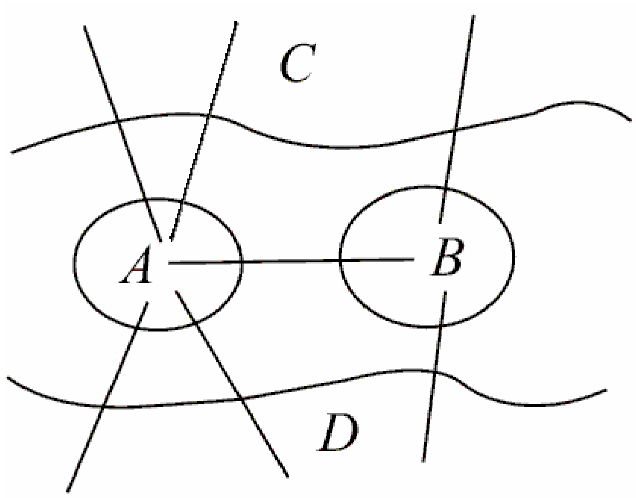
第十一章 几种特殊的图

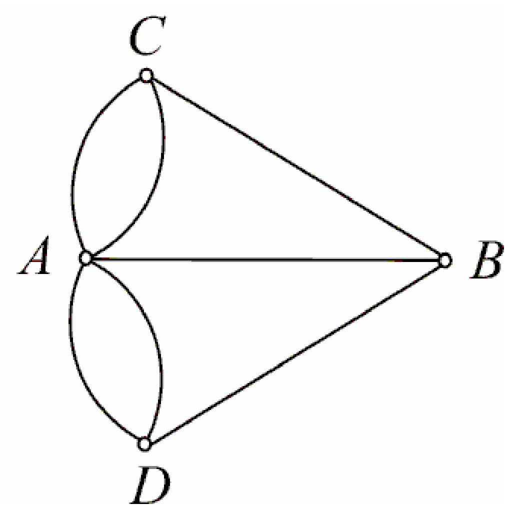
主要内容

- 欧拉图
- 哈密顿图
- 二部图与匹配
- 平面图
- 着色

11.1 欧拉图

历史背景：哥尼斯堡七桥问题





欧拉图定义

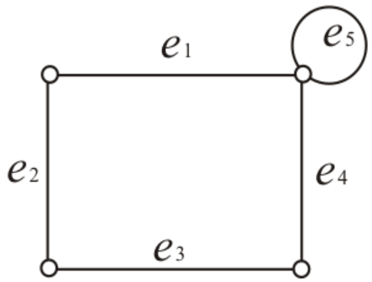
定义11.1 图(无向图或有向图)中所有边恰好通过一次且经过所有顶点的通路称为欧拉通路. 图中所有边恰好通过一次且经过所有顶点的回路称为欧拉回路. 具有欧拉回路的图称为欧拉图. 具有欧拉通路而无欧拉回路的图称为半欧拉图.

说明:

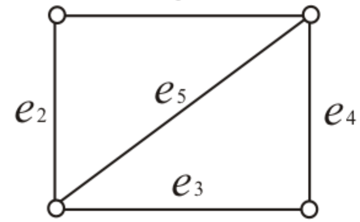
规定平凡图为欧拉图.

环不影响图的欧拉性.

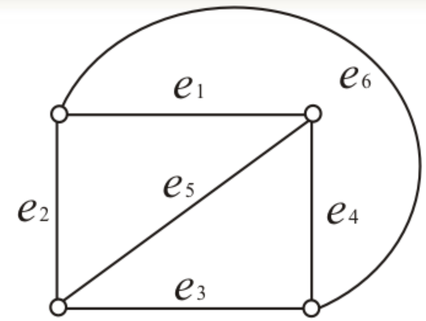
欧拉图实例



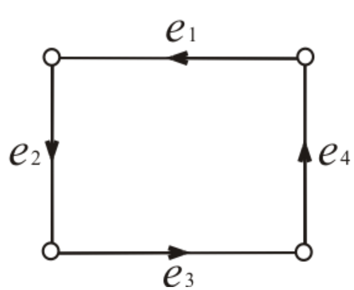
欧拉图



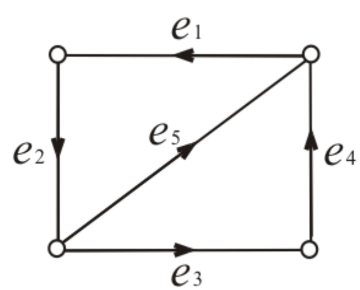
半欧拉图



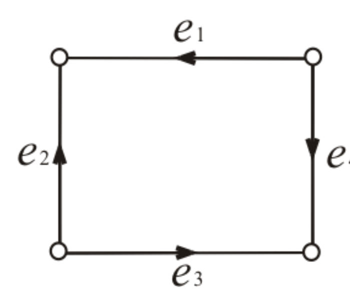
不是



欧拉图



半欧拉图



不是

欧拉图的判别法

定理11.1 (1) 无向图G是欧拉图当且仅当G是连通的且没有奇度顶点.

(2) 无向图G是半欧拉图当且仅当G是连通的且恰有两个奇度顶点.

(3) 有向图D是欧拉图当且仅当D是强连通的且每个顶点的入度等于出度.

(4) 有向图D是半欧拉图当且仅当D是单向连通的且恰有两个奇度顶点, 其中一个顶点的入度比出度大1, 另一个顶点出度比入度大1, 其余顶点的入度等于出度.

例1 设G是非平凡的欧拉图，则$\lambda(G)\geq 2$.

证 只需证明G的任意一条边e都不是桥. 设C是一条欧拉回路, e在C上，因而$G-e$仍是连通的，故e不是桥.

Fleury算法

算法:

(1) 任取$v_0 \in V(G)$, 令$P_0=v_0$, $i=0$.

(2) 设$P_i = v_0e_1v_1e_2\ldots e_iv_i$,

如果$E(G)$-$\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中没有与v_i关联的边, 则计算结束;

否则按下面方法从$E(G)-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中选取$e_{i+1}$:

(a) e_{i+1}与v_i 关联;

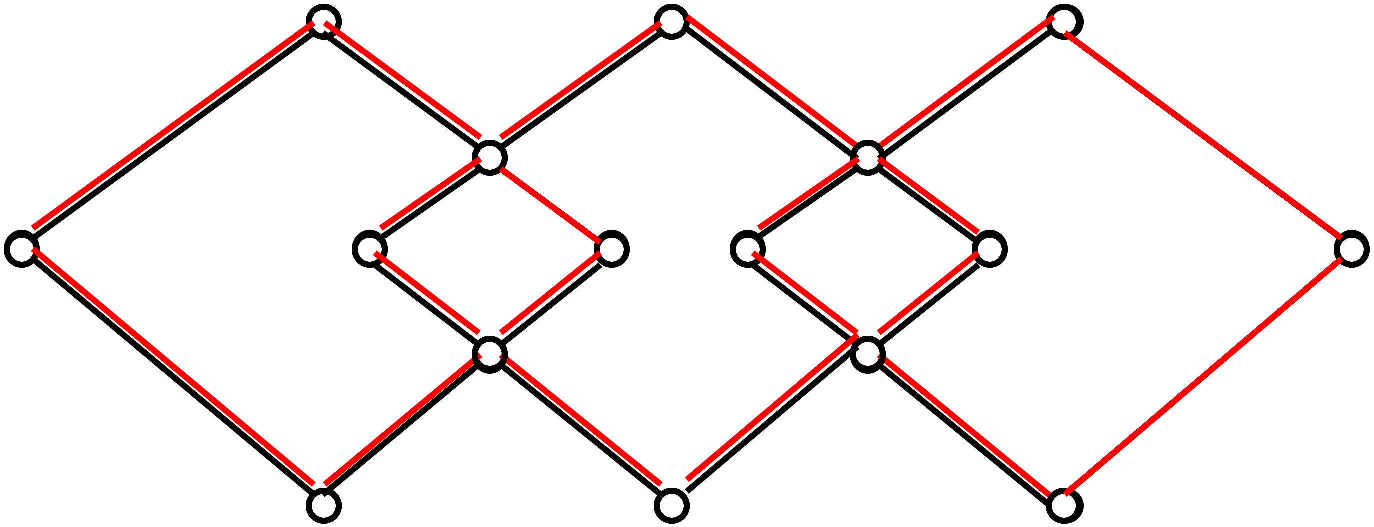
(b) 除非无别的边可供选择, 否则e_{i+1}不应为 $G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$ 中的桥.

设$e_{i+1}=(v_i,v_{i+1})$, 把$e_{i+1}v_{i+1}$加入P_i.

(3) 令$i=i+1$, 返回(2).

