



|   |  |
|---|--|
| <p>Jede Bilinearform <math>\beta</math> auf <math>K^n</math> liefert eine Matrix ...</p>  | <p>Jede Bilinearform <math>\beta</math> auf <math>K^n</math> liefert eine Matrix <math>M(\beta) \in \text{Mat}_K(n \times n)</math> der Gestalt</p> $M(\beta) := \beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{ij}$ <p>→ Satz 10.2</p>  |
| <p>Jede Matrix <math>A \in \text{Mat}_K(n \times n)</math> liefert eine ...<br/>wie folgt:</p>  | <p>Jede Matrix <math>A \in \text{Mat}_K(n \times n)</math> liefert eine Bilinearform auf <math>K^n</math> wie folgt:</p> $\begin{aligned} \beta_A : K^n \times K^n &\longrightarrow K \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto \mathbf{v}^T A \mathbf{w} \end{aligned}$ <p>→ Satz 10.2</p> |
| <p>Die Menge der Bilinearformen auf <math>K^n</math> und die Menge der <math>n \times n</math> Matrizen über <math>K</math> sind ...</p>                  | <p>Die Menge der Bilinearformen auf <math>K^n</math> und die Menge der <math>n \times n</math> Matrizen über <math>K</math> sind isomorph.</p> <p>→ Satz 10.2</p>  |
| <p>Die <b>darstellende Matrix</b> einer Bilinearform <math>\beta</math> bezüglich einer Basis <math>B = (\mathbf{b}_i)_i</math> ist gegeben durch ...</p> | <p>Die <b>darstellende Matrix</b> einer Bilinearform <math>\beta</math> bezüglich einer Basis <math>B = (\mathbf{b}_i)_i</math> ist gegeben durch</p> $M_B(\beta) := \beta(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_{ij}$ <p>→ Def. 10.3</p>  |

|  |   |
|--|---|
| <p>Zwei Matrizen <math>A, A'</math> sind <b>kongruent</b>, falls es ...</p>                            | <p>Zwei quadratische Matrizen <math>A, A'</math> sind <b>kongruent</b>, falls es eine invertierbare Matrix <math>S</math> gibt mit</p> $A' = S^T A S$ <p>→ Def. 10.5</p>  |
| <p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> auf <math>V</math> ist <b>symmetrisch</b>, falls ...</p>       | <p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> auf <math>V</math> ist <b>symmetrisch</b>, falls für alle <math>\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V</math></p> $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ <p>→ Def. 10.7</p>        |
| <p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> auf <math>V</math> ist <b>schiefsymmetrisch</b>, falls ...</p> | <p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> auf <math>V</math> ist <b>schiefsymmetrisch</b>, falls für alle <math>\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V</math></p> $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ <p>→ Def. 10.7</p> |
| <p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> auf <math>V</math> ist <b>alternierend</b>, falls ...</p>      | <p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> auf <math>V</math> ist <b>alternierend</b>, falls für alle <math>\mathbf{v} \in V</math></p> $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ <p>→ Def. 10.7</p>   |

|   |  |
|---|--|
| <p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> ist <b>symmetrisch</b> genau dann, wenn ... (darstellende Matrix)</p> <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-10-Skalarprodukte</div> <div>fb0e2cdc-bbf2-11ec-8422-0242ac120002</div> </div>   | <p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> ist <b>symmetrisch</b> genau dann, wenn ihre darstellende Matrix <math>M(\beta)</math> <b>symmetrisch</b> ist:</p> $M(\beta)^T = M(\beta)$ <div>→ Satz 10.9</div>  |
| <p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> ist <b>schiefsymmetrisch</b> genau dann, wenn ... (darstellende Matrix)</p> <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-10-Skalarprodukte</div> <div>fb0e2cdc-bbf2-11ec-8422-0242ac120002</div> </div>   | <p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> ist <b>schiefsymmetrisch</b> genau dann, wenn ihre darstellende Matrix <math>M(\beta)</math> <b>schiefsymmetrisch</b> ist:</p> $M(\beta)^T = -M(\beta)$ <div>→ Satz 10.9</div>   |
| <p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> ist <b>alternierend</b> genau dann, wenn ... (darstellende Matrix)</p> <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-10-Skalarprodukte</div> <div>fb0e2cdc-bbf2-11ec-8422-0242ac120002</div> </div>  | <p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> ist <b>alternierend</b> genau dann, wenn für ihre darstellende Matrix <math>M(\beta)</math> gilt:</p> $M(\beta)^T = -M(\beta)$ <p>und</p> $M(\beta)_{ii} = 0 \text{ für alle } i$ <div>→ Satz 10.9</div>   |
| <p>Eine <b>Sesquilinearform</b> <math>\eta</math> auf einem <math>\mathbb{C}</math>-Vektorraum <math>V</math> ist eine Abbildung <math>\eta: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}</math> mit folgenden Eigenschaften:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>...</li> <li><math>\eta</math> ist semilinear in der zweiten Koordinate:<br/> <math>\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)</math><br/> <math>\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})</math><br/> für alle <math>\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V</math> und alle <math>s \in \mathbb{C}</math></li> </ul> | <p>Eine <b>Sesquilinearform</b> <math>\eta</math> auf einem <math>\mathbb{C}</math>-Vektorraum <math>V</math> ist eine Abbildung <math>\eta: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}</math> mit folgenden Eigenschaften:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\eta</math> ist linear in der ersten Koordinate:<br/> <math>\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})</math><br/> für alle <math>\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \in V</math> und alle <math>s \in \mathbb{C}</math></li> <li><math>\eta</math> ist semilinear in der zweiten Koordinate:<br/> <math>\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)</math><br/> <math>\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})</math><br/> für alle <math>\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V</math> und alle <math>s \in \mathbb{C}</math></li> </ul> <div>→ Def. 10.10</div> |

|  |  |
|--|--|
| <p>Eine <b>Sesquilinearform</b> <math>\eta</math> auf einem <math>\mathbb{C}</math>-Vektorraum <math>V</math> ist eine Abbildung <math>\eta: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}</math> mit folgenden Eigenschaften:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\eta</math> ist linear in der ersten Koordinate:<br/> <math>\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})</math><br/> für alle <math>\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \in V</math> und alle <math>s \in \mathbb{C}</math></li> <li>...</li> </ul> | <p>Eine <b>Sesquilinearform</b> <math>\eta</math> auf einem <math>\mathbb{C}</math>-Vektorraum <math>V</math> ist eine Abbildung <math>\eta: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}</math> mit folgenden Eigenschaften:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\eta</math> ist linear in der ersten Koordinate:<br/> <math>\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})</math><br/> für alle <math>\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \in V</math> und alle <math>s \in \mathbb{C}</math></li> <li><math>\eta</math> ist semilinear in der zweiten Koordinate:<br/> <math>\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)</math><br/> <math>\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})</math><br/> für alle <math>\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V</math> und alle <math>s \in \mathbb{C}</math></li> </ul> <p>→ Def. 10.10</p> |
| <p>Eine Sesquilinearform <math>\eta</math> ist <b>hermitesch</b>, falls ...</p>  | <p>Eine Sesquilinearform <math>\eta</math> ist <b>hermitesch</b>, falls gilt</p> $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\eta(\mathbf{w}, \mathbf{v})}$ <p>für alle <math>\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V</math></p> <p>→ Def. 10.10</p> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-10-Skalarprodukte</div> <div>7e2e222e-bbf4-11ec-8422-0242ac120002</div> </div>   |
| <p>Jede Sesquilinearform <math>\eta</math> liefert eine Matrix der Form ...</p>  | <p>Jede Sesquilinearform <math>\eta</math> liefert eine Matrix <math>M(\eta) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)</math> der Form</p> $M(\eta) := \eta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{ij}$ <p>→ Satz 10.11</p> <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-10-Skalarprodukte</div> <div>bd8dcf48-bc10-11ec-8422-0242ac120002</div> </div>  |
| <p>Zu einer gegebenen komplexen Matrix <math>A</math> existiert eine Sesquilinearform <math>\eta</math> wie folgt:<br/>...</p>   | <p>Zu einer gegebenen komplexen quadratischen Matrix <math>A</math> existiert eine Sesquilinearform <math>\eta</math> wie folgt:</p> $\eta_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mathbf{v}^T A \overline{\mathbf{w}}$ <p>→ Satz 10.11</p> <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-10-Skalarprodukte</div> <div>bd8dcf48-bc10-11ec-8422-0242ac120002</div> </div>  |

|   |   |
|---|---|
| <p>Eine symmetrische Bilinearform <math>\beta</math> auf einem <math>\mathbb{R}</math>-Vektorraum ist <b>positiv definit</b>, falls ...</p> | <p>Eine symmetrische Bilinearform <math>\beta</math> auf einem <math>\mathbb{R}</math>-Vektorraum ist <b>positiv definit</b>, falls</p> $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \text{ f\"ur alle } \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ <p>→ Def. 10.14</p> |
| <p>Def<br/>LinA-II-10-Skalarprodukte</p> <p>ca81504e-bc10-11ec-8422-0242ac120002</p>  |   |
| <p>Eine hermitesche Bilinearform <math>\beta</math> auf einem <math>\mathbb{C}</math>-Vektorraum ist <b>positiv definit</b>, falls ...</p>  | <p>Eine hermitesche Bilinearform <math>\beta</math> auf einem <math>\mathbb{C}</math>-Vektorraum ist <b>positiv definit</b>, falls</p> $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \text{ f\"ur alle } \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ <p>→ Def. 10.14</p>  |
| <p>Def<br/>LinA-II-10-Skalarprodukte</p> <p>ca81504e-bc10-11ec-8422-0242ac120002</p>  |   |
| <p>Ein <b>Skalarprodukt</b> auf einem <math>\mathbb{R}</math>-Vektorraum ist ...</p>  | <p>Ein <b>Skalarprodukt</b> auf einem <math>\mathbb{R}</math>-Vektorraum ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform.</p> <p>→ Def. 10.15</p>   |
| <p>Def<br/>LinA-II-10-Skalarprodukte</p> <p>d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002</p>  |   |
| <p>Ein <b>Skalarprodukt</b> auf einem <math>\mathbb{C}</math>-Vektorraum ist ...</p>  | <p>Ein <b>Skalarprodukt</b> auf einem <math>\mathbb{C}</math>-Vektorraum ist eine positiv definite hermitesche Bilinearform.</p> <p>→ Def. 10.15</p>  |
| <p>Def<br/>LinA-II-10-Skalarprodukte</p> <p>d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002</p>  |   |

Ein **euklidischer Vektorraum** ist ...

Def  
LinA-II-10-Skalarprodukte  
d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Ein **euklidischer Vektorraum**  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  zusammen mit einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

→ Def. 10.15

Ein **unitärer Vektorraum** ist ...

Def  
LinA-II-10-Skalarprodukte  
d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Ein **unitärer Vektorraum**  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  zusammen mit einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

→ Def. 10.15

Die assoziierte **Norm** zu einem euklidischen oder unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \end{aligned}$$

Die assoziierte **Norm** zu einem euklidischen oder unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \end{aligned}$$

(Die Norm wird durch das Skalarprodukt **induziert**.)

→ Def. 10.15

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  gilt:

- (i) (Verhältnis Norm und 0) ...
- (ii)  $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s| \|\mathbf{v}\|$
- (iii) **Dreiecksungleichung:**  
 $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$
- (iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung:**  
 $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  gilt:

- (i)  $\|\mathbf{v}\| \geq 0$  für alle  $\mathbf{v} \in V$   
 $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- (ii)  $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s| \|\mathbf{v}\|$
- (iii) **Dreiecksungleichung:**  
 $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$
- (iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung:**  
 $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

