Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) …

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) …

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) …

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) …

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Jede Bilinearform β auf K^n liefert eine Matrix ...

Jede Bilinearform β auf K^n liefert eine Matrix $M(\beta) \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ der Gestalt

$$M(\beta) := \beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{ij}$$

→ Satz 10.2

Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ liefert eine ... wie folgt:

Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ liefert eine Bilinearform auf K^n wie folgt:

$$\beta_A : K^n \times K^n \longrightarrow K$$
$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v}^T A \mathbf{w}$$

→ Satz 10.2

Die Menge der Bilinearformen auf K^n und die Menge der $n \times n$ Matrizen über K sind ... .

Die Menge der Bilinearformen auf K^n und die Menge der $n \times n$ Matrizen über K sind isomorph.

→ Satz 10.2

Die **darstellende Matrix** einer Bilinearform β bezüglich einer Basis $B = (\mathbf{b}_i)_i$ ist gegeben durch ...

Die **darstellende Matrix** einer Bilinearform β bezüglich einer Basis $B = (\mathbf{b}_i)_i$ ist gegeben durch

$$M_B(\beta) := \beta(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_{ij}$$

→ Def. 10.3

Zwei Matrizen A, A' sind **kongruent**, falls es ...

Zwei quadratische Matrizen A, A' sind **kongruent**, falls es eine invertierbare Matrix S gibt mit

$$A' = S^T A S$$

→ Def. 10.5

Eine Bilinearform β auf V ist **symmetrisch**, falls ...

Eine Bilinearform β auf V ist **symmetrisch**, falls für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

→ Def. 10.7

Eine Bilinearform β auf V ist **schiefsymmetrisch**, falls ...

Eine Bilinearform β auf V ist **schiefsymmetrisch**, falls für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

→ Def. 10.7

Eine Bilinearform β auf V ist **alternierend**, falls ...

Eine Bilinearform β auf V ist **alternierend**, falls für alle $\mathbf{v} \in V$

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$$

→ Def. 10.7

Eine Bilinearform β ist **symmetrisch** genau dann, wenn … (darstellende Matrix)

Satz

Eine Bilinearform β ist **symmetrisch** genau dann, wenn ihre darstellende Matrix $M(\beta)$ **symmetrisch** ist:

$$M(\beta)^T = M(\beta)$$

→ Satz 10.9

Eine Bilinearform β ist **schiefsymmetrisch** genau dann, wenn … (darstellende Matrix)

Satz

Eine Bilinearform β ist **schiefsymmetrisch** genau dann, wenn ihre darstellende Matrix $M(\beta)$ **schiefsymmetrisch** ist:

$$M(\beta)^T = -M(\beta)$$

→ Satz 10.9

Eine Bilinearform β ist **alternierend** genau dann, wenn … (darstellende Matrix)

Satz

Eine Bilinearform β ist **alternierend** genau dann, wenn für ihre darstellende Matrix $M(\beta)$ gilt:

$$M(\beta)^T = -M(\beta)$$

und

$$M(\beta)_{ii} = 0 \text{ für alle } i$$

→ Satz 10.9

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- …

- η ist semilinear in der zweiten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$
  $\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- η ist linear in der ersten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$

- η ist semilinear in der zweiten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$
  $eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$

→ Def. 10.10

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- η ist linear in der ersten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$
- …

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- η ist linear in der ersten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$
- η ist semilinear in der zweiten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$
  $\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$

→ Def. 10.10

Eine Sesquilinearform η ist **hermitesch**, falls …

Def
LinA-II-10-Skalarprodukte 7e2e222e-bbf4-11ec-8422-0242ac120002

Eine Sesquilinearform η ist **hermitesch**, falls gilt

$$\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\eta(\mathbf{w}, \mathbf{v})}$$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.10

Jede Sesquilinearform η liefert eine Matrix der Form …

Satz
LinA-II-10-Skalarprodukte bd8dcf48-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Jede Sesquilinearform η liefert eine Matrix $M(\eta) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ der Form

$$M(\eta) := \eta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{ij}$$

→ Satz 10.11

Zu einer gegebenen komplexen Matrix A existiert eine Sesquilinearform η wie folgt:
…

Satz
LinA-II-10-Skalarprodukte bd8dcf48-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Zu einer gegebenen komplexen quadratischen Matrix A existiert eine Sesquilinearform η wie folgt:

$$\eta_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mathbf{v}^T A \overline{\mathbf{w}}$$

→ Satz 10.11

Eine symmetrische Bilinearform β auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls …

Def
LinA-II-10-Skalarprodukte ca81504e-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Eine symmetrische Bilinearform β auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$$

→ Def. 10.14

Eine hermitesche Bilinearform β auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls …

Def
LinA-II-10-Skalarprodukte ca81504e-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Eine hermitesche Bilinearform β auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$$

→ Def. 10.14

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist …

Def
LinA-II-10-Skalarprodukte d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform.

→ Def. 10.15

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist …

Def
LinA-II-10-Skalarprodukte d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist eine positiv definite hermitesche Bilinearform.

→ Def. 10.15

Ein **euklidischer Vektorraum** ist ...

Ein **euklidischer Vektorraum** $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

→ Def. 10.15

Ein **unitärer Vektorraum** ist ...

Ein **unitärer Vektorraum** $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

→ Def. 10.15

Die assoziierte **Norm** zu einem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \end{aligned}$$

Die assoziierte **Norm** zu einem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \end{aligned}$$

(Die Norm wird durch das Skalarprodukt **induziert**.)

