Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) ...

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) ...

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) ...

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) ...

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Jede Bilinearform β auf K^n liefert eine Matrix ...

Jede Bilinearform β auf K^n liefert eine Matrix $M(\beta) \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ der Gestalt

$$M(\beta) := \beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{ij}$$

→ Satz 10.2

Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ liefert eine ...
wie folgt:

Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ liefert eine Bilinearform auf K^n wie folgt:

$$\beta_A : K^n \times K^n \longrightarrow K$$
$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v}^T A \mathbf{w}$$

→ Satz 10.2

Die Menge der Bilinearformen auf K^n und die Menge der $n \times n$ Matrizen über K sind ... .

Die Menge der Bilinearformen auf K^n und die Menge der $n \times n$ Matrizen über K sind isomorph.

→ Satz 10.2

Die **darstellende Matrix** einer Bilinearform β bezüglich einer Basis $B = (\mathbf{b}_i)_i$ ist gegeben durch ...

Die **darstellende Matrix** einer Bilinearform β bezüglich einer Basis $B = (\mathbf{b}_i)_i$ ist gegeben durch

$$M_B(\beta) := \beta(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_{ij}$$

→ Def. 10.3

Zwei Matrizen A, A' sind **kongruent**, falls es ...

Zwei quadratische Matrizen A, A' sind **kongruent**, falls es eine invertierbare Matrix S gibt mit

$$A' = S^T A S$$

→ Def. 10.5

Eine Bilinearform β auf V ist **symmetrisch**, falls ...

Eine Bilinearform β auf V ist **symmetrisch**, falls für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

→ Def. 10.7

Eine Bilinearform β auf V ist **schiefsymmetrisch**, falls ...

Eine Bilinearform β auf V ist **schiefsymmetrisch**, falls für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

→ Def. 10.7

Eine Bilinearform β auf V ist **alternierend**, falls ...

Eine Bilinearform β auf V ist **alternierend**, falls für alle $\mathbf{v} \in V$

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$$

→ Def. 10.7

Eine Bilinearform β ist **symmetrisch** genau dann, wenn … (darstellende Matrix)

Eine Bilinearform β ist **symmetrisch** genau dann, wenn ihre darstellende Matrix $M(\beta)$ **symmetrisch** ist:

$$M(\beta)^T = M(\beta)$$

→ Satz 10.9

Eine Bilinearform β ist **schiefsymmetrisch** genau dann, wenn … (darstellende Matrix)

Eine Bilinearform β ist **schiefsymmetrisch** genau dann, wenn ihre darstellende Matrix $M(\beta)$ **schiefsymmetrisch** ist:

$$M(\beta)^T = -M(\beta)$$

→ Satz 10.9

Eine Bilinearform β ist **alternierend** genau dann, wenn … (darstellende Matrix)

Eine Bilinearform β ist **alternierend** genau dann, wenn für ihre darstellende Matrix $M(\beta)$ gilt:

$$M(\beta)^T = -M(\beta)$$

und

$$M(\beta)_{ii} = 0 \text{ für alle } i$$

→ Satz 10.9

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- …

- η ist semilinear in der zweiten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$
  $\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- η ist linear in der ersten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$

- η ist semilinear in der zweiten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$
  $eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$

→ Def. 10.10

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- η ist linear in der ersten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$
- ...

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- η ist linear in der ersten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$
- η ist semilinear in der zweiten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$
  $\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$

→ Def. 10.10

Eine Sesquilinearform η ist **hermitesch**, falls ...

Def
LinA-II-10-Skalarprodukte 7e2e222e-bbf4-11ec-8422-0242ac120002

Eine Sesquilinearform η ist **hermitesch**, falls gilt

$$\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\eta(\mathbf{w}, \mathbf{v})}$$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.10

Jede Sesquilinearform η liefert eine Matrix der Form ...

Satz
LinA-II-10-Skalarprodukte bd8dcf48-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Jede Sesquilinearform η liefert eine Matrix $M(\eta) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ der Form

$$M(\eta) := \eta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{ij}$$

→ Satz 10.11

Zu einer gegebenen komplexen Matrix A existiert eine Sesquilinearform η wie folgt:
...

Satz
LinA-II-10-Skalarprodukte bd8dcf48-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Zu einer gegebenen komplexen quadratischen Matrix A existiert eine Sesquilinearform η wie folgt:

$$\eta_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mathbf{v}^T A \overline{\mathbf{w}}$$

→ Satz 10.11

Eine symmetrische Bilinearform β auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls ...

Eine symmetrische Bilinearform β auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$$

→ Def. 10.14

Eine hermitesche Bilinearform β auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls ...

Eine hermitesche Bilinearform β auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$$

→ Def. 10.14

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist ...

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform.

→ Def. 10.15

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist ...

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist eine positiv definite hermitesche Bilinearform.

→ Def. 10.15

Ein **euklidischer Vektorraum** ist ...

Ein **euklidischer Vektorraum** $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

→ Def. 10.15

Ein **unitärer Vektorraum** ist ...

Ein **unitärer Vektorraum** $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

→ Def. 10.15

Die assoziierte **Norm** zu einem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \end{aligned}$$

Die assoziierte **Norm** zu einem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle} \end{aligned}$$

(Die Norm wird durch das Skalarprodukt **induziert**.)

→ Def. 10.15

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) (Verhältnis Norm und 0)...

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\,\|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\,\|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = \ \ldots$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\, \|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\, \|\mathbf{v}\|$

(iii) (**Dreiecksungleichung**:)
$\ldots$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\, \|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\, \|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) (**Cauchy-Schwarz-Ungleichung**):
$\ldots$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\, \|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.
$\mathbf{v} \in V$ heißt **normiert**, falls $\ \ldots$

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.
$\mathbf{v} \in V$ heißt **normiert**, falls $\|\mathbf{v}\| = 1$

→ Def. 10.20

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ sind zueinander **orthogonal**, falls ...

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ sind zueinander **orthogonal**, falls $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ [Notation: $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$]

→ Def. 10.20

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine Basis B von V heißt **Orthonormalbasis** von V, falls ...

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine Basis $B = (\mathbf{b}_i)_i$ von V heißt **Orthonormalbasis** von V, falls

- jedes $\mathbf{b}_i \in B$ normiert ist, und
- jeweils $\mathbf{b}_i \perp \mathbf{b}_j$ für $i \neq j$

→ Def. 10.20

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidisch oder unitär. Das **orthogonale Komplement** eines Untervektorraums $W \subseteq V$ ist

$$W^\perp :=$$

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidisch oder unitär. Das **orthogonale Komplement** eines Untervektorraums $W \subseteq V$ ist

$$W^\perp := \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \text{ für alle } \mathbf{w} \in W\}$$

→ Def. 10.23

Ein **affiner Unterraum** eines Vektorraums V ist ...

Ein **affiner Unterraum** eines Vektorraums V ist eine Teilmenge der Form

$$\mathbf{u}_0 + U = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} - \mathbf{u}_0 \in U\}$$

für einen Untervektorraum $U \subseteq V$.

Eine **affine Hyperebene** ist ...

Def
LinA-II-10-Skalarprodukte bd8678f8-bdc1-11ec-9d64-0242ac120002

Eine **affine Hyperebene** ist ein affiner Unterraum, dessen zugehöriger Untervektorraum U die Dimension $\dim U = \dim V - 1$ hat.

Hessesche Normalform
Jede affine Hyperrebene in einem euklidischen oder unitären VR hat die Form

$$H =$$

Hessesche Normalform
Jede affine Hyperrebene in einem euklidischen oder unitären VR hat die Form

$$H = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = d\}$$

für einen normierten Vektor $\mathbf{n}$ und ein $d \in \mathbb{R}$ mit $d \geqslant 0$

→ Satz 10.25

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. (Winkel zwischen Vektoren und ihrem Kreuzprodukt) ...
2. $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$ und $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
2. $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

→ Satz 10.28

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$ und $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
2. (Norm des Kreuzprodukts) ...

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$ und $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
2. $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

→ Satz 10.28

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine **Isometrie** ist eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$, für die gilt ...

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine **Isometrie** ist eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$, für die gilt:

$$\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$$

→ Def. 11.1

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine **Isometrie** ist ... , für die gilt:

$$\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$$

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine **Isometrie** ist eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$, für die gilt:

$$\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$$

→ Def. 11.1

Alle Eigenwerte einer Isometrie ...

Alle Eigenwerte einer Isometrie haben Betrag 1.

→ Satz 10.2

Eigenwerte einer Isometrie in einem euklidischen Vektorraum haben die Form

$$a =$$

Eigenwerte einer Isometrie in einem euklidischen Vektorraum haben die Form

$$a = \pm 1$$

→ Satz 10.2

Eigenwerte einer Isometrie in einem unitären Vektorraum haben die Form

$$a =$$

Eigenwerte einer Isometrie in einem unitären Vektorraum haben die Form

$$a = x + \mathrm{i}y \text{ mit } x^2 + y^2 = 1$$

→ Satz 10.2

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer Isometrie ...

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer Isometrie stehen senkrecht zueinander.

→ Satz 10.2

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) ...

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

→ Satz 11.3

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) ...

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

→ Satz 11.3

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) ...

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

→ Satz 11.3

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) ...

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

→ Satz 11.3

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(K) &:= \ldots \\ &= (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot) \end{aligned}$$

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(K) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(K) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(K) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **spezielle lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\mathrm{SL}_n(K) :=$$

Die **spezielle lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\mathrm{SL}_n(K) := (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) = 1\}, \cdot)$$

→ Def/Satz 11.5

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) :&= \ \ldots \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) :&= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) :&= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= \ \ldots \end{aligned}$$

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) :&= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **spezielle orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SO}(n) :=$$

Die **spezielle orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SO}(n) := \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

→ Def/Satz 11.5

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(n) :&= \ \dots \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}, \cdot)\end{aligned}$$

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(n) :&= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}, \cdot)\end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(n) :&= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= \ \dots\end{aligned}$$

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(n) :&= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}, \cdot)\end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **spezielle unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SU}(n) :=$$

Die **spezielle unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SU}(n) := \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

→ Def/Satz 11.5

Eine Isometrie auf $\mathbb{R}^2$ ist ... oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

Eine Isometrie auf $\mathbb{R}^2$ ist eine Rotation um $\mathbf{0}$ oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

→ Lemma 11.6

Eine Isometrie auf $\mathbb{R}^2$ ist eine Rotation um $\mathbf{0}$ oder ...