|   |  |
|---|--|
| <p>In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> gilt:</p> <p>(i) <math>\ \mathbf{v}\  \geq 0</math> für alle <math>\mathbf{v} \in V</math><br/> <math>\ \mathbf{v}\  = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}</math></p> <p>(ii) <math>\ s \cdot \mathbf{v}\  = \dots</math></p> <p>(iii) <b>Dreiecksungleichung:</b><br/> <math>\ \mathbf{v} + \mathbf{w}\  \leq \ \mathbf{v}\  + \ \mathbf{w}\ </math></p> <p>(iv) <b>Cauchy-Schwarz-Ungleichung:</b><br/> <math> \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle  \leq \ \mathbf{v}\  \cdot \ \mathbf{w}\ </math></p> | <p>In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> gilt:</p> <p>(i) <math>\ \mathbf{v}\  \geq 0</math> für alle <math>\mathbf{v} \in V</math><br/> <math>\ \mathbf{v}\  = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}</math></p> <p>(ii) <math>\ s \cdot \mathbf{v}\  =  s  \ \mathbf{v}\ </math></p> <p>(iii) <b>Dreiecksungleichung:</b><br/> <math>\ \mathbf{v} + \mathbf{w}\  \leq \ \mathbf{v}\  + \ \mathbf{w}\ </math></p> <p>(iv) <b>Cauchy-Schwarz-Ungleichung:</b><br/> <math> \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle  \leq \ \mathbf{v}\  \cdot \ \mathbf{w}\ </math></p> <p>→ Satz 10.18</p> |
| <p>In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> gilt:</p> <p>(i) <math>\ \mathbf{v}\  \geq 0</math> für alle <math>\mathbf{v} \in V</math><br/> <math>\ \mathbf{v}\  = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}</math></p> <p>(ii) <math>\ s \cdot \mathbf{v}\  =  s  \ \mathbf{v}\ </math></p> <p>(iii) <b>(Dreiecksungleichung:)</b><br/> <math>\dots</math></p> <p>(iv) <b>Cauchy-Schwarz-Ungleichung:</b><br/> <math> \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle  \leq \ \mathbf{v}\  \cdot \ \mathbf{w}\ </math></p>   | <p>In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> gilt:</p> <p>(i) <math>\ \mathbf{v}\  \geq 0</math> für alle <math>\mathbf{v} \in V</math><br/> <math>\ \mathbf{v}\  = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}</math></p> <p>(ii) <math>\ s \cdot \mathbf{v}\  =  s  \ \mathbf{v}\ </math></p> <p>(iii) <b>Dreiecksungleichung:</b><br/> <math>\ \mathbf{v} + \mathbf{w}\  \leq \ \mathbf{v}\  + \ \mathbf{w}\ </math></p> <p>(iv) <b>Cauchy-Schwarz-Ungleichung:</b><br/> <math> \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle  \leq \ \mathbf{v}\  \cdot \ \mathbf{w}\ </math></p> <p>→ Satz 10.18</p> |
| <p>In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> gilt:</p> <p>(i) <math>\ \mathbf{v}\  \geq 0</math> für alle <math>\mathbf{v} \in V</math><br/> <math>\ \mathbf{v}\  = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}</math></p> <p>(ii) <math>\ s \cdot \mathbf{v}\  =  s  \ \mathbf{v}\ </math></p> <p>(iii) <b>Dreiecksungleichung:</b><br/> <math>\ \mathbf{v} + \mathbf{w}\  \leq \ \mathbf{v}\  + \ \mathbf{w}\ </math></p> <p>(iv) <b>(Cauchy-Schwarz-Ungleichung):</b><br/> <math>\dots</math></p>  | <p>In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> gilt:</p> <p>(i) <math>\ \mathbf{v}\  \geq 0</math> für alle <math>\mathbf{v} \in V</math><br/> <math>\ \mathbf{v}\  = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}</math></p> <p>(ii) <math>\ s \cdot \mathbf{v}\  =  s  \ \mathbf{v}\ </math></p> <p>(iii) <b>Dreiecksungleichung:</b><br/> <math>\ \mathbf{v} + \mathbf{w}\  \leq \ \mathbf{v}\  + \ \mathbf{w}\ </math></p> <p>(iv) <b>Cauchy-Schwarz-Ungleichung:</b><br/> <math> \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle  \leq \ \mathbf{v}\  \cdot \ \mathbf{w}\ </math></p> <p>→ Satz 10.18</p> |
| <p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.<br/> <math>\mathbf{v} \in V</math> heißt <b>normiert</b>, falls <math>\dots</math></p>   | <p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.<br/> <math>\mathbf{v} \in V</math> heißt <b>normiert</b>, falls <math>\ \mathbf{v}\  = 1</math></p> <p>→ Def. 10.20</p>   |



|  |   |
|--|---|
| <p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.<br/> <math>\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V</math> sind zueinander <b>orthogonal</b>, falls ...</p>                   | <p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.<br/> <math>\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V</math> sind zueinander <b>orthogonal</b>, falls <math>\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0</math><br/> [Notation: <math>\mathbf{v} \perp \mathbf{w}</math>]</p> <p>→ Def. 10.20</p>  |
| <p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.<br/> Eine Basis <math>B</math> von <math>V</math> heißt <b>Orthonormalbasis</b> von <math>V</math>, falls ...</p> | <p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.<br/> Eine Basis <math>B = (\mathbf{b}_i)_i</math> von <math>V</math> heißt <b>Orthonormalbasis</b> von <math>V</math>, falls</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• jedes <math>\mathbf{b}_i \in B</math> normiert ist, und</li> <li>• jeweils <math>\mathbf{b}_i \perp \mathbf{b}_j</math> für <math>i \neq j</math></li> </ul> <p>→ Def. 10.20</p> |
| <p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> euklidisch oder unitär. Das <b>orthogonale Komplement</b> eines Untervektorraums <math>W \subseteq V</math> ist</p> $W^\perp :=$                             | <p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> euklidisch oder unitär. Das <b>orthogonale Komplement</b> eines Untervektorraums <math>W \subseteq V</math> ist</p> $W^\perp := \{ \mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \text{ für alle } \mathbf{w} \in W \}$ <p>→ Def. 10.23</p>   |
| <p>Ein <b>affiner Unterraum</b> eines Vektorraums <math>V</math> ist ...</p>   | <p>Ein <b>affiner Unterraum</b> eines Vektorraums <math>V</math> ist eine Teilmenge der Form</p> $\mathbf{u}_0 + U = \{ \mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} - \mathbf{u}_0 \in U \}$ <p>für einen Untervektorraum <math>U \subseteq V</math>.</p>  |

Eine **affine Hyperebene** ist ...

Eine **affine Hyperebene** ist ein affiner Unterraum, dessen zugehöriger Untervektorraum  $U$  die Dimension  $\dim U = \dim V - 1$  hat.

Hessesche Normalform

Jede affine Hyperrebene in einem euklidischen oder unitären VR hat die Form

$H =$

Hessesche Normalform

Jede affine Hyperrebene in einem euklidischen oder unitären VR hat die Form

$H = \{ \mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = d \}$

für einen normierten Vektor  $\mathbf{n}$  und ein  $d \in \mathbb{R}$  mit  $d \geqslant 0$

→ Satz 10.25

Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

1. (Winkel zwischen Vektoren und ihrem Kreuzprodukt) ...
2.  $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

1.  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$  und  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
2.  $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

→ Satz 10.28

Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

1.  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$  und  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
2. (Norm des Kreuzprodukts) ...

Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

1.  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$  und  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
2.  $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

→ Satz 10.28

|   |  |
|---|--|
| <p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> euklidischer oder unitärer Vektorraum.<br/> Eine <b>Isometrie</b> ist eine lineare Abbildung <math>f: V \rightarrow V</math>,<br/> für die gilt ...</p>   | <p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> euklidischer oder unitärer Vektorraum.<br/> Eine <b>Isometrie</b> ist eine lineare Abbildung <math>f: V \rightarrow V</math>,<br/> für die gilt:</p> $\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$ <p>→ Def. 11.1</p> |
| <p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> euklidischer oder unitärer Vektorraum.<br/> Eine <b>Isometrie</b> ist ... ,<br/> für die gilt:</p> $\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$ | <p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> euklidischer oder unitärer Vektorraum.<br/> Eine <b>Isometrie</b> ist eine lineare Abbildung <math>f: V \rightarrow V</math>,<br/> für die gilt:</p> $\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$ <p>→ Def. 11.1</p> |
| <p>Alle Eigenwerte einer Isometrie ...</p> <p>Satz<br/> LinA-II-11-Isometrien<br/> 21857eac-bf03-11ec-9d64-0242ac120002</p>   | <p>Alle Eigenwerte einer Isometrie haben Betrag 1.</p> <p>→ Satz 10.2</p> <p>Satz<br/> LinA-II-11-Isometrien<br/> 21857eac-bf03-11ec-9d64-0242ac120002</p>   |
| <p>Eigenwerte einer Isometrie in einem euklidischen Vektorraum haben die Form</p> $a =$   | <p>Eigenwerte einer Isometrie in einem euklidischen Vektorraum haben die Form</p> $a = \pm 1$ <p>→ Satz 10.2</p>   |

Eigenwerte einer Isometrie in einem unitären Vektorraum haben die Form

$$a =$$

Eigenwerte einer Isometrie in einem unitären Vektorraum haben die Form

$$a = x + iy \text{ mit } x^2 + y^2 = 1$$

→ Satz 10.2

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer Isometrie ...

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer Isometrie stehen senkrecht zueinander.

→ Satz 10.2

Satz  
LinA-II-11-Isometrien

21857eac-bf03-11ec-9d64-0242ac120002

Satz  
LinA-II-11-Isometrien

21857eac-bf03-11ec-9d64-0242ac120002

Sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V = K^n$  versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.  
Für  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$  sind äquivalent:

- (i) ...
- (ii)  $A$  ist invertierbar und  $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) Die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .
- (iv) Die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .

Sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V = K^n$  versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.  
Für  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$  sind äquivalent:

- (i)  $f_A$  ist eine Isometrie auf  $V$ .
- (ii)  $A$  ist invertierbar und  $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) Die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .
- (iv) Die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .

→ Satz 11.3

Sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V = K^n$  versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.  
Für  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$  sind äquivalent:

- (i)  $f_A$  ist eine Isometrie auf  $V$ .
- (ii) ...
- (iii) Die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .
- (iv) Die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .

Sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V = K^n$  versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.  
Für  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$  sind äquivalent:

- (i)  $f_A$  ist eine Isometrie auf  $V$ .
- (ii)  $A$  ist invertierbar und  $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) Die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .
- (iv) Die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .

→ Satz 11.3

Sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V = K^n$  versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.  
 Für  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$  sind äquivalent:

- (i)  $f_A$  ist eine Isometrie auf  $V$ .
- (ii)  $A$  ist invertierbar und  $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) ...
- (iv) Die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .

Sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V = K^n$  versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.  
 Für  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$  sind äquivalent:

- (i)  $f_A$  ist eine Isometrie auf  $V$ .
- (ii)  $A$  ist invertierbar und  $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) Die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .
- (iv) Die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .

→ Satz 11.3

Sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V = K^n$  versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.  
 Für  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$  sind äquivalent:

- (i)  $f_A$  ist eine Isometrie auf  $V$ .
- (ii)  $A$  ist invertierbar und  $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) Die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .
- (iv) ...

Sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V = K^n$  versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.  
 Für  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$  sind äquivalent:

- (i)  $f_A$  ist eine Isometrie auf  $V$ .
- (ii)  $A$  ist invertierbar und  $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) Die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .
- (iv) Die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .

→ Satz 11.3

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper  $K$  ist definiert als

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(K) &:= \dots \\ &= (\{A \in \text{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot) \end{aligned}$$

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper  $K$  ist definiert als

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(K) &:= (\{A \in \text{Mat}_K(n \times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \text{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper  $K$  ist definiert als

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(K) &:= (\{A \in \text{Mat}_K(n \times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper  $K$  ist definiert als

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(K) &:= (\{A \in \text{Mat}_K(n \times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \text{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **spezielle lineare Gruppe** über einem Körper  $K$  ist definiert als

$$\mathrm{SL}_n(K) :=$$

Die **spezielle lineare Gruppe** über einem Körper  $K$  ist definiert als

$$\mathrm{SL}_n(K) := (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) = 1\}, \cdot)$$

→ Def/Satz 11.5

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &:= \dots \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **spezielle orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SO}(n) :=$$

Die **spezielle orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SO}(n) := \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

→ Def/Satz 11.5

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) &:= \dots \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **spezielle unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SU}(n) :=$$

Die **spezielle unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SU}(n) := \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

→ Def/Satz 11.5

Eine Isometrie auf  $\mathbb{R}^2$  ist ... oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

Eine Isometrie auf  $\mathbb{R}^2$  ist eine Rotation um  $\mathbf{0}$  oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

→ Lemma 11.6

Eine Isometrie auf  $\mathbb{R}^2$  ist eine Rotation um  $\mathbf{0}$  oder ...

Eine Isometrie auf  $\mathbb{R}^2$  ist eine Rotation um  $\mathbf{0}$  oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

→ Lemma 11.6

Die orthogonale Gruppe  $O(2)$  hat die Form

$$O(2) = \dots \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

Die orthogonale Gruppe  $O(2)$  hat die Form

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

→ Lemma 11.6

Die orthogonale Gruppe  $O(2)$  hat die Form

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \dots$$

Die orthogonale Gruppe  $O(2)$  hat die Form

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

→ Lemma 11.6

**Struktursatz für euklidische Isometrien**

Jede Isometrie eines ... euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k & \end{pmatrix}$$

mit  $A_i$  Rotationsmatrizen.

**Struktursatz für euklidische Isometrien**

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k & \end{pmatrix}$$

mit  $A_i$  Rotationsmatrizen.

→ satz 11.7



**Struktursatz für euklidische Isometrien**  
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat ...  
eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & -1 \\ & & & & & & A_1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit  $A_i$  Rotationsmatrizen.

**Struktursatz für euklidische Isometrien**  
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & -1 \\ & & & & & & A_1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit  $A_i$  Rotationsmatrizen.

→ satz 11.7

**Struktursatz für euklidische Isometrien**  
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* eine darstellende Matrix der Form ...

**Struktursatz für euklidische Isometrien**  
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & -1 \\ & & & & & & A_1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit  $A_i$  Rotationsmatrizen.

→ satz 11.7

Sei  $K$  eine Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus.  
Ein Untervektorraum  $W \subseteq V$  heißt **f-stabil**, falls ...

Sei  $K$  eine Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus.  
Ein Untervektorraum  $W \subseteq V$  heißt **f-stabil**, falls  $f(W) \subseteq W$ .

→ Satz 11.7

Jede Isometrie  $f$  eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums  $V \neq \{0\}$  besitzt ... (Untervektorraum)

Jede Isometrie  $f$  eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums  $V \neq \{0\}$  besitzt einen  $f$ -stabilen Untervektorraum der Dimension 1 oder 2.

→ Lemma 11.11

**Struktursatz für unitäre Isometrien**

Jede Isometrie eines ... unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit  $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$ .

**Struktursatz für unitäre Isometrien**

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit  $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$ .

→ Satz 11.12

**Struktursatz für unitäre Isometrien**

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird ... dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit  $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$ .

**Struktursatz für unitäre Isometrien**

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit  $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$ .

→ Satz 11.12

**Struktursatz für unitäre Isometrien**

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* dargestellt von ...

**Struktursatz für unitäre Isometrien**

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit  $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$ .

→ Satz 11.12

Ein Endomorphismus  $f$  eines euklidischen oder unitären Vektorraums  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist *selbstadjungiert*, falls ...

