第四部分　组合数学

组合数学的研究内容

- 组合存在性
- 组合计数
- 组合枚举
- 组合优化

本书的内容

- 基本的组合计数公式
- 递推方程与生成函数

第十二章 基本的组合计数公式

主要内容

- 加法法则与乘法法则
- 排列与组合
- 二项式定理与组合恒等式
- 多项式定理

12.1 加法法则与乘法法则

- 加法法则
- 乘法法则
- 分类处理与分步处理

加法法则

加法法则：事件A有m种产生方式，事件B有n种产生方式，则“事件A或B”有$m+n$种产生方式.

使用条件：事件A与B产生方式不重叠

适用问题：分类选取

推广：事件A_1有p_1种产生方式，事件A_2有p_2种产生方式，…, 事件A_k有p_k种产生的方式，则“事件A_1或A_2或…A_k”有$p_1+p_2+\ldots+p_k$种产生的方式.

乘法法则

乘法法则：事件A有 m 种产生方式，事件 B 有n 种产生方式，则 “事件A与B” 有 $m\,n$ 种产生方式.

使用条件：事件 A 与 B 产生方式彼此独立

适用问题：分步选取

推广：事件 A_1有 p_1种产生方式，事件 A_2有 p_2种产生方式，…, 事件 A_k 有 p_k 种产生的方式，则 “事件A_1与 A_2 与 … A_k” 有 $p_1 p_2 \ldots p_k$ 种产生的方式.

分类处理与分步处理

- 分类处理：对产生方式的集合进行划分，分别计数，然后使用加法法则
- 分步处理：一种产生方式分解为若干独立步骤，对每步分别进行计数，然后使用乘法法则
- 分类与分步结合使用

  先分类，每类内部分步

  先分步，每步又分类

实例：关系计数

例1 设A为 n 元集，问
(1) A上的自反关系有多少个？
(2) A上的对称关系有多少个？
(3) A上的反对称关系有多少个？
(4) A上的函数有多少个？其中双射函数有多少个？

(1) 在自反关系矩阵中，主对角线元素都是1，其他位置的元素可以是1，也可以是0，有2种选择. 这种位置有$n2-n$个，根据乘法法则，自反关系的个数 2^{n^2-n}

(2) 考虑对称关系的矩阵. i 行 j 列($i \neq j$)的元素 $r_{ij} = r_{ji}$. 能够独立选择0或1的位置有$(n^2-n)/2$个. 加上主对角线的n个位置，总计$(n^2+n)/2$个位置，每个位置2种选择，根据乘法法则，构成矩阵的方法数是 $2^{(n^2+n)/2}$

解答

(3) 非主对角线位置分成 $(n^2-n)/2$组，每组包含元素r_{ij}和r_{ji}. 根据反对称的性质，r_{ij}与r_{ji}的取值有以下3种可能：

$$r_{ij}=1, r_{ji}=0;\quad r_{ij}=0, r_{ji}=1;\quad r_{ij}=r_{ji}=0.$$

所有这些位置元素的选择方法数为 $3^{(n^2-n)/2}$. 再考虑到主对角线元素的选取，由乘法法则总方法数为$2^n 3^{(n^2-n)/2}$

(4) 设$A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$，任何A上的函数 $f:A\to A$具有下述形式：

$$f=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle,\ldots,\langle x_n,y_n\rangle\}$$

其中每个y_i（$i=1,2,\ldots,n$）有n种可能的选择，根据乘法法则，有n^n个不同的函数. 若 f 是双射的，那么y_1确定以后，y_2只有$n-1$种可能的取值 ,…, y_n只有1种取值. 构成双射函数的方法数是$n(n-1)(n-2)\ldots1 = n!$.

例2：Ipv4网址计数

32位地址　网络标识+主机标识

(1) A类：最大网络；　　B类：中等网络；　　C：小网络；

D：多路广播；　　　E：备用

(2) 限制条件：

1111111在A类中的netid部分无效

hostid部分不允许全0或全1

A	0					netid (7位)	hosted (24位)
B	1	0				netid (14位)	hostid (16位)
C	1	1	0			netid (21位)	**hostid (8位)**
D	1	1	1	0		(28位)	
E	1	1	1	1	0	(27位)	

解答

netid　　hostid

A类：0+7位，　24位

B类：10+14位，　16位

C类：110+21位，　8位

限制条件：1111111在A类中的netid部分无效

hostid部分不允许全0或全1

A类：netid 2^7-1, hosted $2^{24}-2$，

$N_A = 127 \cdot 16777214 = 2130706178$

B类：netid 2^{14}, hosted $2^{16}-2$，

$N_B = 16384 \cdot 65534 = 1073709056$

C类：netid 2^{21}, hosted 2^8-2,

$N_C = 2097152 \cdot 254 = 532676608$

$N = N_A + N_B + N_C = 3737091842$

12.2 排列与组合

选取问题：设 n 元集合 S，从 S 中选取 r 个元素.

根据是否有序，是否允许重复，将该问题分为四个子类型

	不重复选取	重复选取
有序选取	集合的排列	多重集的排列
无序选取	集合的组合	多重集的组合

集合的排列

定义12.1 设S为n元集，

(1) 从 S 中有序选取的 r 个元素称为 S 的一个 r 排列，S 的不同 r 排列总数记作 $P(n,r)$, $r=n$的排列是S的全排列.

