

Elsőrendű logika alapjai

Gyakorlat

Logika

2022/2023 2. félév

Elsőrend bevezető

Milyen elemekből állhat egy elsőrendű formula?

Műveleti jelek:	$\wedge, \vee, \supset, \neg$
Kvantorok:	\forall, \exists
Zárójelek:	$(,)$
Individuum változók:	pl.: x, y, z

Egy I interpretáció:

Univerzum:	U	
Predikátumok:	Logikai függvények, $U^n \rightarrow L$	$ P(x) ^I$ - x páros szám, $ Q(x, y) ^I$ - x osztója y
Függvények:	Matematikai függvények, $U^n \rightarrow U$	$ f(x) ^I$ - x rákövetkezője
Konstansok:	$c \in U$	$ \bar{a} ^I - 2, \bar{b} ^I - 3$

Formalizálás

Formalizáljuk a következő állításokat ítéletlogikában:

- "Ha valaki fiatal, akkor kávézik."

$$\begin{aligned} F &\supset K, \text{ ahol} \\ F^I &= \text{"fiatal"} \\ K^I &= \text{"kávézik"} \end{aligned}$$

- "Minden fiatal kávézik."

A ítéletváltozó, ahol $A^I = \text{"Minden fiatal kávézik"}$

- "Van, aki nem kávézik."

B ítéletváltozó, ahol $B^I = \text{"Van, aki nem kávézik."}$

Formalizálás

Formalizáljuk a következő állításokat most elsőrendben:

- "Ha valaki fiatal, akkor kávézik."

$$F(x)^I = \text{"x fiatal"}$$
$$K(x)^I = \text{"x kávézik"}$$

- "Minden fiatal kávézik."

$$\forall x(F(x) \supset K(x))$$

- "Van, aki nem kávézik."

$$\exists x \neg K(x)$$

Formalizálás - Egyfajtájú megközelítés

- 1) Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár.
- 2) Szarvasnak, a szarvasbogárnak kitines a szárnyfedője.
- 3) Egy rovarnak nincsen kitines szárnyfedője vagy bogár.
- 4) Szarvas legjobb barátja bogár.

$U = \{\text{rovarok}\}$

Predikátumok:

$B(x)$ - x bogár

$K(x)$ - x kitines a szárnyfedele

$S(x)$ - x szarvasbogár

Függvények:

$f(x)$ - x legjobb barátja

Konstans: \bar{a} - Szarvas

Formalizált állítások:

1) $\neg \forall x B(x)$

2) $S(\bar{a}) \wedge K(\bar{a})$

3) $\forall x (\neg K(x) \vee B(x))$

4) $B(f(\bar{a}))$

Formalizálás - egy másik univerzummal

- 1) Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár.
- 2) Szarvasnak, a szarvasbogárnak kitines a szárnyfedője.
- 3) Egy rovarnak nincsen kitines szárnyfedője vagy bogár.
- 4) Szarvas legjobb barátja bogár.

Lehetne-e másik univerzummal leírni
ugyanezt? (bővítés/szűkítés)

$U = \{\text{élőlények}\}$

Predikátumok:

$R(x)$ - x rovar

$B(x)$ - x bogár

$K(x)$ - x kitines a szárnyfedele

$S(x)$ - x szarvasbogár

Függvények:

$f(x)$ - x legjobb barátja

Konstans: \bar{a} - Szarvas

Formalizált állítások:

1)

$\forall x (B(x) \supset R(x)) \wedge \neg \forall x (R(x) \supset B(x))$

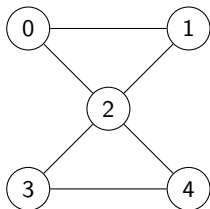
2) $S(\bar{a}) \wedge K(\bar{a})$

3) $\forall x (R(x) \supset (\neg K(x) \vee B(x)))$

4) $B(f(\bar{a}))$

Formalizálás - gráfok

Vegyük a következő gráfot: $G_1 = \langle V_1; E_1 \rangle$:



