上海师范大学
Shanghai Normal University

《离散数学》

10-图的路径 (Path Of Graph)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 11 月 11 日

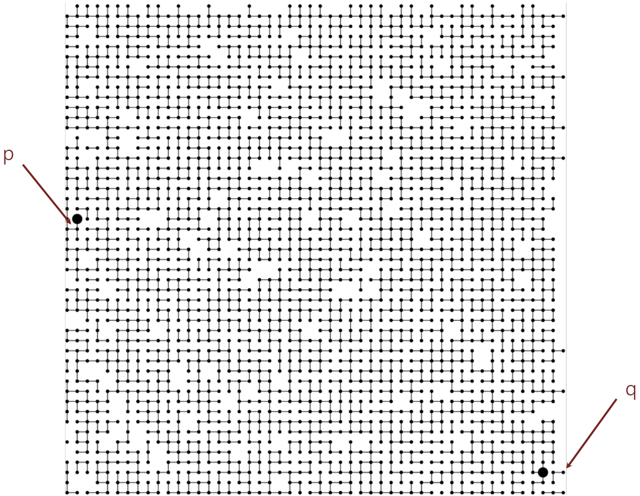
主要内容

- 图的连通性
- 二分图
- 欧拉图
- 哈密顿图

图的连通性

通路与回路

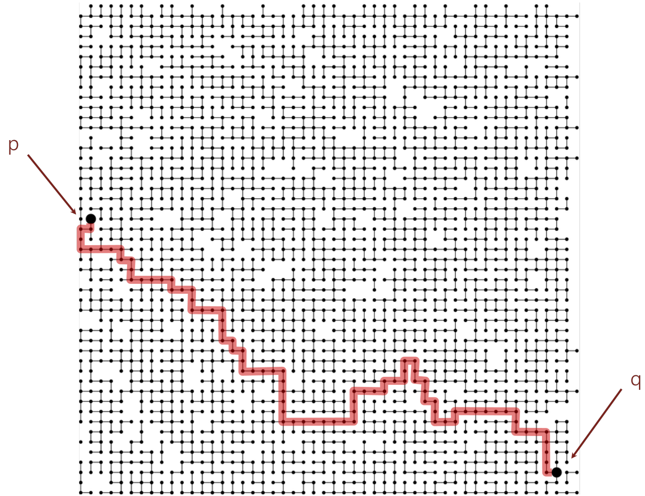
对于图来说，两个点之间是否是可到达的是我们一直关注的对象。



在上述的迷宫中，我们可以从 p 走到 q 么?

通路与回路

对于图来说，两个点之间是否是可到达的是我们一直关注的对象。



在上述的迷宫中，我们可以从 p 走到 q 么？ Yes!

我们来给出图上关于路的概念。

定义 1 **[通路].**

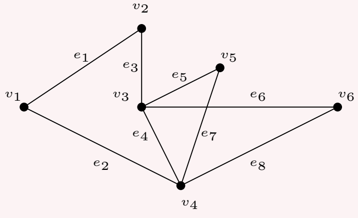
设 $G = (V, E)$ 是一个图，若点边交替序列 $\Gamma = v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$ 满足"e_i 的两个端点是 v_{i-1} 和 v_i"，则称这个序列是 G 中的一条通路。Γ 中边的数目称为这条通路的长度，记作 $|\Gamma|$。特别的，若 $v_0 = v_k$，则称这个序列是 G 中的一条回路。

简单通路与初级通路

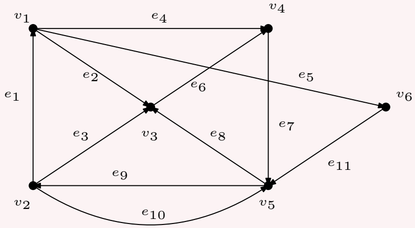
1. 如果一条通路（回路）没有经过重复的边，则我们称其为简单通路 (回路)。
2. 如果一条通路（回路）没有经过重复的顶点（回路指不算起点和终点），则我们称其为初级通路 (回路)。
3. 我们又将初级回路称为圈，如果长度为奇数则称为奇圈，如果长度为偶数则称为偶圈。

上海师范大学 Shanghai Normal University

例 2.



G_1



G_2

- 在 G_1 中，$v_1e_1v_2e_3v_3$ 是一条通路，$v_3e_5v_5e_7v_4e_4v_3$ 是一条回路。
- 在 G_2 中，$v_2e_9v_5e_{10}v_2e_3v_3$ 是一条简单通路。

一些补充

当标注不会引起误解的时候，我们也经常用顶点序列 $v_0v_1v_2\cdots v_k$ 或者边序列 $e_1e_2\dots e_k$ 来表示一条通路或者回路。