→ Def. 10.15

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

(i) (Verhältnis Norm und 0) ...

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s| \, \|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s| \, \|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = \ldots$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\, \|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\, \|\mathbf{v}\|$

(iii) (**Dreiecksungleichung**:)
$\ldots$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\, \|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\, \|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) (**Cauchy-Schwarz-Ungleichung**):
$\ldots$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\, \|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.
$\mathbf{v} \in V$ heißt **normiert**, falls $\ldots$

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.
$\mathbf{v} \in V$ heißt **normiert**, falls $\|\mathbf{v}\| = 1$

→ Def. 10.20

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ sind zueinander **orthogonal**, falls …

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ sind zueinander **orthogonal**, falls $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ [Notation: $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$]

→ Def. 10.20

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine Basis B von V heißt **Orthonormalbasis** von V, falls …

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine Basis $B = (\mathbf{b}_i)_i$ von V heißt **Orthonormalbasis** von V, falls

- jedes $\mathbf{b}_i \in B$ normiert ist, und
- jeweils $\mathbf{b}_i \perp \mathbf{b}_j$ für $i \neq j$

→ Def. 10.20

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidisch oder unitär. Das **orthogonale Komplement** eines Untervektorraums $W \subseteq V$ ist

$$W^\perp :=$$

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidisch oder unitär. Das **orthogonale Komplement** eines Untervektorraums $W \subseteq V$ ist

$$W^\perp := \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \text{ für alle } \mathbf{w} \in W\}$$

→ Def. 10.23

Ein **affiner Unterraum** eines Vektorraums V ist …

Ein **affiner Unterraum** eines Vektorraums V ist eine Teilmenge der Form

$$\mathbf{u}_0 + U = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} - \mathbf{u}_0 \in U\}$$

für einen Untervektorraum $U \subseteq V$.

Eine **affine Hyperebene** ist ...

Eine **affine Hyperebene** ist ein affiner Unterraum, dessen zugehöriger Untervektorraum U die Dimension $\dim U = \dim V - 1$ hat.

Hessesche Normalform
Jede affine Hyperrebene in einem euklidischen oder unitären VR hat die Form

$$H =$$

Hessesche Normalform
Jede affine Hyperrebene in einem euklidischen oder unitären VR hat die Form

$$H = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = d\}$$

für einen normierten Vektor $\mathbf{n}$ und ein $d \in \mathbb{R}$ mit $d \geqslant 0$

→ Satz 10.25

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. (Winkel zwischen Vektoren und ihrem Kreuzprodukt) ...
2. $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$ und $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
2. $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

→ Satz 10.28

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$ und $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
2. (Norm des Kreuzprodukts) ...

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$ und $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
2. $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

→ Satz 10.28

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine **Isometrie** ist eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$, für die gilt ...

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine **Isometrie** ist eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$, für die gilt:

$$\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$$

→ Def. 11.1

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine **Isometrie** ist ... , für die gilt:

$$\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$$

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine **Isometrie** ist eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$, für die gilt:

$$\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$$

→ Def. 11.1

Alle Eigenwerte einer Isometrie ...

Alle Eigenwerte einer Isometrie haben Betrag 1.

→ Satz 10.2

Eigenwerte einer Isometrie in einem euklidischen Vektorraum haben die Form

$$a =$$

Eigenwerte einer Isometrie in einem euklidischen Vektorraum haben die Form

$$a = \pm 1$$

→ Satz 10.2

Eigenwerte einer Isometrie in einem unitären Vektorraum haben die Form

$$a =$$

Eigenwerte einer Isometrie in einem unitären Vektorraum haben die Form

$$a = x + \mathrm{i}y \text{ mit } x^2 + y^2 = 1$$

→ Satz 10.2

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer Isometrie ...

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer Isometrie stehen senkrecht zueinander.

→ Satz 10.2

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) ...

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

→ Satz 11.3

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) ...

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

→ Satz 11.3

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) ...

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

→ Satz 11.3

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) ...

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

→ Satz 11.3

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(K) &:= \ldots \\ &= (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot) \end{aligned}$$

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(K) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(K) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(K) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **spezielle lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\mathrm{SL}_n(K) :=$$

Die **spezielle lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\mathrm{SL}_n(K) := (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) = 1\}, \cdot)$$

→ Def/Satz 11.5

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) :&= \ \ldots \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) :&= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) :&= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= \ \ldots \end{aligned}$$

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) :&= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **spezielle orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SO}(n) :=$$

Die **spezielle orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SO}(n) := \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

→ Def/Satz 11.5

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(n) :&= \dots \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}, \cdot)\end{aligned}$$

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(n) :&= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}, \cdot)\end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(n) :&= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= \dots\end{aligned}$$

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(n) :&= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}, \cdot)\end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **spezielle unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SU}(n) :=$$

Die **spezielle unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SU}(n) := \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

→ Def/Satz 11.5

Eine Isometrie auf $\mathbb{R}^2$ ist ... oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

Eine Isometrie auf $\mathbb{R}^2$ ist eine Rotation um $\mathbf{0}$ oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

→ Lemma 11.6

Eine Isometrie auf $\mathbb{R}^2$ ist eine Rotation um $\mathbf{0}$ oder ...

.

