第十三章 递推方程与生成函数

主要内容

- 递推方程的定义及实例
- 递推方程的公式解法
- 递推方程的其他解法
- 生成函数及其应用
- 指数生成函数及其应用

13.1递推方程的定义及实例

定义13.1 设序列 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, 简记为$\{ a_n \}$. 一个把 a_n 与某些个a_i $(i<n)$ 联系起来的等式叫做关于序列 $\{ a_n \}$ 的递推方程. 当给定递推方程和适当的初值就唯一确定了序列.

Fibonacci数列：1，1，2，3，5，8，…，记作$\{ f_n \}$.

递推方程 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

初值 $f_0 = 1$，$f_1 = 1$

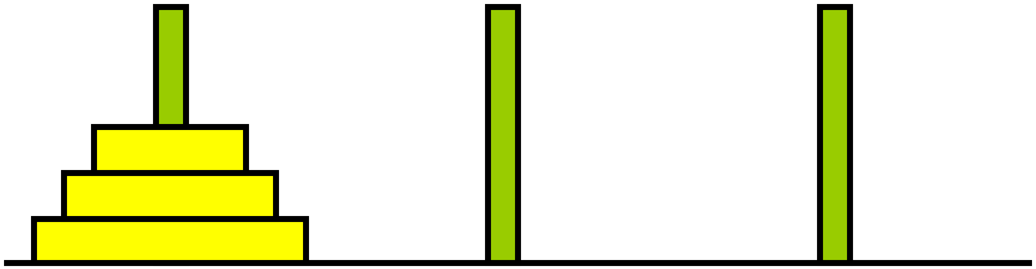
阶乘计算数列： 1，2，6，24，5！，…，记作$\{ F(n)\}$

递推方程 $F(n) = nF(n-1)$

初值 $F(1) = 1$

Hanoi塔

例1 Hanoi 塔



算法 Hanoi (A,C,n)
1. if n=1 then move (A,C)
2. else
3. Hanoi $(A,B,n-1)$
4. move (A,C)
5. Hanoi $(B,C,n-1)$

移动n个盘子的总次数为$T(n)$. 因此得到递推方程

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$
$$T(1)=1$$

解 $T(n)=2^n-1$

Fibonacci数列

例2 **Fibonacci数列：**

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

递推方程

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$f_0=1,\ f_1=1$$

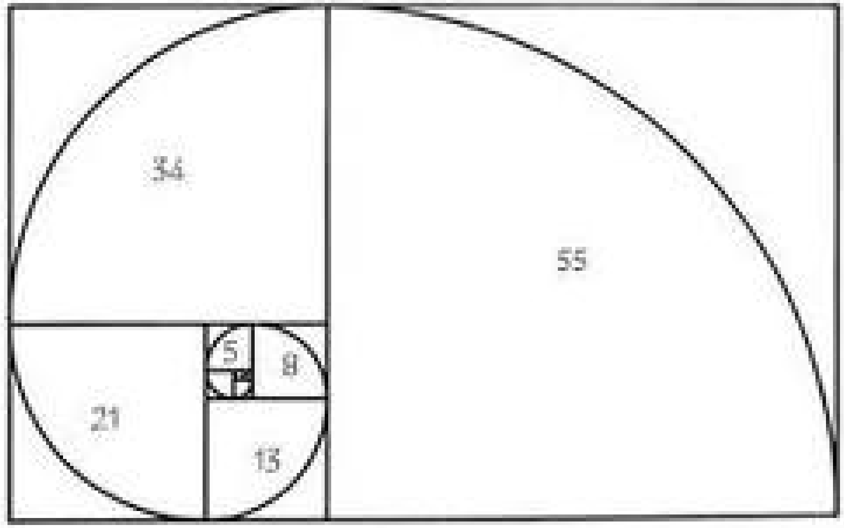
数学家Fibonacci

意大利1170-1240

解：

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

自然界的Fibnacci数列



13.2 递推方程的公式解法

- 特征方程、特征根
- 递推方程的解与特征根的关系
- 无重根下通解的结构
- 求解实例
- 有重根下通解的结构
- 求解实例

常系数线性齐次递推方程

定义13.2 常系数线性齐次递推方程的标准形：

$$\begin{cases} H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\ldots-a_kH(n-k)=0 \\ H(0)=b_0, H(1)=b_1, H(2)=b_2, \ldots, H(k-1)=b_{k-1} \end{cases}$$