如果存在一条从 u 到 v 的通路 π，则我们称 v 对于 u 是可达的，写作 $u \xrightarrow{\pi} v$ 或者 $u \to_* v$。

- 可达性显然是图顶点上的关系。
- 对于无向图而言，该关系是等价关系。因此在无向图中我们称 u 和 v 是连通的, 记作 $u \sim v$。

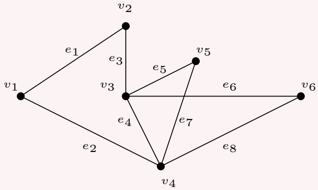
定义 3 **[连通图、连通分支].**

给定无向图 $G = (V, E)$，若 G 中任意两个顶点都是连通的，则称 G 是一个连通图。特别的，令 V_i 是顶点连通关系的一个等价类，则其导出的子图 $G_i = (V_i, E_i)$ 称为 G 的一个连通分支。G 的连通分支数记为 $p(G)$。

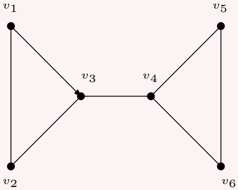
对于 G 中任何两个顶点 u, v，定义其距离为:

$$d(u,v) = \begin{cases} \min\{|\pi| : \pi\text{是从}u\text{到}v\text{的通路}\}, & u \sim v \\ \infty, & u \not\sim v \end{cases}$$

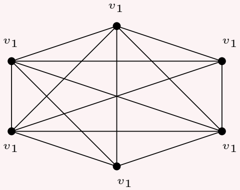
例 4.



G_1



G_2



G_3

- G_1, G_2 是连通图，G_3 不是连通图。
- G_3 有 3 个连通分支，分别 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_5, v_6, v_7\}, \{v_8\}$ 产生的导出子图生成。

引理 5.

给定 n 阶无向连通图 G，则对于任何两个不同顶点 v_i, v_j，存在一条长度不超过 $n-1$ 的初级通路。

证明. G 是连通的，因此一定存在一条通路 π 满足：$v_i \xrightarrow{\pi} v_j$，即：

$$v_i \to u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_k \to v_j$$

若存在 $u_a = u_b (a < b)$，则 $\pi = v_i u_1 \ldots u_a u_{b+1} \ldots u_k v_j$ 依旧是 v_i 到 v_j 的一条通路。

重复上述过程，最终可以得到顶点互不相同的初级通路，并且长度不超过 $n-1$. □

引理 6.

令 G 是无向简单图，如果其顶点数 n 和边数 m 满足：

$$m > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

则 G 是连通图。

证明. 用反证法，假设 G 不是连通图，则 G 有两个连通分支 G_1, G_2，则 G_1 和 G_2 的顶点数分别为 n_1, n_2，边数分别为 m_1, m_2，则有：

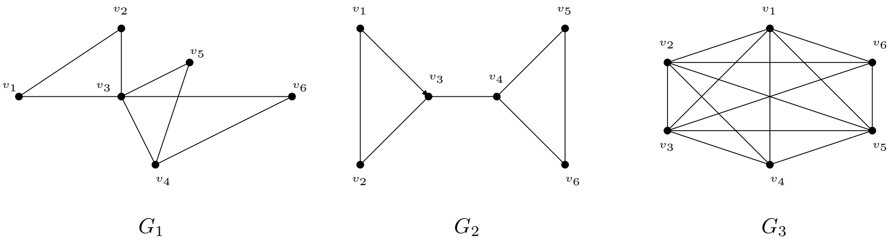
$$m_1 + m_2 = m,\ n_1 + n_2 = n$$

不妨令 $n_1 \leqslant n_2$。由于 G 是简单图，所以 $m_1 \leqslant \frac{n_1(n_1-1)}{2}, m_2 \leqslant \frac{n_2(n_2-1)}{2}$，因此：

$$m_1 + m_2 \leqslant \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2} < \frac{n_2}{2}(n_1 - 1 + n_2 - 1) < \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

矛盾！ $\square$

观察下列的无向图:



尽管上述三张图都是连通的，但是连通的程度似乎有所不同。

- G_1 只要删去 v_3 这个点，就不再连通了。
- G_2 只要删去 (v_3, v_4) 这条边就不连通了。
- G_3 至少要删去 5 条边才不连通。

无向图的连通性衡量-点连通度 $\kappa(G)$

定义 7 **[点割集].**

给定无向图 $G=(V,E)$，如果点集 $S\subseteq V$ 满足 $p(G-S)>p(G)$，且对于任意的 $S'\subseteq S$ 均有 $p(G-S')=p(G)$，则称 S 是 G 的一个点割集。特别的，如果 $S=\{v_i\}$，则称 v_i 是 G 的一个割点。

定义 8 **[点连通度].**

无向图 G 的点连通度 $\kappa(G)$ 定义为:

$$\kappa(G)=\begin{cases}\min\{|S|:S\text{是}G\text{的一个点割集}\}, & G\text{是非完全图的连通图}\\ 0, & G\text{是非连通图}\\ |V|-1, & G\text{是完全图}\end{cases}$$

特别的，若 $\kappa(G)\geqslant k$，则称 G 是k-连通图.

