《离散数学》

6-集合论 (Set Theory)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 10 月 24 日

主要内容

集合基本概念

集合论发展历史

- Georg Cantor (1845–1918)
  - 德国数学家，提出了朴素集合论。
- Bertrand Russell (1872–1970)
  - 英国数学家，提出了理发师悖论。
- Ernst Zermelo (1871–1953)
  - 德国数学家，建立了集合论的 ZFC 公理体系，解决了悖论。
- David Hilbert (1862–1943)
  - 德国数学家，20 世纪早期最伟大的数学家之一，提出了 23 最重要的数学问题。
- Kurt Gödel (1906–1978)
  - 奥地利数学家，提出了哥德尔不完备定理，也证明了 $ZFC \nvdash \neg CH$。
- Paul Cohen (1934–2007)
  - 美国数学家，证明了 $ZFC \nvdash CH$，$ZF \nvdash AC$

什么是集合？

定义 1.
集合是一些确定的、可以区分的事物汇聚在一起组成的一个整体。其中这些事物称作是集合的元素 (elements)或成员 (members)。

关于集合

- 上述定义是由 Georg Cantor 于 1870 年所提出的。
- 我们用 $a \in A$ 表示 a 是集合 A 的一个元素，$a \notin A$ 表示 a 不是集合 A 的一个元素。
- 集合中的元素是无序的。
- 集合中的元素是不重复的。
- 集合中的元素也可以是集合，即存在集合的集合。

集合的表示

集合一般有两种表示方法：

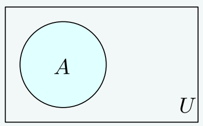
- 列表示法：即列出所有的元素，如：
  - $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$.
  - $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, \}$, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \}$
- 谓词表示法：用谓词来概括元素的属性，即 x 满足什么性质是其在集合里，如：
  - $A = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 4\}$.
  - $B = \{x | x \in \mathbb{Z} \wedge 6 < x < 10\}$

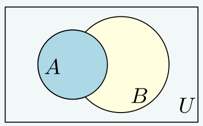
常见集合
我们一般用 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集。而用 $\mathbb{Z}^+$ 这样的符号表示正整数集 (对应的正数子集)。

集合的符号解释

集合的基本符号
前面我们已经解释了 $\in$, $\notin$，下面我们再列举一些常见的符号解释。

- 空集符号 $\emptyset$，即没有任何元素的集合。
- 集合的包含关系 $\subseteq$，$A \subseteq B$ 表示 A 中的每一个元素都是 B 的元素。
- 集合的相等关系 $=$，$A = B$ 表示 $A \subseteq B$ 并且 $B \subseteq A$。
- 集合的真包含关系 $\subset$，$A \subset B$ 表示 $A \subseteq B$ 并且 $A \neq B$。
- 集合元素的个数 $|A|$，这里我们暂且假定讨论的集合是有限的。
- 韦恩图 (Venn Diagram)，用来表示集合之间的关系。





例子

例 2.
下面是一些具体的例子：

- $a \in \{a, e, i, o, u\}$。
- $a \notin \{\{a\}\}$.
- $\emptyset \notin \emptyset$, $\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$.
- $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c, d\}$.
- $\emptyset \subseteq S$, $S \subseteq S$.
- $\{a, b, d, c\} = \{a, b, c, d\}$.
- $\{1, 2\} = \{x | x > 0 \wedge x^2 \leqslant 4\}$.
- $|\{a, b, c, \{f\}, \{1, 2, \{4, 5\}\}\}| = 5$.

集合运算

集合间的运算

我们现在来介绍集合间的一些运算。

- 并集 (Union).
- 交集 (Intersection).
- 差集 (Difference).
- 补集 (Complement).
- 对称差 (Symmetric Difference).
- 幂集 (Power Set).
- 广义交、广义并 (Genralized Intersection, Genralized Union).