(2) 从 S 中无序选取的 r 个元素称为 S 的一个 r 组合，S 的不同 r 组合总数记作 $C(n,r)$

定理1.1 设n, r为自然数，规定0!=1，则

$$(1)\quad P(n,r)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-r)!} & n\ge r\\ 0 & n<r\end{cases}$$

$$(2)\quad C(n,r)=\begin{cases}\dfrac{P(n,r)}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!} & n\ge r\\ 0 & n<r\end{cases}$$

证明

下面考虑 $n \geq r$ 的情况.

(1) 排列的第一个元素有 n 种选择的方式. 排列的第二个元素有$n-1$种选法, …, 第 r 个元素的方式数 $n-r+1$. 根据乘法法则，总的选法数为

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

(2) 分两步构成 r 排列. 首先无序地选出r个元素，然后再构造这r个元素的全排列. 无序选择r个元素的方法数是$C(n,r)$; 针对每种选法，能构造 $r!$个不同的全排列. 根据乘法法则，不同的 r 排列数满足 $P(n, r)=C(n,r)\, r!$

组合数$C(n,r)$也称为二项式系数，记作$\binom{n}{r}$

推论

推论 设n, r为正整数，则

(1) $C(n,r)=\frac{n}{r}C(n-1,r-1)$

(2) $C(n,r) = C(n, n-r)$

(3) $C(n,r)=C(n-1,r-1)+C(n-1,r)$

证明方法：公式代入并化简，组合证明

例3 证明 $C(n,r) = C(n,n-r)$

证 设 $S=\{1, 2, \ldots, n\}$是n元集合，对于S 的任意 r 组合 $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$，都存在一个$S$ 的 $n-r$ 组合$S-A$与之对应. 显然不同的 r 组合对应了不同的 $n-r$ 组合，反之也对，因此 S 的 r 组合数恰好与 S 的 $n-r$ 组合数相等.

公式(3) 称为 **Pascal公式**，也对应了**杨辉三角形**

杨辉三角

$r=0$, $r=1$, $r=2$, $r=3$, $r=4$, $r=5$, $r=6$

$n=0$ 1

$n=1$ 1 1

$n=2$ 1 2 1

$n=3$ 1 3 3 1

$n=4$ 1 4 6 4 1

$n=5$ 1 5 10 10 5 1

$n=6$ 1 6 15 20 15 6 1

多重集的排列与组合

定义12.2 多重集 $S=\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$，$n=n_1+n_2+\ldots n_k$ 表示 S 中元素的总数.

(1) 从S 中有序选取的r个元素称为多重集 S 的一个 r 排列. $r=n$ 的排列称为 S 的全排列

(2) 从 S 中无序选取的 r 个元素称作多重集 S 的一个r 组合

注意:

- 多重集中元素的重复度，$0 < n_i \leq +\infty$, 当$n_i=+\infty$，表示a_i重复选取的次数没有限制
- S的子集 $X=\{x_1 \cdot a_1, x_2 \cdot a_2, \ldots, x_k \cdot a_k\}$, 其中$0 \leq x_i \leq +\infty$

多重集的排列计数

定理12.2 设$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$为多重集，

(1) S 的全排列数是 $\dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$

(2) 若$r \le n_i$，$i=1,2,\ldots,k$，那么S 的 r 排列数是 k^r

证明 (1) 有$C(n,n_1)$ 种方法放a_1，有$C(n-n_1,n_2)$种方法放a_2, …, 最后有$C(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}, n_k)$ 方法放a_k. 根据乘法法则,

$$C(n,n_1)C(n-n_1,n_2)\ldots C(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1},n_k)$$

$$=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!\ 0!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

(2) r 个位置中的每个位置都有 k 种选法，由乘法法则得 k^r

多重集的组合

定理12.3 多重集 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$，$0<n_i\leq+\infty$
当 $r\leq n_i$, S的r 组合数为 $N = C(k+r-1,r)$,

证明 一个 r 组合为

$$\{x_1\cdot a_1, x_2\cdot a_2, \ldots, x_k\cdot a_k\},$$

其中 $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$, x_i 为非负整数. 这个不定方程的非负整数解对应于下述排列

$$\underbrace{1\ldots1}_{x_1\text{个}}\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_2\text{个}}\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_3\text{个}}\ 0\ \ldots\ldots\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_k\text{个}}$$

r 个1，$k-1$个 0 的全排列数为

$$N=\frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!}=C(k+r-1,r)$$

组合计数的应用

例3 排列26个字母，使得 a 与 b 之间恰有7个字母，求方法数.

解 固定a 和 b, 中间选7个字母，有2 $P(24,7)$种方法，将它看作大字母与其余17个字母全排列有18！种，共

$$N = 2\,P(24,7)\,18!$$

例4 把 $2n$ 个人分成 n 组，每组2人，有多少分法？

解 相当于$2n$ 不同的球放到 n 个相同的盒子，每个盒子2个，放法为

$$N = \frac{1}{n!}(2n,2)C(2n-2,2)\ldots C(2,2)$$

$$= \frac{1}{n!}\frac{2n!}{(2n-2)!\,2}\frac{(2n-2)!}{(2n-4)!\,2}\cdots\frac{2!}{0!\,2} = \frac{(2n)!}{2^n\,n!}$$

一一对应的技巧

例5 从$S=\{1, 2, \ldots, n\}$中选择 k 个不相邻的数，有多少种方法？

解 使用一一对应的思想求解这个问题.

