

<p>Jede Bilinearform β auf K^n liefert eine Matrix ...</p>	<p>Jede Bilinearform β auf K^n liefert eine Matrix $M(\beta) \in \text{Mat}_K(n \times n)$ der Gestalt</p> $M(\beta) := \beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{ij}$ <p>→ Satz 10.2</p>
<p>Jede Matrix $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ liefert eine ... wie folgt:</p>	<p>Jede Matrix $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ liefert eine Bilinearform auf K^n wie folgt:</p> $\begin{aligned} \beta_A : K^n \times K^n &\longrightarrow K \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto \mathbf{v}^T A \mathbf{w} \end{aligned}$ <p>→ Satz 10.2</p>
<p>Die Menge der Bilinearformen auf K^n und die Menge der $n \times n$ Matrizen über K sind ...</p>	<p>Die Menge der Bilinearformen auf K^n und die Menge der $n \times n$ Matrizen über K sind isomorph.</p> <p>→ Satz 10.2</p>
<p>Die darstellende Matrix einer Bilinearform β bezüglich einer Basis $B = (\mathbf{b}_i)_i$ ist gegeben durch ...</p>	<p>Die darstellende Matrix einer Bilinearform β bezüglich einer Basis $B = (\mathbf{b}_i)_i$ ist gegeben durch</p> $M_B(\beta) := \beta(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_{ij}$ <p>→ Def. 10.3</p>

<p>Zwei Matrizen A, A' sind kongruent, falls es ...</p>	<p>Zwei quadratische Matrizen A, A' sind kongruent, falls es eine invertierbare Matrix S gibt mit</p> $A' = S^T A S$ <p>→ Def. 10.5</p>
<p>Eine Bilinearform β auf V ist symmetrisch, falls ...</p>	<p>Eine Bilinearform β auf V ist symmetrisch, falls für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$</p> $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ <p>→ Def. 10.7</p>
<p>Eine Bilinearform β auf V ist schiefssymmetrisch, falls ...</p>	<p>Eine Bilinearform β auf V ist schiefssymmetrisch, falls für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$</p> $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ <p>→ Def. 10.7</p>
<p>Eine Bilinearform β auf V ist alternierend, falls ...</p>	<p>Eine Bilinearform β auf V ist alternierend, falls für alle $\mathbf{v} \in V$</p> $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ <p>→ Def. 10.7</p>

<div data-bbox="57 60 748 132" data-label="Text"> <p>Eine Bilinearform β ist symmetrisch genau dann, wenn ... (darstellende Matrix)</p> </div> <div data-bbox="57 510 748 546" data-label="Text"> <p>Satz LinA-II-10-Skalarproduktefb0e2cdc-bbf2-11ec-8422-0242ac120002</p> </div>	<div data-bbox="855 60 1546 132" data-label="Text"> <p>Eine Bilinearform β ist symmetrisch genau dann, wenn ihre darstellende Matrix $M(\beta)$ symmetrisch ist:</p> </div> <div data-bbox="1094 156 1297 197" data-label="Equation-Block"> $M(\beta)^T = M(\beta)$ </div> <div data-bbox="1433 271 1536 288" data-label="Text"> <p>→ Satz 10.9</p> </div>
<div data-bbox="57 622 748 692" data-label="Text"> <p>Eine Bilinearform β ist schiefsymmetrisch genau dann, wenn ... (darstellende Matrix)</p> </div> <div data-bbox="57 1070 748 1106" data-label="Text"> <p>Satz LinA-II-10-Skalarproduktefb0e2cdc-bbf2-11ec-8422-0242ac120002</p> </div>	<div data-bbox="855 622 1546 723" data-label="Text"> <p>Eine Bilinearform β ist schiefsymmetrisch genau dann, wenn ihre darstellende Matrix $M(\beta)$ schiefsymmetrisch ist:</p> </div> <div data-bbox="1083 725 1308 766" data-label="Equation-Block"> $M(\beta)^T = -M(\beta)$ </div> <div data-bbox="1433 826 1536 844" data-label="Text"> <p>→ Satz 10.9</p> </div>
<div data-bbox="57 1182 748 1252" data-label="Text"> <p>Eine Bilinearform β ist alternierend genau dann, wenn ... (darstellende Matrix)</p> </div> <div data-bbox="57 1630 748 1666" data-label="Text"> <p>Satz LinA-II-10-Skalarproduktefb0e2cdc-bbf2-11ec-8422-0242ac120002</p> </div>	<div data-bbox="855 1182 1546 1252" data-label="Text"> <p>Eine Bilinearform β ist alternierend genau dann, wenn für ihre darstellende Matrix $M(\beta)$ gilt:</p> </div> <div data-bbox="1083 1276 1308 1317" data-label="Equation-Block"> $M(\beta)^T = -M(\beta)$ </div> <div data-bbox="855 1348 903 1377" data-label="Text"> <p>und</p> </div> <div data-bbox="1064 1384 1327 1422" data-label="Equation-Block"> $M(\beta)_{ii} = 0 \text{ für alle } i$ </div> <div data-bbox="1433 1480 1536 1498" data-label="Text"> <p>→ Satz 10.9</p> </div>
<div data-bbox="57 1742 748 2145" data-label="Text"> <p>Eine Sesquilinearform η auf einem \mathbb{C}-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:</p> <ul style="list-style-type: none"> ... η ist semilinear in der zweiten Koordinate: $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$ $\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$ </div>	<div data-bbox="855 1742 1546 2145" data-label="Text"> <p>Eine Sesquilinearform η auf einem \mathbb{C}-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:</p> <ul style="list-style-type: none"> η ist linear in der ersten Koordinate: $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$ η ist semilinear in der zweiten Koordinate: $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$ $\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$ </div> <div data-bbox="1425 2195 1536 2213" data-label="Text"> <p>→ Def. 10.10</p> </div>

<p>Eine Sesquilinearform η auf einem \mathbb{C}-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:</p> <ul style="list-style-type: none"> η ist linear in der ersten Koordinate: $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$... 	<p>Eine Sesquilinearform η auf einem \mathbb{C}-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:</p> <ul style="list-style-type: none"> η ist linear in der ersten Koordinate: $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$ η ist semilinear in der zweiten Koordinate: $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$ $\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$ <p>→ Def. 10.10</p>
<p>Eine Sesquilinearform η ist hermitesch, falls ...</p>	<p>Eine Sesquilinearform η ist hermitesch, falls gilt</p> $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\eta(\mathbf{w}, \mathbf{v})}$ <p>für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$</p> <p>→ Def. 10.10</p>
<p>Jede Sesquilinearform η liefert eine Matrix der Form ...</p>	<p>Jede Sesquilinearform η liefert eine Matrix $M(\eta) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ der Form</p> $M(\eta) := \eta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{ij}$ <p>→ Satz 10.11</p>
<p>Zu einer gegebenen komplexen Matrix A existiert eine Sesquilinearform η wie folgt: ...</p>	<p>Zu einer gegebenen komplexen quadratischen Matrix A existiert eine Sesquilinearform η wie folgt:</p> $\eta_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mathbf{v}^T A \overline{\mathbf{w}}$ <p>→ Satz 10.11</p>

<p>Eine symmetrische Bilinearform β auf einem \mathbb{R}-Vektorraum ist positiv definit, falls ...</p>	<p>Eine symmetrische Bilinearform β auf einem \mathbb{R}-Vektorraum ist positiv definit, falls</p> $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \text{ f\"ur alle } \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ <p>→ Def. 10.14</p>
<p>Def LinA-II-10-Skalarprodukte</p> <p>ca81504e-bc10-11ec-8422-0242ac120002</p>	
<p>Eine hermitesche Bilinearform β auf einem \mathbb{C}-Vektorraum ist positiv definit, falls ...</p>	<p>Eine hermitesche Bilinearform β auf einem \mathbb{C}-Vektorraum ist positiv definit, falls</p> $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \text{ f\"ur alle } \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ <p>→ Def. 10.14</p>
<p>Def LinA-II-10-Skalarprodukte</p> <p>ca81504e-bc10-11ec-8422-0242ac120002</p>	
<p>Ein Skalarprodukt auf einem \mathbb{R}-Vektorraum ist ...</p>	<p>Ein Skalarprodukt auf einem \mathbb{R}-Vektorraum ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform.</p> <p>→ Def. 10.15</p>
<p>Def LinA-II-10-Skalarprodukte</p> <p>d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002</p>	
<p>Ein Skalarprodukt auf einem \mathbb{C}-Vektorraum ist ...</p>	<p>Ein Skalarprodukt auf einem \mathbb{C}-Vektorraum ist eine positiv definite hermitesche Bilinearform.</p> <p>→ Def. 10.15</p>
<p>Def LinA-II-10-Skalarprodukte</p> <p>d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002</p>	

<p>Ein euklidischer Vektorraum ist ...</p> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-10-Skalarprodukte</div> <div>d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002</div> </div>	<p>Ein euklidischer Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein \mathbb{R}-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.</p> <div> <div></div> <div></div> <div>→ Def. 10.15</div> </div>
<p>Ein unitärer Vektorraum ist ...</p> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-10-Skalarprodukte</div> <div>d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002</div> </div>	<p>Ein unitärer Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein \mathbb{C}-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.</p> <div> <div></div> <div></div> <div>→ Def. 10.15</div> </div>
<p>Die assoziierte Norm zu einem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist gegeben durch</p> <div> $\ \cdot\ : V \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathbf{v} \mapsto$ </div>	<p>Die assoziierte Norm zu einem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist gegeben durch</p> <div> $\ \cdot\ : V \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathbf{v} \mapsto \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ </div> <p>(Die Norm wird durch das Skalarprodukt induziert.)</p> <div> <div></div> <div></div> <div>→ Def. 10.15</div> </div>
<p>In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:</p> <div> <div>(i) (Verhältnis Norm und 0) ...</div> <div>(ii) $\ s \cdot \mathbf{v}\ = s \ \mathbf{v}\$</div> <div>(iii) Dreiecksungleichung: $\ \mathbf{v} + \mathbf{w}\ \leq \ \mathbf{v}\ + \ \mathbf{w}\$ </div> <div>(iv) Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \ \mathbf{v}\ \cdot \ \mathbf{w}\$ </div> </div>	<p>In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:</p> <div> <div>(i) $\ \mathbf{v}\ \geq 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$ $\ \mathbf{v}\ = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$ </div> <div>(ii) $\ s \cdot \mathbf{v}\ = s \ \mathbf{v}\$</div> <div>(iii) Dreiecksungleichung: $\ \mathbf{v} + \mathbf{w}\ \leq \ \mathbf{v}\ + \ \mathbf{w}\$ </div> <div>(iv) Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \ \mathbf{v}\ \cdot \ \mathbf{w}\$ </div> </div> <div> <div></div> <div></div> <div>→ Satz 10.18</div> </div>