并集

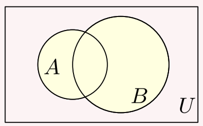
定义 3 **[并集].**

令 A 和 B 是两个集合。A 和 B 的并集，记作 $A \cup B$，是一个集合，其元素满足是 A 的元素或者是 B 的元素，或者两者都是。即：

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ or } x \in B\}$$

并集

- 例如，$\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$.
- $A \cup B$ 的韦恩图如下表示：



交集

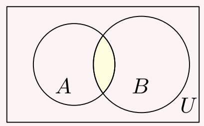
定义 4 **[交集].**

令 A 和 B 是两个集合。A 和 B 的交集，记作 $A \cap B$，是一个集合，其元素满足既是 A 的元素又是 B 的元素。即：

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ and } x \in B\}$$

交集

- 例如，$\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$.
- $A \cap B$ 的韦恩图如下表示：



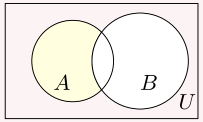
差集

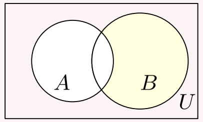
定义 5 **[差集].**
令 A 和 B 是两个集合。Ad 对 B 的差集，记作 $A - B$，是一个集合，其元素满足是 A 的元素但不是 B 的元素。即：

$$A - B = \{x | x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

差集

- 例如，$\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}, \{2,3,4\} - \{1,2,3\} = \{4\}$.
- $A - B$ 和 $B - A$ 的韦恩图如下表示：





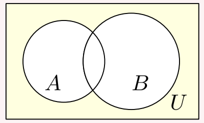
补集

定义 6 **[补集].**
令 A 是集合，U 是全集。A 的补集，记作 A(或者 $\bar{A}$)，是一个集合，是所有不在 A 里元素组成的集合。即：

$$\bar{A} = \{x | x \notin A\} = U - A$$

补集

- 例如，$\bar{U} = \emptyset$.
- $\bar{A}$ 的韦恩图如下表示：



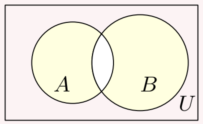
对称差

定义 7 **[对称差].**
令 A 和 B 是两个集合。A 和 B 的对称，记作 $A \oplus B$，是一个集合，其元素满足是 A 的元素或者是 B 的元素，但不同时是两个集合的元素。即：

$$A \oplus B = \{x | x \in A \text{ and } x \in B \text{ and } x \in A \cap B\} = (A - B) \cup (B - A)$$

对称差

- 例如，$\{1,2,3\} \oplus \{2,3,4\} = \{1,4\}$.
- $A \oplus B$ 的韦恩图如下表示：



- $A \oplus B \oplus C$ 是什么？　A, B, C 各自独有的元素和 $A \cap B \cap C$ 的并集。

幂集

定义 8 **[幂集].**
令 A 是集合，A 的幂集，记作 P(A)(或者 $\mathscr{P}(A)$，2^A)，是一个所有 A 的子集组成的集合。即：

$$\mathscr{P}(A) = \{x | x \subseteq A\}$$

幂集

- 假设集合 $A = \{1,2,3\}$，则其幂集为：

$$\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

- 空集 $\emptyset$ 的幂集为：$\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
- $\{\emptyset\}$ 的幂集为：$\mathscr{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

广义交和广义并

定义 9 **[广义交和广义并].**

令 A 是一个集合。A 的广义交，记作 $\cap A$，是集合 A 里所有元素的公共元素组成的集合；A 的广义并，记作 $\cup A$，是集合 A 里所有元素的并集。即：

$$\cap A = \{ x \mid \forall z (z \in A \to x \in z)\}$$
$$\cup A = \{ x \mid \exists z (z \in A \wedge x \in z)\}$$

广义交和广义并

- 例如，对于集合 $A = \{\{1,2\},\{2.3\},\{2,4\}\}$ 来说：
  - 广义交 $\cap A = \{2\}$。
  - 广义并 $\cup A = \{1,2,3,4\}$.
- 广义并和广义交都是一元运算，其针对的对象是元素为集合的集合。
- 我们可以用广义并和广义交来定义并集和交集，比如 $A \cup B = \cup\{A, B\}$