其中 $a_1, a_2, \ldots, a_k$为常数，$a_k \neq 0$

称为 k 阶常系数线性齐次递推方程

$b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ 为 k 个初值

实例：Fibonacci 数列的递推方程

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \\ f_0 = 1, \ \ f_1 = 1 \end{cases}$$

特征方程与特征根

$$\begin{cases} H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\ldots-a_kH(n-k)=0 \\ H(0)=b_0, H(1)=b_1, H(2)=b_2, \ldots, H(k-1)=b_{k-1} \end{cases}$$

定义13.3 特征方程 $x^k - a_1x^{k-1} - \ldots - a_k = 0$,

特征方程的根称为递推方程的 **特征根**

实例:

递推方程 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

特征方程 $x^2-x-1 = 0$

特征根 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

递推方程解与特征根的关系

定理13.1 设 q 是非零复数，则 q^n 是递推方程的解当且仅当 q 是它的特征根.

q^n是递推方程的解

$\Leftrightarrow q^n - a_1q^{n-1} - a_2q^{n-2} - \ldots - a_kq^{n-k} = 0$

$\Leftrightarrow q^{n-k}(q^k - a_1q^{k-1} - a_2q^{k-2} - \ldots - a_k) = 0$

$\Leftrightarrow q^k - a_1q^{k-1} - a_2q^{k-2} - \ldots - a_k = 0$ （因为$q\neq 0$）

$\Leftrightarrow q$ 是它的特征根

定理13.2 设 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 是递推方程的解，c_1,c_2为任意常数，则 $c_1h_1(n)+c_2h_2(n)$ 也是这个递推方程的解.

推论 若 $q_1, q_2, \ldots, q_k$ 是递推方程的特征根，则 $c_1q_1^n + c_2q_2^n + \ldots + c_kq_k^n$ 是该递推方程的解，其中$c_1, c_2, \ldots, c_k$ 是任意常数.

无重根下通解的结构

定义13.4 若对常系数线性齐次递推方程的每个解 $h(n)$ 都存在一组常数$c_1',c_2',\ldots,c_k'$ 使得

$$h(n)=c_1'q_1^n+c_2'q_2^n+\ldots+c_k'q_k^n$$

成立，则称 $c_1q_1^n+c_2q_2^n+\ldots+c_kq_k^n$ 为该递推方程的通解

定理13.3 设$q_1, q_2, \ldots, q_k$ 是常系数线性齐次递推方程不等的特征根，则

$$H(n)=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\ldots+c_kq_k^n$$

为该递推方程的通解.

实例

例3 Fibonacci 数列：

$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$，特征根为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

通解为 $$f_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

代入初值 $f_0=1$, $f_1=1$, 得 $$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

解得 $$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

解是 $$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

有重根下求解中的问题

例4 $\begin{cases} H(n)-4H(n-1)+4H(n-2)=0 \\ H(0)=0, \quad H(1)=1 \end{cases}$

解 特征方程 $x^2-4x+4=0$

通解 $H(n) = c_1 2^n + c_2 2^n = c2^n$

代入初值得:

$$\begin{cases} c=0 \\ 2c=1 \end{cases}$$

c 无解.

问题：两个解线性相关

有重根下的通解结构

定理13.4 设 $q_1, q_2, \ldots, q_t$ 是递推方程的不相等的特征根，且 q_i 的重数为 e_i，$i=1, 2, \ldots, t$，令

$$H_i(n) = (c_{i_1} + c_{i_2} n + \ldots + c_{i_{e_i}} n^{e_i - 1}) q_i^{\,n}$$

那么通解

$$H(n) = \sum_{i=1}^{t} H_i(n)$$

求解实例

例5 求解以下递推方程

$$\begin{cases} H(n)-3H(n-1)+4H(n-3)=0 \\ H(0)=1, H(1)=0, H(2)=0 \end{cases}$$

解 特征方程 $x^3-3x^2+4=0$，特征根$-1, 2, 2$

通解为 $$H(n)=(c_1+c_2n)2^n+c_3(-1)^n$$

其中待定常数满足以下方程组

$$\begin{cases} c_1+c_4=1 \\ 2c_1+2c_2-c_3=0 \\ 4c_1+8c_2+c_3=0 \end{cases} \Rightarrow \quad c_1=\frac{5}{9}, c_2=-\frac{1}{3}, c_3=\frac{4}{9}$$

