



## 主要内容

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包
- 等价关系与划分
- 偏序关系



**定义7.1** 由两个元素  $x$  和  $y$ ，按照一定的顺序组成的二元组称为**有序对**，记作  $\langle x, y \rangle$ .

有序对性质：

- (1) 有序性  $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$  （当  $x \neq y$  时）
- (2)  $\langle x, y \rangle$  与  $\langle u, v \rangle$  相等的充分必要条件是
$$\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle \Leftrightarrow x = u \wedge y = v.$$



**定义7.2** 设 $A, B$ 为集合,  $A$ 与 $B$ 的笛卡儿积记作 $A \times B$ , 且

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}.$$

**例1**  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}$

$$A \times B$$

$$= \{ \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 1, c \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 3, a \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 3, c \rangle \}$$

$$B \times A$$

$$= \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle c, 3 \rangle \}$$

$$A = \{\emptyset\}, B = \emptyset$$

$$P(A) \times A = \{ \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \{\emptyset\}, \emptyset \rangle \}$$

$$P(A) \times B = \emptyset$$



(1) 不适合交换律

$$A \times B \neq B \times A \quad (A \neq B, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset)$$

(2) 不适合结合律

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C) \quad (A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, C \neq \emptyset)$$

(3) 对于并或交运算满足分配律

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad (B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad (B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

(4) 若  $A$  或  $B$  中有一个为空集, 则  $A \times B$  就是空集.

$$A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$$

(5)  $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$ .

(6) 若  $|A| = m, |B| = n$ , 则  $|A \times B| = mn$



证明  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

证 任取  $\langle x, y \rangle$

$$\langle x, y \rangle \in A \times (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B \vee \langle x, y \rangle \in A \times C$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

所以有  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ .

**例2**

(1) 证明  $A=B, C=D \Rightarrow A \times C = B \times D$

(2)  $A \times C = B \times D$  是否推出  $A=B, C=D$ ? 为什么?

解 (1) 任取  $\langle x, y \rangle$

$$\langle x, y \rangle \in A \times C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C$$

$$\Leftrightarrow x \in B \wedge y \in D$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in B \times D$$

(2) 不一定. 反例如下:

$A=\{1\}, B=\{2\}, C=D=\emptyset$ , 则  $A \times C = B \times D$  但是  $A \neq B$ .



**定义7.3** 如果一个集合满足以下条件之一：

(1) 集合非空, 且它的元素都是有序对

(2) 集合是空集

则称该集合为一个**二元关系**, 简称为关系, 记作 $R$ .

如果 $\langle x, y \rangle \in R$ , 可记作 $xRy$ ; 如果 $\langle x, y \rangle \notin R$ , 则记作 $x \not R y$

实例:  $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle a, b \rangle\}$ ,  $S = \{\langle 1, 2 \rangle, a, b\}$ .

$R$ 是二元关系, 当 $a, b$ 不是有序对时,  $S$ 不是二元关系

根据上面的记法, 可以写 $1R2$ ,  $aRb$ ,  $a \not R c$ 等.



### 定义7.4

设 $A, B$ 为集合,  $A \times B$ 的任何子集所定义的二元关系叫做从 $A$ 到 $B$ 的二元关系, 当 $A=B$ 时则叫做 $A$ 上的二元关系.

**例3**  $A=\{0,1\}, B=\{1,2,3\}$ , 那么

$$R_1=\{<0,2>\}, R_2=A \times B, R_3=\emptyset, R_4=\{<0,1>\}$$

$R_1, R_2, R_3, R_4$ 是从 $A$ 到 $B$ 的二元关系,

$R_3$ 和 $R_4$ 也是 $A$ 上的二元关系.

计数:  $|A|=n, |A \times A|=n^2$ ,  $A \times A$ 的子集有个. 所以 $A$ 上有 $2^{n^2}$ 个不同的二元关系.

例如  $|A|=3$ , 则 $A$ 上有=512个不同的二元关系.





**定义7.5** 设  $A$  为集合,

(1)  $\emptyset$  是  $A$  上的关系, 称为**空关系**

(2) **全域关系**  $E_A = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A\} = A \times A$

**恒等关系**  $I_A = \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$

**小于等于关系**  $L_A = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \leq y\}$ ,  $A$  为实数子集

**整除关系**  $D_B = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in B \wedge x \text{ 整除 } y\}$ ,  $A$  为非0整数子集

**包含关系**  $R_{\subseteq} = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \subseteq y\}$ ,  $A$  是集合族.



例如,  $A=\{1, 2\}$ , 则

$$E_A = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>\}$$

$$I_A = \{<1,1>, <2,2>\}$$

例如  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B=\{a, b\}$ , 则

$$L_A = \{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <2,2>, <2,3>, <3,3>\}$$

$$D_A = \{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <2,2>, <3,3>\}$$

例如  $A = P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ , 则  $A$  上的包含关系是

$$R_{\subseteq} = \{<\emptyset, \emptyset>, <\emptyset, \{a\}>, <\emptyset, \{b\}>, <\emptyset, \{a,b\}>, <\{a\}, \{a\}>, \\ <\{a\}, \{a,b\}>, <\{b\}, \{b\}>, <\{b\}, \{a,b\}>, <\{a,b\}, \{a,b\}>\}$$

类似的还可以定义:

大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等.



## 1. 关系矩阵

若 $A=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $R$ 是 $A$ 上的关系,  $R$ 的关系矩阵是布尔矩阵 $M_R = (r_{ij})_{n \times n}$ , 其中

$$r_{ij} = 1 \Leftrightarrow \langle x_i, x_j \rangle \in R$$

## 2. 关系图

若 $A=\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ,  $R$ 是从 $A$ 上的关系,  $R$ 的关系图是 $G_R=\langle A, R \rangle$ , 其中 $A$ 为结点集,  $R$ 为边集. 如果 $\langle x_i, x_j \rangle$ 属于关系 $R$ , 在图中就有一条从 $x_i$ 到 $x_j$ 的有向边.

注意:

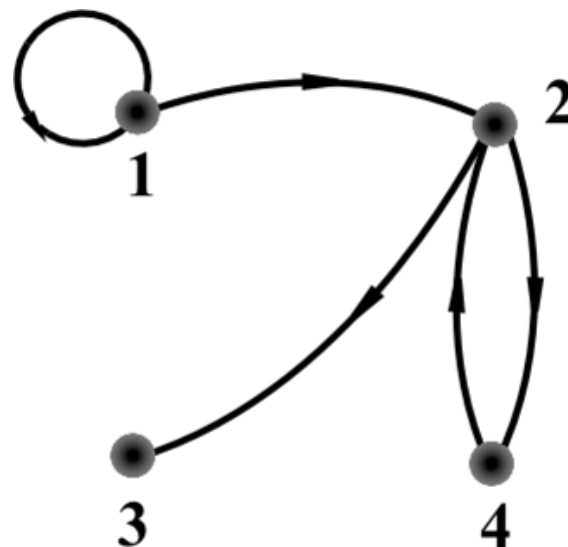
- 关系矩阵适合表示有穷集 $A$ 上的关系 (可推广为从 $A$ 到 $B$ 的关系)
- 关系图适合表示有穷集 $A$ 上的关系



## 例4

$A=\{1,2,3,4\}$ ,  $R=\{<1,1>, <1,2>, <2,3>, <2,4>, <4,2>\}$ ,  
 $R$ 的关系矩阵 $M_R$ 和关系图 $G_R$ 如下:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





## 关系的基本运算

**定义7.6** 关系的**定义域**、**值域**与**域**分别定义为

$$\text{dom}R = \{ x \mid \exists y (\langle x, y \rangle \in R) \}$$

$$\text{ran}R = \{ y \mid \exists x (\langle x, y \rangle \in R) \}$$

$$\text{fld}R = \text{dom}R \cup \text{ran}R$$

**例5**  $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 3 \rangle\}$ , 则

$$\text{dom}R = \{1, 2, 4\}$$

$$\text{ran}R = \{2, 3, 4\}$$

$$\text{fld}R = \{1, 2, 3, 4\}$$



**定义7.7** 关系的逆运算

$$R^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \}$$

**定义7.8** 关系的合成运算

$$F \circ G = \{ \langle x, y \rangle \mid \exists t (\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in G) \}$$