Ebben a G_1 irányítatlan gráfban:

Univerzum: $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Predikátumszimbólumok:

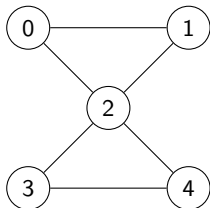
$E(x, y)$ - x és y csúcsok között van él
 $= (x, y)$ - x és y csúcsok megegyeznek

1. Fogalmazzuk meg a következő formulákat leíró állításokat és gondoljuk át az igazságértékük:

1. $\forall x \exists y E(x, y)$
2. $\exists x \forall y E(x, y)$
3. $\forall x \forall y [E(x, y) \supset E(y, x) \wedge \neg = (x, y)]$
4. $\forall x \exists y \exists z [E(x, y) \wedge E(x, z) \supset E(y, z)]$

Formalizálás - gráfok

Vegyük a következő gráfot: $G_1 = \langle V_1; E_1 \rangle$:



Ebben a G_1 irányítatlan gráfban:

Univerzum: $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Predikátumszimbólumok:

$E(x, y)$ - x és y csúcsok között van él
 $= (x, y)$ - x és y csúcsok megegyeznek

2. Készítsünk formulákat a következő állításokból, szükség esetén egészítsük ki az interpretációnkat!

1. Ha két csúcs szomszédos, akkor van köztük él.
2. Ha a "2"-es csúcs és a "3"-as csúcs között van él, akkor ők szomszédosak.
3. Minden csúcs és a szomszádja között él van.

Formalizálás - további gyakorlás

- 1) Minden informatikus tud logikusan gondolkozni.
- 2) Aki tud logikusan gondolkozni, az okos.
- 3) Van olyan, aki okos és nem informatikus.
- 4) Az informatikusok főnöke egy okos informatikus.

Univerzum: {emberek}

Predikátumok:

- $I(x)$ - x informatikus
- $L(x)$ - x tud logikusan gondolkozni
- $O(x)$ - x okos

Függvények:

- $f(x)$ - x főnöke

Formalizált állítások:

- 1) $\forall x(I(x) \supset L(x))$
- 2) $\forall x(L(x) \supset O(x))$
- 3) $\exists x(O(x) \wedge \neg I(x))$
- 4) $\forall x(I(x) \supset O(f(x)) \wedge I(f(x)))$

Formalizálás - Egyfajtájú megközelítés

- 1) Zokni kerti kutya.
- 2) Zokni szomszédjában lakó kutya házban lakik.
- 3) Zokni egy kutya, akinek gazdája Norbi (, aki ember).
- 4) Minden kutyának van gazdája (, aki ember).
- 5) Van olyan kutya, amelyik házban és van amelyik kertben lakik.

Univerzum: {élőlények}

Predikátumok:

- $K(x)$ - x kutya
- $E(x)$ - x ember
- $R(x)$ - x kertben él
- $H(x)$ - x házban él
- $G(x, y)$ - x gazdája y

Konstansok:

- \bar{a} - Zokni
- \bar{b} - Norbi

Függvények:

- $f(x)$: x szomszédja

Formalizált állítások:

- 1) $K(\bar{a}) \wedge R(\bar{a})$
- 2) $K(f(\bar{a})) \wedge H(f(\bar{a}))$
- 3) $K(\bar{a}) \wedge E(\bar{b}) \wedge G(\bar{a}, \bar{b})$
- 4) $\forall x (K(x) \supset \exists y (E(y) \wedge G(x, y)))$
- 5) $\exists x (K(x) \wedge H(x)) \wedge \exists x (K(x) \wedge R(x))$

Formalizálás - Többfajtájú megközelítés

- 1) Zokni kerti kutya.
- 2) Zokni szomszédjában lakó kutya házban lakik.
- 3) Zokni egy kutya, akinek gazdája Norbi (, aki ember).
- 4) Minden kutyának van gazdája (, aki ember).
- 5) Van olyan kutya, amelyik házban és van amelyik kertben lakik.