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

- (i) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
 $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- (ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = \dots$
- (iii) **Dreiecksungleichung:**
 $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$
- (iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung:**
 $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

- (i) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
 $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- (ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s| \|\mathbf{v}\|$
- (iii) **Dreiecksungleichung:**
 $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$
- (iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung:**
 $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

- (i) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
 $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- (ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s| \|\mathbf{v}\|$
- (iii) **(Dreiecksungleichung:)**
 \dots
- (iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung:**
 $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

- (i) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
 $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- (ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s| \|\mathbf{v}\|$
- (iii) **Dreiecksungleichung:**
 $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$
- (iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung:**
 $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

- (i) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
 $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- (ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s| \|\mathbf{v}\|$
- (iii) **Dreiecksungleichung:**
 $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$
- (iv) **(Cauchy-Schwarz-Ungleichung):**
 \dots

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

- (i) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
 $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- (ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s| \|\mathbf{v}\|$
- (iii) **Dreiecksungleichung:**
 $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$
- (iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung:**
 $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.
 $\mathbf{v} \in V$ heißt **normiert**, falls \dots

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.
 $\mathbf{v} \in V$ heißt **normiert**, falls $\|\mathbf{v}\| = 1$

→ Def. 10.20

<p>Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ sind zueinander orthogonal, falls ...</p>	<p>Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ sind zueinander orthogonal, falls $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ [Notation: $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$]</p> <p>→ Def. 10.20</p>
<p>Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine Basis B von V heißt Orthonormalbasis von V, falls ...</p>	<p>Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine Basis $B = (\mathbf{b}_i)_i$ von V heißt Orthonormalbasis von V, falls</p> <ul style="list-style-type: none"> • jedes $\mathbf{b}_i \in B$ normiert ist, und • jeweils $\mathbf{b}_i \perp \mathbf{b}_j$ für $i \neq j$ <p>→ Def. 10.20</p>
<p>Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidisch oder unitär. Das orthogonale Komplement eines Untervektorraums $W \subseteq V$ ist</p> $W^\perp :=$	<p>Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidisch oder unitär. Das orthogonale Komplement eines Untervektorraums $W \subseteq V$ ist</p> $W^\perp := \{ \mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \text{ für alle } \mathbf{w} \in W \}$ <p>→ Def. 10.23</p>
<p>Ein affiner Unterraum eines Vektorraums V ist ...</p>	<p>Ein affiner Unterraum eines Vektorraums V ist eine Teilmenge der Form</p> $\mathbf{u}_0 + U = \{ \mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} - \mathbf{u}_0 \in U \}$ <p>für einen Untervektorraum $U \subseteq V$.</p>

Eine **affine Hyperebene** ist ...

Eine **affine Hyperebene** ist ein affiner Unterraum, dessen zugehöriger Untervektorraum U die Dimension $\dim U = \dim V - 1$ hat.

Hessesche Normalform

Jede affine Hyperrebene in einem euklidischen oder unitären VR hat die Form

$$H =$$

Hessesche Normalform

Jede affine Hyperrebene in einem euklidischen oder unitären VR hat die Form

$$H = \{ \mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = d \}$$

für einen normierten Vektor \mathbf{n} und ein $d \in \mathbb{R}$ mit $d \geqslant 0$

→ Satz 10.25

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. (Winkel zwischen Vektoren und ihrem Kreuzprodukt) ...
2. $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$ und $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
2. $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

→ Satz 10.28

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$ und $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
2. (Norm des Kreuzprodukts) ...

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$ und $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
2. $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

→ Satz 10.28

<p>Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine Isometrie ist eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow V$, für die gilt ...</p>	<p>Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine Isometrie ist eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow V$, für die gilt:</p> $\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$ <p>→ Def. 11.1</p>
<p>Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine Isometrie ist ... , für die gilt:</p> $\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$	<p>Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine Isometrie ist eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow V$, für die gilt:</p> $\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$ <p>→ Def. 11.1</p>
<p>Alle Eigenwerte einer Isometrie ...</p> <p>Satz LinA-II-11-Isometrien 21857eac-bf03-11ec-9d64-0242ac120002</p>	<p>Alle Eigenwerte einer Isometrie haben Betrag 1.</p> <p>→ Satz 10.2</p> <p>Satz LinA-II-11-Isometrien 21857eac-bf03-11ec-9d64-0242ac120002</p>
<p>Eigenwerte einer Isometrie in einem euklidischen Vektorraum haben die Form</p> $a =$	<p>Eigenwerte einer Isometrie in einem euklidischen Vektorraum haben die Form</p> $a = \pm 1$ <p>→ Satz 10.2</p>

Eigenwerte einer Isometrie in einem unitären Vektorraum haben die Form

$$a =$$

Eigenwerte einer Isometrie in einem unitären Vektorraum haben die Form

$$a = x + iy \text{ mit } x^2 + y^2 = 1$$

→ Satz 10.2

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer Isometrie ...

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer Isometrie stehen senkrecht zueinander.

→ Satz 10.2

Satz
LinA-II-11-Isometrien

21857eac-bf03-11ec-9d64-0242ac120002

Satz
LinA-II-11-Isometrien

21857eac-bf03-11ec-9d64-0242ac120002

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

- (i) ...
- (ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V .
- (iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V .

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

- (i) f_A ist eine Isometrie auf V .
- (ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V .
- (iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V .

→ Satz 11.3

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

- (i) f_A ist eine Isometrie auf V .
- (ii) ...
- (iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V .
- (iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V .

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

- (i) f_A ist eine Isometrie auf V .
- (ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V .
- (iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V .

→ Satz 11.3

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
 Für $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

- (i) f_A ist eine Isometrie auf V .
- (ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) ...
- (iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V .

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
 Für $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

- (i) f_A ist eine Isometrie auf V .
- (ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V .
- (iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V .

→ Satz 11.3

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
 Für $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

- (i) f_A ist eine Isometrie auf V .
- (ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V .
- (iv) ...

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
 Für $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

- (i) f_A ist eine Isometrie auf V .
- (ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V .
- (iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V .

→ Satz 11.3

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(K) &:= \dots \\ &= (\{A \in \text{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot) \end{aligned}$$

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(K) &:= (\{A \in \text{Mat}_K(n \times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \text{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(K) &:= (\{A \in \text{Mat}_K(n \times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(K) &:= (\{A \in \text{Mat}_K(n \times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \text{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **spezielle lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\mathrm{SL}_n(K) :=$$

Die **spezielle lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\mathrm{SL}_n(K) := (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) = 1\}, \cdot)$$

→ Def/Satz 11.5

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &:= \dots \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **spezielle orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SO}(n) :=$$

Die **spezielle orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SO}(n) := \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

→ Def/Satz 11.5

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) &:= \dots \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **spezielle unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SU}(n) :=$$

Die **spezielle unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SU}(n) := \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

→ Def/Satz 11.5

Eine Isometrie auf \mathbb{R}^2 ist ... oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

Eine Isometrie auf \mathbb{R}^2 ist eine Rotation um $\mathbf{0}$ oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

→ Lemma 11.6

Eine Isometrie auf \mathbb{R}^2 ist eine Rotation um $\mathbf{0}$ oder ...

Eine Isometrie auf \mathbb{R}^2 ist eine Rotation um $\mathbf{0}$ oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

→ Lemma 11.6

Die orthogonale Gruppe $O(2)$ hat die Form

$$O(2) = \dots \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

Die orthogonale Gruppe $O(2)$ hat die Form

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

→ Lemma 11.6

Die orthogonale Gruppe $O(2)$ hat die Form

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \dots$$

Die orthogonale Gruppe $O(2)$ hat die Form

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

→ Lemma 11.6

Struktursatz für euklidische Isometrien

Jede Isometrie eines ... euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k & \ddots \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

Struktursatz für euklidische Isometrien

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k & \ddots \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

→ satz 11.7

Struktursatz für euklidische Isometrien

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat ...

eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & -1 & \\ & & & & & & A_1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

Struktursatz für euklidische Isometrien

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & -1 & \\ & & & & & & A_1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

→ satz 11.7

Struktursatz für euklidische Isometrien

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* eine darstellende Matrix der Form ...

Struktursatz für euklidische Isometrien

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & -1 & \\ & & & & & & A_1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

→ satz 11.7

Sei K eine Körper, V ein K -Vektorraum, $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ heißt **f-stabil**, falls ...

Sei K eine Körper, V ein K -Vektorraum, $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ heißt **f-stabil**, falls $f(W) \subseteq W$.

→ Satz 11.7

Jede Isometrie f eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums $V \neq \{0\}$ besitzt ... (Untervektorraum)

Jede Isometrie f eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums $V \neq \{0\}$ besitzt einen f -stabilen Untervektorraum der Dimension 1 oder 2.

→ Lemma 11.11

Struktursatz für unitäre Isometrien

Jede Isometrie eines ... unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

Struktursatz für unitäre Isometrien

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

→ Satz 11.12

Struktursatz für unitäre Isometrien

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird ... dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

Struktursatz für unitäre Isometrien

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

→ Satz 11.12

Struktursatz für unitäre Isometrien

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* dargestellt von ...

Struktursatz für unitäre Isometrien

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

→ Satz 11.12

Ein Endomorphismus f eines euklidischen oder unitären Vektorraums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist *selbstadjungiert*, falls ...

Ein Endomorphismus f eines euklidischen oder unitären Vektorraums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist *selbstadjungiert*, falls

$$\langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, f(\mathbf{w}) \rangle \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$$

→ Def. 12.1

Sei $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann sind äquivalent:

- ...
- A ist symmetrisch ($A = A^T$)
bzw. hermitesch ($A = \overline{A^T}$)

Sei $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann sind äquivalent:

- Die lineare Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^n$ ist *selbstadjungiert* bezüglich des Standardskalarprodukts auf K^n .
- A ist symmetrisch ($A = A^T$)
bzw. hermitesch ($A = \overline{A^T}$)

→ Notiz 12.2

Sei $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann sind äquivalent:

- Die lineare Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^n$ ist *selbstadjungiert* bezüglich des Standardskalarprodukts auf K^n .
- ...

Sei $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann sind äquivalent:

- Die lineare Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^n$ ist *selbstadjungiert* bezüglich des Standardskalarprodukts auf K^n .
- A ist symmetrisch ($A = A^T$)
bzw. hermitesch ($A = \overline{A^T}$)

→ Notiz 12.2

Alle Eigenwerte eines *selbstadjungierten* Endomorphismus ...

Alle Eigenwerte eines *selbstadjungierten* Endomorphismus sind reell.

→ Satz 12.3

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten eines *selbstadjungierten* Endomorphismus ...

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten eines *selbstadjungierten* Endomorphismus stehen senkrecht zueinander.

→ Satz 12.3

Spektralsatz

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.

Zu ... f auf V
existiert eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f .