Ein Endomorphismus  $f$  eines euklidischen oder unitären Vektorraums  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist *selbstadjungiert*, falls

$$\langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, f(\mathbf{w}) \rangle \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$$

→ Def. 12.1

Sei  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ ,  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Dann sind äquivalent:

- ...
- $A$  ist symmetrisch ( $A = A^T$ )  
bzw. hermitesch ( $A = \overline{A^T}$ )

Sei  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ ,  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Dann sind äquivalent:

- Die lineare Abbildung  $f_A : K^n \longrightarrow K^n$  ist *selbstadjungiert* bezüglich des Standardskalarprodukts auf  $K^n$ .
- $A$  ist symmetrisch ( $A = A^T$ )  
bzw. hermitesch ( $A = \overline{A^T}$ )

→ Notiz 12.2

Sei  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ ,  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Dann sind äquivalent:

- Die lineare Abbildung  $f_A : K^n \longrightarrow K^n$  ist *selbstadjungiert* bezüglich des Standardskalarprodukts auf  $K^n$ .
- ...

Sei  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ ,  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Dann sind äquivalent:

- Die lineare Abbildung  $f_A : K^n \longrightarrow K^n$  ist *selbstadjungiert* bezüglich des Standardskalarprodukts auf  $K^n$ .
- $A$  ist symmetrisch ( $A = A^T$ )  
bzw. hermitesch ( $A = \overline{A^T}$ )

→ Notiz 12.2

Alle Eigenwerte eines *selbstadjungierten* Endomorphismus ...

Alle Eigenwerte eines *selbstadjungierten* Endomorphismus sind reell.

→ Satz 12.3

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten eines *selbstadjungierten* Endomorphismus ...

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten eines *selbstadjungierten* Endomorphismus stehen senkrecht zueinander.

→ Satz 12.3

### Spektralsatz

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.

Zu ...  $f$  auf  $V$   
existiert eine Orthonormalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ .

### Spektralsatz

#### (Hauptachsentransformation für selbstadj. Abb.)

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.

Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus  $f$  auf  $V$  existiert eine Orthonormalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ .

→ Satz 12.4

### Spektralsatz

#### (Hauptachsentransformation für selbstadj. Abb.)

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.

Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus  $f$  auf  $V$  existiert ...

### Spektralsatz

#### (Hauptachsentransformation für selbstadj. Abb.)

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.

Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus  $f$  auf  $V$  existiert eine Orthonormalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ .

→ Satz 12.4

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder ... Matrix  $A$  existiert eine Matrix  $S \in O(n)$  mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$  existiert eine Matrix  $S \in O(n)$  mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.5

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$  existiert eine Matrix ... mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$  existiert eine Matrix  $S \in O(n)$  mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.5

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix

$A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$  existiert eine Matrix  $S \in O(n)$  mit

...

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix

$A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$  existiert eine Matrix  $S \in O(n)$  mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.5

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder ... Matrix  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  existiert eine Matrix  $S \in U(n)$  mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **hermiteschen** Matrix  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  existiert eine Matrix  $S \in U(n)$  mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.5

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **hermiteschen** Matrix  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  existiert eine Matrix ... mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **hermiteschen** Matrix  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  existiert eine Matrix  $S \in U(n)$  mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.5

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **hermiteschen** Matrix  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  existiert eine Matrix  $S \in U(n)$  mit ...

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **hermiteschen** Matrix  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  existiert eine Matrix  $S \in U(n)$  mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.5

### Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform  $\beta$  auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existiert ...  $B$  mit

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

### Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform  $\beta$  auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existiert eine Orthonormalbasis  $B$ , in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.6

### Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform  $\beta$  auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existiert eine Orthonormalbasis  $B$ , in der gilt: ...

### Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform  $\beta$  auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existiert eine Orthonormalbasis  $B$ , in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.6

### Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform  $\beta$  auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existiert ... mit:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

### Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform  $\beta$  auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existiert eine Orthonormalbasis  $B$ , in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.6

### Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform  $\beta$  auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existiert eine Orthonormalbasis  $B$ , in der gilt: ...

### Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform  $\beta$  auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existiert eine Orthonormalbasis  $B$ , in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.6

Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und  $\beta$  eine Bilinearform auf  $V$ .

Die assoziierte **quadratische Abbildung** ist ...

Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und  $\beta$  eine Bilinearform auf  $V$ .

Die assoziierte **quadratische Abbildung** ist

$$q_\beta : V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} \mapsto \beta(\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

→ Def 12.7

Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und  $\beta$  eine Bilinearform auf  $V$ .

Die assoziierte **reelle affine Quadrik** ist ...

Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und  $\beta$  eine Bilinearform auf  $V$ .

Die assoziierte **reelle affine Quadrik** ist die Menge

$$Q_\beta := \{\mathbf{v} \in V \mid \beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1\}$$

→ Def 12.7

### Hauptachsentransformation für Quadriken

Jede reelle affine Quadrik in einem euklidischen Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  hat bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  von  $V$  die Form ...

### Hauptachsentransformation für Quadriken

Jede reelle affine Quadrik in einem **euklidischen** Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  hat bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  von  $V$  die Form

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{b}_i \in V \mid \sum a_i x_i^2 = 1 \right\}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.8

### Trägheitssatz von Sylvester

Jede reelle symmetrische Matrix  $A$  ist kongruent zu einer Diagonalmatrix der Form ...

### Trägheitssatz von Sylvester

Jede reelle symmetrische Matrix  $A$  ist kongruent zu einer Diagonalmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & +1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Die Anzahl der +1-, -1- und 0-Einträge ist dabei durch  $A$  eindeutig bestimmt.

→ Satz 12.9

|   |   |
|---|---|
| <p>Ein <b>Integritätsring</b> ist ein ... Ring <math>R</math>, in dem für alle <math>a, b \in R</math> gilt:</p> $ab = 0 \Rightarrow [a = 0 \text{ oder } b = 0]$ | <p>Ein <b>Integritätsring</b> ist ein kommutativer Ring <math>R</math>, in dem für alle <math>a, b \in R</math> gilt:</p> $ab = 0 \Rightarrow [a = 0 \text{ oder } b = 0]$ <p>→ Def. 13.1</p> |
| <p>Ein <b>Integritätsring</b> ist ein kommutativer Ring <math>R</math>, in dem gilt: ...</p>  | <p>Ein <b>Integritätsring</b> ist ein kommutativer Ring <math>R</math>, in dem für alle <math>a, b \in R</math> gilt:</p> $ab = 0 \Rightarrow [a = 0 \text{ oder } b = 0]$ <p>→ Def. 13.1</p> |
| <p>Für jeden Integritätsring <math>R</math> ist (Polynomring über <math>R</math>) ...</p>   | <p>Für jeden Integritätsring <math>R</math> ist auch <math>R[X]</math> ein Integritätsring.</p> <p>→ Satz 13.2</p>  |
| <p>Für jeden Integritätsring <math>R</math> gilt</p> $(R[X])^\times =$  | <p>Für jeden Integritätsring <math>R</math> gilt</p> $(R[X])^\times = R^\times$ <p>→ Satz 13.2</p>  |



|  |   |
|--|---|
| <p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.<br/> <math>a</math> ist ein <b>Teiler</b> von <math>b</math> und <math>b</math> ist ein <b>Vielfaches</b> von <math>a</math> (<math>a b</math>) genau dann, wenn ...</p>  | <p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.<br/> <math>a</math> ist ein <b>Teiler</b> von <math>b</math> und <math>b</math> ist ein <b>Vielfaches</b> von <math>a</math> (<math>a b</math>) genau dann, wenn</p> $\exists c \in R: b = c \cdot a$ <p>→ Def. 13.4</p>   |
| <p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.<br/> <math>a</math> und <math>b</math> sind <b>assoziert</b> (<math>a \sim b</math>) genau dann, wenn ...</p>   | <p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.<br/> <math>a</math> und <math>b</math> sind <b>assoziert</b> (<math>a \sim b</math>) genau dann, wenn</p> $\exists c \in R^\times: b = c \cdot a$ <p>→ Def. 13.4</p>   |
| <p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.<br/> <math>c</math> ist ein <b>größter gemeinsamer Teiler</b> von <math>a</math> und <math>b</math> (<math>c \sim \text{ggT}(a, b)</math>) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>...</li> </ul> <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\forall c' \in R: (c' a) \text{ und } (c' b) \Rightarrow c' c</math></li> </ul> | <p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.<br/> <math>c</math> ist ein <b>größter gemeinsamer Teiler</b> von <math>a</math> und <math>b</math> (<math>c \sim \text{ggT}(a, b)</math>) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>c a</math> und <math>c b</math></li> </ul> <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\forall c' \in R: (c' a) \text{ und } (c' b) \Rightarrow c' c</math></li> </ul> <p>→ Def. 13.7</p> |
| <p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.<br/> <math>c</math> ist ein <b>größter gemeinsamer Teiler</b> von <math>a</math> und <math>b</math> (<math>c \sim \text{ggT}(a, b)</math>) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>c a</math> und <math>c b</math></li> </ul> <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>...</li> </ul>                                      | <p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.<br/> <math>c</math> ist ein <b>größter gemeinsamer Teiler</b> von <math>a</math> und <math>b</math> (<math>c \sim \text{ggT}(a, b)</math>) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>c a</math> und <math>c b</math></li> </ul> <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\forall c' \in R: (c' a) \text{ und } (c' b) \Rightarrow c' c</math></li> </ul> <p>→ Def. 13.7</p> |

|  |   |
|--|---|
| <p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.<br/> <math>a</math> und <math>b</math> sind <b>teilerfremd</b>, falls ...</p>   | <p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.<br/> <math>a</math> und <math>b</math> sind <b>teilerfremd</b>, falls <math>1 \sim \text{ggT}(a, b)</math></p> <p>→ Def. 13.7</p>  |
| <p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.<br/> <math>c</math> ist ein <b>kleinstes gemeinsames Vielfaches</b> von <math>a</math> und <math>b</math> (<math>c \sim \text{kgV}(a, b)</math>) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>...</li> </ul> <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\forall c' \in R: (a c') \text{ und } (b c') \Rightarrow c c'</math></li> </ul> | <p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.<br/> <math>c</math> ist ein <b>kleinstes gemeinsames Vielfaches</b> von <math>a</math> und <math>b</math> (<math>c \sim \text{kgV}(a, b)</math>) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>a c</math> und <math>b c</math></li> </ul> <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\forall c' \in R: (a c') \text{ und } (b c') \Rightarrow c c'</math></li> </ul> <p>→ Def. 13.7</p> |
| <p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.<br/> <math>c</math> ist ein <b>kleinstes gemeinsames Vielfaches</b> von <math>a</math> und <math>b</math> (<math>c \sim \text{kgV}(a, b)</math>) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>a c</math> und <math>b c</math></li> </ul> <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>...</li> </ul>                                      | <p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.<br/> <math>c</math> ist ein <b>kleinstes gemeinsames Vielfaches</b> von <math>a</math> und <math>b</math> (<math>c \sim \text{kgV}(a, b)</math>) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>a c</math> und <math>b c</math></li> </ul> <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\forall c' \in R: (a c') \text{ und } (b c') \Rightarrow c c'</math></li> </ul> <p>→ Def. 13.7</p> |
| <p>Ein Integritätsring <math>R</math> ist <b>euklidisch</b>, falls eine Abbildung</p> $\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ <p>mit folgender Eigenschaft existiert:<br/> Für <math>a, b \in R</math> mit <math>b \neq 0</math> existieren <math>q, r</math> mit</p> $\dots$ <p>und</p> $r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(b)$   | <p>Ein Integritätsring <math>R</math> ist <b>euklidisch</b>, falls eine Abbildung</p> $\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ <p>mit folgender Eigenschaft existiert:<br/> Für <math>a, b \in R</math> mit <math>b \neq 0</math> existieren <math>q, r</math> mit</p> $a = q \cdot b + r$ <p>und</p> $r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(b)$  |

|   |  |
|---|--|
| <p>Ein Integritätsring <math>R</math> ist <b>euklidisch</b>, falls eine Abbildung</p> $\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ <p>mit folgender Eigenschaft existiert:<br/>Für <math>a, b \in R</math> mit <math>b \neq 0</math> existieren <math>q, r</math> mit</p> $a = q \cdot b + r$ <p>und</p> $\dots$ | <p>Ein Integritätsring <math>R</math> ist <b>euklidisch</b>, falls eine Abbildung</p> $\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ <p>mit folgender Eigenschaft existiert:<br/>Für <math>a, b \in R</math> mit <math>b \neq 0</math> existieren <math>q, r</math> mit</p> $a = q \cdot b + r$ <p>und</p> $r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(b)$ <p>→ Def. 13.9</p> |
| <p><b>Lemma von Bézout</b><br/>In jedem euklidischen Ring gilt:</p> $c \sim \text{ggT}(a, b) \Rightarrow$   | <p><b>Lemma von Bézout</b><br/>In jedem euklidischen Ring gilt:</p> $c \sim \text{ggT}(a, b) \Rightarrow \exists x, y: c = xa + yb$ <p>→ Lemma 13.13</p>   |
| <p>In jedem euklidischen Ring gilt:</p> $a, b \text{ teilerfremd} \Leftrightarrow$  | <p>In jedem euklidischen Ring gilt:</p> $a, b \text{ teilerfremd} \Leftrightarrow \exists x, y: 1 = x \cdot a + y \cdot b$ <p>→ Korollar 13.14</p>   |
| <p>In jedem euklidischen Ring gilt:</p> $\Leftrightarrow \exists x, y: 1 = x \cdot a + y \cdot b$   | <p>In jedem euklidischen Ring gilt:</p> $a, b \text{ teilerfremd} \Leftrightarrow \exists x, y: 1 = x \cdot a + y \cdot b$ <p>→ Korollar 13.14</p>   |

