



<p>Jede Bilinearform <math>\beta</math> auf <math>K^n</math> liefert eine Matrix ...</p>	<p>Jede Bilinearform <math>\beta</math> auf <math>K^n</math> liefert eine Matrix <math>M(\beta) \in \text{Mat}_K(n \times n)</math> der Gestalt</p> $M(\beta) := \beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{ij}$ <p>→ Satz 10.2</p>
<p>Jede Matrix <math>A \in \text{Mat}_K(n \times n)</math> liefert eine ... wie folgt:</p>	<p>Jede Matrix <math>A \in \text{Mat}_K(n \times n)</math> liefert eine Bilinearform auf <math>K^n</math> wie folgt:</p> $\begin{aligned} \beta_A : K^n \times K^n &\longrightarrow K \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto \mathbf{v}^T A \mathbf{w} \end{aligned}$ <p>→ Satz 10.2</p>
<p>Die Menge der Bilinearformen auf <math>K^n</math> und die Menge der <math>n \times n</math> Matrizen über <math>K</math> sind ...</p>	<p>Die Menge der Bilinearformen auf <math>K^n</math> und die Menge der <math>n \times n</math> Matrizen über <math>K</math> sind isomorph.</p> <p>→ Satz 10.2</p>
<p>Die <b>darstellende Matrix</b> einer Bilinearform <math>\beta</math> bezüglich einer Basis <math>B = (\mathbf{b}_i)_i</math> ist gegeben durch ...</p>	<p>Die <b>darstellende Matrix</b> einer Bilinearform <math>\beta</math> bezüglich einer Basis <math>B = (\mathbf{b}_i)_i</math> ist gegeben durch</p> $M_B(\beta) := \beta(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_{ij}$ <p>→ Def. 10.3</p>

<p>Zwei Matrizen <math>A, A'</math> sind <b>kongruent</b>, falls es ...</p>	<p>Zwei quadratische Matrizen <math>A, A'</math> sind <b>kongruent</b>, falls es eine invertierbare Matrix <math>S</math> gibt mit</p> $A' = S^T A S$ <p>→ Def. 10.5</p>
<p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> auf <math>V</math> ist <b>symmetrisch</b>, falls ...</p>	<p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> auf <math>V</math> ist <b>symmetrisch</b>, falls für alle <math>\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V</math></p> $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ <p>→ Def. 10.7</p>
<p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> auf <math>V</math> ist <b>schiefssymmetrisch</b>, falls ...</p>	<p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> auf <math>V</math> ist <b>schiefssymmetrisch</b>, falls für alle <math>\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V</math></p> $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ <p>→ Def. 10.7</p>
<p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> auf <math>V</math> ist <b>alternierend</b>, falls ...</p>	<p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> auf <math>V</math> ist <b>alternierend</b>, falls für alle <math>\mathbf{v} \in V</math></p> $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ <p>→ Def. 10.7</p>

<div data-bbox="57 60 748 132" data-label="Text"> <p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> ist <b>symmetrisch</b> genau dann, wenn ... (darstellende Matrix)</p> </div> <div data-bbox="57 510 748 546" data-label="Text"> <p>Satz LinA-II-10-Skalarproduktefb0e2cdc-bbf2-11ec-8422-0242ac120002</p> </div>	<div data-bbox="855 60 1546 132" data-label="Text"> <p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> ist <b>symmetrisch</b> genau dann, wenn ihre darstellende Matrix <math>M(\beta)</math> <b>symmetrisch</b> ist:</p> </div> <div data-bbox="1094 156 1297 197" data-label="Equation-Block"> <math display="block">M(\beta)^T = M(\beta)</math> </div> <div data-bbox="1433 271 1536 288" data-label="Text"> <p>→ Satz 10.9</p> </div>
<div data-bbox="57 622 748 692" data-label="Text"> <p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> ist <b>schiefsymmetrisch</b> genau dann, wenn ... (darstellende Matrix)</p> </div> <div data-bbox="57 1070 748 1106" data-label="Text"> <p>Satz LinA-II-10-Skalarproduktefb0e2cdc-bbf2-11ec-8422-0242ac120002</p> </div>	<div data-bbox="855 622 1546 723" data-label="Text"> <p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> ist <b>schiefsymmetrisch</b> genau dann, wenn ihre darstellende Matrix <math>M(\beta)</math> <b>schiefsymmetrisch</b> ist:</p> </div> <div data-bbox="1082 725 1308 766" data-label="Equation-Block"> <math display="block">M(\beta)^T = -M(\beta)</math> </div> <div data-bbox="1433 826 1536 844" data-label="Text"> <p>→ Satz 10.9</p> </div>
<div data-bbox="57 1182 748 1252" data-label="Text"> <p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> ist <b>alternierend</b> genau dann, wenn ... (darstellende Matrix)</p> </div> <div data-bbox="57 1630 748 1666" data-label="Text"> <p>Satz LinA-II-10-Skalarproduktefb0e2cdc-bbf2-11ec-8422-0242ac120002</p> </div>	<div data-bbox="855 1182 1546 1252" data-label="Text"> <p>Eine Bilinearform <math>\beta</math> ist <b>alternierend</b> genau dann, wenn für ihre darstellende Matrix <math>M(\beta)</math> gilt:</p> </div> <div data-bbox="1082 1276 1308 1317" data-label="Equation-Block"> <math display="block">M(\beta)^T = -M(\beta)</math> </div> <div data-bbox="855 1348 903 1377" data-label="Text"> <p>und</p> </div> <div data-bbox="1064 1384 1327 1422" data-label="Equation-Block"> <math display="block">M(\beta)_{ii} = 0 \text{ für alle } i</math> </div> <div data-bbox="1433 1480 1536 1498" data-label="Text"> <p>→ Satz 10.9</p> </div>
<div data-bbox="57 1742 748 2145" data-label="Text"> <p>Eine <b>Sesquilinearform</b> <math>\eta</math> auf einem <math>\mathbb{C}</math>-Vektorraum <math>V</math> ist eine Abbildung <math>\eta: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}</math> mit folgenden Eigenschaften:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>...</li> <li><math>\eta</math> ist semilinear in der zweiten Koordinate:  <math>\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)</math>  <math>\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})</math>  für alle <math>\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V</math> und alle <math>s \in \mathbb{C}</math></li> </ul> </div>	<div data-bbox="855 1742 1546 2145" data-label="Text"> <p>Eine <b>Sesquilinearform</b> <math>\eta</math> auf einem <math>\mathbb{C}</math>-Vektorraum <math>V</math> ist eine Abbildung <math>\eta: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}</math> mit folgenden Eigenschaften:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\eta</math> ist linear in der ersten Koordinate:  <math>\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})</math>  für alle <math>\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \in V</math> und alle <math>s \in \mathbb{C}</math></li> <li><math>\eta</math> ist semilinear in der zweiten Koordinate:  <math>\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)</math>  <math>\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})</math>  für alle <math>\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V</math> und alle <math>s \in \mathbb{C}</math></li> </ul> </div> <div data-bbox="1425 2195 1536 2213" data-label="Text"> <p>→ Def. 10.10</p> </div>