原方程的解为 $$H(n)=\frac{5}{9}2^n-\frac{1}{3}n2^n+\frac{4}{9}(-1)^n$$

常系数线性非齐次递推方程求解

- 递推方程的标准型
- 通解结构
- 特解的求法

  多项式函数

  指数函数

  组合形式

递推方程的标准型及通解

定理13.5 设

$$H(n)-a_1H(n-1)-\ldots-a_kH(n-k)=f(n), n\ge k, a_k\ne 0, f(n)\ne 0.$$

$\overline{H(n)}$ 是对应齐次方程的通解，$H^*(n)$是一个特解，则

$H(n)=\overline{H(n)}+H^*(n)$ 是递推方程的通解.

证 代入验证, $H(n)$是解. 下面证明任意解 $h(n)$ 为某个齐次解与特解$H^*(n)$之和. 设 $h(n)$为递推方程的解，则

$$\begin{array}{rl} & h(n)-a_1h(n-1)-\ldots-a_kh(n-k)=f(n) \\ -) & H^*(n)-a_1H^*(n-1)-\ldots-a_kH^*(n-k)=f(n) \\ \hline & [h(n)-H^*(n)]-a_1[h(n-1)-H^*(n-1)]-\ldots \\ & -a_k[h(n-k)-H^*(n-k)]=0 \end{array}$$

$h(n)–H^*(n)$是齐次解，即 $h(n)$ 是一个齐次解与$H^*(n)$之和.

特解的形式：多项式

如果 $f(n)$为n次多项式，则特解一般也是 n 次多项式

例6 顺序插入排序算法

算法 Insertsort(A,n)

1. for $j \leftarrow 2$ to n do
2. $\quad x \leftarrow A[j]$
3. $\quad i \leftarrow j-1$
4. $\quad$ while $i>0$ and $A[i]>x$ do // 行4-7将$A[j]$插入$A[1..j-1]$
5. $\qquad A[i+1] \leftarrow A[i]$
6. $\qquad i \leftarrow i-1$
7. $\quad A[i+1] \leftarrow x$

$$\begin{cases} W(n) = W(n-1) + n - 1 \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

特解 $W^*(n) = P_1 n^2 + P_2 n$,

代入递推方程得

$$(P_1 n^2 + P_2 n) - [P_1 (n-1)^2 + P_2 (n-1)] = n-1$$

化简得

$$2P_1 n - P_1 + P_2 = n-1$$

解得 $P_1 = 1/2$, $P_2 = -1/2$.

通解为

$$W(n) = c \cdot 1^n + n(n-1)/2 = c + n(n-1)/2$$

代入初值$W(1)=0$，得$c=0$，

$$W(n) = n(n-1)/2$$

实例

例7 Hanoi塔

$$T(n) = 2T(n-1)+1$$

$$T(1)=1$$

解 令 $T^*(n) = P$

代入方程

$$P = 2P + 1$$

解得 $P = -1$

$$T(n) = c\,2^n-1,$$

代入初值得 $c=1$，解为 $T(n) = 2^n-1$.

特解的形式:指数

$f(n)$为指数函数 β^n，若β是 e 重特征根(e可以等于0)，则特解为$Pn^e\beta^n$，其中P为待定常数.

例8 求解方程
$$\begin{cases} a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 2^n \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 5 \end{cases}$$

解 特解 $a^*_n = Pn^2 2^n$，

代入递推方程得

$$Pn^2 2^n - 4P(n-1)^2 2^{n-1} + 4P(n-2)^2 2^{n-2} = 2^n$$

解得 $P=1/2$. 原递推方程通解

代入初值得

$$a_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + n^2 2^{n-1}$$

解得$c_1=c_2=1$，递推方程的解

$$a_n = 2^n + n2^n + n^2 2^{n-1}$$

13.3 递推方程的其他解法

- 换元法
- 迭代归纳法
- 应用实例

换元法

思想：通过换元转化成常系数线性递推方程

例9 二分归并排序

算法 **Mergesort** (A,p,r) // 对数组A的下标p到r之间的数排序

1. **if** $p<r$
2. **then** $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$ //q为p到r的中点
3. **Mergesort**(A,p,q)
4. **Mergesort**$(A,q+1,r)$
5. **Merge**(A,p,q,r) // 把排序数组$A[p..q]$与$A[q+1..r]$归并.

