离散数学 过程考核 I

1、（10 分）用等值演算法证明 $P \wedge (P \to Q) \to Q$ 是重言式。

2、（15 分）用等值演算法和真值表法求 $(P \vee \neg Q) \to (R \wedge Q)$ 的主析取范式与主合取范式。并写出编码形式。

3、（10 分）写出公式 $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg C \vee D)$ 的等价式，要求该等价式中只出现联接词 $\neg$ 和 $\to$。

4、（15 分）用两种方法证明: $A \to B, (\neg B \vee C) \wedge \neg C, \neg(\neg A \wedge D) \Rightarrow \neg D$

5、（10 分）证明下列命题推得的结论有效：如果今天是星期三，那么我有一次离散数学或数字逻辑测验；如果离散数学课老师有事，那么没有离散数学测验；今天是星期三且离散数学老师有事。所以，我有一次数字逻辑测验。

6、（10 分）用谓词和量词将下列命题符号化，并化为前束范式。

（1） 尽管有些人聪明，但未必一切人都聪明。

（2） 所有的人都学习和工作。

7、（10 分）证明下面推理： $\forall x(P(x) \vee Q(x))$，$\forall x(\neg Q(x) \vee \neg R(x))$，$\forall x R(x) \Rightarrow \forall x P(x)$

8、（10 分）证明：航海家都教育自己的孩子成为航海家，有一个人教育他的孩子去做飞行员，这个人一定不是航海家。（个体域为人类集合。）

9、（10 分）证明：每个旅客或者坐头等舱或者坐经济舱；每个旅客当且仅当他富裕时坐头等舱；有些旅客富裕但并非所有的旅客都富裕。因此有些旅客坐经济舱。（个体域取全体旅客组成的集合）

离散数学 过程考核 I 答案

1、（10 分）

$P \wedge (P \to Q) \to Q$

$\Leftrightarrow \neg(P \wedge (\neg P \vee Q)) \vee Q$

$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg(\neg P \vee Q) \vee Q$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg P \vee Q)$

$\Leftrightarrow 1$

$\therefore$为重言式

2、（15 分）用等值演算法和真值表法求$(P \vee \neg Q) \to (R \wedge Q)$的主析取范式与主合取范式。并写出编码形形式。

$(P \vee \neg Q) \to (R \wedge Q)$

$\Leftrightarrow \neg(P \vee \neg Q) \vee (R \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (R \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge (R \vee \neg R)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow m2 \vee m3 \vee m7$

$\Leftrightarrow M0 \vee M1 \vee M4 \vee M5 \vee M6$

3、（10 分）写出公式$(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg C \vee D)$的等价式，要求该等价式中只出现联接词$\neg$和$\to$。

$(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg C \vee D)$

$\Leftrightarrow \neg\neg(\neg A \wedge \neg B) \vee (C \to D)$

$\Leftrightarrow \neg (\neg(\neg A) \vee B) \vee (C \to D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \to B) \to (C \to D)$

4、（15 分）用两种方法证明：$A \to B, (\neg B \vee C) \wedge \neg C, \neg(\neg A \wedge D) \Rightarrow \neg D$

证明:

方法一、

① ¬(¬D) 结论的否定引入

② D ①置换

③ ¬(¬A ∧D) 前提引入

④ A ∨¬D ③置换

⑤ A ②④

⑥ A→B 前提引入

⑦ B ⑤⑥

⑧ (¬B ∨C) ∧¬C 前提引入

⑨ ¬C, ¬B ∨C ⑧化简

⑩ C ⑦⑨

⑪ ¬C ∨C ⑨⑩

5、（10 分）证明下列命题推得的结论有效：如果今天是星期三，那么我有一次离散数学或数字逻辑测验；如果离散数学课老师有事，那么没有离散数学测验；今天是星期三且离散数学老师有事。所以，我有一次数字逻辑测验。