**例6**  $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$

$$S = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$$

$$R^{-1} = \{ \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$$

$$R \circ S = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \}$$

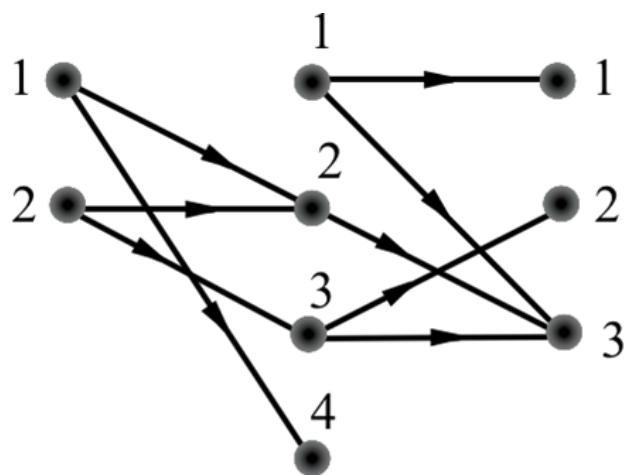
$$S \circ R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$$



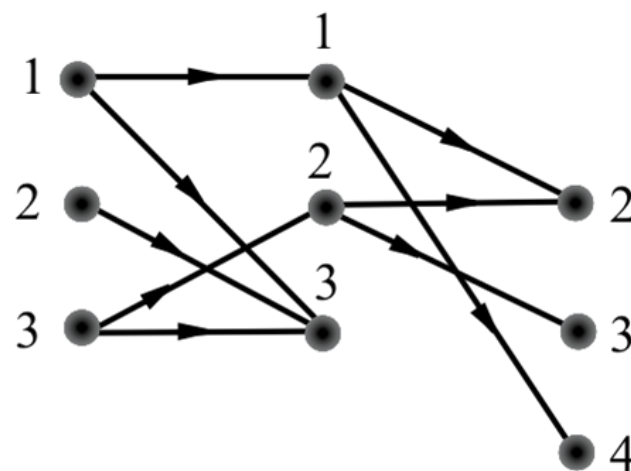
利用图示（不是关系图）方法求合成

$$R \circ S = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \}$$

$$S \circ R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$$



$R \circ S$



$S \circ R$



**定义7.9** 设 $R$ 为二元关系,  $A$ 是集合

(1)  $R$ 在 $A$ 上的**限制**记作  $R \upharpoonright A$ , 其中

$$R \upharpoonright A = \{ \langle x, y \rangle \mid xRy \wedge x \in A \}$$

(2)  $A$ 在 $R$ 下的**像**记作  $R[A]$ , 其中

$$R[A] = \text{ran}(R \upharpoonright A)$$

说明:

- $R$ 在 $A$ 上的限制  $R \upharpoonright A$  是  $R$  的子关系, 即  $R \upharpoonright A \subseteq R$
- $A$ 在 $R$ 下的像  $R[A]$  是  $\text{ran}R$  的子集, 即  $R[A] \subseteq \text{ran}R$





**例7** 设 $R=\{<1,2>, <1,3>, <2,2>, <2,4>, <3,2>\}$ , 则

$$R \upharpoonright \{1\} = \{<1,2>, <1,3>\}$$

$$R \upharpoonright \emptyset = \emptyset$$

$$R \upharpoonright \{2,3\} = \{<2,2>, <2,4>, <3,2>\}$$

$$R[\{1\}] = \{2,3\}$$

$$R[\emptyset] = \emptyset$$

$$R[\{3\}] = \{2\}$$



**定理7.1** 设 $F$ 是任意的关系, 则

(1)  $(F^{-1})^{-1}=F$

(2)  $\text{dom}F^{-1}=\text{ran}F, \text{ran}F^{-1}=\text{dom}F$

证 (1) 任取 $\langle x,y \rangle$ , 由逆的定义有

$$\langle x,y \rangle \in (F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow \langle y,x \rangle \in F^{-1} \Leftrightarrow \langle x,y \rangle \in F.$$

所以有  $(F^{-1})^{-1}=F$ .

(2) 任取 $x$ ,

$$x \in \text{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y (\langle x,y \rangle \in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \exists y (\langle y,x \rangle \in F) \Leftrightarrow x \in \text{ran}F$$

所以有  $\text{dom}F^{-1}=\text{ran}F$ .

同理可证  $\text{ran}F^{-1}=\text{dom}F$ .



**定理7.2** 设 $F, G, H$ 是任意的关系, 则

$$(1) (F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$$

$$(2) (F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$$

证 (1) 任取 $\langle x, y \rangle$ ,

$$\begin{aligned} & \langle x, y \rangle \in (F \circ G) \circ H \\ \Leftrightarrow & \exists t (\langle x, t \rangle \in F \circ G \wedge \langle t, y \rangle \in H) \\ \Leftrightarrow & \exists t (\exists s (\langle x, s \rangle \in F \wedge \langle s, t \rangle \in G) \wedge \langle t, y \rangle \in H) \\ \Leftrightarrow & \exists t \exists s (\langle x, s \rangle \in F \wedge \langle s, t \rangle \in G \wedge \langle t, y \rangle \in H) \\ \Leftrightarrow & \exists s (\langle x, s \rangle \in F \wedge \exists t (\langle s, t \rangle \in G \wedge \langle t, y \rangle \in H)) \\ \Leftrightarrow & \exists s (\langle x, s \rangle \in F \wedge \langle s, y \rangle \in G \circ H) \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \in F \circ (G \circ H) \end{aligned}$$

所以  $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$



(2) 任取  $\langle x, y \rangle$ ,

$$\langle x, y \rangle \in (F \circ G)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in F \circ G$$

$$\Leftrightarrow \exists t (\langle y, t \rangle \in F \wedge \langle t, x \rangle \in G)$$

$$\Leftrightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in G^{-1} \wedge \langle t, y \rangle \in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in G^{-1} \circ F^{-1}$$

所以  $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$



**定理7.3** 设 $R$ 为 $A$ 上的关系, 则

$$R \circ I_A = I_A \circ R = R$$

证 · 任取 $\langle x, y \rangle$

$$\langle x, y \rangle \in R \circ I_A$$

$$\Leftrightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in I_A)$$

$$\Leftrightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in R \wedge t = y \wedge y \in A)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R$$



## 定理7.4

- (1)  $F \circ (G \cup H) = F \circ G \cup F \circ H$       (2)  $(G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$   
(3)  $F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H$       (4)  $(G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$

只证 (3) 任取  $\langle x, y \rangle$ ,

$$\begin{aligned} & \langle x, y \rangle \in F \circ (G \cap H) \\ \Leftrightarrow & \exists t (\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in G \cap H) \\ \Leftrightarrow & \exists t (\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in G \wedge \langle t, y \rangle \in H) \\ \Leftrightarrow & \exists t ((\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in G) \wedge (\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in H)) \\ \Rightarrow & \exists t (\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in G) \wedge \exists t (\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in H) \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \in F \circ G \wedge \langle x, y \rangle \in F \circ H \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \in F \circ G \cap F \circ H \end{aligned}$$

所以有  $F \circ (G \cap H) = F \circ G \cap F \circ H$



定理7.4 的结论可以推广到有限多个关系

$$R \circ (R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n) = R \circ R_1 \cup R \circ R_2 \cup \dots \cup R \circ R_n$$

$$(R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n) \circ R = R_1 \circ R \cup R_2 \circ R \cup \dots \cup R_n \circ R$$

$$R \circ (R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) \subseteq R \circ R_1 \cap R \circ R_2 \cap \dots \cap R \circ R_n$$

$$(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) \circ R \subseteq R_1 \circ R \cap R_2 \circ R \cap \dots \cap R_n \circ R$$



**定理7.5** 设 $F$  为关系,  $A, B$ 为集合, 则

$$(1) F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$$

$$(2) F[A \cup B] = F[A] \cup F[B]$$

$$(3) F \upharpoonright (A \cap B) = F \upharpoonright A \cap F \upharpoonright B$$

$$(4) F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$$





证 只证 (1) 和 (4).

(1) 任取  $\langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned} & \langle x, y \rangle \in F \upharpoonright (A \cup B) \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \in F \wedge x \in A \cup B \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \in F \wedge (x \in A \vee x \in B) \\ \Leftrightarrow & (\langle x, y \rangle \in F \wedge x \in A) \vee (\langle x, y \rangle \in F \wedge x \in B) \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \in F \upharpoonright A \vee \langle x, y \rangle \in F \upharpoonright B \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \in F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B \end{aligned}$$

所以有  $F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$ .



(4) 任取 $y$ ,

$$y \in F[A \cap B]$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\langle x, y \rangle \in F \wedge x \in A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\langle x, y \rangle \in F \wedge x \in A \wedge x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x ((\langle x, y \rangle \in F \wedge x \in A) \wedge (\langle x, y \rangle \in F \wedge x \in B))$$

$$\Rightarrow \exists x (\langle x, y \rangle \in F \wedge x \in A) \wedge \exists x (\langle x, y \rangle \in F \wedge x \in B)$$

$$\Leftrightarrow y \in F[A] \wedge y \in F[B]$$

$$\Leftrightarrow y \in F[A] \cap F[B]$$

所以有  $F[A \cap B] = F[A] \cap F[B]$ .