Merge过程归并两个 $n/2$规模的子数组至多用 $n-1$次比较

求解

$$\begin{cases} W(n) = 2W(n/2) + n - 1,\ n = 2^k \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

解 $H(k) = 2H(k-1) + 2^k - 1$

$H(1) = 1$

令 $H^*(k) = P_1 k 2^k + P_2$，解得 $P_1 = P_2 = 1$

$H^*(k) = k2^k + 1$

通解 $H(k) = c\,2^k + k2^k + 1$

代入初值得 $c = -1$

$H(k) = -2^k + k2^k + 1$

$W(n) = n \log n - n + 1$

迭代归纳法：归并排序

$$\begin{cases} W(n) = 2W(n/2) + n - 1, \ n = 2^k \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

解
$$\begin{aligned}
W(n) &= 2W(2^{k-1}) + 2^k - 1 \\
&= 2[2W(2^{k-2}) + 2^{k-1} - 1] + 2^k - 1 \\
&= 2^2 W(2^{k-2}) + 2^k - 2 + 2^k - 1 \\
&= 2^2[2W(2^{k-3}) + 2^{k-2} - 1] + 2^k - 2 + 2^k - 1 \\
&= 2^3 W(2^{k-3}) + 2^k - 2^2 + 2^k - 2 + 2^k - 1 \\
&= \ldots \\
&= 2^k W(1) + k2^k - (2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1) \\
&= k2^k - 2^k + 1 \\
&= n\log n - n + 1
\end{aligned}$$

迭代归纳法：错位排列

例10 $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

解：

$$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] = \ldots$$

$$= (-1)^{n-2}[D_2 - 2D_1] = (-1)^{n-2}$$

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \quad D_1 = 0$$

$$D_n = n(n-1)D_{n-2} + n(-1)^n$$

$$= n(n-1)(n-2)D_{n-3} + n(n-1)(-1)^{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$$

$$= \ldots$$

$$= n(n-1)\ldots 2D_1 + n(n-1)\ldots 3(-1)^2 + n(n-1)\ldots 4(-1)^3 +$$

$$\ldots + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$$

$$= n![1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}]$$

快速排序算法

例11 快速排序

算法 Quicksort (A,p,r) // p 和 r 分别表示A首和末元素下标

1. if $p < r$
2. then $q \leftarrow$ Partition(A, p, r) // 划分为$A[p..q-1]$和$A[q+1..r]$
3. $A[p] \leftrightarrow A[q]$
4. Quicksort($A,p,q-1$)
5. Quicksort($A,q+1,r$)

划分过程

算法 Partition(A,p,r)

1. $x \leftarrow A[p]$ //选首元素作为划分标准x
2. $i \leftarrow p-1$
3. $j \leftarrow r+1$
4. while true do
5.   repeat $j \leftarrow j-1$
6.   until $A[j] < x$ //$A[j]$是从后找的第一个比x小元素
7.   repeat $i \leftarrow i+1$
8.   until $A[i] > x$ //$A[i]$是从前找的第一个比x大的元素
9.   if $i < j$ // 继续搜索$A[i]$到$A[j]$之间的范围
10   then $A[i] \leftrightarrow A[j]$ // $A[i]$与$A[j]$交换，回到行4
11.   else return j //结束While循环

实例

27	99	0	8	13	64	86	16	7	10	88	25	90
	i										*j*	
27	25	0	8	13	64	86	16	7	10	88	99	90
					i				*j*			
27	25	0	8	13	10	86	16	7	64	88	99	90
						i		*j*				
27	25	0	8	13	10	7	16	86	64	88	99	90
							j	*i*				
16	25	0	8	13	10	7	27	86	64	88	99	90

平均情况时间复杂度分析

递推方程

$$\begin{cases} T(n) = \dfrac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} T(i) + O(n), & n \geq 2 \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