$a_1, a_2, \ldots, a_k$： k个不相邻的数, 属于集合$\{1, 2, \ldots, n\}$

$b_1, b_2, \ldots, b_k$： k个允许相邻的数, 属于集合$\{1, \ldots, n-(k-1)\}$

对应规则是

$$b_i = a_i-(i-1). \quad i=1, 2, \ldots, k$$

因此

$$N = C(n-k+1,k)$$

12.3 二项式定理与组合恒等式

主要内容

- 二项式定理
- 组合恒等式
- 非降路径问题

二项式定理

定理12.4 设 n 是正整数，对一切 x 和 y

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

证明方法：数学归纳法、组合分析法.

证 当乘积被展开时其中的项都是下述形式：$x^i y^{n-i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. 而构成形如 $x^i y^{n-i}$ 的项，必须从n 个和 $(x+y)$ 中选 i 个提供 x，其它的 $n-i$ 个提供 y. 因此，$x^i y^{n-i}$ 的系数是 $\binom{n}{i}$，定理得证.

二项式定理的应用

例6 求在$(2x-3y)^{25}$的展开式中$x^{12}y^{13}$的系数.

解 由二项式定理

$$(2x+(-3y))^{25}=\sum_{i=0}^{25}\binom{25}{i}(2x)^{25-i}(-3y)^{i}$$

令$i=13$ 得到展开式中$x^{12}y^{13}$的系数，即

$$\binom{25}{13}2^{12}(-3)^{13}=-\frac{25!}{13!\,12!}2^{12}3^{13}$$

组合恒等式：递推式

1. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

2. $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

3. $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

证明方法：公式代入、组合分析

应用：

1式用于化简

2式用于求和时消去变系数

3式用于求和时拆项（两项之和或者差），然后合并

组合恒等式：基本求和式

4. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n \quad n\in\mathrm{N}$, 5. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0 \quad n\in\mathrm{N}$

证明公式4. 方法：二项式定理或者组合分析.

设$S=\{1,2,\ldots,n\}$，下面计数S 的所有子集.

一种方法就是分类处理，n元集合的 k子集个数是$\binom{n}{k}$

根据加法法则，子集总数是 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

另一种方法是分步处理，为构成 S 的子集A，每个元素有 2 种选择，根据乘法法则，子集总数是2^n.

应用：恒等式求和

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

证明方法：

二项式定理、级数求导

其他组合恒等式代入

证明公式

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} \qquad \text{求导}$$

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \qquad \text{令} x = 1$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$$

证明公式

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$ 消去变系数

$$= \sum_{k=1}^{n} kn \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^{n} [(k-1)+1] \binom{n-1}{k-1}$$ 常量外提

$$= n \sum_{k=1}^{n} (k-1) \binom{n-1}{k-1} + n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} + n2^{n-1}$$ 变限

$$= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$$

恒等式:变上项求和

6. $\sum_{l=0}^{n}\binom{l}{k}=\binom{n+1}{k+1},\quad n,k\in \mathrm{N}$

证明　组合分析. 令$S=\{a_1, a_2, \ldots , a_{n+1}\}$为$n+1$元集合. 等式右边是 S 的 $k+1$子集数. 考虑另一种分类计数的方法. 将所有的 $k+1$元子集分成如下$n+1$类:

第1类：含a_1, 剩下 k个元素取自$\{a_2,\ldots,a_{n+1}\}$ $\binom{n}{k}$

第2类：不含a_1,含a_2, 剩下k个元素取自$\{ a_3, \ldots , a_{n+1}\}$ $\binom{n-1}{k}$

……

不含$a_1, a_2, \ldots, a_n$, 含a_{n+1},剩下k个元素取自空集 $\binom{0}{k}$

由加法法则公式得证

恒等式:乘积转换式

7. $\binom{n}{r}\binom{r}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$

证明方法：组合分析.

n 元集中选取 r 个元素，然后在这 r 个元素中再选 k个元素. 不同的 r 元子集可能选出相同的 k子集，例如

$$\{a, b, c, d, e\} \to \{a, b, c, d\} \to \{b, c, d\}$$

$$\{b, c, d, e\} \to \{b, c, d\}$$

重复度为：$\binom{n-k}{r-k}$

应用：将变下限 r 变成常数 k，求和时提到和号外面.

恒等式:积之和

8. $\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r}$ $m,n,r\in\mathrm{N},\quad r\le\min(m,n)$

9. $\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{k}=\binom{m+n}{m}$ $m,n\in\mathrm{N}$

关系 $\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{m+n}{n}\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{k}=\binom{m+n}{m}$

证明思路：考虑集合$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$. 等式右边计数了从这两个集合中选出r个元素的方法. 将这些选法按照含有A中元素的个数 k 进行分类，$k=0,1,\ldots,r$. 然后使用加法法则.