**定义7.10**

设  $R$  为  $A$  上的关系,  $n$  为自然数, 则  $R$  的  $n$  次幂定义为:

$$(1) R^0 = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \} = I_A$$

$$(2) R^{n+1} = R^n \circ R$$

注意:

- 对于  $A$  上的任何关系  $R_1$  和  $R_2$  都有  $R_1^0 = R_2^0 = I_A$
- 对于  $A$  上的任何关系  $R$  都有  $R^1 = R$



**例 8** 设  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle \}$ ,  
求  $R$  的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

解  $R$  与  $R^2$  的关系矩阵分别是:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$R^3$ 和 $R^4$ 的矩阵是:

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此 $M^4=M^2$ , 即 $R^4=R^2$ . 因此可以得到

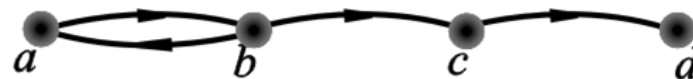
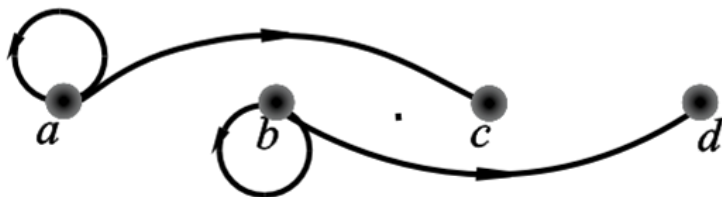
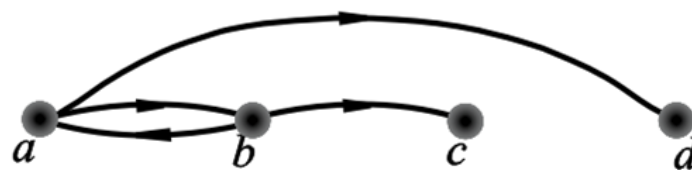
$$R^2=R^4=R^6=\dots, \quad R^3=R^5=R^7=\dots$$

$R^0$ 的关系矩阵是

$$M^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$R^0, R^1, R^2, R^3, \dots$ 的关系图如下图所示.

 $R^0$  $R^1$  $R^2=R^4=\dots$  $R^3=R^5=\dots$



**定理7.6** 设  $A$  为  $n$  元集,  $R$  是  $A$  上的关系, 则存在自然数  $s$  和  $t$ , 使得  $R^s = R^t$ .

证  $R$  为  $A$  上的关系,

由于  $|A|=n$ ,  $A$  上的不同关系只有  $2^{n^2}$  个.

列出  $R$  的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \dots, R^{2^{n^2}}, \dots,$$

必存在自然数  $s$  和  $t$  使得  $R^s = R^t$



**定理7.7** 设  $R$  是  $A$  上的关系,  $m, n \in \mathbb{N}$ , 则

(1)  $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2)  $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的  $m \in \mathbb{N}$ , 施归纳于  $n$ .

若  $n=0$ , 则有

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设  $R^m \circ R^n = R^{m+n}$ , 则有

$$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n+1},$$

所以对一切  $m, n \in \mathbb{N}$  有  $R^m \circ R^n = R^{m+n}$ .





(2) 对于任意给定的  $m \in \mathbb{N}$ , 施归纳于  $n$ .

若  $n=0$ , 则有

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m \times 0}$$

假设  $(R^m)^n = R^{mn}$ , 则有

$$\begin{aligned}(R^m)^{n+1} &= (R^m)^n \circ R^m = (R^{mn}) \circ R^m \\ &= R^{mn+m} = R^{m(n+1)}\end{aligned}$$

所以对一切  $m, n \in \mathbb{N}$  有  $(R^m)^n = R^{mn}$ .



**定理7.8** 设 $R$  是 $A$ 上的关系,  
若存在自然数  $s, t$  ( $s < t$ ) 使得  $R^s = R^t$ , 则

- (1) 对任何  $k \in \mathbb{N}$  有  $R^{s+k} = R^{t+k}$
- (2) 对任何  $k, i \in \mathbb{N}$  有  $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$ , 其中  $p = t-s$
- (3) 令  $S = \{R^0, R^1, \dots, R^{t-1}\}$ , 则对于任意的  $q \in \mathbb{N}$  有  $R^q \in S$

证 (1)  $R^{s+k} = R^s \circ R^k = R^t \circ R^k = R^{t+k}$

(2) 对 $k$ 归纳. 若 $k=0$ , 则有  $R^{s+0p+i} = R^{s+i}$

假设  $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$ , 其中  $p = t-s$ , 则

$$\begin{aligned} R^{s+(k+1)p+i} &= R^{s+kp+i+p} = R^{s+kp+i} \circ R^p \\ &= R^{s+i} \circ R^p = R^{s+p+i} = R^{s+t-s+i} = R^{t+i} = R^{s+i} \end{aligned}$$

由归纳法命题得证.



(3) 任取  $q \in \mathbb{N}$ ,

若  $q < t$ , 显然有  $R^q \in S$ ,

若  $q \geq t$ , 则存在自然数  $k$  和  $i$  使得

$$q = s + kp + i, \text{ 其中 } 0 \leq i \leq p-1.$$

于是

$$R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$$

而

$$s+i \leq s+p-1 = s+t-s-1 = t-1$$

从而证明了  $R^q \in S$ .



**定义7.11** 设  $R$  为  $A$  上的关系,

- (1) 若  $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$ , 则称  $R$  在  $A$  上是**自反**的.
- (2) 若  $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$ , 则称  $R$  在  $A$  上是**反自反**的.

实例:

自反: 全域关系  $E_A$ , 恒等关系  $I_A$ , 小于等于关系  $L_A$ , 整除关系  $D_A$

反自反: 实数集上的小于关系、幂集上的真包含关系.

$A = \{1, 2, 3\}$ ,  $R_1, R_2, R_3$  是  $A$  上的关系, 其中

$$R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$$

$$R_3 = \{\langle 1, 3 \rangle\}$$

$R_2$  自反,  $R_3$  反自反,  $R_1$  既不是自反的也不是反自反的.



**定义7.12** 设  $R$  为  $A$  上的关系,

(1) 若  $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$ , 则称  $R$  为  $A$  上**对称**的关系.

(2) 若  $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x = y)$ , 则称  $R$  为  $A$  上的**反对称**关系.

实例：对称关系：  $A$  上的全域关系  $E_A$ , 恒等关系  $I_A$  和空关系  $\emptyset$

反对称关系：恒等关系  $I_A$  和空关系也是  $A$  上的反对称关系.

设  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $R_1, R_2, R_3$  和  $R_4$  都是  $A$  上的关系, 其中

$$R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}, \quad R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$$

$$R_3 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}, \quad R_4 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$$

$R_1$ : 对称和反对称;  $R_2$ : 只有对称;  $R_3$ : 只有反对称;

$R_4$ : 不对称、不反对称



**定义7.13** 设 $R$ 为 $A$ 上的关系, 若

$$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R),$$

则称  $R$  是 $A$ 上的**传递**关系.

实例:  $A$ 上的全域关系  $E_A$ , 恒等关系  $I_A$  和空关系  $\emptyset$ , 小于等于和小于关系, 整除关系, 包含与真包含关系

设  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $R_1, R_2, R_3$  是 $A$ 上的关系, 其中

$$R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$$

$$R_3 = \{\langle 1, 3 \rangle\}$$

$R_1$ 和 $R_3$ 是 $A$ 上的传递关系,  $R_2$ 不是 $A$ 上的传递关系.



**定理7.9** 设 $R$ 为 $A$ 上的关系, 则

- (1)  $R$  在 $A$ 上自反当且仅当  $I_A \subseteq R$
- (2)  $R$  在 $A$ 上反自反当且仅当  $R \cap I_A = \emptyset$
- (3)  $R$  在 $A$ 上对称当且仅当  $R = R^{-1}$
- (4)  $R$  在 $A$ 上反对称当且仅当  $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
- (5)  $R$  在 $A$ 上传递当且仅当  $R \circ R \subseteq R$



证明 只证(1)、(3)、(4)、(5)

(1) 必要性

任取 $\langle x, y \rangle$ , 由于 $R$ 在 $A$ 上自反必有

$$\langle x, y \rangle \in I_A \Rightarrow x, y \in A \wedge x = y \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R$$

从而证明了 $I_A \subseteq R$

充分性.

任取 $x$ , 有

$$x \in A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$$

因此 $R$ 在 $A$ 上是自反的.





(3) 必要性.

任取  $\langle x, y \rangle$ ,

$$\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^{-1}$$

所以  $R = R^{-1}$

充分性.