差消法化简

$$nT(n) = 2\sum_{i=1}^{n-1} T(i) + cn^2$$

c为某个常数

$$(n-1)T(n-1) = 2\sum_{i=1}^{n-2} T(i) + c(n-1)^2$$

$$nT(n) = (n+1)T(n-1) + O(n)$$

$$\frac{T(n)}{n+1} = \frac{T(n-1)}{n} + \frac{c}{n+1}$$

迭代求解

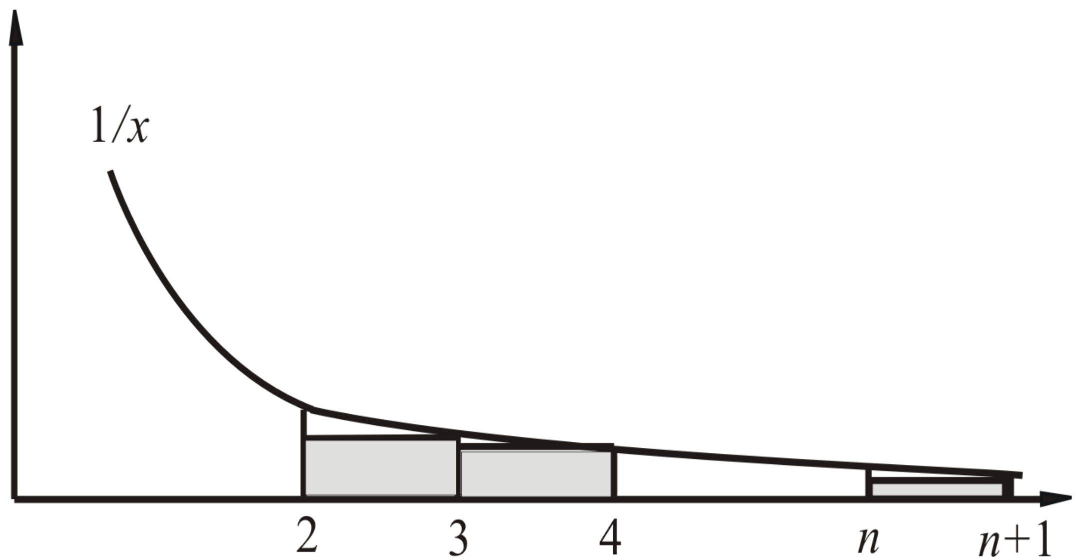
$$\frac{T(n)}{n+1}=c[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{3}+\frac{T(1)}{2}]=c\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{3}\right]$$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{3}$$

$$\leq\int_{2}^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_{2}^{n+1}$$

$$=\ln(n+1)-\ln 2$$

$$=O(\log n)$$



$$T(n)=O(n\log n)$$

递归树

$$W(n) = 2W(n/2) + n - 1,\ n = 2^k,\quad W(1) = 0$$

$$n-1 \qquad\qquad n-1$$

$$\frac{n}{2}-1 \qquad \frac{n}{2}-1 \qquad\qquad n-2$$

$$\frac{n}{4}-1 \quad \frac{n}{4}-1 \quad \frac{n}{4}-1 \quad \frac{n}{4}-1 \qquad\qquad n-4$$

$$\cdots$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots \qquad 1 \qquad n-2^{k-1}$$

$$W(n) = n\,k - (1+2+\ldots+2^{k-1}) = nk - (2^k - 1) = n \log n - n + 1$$

分治算法的时间分析

$T(n)$为算法对规模为n的输入的时间复杂度，a为子问题个数，n/b为子问题规模，$d(n)$为划分和综合过程的工作量

$$\begin{cases} T(n) = aT(n/b) + d(n) & n = b^k \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= a^2T(n/b^2) + ad(n/b) + d(n) \\ &= \ldots \\ &= a^kT(n/b^k) + a^{k-1}d(n/b^{k-1}) + a^{k-2}d(n/b^{k-2}) + \ldots + ad(n/b) + d(n) \\ &= a^k + \sum_{i=0}^{k-1} a^i d(n/b^i) \end{aligned}$$

$$a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$$

分治算法的时间分析（续）

当d(n)=c时，代入上式得到

$$T(n)=\begin{cases} a^k + c\dfrac{a^k-1}{a-1} = O(a^k) = O(n^{\log_b a}) & a \neq 1 \\ a^k + kc = O(\log n) & a = 1 \end{cases}$$

当d(n)=cn时，代入上式得到

$$T(n) = a^k + \sum_{i=0}^{k-1} a^i \frac{cn}{b^i} = a^k + cn\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{a}{b}\right)^i$$

$$=\begin{cases} n^{\log_b a} + cn\dfrac{(a/b)^k-1}{a/b-1} = O(n) & a<b \\ n + cnk = O(n\log n) & a=b \\ a^k + cn\dfrac{(a/b)^k-1}{a/b-1} = a^k + c\dfrac{a^k-b^k}{a/b-1} = O(n^{\log_b a}) & a>b \end{cases}$$

13.4 生成函数及其应用

- 牛顿二项式系数与牛顿二项式定理
- 生成函数的定义
- 生成函数的应用

牛顿二项式系数

定义13.5 设 r 为实数，n为整数，引入形式符号

$$\binom{r}{n}=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n=0\\ \dfrac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!} & n>0\end{cases}$$

称为牛顿二项式系数.