<p>Eine <b>Sesquilinearform</b> <math>\eta</math> auf einem <math>\mathbb{C}</math>-Vektorraum <math>V</math> ist eine Abbildung <math>\eta: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}</math> mit folgenden Eigenschaften:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\eta</math> ist linear in der ersten Koordinate:  <math>\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})</math>  für alle <math>\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \in V</math> und alle <math>s \in \mathbb{C}</math></li> <li>...</li> </ul>	<p>Eine <b>Sesquilinearform</b> <math>\eta</math> auf einem <math>\mathbb{C}</math>-Vektorraum <math>V</math> ist eine Abbildung <math>\eta: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}</math> mit folgenden Eigenschaften:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\eta</math> ist linear in der ersten Koordinate:  <math>\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})</math>  für alle <math>\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \in V</math> und alle <math>s \in \mathbb{C}</math></li> <li><math>\eta</math> ist semilinear in der zweiten Koordinate:  <math>\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)</math>  <math>\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})</math>  für alle <math>\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V</math> und alle <math>s \in \mathbb{C}</math></li> </ul> <p>→ Def. 10.10</p>
<p>Eine Sesquilinearform <math>\eta</math> ist <b>hermitesch</b>, falls ...</p>	<p>Eine Sesquilinearform <math>\eta</math> ist <b>hermitesch</b>, falls gilt</p> $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\eta(\mathbf{w}, \mathbf{v})}$ <p>für alle <math>\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V</math></p> <p>→ Def. 10.10</p>
<p>Jede Sesquilinearform <math>\eta</math> liefert eine Matrix der Form ...</p>	<p>Jede Sesquilinearform <math>\eta</math> liefert eine Matrix <math>M(\eta) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)</math> der Form</p> $M(\eta) := \eta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{ij}$ <p>→ Satz 10.11</p>
<p>Zu einer gegebenen komplexen Matrix <math>A</math> existiert eine Sesquilinearform <math>\eta</math> wie folgt: ...</p>	<p>Zu einer gegebenen komplexen quadratischen Matrix <math>A</math> existiert eine Sesquilinearform <math>\eta</math> wie folgt:</p> $\eta_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mathbf{v}^T A \overline{\mathbf{w}}$ <p>→ Satz 10.11</p>

<p>Eine symmetrische Bilinearform <math>\beta</math> auf einem <math>\mathbb{R}</math>-Vektorraum ist <b>positiv definit</b>, falls ...</p>	<p>Eine symmetrische Bilinearform <math>\beta</math> auf einem <math>\mathbb{R}</math>-Vektorraum ist <b>positiv definit</b>, falls</p> $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \text{ f\"ur alle } \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ <p>→ Def. 10.14</p>
<p>Def LinA-II-10-Skalarprodukte</p> <p>ca81504e-bc10-11ec-8422-0242ac120002</p>	
<p>Eine hermitesche Bilinearform <math>\beta</math> auf einem <math>\mathbb{C}</math>-Vektorraum ist <b>positiv definit</b>, falls ...</p>	<p>Eine hermitesche Bilinearform <math>\beta</math> auf einem <math>\mathbb{C}</math>-Vektorraum ist <b>positiv definit</b>, falls</p> $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \text{ f\"ur alle } \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ <p>→ Def. 10.14</p>
<p>Def LinA-II-10-Skalarprodukte</p> <p>ca81504e-bc10-11ec-8422-0242ac120002</p>	
<p>Ein <b>Skalarprodukt</b> auf einem <math>\mathbb{R}</math>-Vektorraum ist ...</p>	<p>Ein <b>Skalarprodukt</b> auf einem <math>\mathbb{R}</math>-Vektorraum ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform.</p> <p>→ Def. 10.15</p>
<p>Def LinA-II-10-Skalarprodukte</p> <p>d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002</p>	
<p>Ein <b>Skalarprodukt</b> auf einem <math>\mathbb{C}</math>-Vektorraum ist ...</p>	<p>Ein <b>Skalarprodukt</b> auf einem <math>\mathbb{C}</math>-Vektorraum ist eine positiv definite hermitesche Bilinearform.</p> <p>→ Def. 10.15</p>
<p>Def LinA-II-10-Skalarprodukte</p> <p>d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002</p>	

<p>Ein <b>euklidischer Vektorraum</b> ist ...</p> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-10-Skalarprodukte</div> <div>d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002</div> </div>	<p>Ein <b>euklidischer Vektorraum</b> <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ist ein <math>\mathbb{R}</math>-Vektorraum <math>V</math> zusammen mit einem Skalarprodukt <math>\langle \cdot, \cdot \rangle</math>.</p> <div> <div></div> <div></div> <div>→ Def. 10.15</div> </div>
<p>Ein <b>unitärer Vektorraum</b> ist ...</p> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-10-Skalarprodukte</div> <div>d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002</div> </div>	<p>Ein <b>unitärer Vektorraum</b> <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ist ein <math>\mathbb{C}</math>-Vektorraum <math>V</math> zusammen mit einem Skalarprodukt <math>\langle \cdot, \cdot \rangle</math>.</p> <div> <div></div> <div></div> <div>→ Def. 10.15</div> </div>
<p>Die assoziierte <b>Norm</b> zu einem euklidischen oder unitären Vektorraum <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ist gegeben durch</p> <div> <math display="block">\ \cdot\  : V \longrightarrow \mathbb{R}</math> <math display="block">\mathbf{v} \mapsto</math> </div>	<p>Die assoziierte <b>Norm</b> zu einem euklidischen oder unitären Vektorraum <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ist gegeben durch</p> <div> <math display="block">\ \cdot\  : V \longrightarrow \mathbb{R}</math> <math display="block">\mathbf{v} \mapsto \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}</math> </div> <p>(Die Norm wird durch das Skalarprodukt <b>induziert</b>.)</p> <div> <div></div> <div></div> <div>→ Def. 10.15</div> </div>
<p>In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> gilt:</p> <div> <div>(i) (Verhältnis Norm und 0) ...</div> <div>(ii) <math>\ s \cdot \mathbf{v}\  =  s  \ \mathbf{v}\ </math></div> <div>(iii) <b>Dreiecksungleichung:</b>  <math>\ \mathbf{v} + \mathbf{w}\  \leq \ \mathbf{v}\  + \ \mathbf{w}\ </math> </div> <div>(iv) <b>Cauchy-Schwarz-Ungleichung:</b>  <math> \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle  \leq \ \mathbf{v}\  \cdot \ \mathbf{w}\ </math> </div> </div>	<p>In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> gilt:</p> <div> <div>(i) <math>\ \mathbf{v}\  \geq 0</math> für alle <math>\mathbf{v} \in V</math>  <math>\ \mathbf{v}\  = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}</math> </div> <div>(ii) <math>\ s \cdot \mathbf{v}\  =  s  \ \mathbf{v}\ </math></div> <div>(iii) <b>Dreiecksungleichung:</b>  <math>\ \mathbf{v} + \mathbf{w}\  \leq \ \mathbf{v}\  + \ \mathbf{w}\ </math> </div> <div>(iv) <b>Cauchy-Schwarz-Ungleichung:</b>  <math> \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle  \leq \ \mathbf{v}\  \cdot \ \mathbf{w}\ </math> </div> </div> <div> <div></div> <div></div> <div>→ Satz 10.18</div> </div>