|   |   |
|---|---|
| <div>Sei <math>R</math> ein Integritätsring.<br/>Ein Element <math>p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})</math> ist <b>irreduzibel</b>, falls ...</div> <div>Def<br/>LinA-II-13-Euklidische-Ringe1a1b1607-0506-4438-b2a4-e0f89c3a2089</div> | <div>Sei <math>R</math> ein Integritätsring.<br/>Ein Element <math>p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})</math> ist <b>irreduzibel</b>, falls für <math>a, b \in R</math> gilt:</div> <div><math display="block">p = a \cdot b \Rightarrow (a \in R^\times \text{ oder } b \in R^\times)</math></div> <div>→ Def. 13.15</div> |
| <div>Sei <math>R</math> ein Integritätsring.<br/>Ein Element <math>p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})</math> ist <b>prim</b>, falls ...</div> <div>Def<br/>LinA-II-13-Euklidische-Ringe1a1b1607-0506-4438-b2a4-e0f89c3a2089</div>        | <div>Sei <math>R</math> ein Integritätsring.<br/>Ein Element <math>p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})</math> ist <b>prim</b>, falls für <math>a, b \in R</math> gilt:</div> <div><math display="block">p ab \Rightarrow p b \text{ oder } p a</math></div> <div>→ Def. 13.15</div>   |
| <div>In einem Integritätsring <math>R</math> gilt: (Zusammenhang prim und irreduzibel) ...</div> <div>Satz<br/>LinA-II-13-Euklidische-Ringe53b1954d-e3f5-4cd5-aa5c-d8266a638202</div>   | <div>In einem Integritätsring <math>R</math> gilt:</div> <div><math display="block">p \in R \text{ prim} \Rightarrow p \text{ irreduzibel}</math></div> <div>→ Satz 13.16</div>   |
| <div>In einem euklidischen Ring <math>R</math> gilt: (Zusammenhang prim und irreduzibel)</div> <div>Satz<br/>LinA-II-13-Euklidische-Ringe53b1954d-e3f5-4cd5-aa5c-d8266a638202</div>   | <div>... In einem euklidischen Ring <math>R</math> gilt:</div> <div><math display="block">p \in R \text{ prim} \Leftrightarrow p \text{ irreduzibel}</math></div> <div>→ Satz 13.16</div>   |

|   |  |
|---|--|
| <div data-bbox="57 60 624 94" data-label="Text"> <p>Eine <b>Primfaktorzerlegung</b> von <math>a \in R</math> ist ...</p> </div> <div data-bbox="57 510 738 546" data-label="Text"> <p>Def<br/>LinA-II-13-Euklidische-Ringe<span>e5c8519c-02d7-4561-8a22-6aba87daa2b3</span></p> </div>                                  | <div data-bbox="855 60 1538 129" data-label="Text"> <p>Eine <b>Primfaktorzerlegung</b> von <math>a \in R</math> ist eine Darstellung von <math>a</math> als Produkt</p> </div> <div data-bbox="1106 168 1284 197" data-label="Equation-Block"> <math display="block">a = p_1 p_2 \cdots p_r</math> </div> <div data-bbox="855 228 1206 262" data-label="Text"> <p>mit <math>r \in \mathbb{N}</math> und <math>p_i \in R</math> prim.</p> </div> <div data-bbox="1425 306 1538 324" data-label="Text"> <p>→ Def. 13.19</p> </div> |
| <div data-bbox="57 622 534 689" data-label="Text"> <p>Ein Integritätsring <math>R</math> heißt <b>faktoriell</b>, wenn ...</p> </div> <div data-bbox="57 1070 738 1106" data-label="Text"> <p>Def<br/>LinA-II-13-Euklidische-Ringe<span>e5c8519c-02d7-4561-8a22-6aba87daa2b3</span></p> </div>                          | <div data-bbox="855 622 1538 728" data-label="Text"> <p>Ein Integritätsring <math>R</math> heißt <b>faktoriell</b>, wenn jedes <math>a \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})</math> eine Primfaktorzerlegung besitzt.</p> </div> <div data-bbox="1425 772 1538 790" data-label="Text"> <p>→ Def. 13.19</p> </div>  |
| <div data-bbox="57 1182 738 1249" data-label="Text"> <p>Falls eine <i>Primfaktorzerlegung</i> von <math>a \in R</math> existiert, so ist diese ...</p> </div> <div data-bbox="57 1630 738 1666" data-label="Text"> <p>Satz<br/>LinA-II-13-Euklidische-Ringe<span>89327ded-c7e4-49f1-a10f-9199de4016be</span></p> </div> | <div data-bbox="855 1182 1538 1288" data-label="Text"> <p>Falls eine <i>Primfaktorzerlegung</i> von <math>a \in R</math> existiert, so ist diese <i>eindeutig</i> bis auf Reihenfolge der Faktoren und Assoziiertheit.</p> </div> <div data-bbox="1425 1332 1538 1350" data-label="Text"> <p>→ Satz 13.20</p> </div>   |
| <div data-bbox="57 1742 558 1776" data-label="Text"> <p>Für jeden Körper <math>K</math> ist ... faktoriell.</p> </div> <div data-bbox="57 2190 738 2226" data-label="Text"> <p>Satz<br/>LinA-II-13-Euklidische-Ringe<span>8a2baefd-95e9-4ac4-91d6-96ab9a9a7d0c</span></p> </div>  | <div data-bbox="855 1742 1366 1776" data-label="Text"> <p>Für jeden Körper <math>K</math> ist <math>K[X]</math> faktoriell.</p> </div> <div data-bbox="1425 1821 1538 1839" data-label="Text"> <p>→ Satz 13.22</p> </div>  |

Das **Minimalpolynom** von  $f$  ist das eindeutige Polynom  $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$  für das gilt:

- (1) ...
- (2) Unter allen Polynomen  $\neq 0$ , die (1) erfüllen, hat  $\mu_f$  minimalen Grad.
- (3)  $\mu_f$  ist normiert (d.h. Leitkoeffizient = 1)

Das **Minimalpolynom** von  $f$  ist das eindeutige Polynom  $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$  für das gilt:

- (1)  $\mu_f(f) = 0$  (Nullabbildung in  $\text{End}_K(V)$ )
- (2) Unter allen Polynomen  $\neq 0$ , die (1) erfüllen, hat  $\mu_f$  minimalen Grad.
- (3)  $\mu_f$  ist normiert (d.h. Leitkoeffizient = 1)

→ Def. 14.4

Das **Minimalpolynom** von  $f$  ist das eindeutige Polynom  $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$  für das gilt:

- (1)  $\mu_f(f) = 0$  (Nullabbildung in  $\text{End}_K(V)$ )
- (2) ...
- (3)  $\mu_f$  ist normiert (d.h. Leitkoeffizient = 1)

Das **Minimalpolynom** von  $f$  ist das eindeutige Polynom  $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$  für das gilt:

- (1)  $\mu_f(f) = 0$  (Nullabbildung in  $\text{End}_K(V)$ )
- (2) Unter allen Polynomen  $\neq 0$ , die (1) erfüllen, hat  $\mu_f$  minimalen Grad.
- (3)  $\mu_f$  ist normiert (d.h. Leitkoeffizient = 1)

→ Def. 14.4

Das **Minimalpolynom** von  $f$  ist das eindeutige Polynom  $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$  für das gilt:

- (1)  $\mu_f(f) = 0$  (Nullabbildung in  $\text{End}_K(V)$ )
- (2) Unter allen Polynomen  $\neq 0$ , die (1) erfüllen, hat  $\mu_f$  minimalen Grad.
- (3) ...

Das **Minimalpolynom** von  $f$  ist das eindeutige Polynom  $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$  für das gilt:

- (1)  $\mu_f(f) = 0$  (Nullabbildung in  $\text{End}_K(V)$ )
- (2) Unter allen Polynomen  $\neq 0$ , die (1) erfüllen, hat  $\mu_f$  minimalen Grad.
- (3)  $\mu_f$  ist normiert (d.h. Leitkoeffizient = 1)

→ Def. 14.4

**Satz von Caley-Hamilton**

Für das charakteristische Polynom eines Endomorphismus  $f$  gilt ...

**Satz von Caley-Hamilton**

Für das charakteristische Polynom eines Endomorphismus  $f$  gilt

$$\chi_f(f) = 0$$

→ Satz 14.7

|   |   |
|---|---|
| <div>Satz von Caley-Hamilton im zyklischen Fall</div> <div>Ist <math>W \subseteq V</math> <math>f</math>-zyklisch, so ist</div> <div>...</div> <div>das Minimalpolynom für <math>f _W</math>.</div> <div>Satz<br/>LinA-II-14-Minimalpolynom</div> <div>b684bb58-b59c-4e97-953f-6d32f2a58dcf</div> | <div>Satz von Caley-Hamilton im zyklischen Fall</div> <div>Ist <math>W \subseteq V</math> <math>f</math>-zyklisch, so ist</div> <div><math>(-1)^{\dim W} \chi_{f _W}</math></div> <div>das Minimalpolynom für <math>f _W</math>.</div> <div>→ Satz 14.13</div>  |
| <div>Ein Untervektorraum <math>W \subseteq V</math> ist <b>f-zyklisch</b>, falls ...</div> <div>Def<br/>LinA-II-14-Minimalpolynom</div> <div>6088f132-4411-44e9-aa19-9c0cfa13ab91</div>   | <div>Ein Untervektorraum <math>W \subseteq V</math> ist <b>f-zyklisch</b>, falls</div> <div><math>W = \langle \mathbf{w}, f(\mathbf{w}), f^2(\mathbf{w}), \dots \rangle</math> für ein <math>\mathbf{w} \in V</math></div> <div>→ Def. 14.8</div>   |
| <div>Ist <math>W</math> ein <i>f-zyklischer</i> Untervektorraum der Dimension <math>d</math>, so ist (Basis) ...</div> <div>Satz<br/>LinA-II-14-Minimalpolynom</div> <div>31141f5d-f74d-45d8-bd71-4577c54a1e2c</div>  | <div>Ist <math>W</math> ein <i>f-zyklischer</i> Untervektorraum der Dimension <math>d</math>, so ist <math>(\mathbf{w}, f(\mathbf{w}), f^2(\mathbf{w}), \dots, f^{d-1}(\mathbf{w}))</math> eine Basis von <math>W</math>.</div> <div>→ Lemma 14.10</div>  |
| <div>Die <b>Begleitmatrix</b> zu einem normierten Polynom <math>A = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i</math> ist die Matrix ...</div> <div>Def<br/>LinA-II-14-Minimalpolynom</div> <div>2e432a06-1654-4799-8785-7f9fe0a985e8</div>   | <div>Die <b>Begleitmatrix</b> zu einem normierten Polynom <math>A = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i</math> ist die Matrix</div> <div><math display="block">\begin{pmatrix} 0 &amp; &amp; &amp; 0 &amp; -a_0 \\ 1 &amp; 0 &amp; &amp; 0 &amp; -a_1 \\ &amp; 1 &amp; \ddots &amp; &amp; \\ &amp; &amp; \ddots &amp; 0 &amp; -a_{d-2} \\ 0 &amp; &amp; &amp; 1 &amp; -a_{d-1} \end{pmatrix}</math></div> <div>→ Def 14.11</div> |

Sei  $f$  ein  $V$ -Endomorphismus.  
Ein Untervektorraum  $W \subseteq V$  ist genau dann ... ,  
wenn er  $f$ -stabil ist und eine Basis besitzt, in der  $f|_W$   
durch eine Begleitmatrix gegeben ist.

Sei  $f$  ein  $V$ -Endomorphismus.  
Ein Untervektorraum  $W \subseteq V$  ist genau dann  $f$ -zyklisch,  
wenn er  $f$ -stabil ist und eine Basis besitzt, in der  $f|_W$   
durch eine Begleitmatrix gegeben ist.

Sei  $f$  ein  $V$ -Endomorphismus.  
Ein Untervektorraum  $W \subseteq V$  ist genau dann  $f$ -zyklisch,  
wenn ...

Sei  $f$  ein  $V$ -Endomorphismus.  
Ein Untervektorraum  $W \subseteq V$  ist genau dann  $f$ -zyklisch,  
wenn er  $f$ -stabil ist und eine Basis besitzt, in der  $f|_W$   
durch eine Begleitmatrix gegeben ist.

**Spaltungssatz**  
Sei  $f$  ein Endomorphismus auf einem Vektorraum  $V$ .  
Ist  $\mu_f = P \cdot Q$  für zwei teilerfremde normierte Poly-  
nome  $P$  und  $Q$ , so ist

$$V =$$

**Spaltungssatz**  
Sei  $f$  ein Endomorphismus auf einem Vektorraum  $V$ .  
Ist  $\mu_f = P \cdot Q$  für zwei teilerfremde normierte Poly-  
nome  $P$  und  $Q$ , so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei  $f$ -stabile Untervektorräume  $W_P$  und  $W_Q$ .

**Spaltungssatz**  
Sei  $f$  ein Endomorphismus auf einem Vektorraum  $V$ .  
Ist  $\mu_f = P \cdot Q$  für zwei teilerfremde normierte Poly-  
nome  $P$  und  $Q$ , so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei  $f$ -stabile Untervektorräume  $W_P$  und  $W_Q$ , für  
die gilt:

$W_P =$

und  $\mu_f|_{W_P} = P$

$W_Q =$

und  $\mu_f|_{W_Q} = Q$

**Spaltungssatz**  
Sei  $f$  ein Endomorphismus auf einem Vektorraum  $V$ .  
Ist  $\mu_f = P \cdot Q$  für zwei teilerfremde normierte Poly-  
nome  $P$  und  $Q$ , so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei  $f$ -stabile Untervektorräume  $W_P$  und  $W_Q$ , für  
die gilt:

$$W_P = \ker(P(f)) = \operatorname{im}(Q(f)) \text{ und } \mu_f|_{W_P} = P$$

$$W_Q = \ker(Q(f)) = \operatorname{im}(P(f)) \text{ und } \mu_f|_{W_Q} = Q$$



Spaltungssatz

Sei  $f$  ein Endomorphismus auf einem Vektorraum  $V$ . Ist  $\mu_f = P \cdot Q$  für zwei teilerfremde normierte Polynome  $P$  und  $Q$ , so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei  $f$ -stabile Untervektorräume  $W_P$  und  $W_Q$ , für die gilt:

$$W_P = \ker(P(f)) = \operatorname{im}(Q(f)) \text{ und } \dots$$

$$W_Q = \ker(Q(f)) = \operatorname{im}(P(f)) \text{ und } \dots$$

Drittes Diagonalisierbarkeitskriterium

Ein Endomorphismus  $f$  ist diagonalisierbar genau dann, wenn (Minimalpolynom)...