集合运算的顺序

我们现在来介绍一下上述集合运算的顺序。我们将上述运算分为如下两类

- 一类运算：广义交、广义并、补运算、幂集。
- 二类运算：并、交、差、对称差。

运算顺序满足：

1. 一类运算优先于二类运算。
2. 一类运算之间由右向左顺序进行。
3. 括号的优先级最高。

集合恒等式

上述介绍了集合的一些运算，显然通过这些运算我们可以得到一些集合恒等式。

集合恒等式

1. 幂等律：$A \cup A = A$，$A \cap A = A$.
2. 交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$.
3. 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
4. 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
5. 吸收律：$A \cup (A \cap B) = A$，$A \cap (A \cup B) = A$.
6. 同一律：$A \cup \emptyset = A$，$A \cap \emptyset = \emptyset$.
7. 零律：$A \cup \mathrm{U} = \mathrm{U}$，$A \cap \mathrm{U} = A$.
8. 排中律：$A \cup \bar{A} = \mathrm{U}$
9. 矛盾律：$A \cap \bar{A} = \emptyset$
10. 德摩根律：$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$，$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

与命题逻辑等值演算相比

是不是觉得上述恒等式跟命题逻辑里的恒等式非常相似？看起来其存在一种对应：

- $A \cup B$ 对应于 $A \vee B$.
- $A \cap B$ 对应于 $A \wedge B$.
- $\bar{A}$ 对应于 $\neg A$.
- U 对应于 T.
- $\emptyset$ 对应于 F.

事实上，其都是**布尔代数**的一种实例化。

布尔代数

令 $< S, *, \circ, 0, 1 >$ 是一个定义在 S 上的代数系统，$*$, $\circ$ 是两个二元运算，$0, 1$ 分别是最小元和最大元，若：

- $*$, $\circ$ 满足交换律、分配律、吸收律。
- 每个 S 中的元素都有其补元，

运算证明

我们现在来给出一些运算的证明。注意到证明的方法其实主要有两种：

- 依据定义证明。
  - 要证明两个集合相等 $A = B$，即要证明 $A \subseteq B$ 并且 $B \subseteq A$。
  - 要证明 $A \subseteq B$，即要证明对于任意一个元素 $x \in A$，我们有 $x \in B$.
- 利用上述的等式去演算。

集合证明运算的例子

证明：$(A \cup B) \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

证明. 先证$(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$.任取 $x \in (A \cup B) \cap C$，由定义 $x \in C$ 并且 $x \in A \cup B$.

- 若 $x \in A$，则我们有 $x \in A \cap C$, 从而 $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$。
- 若 $x \in B$，则我们有 $x \in B \cap C$, 从而 $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$。

再证$(A \cap C) \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cap C$.任取 $x \in (A \cap C) \cup (B \cup C)$. 由定义 $x \in A \cap C$ 或者 $x \in B \cap C$.

- 若 $x \in A \cap C$，则 $x \in A$ 并且 $x \in C$, 从而 $x \in A \cup B$，因此 $x \in (A \cup B) \cap C$.
- 若 $x \in B \cap C$，则 $x \in B$ 并且 $x \in C$, 从而 $x \in A \cup B$，因此 $x \in (A \cup B) \cap C$.

□

集合证明运算的例子

我们也可以类似下述的过程来表示上述证明。

另一个证明.

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \vee (x \in B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cup C)
\end{aligned}
$$

□

集合证明运算的例子

证明：$(A - B) \cup B = A \cup B$.

证明.

$$
\begin{aligned}
(A - B) \cup B &= (A \cap \neg B) \cup B \\
&= (A \cup B) \cap (\neg B \cup B) \\
&= (A \cup B) \cap U \\
&= A \cup B.
\end{aligned}
$$

□

集合证明的例子

证明：$\cup \mathscr{P}(A) = A$.