Spektralsatz

(Hauptachsentransformation für selbstadj. Abb.)

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.

Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus f auf V existiert eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f .

→ Satz 12.4

Spektralsatz

(Hauptachsentransformation für selbstadj. Abb.)

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.

Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus f auf V existiert ...

Spektralsatz

(Hauptachsentransformation für selbstadj. Abb.)

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.

Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus f auf V existiert eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f .

→ Satz 12.4

Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder ... Matrix A existiert eine Matrix $S \in O(n)$ mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in O(n)$ mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix ... mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in O(n)$ mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix

$A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in O(n)$ mit

...

Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix

$A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in O(n)$ mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder ... Matrix $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in U(n)$ mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in U(n)$ mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix ... mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in U(n)$ mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in U(n)$ mit ...

Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in U(n)$ mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ existiert ... B mit

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B , in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.6

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B , in der gilt: ...

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B , in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.6

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform β auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ existiert ... mit:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform β auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B , in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.6

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform β auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B , in der gilt: ...

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform β auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B , in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.6

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und β eine Bilinearform auf V .

Die assoziierte **quadratische Abbildung** ist ...

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und β eine Bilinearform auf V .

Die assoziierte **quadratische Abbildung** ist

$$q_\beta : V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} \mapsto \beta(\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

→ Def 12.7

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und β eine Bilinearform auf V .

Die assoziierte **reelle affine Quadrik** ist ...

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und β eine Bilinearform auf V .

Die assoziierte **reelle affine Quadrik** ist die Menge

$$Q_\beta := \{\mathbf{v} \in V \mid \beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1\}$$

→ Def 12.7

Hauptachsentransformation für Quadriken

Jede reelle affine Quadrik in einem euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ hat bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ von V die Form ...

Hauptachsentransformation für Quadriken

Jede reelle affine Quadrik in einem **euklidischen** Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ hat bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ von V die Form

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{b}_i \in V \mid \sum a_i x_i^2 = 1 \right\}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.8

Trägheitssatz von Sylvester

Jede reelle symmetrische Matrix A ist kongruent zu einer Diagonalmatrix der Form ...

Trägheitssatz von Sylvester

Jede reelle symmetrische Matrix A ist kongruent zu einer Diagonalmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & +1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & 0 \\ & & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Die Anzahl der +1-, -1- und 0-Einträge ist dabei durch A eindeutig bestimmt.

→ Satz 12.9

<p>Ein Integritätsring ist ein ... Ring R, in dem für alle $a, b \in R$ gilt:</p> $ab = 0 \Rightarrow [a = 0 \text{ oder } b = 0]$	<p>Ein Integritätsring ist ein kommutativer Ring R, in dem für alle $a, b \in R$ gilt:</p> $ab = 0 \Rightarrow [a = 0 \text{ oder } b = 0]$ <p>→ Def. 13.1</p>
<p>Ein Integritätsring ist ein kommutativer Ring R, in dem gilt: ...</p>	<p>Ein Integritätsring ist ein kommutativer Ring R, in dem für alle $a, b \in R$ gilt:</p> $ab = 0 \Rightarrow [a = 0 \text{ oder } b = 0]$ <p>→ Def. 13.1</p>
<p>Für jeden Integritätsring R ist (Polynomring über R) ...</p>	<p>Für jeden Integritätsring R ist auch $R[X]$ ein Integritätsring.</p> <p>→ Satz 13.2</p>
<p>Für jeden Integritätsring R gilt</p> $(R[X])^\times =$	<p>Für jeden Integritätsring R gilt</p> $(R[X])^\times = R^\times$ <p>→ Satz 13.2</p>

<p>Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$. a ist ein Teiler von b und b ist ein Vielfaches von a ($a b$) genau dann, wenn ...</p>	<p>Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$. a ist ein Teiler von b und b ist ein Vielfaches von a ($a b$) genau dann, wenn</p> $\exists c \in R: b = c \cdot a$ <p>→ Def. 13.4</p>
<p>Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$. a und b sind assoziert ($a \sim b$) genau dann, wenn ...</p>	<p>Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$. a und b sind assoziert ($a \sim b$) genau dann, wenn</p> $\exists c \in R^\times: b = c \cdot a$ <p>→ Def. 13.4</p>
<p>Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$. c ist ein größter gemeinsamer Teiler von a und b ($c \sim \text{ggT}(a, b)$) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> ... <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> $\forall c' \in R: (c' a) \text{ und } (c' b) \Rightarrow c' c$ 	<p>Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$. c ist ein größter gemeinsamer Teiler von a und b ($c \sim \text{ggT}(a, b)$) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> $c a$ und $c b$ <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> $\forall c' \in R: (c' a) \text{ und } (c' b) \Rightarrow c' c$ <p>→ Def. 13.7</p>
<p>Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$. c ist ein größter gemeinsamer Teiler von a und b ($c \sim \text{ggT}(a, b)$) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> $c a$ und $c b$ <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> ... 	<p>Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$. c ist ein größter gemeinsamer Teiler von a und b ($c \sim \text{ggT}(a, b)$) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> $c a$ und $c b$ <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> $\forall c' \in R: (c' a) \text{ und } (c' b) \Rightarrow c' c$ <p>→ Def. 13.7</p>

<p>Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$. a und b sind teilerfremd, falls ...</p>	<p>Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$. a und b sind teilerfremd, falls $1 \sim \text{ggT}(a, b)$</p> <p>→ Def. 13.7</p>
<p>Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$. c ist ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b ($c \sim \text{kgV}(a, b)$) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> ... <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> $\forall c' \in R: (a c') \text{ und } (b c') \Rightarrow c c'$ 	<p>Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$. c ist ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b ($c \sim \text{kgV}(a, b)$) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> $a c$ und $b c$ <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> $\forall c' \in R: (a c') \text{ und } (b c') \Rightarrow c c'$ <p>→ Def. 13.7</p>
<p>Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$. c ist ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b ($c \sim \text{kgV}(a, b)$) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> $a c$ und $b c$ <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> ... 	<p>Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$. c ist ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b ($c \sim \text{kgV}(a, b)$) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> $a c$ und $b c$ <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> $\forall c' \in R: (a c') \text{ und } (b c') \Rightarrow c c'$ <p>→ Def. 13.7</p>
<p>Ein Integritätsring R ist euklidisch, falls eine Abbildung</p> $\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ <p>mit folgender Eigenschaft existiert: Für $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ existieren q, r mit</p> \dots <p>und</p> $r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(b)$	<p>Ein Integritätsring R ist euklidisch, falls eine Abbildung</p> $\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ <p>mit folgender Eigenschaft existiert: Für $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ existieren q, r mit</p> $a = q \cdot b + r$ <p>und</p> $r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(b)$

<p>Ein Integritätsring R ist euklidisch, falls eine Abbildung</p> $\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ <p>mit folgender Eigenschaft existiert: Für $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ existieren q, r mit</p> $a = q \cdot b + r$ <p>und</p> \dots	<p>Ein Integritätsring R ist euklidisch, falls eine Abbildung</p> $\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ <p>mit folgender Eigenschaft existiert: Für $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ existieren q, r mit</p> $a = q \cdot b + r$ <p>und</p> $r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(b)$ <p>→ Def. 13.9</p>
<p>Lemma von Bézout In jedem euklidischen Ring gilt:</p> $c \sim \text{ggT}(a, b) \Rightarrow$	<p>Lemma von Bézout In jedem euklidischen Ring gilt:</p> $c \sim \text{ggT}(a, b) \Rightarrow \exists x, y: c = xa + yb$ <p>→ Lemma 13.13</p>
<p>In jedem euklidischen Ring gilt:</p> $a, b \text{ teilerfremd} \Leftrightarrow$	<p>In jedem euklidischen Ring gilt:</p> $a, b \text{ teilerfremd} \Leftrightarrow \exists x, y: 1 = x \cdot a + y \cdot b$ <p>→ Korollar 13.14</p>
<p>In jedem euklidischen Ring gilt:</p> $\Leftrightarrow \exists x, y: 1 = x \cdot a + y \cdot b$	<p>In jedem euklidischen Ring gilt:</p> $a, b \text{ teilerfremd} \Leftrightarrow \exists x, y: 1 = x \cdot a + y \cdot b$ <p>→ Korollar 13.14</p>

<div> <div>Sei R ein Integritätsring.</div> <div>Ein Element $p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ ist irreduzibel, falls ...</div> </div> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-13-Euklidische-Ringe</div> <div>1a1b1607-0506-4438-b2a4-e0f89c3a2089</div> </div>	<div> <div>Sei R ein Integritätsring.</div> <div>Ein Element $p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ ist irreduzibel, falls für $a, b \in R$ gilt:</div> <div> $p = a \cdot b \Rightarrow (a \in R^\times \text{ oder } b \in R^\times)$ </div> <div>→ Def. 13.15</div> </div>
<div> <div>Sei R ein Integritätsring.</div> <div>Ein Element $p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ ist prim, falls ...</div> </div> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-13-Euklidische-Ringe</div> <div>1a1b1607-0506-4438-b2a4-e0f89c3a2089</div> </div>	<div> <div>Sei R ein Integritätsring.</div> <div>Ein Element $p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ ist prim, falls für $a, b \in R$ gilt:</div> <div> $p ab \Rightarrow p b \text{ oder } p a$ </div> <div>→ Def. 13.15</div> </div>
<div> <div>In einem Integritätsring R gilt: (Zusammenhang prim und irreduzibel) ...</div> </div> <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-13-Euklidische-Ringe</div> <div>53b1954d-e3f5-4cd5-aa5c-d8266a638202</div> </div>	<div> <div>In einem Integritätsring R gilt:</div> <div> $p \in R \text{ prim} \Rightarrow p \text{ irreduzibel}$ </div> <div>→ Satz 13.16</div> </div>
<div> <div>In einem euklidischen Ring R gilt: (Zusammenhang prim und irreduzibel)</div> </div> <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-13-Euklidische-Ringe</div> <div>53b1954d-e3f5-4cd5-aa5c-d8266a638202</div> </div>	<div> <div>... In einem euklidischen Ring R gilt:</div> <div> $p \in R \text{ prim} \Leftrightarrow p \text{ irreduzibel}$ </div> <div>→ Satz 13.16</div> </div>