<p>In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> gilt:</p> <p>(i) <math>\ \mathbf{v}\  \geq 0</math> für alle <math>\mathbf{v} \in V</math>  <math>\ \mathbf{v}\  = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}</math></p> <p>(ii) <math>\ s \cdot \mathbf{v}\  = \dots</math></p> <p>(iii) <b>Dreiecksungleichung:</b>  <math>\ \mathbf{v} + \mathbf{w}\  \leq \ \mathbf{v}\  + \ \mathbf{w}\ </math></p> <p>(iv) <b>Cauchy-Schwarz-Ungleichung:</b>  <math> \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle  \leq \ \mathbf{v}\  \cdot \ \mathbf{w}\ </math></p>	<p>In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> gilt:</p> <p>(i) <math>\ \mathbf{v}\  \geq 0</math> für alle <math>\mathbf{v} \in V</math>  <math>\ \mathbf{v}\  = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}</math></p> <p>(ii) <math>\ s \cdot \mathbf{v}\  =  s  \ \mathbf{v}\ </math></p> <p>(iii) <b>Dreiecksungleichung:</b>  <math>\ \mathbf{v} + \mathbf{w}\  \leq \ \mathbf{v}\  + \ \mathbf{w}\ </math></p> <p>(iv) <b>Cauchy-Schwarz-Ungleichung:</b>  <math> \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle  \leq \ \mathbf{v}\  \cdot \ \mathbf{w}\ </math></p> <p>→ Satz 10.18</p>
<p>In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> gilt:</p> <p>(i) <math>\ \mathbf{v}\  \geq 0</math> für alle <math>\mathbf{v} \in V</math>  <math>\ \mathbf{v}\  = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}</math></p> <p>(ii) <math>\ s \cdot \mathbf{v}\  =  s  \ \mathbf{v}\ </math></p> <p>(iii) <b>(Dreiecksungleichung:)</b>  <math>\dots</math></p> <p>(iv) <b>Cauchy-Schwarz-Ungleichung:</b>  <math> \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle  \leq \ \mathbf{v}\  \cdot \ \mathbf{w}\ </math></p>	<p>In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> gilt:</p> <p>(i) <math>\ \mathbf{v}\  \geq 0</math> für alle <math>\mathbf{v} \in V</math>  <math>\ \mathbf{v}\  = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}</math></p> <p>(ii) <math>\ s \cdot \mathbf{v}\  =  s  \ \mathbf{v}\ </math></p> <p>(iii) <b>Dreiecksungleichung:</b>  <math>\ \mathbf{v} + \mathbf{w}\  \leq \ \mathbf{v}\  + \ \mathbf{w}\ </math></p> <p>(iv) <b>Cauchy-Schwarz-Ungleichung:</b>  <math> \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle  \leq \ \mathbf{v}\  \cdot \ \mathbf{w}\ </math></p> <p>→ Satz 10.18</p>
<p>In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> gilt:</p> <p>(i) <math>\ \mathbf{v}\  \geq 0</math> für alle <math>\mathbf{v} \in V</math>  <math>\ \mathbf{v}\  = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}</math></p> <p>(ii) <math>\ s \cdot \mathbf{v}\  =  s  \ \mathbf{v}\ </math></p> <p>(iii) <b>Dreiecksungleichung:</b>  <math>\ \mathbf{v} + \mathbf{w}\  \leq \ \mathbf{v}\  + \ \mathbf{w}\ </math></p> <p>(iv) <b>(Cauchy-Schwarz-Ungleichung):</b>  <math>\dots</math></p>	<p>In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> gilt:</p> <p>(i) <math>\ \mathbf{v}\  \geq 0</math> für alle <math>\mathbf{v} \in V</math>  <math>\ \mathbf{v}\  = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}</math></p> <p>(ii) <math>\ s \cdot \mathbf{v}\  =  s  \ \mathbf{v}\ </math></p> <p>(iii) <b>Dreiecksungleichung:</b>  <math>\ \mathbf{v} + \mathbf{w}\  \leq \ \mathbf{v}\  + \ \mathbf{w}\ </math></p> <p>(iv) <b>Cauchy-Schwarz-Ungleichung:</b>  <math> \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle  \leq \ \mathbf{v}\  \cdot \ \mathbf{w}\ </math></p> <p>→ Satz 10.18</p>
<p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.  <math>\mathbf{v} \in V</math> heißt <b>normiert</b>, falls <math>\dots</math></p>	<p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.  <math>\mathbf{v} \in V</math> heißt <b>normiert</b>, falls <math>\ \mathbf{v}\  = 1</math></p> <p>→ Def. 10.20</p>



<p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.  <math>\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V</math> sind zueinander <b>orthogonal</b>, falls ...</p>	<p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.  <math>\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V</math> sind zueinander <b>orthogonal</b>, falls <math>\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0</math>  [Notation: <math>\mathbf{v} \perp \mathbf{w}</math>]</p> <p>→ Def. 10.20</p>
<p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.  Eine Basis <math>B</math> von <math>V</math> heißt <b>Orthonormalbasis</b> von <math>V</math>, falls ...</p>	<p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.  Eine Basis <math>B = (\mathbf{b}_i)_i</math> von <math>V</math> heißt <b>Orthonormalbasis</b> von <math>V</math>, falls</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• jedes <math>\mathbf{b}_i \in B</math> normiert ist, und</li> <li>• jeweils <math>\mathbf{b}_i \perp \mathbf{b}_j</math> für <math>i \neq j</math></li> </ul> <p>→ Def. 10.20</p>
<p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> euklidisch oder unitär. Das <b>orthogonale Komplement</b> eines Untervektorraums <math>W \subseteq V</math> ist</p> $W^\perp :=$	<p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> euklidisch oder unitär. Das <b>orthogonale Komplement</b> eines Untervektorraums <math>W \subseteq V</math> ist</p> $W^\perp := \{ \mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \text{ für alle } \mathbf{w} \in W \}$ <p>→ Def. 10.23</p>
<p>Ein <b>affiner Unterraum</b> eines Vektorraums <math>V</math> ist ...</p>	<p>Ein <b>affiner Unterraum</b> eines Vektorraums <math>V</math> ist eine Teilmenge der Form</p> $\mathbf{u}_0 + U = \{ \mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} - \mathbf{u}_0 \in U \}$ <p>für einen Untervektorraum <math>U \subseteq V</math>.</p>

Eine **affine Hyperebene** ist ...

Def  
LinA-II-10-Skalarprodukte  
bd8678f8-bdc1-11ec-9d64-0242ac120002

Eine **affine Hyperebene** ist ein affiner Unterraum, dessen zugehöriger Untervektorraum  $U$  die Dimension  $\dim U = \dim V - 1$  hat.