Eine Isometrie auf $\mathbb{R}^2$ ist eine Rotation um $\mathbf{0}$ oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

→ Lemma 11.6

Die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(2)$ hat die Form

$$\mathrm{O}(2) = \dots$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

Die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(2)$ hat die Form

$$\begin{aligned}\mathrm{O}(2) = &\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \\ &\dot\cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}\end{aligned}$$

→ Lemma 11.6

Die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(2)$ hat die Form

$$\mathrm{O}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$
$$\dots$$

Die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(2)$ hat die Form

$$\begin{aligned}\mathrm{O}(2) = &\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \\ &\dot\cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}\end{aligned}$$

→ Lemma 11.6

Struktursatz für euklidische Isometrien
Jede Isometrie eines ... euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & & \\ & & +1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & A_1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

Struktursatz für euklidische Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & & \\ & & +1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & A_1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

→ satz 11.7

Struktursatz für euklidische Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat ...

eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & 0 & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

Struktursatz für euklidische Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & 0 & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

→ satz 11.7

Struktursatz für euklidische Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis eine darstellende Matrix der Form ...

Struktursatz für euklidische Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & 0 & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

→ satz 11.7

Sei K eine Körper, V ein K-Vektorraum, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.
Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ heißt **f-stabil**, falls ...

Sei K eine Körper, V ein K-Vektorraum, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.
Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ heißt **f-stabil**, falls $f(W) \subseteq W$.

→ Satz 11.7

Jede Isometrie f eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums $V \neq \{0\}$ besitzt ... (Untervektorraum)

Jede Isometrie f eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums $V \neq \{0\}$ besitzt einen f-stabilen Untervektorraum der Dimension 1 oder 2.

→ Lemma 11.11

Struktursatz für unitäre Isometrien
Jede Isometrie eines … unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

Struktursatz für unitäre Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

→ Satz 11.12

Struktursatz für unitäre Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird …
dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

Struktursatz für unitäre Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

→ Satz 11.12

Struktursatz für unitäre Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis dargestellt von …

Struktursatz für unitäre Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

→ Satz 11.12

Ein Endomorphismus f eines euklidischen oder unitären Vektorraums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist *selbstadjungiert*, falls …

Ein Endomorphismus f eines euklidischen oder unitären Vektorraums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist *selbstadjungiert*, falls

$$\langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, f(\mathbf{w}) \rangle \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$$

→ Def. 12.1

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n), K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann sind äquivalent:

- ...
- A ist symmetrisch ($A = A^T$) bzw. hermitesch ($A = \overline{A^T}$)

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n), K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann sind äquivalent:

- Die lineare Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^n$ ist *selbstadjungiert* bezüglich des Standardskalarprodukts auf K^n.
- A ist symmetrisch ($A = A^T$) bzw. hermitesch ($A = \overline{A^T}$)

→ Notiz 12.2

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n), K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann sind äquivalent:

- Die lineare Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^n$ ist *selbstadjungiert* bezüglich des Standardskalarprodukts auf K^n.
- ...

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n), K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann sind äquivalent:

- Die lineare Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^n$ ist *selbstadjungiert* bezüglich des Standardskalarprodukts auf K^n.
- A ist symmetrisch ($A = A^T$) bzw. hermitesch ($A = \overline{A^T}$)

→ Notiz 12.2

Alle Eigenwerte eines *selbstadjungierten* Endomorphismus ...

Alle Eigenwerte eines *selbstadjungierten* Endomorphismus sind reell.

→ Satz 12.3

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten eines *selbstadjungierten* Endomorphismus ...

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten eines *selbstadjungierten* Endomorphismus stehen senkrecht zueinander.

→ Satz 12.3

Spektralsatz

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.
Zu … f auf V existiert eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.

Spektralsatz
(Hauptachsentransformation für selbstadj. Abb.)
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.
Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus f auf V existiert eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.

→ Satz 12.4

Spektralsatz
(Hauptachsentransformation für selbstadj. Abb.)
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.
Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus f auf V existiert …

Spektralsatz
(Hauptachsentransformation für selbstadj. Abb.)
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.
Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus f auf V existiert eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.

→ Satz 12.4

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder … Matrix A existiert eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix … mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit ...

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = S^T AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder ... Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{U}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^T AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{U}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = \overline{S}^T AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix ... mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^T AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{U}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = \overline{S}^T AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{U}(n)$ mit ...

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{U}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = \overline{S}^T AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert ... B mit

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B, in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.6

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B, in der gilt: ...

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B, in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.6

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform β auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert ... mit:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform β auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B, in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.6

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform β auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B, in der gilt: ...

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform β auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B, in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.6

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und β eine Bilinearform auf V.
Die assoziierte **quadratische Abbildung** ist ...

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und β eine Bilinearform auf V.
Die assoziierte **quadratische Abbildung** ist

$$\begin{aligned} q_\beta : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

→ Def 12.7

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und β eine Bilinearform auf V.
Die assoziierte **reelle affine Quadrik** ist ...

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und β eine Bilinearform auf V.
Die assoziierte **reelle affine Quadrik** ist die Menge

$$Q_\beta := \{\mathbf{v} \in V \mid \beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1\}$$

→ Def 12.7

Hauptachsentransformation für Quadriken
Jede reelle affine Quadrik in einem euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ hat bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis $(\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n})$ von V die Form ...

Hauptachsentransformation für Quadriken
Jede reelle affine Quadrik in einem **euklidischen** Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ hat bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis $(\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n})$ von V die Form

$$Q = \{\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{b_i} \in V \mid \sum a_i x_i^2 = 1\}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.8

Trägheitssatz von Sylvester
Jede reelle symmetrische Matrix A ist kongruent zu einer Diagonalmatrix der Form ...

