Diszkrét matematika

4. gyakorlat:

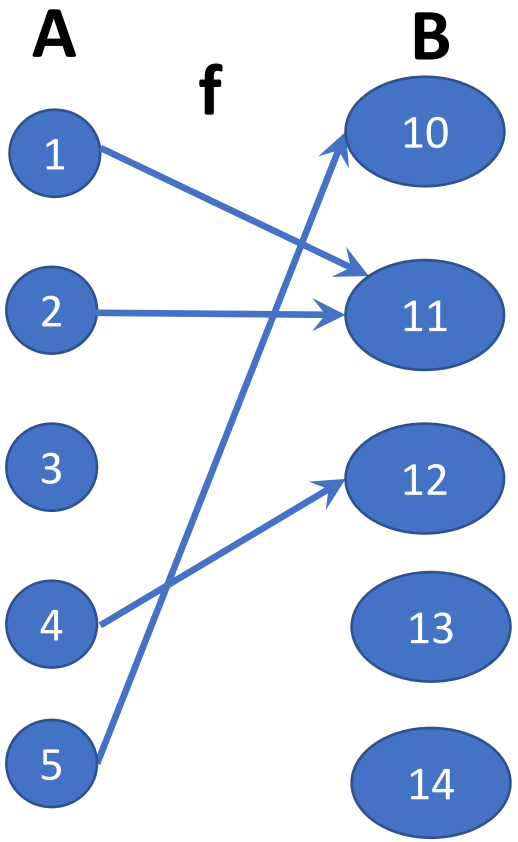
Függvények, részbenrendezés

(A diasort készítette Németh Gábor Árpád, Koch-Gömöri Richárd feladait, Gonda János megoldásait, Nagy Gábor előadás diasorában lévő definíciókat (aki Mérai László előadás diasorát használta fel) is felhasználva)

1. feladat:

Válasszuk ki a következő relációk közül a függvényeket. Adja meg a függvények értelmezési tartományát, értékkészletét. Mely függvény szürjektív, injektív, bijektív?

(a) A={1,2,3,4,5}, B={10,11,12,13,14}, f ⊆ A × B, f={(1,11),(2,11),(4,12),(5,10)}



(1) Értelmezési tartomány: dmn(f)={1,2,4,5}

(2) Értékkészlet: rng(f)={10,11,12}

(3) Nem injektív: (1,11) és (2,11) ∈ f

(4) Nem szürjektív: {10,11,12} ≠{10,11,12,13,14}

(5) Nem bijektív, mert (3) és (4)

Egy $f \subseteq X \times Y$ relációt függvénynek (leképezésnek, transzformációnak, hozzárendelésnek, operátornak) nevezünk, ha $\forall x, y, y' : (x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$. Az $(x, y) \in f$ jelölés helyett ilyenkor az $f(x) = y$ (vagy $f : x \mapsto y$, $f_x = y$) jelölést használjuk. Az y az f függvény x helyen (argumentumban) felvett értéke.

Az $f : X \to Y$ függvény

- injektív, ha $\forall x, x', y : (f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x'$;
- szürjektív, ha $\mathrm{rng}(f) = Y$;
- bijektív, ha injektív és szürjektív.

1. feladat:

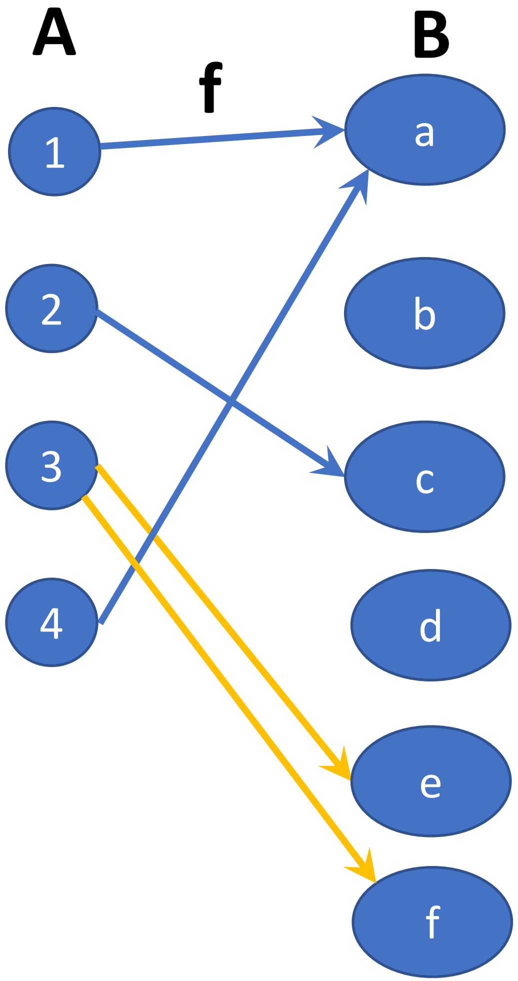
Válasszuk ki a következő relációk közül a függvényeket. Adja meg a függvények értelmezési tartományát, értékkészletét. Mely függvény szürjektív, injektív, bijektív?

