离散数学
及其应用

第一部分 数理逻辑

主要内容

- 命题逻辑基本概念
- 命题逻辑等值演算
- 命题逻辑的推理理论
- 一阶逻辑基本概念
- 一阶逻辑等值演算

第一章 命题逻辑基本概念

主要内容

- 命题与联结词
  命题及其分类
  联结词与复合命题
- 命题公式及其赋值

1.1 命题与联结词

命题与真值

命题：判断结果惟一的陈述句

命题的真值：判断的结果

真值的取值：真与假

真命题与假命题

注意：

感叹句、祈使句、疑问句都不是命题

陈述句中的悖论，判断结果不惟一确定的不是命题

命题概念

例1 下列句子中那些是命题?

(1) $\sqrt{2}$ 是有理数. 假命题

(2) $2 + 5 = 7$. 真命题

(3) $x + 5 > 3$. 不是命题

(4) 你去教室吗? 不是命题

(5) 这个苹果真大呀! 不是命题

(6) 请不要讲话! 不是命题

(7) 2050年元旦下大雪. 命题，但真值现在不知道

命题分类

命题分类：简单命题（也称原子命题）与复合命题

简单命题符号化

- 用小写英文字母 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i$ $(i\geq 1)$表示简单命题
- 用“1”表示真，用“0”表示假

例如，令

p: $\sqrt{2}$是有理数，则 p 的真值为0，

q：$2 + 5 = 7$，则 q 的真值为1

否定联结词与合取联结词

定义1.1 设 p为命题，复合命题“非p”(或“p的否定”)称为p的否定式，记作$\neg p$，符号$\neg$称作否定联结词. 规定$\neg p$为真当且仅当p为假.

定义1.2 设p,q为两个命题，复合命题“p并且q”(或“p与q”)称为p与q的合取式，记作$p\wedge q$，$\wedge$称作合取联结词. 规定$p\wedge q$为真当且仅当p与q同时为真.

合取联结词的实例

例2　将下列命题符号化.

(1) 吴颖既用功又聪明.

(2) 吴颖不仅用功而且聪明.

(3) 吴颖虽然聪明，但不用功.

(4) 张辉与王丽都是三好生.

(5) 张辉与王丽是同学.

合取联结词的实例

解 令p:吴颖用功, q:吴颖聪明

(1) $p \wedge q$

(2) $p \wedge q$

(3) $\neg p \wedge q$

(4) 设p:张辉是三好生, q:王丽是三好生

$p \wedge q$

(5) p:张辉与王丽是同学

(1)—(3) 说明描述合取式的灵活性与多样性

(4)—(5) 要求分清 “与” 所联结的成分

析取联结词

定义1.3 设p, q为两个命题，复合命题 "p或q"称作p与q的**析取式**，记作$p \vee q$，$\vee$称作**析取联结词**. 规定$p \vee q$为假当且仅当p与q同时为假.

例3 将下列命题符号化

(1) 2 或 4 是素数.

(2) 2 或 3 是素数.

(3) 4 或 6 是素数.

(4) 小元元只能拿一个苹果或一个梨.

(5) 王小红生于 1975 年或 1976 年.

析取联结词的实例

解

(1) 令p:2是素数, q:4是素数, $p\vee q$

(2) 令p:2是素数, q:3是素数, $p\vee q$

(3) 令p:4是素数, q:6是素数, $p\vee q$

(4) 令p:小元元拿一个苹果, q:小元元拿一个梨

$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

(5) p:王小红生于 1975 年, q:王小红生于1976 年,

$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$ 或 $p\vee q$

(1)—(3) 为相容或

(4)—(5) 为排斥或, 符号化时(5)可有两种形式，而(4)则不能

蕴涵联结词

定义1.4 设p, q为两个命题，复合命题“如果p, 则q”称作p与q的蕴涵式，记作$p\rightarrow q$，并称p是蕴涵式的前件，q为蕴涵式的后件，$\rightarrow$称作蕴涵联结词. 规定：$p\rightarrow q$为假当且仅当p为真q为假.

(1) $p\rightarrow q$ 的逻辑关系：q为 p 的必要条件, p是q的充分条件.

(2) “如果 p, 则 q” 有很多不同的表述方法：

若p，就q

只要p，就q

p仅当q

只有q 才p

除非q, 才p 或 除非q，否则非p，….