组合恒等式解题方法小结

证明方法：

- 已知恒等式带入
- 二项式定理
- 幂级数的求导、积分
- 归纳法
- 组合分析

求和方法：

- **Pascal**公式
- 级数求和
- 观察和的结果，然后使用归纳法证明
- 利用已知的公式

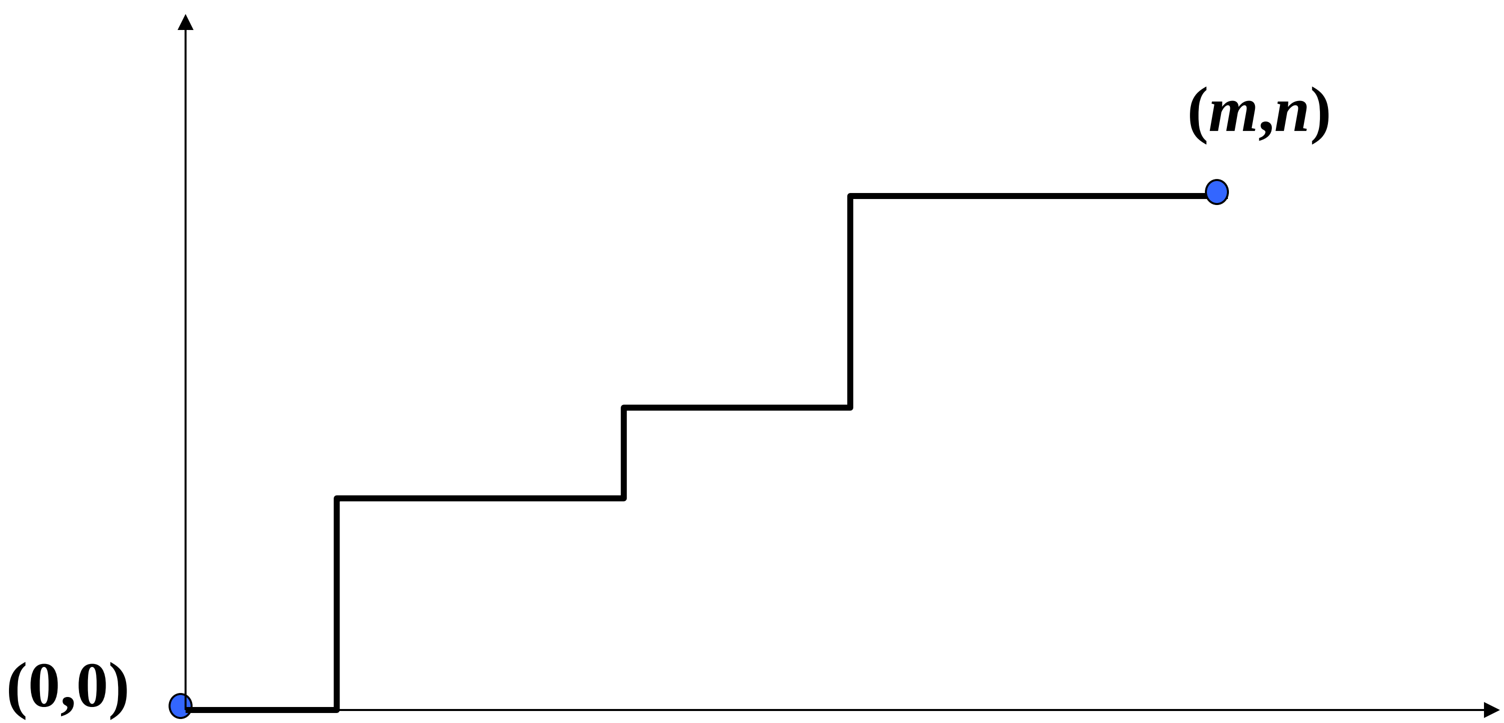
非降路径的计数

(0,0) 到 (m,n) 的非降路径数：$C(m+n, m)$

(a,b) 到 (m,n)的非降路径数：

等于 (0,0) 到 $(m-a,n-b)$ 的非降路径数

(a,b) 经过 (c,d) 到 (m,n) 的非降路径数：乘法法则



限制条件的非降路径数

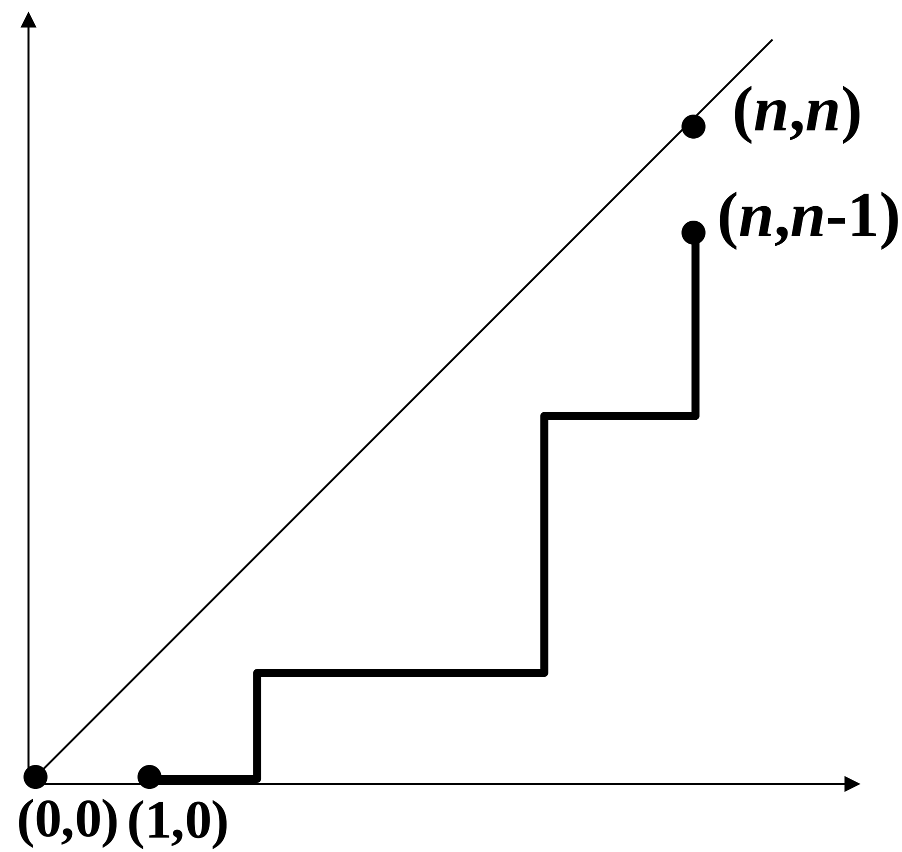
从(0,0)到(*n*,*n*)不接触对角线的非降路径数 *N*

N_1：从(0,0) 到 (n,n) 下不接触对角线非降路径数