(b) A={1,2,3,4}, B={a,b,c,d,e,f}, f ⊆ A × B, f={(1,a),(2,c),(3,e),(3,f),(4,a)}

(1) Értelmezési tartomány: dmn(f)={1,2,3,4}

(2) **Nem is függvény!!!** 3-hoz több elem: **(3,e) és (3,f)**

(3) Innentől többinek nincs is értelme (szürk, inj, bij)



Egy $f \subseteq X \times Y$ relációt függvénynek (leképezésnek, transzformációnak, hozzárendelésnek, operátornak) nevezünk, ha $\forall x, y, y' : (x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$. Az $(x, y) \in f$ jelölés helyett ilyenkor az $f(x) = y$ (vagy $f : x \mapsto y$, $f_x = y$) jelölést használjuk. Az y az f függvény x helyen (argumentumban) felvett értéke.

Az $f : X \to Y$ függvény

- injektív, ha $\forall x, x', y : (f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x'$;
- szürjektív, ha $\mathrm{rng}(f) = Y$;
- bijektív, ha injektív és szürjektív.

1. feladat:

Válasszuk ki a következő relációk közül a függvényeket. Adja meg a függvények értelmezési tartományát, értékkészletét. Mely függvény szürjektív, injektív, bijektív?

(c) A={1,2,3,4,5}, B={a,b,c,d,e,f}, $f \subseteq A \times B$, f={(1,a),(4,e),(5,d)}

(d) A={1,2,3}, B={1,3,5}, $f \subseteq A \times B$, f={(1,1),(2,5),(3,5)}

Házi feladat

Egy $f \subseteq X \times Y$ relációt függvénynek (leképezésnek, transzformációnak, hozzárendelésnek, operátornak) nevezünk, ha $\forall x, y, y' : (x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$. Az $(x, y) \in f$ jelölés helyett ilyenkor az $f(x) = y$ (vagy $f : x \mapsto y$, $f_x = y$) jelölést használjuk. Az y az f függvény x helyen (argumentumban) felvett értéke.

Az $f : X \to Y$ függvény

- injektív, ha $\forall x, x', y : (f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x'$;
- szürjektív, ha $\mathrm{rng}(f) = Y$;
- bijektív, ha injektív és szürjektív.

2. feladat:

Legyen $A =$ {olyan egyenlőszárú háromszögek, amelyeknek az alaphoz tartozó magasságuk egyenlő egy rögzített $m > 0$ számmal}, $B = \{y \in \mathbb{R} | y > 0\}$. Definiáljuk az $R \subseteq A \times B$ relációt a következőképpen: aRb, $a \in A$, $b \in B$, ha az a háromszög területe b. Mutassuk meg, hogy R függvény, és vizsgáljuk ennek a függvénynek a tulajdonságait (fennállnak-e a következők: szürjektív, injektív, bijektív).

(1) Terület: am/2 → függvény (Mivel minden a-hoz és m-hez egy nem negatív $\mathbb{R}$ rendelése)

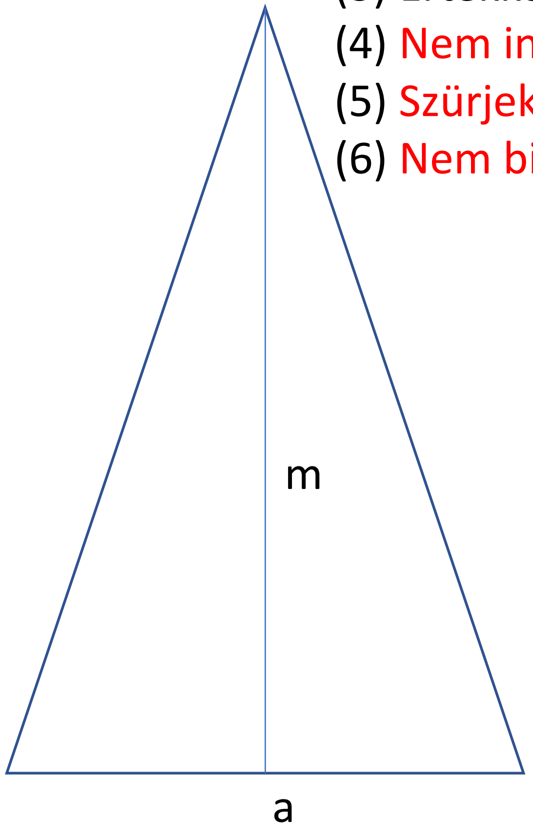
(2) Értelmezési tartomány (dmn(f)): a>0 alaphoz tartozó m magasságú egyenlő szárú háromszögek halmaza

