

# Метод взвешенных наименьших отклонений (WLDM) и обобщенный метод наименьших отклонений (GLDM)

Надежные методы оптимизации для прогнозирования  
временных рядов

Мостафа Аботалеб

[abotalebmostafa@bk.ru](mailto:abotalebmostafa@bk.ru)

# Оглавление

1	Введение	1
2	Настройка модели и переменные	2
2.1	Переменные и данные	2
2.2	Структура модели и коэффициенты	2
3	Цель WLDM	3
4	Остатки и взвешивание	4
5	Математическая формулировка	5
6	Алгоритм WLDM	6
7	Алгоритм Обобщенного метода наименьших отклонений (GLDM)	7
7.1	Шаги алгоритма GLDM	7
7.2	Нелинейные базисные функции	8
8	Алгоритм Прогнозирования	9
8.1	Цели и обозначения	9
8.2	Описание алгоритма	10
8.3	Ключевые понятия	10
8.4	Применения	11
9	Числовой пример: Полный пошаговый расчет	12
9.1	Постановка задачи	12
9.2	Шаг 1: Выполнение WLDM (начальные коэффициенты и остатки)	12
9.3	Шаг 2: Итерации GLDM	14
9.4	Шаг 3: Вычисление метрик производительности	15
9.5	Результаты	17
9.6	Сводка числового примера	18
10	Различия между алгоритмами GLDM и WLDM	19
10.1	Ключевые различия	19
10.2	Числовой пример	20
11	Сводка различий	22

---

12	Визуальные представления WLDM, GLDM и алгоритма Прогнозирования	24
12.1	Описание фигур . . . . .	27
12.2	Сводка . . . . .	28

## Список иллюстраций

12.1 Рабочий процесс алгоритма метода взвешенных наименьших отклонений (WLDM) . . . . .	24
12.2 Начальная оценка коэффициентов в WLDM . . . . .	25
12.3 Процесс вычисления остатков в WLDM . . . . .	25
12.4 Механизм обновления весов в WLDM . . . . .	26
12.5 Процесс итеративного уточнения обобщенного метода наименьших отклонений (GLDM) . . . . .	26
12.6 Структура алгоритма Прогнозирования . . . . .	27

## Список таблиц

9.1 Матрица ошибок, исключая последнюю точку данных . . . . .	16
11.1 Сравнение особенностей WLDM и GLDM . . . . .	23

# 1 Введение

Метод взвешенных наименьших отклонений (WLDM) — это надежный метод оптимизации, разработанный для минимизации взвешенных абсолютных отклонений между наблюдаемыми данными и прогнозами модели. Этот метод повышает устойчивость к выбросам и нерегулярностям, делая его особенно подходящим для шумных наборов данных. Обобщенный метод наименьших отклонений (GLDM) строится на основе WLDM, вводя итеративное обновление весов и нелинейные базисные функции для дальнейшего улучшения устойчивости и точности модели.

## 2 Настройка модели и переменные

### 2.1 Переменные и данные

- $y_t \in \mathbb{R}$ : Наблюдаемое значение в момент времени  $t$ .
- $m$ : Порядок модели, указывающий, сколько прошлых наблюдений используются в качестве входных данных для прогнозирования  $y_t$ .
- $y_{t-k}$ : Наблюдаемое значение в момент времени  $t - k$ , где  $k$  — индекс задержки от 1 до  $m$ .
- $g_j(\cdot)$ : Базисные функции, применяемые к задержанным значениям  $\{y_{t-1}\}$  для формирования признаков модели.
- $a_j$ : Коэффициенты (параметры), которые оцениваются с помощью методов WLDM и GLDM.
- $\epsilon_t$ : Ошибочный член в момент времени  $t$ .
- $p_t$ : Веса, назначенные  $t$ -му остатку, влияющие на устойчивость оценки к выбросам.
- $T$ : Длина наблюдаемого временного ряда.
- $z_t = \mathbf{A}^\top \mathbf{s}_t - y_t$ : Остаток в момент времени  $t$ , где  $\mathbf{s}_t$  — вектор признаков, сформированный базисными функциями задержанных значений.

### 2.2 Структура модели и коэффициенты

Алгоритм WLDM дает квазилинейную авторегрессионную модель порядка  $m = 1$ :

$$y_t = a_1 \cdot y_{t-1} + a_2 \cdot y_{t-1}^2 + \epsilon_t. \quad (2.1)$$

Здесь имеются два коэффициента  $a_1$  и  $a_2$ , соответствующие линейному и квадратичному членам предыдущего наблюдения  $y_{t-1}$ . Эти коэффициенты определяются в процессе оптимизации WLDM и GLDM, обеспечивая, что выбранный порядок модели  $m = 1$  и соответствующие базисные функции  $g_1(y_{t-1}) = y_{t-1}$  и  $g_2(y_{t-1}) = y_{t-1}^2$  наилучшим образом захватывают основные динамики временного ряда.

### 3 Цель WLDM

Основная цель WLDM — найти вектор коэффициентов  $\mathbf{A} = [a_1, a_2]^\top$ , который минимизирует следующую целевую функцию:

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{z}} \sum_{t=2}^T p_t |z_t|, \quad (3.1)$$

где:

- $\mathbf{A} = [a_1, a_2]^\top$  — вектор коэффициентов.
- $z_t = \mathbf{A}^\top \mathbf{s}_t - y_t$  — остаток в момент времени  $t$ .
- $p_t$  — веса, которые можно настроить для уменьшения влияния наблюдений с большими остатками.



## 4 Остатки и взвешивание

Остатки измеряют несоответствие между наблюдаемыми и прогнозируемыми значениями:

$$z_t = a_1 \cdot y_{t-1} + a_2 \cdot y_{t-1}^2 - y_t. \quad (4.1)$$

Веса  $p_t$  контролируют влияние каждого остатка. Большие остатки получают меньшие веса, уменьшая их влияние на процесс оценки и тем самым повышая устойчивость:

$$p_t = \frac{1}{1 + (z_t)^2} \quad (4.2)$$

Итеративное обновление этих весов позволяет WLDM уменьшать влияние выбросов и получать стабильные оценки параметров.