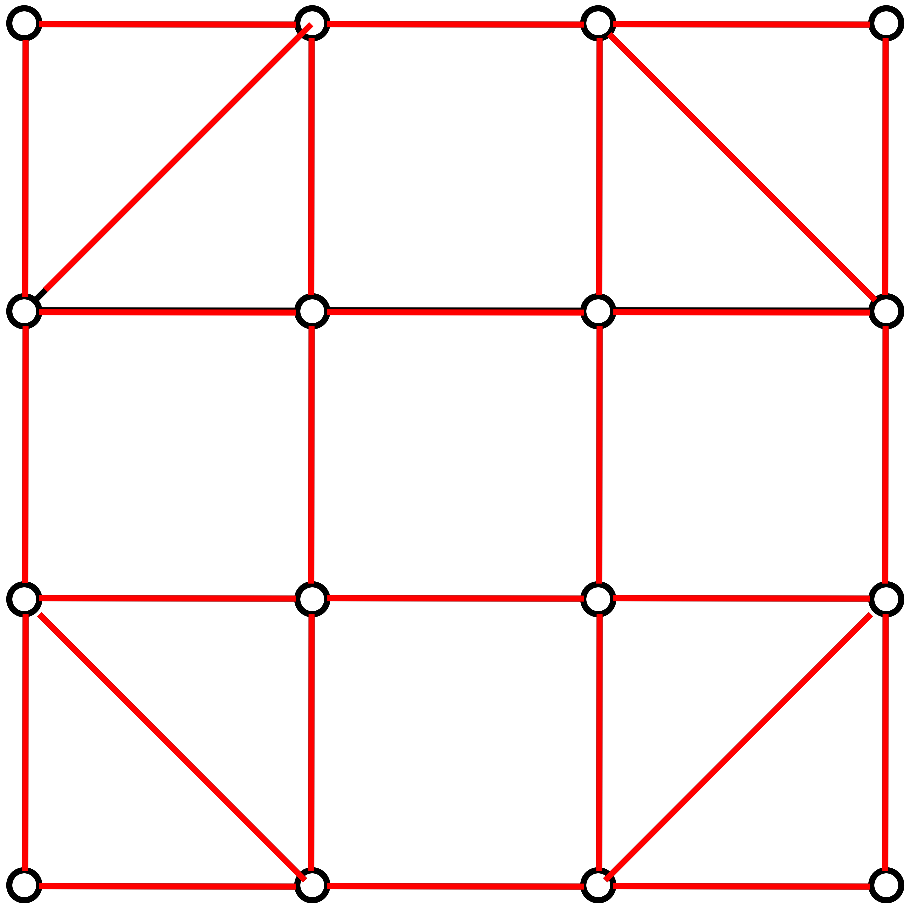
实例

一笔画出一条欧拉回路



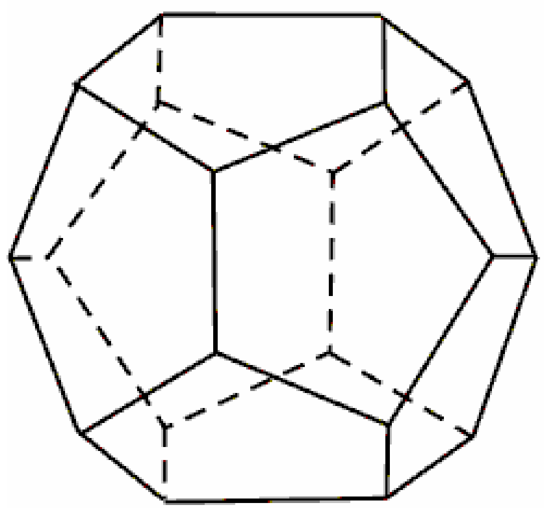
实例

一笔画出一条欧拉回路

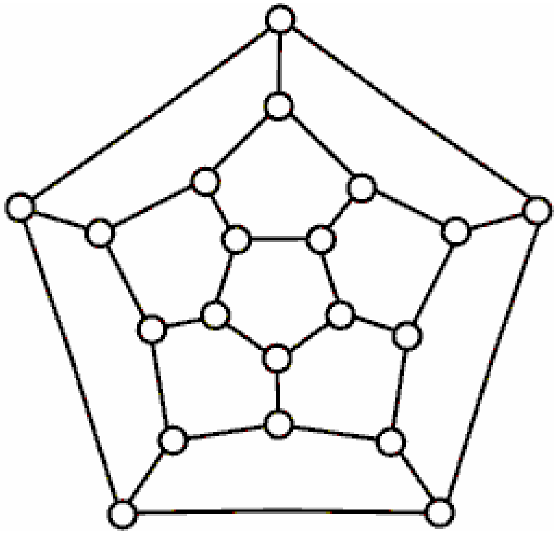


11.2 哈密顿图

历史背景：哈密顿周游世界问题



(1)



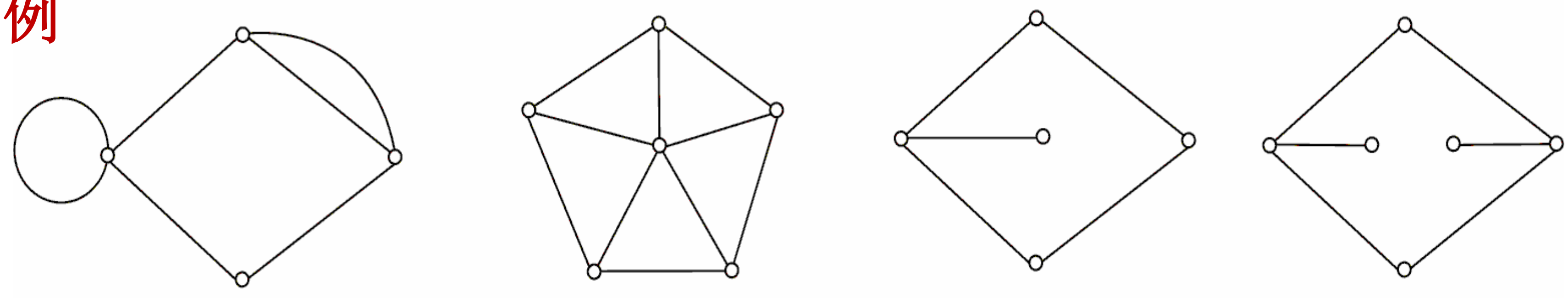
(2)

哈密顿图与半哈密顿图

定义11.2 经过图中所有顶点一次且仅一次的通路称作**哈密顿通路**. 经过图中所有顶点一次且仅一次的回路称作**哈密顿回路**. 具有哈密顿回路的图称作**哈密顿图**. 具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图称作**半哈密顿图**.

规定: 平凡图是哈密顿图.

例



哈密顿图　　　哈密顿图　　　半哈密顿图　　　不是

无向哈密顿图的一个必要条件

定理11.2 设无向图$G=<V,E>$是哈密顿图，对于任意$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$，均有 $p(G-V_1) \leq |V_1|$

证 设C为G中一条哈密顿回路

(1) $p(C-V_1) \leq |V_1|$

(2) $p(G-V_1) \leq p(C-V_1) \leq |V_1|$ （因为$C \subseteq G$）

推论 设无向图$G=<V,E>$是半哈密顿图，对于任意的$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$均有

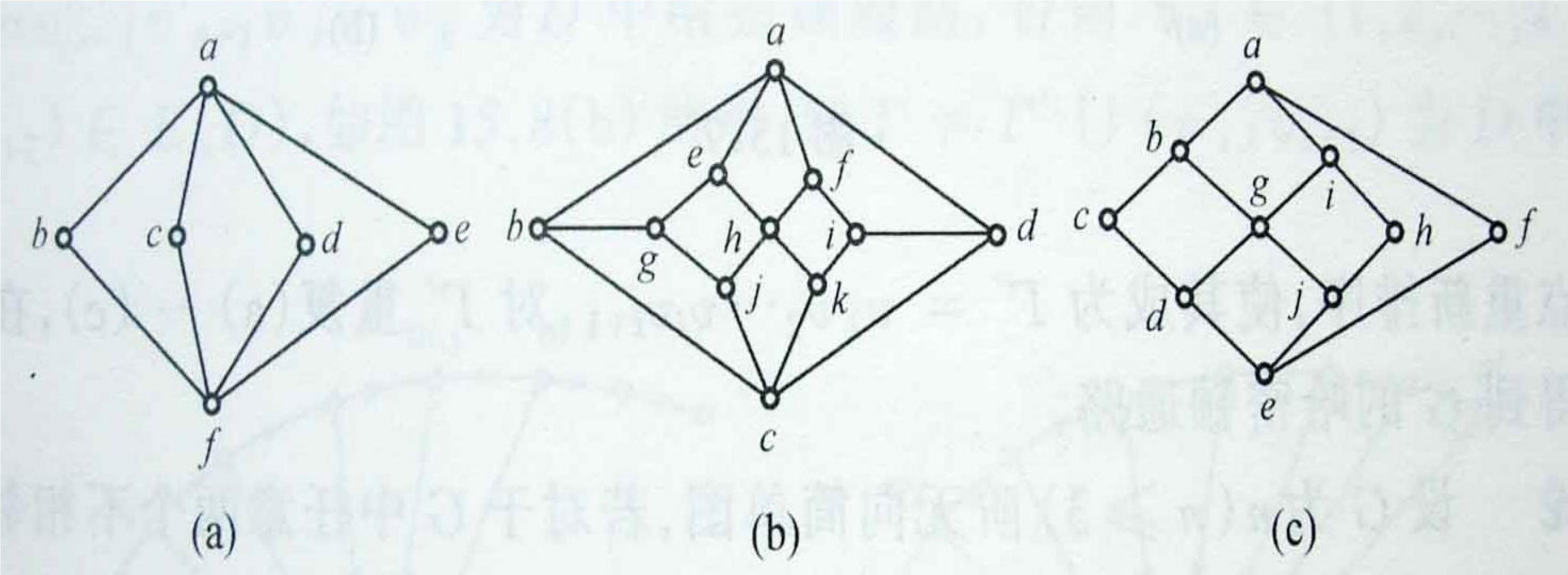
$$p(G-V_1) \leq |V_1|+1$$

证 设Γ为从u到v的哈密顿通路，令$G' = G \cup (u,v)$，则G'为哈密顿图. 于是

$$p(G-V_1) = p(G'-V_1-(u,v)) \leq p(G'-V_1)+1 \leq |V_1|+1$$

例题

例2 判断下面的图是不是哈密顿图, 是不是半哈密顿图.



解 (a)取$V_1=\{a,f\}$, $p(G-V_1)=|\{b,c,d,e\}|=4>|V_1|=2$, 不是哈密顿图，也不是半哈密顿图.

