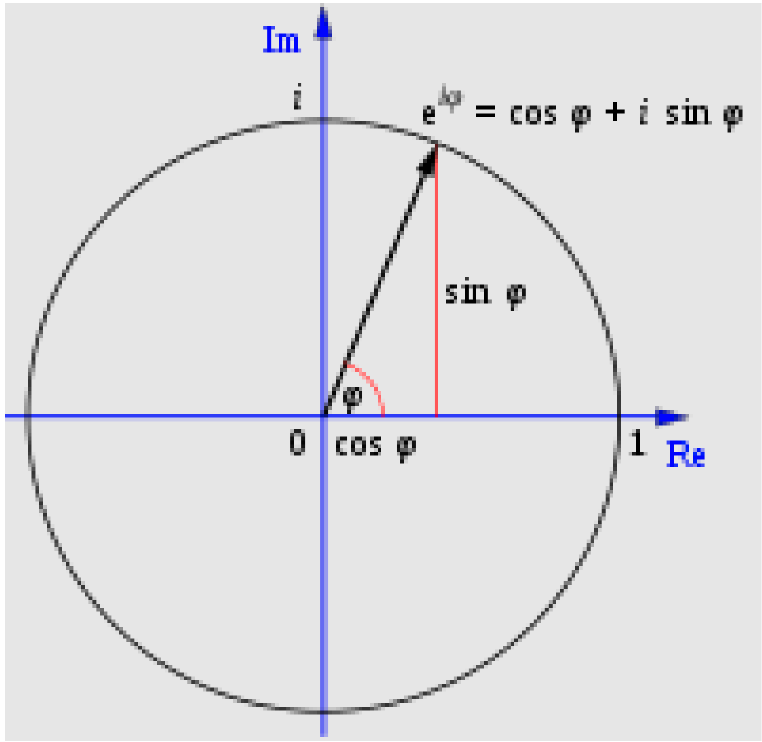
Mi a gyakorlati haszna a komplex számoknak?

- Váltakozó áram:

1 fázis:

- konnektorból így jön a 230V
- Feszültség komplex számsíkon forog, „valós részt látjuk”





Képek forrása: https://hu.weblogographic.com/difference-between-3-phase és https://hu.wikipedia.org/wiki/Euler-k%C3%A9plet

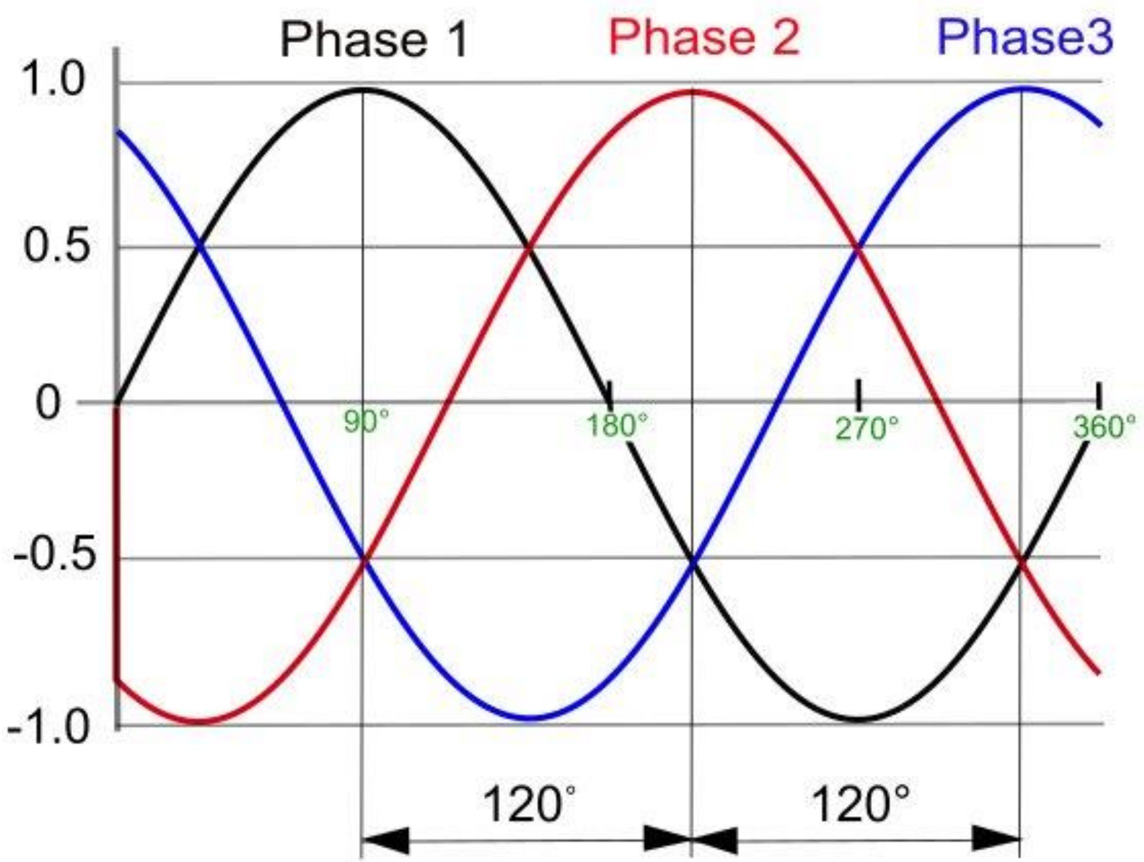
Megjegyzés: Villamosmérnökök képzetes részt MINDIG „j”-vel jelölik (mert „i”-vel áramerősséget jelölik)