Trägheitssatz von Sylvester
Jede reelle symmetrische Matrix A ist kongruent zu einer Diagonalmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & +1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Die Anzahl der $+1$-, -1- und 0-Einträge ist dabei durch A eindeutig bestimmt.

→ Satz 12.9

Ein **Integritätsring** ist ein ... Ring R, in dem für alle $a, b \in R$ gilt:

$$ab = 0 \Rightarrow [a = 0 \text{ oder } b = 0]$$

Ein **Integritätsring** ist ein kommutativer Ring R, in dem für alle $a, b \in R$ gilt:

$$ab = 0 \Rightarrow [a = 0 \text{ oder } b = 0]$$

→ Def. 13.1

Ein **Integritätsring** ist ein kommutativer Ring R, in dem gilt: ...

Ein **Integritätsring** ist ein kommutativer Ring R, in dem für alle $a, b \in R$ gilt:

$$ab = 0 \Rightarrow [a = 0 \text{ oder } b = 0]$$

→ Def. 13.1

Für jeden Integritätsring R ist (Polynomring über R) ... .

Für jeden Integritätsring R ist auch $R[X]$ ein Integritätsring.

→ Satz 13.2

Für jeden Integritätsring R gilt

$$(R[X])^\times =$$

Für jeden Integritätsring R gilt

$$(R[X])^\times = R^\times$$

→ Satz 13.2

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
a ist ein **Teiler** von b und b ist ein **Vielfaches** von a ($a|b$) genau dann, wenn $\ldots$

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
a ist ein **Teiler** von b und b ist ein **Vielfaches** von a ($a|b$) genau dann, wenn

$$\exists c \in R \colon b = c \cdot a$$

→ Def. 13.4

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
a und b sind **assoziiert** ($a \sim b$) genau dann, wenn $\ldots$

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
a und b sind **assoziiert** ($a \sim b$) genau dann, wenn

$$\exists c \in R^\times : b = c \cdot a$$

→ Def. 13.4

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
c ist ein **größter gemeinsamer Teiler** von a und b ($c \sim \mathrm{ggT}(a, b)$) genau dann, wenn

- $\ldots$

und

- $\forall c' \in R \colon (c'|a)$ und $(c'|b) \Rightarrow c'|c$

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
c ist ein **größter gemeinsamer Teiler** von a und b ($c \sim \mathrm{ggT}(a, b)$) genau dann, wenn

- $c|a$ und $c|b$

und

- $\forall c' \in R \colon (c'|a)$ und $(c'|b) \Rightarrow c'|c$

→ Def. 13.7

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
c ist ein **größter gemeinsamer Teiler** von a und b ($c \sim \mathrm{ggT}(a, b)$) genau dann, wenn

- $c|a$ und $c|b$

und

- $\ldots$

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
c ist ein **größter gemeinsamer Teiler** von a und b ($c \sim \mathrm{ggT}(a, b)$) genau dann, wenn

- $c|a$ und $c|b$

und

- $\forall c' \in R \colon (c'|a)$ und $(c'|b) \Rightarrow c'|c$

→ Def. 13.7

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
a und b sind **teilerfremd**, falls $\ldots$

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
a und b sind **teilerfremd**, falls $1 \sim \operatorname{ggT}(a, b)$

→ Def. 13.7

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
c ist ein **kleinstes gemeinsames Vielfaches** von a und b ($c \sim \operatorname{kgV}(a, b)$) genau dann, wenn

- $\ldots$

und

- $\forall c' \in R$: $(a|c')$ und $(b|c') \Rightarrow c|c'$

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
c ist ein **kleinstes gemeinsames Vielfaches** von a und b ($c \sim \operatorname{kgV}(a, b)$) genau dann, wenn

- $a|c$ und $b|c$

und

- $\forall c' \in R$: $(a|c')$ und $(b|c') \Rightarrow c|c'$

→ Def. 13.7

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
c ist ein **kleinstes gemeinsames Vielfaches** von a und b ($c \sim \operatorname{kgV}(a, b)$) genau dann, wenn

- $a|c$ und $b|c$

und

- $\ldots$

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
c ist ein **kleinstes gemeinsames Vielfaches** von a und b ($c \sim \operatorname{kgV}(a, b)$) genau dann, wenn

- $a|c$ und $b|c$

und

- $\forall c' \in R$: $(a|c')$ und $(b|c') \Rightarrow c|c'$

→ Def. 13.7

Ein Integritätsring R ist **euklidisch**, falls eine Abbildung
$$\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$$
mit folgender Eigenschaft existiert:
Für $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ existieren q, r mit
$$\ldots$$
und
$$r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(b)$$

Ein Integritätsring R ist **euklidisch**, falls eine Abbildung
$$\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$$
mit folgender Eigenschaft existiert:
Für $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ existieren q, r mit
$$a = q \cdot b + r$$
und
$$r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(b)$$