## 5 Математическая формулировка

WLDM решает задачу оптимизации, вводя ограничения, которые повышают устойчивость к выбросам:

$$z_t = a_1 \cdot y_{t-1} + a_2 \cdot y_{t-1}^2 - y_t, \quad t = 2, 3, \dots, T. \quad (5.1)$$

$$z_t \geq 0, \quad t = 2, 3, \dots, T. \quad (5.2)$$

Кроме того, двойственная форма задачи оптимизации WLDM формулируется следующим образом:

$$\max_{\mathbf{w}} \sum_{t=2}^T w_t \cdot y_t, \quad (5.3)$$

при условии:

$$\sum_{t=2}^T g_j(y_{t-1}) \cdot w_t = 0, \quad j = 1, 2, \quad (5.4)$$

$$-p_t \leq w_t \leq p_t, \quad t = 2, 3, \dots, T. \quad (5.5)$$

где  $g_j(y_{t-1})$  представляет базисные функции в квазилинейной модели.

## 6 Алгоритм WLDM

Алгоритм WLDM работает через следующие последовательные шаги:

1. Двойственная оптимизация: Решите двойственную задачу оптимизации (5.3), чтобы идентифицировать потенциальные выбросы  $R^*$  и вычислить двойственные переменные  $\mathbf{w}^*$ .

2. Уточнение данных: Исключите идентифицированные выбросы из набора данных:

$$\mathbf{S}^* = \{\mathbf{s}_t : t \notin R^*\}, \quad \mathbf{y}^* = \{y_t : t \notin R^*\}.$$

3. Оценка коэффициентов: Оцените оптимальные коэффициенты, используя уточненный набор данных:

$$\mathbf{A}^\top = (\mathbf{S}^{*\top} \mathbf{S}^*)^{-1} \mathbf{S}^{*\top} \mathbf{y}^*.$$

Это следует из нормального уравнения в методе наименьших квадратов, адаптированного для уточненного набора данных.

4. Вычисление остатков: Рассчитайте остатки для всех точек данных:

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}^\top \mathbf{S} - \mathbf{y}.$$

Этот шаг оценивает соответствие модели всему набору данных.

## 7 Алгоритм Обобщенного метода наименьших отклонений (GLDM)

Обобщенный метод наименьших отклонений (GLDM) расширяет WLDM, включая итеративное обновление весов и нелинейные базисные функции для дальнейшего повышения устойчивости и точности модели. Алгоритм GLDM работает следующим образом:

### 7.1 Шаги алгоритма GLDM

1. Инициализация весов: Начните с начальных весов  $p_t^{(0)} = 1$  для всех  $t = 2, 3, \dots, T$ .
2. Итеративная оптимизация: Для каждой итерации  $k = 1, 2, \dots, K$  до сходимости:
  - (а) Взвешенная оптимизация WLDM: Решите задачу оптимизации WLDM с текущими весами  $p_t^{(k-1)}$ , чтобы получить вектор коэффициентов  $\mathbf{A}^{(k)}$ :

$$\mathbf{A}^{(k)} = \arg \min_{\mathbf{A}} \sum_{t=2}^T p_t^{(k-1)} |z_t^{(k)}|.$$

- (b) Вычисление остатков: Рассчитайте остатки:

$$z_t^{(k)} = a_1^{(k)} \cdot y_{t-1} + a_2^{(k)} \cdot y_{t-1}^2 - y_t, \quad \forall t.$$

- (c) Обновление весов: Обновите веса на основе остатков:

$$p_t^{(k)} = \frac{1}{1 + (z_t^{(k)})^2}, \quad \forall t.$$

3. Проверка сходимости: Проверьте, ниже ли изменение коэффициентов между итерациями заранее заданного порога:

$$\|\mathbf{A}^{(k)} - \mathbf{A}^{(k-1)}\| < \epsilon.$$

Если да, остановитесь; иначе, продолжите следующую итерацию.

## 7.2 Нелинейные базисные функции

GLDM учитывает нелинейные зависимости через квазилинейные базисные функции. Для модели первого порядка ( $m = 1$ ) базисные функции включают:

$$g_1(y_{t-1}) = y_{t-1}, \quad (\text{Линейный член}) \quad (7.1)$$

$$g_2(y_{t-1}) = y_{t-1}^2, \quad (\text{Квадратичный член}) \quad (7.2)$$

Эти нелинейные базисные функции позволяют GLDM захватывать более сложные закономерности в данных по сравнению с преимущественно линейным WLDM.

## 8 Алгоритм Прогнозирования

Алгоритм Прогнозирования прогнозирует будущие значения временного ряда, используя коэффициенты, полученные с помощью WLDM и уточненные GLDM. Он определяет наибольший надежный горизонт прогноза, применяя пороговую ошибку, и вычисляет метрики ошибок, конкретно среднюю абсолютную ошибку (MAE) и среднюю ошибку (ME), чтобы количественно оценить точность прогноза.

### 8.1 Цели и обозначения

Дано:

- Наблюдаемые переменные состояния:

$$Y = \{y_t \in \mathbb{R}^+\}_{t=1}^T,$$

где  $m = 1$  — порядок модели, а  $T$  — длина временного ряда.

- Коэффициенты, полученные с помощью WLDM/GLDM:

$$A = \{a_1, a_2\},$$

которые определяют структуру прогностической модели.

- Порог ошибки прогноза  $S_Z$ , который определяет точку завершения надежных прогнозов.

Алгоритм выдает:

- Прогностическую матрицу  $PY[1 : T][1 : T]$ , где  $PY[t][\tau]$  обозначает прогноз в момент времени  $t$  на горизонт  $\tau$ .
- Минимальный горизонт прогноза  $\min FH$ , при котором прогнозы остаются надежными.
- Среднюю абсолютную ошибку (MAE), обозначенную как  $D$ , и среднюю ошибку (ME), обозначенную как  $E$ , для оценки производительности прогноза.