定义 9 **[边割集].**

给定无向图 $G=(V,E)$，如果边集 $S\subseteq E$ 满足 $p(G-S)>p(G)$，且对于任意的 $S'\subseteq S$ 均有 $p(G-S')=p(G)$，则称 S 是 G 的一个边割集。特别的，若 $S=\{e\}$，则称 e 为割边或者桥。

定义 10 **[边连通度].**

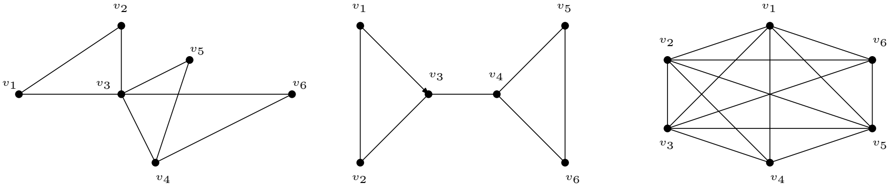
无向图 G 的点连通度 $\lambda(G)$ 定义为:

$$\lambda(G)=\begin{cases}\min\{|S|:S\text{是}G\text{的一个边割集}\}, & G\text{是连通图}\\ 0, & G\text{是非连通图}\end{cases}$$

特别的，若 $\lambda(G)\geqslant r$，则称 G 是r 边-连通图.

连通度的例子

再回过来看下之前的例子:



G_1 G_2 G_3

我们有:

- $\kappa(G_1) = 1,\ \lambda(G_1) = 2.$
- $\kappa(G_2) = 1,\ \lambda(G_2) = 1$
- $\kappa(G_3) = 5,\ \lambda(G_3) = 5$

一个很自然地发现是边连通度不可能超过任一顶点的度数。

定理 11.

对于任何无向图 $G=(V,E)$，我们有：

$$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$$

证明.

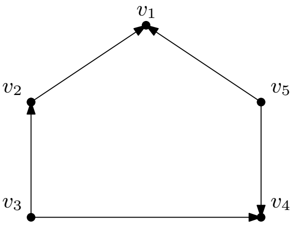
- 先证明 $\lambda(G) \leqslant \delta(G)$
  事实上，令 S 是关联某个度数最小的顶点的边集，显然 S 是一个边割集，且 $|S| = \delta(G)$，因此 $\lambda(G) \leqslant \delta(G)$.
- 再证明 $\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$
  令 $S = \{e_1, \ldots e_k\}$ 为对应的边割集，则 S 将 G 分成了两个连通分支，记其顶点分别为 V_1, V_2。由于 S 是边割集，因此 S 中与 V_1 相关联的至多 $\lambda(G)$ 个顶点，从而定义集合：

$$V' = \{u \mid (e_i = (u, \_) \wedge u \in V_1) \vee (e_k = (u, \_) \wedge u \in V_2)\}$$

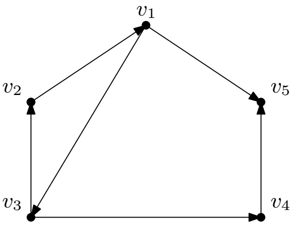
则 V' 是一个点割集，且 $|V'| \leqslant \lambda(G)$，因此 $\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$.

有向图的连通性 (I)

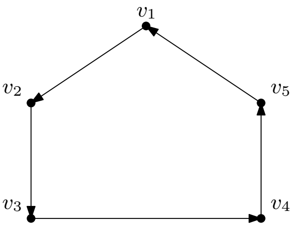
有向图的连通性与无向图的连通性有所不同，我们先来看一些例子：



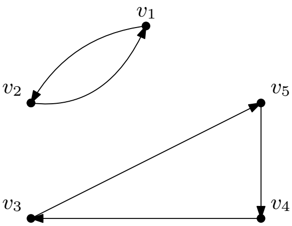
G_1



G_2



G_3



G_4

定义 12 **[有向图的连通概念].**

给定有向图 $G = (V, E)$，若其基图是连通图，则称其为弱连通图；若对于任意两个顶点 u, v，$u \to_* v$ 或者 $v \to_* u$ 至少之一成立，则称其为单向连通图；若对于任意两个顶点 u, v，$u \to_* v$ 和 $v \to_* u$ 同时成立，则称其为强连通图。

在上述例子中，

- G_1 是弱连通图。
- G_2 是单向连通图。
- G_3 是强连通图。
- G_4 不连通。

引理 13.

有向图 $G=(V,E)$ 是强连通的，当且仅当存在一条经过所有点的回路。

证明. 充分性是显然的，下证必要性。

令顶点集为 $\{v_1,\ldots v_k\}$。由于 G 是强连通的，因此对于任意的 $1\leqslant i\leqslant k$，存在一条 v_i 到 v_{i+1} 的通路 π_i，特别的令 $v_{k+1}=v_1$。则 $\pi_1\pi_2\ldots\pi_k$ 是 G 中一条经过所有顶点的回路。 □

引理 14.