.

Eine Isometrie auf $\mathbb{R}^2$ ist eine Rotation um $\mathbf{0}$ oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

→ Lemma 11.6

Die orthogonale Gruppe O(2) hat die Form

$$\mathrm{O}(2) = \dots$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

Die orthogonale Gruppe O(2) hat die Form

$$\mathrm{O}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \,\dot\cup\, \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

→ Lemma 11.6

Die orthogonale Gruppe O(2) hat die Form

$$\mathrm{O}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$
$$\dots$$

Die orthogonale Gruppe O(2) hat die Form

$$\mathrm{O}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \,\dot\cup\, \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

→ Lemma 11.6

Struktursatz für euklidische Isometrien
Jede Isometrie eines ... euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & 0 & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

Struktursatz für euklidische Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & 0 & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

→ satz 11.7

Struktursatz für euklidische Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat ...
eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & & \\ & & +1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & A_1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

Struktursatz für euklidische Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & & \\ & & +1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & A_1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

→ satz 11.7

Struktursatz für euklidische Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis eine darstellende Matrix der Form ...

Struktursatz für euklidische Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & & \\ & & +1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & A_1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

→ satz 11.7

Sei K eine Körper, V ein K-Vektorraum, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.
Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ heißt **f-stabil**, falls ...

Sei K eine Körper, V ein K-Vektorraum, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.
Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ heißt **f-stabil**, falls $f(W) \subseteq W$.

→ Satz 11.7

Jede Isometrie f eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums $V \neq \{0\}$ besitzt ... (Untervektorraum)

Jede Isometrie f eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums $V \neq \{0\}$ besitzt einen f-stabilen Untervektorraum der Dimension 1 oder 2.

→ Lemma 11.11

Struktursatz für unitäre Isometrien

Jede Isometrie eines ... unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

Struktursatz für unitäre Isometrien

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

→ Satz 11.12

Struktursatz für unitäre Isometrien

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird ... dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

Struktursatz für unitäre Isometrien

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

→ Satz 11.12

Struktursatz für unitäre Isometrien

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis dargestellt von ...

Struktursatz für unitäre Isometrien

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormal*basis dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

→ Satz 11.12

Ein Endomorphismus f eines euklidischen oder unitären Vektorraums $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist *selbstadjungiert*, falls ...

Ein Endomorphismus f eines euklidischen oder unitären Vektorraums $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist *selbstadjungiert*, falls

$$\langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, f(\mathbf{w})\rangle \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$$

→ Def. 12.1

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n), K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann sind äquivalent:

- ...
- A ist symmetrisch ($A = A^T$) bzw. hermitesch ($A = \overline{A^T}$)

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n), K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann sind äquivalent:

- Die lineare Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^n$ ist *selbstadjungiert* bezüglich des Standardskalarprodukts auf K^n.
- A ist symmetrisch ($A = A^T$) bzw. hermitesch ($A = \overline{A^T}$)

→ Notiz 12.2

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n), K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann sind äquivalent:

- Die lineare Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^n$ ist *selbstadjungiert* bezüglich des Standardskalarprodukts auf K^n.
- ...

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n), K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann sind äquivalent:

- Die lineare Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^n$ ist *selbstadjungiert* bezüglich des Standardskalarprodukts auf K^n.
- A ist symmetrisch ($A = A^T$) bzw. hermitesch ($A = \overline{A^T}$)

→ Notiz 12.2

Alle Eigenwerte eines *selbstadjungierten* Endomorphismus ...

Alle Eigenwerte eines *selbstadjungierten* Endomorphismus sind reell.

→ Satz 12.3

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten eines *selbstadjungierten* Endomorphismus ...

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten eines *selbstadjungierten* Endomorphismus stehen senkrecht zueinander.

→ Satz 12.3

Spektralsatz

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.
Zu ... f auf V existiert eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.

Spektralsatz
(Hauptachsentransformation für selbstadj. Abb.)
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.
Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus f auf V existiert eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.

→ Satz 12.4

Spektralsatz
(Hauptachsentransformation für selbstadj. Abb.)
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.
Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus f auf V existiert ...

Spektralsatz
(Hauptachsentransformation für selbstadj. Abb.)
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.
Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus f auf V existiert eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.

→ Satz 12.4

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder ... Matrix A existiert eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix ... mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit …

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = S^T AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder … Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{U}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^T AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{U}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = \overline{S}^T AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix … mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^T AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{U}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = \overline{S}^T AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{U}(n)$ mit …

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{U}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = \overline{S}^T AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Formen
Zu jeder symmetrischen Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert ... B mit

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Formen
Zu jeder symmetrischen Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B, in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.6

Hauptachsentransformation für Formen
Zu jeder symmetrischen Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B, in der gilt: ...

Hauptachsentransformation für Formen
Zu jeder symmetrischen Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B, in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.6

Hauptachsentransformation für Formen
Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform β auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert ... mit:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Formen
Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform β auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B, in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.6

Hauptachsentransformation für Formen
Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform β auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B, in der gilt: ...

Hauptachsentransformation für Formen
Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform β auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B, in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.6

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und β eine Bilinearform auf V.
Die assoziierte **quadratische Abbildung** ist ...

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und β eine Bilinearform auf V.
Die assoziierte **quadratische Abbildung** ist

$$\begin{aligned} q_\beta : & V \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \mathbf{v} \mapsto \beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

→ Def 12.7

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und β eine Bilinearform auf V.
Die assoziierte **reelle affine Quadrik** ist ...

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und β eine Bilinearform auf V.
Die assoziierte **reelle affine Quadrik** ist die Menge

$$Q_\beta := \{\mathbf{v} \in V \mid \beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1\}$$

→ Def 12.7

Hauptachsentransformation für Quadriken
Jede reelle affine Quadrik in einem euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ hat bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis $(\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n})$ von V die Form ...

Hauptachsentransformation für Quadriken
Jede reelle affine Quadrik in einem **euklidischen** Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ hat bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis $(\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n})$ von V die Form

$$Q = \{\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{b_i} \in V \mid \sum a_i x_i^2 = 1\}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.8

Trägheitssatz von Sylvester
Jede reelle symmetrische Matrix A ist kongruent zu einer Diagonalmatrix der Form ...

Trägheitssatz von Sylvester
Jede reelle symmetrische Matrix A ist kongruent zu einer Diagonalmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & +1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Die Anzahl der $+1$-, -1- und 0-Einträge ist dabei durch A eindeutig bestimmt.

→ Satz 12.9

Ein **Integritätsring** ist ein ... Ring R, in dem für alle $a, b \in R$ gilt:

$$ab = 0 \Rightarrow [a = 0 \text{ oder } b = 0]$$

Ein **Integritätsring** ist ein kommutativer Ring R, in dem für alle $a, b \in R$ gilt:

$$ab = 0 \Rightarrow [a = 0 \text{ oder } b = 0]$$

→ Def. 13.1

Ein **Integritätsring** ist ein kommutativer Ring R, in dem gilt: ...

Ein **Integritätsring** ist ein kommutativer Ring R, in dem für alle $a, b \in R$ gilt:

$$ab = 0 \Rightarrow [a = 0 \text{ oder } b = 0]$$

→ Def. 13.1

Für jeden Integritätsring R ist (Polynomring über R) ... .

Für jeden Integritätsring R ist auch $R[X]$ ein Integritätsring.

→ Satz 13.2

Für jeden Integritätsring R gilt

$$(R[X])^\times =$$

Für jeden Integritätsring R gilt

$$(R[X])^\times = R^\times$$

→ Satz 13.2

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
a ist ein **Teiler** von b und b ist ein **Vielfaches** von a $(a|b)$ genau dann, wenn ...

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
a ist ein **Teiler** von b und b ist ein **Vielfaches** von a $(a|b)$ genau dann, wenn

$$\exists c \in R \colon b = c \cdot a$$

→ Def. 13.4

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
a und b sind **assoziiert** $(a \sim b)$ genau dann, wenn ...

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
a und b sind **assoziiert** $(a \sim b)$ genau dann, wenn

$$\exists c \in R^{\times} \colon b = c \cdot a$$

→ Def. 13.4

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
c ist ein **größter gemeinsamer Teiler** von a und b $(c \sim \mathrm{ggT}(a, b))$ genau dann, wenn

- ...

und

- $\forall c' \in R \colon (c'|a)$ und $(c'|b) \Rightarrow c'|c$

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
c ist ein **größter gemeinsamer Teiler** von a und b $(c \sim \mathrm{ggT}(a, b))$ genau dann, wenn

- $c|a$ und $c|b$

und

- $\forall c' \in R \colon (c'|a)$ und $(c'|b) \Rightarrow c'|c$

→ Def. 13.7

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
c ist ein **größter gemeinsamer Teiler** von a und b $(c \sim \mathrm{ggT}(a, b))$ genau dann, wenn

- $c|a$ und $c|b$

und

- ...

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
c ist ein **größter gemeinsamer Teiler** von a und b $(c \sim \mathrm{ggT}(a, b))$ genau dann, wenn

- $c|a$ und $c|b$

und

- $\forall c' \in R \colon (c'|a)$ und $(c'|b) \Rightarrow c'|c$

→ Def. 13.7

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
a und b sind **teilerfremd**, falls ...

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
a und b sind **teilerfremd**, falls $1 \sim \mathrm{ggT}(a, b)$

→ Def. 13.7

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
c ist ein **kleinstes gemeinsames Vielfaches** von a und b ($c \sim \mathrm{kgV}(a, b)$) genau dann, wenn

- ...

und

- $\forall c' \in R$: $(a|c')$ und $(b|c') \Rightarrow c|c'$

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
c ist ein **kleinstes gemeinsames Vielfaches** von a und b ($c \sim \mathrm{kgV}(a, b)$) genau dann, wenn

- $a|c$ und $b|c$

und

- $\forall c' \in R$: $(a|c')$ und $(b|c') \Rightarrow c|c'$

→ Def. 13.7

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
c ist ein **kleinstes gemeinsames Vielfaches** von a und b ($c \sim \mathrm{kgV}(a, b)$) genau dann, wenn

- $a|c$ und $b|c$

und

- ...

Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$.
c ist ein **kleinstes gemeinsames Vielfaches** von a und b ($c \sim \mathrm{kgV}(a, b)$) genau dann, wenn

- $a|c$ und $b|c$

und

- $\forall c' \in R$: $(a|c')$ und $(b|c') \Rightarrow c|c'$

→ Def. 13.7

Ein Integritätsring R ist **euklidisch**, falls eine Abbildung
$$\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$$
mit folgender Eigenschaft existiert:
Für $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ existieren q, r mit
$$\dots$$
und
$$r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(b)$$

Ein Integritätsring R ist **euklidisch**, falls eine Abbildung
$$\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$$
mit folgender Eigenschaft existiert:
Für $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ existieren q, r mit
$$a = q \cdot b + r$$
und
$$r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(b)$$

Ein Integritätsring R ist **euklidisch**, falls eine Abbildung

$$\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$$

mit folgender Eigenschaft existiert:
Für $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ existieren q, r mit

$$a = q \cdot b + r$$

und

$$\dots$$

Ein Integritätsring R ist **euklidisch**, falls eine Abbildung

$$\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$$

mit folgender Eigenschaft existiert:
Für $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ existieren q, r mit

$$a = q \cdot b + r$$

und

$$r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(b)$$

→ Def. 13.9

Lemma von Bézout
In jedem euklidischen Ring gilt:

$$c \sim \mathrm{ggT}(a, b) \Rightarrow$$

Lemma von Bézout
In jedem euklidischen Ring gilt:

$$c \sim \mathrm{ggT}(a, b) \Rightarrow \exists x, y \colon c = xa + yb$$

→ Lemma 13.13

In jedem euklidischen Ring gilt:

$$a, b \text{ teilerfremd } \Leftrightarrow$$

In jedem euklidischen Ring gilt:

$$a, b \text{ teilerfremd } \Leftrightarrow \exists x, y \colon 1 = x \cdot a + y \cdot b$$

→ Korollar 13.14

In jedem euklidischen Ring gilt:

$$\Leftrightarrow \exists x, y \colon 1 = x \cdot a + y \cdot b$$

In jedem euklidischen Ring gilt:

$$a, b \text{ teilerfremd } \Leftrightarrow \exists x, y \colon 1 = x \cdot a + y \cdot b$$

→ Korollar 13.14

Sei R ein Integritätsring.
Ein Element $p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ ist **irreduzibel**, falls ...

Def

Sei R ein Integritätsring.
Ein Element $p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ ist **irreduzibel**, falls für $a, b \in R$ gilt:

$$p = a \cdot b \Rightarrow (a \in R^\times \text{ oder } b \in R^\times)$$

→ Def. 13.15

Sei R ein Integritätsring.
Ein Element $p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ ist **prim**, falls ...

Def

Sei R ein Integritätsring.
Ein Element $p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ ist **prim**, falls für $a, b \in R$ gilt:

$$p|ab \Rightarrow p|b \text{ oder } p|a$$

→ Def. 13.15

In einem Integritätsring R gilt: (Zusammenhang prim und irreduzibel) ...

Satz

In einem Integritätsring R gilt:

$$p \in R \text{ prim } \Rightarrow p \text{ irreduzibel}$$

→ Satz 13.16

In einem euklidischen Ring R gilt: (Zusammenhang prim und irreduzibel)

Satz

... In einem euklidischen Ring R gilt:

$$p \in R \text{ prim } \Leftrightarrow p \text{ irreduzibel}$$

→ Satz 13.16

Eine **Primfaktorzerlegung** von $a \in R$ ist …

Def
LinA-II-13-Euklidische-Ringe e5c8519c-02d7-4561-8a22-6aba87daa2b3

Eine **Primfaktorzerlegung** von $a \in R$ ist eine Darstellung von a als Produkt

$$a = p_1 p_2 \cdots p_r$$

mit $r \in \mathbb{N}$ und $p_i \in R$ prim.

$\rightarrow$ Def. 13.19

Ein Integritätsring R heißt **faktoriell**,
wenn …

Def
LinA-II-13-Euklidische-Ringe e5c8519c-02d7-4561-8a22-6aba87daa2b3

Ein Integritätsring R heißt **faktoriell**,
wenn jedes $a \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ eine Primfaktorzerlegung besitzt.

$\rightarrow$ Def. 13.19

Falls eine *Primfaktorzerlegung* von $a \in R$ existiert, so ist diese …

Satz
LinA-II-13-Euklidische-Ringe 89327ded-c7e4-49f1-a10f-9199de4016be

Falls eine *Primfaktorzerlegung* von $a \in R$ existiert, so ist diese *eindeutig* bis auf Reihenfolge der Faktoren und Assoziiertheit.

$\rightarrow$ Satz 13.20

Für jeden Körper K ist … faktoriell.

Satz
LinA-II-13-Euklidische-Ringe 8a2baefd-95e9-4ac4-91d6-96ab9a9a7d0c

Für jeden Körper K ist $K[X]$ faktoriell.

$\rightarrow$ Satz 13.22

Das **Minimalpolynom** von f ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$ für das gilt:

(1) ...

(2) Unter allen Polynomen $\neq 0$, die (1) erfüllen, hat μ_f minimalen Grad.

(3) μ_f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient $= 1$)

Das **Minimalpolynom** von f ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$ für das gilt:

(1) $\mu_f(f) = 0$ (Nullabbildung in $\mathrm{End}_K(V)$)

(2) Unter allen Polynomen $\neq 0$, die (1) erfüllen, hat μ_f minimalen Grad.

(3) μ_f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient $= 1$)

→ Def. 14.4

Das **Minimalpolynom** von f ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$ für das gilt:

(1) $\mu_f(f) = 0$ (Nullabbildung in $\mathrm{End}_K(V)$)

(2) ...

(3) μ_f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient $= 1$)

Das **Minimalpolynom** von f ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$ für das gilt:

(1) $\mu_f(f) = 0$ (Nullabbildung in $\mathrm{End}_K(V)$)

(2) Unter allen Polynomen $\neq 0$, die (1) erfüllen, hat μ_f minimalen Grad.

(3) μ_f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient $= 1$)

→ Def. 14.4

Das **Minimalpolynom** von f ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$ für das gilt:

(1) $\mu_f(f) = 0$ (Nullabbildung in $\mathrm{End}_K(V)$)

(2) Unter allen Polynomen $\neq 0$, die (1) erfüllen, hat μ_f minimalen Grad.

(3) ...

Das **Minimalpolynom** von f ist das eindeutige Polynom $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$ für das gilt:

(1) $\mu_f(f) = 0$ (Nullabbildung in $\mathrm{End}_K(V)$)

(2) Unter allen Polynomen $\neq 0$, die (1) erfüllen, hat μ_f minimalen Grad.

(3) μ_f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient $= 1$)

→ Def. 14.4

Satz von Caley-Hamilton
Für das charakteristische Polynom eines Endomorphismus f gilt ...

Satz von Caley-Hamilton
Für das charakteristische Polynom eines Endomorphismus f gilt

$$\chi_f(f) = 0$$

→ Satz 14.7

Satz von Caley-Hamilton im zyklischen Fall
Ist $W \subseteq V$ f-zyklisch, so ist
...
das Minimalpolynom für $f|_W$.

Satz
LinA-II-14-Minimalpolynom b684bb58-b59c-4e97-953f-6d32f2a58dcf

Satz von Caley-Hamilton im zyklischen Fall
Ist $W \subseteq V$ f-zyklisch, so ist

$$(-1)^{\dim W} \chi_{f|_W}$$

das Minimalpolynom für $f|_W$.

→ Satz 14.13

Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist **f-zyklisch**, falls ...

Def
LinA-II-14-Minimalpolynom 6088f132-4411-44e9-aa19-9c0cfa13ab91

Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist **f-zyklisch**, falls

$$W = \langle \mathbf{w}, f(\mathbf{w}), f^2(\mathbf{w}), \ldots \rangle \text{ für ein } \mathbf{w} \in V$$

→ Def. 14.8

Ist W ein *f-zyklischer* Untervektorraum der Dimension d, so ist (Basis) ...

Satz
LinA-II-14-Minimalpolynom 31141f5d-f74d-45d8-bd71-4577c54a1e2c

Ist W ein *f-zyklischer* Untervektorraum der Dimension d, so ist $(\mathbf{w}, f(\mathbf{w}), f^2(\mathbf{w}), \ldots, f^{d-1}(\mathbf{w}))$ eine Basis von W.

→ Lemma 14.10

Die **Begleitmatrix** zu einem normierten Polynom $A = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$ ist die Matrix ...

Def
LinA-II-14-Minimalpolynom 2e432a06-1654-4799-8785-7f9fe0a985e8

Die **Begleitmatrix** zu einem normierten Polynom $A = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & \text{\Large 0} & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & -a_{d-2} \\ \text{\Large 0} & & & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

→ Def 14.11

Sei f ein V-Endomorphismus.
Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist genau dann ... ,
wenn er f-stabil ist und eine Basis besitzt, in der $f|_W$ durch eine Begleitmatrix gegeben ist.

Satz
LinA-II-14-Minimalpolynom 66558bcf-5640-4356-9392-437b27624b3d

Sei f ein V-Endomorphismus.
Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist genau dann f-zyklisch, wenn er f-stabil ist und eine Basis besitzt, in der $f|_W$ durch eine Begleitmatrix gegeben ist.

→ Satz 14.12

Sei f ein V-Endomorphismus.
Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist genau dann f-zyklisch, wenn ...

Satz
LinA-II-14-Minimalpolynom 66558bcf-5640-4356-9392-437b27624b3d

Sei f ein V-Endomorphismus.
Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist genau dann f-zyklisch, wenn er f-stabil ist und eine Basis besitzt, in der $f|_W$ durch eine Begleitmatrix gegeben ist.

→ Satz 14.12

Spaltungssatz
Sei f ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V. Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Polynome P und Q, so ist

$$V =$$

Satz
LinA-II-14-Minimalpolynom 707fad0f-485b-4dae-a099-bc9f6c2859b1

Spaltungssatz
Sei f ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V. Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Polynome P und Q, so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei f-stabile Untervektorräume W_P und W_Q.