<div data-bbox="57 60 624 94" data-label="Text"> <p>Eine Primfaktorzerlegung von $a \in R$ ist ...</p> </div> <div data-bbox="57 510 738 546" data-label="Text"> <div>Def</div> <div>LinA-II-13-Euklidische-Ringe</div> <div>e5c8519c-02d7-4561-8a22-6aba87daa2b3</div> </div>	<div data-bbox="855 60 1536 129" data-label="Text"> <p>Eine Primfaktorzerlegung von $a \in R$ ist eine Darstellung von a als Produkt</p> </div> <div data-bbox="1106 168 1284 197" data-label="Equation-Block"> $a = p_1 p_2 \cdots p_r$ </div> <div data-bbox="855 228 1206 262" data-label="Text"> <p>mit $r \in \mathbb{N}$ und $p_i \in R$ prim.</p> </div> <div data-bbox="1425 306 1536 324" data-label="Text"> <p>→ Def. 13.19</p> </div>
<div data-bbox="57 622 534 689" data-label="Text"> <p>Ein Integritätsring R heißt faktoriell, wenn ...</p> </div> <div data-bbox="57 1070 738 1106" data-label="Text"> <div>Def</div> <div>LinA-II-13-Euklidische-Ringe</div> <div>e5c8519c-02d7-4561-8a22-6aba87daa2b3</div> </div>	<div data-bbox="855 622 1536 728" data-label="Text"> <p>Ein Integritätsring R heißt faktoriell, wenn jedes $a \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ eine Primfaktorzerlegung besitzt.</p> </div> <div data-bbox="1425 772 1536 790" data-label="Text"> <p>→ Def. 13.19</p> </div>
<div data-bbox="57 1182 738 1249" data-label="Text"> <p>Falls eine <i>Primfaktorzerlegung</i> von $a \in R$ existiert, so ist diese ...</p> </div> <div data-bbox="57 1630 738 1666" data-label="Text"> <div>Satz</div> <div>LinA-II-13-Euklidische-Ringe</div> <div>89327ded-c7e4-49f1-a10f-9199de4016be</div> </div>	<div data-bbox="855 1182 1536 1288" data-label="Text"> <p>Falls eine <i>Primfaktorzerlegung</i> von $a \in R$ existiert, so ist diese <i>eindeutig</i> bis auf Reihenfolge der Faktoren und Assoziiertheit.</p> </div> <div data-bbox="1425 1332 1536 1350" data-label="Text"> <p>→ Satz 13.20</p> </div>
<div data-bbox="57 1742 558 1776" data-label="Text"> <p>Für jeden Körper K ist ... faktoriell.</p> </div> <div data-bbox="57 2190 738 2226" data-label="Text"> <div>Satz</div> <div>LinA-II-13-Euklidische-Ringe</div> <div>8a2baefd-95e9-4ac4-91d6-96ab9a9a7d0c</div> </div>	<div data-bbox="855 1742 1366 1776" data-label="Text"> <p>Für jeden Körper K ist $K[X]$ faktoriell.</p> </div> <div data-bbox="1425 1821 1536 1839" data-label="Text"> <p>→ Satz 13.22</p> </div>

Das **Minimalpolynom** von f ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$ für das gilt:

- (1) ...
- (2) Unter allen Polynomen $\neq 0$, die (1) erfüllen, hat μ_f minimalen Grad.
- (3) μ_f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient = 1)

Das **Minimalpolynom** von f ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$ für das gilt:

- (1) $\mu_f(f) = 0$ (Nullabbildung in $\text{End}_K(V)$)
- (2) Unter allen Polynomen $\neq 0$, die (1) erfüllen, hat μ_f minimalen Grad.
- (3) μ_f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient = 1)

→ Def. 14.4

Das **Minimalpolynom** von f ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$ für das gilt:

- (1) $\mu_f(f) = 0$ (Nullabbildung in $\text{End}_K(V)$)
- (2) ...
- (3) μ_f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient = 1)

Das **Minimalpolynom** von f ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$ für das gilt:

- (1) $\mu_f(f) = 0$ (Nullabbildung in $\text{End}_K(V)$)
- (2) Unter allen Polynomen $\neq 0$, die (1) erfüllen, hat μ_f minimalen Grad.
- (3) μ_f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient = 1)

→ Def. 14.4

Das **Minimalpolynom** von f ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$ für das gilt:

- (1) $\mu_f(f) = 0$ (Nullabbildung in $\text{End}_K(V)$)
- (2) Unter allen Polynomen $\neq 0$, die (1) erfüllen, hat μ_f minimalen Grad.
- (3) ...

Das **Minimalpolynom** von f ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$ für das gilt:

- (1) $\mu_f(f) = 0$ (Nullabbildung in $\text{End}_K(V)$)
- (2) Unter allen Polynomen $\neq 0$, die (1) erfüllen, hat μ_f minimalen Grad.
- (3) μ_f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient = 1)

→ Def. 14.4

Satz von Caley-Hamilton

Für das charakteristische Polynom eines Endomorphismus f gilt ...

Satz von Caley-Hamilton

Für das charakteristische Polynom eines Endomorphismus f gilt

$$\chi_f(f) = 0$$

→ Satz 14.7

Satz von Caley-Hamilton im zyklischen Fall

Ist $W \subseteq V$ f -zyklisch, so ist

...

das Minimalpolynom für $f|_W$.

Satz
LinA-II-14-Minimalpolynom
b684bb58-b59c-4e97-953f-6d32f2a58dcf

Satz von Caley-Hamilton im zyklischen Fall

Ist $W \subseteq V$ f -zyklisch, so ist

$$(-1)^{\dim W} \chi_{f|_W}$$

das Minimalpolynom für $f|_W$.

→ Satz 14.13

Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist **f-zyklisch**, falls ...

Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist **f-zyklisch**, falls

$$W = \langle \mathbf{w}, f(\mathbf{w}), f^2(\mathbf{w}), \dots \rangle \text{ für ein } \mathbf{w} \in V$$

→ Def. 14.8

Def
LinA-II-14-Minimalpolynom
6088f132-4411-44e9-aa19-9c0cfa13ab91

Ist W ein *f-zyklischer* Untervektorraum der Dimension d , so ist (Basis) ...

Ist W ein *f-zyklischer* Untervektorraum der Dimension d , so ist $(\mathbf{w}, f(\mathbf{w}), f^2(\mathbf{w}), \dots, f^{d-1}(\mathbf{w}))$ eine Basis von W .

→ Lemma 14.10

Satz
LinA-II-14-Minimalpolynom
31141f5d-f74d-45d8-bd71-4577c54a1e2c

Die **Begleitmatrix** zu einem normierten Polynom $A = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$ ist die Matrix ...

Die **Begleitmatrix** zu einem normierten Polynom $A = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & -a_{d-2} \\ 0 & & & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

→ Def 14.11

Def
LinA-II-14-Minimalpolynom
2e432a06-1654-4799-8785-7f9fe0a985e8

Sei f ein V -Endomorphismus.
Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist genau dann ... ,
wenn er f -stabil ist und eine Basis besitzt, in der $f|_W$
durch eine Begleitmatrix gegeben ist.

Sei f ein V -Endomorphismus.
Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist genau dann f -zyklisch,
wenn er f -stabil ist und eine Basis besitzt, in der $f|_W$
durch eine Begleitmatrix gegeben ist.

Sei f ein V -Endomorphismus.
Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist genau dann f -zyklisch,
wenn ...

Sei f ein V -Endomorphismus.
Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist genau dann f -zyklisch,
wenn er f -stabil ist und eine Basis besitzt, in der $f|_W$
durch eine Begleitmatrix gegeben ist.

Spaltungssatz
Sei f ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V .
Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Poly-
nome P und Q , so ist

$$V =$$

Spaltungssatz
Sei f ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V .
Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Poly-
nome P und Q , so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei f -stabile Untervektorräume W_P und W_Q .

Spaltungssatz
Sei f ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V .
Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Poly-
nome P und Q , so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei f -stabile Untervektorräume W_P und W_Q , für
die gilt:

$W_P =$

und $\mu_f|_{W_P} = P$

$W_Q =$

und $\mu_f|_{W_Q} = Q$

Spaltungssatz
Sei f ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V .
Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Poly-
nome P und Q , so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei f -stabile Untervektorräume W_P und W_Q , für
die gilt:

$W_P = \ker(P(f)) = \operatorname{im}(Q(f))$

und $\mu_f|_{W_P} = P$

$W_Q = \ker(Q(f)) = \operatorname{im}(P(f))$

und $\mu_f|_{W_Q} = Q$

Spaltungssatz

Sei f ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V . Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Polynome P und Q , so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei f -stabile Untervektorräume W_P und W_Q , für die gilt:

$$W_P = \ker(P(f)) = \operatorname{im}(Q(f)) \text{ und } \dots$$

$$W_Q = \ker(Q(f)) = \operatorname{im}(P(f)) \text{ und } \dots$$

Drittes Diagonalisierbarkeitskriterium

Ein Endomorphismus f ist diagonalisierbar genau dann, wenn (Minimalpolynom)...

Spaltungssatz

Sei f ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V . Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Polynome P und Q , so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei f -stabile Untervektorräume W_P und W_Q , für die gilt:

$$W_P = \ker(P(f)) = \operatorname{im}(Q(f)) \text{ und } \mu_f|_{W_P} = P$$

$$W_Q = \ker(Q(f)) = \operatorname{im}(P(f)) \text{ und } \mu_f|_{W_Q} = Q$$

→ Satz 14.17

Drittes Diagonalisierbarkeitskriterium

Ein Endomorphismus f ist diagonalisierbar genau dann, wenn μ_f in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

→ Korollar 14.19

Ein **Jordanblock** ist ...

Ein **Jordanblock** ist eine (Unter-)matrix der Form

$$J(m;a) := \begin{pmatrix} a & 1 & & 0 \\ & a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_K(m \times m)$$

→ Def 15.1

Ein **Hauptraumblock** ist ...

Ein **Hauptraumblock** ist eine (Unter-)matrix der Form

$$H(m_1, \dots, m_k; a) := \begin{pmatrix} \boxed{J(m_1;a)} & & 0 \\ & \boxed{J(m_2;a)} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \boxed{J(m_k;a)} \end{pmatrix}$$

→ Def 15.1

Jordannormalform

Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.

Zerfällt χ_f in Linearfaktoren, so hat f bezüglich einer geeigneten Basis folgende Gestalt:

...

Satz
LinA-II-15-Jordannormalform

15f3d72f-70b5-495b-bb04-a3f157ddea7b

Jordannormalform

Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.

Zerfällt χ_f in Linearfaktoren, so hat f bezüglich einer geeigneten Basis folgende Gestalt:

$${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{H(\dots; a_1)} & & 0 \\ & \boxed{H(\dots; a_2)} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \boxed{H(\dots; a_l)} \end{pmatrix}$$

Dabei sind die Hauptraumblöcke und die Jordanblöcke innerhalb dieser bis auf Reihenfolge eindeutig.

→ Theorem 15.2

Jordannormalform

Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.

Wenn ... , so hat f bezüglich einer geeigneten Basis folgende Gestalt:

$${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{H(\dots; a_1)} & & 0 \\ & \boxed{H(\dots; a_2)} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \boxed{H(\dots; a_l)} \end{pmatrix}$$

Dabei sind die Hauptraumblöcke und die Jordanblöcke innerhalb dieser bis auf Reihenfolge eindeutig.