(b)取$V_1=\{a,g,h,i,c\}$, $p(G-V_1)=|\{b,e,f,j,k,d\}|=6>|V_1|=5$, 不是哈密顿图. 而*baegjckhfid*是一条哈密顿通路, 是半哈密顿图.

(c) *abcdgihjefa*是一条哈密顿回路， 是哈密顿图.

例题

例3 设G为n阶无向连通简单图，若G中有割点或桥，则G不是哈密顿图.

证 设v为割点，则 $p(G-v) \geq 2>|\{v\}|=1$.

K_2有桥，它显然不是哈密顿图. 除K_2外，其他有桥的连通图均有割点.

无向哈密顿图的一个充分条件

定理11.3 设G是n阶无向简单图, 若对于任意不相邻的顶点v_i,v_j, 均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n-1 \qquad (*)$$

则G 中存在哈密顿通路.

推论 设G为n $(n\geq 3)$ 阶无向简单图, 若对于G中任意两个不相邻的顶点v_i,v_j, 均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n \qquad (**)$$

则G中存在哈密顿回路.

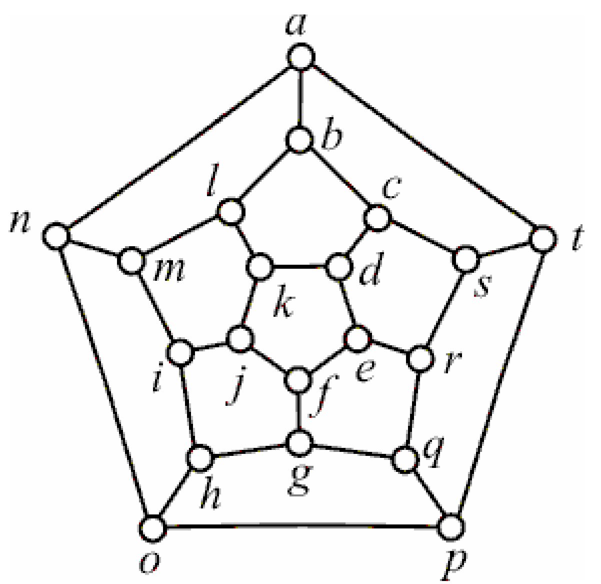
判断是否为哈密顿图

判断是否为(半)哈密顿图至今还是一个难题.

(1) 观察出一条哈密顿回路或哈密顿通路.

(2) 证明满足充分条件.

(3) 证明不满足必要条件.



例4 证明右图(周游世界问题)是哈密顿图

证 *a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t a*

是一条哈密顿回路.

注意，此图不满足定理11.3推论的条件.

例5 完全图K_n (n≥3)是哈密顿图.

证 任何两个顶点u,v，$d(u)+d(v) = 2(n-1) \geq n$

货郎问题

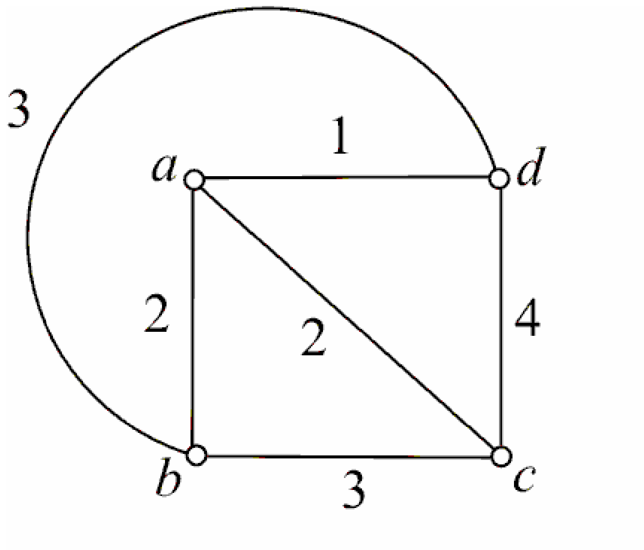
货郎问题: 有n个城市, 给定城市之间道路的长度(长度可以为∞, 对应这两个城市之间无交通线). 货郎从某个城市出发, 要经过每个城市一次且仅一次, 最后回到出发的城市, 问如何走才能使他走的路线最短?

图论方法描述如下: 设$G=\langle V,E,W\rangle$为一个n阶完全带权图K_n, 各边的权非负, 且可能为∞. 求G中的一条最短的哈密顿回路.

不计出发点和方向, $K_n(n\geq 3)$中有$(n-1)!/2$ 条不同的哈密顿回路

例题

例6 求下面带权图K_4中最短哈密顿回路.



解 $C_1 = a\ b\ c\ d\ a$, $W(C_1)=10$

$C_2 = a\ b\ d\ c\ a$, $W(C_2)=11$

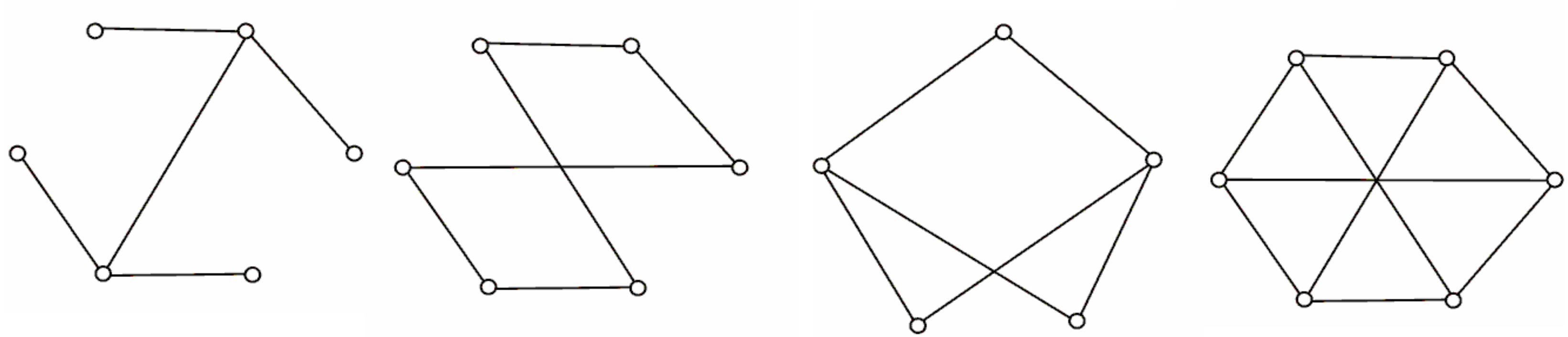
$C_3 = a\ c\ b\ d\ a$, $W(C_3)=9$ 最短

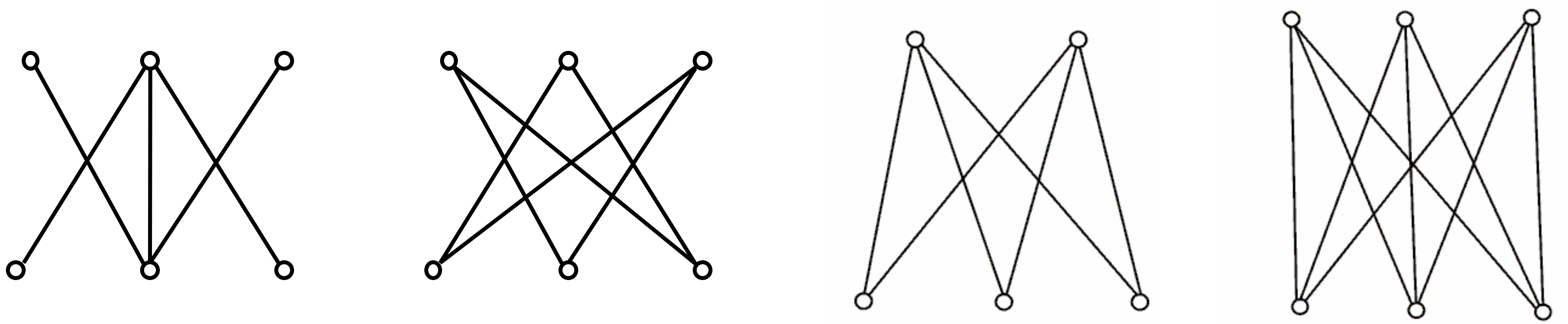
11.3 二部图与匹配

定义11.3 设 $G=\langle V,E\rangle$为一个无向图, 若能将 V分成 V_1和V_2 ($V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\varnothing$), 使得 G 中的每条边的两个端点都是一个属于V_1, 另一个属于V_2, 则称 G 为二部图 (或称二分图, 偶图), 称V_1和V_2为互补顶点子集, 常将二部图G记为$\langle V_1,V_2,E\rangle$. 又若G是简单二部图, V_1中每个顶点均与V_2中所有的顶点相邻, 则称G为完全二部图, 记为 $K_{r,s}$, 其中$r=|V_1|$, $s=|V_2|$.

实例

例





$K_{2,3}$ $K_{3,3}$

二部图的判别法

定理11.4 无向图$G=<V_1,V_2,E>$是二部图当且仅当G中无奇圈.

证 必要性. 若G中无圈, 结论成立. 若G中有圈, 设G中的一个圈$C=v_1v_2\ldots v_lv_1$, $l\geq 2$. 不妨设$v_1\in V_1$, $v_1,v_2,\ldots,v_l$ 依次交替属于V_1, V_2且$v_l\in V_2$, 因而l为偶数. 得证C为偶圈.