Univerzum: $\{ \{emberek\} , \{kutyák\} \}$

Predikátumok:

- $K(x : \text{kutya})$ - x kertben él
- $H(x : \text{kutya})$ - x házban él
- $G(x : \text{kutya}, y : \text{ember})$ -
 x gazdája y

Konstansok:

- \bar{a} : kutya - Zokni
- \bar{b} : ember - Norbi

Függvények:

- $f(x : \text{kutya})$: kutya -
 x kutya szomszédja

Formalizált állítások:

- 1) $K(\bar{a})$
- 2) $H(f(\bar{a}))$
- 3) $G(\bar{a}, \bar{b})$
- 4) $\forall x \exists y G(x, y)$
- 5) $\exists x H(x) \wedge \exists x K(x)$

Értéktábla

Felépítése:

szabad változók		prímkomponensek		formula
változókiértékelés		helyettesítési érték		helyettesítési érték

Mit ad meg? Egy formula helyettesítési értékeit a különböző változó kiértékelések mellett, **1 interpretációban**.

Változók

- Változók előfordulása:
 - ▶ kötött: Ha kvantor által kötve van.
 - ▶ szabad: Ha nincs kvantor által kötve.
- Változó típusa:
 - ▶ kötött: Ha minden előfordulása kötött.
 - ▶ szabad: Ha minden előfordulása szabad.
 - ▶ vegyes: Ha van kötött és szabad előfordulása is.

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x, y)) \supset \forall yQ(z, y)$$

▶ x: kötött

- ★ 1. előfordulása: kötött
- ★ 2. előfordulása: kötött

▶ y: vegyes

- ★ 1. előfordulása: szabad
- ★ 2. előfordulása: kötött

▶ z: szabad

- ★ 1. ef.: szabad

Prímkomponensek

Legkisebb részei a formulának, amelyhez "helyes" igazságérték társítható. Ezek egy része atomi formula, másik része kvantált formula.

- $\forall x(P(x) \wedge Q(x, y)) \supset \forall yQ(z, y) \supset P(\bar{a}) \vee Q(w)$

prímkomponensek: $\forall x(P(x) \wedge Q(x, y)), \forall yQ(z, y), P(\bar{a}), Q(w)$

- $\forall z(P(x) \wedge \forall x(Q(x, y) \supset P(z))) \supset \forall yQ(z, y) \supset P(\bar{a})$

prímkomponensek: $\forall z(P(x) \wedge \forall x(Q(x, y) \supset P(x))), \forall yQ(z, y), P(\bar{a})$

- $\forall z(\forall x(P(x) \wedge Q(x, y)) \supset \forall yQ(z, y) \supset P(\bar{a}) \vee Q(\bar{a}))$

prímkomponensek: maga a formula

Kvantált formulák értéke

Univerzálisan kvantált formula - egy tulajdonság az univerzum minden elemére teljesül. pl.: $\forall x P(x)$

Egzisztenciálisan kvantált formula - van olyan elem az univerzumban, amire a tulajdonság teljesül. pl.: $\exists x P(x)$

Legyen $U = \{0, 1, 2\}$ és $|P(x)|^I = \{0, 2\}$

Ekkor

$$|\forall x P(x)|^I = |P(0)|^I \wedge |P(1)|^I \wedge |P(2)|^I = i \wedge h \wedge i = h$$

$$|\exists x P(x)|^I = |P(0)|^I \vee |P(1)|^I \vee |P(2)|^I = i \vee h \vee i = i$$

1. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához: $\forall x \exists y P(x, y) \wedge Q(\bar{a}) \vee P(\bar{a}, z)$

A következő interpretáció alapján:

$U = \{0, 1\}, |P(x, y)|^I - (x < y), |Q(x)|^I - (x == 0), |\bar{a}|^I = 0$

z	$\forall x \exists y P(x, y) \text{ (1)}$	$Q(\bar{a}) \text{ (2)}$	$P(\bar{a}, z) \text{ (3)}$	$1 \wedge 2 \vee 3$
0	h	i	h	h
1	h	i	i	i

$$\begin{aligned}\forall x \exists y P(x, y) &= \exists y P(0, y) \wedge \exists y P(1, y) = \\ (P(0, 0) \vee P(0, 1)) \wedge (P(1, 0) \vee P(1, 1)) &= (h \vee i) \wedge (h \vee h) = h\end{aligned}$$

Szemantikus tulajdonságok

- **Kielégíthető** egy formula, ha van olyan interpretáció és változókiértékelés, ami kielégíti.
Másképp: Van olyan értéktábla és annak sora, ahol igaz a formula.
- **Kielégíthetetlen** egy formula, ha nincs olyan interpretáció és változókiértékelés, ami kielégítené.
Másképp: Minden értéktábla minden sorában hamis a helyettesítési értéke a formulának.
- **Logikai törvény** egy formula, ha minden interpretáció és változókiértékelés kielégíti.
Másképp: Minden értéktábla minden sorában igaz a formula helyettesítési értéke.

1. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához: $\forall x \exists y P(x, y) \wedge Q(\bar{a}) \vee P(\bar{a}, z)$

A következő interpretáció alapján:

$U = \{0, 1\}$, $|P(x, y)|^I = (x < y)$, $|Q(x)|^I = (x == 0)$, $|\bar{a}|^I = 0$

z	$\forall x \exists y P(x, y) \text{ (1)}$	$Q(\bar{a}) \text{ (2)}$	$P(\bar{a}, z) \text{ (3)}$	$1 \wedge 2 \vee 3$
0	h	i	h	h
1	h	i	i	i

Mit tudunk leolvasni a szemantikus tulajdonságokról?

Szemantikus tulajdonságok:

Kielégíthető - az adott interpretációban volt változókiértékelés, ahol igaz.

Nem kielégíthetetlen

Nem logikai törvény - Volt olyan változókiértékelés, ahol hamis.

2. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához:

$$\exists z \exists y (P(z, y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \supset \forall v P(v, \bar{a}) \wedge P(f(x), \bar{b})$$

A következő interpretáció alapján:

$$U = \{1, 2, 3\}, |P(x, y)|^I - x == y, |Q(x)|^I - x \text{ páros,}$$

$$|\bar{a}|^I = 1, |\bar{b}|^I = 3, |f(x)|^I - x \text{ rákövetkezője univerzumon belül}$$

x	$\exists z \exists y (P(z, y) \wedge Q(f(\bar{a})))$ (1)	$\forall v P(v, \bar{a})$ (2)	$P(f(x), \bar{b})$ (3)	$1 \supset (2 \wedge 3)$
1	i			
2	i			
3	i			

$$\exists z \exists y (P(z, y) \wedge Q(f(\bar{a}))) =$$

$$\exists y (P(1, y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee \exists y (P(2, y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee \exists y (P(3, y) \wedge Q(f(\bar{a}))) =$$

$$[(P(1, 1) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(1, 2) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(1, 3) \wedge Q(f(\bar{a})))] \vee$$

$$[(P(2, 1) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(2, 2) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(2, 3) \wedge Q(f(\bar{a})))] \vee$$

$$[(P(3, 1) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(3, 2) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(3, 3) \wedge Q(f(\bar{a})))] = i$$

2. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához:

$$\exists z \exists y (P(z, y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \supset \forall v P(v, \bar{a}) \wedge P(f(x), \bar{b})$$

A következő interpretáció alapján:

$U = \{1, 2, 3\}$, $|P(x, y)|' - x == y$, $|Q(x)|' - x$ páros,

$|\bar{a}|' = 1$, $|\bar{b}|' = 3$, $|f(x)|' - x$ rákövetkezője univerzumon belül

x	$\exists z \exists y (P(z, y) \wedge Q(f(\bar{a})))$ (1)	$\forall v P(v, \bar{a})$ (2)	$P(f(x), \bar{b})$ (3)	$1 \supset (2 \wedge 3)$
1	i	h	h	
2	i	h	i	
3	i	h	h	

$$\forall v P(v, \bar{a}) = P(1, \bar{a}) \wedge P(2, \bar{a}) \wedge P(3, \bar{a}) = i \wedge h \wedge h = h$$

2. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához:

$$\exists z \exists y (P(z, y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \supset \forall v P(v, \bar{a}) \wedge P(f(x), \bar{b})$$

A következő interpretáció alapján:

$U = \{1, 2, 3\}$, $|P(x, y)|^I - x == y$, $|Q(x)|^I - x$ páros,

$|\bar{a}|^I = 1$, $|\bar{b}|^I = 3$, $|f(x)|^I - x$ rákövetkezője univerzumon belül

x	$\exists z \exists y (P(z, y) \wedge Q(f(\bar{a})))$ (1)	$\forall v P(v, \bar{a})$ (2)	$P(f(x), \bar{b})$ (3)	$1 \supset (2 \wedge 3)$
1	i	h	h	h
2	i	h	i	h
3	i	h	h	h

Szemantikus tulajdonságok:

Lehet kielégíthető - az adott interpretációban mindenhol hamis, de lehet másik, ahol van igaz helyettesítés.

Lehet kielégíthetetlen - A többi interpretációban kérdéses

Nem logikai törvény - Volt olyan változókiértékelés, ahol hamis.

3. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához:

$$\exists w \forall y P(f(w, y), \bar{a}) \supset Q(z) \supset P(z, x) \vee P(v, \bar{a})$$

A következő interpretáció alapján:

$U = \{0, 1\}$, $|P(x, y)|' = (x \geq y)$, $|Q(x)|' = (x \geq 0)$, $|\bar{a}|' = 0$, $|f(x, y)|'$ - összeadás univerzumon belül.

z	x	v	\parallel	$\exists w \forall y P(f(w, y), \bar{a})$	$ $	$Q(z)$	$ $	$P(z, x)$	$ $	$P(v, \bar{a})$	\parallel	$1 \supset (2 \supset (3 \vee 4))$
-----	-----	-----	-------------	---	-----	--------	-----	-----------	-----	-----------------	-------------	------------------------------------

3. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához:

$$\exists w \forall y P(f(w, y), \bar{a}) \supset Q(z) \supset P(z, x) \vee P(v, \bar{a})$$

A következő interpretáció alapján:

$U = \{0, 1\}$, $|P(x, y)|' = (x \geq y)$, $|Q(x)|' = (x \geq 0)$, $|\bar{a}|' = 0$, $|f(x, y)|'$ - összeadás univerzumon belül.

z	x	v	$\exists w \forall y P(f(w, y), \bar{a})$	$Q(z)$	$P(z, x)$	$P(v, \bar{a})$	$1 \supset (2 \supset (3 \vee 4))$
0	0	0	i	i	i	i	i
0	0	1	i	i	i	i	i
0	1	0	i	i	h	i	i
1	0	0	i	i	i	i	i
0	1	1	i	i	h	i	i
1	0	1	i	i	i	i	i
1	1	0	i	i	i	i	i
1	1	1	i	i	i	i	i

3. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához:

$$\exists w \forall y P(f(w, y), \bar{a}) \supset Q(z) \supset P(z, x) \vee P(v, \bar{a})$$

A következő interpretáció alapján:

$U = \{0, 1\}$, $|P(x, y)|' = (x \geq y)$, $|Q(x)|' = (x \geq 0)$, $|\bar{a}|' = 0$, $|f(x, y)|'$ - összeadás univerzumon belül.