实例

$$\binom{-2}{5}=\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)}{5!}=-6$$

$$\binom{1/2}{4}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4!}=\frac{-5}{128}$$

$$\binom{4}{3}=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!}=4$$

牛顿二项式定理

定理13.6 （牛顿二项式定理）

设α为实数，则对一切实数x, y，|x/y|<1，有

$$(x+y)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^{n}y^{\alpha-n},\quad \text{其中}\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

若α= –m，其中m为正整数，那么

$$\binom{\alpha}{n}=\binom{-m}{n}=\frac{(-m)(-m-1)\ldots(-m-n+1)}{n!}$$

$$=\frac{(-1)^{n}m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}=(-1)^{n}\binom{m+n-1}{n}$$

重要展开式

令x=z，y=1，那么牛顿二项式定理就变成

$$(1+z)^{-m}=\frac{1}{(1+z)^m}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{m+n-1}{n}z^n \qquad |z|<1$$

在上面式子中用$-z$代替 z，则有

$$(1-z)^{-m}=\frac{1}{(1-z)^m}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n-1}{n}z^n \qquad |z|<1$$

$$m=1,\quad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots$$

$$m=2,\quad \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

生成函数定义

定义13.6 设序列$\{a_n\}$，构造形式幂级数

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

称$G(x)$为序列$\{a_n\}$的生成函数.

例如，

$\{ C(m,n) \}$的生成函数为 $(1+x)^m$

给定正整数k, $\{ k^n \}$的生成函数为 $\dfrac{1}{1-kx}$

$$G(x) = 1 + kx + k^2x^2 + k^3x^3 + \ldots =$$

由序列求生成函数

例14 求序列$\{a_n\}$的生成函数

(1) $a_n = 7\cdot 3^n$ (2) $a_n = n(n+1)$

解

(1) $$G(x)=7\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^n=7\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n=\frac{7}{1-3x}$$

(2) $$\int_0^x G(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}=x^2H(x),\quad H(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

$$\int_0^x H(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x},\quad H(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\int_0^x G(x)dx=\frac{x^2}{(1-x)^2},\qquad G(x)=(\frac{x^2}{(1-x)^2})'=\frac{2x}{(1-x)^3}$$

由生成函数求序列通项

例15 已知 $\{a_n\}$ 的生成函数为

$$G(x)=\frac{2+3x-6x^2}{1-2x}$$

求a_n

解

$$G(x)=\frac{2+3x-6x^2}{1-2x}=\frac{2}{1-2x}+3x$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n+3x=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n+3x$$

$$a_n=\begin{cases}2^{n+1}, & n\neq 1\\ 2^2+3=7, & n=1\end{cases}$$

生成函数的应用

- 求解递推方程
- 计数多重集的 r 组合数
- 不定方程的解
- 整数拆分

求解递推方程

例16 $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$， $a_0 = 1, a_1 = -2$

$$
\begin{aligned}
G(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots \\
-5x\,G(x) &= \quad -5a_0x - 5a_1x^2 - 5a_2x^3 - \ldots \\
6x^2\,G(x) &= \qquad\qquad +6a_0x^2 + 6a_1x^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

$$(1-5x+6x^2)G(x) = a_0 + (a_1-5a_0)x$$

$$G(x) = \frac{1-7x}{1-5x+6x^2} = \frac{5}{1-2x} - \frac{4}{1-3x}$$

$$= 5\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

$$a_n = 5\cdot 2^n - 4\cdot 3^n$$

求解递推方程

例17
$$\begin{cases} h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}, & n \geq 2 \\ h_1 = 1 \end{cases}$$

解：设 $\{h_n\}$ 的生成函数为 $H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n$

$$H^2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x^k \cdot \sum_{l=1}^{\infty} h_l x^l$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} x^n \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} = \sum_{n=2}^{\infty} h_n x^n$$

$$= H(x) - h_1 x = H(x) - x$$

求解递推方程

$$H^2(x) - H(x) + x = 0,$$

$$H(x) = \frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} (-4x)^n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^{2n}} \binom{2n-2}{n-1} (-1)^n 2^{2n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$$

$$h_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

多重集的 r 组合数

$S = \{ n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k \}$ 的 r 组合数就是不定方程