有向图 $G = (V, E)$ 是单向连通的，当且仅当存在一条经过所有点的通路。

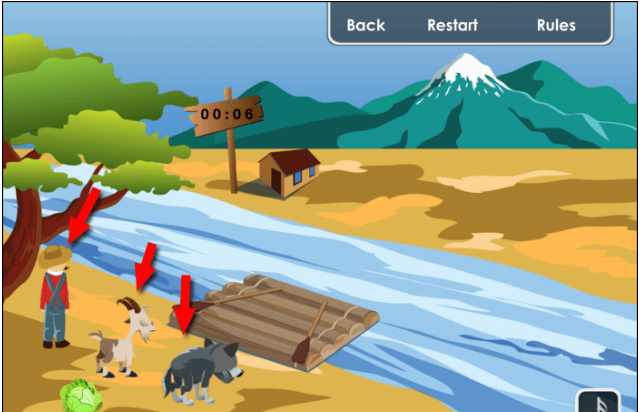
证明. 充分性也是显然的，下证必要性。

注意到在 V 上的可达性关系定义了其上的一个全序关系，因此我们可以从小到大排列出 V 中的顶点，不妨令为 $v_1, \ldots, v_k$。由定义，存在一条 v_i 到 v_{i+1} 的通路 π_i，因此 $\pi_1 \ldots \pi_k$ 是一条 G 中经过每个点的通路。 $\square$

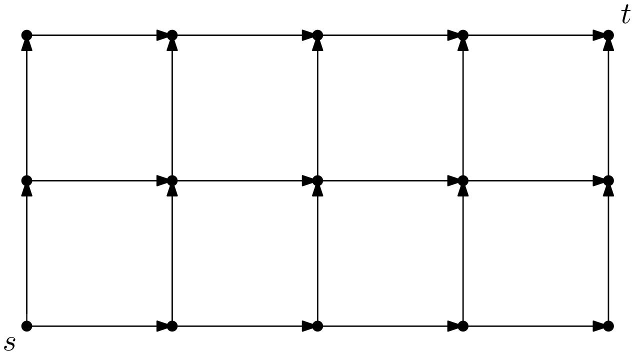
上海师范大学 Shanghai Normal University

例 15.

一个农夫带着一条狗、一只羊和一筐白菜来到河的南岸。河边有一条小船，小船一次只能运载农夫和他带的一样东西。农夫要把狗、羊和白菜都运到河的北岸去，但他不敢把狗和羊放在一起，也不敢把羊和白菜放在一起。请问农夫该如何做?



计算路径的方法



s 到 t 一共有多少条通路？

邻接矩阵的幂

给定一个图 G 和其邻接矩阵 A，考察 A^2，其第 i 行第 j 列的元素为：

$$(A^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$$

- $a_{ik}a_{kj}$ 可以理解为从 v_i 到 v_k 再到 v_j 的长度为 2 的通路数。
- 对 k 求和可以理解为从 v_i 到 v_j 的长度为 2 的通路数。

定理 16.

令 G 是一个有向图，A 是其邻接矩阵，则 A^k 的第 i 行第 j 列的元素为从 v_i 到 v_j 的长度为 k 的通路数。

上述定理对没有自环的无向图也成立。

Shanghai Normal University

定义 17 **[可达矩阵].**

给定一个图 $G=(V,E)$，其可达矩阵 P 定义为：

$$P_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \to_* v_j\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

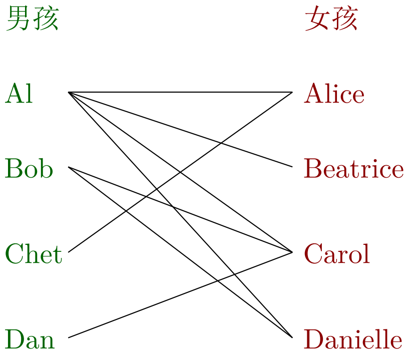
如何计算可达矩阵?

注意到如果 $v_i \to_* v_j$，一定存在一条长度不超过 $n-1$ 的通路，因此我们有：

$$P_{ij}=1 \iff \sum_{k=1}^{n-1}(A^k)_{ij}>0$$

二分图

假设在一次相亲活动中，一共有如下 4 个男孩和女孩。下图表示了他们之间的好感度，如果男孩和女孩存在一条边，则意味着他们彼此喜欢，比如男孩 AI 喜欢所有的女孩。

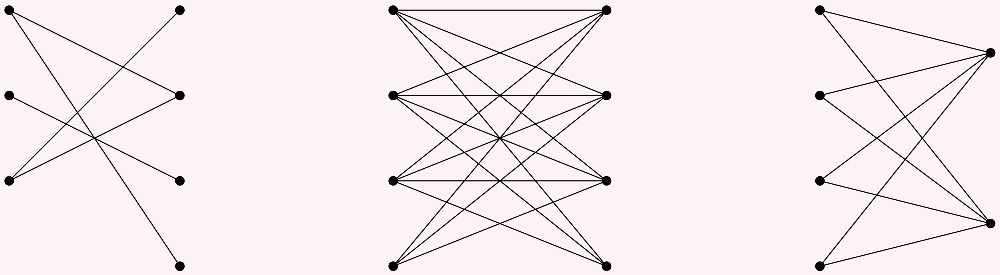


问题是，是否存在一种配对方式，使得所有的男孩和女孩都能两两配对，并且配对双方总是互相喜欢？如果不行的话，至多能配对成几对互相喜欢的男孩和女孩？

定义 18 **[二分图].**

给定无向图 $G=(V,E)$，如果存在顶点集 V_1，V_2 满足 $V_1\cup V_2=V$，$V_1\cap V_2=\emptyset$，并且 G 中每条边的两个端点都满足恰好有一个在 V_i 里，则称 G 是一个二分图，常记作 $(V_1\cup V_2,E)$。特别的，V_1 中的每个顶点与 V_2 中的每个顶点都有一条边，则称 G 是一个完全二分图，记作 $K_{m,n}$，这里 $|V_1|=m,|V_2|=n$。

例 19.



