4. előadás
Differenciálszámítás 4.

Emlékeztető: Függvénytulajdonságokat a deriválttal jellemezni lehet.

- A monotonitási intervallumok meghatározása.
- Lokális és abszolút szélsőértékek meghatározása.
- A konvexitási és a konkávitási intervallumok, valamint az inflexiós pontok meghatározása.

Az óra anyaga

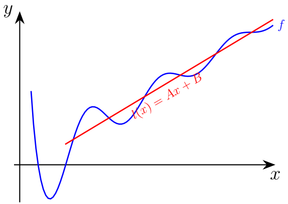
1. Aszimptoták
2. L'Hospital-szabályok
3. Teljes függvényvizsgálat
4. Elemi függvények (definíciók és tulajdonságok)

Az óra anyaga

1. Aszimptoták

Szemléletesen:

ha x „nagy”, akkor $f(x)$ „közel” van valamely egyeneshez.



Definíció. *Legyen* $a \in \mathbb{R}$ *és* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. *A.m.h. f-nek* ***van aszimptotája*** $(+\infty)$***-ben****, ha*

$$\exists \quad l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

elsőfokú függvény, amelyre

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - l(x) \big) = 0.$$

Ekkor az $l(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ egyenes az f ***aszimptotája*** $(+\infty)$***-ben****.*

Megjegyzés. A $(-\infty)$-beli aszimptota def-ja hasonló. ■

Probléma: Hogyan lehet A, B-t meghatározni?

Tétel. *Az $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvénynek akkor és csak akkor van aszimptotája $(+\infty)$-ben, ha léteznek és végesek az alábbi határértékek:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =: A \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - Ax\big) =: B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor az

$$l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben.

Megjegyzés. Hasonló állítás érvényes a $(-\infty)$-beli aszimptoták meghatározására. ■

Bizonyítás.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Tegyük fel, hogy $l(x) = Ax + B$ aszimptota $(+\infty)$-ben, azaz $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - Ax - B\big) = 0$. Ekkor $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ miatt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - Ax - B}{x} = 0 \text{ is igaz. Így}$$

$$\frac{f(x) - Ax - B}{x} = \underbrace{\frac{f(x)}{x} - A}_{\text{ez is } \to 0} - \underbrace{\frac{B}{x}}_{\to 0} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \implies$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = A, \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - Ax\big) = B.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =: A \in \mathbb{R}, \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - Ax\big) =: B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - l(x)\big) = 0$, tehát az $l(x) = Ax + B$ egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben. ■

Példa. *Van-e az*

$$f(x) := \frac{2x^2+3x-5}{4x+1} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{1}{4}\}\right)$$

függvénynek aszimptotája $(+\infty)$*-ben? Ha igen, akkor határozzuk meg!*

Megoldás. Mivel

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2+3x-5}{4x^2+x} = \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{4+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2} =: A \quad \text{és}$$

$$f(x) - Ax = f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{2x^2+3x-5}{4x+1} - \frac{1}{2}x =$$

$$= \frac{4x^2+6x-10-4x^2-x}{2(4x+1)} = \frac{5x-10}{8x+2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{5}{8} =: B,$$

ezért a két határérték létezik és véges $\Longrightarrow$ f-nek van aszimptotája $(+\infty)$-ben, és az az $l(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{8}$ egyenes. ∎

Az óra anyaga

2. L'Hospital-szabályok

Emlékeztetünk arra, hogy függvények határértékével kapcsolatban **kritikus határértékeknek** neveztük azokat az eseteket, amikor az $\overline{\mathbb{R}}$-beli műveletek és a határérték kapcsolatára vonatkozó tételek nem alkalmazhatók. Ilyenek például a következők:

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 0^0.$$

Eddig azt az „elvet" követtük, hogy egy kritikus határértéket igyekeztünk nem kritikus határértékké átalakítani (például *szorzatra bontással*, *gyöktelenítéssel* vagy *leosztással*.) ■

Most egy hatékony módszert ismerünk meg kritikus határértékek kiszámolására.

Tétel: L'Hospital-szabály a $\frac{0}{0}$ esetben.

Legyen $-\infty \leq a < b < +\infty$ *és* $f, g \in D(a,b)$. *T.f.h.*

(a) $\exists \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$,

(b) $g(x) \neq 0$ *és* $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$,

(c) $\exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor

$$\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Bizonyítás. $\boxed{\text{1. eset: } a > -\infty \text{ (véges).}}$

Legyen $A := \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$, azaz

$\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0 :\ \forall\, y \in (a, a+\delta) \subset (a, b) :\ \dfrac{f'(y)}{g'(y)} \in K_\varepsilon(A).$

Azt kell igazolni, hogy

$\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0 :\ \forall\, x \in (a, a+\delta) \subset (a, b) :\ \dfrac{f(x)}{g(x)} \in K_\varepsilon(A).$

Értelmezzük f-et és g-t az a pontban úgy, hogy

$$f(a) := 0 \quad \text{és} \quad g(a) := 0.$$

Ekkor a $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$ feltételből következik, hogy $f, g \in C[a, a+\delta)$.

