3. hét, 2024. február 27.

Analízis 2A Előadás

Tartalom

a) Monotonitás

b) Szélsőértékek

c) Konvexitás

MONOTONITÁS

Emlékeztető

Monoton növekedő függvények

Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény monoton (szigorúan monoton) növekedő, ha minden $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \le f(x_2)$ $\big(f(x_1) < f(x_2)\big)$.

Monoton csökkenés hasonlóan.

Jelölések: $(\nearrow, \uparrow, \searrow, \downarrow)$.

Vegyük észre: nehéz ellenőrizni a monotonitást a definíció alapján.

Pontbeli derivált: A függvényről lokális információt tartalmaz, belőle lokális tulajdonságokra következtethetünk.

Példák a pontbeli derivált alkalmazására:

a) ha $f \in D\{a\}$, akkor $f \in C\{a\}$

b) ha $f \in D\{a\}$, akkor a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy $f'(a) = 0$.

Derivált függvény: Ha I nyílt intervallum, és $f \in D(I)$, akkor f' segítségével az f függvénynek a teljes intervallumon való viselkedésére következtethetünk.

Érdemes f'-t az f transzformációjának tekinteni.

Tétel

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in D(I)$.

Ekkor

$$f \nearrow \qquad \iff \qquad f' \geq 0\,.$$

Megjegyzés: az $f' \geq 0$ feltétel azt jelenti, hogy minden $x \in I$ pontban $f'(x) \geq 0$, aminek geometriai interpretációja az, hogy az érintő meredeksége minden pontban nem negatív.

Bizonyítás

$\Longrightarrow$ Legyen $x \in I$. Ekkor tetszőleges

a) $y \in I,\ y > x$ esetén $f(y) \geq f(x)$, tehát $\Delta_x f(y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0\,,$

a) $y \in I,\ y < x$ esetén $f(y) \leq f(x)$, tehát $\Delta_x f(y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0\,.$

Következésképpen

$$\Delta_x f(y) \geq 0 \quad (y \in I) \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = \lim_{y \to x} \Delta_x f(y) \geq 0\,.$$

$\Longleftarrow$ Indirekt tegyük fel, hogy f nem monotonon növekedő.

Ekkor $\exists\ x, y \in I,\ y > x$, amelyre $f(y) < f(x)$.

A Lagrange-féle középérték-tétel feltételei teljesülnek az $[x, y] \subset I$ intervallumon.

Következésképpen $\exists\, \xi \in (x, y)$, hogy

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < 0 \qquad \text{Ellentmondás!}$$

Megjegyzés: hasonlóan igazolható, hogy $f \in D(I)$ esetén $f \searrow \iff f' \geq 0$.

Vigyázat: A tétel intervallumon érvényes.

Példa: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, de f nem monoton csökenő, $f(1) = 1 > -1 = f(-1)$.

Kiterjesztés tetszőleges intervallumra

Állítás

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ha $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $f_{|(a,b)} \nearrow$ és $f \in C\{a\}$, akkor $f \nearrow$.

Igazolás

Elég megmutatni, hogy $f(a) \leq f(x)$ $(a < x < b)$.

Legyen $a < x < b$, és $(x_n) : \mathbb{N} \to (a, x)$, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Egyrészt $f \in C\{a\}$ miatt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$, másrészt $f_{|(a,b)} \nearrow$ miatt $f(x_n) \leq f(x)$. Következésképpen $f(a) \leq f(x)$.

Megjegyzés: a többi eset ($\uparrow$, $\searrow$, $\downarrow$) hasonlóan igazolható.

Következmény

Legyen $f \in C[a, b]$, $f \in D(a, b)$.

Ekkor

$$f \nearrow \quad \iff \quad f'(x) \geq 0 \quad (x \in (a, b)) \,.$$

A szigorú monotonitás esete

Tétel

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum.

Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in D(I)$.

Ekkor

$$f' > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f \uparrow .$$

(Hasonlóan: $f' < 0 \quad \Longrightarrow \quad f \downarrow$.)

Megjegyzés: Az állítás fordítottja nem igaz. Az $f(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény szigorúan monoton növekedő, de $f'(0) = 0$.

