Diszkrét matematika I.

5. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagygabor@inf.elte.hu
Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2021. tavasz

Műveletek

Definíció

Egy X halmazon értelmezett binér (kétváltozós) művelet egy $* : X \times X \to X$ függvény. Gyakran $*(x, y)$ helyett $x * y$-t írunk.
Egy X halmazon értelmezett unér (egyváltozós) művelet egy $* : X \to X$ függvény.

Példa

- $\mathbb{R}$ halmazon az $+$, $\cdot$ binér, $z \mapsto -z$ (ellentett) unér művelet.
- $\mathbb{R}$ halmazon az $\div$ (osztás) nem művelet, mert $\mathrm{dmn}(\div) \neq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon az $\div$ binér, az $x \mapsto 1/x$ (reciprok) unér művelet.
- $\mathbb{R}$ halmazon a 0 illetve 1 konstans kijelölése nullér művelet.

Műveletek

Egy véges halmazon bármely binér művelet megadható a műveleti táblájával:

$\wedge$	I	H
I	I	H
H	H	H

$\vee$	I	H
I	I	I
H	I	H

XOR	I	H
I	H	I
H	I	H

$\neg$	I	H
	H	I

Definíció (Műveletek függvényekkel)

Legyen X tetszőleges halmaz, Y halmaz a $*$ művelettel, $f, g : X \to Y$ függvények. Ekkor

$$(f * g)(x) := f(x) * g(x).$$

Példa

$(\sin + \cos)(x) = \sin x + \cos x$

Művelettartó leképezések

Definíció

Legyen X halmaz a $*$ művelettel, Y a $\diamond$ művelettel. Az $f : X \to Y$ függvény **művelettartó**, ha $\forall x, y \in X$ esetén

$$f(x * y) = f(x) \diamond f(y).$$

Példa

- Legyen $X = \mathbb{R}$ az $+$ művelettel, $Y = \mathbb{R}^+$ a $\cdot$ művelettel.
  Ekkor az $x \mapsto a^x$ művelettartó: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
- Legyen $X = \mathbb{R}^{n \times n}$ a $\cdot$ művelettel, $Y = \mathbb{R}$ a $\cdot$ művelettel.
  Ekkor az $x \mapsto \det(x)$ művelettartó: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Műveleti tulajdonságok

Definíció

A $* : X \times X \to X$ művelet
asszociatív, ha $\forall a, b, c \in X : (a * b) * c = a * (b * c)$;
kommutatív, ha $\forall a, b \in X : a * b = b * a$.

Példa

- $\mathbb{R}$-en az $+$, illetve a $\cdot$ műveletek asszociatívak, kommutatívak.
- A függvények halmazán a kompozíció művelete asszociatív: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
- Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények halmazán a kompozíció művelete nem kommutatív: $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$: $x^2 + 1 = (f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x) = (x + 1)^2$.
- Az osztás nem asszociatív $\mathbb{R}^*$-on: $\frac{a}{bc} = (a \div b) \div c \neq a \div (b \div c) = \frac{ac}{b}$ (pl. $a = b = c = 2$).

A komplex számok bevezetése

Legyen i az $x^2 = -1$ egyenlet megoldása.
A szokásos számolási szabályok szerint számoljunk az i szimbólummal formálisan, $i^2 = -1$ helyettesítéssel:

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i + (-1) = 2i.$$

Általában:

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i.$$

A komplex számok definíciója

Definíció

Az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, komplex számoknak ($\mathbb{C}$) hívjuk, az ilyen formában való felírásukat algebrai alaknak nevezzük.
Összeadás: $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$.
Szorzás: $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$.
A $z = a + bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ komplex szám valós része: $\mathrm{Re}(z) = a \in \mathbb{R}$.
A $z = a + bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ komplex szám képzetes része: $\mathrm{Im}(z) = b \in \mathbb{R}$.