**Hessesche Normalform**

Jede affine Hyperrebene in einem euklidischen oder unitären VR hat die Form

$$H =$$

**Hessesche Normalform**

Jede affine Hyperrebene in einem euklidischen oder unitären VR hat die Form

$$H = \{ \mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = d \}$$

für einen normierten Vektor  $\mathbf{n}$  und ein  $d \in \mathbb{R}$  mit  $d \geqslant 0$

→ Satz 10.25

Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

- 1. (Winkel zwischen Vektoren und ihrem Kreuzprodukt) ...
- 2.  $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

- 1.  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$  und  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
- 2.  $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

→ Satz 10.28

Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

- 1.  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$  und  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
- 2. (Norm des Kreuzprodukts) ...

Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

- 1.  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$  und  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
- 2.  $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

→ Satz 10.28

<p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> euklidischer oder unitärer Vektorraum.  Eine <b>Isometrie</b> ist eine lineare Abbildung <math>f: V \rightarrow V</math>,  für die gilt ...</p>	<p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> euklidischer oder unitärer Vektorraum.  Eine <b>Isometrie</b> ist eine lineare Abbildung <math>f: V \rightarrow V</math>,  für die gilt:</p> $\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$ <p>→ Def. 11.1</p>
<p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> euklidischer oder unitärer Vektorraum.  Eine <b>Isometrie</b> ist ... ,  für die gilt:</p> $\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$	<p>Sei <math>(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)</math> euklidischer oder unitärer Vektorraum.  Eine <b>Isometrie</b> ist eine lineare Abbildung <math>f: V \rightarrow V</math>,  für die gilt:</p> $\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$ <p>→ Def. 11.1</p>
<p>Alle Eigenwerte einer Isometrie ...</p> <p>Satz  LinA-II-11-Isometrien  21857eac-bf03-11ec-9d64-0242ac120002</p>	<p>Alle Eigenwerte einer Isometrie haben Betrag 1.</p> <p>→ Satz 10.2</p> <p>Satz  LinA-II-11-Isometrien  21857eac-bf03-11ec-9d64-0242ac120002</p>
<p>Eigenwerte einer Isometrie in einem euklidischen Vektorraum haben die Form</p> $a =$	<p>Eigenwerte einer Isometrie in einem euklidischen Vektorraum haben die Form</p> $a = \pm 1$ <p>→ Satz 10.2</p>

Eigenwerte einer Isometrie in einem unitären Vektorraum haben die Form

$$a =$$

Eigenwerte einer Isometrie in einem unitären Vektorraum haben die Form

$$a = x + iy \text{ mit } x^2 + y^2 = 1$$

→ Satz 10.2

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer Isometrie ...

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer Isometrie stehen senkrecht zueinander.

→ Satz 10.2

Satz  
LinA-II-11-Isometrien

21857eac-bf03-11ec-9d64-0242ac120002

Satz  
LinA-II-11-Isometrien

21857eac-bf03-11ec-9d64-0242ac120002

Sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V = K^n$  versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.  
Für  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$  sind äquivalent:

- (i) ...
- (ii)  $A$  ist invertierbar und  $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) Die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .
- (iv) Die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .

Sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V = K^n$  versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.  
Für  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$  sind äquivalent:

- (i)  $f_A$  ist eine Isometrie auf  $V$ .
- (ii)  $A$  ist invertierbar und  $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) Die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .
- (iv) Die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .

→ Satz 11.3

Sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V = K^n$  versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.  
Für  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$  sind äquivalent:

- (i)  $f_A$  ist eine Isometrie auf  $V$ .
- (ii) ...
- (iii) Die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .
- (iv) Die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .

Sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V = K^n$  versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.  
Für  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$  sind äquivalent:

- (i)  $f_A$  ist eine Isometrie auf  $V$ .
- (ii)  $A$  ist invertierbar und  $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) Die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .
- (iv) Die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .

→ Satz 11.3

Sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V = K^n$  versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.  
 Für  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$  sind äquivalent:

- (i)  $f_A$  ist eine Isometrie auf  $V$ .
- (ii)  $A$  ist invertierbar und  $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) ...
- (iv) Die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .

Sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V = K^n$  versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.  
 Für  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$  sind äquivalent:

- (i)  $f_A$  ist eine Isometrie auf  $V$ .
- (ii)  $A$  ist invertierbar und  $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) Die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .
- (iv) Die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .

→ Satz 11.3

Sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V = K^n$  versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.  
 Für  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$  sind äquivalent:

- (i)  $f_A$  ist eine Isometrie auf  $V$ .
- (ii)  $A$  ist invertierbar und  $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) Die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .
- (iv) ...

Sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V = K^n$  versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.  
 Für  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$  sind äquivalent:

- (i)  $f_A$  ist eine Isometrie auf  $V$ .
- (ii)  $A$  ist invertierbar und  $A^{-1} = \overline{A}^T$
- (iii) Die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .
- (iv) Die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $V$ .

→ Satz 11.3

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper  $K$  ist definiert als

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(K) &:= \dots \\ &= (\{A \in \text{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot) \end{aligned}$$

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper  $K$  ist definiert als

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(K) &:= (\{A \in \text{Mat}_K(n \times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \text{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper  $K$  ist definiert als

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(K) &:= (\{A \in \text{Mat}_K(n \times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper  $K$  ist definiert als

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(K) &:= (\{A \in \text{Mat}_K(n \times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \text{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **spezielle lineare Gruppe** über einem Körper  $K$  ist definiert als

$$\mathrm{SL}_n(K) :=$$

Die **spezielle lineare Gruppe** über einem Körper  $K$  ist definiert als

$$\mathrm{SL}_n(K) := (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) = 1\}, \cdot)$$

→ Def/Satz 11.5

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &:= \dots \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **spezielle orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SO}(n) :=$$

Die **spezielle orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SO}(n) := \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

→ Def/Satz 11.5

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) &:= \dots \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **spezielle unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SU}(n) :=$$

Die **spezielle unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SU}(n) := \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

→ Def/Satz 11.5

Eine Isometrie auf  $\mathbb{R}^2$  ist ... oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

Eine Isometrie auf  $\mathbb{R}^2$  ist eine Rotation um  $\mathbf{0}$  oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

→ Lemma 11.6

Eine Isometrie auf  $\mathbb{R}^2$  ist eine Rotation um  $\mathbf{0}$  oder ...

Eine Isometrie auf  $\mathbb{R}^2$  ist eine Rotation um  $\mathbf{0}$  oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

→ Lemma 11.6

Die orthogonale Gruppe  $O(2)$  hat die Form

$$O(2) = \dots \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

Die orthogonale Gruppe  $O(2)$  hat die Form

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

→ Lemma 11.6

Die orthogonale Gruppe  $O(2)$  hat die Form

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \dots$$

Die orthogonale Gruppe  $O(2)$  hat die Form

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

→ Lemma 11.6

**Struktursatz für euklidische Isometrien**

Jede Isometrie eines ... euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k & \end{pmatrix}$$

mit  $A_i$  Rotationsmatrizen.

**Struktursatz für euklidische Isometrien**

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k & \end{pmatrix}$$

mit  $A_i$  Rotationsmatrizen.

→ satz 11.7



**Struktursatz für euklidische Isometrien**  
 Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat ...  
 eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & 0 \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -1 \\ & & & & & & A_1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit  $A_i$  Rotationsmatrizen.