Bizonyítás

Indirekt tegyük fel, hogy $\exists\ x, y \in I$, $y > x$, amelyre $f(y) \le f(x)$. Ekkor a Lagrange-tétel szerint van olyan $\xi \in (x, y)$,

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \le 0 \qquad \text{Ellentmondás!}$$

Az eddigiek alapján könnyű meggondolni, hogy igaz az alábbi állítás.

Állítás

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum.

Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in D(I)$.

Ekkor

$$f \uparrow \qquad \Longleftrightarrow \qquad f' \ge 0, \text{ és } \nexists\ (a, b) \subset I, \text{ hogy } f'_{|(a,b)} \equiv 0 .$$

Példa a monotonitás vizsgálatára

Legyen $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \ (x \in \mathbb{R})$.
$f \in D$, és $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$.
$f'(x) = 0 \iff x = -1$ v. $x = 2$. Ekkor

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	szig. lok. max.	$\downarrow$	szig. lok. min.	$\uparrow$

Az előbbi példa alapján bevezetjük az előjelváltás fogalmát.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban $(-,+)$ (szóban: mínuszból pluszba) előjelet vált, ha $f(a) = 0$, és van olyan $\delta > 0$, hogy

$$f(x) < 0 \ \ (a - \delta < x < a)\,, \qquad f(x) > 0 \ \ (a < x < a + \delta)\,.$$

A $(+,-)$ jelváltás értelemszerűen definiálható.

Példa: Az $f(x) = x$ függvénynek $(-,+)$ jelváltása van a 0 pontban.

Emlékeztető: $f \in D\{a\}$ esetén $f'(a) = 0$ a szélsőérték létezésének szükséges, de nem elégséges feltétel.

Tétel (A szélsőérték létezésének elsőrendű elégséges feltétele)

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy $\exists\ \delta > 0$, amelyre $f \in D\big((a-\delta, a+\delta)\big)$ és f' előjelet vált a-ban.

Ekkor f-nek szigorú lokális szélsőértéke van az a-ban.

$(-,+)$ jeváltás esetén minimum, $(+,-)$ jelváltás esetén pedig maximum.

Bizonyítás

Elég a $(+,-)$ jelváltás esetét bizonyítani.

A feltételekből következik, hogy $\exists \varepsilon > 0$, hogy

a) $f'(x) > 0$ $(a-\varepsilon, a)$, és $f \in C\{a\}$, és így $f_{\big|(a-\varepsilon,a]} \uparrow$,

b) $f'(x) < 0$ $(a, a+\varepsilon)$, és $f \in C\{a\}$ és így $f_{\big|[a,a+\varepsilon)} \downarrow$,

Következésképpen $f(a) > f(x)\ \ \forall\ \ x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\}$. $\square$

Példa: ld. az előző példát.

Megjegyzés: A jelváltás nem szükséges feltétel.

Példa:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{2}x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Tétel (Másodrendű elégséges feltétel a lokális szélsőértékekre)

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.

Tegyük fel, hogy

$$a)\ \ f \in D^2\{a\}\,, \qquad b)\ f'(a) = 0 \qquad \text{és} \qquad f''(a) \neq 0\,.$$

Ekkor az a pont szigorú lokális szélsőértékhelye az f függvénynek.

$f''(a) > 0$ esetén minimum, $f''(a) < 0$ esetén maximum van.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy $f''(a) > 0$. Mivel

$$0 < f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - 0}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{x - a},$$

ezért

az a pontnak van olyan bal oldali környezete, ahol $f' < 0$,
és
van olyan jobb oldali környezete, ahol $f' > 0$.

Tehát f'-nek az a pontban $(-,+)$ előjelváltása van.

Ez az elsőrendű elégséges feltétel alapján azt jelenti, hogy az a pont az f függvénynek szigorú lokális minimumhelye.

Az állítás hasonlóan igazolható akkor, ha $f''(a) < 0$. $\square$

Megjegyzések

- **a)** A másodrendű elégséges feltétel bizonyításában az elsőrendű elégséges feltételt alkalmaztuk. Következésképpen, az elsőrendű feltétel gyengébb feltétel (pl. nem kell kétszeri differenciálhatóság), mint a másodrendű. Másrészt viszont sok esetben "kényelmesebb" alkalmazni a másodrendű feltételt.
- **b)** A másodrendű feltétel még kétszer differenciálható függvények esetében sem szükséges: $f(x) = x^4$ $(x \in \mathbb{R})$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, de a 0-ban szigorú abszolút minimum van.
- **c)** Az $f''(a) = 0$ esetben további vizsgálatokra van szükség: $f(x) = x^3$ esetében nincs szélsőérték a 0-ban, de mint láttuk az $f(x) = x^4$ esetben igen.
- **d)** A tételnek létezik, a magasabbrendű deriváltakra vonatkozó kiterjesztése.