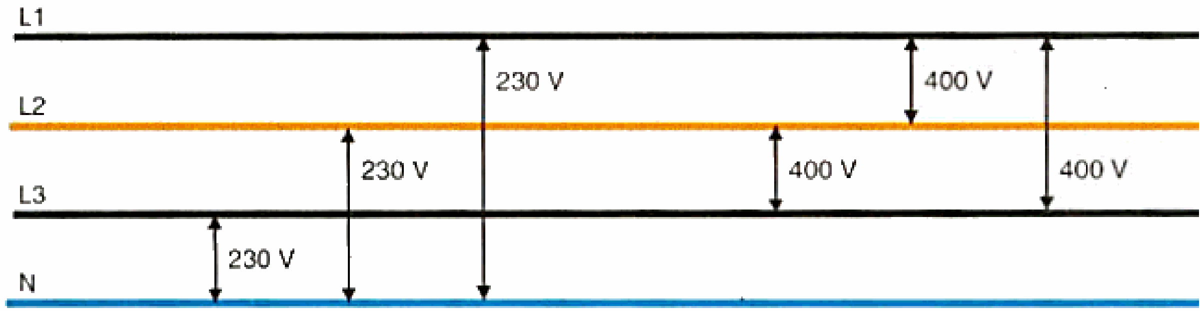
Mi a gyakorlati haszna a komplex számoknak?

- Váltakozó áram:

3 fázis:

- A „jómunkásember” erre köti rá a betonkeverőt
- 3x 1 fázis, 120 fokkal eltolva

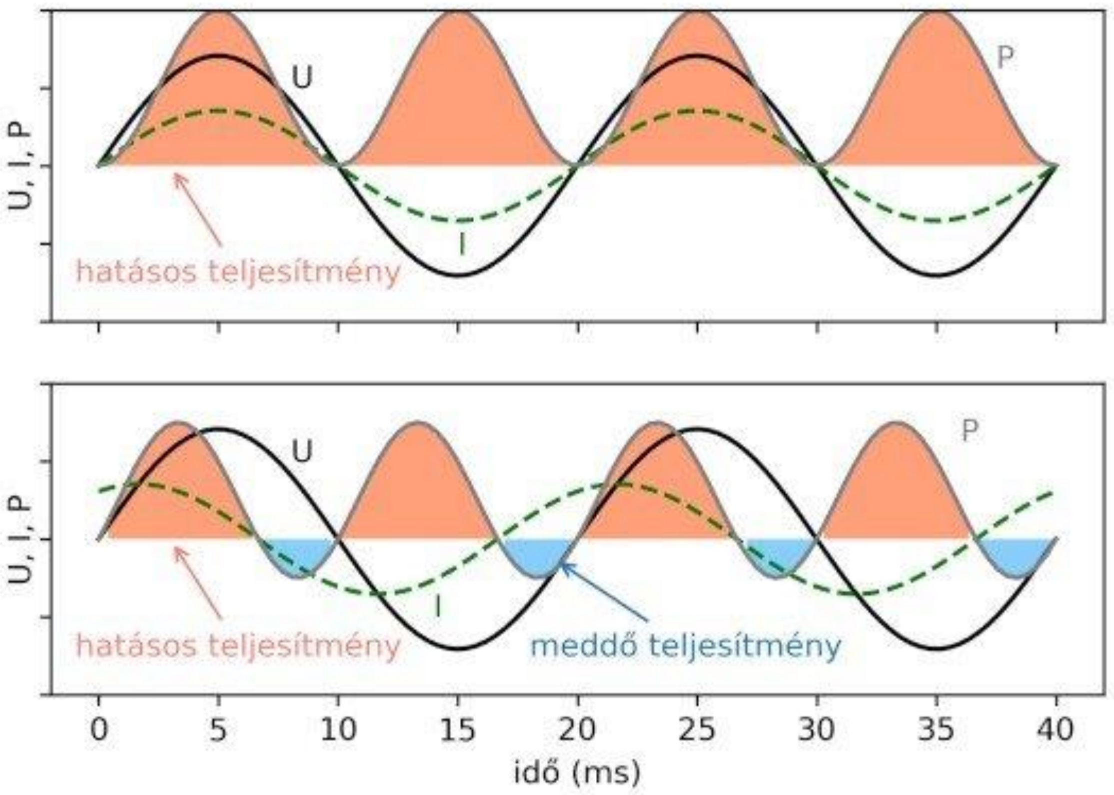


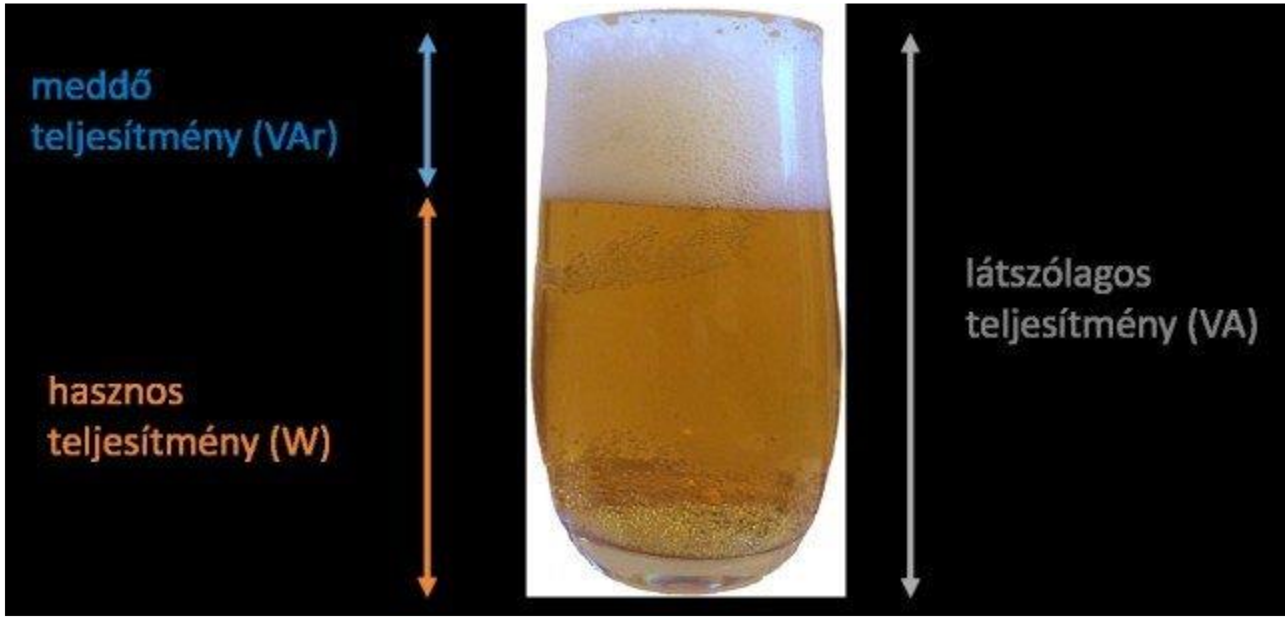


Képek forrása: https://hu.weblogographic.com/difference-between-3-phase és https://furdancs.blog.hu/2017/04/26/villanyszereles_haromfazisu_valtakozo_aram

Mi a gyakorlati haszna a komplex számoknak?

- Teljesítmény:
  - Re rész: Hatásos teljesítmény (jelölés: W, mértéke.: W)
  - Im rész: Meddő teljesítmény (jelölés: Q, mértéke.: VAr)
  - Teljes: Látszólagos teljesítmény (jelölés: S, mértéke.: VA)





Képek forrása: https://www.vled.hu/blog/mit-jelent-a-teljesitmenytenyezo

1. feladat

Végezzük el a következő műveleteket a komplex számok halmazán.