z	x	v	$\exists w \forall y P(f(w, y), \bar{a})$	$Q(z)$	$P(z, x)$	$P(v, \bar{a})$	$1 \supset (2 \supset (3 \vee 4))$
0	0	0	i	i	i	i	i
0	0	1	i	i	i	i	i
0	1	0	i	i	h	i	i
...
1	1	1	i	i	i	i	i

Szemantikus tulajdonságok:

Kielégíthető - Van olyan interpretáció és változókiértékelés, ahol igaz.

Nem kielégíthetetlen

Lehet logikai törvény - Attól függ, hogy a többi interpretációban milyen helyettesítési értékek vannak.

Változóiban tiszta alak

Egy formula változóiban tiszta, ha egy változó csak szabad változóként, vagy csak 1 kvantor által van kötve.

Az átalakítás a kvantor által kötött változók átnevezésével lehetséges.

Változó átnevezés:

- $\forall x P(x) = \forall y P(y)$
- $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) = \forall y (P(y) \wedge Q(y))$
- $\forall x (P(x) \wedge Q(y)) \neq \forall y (P(y) \wedge Q(y))$
- $\forall x (P(x) \wedge Q(y)) = \forall z (P(z) \wedge Q(y))$

Változóiban tisztává alakítás:

- $\forall x P(x) \supset \forall x Q(x) = \forall x P(x) \supset \forall y Q(y)$
- $\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x) \wedge P(x) = \forall y P(y) \wedge \exists z Q(z) \wedge P(x)$
- $\forall x P(x) \wedge Q(x) = \forall y P(y) \wedge Q(x)$

Tautológia és logikai törvény

Logikai törvény: A formula minden interpretáció és minden változókiértékelés esetén igaz.

Tautológia: A prímkomponensekhez rendelhető összes igazságérték esetén a formula helyettesítési értéke igaz.

Ha valami tautológia, akkor biztos, hogy logikai törvény.

$\forall xP(x) \wedge \forall xR(x) \supset \forall xP(x)$ - **biztos, hogy logikai törvény**

Prímkomponensek: $\forall xP(x)$ és $\forall xR(x)$ legyenek A és B

$\forall xP(x)$	$\forall xR(x)$	$\forall xP(x) \wedge \forall xR(x) \supset \forall xP(x)$
A	B	$(A \wedge B \supset A)$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	i

A tábla alapján leolvasható, hogy tautológia.

Tautológia és logikai törvény

Logikai törvény: A formula minden interpretáció és minden változókiértékelés esetén igaz.

Tautológia: A prímkomponensekhez rendelhető összes igazságérték esetén a formula helyettesítési értéke igaz.

$\forall x(P(x) \wedge R(x)) \supset \forall xP(x)$ - **biztos, hogy logikai törvény**

Prímkomponensek: $\forall x(P(x) \wedge R(x))$ és $\forall xP(x)$ legyenek A és B

$\forall x(P(x) \wedge R(x))$	$\forall xP(x)$	$\forall x(P(x) \wedge R(x)) \supset \forall xP(x)$
A	B	$(A \supset B)$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

A tábla alapján leolvasható, hogy nem tautológia.

Tautológia - Logikai törvény

Nézzük meg, hogy a következő formulák tautológiák-e!

- $P(x, y) \vee \neg Q(x) \supset \exists x Q(x) \vee (\exists x Q(x) \supset P(x, y) \vee \neg Q(x))$
- $P(x, y) \supset \neg Q(x) \wedge Q(x) \supset P(x, y)$
- $(\exists y P(a, y) \supset \neg \forall x Q(x)) \vee \exists z P(a, z)$
- $(\exists y P(a, y) \supset \neg \forall x Q(x)) \vee \exists y P(a, y)$

Egy plusz diasor canvasben elérhető az anyaghoz!