Diszkrét matematika I.

3. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagygabor@inf.elte.hu
Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2021. tavasz

Relációk tulajdonságai

Példa

Relációk: $=$, $<$, $\leq$, $|$, $\subseteq$, $T = \{(x, y) : \; x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < 1\}$.

Definíció

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

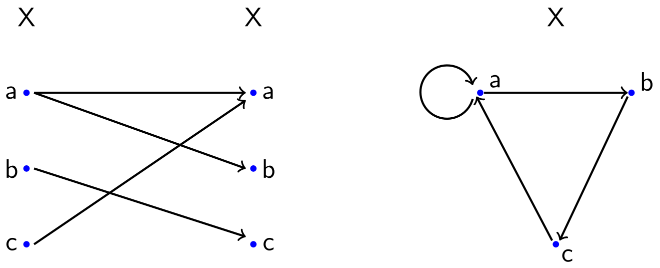
1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;($=$, $<$, $\leq$, $|$, $\subseteq$)
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$; ($=$, T)
3. R antiszimmetrikus, ha$\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;($=$, $\leq$, $\subseteq$)
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet; ($<$)
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$; ($=$, $\leq$, $|$, $\subseteq$, T)
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$; ($<$)
7. R trichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül; ($<$)
8. R dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén xRy vagy yRx (esetleg mindkettő). ($\leq$)

Relációk tulajdonságai

A reflexív, trichotóm, dichotóm tulajdonságok nem csak a relációtól függnek, hanem az alaphalmaztól is:

Az $\{(x, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ mint $\mathbb{R}$-en értelmezett reláció reflexív, de mint $\mathbb{C}$-n értelmezett reláció nem reflexív.

Példa



tranzitív	X	szigorúan antiszimmetrikus	X	trichotóm	X
szimmetrikus	X	reflexív	X	dichotóm	X
antiszimmetrikus	✓	irreflexív	X		

Ekvivalenciareláció, osztályozások

Definíció

Legyen X egy halmaz, R reláció X-en. Az R relációt **ekvivalenciarelációnak** nevezzük, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Példa

1. $=$; 2. $z \sim w$, ha $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$.

Definíció

Az X részhalmazainak egy $\mathcal{O}$ rendszerét az X **osztályozásának** nevezzük, ha $\mathcal{O}$ páronként diszjunkt, nem-üres halmazokból álló halmazrendszer és $\cup\mathcal{O} = X$. $x \in O \in \mathcal{O}$ esetén O-t az x **osztályának** nevezzük.

Példa

1. $\mathbb{R}$ egy osztályozása: $\{\{a\} : a \in \mathbb{R}\}$;
2. $\mathbb{C}$ egy osztályozása: $\{\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = r\} : r \in \mathbb{R}\}$.

Ekvivalenciareláció, osztályozások

Tétel

Valamely X halmazon értelmezett $\sim$ ekvivalenciareláció esetén az $\tilde{x} = \{y \in X : y \sim x\}$ $(x \in X)$ ekvivalenciaosztályok X-nek egy osztályozását adják, ezt az osztályozást $X/\sim$ -mal jelöljük.

Bizonyítás

Legyen $\sim$ egy X-beli ekvivalenciareláció. Azt kell megmutatni, hogy $X/\sim = \{\tilde{x} : x \in X\}$ az X egy osztályozását adja.

- Mivel $\sim$ reflexív, így $x \in \tilde{x} \;\Rightarrow \bigcup\{\tilde{x} : x \in X\} = X$.
- Különböző ekvivalenciaosztályok páronként diszjunktak: tfh. $\tilde{x} \cap \tilde{y} \neq \emptyset$, legyen $z \in \tilde{x} \cap \tilde{y}$. Mivel $z \in \tilde{x}$, ezért $z \sim x$, ahonnan a szimmetria miatt $x \sim z$. Hasonlóan $z \in \tilde{y}$ miatt $z \sim y$. Ha $x_1 \in \tilde{x}$, akkor $x_1 \sim x$, így a tranzitivitás miatt $x_1 \sim x \wedge x \sim z \Rightarrow x_1 \sim z$, továbbá $x_1 \sim z \wedge z \sim y \Rightarrow x_1 \sim y \Rightarrow x_1 \in \tilde{y}$. Hasonlóan $y_1 \in \tilde{y}$-ról megmutatható, hogy $y_1 \in \tilde{x}$, így $\tilde{x} = \tilde{y}$. $\square$

Ekvivalenciareláció, osztályozások

Tétel

Valamely X halmaz bármely $\mathcal{O}$ osztályozása esetén az $R = \bigcup\{Y \times Y : Y \in \mathcal{O}\}$ reláció ekvivalenciareláció .

Bizonyítás

- R reflexív: legyen az $x \in X$ osztálya Y: $x \in Y \in \mathcal{O}$. Ekkor $(x,x) \in Y \times Y \subseteq R$.
- R szimmetrikus: legyen az $(x,y) \in R$. Ekkor $x, y \in Y$ valamely Y osztályra, ezáltal $(y,x) \in Y \times Y \subseteq R$ is teljesül.
- R tranzitív: hasonlóan legyen $(x,y),(y,z) \in R$, ezért $x, y \in Y$, $y, z \in Y'$. Mivel az osztályok páronként diszjunktak, így $Y = Y'$, speciálisan $z \in Y$, azaz $(x,z) \in Y \times Y \subseteq R$.