**Struktursatz für euklidische Isometrien**  
 Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & 0 \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -1 \\ & & & & & & A_1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit  $A_i$  Rotationsmatrizen.

→ satz 11.7

**Struktursatz für euklidische Isometrien**  
 Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* eine darstellende Matrix der Form ...

**Struktursatz für euklidische Isometrien**  
 Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & 0 \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -1 \\ & & & & & & A_1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit  $A_i$  Rotationsmatrizen.

→ satz 11.7

Sei  $K$  eine Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus.  
 Ein Untervektorraum  $W \subseteq V$  heißt **f-stabil**, falls ...

Sei  $K$  eine Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus.  
 Ein Untervektorraum  $W \subseteq V$  heißt **f-stabil**, falls  $f(W) \subseteq W$ .

→ Satz 11.7

Jede Isometrie  $f$  eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums  $V \neq \{0\}$  besitzt ... (Untervektorraum)

Jede Isometrie  $f$  eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums  $V \neq \{0\}$  besitzt einen  $f$ -stabilen Untervektorraum der Dimension 1 oder 2.

→ Lemma 11.11

**Struktursatz für unitäre Isometrien**

Jede Isometrie eines ... unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit  $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$ .

**Struktursatz für unitäre Isometrien**

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit  $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$ .

→ Satz 11.12

**Struktursatz für unitäre Isometrien**

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird ... dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit  $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$ .

**Struktursatz für unitäre Isometrien**

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit  $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$ .

→ Satz 11.12

**Struktursatz für unitäre Isometrien**

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* dargestellt von ...

**Struktursatz für unitäre Isometrien**

Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten *Orthonormalbasis* dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit  $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$ .

→ Satz 11.12

Ein Endomorphismus  $f$  eines euklidischen oder unitären Vektorraums  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist *selbstadjungiert*, falls ...

Ein Endomorphismus  $f$  eines euklidischen oder unitären Vektorraums  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist *selbstadjungiert*, falls

$$\langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, f(\mathbf{w}) \rangle \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$$

→ Def. 12.1

Sei  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ ,  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Dann sind äquivalent:

- ...
- $A$  ist symmetrisch ( $A = A^T$ )  
bzw. hermitesch ( $A = \overline{A^T}$ )

Sei  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ ,  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Dann sind äquivalent:

- Die lineare Abbildung  $f_A : K^n \longrightarrow K^n$  ist *selbstadjungiert* bezüglich des Standardskalarprodukts auf  $K^n$ .
- $A$  ist symmetrisch ( $A = A^T$ )  
bzw. hermitesch ( $A = \overline{A^T}$ )

→ Notiz 12.2

Sei  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ ,  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Dann sind äquivalent:

- Die lineare Abbildung  $f_A : K^n \longrightarrow K^n$  ist *selbstadjungiert* bezüglich des Standardskalarprodukts auf  $K^n$ .
- ...

Sei  $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ ,  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Dann sind äquivalent:

- Die lineare Abbildung  $f_A : K^n \longrightarrow K^n$  ist *selbstadjungiert* bezüglich des Standardskalarprodukts auf  $K^n$ .
- $A$  ist symmetrisch ( $A = A^T$ )  
bzw. hermitesch ( $A = \overline{A^T}$ )

→ Notiz 12.2

Alle Eigenwerte eines *selbstadjungierten* Endomorphismus ...

Alle Eigenwerte eines *selbstadjungierten* Endomorphismus sind reell.

→ Satz 12.3

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten eines *selbstadjungierten* Endomorphismus ...

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten eines *selbstadjungierten* Endomorphismus stehen senkrecht zueinander.

→ Satz 12.3

### Spektralsatz

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.

Zu ...  $f$  auf  $V$   
existiert eine Orthonormalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ .

### Spektralsatz

#### (Hauptachsentransformation für selbstadj. Abb.)

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.

Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus  $f$  auf  $V$  existiert eine Orthonormalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ .

→ Satz 12.4

### Spektralsatz

#### (Hauptachsentransformation für selbstadj. Abb.)

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.

Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus  $f$  auf  $V$  existiert ...

### Spektralsatz

#### (Hauptachsentransformation für selbstadj. Abb.)

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.

Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus  $f$  auf  $V$  existiert eine Orthonormalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ .

→ Satz 12.4

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder ... Matrix  $A$  existiert eine Matrix  $S \in O(n)$  mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$  existiert eine Matrix  $S \in O(n)$  mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.5

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$  existiert eine Matrix ... mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$  existiert eine Matrix  $S \in O(n)$  mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.5

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix

$A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$  existiert eine Matrix  $S \in O(n)$  mit

...

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix

$A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$  existiert eine Matrix  $S \in O(n)$  mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.5

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder ... Matrix  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  existiert eine Matrix  $S \in U(n)$  mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **hermiteschen** Matrix  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  existiert eine Matrix  $S \in U(n)$  mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.5

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **hermiteschen** Matrix  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  existiert eine Matrix ... mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **hermiteschen** Matrix  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  existiert eine Matrix  $S \in U(n)$  mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.5

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **hermiteschen** Matrix  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  existiert eine Matrix  $S \in U(n)$  mit ...

### Hauptachsentransformation für Matrizen

Zu jeder **hermiteschen** Matrix  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$  existiert eine Matrix  $S \in U(n)$  mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.5

### Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform  $\beta$  auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existiert ...  $B$  mit

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

### Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform  $\beta$  auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existiert eine Orthonormalbasis  $B$ , in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.6

### Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform  $\beta$  auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existiert eine Orthonormalbasis  $B$ , in der gilt: ...

### Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform  $\beta$  auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existiert eine Orthonormalbasis  $B$ , in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.6

### Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform  $\beta$  auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existiert ... mit:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

### Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform  $\beta$  auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existiert eine Orthonormalbasis  $B$ , in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.6

### Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform  $\beta$  auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existiert eine Orthonormalbasis  $B$ , in der gilt: ...

### Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform  $\beta$  auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existiert eine Orthonormalbasis  $B$ , in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.6

Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und  $\beta$  eine Bilinearform auf  $V$ .

Die assoziierte **quadratische Abbildung** ist ...

Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und  $\beta$  eine Bilinearform auf  $V$ .

Die assoziierte **quadratische Abbildung** ist

$$q_\beta : V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} \mapsto \beta(\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

→ Def 12.7

Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und  $\beta$  eine Bilinearform auf  $V$ .

Die assoziierte **reelle affine Quadrik** ist ...

Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und  $\beta$  eine Bilinearform auf  $V$ .

Die assoziierte **reelle affine Quadrik** ist die Menge

$$Q_\beta := \{\mathbf{v} \in V \mid \beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1\}$$

→ Def 12.7

### Hauptachsentransformation für Quadriken

Jede reelle affine Quadrik in einem euklidischen Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  hat bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  von  $V$  die Form ...

### Hauptachsentransformation für Quadriken

Jede reelle affine Quadrik in einem **euklidischen** Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  hat bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  von  $V$  die Form

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{b}_i \in V \mid \sum a_i x_i^2 = 1 \right\}$$

für gewisse  $a_i \in \mathbb{R}$ .

→ Satz 12.8

### Trägheitssatz von Sylvester

Jede reelle symmetrische Matrix  $A$  ist kongruent zu einer Diagonalmatrix der Form ...