Ein Integritätsring R ist **euklidisch**, falls eine Abbildung

$$\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$$

mit folgender Eigenschaft existiert:
Für $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ existieren q, r mit

$$a = q \cdot b + r$$

und

$$\ldots$$

Ein Integritätsring R ist **euklidisch**, falls eine Abbildung

$$\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$$

mit folgender Eigenschaft existiert:
Für $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ existieren q, r mit

$$a = q \cdot b + r$$

und

$$r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(b)$$

→ Def. 13.9

Lemma von Bézout
In jedem euklidischen Ring gilt:

$$c \sim \mathrm{ggT}(a, b) \Rightarrow$$

Lemma von Bézout
In jedem euklidischen Ring gilt:

$$c \sim \mathrm{ggT}(a, b) \Rightarrow \exists x, y \colon c = xa + yb$$

→ Lemma 13.13

In jedem euklidischen Ring gilt:

$$a, b \text{ teilerfremd } \Leftrightarrow$$

In jedem euklidischen Ring gilt:

$$a, b \text{ teilerfremd } \Leftrightarrow \exists x, y \colon 1 = x \cdot a + y \cdot b$$

→ Korollar 13.14

In jedem euklidischen Ring gilt:

$$\Leftrightarrow \exists x, y \colon 1 = x \cdot a + y \cdot b$$

In jedem euklidischen Ring gilt:

$$a, b \text{ teilerfremd } \Leftrightarrow \exists x, y \colon 1 = x \cdot a + y \cdot b$$

→ Korollar 13.14

Sei R ein Integritätsring.
Ein Element $p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ ist **irreduzibel**, falls ...

Def

Sei R ein Integritätsring.
Ein Element $p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ ist **irreduzibel**, falls für $a, b \in R$ gilt:

$$p = a \cdot b \Rightarrow (a \in R^\times \text{ oder } b \in R^\times)$$

→ Def. 13.15

Sei R ein Integritätsring.
Ein Element $p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ ist **prim**, falls ...

Def

Sei R ein Integritätsring.
Ein Element $p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ ist **prim**, falls für $a, b \in R$ gilt:

$$p|ab \Rightarrow p|b \text{ oder } p|a$$

→ Def. 13.15

In einem Integritätsring R gilt: (Zusammenhang prim und irreduzibel) ...

Satz

In einem Integritätsring R gilt:

$$p \in R \text{ prim } \Rightarrow p \text{ irreduzibel}$$

→ Satz 13.16

In einem euklidischen Ring R gilt: (Zusammenhang prim und irreduzibel)

Satz

... In einem euklidischen Ring R gilt:

$$p \in R \text{ prim } \Leftrightarrow p \text{ irreduzibel}$$

→ Satz 13.16

Eine **Primfaktorzerlegung** von $a \in R$ ist ...

Def
LinA-II-13-Euklidische-Ringe e5c8519c-02d7-4561-8a22-6aba87daa2b3

Eine **Primfaktorzerlegung** von $a \in R$ ist eine Darstellung von a als Produkt

$$a = p_1 p_2 \cdots p_r$$

mit $r \in \mathbb{N}$ und $p_i \in R$ prim.

→ Def. 13.19

Ein Integritätsring R heißt **faktoriell**, wenn ...

Def
LinA-II-13-Euklidische-Ringe e5c8519c-02d7-4561-8a22-6aba87daa2b3

Ein Integritätsring R heißt **faktoriell**, wenn jedes $a \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ eine Primfaktorzerlegung besitzt.

→ Def. 13.19

Falls eine *Primfaktorzerlegung* von $a \in R$ existiert, so ist diese ...

Satz
LinA-II-13-Euklidische-Ringe 89327ded-c7e4-49f1-a10f-9199de4016be

Falls eine *Primfaktorzerlegung* von $a \in R$ existiert, so ist diese *eindeutig* bis auf Reihenfolge der Faktoren und Assoziiertheit.

→ Satz 13.20

Für jeden Körper K ist ... faktoriell.

Satz
LinA-II-13-Euklidische-Ringe 8a2baefd-95e9-4ac4-91d6-96ab9a9a7d0c

Für jeden Körper K ist $K[X]$ faktoriell.

→ Satz 13.22

Das **Minimalpolynom** von f ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$ für das gilt:

(1) ...

(2) Unter allen Polynomen $\neq 0$, die (1) erfüllen, hat μ_f minimalen Grad.

(3) μ_f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient $= 1$)

Das **Minimalpolynom** von f ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$ für das gilt:

(1) $\mu_f(f) = 0$ (Nullabbildung in $\mathrm{End}_K(V)$)

(2) Unter allen Polynomen $\neq 0$, die (1) erfüllen, hat μ_f minimalen Grad.

(3) μ_f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient $= 1$)

→ Def. 14.4

Das **Minimalpolynom** von f ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$ für das gilt:

(1) $\mu_f(f) = 0$ (Nullabbildung in $\mathrm{End}_K(V)$)

(2) ...

(3) μ_f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient $= 1$)

Das **Minimalpolynom** von f ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$ für das gilt:

(1) $\mu_f(f) = 0$ (Nullabbildung in $\mathrm{End}_K(V)$)

(2) Unter allen Polynomen $\neq 0$, die (1) erfüllen, hat μ_f minimalen Grad.

(3) μ_f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient $= 1$)

→ Def. 14.4

Das **Minimalpolynom** von f ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$ für das gilt:

(1) $\mu_f(f) = 0$ (Nullabbildung in $\mathrm{End}_K(V)$)

(2) Unter allen Polynomen $\neq 0$, die (1) erfüllen, hat μ_f minimalen Grad.

(3) ...

Das **Minimalpolynom** von f ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$ für das gilt:

(1) $\mu_f(f) = 0$ (Nullabbildung in $\mathrm{End}_K(V)$)

(2) Unter allen Polynomen $\neq 0$, die (1) erfüllen, hat μ_f minimalen Grad.