Ekvivalenciareláció, osztályozások

Az ekvivalenciarelációk illetve osztályozások kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

Példa

- $= \longleftrightarrow \big\{\{a\} : a \in \mathbb{R}\big\}$;
- $z \sim w$, ha $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \longleftrightarrow \big\{\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = r\} : r \in \mathbb{R}\big\}$.

Példa

- A síkon két egyenes legyen $\sim$ szerint relációban, ha párhuzamosak. Ekkor az osztályok az irány fogalmát adják.
- A síkon két szakasz legyen $\sim$ szerint relációban, ha egybevágóak. Ekkor az osztályok a hossz fogalmát adják.
- Két egész számpár esetén $(r, s) \sim (p, q)$ $(s, q \neq 0)$, ha $r \cdot q = p \cdot s$. Ekkor az osztályok a racionális számoknak felelnek meg.

Részbenrendezés, rendezés

Definíció

Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus relációt részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $\leq$, $\preceq$ $\preccurlyeq$, ...)
Ha $\preceq$ egy részbenrendezés X-en, akkor az $(X; \preceq)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük.
Ha $x, y \in X$ esetén $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$, akkor x és y összehasonlítható.
(Ha minden elempár összehasonlítható, akkor a reláció dichotóm.)
Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus és dichotóm relációt rendezésnek nevezzük.

Ha egy részbenrendezés esetén bármely két elem összehasonlítható, akkor az rendezés.

Példa

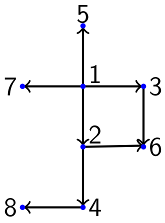
- $\mathbb{R}$-en a $\leq$ reláció rendezés: $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x \leq y$ vagy $y \leq x$.
- $\mathbb{N}$-en az $|$ (osztója) reláció részbenrendezés: $4 \nmid 5$, $5 \nmid 4$.
- Az X halmaz összes részhalmazán a $\subseteq$ reláció részbenrendezés $X = \{a, b, c\}$, $\{a\} \not\subseteq \{b, c\}$, $\{b, c\} \not\subseteq \{a\}$.

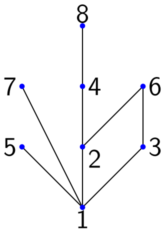
Részbenrendezések Hasse-diagramja

Definíció

Legyen $(X; \preceq)$ egy részbenrendezett halmaz. Ha $x \neq y$-ra $x \preceq y$, de nem létezik szigorúan x és y közé eső elem (vagyis olyan z, amelyre $x \preceq z \wedge z \preceq y \wedge z \neq x \wedge z \neq y$), akkor x megelőzi y-t.

Ha egy részbenrendezett halmaz elemeit pontokkal ábrázoljuk, és csak azon x, y párok esetén rajzolunk irányított élt, amelyre x megelőzi y-t, akkor a részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját kapjuk. Néha irányított élek helyett irányítatlan élt rajzolunk, és a kisebb elem kerül lejjebb.





Legkisebb, legnagyobb, minimális, maximális elem

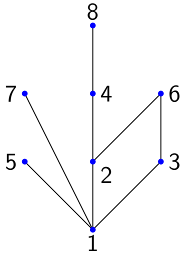
Definíció

Az $(X, \preceq)$ részbenrendezett halmaz
legkisebb eleme: olyan $x \in X : \forall y \in X,\ x \preceq y$;
legnagyobb eleme: olyan $x \in X : \forall y \in X,\ y \preceq x$;
minimális eleme: olyan $x \in X : \neg\exists y \in X, x \neq y,\ y \preceq x$;
maximális eleme: olyan $x \in X : \neg\exists y \in X, x \neq y,\ x \preceq y$.

Példa

Legyen $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$ az oszthatósággal:

legkisebb elem: 1,
legnagyobb elem: nincs,
minimális elem: 1,
maximális elemek: 5, 6, 7, 8.



Legkisebb, legnagyobb, minimális, maximális elem

Megjegyzések

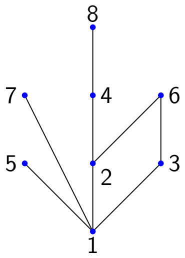
- Minimális és maximális elemből több is lehet.
- Ha létezik legkisebb, illetve legnagyobb elem, akkor az egyértelmű.
- Ha a halmaz rendezett, akkor a minimális, és legkisebb elem, továbbá a maximális és legnagyobb elem egybeesik.
- Ha X-nek létezik egyértelmű minimális, ill. maximális eleme, akkor azt $\min X$, ill. $\max X$ jelöli.

Példa

Legyen $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$ az oszthatósággal:

$\min X = 1$,

$\max X$ nincs.



Kompozíció

Definíció

Legyenek R és S binér relációk. Ekkor az $R \circ S$ kompozíció (összetétel, szorzat) reláció:

$$R \circ S = \{(x, y) \mid \exists z : (x, z) \in S, (z, y) \in R\}.$$

Kompozíció esetén a relációkat ,,jobbról-balra írjuk":

Példa

Legyen $R_{\sin} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sin x = y\}$,
$S_{\log} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \log x = y\}$.

Ekkor

$$\begin{aligned} R_{\sin} \circ S_{\log} &= \{(x, y) | \exists z : \log x = z, \sin z = y\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sin \log x = y\}. \end{aligned}$$