任取  $\langle x, y \rangle$ , 由  $R = R^{-1}$  得

$$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R^{-1} \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$$

所以  $R$  在  $A$  上是对称的



(4) 必要性. 任取 $\langle x, y \rangle$ , 有

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle \in R \cap R^{-1} &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R^{-1} \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \Rightarrow x=y \wedge x, y \in A \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in I_A\end{aligned}$$

这就证明了 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

充分性.

任取 $\langle x, y \rangle$ ,

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R^{-1} \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \cap R^{-1} \Rightarrow \langle x, y \rangle \in I_A \\ &\Rightarrow x=y\end{aligned}$$

从而证明了 $R$ 在 $A$ 上是反对称的.



(5) 必要性.

任取  $\langle x, y \rangle$  有

$$\langle x, y \rangle \in R \circ R$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in R)$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R$$

所以  $R \circ R \subseteq R$

充分性.

任取  $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R$ , 则

$$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R$$

$$\Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \circ R \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$$

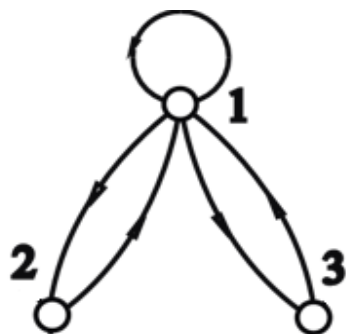
所以  $R$  在  $A$  上是传递的



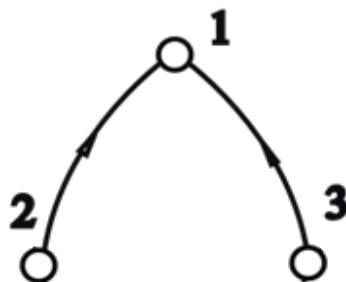
	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \emptyset$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij}=1$ , 且 $i \neq j$ , 则 $r_{ji}=0$	$M^2$ 中1位置, $M$ 中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	两点之间有边, 是一对方向相反的边	两点之间有边, 是一条有向边	点 $x_i$ 到 $x_j$ 有边, $x_j$ 到 $x_k$ 有边, 则 $x_i$ 到 $x_k$ 也有边



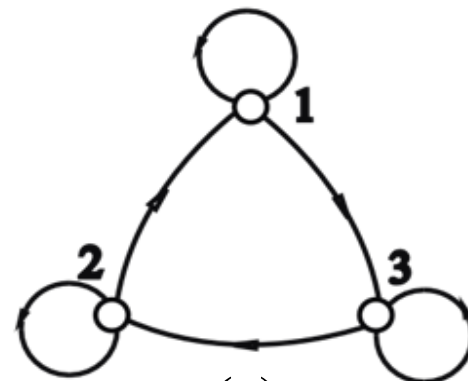
**例9** 判断下列各图的性质



(a)



(b)



(c)

解:

(a) 对称

(b) 反自反、反对称、传递

(c) 自反、反对称



	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
$R_1^{-1}$	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×



### 主要内容

- 闭包定义
- 闭包的构造方法
  - 集合表示
  - 矩阵表示
  - 图表示
- 闭包的性质



**定义7.14** 设 $R$ 是非空集合 $A$ 上的关系,  $R$ 的**自反(对称或传递)闭包**是 $A$ 上的关系 $R'$ , 使得 $R'$ 满足以下条件:

(1)  $R'$ 是自反的(对称的或传递的)

(2)  $R \subseteq R'$

(3) 对 $A$ 上任何包含 $R$ 的自反(对称或传递)关系 $R''$  有 $R' \subseteq R''$

$R$ 的自反闭包记作 $r(R)$ , 对称闭包记作 $s(R)$ , 传递闭包记作 $t(R)$ .

**定理7.10** 设 $R$ 为 $A$ 上的关系, 则有

(1)  $r(R) = R \cup R^0$

(2)  $s(R) = R \cup R^{-1}$

(3)  $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$

说明: 对有穷集 $A$  ( $|A|=n$ ) 上的关系, (3)中的并最多不超过 $R^n$





证 只证(1)和(3).

(1) 由  $I_A = R^0 \subseteq R \cup R^0$  知  $R \cup R^0$  是自反的, 且满足  $R \subseteq R \cup R^0$ . 设  $R''$  是  $A$  上包含  $R$  的自反关系, 则有  $R \subseteq R''$  和  $I_A \subseteq R''$ . 从而有  $R \cup R^0 \subseteq R''$ .  $R \cup R^0$  满足闭包定义, 所以  $r(R) = R \cup R^0$ .

(1) 先证  $R \cup R^2 \cup \dots \subseteq t(R)$  成立.

用归纳法证明对任意正整数  $n$  有  $R^n \subseteq t(R)$ .

$n=1$  时有  $R^1 = R \subseteq t(R)$ . 假设  $R^n \subseteq t(R)$  成立, 那么对任意的  $\langle x, y \rangle$

$$\langle x, y \rangle \in R^{n+1} = R^n \circ R \Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in R^n \wedge \langle t, y \rangle \in R)$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in t(R) \wedge \langle t, y \rangle \in t(R)) \Rightarrow \langle x, y \rangle \in t(R)$$

这就证明了  $R^{n+1} \subseteq t(R)$ . 由归纳法命题得证.



再证  $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup \dots$  成立, 为此只须证明  $R \cup R^2 \cup \dots$  传递.

任取  $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle$ , 则

$$\langle x, y \rangle \in R \cup R^2 \cup \dots \wedge \langle y, z \rangle \in R \cup R^2 \cup \dots$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, y \rangle \in R^t) \wedge \exists s (\langle y, z \rangle \in R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t \exists s (\langle x, z \rangle \in R^t \circ R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t \exists s (\langle x, z \rangle \in R^{t+s})$$

$$\Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \cup R^2 \cup \dots$$

从而证明了  $R \cup R^2 \cup \dots$  是传递的.



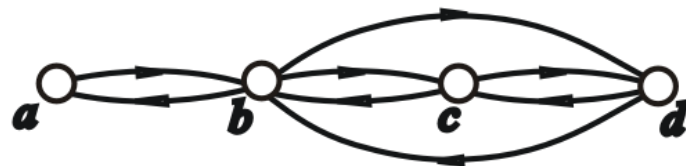
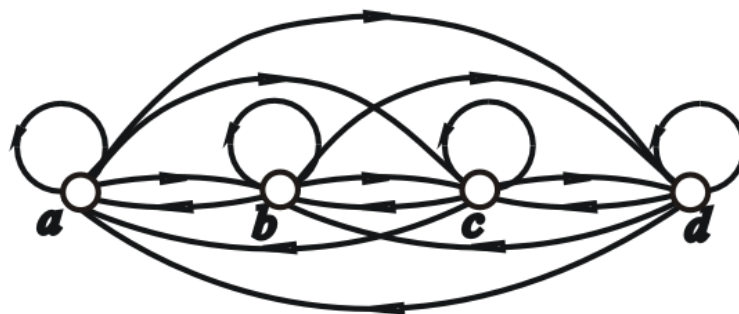
设关系 $R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系矩阵分别为 $M, M_r, M_s$ 和 $M_t$   
则  $M_r = M + E$        $M_s = M + M'$        $M_t = M + M^2 + M^3 + \dots$   
 $E$  是单位矩阵,  $M'$  是转置矩阵, 相加时使用**逻辑加**.

设关系 $R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系图分别记为 $G, G_r, G_s, G_t$ , 则 $G_r, G_s, G_t$ 的顶点集与 $G$ 的顶点集相等. 除了 $G$ 的边以外, 以下述方法添加新的边:

- (1) 考察 $G$ 的每个顶点, 若没环就加一个环, 得到 $G_r$
- (2) 考察 $G$ 的每条边, 若有一条 $x_i$ 到 $x_j$ 的单向边,  $i \neq j$ , 则在 $G$ 中加一条 $x_j$ 到 $x_i$ 的反向边, 得到 $G_s$
- (3) 考察 $G$ 的每个顶点 $x_i$ , 找 $x_i$ 可达的所有顶点 $x_j$  (允许 $i=j$ ), 如果没有从 $x_i$ 到 $x_j$ 的边, 就加上这条边, 得到图 $G_t$



**例9** 设 $A=\{a,b,c,d\}$ ,  $R=\{<a,b>, <b,a>, <b,c>, <c,d>, <d,b>\}$ ,  
 $R$ 和 $r(R)$ ,  $s(R)$ ,  $t(R)$ 的关系图如下图所示.

 $R$  $r(R)$  $s(R)$  $t(R)$



### 算法 **Warshall**

输入:  $M$  ( $R$ 的关系矩阵)

输出:  $M_T$  ( $t(R)$ 的关系矩阵)

1.  $M_T \leftarrow M$
2. for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do
3.   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
4.     for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
5.        $M_T[i,j] \leftarrow M_T[i,j] + M_T[i,k] \cdot M_T[k,j]$



设 $A=\{a,b,c,d\}$ ,  $R=\{<a,b>, <b,a>, <b,c>, <c,d>, <d,b>\}$ ,

$R$ 的传递闭包的矩阵如下:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



**定理7.11** 设 $R$ 是非空集合 $A$ 上的关系, 则

- (1)  $R$ 是自反的当且仅当  $r(R)=R$ .
- (2)  $R$ 是对称的当且仅当  $s(R)=R$ .
- (3)  $R$ 是传递的当且仅当  $t(R)=R$ .