若明天是星期一或星期三，我就有课。若有课，今天我预习。我今天下午没有预习。所以，明天不是星期一和星期三。

p：明天是星期一；q：明天是星期三；r：我有课；s：我预习

前提：(p∨q)→r; r→s; ¬ s

结论：¬ p∧¬ q

证明：

1 ¬ s

2 r→s

3 ¬ r

4 (p∨q)→r

5 ¬（p∨q)

6 ¬ p∧¬ q

推理正确。

6、（10 分）用谓词和量词将下列命题符号化，并化为前束范式。

（1）尽管有些人聪明，但未必一切人都聪明。

（2）所有的人都学习和工作。

（1）F(x)：x 是人；G(x)：x 聪明 $\exists x\big(F(x)\wedge G(x)\big)\wedge\exists x\big(F(x)\wedge\neg G(x)\big)$

（2）F(x)：x 是人；G(x)：x 学习和工作 $\forall x\big(F(x)\rightarrow G(x)\big)$（学习和工作分开翻译也可）

答案不唯一，可酌情给分

7、（10 分）证明下面推理：$\forall x(P(x)\vee Q(x))$，$\forall x(\neg Q(x)\vee\neg R(x))$，$\forall xR(x)\Rightarrow\forall xP(x)$

1	$\forall xR(x)$	前提引入
2	R(c)	1，全称量词消去，c 为个体域中任意个体。
3	$\forall x\big(\neg Q(x)\vee\neg R(x)\big)$	前提引入
4	$\big(\neg Q(c)\vee\neg R(c)\big)$	3，全称量词校区
5	$\neg Q(c)$	2，4，
6	$\forall x\big(P(x)\vee Q(x)\big)$	前提引入
7	$P(c)\vee Q(c)$	全称量词消去
8	P(c)	5,7
9	$\forall xP(x)$	全称量词引入

8、（10 分）证明：航海家都教育自己的孩子成为航海家，有一个人教育他的孩子去做飞行员，这个人一定不是航海家。（个体域为人类集合。）

S(x)：x 是航海家。E(x)：x 教育他的孩子成为航海家。

前提：$\forall x\big(S(x)\longrightarrow E(x)\big),\exists x\big(\neg E(x)\big)$

结论：$\exists x(\neg E(x)\wedge\neg S(x))$

证明：

1	$\exists x\big(\neg E(x)\big)$	前提引入
2	$\neg E(c)$	1，存在量词消去
3	$\forall x\big(S(x)\longrightarrow E(x)\big),$	前提引入

4	$S(c) \rightarrow E(c)$	3，全称量词消去
5	$\neg S(c)$	2，4
5	$\neg E(c) \wedge \neg S(c)$	2，5，合取引入
6	$\exists x(\neg E(x) \wedge \neg S(x))$	5，存在量词引入

9、（10 分）证明：每个旅客或者坐头等舱或者坐经济舱；每个旅客当且仅当他富裕时坐头等舱；有些旅客富裕但并非所有的旅客都富裕。因此有些旅客坐经济舱。（个体域取全体旅客组成的集合）

命题符号化为：F(x)：x 坐头等舱, G(x)：x 坐经济舱，H(x)：x 富裕。

前提：$\forall x(F(x) \vee G(x))$，$\forall x(F(x) \leftrightarrow H(x))$，$\exists x(H(x))$，$\exists x(\neg H(x))$

结论：$\exists x(G(x))$.

证明：	(1)	$\exists x(\neg H(x))$	P
	(2)	$\neg H(c)$	ES(1)
	(3)	$\forall x(F(x) \leftrightarrow H(x))$	P
	(4)	$F(c) \leftrightarrow H(c)$	US(3)
	(5)	$\neg F(c)$	T(2)(4)I
	(6)	$\forall x(F(x) \vee G(x))$	P
	(7)	$F(c) \vee G(c)$	US(6)
	(8)	$G(c)$	T(5)(7)I
	(9)	$\exists x(G(x))$	EG(8)