充分性. 不妨设G为连通图, 否则可对每个连通分支进行讨论, 孤立点可根据需要分属V_1和V_2. 设v_0为G中任意一个顶点, 令

$$V_1=\{v \mid v\in V(G)\wedge d(v_0,v)\text{为偶数}\}$$

$$V_2=\{v \mid v\in V(G)\wedge d(v_0,v)\text{为奇数}\}$$

$d(v_0,v)$是v_0到v的最短路径的边数(每条边的权为1). $V_1\neq\varnothing$, $V_2\neq\varnothing$, $V_1\cap V_2=\varnothing$, $V_1\cup V_2=V(G)$. 要证V_1中任意两点不相邻.

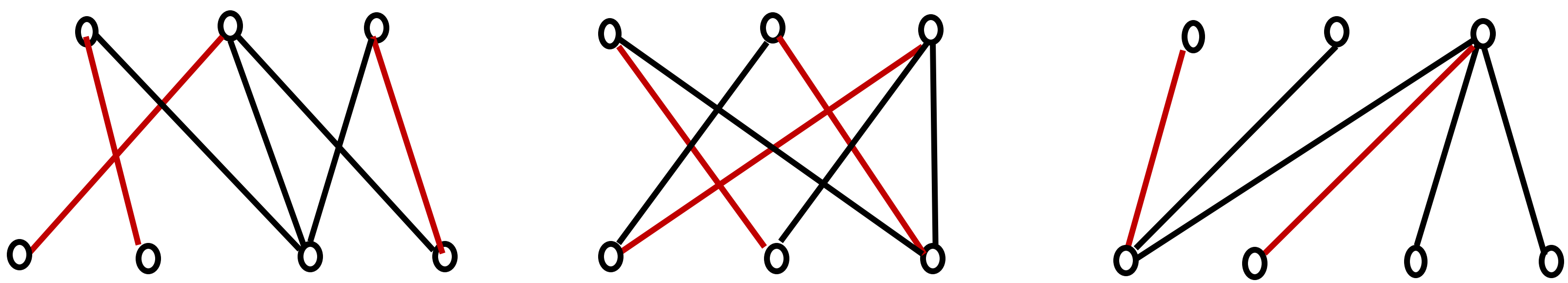
证明

假若存在$v_i,v_j \in V_1$相邻, 记$e=(v_i,v_j)$, 设v_0到v_i,v_j的最短路径分别为Γ_i, Γ_j, 由Γ_i,Γ_j和e构成一条长度为奇数的回路. 这条回路可能是一条复杂回路, 可以分解成若干由Γ_i,Γ_j共有的边构成的回路(实际上是每条边重复一次的路径)和由Γ_i,Γ_j不共有的边及e构成的圈. 由Γ_i,Γ_j共有的边构成的回路的长度为偶数, 故在由Γ_i,Γ_j不共有的边(可以还包括e)构成的圈中一定有奇圈, 这与已知条件矛盾. 得证V_1中任意两顶点不相邻. 由对称性, V_2中也不存在相邻的顶点, 得证G为二部图.

最大匹配

定义11.4 设$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$为二部图, $M\subseteq E$, 如果M中的任意两条边都不相邻, 则称M是G的一个匹配. G中边数最多的匹配称作最大匹配. 又设$|V_1|\le|V_2|$, 如果M是G的一个匹配且$|M|=|V_1|$, 则称M是V_1到V_2的完备匹配. 当$|V_2|=|V_1|$时, 完备匹配又称作完美匹配.

例



完备匹配　　　完美匹配　　　最大匹配

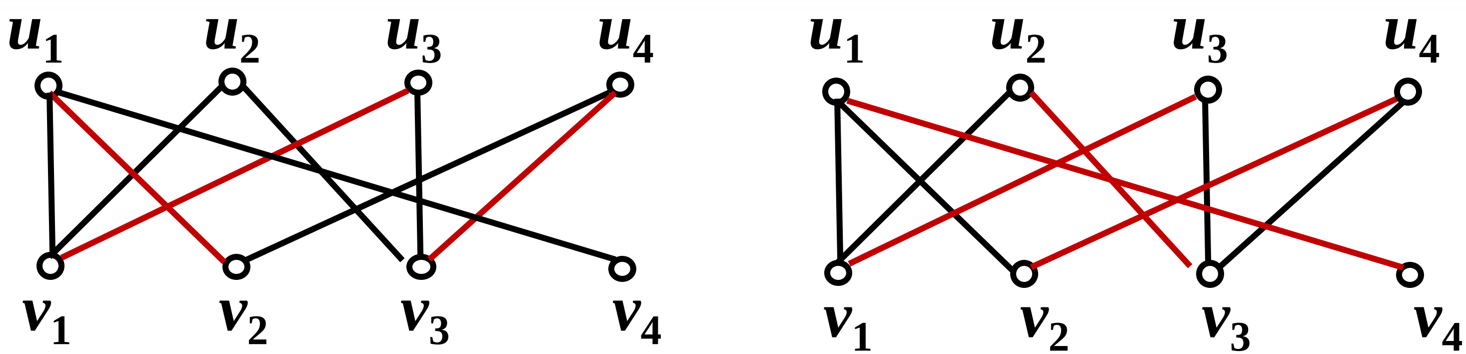
与匹配有关的概念

定义11.5 设M是二部图$G=<V_1,V_2,E>$的一个匹配. 称M中的边为匹配边, 不在M中的边为非匹配边. 与匹配边相关联的顶点为饱和点, 不与匹配边相关联的顶点为非饱和点. G中由匹配边和非匹配边交替构成的路径称为交错路径, 起点和终点都是非饱和点的交错路径称为可增广的交错路径.

M为G的完备匹配当且仅当V_1或V_2中的每个顶点都是饱和点.
M为G的完美匹配当且仅当G中的每个顶点都是饱和点.

可增广的交错路径

例



左图，饱和点:u_1,u_3,u_4,v_1,v_2,v_3; 非饱和点:u_2,v_4;

可增广的交错路径Γ: $u_2v_3u_4v_2u_1v_4$. 由Γ得到多一条边的匹配.

设M为G的一个匹配, Γ是关于M的可增广的交错路径, 则

$$M'=M\oplus E(\Gamma)=(M\cup E(\Gamma))-(M\cap E(\Gamma))$$

是比M多一条边的匹配.

定理11.5 M为G的最大匹配$\Leftrightarrow$$G$中不含$M$的可增广的交错路径.

Hall定理

定理11.6 (Hall定理) 设二部图$G=<V_1,V_2,E>$, 其中$|V_1|\le|V_2|$, 则G中存在从V_1到V_2的完备匹配当且仅当V_1中任意$k(1\le k\le|V_1|)$个顶点至少与V_2中的k个顶点相邻.(相异性条件)

证 必要性显然. 证充分性. 设M为G的最大匹配, 若M不是完备的, 则存在非饱和点$v_x\in V_1$. 于是, 存在$e\in E_1=E-M$与v_x关联, 且V_2中与v_x相邻的顶点都是饱和点. 考虑从v_x出发的尽可能长的所有交错路径, 这些交错路径都不是可增广的, 因此每条路径的另一个端点一定是饱和点, 从而全在V_1中. 令

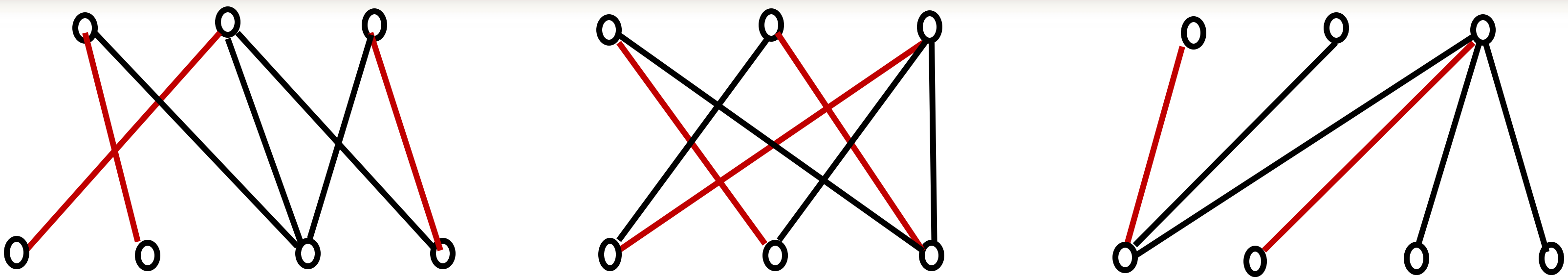
$$S=\{v \mid v\in V_1\text{且}v\text{在从}v_x\text{出发的交错路径上}\}$$

$$T=\{v \mid v\in V_2\text{且}v\text{在从}v_x\text{出发的交错路径上}\}$$

除v_x外, S和T中的顶点都是饱和点, 且由匹配边给出两者之间的一一对应, 因而$|S|=|T|+1$. 这说明V_1中有$|T|+1$个顶点只与V_2中$|T|$个顶点相邻, 与相异性条件矛盾.

t条件

例



前两个满足相异性条件, 第3个不满足

定理11.7 设二部图$G=<V_1,V_2,E>$, 如果存在t使得, V_1中每个顶点至少关联t条边, 而V_2中每个顶点至多关联 t 条边, 则G 中存在V_1到V_2的完备匹配.(t条件)

证 V_1中任意$k(1\le k\le|V_1|)$个顶点至少关联kt条边, 而V_2中每个顶点至多关联t条边, 这kt条边至少关联V_2中k个顶点. G满足相异性条件.