Spaltungssatz

Sei  $f$  ein Endomorphismus auf einem Vektorraum  $V$ . Ist  $\mu_f = P \cdot Q$  für zwei teilerfremde normierte Polynome  $P$  und  $Q$ , so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei  $f$ -stabile Untervektorräume  $W_P$  und  $W_Q$ , für die gilt:

$$W_P = \ker(P(f)) = \operatorname{im}(Q(f)) \text{ und } \mu_f|_{W_P} = P$$

$$W_Q = \ker(Q(f)) = \operatorname{im}(P(f)) \text{ und } \mu_f|_{W_Q} = Q$$

→ Satz 14.17

Drittes Diagonalisierbarkeitskriterium

Ein Endomorphismus  $f$  ist diagonalisierbar genau dann, wenn  $\mu_f$  in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

→ Korollar 14.19

Ein **Jordanblock** ist ...

Ein **Jordanblock** ist eine (Unter-)matrix der Form

$$J(m;a) := \begin{pmatrix} a & 1 & & 0 \\ & a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_K(m \times m)$$

→ Def 15.1

Ein **Haupttraumblock** ist ...

Ein **Haupttraumblock** ist eine (Unter-)matrix der Form

$$H(m_1, \dots, m_k; a) := \begin{pmatrix} \boxed{J(m_1;a)} & & 0 \\ & \boxed{J(m_2;a)} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \boxed{J(m_k;a)} \end{pmatrix}$$

→ Def 15.1

### Jordannormalform

Sei  $f$  ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.

Zerfällt  $\chi_f$  in Linearfaktoren, so hat  $f$  bezüglich einer geeigneten Basis folgende Gestalt:

...

Satz  
LinA-II-15-Jordannormalform

15f3d72f-70b5-495b-bb04-a3f157ddea7b

### Jordannormalform

Sei  $f$  ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.

Zerfällt  $\chi_f$  in Linearfaktoren, so hat  $f$  bezüglich einer geeigneten Basis folgende Gestalt:

$${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{H(\dots; a_1)} & & 0 \\ & \boxed{H(\dots; a_2)} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \boxed{H(\dots; a_l)} \end{pmatrix}$$

Dabei sind die Hauptraumblöcke und die Jordanblöcke innerhalb dieser bis auf Reihenfolge eindeutig.

→ Theorem 15.2

### Jordannormalform

Sei  $f$  ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.

Wenn ... , so hat  $f$  bezüglich einer geeigneten Basis folgende Gestalt:

$${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{H(\dots; a_1)} & & 0 \\ & \boxed{H(\dots; a_2)} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \boxed{H(\dots; a_l)} \end{pmatrix}$$

Dabei sind die Hauptraumblöcke und die Jordanblöcke innerhalb dieser bis auf Reihenfolge eindeutig.

### Jordannormalform

Sei  $f$  ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.

Wenn  $\chi_f$  in Linearfaktoren zerfällt, so hat  $f$  bezüglich einer geeigneten Basis folgende Gestalt:

$${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{H(\dots; a_1)} & & 0 \\ & \boxed{H(\dots; a_2)} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \boxed{H(\dots; a_l)} \end{pmatrix}$$

Dabei sind die Hauptraumblöcke und die Jordanblöcke innerhalb dieser bis auf Reihenfolge eindeutig.

→ Theorem 15.2

Für die Jordannormalform von  $f$  gilt:

- $a_1, \dots, a_l$  sind ...
- Größe von  $H(m_1, \dots, m_k; a)$  ist die algebraische Vielfachheit von  $a$ .  
(=  $\max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \chi_f\}$ )
- Größe  $m$  des größten Jordanblocks  $J(m; a)$  zu  $a$  ist der Exponent von  $(X - a)$  in  $\mu_f$ .  
(=  $\max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \mu_f\}$ )

Für die Jordannormalform von  $f$  gilt:

- $a_1, \dots, a_l$  sind die verschiedenen Eigenwerte von  $f$ .
- Größe von  $H(m_1, \dots, m_k; a)$  ist die algebraische Vielfachheit von  $a$ .  
(=  $\max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \chi_f\}$ )
- Größe  $m$  des größten Jordanblocks  $J(m; a)$  zu  $a$  ist der Exponent von  $(X - a)$  in  $\mu_f$ .  
(=  $\max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \mu_f\}$ )

→ Notiz 15.3

Für die Jordannormalform von  $f$  gilt:

- $a_1, \dots, a_l$  sind die verschiedenen Eigenwerte von  $f$ .
- Größe von  $H(m_1, \dots, m_k; a)$  ...
- Größe  $m$  des größten Jordanblocks  $J(m; a)$  zu  $a$  ist der Exponent von  $(X - a)$  in  $\mu_f$ .  
(=  $\max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \mu_f\}$ )

Für die Jordannormalform von  $f$  gilt:

- $a_1, \dots, a_l$  sind die verschiedenen Eigenwerte von  $f$ .
- Größe von  $H(m_1, \dots, m_k; a)$  ist die algebraische Vielfachheit von  $a$ .  
(=  $\max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \chi_f\}$ )
- Größe  $m$  des größten Jordanblocks  $J(m; a)$  zu  $a$  ist der Exponent von  $(X - a)$  in  $\mu_f$ .  
(=  $\max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \mu_f\}$ )

→ Notiz 15.3

|  |   |
|--|---|
| <p>Für die Jordannormalform von <math>f</math> gilt:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>a_1, \dots, a_l</math> sind die verschiedenen Eigenwerte von <math>f</math>.</li> <li>Größe von <math>H(m_1, \dots, m_k; a)</math> ist die algebraische Vielfachheit von <math>a</math>.<br/>(<math>= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \chi_f\}</math>)</li> <li>Größe <math>m</math> des größten Jordanblocks <math>J(m; a)</math> zu <math>a</math><br/>...</li> </ul> | <p>Für die Jordannormalform von <math>f</math> gilt:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>a_1, \dots, a_l</math> sind die verschiedenen Eigenwerte von <math>f</math>.</li> <li>Größe von <math>H(m_1, \dots, m_k; a)</math> ist die algebraische Vielfachheit von <math>a</math>.<br/>(<math>= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \chi_f\}</math>)</li> <li>Größe <math>m</math> des größten Jordanblocks <math>J(m; a)</math> zu <math>a</math> ist der Exponent von <math>(X - a)</math> in <math>\mu_f</math>.<br/>(<math>= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X - a)^r \text{ teilt } \mu_f\}</math>)</li> </ul> <p>→ Notiz 15.3</p> |
| <p><b>Triagonalisierbarkeitskriterium</b><br/>Ein Endomorphismus <math>f</math> ist <b>triagonalisierbar</b>, falls ...</p> <p>Def<br/>LinA-II-15-Jordannormalform<br/>f0eae56c-7693-4b1b-b3bf-82466a1966bb</p>  | <p><b>Triagonalisierbarkeitskriterium</b><br/>Ein Endomorphismus <math>f</math> ist <b>triagonalisierbar</b>, falls eine Basis <math>B</math> existiert, in der <math>{}_B M_B(f)</math> eine obere Dreiecksmatrix ist.</p> <p>→ Def. 15.4</p>  |
| <p>Sei <math>a</math> ein Eigenwert von <math>f</math>, sei <math>\mu_f = (X - a)^m \cdot P</math> mit <math>P</math> teilerfremd zu <math>(X - a)</math>.<br/>Der <b>Hauptraum</b> von <math>f</math> zu <math>a</math> ist ...</p> <p>Def<br/>LinA-II-15-Jordannormalform<br/>24fdceea-c59b-4730-9a1d-506ef970bedf</p>   | <p>Sei <math>a</math> ein Eigenwert von <math>f</math>, sei <math>\mu_f = (X - a)^m \cdot P</math> mit <math>P</math> teilerfremd zu <math>(X - a)</math>.<br/>Der <b>Hauptraum</b> von <math>f</math> zu <math>a</math> ist</p> $\text{Hau}(f; a) := \ker((f - a \cdot \text{id})^m)$ <p>→ Def. 15.7</p>   |
| <p><b>Hauptraumzerlegung</b><br/>Zerfällt <math>\chi_f</math> in Linearfaktoren, so (Zerlegung von <math>V</math>) ...</p> <p>Satz<br/>LinA-II-15-Jordannormalform<br/>73273508-0f38-4c7e-ba80-bf591c7f3800</p>  | <p><b>Hauptraumzerlegung</b><br/>Zerfällt <math>\chi_f</math> in Linearfaktoren, so zerfällt <math>V</math> in die Haupträume:</p> $V = \oplus_{i=1}^l \text{Hau}(f; a_i)$ <p>wobei <math>a_1, \dots, a_l</math> die verschiedenen Eigenwerte von <math>f</math> sind.</p> <p>→ Satz 15.8</p>   |

### Eigenschaften der Haupträume

Sei  $a$  Eigenwert von  $f$  mit algebraischer Vielfachheit  $r$ , also  $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$  und  $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$  mit  $P$  und  $\tilde{P}$  jeweils teilerfremd zu  $(X - a)$ .

- (1) ...
- (2)  $\chi_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X - a)^r$
- (3)  $\mu_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (X - a)^m$
- (4)  $\dim \text{Hau}(f;a) = r$
- (5)  $\text{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \text{id})^i) \forall i \geq m$ .

### Eigenschaften der Haupträume

Sei  $a$  Eigenwert von  $f$  mit algebraischer Vielfachheit  $r$ , also  $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$  und  $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$  mit  $P$  und  $\tilde{P}$  jeweils teilerfremd zu  $(X - a)$ .

- (1)  $\text{Hau}(f;a)$  ist  $f$ -stabil.
- (2)  $\chi_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X - a)^r$
- (3)  $\mu_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (X - a)^m$
- (4)  $\dim \text{Hau}(f;a) = r$
- (5)  $\text{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \text{id})^i) \forall i \geq m$ .

→ Satz 15.9

### Eigenschaften der Haupträume

Sei  $a$  Eigenwert von  $f$  mit algebraischer Vielfachheit  $r$ , also  $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$  und  $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$  mit  $P$  und  $\tilde{P}$  jeweils teilerfremd zu  $(X - a)$ .

- (1)  $\text{Hau}(f;a)$  ist  $f$ -stabil.
- (2)  $\chi_f|_{\text{Hau}(f;a)} =$
- (3)  $\mu_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (X - a)^m$
- (4)  $\dim \text{Hau}(f;a) = r$
- (5)  $\text{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \text{id})^i) \forall i \geq m$ .

### Eigenschaften der Haupträume

Sei  $a$  Eigenwert von  $f$  mit algebraischer Vielfachheit  $r$ , also  $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$  und  $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$  mit  $P$  und  $\tilde{P}$  jeweils teilerfremd zu  $(X - a)$ .

- (1)  $\text{Hau}(f;a)$  ist  $f$ -stabil.
- (2)  $\chi_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X - a)^r$
- (3)  $\mu_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (X - a)^m$
- (4)  $\dim \text{Hau}(f;a) = r$
- (5)  $\text{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \text{id})^i) \forall i \geq m$ .

→ Satz 15.9

### Eigenschaften der Haupträume

Sei  $a$  Eigenwert von  $f$  mit algebraischer Vielfachheit  $r$ , also  $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$  und  $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$  mit  $P$  und  $\tilde{P}$  jeweils teilerfremd zu  $(X - a)$ .

- (1)  $\text{Hau}(f;a)$  ist  $f$ -stabil.
- (2)  $\chi_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X - a)^r$
- (3)  $\mu_f|_{\text{Hau}(f;a)} =$
- (4)  $\dim \text{Hau}(f;a) = r$
- (5)  $\text{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \text{id})^i) \forall i \geq m$ .

### Eigenschaften der Haupträume

Sei  $a$  Eigenwert von  $f$  mit algebraischer Vielfachheit  $r$ , also  $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$  und  $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$  mit  $P$  und  $\tilde{P}$  jeweils teilerfremd zu  $(X - a)$ .

- (1)  $\text{Hau}(f;a)$  ist  $f$ -stabil.
- (2)  $\chi_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X - a)^r$
- (3)  $\mu_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (X - a)^m$
- (4)  $\dim \text{Hau}(f;a) = r$
- (5)  $\text{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \text{id})^i) \forall i \geq m$ .

→ Satz 15.9

### Eigenschaften der Haupträume

Sei  $a$  Eigenwert von  $f$  mit algebraischer Vielfachheit  $r$ , also  $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$  und  $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$  mit  $P$  und  $\tilde{P}$  jeweils teilerfremd zu  $(X - a)$ .

- (1)  $\text{Hau}(f;a)$  ist  $f$ -stabil.
- (2)  $\chi_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X - a)^r$
- (3)  $\mu_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (X - a)^m$
- (4)  $\dim \text{Hau}(f;a) =$
- (5)  $\text{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \text{id})^i) \forall i \geq m$ .

### Eigenschaften der Haupträume

Sei  $a$  Eigenwert von  $f$  mit algebraischer Vielfachheit  $r$ , also  $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$  und  $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$  mit  $P$  und  $\tilde{P}$  jeweils teilerfremd zu  $(X - a)$ .

- (1)  $\text{Hau}(f;a)$  ist  $f$ -stabil.
- (2)  $\chi_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X - a)^r$
- (3)  $\mu_f|_{\text{Hau}(f;a)} = (X - a)^m$
- (4)  $\dim \text{Hau}(f;a) = r$
- (5)  $\text{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \text{id})^i) \forall i \geq m$ .