$\sqrt{-16}$ $\sqrt{-25}$ $(2i)^2$ $2i+5i$ $\frac{4i}{2i}$

$\sqrt{-16} = \sqrt{16}\,\sqrt{-1} = \pm 4i = 0 \pm 4i$

$\sqrt{-25} = \sqrt{25}\,\sqrt{-1} = \pm 5i = 0 \pm 5i$

$(2i)^2 = 2^2\, i^2 = 4i^2 = -4 = 4+0i$

$2i+5i = i(2+5) = 7i = 0+7i$

$4i/2i = 4/2 = 2 = 2+0i$

2. feladat

Legyen $z \in \mathbb{C}$, $z = -2 + 7i$. Adja meg a z komplex szám következő jellemzőit.

$\operatorname{Re} z$ $\quad$ $\operatorname{Im} z$ $\quad$ $-z$ $\quad$ $\overline{z}$ $\quad$ $|z|$

Re(z)=Re(-2+7i)=-2

Im(z)=Im(-2+7i)=7

-z=2-7i

z komplementere *(imag rész ellentetje)* : -2-7i

$|z|=|-2+7i|=\sqrt{(-2)^2+7^2}=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}$

3. feladat

Végezzük el a következő műveletet az algebrai alak felhasználásával: $\dfrac{4+3i}{(2-i)^2}$

$(4+3i)/(2-i)^2= (4+3i)/(4-4i+i^2)=(4+3i)/(3-4i)=$

Beszorzás (3+4i)/(3+4i)-vel:

$(4+3i)(3+4i)/((3-4i)(3+4i))=(12+16i+9i+12i^2)/(9-16i^2)=$

Mivel $i^2=-1$:

$(12-12+25i)/(9+16)=25i/25=i=0+i$

4. feladat

Oldja meg a következő egyenletet a komplex számok halmazán: $\dfrac{x+i-3i\overline{x}}{x-4} = i-1$

$x \in \mathbb{C}$

$x = a + b\cdot i \quad (a, b \in \mathbb{R})$

$$\frac{(a+bi)+i-3\cdot i\cdot\overline{(a+bi)}}{(a+b\cdot i)-4} = i-1$$

$$\underbrace{(a+bi)+i-3i\cdot(a-bi)}_{} = \underbrace{(i-1)(a+bi-4)}_{}$$

$$a+bi+i-3ia+3i^2b = ai+bi^2+4i-a-bi+4$$

$$a+3bi^2+i(b+1-3a) = bi^2-a+4+i(a-4-b)$$

$$(a+\underbrace{3bi^2-bi^2}_{2bi^2=-2b}+a-4)+i(b+1-3a-a+4+b)=0$$

$$(2a-2b-4)+i(2b+5-4a)=0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 2a-2b-4=0 \rightarrow a-b=2 \rightarrow a=2+b \\ 2b+5-4a=0 \end{array}$$

$$2b+5-\underbrace{4(2+b)}_{-8-4b}=0$$

$$-3-2b=0 \rightarrow -3=2b \rightarrow b=-\frac{3}{2}$$

$$a=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

$$x = a+bi = \underline{\underline{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i}}$$

5. feladat

Határozza meg azt a $z \in \mathbb{C}$ komplex számot, amelyre teljesül hogy

$$\left|\frac{z-3}{2-\bar{z}}\right| = 1 \wedge \mathrm{Re}\left(\frac{z}{2+i}\right) = 2$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{2+i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{a+bi}{2+i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{a+bi}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\right) =$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{2a - ai + 2bi - \overbrace{bi^2}^{-b}}{\underbrace{2^2}_{4} - \underbrace{i^2}_{-1}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{(2a+b)+i(2b-a)}{5}\right) =$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{2a+b}{5} + \frac{2b-a}{5}\cdot i\right) = \frac{2a+b}{5}$$

$$\frac{2a+b}{5} = 2 \rightarrow \underline{\underline{b = 10-2a}}$$

$$\left|\frac{z-3}{2-\bar{z}}\right| = \frac{|z-3|}{|2-\bar{z}|} = 1 \rightarrow |z-3| = |2-\bar{z}|$$