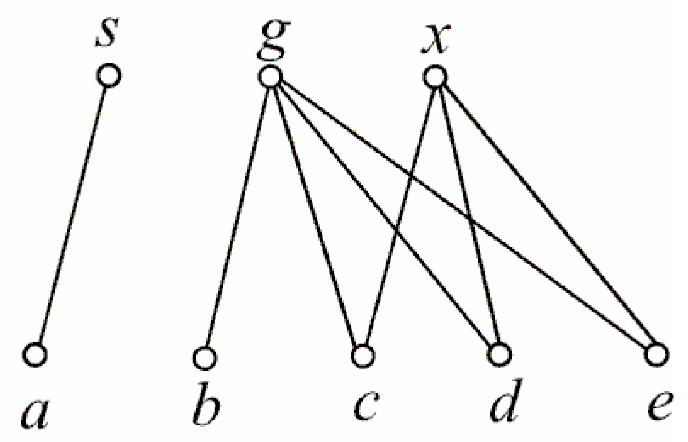
第2个图不满足t条件, 但有完备匹配.

一个应用实例

例7 某课题组要从a, b, c, d, e 5人中派3人分别到上海、广州、香港去开会. 已知a只想去上海，b只想去广州，c, d, e都表示想去广州或香港. 问该课题组在满足个人要求的条件下，共有几种派遣方案?

解　令$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$，其中$V_1=\{s, g, x\}$，$s, g, x$分别表示上海、广州和香港. $V_2=\{a, b, c, d, e\}$, $E=\{(u,v) \mid u\in V_1, v\in V_2, v$想去$u\}$.

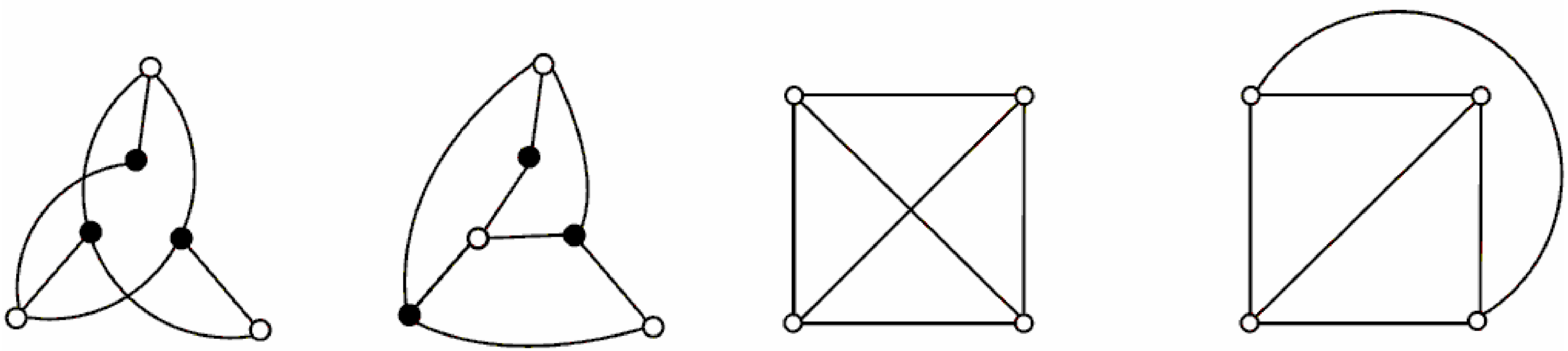
每个V_1到V_2的完备匹配给出一个派遣方案, 共有9种. 如a到上海, b到广州, c到香港.



11.4 平面图

定义11.6 如果能将无向图G画在平面上使得除顶点处外无边相交, 则称G是**可平面图**, 简称**平面图**. 画出的无边相交的图称为G的**平面嵌入**. 无平面嵌入的图称为**非平面图**.

例



(1) (2) (3) (4)

(2)是(1) 的平面嵌入，(4)是(3)的平面嵌入.

平面图的性质

- K_5, $K_{3,3}$都是非平面图（定理11.13）
- 平行边与环不影响平面性.

定理11.8 平面图的子图都是平面图, 非平面图的母图都是非平面图.

例如，所有度数不超过4的简单图都是平面图.

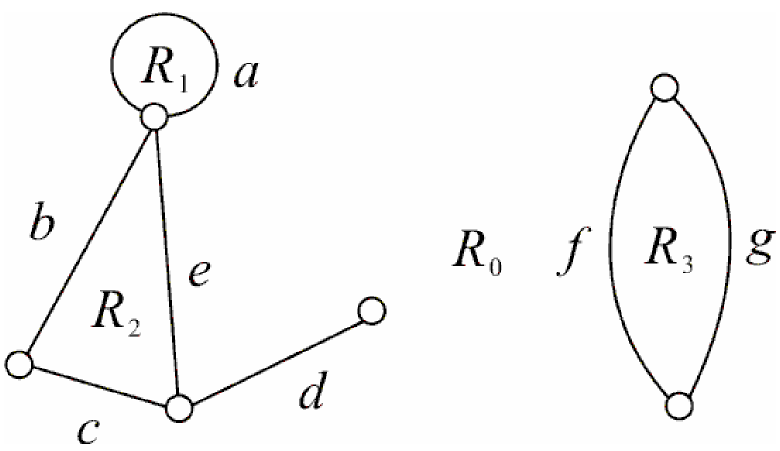
当$|V_1|=1$和2时二部图$G=<V_1,V_2,E>$是平面图.

$K_n(n\geq5)$和$K_{s,t}(s,t\geq3)$都是非平面图.

平面图的面与次数

定义11.7 给定平面图G的平面嵌入, G的边将平面划分成若干个区域, 每个区域都称为G的一个**面**, 其中有一个面的面积无限, 称为**无限面**或**外部面**, 其余面的面积有限, 称为**有限面**或**内部面**. 包围每个面的所有边组成的回路组称为该面的**边界**, 边界的长度称为该面的**次数**. 面R的次数记为deg(R).

例



$\deg(R_1)=1$, $\deg(R_2)=3$,
$\deg(R_3)=2$, $\deg(R_0)=8$.

次数的性质

定理17.4 平面图各面次数之和等于边数的两倍.

证 对每一条边e, 若e在两个面的公共边界上, 则在计算这两个面的次数时, e各提供1. 而当e只在某一个面的边界上出现时, 它必在该面的边界上出现两次, 从而在计算该面的次数时, e提供2.

极大平面图

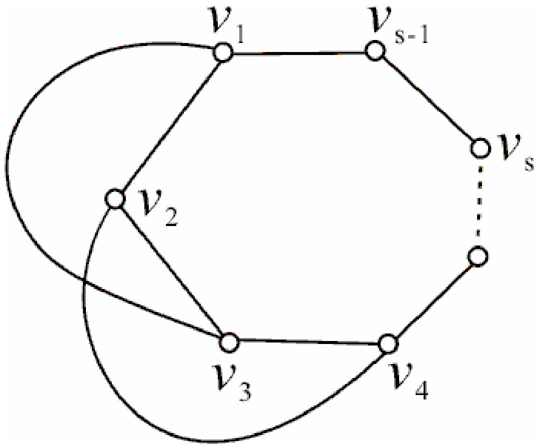
定义11.8 G为简单平面图, 若在G的任意两个不相邻的顶点之间加一条边所得图为非平面图, 则称G为极大平面图.

例如, K_5,$K_{3,3}$删去一条边后是极大平面图

K_1, K_2, K_3, K_4都是极大平面图.

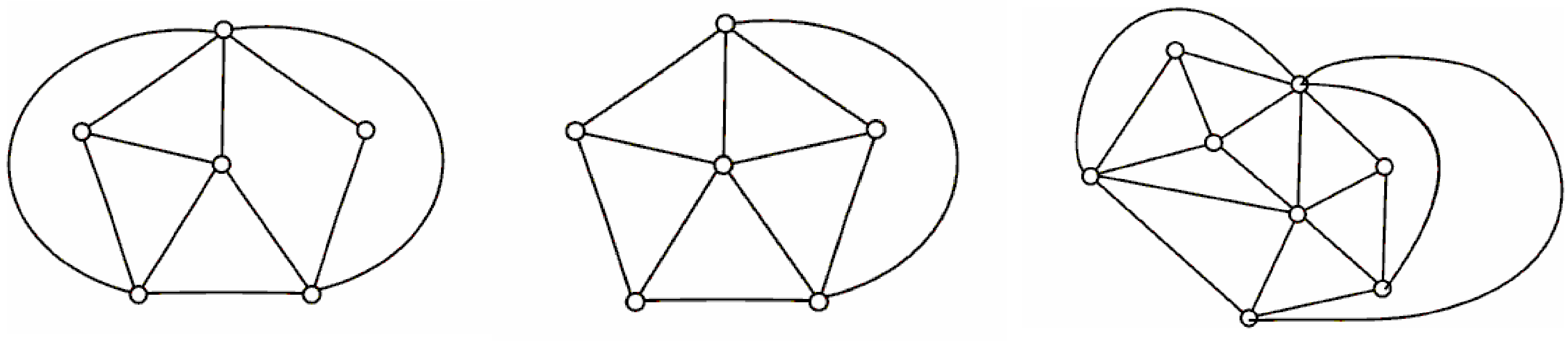
定理11.10 设G为$n(n\geq 3)$阶简单连通的平面图, G为极大平面图当且仅当G的每个面的次数均为3.

证 现只证必要性. 各面次数都大于或等于3. 假如$\deg(R_i)=s\geq 4$, 若v_1与v_3不相邻, 则在R_i内加边(v_1,v_3)不破坏平面性, 与G是极大平面图矛盾, 因而v_1与v_3必相邻, 且边(v_1,v_3)必在R_i外部. 同样地, v_2与v_4也相邻且边(v_2,v_4)在R_i的外部. 于是, (v_1,v_3)与(v_2,v_4)相交于R_i的外部, 与G是平面图矛盾.



定理的应用

例 是否是极大平面图?



(1)　　(2)　　(3)

只有(3)为极大平面图

极小非平面图

定义11.9 若在非平面图G中任意删除一条边, 所得图为平面图, 则称G为**极小非平面图**.