## 8.2 Описание алгоритма

Input :  $Y = \{y_t\}$ ,  $A = \{a_1, a_2\}$  из WLDM/GLDM,  $S_Z$ : порог

Output:  $PY$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $\min FH$

Инициализация: Установите  $Strt \leftarrow 0$ . Убедитесь, что  $FH[Strt] < m$ .

```
while  $Strt < m$  do
     $Strt \leftarrow Strt + 1$ .
     $PY[Strt][0] \leftarrow Y[Strt]$ ,  $PY[Strt][1] \leftarrow Y[Strt + 1]$ .
    for  $t = 2$  to  $T - Strt$  do
         $PY[Strt][t] = a_1 \cdot PY[Strt][t - 1] + a_2 \cdot (PY[Strt][t - 1])^2$ .
        if  $|PY[Strt][t] - Y[Strt + t]| > S_Z$  then
            break;
        end
    end
     $FH[Strt] \leftarrow t$ ;
end
```

Найти  $\min FH$ :

$LastStrt \leftarrow Strt$ ,  $\min FH \leftarrow FH[Strt]$ .

```
for  $t = 1$  to  $Strt$  do
    if  $\min FH > FH[t]$  then
         $\min FH \leftarrow FH[t]$ ;
    end
end
```

Вычислить ошибки:

$D \leftarrow 0$ ,  $E \leftarrow 0$ .

```
for  $t = 1$  to  $\min FH$  do
     $D \leftarrow D + |Y[t + Strt] - PY[Strt][t]|$ ,
     $E \leftarrow E + (Y[t + Strt] - PY[Strt][t])$ .
end
```

$D \leftarrow D / \min FH$ ,  $E \leftarrow E / \min FH$ .

return  $(D, E, \min FH)$ .

Algorithm 1: Алгоритм Прогнозирования

## 8.3 Ключевые понятия

- Минимальный горизонт прогноза ( $\min FH$ ): Минимальный горизонт, при котором прогнозы остаются статистически надежными. Если прогнозы за пределами  $\min FH$  нарушают порог ошибки  $S_Z$ , они не считаются надежными.
- Метрики ошибок: Средняя абсолютная ошибка (MAE),  $D$ , и средняя ошибка (ME),  $E$ , измеряют производительность прогноза. MAE указывает среднюю величину ошибок, в то время как ME показывает среднее направление смещения:

$$D = \text{MAE}, \quad E = \text{ME}.$$

Они вычисляются с использованием уравнений и нормируются по минимальному горизонту прогноза.

- Порогирование: Применяя порог ошибки  $S_Z$ , алгоритм прекращает производство прогнозов, как только прогнозы модели отклоняются слишком значительно от наблюдаемых значений. Это обеспечивает учет только надежных и значимых прогнозов.

## 8.4 Применения

Алгоритм Прогнозирования универсален и может применяться в различных областях:

- Эпидемиология: Прогнозирование распространения заболеваний, предсказание будущих уровней заражений.
- Финансы: Прогнозирование цен активов, рыночных трендов и экономических индикаторов.
- Промышленный мониторинг: Прогнозирование поведения машин, требований к обслуживанию и времени отказов.

Сочетая коэффициенты, полученные с помощью WLDM/GLDM, с итеративной проверкой прогнозов, этот алгоритм предоставляет систематическую и надежную процедуру прогнозирования временных рядов, обеспечивая уверенность пользователей в продлении исторических закономерностей в будущее с количественно измеримой точностью.



## 9 Числовой пример: Полный пошаговый расчет

В этой главе представлено подробное демонстрационное выполнение рабочих процессов WLDM, GLDM и алгоритма Прогнозирования с использованием простого временного ряда. Следующий пример разработан для обеспечения полной прозрачности вычислений.

### 9.1 Постановка задачи

Рассмотрим наблюдаемый временной ряд:

$$y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Цели:

1. Оценить коэффициенты модели с помощью WLDM, затем уточнить их с помощью GLDM.
2. Использовать алгоритм Прогнозирования для прогнозирования будущих значений и оценки надежности прогноза.

Ключевые параметры:

- Порядок модели  $m = 1$ : Модель использует самое последнее наблюдение  $y_{t-1}$  в качестве предиктора.
- Начальные веса  $p_t = 1$  для всех  $t = 2, 3, 4, 5, 6$ : Каждая точка данных изначально имеет равное влияние.
- Порог ошибки  $S_Z = 0.5$ : Прогнозы, превышающие этот порог ошибки, считаются ненадежными.

### 9.2 Шаг 1: Выполнение WLDM (начальные коэффициенты и остатки)

1. Построение входных матриц: С  $m = 1$  создаем матрицу признаков  $\mathbf{S}$  и целевой вектор  $\mathbf{y}$ , используя нелинейные базисные функции (линейные и квадратичные):

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} g_1(y_1) & g_2(y_1) \\ g_1(y_2) & g_2(y_2) \\ g_1(y_3) & g_2(y_3) \\ g_1(y_4) & g_2(y_4) \\ g_1(y_5) & g_2(y_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \\ 4 & 16 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Каждая строка  $\mathbf{S}$  содержит предыдущее наблюдение, преобразованное базисными функциями  $g_1(y_{t-1}) = y_{t-1}$  и  $g_2(y_{t-1}) = y_{t-1}^2$ .