### Trägheitssatz von Sylvester

Jede reelle symmetrische Matrix  $A$  ist kongruent zu einer Diagonalmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Die Anzahl der +1-, -1- und 0-Einträge ist dabei durch  $A$  eindeutig bestimmt.

→ Satz 12.9

<p>Ein <b>Integritätsring</b> ist ein ... Ring <math>R</math>, in dem für alle <math>a, b \in R</math> gilt:</p> $ab = 0 \Rightarrow [a = 0 \text{ oder } b = 0]$	<p>Ein <b>Integritätsring</b> ist ein kommutativer Ring <math>R</math>, in dem für alle <math>a, b \in R</math> gilt:</p> $ab = 0 \Rightarrow [a = 0 \text{ oder } b = 0]$ <p>→ Def. 13.1</p>
<p>Ein <b>Integritätsring</b> ist ein kommutativer Ring <math>R</math>, in dem gilt: ...</p>	<p>Ein <b>Integritätsring</b> ist ein kommutativer Ring <math>R</math>, in dem für alle <math>a, b \in R</math> gilt:</p> $ab = 0 \Rightarrow [a = 0 \text{ oder } b = 0]$ <p>→ Def. 13.1</p>
<p>Für jeden Integritätsring <math>R</math> ist (Polynomring über <math>R</math>) ...</p>	<p>Für jeden Integritätsring <math>R</math> ist auch <math>R[X]</math> ein Integritätsring.</p> <p>→ Satz 13.2</p>
<p>Für jeden Integritätsring <math>R</math> gilt</p> $(R[X])^\times =$	<p>Für jeden Integritätsring <math>R</math> gilt</p> $(R[X])^\times = R^\times$ <p>→ Satz 13.2</p>



<p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.  <math>a</math> ist ein <b>Teiler</b> von <math>b</math> und <math>b</math> ist ein <b>Vielfaches</b> von <math>a</math> (<math>a b</math>) genau dann, wenn ...</p>	<p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.  <math>a</math> ist ein <b>Teiler</b> von <math>b</math> und <math>b</math> ist ein <b>Vielfaches</b> von <math>a</math> (<math>a b</math>) genau dann, wenn</p> $\exists c \in R: b = c \cdot a$ <p>→ Def. 13.4</p>
<p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.  <math>a</math> und <math>b</math> sind <b>assoziert</b> (<math>a \sim b</math>) genau dann, wenn ...</p>	<p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.  <math>a</math> und <math>b</math> sind <b>assoziert</b> (<math>a \sim b</math>) genau dann, wenn</p> $\exists c \in R^\times: b = c \cdot a$ <p>→ Def. 13.4</p>
<p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.  <math>c</math> ist ein <b>größter gemeinsamer Teiler</b> von <math>a</math> und <math>b</math> (<math>c \sim \text{ggT}(a, b)</math>) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>...</li> </ul> <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\forall c' \in R: (c' a) \text{ und } (c' b) \Rightarrow c' c</math></li> </ul>	<p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.  <math>c</math> ist ein <b>größter gemeinsamer Teiler</b> von <math>a</math> und <math>b</math> (<math>c \sim \text{ggT}(a, b)</math>) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>c a</math> und <math>c b</math></li> </ul> <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\forall c' \in R: (c' a) \text{ und } (c' b) \Rightarrow c' c</math></li> </ul> <p>→ Def. 13.7</p>
<p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.  <math>c</math> ist ein <b>größter gemeinsamer Teiler</b> von <math>a</math> und <math>b</math> (<math>c \sim \text{ggT}(a, b)</math>) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>c a</math> und <math>c b</math></li> </ul> <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>...</li> </ul>	<p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.  <math>c</math> ist ein <b>größter gemeinsamer Teiler</b> von <math>a</math> und <math>b</math> (<math>c \sim \text{ggT}(a, b)</math>) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>c a</math> und <math>c b</math></li> </ul> <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\forall c' \in R: (c' a) \text{ und } (c' b) \Rightarrow c' c</math></li> </ul> <p>→ Def. 13.7</p>

<p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.  <math>a</math> und <math>b</math> sind <b>teilerfremd</b>, falls ...</p>	<p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.  <math>a</math> und <math>b</math> sind <b>teilerfremd</b>, falls <math>1 \sim \text{ggT}(a, b)</math></p> <p>→ Def. 13.7</p>
<p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.  <math>c</math> ist ein <b>kleinstes gemeinsames Vielfaches</b> von <math>a</math> und <math>b</math> (<math>c \sim \text{kgV}(a, b)</math>) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>...</li> </ul> <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\forall c' \in R: (a c') \text{ und } (b c') \Rightarrow c c'</math></li> </ul>	<p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.  <math>c</math> ist ein <b>kleinstes gemeinsames Vielfaches</b> von <math>a</math> und <math>b</math> (<math>c \sim \text{kgV}(a, b)</math>) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>a c</math> und <math>b c</math></li> </ul> <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\forall c' \in R: (a c') \text{ und } (b c') \Rightarrow c c'</math></li> </ul> <p>→ Def. 13.7</p>
<p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.  <math>c</math> ist ein <b>kleinstes gemeinsames Vielfaches</b> von <math>a</math> und <math>b</math> (<math>c \sim \text{kgV}(a, b)</math>) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>a c</math> und <math>b c</math></li> </ul> <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>...</li> </ul>	<p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring und <math>a, b \in R</math>.  <math>c</math> ist ein <b>kleinstes gemeinsames Vielfaches</b> von <math>a</math> und <math>b</math> (<math>c \sim \text{kgV}(a, b)</math>) genau dann, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>a c</math> und <math>b c</math></li> </ul> <p>und</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\forall c' \in R: (a c') \text{ und } (b c') \Rightarrow c c'</math></li> </ul> <p>→ Def. 13.7</p>
<p>Ein Integritätsring <math>R</math> ist <b>euklidisch</b>, falls eine Abbildung</p> $\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ <p>mit folgender Eigenschaft existiert:  Für <math>a, b \in R</math> mit <math>b \neq 0</math> existieren <math>q, r</math> mit</p> $\dots$ <p>und</p> $r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(b)$	<p>Ein Integritätsring <math>R</math> ist <b>euklidisch</b>, falls eine Abbildung</p> $\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ <p>mit folgender Eigenschaft existiert:  Für <math>a, b \in R</math> mit <math>b \neq 0</math> existieren <math>q, r</math> mit</p> $a = q \cdot b + r$ <p>und</p> $r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(b)$