(3) μ_f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient $= 1$)

→ Def. 14.4

Satz von Caley-Hamilton
Für das charakteristische Polynom eines Endomorphismus f gilt ...

Satz von Caley-Hamilton
Für das charakteristische Polynom eines Endomorphismus f gilt

$$\chi_f(f) = 0$$

→ Satz 14.7

Satz von Caley-Hamilton im zyklischen Fall
Ist $W \subseteq V$ f-zyklisch, so ist
...
das Minimalpolynom für $f|_W$.

Satz von Caley-Hamilton im zyklischen Fall
Ist $W \subseteq V$ f-zyklisch, so ist

$$(-1)^{\dim W} \chi_{f|_W}$$

das Minimalpolynom für $f|_W$.

→ Satz 14.13

Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist **f-zyklisch**, falls ...

Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist **f-zyklisch**, falls

$$W = \langle \mathbf{w}, f(\mathbf{w}), f^2(\mathbf{w}), \ldots \rangle \text{ für ein } \mathbf{w} \in V$$

→ Def. 14.8

Ist W ein *f-zyklischer* Untervektorraum der Dimension d, so ist (Basis) ...

Ist W ein *f-zyklischer* Untervektorraum der Dimension d, so ist $(\mathbf{w}, f(\mathbf{w}), f^2(\mathbf{w}), \ldots, f^{d-1}(\mathbf{w}))$ eine Basis von W.

→ Lemma 14.10

Die **Begleitmatrix** zu einem normierten Polynom $A = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$ ist die Matrix ...

Die **Begleitmatrix** zu einem normierten Polynom $A = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & -a_{d-2} \\ 0 & & & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

→ Def 14.11

Sei f ein V-Endomorphismus.
Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist genau dann ... ,
wenn er f-stabil ist und eine Basis besitzt, in der $f|_W$ durch eine Begleitmatrix gegeben ist.

Satz
LinA-II-14-Minimalpolynom 66558bcf-5640-4356-9392-437b27624b3d

Sei f ein V-Endomorphismus.
Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist genau dann f-zyklisch,
wenn er f-stabil ist und eine Basis besitzt, in der $f|_W$ durch eine Begleitmatrix gegeben ist.

→ Satz 14.12

Sei f ein V-Endomorphismus.
Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist genau dann f-zyklisch,
wenn ...

Satz
LinA-II-14-Minimalpolynom 66558bcf-5640-4356-9392-437b27624b3d

Sei f ein V-Endomorphismus.
Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist genau dann f-zyklisch,
wenn er f-stabil ist und eine Basis besitzt, in der $f|_W$ durch eine Begleitmatrix gegeben ist.

→ Satz 14.12

Spaltungssatz
Sei f ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V.
Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Polynome P und Q, so ist

$$V =$$

Satz
LinA-II-14-Minimalpolynom 707fad0f-485b-4dae-a099-bc9f6c2859b1

Spaltungssatz
Sei f ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V.
Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Polynome P und Q, so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei f-stabile Untervektorräume W_P und W_Q.

→ Satz 14.17

Spaltungssatz
Sei f ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V.
Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Polynome P und Q, so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei f-stabile Untervektorräume W_P und W_Q, für die gilt:

$$W_P = \qquad \text{und } \mu_f|_{W_P} = P$$

$$W_Q = \qquad \text{und } \mu_f|_{W_Q} = Q$$

Spaltungssatz
Sei f ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V.
Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Polynome P und Q, so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei f-*stabile* Untervektorräume W_P und W_Q, für die gilt:

$$W_P = \ker(P(f)) = \operatorname{im}(Q(f)) \text{ und } \mu_f|_{W_P} = P$$

$$W_Q = \ker(Q(f)) = \operatorname{im}(P(f)) \text{ und } \mu_f|_{W_Q} = Q$$

→ Satz 14.17

Spaltungssatz
Sei f ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V. Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Polynome P und Q, so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei f-*stabile* Untervektorräume W_P und W_Q, für die gilt:

$$W_P = \ker(P(f)) = \operatorname{im}(Q(f)) \text{ und } \dots$$

$$W_Q = \ker(Q(f)) = \operatorname{im}(P(f)) \text{ und } \dots$$

Spaltungssatz
Sei f ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V. Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Polynome P und Q, so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei f-*stabile* Untervektorräume W_P und W_Q, für die gilt:

$$W_P = \ker(P(f)) = \operatorname{im}(Q(f)) \text{ und } \mu_f|_{W_P} = P$$

$$W_Q = \ker(Q(f)) = \operatorname{im}(P(f)) \text{ und } \mu_f|_{W_Q} = Q$$

→ Satz 14.17

Drittes Diagonalisierbarkeitskriterium
Ein Endomorphismus f ist diagonalisierbar genau dann, wenn (Minimalpolynom) ...

Satz
LinA-II-14-Minimalpolynom 18d801db-b3d0-4036-bfb0-0472478225c4

Drittes Diagonalisierbarkeitskriterium
Ein Endomorphismus f ist diagonalisierbar genau dann, wenn μ_f in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

→ Korollar 14.19

Ein **Jordanblock** ist ...