→ Satz 15.9

### Eigenschaften der Haupträume

Sei  $a$  Eigenwert von  $f$  mit algebraischer Vielfachheit  $r$ , also  $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$  und  $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$  mit  $P$  und  $\tilde{P}$  jeweils teilerfremd zu  $(X - a)$ .

(1)  $\text{Hau}(f; a)$  ist  $f$ -stabil.

(2)  $\chi_f|_{\text{Hau}(f; a)} = (-1)^r (X - a)^r$

(3)  $\mu_f|_{\text{Hau}(f; a)} = (X - a)^m$

(4)  $\dim \text{Hau}(f; a) = r$

(5)  $\text{Hau}(f; a) =$  .

### Eigenschaften der Haupträume

Sei  $a$  Eigenwert von  $f$  mit algebraischer Vielfachheit  $r$ , also  $\chi_f = (X - a)^r \cdot P$  und  $\mu_f = (X - a)^m \cdot \tilde{P}$  mit  $P$  und  $\tilde{P}$  jeweils teilerfremd zu  $(X - a)$ .

(1)  $\text{Hau}(f; a)$  ist  $f$ -stabil.

(2)  $\chi_f|_{\text{Hau}(f; a)} = (-1)^r (X - a)^r$

(3)  $\mu_f|_{\text{Hau}(f; a)} = (X - a)^m$

(4)  $\dim \text{Hau}(f; a) = r$

(5)  $\text{Hau}(f; a) = \ker((f - a \cdot \text{id})^i) \forall i \geq m$ .

→ Satz 15.9

Ein Endomorphismus  $g$  ist **nilpotent**, wenn ...

Ein Endomorphismus  $g$  ist **nilpotent**, wenn  $g^k = 0$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ .

→ Def. 15.10

Def  
LinA-II-15-Jordannormalform

32fa39ce-09db-4219-a5c1-6c2e711728c6

Für einen (endlich-dimensionalen) Vektorraum  $V$  mit Untervektorräumen  $U_1, \dots, U_k$  sind äquivalent:

(1) ...

(2)  $V$  hat eine Basis der Form

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

derart, dass  $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$  Basis von  $U_i$  ist.

(3) Für beliebige Basen  $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$  von  $U_i$  ist

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

eine Basis von  $V$ .

Für einen (endlich-dimensionalen) Vektorraum  $V$  mit Untervektorräumen  $U_1, \dots, U_k$  sind äquivalent:

(1)  $V = \bigoplus_{i=1}^k U_i$

(2)  $V$  hat eine Basis der Form

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

derart, dass  $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$  Basis von  $U_i$  ist.

(3) Für beliebige Basen  $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$  von  $U_i$  ist

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

eine Basis von  $V$ .

→ Notiz 15.13

Für einen (endlich-dimensionalen) Vektorraum  $V$  mit Untervektorräumen  $U_1, \dots, U_k$  sind äquivalent:

(1)  $V = \bigoplus_{i=1}^k U_i$

(2) ...

(3) Für beliebige Basen  $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$  von  $U_i$  ist

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

eine Basis von  $V$ .

Für einen (endlich-dimensionalen) Vektorraum  $V$  mit Untervektorräumen  $U_1, \dots, U_k$  sind äquivalent:

(1)  $V = \bigoplus_{i=1}^k U_i$

(2)  $V$  hat eine Basis der Form

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

derart, dass  $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$  Basis von  $U_i$  ist.

(3) Für beliebige Basen  $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$  von  $U_i$  ist

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

eine Basis von  $V$ .

→ Notiz 15.13

Für einen (endlich-dimensionalen) Vektorraum  $V$  mit Untervektorräumen  $U_1, \dots, U_k$  sind äquivalent:

- (1)  $V = \oplus_{i=1}^k U_i$
- (2)  $V$  hat eine Basis der Form

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

derart, dass  $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$  Basis von  $U_i$  ist.

- (3) ...

Für einen (endlich-dimensionalen) Vektorraum  $V$  mit Untervektorräumen  $U_1, \dots, U_k$  sind äquivalent:

- (1)  $V = \oplus_{i=1}^k U_i$
- (2)  $V$  hat eine Basis der Form

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

derart, dass  $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$  Basis von  $U_i$  ist.

- (3) Für beliebige Basen  $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$  von  $U_i$  ist

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

eine Basis von  $V$ .

→ Notiz 15.13

Ein **komplementärer Untervektorraum** zu einem Untervektorraum  $W \subseteq V$  ist ein Untervektorraum  $U \dots$

Ein **komplementärer Untervektorraum** zu einem Untervektorraum  $W \subseteq V$  ist ein Untervektorraum  $U \subseteq V$  mit

$$V = W \oplus U$$

→ Def. 14.15

Def  
LinA-II-15-Jordannormalform 0e4987e4-ed28-4005-83aa-1d66ccedb48b

**Jordannormalform im nilpotenten Fall**  
Zu jedem nilpotenten Endomorphismus  $g$  existiert ...

**Jordannormalform im nilpotenten Fall**  
Zu jedem nilpotenten Endomorphismus  $g$  existiert eine *Jordanbasis*, also eine Basis  $B$ , in der  ${}_B M_B(g)$  JNF hat

$$\begin{aligned} {}_B M_B(g) &= H(m_1, \dots, m_k; 0) \\ &= \begin{pmatrix} J(m_1; 0) & & 0 \\ & J(m_2; 0) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J(m_k; 0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit  $J(m; 0) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

→ Satz 15.16

Satz  
LinA-II-15-Jordannormalform eba13948-a4e5-4157-ad25-ff5e44396703

Eine **Jordan-Chevalley-Zerlegung** eines Endomorphismus  $f$  ist eine Zerlegung

$$f =$$

für die gilt ...

Eine **Jordan-Chevalley-Zerlegung** eines Endomorphismus  $f$  ist eine Zerlegung

$$f = d + n$$

für die gilt

- $d$  diagonalisierbar
- $n$  nilpotent
- $f, d, n$  kommutieren

→ Def. 15.18

Def  
LinA-II-15-Jordannormalform 82c3d9b0-77fe-4d2d-9e8f-786c5a7c2689

|   |   |
|---|---|
| <div data-bbox="57 62 665 132" data-label="Text"> <p>Eine <b>Jordan-Chevalley-Zerlegung</b> einer Matrix <math>A \in \text{Mat}_K(n \times n)</math> ist eine Zerlegung</p> </div> <div data-bbox="323 163 376 192" data-label="Equation-Block"> <math display="block">A =</math> </div> <div data-bbox="57 230 240 259" data-label="Text"> <p>für die gilt ...</p> </div> <div data-bbox="57 515 738 548" data-label="Page-Footer"> <div>Def</div> <div>LinA-II-15-Jordannormalform</div> <div>82c3d9b0-77fe-4d2d-9e8f-786c5a7c2689</div> </div> | <div data-bbox="855 62 1463 132" data-label="Text"> <p>Eine <b>Jordan-Chevalley-Zerlegung</b> einer Matrix <math>A \in \text{Mat}_K(n \times n)</math> ist eine Zerlegung</p> </div> <div data-bbox="1121 163 1268 192" data-label="Equation-Block"> <math display="block">A = D + N</math> </div> <div data-bbox="855 230 991 259" data-label="Text"> <p>für die gilt</p> </div> <div data-bbox="896 288 1203 441" data-label="List-Group"> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>D</math> diagonalisierbar</li> <li>• <math>N</math> nilpotent</li> <li>• <math>A, D, N</math> kommutieren</li> </ul> </div> <div data-bbox="1425 510 1536 528" data-label="Page-Footer"> <div>→ Def. 15.18</div> </div> |
| <div data-bbox="57 624 738 728" data-label="Text"> <p>Für eine Matrix <math>A \in \text{Mat}_K(n \times n)</math> gilt:<br/>Zerfällt <math>\chi_A</math> in Linearfaktoren, dann (Zerlegung von <math>A</math>) ...</p> </div> <div data-bbox="57 1075 738 1108" data-label="Page-Footer"> <div>Satz</div> <div>LinA-II-15-Jordannormalform</div> <div>1061827d-0c35-43f1-8234-67975bbb50a9</div> </div>  | <div data-bbox="855 624 1536 728" data-label="Text"> <p>Für eine Matrix <math>A \in \text{Mat}_K(n \times n)</math> gilt:<br/>Zerfällt <math>\chi_A</math> in Linearfaktoren, dann besitzt <math>A</math> eine Jordan-Chevalley-Zerlegung.</p> </div> <div data-bbox="1425 772 1536 790" data-label="Page-Footer"> <div>→ Kor. 15.19</div> </div>   |
| <div data-bbox="57 1184 743 1249" data-label="Text"> <p>Die Jordan-Chevalley-Zerlegung einer Matrix <math>A</math> in Jordannormalform hat die Form</p> </div> <div data-bbox="323 1281 470 1310" data-label="Equation-Block"> <math display="block">A = D + N</math> </div> <div data-bbox="57 1350 210 1379" data-label="Text"> <p>mit <math>D := \dots</math></p> </div> <div data-bbox="57 1422 271 1451" data-label="Text"> <p>und <math>N := A - D</math></p> </div>  | <div data-bbox="855 1184 1541 1249" data-label="Text"> <p>Die Jordan-Chevalley-Zerlegung einer Matrix <math>A</math> in Jordannormalform hat die Form</p> </div> <div data-bbox="1121 1281 1268 1310" data-label="Equation-Block"> <math display="block">A = D + N</math> </div> <div data-bbox="855 1350 1536 1451" data-label="Text"> <p>mit <math>D :=</math> Diagonalmatrix mit Einträgen der Hauptdiagonale von <math>A</math><br/>und <math>N := A - D</math></p> </div> <div data-bbox="1425 1498 1536 1516" data-label="Page-Footer"> <div>→ Kor. 15.19</div> </div>  |
| <div data-bbox="57 1744 743 1809" data-label="Text"> <p>Die Jordan-Chevalley-Zerlegung einer Matrix <math>A</math> in Jordannormalform hat die Form</p> </div> <div data-bbox="323 1841 470 1870" data-label="Equation-Block"> <math display="block">A = D + N</math> </div> <div data-bbox="57 1910 738 2011" data-label="Text"> <p>mit <math>D :=</math> Diagonalmatrix mit Einträgen der Hauptdiagonale von <math>A</math><br/>und <math>N :=</math></p> </div>  | <div data-bbox="855 1744 1541 1809" data-label="Text"> <p>Die Jordan-Chevalley-Zerlegung einer Matrix <math>A</math> in Jordannormalform hat die Form</p> </div> <div data-bbox="1121 1841 1268 1870" data-label="Equation-Block"> <math display="block">A = D + N</math> </div> <div data-bbox="855 1910 1536 2011" data-label="Text"> <p>mit <math>D :=</math> Diagonalmatrix mit Einträgen der Hauptdiagonale von <math>A</math><br/>und <math>N := A - D</math></p> </div> <div data-bbox="1425 2058 1536 2076" data-label="Page-Footer"> <div>→ Kor. 15.19</div> </div>  |

Sei  $J$  eine Jordanbasis, aufgefasst als Matrix, und  $\hat{A}$  die zugehörige Jordannormalform einer Matrix  $A$ , so dass gilt

$$A = J\hat{A}J^{-1}$$

Dann hat die Jordan-Chevalley-Zerlegung von  $A$  die Form

$$A =$$

Sei  $J$  eine Jordanbasis, aufgefasst als Matrix, und  $\hat{A}$  die zugehörige Jordannormalform einer Matrix  $A$ , so dass gilt

$$A = J\hat{A}J^{-1}$$

Dann hat die Jordan-Chevalley-Zerlegung von  $A$  die Form

$$A = J\hat{D}J^{-1} + J\hat{N}J^{-1}$$

mit  $\hat{D} + \hat{N}$  Jordan-Chevalley-Zerlegung von  $\hat{A}$ .

→ Kor. 15.19

Die Jordan-Chevalley-Zerlegung eines Endomorphismus  $f$  ist ...

Die Jordan-Chevalley-Zerlegung eines Endomorphismus  $f$  ist eindeutig, falls sie existiert.