(3) Értékkészlet (rng(f)): Háromszög terület

(4) Nem injektív: alapra tükrözött háromszög területe ugyanaz, mint az eredetié

(5) Szürjektív: bármely $\{y \in \mathbb{R} | y > 0\}$ -re egy a=2 y/m-alapú egyenlőszárú, m-magasságú háromszög területe y

(6) Nem bijektív, mert (3)



Az $f : X \to Y$ függvény

- injektív, ha $\forall x, x', y : (f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x'$;
- szürjektív, ha $\mathrm{rng}(f) = Y$;
- bijektív, ha injektív és szürjektív.

3. feladat:

(a) Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq 3x - 4$. Bizonyítsuk be, hogy a függvény bijektív, majd határozza meg az inverzét.

(1) u és $v \in \mathbb{R}$ számokkal $f(u) = 3u - 4 = 3v - 4 = f(v)$ iff $3(u - v) = 0$ → u=v → injektív

(2) Szürjektívitás:

tetszőleges $v \in \mathbb{R}$ -re létezik u ∈ $\mathbb{R}$, hogy *v=f(u)=3u-4* .

Mivel $u = \frac{1}{3}v + \frac{4}{3}$ valós szám és *v=f(u)=3u-4* *(tehát v eleme a függvény értékkészletének)*

ezért szürjektív

(3) Mivel (1) és (2) → bijektív

(2) Függvény inverze:

(v,u) ∈ f^{-1} iff (u,v) ∈ f

Tehát ha *v=f(u)=3u-4* → *u=* $\frac{1}{3}v + \frac{4}{3}$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

Az $f : X \to Y$ függvény

- injektív, ha $\forall x, x', y : (f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x'$;
- szürjektív, ha $\mathrm{rng}(f) = Y$;
- bijektív, ha injektív és szürjektív.

3. feladat:

(b) Legyen $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) \coloneqq 3 - |x|$. Bizonyítsuk be, hogy a függvény se nem injektív, se nem szürjektív;

(1) injektívitás:

$g(u) = 3 - |u| = 3 - |-u| = g(-u)$ → a függvény nem injektív.

(2) szürjektivítás:

Mivel $|x| \geq 0$, ezért $3 - |x| \leq 3$, tehát az értékkészlet: rng(g)= $]-\infty, \mathbf{3}] \subsetneq \mathbb{R}$. → a függvény nem szürjektív

Az $f : X \to Y$ függvény

- injektív, ha $\forall x, x', y : (f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x'$;
- szürjektív, ha $\operatorname{rng}(f) = Y$;
- bijektív, ha injektív és szürjektív.

4. feladat:

Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények.

a) $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, xfy \Leftrightarrow x|y$; *(x osztója y-nak)*

Ellenpélda: $2|2$ és $2|4$ és $2|6$ … *(egy x-hez több y is rendelhető)* tehát $2f2$ és $2f4$ és $2f6 \rightarrow$ a reláció nem függvény;

c) $f \subseteq \{1,2,5\} \times \{0,3,5\}, xfy \Leftrightarrow xy = 0$;

A példában $xy = 0$ iff $y = 0 \rightarrow$ a reláció függvény;

e) $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, xfy \Leftrightarrow 2x = y$;

$2u = v$ és $2u = w$ iff $v = w$, minden u természetes szám egy és csak egy természetes számmal áll olyan relációban, ahol u a pár első eleme $\rightarrow$ a reláció függvény;

f) $f \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, xfy \Leftrightarrow x^2 = y^2$;

Ellenpélda: -1 és 1 (mindkettő $\mathbb{Z}$) és y^2=1 mindkettőre *(egy x-hez több y is rendelhető) 1f1 és 1f(-1)*
$\rightarrow$ a reláció nem függvény;

Az $f : X \rightarrow Y$ függvény

- injektív, ha $\forall x, x', y : (f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x'$;
- szürjektív, ha $\mathrm{rng}(f) = Y$;
- bijektív, ha injektív és szürjektív.

4. feladat:

Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények:

- $f \subseteq \{0,3,5\} \times \{1,2,5\}$, $xfy \Leftrightarrow xy = 0$
- $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $xfy \Leftrightarrow$ tízes számrendszerben x ugyanazokból a számjegyekből áll, mint y;
- $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $xfy \Leftrightarrow x^2 = y^2$;
- $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,$xfy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$.

Házi feladat

Az $f : X \to Y$ függvény

- injektív, ha $\forall x, x', y : (f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x'$;
- szürjektív, ha $\mathrm{rng}(f) = Y$;
- bijektív, ha injektív és szürjektív.