Figyelem! $Im(z) \neq bi$
Az $a + 0 \cdot i$ alakú komplex számok a valós számok.
A $0 + bi$ alakú komplex számok a tisztán képzetes számok.
Az $a + bi$ és a $c + di$ algebrai alakban megadott komplex számok pontosan akkor egyenlőek: $a + bi = c + di$, ha

$$a = c \quad \text{és} \quad b = d.$$

A komplex számok definíciója

Megjegyzés

A komplex számok alternatív definíciója:
$(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ párok halmaza, ahol az
összeadás: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
a **szorzás**: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

A két definíció ekvivalens: az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(a + bi) = (a, b)$ művelettartó bijekció $(\mathbb{C}; +)$ és $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; +)$, illetve $(\mathbb{C}; \cdot)$ és $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \cdot)$ között (speciálisan $i \leftrightarrow (0, 1)$).
Az $a + bi$ formátum kényelmesebb számoláshoz.
Az (a, b) formátum kényelmesebb ábrázoláshoz (grafikusan, számítógépen).

A műveletek tulajdonságai

Állítás

A komplex számok halmazán az előbbi módon definiált összeadás asszociatív, kommutatív és létezik semleges elem, a 0:

- $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}: \ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \ z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- $\forall z_1 \in \mathbb{C}: \ z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$

Állítás

A komplex számok halmazán az előbbi módon definiált szorzás asszociatív, kommutatív és létezik semleges elem, az 1:

- $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}: \ (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \ z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- $\forall z_1 \in \mathbb{C}: \ z_1 \cdot 1 = 1 \cdot z_1 = z_1$

A műveletek tulajdonságai

Állítás

Teljesül a szorzás összeadásra vonatkozó mindkét oldali disztributivitása:

- $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}: \; z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$
- $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}: \; (z_1 + z_2) \cdot z_3 = (z_1 \cdot z_3) + (z_2 \cdot z_3)$

Definíció

Egy x szám **ellentettje** az az $\hat{x}$ szám, melyre $x + \hat{x} = 0$.

Egy $r \in \mathbb{R}$ szám ellentettje: $-r$.

Állítás (HF)

Egy $z = a + bi \in \mathbb{C}$ algebrai alakban megadott komplex szám ellentettje a $-z = -a - bi$ algebrai alakban megadott komplex szám.

A műveletek tulajdonságai

Definíció

Egy x szám **reciproka** az az $\hat{x}$ szám, melyre $x \cdot \hat{x} = 1$.

Egy $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ szám reciproka: $\frac{1}{r}$.
Mi lesz $\frac{1}{1+i}$?
Ötlet: gyöktelenítés, konjugálttal való bővítés:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = -1+\sqrt{2}.$$

Hasonlóan:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i}\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2-i^2} = \frac{1-i}{1-(-1)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Számolás komplex számokkal

Definíció

Egy $z = a + bi \in \mathbb{C}$ algebrai alakban megadott komplex szám abszolút értéke: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Valós számok esetében ez a hagyományos abszolút érték: $|a| = \sqrt{a^2}$.

Állítás(HF)

$|z| = |a + bi| \geq 0, \qquad |z| = |a + bi| = 0 \Leftrightarrow z = a + bi = 0.$

Számolás komplex számokkal

Definíció

Egy $z = a + bi$ algebrai alakban megadott komplex szám konjugáltja a $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$ szám.

Állítás(HF)

Egy $z \neq 0$ komplex szám reciproka $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}}$.

A definíció értelmes, hiszen a nevező:

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Nullosztómentesség: $z \cdot w = 0 \Rightarrow z = 0$ vagy $w = 0$.

Két komplex szám hányadosa:

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}.$$

A műveletek tulajdonságai

Állítás

A komplex számok halmaza a fent definiált összeadással és szorzással testet alkot.
További példák testre: $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$ és $(\mathbb{R}; +, \cdot)$.