证明.

$$
\begin{aligned}
x \in \cup\mathscr{P}(A) = A &\Leftrightarrow \exists y(x \in y \wedge y \in \mathscr{P}(A)) \\
&\Leftrightarrow \exists y(x \in y \wedge y \subseteq A) \\
&\Leftrightarrow x \in A.
\end{aligned}
$$

□

有穷集的计数

集合的基数

我们介绍集合的另一个概念，**基数**。对于有限集来说，其实际上就是集合的元素个数。

定义 10 **[有限集合的基数].**
对于集合 A，如果存在 $n \in N$，使得集合 A 与集合 $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < n\}$ 的元素个数相同，就说集合 A 的基数为 n，记作 $|A| = n$，或者 $\mathrm{card}(A) = n$，$\#(A) = n$。定义空集 $\emptyset$ 的基数为 0.

显然如果存在这样的 n，则集合 A 就是有限集合，否则 A 是无限的。

无限集合的基数?
上述定义可以拓展到对无限集合的基数定义上。我们会在后续课程进行进一步的讨论。

集合基本运算的基数性质

定理 11.
对于有限集合 A 和 B，我们有：

- $|A \cap B| \leqslant |A| + |B|$.
- $|A \cap B| \leqslant \min(|A|, |B|)$.
- $|A - B| \geqslant |A| - |B|$.
- $|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$.
- $\mathscr{P}(A) = 2^{|A|}$.

集合基本运算的基数性质

我们这里只证明最后一个。

对 $\mathscr{P}(A) = 2^{|A|}$ 的证明.

令 $|A| = n$.

A 的具有 k 个元素的子集数目等价于 n 个元素里任取 k 个的组合数：$\binom{n}{k}$(也就是 C_n^k).

从而我们有 $\mathscr{P}(A)$ 的大小为:

$$|\mathscr{P}(A)| = 1 + \binom{n}{1} + \cdots \binom{n}{n} = 2^n$$

□

容斥原理

我们现在来介绍有限集合计数中常用的一个定理-容斥原理。

定理 12 **[容斥原理].**
令 $A_1, \ldots A_n$ 是有限集合，则我们有:

- $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.
- $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$.

定理说明
定理实际上说明了有限集合并运算和交运算之间的数量关系。

容斥原理的证明

对两个集合的证明.

- 若 A_1 和 A_2 不相交，则我们有 $|A_1 \cap A_2| = 0$，此时 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$，定理显然成立。
- 若 A_1 和 A_2 相交，则我们有:

$$|A_1| = |A_1 \cap \bar{A_2}| + |A_1 \cap A_2|$$
$$|A_2| = |A_2 \cap \bar{A_1}| + |A_2 \cap A_1|$$

此外，我们有:

$$|A_1 \cup A_2| = |\bar{A_1} \cup A_2| + |A_2 \cup \bar{A_1}| + |A_1 \cap A_2|$$

从而我们有:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

□

容斥原理的证明

对 n 个集合的证明. 我们对 n 进行归纳法，BASE 情况已经在之前证好。令结论对 $\leqslant n-1$ 均成立，则 n 时，对 $B = A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}$，$A_n$ 利用归纳假设则有:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1 \cup \cdots A_{n-1}| + |A_n| - |(A_1 \cup \cdots A_{n-1}) \cap A_n|$$

注意到:

$$|(A_1 \cup \cdots A_{n-1}) \cap A_n| = |(A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \cap A_n)|$$

从而由归纳假设:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}| = & |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_{n-1}| \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots - |A_{n-2} \cap A_{n-1}| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-3} \cap A_{n-2} \cap A_{n-1}| \\ & - \cdots \\ & + (-1)^{n-2} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}| \end{aligned}$$

□

容斥原理的证明

上海师范大学 Shanghai Normal University

对 n 个集合的证明 (续).

以及:

$$\begin{aligned}
&|(A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \cap A_n)| \\
&\quad = |A_1 \cap A_n| + |A_2 \cap A_n| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n| \\
&\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_n| - |A_1 \cap A_3 \cap A_n| - \cdots - |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
&\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_n| + \cdots + |A_{n-3} \cap A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
&\quad - \cdots \\
&\quad + (-1)^{n-2} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n|
\end{aligned}$$

将上述两式相加，即可得到结论: □

组合证明

容斥原理还有很多其他的证明方式。一个比较熟知的是一种组合方式，即计算元素 a 在两边的出现次数。

容斥原理的应用

上海师范大学 Shanghai Normal University

例 13.