Jordannormalform

Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.

Wenn χ_f in Linearfaktoren zerfällt, so hat f bezüglich einer geeigneten Basis folgende Gestalt:

$${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{H(\dots; a_1)} & & 0 \\ & \boxed{H(\dots; a_2)} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \boxed{H(\dots; a_l)} \end{pmatrix}$$

Dabei sind die Hauptraumblöcke und die Jordanblöcke innerhalb dieser bis auf Reihenfolge eindeutig.

→ Theorem 15.2

Für die Jordannormalform von f gilt:

- a_1, \dots, a_l sind ...
- Größe von $H(m_1, \dots, m_k; a)$ ist die algebraische Vielfachheit von a .
(= $\max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \chi_f\}$)
- Größe m des größten Jordanblocks $J(m; a)$ zu a ist der Exponent von $(X - a)$ in μ_f .
(= $\max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \mu_f\}$)

Für die Jordannormalform von f gilt:

- a_1, \dots, a_l sind die verschiedenen Eigenwerte von f .
- Größe von $H(m_1, \dots, m_k; a)$ ist die algebraische Vielfachheit von a .
(= $\max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \chi_f\}$)
- Größe m des größten Jordanblocks $J(m; a)$ zu a ist der Exponent von $(X - a)$ in μ_f .
(= $\max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \mu_f\}$)

→ Notiz 15.3

Für die Jordannormalform von f gilt:

- a_1, \dots, a_l sind die verschiedenen Eigenwerte von f .
- Größe von $H(m_1, \dots, m_k; a)$...
- Größe m des größten Jordanblocks $J(m; a)$ zu a ist der Exponent von $(X - a)$ in μ_f .
(= $\max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \mu_f\}$)

Für die Jordannormalform von f gilt:

- a_1, \dots, a_l sind die verschiedenen Eigenwerte von f .
- Größe von $H(m_1, \dots, m_k; a)$ ist die algebraische Vielfachheit von a .
(= $\max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \chi_f\}$)
- Größe m des größten Jordanblocks $J(m; a)$ zu a ist der Exponent von $(X - a)$ in μ_f .
(= $\max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \mu_f\}$)

→ Notiz 15.3

<p>Für die Jordannormalform von f gilt:</p> <ul style="list-style-type: none"> a_1, \dots, a_l sind die verschiedenen Eigenwerte von f. Größe von $H(m_1, \dots, m_k; a)$ ist die algebraische Vielfachheit von a. ($= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \chi_f\}$) Größe m des größten Jordanblocks $J(m; a)$ zu a ... 	<p>Für die Jordannormalform von f gilt:</p> <ul style="list-style-type: none"> a_1, \dots, a_l sind die verschiedenen Eigenwerte von f. Größe von $H(m_1, \dots, m_k; a)$ ist die algebraische Vielfachheit von a. ($= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \chi_f\}$) Größe m des größten Jordanblocks $J(m; a)$ zu a ist der Exponent von $(X - a)$ in μ_f. ($= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \mu_f\}$) <p>→ Notiz 15.3</p>
<p>Triagonalisierbarkeitskriterium Ein Endomorphismus f ist triagonalisierbar, falls ...</p> <p>Def LinA-II-15-Jordannormalform f0eae56c-7693-4b1b-b3bf-82466a1966bb</p>	<p>Triagonalisierbarkeitskriterium Ein Endomorphismus f ist triagonalisierbar, falls eine Basis B existiert, in der ${}_B M_B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.</p> <p>→ Def. 15.4</p>
<p>Sei a ein Eigenwert von f, sei $\mu_f = (X - a)^m \cdot P$ mit P teilerfremd zu $(X - a)$. Der Hauptraum von f zu a ist ...</p> <p>Def LinA-II-15-Jordannormalform 24fdceea-c59b-4730-9a1d-506ef970bedf</p>	<p>Sei a ein Eigenwert von f, sei $\mu_f = (X - a)^m \cdot P$ mit P teilerfremd zu $(X - a)$. Der Hauptraum von f zu a ist</p> $\text{Hau}(f; a) := \ker((f - a \cdot \text{id})^m)$ <p>→ Def. 15.7</p>
<p>Hauptraumzerlegung Zerfällt χ_f in Linearfaktoren, so (Zerlegung von V) ...</p> <p>Satz LinA-II-15-Jordannormalform 73273508-0f38-4c7e-ba80-bf591c7f3800</p>	<p>Hauptraumzerlegung Zerfällt χ_f in Linearfaktoren, so zerfällt V in die Haupträume:</p> $V = \oplus_{i=1}^l \text{Hau}(f; a_i)$ <p>wobei a_1, \dots, a_l die verschiedenen Eigenwerte von f sind.</p> <p>→ Satz 15.8</p>

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r , also $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und \tilde{P} jeweils teilerfremd zu $(X - a)$.

- (1) ...
- (2) $\chi_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X - a)^r$
- (3) $\mu_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (X - a)^m$
- (4) $\dim \text{Hau}(f;a) = r$
- (5) $\text{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \text{id})^i) \forall i \geq m$.

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r , also $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und \tilde{P} jeweils teilerfremd zu $(X - a)$.

- (1) $\text{Hau}(f;a)$ ist f -stabil.
- (2) $\chi_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X - a)^r$
- (3) $\mu_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (X - a)^m$
- (4) $\dim \text{Hau}(f;a) = r$
- (5) $\text{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \text{id})^i) \forall i \geq m$.

→ Satz 15.9

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r , also $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und \tilde{P} jeweils teilerfremd zu $(X - a)$.

- (1) $\text{Hau}(f;a)$ ist f -stabil.
- (2) $\chi_f|_{\text{Hau}(f;a)} =$
- (3) $\mu_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (X - a)^m$
- (4) $\dim \text{Hau}(f;a) = r$
- (5) $\text{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \text{id})^i) \forall i \geq m$.

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r , also $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und \tilde{P} jeweils teilerfremd zu $(X - a)$.

- (1) $\text{Hau}(f;a)$ ist f -stabil.
- (2) $\chi_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X - a)^r$
- (3) $\mu_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (X - a)^m$
- (4) $\dim \text{Hau}(f;a) = r$
- (5) $\text{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \text{id})^i) \forall i \geq m$.

→ Satz 15.9

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r , also $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und \tilde{P} jeweils teilerfremd zu $(X - a)$.

- (1) $\text{Hau}(f;a)$ ist f -stabil.
- (2) $\chi_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X - a)^r$
- (3) $\mu_f|_{\text{Hau}(f;a)} =$
- (4) $\dim \text{Hau}(f;a) = r$
- (5) $\text{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \text{id})^i) \forall i \geq m$.

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r , also $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und \tilde{P} jeweils teilerfremd zu $(X - a)$.

- (1) $\text{Hau}(f;a)$ ist f -stabil.
- (2) $\chi_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X - a)^r$
- (3) $\mu_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (X - a)^m$
- (4) $\dim \text{Hau}(f;a) = r$
- (5) $\text{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \text{id})^i) \forall i \geq m$.

→ Satz 15.9

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r , also $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und \tilde{P} jeweils teilerfremd zu $(X - a)$.

- (1) $\text{Hau}(f;a)$ ist f -stabil.
- (2) $\chi_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X - a)^r$
- (3) $\mu_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (X - a)^m$
- (4) $\dim \text{Hau}(f;a) =$
- (5) $\text{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \text{id})^i) \forall i \geq m$.

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r , also $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und \tilde{P} jeweils teilerfremd zu $(X - a)$.

- (1) $\text{Hau}(f;a)$ ist f -stabil.
- (2) $\chi_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X - a)^r$
- (3) $\mu_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (X - a)^m$
- (4) $\dim \text{Hau}(f;a) = r$
- (5) $\text{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \text{id})^i) \forall i \geq m$.

→ Satz 15.9

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r , also $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und \tilde{P} jeweils teilerfremd zu $(X - a)$.

(1) $\text{Hau}(f; a)$ ist f -stabil.

(2) $\chi_f|_{\text{Hau}(f; a)} = (-1)^r (X - a)^r$

(3) $\mu_f|_{\text{Hau}(f; a)} = (X - a)^m$

(4) $\dim \text{Hau}(f; a) = r$

(5) $\text{Hau}(f; a) =$.

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r , also $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und \tilde{P} jeweils teilerfremd zu $(X - a)$.

(1) $\text{Hau}(f; a)$ ist f -stabil.

(2) $\chi_f|_{\text{Hau}(f; a)} = (-1)^r (X - a)^r$

(3) $\mu_f|_{\text{Hau}(f; a)} = (X - a)^m$

(4) $\dim \text{Hau}(f; a) = r$

(5) $\text{Hau}(f; a) = \ker((f - a \cdot \text{id})^i) \forall i \geq m$.

→ Satz 15.9

Ein Endomorphismus g ist **nilpotent**, wenn ...

Ein Endomorphismus g ist **nilpotent**, wenn $g^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

→ Def. 15.10

Def
LinA-II-15-Jordannormalform

32fa39ce-09db-4219-a5c1-6c2e711728c6

Für einen (endlich-dimensionalen) Vektorraum V mit Untervektorräumen U_1, \dots, U_k sind äquivalent:

(1) ...

(2) V hat eine Basis der Form

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

derart, dass $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ Basis von U_i ist.

(3) Für beliebige Basen $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ von U_i ist

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

eine Basis von V .

Für einen (endlich-dimensionalen) Vektorraum V mit Untervektorräumen U_1, \dots, U_k sind äquivalent:

(1) $V = \bigoplus_{i=1}^k U_i$

(2) V hat eine Basis der Form

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

derart, dass $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ Basis von U_i ist.

(3) Für beliebige Basen $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ von U_i ist

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

eine Basis von V .

→ Notiz 15.13

Für einen (endlich-dimensionalen) Vektorraum V mit Untervektorräumen U_1, \dots, U_k sind äquivalent:

(1) $V = \bigoplus_{i=1}^k U_i$

(2) ...

(3) Für beliebige Basen $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ von U_i ist

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

eine Basis von V .

Für einen (endlich-dimensionalen) Vektorraum V mit Untervektorräumen U_1, \dots, U_k sind äquivalent:

(1) $V = \bigoplus_{i=1}^k U_i$

(2) V hat eine Basis der Form

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

derart, dass $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ Basis von U_i ist.

(3) Für beliebige Basen $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ von U_i ist

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

eine Basis von V .

→ Notiz 15.13

Für einen (endlich-dimensionalen) Vektorraum V mit Untervektorräumen U_1, \dots, U_k sind äquivalent:

- (1) $V = \oplus_{i=1}^k U_i$
- (2) V hat eine Basis der Form

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

derart, dass $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ Basis von U_i ist.

- (3) ...