**定理7.12** 设 $R_1$ 和 $R_2$ 是非空集合 $A$ 上的关系, 且  $R_1 \subseteq R_2$ , 则

- (1)  $r(R_1) \subseteq r(R_2)$
- (2)  $s(R_1) \subseteq s(R_2)$
- (3)  $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明 略



**定理7.13** 设 $R$ 是非空集合 $A$ 上的关系,

- (1) 若 $R$ 是自反的, 则  $s(R)$  与  $t(R)$  也是自反的
- (2) 若 $R$ 是对称的, 则  $r(R)$  与  $t(R)$  也是对称的
- (3) 若 $R$ 是传递的, 则  $r(R)$  是传递的.

说明: 如果需要进行多个闭包运算, 比如求 $R$ 的自反、对称、传递的闭包  $tsr(R)$ , 运算顺序如下:

$$tsr(R) = rts(R) = trs(R)$$

证明 略





### 主要内容

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应



**定义7.15** 设 $R$ 为非空集合上的关系. 如果 $R$ 是自反的、对称的和传递的, 则称 $R$ 为 $A$ 上的**等价关系**. 设 $R$ 是一个等价关系, 若 $\langle x, y \rangle \in R$ , 称 **$x$ 等价于 $y$** , 记做 $x \sim y$ .

**实例** 设 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ , 如下定义 $A$ 上的关系 $R$ :

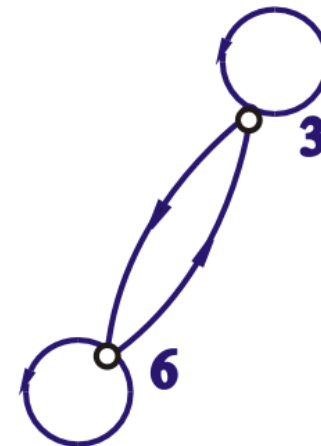
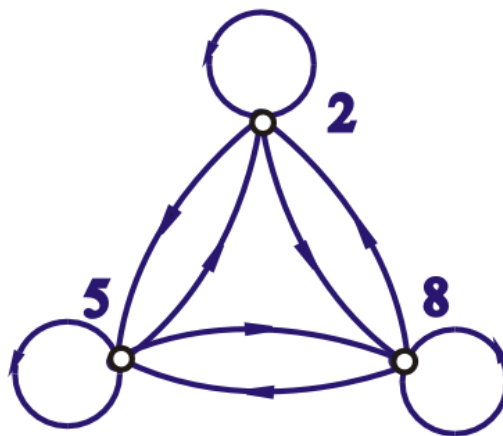
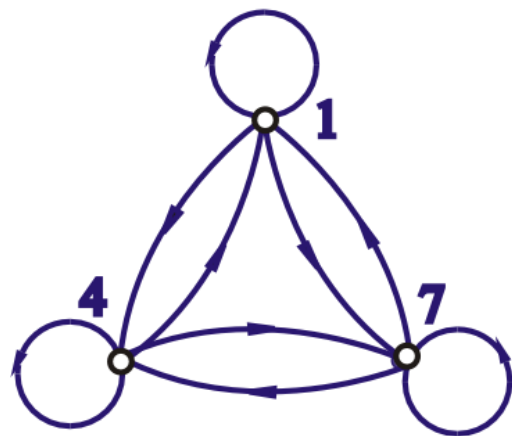
$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod{3} \}$$

其中 $x \equiv y \pmod{3}$ 叫做 **$x$ 与 $y$ 模3相等**, 即 $x$ 除以3的余数与 $y$ 除以3的余数相等. 不难验证 $R$ 为 $A$ 上的等价关系, 因为

(1)  $\forall x \in A$ , 有  $x \equiv x \pmod{3}$

(2)  $\forall x, y \in A$ , 若  $x \equiv y \pmod{3}$ , 则有  $y \equiv x \pmod{3}$

(3)  $\forall x, y, z \in A$ , 若  $x \equiv y \pmod{3}$ ,  $y \equiv z \pmod{3}$ , 则有  $x \equiv z \pmod{3}$



模 3 等价关系的关系图



**定义7.16** 设 $R$ 为非空集合 $A$ 上的等价关系,  $\forall x \in A$ , 令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}$$

称 $[x]_R$ 为 $x$ 关于 $R$ 的等价类, 简称为 $x$ 的**等价类**, 简记为 $[x]$ 或  $\bar{x}$

**实例**  $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ 上模3等价关系的等价类:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$



**定理7.14** 设 $R$ 是非空集合 $A$ 上的等价关系, 则

- (1)  $\forall x \in A$ ,  $[x]$ 是 $A$ 的非空子集
- (2)  $\forall x, y \in A$ , 如果  $xRy$ , 则  $[x] = [y]$
- (3)  $\forall x, y \in A$ , 如果  $x \not R y$ , 则  $[x]$ 与 $[y]$ 不交
- (4)  $\cup\{[x] \mid x \in A\} = A$

证 (1) 由定义,  $\forall x \in A$ 有 $[x] \subseteq A$ . 又 $x \in [x]$ , 即 $[x]$ 非空.

(2) 任取  $z$ , 则有

$$z \in [x] \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \Rightarrow \langle z, x \rangle \in R$$

$$\langle z, x \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle z, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, z \rangle \in R$$

从而证明了 $z \in [y]$ . 综上所述必有  $[x] \subseteq [y]$ . 同理可证  $[y] \subseteq [x]$ .

这就得到了 $[x] = [y]$ .



(3) 假设  $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ , 则存在  $z \in [x] \cap [y]$ , 从而有  $z \in [x] \wedge z \in [y]$ , 即  $\langle x, z \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R$  成立. 根据  $R$  的对称性和传递性必有  $\langle x, y \rangle \in R$ , 与  $x \not R y$  矛盾

$\mathcal{R}$

(4) 先证  $\cup\{[x] \mid x \in A\} \subseteq A$ . 任取  $y$ ,

$$y \in \cup\{[x] \mid x \in A\} \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge y \in [x])$$

$$\Rightarrow y \in [x] \wedge [x] \subseteq A \Rightarrow y \in A$$

从而有  $\cup\{[x] \mid x \in A\} \subseteq A$

再证  $A \subseteq \cup\{[x] \mid x \in A\}$ . 任取  $y$ ,

$$y \in A \Rightarrow y \in [y] \wedge y \in A \Rightarrow y \in \cup\{[x] \mid x \in A\}$$

从而有  $\cup\{[x] \mid x \in A\} \subseteq A$  成立.

综上所述得  $\cup\{[x] \mid x \in A\} = A$ .



**定义7.17** 设  $R$  为非空集合  $A$  上的等价关系, 以  $R$  的所有等价类作为元素的集合称为  $A$  关于  $R$  的**商集**, 记做  $A/R$ ,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

实例 设  $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ ,  $A$  关于模3等价关系  $R$  的商集为

$$A/R = \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}\}$$

$A$  关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{8\}\}, \quad A/E_A = \{\{1, 2, \dots, 8\}\}$$

**定义7.18** 设  $A$  为非空集合, 若  $A$  的子集族  $\pi (\pi \subseteq P(A))$  满足:

- (1)  $\emptyset \notin \pi$
- (2)  $\forall x \forall y (x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$
- (3)  $\bigcup \pi = A$

则称  $\pi$  是  $A$  的一个**划分**, 称  $\pi$  中的元素为  $A$  的**划分块**.