→ Satz 14.17

Spaltungssatz
Sei f ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V. Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Polynome P und Q, so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei f-stabile Untervektorräume W_P und W_Q, für die gilt:

$$W_P = \qquad \text{und } \mu_f|_{W_P} = P$$

$$W_Q = \qquad \text{und } \mu_f|_{W_Q} = Q$$

Spaltungssatz
Sei f ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V. Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Polynome P und Q, so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei f-*stabile* Untervektorräume W_P und W_Q, für die gilt:

$$W_P = \ker(P(f)) = \operatorname{im}(Q(f)) \text{ und } \mu_f|_{W_P} = P$$

$$W_Q = \ker(Q(f)) = \operatorname{im}(P(f)) \text{ und } \mu_f|_{W_Q} = Q$$

→ Satz 14.17

Spaltungssatz
Sei f ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V. Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Polynome P und Q, so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei f-*stabile* Untervektorräume W_P und W_Q, für die gilt:

$$W_P = \ker(P(f)) = \operatorname{im}(Q(f)) \text{ und } \ \dots$$

$$W_Q = \ker(Q(f)) = \operatorname{im}(P(f)) \text{ und } \ \dots$$

Spaltungssatz
Sei f ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V. Ist $\mu_f = P \cdot Q$ für zwei teilerfremde normierte Polynome P und Q, so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei f-*stabile* Untervektorräume W_P und W_Q, für die gilt:

$$W_P = \ker(P(f)) = \operatorname{im}(Q(f)) \text{ und } \mu_f|_{W_P} = P$$

$$W_Q = \ker(Q(f)) = \operatorname{im}(P(f)) \text{ und } \mu_f|_{W_Q} = Q$$

→ Satz 14.17

Drittes Diagonalisierbarkeitskriterium
Ein Endomorphismus f ist diagonalisierbar genau dann, wenn (Minimalpolynom) …

Satz
LinA-II-14-Minimalpolynom 18d801db-b3d0-4036-bfb0-0472478225c4

Drittes Diagonalisierbarkeitskriterium
Ein Endomorphismus f ist diagonalisierbar genau dann, wenn μ_f in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

→ Korollar 14.19

Ein **Jordanblock** ist …

Def
LinA-II-15-Jordannormalform 2c897805-8ca5-4437-8781-b1ad98648537

Ein **Jordanblock** ist eine (Unter-)matrix der Form

$$J(m;a) := \begin{pmatrix} a & 1 & & & \text{\Large 0} \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \text{\Large 0} & & & & a \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_K(m \times m)$$

→ Def 15.1

Ein **Hauptraumblock** ist …

Def
LinA-II-15-Jordannormalform 2c897805-8ca5-4437-8781-b1ad98648537

Ein **Hauptraumblock** ist eine (Unter-)matrix der Form

$$H(m_1, \dots, m_k; a) := \begin{pmatrix} \boxed{J(m_1;a)} & & & \text{\Large 0} \\ & \boxed{J(m_2;a)} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \boxed{J(m_k;a)} \end{pmatrix}$$

→ Def 15.1

Jordannormalform

Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.
Zerfällt χ_f in Linearfaktoren, so hat f bezüglich einer geeigneten Basis folgende Gestalt:
...

Satz
LinA-II-15-Jordannormalform 15f3d72f-70b5-495b-bb04-a3f157dbea7b

Jordannormalform

Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.
Zerfällt χ_f in Linearfaktoren, so hat f bezüglich einer geeigneten Basis folgende Gestalt:

$$ {}_BM_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{H(\dots;a_1)} & & & \\ & \boxed{H(\dots;a_2)} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{H(\dots;a_l)} \end{pmatrix} $$

Dabei sind die Hauptraumblöcke und die Jordanblöcke innerhalb dieser bis auf Reihenfolge eindeutig.

→ Theorem 15.2

Jordannormalform

Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.
Wenn ... , so hat f bezüglich einer geeigneten Basis folgende Gestalt:

$$ {}_BM_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{H(\dots;a_1)} & & & \\ & \boxed{H(\dots;a_2)} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{H(\dots;a_l)} \end{pmatrix} $$

Dabei sind die Hauptraumblöcke und die Jordanblöcke innerhalb dieser bis auf Reihenfolge eindeutig.

Jordannormalform

Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.
Wenn χ_f in Linearfaktoren zerfällt, so hat f bezüglich einer geeigneten Basis folgende Gestalt:

$$ {}_BM_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{H(\dots;a_1)} & & & \\ & \boxed{H(\dots;a_2)} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{H(\dots;a_l)} \end{pmatrix} $$

Dabei sind die Hauptraumblöcke und die Jordanblöcke innerhalb dieser bis auf Reihenfolge eindeutig.

→ Theorem 15.2

Für die Jordannormalform von f gilt:

- $a_1, \dots, a_l$ sind ...
- Größe von $H(m_1, \dots, m_k; a)$ ist die algebraische Vielfachheit von a.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \chi_f\})$
- Größe m des größten Jordanblocks $J(m;a)$ zu a ist der Exponent von $(X-a)$ in μ_f.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \mu_f\})$

Für die Jordannormalform von f gilt:

- $a_1, \dots, a_l$ sind die verschiedenen Eigenwerte von f.
- Größe von $H(m_1, \dots, m_k; a)$ ist die algebraische Vielfachheit von a.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \chi_f\})$
- Größe m des größten Jordanblocks $J(m;a)$ zu a ist der Exponent von $(X-a)$ in μ_f.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \mu_f\})$

→ Notiz 15.3

Für die Jordannormalform von f gilt:

- $a_1, \dots, a_l$ sind die verschiedenen Eigenwerte von f.
- Größe von $H(m_1, \dots, m_k; a)$ ...
- Größe m des größten Jordanblocks $J(m;a)$ zu a ist der Exponent von $(X-a)$ in μ_f.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \mu_f\})$

Für die Jordannormalform von f gilt:

- $a_1, \dots, a_l$ sind die verschiedenen Eigenwerte von f.
- Größe von $H(m_1, \dots, m_k; a)$ ist die algebraische Vielfachheit von a.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \chi_f\})$
- Größe m des größten Jordanblocks $J(m;a)$ zu a ist der Exponent von $(X-a)$ in μ_f.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \mu_f\})$

→ Notiz 15.3

Für die Jordannormalform von f gilt:

- $a_1, \dots, a_l$ sind die verschiedenen Eigenwerte von f.
- Größe von $H(m_1, \dots, m_k; a)$ ist die algebraische Vielfachheit von a.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \chi_f\})$
- Größe m des größten Jordanblocks $J(m; a)$ zu a …

Für die Jordannormalform von f gilt:

- $a_1, \dots, a_l$ sind die verschiedenen Eigenwerte von f.
- Größe von $H(m_1, \dots, m_k; a)$ ist die algebraische Vielfachheit von a.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \chi_f\})$
- Größe m des größten Jordanblocks $J(m; a)$ zu a ist der Exponent von $(X-a)$ in μ_f.
  $(= \max\{r \in \mathbb{N} \mid (X-a)^r \text{ teilt } \mu_f\})$

→ Notiz 15.3

Triagonalisierbarkeitskriterium
Ein Endomorphismus f ist **triagonalisierbar**, falls …

Triagonalisierbarkeitskriterium
Ein Endomorphismus f ist **triagonalisierbar**, falls eine Basis B existiert, in der ${}_BM_B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

→ Def. 15.4

Sei a ein Eigenwert von f, sei $\mu_f = (X-a)^m \cdot P$ mit P teilerfremd zu $(X-a)$.
Der **Hauptraum** von f zu a ist …

Sei a ein Eigenwert von f, sei $\mu_f = (X-a)^m \cdot P$ mit P teilerfremd zu $(X-a)$.
Der **Hauptraum** von f zu a ist

$$\mathrm{Hau}(f; a) := \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^m)$$

→ Def. 15.7

Hauptraumzerlegung
Zerfällt χ_f in Linearfaktoren, so (Zerlegung von V) …

Hauptraumzerlegung
Zerfällt χ_f in Linearfaktoren, so zerfällt V in die Haupträume:

$$V = \oplus_{i=1}^{l} \mathrm{Hau}(f; a_i)$$

wobei $a_1, \dots, a_l$ die verschiedenen Eigenwerte von f sind.

→ Satz 15.8

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) ...

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X-a)^r$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) = r$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^i)\ \forall i \geqslant m$.

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) $\mathrm{Hau}(f;a)$ ist f-stabil.

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X-a)^r$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) = r$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^i)\ \forall i \geqslant m$.

→ Satz 15.9

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) $\mathrm{Hau}(f;a)$ ist f-stabil.

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} =$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) = r$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^i)\ \forall i \geqslant m$.

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) $\mathrm{Hau}(f;a)$ ist f-stabil.

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X-a)^r$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) = r$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^i)\ \forall i \geqslant m$.

→ Satz 15.9

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) $\mathrm{Hau}(f;a)$ ist f-stabil.

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X-a)^r$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} =$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) = r$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^i)\ \forall i \geqslant m$.

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) $\mathrm{Hau}(f;a)$ ist f-stabil.

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X-a)^r$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) = r$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^i)\ \forall i \geqslant m$.

→ Satz 15.9

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) $\mathrm{Hau}(f;a)$ ist f-stabil.

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X-a)^r$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) =$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^i)\ \forall i \geqslant m$.

Eigenschaften der Haupträume

Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) $\mathrm{Hau}(f;a)$ ist f-stabil.

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (-1)^r (X-a)^r$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) = r$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f - a \cdot \mathrm{id})^i)\ \forall i \geqslant m$.

→ Satz 15.9

Eigenschaften der Haupträume
Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) $\mathrm{Hau}(f;a)$ ist f-stabil.

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (-1)^r(X-a)^r$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) = r$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) =$.

Eigenschaften der Haupträume
Sei a Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit r, also $\chi_f = (X-a)^r \cdot P$ und $\mu_f = (X-a)^m \cdot \tilde{P}$ mit P und $\tilde{P}$ jeweils teilerfremd zu $(X-a)$.

(1) $\mathrm{Hau}(f;a)$ ist f-stabil.

(2) $\chi_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (-1)^r(X-a)^r$

(3) $\mu_f|_{\mathrm{Hau}(f;a)} = (X-a)^m$

(4) $\dim \mathrm{Hau}(f;a) = r$

(5) $\mathrm{Hau}(f;a) = \ker((f - a\cdot \mathrm{id})^i)\ \forall i \geqslant m$.

→ Satz 15.9

Ein Endomorphismus g ist **nilpotent**, wenn …

Ein Endomorphismus g ist **nilpotent**, wenn $g^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

→ Def. 15.10

Für einen (endlich-dimenionalen) Vektorraum V mit Untervektorräumen $U_1, \dots, U_k$ sind äquivalent:

(1) …

(2) V hat eine Basis der Form
$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$
derart, dass $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ Basis von U_i ist.