Legyen most $x \in (a, a+\delta)$ tetszőleges pont. A Cauchy-féle középértéktétel feltételei az f és a g függvényre az $[a, x]$ intervallumon teljesülnek. Így $\exists\, \xi_x \in (a, x)$, amelyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \in K_\varepsilon(A).$$

Ez azt jelenti, hogy a $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g}$ határérték létezik, és $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g} = A$.

$\boxed{\text{2. eset: } a = -\infty.}$ Nem bizonyítjuk. ■

Tétel: L'Hospital-szabály a $\frac{+\infty}{+\infty}$ esetben.

Legyen $-\infty \leq a < b < +\infty$ *és* $f, g \in D(a, b)$. *T.f.h.*

(a) $\exists \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = +\infty$,

(b) $g(x) \neq 0$ *és* $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$,

(c) $\exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor

$$\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \textit{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Bizonyítás. Nélkül. ∎

Megjegyzések.

1° A $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó L'Hospital-szabályt az a pontbeli **jobb oldali határértékre** fogalmaztuk meg. Hasonló állítások érvényesek (az értelemszerű módosításokkal) a **bal oldali határértékre**, valamint a (kétoldali) **határértékre**, sőt a $(+\infty)$-ben vett határértékre is (ekkor $a = +\infty$).

2° A $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{\pm\infty}{-\infty}$ kritikus határértékekre, a bal oldali határértékre, valamint a (kétoldali) határértékre, sőt a $(+\infty)$-ben vett határértékre hasonló állítások érvényesek.

3° A többi típusú kritikus határértéket gyakran vissza lehet vezetni $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határértékre.

4^o Vigyázat! A feltételeket ellenőrizni kell, ui. „hagyja magát alkalmazni” akkor is, ha nem lehet.

Pl., ha $a = 0$ és $f(x) := \cos x,\ g(x) := x + 1\ (x \in \mathbb{R})$, akkor

$$\lim_{0} \frac{f}{g} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x+1} = \frac{1}{0+1} = 1, \quad \text{de}$$

$$\lim_{0} \frac{f'}{g'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{1} = 0 \neq \lim_{0} \frac{f}{g}.$$

5^o Sok esetben a L'Hospital-szabályt többször egymás után kell alkalmazni. Például

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

6° A L'Hospital-szabály nem mindig alkalmazható. Előfordulhat, hogy $\exists \lim\limits_a \frac{f}{g}$, de $\nexists \lim\limits_a \frac{f'}{g'}$. Pl.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}}{x} = 0, \text{ de}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \implies \nexists \lim_0 \frac{f'}{g'}.$$

7° Olyan eset is van, amikor a L'Hospital-szabály többszöri alkalmazásával **mindig** kritikus határértéket kapunk. Például

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Ha még egyszer alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt, akkor a kiinduló kifejezést kapjuk, ugyanakkor

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 1. \blacksquare$$

Példák

1° $\displaystyle \lim_{x\to 0+0} x\cdot\ln x \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$

2° $\displaystyle \lim_{x\to 0+0} x^x \overset{0^0}{=} \lim_{x\to 0+0}\left(e^{\ln x}\right)^x = \lim_{x\to 0+0} e^{x\cdot\ln x} = \lim_{x\to 0+0} e^0 = 1.$

3° $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) \overset{?}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\,\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\,\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x - x\,\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

4° Ha $a > 1$ és $1 \leq n \in \mathbb{N}$, akkor a L'Hospital-szabály n-szeri alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln a)\cdot a^x}{n\cdot x^{n-1}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \dots \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}$$

$$\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln a)^{n-1}\cdot a^x}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln a)^{n}\cdot a^x}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1} = +\infty.$$

Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy *ha* $a > 1$, *akkor* $x \to +\infty$ *esetén az* a^x $(x \in \mathbb{R})$ *függvény gyorsabban tart* $(+\infty)$*-hez, mint* x *bármelyik pozitív kitevőjű hatványa*; és ezt szokás így is jelölni:

$$\boxed{x^n \ll a^x, \quad \text{ha} \ \ x \ \ \text{elég nagy}}.$$

5^o Hasonlóan, ha $1 \leq m, n \in \mathbb{N}$, akkor a L'Hospital-szabály n-szeri alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^n x}{x^m} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n \cdot \ln^{n-1} x}{m \cdot x^m} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \cdots \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{m^n \cdot x^m} = 0,$$

azaz x *bármely pozitív kitevőjű hatványa gyorsabban tart* $(+\infty)$-*hez* $x \to +\infty$ *esetén, mint* $\ln x$ *bármely pozitív kitevőjű hatványa.* Röviden: minden $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\boxed{(\ln x)^n \ll x^m, \quad \text{ha} \;\; x \;\; \text{elég nagy}}. \;\blacksquare$$