$$|a+b\cdot i-3| = |2-a+bi|$$

$$\sqrt{(a-3)^2+b^2} = \sqrt{(2-a)^2+b^2}$$

$$(a-3)^2+b^2 = (2-a)^2+b^2$$

$$(a-3)^2 = (2-a)^2$$

$$a^2-6a+9 = 4-4a+a^2$$

$$-6a+9 = 4-4a$$

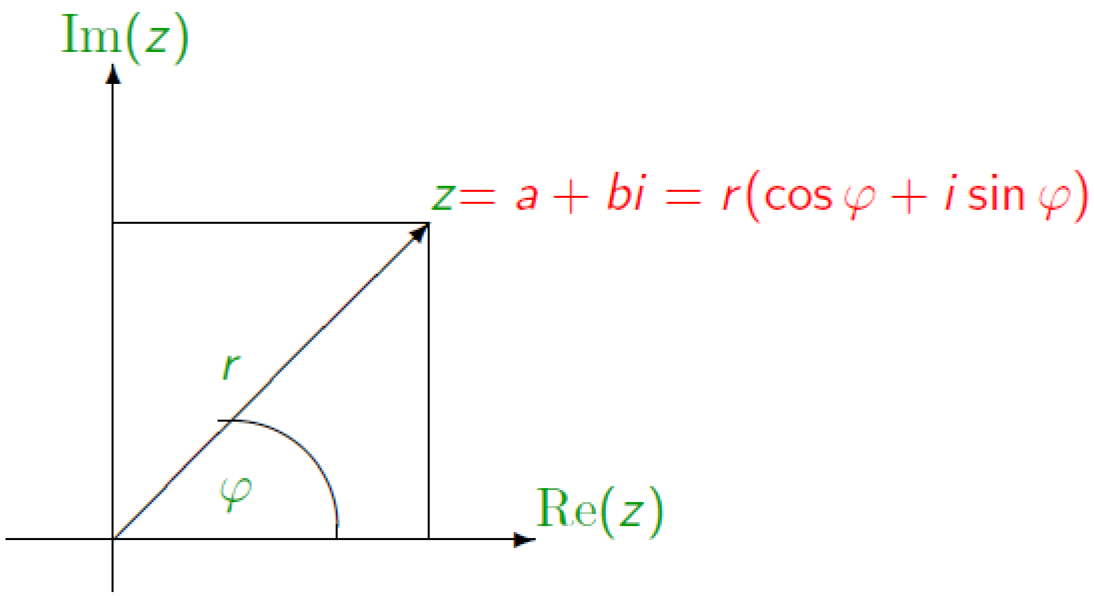
$$-2a = -5$$

$$\underline{\underline{a = \frac{5}{2}}}$$

$$\rightarrow b = 10 - \frac{2\cdot 5}{2} = \underline{\underline{5}}$$

$$\underline{\underline{z = a+bi = \frac{5}{2}+5i}}$$

A komplex számok a komplex számsíkon:



Ha $z = a + bi \in \mathbb{C}$, akkor $\mathrm{Re}(z) = a$, $\mathrm{Im}(z) = b$.
A $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ vektor hossza: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{|z|^2}$.
A z nemnulla szám argumentuma $\varphi = arg(z) \in [0, 2\pi)$
A koordináták trigonometrikus függvényekkel kifejezve:

$$\mathrm{Re}(z) = a = r \cdot \cos\varphi, \mathrm{Im}(z) = b = r \cdot \sin\varphi$$

6. feladat

Legyen $z \in \mathbb{C}, z = 2 + 5i$. Adja meg a z komplex szám abszolút értékét és argumentumát. Szemléltesse a z komplex számot a Gauss-számsíkon.

$$|z| = |2+5i| = \sqrt{\underbrace{2^2}_{4} + \underbrace{5^2}_{25}} = \underline{\underline{\sqrt{29}}}$$

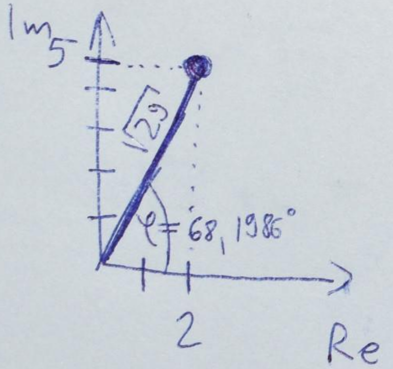
$$\arg(z) = \arg(2+5i) = \varphi$$

$$z = \underbrace{|z|}_{\sqrt{29}} \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = 2 + 5i$$

$$\cos\varphi = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{2}{\sqrt{29}} \qquad \sin\varphi = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$\arg(z) = \varphi \approx \underline{\underline{68,1986^\circ}}$$

Szemléltetés Gauss-számsíkon:



7. feladat

Határozza meg a következő komplex számok trigonometrikus alakját.