<p>Ein Integritätsring <math>R</math> ist <b>euklidisch</b>, falls eine Abbildung</p> $\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ <p>mit folgender Eigenschaft existiert: Für <math>a, b \in R</math> mit <math>b \neq 0</math> existieren <math>q, r</math> mit</p> $a = q \cdot b + r$ <p>und</p> $\dots$	<p>Ein Integritätsring <math>R</math> ist <b>euklidisch</b>, falls eine Abbildung</p> $\delta : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ <p>mit folgender Eigenschaft existiert: Für <math>a, b \in R</math> mit <math>b \neq 0</math> existieren <math>q, r</math> mit</p> $a = q \cdot b + r$ <p>und</p> $r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(b)$ <p>→ Def. 13.9</p>
<p><b>Lemma von Bézout</b> In jedem euklidischen Ring gilt:</p> $c \sim \text{ggT}(a, b) \Rightarrow$	<p><b>Lemma von Bézout</b> In jedem euklidischen Ring gilt:</p> $c \sim \text{ggT}(a, b) \Rightarrow \exists x, y: c = xa + yb$ <p>→ Lemma 13.13</p>
<p>In jedem euklidischen Ring gilt:</p> $a, b \text{ teilerfremd} \Leftrightarrow$	<p>In jedem euklidischen Ring gilt:</p> $a, b \text{ teilerfremd} \Leftrightarrow \exists x, y: 1 = x \cdot a + y \cdot b$ <p>→ Korollar 13.14</p>
<p>In jedem euklidischen Ring gilt:</p> $\Leftrightarrow \exists x, y: 1 = x \cdot a + y \cdot b$	<p>In jedem euklidischen Ring gilt:</p> $a, b \text{ teilerfremd} \Leftrightarrow \exists x, y: 1 = x \cdot a + y \cdot b$ <p>→ Korollar 13.14</p>

<p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring.  Ein Element <math>p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})</math> ist <b>irreduzibel</b>, falls  ...</p>	<p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring.  Ein Element <math>p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})</math> ist <b>irreduzibel</b>, falls  für <math>a, b \in R</math> gilt:</p> $p = a \cdot b \Rightarrow (a \in R^\times \text{ oder } b \in R^\times)$ <p>→ Def. 13.15</p>
<p>Def  LinA-II-13-Euklidische-Ringe</p> <p>1a1b1607-0506-4438-b2a4-e0f89c3a2089</p>	
<p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring.  Ein Element <math>p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})</math> ist <b>prim</b>, falls ...</p>	<p>Sei <math>R</math> ein Integritätsring.  Ein Element <math>p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})</math> ist <b>prim</b>, falls für  <math>a, b \in R</math> gilt:</p> $p ab \Rightarrow p b \text{ oder } p a$ <p>→ Def. 13.15</p>
<p>Def  LinA-II-13-Euklidische-Ringe</p> <p>1a1b1607-0506-4438-b2a4-e0f89c3a2089</p>	
<p>In einem Integritätsring <math>R</math> gilt: (Zusammenhang prim  und irreduzibel) ...</p>	<p>In einem Integritätsring <math>R</math> gilt:</p> $p \in R \text{ prim} \Rightarrow p \text{ irreduzibel}$ <p>→ Satz 13.16</p>
<p>Satz  LinA-II-13-Euklidische-Ringe</p> <p>53b1954d-e3f5-4cd5-aa5c-d8266a638202</p>	
<p>In einem euklidischen Ring <math>R</math> gilt: (Zusammenhang  prim und irreduzibel)</p>	<p>... In einem euklidischen Ring <math>R</math> gilt:</p> $p \in R \text{ prim} \Leftrightarrow p \text{ irreduzibel}$ <p>→ Satz 13.16</p>
<p>Satz  LinA-II-13-Euklidische-Ringe</p> <p>53b1954d-e3f5-4cd5-aa5c-d8266a638202</p>	

<p>Eine <b>Primfaktorzerlegung</b> von <math>a \in R</math> ist ...</p> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-13-Euklidische-Ringe</div> <div>e5c8519c-02d7-4561-8a22-6aba87daa2b3</div> </div>	<p>Eine <b>Primfaktorzerlegung</b> von <math>a \in R</math> ist eine Darstellung von <math>a</math> als Produkt</p> $a = p_1 p_2 \cdots p_r$ <p>mit <math>r \in \mathbb{N}</math> und <math>p_i \in R</math> prim.</p> <div> <div></div> <div></div> <div>→ Def. 13.19</div> </div>
<p>Ein Integritätsring <math>R</math> heißt <b>faktoriell</b>, wenn ...</p> <div> <div>Def</div> <div>LinA-II-13-Euklidische-Ringe</div> <div>e5c8519c-02d7-4561-8a22-6aba87daa2b3</div> </div>	<p>Ein Integritätsring <math>R</math> heißt <b>faktoriell</b>, wenn jedes <math>a \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})</math> eine Primfaktorzerlegung besitzt.</p> <div> <div></div> <div></div> <div>→ Def. 13.19</div> </div>
<p>Falls eine <i>Primfaktorzerlegung</i> von <math>a \in R</math> existiert, so ist diese ...</p> <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-13-Euklidische-Ringe</div> <div>89327ded-c7e4-49f1-a10f-9199de4016be</div> </div>	<p>Falls eine <i>Primfaktorzerlegung</i> von <math>a \in R</math> existiert, so ist diese <i>eindeutig</i> bis auf Reihenfolge der Faktoren und Assoziiertheit.</p> <div> <div></div> <div></div> <div>→ Satz 13.20</div> </div>
<p>Für jeden Körper <math>K</math> ist ... faktoriell.</p> <div> <div>Satz</div> <div>LinA-II-13-Euklidische-Ringe</div> <div>8a2baefd-95e9-4ac4-91d6-96ab9a9a7d0c</div> </div>	<p>Für jeden Körper <math>K</math> ist <math>K[X]</math> faktoriell.</p> <div> <div></div> <div></div> <div>→ Satz 13.22</div> </div>

Das **Minimalpolynom** von  $f$  ist das eindeutige Polynom  $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$  für das gilt:

- (1) ...
- (2) Unter allen Polynomen  $\neq 0$ , die (1) erfüllen, hat  $\mu_f$  minimalen Grad.
- (3)  $\mu_f$  ist normiert (d.h. Leitkoeffizient = 1)

Das **Minimalpolynom** von  $f$  ist das eindeutige Polynom  $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$  für das gilt:

- (1)  $\mu_f(f) = 0$  (Nullabbildung in  $\text{End}_K(V)$ )
- (2) Unter allen Polynomen  $\neq 0$ , die (1) erfüllen, hat  $\mu_f$  minimalen Grad.
- (3)  $\mu_f$  ist normiert (d.h. Leitkoeffizient = 1)

→ Def. 14.4

Das **Minimalpolynom** von  $f$  ist das eindeutige Polynom  $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$  für das gilt:

- (1)  $\mu_f(f) = 0$  (Nullabbildung in  $\text{End}_K(V)$ )
- (2) ...
- (3)  $\mu_f$  ist normiert (d.h. Leitkoeffizient = 1)

Das **Minimalpolynom** von  $f$  ist das eindeutige Polynom  $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$  für das gilt:

- (1)  $\mu_f(f) = 0$  (Nullabbildung in  $\text{End}_K(V)$ )
- (2) Unter allen Polynomen  $\neq 0$ , die (1) erfüllen, hat  $\mu_f$  minimalen Grad.
- (3)  $\mu_f$  ist normiert (d.h. Leitkoeffizient = 1)

→ Def. 14.4

Das **Minimalpolynom** von  $f$  ist das eindeutige Polynom  $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$  für das gilt:

- (1)  $\mu_f(f) = 0$  (Nullabbildung in  $\text{End}_K(V)$ )
- (2) Unter allen Polynomen  $\neq 0$ , die (1) erfüllen, hat  $\mu_f$  minimalen Grad.
- (3) ...