- K_5, $K_{3,3}$都是极小非平面图
- 极小非平面图必为简单图

欧拉公式

定理11.11 设G为n阶m条边r个面的连通平面图, 则

$$n-m+r=2$$

证 对m做归纳证明. $m=0$时, G为平凡图, $n=1,m=0,r=1$,成立.

设$m=k(k\geq 0)$时结论成立. 当$m=k+1$时, 分两者情况讨论:

(1) G中有一个1度顶点v, 令$G'=G-v$, 仍是连通的, $n'=n-1$, $m'=m-1=k$, $r'=r$. 由归纳假设, $n'-m'+r'=2$. 于是

$$n-m+r = (n'+1)-(m'+1)+r' = n'-m'+r' = 2$$

(2) G中没有1度顶点, 则每一条边都在某两个面的公共边界上. 任取一条边e, 令$G'=G-e$, 仍连通且$n'=n$, $m'=m-1=k$, $r'=r-1$. 由归纳假设, $n'-m'+r'=2$. 于是

$$n-m+r = n'-(m'+1)+(r'+1) = n'-m'+r' = 2$$

欧拉公式的推广

推论 对于有k个连通分支的平面图G, 有

$$n-m+r=k+1$$

其中n, m, r分别为G的顶点数, 边数和面数.

证 设G的连通分支为$G_1,G_2,\ldots,G_k$, 由欧拉公式

$$n_i-m_i+r_i=2,\quad i=1,2,\ldots,k.$$

G的面数 $r=\sum_{i=1}^{k} r_i-(k-1)$. 于是,

$$2k=\sum_{i=1}^{k}(n_i-m_i+r_i)$$

$$=n-m+r+k-1$$

整理得

$$n-m+r=k+1$$

与欧拉公式有关的定理

定理11.12 设G为连通的平面图, 每个面的次数至少为$l≥3$，则

$$m \le \frac{l}{l-2}(n-2)$$

证 由定理11.9及欧拉公式,

$$2m = \sum_{i=1}^{r} \deg(R_i) \ge l \cdot r = l(2+m-n)$$

解得

$$m \le \frac{l}{l-2}(n-2)$$

定理11.13 K_5, $K_{3,3}$都是非平面图.

证 假设K_5是平面图, K_5无环和平行边, 每个面的次数均大于等于3. 应该有

$$10 \le \frac{3}{3-2}(5-2) = 9$$

矛盾.

与欧拉公式有关的定理

证(续) 假设$K_{3,3}$是平面图, $K_{3,3}$中最短圈的长度为4, 每个面的次数均大于等于4. 应该有

$$9 \le \frac{4}{4-2}(6-2) = 8$$

矛盾.

定理11.14 设G为$n(n\ge3)$阶m条边的极大平面图, 则$m=3n-6$.

证 极大平面图是连通图, 由欧拉公式得 $r = 2+m-n$. 又由定理11.10的必要性, G的每个面的次数均为3, 所以$2m=3r$. 得$m=3n-6$.

推论 设G是$n(n\ge3)$阶m条边的简单平面图, 则

$$m\le 3n-6$$

定理11.10充分性证明

如果简单连通平面图G的每个面的次数都等于3, 则G为极大平面图.

证 由定理11.9,

$$2m=3r$$

由欧拉公式,

$$r = 2 + m - n$$

整理得

$$m = 3n-6$$

若G不是极大平面图, 则G中存在不相邻的顶点u,v, 使得$G'=G\cup(u,v)$还是简单平面图, 而G'的边数$m'=m+1$, $n'=n$, 故

$$m'>3n'-6$$

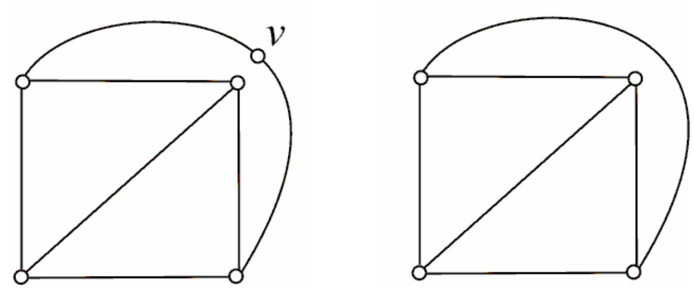
与定理11.14的推论矛盾.

同胚

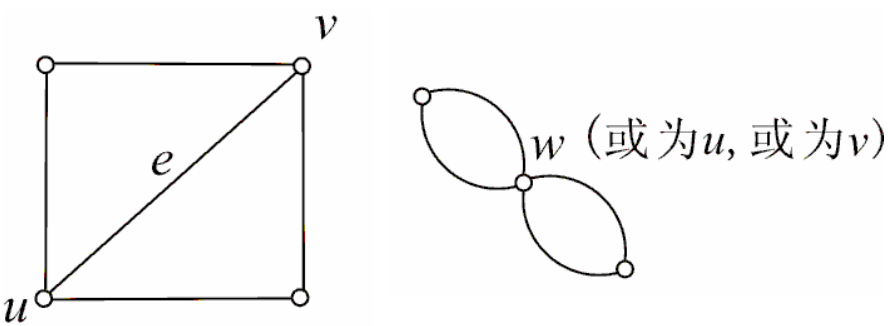
定义11.10 设$e=(u,v)$为图G的一条边, 在G中删除e, 增加新的顶点w, 使u,v均与w相邻, 称为在G中**插入2度顶点**w. 设w为G中一个2度顶点, w与u,v相邻, 删除w, 增加新边(u,v), 称为在G中**消去2度顶点**w.

若两个图G_1与G_2同构, 或通过反复插入、消去2度顶点后同构, 则称G_1与G_2**同胚**.

例 插入与消去2度顶点



收缩边

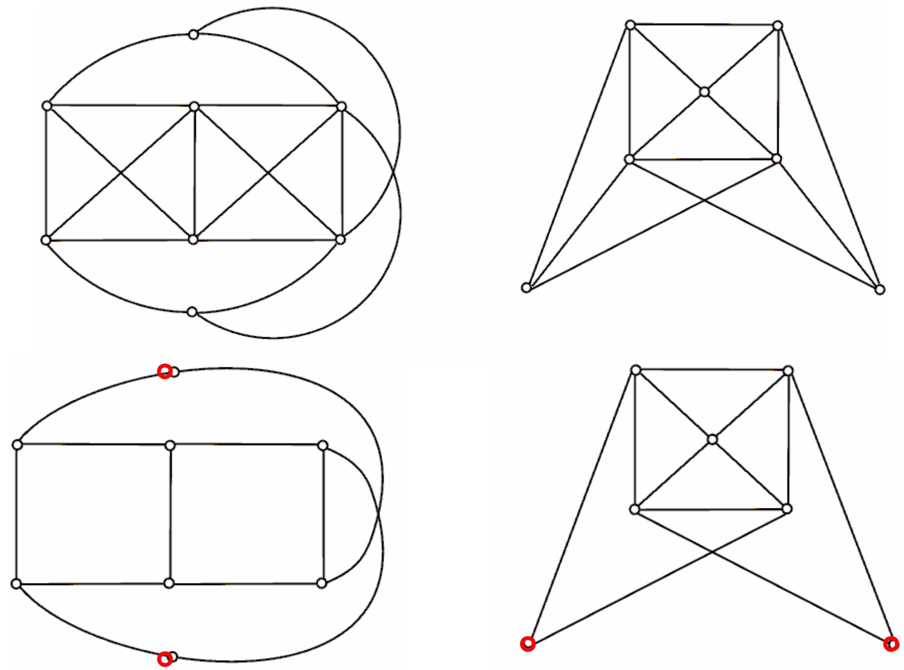


库拉图斯基定理

定理11.15 G是平面图 $\Leftrightarrow$ G中不含与K_5和$K_{3,3}$同胚的子图.

定理11.16 G是平面图 $\Leftrightarrow$ G中无可收缩为K_5或$K_{3,3}$的子图.

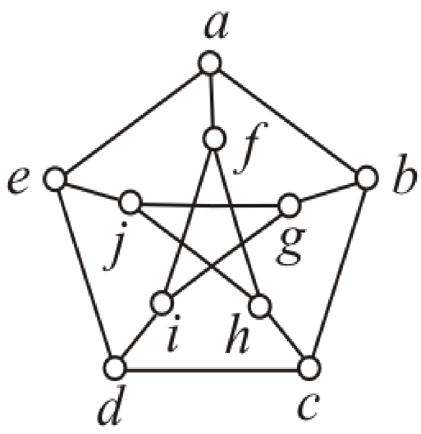
例8 证明下边两个图为非平面图.

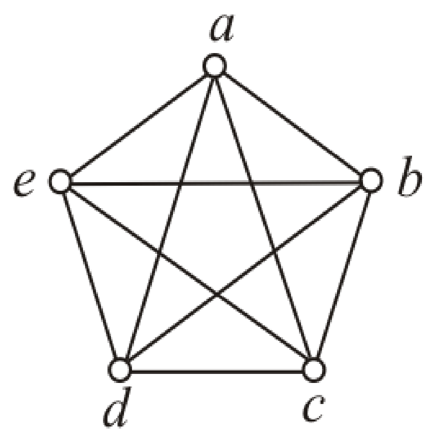


与$K_{3,3}$同胚　　　与K_5同胚

例题

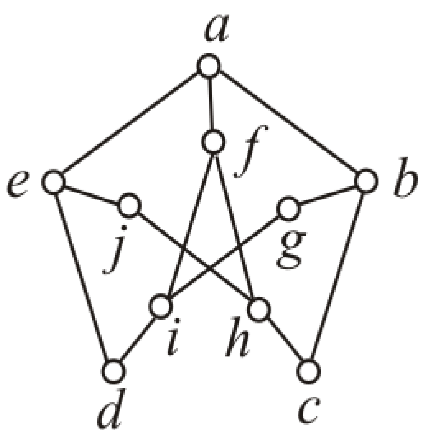
例9 证明彼得森图为非平面图.