(3) Für beliebige Basen $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ von U_i ist
$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$
eine Basis von V.

Für einen (endlich-dimenionalen) Vektorraum V mit Untervektorräumen $U_1, \dots, U_k$ sind äquivalent:

(1) $V = \oplus_{i=1}^k U_i$

(2) V hat eine Basis der Form
$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$
derart, dass $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ Basis von U_i ist.

(3) Für beliebige Basen $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ von U_i ist
$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$
eine Basis von V.

→ Notiz 15.13

Für einen (endlich-dimenionalen) Vektorraum V mit Untervektorräumen $U_1, \dots, U_k$ sind äquivalent:

(1) $V = \oplus_{i=1}^k U_i$

(2) …

(3) Für beliebige Basen $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ von U_i ist
$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$
eine Basis von V.

Für einen (endlich-dimenionalen) Vektorraum V mit Untervektorräumen $U_1, \dots, U_k$ sind äquivalent:

(1) $V = \oplus_{i=1}^k U_i$

(2) V hat eine Basis der Form
$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$
derart, dass $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ Basis von U_i ist.

(3) Für beliebige Basen $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ von U_i ist
$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$
eine Basis von V.

→ Notiz 15.13

Für einen (endlich-dimenionalen) Vektorraum V mit Untervektorräumen $U_1, \dots, U_k$ sind äquivalent:

(1) $V = \oplus_{i=1}^k U_i$

(2) V hat eine Basis der Form

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

derart, dass $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ Basis von U_i ist.

(3) ...

Für einen (endlich-dimenionalen) Vektorraum V mit Untervektorräumen $U_1, \dots, U_k$ sind äquivalent:

(1) $V = \oplus_{i=1}^k U_i$

(2) V hat eine Basis der Form

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

derart, dass $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ Basis von U_i ist.

(3) Für beliebige Basen $(\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{m_i}^{(i)})$ von U_i ist

$$(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{m_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{m_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{m_k}^{(k)})$$

eine Basis von V.

→ Notiz 15.13

Ein **komplementärer Untervektorraum** zu einem Untervektorraum $W \subseteq V$ ist ein Untervektorraum $U \dots$

Ein **komplementärer Untervektorraum** zu einem Untervektorraum $W \subseteq V$ ist ein Untervektorraum $U \subseteq V$ mit

$$V = W \oplus U$$

→ Def. 14.15

Jordannormalform im nilpotenten Fall
Zu jedem nilpotenten Endomorphismus g existiert ...

Jordannormalform im nilpotenten Fall
Zu jedem nilpotenten Endomorphismus g existiert eine *Jordanbasis*, also eine Basis B, in der ${}_BM_B(g)$ JNF hat

$$\begin{aligned} {}_BM_B(g) &= H(m_1, \dots, m_k; 0) \\ &= \begin{pmatrix} J(m_1;0) & & 0 \\ & J(m_2;0) & \\ 0 & \ddots & J(m_3;0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $J(m;0) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

→ Satz 15.16

Eine **Jordan-Chevalley-Zerlegung** eines Endomorphismus f ist eine Zerlegung

$$f =$$

für die gilt ...

Eine **Jordan-Chevalley-Zerlegung** eines Endomorphismus f ist eine Zerlegung

$$f = d + n$$

für die gilt

- d diagonalisierbar
- n nilpotent
- f, d, n kommutieren

→ Def. 15.18

Eine **Jordan-Chevalley-Zerlegung** einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ ist eine Zerlegung

$$A =$$

für die gilt ...

Def
LinA-II-15-Jordannormalform 82c3d9b0-77fe-4d2d-9e8f-786c5a7c2689

Eine **Jordan-Chevalley-Zerlegung** einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ ist eine Zerlegung

$$A = D + N$$

für die gilt

- D diagonalisierbar
- N nilpotent
- A, D, N kommutieren

→ Def. 15.18

Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ gilt:
Zerfällt χ_A in Linearfaktoren, dann (Zerlegung von A) ...

Satz
LinA-II-15-Jordannormalform 1061827d-0c35-43f1-8234-67975bbb50a9

Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ gilt:
Zerfällt χ_A in Linearfaktoren, dann besitzt A eine Jordan-Chevalley-Zerlegung.

→ Kor. 15.19

Die Jordan-Chevalley-Zerlegung einer Matrix A in Jordannormalform hat die Form

$$A = D + N$$

mit $D := \ldots$

und $N := A - D$

Die Jordan-Chevalley-Zerlegung einer Matrix A in Jordannormalform hat die Form

$$A = D + N$$

mit $D :=$ Diagonalmatrix mit Einträgen der Hauptdiagonale von A
und $N := A - D$

→ Kor. 15.19

Die Jordan-Chevalley-Zerlegung einer Matrix A in Jordannormalform hat die Form

$$A = D + N$$

mit $D :=$ Diagonalmatrix mit Einträgen der Hauptdiagonale von A
und $N :=$

Die Jordan-Chevalley-Zerlegung einer Matrix A in Jordannormalform hat die Form

$$A = D + N$$

mit $D :=$ Diagonalmatrix mit Einträgen der Hauptdiagonale von A
und $N := A - D$

→ Kor. 15.19

Sei J eine Jordanbasis, aufgefasst als Matrix, und $\hat{A}$ die zugehörige Jordannormalform einer Matrix A, sodass gilt

$$A = J\hat{A}J^{-1}$$

Dann hat die Jordan-Chevalley-Zerlegung von A die Form

$$A =$$

Sei J eine Jordanbasis, aufgefasst als Matrix, und $\hat{A}$ die zugehörige Jordannormalform einer Matrix A, sodass gilt

$$A = J\hat{A}J^{-1}$$

Dann hat die Jordan-Chevalley-Zerlegung von A die Form

$$A = J\hat{D}J^{-1} + J\hat{N}J^{-1}$$

mit $\hat{D} + \hat{N}$ Jordan-Chevalley-Zerlegung von $\hat{A}$.

→ Kor. 15.19

Die Jordan-Chevalley-Zerlegung eines Endomorphismus f ist ...

Satz
LinA-II-15-Jordannormalform febe77ae-0879-4a9d-a962-0459c8e49a26

Die Jordan-Chevalley-Zerlegung eines Endomorphismus f ist eindeutig, falls sie existiert.

→ Satz 15.20

Binomischer Lehrsatz
Für *kommutierende* Elemente a, b eines Rings gilt:

$$(a+b)^n = \ \ldots$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz
LinA-II-15-Jordannormalform 8514298c-baac-4d09-9742-ae03641c1360

Binomischer Lehrsatz
Für *kommutierende* Elemente a, b eines Rings gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

→ Notiz 15.22

Die **Matrixexponentialfunktion** ist die Abbildung

$$\exp\colon \ \ldots$$

Def
LinA-II-15-Jordannormalform bb355039-9444-484e-8f10-64ee1c1f53ce

Die **Matrixexponentialfunktion** ist die Abbildung

$$\exp\colon \operatorname{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \longrightarrow \operatorname{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$$
$$A \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

→ Def. 15.25

Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist

$$\|A\| := \ldots$$

Def
LinA-II-15-Jordannormalform bb355039-9444-484e-8f10-64ee1c1f53ce

Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist

$$\|A\| := n \cdot \max\{|a_{ij}| \mid i, j = 1, \ldots, n\} \in \mathbb{R}$$

→ Def. 15.26

Für die Matrixnorm gilt:

(1) ...

(2) $\|s \cdot A\| = |s| \cdot \|A\|$

(3) Dreiecksungleichung
$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

(4) $\|A \cdot B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B|$

Für die Matrixnorm gilt:

(1) $\|A\| \geqslant 0$ und $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(2) $\|s \cdot A\| = |s| \cdot \|A\|$

(3) Dreiecksungleichung
$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

(4) $\|A \cdot B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B|$

→ Notiz 15.27

Für die Matrixnorm gilt:

(1) $\|A\| \geqslant 0$ und $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(2) ...

(3) Dreiecksungleichung
$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

(4) $\|A \cdot B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B|$

Für die Matrixnorm gilt:

(1) $\|A\| \geqslant 0$ und $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(2) $\|s \cdot A\| = |s| \cdot \|A\|$

(3) Dreiecksungleichung
$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

(4) $\|A \cdot B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B|$

→ Notiz 15.27

Für die Matrixnorm gilt:

(1) $\|A\| \geqslant 0$ und $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(2) $\|s \cdot A\| = |s| \cdot \|A\|$

(3) ...

(4) $\|A \cdot B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B|$

Für die Matrixnorm gilt:

(1) $\|A\| \geqslant 0$ und $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(2) $\|s \cdot A\| = |s| \cdot \|A\|$

(3) Dreiecksungleichung
$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

(4) $\|A \cdot B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B|$

→ Notiz 15.27

Für die Matrixnorm gilt:

(1) $\|A\| \geqslant 0$ und $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(2) $\|s \cdot A\| = |s| \cdot \|A\|$

(3) Dreiecksungleichung
$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

(4) ...

Für die Matrixnorm gilt:

(1) $\|A\| \geqslant 0$ und $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(2) $\|s \cdot A\| = |s| \cdot \|A\|$

(3) Dreiecksungleichung
$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

(4) $\|A \cdot B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B|$

→ Notiz 15.27

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ mit $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist **konvergent**, wenn ...

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ mit $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist **konvergent**, wenn für alle i und j $\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$ in $\mathbb{C}$ konvergiert.

→ Def. 15.28

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ mit $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist **absolut konvergent**, wenn ...

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ mit $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist **absolut konvergent**, wenn
für alle i und j $\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

→ Def. 15.28

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ mit $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist **normkonvergent**, wenn ...

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ mit $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ ist **normkonvergent**, wenn
$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\|$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

→ Def. 15.28

Multiplikationssatz
Für kommutierende Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ gilt

$$\exp(A+B) = \ \ldots$$

Satz
LinA-II-15-Jordannormalform f3b576d9-44b3-4105-98c8-7253cab4fca3

Multiplikationssatz
Für kommutierende Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ gilt

$$\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$$

→ Satz 15.31

Für beliebige $B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ und $J \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist

$$\exp(JBJ^{-1}) = \ \ldots$$

Satz
LinA-II-15-Jordannormalform f3b576d9-44b3-4105-98c8-7253cab4fca3

Für beliebige $B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ und $J \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist

$$\exp(JBJ^{-1}) = J \cdot \exp(B) \cdot J^{-1}$$

→ Satz 15.31

Ein **homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten** ist ...

