第五章 一阶逻辑等值演算

主要内容

- 一阶逻辑等值式与基本的等值式
- 置换规则、换名规则、代替规则
- 前束范式

5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

定义5.1 设A, B是两个谓词公式, 如果$A \leftrightarrow B$是永真式, 则称A与B**等值**, 记作$A \Leftrightarrow B$, 并称$A \Leftrightarrow B$是**等值式**

基本等值式

第一组 命题逻辑中16组基本等值式的代换实例

例如，$\neg\neg\forall xF(x) \Leftrightarrow \forall xF(x)$,

$\forall xF(x) \rightarrow \exists yG(y) \Leftrightarrow \neg\forall xF(x) \vee \exists yG(y)$ 等

第二组

(1) 消去量词等值式

设$D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

① $\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$

② $\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n)$

基本等值式

(2) 量词否定等值式

① $\neg\forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$

② $\neg\exists xA(x) \Leftrightarrow \forall x\neg A(x)$

(3) 量词辖域收缩与扩张等值式.

$A(x)$ 是含 x 自由出现的公式，B 中不含 x 的自由出现

关于全称量词的:

① $\forall x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\vee B$

② $\forall x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge B$

③ $\forall x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\rightarrow B$

④ $\forall x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$

基本等值式

关于存在量词的：

① $\exists x(A(x)\lor B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\lor B$

② $\exists x(A(x)\land B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\land B$

③ $\exists x(A(x)\to B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\to B$

④ $\exists x(B\to A(x)) \Leftrightarrow B\to\exists xA(x)$

(4) 量词分配等值式

① $\forall x(A(x)\land B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\land\forall xB(x)$

② $\exists x(A(x)\lor B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\lor\exists xB(x)$

注意：$\forall$对$\lor$，$\exists$对$\land$无分配律

置换规则、换名规则、代替规则

1. 置换规则

设$\Phi(A)$是含A的公式, 那么, 若$A \Leftrightarrow B$, 则$\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$.

2. 换名规则

设A为一公式，将A中某量词辖域中个体变项的所有约束出现及相应的指导变元换成该量词辖域中未曾出现过的个体变项符号，其余部分不变，设所得公式为A'，则$A' \Leftrightarrow A$.

3. 代替规则

设A为一公式，将A中某个个体变项的所有自由出现用A中未曾出现过的个体变项符号代替，其余部分不变，设所得公式为A'，则$A' \Leftrightarrow A$.

实例

例1 将下面命题用两种形式符号化, 并证明两者等值:

(1) 没有不犯错误的人

解 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：x犯错误.

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ 或 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

$\Leftrightarrow \forall x\neg(F(x)\wedge\neg G(x))$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \forall x(\neg F(x)\vee G(x))$ 置换

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 置换

实例

(2) 不是所有的人都爱看电影

解 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：爱看电影.

$\neg\forall x(F(x)\to G(x))$ 或 $\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

$\neg\forall x(F(x)\to G(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\neg(F(x)\to G(x))$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \exists x\neg(\neg F(x)\vee G(x))$ 置换

$\Leftrightarrow \exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ 置换

实例

例2 将公式化成等值的不含既有约束出现、又有自由出现的个体变项：$\forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

解 $\forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists tG(x,t,z))$ 换名规则

$\Leftrightarrow \forall x\exists t(F(x,y,z)\rightarrow G(x,t,z))$ 辖域扩张等值式

或者

$\forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x,u,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$ 代替规则

$\Leftrightarrow \forall x\exists y(F(x,u,z)\rightarrow G(x,y,z))$ 辖域扩张等值式

实例

例3 设个体域$D=\{a,b,c\}$, 消去下述公式中的量词:

(1) $\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$

解 $\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$

$\Leftrightarrow (\exists y(F(a)\rightarrow G(y)))\wedge(\exists y(F(b)\rightarrow G(y)))\wedge(\exists y(F(c)\rightarrow G(y)))$

$\Leftrightarrow((F(a)\rightarrow G(a))\vee(F(a)\rightarrow G(b))\vee(F(a)\rightarrow G(c)))$