(3) 当 p 为假时，$p\rightarrow q$恒为真，称为空证明

(4) 常出现的错误：分不清充分条件与必要条件

蕴涵联结词的实例

例4 设 p：天冷，q：小王穿羽绒服，将下列命题符号化

(1) 只要天冷，小王就穿羽绒服. $p\to q$

(2) 因为天冷，所以小王穿羽绒服. $p\to q$

(3) 若小王不穿羽绒服，则天不冷. $p\to q$

(4) 只有天冷，小王才穿羽绒服. $q\to p$

(5) 除非天冷，小王才穿羽绒服. $q\to p$

(6) 除非小王穿羽绒服，否则天不冷. $p\to q$

(7) 如果天不冷，则小王不穿羽绒服. $\neg p\to\neg q$

(8) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候. $q\to p$

注意：$\neg p\to \neg q$ 与 $q\to p$ 等值（真值相同）

等价联结词

定义1.5 设 p, q为两个命题，复合命题 “p当且仅当q”称作p与q的等价式，记作$p\leftrightarrow q$，$\leftrightarrow$称作等价联结词. 规定$p\leftrightarrow q$为真当且仅当p与q同时为真或同时为假.

$p\leftrightarrow q$ 的逻辑关系：p与q互为充分必要条件

例5 求下列复合命题的真值

(1) 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 3 + 3 ＝ 6. 1

(2) 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 3 是偶数. 0

(3) 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 太阳从东方升起. 1

(4) 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 美国位于非洲. 0

(5) 函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的充要条件是 它在 x_0 连续. 0

小　结

- 本小节中$p, q, r, \ldots$ 均表示命题.
- 联结词集为$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，$\neg p, p\wedge q, p\vee q, p\rightarrow q, p\leftrightarrow q$为基本复合命题. 其中要特别注意理解$p\rightarrow q$的涵义. 多次使用$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$中的联结词组成更为复杂的复合命题.

设 p: $\sqrt{2}$是无理数，q: 3是奇数，
r: 苹果是方的，　s: 太阳绕地球转
则复合命题 $(p\rightarrow q) \leftrightarrow ((r\wedge\neg s) \vee\neg p)$ 是假命题.

- 联结词的运算顺序：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, 同级从左到右顺序进行. ( )最先, 按从内到外顺序进行.

1.2 命题公式及其赋值

命题变项与合式公式

- 命题变项
- 合式公式
- 合式公式的层次

公式的赋值

- 公式赋值
- 公式类型
- 真值表

命题变项与合式公式

命题常项

命题变项（命题变元）

常项与变项均用 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots,$ 等表示.

定义1.6 合式公式（简称公式）的递归定义：

(1) 单个命题变项和命题常项是合式公式, 称作原子命题公式

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是

(4) 只有有限次地应用(1)—(3) 形成的符号串才是合式公式

几点说明：

归纳或递归定义，外层括号可以省去

合式公式的层次

定义1.7

(1) 若公式A是单个命题变项，则称A为0层公式.

(2) 称 A 是 $n+1(n\geq 0)$ 层公式是指下面情况之一：

(a) $A=\neg B$, B 是 n 层公式；

(b) $A=B\wedge C$, 其中B,C 分别为 i 层和 j 层公式，且 $n=\max(i,j)$；

(c) $A=B\vee C$, 其中 B,C 的层次及 n 同(b)；

(d) $A=B\rightarrow C$, 其中B,C 的层次及 n 同(b)；

(e) $A=B\leftrightarrow C$, 其中B,C 的层次及 n 同(b).

(3) 若公式A的层次为k, 则称A为k层公式.

例如 公式 $A=p$，$B=\neg p$，$C=\neg p\rightarrow q$，$D=\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$，

$E=((\neg p\wedge q)\rightarrow r)\leftrightarrow(\neg r\vee s)$

分别为0层，1层，2层，3层，4层公式.

公式的赋值

定义1.8 设$p_1, p_2, \ldots, p_n$是出现在公式A中的全部命题变项，给$p_1, p_2, \ldots, p_n$各指定一个真值，称为对A的一个**赋值**或**解释**. 若赋值使A为1，则称这组值为A的**成真赋值**；若赋值使A为0，则称这组值为A的**成假赋值**.

几点说明：

- A中仅出现$p_1, p_2, \ldots, p_n$，给A赋值$\alpha=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$是指 $p_1=\alpha_1, p_2=\alpha_2, \ldots, p_n=\alpha_n$, α_i=0或1, α_i之间不加标点符号
- A中仅出现$p, q, r, \ldots$，给A赋值$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$是指 $p=\alpha_1, q=\alpha_2, r=\alpha_3 \ldots$
- 含n个命题变项的公式有2^n个赋值.

如 000, 010, 101, 110是$\neg(p\to q)\leftrightarrow r$的成真赋值

001, 011, 100, 111是成假赋值.

真值表

定义1.9 将命题公式A在所有赋值下取值的情况列成表, 称作A的真值表.

构造真值表的步骤:

(1) 找出公式中所含的全部命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$(若无下角标则按字母顺序排列), 列出2^n个全部赋值, 从00…0开始, 按二进制加法, 每次加1, 直至11…1为止.

(2) 按从低到高的顺序写出公式的各个层次.