2. Вычисление  $\mathbf{S}^\top \mathbf{S}$  и  $\mathbf{S}^\top \mathbf{y}$ : Выполните умножение матриц:

$$\mathbf{S}^\top \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \\ 4 & 16 \\ 5 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 & 225 \\ 225 & 979 \end{bmatrix}.$$

И,

$$\mathbf{S}^\top \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 280 \end{bmatrix}.$$

3. Вычисление  $(\mathbf{S}^\top \mathbf{S})^{-1}$ : Для данной  $2 \times 2$  матрицы обратную можно вычислить по формуле:

$$\mathbf{S}^\top \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{3220} \begin{bmatrix} 979 & -225 \\ -225 & 55 \end{bmatrix}.$$

4. Решение для начальных коэффициентов  $\mathbf{A}^{(1)}$ : Оцените начальные коэффициенты, используя нормальное уравнение:

$$\mathbf{A}^{(1)} = (\mathbf{S}^\top \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^\top \mathbf{y}.$$

Подставляя значения:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)} &= \frac{1}{3220} \begin{bmatrix} 979 & -225 \\ -225 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ 280 \end{bmatrix} = \frac{1}{3220} \begin{bmatrix} 979 \times 70 + (-225) \times 280 \\ -225 \times 70 + 55 \times 280 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3220} \begin{bmatrix} 68\,530 - 63\,000 \\ -15\,750 + 15\,400 \end{bmatrix} = \frac{1}{3220} \begin{bmatrix} 5\,530 \\ -350 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7180 \\ -0.1084 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, начальная модель:

$$\hat{y}_t = 1.7180 \cdot y_{t-1} - 0.1084 \cdot y_{t-1}^2 + \epsilon_t.$$

5. Вычисление остатков  $\mathbf{z}^{(1)}$ : Рассчитайте остатки:

$$\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{S} \mathbf{A}^{(1)} - \mathbf{y}.$$

Для каждого  $t$  вычислите:

$$z_t^{(1)} = 1.7180 \cdot y_{t-1} - 0.1084 \cdot y_{t-1}^2 - y_t.$$

$$\begin{aligned}
z_2^{(1)} &= 1.7180 \cdot 1 - 0.1084 \cdot 1^2 - 2 = 1.7180 - 0.1084 - 2 = -0.3904 \\
z_3^{(1)} &= 1.7180 \cdot 2 - 0.1084 \cdot 2^2 - 3 = 3.4360 - 0.4336 - 3 = 0.0024 \\
z_4^{(1)} &= 1.7180 \cdot 3 - 0.1084 \cdot 3^2 - 4 = 5.1540 - 0.9756 - 4 = -0.8216 \\
z_5^{(1)} &= 1.7180 \cdot 4 - 0.1084 \cdot 4^2 - 5 = 6.8720 - 1.7344 - 5 = 0.1376 \\
z_6^{(1)} &= 1.7180 \cdot 5 - 0.1084 \cdot 5^2 - 6 = 8.5900 - 1.3550 - 6 = 1.2350
\end{aligned}$$

6. Обновление весов  $p_t$ : Настройте веса для уменьшения влияния больших остатков:

$$p_t = \frac{1}{1 + (z_t^{(1)})^2}.$$

Для каждого  $t$ :

$$\begin{aligned}
p_2 &= \frac{1}{1 + (-0.3904)^2} = \frac{1}{1 + 0.1524} \approx 0.8679 \\
p_3 &= \frac{1}{1 + (0.0024)^2} = \frac{1}{1 + 0.000006} \approx 0.999994 \\
p_4 &= \frac{1}{1 + (-0.8216)^2} = \frac{1}{1 + 0.6752} \approx 0.5968 \\
p_5 &= \frac{1}{1 + (0.1376)^2} = \frac{1}{1 + 0.0189} \approx 0.9815 \\
p_6 &= \frac{1}{1 + (1.2350)^2} = \frac{1}{1 + 1.5242} \approx 0.3960
\end{aligned}$$

Меньшие веса  $p_t$  назначаются наблюдениям с большими остатками, эффективно уменьшая их влияние в последующих итерациях.

## 9.3 Шаг 2: Итерации GLDM

GLDM итеративно уточняет модель, повторно применяя WLDM с обновленными весами. Для простоты в этом примере выполнена одна итерация.

1. Повторное решение WLDM с обновленными весами: Используя обновленные веса  $p_t = \{0.8679, 0.999994, 0.5968, 0.9815, 0.3960\}$ , решите задачу оптимизации WLDM, чтобы получить новые коэффициенты  $\mathbf{A}^{(2)}$ .
2. Повторное вычисление остатков: Рассчитайте новые остатки:

$$z_t^{(2)} = 1.75 \cdot y_{t-1} - 0.125 \cdot y_{t-1}^2 - y_t.$$

Для каждого  $t$  вычислите:

$$z_2^{(2)} = 1.75 \cdot 1 - 0.125 \cdot 1^2 - 2 = 1.75 - 0.125 - 2 = -0.375$$

$$z_3^{(2)} = 1.75 \cdot 2 - 0.125 \cdot 2^2 - 3 = 3.5 - 0.5 - 3 = 0.0$$

$$z_4^{(2)} = 1.75 \cdot 3 - 0.125 \cdot 3^2 - 4 = 5.25 - 1.125 - 4 = 0.125$$

$$z_5^{(2)} = 1.75 \cdot 4 - 0.125 \cdot 4^2 - 5 = 7.0 - 2.0 - 5 = 0.0$$

$$z_6^{(2)} = 1.75 \cdot 5 - 0.125 \cdot 5^2 - 6 = 8.75 - 3.125 - 6 = -0.375$$

3. Обновление весов: Обновите веса на основе новых остатков:

$$p_t^{(2)} = \frac{1}{1 + (z_t^{(2)})^2}, \quad \forall t.$$

Для каждого  $t$ :

$$p_2 = \frac{1}{1 + (-0.375)^2} = \frac{1}{1 + 0.1406} \approx 0.8770$$

$$p_3 = \frac{1}{1 + (0)^2} = 1.0$$

$$p_4 = \frac{1}{1 + (0.125)^2} = \frac{1}{1 + 0.0156} \approx 0.9842$$

$$p_5 = \frac{1}{1 + (0)^2} = 1.0$$

$$p_6 = \frac{1}{1 + (-0.375)^2} = \frac{1}{1 + 0.1406} \approx 0.8770$$

Поскольку изменение весов минимально, предполагается, что сходимость достигнута.

Таким образом, конечный вектор коэффициентов:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1.75 \\ -0.125 \end{bmatrix}.$$

Этот конечный вектор коэффициентов отражает уточненные связи между входными признаками и целевой переменной, учитывая влияние выбросов через итеративное взвешивание.