引理 20.

给定 n 阶无向图 $G=(V,E)$，G 是二分图当且仅当 G 不含奇圈。

证明. 先证必要性。反设 G 存在一个奇圈，不妨令为 $v_1v_2v_3\ldots v_{2k+1}$ 且 $v_1\in V_1$，则由定义：

- $v_1,v_3,v_5,\ldots,v_{2k+1}\in V_1$
- $v_2,v_4,v_6,\ldots,v_{2k}\in V_2$

但 $(v_{2k+1},v_1)\in E$，矛盾。再证充分性。不妨假设 G 是连通的，否则我们可以根据连通分支来证明。取 v 为其中任一顶点，定义：

- $V_1=\{u\mid d(v,u)\text{是偶数}\}$
- $V_2=\{u\mid d(v,u)\text{是奇数}\}$

我们证明，V_1,V_2 是一个可行的划分，从而 G 是二分图。

证明续. V_1, V_2 满足:

- $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1, V_2 \neq \emptyset$

下证其没有内部的边。反设存在 $u_1, v_1 \in V_1$ 使得 $e = (u_1, v_1) \in V_1$, 现在考察这样一个路径:

$$v \xrightarrow{\pi_1} u_1 \to v_1 \xrightarrow{\pi_3} v$$

由定义:

- 存在 π_1, π_2 使得其长度都是奇数。

从而 $\pi_1 e \pi_2$ 是一个长度为偶数的圈, 矛盾! $\square$

定义 21 **[二分图的匹配].**

给定一个二分图 $G = (V_1 \cup V_2, E)$，令 M 是 E 的子集，如果 M 中任意两边都没有公共顶点，则称 M 是 G 的一个匹配。

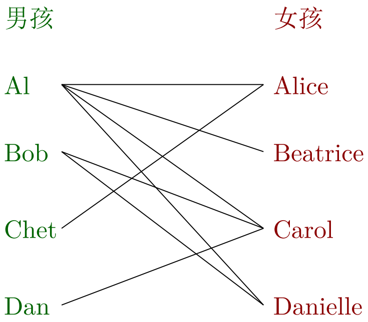
不同的匹配

对于二分图 $G = (V_1 \cup V_2, E)$ 上的一个匹配 M，我们称其

- 最大匹配，如果这是一个包含最多边的匹配。
- 极大匹配，如果往 M 中再加任何一条边都不能构成匹配。
- 完备匹配，$|M| = |V_1| \leqslant |V_2|$，即一个匹配能够覆盖 V_1，V_2 中较小集合的所有顶点。

很显然，一个完备匹配肯定是最大匹配。

匹配的例子



- (Al, Alice), (Chet, Alice), (Bob, Carol) 不是一个匹配。
- (Al, Beatrice), (Chet, Alice), (Bob, Carol) 是一个极大匹配。
- (Al, Beatrice), (Chet, Alice), (Bob, Danielle), (Dan, Carol) 是一个完备匹配。

显然完备匹配的存在等价于所有的男孩和女孩都能两两配对，并且配对双方总是互相喜欢。

定理 22 **[Hall 定理].**

给定一个二分图 $G = (V_1 \cup V_2, E)$, $|V_1| \leqslant |V_2|$, 则 G 存在完备匹配当且仅当对于任意的 $S \subseteq V_1$，有:

$$|N(S)| \geqslant |S|$$

再证明上述定理之前，我们介绍一个匹配中的重要概念-增广路径。

定义 23 **[增广路径].**

给定二分图 $G = (V_1 \cup V_2, E)$ 上的一个匹配 M，如果存在一条路径 π 满足:

- π 的两个端点都不在 M 中。
- π 的边交替的属于 M 和 $E - M$。

则称 π 是 M 的一条增广路径。

上海师范大学 Shanghai Normal University

Hall 定理的证明. 必要性是显然的，只需考虑完备匹配即可。下证充分性，令 M 是 G 中的最大匹配，反设结论不成立，即存在 $v_x \in V_1$，v_x 与 M 不关联。考察由 v_x 出发的所有的与匹配中的路径交替产生的最大路径 π:

$$v_x \to v_1 \to u_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k$$

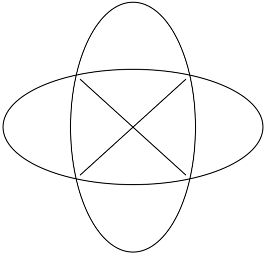
其中红色边是匹配中的路径，绿色边是非匹配中的边。这条路径一定以匹配中的路径为结尾，否则我们可以产生一个更大的匹配。现在定义:

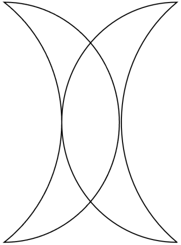
- $S = \cup_\pi \{v_x, v_1, \ldots v_k\} \subseteq V_1$
- $T = \cup_\pi \{u_1, \ldots u_k\} \subseteq V_2$

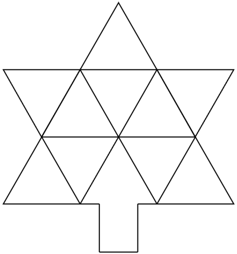
$S - \{v_x\}$ 与 T 之间存在一一映射，从而 $|S| > |T| = N(S)$, 矛盾! $\square$

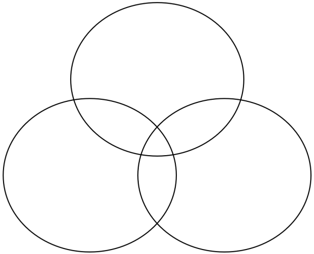
欧拉图

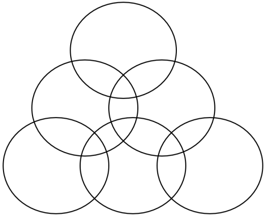
下列图形能否一笔画成?







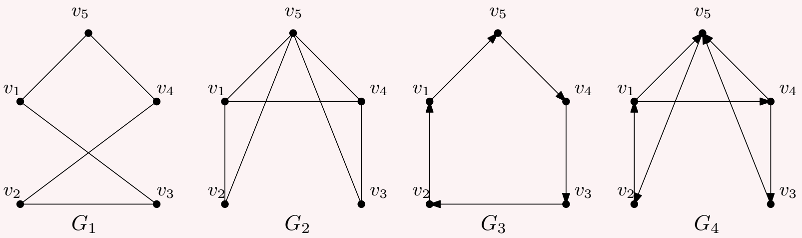




定义 24 **[欧拉道路与欧拉回路].**

给定图 $G=(V,E)$，如果存在一条通过所有边一次仅一次行遍所有顶点的通路 π，则称 π 是 G 的一条欧拉道路；如果存在一条通过所有边一次仅一次行遍所有顶点的回路 π，则称其为欧拉回路。具有欧拉回路的图称为欧拉图；具有欧拉通路而没有欧拉回路的图称为半欧拉图。

例 25.



在上述图中，G_1, G_3 是欧拉图，G_2 是半欧拉图，G_4 不是欧拉图。

定理 26.

无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通的且每个顶点的度数都是偶数。

证明. 不妨令 G 是非平凡的，并且 $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $|E| = m$.

先证必要性。设 π 是 G 中一条欧拉回路，则任两个顶点 u, v 都会出现在这条回路中，因此 u, v 是连通的，从而 G 是连通的。另外，由于 π 经过每条边一次且仅一次，因此每个顶点每出现一次度数便加 2，从而都是偶数。

再证充分性。我们对边数 m 进行归纳。当 $m = 1$ 时，由条件可知该边必然是个自环，从而命题成立。

判断欧拉回路续. 假设命题对 k 成立，即当 $m = k$ 时图 G 存在欧拉回路。现在考虑 $k+1$ 的情况。注意到 G 是连通的且每个顶点的度数都是偶数，因此图 G 必然存在一个圈 C，若 C 已经经过了所有的边恰好一次，则 C 就是一条欧拉回路。否则，考察子图 $G_1 = G - C$:

- G_1 不一定连通，但是每个顶点的度数都是偶数。
- 设 G_1 的连通分支为 $C_1, \ldots, C_l$，由归纳假设，C_i 存在欧拉回路 π_i。
- 由于 C 是一个圈，因此 C 的任意一个顶点 u 都与 C_i 中的某个顶点 v 相邻，因此我们可以将 C 和 π_i 连接起来，从而得到一条欧拉回路。

从而命题对 $k+1$ 也成立，即充分性得证。 □

无向图的欧拉回路判断方法 (III)

推论 27.

无向图 G 时半欧拉图当且仅当 G 是连通的且有且仅有 2 个奇度数的顶点。

证明. 必要性的证明是类似的，只要注意顶点在起点或者终点时对度数的贡献只能有 1，因此恰好有两个奇数度数的顶点。

再证充分性，令 v_i, v_j 是具有奇数度数的两个顶点考察图 $G = G + (v_i, v_j)$，则 G 是欧拉图，因此存在一条经过所有边恰好一次的欧拉回路，将 (u_i, u_j) 删除，便得到了 G 中的一条经过所有边恰好一次的通路。 □

有向图的欧拉回路判断方法

有向图上我们也有类似的结论。

定理 28.

有向图是欧拉图当且仅当其是强连通的且每个顶点的入度和出度相等。

定理 29.

有向图是半欧拉图当且仅当其是单向连通的，且恰有两个奇数度数的顶点，其中一个顶点的出度比入度大 1，另一个顶点的入度比出度大 1。

推论 30.