Def
LinA-II-15-Jordannormalform 181261b9-23f1-44a1-8be1-d8934ac917cf

Ein **homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten** ist eine Gleichung der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$$

für ein $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$.

Ein **homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten** ist eine Gleichung der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$$

mit

$$\mathbf{x} : \ \ldots \qquad \text{und} \qquad \dot{\mathbf{x}} : \ \ldots$$

Def
LinA-II-15-Jordannormalform 181261b9-23f1-44a1-8be1-d8934ac917cf

Ein **homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten** ist eine Gleichung der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$$

für ein $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_1(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_2(t) \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für ein gegebenes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ ist eine **Lösung mit Anfangswert** $\mathbf{x}_0$ (Lösung Differentialgleichungssystem) …

Def
LinA-II-15-Jordannormalform 181261b9-23f1-44a1-8be1-d8934ac917cf

Für ein gegebenes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ ist eine **Lösung mit Anfangswert** $\mathbf{x}_0$ eine differenzierbare Abbildung

$$\mathbf{x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

mit

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

und

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

→ Def. 15.33

Für jedes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ ist

$$\ldots$$

eine Lösung des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$$

zum Anfangswert x_0.

Satz
LinA-II-15-Jordannormalform 6d0d1a05-c5ca-4ab9-9511-9704105b8cc4

Für jedes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ ist

$$\mathbf{x}(t) := \exp(A \cdot t) \cdot \mathbf{x}_0$$

eine Lösung des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$$

zum Anfangswert x_0.

→ Satz 15.34

Sei K ein beliebiger Körper und V ein K-Vektorraum. Der **Dualraum** von V ist …

Def
LinA-II-16-Dualisierung f9209d9a-53ce-4c72-883b-350abca77548

Sei K ein beliebiger Körper und V ein K-Vektorraum. Der **Dualraum** von V ist der K-Vektorraum

$$\begin{aligned} V^* :&= \operatorname{Hom}_K(V, K) \\ &= \{\varphi \colon V \longrightarrow K \mid \varphi \text{ ist } K\text{-linear}\} \end{aligned}$$

mit der Vektorraum-Struktur aus Satz/Def 6.5:

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(\mathbf{v}) &:= \varphi(\mathbf{v}) + \psi(\mathbf{v}) \\ (a \cdot \varphi)(\mathbf{v}) &:= a \cdot \varphi(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

für $\varphi, \psi \in V^*, \mathbf{v} \in V, a \in K$.

→ Def. 16.1

Elemente des *Dualraums* V^* von V heißen …

Def
LinA-II-16-Dualisierung f9209d9a-53ce-4c72-883b-350abca77548

Elemente des *Dualraums* V^* von V heißen **Linearformen auf V**.

→ Def. 16.1

Die zu einer linearen Abbildung $V \xrightarrow{f} W$ **duale Abbildung** ist ...

Def
LinA-II-16-Dualisierung f9209d9a-53ce-4c72-883b-350abca77548

Die zu einer linearen Abbildung $V \xrightarrow{f} W$ **duale Abbildung** ist die Abbildung

$$V^* \xleftarrow{f^*} W^*$$
$$f^*(\varphi) := (\varphi \circ f)$$

→ Def. 16.1

Sei $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ eine endliche Basis von V. Dann ist die **zu** B **duale Basis** B^* ...

Satz Def
LinA-II-16-Dualisierung a5630301-2141-4e16-a0e8-f8b74beb6535

Sei $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ eine endliche Basis von V. Dann ist die **zu** B **duale Basis** $B^* := (\mathbf{b}_1^*, \ldots, \mathbf{b}_n^*)$ eine Basis von V^* mit

$$\mathbf{b}_i^* \colon V \longrightarrow K$$
$$\mathbf{b}_j \mapsto \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

→ Satz & Def. 16.3

Sei $\dim V = n < \infty$. Dann

$$\dim V^* =$$

Satz
LinA-II-16-Dualisierung ee7eb4e4-b3fc-494b-9be1-54cfed785cc6

Sei $\dim V = n < \infty$. Dann

$$\dim V^* = n = \dim V$$

→ Kor. 16.5

Seien V_i K-Vektorräume $(i \in I)$.
Dann gilt

$$\left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* \cong$$

Satz
LinA-II-16-Dualisierung 563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4

Seien V_i K-Vektorräume $(i \in I)$.
Dann gilt

$$\left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right)^* \cong \prod_{i \in I} V_i^*$$

→ satz 16.7

Seien V_i K-Vektorräume ($i \in I$). Die Funktionen

$$\alpha\colon \Big(\bigoplus_{i\in I} V_i\Big)^* \longrightarrow \prod_{i\in I} V_i^*$$
$$\varphi \overset{\alpha}{\mapsto} (\varphi|_{V_i})_{i\in I}$$
$$\beta\colon \prod_{i\in I} V_i^* \longrightarrow \Big(\bigoplus_{i\in I} V_i\Big)^*$$
$$(\varphi_i)_{i\in I} \overset{\beta}{\mapsto} \Big((\mathbf{v}_i)_{i\in I} \mapsto \sum_i \varphi_i(\mathbf{v}_i)\Big)$$

definieren ... .

Satz
LinA-II-16-Dualisierung 563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4

Seien V_i K-Vektorräume ($i \in I$). Die Funktionen

$$\alpha\colon \Big(\bigoplus_{i\in I} V_i\Big)^* \longrightarrow \prod_{i\in I} V_i^*$$
$$\varphi \overset{\alpha}{\mapsto} (\varphi|_{V_i})_{i\in I}$$
$$\beta\colon \prod_{i\in I} V_i^* \longrightarrow \Big(\bigoplus_{i\in I} V_i\Big)^*$$
$$(\varphi_i)_{i\in I} \overset{\beta}{\mapsto} \Big((\mathbf{v}_i)_{i\in I} \mapsto \sum_i \varphi_i(\mathbf{v}_i)\Big)$$

definieren zueinander inverse Isomorphismen.

→ Satz 16.7

Seien V_i K-Vektorräume ($i \in I$). Die Funktionen

$$\alpha\colon \Big(\bigoplus_{i\in I} V_i\Big)^* \longrightarrow \prod_{i\in I} V_i^*$$
$$\varphi \overset{\alpha}{\mapsto} \ldots$$
$$\beta\colon \prod_{i\in I} V_i^* \longrightarrow \Big(\bigoplus_{i\in I} V_i\Big)^*$$
$$(\varphi_i)_{i\in I} \overset{\beta}{\mapsto} \Big((\mathbf{v}_i)_{i\in I} \mapsto \sum_i \varphi_i(\mathbf{v}_i)\Big)$$

definieren zueinander inverse Isomorphismen.

Satz
LinA-II-16-Dualisierung 563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4

Seien V_i K-Vektorräume ($i \in I$). Die Funktionen

$$\alpha\colon \Big(\bigoplus_{i\in I} V_i\Big)^* \longrightarrow \prod_{i\in I} V_i^*$$
$$\varphi \overset{\alpha}{\mapsto} (\varphi|_{V_i})_{i\in I}$$
$$\beta\colon \prod_{i\in I} V_i^* \longrightarrow \Big(\bigoplus_{i\in I} V_i\Big)^*$$
$$(\varphi_i)_{i\in I} \overset{\beta}{\mapsto} \Big((\mathbf{v}_i)_{i\in I} \mapsto \sum_i \varphi_i(\mathbf{v}_i)\Big)$$

definieren zueinander inverse Isomorphismen.

→ Satz 16.7

Seien V_i K-Vektorräume ($i \in I$). Die Funktionen

$$\alpha\colon \Big(\bigoplus_{i\in I} V_i\Big)^* \longrightarrow \prod_{i\in I} V_i^*$$
$$\varphi \overset{\alpha}{\mapsto} (\varphi|_{V_i})_{i\in I}$$
$$\beta\colon \prod_{i\in I} V_i^* \longrightarrow \Big(\bigoplus_{i\in I} V_i\Big)^*$$
$$(\varphi_i)_{i\in I} \overset{\beta}{\mapsto} \ldots$$

definieren zueinander inverse Isomorphismen.

Satz
LinA-II-16-Dualisierung 563b7097-98f1-4860-996d-ceda604424f4

Seien V_i K-Vektorräume ($i \in I$). Die Funktionen

$$\alpha\colon \Big(\bigoplus_{i\in I} V_i\Big)^* \longrightarrow \prod_{i\in I} V_i^*$$
$$\varphi \overset{\alpha}{\mapsto} (\varphi|_{V_i})_{i\in I}$$
$$\beta\colon \prod_{i\in I} V_i^* \longrightarrow \Big(\bigoplus_{i\in I} V_i\Big)^*$$
$$(\varphi_i)_{i\in I} \overset{\beta}{\mapsto} \Big((\mathbf{v}_i)_{i\in I} \mapsto \sum_i \varphi_i(\mathbf{v}_i)\Big)$$

definieren zueinander inverse Isomorphismen.

→ Satz 16.7

Sei V endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis B; dualer Basis B^*
und W endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis C; dualer Basis C^*.
Sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung und
$f^*\colon W^* \longrightarrow V^*$ die zu f duale Abbildung. Dann gilt für die darstellende Matrix von f^*:

$$M(f^*) =$$

Satz
LinA-II-16-Dualisierung ace73100-c31f-4165-9184-ffa5441bd84b

Sei V endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis B; dualer Basis B^*
und W endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis C; dualer Basis C^*.
Sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung und
$f^*\colon W^* \longrightarrow V^*$ die zu f duale Abbildung. Dann gilt für die darstellende Matrix von f^*:

$${}_{B^*}M_{C^*}(f^*) = \left({}_C M_B(f)\right)^T$$

→ Satz 16.8

Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Der **Annulator** von U ist ...