**例10** 设  $A = \{ a, b, c, d \}$ , 给定  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$  如下:

$$\pi_1 = \{ \{ a, b, c \}, \{ d \} \}$$

$$\pi_2 = \{ \{ a, b \}, \{ c \}, \{ d \} \}$$

$$\pi_3 = \{ \{ a \}, \{ a, b, c, d \} \}$$

$$\pi_4 = \{ \{ a, b \}, \{ c \} \}$$

$$\pi_5 = \{ \emptyset, \{ a, b \}, \{ c, d \} \}$$

$$\pi_6 = \{ \{ a, \{ a \} \}, \{ b, c, d \} \}$$

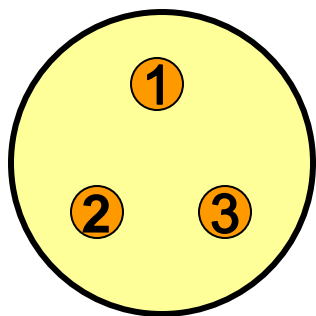
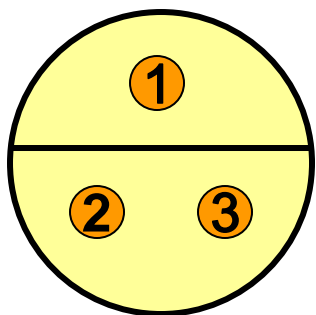
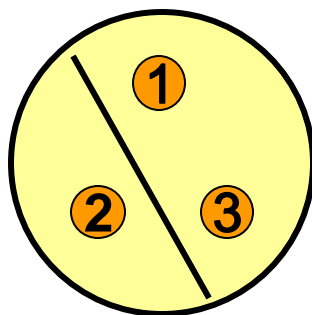
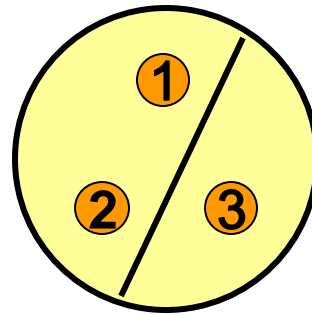
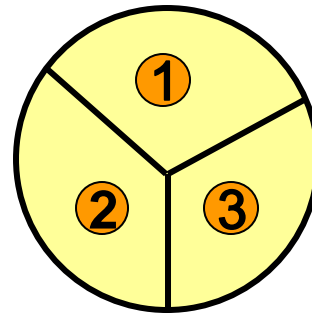
则  $\pi_1$  和  $\pi_2$  是  $A$  的划分, 其他都不是  $A$  的划分.





**例11** 给出  $A=\{1,2,3\}$  上所有的等价关系

解 先做出  $A$  的划分, 从左到右分别记作  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$ .

 $\pi_1$  $\pi_2$  $\pi_3$  $\pi_4$  $\pi_5$ 

$\pi_1$  对应  $E_A$ ,  $\pi_5$  对应  $I_A$ ,  $\pi_2, \pi_3$  和  $\pi_4$  分别对应  $R_2, R_3$  和  $R_4$ .

$$R_2 = \{ \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \} \cup I_A$$

$$R_3 = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \} \cup I_A$$

$$R_4 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \} \cup I_A$$



## 主要内容

- 偏序关系

  - 偏序关系的定义

  - 偏序关系的实例

- 偏序集与哈斯图

- 偏序集中的特殊元素及其性质

  - 极大元、极小元、最大元、最小元

  - 上界、下界、最小上界、最大下界



### 定义7.19

**偏序关系**：非空集合 $A$ 上的自反、反对称和传递的关系，记作 $\leq$ . 设 $\leq$ 为偏序关系，如果  $\langle x, y \rangle \in \leq$ ，则记作  $x \leq y$ ，读作  $x$ “小于或等于”  $y$ .

### 实例

集合 $A$ 上的恒等关系  $I_A$  是  $A$  上的偏序关系.

小于或等于关系，整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.



**定义7.20** 设  $R$  为非空集合  $A$  上的偏序关系,

(1)  $x, y \in A$ ,  $x$  与  $y$  **可比**  $\Leftrightarrow x \leq y \vee y \leq x$

(2) 任取元素  $x$  和  $y$ , 可能有下述几种情况发生:  
 $x < y$  (或  $y < x$ ),  $x = y$ ,  $x$  与  $y$  不是可比的

**定义7.21**  $R$  为非空集合  $A$  上的偏序关系,

(1)  $\forall x, y \in A$ ,  $x$  与  $y$  都是可比的, 则称  $R$  为**全序** (或线序)

实例: 数集上的小于或等于关系是全序关系, 整除关系不是正整数集合上的全序关系

**定义7.22**  $x, y \in A$ , 如果  $x < y$  且不存在  $z \in A$  使得  $x < z < y$ , 则称  $y$  **覆盖**  $x$ .

例如  $\{1, 2, 4, 6\}$  集合上整除关系, 2覆盖1, 4和6覆盖2, 4不覆盖1.



**定义7.23** 集合 $A$ 和 $A$ 上的偏序关系 $\leq$ 一起叫做**偏序集**, 记作 $\langle A, \leq \rangle$ .

实例:  $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle, \langle P(A), R_{\subseteq} \rangle$

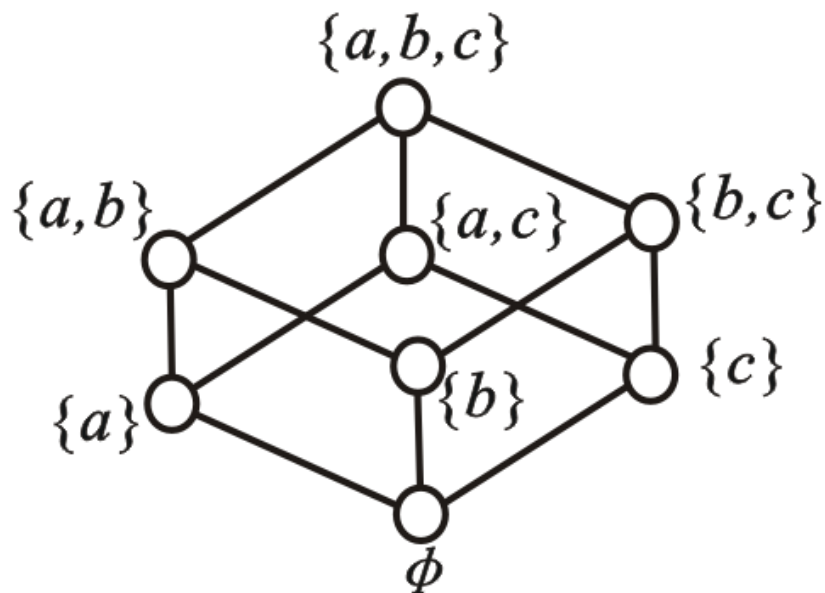
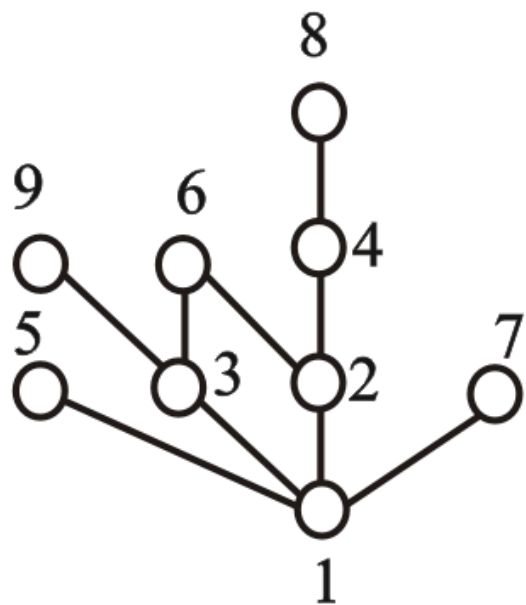
**哈斯图**: 利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图

特点:

- (1) 每个结点没有环
- (2) 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示, 位置低的元素的顺序在前
- (3) 具有覆盖关系的两个结点之间连边

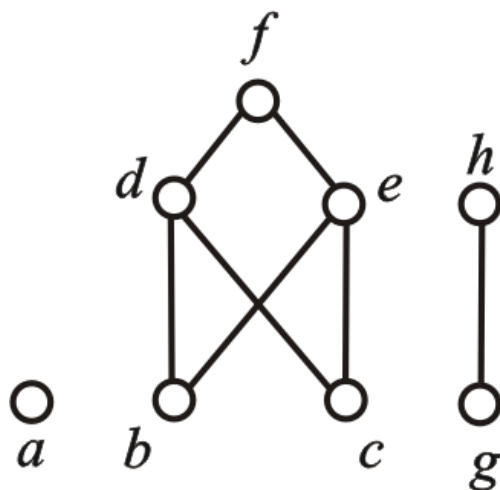


**例12** 偏序集 $\langle \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, R_{\text{整除}} \rangle$ 和 $\langle P(\{a,b,c\}), R_{\subseteq} \rangle$ 的哈斯图.





**例13** 已知偏序集 $\langle A, R \rangle$ 的哈斯图如下图所示, 试求出集合 $A$ 和关系 $R$ 的表达式.



解  $A = \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$

$R = \{ \langle b, d \rangle, \langle b, e \rangle, \langle b, f \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, e \rangle, \langle c, f \rangle, \langle d, f \rangle, \langle e, f \rangle, \langle g, h \rangle \} \cup I_A$



**定义7.24** 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集,  $B \subseteq A, y \in B$

- (1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称  $y$  为  $B$  的**最小元**
- (2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称  $y$  为  $B$  的**最大元**
- (3) 若 $\forall x(x \in B \wedge x \leq y \rightarrow x = y)$ 成立, 则称  $y$  为  $B$  的**极小元**
- (4) 若 $\forall x(x \in B \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$ 成立, 则称  $y$  为  $B$  的**极大元**

性质: •

- (1) 对于有穷集, 极小元和极大元一定存在, 可能存在多个.
- (2) 最小元和最大元不一定存在, 如果存在一定惟一.
- (3) 最小元一定是极小元; 最大元一定是极大元.
- (4) 孤立结点既是极小元, 也是极大元.