(a) $1+i$

(b) $-\sqrt{3}+i$

(c) $\frac{9}{2}-\frac{9\sqrt{3}}{2}i$

(d) $-\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{\sqrt{14}}{2}i$

(e) $4i$

(f) i

(g) 10

(a) $z = 1+i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$r = |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\cos\varphi = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{Im(z)\geq 0} \varphi = 45^\circ$

$1+i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\cdot\sin 45^\circ)$

(b) $z = -\sqrt{3}+i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\varphi = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{Im(z)\geq 0} \varphi = 150^\circ$

$-\sqrt{3}+i = 2\cdot(\cos 150^\circ + i\cdot\sin 150^\circ)$

7. feladat

Határozza meg a következő komplex számok trigonometrikus alakját.

(a) $1+i$

(b) $-\sqrt{3}+i$

(c) $\frac{9}{2}-\frac{9\sqrt{3}}{2}i$

(d) $-\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{\sqrt{14}}{2}i$

(e) $4i$

(f) i

(g) 10

(e) $z=4i=r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$

$r=|z|=\sqrt{4^2}=4$

$\cos\varphi=\frac{Re(z)}{|z|}=\frac{0}{4}=0 \xrightarrow{Im(z)\geq 0} \varphi=90°$

$4i=4(\cos 90°+i\sin 90°)$

(g) $z=10=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$r=|z|=\sqrt{10^2}=10$

$\cos\varphi=\frac{a}{|z|}=\frac{10}{10}=1 \xrightarrow{Im(z)\geq 0} \varphi=0°$

$10=1\cdot(\cos 0°+i\sin 0°)$

7. feladat

Határozza meg a következő komplex számok trigonometrikus alakját.

[redacted]

[redacted]

(c) $\dfrac{9}{2} - \dfrac{9\sqrt{3}}{2}i$

(d) $-\dfrac{\sqrt{14}}{2} - \dfrac{\sqrt{14}}{2}i$

[redacted]

(f) i

[redacted]

Tétel HF

Legyen $z, w \in \mathbb{C}$ nemnulla komplex számok:
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$,
és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor
$zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$;

$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))$, ha $w \neq 0$;

$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

A szögek összeadódnak, kivonódnak, szorzódnak. Az argumentumot ezek után redukcióval kapjuk!

8. feladat

Végezze el a következő műveleteket a trigonometrikus alak felhasználásával.

(a) $\left(\frac{9}{2}-\frac{9\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{\sqrt{14}}{2}i\right)$

(b) $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i\right)$

(c) $\dfrac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i}$

(d) $\left(\frac{5\sqrt{3}}{12}-\frac{5}{12}i\right)^{10}$

(e) $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}i\right)^{15}$

(f) $\left(\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)^{23}$

(g) $(1+i)^8\cdot\left(5\sqrt{3}-5i\right)^3$

(h) $\left(\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i}\right)^{12}$

(i) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$

(a)

$$\left(\frac{9}{2}-\frac{9\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{\sqrt{14}}{2}i\right)=$$

$$r=|z|=\sqrt{\frac{81}{4}+\frac{81\cdot 3}{4}}=9$$

$$\cos\varphi=\frac{9}{2\cdot 9}=\frac{1}{2}\xrightarrow{\operatorname{Im}(z)<0}\varphi'=60^\circ,\quad \varphi=\underbrace{360}_{2\pi}-\varphi'=300^\circ$$

$$r=|z|=\sqrt{\frac{14}{4}+\frac{14}{4}}=\sqrt{7}$$

$$\cos\varphi=\frac{-\sqrt{14}}{2\cdot\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\xrightarrow{\operatorname{Im}(z)<0}\varphi'=135^\circ,\quad \varphi=\underbrace{360}_{2\pi}-\varphi'=225^\circ$$

$$=\left(9\cdot(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)\right)\cdot\left(\sqrt{7}(\cos 225^\circ+i\sin 225^\circ)\right)=$$

$$=9\cdot\sqrt{7}\left(\cos\underbrace{(300+225)^\circ}_{525^\circ\xrightarrow{-360^\circ}165^\circ}+i\sin(300+225)^\circ\right)=$$

$$=9\cdot\sqrt{7}\left(\cos 165^\circ+i\sin 165^\circ\right)$$

8. feladat

Végezze el a következő műveleteket a trigonometrikus alak felhasználásával.