N_2：从(1,0)到$(n,n-1)$下不接触对角线非降路径数

N_0: 从(1,0)到$(n,n-1)$的非降路径数

N_3: 从(1,0)到$(n,n-1)$接触对角线的非降路径数



关系: $N=2N_1=2N_2=2[N_0-N_3]$

一一对应

N_3: 从$(1,0)$到$(n,n-1)$

接触对角线的

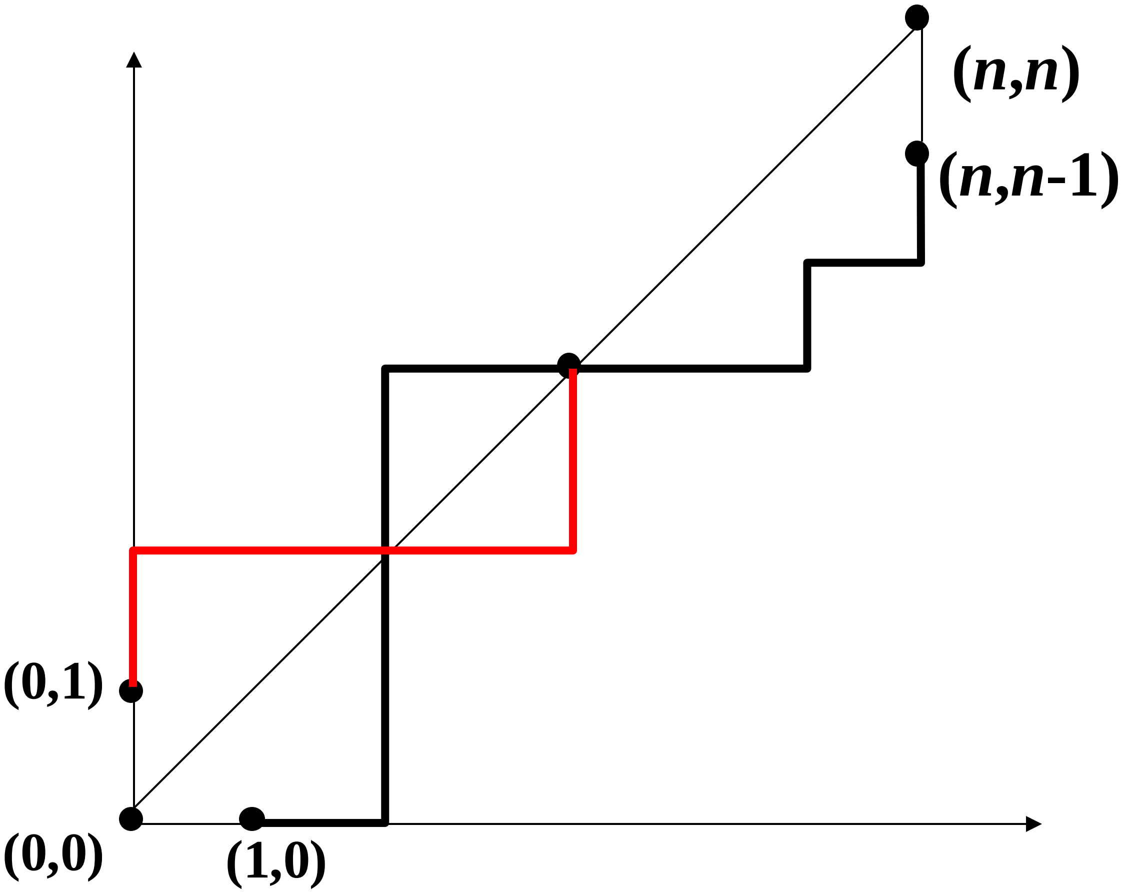
非降路径数

N_4: 从$(0,1)$到$(n,n-1)$

无限制条件的

非降路径数

关系：$N_3=N_4$



$$N=2[N_0-N_3]$$

$$=2[N_0-N_4]=2\left[\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n}\right]=\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