**定义7.25** 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集,  $B \subseteq A, y \in A$

(1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 $y$ 为 $B$ 的**上界**

(2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 $y$ 为 $B$ 的**下界**

(3) 令 $C = \{y \mid y \text{ 为 } B \text{ 的上界}\}$ ,  $C$ 的最小元为 $B$ 的**最小上界或上确界**

(4) 令 $D = \{y \mid y \text{ 为 } B \text{ 的下界}\}$ ,  $D$ 的最大元为 $B$ 的**最大下界或下确界**

性质:

(1) 下界、上界、下确界、上确界不一定存在

(2) 下界、上界存在不一定惟一

(3) 下确界、上确界如果存在, 则惟一

(4) 集合的最小元是其下确界, 最大元是其上确界; 反之不对.



**例14** 设偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ , 求 $A$ 的极小元、最小元、极大元、最大元, 设 $B = \{ b, c, d \}$ , 求 $B$ 的下界、上界、下确界、上确界.

解

极小元:  $a, b, c, g$ ;

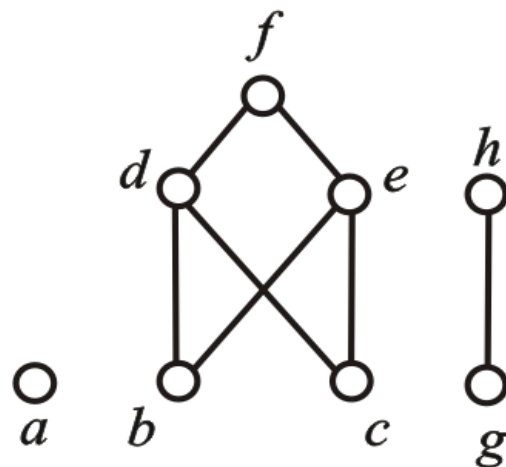
极大元:  $a, f, h$ ;

没有最小元与最大元.

$B$ 的下界和最大下界都不存在;

上界有  $d$  和  $f$ ,

最小上界为  $d$ .





**例15** 设 $X$ 为集合,  $A = P(X) - \{\emptyset\} - \{X\}$ , 且 $A \neq \emptyset$ . 若 $|X| = n, n \geq 2$ . 问:

- (1) 偏序集  $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$  是否存在最大元?
- (2) 偏序集  $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$  是否存在最小元?
- (3) 偏序集  $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$  中极大元和极小元的一般形式是什么?  
并说明理由.

解 (1)  $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$  不存在最小元和最大元, 因为 $n \geq 2$ .

(2)  $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$  的极小元就是  $X$  的所有单元集, 即 $\{x\}, x \in X$ .

(3)  $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$  的极大元恰好比  $X$  少一个元素, 即 $X - \{x\}, x \in X$ .



有穷任务集 $T$ ,  $m$ 台相同的机器,

$T$ 上存在偏序 $\leq$ , 若  $t_1 < t_2$ , 任务 $t_1$ 完成后  $t_2$  才能开始.

$\forall t \in T$ ,  $l(t)$ 是  $t$  需要的时间,  $d(t)$ 是  $t$  的截止时间,  $l(t), d(t) \in \mathbb{Z}^+$

开始时间为0,  $\sigma: T \rightarrow \{0, 1, \dots\}$ 表示对任务集  $T$  的一个调度,

完成所有任务的时间:  $D = \max\{\sigma(t) + l(t) \mid t \in T\}$

**可行调度**  $\sigma$  满足:

(1)  $\forall t \in T, \sigma(t) + l(t) \leq d(t)$  每个任务都在截止时间之前完成

(2)  $\forall i, 0 \leq i \leq D, |\{t \in T \mid \sigma(t) \leq i < \sigma(t) + l(t)\}| \leq m$

至多 $m$ 个任务并行

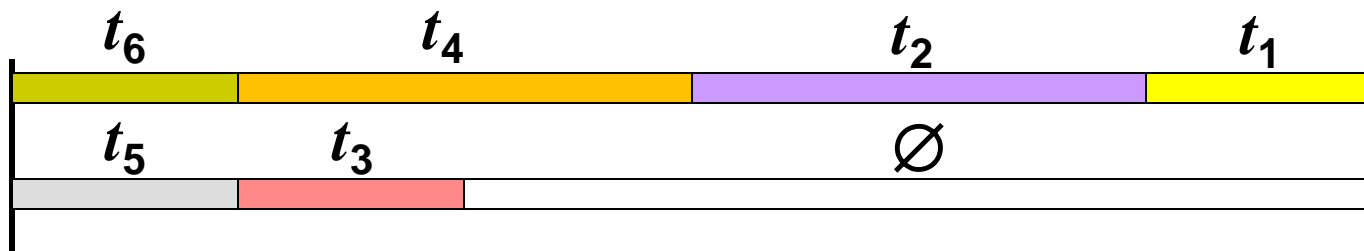
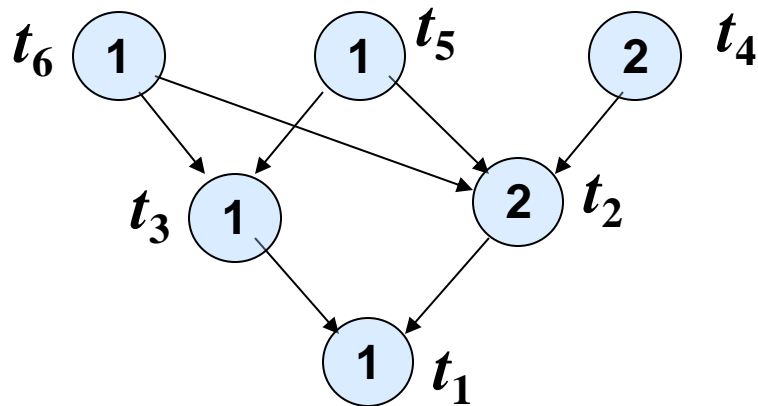
(3)  $\forall t, t' \in T, t < t' \Rightarrow \sigma(t) + l(t) \leq \sigma(t')$  任务安排满足偏序



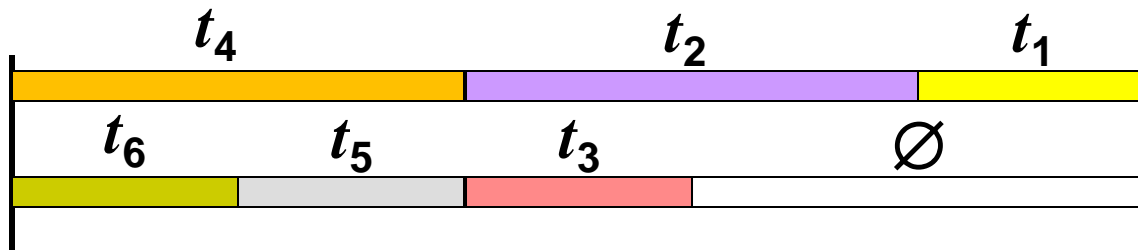
**例16**  $m=2$ ,  $T=\{t_1, t_2, \dots, t_6\}$

$l(t_i)$  如图所示,  $d(t_i)=7$

拓扑排序:  $m=1$ ,  $t_i$  都相等



$D=6$



$D=5$



## 主要内容

- 有序对与笛卡儿积的定义与性质
- 二元关系、从 $A$ 到 $B$ 的关系、 $A$ 上的关系
- 关系的表示法：关系表达式、关系矩阵、关系图
- 关系的运算：定义域、值域、域、逆、合成、限制、像、幂
- 关系运算的性质： $A$ 上关系的自反、反自反、对称、反对称、传递的性质
- $A$ 上关系的自反、对称、传递闭包
- $A$ 上的等价关系、等价类、商集与 $A$ 的划分
- $A$ 上的偏序关系与偏序集



- 熟练掌握关系的三种表示法
- 能够判定关系的性质（等价关系或偏序关系）
- 掌握含有关系运算的集合等式
- 掌握等价关系、等价类、商集、划分、哈斯图、偏序集等概念
- 计算  $A \times B$ ,  $\text{dom } R$ ,  $\text{ran } R$ ,  $\text{fld } R$ ,  $R^{-1}$ ,  $R \circ S$ ,  $R^n$ ,  $r(R)$ ,  $s(R)$ ,  $t(R)$
- 求等价类和商集  $A/R$
- 给定  $A$  的划分  $\pi$ , 求出  $\pi$  所对应的等价关系
- 求偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、上确界、下确界
- 掌握基本的证明方法
  - 证明涉及关系运算的集合等式
  - 证明关系的性质、证明关系是等价关系或偏序关系