(a) $\left(\frac{9}{2}-\frac{9\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{\sqrt{14}}{2}i\right)$

(b) $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i\right)$

(c) $\dfrac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i}$

(d) $\left(\frac{5\sqrt{3}}{12}-\frac{5}{12}i\right)^{10}$

(e) $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}i\right)^{15}$

(f) $\left(\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)^{23}$

(g) $(1+i)^8\cdot\left(5\sqrt{3}-5i\right)^3$

(h) $\left(\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i}\right)^{12}$

(i) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$

(d)

$$\Bigg(\underbrace{\frac{5\cdot\sqrt{3}}{12}-\frac{5}{12}i}\Bigg)^{10}=$$

$$r=\sqrt{\frac{25\cdot 3+25}{144}}=\sqrt{\frac{100}{144}}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

$$\cos\varphi=\frac{\frac{5\cdot\sqrt{3}}{12}}{\frac{5}{6}}=\frac{5\cdot\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{6}{5}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\downarrow \operatorname{Im}(z)<0$$

$$\varphi'=30^\circ$$

$$\varphi=360-\varphi'=330^\circ$$

$$3300^\circ \xrightarrow{-360^\circ\cdot 9} 60^\circ$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\left(\cos(330\cdot 10)^\circ+i\sin(330\cdot 10)^\circ\right)=$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\cdot\left(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ\right)$$

8. feladat

Végezze el a következő műveleteket a trigonometrikus alak felhasználásával.

(a) $\left(\frac{9}{2}-\frac{9\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{\sqrt{14}}{2}i\right)$

(b) $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i\right)$

(c) $\dfrac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i}$

(d) $\left(\frac{5\sqrt{3}}{12}-\frac{5}{12}i\right)^{10}$

(e) $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}i\right)^{15}$

(f) $\left(\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)^{23}$

(g) $(1+i)^8\cdot\left(5\sqrt{3}-5i\right)^3$

(h) $\left(\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i}\right)^{12}$

(i) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$

(h)

$$\underbrace{\left(\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot i}{-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i}\right)}_{\left(\frac{x}{y}\right)^{12}}^{12}=$$

x: $r=|x|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9\cdot 3}{4}}=\sqrt{\frac{36}{4}}=\sqrt{9}=3$

$$\cos\varphi=\frac{Re(x)}{|x|}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2}\xrightarrow{Im(x)\geq 0}\varphi=60^\circ$$

y: $r=|y|=\sqrt{\frac{25\cdot 3}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{100}{4}}=\sqrt{25}=5$

$$\cos\varphi=\frac{Re(y)}{|y|}=\frac{-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}}{5}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\xrightarrow{Im(y)\geq 0}\varphi=150^\circ$$

$$=\left(\frac{3}{5}\right)^{12}\cdot\left(\cos(60^\circ-150^\circ)+i\cdot\sin(60^\circ-150^\circ)\right)^{12}=$$

$$=\left(\frac{3}{5}\right)^{12}\cdot\left(\cos(270^\circ\cdot 12)+i\sin(270^\circ\cdot 12)\right)\underset{270^\circ\cdot 12=360^\circ\cdot 9}{=}\left(\frac{3}{5}\right)^{12}\cdot\left(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ\right)$$

8. feladat

Végezze el a következő műveleteket a trigonometrikus alak felhasználásával.

(a) $\cancel{\left(\frac{9}{2}-\frac{9\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{\sqrt{14}}{2}i\right)}$

(b) $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i\right)$

(c) $\dfrac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i}$

(d) $\cancel{\left(\frac{5\sqrt{3}}{12}-\frac{5}{12}i\right)^{10}}$

(e) $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}i\right)^{15}$

(f) $\left(\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)^{23}$

(g) $(1+i)^8\cdot\left(5\sqrt{3}-5i\right)^3$

(h) $\cancel{\left(\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i}\right)^{12}}$

(i) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$

Házi feladat

Tétel

Legyen $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor a z n-edik gyökei azok a w-k, amikre $w^n = z$:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1.$

9. feladat

Végezze el a következő gyökvonásokat a komplex számok halmazán.

(a) -60 második gyöke

(b) -60 harmadik gyöke

(c) $1-\sqrt{3}i$ hatodik gyöke

(d) $-7\sqrt{3}+7i$ ötödik gyöke

(e) $-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i$ nyolcadik gyöke

(f) $-6\sqrt{3}+6i$ második gyöke

(g) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8}{(1+i)^5}$ hetedik gyöke

(b) -60 harmadik gyöke

$n=3$ $\quad r=60$

$k=0,1,2$ $\quad \cos\varphi=-1 \xrightarrow{\operatorname{Im}(z)\geq 0} \varphi=180^\circ$

$$w_k=\sqrt[3]{60}\cdot\left(\cos\left(\frac{180+2k\cdot 180}{3}\right)^\circ+i\sin\left(\frac{180+2k\cdot180}{3}\right)^\circ\right)$$

$k=0,1,2$

$$w_0=\sqrt[3]{60}\cdot(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$$

$$w_1=\sqrt[3]{60}\cdot(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)$$

$$w_2=\sqrt[3]{60}\cdot(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)$$

(e) $-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i$ nyolcadik gyöke 5/9. feladat