$\wedge((F(b)\rightarrow G(a))\vee(F(b)\rightarrow G(b))\vee(F(b)\rightarrow G(c)))$

$\wedge((F(c)\rightarrow G(a))\vee(F(c)\rightarrow G(b))\vee(F(c)\rightarrow G(c)))$

实例

解法二

$$\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\rightarrow \exists yG(y))$$ 辖域收缩等值式

$$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\rightarrow G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

$$\Leftrightarrow (F(a)\rightarrow G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

$$\wedge(F(b)\rightarrow G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

$$\wedge(F(c)\rightarrow G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

实例

(2) $\exists x\forall yF(x,y)$

$\exists x\forall yF(x,y)$

$\Leftrightarrow \exists x(F(x,a)\wedge F(x,b)\wedge F(x,c))$

$\Leftrightarrow (F(a,a)\wedge F(a,b)\wedge F(a,c))$

$\vee(F(b,a)\wedge F(b,b)\wedge F(b,c))$

$\vee(F(c,a)\wedge F(c,b)\wedge F(c,c))$

5.2 一阶逻辑前束范式

定义5.2 设A为一阶逻辑公式，若A具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$$

则称A为**前束范式**，其中Q_i $(1\le i\le k)$为$\forall$或$\exists$，B为不含量词的公式.

例如， $\forall x\neg(F(x)\wedge G(x))$

$\forall x\exists y(F(x)\rightarrow(G(y)\wedge H(x,y)))$ 是前束范式

而 $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$

$\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$ 不是前束范式

前束范式存在定理

定理5.1（前束范式存在定理）

一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式

例4 求下列公式的前束范式

(1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

解 $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x)\vee\neg F(x))$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow \forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$

后两步结果都是前束范式，说明公式的前束范式不惟一.

求前束范式的实例

(2) $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

解 $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$ （量词分配等值式）

或

$\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall y\neg G(y)$ 换名规则

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$ 辖域收缩扩张规则

求前束范式的实例

(3) $\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$

解 $\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$

$\Leftrightarrow \forall zF(z)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$ 换名规则

$\Leftrightarrow \exists z\exists y(F(z)\rightarrow(G(x,y)\wedge\neg H(y)))$ 辖域收缩扩张规则

或

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(z,y)\wedge\neg H(y))$ 代替规则

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\rightarrow(G(z,y)\wedge\neg H(y)))$

第五章 习题课

主要内容

- 一阶逻辑等值式

  基本等值式，置换规则、换名规则、代替规则
- 前束范式

基本要求

- 深刻理解并牢记一阶逻辑中的重要等值式, 并能准确而熟练地应用它们.
- 熟练正确地使用置换规则、换名规则、代替规则.
- 熟练地求出给定公式的前束范式.

练习1

1. 给定解释I如下:

(1) 个体域D={2,3}

(2) $\bar{a}=2$

(3) $\bar{f}(x): \bar{f}(2)=3, \quad \bar{f}(3)=2$

(4) $\bar{F}(x): \bar{F}(2)=0, \quad \bar{F}(3)=1$

$\bar{G}(x,y): \bar{G}(2,2)=\bar{G}(2,3)=\bar{G}(3,2)=1, \quad \bar{G}(3,3)=0$

求下述公式在I下的解释及其真值:

$\forall x\exists y(F(f(x))\wedge G(y,f(a)))$

解 $\Leftrightarrow \forall xF(f(x))\wedge\exists yG(y,f(a))$

$\Leftrightarrow F(f(2))\wedge F(f(3))\wedge(G(2,f(2))\vee G(3,f(2)))$

$\Leftrightarrow 1\wedge 0\wedge(1\vee 0)\Leftrightarrow 0$

练习2

2.求下述公式的前束范式:

$\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))$

解　使用换名规则,

$\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall zF(z)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists z(F(z)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists z\exists y(F(z)\rightarrow(G(x,y)\wedge H(x,y)))$

使用代替规则

$\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(z,y)\wedge H(z,y))$

$\Leftrightarrow \exists x(F(x)\rightarrow\exists y(G(z,y)\wedge H(z,y))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\rightarrow(G(z,y)\wedge H(z,y)))$