与K_5同胚

收缩$(a,f),(b,g),(c,h),(d,i),(e,j)$



与$K_{3,3}$同胚

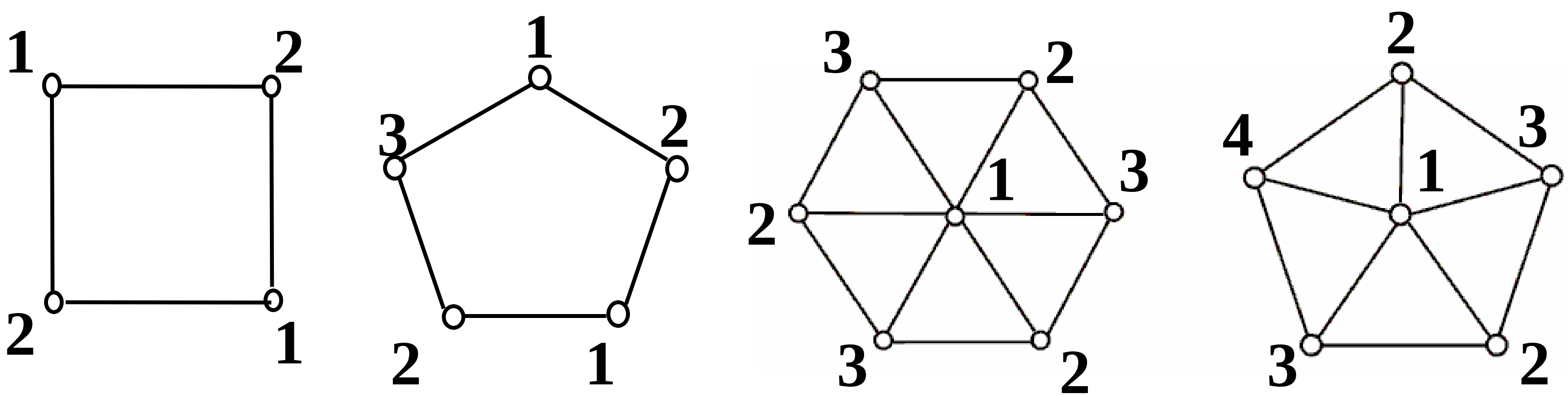
收缩$(b,g),(c,h),(d,i),(e,j)$

点着色

定义11.11 设无向图G无环, 对G的每个顶点涂一种颜色, 使相邻的顶点涂不同的颜色, 称为图G的一种**点着色**,简称**着色**. 若能用k种颜色给G的顶点着色， 则称G是**k-可着色的**.

图的着色问题: 要用尽可能少的颜色给图着色.

例10



偶圈用2种颜色, 奇圈用3种. 奇阶轮图用3种, 偶阶轮图用4种.

例11 G是2-可着色的当且仅当G是二部图.

应用

1. 有n项工作, 每项工作需要一天的时间, 有些工作不能同时进行, 问至少需要几天才能完成所有的工作? 顶点表示工作, 两点之间有一条边⇔这两项工作不能同时进行. 工作的时间安排对应于这个图的点着色: 着同一种颜色的顶点对应的工作可安排在同一天, 所需的最少天数是所需要的最少颜色数.

2. 寄存器分配. 计算机有k个寄存器, 要给每一个变量分配一个寄存器. 如果两个变量要在同一时刻使用, 则不能把它们分配给同一个寄存器. 每一个变量是一个顶点, 如果两个变量要在同一时刻使用, 则用一条边连接这两个变量. 这个图的k-着色对应给变量分配寄存器的一种安全方式: 给着同一种颜色的变量分配同一个寄存器.

应用

3. 无线交换设备的波长分配. 有*n*台设备和*k*个发射波长, 要给每一台设备分配一个波长. 如果两台设备靠得太近, 则不能给它们分配相同的波长. 以设备为顶点, 如果两台设备靠得太近, 则用一条边连接它们. 这个图的*k*-着色给出一个波长分配方案: 给着同一种颜色的设备分配同一个波长.

地图着色与对偶图

地图: 连通无桥平面图的平面嵌入. 每一个面是一个国家(或省, 市, 区等). 若两个国家有公共的边界，则称这两个国家是相邻的. 对地图的每个国家涂上一种颜色，使相邻的国家涂不同的颜色，称为对地图的面着色, 简称**地图着色**.

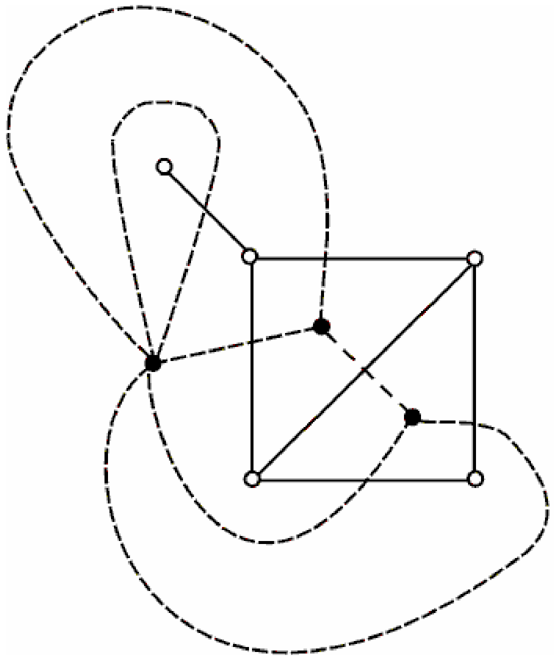
地图着色问题: 用尽可能少的颜色给地图着色.

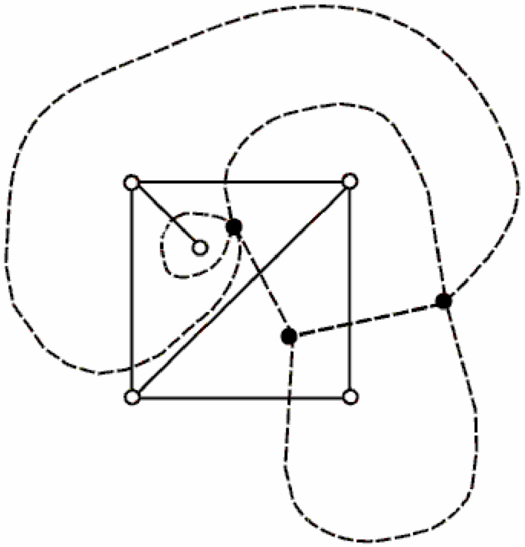
定义11.12 设G是一个平面嵌入, 构造图G^*如下: 在G的每一个面R_i中放置一个顶点v_i^*. 设e为G的一条边, 若e在G的面R_i与R_j的公共边界上, 则作边$e^*=(v_i^*,v_j^*)$与e相交, 且不与其他任何边相交. 若e为G中的桥且在面R_i的边界上, 则作以v_i^*为端点的环$e^*=(v_i^*,v_i^*)$. 称G^*为G的**对偶图**.

实例

实线和空心点是平面嵌入, 虚线和实心点是对偶图.

注意: 这两个平面嵌入是同一个平面图的平面嵌入.





四色定理

四色猜想(19世纪50年代, 德摩根) —— 五色定理(1890年, 希伍德) —— 四色定理(1976年, 阿佩尔与黑肯)

定理11.17 任何平面图都是4-可着色的.

第十一章 习题课

主要内容

- 欧拉通路与欧拉回路, 欧拉图与半欧拉图及判别
- 哈密顿通路与哈密顿回路, 哈密顿图与半哈密顿图及判别
- 货郎问题
- 二部图及其判别
- 二部图匹配及相关概念
- 二部图最大匹配的充要条件, 存在完备匹配的条件
- 平面图及其性质(欧拉公式)
- 平面图的判别
- 着色问题
- 地图着色与平面图的对偶图
- 四色定理
- 应用

基本要求

基本要求

- 深刻理解欧拉图, 半欧拉图, 哈密顿图, 半哈密顿图的定义
- 掌握欧拉图, 半欧拉图的判别
- 会用哈密顿图与半哈密顿图的必要条件和充分条件
- 会一笔画出欧拉回路
- 了解货郎问题
- 深刻理解二部图的定义, 掌握二部图的判别
- 深刻理解二部图匹配及相关概念
- 了解二部图最大匹配的充要条件, 会用存在完备匹配的条件(Hall定理与t条件)

基本要求

- 深刻理解平面图及相关的概念
- 牢记极大平面图的主要性质和判别方法
- 熟记欧拉公式及推广形式，并能用欧拉公式及推广形式证明有关定理与命题
- 会用库拉图斯基定理证明非平面图
- 了解对偶图的概念
- 了解着色问题, 地图着色问题和四色定理
- 会用上述概念和有关定理解决简单的实际问题

练习1

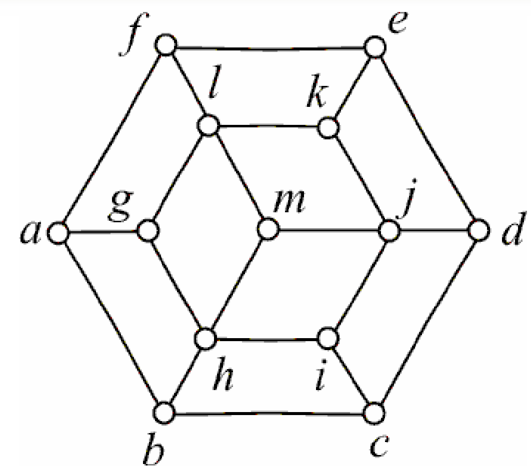
1. 设G为$n(n\geq 2)$阶无向欧拉图, 证明G中无桥.