Für einen (endlich-dimensionalen) Vektorraum V mit Untervektorräumen U_1, \dots, U_k sind äquivalent:

- (1) $V = \oplus_{i=1}^k U_i$
- (2) V hat eine Basis der Form

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

derart, dass $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ Basis von U_i ist.

- (3) Für beliebige Basen $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ von U_i ist

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

eine Basis von V .

→ Notiz 15.13

Ein **komplementärer Untervektorraum** zu einem Untervektorraum $W \subseteq V$ ist ein Untervektorraum $U \dots$

Ein **komplementärer Untervektorraum** zu einem Untervektorraum $W \subseteq V$ ist ein Untervektorraum $U \subseteq V$ mit

$$V = W \oplus U$$

→ Def. 14.15

Def
LinA-II-15-Jordannormalform
0e4987e4-ed28-4005-83aa-1d66ccedb48b

Jordannormalform im nilpotenten Fall
Zu jedem nilpotenten Endomorphismus g existiert ...

Jordannormalform im nilpotenten Fall
Zu jedem nilpotenten Endomorphismus g existiert eine *Jordanbasis*, also eine Basis B , in der ${}_B M_B(g)$ JNF hat

$$\begin{aligned} {}_B M_B(g) &= H(m_1, \dots, m_k; 0) \\ &= \begin{pmatrix} J(m_1; 0) & & 0 \\ & J(m_2; 0) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J(m_k; 0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $J(m; 0) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

→ Satz 15.16

Satz
LinA-II-15-Jordannormalform
eba13948-a4e5-4157-ad25-ff5e44396703

Eine **Jordan-Chevalley-Zerlegung** eines Endomorphismus f ist eine Zerlegung

$$f =$$

für die gilt ...

Eine **Jordan-Chevalley-Zerlegung** eines Endomorphismus f ist eine Zerlegung

$$f = d + n$$

für die gilt

- d diagonalisierbar
- n nilpotent
- f, d, n kommutieren

→ Def. 15.18

Def
LinA-II-15-Jordannormalform
82c3d9b0-77fe-4d2d-9e8f-786c5a7c2689

<div data-bbox="57 62 665 132" data-label="Text"> <p>Eine Jordan-Chevalley-Zerlegung einer Matrix $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ ist eine Zerlegung</p> </div> <div data-bbox="323 163 376 192" data-label="Equation-Block"> $A =$ </div> <div data-bbox="57 230 240 259" data-label="Text"> <p>für die gilt ...</p> </div> <div data-bbox="57 517 738 548" data-label="Page-Footer"> <div>Def</div> <div>LinA-II-15-Jordannormalform</div> <div>82c3d9b0-77fe-4d2d-9e8f-786c5a7c2689</div> </div>	<div data-bbox="855 62 1463 132" data-label="Text"> <p>Eine Jordan-Chevalley-Zerlegung einer Matrix $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ ist eine Zerlegung</p> </div> <div data-bbox="1121 163 1268 192" data-label="Equation-Block"> $A = D + N$ </div> <div data-bbox="855 230 991 259" data-label="Text"> <p>für die gilt</p> </div> <div data-bbox="896 291 1203 441" data-label="List-Group"> <ul style="list-style-type: none"> • D diagonalisierbar • N nilpotent • A, D, N kommutieren </div> <div data-bbox="1425 512 1536 528" data-label="Page-Footer"> <div>→ Def. 15.18</div> </div>
<div data-bbox="57 624 738 728" data-label="Text"> <p>Für eine Matrix $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ gilt: Zerfällt χ_A in Linearfaktoren, dann (Zerlegung von A) ...</p> </div> <div data-bbox="57 1077 738 1108" data-label="Page-Footer"> <div>Satz</div> <div>LinA-II-15-Jordannormalform</div> <div>1061827d-0c35-43f1-8234-67975bbb50a9</div> </div>	<div data-bbox="855 624 1536 728" data-label="Text"> <p>Für eine Matrix $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ gilt: Zerfällt χ_A in Linearfaktoren, dann besitzt A eine Jordan-Chevalley-Zerlegung.</p> </div> <div data-bbox="1425 775 1536 790" data-label="Page-Footer"> <div>→ Kor. 15.19</div> </div>
<div data-bbox="57 1184 743 1249" data-label="Text"> <p>Die Jordan-Chevalley-Zerlegung einer Matrix A in Jordannormalform hat die Form</p> </div> <div data-bbox="323 1281 470 1310" data-label="Equation-Block"> $A = D + N$ </div> <div data-bbox="57 1350 210 1379" data-label="Text"> <p>mit $D := \dots$</p> </div> <div data-bbox="57 1422 271 1451" data-label="Text"> <p>und $N := A - D$</p> </div>	<div data-bbox="855 1184 1541 1249" data-label="Text"> <p>Die Jordan-Chevalley-Zerlegung einer Matrix A in Jordannormalform hat die Form</p> </div> <div data-bbox="1121 1281 1268 1310" data-label="Equation-Block"> $A = D + N$ </div> <div data-bbox="855 1350 1536 1451" data-label="Text"> <p>mit $D :=$ Diagonalmatrix mit Einträgen der Hauptdiagonale von A und $N := A - D$</p> </div> <div data-bbox="1425 1500 1536 1516" data-label="Page-Footer"> <div>→ Kor. 15.19</div> </div>
<div data-bbox="57 1744 743 1809" data-label="Text"> <p>Die Jordan-Chevalley-Zerlegung einer Matrix A in Jordannormalform hat die Form</p> </div> <div data-bbox="323 1841 470 1870" data-label="Equation-Block"> $A = D + N$ </div> <div data-bbox="57 1910 738 2011" data-label="Text"> <p>mit $D :=$ Diagonalmatrix mit Einträgen der Hauptdiagonale von A und $N :=$</p> </div>	<div data-bbox="855 1744 1541 1809" data-label="Text"> <p>Die Jordan-Chevalley-Zerlegung einer Matrix A in Jordannormalform hat die Form</p> </div> <div data-bbox="1121 1841 1268 1870" data-label="Equation-Block"> $A = D + N$ </div> <div data-bbox="855 1910 1536 2011" data-label="Text"> <p>mit $D :=$ Diagonalmatrix mit Einträgen der Hauptdiagonale von A und $N := A - D$</p> </div> <div data-bbox="1425 2060 1536 2076" data-label="Page-Footer"> <div>→ Kor. 15.19</div> </div>

<p>Sei J eine Jordanbasis, aufgefasst als Matrix, und \hat{A} die zugehörige Jordannormalform einer Matrix A, so- dass gilt</p> $A = J\hat{A}J^{-1}$ <p>Dann hat die Jordan-Chevalley-Zerlegung von A die Form</p> $A =$	<p>Sei J eine Jordanbasis, aufgefasst als Matrix, und \hat{A} die zugehörige Jordannormalform einer Matrix A, so- dass gilt</p> $A = J\hat{A}J^{-1}$ <p>Dann hat die Jordan-Chevalley-Zerlegung von A die Form</p> $A = J\hat{D}J^{-1} + J\hat{N}J^{-1}$ <p>mit $\hat{D} + \hat{N}$ Jordan-Chevalley-Zerlegung von \hat{A}.</p> <p>→ Kor. 15.19</p>
<p>Die Jordan-Chevalley-Zerlegung eines Endomorphismus f ist ...</p> <p>Satz LinA-II-15-Jordannormalform febe77ae-0879-4a9d-a962-0459c8e49a26</p>	<p>Die Jordan-Chevalley-Zerlegung eines Endomorphismus f ist eindeutig, falls sie existiert.</p> <p>→ Satz 15.20</p>
<p>Binomischer Lehrsatz</p> <p>Für <i>kommutierende</i> Elemente a, b eines Rings gilt:</p> $(a + b)^n = \dots$ <p>für alle $n \in \mathbb{N}$.</p> <p>Satz LinA-II-15-Jordannormalform 8514298c-baac-4d09-9742-ae03641c1360</p>	<p>Binomischer Lehrsatz</p> <p>Für <i>kommutierende</i> Elemente a, b eines Rings gilt:</p> $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ <p>für alle $n \in \mathbb{N}$.</p> <p>→ Notiz 15.22</p>
<p>Die Matrixexponentialfunktion ist die Abbildung</p> $\exp: \dots$ <p>Def LinA-II-15-Jordannormalform bb355039-9444-484e-8f10-64ee1c1f53ce</p>	<p>Die Matrixexponentialfunktion ist die Abbildung</p> $\exp: \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \longrightarrow \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ $A \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ <p>→ Def. 15.25</p>

Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist

$$\|A\| := \dots$$

Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist

$$\|A\| := n \cdot \max\{|a_{ij}| \mid i, j = 1, \dots, n\} \in \mathbb{R}$$

Für die Matrixnorm gilt:

- (1) \dots
- (2) $\|s \cdot A\| = |s| \cdot \|A\|$
- (3) Dreiecksungleichung
 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- (4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Für die Matrixnorm gilt:

- (1) $\|A\| \geq 0$ und $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- (2) $\|s \cdot A\| = |s| \cdot \|A\|$
- (3) Dreiecksungleichung
 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- (4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Für die Matrixnorm gilt:

- (1) $\|A\| \geq 0$ und $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- (2) \dots
- (3) Dreiecksungleichung
 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- (4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Für die Matrixnorm gilt:

- (1) $\|A\| \geq 0$ und $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- (2) $\|s \cdot A\| = |s| \cdot \|A\|$
- (3) Dreiecksungleichung
 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- (4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Für die Matrixnorm gilt:

- (1) $\|A\| \geq 0$ und $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- (2) $\|s \cdot A\| = |s| \cdot \|A\|$
- (3) \dots
- (4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Für die Matrixnorm gilt:

- (1) $\|A\| \geq 0$ und $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- (2) $\|s \cdot A\| = |s| \cdot \|A\|$
- (3) Dreiecksungleichung
 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- (4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

<p>Für die Matrixnorm gilt:</p> <p>(1) $\ A\ \geq 0$ und $\ A\ = 0 \Leftrightarrow A = 0$</p> <p>(2) $\ s \cdot A\ = s \cdot \ A\$</p> <p>(3) Dreiecksungleichung $\ A + B\ \leq \ A\ + \ B\$</p> <p>(4) ...</p>	<p>Für die Matrixnorm gilt:</p> <p>(1) $\ A\ \geq 0$ und $\ A\ = 0 \Leftrightarrow A = 0$</p> <p>(2) $\ s \cdot A\ = s \cdot \ A\$</p> <p>(3) Dreiecksungleichung $\ A + B\ \leq \ A\ + \ B\$</p> <p>(4) $\ A \cdot B\ \leq \ A\ \cdot \ B\$</p> <p>→ Notiz 15.27</p>
<p>Eine Reihe $\sum_{k=0}^\infty A^{(k)}$ mit $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist konvergent, wenn ...</p>	<p>Eine Reihe $\sum_{k=0}^\infty A^{(k)}$ mit $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist konvergent, wenn für alle i und j $\sum_{k=0}^\infty a_{ij}^{(k)}$ in \mathbb{C} konvergiert.</p> <p>→ Def. 15.28</p>
<p>Eine Reihe $\sum_{k=0}^\infty A^{(k)}$ mit $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist absolut konvergent, wenn ...</p>	<p>Eine Reihe $\sum_{k=0}^\infty A^{(k)}$ mit $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist absolut konvergent, wenn für alle i und j $\sum_{k=0}^\infty a_{ij}^{(k)}$ in \mathbb{R} konvergiert.</p> <p>→ Def. 15.28</p>
<p>Eine Reihe $\sum_{k=0}^\infty A^{(k)}$ mit $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist normkonvergent, wenn ...</p>	<p>Eine Reihe $\sum_{k=0}^\infty A^{(k)}$ mit $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist normkonvergent, wenn $\sum_{k=0}^\infty \ A^{(k)}\$ in \mathbb{R} konvergiert.</p> <p>→ Def. 15.28</p>

Multiplikationssatz

Für kommutierende Matrizen $A, B \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ gilt

$$\exp(A + B) = \dots$$

Multiplikationssatz

Für kommutierende Matrizen $A, B \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ gilt

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$$

→ Satz 15.31

Für beliebige $B \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ und $J \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ ist

$$\exp(JBJ^{-1}) = \dots$$

Für beliebige $B \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ und $J \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ ist

$$\exp(JBJ^{-1}) = J \cdot \exp(B) \cdot J^{-1}$$

→ Satz 15.31

Ein **homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten** ist ...