5. feladat:

Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények. Ha a reláció függvény, döntsük el, hogy injektív, szürjektív, bijektív-e, illetve, ha nem függvény, akkor reflexív, szimmetrikus, tranzitív-e.
$f_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | 7x = y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

- Ez a reláció egy pozitív x-tengelyű, origó-csúcspontú parabola
- $(x,y) \in f_1 \Rightarrow 7x = y^2 = (-y)^2 \Rightarrow (x,-y) \in f_1$, és ha $y \neq 0$, akkor $y \neq -y$ → a reláció nem függvény
- $(x,x) \in f_1$ iff, ha $7x = x^2$ (tehát x=0 vagy x=7) → nem reflexív (de nem is irreflexív, mert (0,0) és (7,7) $\in f_1$)
- csak a (0,0) és a (7,7) pár olyan eleme a relációnak, amely eleme a reláció inverzének is, több pár nincs
  → a reláció nem szimmetrikus
- Tranzitítás: Ellenpélda: (x=1, y= $\sqrt{7}$) és (y= $\sqrt{7}$,z= $\sqrt{7\sqrt{7}}$) eleme a relációnak, de (x=1, z= ,z= $\sqrt{7\sqrt{7}}$) már nem
  → nem tranzitív

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy
1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

Az $f : X \to Y$ függvény
- injektív, ha $\forall x, x', y : (f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x'$;
- szürjektív, ha $\mathrm{rng}(f) = Y$;
- bijektív, ha injektív és szürjektív.

5. feladat:

Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények. Ha a reláció függvény, döntsük el, hogy injektív, szürjektív, bijektív-e, illetve, ha nem függvény, akkor reflexív, szimmetrikus, tranzitív-e.

$f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | 7x^2 - 6 = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R};$

- Ez a reláció egy pozitív y-tengelyű, $(0, -6)$-csúcspontú parabola
- Minden x-hez pontosan egy y tartozik → a reláció függvény
- Értelmezési tartomány (dmn(f)): $\mathbb{R}$, Értékkészlet (rng(f)): -6-nál nem kisebb $\mathbb{R}$ → nem szürjektív (mivel y ∈ $\mathbb{R}$)
- x-hez és –x-hez ugyanazt az értéket rendeli hozzá → nem injektív
- nem bijektív (azért is mert nem szürjektív és azért is mert nem injektív)

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

Az $f : X \to Y$ függvény

- injektív, ha $\forall x, x', y : (f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x'$;
- szürjektív, ha $\mathrm{rng}(f) = Y$;
- bijektív, ha injektív és szürjektív.

5. feladat:

Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények. Ha a reláció függvény, döntsük el, hogy injektív, szürjektív, bijektív-e, illetve, ha nem függvény, akkor reflexív, szimmetrikus, tranzitív-e.

$f_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ | y = |x|\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+;$

- Minden x-hez pontosan egy y tartozik → a reláció függvény
- Értelmezési tartomány (dmn(f)): $\mathbb{R}$, Értékkészlet (rng(f)): minden nem negatív $\mathbb{R}$ → szürjektív (mivel y ∈ $\mathbb{R}_0^+$)
- x-hez és –x-hez ugyanazt az értéket rendeli hozzá → nem injektív
- nem bijektív (mert nem injektív)

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

Az $f : X \to Y$ függvény

- injektív, ha $\forall x, x', y : (f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x'$;
- szürjektív, ha $\mathrm{rng}(f) = Y$;
- bijektív, ha injektív és szürjektív.

5. feladat:

Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények. Ha a reláció függvény, döntsük el, hogy injektív, szürjektív, bijektív-e, illetve, ha nem függvény, akkor reflexív, szimmetrikus, tranzitív-e.

$f_7 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | 7 | x - y\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

- $7|x - y$ *(7 osztója x-y-nak)* iff, ha van olyan $u \in \mathbb{Z}$: $x - y = 7u$, azaz x=y+7c (ahol c egy $\mathbb{Z}$ konstans), azaz minden x-hez végtelen sok y tartozik→ a reláció nem függvény
- Minden x-re:
  - $7|0 = x - x$ → (1) reflexív
  - $7|u$ iff, $7|-u$ → (2) szimmetrikus
  - $7|x - y$ és $7|y - z$, akkor $7|(x - y) + (y - z) = x - z$ → (3) tranzitív
  - (1) + (2) + (3) : ekvivalencia reláció

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

Az $f : X \to Y$ függvény

- injektív, ha $\forall x, x', y : (f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x'$;
- szürjektív, ha $\mathrm{rng}(f) = Y$;
- bijektív, ha injektív és szürjektív.