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$$

$$x_i \le n_i \quad i = 1,2,\ldots,k$$

的非负整数解的个数

生成函数

$$G(y) = (1 + y + \ldots + y^{n_1})(1 + y + \ldots + y^{n_2})\ldots(1 + y + \ldots + y^{n_k})$$

的展开式中 y^r 的系数

实例

例18 $S = \{ 3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c \}$ 的10 组合数

解：生成函数$G(y)$

$$= (1+y+y^2+y^3)(1+y+y^2+y^3+y^4)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$$

$$= (1+2y+3y^2+4y^3+4y^4+3y^5+2y^6+y^7)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$$

$$= (1 + \ldots +3y^{10}+2y^{10}+y^{10} + \ldots)$$

$N = 6$

组合方案

$\{ a, a, a, b, b, b, b, c, c, c \}$, $\{ a, a, a, b, b, b, c, c, c, c \}$,

$\{ a, a, a, b, b, c, c, c, c, c \}$, $\{ a, a, b, b, b, b, c, c, c, c \}$,

$\{ a, a, b, b, b, c, c, c, c, c \}$, $\{ a, b, b, b, b, c, c, c, c, c \}$

不定方程解的个数

基本的不定方程

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=r\text{，}\quad x_i\text{为自然数}$$

$$G(y)=(1+y+\ldots)^k=\frac{1}{(1-y)^k}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-k)(-k-1)\ldots(-k-r+1)}{r!}(-y)^r$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(k)(k+1)\ldots(k+r-1)}{r!}(-1)^r y^r=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{r}y^r$$

$$N=\binom{k+r-1}{r}$$

推广的不定方程

带限制条件的不定方程

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r,\quad l_i \le x_i \le n_i$$

生成函数

$$G(y) = (y^{l_1} + y^{l_1+1} + \ldots + y^{n_1})(y^{l_2} + y^{l_2+1} + \ldots + y^{n_2}) \\ \ldots (y^{l_k} + y^{l_k+1} + \ldots + y^{n_k})$$

带系数的不定方程

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k = r,\quad x_i \in N$$

生成函数

$$G(y) = (1 + y^{p_1} + y^{2p_1} + \ldots)(1 + y^{p_2} + y^{2p_2} + \ldots) \\ \ldots (1 + y^{p_k} + y^{2p_k} + \ldots)$$

13.5 指数生成函数及其应用

- 指数生成函数的定义与实例
- 指数生成函数的应用

指数生成函数的定义与实例

定义13.7 设$\{a_n\}$为序列，称 $G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$

为$\{a_n\}$的指数生成函数.

例19 给定正整数m, $a_n = P(m,n)$, $\{a_n\}$的指数生成函数为

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty} P(m,n)\frac{x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!}{n!(m-n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n=(1+x)^m$$

例20 $b_n=1$, 则$\{b_n\}$的指数生成函数为 $G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$

应用：多重集排列计数

定理13.7 设 $S = \{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$为多重集，则 S 的 r 排列数的指数生成函数为

$$G_e(x) = f_{n_1}(x) f_{n_2}(x) \ldots f_{n_k}(x)$$

$$f_{n_i}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n_i}}{n_i!} \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

实例

例21 由1, 2, 3, 4 组成的五位数中，要求1出现不超过2次，但不能不出现，2出现不超过1次，3出现可达3次，4出现偶数次. 求这样的五位数个数.

解

$$G_e(x)=(x+\frac{x^2}{2!})(1+x)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!})$$

$$=x+5\frac{x^2}{2!}+18\frac{x^3}{3!}+64\frac{x^4}{4!}+215\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

$$N=215$$

实例

例22 红、白、兰涂色 $1\times n$ 的方格，要求偶数个为白色，问有多少方案?