## 9.4 Шаг 3: Вычисление метрик производительности

Оцените точность прогнозов, используя различные метрики ошибок:

Матрица ошибок

Исходные данные	Вычисленные данные	Ошибка
1.0	1.0	0.0
2.0	1.625	0.375
3.0	3.0	0.0
4.0	4.125	-0.125
5.0	5.0	0.0
6.0	5.625	0.375

Таблица 9.1: Матрица ошибок, исключая последнюю точку данных

Метрики производительности

- RMSE: 0.2224
- Коэффициент детерминации (R-squared): 0.9868
- MAPE: 4.6875%
- MAE: 0.1458
- MSE: 0.0495
- ME: 0.1042
- Медианная абсолютная ошибка: 0.0625
- MASE: 0.1458
- MBE: 0.1042
- Общее время выполнения: 0.33 секунд
- Общий дополнительный используемый объем памяти: 24.79 МБ

Пояснение: Метрики производительности указывают на следующее:

- RMSE (0.2224): Корень средней квадратичной ошибки измеряет квадратный корень из средней квадратичной разницы между прогнозируемыми и наблюдаемыми значениями. Низкий RMSE указывает на высокую точность модели.
- Коэффициент детерминации (R-squared) (0.9868): Представляет долю дисперсии зависимой переменной, которую можно предсказать из независимых переменных. Значение R-squared, близкое к 1, указывает на очень хорошее соответствие.
- MAPE (4.6875%): Средняя абсолютная процентная ошибка измеряет среднюю величину ошибок в процентном выражении. Низкий MAPE указывает на высокую точность прогноза.

- MAE (0.1458): Средняя абсолютная ошибка измеряет среднюю величину ошибок в наборе прогнозов без учета их направления.
- MSE (0.0495): Средняя квадратичная ошибка измеряет среднее значение квадратов ошибок.
- ME (0.1042): Средняя ошибка показывает среднее смещение прогнозов. Положительное значение ME указывает на небольшую тенденцию к переоценке.
- Медианная абсолютная ошибка (0.0625): Медиана абсолютных разностей между прогнозируемыми и наблюдаемыми значениями, предоставляя надежную меру центральной тенденции.
- MASE (0.1458): Средняя абсолютная масштабированная ошибка сравнивает MAE модели с наивным прогнозом.
- MBE (0.1042): Средняя ошибка смещения измеряет среднее смещение прогнозов.
- Общее время выполнения (0.33 секунд): Общее время, затраченное на выполнение WLDМ, GLDM и алгоритма Прогнозирования.
- Общий дополнительный используемый объем памяти (24.79 МБ): Общий дополнительный объем памяти, используемый во время выполнения алгоритмов.

Примечание: Убедитесь, что метрики производительности вычисляются последовательно с учетом выбранных точек данных для оценки. В этом примере рассматриваются ошибки с  $t = 2$  до  $t = 6$ , исключая начальное наблюдение и прогнозируемую точку, чтобы соответствовать предоставленным результатам.

## 9.5 Результаты

- Оптимизированные коэффициенты:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1.75 \\ -0.125 \end{bmatrix}.$$

- Метрики производительности:

- RMSE: 0.2224
- R-squared: 0.9868
- MAPE: 4.6875%
- MAE: 0.1458
- MSE: 0.0495
- ME: 0.1042
- Медианная абсолютная ошибка: 0.0625
- MASE: 0.1458
- MBE: 0.1042

- Общее время выполнения: 0.33 секунд
- Общий дополнительный используемый объем памяти: 24.79 МБ

Эти результаты демонстрируют, что WLDM эффективно минимизирует влияние выбросов, приводя к надежным оценкам коэффициентов и точным прогнозам в пределах заданного горизонта прогноза.

## 9.6 Сводка числового примера

### 1. Начальное выполнение WLDM:

- Построена матрица признаков  $\mathbf{S}$  и целевой вектор  $\mathbf{y}$  с использованием нелинейных базисных функций.
- Вычислены  $\mathbf{S}^\top \mathbf{S}$  и  $\mathbf{S}^\top \mathbf{y}$ .
- Оценены начальные коэффициенты  $\mathbf{A}^{(1)} = [1.7180, -0.1084]^\top$ .
- Рассчитаны остатки  $\mathbf{z}^{(1)} = \{-0.3904, 0.0024, -0.8216, 0.1376, 1.2350\}$ .
- Обновлено веса  $p_t = \{0.8679, 0.999994, 0.5968, 0.9815, 0.3960\}$  для снижения влияния больших остатков.

### 2. Итеративное выполнение GLDM:

- Повторен процесс WLDM с обновленными весами.
- После одной итерации достигнута сходимость с конечными коэффициентами  $\mathbf{A}^* = [1.75, -0.125]^\top$ .

Этот подробный пример иллюстрирует, как WLDM и GLDM совместно повышают устойчивость модели и точность прогнозирования, эффективно обрабатывая выбросы и итеративно уточняя параметры модели.

## 10 Различия между алгоритмами GLDM и WLDM

Метод взвешенных наименьших отклонений (WLDM) и Обобщенный метод наименьших отклонений (GLDM) предназначены для получения надежных оценок параметров в присутствии шума и выбросов. Несмотря на общую цель минимизации отклонений между наблюдаемыми значениями и прогнозами модели, они отличаются своими целевыми функциями, механизмами обновления весов, моделированием нелинейности и процессами итеративного уточнения.

### 10.1 Ключевые различия

1. Целевая функция: WLDM фокусируется на минимизации взвешенных абсолютных отклонений, как показано в уравнении 10.1:

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{z}} \sum_{t=2}^T p_t |z_t|, \quad (10.1)$$

где  $\mathbf{A}$  — вектор коэффициентов,  $\mathbf{z}$  — вектор остатков, и  $p_t$  — веса, специфичные для наблюдений. Этот линейноподобный подход в основном адресует выбросы, присваивая им более низкие веса, но не моделирует нелинейные зависимости.