Számolás komplex számokkal

Tétel (HF)

1. $\overline{\overline{z}} = z$;
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
3. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;
4. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$;
5. $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z) \cdot i$;
6. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
7. $z \neq 0$ esetén $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$;
8. $|0| = 0$ és $z \neq 0$ esetén $|z| > 0$;
9. $|\overline{z}| = |z|$;
10. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;
11. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (háromszög egyenlőtlenség).

Számolás komplex számokkal

Tétel(HF)

$\vdots$

- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;

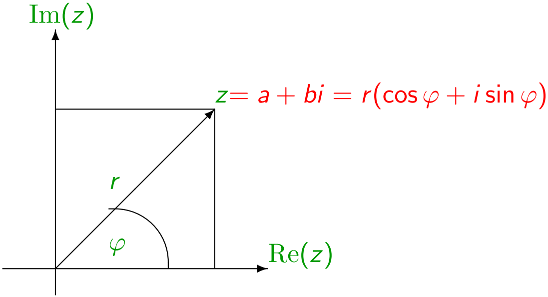
$\vdots$

Bizonyítás

$$|z \cdot w|^2 = z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w} = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2 = (|z| \cdot |w|)^2.$$

Komplex számok ábrázolása

A komplex számok a komplex számsíkon:



Ha $z = a + bi \in \mathbb{C}$, akkor $\mathrm{Re}(z) = a$, $\mathrm{Im}(z) = b$.
A $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ vektor hossza: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{|z|^2}$.
A z nemnulla szám argumentuma $\varphi = arg(z) \in [0, 2\pi)$
A koordináták trigonometrikus függvényekkel kifejezve:

$$\mathrm{Re}(z) = a = r \cdot \cos\varphi, \mathrm{Im}(z) = b = r \cdot \sin\varphi$$

Komplex számok trigonometrikus alakja

Definíció

$z \in \mathbb{C}$ nemnulla szám trigonometrikus alakja a
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
ahol $r > 0$ a szám abszolút értéke.

Figyelem! A 0-nak nem használjuk a trigonometrikus alakját.
A trigonometrikus alak nem egyértelmű:
$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos(\varphi + 2\pi) + i\sin(\varphi + 2\pi))$.

Definíció

Egy nemnulla $z \in \mathbb{C}$ argumentuma az a $\varphi = arg(z) \in [0, 2\pi)$, melyre
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

- $z = a + bi$ algebrai alak;
- $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trigonometrikus alak.

Itt $a = r\cos\varphi, b = r\sin\varphi$.

Áttérés algebrai alakról trigonometrikus alakra

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\left.\begin{array}{r} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{array}\right\}$$

Ha $a \neq 0$, akkor $\mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, és így

$$\varphi = \begin{cases} \mathrm{arctg}\frac{b}{a}, \text{ ha } a > 0; \\ \\ \mathrm{arctg}\frac{b}{a} + \pi, \text{ ha } a < 0. \end{cases}$$

Számolás trigonometrikus alakkal

Legyenek $z, w \in \mathbb{C}$ nemnulla komplex számok:
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\quad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$
A szorzatuk:

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot|w|(\cos\psi + i\sin\psi) = \\ &= |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)) = \end{aligned}$$

addíciós képletek: $\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$
$\sin(\varphi+\psi) = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi$

$$= |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$$

A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
A szorzat argumentuma:

- ha $0 \le arg(z) + arg(w) < 2\pi$, akkor $arg(zw) = arg(z) + arg(w)$;
- ha $2\pi \le arg(z) + arg(w) < 4\pi$, akkor
  $arg(zw) = arg(z) + arg(w) - 2\pi$.

A sin, cos függvények 2π szerint periodikusak, az argumentum meghatározásánál redukálni kell az argumentumok összegét.

Moivre-azonosságok

Tétel HF

Legyen $z, w \in \mathbb{C}$ nemnulla komplex számok:
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$,
és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor
$zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$;

$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))$, ha $w \neq 0$;

$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

A szögek összeadódnak, kivonódnak, szorzódnak. Az argumentumot ezek után redukcióval kapjuk!