Def
LinA-II-16-Dualisierung b74a3de4-17b8-413c-a490-e19e3ad2e0f3

Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Der **Annulator** von U ist der Untervektorraum $U^0 \subseteq V^*$, der gegeben ist durch

$$U^0 := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(\mathbf{u}) = 0 \forall \mathbf{u} \in U\}$$

→ Def 16.10

Für jede lineare Abbildung f ist

$$\ker(f^*) = \ \ldots$$

$$\operatorname{im}(f^*) = \ \ldots$$

(Annulator)

Satz
LinA-II-16-Dualisierung 833a8f8d-3fc5-413e-a5e4-4c3537148f6e

Für jede lineare Abbildung f ist

$$\ker(f^*) = (\operatorname{im} f)^0$$

$$\operatorname{im}(f^*) = (\ker f)^0$$

→ Satz 16.12

Eine lineare Abbildung f ist genau dann *injektiv*, wenn (duale Abbildung) ...

Satz
LinA-II-16-Dualisierung d6bba2ed-dd4d-4fb4-b9fe-ac2d4c343844

Eine lineare Abbildung f ist genau dann *injektiv*, wenn die duale Abbildung f^* surjektiv ist.

→ Kor. 16.13

Eine lineare Abbildung f ist genau dann *surjektiv*, wenn (duale Abbildung) ...

Satz
LinA-II-16-Dualisierung d6bba2ed-dd4d-4fb4-b9fe-ac2d4c343844

Eine lineare Abbildung f ist genau dann *surjektiv*, wenn die duale Abbildung f^* injektiv ist.

→ Kor. 16.13

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, dann gilt für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$:

$$\dim(U^0) =$$

Satz
LinA-II-16-Dualisierung 2948efa5-9029-4284-a634-ee09edfad4b2

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, dann gilt für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$:

$$\dim(U^0) = \dim V - \dim U$$

→ Kor. 16.14

Der **Bidualraum** eines K-Vektorraums V ist ...

Def
LinA-II-16-Dualisierung ae8e8491-fda3-474b-87b0-beaf8e05f0e3

Der **Bidualraum** eines K-Vektorraums V ist

$$V^{**} := (V^*)^*$$

→ Def. 16.15

Der **Bidualraumhomomorphismus** ist die Abbildung

$$\omega_V :$$

Def
LinA-II-16-Dualisierung ae8e8491-fda3-474b-87b0-beaf8e05f0e3

Der **Bidualraumhomomorphismus** ist die Abbildung

$$\omega_V : V \longrightarrow V^{**}$$
$$\mathbf{v} \mapsto \begin{pmatrix} V^* & \longrightarrow & K \\ \varphi & \mapsto & \varphi(\mathbf{v}) \end{pmatrix}$$

→ Def. 16.15

Der Bidualraumhomomorphismus ω_V ist (Linearität) ... .

Satz
LinA-II-16-Dualisierung 730505c9-1d7c-4524-8246-22a4cbbab07a

Der Bidualraumhomomorphismus ω_V ist K-linear.

→ Notiz 16.16

Sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine Abbildung und ω_W der Bidualraumhomomorphismus von W. Dann gilt

$$\omega_W \circ f =$$

Satz
LinA-II-16-Dualisierung 730505c9-1d7c-4524-8246-22a4cbbab07a

Sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine Abbildung und ω_W der Bidualraumhomomorphismus von W. Dann gilt

$$\omega_W \circ f = f^{**} \circ \omega_V$$

mit $f^{**}\colon V^{**} \longrightarrow W^{**}$ und ω_V der Bidualraumhomomorphismus zu V.

→ Notiz 16.17

Der Bidualraumhomomorphismus ist (injektiv? surjektiv?) … .

Satz
LinA-II-16-Dualisierung 26f469cc-ef15-4f31-83a9-89e412e0edf2

Der Bidualraumhomomorphismus ist injektiv.

→ Satz 16.18

Der Bidualraumhomomorphismus ist genau dann … , wenn V endlich-dimensional ist.

Satz
LinA-II-16-Dualisierung 26f469cc-ef15-4f31-83a9-89e412e0edf2

Der Bidualraumhomomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus, wenn V endlich-dimensional ist.

→ Satz 16.18

Der Bidualraumhomomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus, wenn … .

Satz
LinA-II-16-Dualisierung 26f469cc-ef15-4f31-83a9-89e412e0edf2

Der Bidualraumhomomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus, wenn V endlich-dimensional ist.

→ Satz 16.18

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum.
Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi\colon V &\longrightarrow V^* \\ \mathbf{v} &\mapsto \langle \mathbf{v}, \cdot\rangle \end{aligned}$$

…

Satz
LinA-II-16-Dualisierung b36837bf-1b54-4cdf-9bfd-241a2bd3ba01

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum.
Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi\colon V &\longrightarrow V^* \\ \mathbf{v} &\mapsto \langle \mathbf{v}, \cdot\rangle \end{aligned}$$

ein *kanonischer Isomorphismus* zu $V \cong V^*$.

→ Satz 16.19

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum.
Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi\colon V &\longrightarrow V^* \\ \mathbf{v} &\mapsto \end{aligned}$$

ein *kanonischer Isomorphismus* zu $V \cong V^*$.

Satz
LinA-II-16-Dualisierung b36837bf-1b54-4cdf-9bfd-241a2bd3ba01

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum.
Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi\colon V &\longrightarrow V^* \\ \mathbf{v} &\mapsto \langle \mathbf{v}, \cdot\rangle \end{aligned}$$

ein *kanonischer Isomorphismus* zu $V \cong V^*$.

→ Satz 16.19

Seien $V_1, \dots, V_n, W$ K-Vektorräume. Eine Abbildung

$$f\colon V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow W$$

ist K-**multilinear**, falls …

Def
LinA-II-17-Multilineare-Algebren 4bfc9556-8182-4a6d-ba13-e65645147b5c

Seien $V_1, \dots, V_n, W$ K-Vektorräume. Eine Abbildung

$$f\colon V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow W$$

ist K-**multilinear**, falls für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ und beliebige Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ die Abbildung

$$\begin{aligned} V_i &\longrightarrow W \\ \mathbf{v} &\mapsto f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

K-linear ist.

→ Def. 17.5

Das **Tensorprodukt** $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ von K-Vektorräumen $V_1, \cdots, V_n$ ist ein K-Vektorraum, der definiert wird durch eine kanonische Abbildung
$\mathrm{can}\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ mit folgender universellen Eigenschaft:
can ist … und
für jeden K-Vektorraum T und jede multilineare Abbildung $t\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow T$ existiert genau eine K-lineare Abbildung $t'\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow T$
mit $t' \circ \mathrm{can} = t$.

Def Satz
LinA-II-17-Multilineare-Algebren 78d71d52-c77f-4bf8-8312-ce13d136f6f1

Das **Tensorprodukt** $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ von K-Vektorräumen $V_1, \cdots, V_n$ ist ein K-Vektorraum, der definiert wird durch eine kanonische Abbildung
$\mathrm{can}\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ mit folgender universellen Eigenschaft:
can ist multilinear und
für jeden K-Vektorraum T und jede multilineare Abbildung $t\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow T$ existiert genau eine K-lineare Abbildung $t'\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow T$
mit $t' \circ \mathrm{can} = t$.

→ Satz 17.6 / Def. 17.7

Das **Tensorprodukt** $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ von K-Vektorräumen $V_1, \cdots, V_n$ ist ein K-Vektorraum, der definiert wird durch eine kanonische Abbildung
$\operatorname{can}\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ mit folgender universellen Eigenschaft:
can ist multilinear und
für jeden K-Vektorraum T und jede multilineare Abbildung $t\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow T$ existiert ...

.

Def Satz
LinA-II-17-Multilineare-Algebren 78d71d52-c77f-4bf8-8312-ce13d136f6f1

Das **Tensorprodukt** $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ von K-Vektorräumen $V_1, \cdots, V_n$ ist ein K-Vektorraum, der definiert wird durch eine kanonische Abbildung
$\operatorname{can}\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ mit folgender universellen Eigenschaft:
can ist multilinear und
für jeden K-Vektorraum T und jede multilineare Abbildung $t\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow T$ existiert genau eine K-lineare Abbildung $t'\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow T$
mit $t' \circ \operatorname{can} = t$.

→ Satz 17.6 / Def. 17.7

Die **reinen Tensoren** sind ...

Def
LinA-II-17-Multilineare-Algebren aecec954-a8b3-4cf0-9088-efac1f16f0cf

Die **reinen Tensoren** sind die Vektoren im Bild von *can*:

$$\mathbf{v}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{v}_n := \operatorname{can}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

→ Def. 17.8

Rechenregeln für (reine) Tensoren

$$\begin{aligned} &= \\ \mathbf{v_1} \otimes (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2') &= \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2' \\ a\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 &= a \cdot (\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 \otimes a\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

$\forall \mathbf{v}_i \in V_i, a \in K$

Rechenregeln für (reine) Tensoren

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1') \otimes \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1' \otimes \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v_1} \otimes (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2') &= \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2' \\ a\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 &= a \cdot (\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 \otimes a\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

$\forall \mathbf{v}_i \in V_i, a \in K$

→ Notiz 17.11

Rechenregeln für (reine) Tensoren

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1') \otimes \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1' \otimes \mathbf{v}_2 \\ &= \\ a\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 &= a \cdot (\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 \otimes a\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

$\forall \mathbf{v}_i \in V_i, a \in K$

Rechenregeln für (reine) Tensoren

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1') \otimes \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1' \otimes \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v_1} \otimes (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2') &= \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2' \\ a\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 &= a \cdot (\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 \otimes a\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

$\forall \mathbf{v}_i \in V_i, a \in K$

→ Notiz 17.11

Rechenregeln für (reine) Tensoren

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1') \otimes \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1' \otimes \mathbf{v}_2$$
$$\mathbf{v}_1 \otimes (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2') = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2'$$
$$=$$
$$\forall \mathbf{v}_i \in V_i, a \in K$$

Rechenregeln für (reine) Tensoren

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1') \otimes \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1' \otimes \mathbf{v}_2$$
$$\mathbf{v}_1 \otimes (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2') = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2'$$
$$a\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 = a \cdot (\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 \otimes a\mathbf{v}_2$$
$$\forall \mathbf{v}_i \in V_i, a \in K$$

→ Notiz 17.11

Eigenschaften des Tensorprodukts

Für beliebige K-Vektorräume haben wir kanonische Isomorphismen:

N: ...