5. feladat:

Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények. Ha a reláció függvény, döntsük el, hogy injektív, szürjektív, bijektív-e, illetve, ha nem függvény, akkor reflexív, szimmetrikus, tranzitív-e.

$f_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x = y^2 + 6y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R};$

$f_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = (x+4)^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R};$

$f_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ | 2y = \sqrt{x}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+;$

$f_8 = \{(x,y) \in (\mathbb{R} \backslash \{0\}) \times (\mathbb{R} \backslash \{0\}) | xy = 1\} \subseteq (\mathbb{R} \backslash \{0\}) \times (\mathbb{R} \backslash \{0\});$

$f_9 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | xy = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R};$

$f_{10} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} || x - y| \leq 3\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};$

$f_{11} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y(1 - x^2) = x - 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R};$

$f_{12} = \{(x,y) \in (\mathbb{R} \backslash \{1,-1\}) \times (\mathbb{R} \backslash \{1,-1\}) | y(1 - x^2) = x - 1\} \subseteq (\mathbb{R} \backslash \{1,-1\}) \times (\mathbb{R} \backslash \{1,-1\}).$

Házi feladat

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

Az $f : X \to Y$ függvény

- injektív, ha $\forall x, x', y : (f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x'$;
- szürjektív, ha $\operatorname{rng}(f) = Y$;
- bijektív, ha injektív és szürjektív.

6. feladat:

Legyen $A = \{2,3,6,8,9,12,18\} \subseteq \mathbb{N}^+$, $R \subseteq A \times A$ és $aRb \Leftrightarrow a|b$.

a) Mutassa meg, hogy az R reláció részbenrendezés az A halmazon.

1) Minden n pozitív egész szám osztója önmagának → reláció reflexív
2) $m|n$ és $n|m$ igaz iff, ha m=n → reláció antiszimmetrikus
3) $m|n$ és $n|o$, akkor $n = um$ és $o = vn$, tehát $o = vn = v(um) = (vu)m = wm$ egy w $\mathbb{N}^+$ számmal (tehát $m|o$)
→ reláció tranzitív

Mivel reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív a reláció, ezért részbenrendezés

Egy halmazon értelmezett részbenrendezési relációnak az alaphalmaz bármely részhalmazára való megszorítása is részbenrendezés

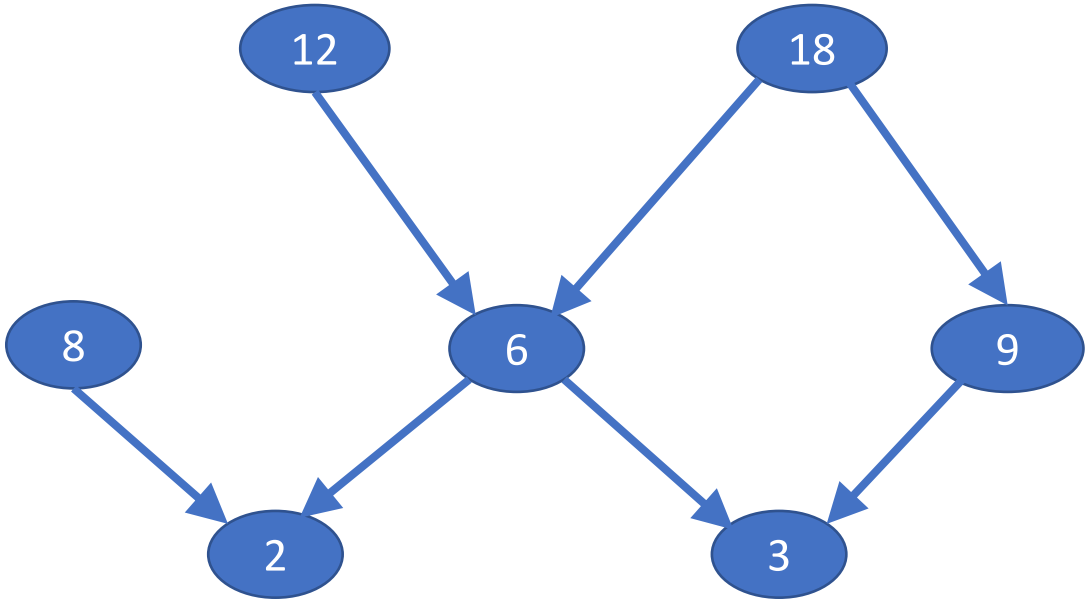
Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy
1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