(3) 对每个赋值依次计算各层次的真值, 直到最后计算出公式的真值为止.

真值表

例6 写出下列公式的真值表, 并求它们的成真赋值和成假赋值:

(1) $(p \lor q) \to \neg r$

(2) $(q \to p) \land q \to p$

(3) $\neg (\neg p \lor q) \land q$

真值表1

(1) $A = (p \vee q) \rightarrow \neg r$

p q r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \rightarrow \neg r$
0 0 0	0	1	1
0 0 1	0	0	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	0	0
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

成真赋值:000,001,010,100,110; 成假赋值:011,101,111

真值表2

(2) $B = (q \to p) \land q \to p$

p	q	$q \to p$	$(q \to p) \land q$	$(q \to p) \land q \to p$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

成真赋值:00,01,10,11; 无成假赋值

真值表3

(3) $C = \neg(\neg p \vee q) \wedge q$的真值表

p q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$\neg(\neg p \vee q) \wedge q$
0 0	1	1	0	0
0 1	1	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	1	0	0

成假赋值:00,01,10,11; 无成真赋值

公式的类型

定义1.10

(1) 若A在它的任何赋值下均为真, 则称A为**重言式**或**永真式**;

(2) 若A在它的任何赋值下均为假, 则称A为**矛盾式**或**永假式**;

(3) 若A不是矛盾式, 则称A是**可满足式**.

由例1可知, $(p\vee q)\rightarrow\neg r$为非重言式的可满足式,

$(q\rightarrow p)\wedge q\rightarrow p$为重言式, $\neg(\neg p\vee q)\wedge q$为矛盾式.

注意：重言式是可满足式，但反之不真.

真值表的用途:

求出公式的全部成真赋值与成假赋值, 判断公式的类型

第一章 习题课

主要内容

- 命题、真值、简单命题与复合命题、命题符号化
- 联结词$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$及复合命题符号化
- 命题公式及层次
- 公式的类型
- 真值表及应用

基本要求

- 深刻理解各联结词的逻辑关系, 熟练地将命题符号化
- 会求复合命题的真值
- 深刻理解合式公式及重言式、矛盾式、可满足式等概念
- 熟练地求公式的真值表，并用它求公式的成真赋值与成假赋值及判断公式类型

练习1

1. 将下列命题符号化

(1) 豆沙包是由面粉和红小豆做成的.

(2) 苹果树和梨树都是落叶乔木.

(3) 王小红或李大明是物理组成员.

(4) 王小红或李大明中的一人是物理组成员.

(5) 由于交通阻塞，他迟到了.

(6) 如果交通不阻塞，他就不会迟到.

(7) 他没迟到，所以交通没阻塞.

(8) 除非交通阻塞，否则他不会迟到.

(9) 他迟到当且仅当交通阻塞.

练习1解答

提示：
分清复合命题与简单命题
分清相容或与排斥或
分清必要条件, 充分条件及充分必要条件

答案: (1) 是简单命题 (2) 是合取式
(3) 是析取式（相容或）(4) 是析取式（排斥或）

设 p: 交通阻塞，q: 他迟到

(5) $p \to q$, (6) $\neg p \to \neg q$ 或 $q \to p$

(7) $\neg q \to \neg p$ 或 $p \to q$, (8) $q \to p$ 或 $\neg p \to \neg q$

(9) $p \leftrightarrow q$

可见(5)与(7)，(6)与(8) 相同（等值）

练习2

2. 设 p : 2是素数

q : 北京比天津人口多

r : 美国的首都是旧金山

求下面命题的真值

(1) $(p \vee q) \rightarrow r$ 0

(2) $(q \vee r) \rightarrow (p \rightarrow \neg r)$ 1

(3) $(q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge \neg r)$ 0

(4) $(q \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow \neg r) \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg q))$ 0

练习3

3. 用真值表判断下面公式的类型

(1) $p \wedge r \wedge \neg(q \rightarrow p)$

(2) $((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \vee r$

(3) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$

练习3解答

(1) $p\wedge r\wedge\neg(q\to p)$

p	q	r	$q\to p$	$\neg(q\to p)$	$p\wedge r\wedge\neg(q\to p)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

矛盾式

练习3解答

(2) $((p\to q)\to(\neg q\to\neg p))\vee r$

p	q	r	$p\to q$	$\neg q\to\neg p$	$((p\to q)\to(\neg q\to\neg p))\vee r$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

永真式

练习3解答

(3) $(p\to q)\leftrightarrow(p\to r)$

p q r	$p\to q$	$p\to r$	$(p\to q)\leftrightarrow(p\to r)$
0 0 0	1	1	1
0 0 1	1	1	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	1	1
1 0 0	0	0	1
1 0 1	0	1	0
1 1 0	1	0	0
1 1 1	1	1	1

非永真式的可满足式