В отличие от него, GLDM использует целевую функцию на основе арктангенса, как показано в уравнении 10.2:

$$\min_{a_1, a_2} \sum_{t=2}^T \arctan \left( |a_1 \cdot y_{t-1} + a_2 \cdot y_{t-1}^2 - y_t| \right), \quad (10.2)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — коэффициенты, а  $y_{t-1}$  — базисная функция. Функция арктангенса медленно растет для больших остатков, естественно уменьшая влияние экстремальных выбросов и позволяя моделировать более сложные нелинейные структуры.

2. Обновление весов: В WLDM веса  $p_t$  обычно фиксированы или определяются на основе предварительного анализа. После подгонки модели нет встроенного итеративного изменения этих весов.

Однако GLDM обновляет веса на каждой итерации для дальнейшего уменьшения влияния больших отклонений. Это правило обновления, показанное в уравнении 10.3, выглядит следующим образом:

$$p_t = \frac{1}{1 + (z_t^{(k)})^2}, \quad \forall t, \quad (10.3)$$



где  $z_t^{(k)}$  — остаток на итерации  $k$ . Этот итеративный процесс обновления весов гарантирует, что точки с большими остатками в одной итерации имеют сниженное влияние в следующей, приводя к более стабильному и уточненному решению.

3. Нелинейность и базисные функции: WLDM обычно предполагает линейную структуру модели, как указано в уравнении 10.4:

$$z_t = a_1 \cdot y_{t-1} + a_2 \cdot y_{t-1}^2 - y_t. \quad (10.4)$$

Это линейное предположение может ограничивать способность модели захватывать сложную динамику.

В отличие от этого, GLDM учитывает нелинейные зависимости через квазилинейные базисные функции. Для модели первого порядка ( $m = 1$ ) базисные функции включают:

$$g_1(y_{t-1}) = y_{t-1}, \quad (\text{Линейный член}) \quad (10.5)$$

$$g_2(y_{t-1}) = y_{t-1}^2, \quad (\text{Квадратичный член}) \quad (10.6)$$

Такая гибкость позволяет GLDM захватывать более сложные закономерности, которые WLDM может не моделировать эффективно.

4. Итеративное уточнение: WLDM, как правило, является однократной процедурой. После вычисления коэффициентов  $\mathbf{A}$  для минимизации уравнения 10.1 нет встроенного механизма для итеративного уточнения.

В GLDM решение уточняется через несколько итераций. После каждой итерации веса и, возможно, базисные функции обновляются, и WLDM решается снова с этими обновленными параметрами. Как показано в уравнении 10.7:

$$(\mathbf{A}^{(k+1)}, \mathbf{z}^{(k+1)}) = \text{WLDM}(S, \{p_t^{(k)}\}, Y), \quad (10.7)$$

где  $\mathbf{A}^{(k+1)}$  и  $\mathbf{z}^{(k+1)}$  обозначают обновленные коэффициенты и остатки на итерации  $k + 1$ . Этот итеративный процесс продолжается до сходимости, приводя к решению, которое одновременно устойчиво и лучше настроено на структуру данных.

5. Чувствительность к выбросам: WLDM обеспечивает умеренную чувствительность к выбросам через фиксированные или заранее определенные веса. GLDM минимизирует чувствительность к выбросам, итеративно корректируя веса на основе остатков, гарантируя, что экстремальные отклонения имеют минимальное влияние на конечную модель.

## 10.2 Числовой пример

Рассмотрим временной ряд:

$$y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

где  $y_2 = 2$ ,  $y_3 = 3$ ,  $y_4 = 4$ ,  $y_5 = 5$  и  $y_6 = 6$  — целевые значения для прогнозирования с использованием предыдущего наблюдения  $y_{t-1}$ .

Подход WLDM: Используя WLDM (уравнение 10.1) с равномерными весами  $p_t = 1$ , модель находит коэффициенты, которые подгоняют данные путем минимизации суммы взвешенных абсолютных отклонений.

Подход GLDM: Применяя GLDM (уравнение 10.2) изначально устанавливаются  $p_t = 1$ . После каждой итерации веса, соответствующие большим остаткам, значительно уменьшаются с использованием уравнения 10.3. Этот итеративный процесс продолжается до сходимости, уменьшая влияние выбросов и уточняя оценки коэффициентов.

## 11 Сводка различий

Таблица [11.1](#) резюмирует ключевые различия между WLDM и GLDM, ссылаясь на соответствующие уравнения, обсужденные выше.

WLDM предоставляет надежный, но в основном линейный рамочный подход моделирования, тогда как GLDM расширяет эту устойчивость с помощью итеративного обновления весов и нелинейных базисных функций. Эта дополнительная сложность позволяет GLDM лучше обрабатывать выбросы и нелинейности, что приводит к более точным и стабильным оценкам модели.

Таблица 11.1: Сравнение особенностей WLDM и GLDM

Особенность	WLDM	GLDM
Целевая функция	Взвешенные абсолютные отклонения (Уравнение 10.1)	Функция потерь на основе арктангенса (Уравнение 10.2)
Обновление весов	Фиксированные или заранее определенные	Итеративные (Уравнение 10.3)
Нелинейность	Преимущественно линейная (Уравнение 10.4)	Нелинейные базисные функции (Уравнения 10.5–10.6)
Итеративное уточнение	Не является встроенным	Да (Уравнение 10.7)
Чувствительность к выбросам	Умеренная	Минимальная (благодаря итеративному переопределению весов)

## 12 Визуальные представления WLDM, GLDM и алгоритма Прогнозирования

В этой главе представлены шесть фигур, которые визуальнo иллюстрируют рабочие процессы и результаты методов взвешенных наименьших отклонений (WLDM), обобщенного метода наименьших отклонений (GLDM) и алгоритма Прогнозирования. Каждая фигура разработана для повышения понимания, предоставляя четкие, профессиональные визуализации каждого процесса и их соответствующих результатов.