Def
LinA-II-15-Jordannormalform 2c897805-8ca5-4437-8781-b1ad98648537

Ein **Jordanblock** ist eine (Unter-)matrix der Form

$$J(m; a) := \begin{pmatrix} a & 1 & & & \Huge 0 \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \Huge 0 & & & & a \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_K(m \times m)$$

→ Def 15.1

Ein **Hauptraumblock** ist ...

Def
LinA-II-15-Jordannormalform 2c897805-8ca5-4437-8781-b1ad98648537

Ein **Hauptraumblock** ist eine (Unter-)matrix der Form

$$H(m_1, \dots, m_k; a) := \begin{pmatrix} \boxed{J(m_1; a)} & & & \Huge 0 \\ & \boxed{J(m_2; a)} & & \\ & & \ddots & \\ \Huge 0 & & & \boxed{J(m_k; a)} \end{pmatrix}$$

→ Def 15.1

Jordannormalform

Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.
Zerfällt χ_f in Linearfaktoren, so hat f bezüglich einer geeigneten Basis folgende Gestalt:
...

Satz
LinA-II-15-Jordannormalform 15f3d72f-70b5-495b-bb04-a3f157dbea7b

Jordannormalform

Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.
Zerfällt χ_f in Linearfaktoren, so hat f bezüglich einer geeigneten Basis folgende Gestalt:

$$ {}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{H(\dots;a_1)} & & & \\ & \boxed{H(\dots;a_2)} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{H(\dots;a_l)} \end{pmatrix} $$

Dabei sind die Hauptraumblöcke und die Jordanblöcke innerhalb dieser bis auf Reihenfolge eindeutig.

→ Theorem 15.2

Jordannormalform

Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.
Wenn ... , so hat f bezüglich einer geeigneten Basis folgende Gestalt:

$$ {}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{H(\dots;a_1)} & & & \\ & \boxed{H(\dots;a_2)} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{H(\dots;a_l)} \end{pmatrix} $$

Dabei sind die Hauptraumblöcke und die Jordanblöcke innerhalb dieser bis auf Reihenfolge eindeutig.

Jordannormalform

Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.
Wenn χ_f in Linearfaktoren zerfällt, so hat f bezüglich einer geeigneten Basis folgende Gestalt:

$$ {}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{H(\dots;a_1)} & & & \\ & \boxed{H(\dots;a_2)} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{H(\dots;a_l)} \end{pmatrix} $$

Dabei sind die Hauptraumblöcke und die Jordanblöcke innerhalb dieser bis auf Reihenfolge eindeutig.

→ Theorem 15.2

Für die Jordannormalform von f gilt:

- $a_1, \dots, a_l$ sind ...
- Größe von $H(m_1, \dots, m_k; a)$ ist die algebraische Vielfachheit von a.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \chi_f\})$
- Größe m des größten Jordanblocks $J(m;a)$ zu a ist der Exponent von $(X-a)$ in μ_f.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \mu_f\})$

Für die Jordannormalform von f gilt:

- $a_1, \dots, a_l$ sind die verschiedenen Eigenwerte von f.
- Größe von $H(m_1, \dots, m_k; a)$ ist die algebraische Vielfachheit von a.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \chi_f\})$
- Größe m des größten Jordanblocks $J(m;a)$ zu a ist der Exponent von $(X-a)$ in μ_f.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \mu_f\})$

→ Notiz 15.3

Für die Jordannormalform von f gilt:

- $a_1, \dots, a_l$ sind die verschiedenen Eigenwerte von f.
- Größe von $H(m_1, \dots, m_k; a)$ ...
- Größe m des größten Jordanblocks $J(m;a)$ zu a ist der Exponent von $(X-a)$ in μ_f.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \mu_f\})$

Für die Jordannormalform von f gilt:

- $a_1, \dots, a_l$ sind die verschiedenen Eigenwerte von f.
- Größe von $H(m_1, \dots, m_k; a)$ ist die algebraische Vielfachheit von a.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \chi_f\})$
- Größe m des größten Jordanblocks $J(m;a)$ zu a ist der Exponent von $(X-a)$ in μ_f.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \mu_f\})$

→ Notiz 15.3

Für die Jordannormalform von f gilt:

- $a_1, \dots, a_l$ sind die verschiedenen Eigenwerte von f.
- Größe von $H(m_1, \dots, m_k; a)$ ist die algebraische Vielfachheit von a.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \chi_f\})$
- Größe m des größten Jordanblocks $J(m; a)$ zu a …

Für die Jordannormalform von f gilt:

- $a_1, \dots, a_l$ sind die verschiedenen Eigenwerte von f.
- Größe von $H(m_1, \dots, m_k; a)$ ist die algebraische Vielfachheit von a.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \chi_f\})$
- Größe m des größten Jordanblocks $J(m; a)$ zu a ist der Exponent von $(X-a)$ in μ_f.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \mu_f\})$

→ Notiz 15.3

Triagonalisierbarkeitskriterium
Ein Endomorphismus f ist **triagonalisierbar**, falls …

Triagonalisierbarkeitskriterium
Ein Endomorphismus f ist **triagonalisierbar**, falls eine Basis B existiert, in der ${}_BM_B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

→ Def. 15.4

Sei a ein Eigenwert von f, sei $\mu_f = (X-a)^m \cdot P$ mit P teilerfremd zu $(X-a)$.
Der **Hauptraum** von f zu a ist …

Sei a ein Eigenwert von f, sei $\mu_f = (X-a)^m \cdot P$ mit P teilerfremd zu $(X-a)$.
Der **Hauptraum** von f zu a ist

$$\mathrm{Hau}(f; a) := \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^m)$$

→ Def. 15.7

Hauptraumzerlegung
Zerfällt χ_f in Linearfaktoren, so (Zerlegung von V) …

Hauptraumzerlegung
Zerfällt χ_f in Linearfaktoren, so zerfällt V in die Haupträume:

$$V = \oplus_{i=1}^{l} \mathrm{Hau}(f; a_i)$$

wobei $a_1, \dots, a_l$ die verschiedenen Eigenwerte von f sind.