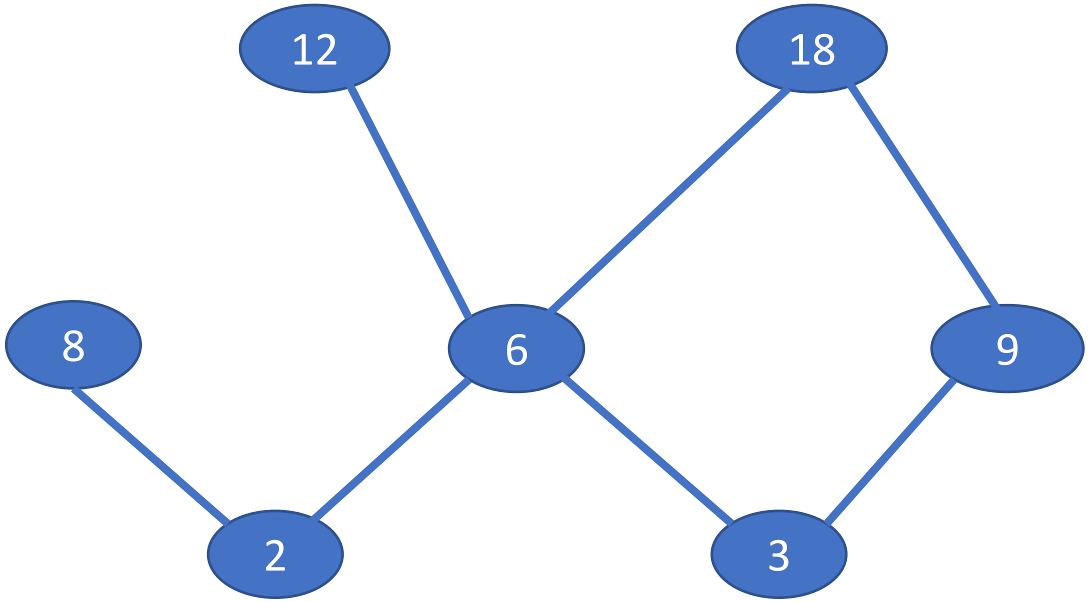
Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus relációt részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $\leq$, $\preceq$ $\preccurlyeq$, ...)
Ha $\preceq$ egy részbenrendezés X-en, akkor az $(X; \preceq)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük.
Ha $x, y \in X$ esetén $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$, akkor x és y összehasonlítható.
(Ha minden elempár összehasonlítható, akkor a reláció dichotóm.)
Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus és dichotóm relációt rendezésnek nevezzük.

6. feladat:

Legyen $A = \{2,3,6,8,9,12,18\} \subseteq \mathbb{N}^+$, $R \subseteq A \times A$ és $aRb \Leftrightarrow a|b$.

b) Rajzolja meg az R rendezési diagramját (Hasse-diagram).





Ha egy részbenrendezett halmaz elemeit pontokkal ábrázoljuk, és csak azon x, y párok esetén rajzolunk irányított élt, amelyre x megelőzi y-t, akkor a részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját kapjuk. Néha irányított élek helyett irányítatlan élt rajzolunk, és a kisebb elem kerül lejjebb.

7. feladat:

a) Bizonyítsa be, hogy az $\mathbb{N}$ halmazon $\leq$ részbenrendezési reláció, ahol $\leq$ definíciója: $n, m \subseteq \mathbb{N}, n \leq m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}\ (n + k = m)$;

1) $n + 0 = n \Rightarrow n \leq n$ → reláció reflexív

2) n$\leq m \wedge m \leq n \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{N}: n + k = m \wedge m + l = n \Rightarrow n = n + (k + l) \Rightarrow k + l = 0 \Rightarrow k = 0 = l \Rightarrow n = m$
→ reláció antiszimmetrikus

3) $n \leq m \wedge m \leq o \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{N}: n + k = m \wedge m + l = o \Rightarrow o = n + (k + l) = n + r \Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}: o = n + r \Rightarrow n \leq o$
→ reláció tranzitív

Mivel reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív a reláció, ezért részbenrendezés

Egy halmazon értelmezett részbenrendezési relációnak az alaphalmaz bármely részhalmazára való megszorítása is részbenrendezés

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy
1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha$\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus relációt részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $\leq$, $\preceq$ $\preccurlyeq$, ...)
Ha $\preceq$ egy részbenrendezés X-en, akkor az $(X; \preceq)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük.
Ha $x, y \in X$ esetén $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$, akkor x és y összehasonlítható.
(Ha minden elempár összehasonlítható, akkor a reláció dichotóm.)
Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus és dichotóm relációt rendezésnek nevezzük.

7. feladat:

b) Bizonyítsa be, hogy az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazon $(m_1, n_1)R(m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 \leq m_2 \land n_1 \leq n_2$ részbenrendezés.

Házi feladat

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \land yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \land yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus relációt részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $\leq$, $\preceq$, $\preccurlyeq$, ...)
Ha $\preceq$ egy részbenrendezés X-en, akkor az $(X; \preceq)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük.
Ha $x, y \in X$ esetén $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$, akkor x és y összehasonlítható.
(Ha minden elempár összehasonlítható, akkor a reláció dichotóm.)
Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus és dichotóm relációt rendezésnek nevezzük.