$n = 8$

$k = 0, 1, \ldots, 7$

$$r = \sqrt{\frac{49+49}{4}} = \sqrt{\frac{98}{4}} = \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{-\frac{7}{2}}{\frac{7}{\sqrt{2}}} = -\frac{7}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{7} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Big\downarrow \operatorname{Im}(z) \geq 0$$

$$\varphi = 135^\circ$$

$$w_k = \sqrt[8]{\frac{49}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{135+2\cdot 180\cdot k}{8}\right) + i\sin\left(\frac{135}{8}+45k\right)^\circ\right)$$

$$w_0 = \sqrt[8]{\frac{49}{2}}\left(\cos\left(\frac{135}{8}\right)^\circ + i\sin\left(\frac{135}{8}\right)^\circ\right)$$

$$w_1 = \sqrt[8]{\frac{49}{2}}\left(\cos\left(\frac{495}{8}\right)^\circ + i\sin\left(\frac{495}{8}\right)^\circ\right)$$

$$w_2 = \sqrt[8]{\frac{49}{2}}\left(\cos\left(\frac{855}{8}\right)^\circ + i\sin\left(\frac{855}{8}\right)^\circ\right)$$

$$w_3 = \sqrt[8]{\frac{49}{2}}\left(\cos\left(\frac{1215}{8}\right)^\circ + i\sin\left(\frac{1215}{8}\right)^\circ\right)$$

$$w_4 = \sqrt[8]{\frac{49}{2}}\left(\cos\left(\frac{1575}{8}\right)^\circ + i\sin\left(\frac{1575}{8}\right)^\circ\right)$$

$$w_5 = \sqrt[8]{\frac{49}{2}}\left(\cos\left(\frac{1935}{8}\right)^\circ + i\sin\left(\frac{1935}{8}\right)^\circ\right)$$

$$w_6 = \sqrt[8]{\frac{49}{2}}\left(\cos\left(\frac{2295}{8}\right)^\circ + i\sin\left(\frac{2295}{8}\right)^\circ\right)$$

$$w_7 = \sqrt[8]{\frac{49}{2}}\left(\cos\left(\frac{2655}{8}\right)^\circ + i\sin\left(\frac{2655}{8}\right)^\circ\right)$$

9. feladat

Végezze el a következő gyökvonásokat a komplex számok halmazán.

(a) -60 második gyöke

[redacted]

(c) $1 - \sqrt{3}i$ hatodik gyöke

(d) $-7\sqrt{3} + 7i$ ötödik gyöke

[redacted]

(f) $-6\sqrt{3} + 6i$ második gyöke

(g) $\dfrac{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8}{(1+i)^5}$ hetedik gyöke

10. feladat

A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki z értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan w komplex számot trigonometrikus alakban, melyekre $w^3 = z$, ahol

$$z = \frac{\left(2+2\sqrt{3}i\right)^{10}}{(-1+i)^{83}}.$$

11. feladat

Írjuk fel algebrai alakban a $z = \dfrac{(1+i)^8}{(1-\sqrt{3}i)^6}$ komplex számot.

$$z = \frac{(1+i)^8}{(1-\sqrt{3}\cdot i)^6} = \frac{(r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2))^8}{(r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2))^6} =$$

$$r_1 = |1+i| = \sqrt{2} \qquad \cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\operatorname{Im}(r_1)\geq 0} \varphi_1 = 45^\circ$$

$$r_2 = |1-\sqrt{3}\,i| = 2 \qquad \cos\varphi_2 = \frac{1}{2} \xrightarrow{\operatorname{Im}(r_2)<0} \varphi_2' = 60^\circ$$

$$\varphi_2 = 300^\circ$$

$$= \frac{(\sqrt{2}\cdot(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ))^8}{(2\cdot(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ))^6} = \frac{\sqrt{2}^8\cdot(\cos(\overbrace{45^\circ\cdot 8}^{360^\circ\to 0^\circ}) + i\sin(45^\circ\cdot 8))}{2^6\cdot(\cos(\underbrace{300^\circ\cdot 6}_{1800^\circ\to 0^\circ}) + i\sin(300^\circ\cdot 6))} =$$

$$= \frac{2^4}{2^6}\frac{\cdot(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)}{(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)} = 2^{4-6}(\cos(0^\circ-0^\circ) + i\sin(0^\circ-0^\circ)) =$$

$$= 2^{-2}(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ) = \frac{1}{2^2}(1+0\cdot i) = \frac{1}{4}$$