1. 设  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \text{ 且 } x+2y \leq 6 \}$ ,  
 $S = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$ ,

求:

(1)  $R$  的集合表达式

(2)  $R^{-1}$

(3)  $\text{dom } R, \text{ran } R, \text{fld } R$

(4)  $R \circ S, R^3$

(5)  $r(R), s(R), t(R)$





$$(1) R = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle \}$$

$$(2) R^{-1} = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle \}$$

$$(3) \text{dom}R = \{1, 2, 3\}, \text{ran}R = \{1,2\}, \text{fld}R = \{1, 2, 3\}$$

$$(4) R \circ S = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle \}$$

$$R^3 = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle \}$$

$$(5) r(R) = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,3 \rangle \}$$

$$s(R) = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 1,3 \rangle \}$$

$$t(R) = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle \}$$



2. 设 $A=\{1,2,3,4\}$ , 在 $A \times A$ 上定义二元关系 $R$ :

$$\langle \langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle \rangle \in R \Leftrightarrow x+y = u+v,$$

求 $R$ 导出的划分.

$$\begin{aligned} A \times A = \{ & \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \\ & \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \\ & \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \} \end{aligned}$$

根据  $\langle x, y \rangle$  中的  $x+y = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$  将 $A$ 划分成等价类:

$$\begin{aligned} A/R = \{ & \{ \langle 1, 1 \rangle \}, \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}, \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \}, \\ & \{ \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle \}, \\ & \{ \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \}, \\ & \{ \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 3 \rangle \}, \{ \langle 4, 4 \rangle \} \} \end{aligned}$$



3. 设 $R$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的模  $n$  等价关系, 即

$$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{n},$$

试给出由 $R$ 确定的 $\mathbb{Z}$ 的划分 $\pi$ .

解 设除以  $n$  余数为  $r$  的整数构成等价类  $[r]$ , 则

$$[r] = \{ kn+r \mid k \in \mathbb{Z} \}, \quad r = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\pi = \{ [r] \mid r = 0, 1, \dots, n-1 \}$$



4. 设偏序集  $\langle A, R \rangle$  的哈斯图如图所示.

(1) 写出  $A$  和  $R$  的集合表达式

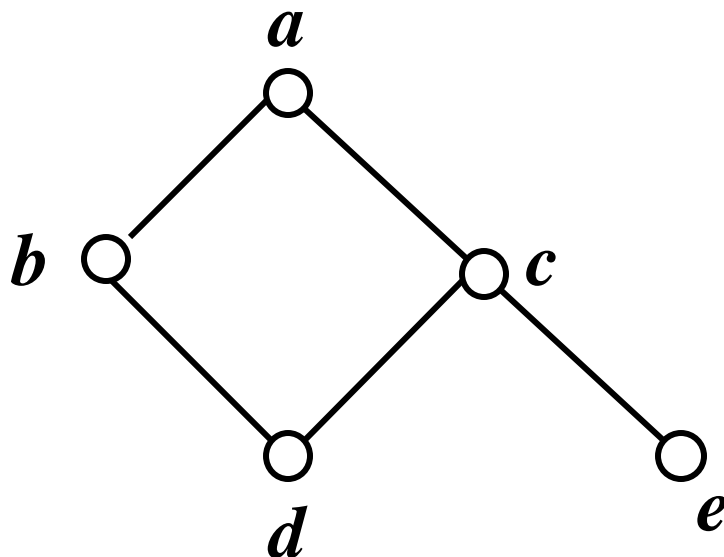
(2) 求该偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元

解

(1)  $A = \{a, b, c, d, e\}$

$R = \{\langle d, b \rangle, \langle d, a \rangle, \langle d, c \rangle, \langle e, c \rangle, \langle e, a \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, a \rangle\} \cup I_A$

(2) 极大元和最大元是  $a$ ,  
极小元是  $d, e$ ;  
没有最小元.





5. 设 $R$ 是 $A$ 上的二元关系, 设

$$S = \{ \langle a, b \rangle \mid \exists c (\langle a, c \rangle \in R \wedge \langle c, b \rangle \in R) \}.$$

证明如果 $R$ 是等价关系, 则 $S$ 也是等价关系。

证  $R$ 是 $A$ 上的等价关系.

(1) 证自反 任取 $x$ ,

$$x \in A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R \Rightarrow \exists x (\langle x, x \rangle \in R \wedge \langle x, x \rangle \in R) \Rightarrow \langle x, x \rangle \in S$$

(2) 证对称 任取 $\langle x, y \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in S &\Rightarrow \exists c (\langle x, c \rangle \in R \wedge \langle c, y \rangle \in R) \\ &\Rightarrow \exists c (\langle c, x \rangle \in R \wedge \langle y, c \rangle \in R) \Rightarrow \langle y, x \rangle \in S \end{aligned}$$

(3) 证传递 任取 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in S \wedge \langle y, z \rangle \in S \\ &\Rightarrow \exists c (\langle x, c \rangle \in R \wedge \langle c, y \rangle \in R) \wedge \exists d (\langle y, d \rangle \in R \wedge \langle d, z \rangle \in R) \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow \langle x, z \rangle \in S \end{aligned}$$



6. 设偏序集 $\langle A, R \rangle$ 和 $\langle B, S \rangle$ , 定义 $A \times B$ 上二元关系 $T$ :

$$\langle x, y \rangle T \langle u, v \rangle \Leftrightarrow xRu \wedge ySv$$

证明 $T$ 为偏序关系.

证 (1) 自反性 任取 $\langle x, y \rangle$ ,

$$\langle x, y \rangle \in A \times B \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \Rightarrow xRx \wedge ySy \Rightarrow \langle x, y \rangle T \langle x, y \rangle$$

(2) 反对称性 任取 $\langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle T \langle u, v \rangle \wedge \langle u, v \rangle T \langle x, y \rangle &\Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRx \wedge vSy \\ &\Rightarrow (xRu \wedge uRx) \wedge (ySv \wedge vSy) \Rightarrow x=u \wedge y=v \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

(3) 传递性 任取 $\langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle, \langle w, t \rangle$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle T \langle u, v \rangle \wedge \langle u, v \rangle T \langle w, t \rangle &\Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRw \wedge vSt \\ &\Rightarrow (xRu \wedge uRw) \wedge (ySv \wedge vSt) \Rightarrow xRw \wedge ySt \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle T \langle w, t \rangle \end{aligned}$$

1. 证明 $R$ 在 $A$ 上自反任取 $x$ ,

$$x \in A \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$$

前提

推理过程

结论

2. 证明 $R$ 在 $A$ 上对称任取 $\langle x, y \rangle$ ,

$$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$$

前提

推理过程

结论



### 3. 证明 $R$ 在 $A$ 上反对称

任取 $\langle x, y \rangle$ ,

$$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \Rightarrow \dots \Rightarrow x = y$$

前提

推理过程

结论

### 4. 证明 $R$ 在 $A$ 上传递

任取 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle$ ,

$$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$$

前提

推理过程

结论





7.  $R, S$  为  $A$  上的关系, 证明  $R \subseteq S \Rightarrow t(R) \subseteq t(S)$

证 只需证明对于任意正整数  $n$ ,  $R^n \subseteq S^n$ . 对  $n$  归纳.  
 $n=1$ , 显然为真.

假设对于  $n$ , 命题为真, 任取  $\langle x, y \rangle$

$$\langle x, y \rangle \in R^{n+1}$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R^n \circ R$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in R^n \wedge \langle t, y \rangle \in R)$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in S^n \wedge \langle t, y \rangle \in S)$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in S^n \circ S$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in S^{n+1}$$



- 数学归纳法（主要用于幂运算）
- 证明中用到关系运算的定义和公式, 如:

$$x \in \text{dom}R \Leftrightarrow \exists y (<x, y> \in R)$$

$$y \in \text{ran}R \Leftrightarrow \exists x (<x, y> \in R)$$

$$<x, y> \in R \Leftrightarrow <y, x> \in R^{-1}$$

$$<x, y> \in R \circ S \Leftrightarrow \exists t (<x, t> \in R \wedge <t, y> \in S)$$

$$<x, y> \in R \upharpoonright A \Leftrightarrow x \in A \wedge <x, y> \in R$$

$$y \in R[A] \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge <x, y> \in R)$$

$$r(R) = R \cup I_A$$

$$s(R) = R \cup R^{-1}$$

$$t(R) = R \cup R^2 \cup \dots$$