设连通图 G 有 k 个奇数度数顶点，其边集合可以划分成 $\frac{k}{2}$ 条简单道路。

证明. 由握手定理，k 是偶数。假设奇数顶点为 $v_1, \ldots v_k$，我们往其添加 (v_{2i+1}, v_{2i+2}) 这 $\frac{k}{2}$ 条边，得到的新图满足每个顶点的度数都是偶数，因此存在欧拉回路 π。

新添加的边一定在 π 中出现，并且不会相邻，从而删去这些边后，我们就得到了划分出的 k 条简单道路。 □

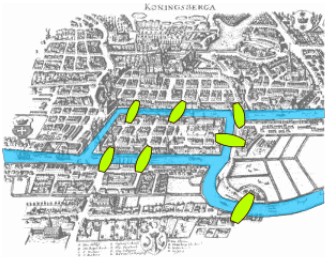
一笔画的答案

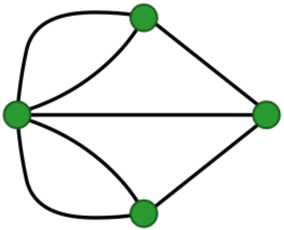
现在我们可以回答一笔画问题的答案了:

- 凡是由偶点组成的连通图，一定可以一笔画成。画时可以把任一偶点为起点，最后一定能以这个点为终点画完此图
- 凡是只有两个奇点的连通图（其余都为偶点），一定可以一笔画成。画时必须把一个奇点为起点，另一个奇点终点
- 其他情况的图都不能一笔画出，但是奇点数除以二便可算出此图需几笔画成

哥尼斯堡七桥问题的答案

回顾哥尼斯堡七桥问题:



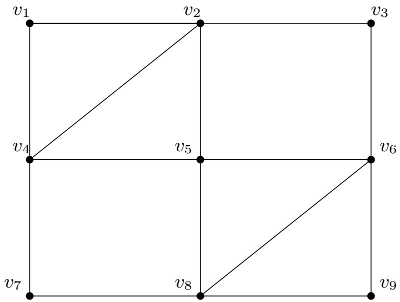


现在我们可以确认，这个问题是不可能的。

如何求得欧拉回路?

判断的方法其实就给了我们一种求得欧拉回路的方法:

- 能不走桥就不走桥!



算法 Fleury

输入: 欧拉图 $G = (V, E)$

输出: G 的一条欧拉回路 π

任选一个顶点 v 作为起点，令 $\pi = v$

while $E \neq \emptyset$ **do**

  令 π 的末尾顶点为 u。

  $e \leftarrow \emptyset$

  for $(u, v) \in E$ **do**

    if **then**$e = \emptyset$

      $e \leftarrow (u, v)$。

    if (u, v) 不是桥 **then**

      $e \leftarrow (u, v)$。

  将 e 加入 π 的末尾。

  从 E 中删除 e。

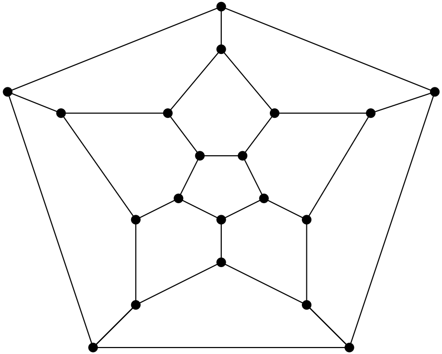
return π

哈密顿图

19 世纪英国数学家哈密顿提出了一个问题:

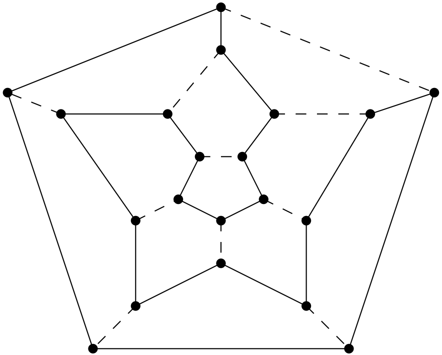
问题 31.

一个凸 12 面体，把 20 个顶点比作世界上 20 个城市，30 条棱表示这些城市间的交通路线。问题是能否周游世界，即从某个城市出发，经过每城一次且只一次最后返回出发地



周游世界的答案

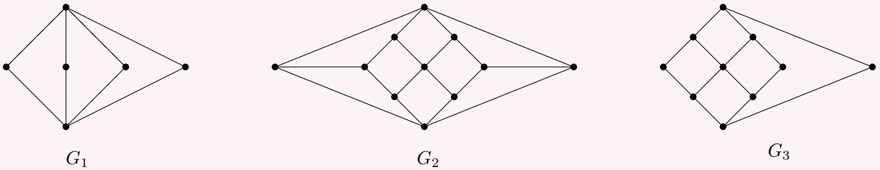
事实上是可以的，我们有如下的走法（并不唯一）



定义 32.