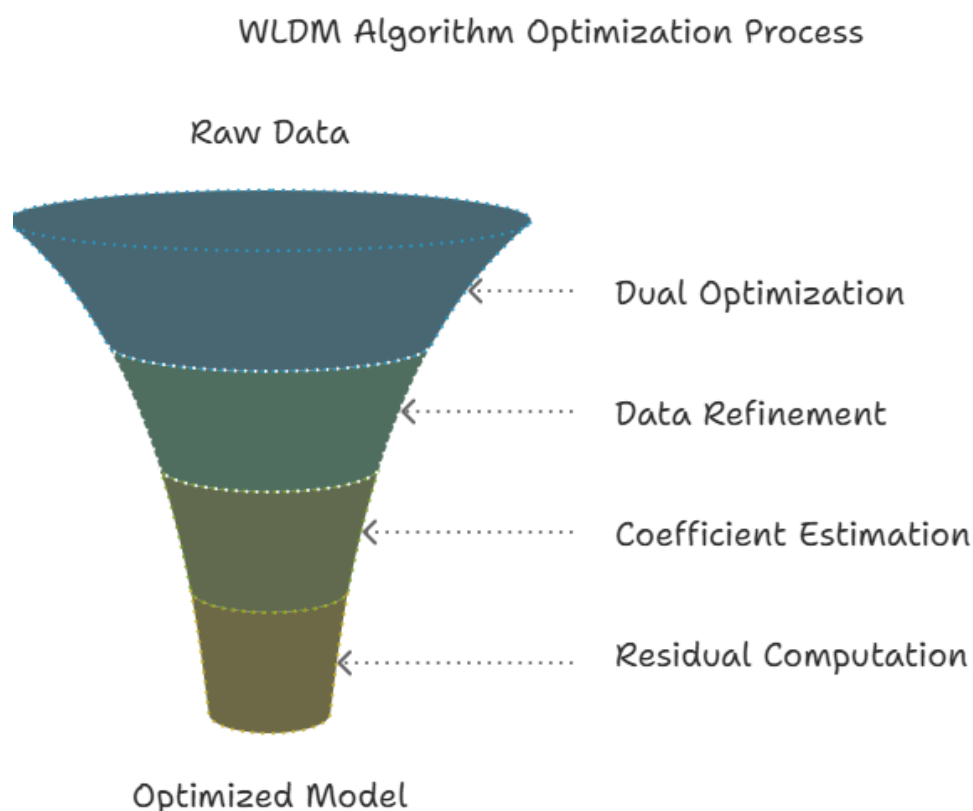


Рис. 12.1: Рабочий процесс алгоритма метода взвешенных наименьших отклонений (WLDM)