ABSZOLÚT SZÉLSŐÉRTÉKEK

A derivált alapvetően a lokális szélsőértékhelyek megkeresére alkalmas, de mivel a globális szélsőértékhelyek egyben lokálisak is, ezért az eddigi eredményeinket alkalmazhatjuk abszolút szélsőérték feladatokban is.

Hol lehetnek az f függvény abszolút szélsőértékhelyei, ha vannak egyáltalán?

Az alábbi halmaz elemei között kell lenniük:

$$H = \{x \in \mathcal{D}_f \, : \, f \notin D\{x\}, \text{vagy } x \in D\{x\} \text{ és } f'(x) = 0\} \, .$$

H elemeit kritikus pontoknak nevezzük.

Gyakori eset: $f \in C[a,b]$ $(a,b \in \mathbb{R},\ a < b)$.

A Weierstrass-tétel szerint $\exists\ \max f,\ \min f$.

Ha $f \in D(a,b)$, akkor ebben az esetben a kritikus pontok a stacionárius pontok és a végpontok.

A szélsőértékhely lehet az intervallum végpontja, vagy belső pont.

Ha belső pont, akkor ott a derivált 0.

A függvényértékek összehasonlításával válszthatjuk ki az abszolút szélsőérték helyeket.

Példa Keressük meg az $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ abszolút szélsőérték helyeit a $[0,3]$ intervallumon.

$f \in C[0,3]$, és $f \in D(0,3)$.

Láttuk: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \iff x = -1$ v. $x = 2$.

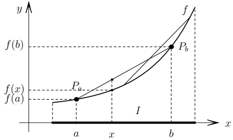
Következésképpen a kritikus pontok: 0, 3 (a végpontok), és 2.

$f(0) = 1,\ f(3) = -8,\ f(2) = -19$. Maximum 0-ban (végpont), minimum 2-ben.

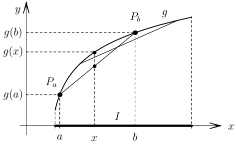
Konvex és konkáv függvények

Az Analízis I. kurzusban (l. a 12. és a 13. ea) a szemléletre támaszkodva vezettük be ezeket a fogalmakat, és a definíció alapján beláttuk néhány függvény szóban forgó tulajdonságait.

Szemléletesen:



f **konvex** ***I*-n**



f **konkáv** ***I*-n**

Ha f konvex (konkáv), akkor $\forall\ a, b \in I,\ a < b$ esetén f grafikonjának az (a, b) intervallumhoz tartozó része a P_a és P_b pontokat összekötő húr alatt (felett) van. Ezek egyenlete:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\,, \quad \text{vagy} \quad y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b)\,.$$

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény konvex az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha

$$\forall\, a, b \in I,\; a < b \quad \text{esetén} \quad f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad \big(\forall\, x \in (a, b)\big)\,.$$

Ha a fenti egyenlőtlenségben $<$ teljesül, akkor f-et az I-n szigorúan konvexnek nevezzük.

$\geq$ esetén konkáv, $>$ esetében pedig szigorúan konkáv függvényről beszélünk.

Megjegyzések

a) f konkáv I-n $\iff$ $-f$ konvex I-n.

b) Az abs függvény konvex, de nem szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en.

c) Az $f(x) := cx + d$ $(x \in \mathbb{R},\ c, d \in \mathbb{R})$ függvény egyszerre konvex és konkáv is $\mathbb{R}$-en, de nem szigorú értelemben.

d) A definíció alapján a konvexitás-konkávitás fogalma szemléletes, de vizsgálata általában nem egyszerű feladat.

A definíció helyett a differenciálszámítás segítségével jól használható módszert adunk a konvexitás vizsgálatához.

Az alkalmazások szempontjából érdemes a konvexitást az alábbi formában is megadni.