Az óra anyaga

3. Teljes függvényvizsgálat

Adott f valós-valós függvény **teljes függvényvizsgálatán** f analitikus és geometriai tulajdonságainak a megállapítását értjük. Ennek során a következőket kell meghatározni:

1^o Kezdeti vizsgálatok. (Deriválhatóság, paritás, periodicitás megállapítása.)

2^o Monotonitási intervallumok.

3^o Lokális és abszolút szélsőértékek.

4^o Konvexitási, konkávitási intervallumok. Inflexiós helyek.

5^o A határértékek a $\mathcal{D}_f' \setminus \mathcal{D}_f$ pontokban.

6^o Aszimptota $(\pm\infty)$-ben.

7^o A függvény grafikonjának felrajzolása.

Példa. *Teljes függvényvizsgálat végzése után ábrázoljuk az*

$$f(x) := e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját (az ún. „Gauss-görbét”).

Megoldás. $f > 0$ $\mathbb{R}$-en, páros $\big($azaz $f(x) = f(-x)$ $(x \in \mathbb{R})\big)$, $f \in D^2(\mathbb{R})$ és

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} \ (x \in \mathbb{R}), \quad f'(x) = 0 \iff x = 0;$$

$$f''(x) = 2\,(2x^2 - 1)e^{-x^2} \ (x \in \mathbb{R}), \quad f''(x) = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A következő táblázat tartalmazza az előjelvizsgálatotokat és azoknak f-re vonatkozó következményeit:

	$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$x > \frac{1}{\sqrt{2}}$
f'	$+$			0	$-$		
f''	$+$	0	$-$			0	$+$
f	$\uparrow$			lok. (absz.) max.	$\downarrow$		
	$\bigcup$	infl. pont	$\bigcap$			infl. pont	$\bigcup$

Mivel $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ és $\mathcal{D}'_f = \overline{\mathbb{R}}$, ezért a függvény **határértékét** a $\mathcal{D}'_f \setminus \mathcal{D}_f = \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R} = \{\pm\infty\}$ helyeken kell megvizsgálni.

$(+\infty)$-ben a határérték:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

$(-\infty)$-ben is 0 a függvény határértéke.

Aszimptota $(+\infty)$-ben. Mivel

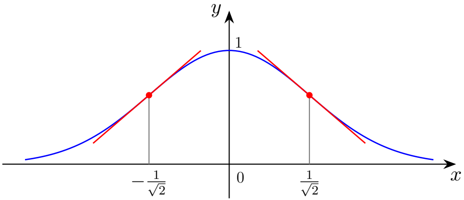
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cdot e^{x^2}}=\frac{1}{+\infty}=0=:A \quad \text{és}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-A\cdot x\big)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0=:B,$$

ezért az $y=A\cdot x+B=0$ egyenletű egyenes (az x-tengely) f aszimptotája $(+\infty)$-ben.

Hasonlóan: $(-\infty)$-ben is ez egyenes f aszimptotája.

A függvény grafikonja:



Megjegyzés. További példák: Teljes függvényvizsgálat ∎

Az óra anyaga

4. Elemi függvények (definíciók és tulajdonságok)

Az Analízis I. kurzusban bevezetett függvények

(l. a 13. előadást):

- az exp és az ln,
- az $\exp_a$ és a $\log_a$,
- az általános hatványfüggvények ($x^\alpha,\ x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$),
- a sin és a cos.

Összefoglalás és kiegészítés

Elemi függvények (definíciók és tulajdonságok)

További függvények:

- Az $\exp_a$ és a $\log_a$ függvények alaki tulajdonságai.
- $\mathrm{tg}\,, \mathrm{ctg}\,.$
- A trigonometrikus függvények alaki tulajdonságai.
- Trigonometrikus függvények inverzei (arkuszfüggvények):
  $\mathrm{arc\,sin}\,, \mathrm{arc\,cos}\,, \mathrm{arc\,tg}\,, \mathrm{arc\,ctg}\,.$
- Hiperbolikus függvények ($\mathrm{sh}\,,\ \mathrm{ch}\,,\ \mathrm{th}\,,\ \mathrm{cth}\,$).
- Hiperbolikus függvények inverzei (areafüggvények):
  $\mathrm{ar\,sh},\ \mathrm{ar\,ch},\ \mathrm{ar\,th},\ \ \mathrm{ar\,cth}.$