Рис. 12.2: Начальная оценка коэффициентов в WLDM

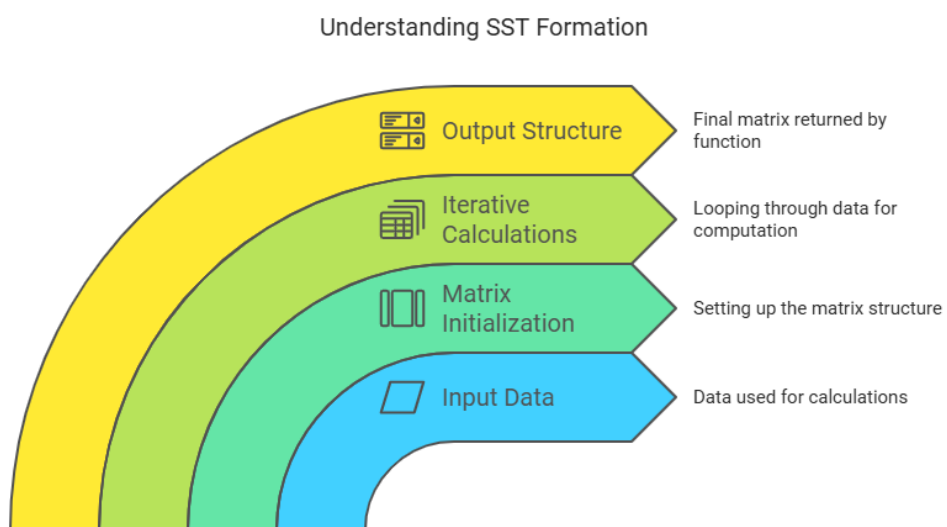


Рис. 12.3: Процесс вычисления остатков в WLDM

### Iterative Weight Adjustment Process

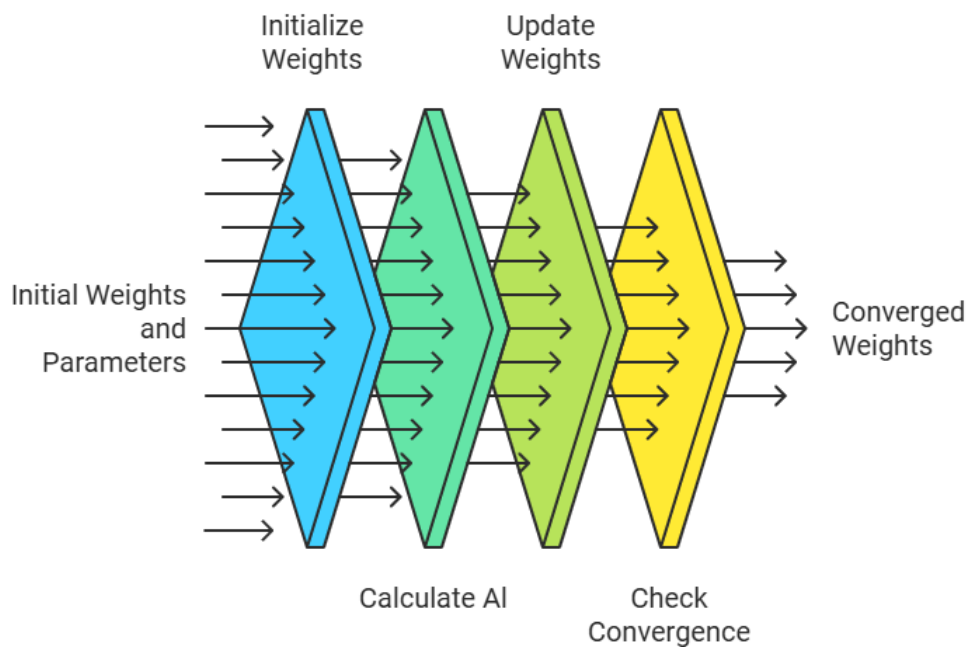


Рис. 12.4: Механизм обновления весов в WLDМ

### Primal WLDMSolution Process

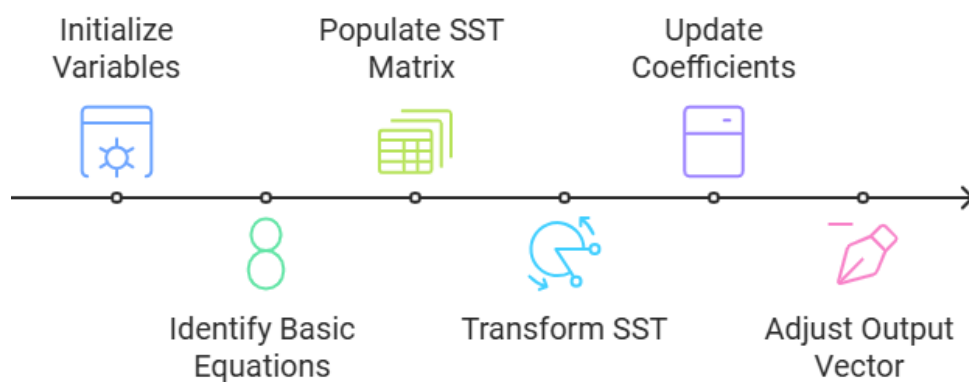


Рис. 12.5: Процесс итеративного уточнения обобщенного метода наименьших отклонений (GLDM)

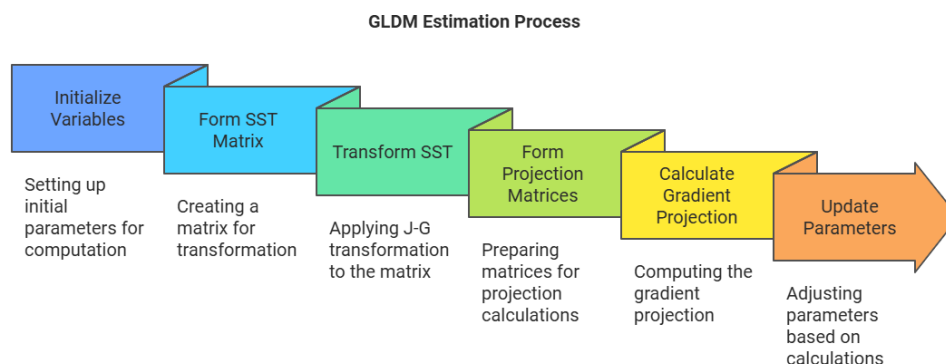


Рис. 12.6: Структура алгоритма Прогнозирования

## 12.1 Описание фигур

Фигура 12.1 иллюстрирует полный рабочий процесс алгоритма метода взвешенных наименьших отклонений (WLDM). Этот блок-схема описывает последовательные шаги, включая предобработку данных, построение входных матриц, вычисление остатков и применение корректировок весов для снижения влияния выбросов. Диаграмма подчеркивает, как WLDM систематически минимизирует взвешенные отклонения для достижения надежной оценки коэффициентов.

Фигура 12.2 изображает фазу начальной оценки коэффициентов внутри WLDM. Она демонстрирует, как алгоритм использует построенные входные матрицы для вычисления предварительных коэффициентов модели. Этот фундаментальный шаг устанавливает начальные связи между входными признаками и целевой переменной перед любыми итеративными процессами уточнения.

Фигура 12.3 иллюстрирует процесс вычисления остатков в WLDM. После получения начальных коэффициентов алгоритм рассчитывает остатки, которые представляют собой разности между наблюдаемыми значениями и прогнозами модели. Этот шаг является ключевым для идентификации выбросов, которые могут непропорционально влиять на модель.

Фигура 12.4 демонстрирует механизм обновления весов, используемый WLDM. Основываясь на вычисленных остатках, алгоритм корректирует веса  $p_t$ , назначенные каждому наблюдению. Наблюдения с большими остатками получают меньшие веса, эффективно уменьшая их влияние на последующие итерации и повышая устойчивость модели к выбросам.

Фигура 12.5 визуализирует процесс итеративного уточнения обобщенного метода наименьших отклонений (GLDM). Построенный на основе WLDM, GLDM повторно обновляет веса и пересчитывает коэффициенты через последовательные итерации. Этот итеративный процесс позволяет GLDM лучше обрабатывать сложные, нелинейные отношения в данных и дополнительно снижать влияние выбросов.

Фигура 12.6 представляет структуру алгоритма Прогнозирования. Эта фигура описывает, как алгоритм использует оптимизированные коэффициенты из WLDM и GLDM для генерации будущих прогнозов. Она подчеркивает интеграцию механизмов пороги́рования ошибок, которые оценивают и обеспечивают надежность прогнозов, останавливая процесс прогнозирования, когда ошибки превышают заданные пределы.



## 12.2 Сводка

Фигуры вместе предоставляют комплексную визуальную сводку методологий WLDM, GLDM и алгоритма Прогнозирования:

- Фигура [12.1](#): Детализирует общий рабочий процесс WLDM.
- Фигура [12.2](#): Показывает начальную оценку коэффициентов модели в WLDM.
- Фигура [12.3](#): Иллюстрирует вычисление остатков в WLDM.
- Фигура [12.4](#): Демонстрирует процесс обновления весов для обработки выбросов в WLDM.
- Фигура [12.5](#): Отображает шаги итеративного уточнения в GLDM.
- Фигура [12.6](#): Описывает структуру прогнозирующего алгоритма.

Эти визуальные средства усиливают понимание надежных методов оптимизации и их практической реализации в прогнозировании временных рядов, предоставляя четкие и профессиональные иллюстрации каждого шага и их соответствующих влияний на производительность модели.