给定图 $G=(V,E)$，一条经过 G 中每个顶点一次且仅一次的通路（回路）被称作哈密顿通路（回路），具有哈密顿回路的图被称作哈密顿图；具有哈密顿通路而没有哈密顿回路的图被称作半哈密顿图。特别的，规定平凡图是哈密顿图。

例 33.



在上述例子中，G_1 不是哈密顿图，G_2 是半哈密顿图，G_3 是哈密顿图。

哈密顿路与欧拉回路

哈密顿路和欧拉路要求是不一样的:

- 欧拉路要求每条边都走一次，但是顶点可以重复。
- 哈密顿路要求每个顶点都走一次，但是边可以少走。

判断哈密顿路是很困难的!

事实上，人们目前还没有有效的判断哈密顿路的方法，而且很大概率这是一件不可能能高效解决的事情。因为这是一个 NP 完全问题。

引理 34.

设 $G = (V, E)$ 是一个哈密顿图，则对于任意的 $S \subset V$，$S \neq \emptyset$，有:

$$p(G - S) \leqslant |S|$$

证明. 设 π 是图 G 的哈密顿回路，显然 π 也构成了 G 的一个生成子图 C，因此我们有:

$$p(G - S) \leqslant p(C - S) \leqslant |S|$$

□

推论 35.

设 $G = (V, E)$ 是一个半哈密顿图，则对于任意的 $S \subset V$，$S \neq \emptyset$，有:

$$p(G - S) \leqslant |S| + 1$$

推论 36.

哈密顿图没有割点。

证明. 反设图中存在割点 v，则取 $S = \{v\}$，则 $p(G - S) > 1 = |S|$，矛盾。 □

定理 37.

有奇数个顶点的二分图不是哈密顿图。

证明. 反设存在奇数个顶点的二分图不是哈密顿图，则其存在一个哈密顿回路，长度为奇数，与其是二分图矛盾。 □

引理 38.

如果 n 阶简单图任意两节点 v_i, v_j 恒有:

$$d(v_i) + d(v_j) \geqslant n - 1$$

则 G 中存在哈密顿通路。

证明. 先证 G 是连通的，反设其存在两个连通分支 H_1, H_2，节点数为 n_1, n_2，则取 $v_1 \in H_1$，$v_2 \in H_2$ 有:

$$d(v_1) + d(v_2) \leqslant n_1 - 1 + n_2 - 1 = n - 2 < n - 1$$

矛盾，因此 G 是连通的。

充分条件证明续. 再证 G 中存在一条哈密顿路，考察其极长的初级路径：

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k$$

- 如果 $k = n$，则这条路径就是哈密顿路，证毕。
- 如果 $k < n$，我们来证明其一定存在经过 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ 的初级回路。我们有如下事实：
  - 与 v_1 相连的顶点都在 $v_2, \ldots, v_k$ 中。
  - 与 v_2 相连的顶点都在 $v_3, \ldots, v_k$ 中。

  否则我们可以构造更长的初级路径。如果存在 $1 < i < k$ 使得 $(v_1, v_i), (v_{i-1}, v_l) \in E$，则存在如下的回路：

$$v_1 \to v_i \to v_k \to v_{i-1} \to v_1$$

如果不存在这样的 i。从而 $d(v_k) \leqslant k - 1 - d(v_1)$，与 $d(v_1) + d(v_k) \geqslant n - 1$ 矛盾。由于 G 是连通的，我们可以将这条回路拆开扩展成一条更长的初级道路，因为图是有限的，这个过程一定会停止，从而我们得到了一条经过 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ 的初级通路，证毕。

上海师范大学 Shanghai Normal University

推论 39.

如果 n 阶简单图任意两节点 v_i, v_j 恒有:

$$d(v_i) + d(v_j) \geqslant n$$

则 G 中存在哈密顿回路。

推论 40.

如果 n 阶简单图任意节点 v_i 恒有:

$$d(v_i) \geqslant \frac{n}{2}$$

则 G 中存在哈密顿回路。

问题 41.

令 $n(3)$ 个人中，任两个人合在一起都认识其余 $n-2$ 个人。证明这 n 个人可以排成一队，使相邻者都互相认识

证明. 每个人用一个结点表示，相互认识则用边连接相应的结点，于是得到简单图 $G=(V,E)$。问题转化为 G 中是否存在哈密顿通路。

由已知条件，对任两个节点 $u,v\in V$，都有 $d(u)+d(v)\geqslant n-2$。

- 若 u 和 v 认识，则 $d(u)+d(v)\geqslant n-2+2=n.$
- 若 u 和 v 不认识，则存在 $w\in V$ 使得 u,v 都认识 w, 从而 $d(u)+d(v)\geqslant n-2+1=n-1.$

从而由充分条件，G 中存在哈密顿通路，证毕。 □

本章总结

本章总结

- 图的连通性
  - 无向图的连通性
  - 有向图的连通性
- 二分图
  - 二分图的概念、判定方法
  - 匹配的概念、Hall 定理
- 欧拉图
  - 欧拉图的概念
  - 欧拉回路的判定方法
- 哈密顿图
  - 哈密顿图的概念
  - 哈密顿图的充分条件、必要条件