解 设方案数为a_n

$$G_e(x) = (1+\frac{x^2}{2!}+...)(1+x+\frac{x^2}{2!}+...)^2$$

$$= \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})e^{2x} = \frac{1}{2}e^{3x}+\frac{1}{2}e^x$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}3^n\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \frac{3^n+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$a_n = \frac{3^n+1}{2}$$

第十三章 习题课

主要内容

- 递推方程的求解方法：公式法、换元法、迭代归纳法、生成函数法
- 递推方程与递归算法
- 生成函数的应用：计算多重集的 r 组合数、确定不定方程的整数解个数、计算拆分方案数、求解递推方程
- 指数生成函数的应用：计算多重集的 r 排列数
- 常用的计数符号：组合数、排列数、多项式系数、错位排列数、**Fibonacci**数
- 基本计数模型：选取问题、不定方程的解、非降路径、正整数拆分、放球等

基本要求

- 能够使用递推方程求解计数问题
- 能够使用生成函数或指数生成函数求解计数问题
- 掌握 **Fibonacci**数的定义、组合意义以及相关的公式**.**

练习1

1. 已知 $a_0=0, a_1=1, a_2=4, a_3=12$ 满足递推方程 $a_n + c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} = 0$，求 c_1 和 c_2 .

根据已知条件得到

$$\begin{cases} a_3 + c_1a_2 + c_2a_1 = 0 \\ a_2 + c_1a_1 + c_2a_0 = 0 \end{cases}$$

代入a_0,a_1,a_2,a_3的值得到

$$\begin{cases} 12 + 4c_1 + c_2 = 0 \\ 4 + c_1 = 0 \end{cases}$$

解得 $c_1=-4, c_2=4.$

练习2

2． 求解递推方程

$$\begin{cases} na_n + (n-1)a_{n-1} = 2^n, \quad n \geq 1 \\ a_0 = 273 \end{cases}$$

用换元法. 令b_n=na_n, 代入原递推方程得 $\begin{cases} b_n + b_{n-1} = 2^n \\ b_0 = 0 \end{cases}$

用公式法解得

$$b_n = -\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{2^{n+1}}{3}$$

从而得到

$$\begin{cases} a_n = -\frac{2}{3n}(-1)^n + \frac{2^{n+1}}{3n} \quad n \geq 1 \\ a_0 = 273 \end{cases}$$

练习3

3．确定序列$\{a_n\}$的生成函数，其中$a_n=\binom{n}{3}$

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)x^n$$

$$=\frac{1}{6}x^3\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(n-2)x^{n-3}=\frac{1}{6}x^3B(x)$$

$$\int_0^x B(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\int_0^x(n-2)x^{n-3}dx=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=C(x)$$

$$\int_0^x C(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}n\int_0^x(n-1)x^{n-2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=D(x)$$

$$\int_0^x D(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

练习3

$$D(x)=\left(\frac{1}{(1-x)}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$C(x)=D(x)'=\frac{2}{(1-x)^3}$$

$$B(x)=C(x)'=\frac{6}{(1-x)^4}$$

$$A(x)=\frac{1}{6}x^3B(x)=\frac{x^3}{(1-x)^4}$$

练习4

4．已知 $A(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ 是序列$\{a_n\}$的生成函数，求a_n.

$$A(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}=\frac{Ax+B}{(1-x)^2}+\frac{C}{1+x}$$

$$\begin{cases} B+C=1 \\ A+C=0 \\ A+B-2C=0 \end{cases}$$

解得$A=-1/4$, $B=3/4$, $C=1/4$, 从而得到

$$A(x)=-\frac{1}{4}x\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{3}{4}\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{1+x}$$

练习4

$$a_n = \frac{1}{4}[1+(-1)^n]+\frac{1}{2}(n+1)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & n\text{为奇数} \\ \dfrac{n+2}{2}, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

练习5

5．求下列 n 阶行列式的值 d_n

$$d_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

方程
$$\begin{cases} d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2} \\ d_1 = 2, \quad d_2 = 3 \end{cases}$$

解得 $d_n=n+1$.

练习5

6. 平面上有 n 条直线，它们两两相交且没有三线交于一点，问这 n 条直线把平面分成多少个区域？

设平面上已经有$n-1$条直线. 当加入第n条直线时，它与平面上的前$n-1$条直线交于$n-1$个点. 这些点将第n条直线分割成n段，每段都增加一个区域，共增加n个区域，因此得到递推方程

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

练习7

7．用三个1、两个2、五个3可以组成多少个不同的四位数？如果这个四位数是偶数，那么又有多少个？

$$A_e(x)=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+x+\frac{x^2}{2!})$$

$$(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!})$$

其中x^4的系数为 $71\cdot\frac{x^4}{4!}$

因此 $a_4=71$.