→ Satz 15.20

Satz  
LinA-II-15-Jordannormalform febe77ae-0879-4a9d-a962-0459c8e49a26

**Binomischer Lehrsatz**

Für *kommutierende* Elemente  $a, b$  eines Rings gilt:

$$(a + b)^n = \dots$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Binomischer Lehrsatz**

Für *kommutierende* Elemente  $a, b$  eines Rings gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

→ Notiz 15.22

Satz  
LinA-II-15-Jordannormalform 8514298c-baac-4d09-9742-ae03641c1360

Die **Matrixexponentialfunktion** ist die Abbildung

$$\exp: \dots$$

Die **Matrixexponentialfunktion** ist die Abbildung

$$\exp: \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \longrightarrow \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$$
$$A \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

→ Def. 15.25

Def  
LinA-II-15-Jordannormalform bb355039-9444-484e-8f10-64ee1c1f53ce



Für eine Matrix  $A = (a_{ij})_{ij} \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  ist

$$\|A\| := \dots$$

Für eine Matrix  $A = (a_{ij})_{ij} \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  ist

$$\|A\| := n \cdot \max\{|a_{ij}| \mid i, j = 1, \dots, n\} \in \mathbb{R}$$

Für die Matrixnorm gilt:

- (1)  $\dots$
- (2)  $\|s \cdot A\| = |s| \cdot \|A\|$
- (3) Dreiecksungleichung  
 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- (4)  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Für die Matrixnorm gilt:

- (1)  $\|A\| \geq 0$  und  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- (2)  $\|s \cdot A\| = |s| \cdot \|A\|$
- (3) Dreiecksungleichung  
 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- (4)  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Für die Matrixnorm gilt:

- (1)  $\|A\| \geq 0$  und  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- (2)  $\dots$
- (3) Dreiecksungleichung  
 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- (4)  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Für die Matrixnorm gilt:

- (1)  $\|A\| \geq 0$  und  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- (2)  $\|s \cdot A\| = |s| \cdot \|A\|$
- (3) Dreiecksungleichung  
 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- (4)  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Für die Matrixnorm gilt:

- (1)  $\|A\| \geq 0$  und  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- (2)  $\|s \cdot A\| = |s| \cdot \|A\|$
- (3)  $\dots$
- (4)  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Für die Matrixnorm gilt:

- (1)  $\|A\| \geq 0$  und  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- (2)  $\|s \cdot A\| = |s| \cdot \|A\|$
- (3) Dreiecksungleichung  
 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- (4)  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

|  |   |
|--|---|
| <p>Für die Matrixnorm gilt:</p> <p>(1) <math>\ A\  \geq 0</math> und <math>\ A\  = 0 \Leftrightarrow A = 0</math></p> <p>(2) <math>\ s \cdot A\  =  s  \cdot \ A\ </math></p> <p>(3) Dreiecksungleichung<br/> <math>\ A + B\  \leq \ A\  + \ B\ </math></p> <p>(4) ...</p> | <p>Für die Matrixnorm gilt:</p> <p>(1) <math>\ A\  \geq 0</math> und <math>\ A\  = 0 \Leftrightarrow A = 0</math></p> <p>(2) <math>\ s \cdot A\  =  s  \cdot \ A\ </math></p> <p>(3) Dreiecksungleichung<br/> <math>\ A + B\  \leq \ A\  + \ B\ </math></p> <p>(4) <math>\ A \cdot B\  \leq \ A\  \cdot \ B\ </math></p> <p>→ Notiz 15.27</p> |
| <p>Eine Reihe <math>\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}</math> mit <math>A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)</math> ist <b>konvergent</b>, wenn ...</p>   | <p>Eine Reihe <math>\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}</math> mit <math>A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)</math> ist <b>konvergent</b>, wenn für alle <math>i</math> und <math>j</math> <math>\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)}</math> in <math>\mathbb{C}</math> konvergiert.</p> <p>→ Def. 15.28</p>                 |
| <p>Eine Reihe <math>\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}</math> mit <math>A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)</math> ist <b>absolut konvergent</b>, wenn ...</p>   | <p>Eine Reihe <math>\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}</math> mit <math>A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)</math> ist <b>absolut konvergent</b>, wenn für alle <math>i</math> und <math>j</math> <math>\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)}</math> in <math>\mathbb{R}</math> konvergiert.</p> <p>→ Def. 15.28</p>         |
| <p>Eine Reihe <math>\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}</math> mit <math>A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)</math> ist <b>normkonvergent</b>, wenn ...</p>   | <p>Eine Reihe <math>\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}</math> mit <math>A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)</math> ist <b>normkonvergent</b>, wenn <math>\sum_{k=0}^{\infty} \ A^{(k)}\ </math> in <math>\mathbb{R}</math> konvergiert.</p> <p>→ Def. 15.28</p>   |

Multiplikationssatz

Für kommutierende Matrizen  $A, B \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  gilt

$$\exp(A + B) = \dots$$

Multiplikationssatz

Für kommutierende Matrizen  $A, B \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  gilt

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$$

→ Satz 15.31

Für beliebige  $B \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  und  $J \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  ist

$$\exp(JBJ^{-1}) = \dots$$

Für beliebige  $B \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  und  $J \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  ist

$$\exp(JBJ^{-1}) = J \cdot \exp(B) \cdot J^{-1}$$

→ Satz 15.31

Ein **homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten** ist ...

Ein **homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten** ist eine Gleichung der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$$

für ein  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ .

Ein **homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten** ist eine Gleichung der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$$

mit

$$\mathbf{x} : \dots \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{x}} : \dots$$

Ein **homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten** ist eine Gleichung der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$$

für ein  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  mit

$$\mathbf{x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{x}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}x_n(t) \end{pmatrix}$$

|   |   |
|---|---|
| <p>Für ein gegebenes <math>\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n</math> ist eine <b>Lösung mit Anfangswert</b> <math>\mathbf{x}_0</math> (Lösung Differentialgleichungssystem) ...</p> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-15-Jordannormalform</div> <div>181261b9-23f1-44a1-8be1-d8934ac917cf</div> </div>           | <p>Für ein gegebenes <math>\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n</math> ist eine <b>Lösung mit Anfangswert</b> <math>\mathbf{x}_0</math> eine differenzierbare Abbildung</p> $\mathbf{x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ <p>mit</p> $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ <p>und</p> $\dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$ <div> <div></div> <div>→ Def. 15.33</div> </div>  |
| <p>Für jedes <math>\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n</math> ist</p> $\dots$ <p>eine Lösung des Systems</p> $\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$ <p>zum Anfangswert <math>x_0</math>.</p> <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-15-Jordannormalform</div> <div>6d0d1a05-c5ca-4ab9-9511-9704105b8cc4</div> </div> | <p>Für jedes <math>\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n</math> ist</p> $\mathbf{x}(t) := \exp(A \cdot t) \cdot \mathbf{x}_0$ <p>eine Lösung des Systems</p> $\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$ <p>zum Anfangswert <math>x_0</math>.</p> <div> <div></div> <div>→ Satz 15.34</div> </div>  |
| <p>Sei <math>K</math> ein beliebiger Körper und <math>V</math> ein <math>K</math>-Vektorraum. Der <b>Dualraum</b> von <math>V</math> ist ...</p> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>f9209d9a-53ce-4c72-883b-350abca77548</div> </div>   | <p>Sei <math>K</math> ein beliebiger Körper und <math>V</math> ein <math>K</math>-Vektorraum. Der <b>Dualraum</b> von <math>V</math> ist der <math>K</math>-Vektorraum</p> $\begin{aligned} V^* &:= \text{Hom}_K(V, K) \\ &= \{ \varphi : V \longrightarrow K \mid \varphi \text{ ist } K\text{-linear} \} \end{aligned}$ <p>mit der Vektorraum-Struktur aus Satz/Def 6.5:</p> $\begin{aligned} (\varphi + \psi)(\mathbf{v}) &:= \varphi(\mathbf{v}) + \psi(\mathbf{v}) \\ (a \cdot \varphi)(\mathbf{v}) &:= a \cdot \varphi(\mathbf{v}) \end{aligned}$ <p>für <math>\varphi, \psi \in V^*, \mathbf{v} \in V, a \in K</math>.</p> <div> <div></div> <div>→ Def. 16.1</div> </div> |
| <p>Elemente des <i>Dualraums</i> <math>V^*</math> von <math>V</math> heißen ...</p> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>f9209d9a-53ce-4c72-883b-350abca77548</div> </div>  | <p>Elemente des <i>Dualraums</i> <math>V^*</math> von <math>V</math> heißen <b>Linearformen auf <math>V</math></b>.</p> <div> <div></div> <div>→ Def. 16.1</div> </div>   |

|  |  |
|--|--|
| <div data-bbox="57 58 738 136" data-label="Text"> <p>Die zu einer linearen Abbildung <math>V \xrightarrow{f} W</math> <b>duale Abbildung</b> ist ...</p> </div> <div data-bbox="57 510 738 546" data-label="Text"> <p>Def<br/>LinA-II-16-Dualisierungf9209d9a-53ce-4c72-883b-350abca77548</p> </div>   | <div data-bbox="855 58 1536 136" data-label="Text"> <p>Die zu einer linearen Abbildung <math>V \xrightarrow{f} W</math> <b>duale Abbildung</b> ist die Abbildung</p> </div> <div data-bbox="1091 165 1299 255" data-label="Equation-Block"> <math display="block">V^* \xleftarrow{f^*} W^* \\ f^*(\varphi) := (\varphi \circ f)</math> </div> <div data-bbox="1436 329 1536 347" data-label="Text"> <p>→ Def. 16.1</p> </div> <div data-bbox="57 2190 738 2226" data-label="Text"> <p>Satz<br/>LinA-II-16-Dualisierung563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4</p> </div>  |
| <div data-bbox="57 622 738 689" data-label="Text"> <p>Sei <math>B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)</math> eine endliche Basis von <math>V</math>. Dann ist die <b>zu <math>B</math> duale Basis</b> <math>B^*</math> ...</p> </div> <div data-bbox="57 1070 738 1106" data-label="Text"> <p>Satz Def<br/>LinA-II-16-Dualisierunga5630301-2141-4e16-a0e8-f8b74beb6535</p> </div> | <div data-bbox="855 622 1536 723" data-label="Text"> <p>Sei <math>B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)</math> eine endliche Basis von <math>V</math>. Dann ist die <b>zu <math>B</math> duale Basis</b> <math>B^* := (\mathbf{b}_1^*, \dots, \mathbf{b}_n^*)</math> eine Basis von <math>V^*</math> mit</p> </div> <div data-bbox="994 759 1393 889" data-label="Equation-Block"> <math display="block">\mathbf{b}_i^*: V \longrightarrow K \\ \mathbf{b}_j \mapsto \delta_{ij} := \begin{cases} 1 &amp; \text{falls } i = j \\ 0 &amp; \text{sonst} \end{cases}</math> </div> <div data-bbox="1367 952 1536 969" data-label="Text"> <p>→ Satz &amp; Def. 16.3</p> </div> <div data-bbox="57 2190 738 2226" data-label="Text"> <p>Satz<br/>LinA-II-16-Dualisierung563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4</p> </div> |
| <div data-bbox="57 1182 394 1276" data-label="Text"> <p>Sei <math>\dim V = n &lt; \infty</math>. Dann</p> <math display="block">\dim V^* =</math> </div> <div data-bbox="57 1630 738 1666" data-label="Text"> <p>Satz<br/>LinA-II-16-Dualisierungee7eb4e4-b3fc-494b-9be1-54cfed785cc6</p> </div>   | <div data-bbox="855 1182 1326 1276" data-label="Text"> <p>Sei <math>\dim V = n &lt; \infty</math>. Dann</p> <math display="block">\dim V^* = n = \dim V</math> </div> <div data-bbox="1433 1352 1536 1370" data-label="Text"> <p>→ Kor. 16.5</p> </div> <div data-bbox="57 2190 738 2226" data-label="Text"> <p>Satz<br/>LinA-II-16-Dualisierungee7eb4e4-b3fc-494b-9be1-54cfed785cc6</p> </div>  |
| <div data-bbox="57 1742 472 1877" data-label="Text"> <p>Seien <math>V_i</math> <math>K</math>-Vektorräume (<math>i \in I</math>).<br/>Dann gilt</p> <math display="block">\left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* \cong</math> </div> <div data-bbox="57 2190 738 2226" data-label="Text"> <p>Satz<br/>LinA-II-16-Dualisierung563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4</p> </div>         | <div data-bbox="855 1742 1307 1888" data-label="Text"> <p>Seien <math>V_i</math> <math>K</math>-Vektorräume (<math>i \in I</math>).<br/>Dann gilt</p> <math display="block">\left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* \cong \prod_{i \in I} V_i^*</math> </div> <div data-bbox="1436 1935 1536 1953" data-label="Text"> <p>→ satz 16.7</p> </div> <div data-bbox="57 2190 738 2226" data-label="Text"> <p>Satz<br/>LinA-II-16-Dualisierung563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4</p> </div>   |

Seien  $V_i$   $K$ -Vektorräume ( $i \in I$ ). Die Funktionen

$$\begin{aligned}\alpha: \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* &\longrightarrow \prod_{i \in I} V_i^* \\ \varphi &\mapsto (\varphi|_{V_i})_{i \in I} \\ \beta: \prod_{i \in I} V_i^* &\longrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* \\ (\varphi_i)_{i \in I} &\mapsto \left((\mathbf{v}_i)_{i \in I} \mapsto \sum_i \varphi_i(\mathbf{v}_i)\right)\end{aligned}$$

definieren ...

Satz  
LinA-II-16-Dualisierung

563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4

Seien  $V_i$   $K$ -Vektorräume ( $i \in I$ ). Die Funktionen

$$\begin{aligned}\alpha: \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* &\longrightarrow \prod_{i \in I} V_i^* \\ \varphi &\mapsto (\varphi|_{V_i})_{i \in I} \\ \beta: \prod_{i \in I} V_i^* &\longrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* \\ (\varphi_i)_{i \in I} &\mapsto \left((\mathbf{v}_i)_{i \in I} \mapsto \sum_i \varphi_i(\mathbf{v}_i)\right)\end{aligned}$$

definieren zueinander inverse Isomorphismen.

→ Satz 16.7

Seien  $V_i$   $K$ -Vektorräume ( $i \in I$ ). Die Funktionen

$$\begin{aligned}\alpha: \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* &\longrightarrow \prod_{i \in I} V_i^* \\ \varphi &\mapsto \dots \\ \beta: \prod_{i \in I} V_i^* &\longrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* \\ (\varphi_i)_{i \in I} &\mapsto \left((\mathbf{v}_i)_{i \in I} \mapsto \sum_i \varphi_i(\mathbf{v}_i)\right)\end{aligned}$$

definieren zueinander inverse Isomorphismen.

Satz  
LinA-II-16-Dualisierung

563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4

Seien  $V_i$   $K$ -Vektorräume ( $i \in I$ ). Die Funktionen

$$\begin{aligned}\alpha: \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* &\longrightarrow \prod_{i \in I} V_i^* \\ \varphi &\mapsto (\varphi|_{V_i})_{i \in I} \\ \beta: \prod_{i \in I} V_i^* &\longrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* \\ (\varphi_i)_{i \in I} &\mapsto \left((\mathbf{v}_i)_{i \in I} \mapsto \sum_i \varphi_i(\mathbf{v}_i)\right)\end{aligned}$$

definieren zueinander inverse Isomorphismen.