8. feladat:

Döntse el a következő relációkról, hogy részbenrendezési relációk-e az adott halmazon.

- $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ aRb \Leftrightarrow |a| \leq |b|;$

1) $|x| \leq |x| \rightarrow$ a reláció reflexív
2) ha a ≠ 0, akkor a ≠ -a, viszont $|a| = |-a| = |b| \rightarrow$ a reláció nem antiszimmetrikus

Mivel nem antiszimmetrikus, ezért nem részbenrendezési reláció

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus relációt részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $\leq$, $\preceq$, $\preccurlyeq$, ...)
Ha $\preceq$ egy részbenrendezés X-en, akkor az $(X; \preceq)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük.
Ha $x, y \in X$ esetén $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$, akkor x és y összehasonlítható. (Ha minden elempár összehasonlítható, akkor a reláció dichotóm.)
Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus és dichotóm relációt rendezésnek nevezzük.

8. feladat:

Döntse el a következő relációkról, hogy részbenrendezési relációk-e az adott halmazon.

- V a 10-egység hosszúságú $\mathbb{R}^2$-beli vektorok halmaza, $R \subseteq V \times V$, $(x, y) \in R \Leftrightarrow$ az x vektor hajlásszöge kisebb-egyenlő, mint az y vektor hajlásszöge (hajlásszög legyen $[0; 2\pi[$-beli);

1) ha két vektor azonos, akkor a hajlásszögük is azonos, és minden valós szám kisebb-egyenlő önmagánál, így minden vektor, tehát minden 10 egység hosszúságú vektor is relációban áll önmagával (xRx) → a reláció reflexív
2) ha xRy és yRx, akkor mindkét vektor hajlásszöge kisebb-egyenlő a másik vektor hajlásszögénél, vagyis a két hajlásszög azonos, és a hosszuk is megegyezik, tehát a két vektor megegyezik → a reláció antiszimmetrikus
3) ha x, y és z vektorok olyanok, hogy xRy és yRz, akkor x hajlásszöge kisebb-egyenlő, mint y hajlásszöge, és ez utóbbi kisebb-egyenlő, mint z hajlásszöge, ám ekkor x hajlásszöge kisebb-egyenlő, mint z hajlásszöge, azaz xRz → a reláció tranzitív

- *Mivel (1) és (2) és (3) teljesül:* részbenrendezés.

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy
1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus relációt részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $\leq$, $\preceq$, $\preccurlyeq$, ...)
Ha $\preceq$ egy részbenrendezés X-en, akkor az $(X; \preceq)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük.
Ha $x, y \in X$ esetén $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$, akkor x és y összehasonlítható. (Ha minden elempár összehasonlítható, akkor a reláció dichotóm.)
Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus és dichotóm relációt rendezésnek nevezzük.

8. feladat:

Döntse el a következő relációkról, hogy részbenrendezési relációk-e az adott halmazon.

- $R \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $xRy \Leftrightarrow$ az x vektor hossza kisebb-egyenlő, mint az y vektor hossza;
- P a valós együtthatós polinomok halmaza, $R \subseteq P \times P$, $fRg \Leftrightarrow \deg f \leq \deg g$;

Házi feladat

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

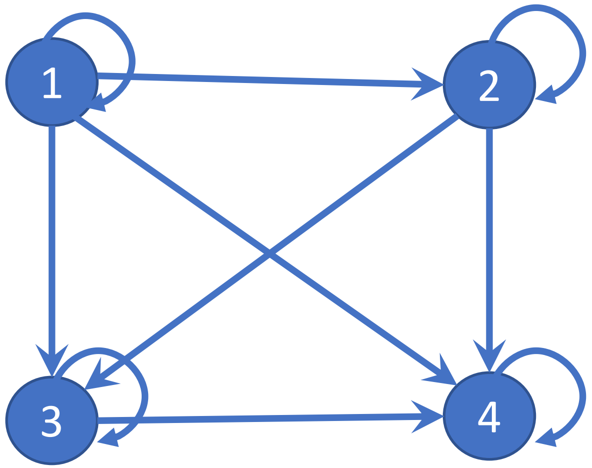
1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha$\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus relációt részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $\leq$, $\preceq$ $\preccurlyeq$, $\ldots$)
Ha $\preceq$ egy részbenrendezés X-en, akkor az $(X; \preceq)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük.
Ha $x, y \in X$ esetén $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$, akkor x és y összehasonlítható.
(Ha minden elempár összehasonlítható, akkor a reláció dichotóm.)
Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus és dichotóm relációt rendezésnek nevezzük.