A: $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$
$(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 \hookleftarrow \mathbf{v}_1 \otimes (\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3$

K: $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$ mit $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \mapsto \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1$

D: $(\oplus_{i\in I} V_i) \otimes W \cong \oplus_{i\in I}(V_i \otimes W)$ mit
$(\mathbf{v}_i)_{i\in I} \otimes \mathbf{w} \mapsto (\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w})_{i\in I}$

Eigenschaften des Tensorprodukts

Für beliebige K-Vektorräume haben wir kanonische Isomorphismen:

N: $K \otimes V \cong V$ mit $a \otimes \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}$

A: $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$
$(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 \hookleftarrow \mathbf{v}_1 \otimes (\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3$

K: $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$ mit $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \mapsto \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1$

D: $(\oplus_{i\in I} V_i) \otimes W \cong \oplus_{i\in I}(V_i \otimes W)$ mit
$(\mathbf{v}_i)_{i\in I} \otimes \mathbf{w} \mapsto (\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w})_{i\in I}$

→ Satz 17.12

Eigenschaften des Tensorprodukts

Für beliebige K-Vektorräume haben wir kanonische Isomorphismen:

N: $K \otimes V \cong V$ mit $a \otimes \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}$

A: ...

K: $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$ mit $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \mapsto \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1$

D: $(\oplus_{i\in I} V_i) \otimes W \cong \oplus_{i\in I}(V_i \otimes W)$ mit
$(\mathbf{v}_i)_{i\in I} \otimes \mathbf{w} \mapsto (\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w})_{i\in I}$

Eigenschaften des Tensorprodukts

Für beliebige K-Vektorräume haben wir kanonische Isomorphismen:

N: $K \otimes V \cong V$ mit $a \otimes \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}$

A: $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$
$(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 \hookleftarrow \mathbf{v}_1 \otimes (\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3$

K: $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$ mit $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \mapsto \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1$

D: $(\oplus_{i\in I} V_i) \otimes W \cong \oplus_{i\in I}(V_i \otimes W)$ mit
$(\mathbf{v}_i)_{i\in I} \otimes \mathbf{w} \mapsto (\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w})_{i\in I}$

→ Satz 17.12

Eigenschaften des Tensorprodukts

Für beliebige K-Vektorräume haben wir kanonische Isomorphismen:

N: $K \otimes V \cong V$ mit $a \otimes \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}$

A: $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$
$(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 \hookleftarrow \mathbf{v}_1 \otimes (\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3$

K: ...

D: $(\oplus_{i\in I} V_i) \otimes W \cong \oplus_{i\in I}(V_i \otimes W)$ mit
$(\mathbf{v}_i)_{i\in I} \otimes \mathbf{w} \mapsto (\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w})_{i\in I}$

Eigenschaften des Tensorprodukts

Für beliebige K-Vektorräume haben wir kanonische Isomorphismen:

N: $K \otimes V \cong V$ mit $a \otimes \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}$

A: $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$
$(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 \hookleftarrow \mathbf{v}_1 \otimes (\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3$

K: $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$ mit $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \mapsto \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1$

D: $(\oplus_{i\in I} V_i) \otimes W \cong \oplus_{i\in I}(V_i \otimes W)$ mit
$(\mathbf{v}_i)_{i\in I} \otimes \mathbf{w} \mapsto (\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w})_{i\in I}$

→ Satz 17.12

Eigenschaften des Tensorprodukts
Für beliebige K-Vektorräume haben wir kanonische Isomorphismen:

N: $K \otimes V \cong V$ mit $a \otimes \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}$

A: $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$
$(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 \leftarrow\!\shortmid \mathbf{v}_1 \otimes (\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3$

K: $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$ mit $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \mapsto \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1$

D: ...

Eigenschaften des Tensorprodukts
Für beliebige K-Vektorräume haben wir kanonische Isomorphismen:

N: $K \otimes V \cong V$ mit $a \otimes \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}$

A: $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$
$(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 \leftarrow\!\shortmid \mathbf{v}_1 \otimes (\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3$

K: $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$ mit $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \mapsto \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1$

D: $(\oplus_{i \in I} V_i) \otimes W \cong \oplus_{i \in I}(V_i \otimes W)$ mit
$(\mathbf{v}_i)_{i \in I} \otimes \mathbf{w} \mapsto (\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w})_{i \in I}$

→ Satz 17.12

Seien $B = (\mathbf{b}_i)_{i \in I}$ Basis von V, $C = (\mathbf{c}_j)_{j \in J}$ Basis von W. Dann ist eine Basis von $V \otimes W$: ...

Seien $B = (\mathbf{b}_i)_{i \in I}$ Basis von V, $C = (\mathbf{c}_j)_{j \in J}$ Basis von W. Dann ist eine Basis von $V \otimes W$:

$$(\mathbf{b}_i \otimes \mathbf{c}_j)_{i \in I, j \in J}$$

→ Kor. 17.13

Für endlich-dimensionale Vektorräume V, W gilt

$$\dim V \otimes W =$$

Für endlich-dimensionale Vektorräume V, W gilt

$$\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$$

→ Kor. 17.13

Sind $f_i \colon V_i \longrightarrow W_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ K-lineare Abbildungen, so existiert (Tensor) ...

Sind $f_i \colon V_i \longrightarrow W_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ K-lineare Abbildungen, so existiert genau eine K-lineare Abbildung

$$f_1 \otimes \ldots \otimes f_n \colon V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \longrightarrow W_1 \otimes \ldots W_n$$

mit
$$\mathbf{v}_1 \otimes \ldots \mathbf{v}_n \mapsto f_1(\mathbf{v}_1) \otimes \ldots \otimes f_n(\mathbf{v}_n)$$

→ Satz/Def. 17.17

Tensorprodukt von Matrizen

Seien $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}(m \times n), B \in \mathrm{Mat}_K(p \times q)$. Dann ist

$$A \otimes B :=$$

Def

Tensorprodukt von Matrizen

Seien $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}(m \times n), B \in \mathrm{Mat}_K(p \times q)$. Dann ist

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(mp \times nq)$$

→ Def. 17.20

Seien $f_1 \colon V_1 \longrightarrow W_1,\ f_2 \colon V_2 \longrightarrow W_2$ linear und seien die Basen der Vektorräume wie folgt:

$$\begin{array}{rl} V_1: & B_1 = (\mathbf{b}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{b}_n^{(1)}) \\ V_2: & B_2 = (\mathbf{b}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{b}_q^{(2)}) \\ W_1: & C_1 = (\mathbf{c}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{c}_m^{(1)}) \\ W_2: & C_2 = (\mathbf{c}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{c}_p^{(2)}) \\ \hline V_1 \otimes V_2: & "B_1 \otimes B_2 := (\mathbf{b}_1^{(1)} \otimes B_2, \ldots, \mathbf{b}_n^{(1)} \otimes B_2)" \\ W_1 \otimes W_2: & "C_1 \otimes C_2 := (\mathbf{c}_1^{(1)} \otimes C_2, \ldots, \mathbf{c}_m^{(1)} \otimes C_2)" \end{array}$$

Dann gilt:

$${}_{C_1 \otimes C_2}M_{B_1 \otimes B_2}(f_1 \otimes f_2) =$$

Satz

Seien $f_1 \colon V_1 \longrightarrow W_1,\ f_2 \colon V_2 \longrightarrow W_2$ linear und seien die Basen der Vektorräume wie folgt:

$$\begin{array}{rl} V_1: & B_1 = (\mathbf{b}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{b}_n^{(1)}) \\ V_2: & B_2 = (\mathbf{b}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{b}_q^{(2)}) \\ W_1: & C_1 = (\mathbf{c}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{c}_m^{(1)}) \\ W_2: & C_2 = (\mathbf{c}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{c}_p^{(2)}) \\ \hline V_1 \otimes V_2: & "B_1 \otimes B_2 := (\mathbf{b}_1^{(1)} \otimes B_2, \ldots, \mathbf{b}_n^{(1)} \otimes B_2)" \\ W_1 \otimes W_2: & "C_1 \otimes C_2 := (\mathbf{c}_1^{(1)} \otimes C_2, \ldots, \mathbf{c}_m^{(1)} \otimes C_2)" \end{array}$$

Dann gilt:

$${}_{C_1 \otimes C_2}M_{B_1 \otimes B_2}(f_1 \otimes f_2) = {}_{C_1}M_{B_1}(f_1) \otimes {}_{C_2}M_{B_2}(f_2)$$

→ Satz 17.21

Seien $f_1 \colon V_1 \longrightarrow W_1,\ f_2 \colon V_2 \longrightarrow W_2$ linear und seien die Basen der Vektorräume wie folgt:

$$\begin{array}{rl} V_1: & B_1 = (\mathbf{b}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{b}_n^{(1)}) \\ V_2: & B_2 = (\mathbf{b}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{b}_q^{(2)}) \\ W_1: & C_1 = (\mathbf{c}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{c}_m^{(1)}) \\ W_2: & C_2 = (\mathbf{c}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{c}_p^{(2)}) \\ \hline V_1 \otimes V_2: & \ldots \\ W_1 \otimes W_2: & \ldots \end{array}$$

Dann gilt:

$${}_{\ldots}M_{\ldots}(f_1 \otimes f_2) = {}_{C_1}M_{B_1}(f_1) \otimes {}_{C_2}M_{B_2}(f_2)$$

Satz

Seien $f_1 \colon V_1 \longrightarrow W_1,\ f_2 \colon V_2 \longrightarrow W_2$ linear und seien die Basen der Vektorräume wie folgt:

$$\begin{array}{rl} V_1: & B_1 = (\mathbf{b}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{b}_n^{(1)}) \\ V_2: & B_2 = (\mathbf{b}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{b}_q^{(2)}) \\ W_1: & C_1 = (\mathbf{c}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{c}_m^{(1)}) \\ W_2: & C_2 = (\mathbf{c}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{c}_p^{(2)}) \\ \hline V_1 \otimes V_2: & "B_1 \otimes B_2 := (\mathbf{b}_1^{(1)} \otimes B_2, \ldots, \mathbf{b}_n^{(1)} \otimes B_2)" \\ W_1 \otimes W_2: & "C_1 \otimes C_2 := (\mathbf{c}_1^{(1)} \otimes C_2, \ldots, \mathbf{c}_m^{(1)} \otimes C_2)" \end{array}$$

Dann gilt:

$${}_{C_1 \otimes C_2}M_{B_1 \otimes B_2}(f_1 \otimes f_2) = {}_{C_1}M_{B_1}(f_1) \otimes {}_{C_2}M_{B_2}(f_2)$$

→ Satz 17.21