Das **Minimalpolynom** von  $f$  ist das eindeutige Polynom  $\mu_f \in K[X] \setminus \{0\}$  für das gilt:

- (1)  $\mu_f(f) = 0$  (Nullabbildung in  $\text{End}_K(V)$ )
- (2) Unter allen Polynomen  $\neq 0$ , die (1) erfüllen, hat  $\mu_f$  minimalen Grad.
- (3)  $\mu_f$  ist normiert (d.h. Leitkoeffizient = 1)

→ Def. 14.4

**Satz von Caley-Hamilton**

Für das charakteristische Polynom eines Endomorphismus  $f$  gilt ...

**Satz von Caley-Hamilton**

Für das charakteristische Polynom eines Endomorphismus  $f$  gilt

$$\chi_f(f) = 0$$

→ Satz 14.7

Satz von Caley-Hamilton im zyklischen Fall

Ist  $W \subseteq V$   $f$ -zyklisch, so ist

...

das Minimalpolynom für  $f|_W$ .

Satz  
LinA-II-14-Minimalpolynom  
b684bb58-b59c-4e97-953f-6d32f2a58dcf

Satz von Caley-Hamilton im zyklischen Fall

Ist  $W \subseteq V$   $f$ -zyklisch, so ist

$$(-1)^{\dim W} \chi_{f|_W}$$

das Minimalpolynom für  $f|_W$ .

→ Satz 14.13

Ein Untervektorraum  $W \subseteq V$  ist **f-zyklisch**, falls ...

Ein Untervektorraum  $W \subseteq V$  ist **f-zyklisch**, falls

$$W = \langle \mathbf{w}, f(\mathbf{w}), f^2(\mathbf{w}), \dots \rangle \text{ für ein } \mathbf{w} \in V$$

→ Def. 14.8

Def  
LinA-II-14-Minimalpolynom  
6088f132-4411-44e9-aa19-9c0cfa13ab91

Ist  $W$  ein *f-zyklischer* Untervektorraum der Dimension  $d$ , so ist (Basis) ...

Ist  $W$  ein *f-zyklischer* Untervektorraum der Dimension  $d$ , so ist  $(\mathbf{w}, f(\mathbf{w}), f^2(\mathbf{w}), \dots, f^{d-1}(\mathbf{w}))$  eine Basis von  $W$ .

→ Lemma 14.10

Satz  
LinA-II-14-Minimalpolynom  
31141f5d-f74d-45d8-bd71-4577c54a1e2c

Die **Begleitmatrix** zu einem normierten Polynom  $A = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$  ist die Matrix ...

Die **Begleitmatrix** zu einem normierten Polynom  $A = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$  ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & -a_{d-2} \\ 0 & & & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

→ Def 14.11

Def  
LinA-II-14-Minimalpolynom  
2e432a06-1654-4799-8785-7f9fe0a985e8

Sei  $f$  ein  $V$ -Endomorphismus.  
Ein Untervektorraum  $W \subseteq V$  ist genau dann ... ,  
wenn er  $f$ -stabil ist und eine Basis besitzt, in der  $f|_W$   
durch eine Begleitmatrix gegeben ist.

Sei  $f$  ein  $V$ -Endomorphismus.  
Ein Untervektorraum  $W \subseteq V$  ist genau dann  $f$ -zyklisch,  
wenn er  $f$ -stabil ist und eine Basis besitzt, in der  $f|_W$   
durch eine Begleitmatrix gegeben ist.

Sei  $f$  ein  $V$ -Endomorphismus.  
Ein Untervektorraum  $W \subseteq V$  ist genau dann  $f$ -zyklisch,  
wenn ...

Sei  $f$  ein  $V$ -Endomorphismus.  
Ein Untervektorraum  $W \subseteq V$  ist genau dann  $f$ -zyklisch,  
wenn er  $f$ -stabil ist und eine Basis besitzt, in der  $f|_W$   
durch eine Begleitmatrix gegeben ist.

**Spaltungssatz**  
Sei  $f$  ein Endomorphismus auf einem Vektorraum  $V$ .  
Ist  $\mu_f = P \cdot Q$  für zwei teilerfremde normierte Poly-  
nome  $P$  und  $Q$ , so ist

$$V =$$

**Spaltungssatz**  
Sei  $f$  ein Endomorphismus auf einem Vektorraum  $V$ .  
Ist  $\mu_f = P \cdot Q$  für zwei teilerfremde normierte Poly-  
nome  $P$  und  $Q$ , so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei  $f$ -stabile Untervektorräume  $W_P$  und  $W_Q$ .

**Spaltungssatz**  
Sei  $f$  ein Endomorphismus auf einem Vektorraum  $V$ .  
Ist  $\mu_f = P \cdot Q$  für zwei teilerfremde normierte Poly-  
nome  $P$  und  $Q$ , so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei  $f$ -stabile Untervektorräume  $W_P$  und  $W_Q$ , für  
die gilt:

$W_P =$

und  $\mu_f|_{W_P} = P$

$W_Q =$

und  $\mu_f|_{W_Q} = Q$

**Spaltungssatz**  
Sei  $f$  ein Endomorphismus auf einem Vektorraum  $V$ .  
Ist  $\mu_f = P \cdot Q$  für zwei teilerfremde normierte Poly-  
nome  $P$  und  $Q$ , so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei  $f$ -stabile Untervektorräume  $W_P$  und  $W_Q$ , für  
die gilt:

$$W_P = \ker(P(f)) = \operatorname{im}(Q(f)) \text{ und } \mu_f|_{W_P} = P$$

$$W_Q = \ker(Q(f)) = \operatorname{im}(P(f)) \text{ und } \mu_f|_{W_Q} = Q$$



**Spaltungssatz**

Sei  $f$  ein Endomorphismus auf einem Vektorraum  $V$ .  
Ist  $\mu_f = P \cdot Q$  für zwei teilerfremde normierte Polynome  $P$  und  $Q$ , so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei  $f$ -stabile Untervektorräume  $W_P$  und  $W_Q$ , für die gilt:

$$W_P = \ker(P(f)) = \operatorname{im}(Q(f)) \text{ und } \dots$$

$$W_Q = \ker(Q(f)) = \operatorname{im}(P(f)) \text{ und } \dots$$

**Spaltungssatz**

Sei  $f$  ein Endomorphismus auf einem Vektorraum  $V$ .  
Ist  $\mu_f = P \cdot Q$  für zwei teilerfremde normierte Polynome  $P$  und  $Q$ , so ist

$$V = W_P \oplus W_Q$$

für zwei  $f$ -stabile Untervektorräume  $W_P$  und  $W_Q$ , für die gilt:

$$W_P = \ker(P(f)) = \operatorname{im}(Q(f)) \text{ und } \mu_f|_{W_P} = P$$

$$W_Q = \ker(Q(f)) = \operatorname{im}(P(f)) \text{ und } \mu_f|_{W_Q} = Q$$

→ Satz 14.17