9. feladat:

Döntse el, mely relációk teljes rendezések az $A = \{1,2,3,4\}$ halmazon.

$f = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\};$



(1) Reflexív *(hurokélek)*

(2) Antiszimmetrikus *(nincs oda-vissza él)*

(3) Tranzitív *(mindenütt „rövidítő út”)*

(1)+(2)+(3) miatt: részbenrendezés

(4) dichotóm is *(2 különböző pont között egyik irányban út)*

Tehát (1)+(2)+(3)+(4) miatt ***teljes rendezés***

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy
1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;
7. R trichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül;
8. R dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén xRy vagy yRx (esetleg mindkettő).

Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus relációt részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $\leq, \preceq, \preccurlyeq, \ldots$)

Ha $\preceq$ egy részbenrendezés X-en, akkor az $(X; \preceq)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük.

Ha $x, y \in X$ esetén $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$, akkor x és y összehasonlítható.

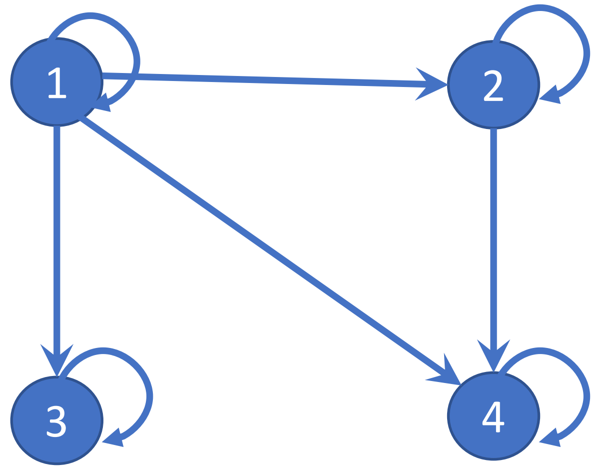
(Ha minden elempár összehasonlítható, akkor a reláció dichotóm.)

Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus és dichotóm relációt rendezésnek nevezzük.

9. feladat:

Döntse el, mely relációk teljes rendezések az $A = \{1,2,3,4\}$ halmazon.

$f = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\};$



(1) Reflexív *(hurokélek)*

(2) Antiszimmetrikus *(nincs oda-vissza él)*

(3) Tranzitív *(mindenütt „rövidítő út”)*

(1)+(2)+(3) miatt: részbenrendezés

(4) Nem dichotóm *(2 és 3 és 3 és 4 között nincs út, azaz ez a 2 pár egyik sorrendben sem eleme a relációnak)*

(4) miatt nem teljes rendezés

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus relációt részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $\leq$, $\preceq$, $\preccurlyeq$, $\ldots$)

Ha $\preceq$ egy részbenrendezés X-en, akkor az $(X; \preceq)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük.

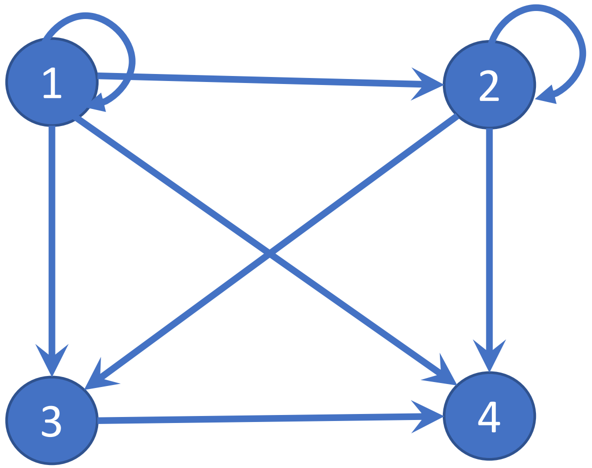
Ha $x, y \in X$ esetén $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$, akkor x és y összehasonlítható. (Ha minden elempár összehasonlítható, akkor a reláció dichotóm.)

Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus és dichotóm relációt rendezésnek nevezzük.

9. feladat:

Döntse el, mely relációk teljes rendezések az $A = \{1,2,3,4\}$ halmazon.

$f = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,4)\}$;



(1) Nem Reflexív *((3,3) és (4,4) párnak megfelelő hurokél hiányzik)*

(2) E miatt se nem teljes rendezés, se nem részben rendezés

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$;
3. R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet;
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$;
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$;

Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus relációt részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $\leq$, $\preceq$ $\preccurlyeq$, ...)

Ha $\preceq$ egy részbenrendezés X-en, akkor az $(X; \preceq)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük.

Ha $x, y \in X$ esetén $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$, akkor x és y összehasonlítható. (Ha minden elempár összehasonlítható, akkor a reláció dichotóm.)

Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus és dichotóm relációt rendezésnek nevezzük.