Ein **homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten** ist eine Gleichung der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$$

für ein $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$.

Ein **homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten** ist eine Gleichung der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$$

mit

$$\mathbf{x} : \dots \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{x}} : \dots$$

Ein **homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten** ist eine Gleichung der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$$

für ein $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ mit

$$\mathbf{x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{x}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}x_n(t) \end{pmatrix}$$

<p>Für ein gegebenes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ ist eine Lösung mit Anfangswert \mathbf{x}_0 (Lösung Differentialgleichungssystem) ...</p> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-15-Jordannormalform</div> <div>181261b9-23f1-44a1-8be1-d8934ac917cf</div> </div>	<p>Für ein gegebenes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ ist eine Lösung mit Anfangswert \mathbf{x}_0 eine differenzierbare Abbildung</p> $\mathbf{x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ <p>mit</p> $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ <p>und</p> $\dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$ <div> <div></div> <div>→ Def. 15.33</div> </div>
<p>Für jedes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ ist</p> \dots <p>eine Lösung des Systems</p> $\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$ <p>zum Anfangswert x_0.</p> <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-15-Jordannormalform</div> <div>6d0d1a05-c5ca-4ab9-9511-9704105b8cc4</div> </div>	<p>Für jedes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ ist</p> $\mathbf{x}(t) := \exp(A \cdot t) \cdot \mathbf{x}_0$ <p>eine Lösung des Systems</p> $\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$ <p>zum Anfangswert x_0.</p> <div> <div></div> <div>→ Satz 15.34</div> </div>
<p>Sei K ein beliebiger Körper und V ein K-Vektorraum. Der Dualraum von V ist ...</p> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>f9209d9a-53ce-4c72-883b-350abca77548</div> </div>	<p>Sei K ein beliebiger Körper und V ein K-Vektorraum. Der Dualraum von V ist der K-Vektorraum</p> $\begin{aligned} V^* &:= \text{Hom}_K(V, K) \\ &= \{ \varphi : V \longrightarrow K \mid \varphi \text{ ist } K\text{-linear} \} \end{aligned}$ <p>mit der Vektorraum-Struktur aus Satz/Def 6.5:</p> $\begin{aligned} (\varphi + \psi)(\mathbf{v}) &:= \varphi(\mathbf{v}) + \psi(\mathbf{v}) \\ (a \cdot \varphi)(\mathbf{v}) &:= a \cdot \varphi(\mathbf{v}) \end{aligned}$ <p>für $\varphi, \psi \in V^*, \mathbf{v} \in V, a \in K$.</p> <div> <div></div> <div>→ Def. 16.1</div> </div>
<p>Elemente des <i>Dualraums</i> V^* von V heißen ...</p> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>f9209d9a-53ce-4c72-883b-350abca77548</div> </div>	<p>Elemente des <i>Dualraums</i> V^* von V heißen Linearformen auf V.</p> <div> <div></div> <div>→ Def. 16.1</div> </div>

<div data-bbox="57 58 738 136" data-label="Text"> <p>Die zu einer linearen Abbildung $V \xrightarrow{f} W$ duale Abbildung ist ...</p> </div> <div data-bbox="57 510 738 546" data-label="Page-Footer"> <div>Def</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>f9209d9a-53ce-4c72-883b-350abca77548</div> </div>	<div data-bbox="855 58 1536 136" data-label="Text"> <p>Die zu einer linearen Abbildung $V \xrightarrow{f} W$ duale Abbildung ist die Abbildung</p> </div> <div data-bbox="1091 168 1299 255" data-label="Equation-Block"> $V^* \xleftarrow{f^*} W^*$ $f^*(\varphi) := (\varphi \circ f)$ </div> <div data-bbox="1436 329 1536 347" data-label="Text"> <p>→ Def. 16.1</p> </div> <div data-bbox="57 2190 738 2226" data-label="Page-Footer"> <div>Satz</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4</div> </div>
<div data-bbox="57 622 738 689" data-label="Text"> <p>Sei $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ eine endliche Basis von V. Dann ist die zu B duale Basis B^* ...</p> </div> <div data-bbox="57 1070 738 1106" data-label="Page-Footer"> <div>Satz Def</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>a5630301-2141-4e16-a0e8-f8b74beb6535</div> </div>	<div data-bbox="855 622 1536 725" data-label="Text"> <p>Sei $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ eine endliche Basis von V. Dann ist die zu B duale Basis $B^* := (\mathbf{b}_1^*, \dots, \mathbf{b}_n^*)$ eine Basis von V^* mit</p> </div> <div data-bbox="994 757 1394 889" data-label="Equation-Block"> $\mathbf{b}_i^*: V \longrightarrow K$ $\mathbf{b}_j \mapsto \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ </div> <div data-bbox="1367 952 1536 969" data-label="Text"> <p>→ Satz & Def. 16.3</p> </div> <div data-bbox="57 2190 738 2226" data-label="Page-Footer"> <div>Satz</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4</div> </div>
<div data-bbox="57 1182 394 1276" data-label="Text"> <p>Sei $\dim V = n < \infty$. Dann</p> $\dim V^* =$ </div> <div data-bbox="57 1630 738 1666" data-label="Page-Footer"> <div>Satz</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>ee7eb4e4-b3fc-494b-9be1-54cfed785cc6</div> </div>	<div data-bbox="855 1182 1326 1276" data-label="Text"> <p>Sei $\dim V = n < \infty$. Dann</p> $\dim V^* = n = \dim V$ </div> <div data-bbox="1433 1352 1536 1370" data-label="Text"> <p>→ Kor. 16.5</p> </div> <div data-bbox="57 2190 738 2226" data-label="Page-Footer"> <div>Satz</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4</div> </div>
<div data-bbox="57 1742 472 1809" data-label="Text"> <p>Seien V_i K-Vektorräume ($i \in I$). Dann gilt</p> </div> <div data-bbox="288 1809 427 1877" data-label="Equation-Block"> $\left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* \cong$ </div> <div data-bbox="57 2190 738 2226" data-label="Page-Footer"> <div>Satz</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4</div> </div>	<div data-bbox="855 1742 1270 1809" data-label="Text"> <p>Seien V_i K-Vektorräume ($i \in I$). Dann gilt</p> </div> <div data-bbox="1085 1809 1307 1888" data-label="Equation-Block"> $\left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* \cong \prod_{i \in I} V_i^*$ </div> <div data-bbox="1436 1935 1536 1953" data-label="Text"> <p>→ satz 16.7</p> </div> <div data-bbox="57 2190 738 2226" data-label="Page-Footer"> <div>Satz</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4</div> </div>

Seien V_i K -Vektorräume ($i \in I$). Die Funktionen

$$\begin{aligned}\alpha: \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* &\longrightarrow \prod_{i \in I} V_i^* \\ \varphi &\mapsto (\varphi|_{V_i})_{i \in I} \\ \beta: \prod_{i \in I} V_i^* &\longrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* \\ (\varphi_i)_{i \in I} &\mapsto \left((\mathbf{v}_i)_{i \in I} \mapsto \sum_i \varphi_i(\mathbf{v}_i)\right)\end{aligned}$$

definieren ...

Satz
LinA-II-16-Dualisierung

563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4

Seien V_i K -Vektorräume ($i \in I$). Die Funktionen

$$\begin{aligned}\alpha: \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* &\longrightarrow \prod_{i \in I} V_i^* \\ \varphi &\mapsto (\varphi|_{V_i})_{i \in I} \\ \beta: \prod_{i \in I} V_i^* &\longrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* \\ (\varphi_i)_{i \in I} &\mapsto \left((\mathbf{v}_i)_{i \in I} \mapsto \sum_i \varphi_i(\mathbf{v}_i)\right)\end{aligned}$$

definieren zueinander inverse Isomorphismen.

→ Satz 16.7

Seien V_i K -Vektorräume ($i \in I$). Die Funktionen

$$\begin{aligned}\alpha: \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* &\longrightarrow \prod_{i \in I} V_i^* \\ \varphi &\mapsto \dots \\ \beta: \prod_{i \in I} V_i^* &\longrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* \\ (\varphi_i)_{i \in I} &\mapsto \left((\mathbf{v}_i)_{i \in I} \mapsto \sum_i \varphi_i(\mathbf{v}_i)\right)\end{aligned}$$

definieren zueinander inverse Isomorphismen.

Satz
LinA-II-16-Dualisierung

563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4

Seien V_i K -Vektorräume ($i \in I$). Die Funktionen

$$\begin{aligned}\alpha: \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* &\longrightarrow \prod_{i \in I} V_i^* \\ \varphi &\mapsto (\varphi|_{V_i})_{i \in I} \\ \beta: \prod_{i \in I} V_i^* &\longrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* \\ (\varphi_i)_{i \in I} &\mapsto \left((\mathbf{v}_i)_{i \in I} \mapsto \sum_i \varphi_i(\mathbf{v}_i)\right)\end{aligned}$$

definieren zueinander inverse Isomorphismen.

→ Satz 16.7

Seien V_i K -Vektorräume ($i \in I$). Die Funktionen

$$\begin{aligned}\alpha: \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* &\longrightarrow \prod_{i \in I} V_i^* \\ \varphi &\mapsto (\varphi|_{V_i})_{i \in I} \\ \beta: \prod_{i \in I} V_i^* &\longrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* \\ (\varphi_i)_{i \in I} &\mapsto \dots\end{aligned}$$

definieren zueinander inverse Isomorphismen.