Tétel

Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha

$$\forall\, a, b \in I,\; a < b \text{ és } \forall\, \lambda \in (0, 1) \quad \text{esetén} \quad f\big(\lambda a + (1 - \lambda) b\big) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b)\,.$$

Bizonyítás

Volt Analízis I. előadáson.

A KONVEXITÁS KAPCSOLATA A DERIVÁLTTAL

Szemléletesen mi várható?

Tétel

Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és $f \in D(I)$.

Ekkor

$$f \text{ konvex az } I \text{ intervallumon} \iff f' \nearrow \text{ az } I\text{-n}.$$

Megjegyzés: szigorúan konvex esetben $f' \nearrow$ helyett $f' \uparrow$ áll. Konkáv esetben értelemszerűen $f' \searrow$ és szigorúan konkáv esetben pedig $f' \downarrow$.

Bizonyítás

$\Longrightarrow$ Legyen $u, v \in I$, $u < v$ tetszőleges és $x \in (u, v)$ is tetszőleges.

Tegyük fel, hogy f konvex az I-n. Ekkor

$$f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u)$$

és

$$f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - v) + f(v).$$

Egyszerű átrendezésekkel azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(x) - f(v)}{x - v}.$$

Vegyük itt az $x \to u$, illetve az $x \to v$ határátmenetet:

$$f'(u) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq f'(v).$$

f' tehát monoton növekedő az I-n.

Bizonyítás (folyt.)

$\Longleftarrow$ Tegyük fel, hogy f' monoton növekedő az I-n.

Legyen $u, v \in I$, $u < v$ tetszőleges és $x \in (u, v)$ is tetszőleges.

Ekkor a Lagrange-féle középérték-tétel szerint $\exists\, \xi_1 \in (u, x)$ és $\exists\, \xi_2 \in (x, v)$, amelyre

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \quad \text{és} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(v) - f(x)}{v - x}$$

Mivel $f' \nearrow$ az I-n, ezért $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, vagyis

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(v) - f(x)}{v - x}\,.$$

Ezt átrendezve azt kapjuk, hogy

$$f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u)\,.$$

Ez azt jelenti, hogy az f függvény konvex az I-n. $\square$

A monotonitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó tétel alkalmazásával kaphatjuk az alábbi másodrendű feltételt.

Vigyázat: itt kétszeres differenciálhatóságot teszünk fel.

Tétel

Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és $f \in D^2(I)$. Ekkor

i)

$$\begin{array}{lcl} f \text{ konvex } I\text{-n} & \Longleftrightarrow & f'' \geq 0 \quad I\text{-n}, \\ f \text{ konkáv } I\text{-n} & \Longleftrightarrow & f'' \leq 0 \quad I\text{-n}. \end{array}$$

ii)

$$\begin{array}{lcl} f'' > 0 \text{ az } I\text{-n} & \Longrightarrow & f \text{ szigorúan konvex az } I\text{-n}. \\ f'' < 0 \text{ az } I\text{-n} & \Longrightarrow & f \text{ szigorúan konkáv az } I\text{-n}. \end{array}$$

Inflexiós pont

Definíció

Legyen I nyílt intervallum, $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathcal{D}_f$.

Azt mondjuk, hogy az $a \in I$ pont az f függvénynek inflexiós pontja, ha $\exists\ \delta > 0$, $k_\delta(a) \subset I$ olyan, hogy

f konvex az $(a - \delta, a]$ intervallumon és konkáv az $[a, a + \delta)$-n intervallumon,

vagy fordítva.

Példa: Az $f(x) = x^3$, $\sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényeknek az $a = 0$ pont inflexiós pontjuk.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kétszer folytonosan differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, ha $\exists\ \delta > 0$ olyan, hogy $f \in D^2\big(k_\delta(a)\big)$, és $f'' \in C\{a\}$.

Jelölés: $f \in C^2\{a\}$.

Tétel

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.

Ha $f \in C^2\{a\}$ és f-nek az a pontban inflexiója van, akkor $f''(a) = 0$.

Bizonyítás

Indirekt. Ha például $f''(a) > 0$ akkor a folytonosság miatt $\exists\ \delta > 0$, amelyre $f''(x) > 0$ $\forall\ x \in k_\delta(a)$. Ez azt jelenti, hogy f konvex az a pont $k_\delta(a)$ környezetében, így nem válthat konvexitást az -ban. $\square$