30 位同学中，15 人参加体育组，8 人参加音乐组，6 人参加美术组，其中 3 人同时参加三个组。请问至少多少人没有参加任何小组?

解 14.

令 A 为参加体育组的人，B 为参加音乐组的人，C 为参加美术组的人。则我们有:

$$|A| = 15,\ |B| = 8,\ |C| = 6,\ |A \cap B \cap C| = 3$$

从而由容斥原理可得:

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\
&= 15 + 8 + 6 - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + 3 \\
&\leqslant 15 + 8 + 6 - 3 - 3 - 3 + 3 = 23
\end{aligned}$$

因此至多有 23 人参加了小组，从而至少 7 人没参加任何小组。

容斥原理的应用

上海师范大学 Shanghai Normal University

例 15 **[错位排列].**

有 n 个人参加晚会时寄存了自己的帽子，可是保管人忘记了寄存号。因此现在当寄存人取帽子的时候保管人只能随机的取一顶帽子交给寄存人。问：一共有多少种情形使得所有人都没有取到自己的帽子?

解 16.

令 n 个人编号 $1 \sim n$，获取到的帽子为 a_i，则 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为 $1 \sim n$ 的一个排列。题目就是要求所有这样的排列，满足 $a_i \neq i$, 记该集合为 S。

我们令 A_i 为所有满足 $a_i = i$ 的排列，则我们有:

- $|A_i| = (n-1)!, |A_i \cap A_j| = (n-2)!, \cdots$

从而由容斥原理可得:

$$|S| = n! - |A_1 \cup A_2 \cdots A_n| = n! - \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} (n-i)!\right) = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

悖论

集合论是完美的么？

目前看来，我们介绍的集合论一切正常。但这样的集合论是否是没有问题的？

理发师悖论

在某个城市中有一位理发师，他的广告词是这样写的：

“本人的理发技艺十分高超，誉满全城。我将为本城所有不给自己刮脸的人刮脸，我也只给这些人刮脸。我对各位表示热诚欢迎！”

请问这位理发师能给自己刮脸吗？

上述悖论可以由集合的语言表示出来，令：

- $A = \{a \mid a\text{是小城里的人}\}$
- 对每个 a，令 $S_a = \{x \mid a\text{给 } x \text{ 刮脸}\}$

则对于理发师 s，其相应的集合可以定义为 $S_s = \{x \mid x \notin S_x\}$，但显然这是矛盾的。

罗素悖论

定理 17 **[Russell,1902].**

不存在一个由任何集合构成的集合。

证明.

假设存在这样的集合 R，我们定义集合 $B = \{x \in R \mid x \notin x\}$，则我们宣称 $B \notin R$，从而我们得到矛盾。否则如果 $B \in R$, 考察是否存在 $B \in B$:

- 如果 $B \in B$，则依据定义 $B \notin B$。
- 如果 $B \notin B$，则依据定义 $B \in B$。

□

悖论的解决

通过公理化避免了相应集合的存在。比较著名的有 ZF，ZFC 公理等。我们这里不作详细的展开。

定义 18 **[正则公理].**

对任意的非空集合 x，存在 x 的元素 y，y 和 x 不相交。

$$\forall x(x \neq \emptyset \to \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$$

通过正则公理可以说明，对于任何一个集合 A, 我们有 $A \notin A$。

不严谨的证明

假设存在 $A \in A$, 则我们可以构造集合 $\{A\}$，则由正则公理该集合存在一个元素 B，使得 $B \cap \{A\} = \emptyset$。而集合 B 只能是 A，从而 $A \cap \{A\} = \emptyset$，但由假设 $A \in A$，从而导致矛盾。

总结

本章总结

- 集合的基本概念
  - 集合运算
- 有穷集的计数
  - 容斥原理
- 朴素集合论的缺陷。