Satz
LinA-II-16-Dualisierung

563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4

Seien V_i K -Vektorräume ($i \in I$). Die Funktionen

$$\begin{aligned}\alpha: \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* &\longrightarrow \prod_{i \in I} V_i^* \\ \varphi &\mapsto (\varphi|_{V_i})_{i \in I} \\ \beta: \prod_{i \in I} V_i^* &\longrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* \\ (\varphi_i)_{i \in I} &\mapsto \left((\mathbf{v}_i)_{i \in I} \mapsto \sum_i \varphi_i(\mathbf{v}_i)\right)\end{aligned}$$

definieren zueinander inverse Isomorphismen.

→ Satz 16.7

Sei V endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis B ;
dualer Basis B^*
und W endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis
 C ; dualer Basis C^* .

Sei $f: V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung und
 $f^*: W^* \longrightarrow V^*$ die zu f duale Abbildung. Dann gilt
für die darstellende Matrix von f^* :

$$M(f^*) =$$

Satz
LinA-II-16-Dualisierung

ace73100-c31f-4165-9184-ffa5441bd84b

Sei V endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis B ;
dualer Basis B^*
und W endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis
 C ; dualer Basis C^* .

Sei $f: V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung und
 $f^*: W^* \longrightarrow V^*$ die zu f duale Abbildung. Dann gilt
für die darstellende Matrix von f^* :

$${}_{B^*}M_{C^*}(f^*) = ({}_C M_B(f))^T$$

→ Satz 16.8

<div>Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Der Annulator von U ist ...</div> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>b74a3de4-17b8-413c-a490-e19e3ad2e0f3</div> </div>	<div>Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Der Annulator von U ist der Untervektorraum $U^0 \subseteq V^*$, der gegeben ist durch</div> <div> $U^0 := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(\mathbf{u}) = 0 \forall \mathbf{u} \in U\}$ </div> <div> <div>→ Def 16.10</div> </div>
<div>Für jede lineare Abbildung f ist</div> <div> $\ker(f^*) = \dots$ $\operatorname{im}(f^*) = \dots$ </div> <div>(Annulator)</div> <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>833a8f8d-3fc5-413e-a5e4-4c3537148f6e</div> </div>	<div>Für jede lineare Abbildung f ist</div> <div> $\ker(f^*) = (\operatorname{im} f)^0$ $\operatorname{im}(f^*) = (\ker f)^0$ </div> <div>→ Satz 16.12</div>
<div>Eine lineare Abbildung f ist genau dann <i>injektiv</i>, wenn (duale Abbildung) ...</div> <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>d6bba2ed-dd4d-4fb4-b9fe-ac2d4c343844</div> </div>	<div>Eine lineare Abbildung f ist genau dann <i>injektiv</i>, wenn die duale Abbildung f^* surjektiv ist.</div> <div>→ Kor. 16.13</div>
<div>Eine lineare Abbildung f ist genau dann <i>surjektiv</i>, wenn (duale Abbildung) ...</div> <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>d6bba2ed-dd4d-4fb4-b9fe-ac2d4c343844</div> </div>	<div>Eine lineare Abbildung f ist genau dann <i>surjektiv</i>, wenn die duale Abbildung f^* injektiv ist.</div> <div>→ Kor. 16.13</div>

<p>Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, dann gilt für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$:</p> $\dim(U^0) =$ <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>2948efa5-9029-4284-a634-ee09edfad4b2</div> </div>	<p>Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, dann gilt für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$:</p> $\dim(U^0) = \dim V - \dim U$ <div> <div></div> <div></div> <div>→ Kor. 16.14</div> </div>
<p>Der Bidualraum eines K-Vektorraums V ist ...</p> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>ae8e8491-fda3-474b-87b0-beaf8e05f0e3</div> </div>	<p>Der Bidualraum eines K-Vektorraums V ist</p> $V^{**} := (V^*)^*$ <div> <div></div> <div></div> <div>→ Def. 16.15</div> </div>
<p>Der Bidualraumhomomorphismus ist die Abbildung</p> $\omega_V:$ <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>ae8e8491-fda3-474b-87b0-beaf8e05f0e3</div> </div>	<p>Der Bidualraumhomomorphismus ist die Abbildung</p> $\omega_V: V \longrightarrow V^{**}$ $\mathbf{v} \mapsto \begin{pmatrix} V^* & \longrightarrow & K \\ \varphi & \mapsto & \varphi(\mathbf{v}) \end{pmatrix}$ <div> <div></div> <div></div> <div>→ Def. 16.15</div> </div>
<p>Der Bidualraumhomomorphismus ω_V ist (Linearität) ...</p> <div> <div></div> <div></div> <div></div> </div>	<p>Der Bidualraumhomomorphismus ω_V ist K-linear.</p> <div> <div></div> <div></div> <div>→ Notiz 16.16</div> </div>
<div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>730505c9-1d7c-4524-8246-22a4cbbab07a</div> </div>	

<div>Sei $f: V \longrightarrow W$ eine Abbildung und ω_W der Bidualraumhomomorphismus von W. Dann gilt</div> <div>$\omega_W \circ f =$</div> <div>Satz LinA-II-16-Dualisierung730505c9-1d7c-4524-8246-22a4cbbab07a</div>	<div>Sei $f: V \longrightarrow W$ eine Abbildung und ω_W der Bidualraumhomomorphismus von W. Dann gilt</div> <div>$\omega_W \circ f = f^{**} \circ \omega_V$</div> <div>mit $f^{**}: V^{**} \longrightarrow W^{**}$ und ω_V der Bidualraumhomomorphismus zu V.</div> <div>→ Notiz 16.17</div>
<div>Der Bidualraumhomomorphismus ist (injektiv? surjektiv?)</div> <div>Satz LinA-II-16-Dualisierung26f469cc-ef15-4f31-83a9-89e412e0edf2</div>	<div>Der Bidualraumhomomorphismus ist injektiv.</div> <div>→ Satz 16.18</div>
<div>Der Bidualraumhomomorphismus ist genau dann ... , wenn V endlich-dimensional ist.</div> <div>Satz LinA-II-16-Dualisierung26f469cc-ef15-4f31-83a9-89e412e0edf2</div>	<div>Der Bidualraumhomomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus, wenn V endlich-dimensional ist.</div> <div>→ Satz 16.18</div>
<div>Der Bidualraumhomomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus, wenn</div> <div>Satz LinA-II-16-Dualisierung26f469cc-ef15-4f31-83a9-89e412e0edf2</div>	<div>Der Bidualraumhomomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus, wenn V endlich-dimensional ist.</div> <div>→ Satz 16.18</div>

<p>Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann ist die Abbildung</p> $\begin{aligned} \psi: V &\longrightarrow V^* \\ \mathbf{v} &\mapsto \langle \mathbf{v}, \cdot \rangle \end{aligned}$ <p>...</p> <div>Satz LinA-II-16-Dualisierungb36837bf-1b54-4cdf-9bfd-241a2bd3ba01</div>	<p>Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann ist die Abbildung</p> $\begin{aligned} \psi: V &\longrightarrow V^* \\ \mathbf{v} &\mapsto \langle \mathbf{v}, \cdot \rangle \end{aligned}$ <p>ein <i>kanonischer Isomorphismus</i> zu $V \cong V^*$.</p> <div>→ Satz 16.19</div>
<p>Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann ist die Abbildung</p> $\begin{aligned} \psi: V &\longrightarrow V^* \\ \mathbf{v} &\mapsto \end{aligned}$ <p>ein <i>kanonischer Isomorphismus</i> zu $V \cong V^*$.</p> <div>Satz LinA-II-16-Dualisierungb36837bf-1b54-4cdf-9bfd-241a2bd3ba01</div>	<p>Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann ist die Abbildung</p> $\begin{aligned} \psi: V &\longrightarrow V^* \\ \mathbf{v} &\mapsto \langle \mathbf{v}, \cdot \rangle \end{aligned}$ <p>ein <i>kanonischer Isomorphismus</i> zu $V \cong V^*$.</p> <div>→ Satz 16.19</div>
<p>Seien V_1, \dots, V_n, W K-Vektorräume. Eine Abbildung</p> $f: V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow W$ <p>ist K-multilinear, falls ...</p> <div>Def LinA-II-17-Multilineare-Algebren4bfc9556-8182-4a6d-ba13-e65645147b5c</div>	<p>Seien V_1, \dots, V_n, W K-Vektorräume. Eine Abbildung</p> $f: V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow W$ <p>ist K-multilinear, falls für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ und beliebige Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ die Abbildung</p> $\begin{aligned} V_i &\longrightarrow W \\ \mathbf{v} &\mapsto f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n) \end{aligned}$ <p>K-linear ist.</p> <div>→ Def. 17.5</div>
<p>Das Tensorprodukt $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ von K-Vektorräumen V_1, \dots, V_n ist ein K-Vektorraum, der definiert wird durch eine kanonische Abbildung $\text{can}: V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ mit folgender universellen Eigenschaft: can ist ... und für jeden K-Vektorraum T und jede multilineare Abbildung $t: V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow T$ existiert genau eine K-lineare Abbildung $t': V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow T$ mit $t' \circ \text{can} = t$.</p> <div>Def Satz LinA-II-17-Multilineare-Algebren78d71d52-c77f-4bf8-8312-ce13d136f6f1</div>	<p>Das Tensorprodukt $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ von K-Vektorräumen V_1, \dots, V_n ist ein K-Vektorraum, der definiert wird durch eine kanonische Abbildung $\text{can}: V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ mit folgender universellen Eigenschaft: can ist multilinear und für jeden K-Vektorraum T und jede multilineare Abbildung $t: V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow T$ existiert genau eine K-lineare Abbildung $t': V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow T$ mit $t' \circ \text{can} = t$.</p> <div>→ Satz 17.6 / Def. 17.7</div>

Das **Tensorprodukt** $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ von K -Vektorräumen V_1, \dots, V_n ist ein K -Vektorraum, der definiert wird durch eine kanonische Abbildung $\text{can}: V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ mit folgender universellen Eigenschaft:
can ist multilinear und
für jeden K -Vektorraum T und jede multilineare Abbildung $t: V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow T$ existiert ...

Das **Tensorprodukt** $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ von K -Vektorräumen V_1, \dots, V_n ist ein K -Vektorraum, der definiert wird durch eine kanonische Abbildung $\text{can}: V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ mit folgender universellen Eigenschaft:
can ist multilinear und
für jeden K -Vektorraum T und jede multilineare Abbildung $t: V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow T$ existiert genau eine K -lineare Abbildung $t': V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow T$ mit $t' \circ \text{can} = t$.