→ Satz 16.7

Seien  $V_i$   $K$ -Vektorräume ( $i \in I$ ). Die Funktionen

$$\begin{aligned}\alpha: \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* &\longrightarrow \prod_{i \in I} V_i^* \\ \varphi &\mapsto (\varphi|_{V_i})_{i \in I} \\ \beta: \prod_{i \in I} V_i^* &\longrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* \\ (\varphi_i)_{i \in I} &\mapsto \dots\end{aligned}$$

definieren zueinander inverse Isomorphismen.

Satz  
LinA-II-16-Dualisierung

563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4

Seien  $V_i$   $K$ -Vektorräume ( $i \in I$ ). Die Funktionen

$$\begin{aligned}\alpha: \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* &\longrightarrow \prod_{i \in I} V_i^* \\ \varphi &\mapsto (\varphi|_{V_i})_{i \in I} \\ \beta: \prod_{i \in I} V_i^* &\longrightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* \\ (\varphi_i)_{i \in I} &\mapsto \left((\mathbf{v}_i)_{i \in I} \mapsto \sum_i \varphi_i(\mathbf{v}_i)\right)\end{aligned}$$

definieren zueinander inverse Isomorphismen.

→ Satz 16.7

Sei  $V$  endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis  $B$ ;  
dualer Basis  $B^*$   
und  $W$  endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis  
 $C$ ; dualer Basis  $C^*$ .

Sei  $f: V \longrightarrow W$  eine lineare Abbildung und  
 $f^*: W^* \longrightarrow V^*$  die zu  $f$  duale Abbildung. Dann gilt  
für die darstellende Matrix von  $f^*$ :

$$M(f^*) =$$

Satz  
LinA-II-16-Dualisierung

ace73100-c31f-4165-9184-ffa5441bd84b

Sei  $V$  endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis  $B$ ;  
dualer Basis  $B^*$   
und  $W$  endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis  
 $C$ ; dualer Basis  $C^*$ .

Sei  $f: V \longrightarrow W$  eine lineare Abbildung und  
 $f^*: W^* \longrightarrow V^*$  die zu  $f$  duale Abbildung. Dann gilt  
für die darstellende Matrix von  $f^*$ :

$${}_{B^*}M_{C^*}(f^*) = ({}_C M_B(f))^T$$

→ Satz 16.8

|   |   |
|---|---|
| <div>Sei <math>U \subseteq V</math> ein Untervektorraum. Der <b>Annulator</b> von <math>U</math> ist ...</div> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>b74a3de4-17b8-413c-a490-e19e3ad2e0f3</div> </div>   | <div>Sei <math>U \subseteq V</math> ein Untervektorraum. Der <b>Annulator</b> von <math>U</math> ist der Untervektorraum <math>U^0 \subseteq V^*</math>, der gegeben ist durch</div> <div> <math display="block">U^0 := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(\mathbf{u}) = 0 \forall \mathbf{u} \in U\}</math> </div> <div> <div>→ Def 16.10</div> </div> |
| <div>Für jede lineare Abbildung <math>f</math> ist</div> <div> <math display="block">\ker(f^*) = \dots</math> <math display="block">\operatorname{im}(f^*) = \dots</math> </div> <div>(Annulator)</div> <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>833a8f8d-3fc5-413e-a5e4-4c3537148f6e</div> </div> | <div>Für jede lineare Abbildung <math>f</math> ist</div> <div> <math display="block">\ker(f^*) = (\operatorname{im} f)^0</math> <math display="block">\operatorname{im}(f^*) = (\ker f)^0</math> </div> <div>→ Satz 16.12</div>   |
| <div>Eine lineare Abbildung <math>f</math> ist genau dann <i>injektiv</i>, wenn (duale Abbildung) ...</div> <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>d6bba2ed-dd4d-4fb4-b9fe-ac2d4c343844</div> </div>   | <div>Eine lineare Abbildung <math>f</math> ist genau dann <i>injektiv</i>, wenn die duale Abbildung <math>f^*</math> surjektiv ist.</div> <div>→ Kor. 16.13</div>   |
| <div>Eine lineare Abbildung <math>f</math> ist genau dann <i>surjektiv</i>, wenn (duale Abbildung) ...</div> <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>d6bba2ed-dd4d-4fb4-b9fe-ac2d4c343844</div> </div>  | <div>Eine lineare Abbildung <math>f</math> ist genau dann <i>surjektiv</i>, wenn die duale Abbildung <math>f^*</math> injektiv ist.</div> <div>→ Kor. 16.13</div>   |

|   |  |
|---|--|
| <p>Sei <math>V</math> ein endlich-dimensionaler Vektorraum, dann gilt für jeden Untervektorraum <math>U \subseteq V</math>:</p> $\dim(U^0) =$ <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>2948efa5-9029-4284-a634-ee09edfad4b2</div> </div> | <p>Sei <math>V</math> ein endlich-dimensionaler Vektorraum, dann gilt für jeden Untervektorraum <math>U \subseteq V</math>:</p> $\dim(U^0) = \dim V - \dim U$ <div> <div></div> <div></div> <div>→ Kor. 16.14</div> </div>   |
| <p>Der <b>Bidualraum</b> eines <math>K</math>-Vektorraums <math>V</math> ist ...</p> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>ae8e8491-fda3-474b-87b0-beaf8e05f0e3</div> </div>   | <p>Der <b>Bidualraum</b> eines <math>K</math>-Vektorraums <math>V</math> ist</p> $V^{**} := (V^*)^*$ <div> <div></div> <div></div> <div>→ Def. 16.15</div> </div>  |
| <p>Der <b>Bidualraumhomomorphismus</b> ist die Abbildung</p> $\omega_V:$ <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>ae8e8491-fda3-474b-87b0-beaf8e05f0e3</div> </div>   | <p>Der <b>Bidualraumhomomorphismus</b> ist die Abbildung</p> $\omega_V: V \longrightarrow V^{**}$ $\mathbf{v} \mapsto \begin{pmatrix} V^* & \longrightarrow & K \\ \varphi & \mapsto & \varphi(\mathbf{v}) \end{pmatrix}$ <div> <div></div> <div></div> <div>→ Def. 16.15</div> </div> |
| <p>Der Bidualraumhomomorphismus <math>\omega_V</math> ist (Linearität) ...</p> <div> <div></div> <div></div> <div></div> </div>   | <p>Der Bidualraumhomomorphismus <math>\omega_V</math> ist <math>K</math>-linear.</p> <div> <div></div> <div></div> <div>→ Notiz 16.16</div> </div>   |
| <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-16-Dualisierung</div> <div>730505c9-1d7c-4524-8246-22a4cbbab07a</div> </div>   |  |



|   |  |
|---|--|
| <p>Sei <math>f: V \longrightarrow W</math> eine Abbildung und <math>\omega_W</math> der Bidualraumhomomorphismus von <math>W</math>. Dann gilt</p> $\omega_W \circ f =$ | <p>Sei <math>f: V \longrightarrow W</math> eine Abbildung und <math>\omega_W</math> der Bidualraumhomomorphismus von <math>W</math>. Dann gilt</p> $\omega_W \circ f = f^{**} \circ \omega_V$ <p>mit <math>f^{**}: V^{**} \longrightarrow W^{**}</math> und <math>\omega_V</math> der Bidualraumhomomorphismus zu <math>V</math>.</p> <p>→ Notiz 16.17</p> |
| <p>Satz<br/>LinA-II-16-Dualisierung</p> <p>730505c9-1d7c-4524-8246-22a4cbbab07a</p>   |  |
| <p>Der Bidualraumhomomorphismus ist (injektiv? surjektiv?) ... .</p>  | <p>Der Bidualraumhomomorphismus ist injektiv.</p> <p>→ Satz 16.18</p>  |
| <p>Satz<br/>LinA-II-16-Dualisierung</p> <p>26f469cc-ef15-4f31-83a9-89e412e0edf2</p>   |  |
| <p>Der Bidualraumhomomorphismus ist genau dann ... , wenn <math>V</math> endlich-dimensional ist.</p>   | <p>Der Bidualraumhomomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus, wenn <math>V</math> endlich-dimensional ist.</p> <p>→ Satz 16.18</p>   |
| <p>Satz<br/>LinA-II-16-Dualisierung</p> <p>26f469cc-ef15-4f31-83a9-89e412e0edf2</p>   |  |
| <p>Der Bidualraumhomomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus, wenn ... .</p>  | <p>Der Bidualraumhomomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus, wenn <math>V</math> endlich-dimensional ist.</p> <p>→ Satz 16.18</p>   |
| <p>Satz<br/>LinA-II-16-Dualisierung</p> <p>26f469cc-ef15-4f31-83a9-89e412e0edf2</p>   |  |

|  |  |
|--|--|
| <p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum.<br/>Dann ist die Abbildung</p> $\begin{aligned} \psi: V &\longrightarrow V^* \\ \mathbf{v} &\mapsto \langle \mathbf{v}, \cdot \rangle \end{aligned}$ <p>...</p> <div>Satz<br/>LinA-II-16-Dualisierungb36837bf-1b54-4cdf-9bfd-241a2bd3ba01</div>   | <p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum.<br/>Dann ist die Abbildung</p> $\begin{aligned} \psi: V &\longrightarrow V^* \\ \mathbf{v} &\mapsto \langle \mathbf{v}, \cdot \rangle \end{aligned}$ <p>ein <i>kanonischer Isomorphismus</i> zu <math>V \cong V^*</math>.</p> <div>→ Satz 16.19</div>   |
| <p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum.<br/>Dann ist die Abbildung</p> $\begin{aligned} \psi: V &\longrightarrow V^* \\ \mathbf{v} &\mapsto \end{aligned}$ <p>ein <i>kanonischer Isomorphismus</i> zu <math>V \cong V^*</math>.</p> <div>Satz<br/>LinA-II-16-Dualisierungb36837bf-1b54-4cdf-9bfd-241a2bd3ba01</div>   | <p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum.<br/>Dann ist die Abbildung</p> $\begin{aligned} \psi: V &\longrightarrow V^* \\ \mathbf{v} &\mapsto \langle \mathbf{v}, \cdot \rangle \end{aligned}$ <p>ein <i>kanonischer Isomorphismus</i> zu <math>V \cong V^*</math>.</p> <div>→ Satz 16.19</div>   |
| <p>Seien <math>V_1, \dots, V_n, W</math> <math>K</math>-Vektorräume. Eine Abbildung</p> $f: V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow W$ <p>ist <b><math>K</math>-multilinear</b>, falls ...</p> <div>Def<br/>LinA-II-17-Multilineare-Algebren4bfc9556-8182-4a6d-ba13-e65645147b5c</div>   | <p>Seien <math>V_1, \dots, V_n, W</math> <math>K</math>-Vektorräume. Eine Abbildung</p> $f: V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow W$ <p>ist <b><math>K</math>-multilinear</b>, falls für jedes <math>i \in \{1, \dots, n\}</math> und beliebige Vektoren <math>\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n</math> die Abbildung</p> $\begin{aligned} V_i &\longrightarrow W \\ \mathbf{v} &\mapsto f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n) \end{aligned}$ <p><math>K</math>-linear ist.</p> <div>→ Def. 17.5</div>  |
| <p>Das <b>Tensorprodukt</b> <math>V_1 \otimes \dots \otimes V_n</math> von <math>K</math>-Vektorräumen <math>V_1, \dots, V_n</math> ist ein <math>K</math>-Vektorraum zusammen mit einer (kanonischen) Abbildung <math>\text{can}: V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_n</math> mit folgender universeller Eigenschaft:<br/><math>\text{can}</math> ist ... und<br/>für jeden <math>K</math>-Vektorraum <math>T</math> und jede multilineare Abbildung <math>t: V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow T</math> existiert genau eine <math>K</math>-lineare Abbildung <math>t': V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow T</math> mit <math>t' \circ \text{can} = t</math>.</p> <div>Def Satz<br/>LinA-II-17-Multilineare-Algebren78d71d52-c77f-4bf8-8312-ce13d136f6f1</div> | <p>Das <b>Tensorprodukt</b> <math>V_1 \otimes \dots \otimes V_n</math> von <math>K</math>-Vektorräumen <math>V_1, \dots, V_n</math> ist ein <math>K</math>-Vektorraum zusammen mit einer (kanonischen) Abbildung <math>\text{can}: V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_n</math> mit folgender universeller Eigenschaft:<br/><math>\text{can}</math> ist multilinear und<br/>für jeden <math>K</math>-Vektorraum <math>T</math> und jede multilineare Abbildung <math>t: V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow T</math> existiert genau eine <math>K</math>-lineare Abbildung <math>t': V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow T</math> mit <math>t' \circ \text{can} = t</math>.</p> <div>→ Satz 17.6 / Def. 17.7</div> |

Das **Tensorprodukt**  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  von  $K$ -Vektorräumen  $V_1, \dots, V_n$  ist ein  $K$ -Vektorraum zusammen mit einer (kanonischen) Abbildung  
 $\text{can}: V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  mit folgender universeller Eigenschaft:  
 $\text{can}$  ist multilinear und  
für jeden  $K$ -Vektorraum  $T$  und jede multilineare Abbildung  $t: V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow T$  existiert ...

Das **Tensorprodukt**  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  von  $K$ -Vektorräumen  $V_1, \dots, V_n$  ist ein  $K$ -Vektorraum zusammen mit einer (kanonischen) Abbildung  
 $\text{can}: V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  mit folgender universeller Eigenschaft:  
 $\text{can}$  ist multilinear und  
für jeden  $K$ -Vektorraum  $T$  und jede multilineare Abbildung  $t: V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow T$  existiert genau eine  $K$ -lineare Abbildung  $t': V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow T$   
mit  $t' \circ \text{can} = t$ .