应用:单调函数计数

例7 $A=\{1,2,\ldots,m\}$, $B=\{1,2,\ldots,n\}$,

N_1:B上单调递增函数个数是(1,1)到 $(n+1,n)$的非降路径数

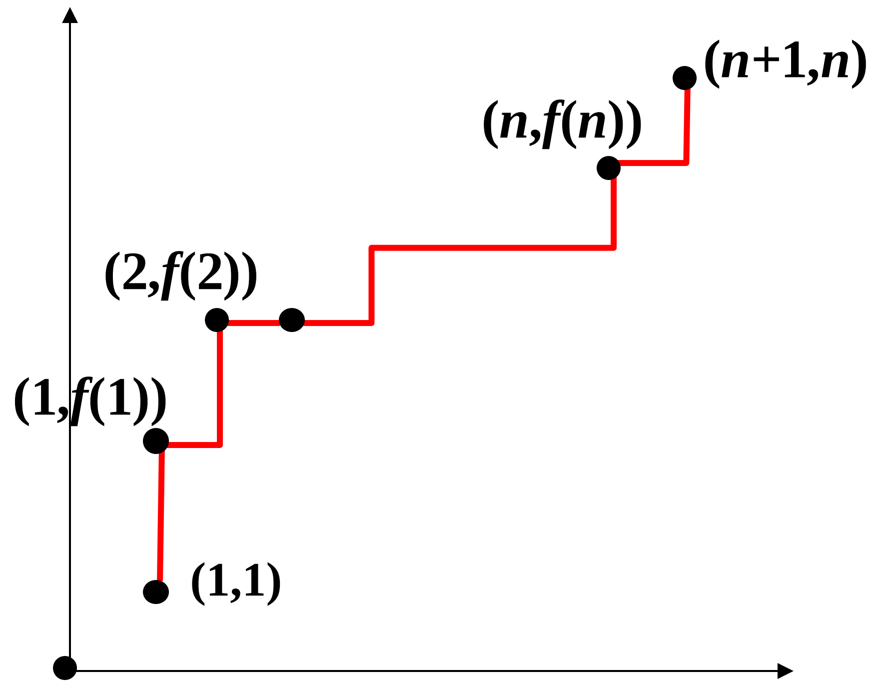
N: B上单调函数个数

$N=2N_1$

N_2: A到B单调递增函数个数是从(1,1)到 $(m+1,n)$的非降路径数

N': A到B单调函数数，$N'=2N_2$

$$N=2\binom{2n-1}{n} \quad N'=2\binom{m+n-1}{m}$$



严格单调递增函数、递减函数个数都是$C(n,m)$

栈输出的计数

例8 将1, 2, … , n 按照顺序输入栈，有多少个不同的输出序列？

分析：将进栈、出栈分别记作 x, y,

出栈序列是 n个x，n个y 的排列，

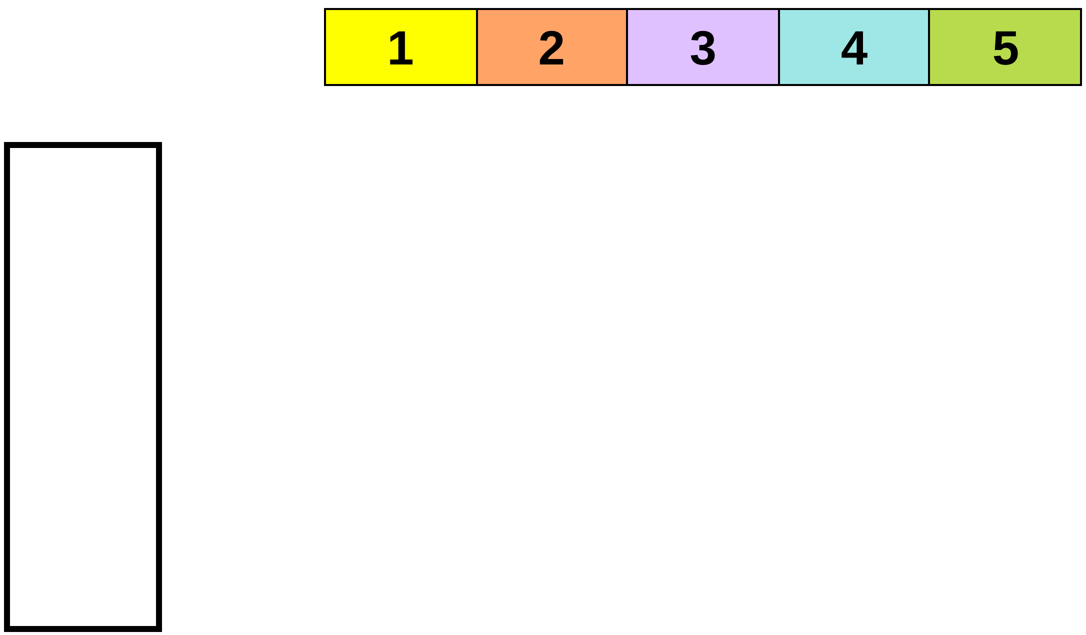
排列中任何前缀的 x 个数不少于y 的个数，

等于从(0,0)到 (n,n) 的不穿过对角线的非降路径数

栈输出的计数

输入： 1, 2, 3, 4, 5,　　　　**输出： 3, 2, 4, 1, 5**

进,进,进,出,出,进,出,出,进,出 $\Leftrightarrow$ x,x,x,y,y,x,y,y,x,y



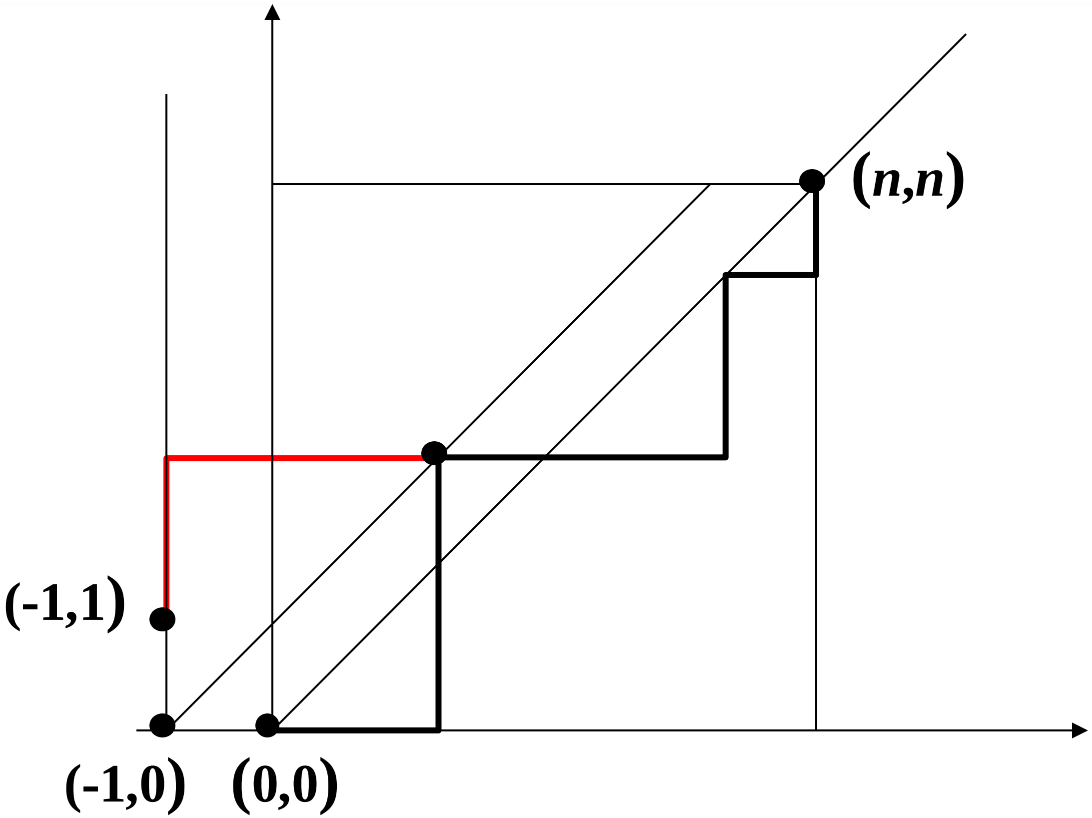
栈输出的计数

从 (0,0)到 (n,n) 的穿过对角线的非降路径

⇔从 (-1,1) 到 (n,n) 的非降路径

从 (0,0)到 (n,n) 的非降路径总数为 C(2n,n) 条，

从(-1,1) 到 (n,n) 的非降路径数为 C(2n,n-1) 条，



$$N=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

12.4 多项式定理

定理12.5 设n为正整数，x_i为实数，i=1, 2, … , t.

$$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^n=\sum\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_t}x_1^{\ n_1}x_2^{\ n_2}\ldots x_t^{\ n_t}$$

求和是对满足方程$n_1+n_2+\ldots+n_t=n$的一切非负整数解求

证明 展开式中的项 $x_1^{\ n_1}x_2^{\ n_2}\ \ldots\ x_t^{\ n_t}$ 是如下构成的:

在n个因式中选n_1个因式贡献x_1,从剩下$n-n_1$个因式选n_2个因式贡献x_2, …, 从剩下的$n-n_1-n_2-\ldots-n_{t-1}$个因式中选n_t个因式贡献 x_t.

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_{t-1}}{n_t}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}=\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_t}$$

推论

推论1 多项式展开式中不同的项数为方程

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_t = n$$

的非负整数解的个数 $C(n+t-1,n)$

推论2

$$\sum \binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t} = t^n$$

例9 求 $(2x_1-3x_2+5x_3)^6$ 中 $x_1^3x_2x_3^2$ 的系数.