证一　设C为G中一条欧拉回路, $\forall e\in E(G)$, e在C上, $C-e$ 连通, $G-e$也连通, 所以e不为桥.

证二 用反证法. 假设$e=(u,v)$是桥, 则$G-e$产生两个连通分支G_1, G_2, 不妨设u在G_1中, v在G_2中. G中没有奇度顶点, 而删除e, 只使u,v 的度数各减1, 因而$G_1(G_2)$中只含一个奇度顶点, 与任何图中奇度顶点的个数是偶数矛盾.

练习 2

2. 证明右图不是哈密顿图.



证一　取 $V_1 = \{a, c, e, h, j, l\}$,

$p(G-V_1) = 7 > 6=|V_1|$

证二　G为二部图, $V_1 = \{a, c, e, h, j, l\}$,

$V_2 = \{b, d, f, g, i, k, m\}$, $|V_1| \neq |V_2|$.

证三　$n = 13$, $m = 21$. h, l, j为4度顶点, a, c, e为3度顶点, 且它们关联不相同的边. 而在哈密顿回路上, 每个顶点关联两条边, 于是可能用于哈密顿回路的边至多有$21-(3\times2+3\times1) = 12$. 12条边不可能构成经过13个顶点的回路.

练习 3

3．某次国际会议8人参加, 已知每人至少与其余7人中的4人能用相同的语言, 问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座, 使得每个人都能与两边的人交谈?

解 做无向图$G=\langle V,E\rangle$, 其中$V=\{v|\ v$为与会者$\}$,

$E=\{(u,v)\mid u,v\in V,\ u$与$v$有能用相同的语言, 且$u\neq v\}$.

G为简单图且$\forall v\in V,\ d(v)\geq 4$. 于是, $\forall u,v\in V,\ d(u)+d(v)\geq 8$, 故$G$为哈密顿图. 服务员在$G$中找一条哈密顿回路, 按回路中相邻关系安排座位即可.

练习 4

4. 某公司招聘了3名大学毕业生, 有5个部门需要人. 部门领导与毕业生交谈后, 双方都愿意的结果如表所示. 如果每个部门只能接收一名毕业生, 问这3名毕业生都能到他满意的部门工作吗?试给出分配方案.

	部门1	部门2	部门3	部门4	部门5
毕业生A	*	*	*		
毕业生B		*		*	*
毕业生C			*	*	*

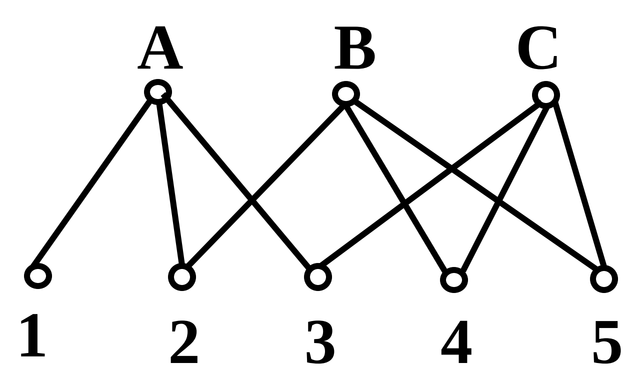
解 作二部图$G=<V_1,V_2,E>$

一个分配方案是G的一个匹配.

G满足t条件, $t=3$, 有完备匹配.

如, A—1, B—2, C—3;

A—3, B—2, C—5等.



练习5

5. 设G是连通的简单平面图, 面数$r<12$, $\delta(G)\geq 3$.
(1) 证明G中存在次数≤4的面.
(2) 举例说明当$r=12$时, (1) 中结论不真.

解　设G的阶数, 边数, 面数分别为n, m, r.
(1) 用反证法. 假设所有面的次数大于等于5, 由欧拉公式得

$$2m \geq 5r = 5\,(2+m-n) \qquad ①$$

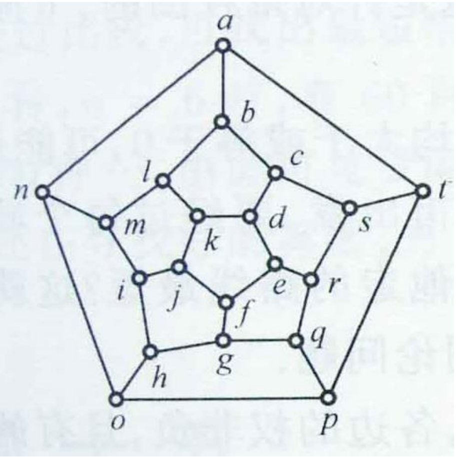
由$\delta(G)\geq 3$及握手定理有　$2m \geq 3n$　　②

得　$m\geq 30$

又有　$r=2+m-n<12$　　③

③ 与②又可得　$m<30$,　矛盾.

(2) 正十二面体是一个反例



练习6

6. 设G是阶数≥11的非平凡简单无向图，证明G和$\overline{G}$不可能全是平面图.

证　用反证法. 假设$\overline{G}$与G都是平面图，则

G与$\overline{G}$的边数m, m'应满足 $m+m'=\dfrac{n(n-1)}{2}$

不妨设

$$m \geq \frac{n(n-1)}{4}$$

由于G是平面图，又有　$m \leq 3n-6$

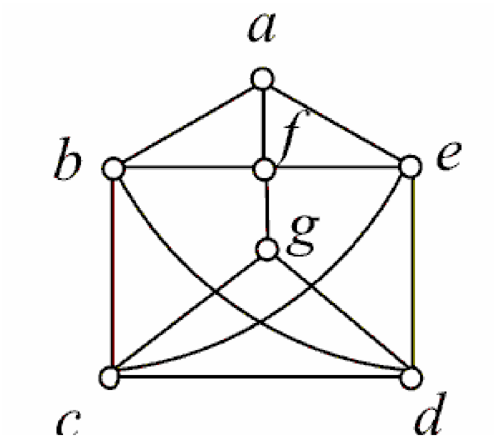
得　$n^2-13n+24 \leq 0$

解得　$2 \leq n \leq 10$

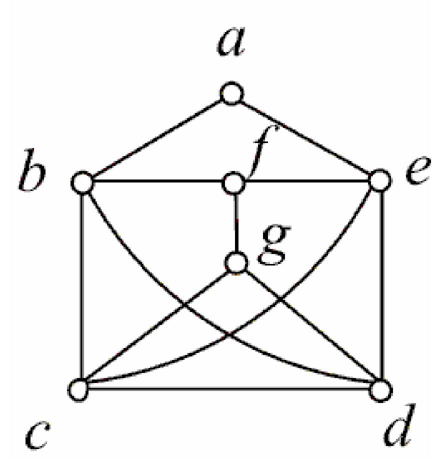
与$n \geq 11$矛盾.

练习7

7. 证明下图为非平面图



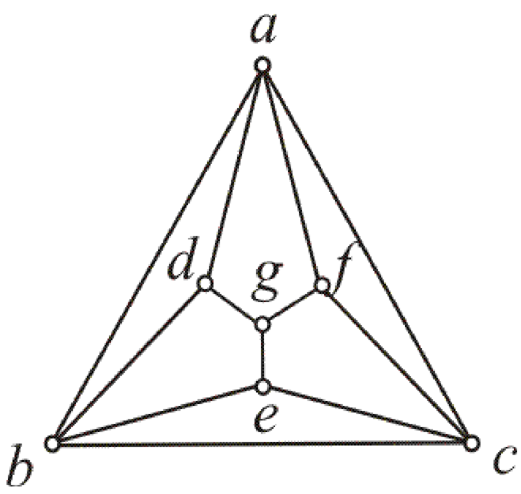
证一　含子图$K_{3,3}$: 删去顶点*a*和边(*c*,*d*)



证二　含与K_5同胚的子图: 删去(*a*,*f*), 收缩(*a*,*e*)和(*f*,*g*)

练习8

8. 给下图着色至少要用几种颜色?



解 由于*a*, *b*, *c* 彼此相邻, 至少要用3种颜色, 设它们分别着颜色1,2,3. 最少还要用这三种颜色给*d*, *e*, *f* 着色. 而*g*与*d*, *e*, *f*相邻只能用第4种颜色. 故至少要用4种颜色.

练习9

9. 某校计算机系三年级学生在本学期共有6门选修课C_i, i=1, 2, …, 6. 设$S(C_i)$为选C_i课的学生集. 已知

$$S(C_i)\cap S(C_6)\neq\varnothing,\quad i=1, 2, \ldots, 5,$$

$$S(C_i)\cap S(C_{i+1})\neq\varnothing,\quad i=1, 2, 3, 4,$$

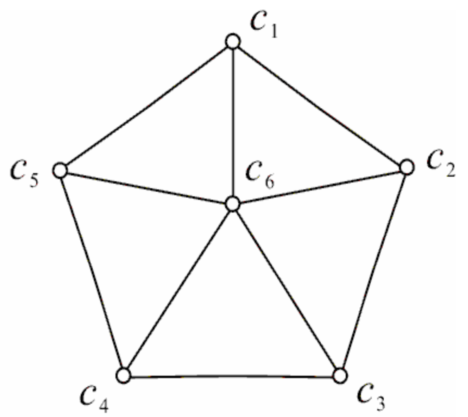
$$S(C_5)\cap S(C_1)\neq\varnothing.$$

问这6门课至少几天能考完？

解 做无向图$G=<V,E>$, 其中

$$V=\{C_1, C_2, \ldots, C_6\}$$

$$E=\{(C_i,C_j)\mid S(C_i)\cap S(C_j)\}$$



最少要用4种颜色着色, 故最少要4天