→ Satz 15.8

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) ...

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X-a)^r$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) = r$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^i)\ \forall i \geqslant m$.

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) $\mathrm{Hau}(f;a)$ ist f-stabil.

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X-a)^r$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) = r$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^i)\ \forall i \geqslant m$.

→ Satz 15.9

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) $\mathrm{Hau}(f;a)$ ist f-stabil.

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} =$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) = r$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^i)\ \forall i \geqslant m$.

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) $\mathrm{Hau}(f;a)$ ist f-stabil.

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X-a)^r$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) = r$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^i)\ \forall i \geqslant m$.

→ Satz 15.9

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) $\mathrm{Hau}(f;a)$ ist f-stabil.

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X-a)^r$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} =$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) = r$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^i)\ \forall i \geqslant m$.

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) $\mathrm{Hau}(f;a)$ ist f-stabil.

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X-a)^r$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) = r$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^i)\ \forall i \geqslant m$.

→ Satz 15.9

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) $\mathrm{Hau}(f;a)$ ist f-stabil.

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X-a)^r$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) =$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^i)\ \forall i \geqslant m$.

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) $\mathrm{Hau}(f;a)$ ist f-stabil.

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X-a)^r$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) = r$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^i)\ \forall i \geqslant m$.

→ Satz 15.9

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) $\mathrm{Hau}(f;a)$ ist f-stabil.

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X-a)^r$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) = r$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) =$.

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) $\mathrm{Hau}(f;a)$ ist f-stabil.

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X-a)^r$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) = r$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^i)\ \forall i \geqslant m$.

→ Satz 15.9

Ein Endomorphismus g ist **nilpotent**, wenn ...

Def
LinA-II-15-Jordannormalform 32fa39ce-09db-4219-a5c1-6c2e711728c6

Ein Endomorphismus g ist **nilpotent**, wenn $g^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

→ Def. 15.10

Für einen (endlich-dimenionalen) Vektorraum V mit Untervektorräumen $U_1, \ldots, U_k$ sind äquivalent:

(1) ...

(2) V hat eine Basis der Form

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

derart, dass $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ Basis von U_i ist.

(3) Für beliebige Basen $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ von U_i ist

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

eine Basis von V.

Für einen (endlich-dimenionalen) Vektorraum V mit Untervektorräumen $U_1, \ldots, U_k$ sind äquivalent:

(1) $V = \oplus_{i=1}^k U_i$

(2) V hat eine Basis der Form

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

derart, dass $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ Basis von U_i ist.

(3) Für beliebige Basen $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ von U_i ist

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

eine Basis von V.

→ Notiz 15.13

Für einen (endlich-dimenionalen) Vektorraum V mit Untervektorräumen $U_1, \ldots, U_k$ sind äquivalent:

(1) $V = \oplus_{i=1}^k U_i$

(2) ...

(3) Für beliebige Basen $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ von U_i ist

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

eine Basis von V.

Für einen (endlich-dimenionalen) Vektorraum V mit Untervektorräumen $U_1, \ldots, U_k$ sind äquivalent:

(1) $V = \oplus_{i=1}^k U_i$

(2) V hat eine Basis der Form

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

derart, dass $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ Basis von U_i ist.

(3) Für beliebige Basen $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ von U_i ist

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \ldots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

eine Basis von V.

→ Notiz 15.13

Für einen (endlich-dimenionalen) Vektorraum V mit Untervektorräumen $U_1, \dots, U_k$ sind äquivalent:

(1) $V = \oplus_{i=1}^k U_i$

(2) V hat eine Basis der Form

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

derart, dass $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ Basis von U_i ist.

(3) ...

Für einen (endlich-dimenionalen) Vektorraum V mit Untervektorräumen $U_1, \dots, U_k$ sind äquivalent:

(1) $V = \oplus_{i=1}^k U_i$

(2) V hat eine Basis der Form

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

derart, dass $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ Basis von U_i ist.

(3) Für beliebige Basen $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ von U_i ist

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

eine Basis von V.

→ Notiz 15.13

Ein **komplementärer Untervektorraum** zu einem Untervektorraum $W \subseteq V$ ist ein Untervektorraum U ...

Ein **komplementärer Untervektorraum** zu einem Untervektorraum $W \subseteq V$ ist ein Untervektorraum $U \subseteq V$ mit

$$V = W \oplus U$$

→ Def. 14.15

Jordannormalform im nilpotenten Fall

Zu jedem nilpotenten Endomorphismus g existiert ...

Jordannormalform im nilpotenten Fall

Zu jedem nilpotenten Endomorphismus g existiert eine *Jordanbasis*, also eine Basis B, in der ${}_B M_B(g)$ JNF hat

$$\begin{aligned} {}_B M_B(g) &= H(m_1, \dots, m_k; 0) \\ &= \begin{pmatrix} J(m_1;0) & & & 0 \\ & J(m_2;0) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J(m_3;0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $J(m;0) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

→ Satz 15.16