解 由多项式定理得

$$\binom{6}{3\ 1\ 2} 2^3 \cdot (-3) \cdot 5^2 = \frac{6!}{3!\,1!\,2!} 8 \cdot (-3) \cdot 25 = -36000$$

多项式系数

符号 $$\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_t}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}$$

组合意义

- 多项式系数
- 多重集 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_t\cdot a_t\}$ 的全排列数
- n个不同的球放到 t 个不同的盒子使得第一个盒子含n_1个球，第二个盒子含n_2个球，…，第 t 个盒子含 n_t 个球的方案数

第十二章 习题课

主要内容

基本计数

- 计数法则：加法法则、乘法法则
- 计数模型：选取问题、非降路径问题、方程的非负整数解问题
- 处理方法：分类处理、分步处理、一一对应思想

计数符号

- 组合数或二项式系数 $C(m,n)$：组合恒等式
- 排列数 $P(m,n)$
- 多项式系数 $\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_t}$
- 二项式定理与多项式定理

基本要求

- 能够熟练使用加法法则与乘法法则
- 熟悉和应用基本的组合计数模型：

  选取问题

  不等方程的解

  非降路径
- 熟悉二项式定理与多项式定理
- 能证明组合恒等式并对二项式系数进行求和
- 了解多项式系数及其相关公式

练习1：基本的组合计数

1. 求1400的不同的正因子个数.

解　1400的素因子分解式是

$$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

1400的任何正因子都具有下述形式：

$$2^i \cdot 5^j \cdot 7^k，\text{其中}\ 0 \le i \le 3,\ 0 \le j \le 2,\ 0 \le k \le 1.$$

根据乘法法则，1400的正因子数是 i, j, k 的选法数

$$N=(1+3)(1+2)(1+1)=24.$$

练习2：基本的组合计数

2．把10个不同的球放到6个不同的盒子里，允许空盒，且前2个盒子球的总数至多是4，问有多少种方法?

解 根据前两个盒子含球数k对放法分类，其中 k=0,1,2,3,4. 对于给定的 k，再分步处理计算放球的方法数：

① 从10个球中选放入前两个盒子的k个球，有$C(10,k)$选法；

② 把选好的k个球分到2个盒子里，每个球可以有2种选择，有2^k种分法；

③ 剩下的 $n-k$个球分到其他4个盒子里有4^{n-k}种分法.

根据乘法法则，使得前两个盒子含k个球的放法数是

$$C(10,k)\ 2^k\ 4^{n-k}$$

最后使用加法法则对k求和，就得到所求的方法数是

$$\sum_{k=0}^{4} C(10,k)2^k 4^{10-k} = 47579136$$

练习3：基本的组合计数

3．由m个A和n个B构成序列，其中m, n为正整数，$m≤n$. 如果要求每个A后面至少紧跟着1个B, 问有多少个不同的序列?

3. 方法一. 先放 n 个B，只有1种方法. 然后，在每个B之间的n个位置中选择 m 个位置放A, 有$C(n,m)$种方法.

方法二. 先放 m 个AB，只有1 种方法. 把每个AB 看作格板，m 个格板构成 $m+1$个空格，在空格中放入 $n–m$ 个B. 这相当于方程

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{m+1} = n-m$$

的非负整数解的个数，因此

$$N=C(n-m+m+1-1,n-m)=C(n,n-m)=C(n,m)$$

练习4

4. 设 S 是 n 元集，N 表示满足 $A \subseteq B \subseteq S$ 的有序对 <A,B> 的个数，用二项式定理证明 $N=3^n$

方法一．令 $|A|=k$，按照 $k=0,1,\ldots,n$ 将有序对 <A,B> 分类.

给定 k，选 A 方法数是 $C(n,k)$;

选 B 中剩下的 $n-k$ 个元素, 每个元素有2 种选法，有 2^{n-k} 个不同的 B 集合. 由乘法法则，这样的<A,B>有 $C(n,k)2^{n-k}$ 个，再使用加法法则和二项式定理，从而得到

$$N=\sum_{k=0}^{n} C(n,k)2^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} C(n,k)\,1^{k}2^{n-k}=(1+2)^{n}=3^{n}$$

方法二. S 中的每个元素可以有3种选法：同时加入 A 和 B，不加入 A 但加入 B，A 和 B 都不加入； 因此，n 个元素总共 3^n 种选法.

练习5

5. 证明 $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}=2^{n-1}(n+2)$

方法一. 利用已知等式

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}, \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n}$$

将上述两式相加得

$$\sum_{k==0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}=2^{n-1}(n+2)$$

练习5

方法二 利用积分

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}x^k$$

$$\int_0^x f(x)dx=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}=x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=x(1+x)^n$$

$$f(x)=(1+x)^n+xn(1+x)^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}=f(1)=2^n+n2^{n-1}=2^{n-1}(n+2)$$

练习6

6. 求和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{n-m+k}{k}$

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n-m+k}{k}=\binom{n-m+0}{0}+\binom{n-m+1}{1}+\ldots+\binom{n}{m}$$

$$=\left[\binom{n-m+1}{0}+\binom{n-m+1}{1}\right]+\binom{n+m+2}{2}+\ldots+\binom{n}{m}$$

$$=\left[\binom{n-m+2}{1}+\binom{n-m+2}{2}\right]+\binom{n-m+3}{3}+\ldots+\binom{n}{m}$$

$$=\ldots=\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m}$$