

Formelsammlung Mathematik

<http://www.fersch.de>

©Klemens Fersch

9. August 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Algebra	2
1.1	Grundlagen	2
1.1.1	Mengen	2
1.1.2	Mengenoperationen	3
1.1.3	Zahlenmengen	3
1.1.4	Primfaktoren - ggT - kgV	4
1.1.5	Grundrechnungen	6
1.1.6	Grundrechenregeln	6
1.1.7	Vorzeichenregel	7
1.1.8	Brüche	8
1.1.9	Dezimalbruch	10
1.1.10	Bruchteile - Prozent - Promille	11
1.1.11	Prozentrechnung	12
1.1.12	Promillerechnung	12
1.1.13	Prozentuale Ab- und Zunahme	13
1.1.14	Potenzen	13
1.1.15	Wurzeln	14
1.1.16	Logarithmen	15
1.1.17	Proportionalität	16
1.2	Terme	18
1.2.1	Grundlagen	18
1.2.2	Umformung von Termen	19
1.2.3	Binomische Formel	20
1.2.4	Faktorisieren - Ausklammern	21
1.2.5	Quadratische Ergänzung	22
1.2.6	Bruchterme	22
1.2.7	Polynomdivision	24
1.3	Gleichungen	25
1.3.1	Grundlagen	25
1.3.2	Lineare Gleichung	25
1.3.3	Quadratische Gleichung	27
1.3.4	Kubische Gleichungen	28
1.3.5	Gleichungen höheren Grades	29
1.3.6	Bruchgleichung	30
1.3.7	Exponentialgleichungen	31
1.3.8	Logarithmusgleichungen	31
1.3.9	Betragsgleichung	32
1.4	Ungleichungen	33
1.4.1	Grundlagen	33
1.4.2	Äquivalenzumformung	34
1.4.3	Lineare Ungleichung	35
1.4.4	Quadratische Ungleichung	37
1.4.5	Betragsungleichung	39
1.5	Lineares Gleichungssystem	41
1.5.1	Einsetzverfahren (2)	41

1.5.2	Gleichsetzungsverfahren (2)	41
1.5.3	Additionsverfahren (2)	42
1.5.4	Determinantenverfahren (2)	42
1.5.5	Determinantenverfahren (3)	43
1.6	Lineare Algebra	44
1.6.1	Matrix	44
1.6.2	Determinante	47
1.6.3	Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus	49
1.7	Finanzmathematik	52
1.7.1	Zinsrechnung - Jahreszins	52
1.7.2	Zinsrechnung - Tageszins	52
1.7.3	Zinsrechnung - Monatszins	52
1.7.4	Zinsfaktor	52
1.7.5	Zinseszinsformel	52
1.7.6	Degressive Abschreibung	52
2	Geometrie	54
2.1	Grundlagen	54
2.1.1	Definitionen	54
2.1.2	Strahlensätze	55
2.2	Dreieck	56
2.2.1	Definitionen und Eigenschaften des Dreiecks	56
2.2.2	Kongruenzsätze	58
2.2.3	Pythagoras - Höhensatz - Kathetensatz	59
2.2.4	Allgemeines Dreieck	60
2.2.5	Gleichseitiges Dreieck	60
2.2.6	Gleichschenkliges Dreieck	61
2.2.7	Rechtwinkliges Dreieck	61
2.3	Viereck	63
2.3.1	Quadrat	63
2.3.2	Rechteck	63
2.3.3	Trapez	64
2.3.4	Parallelogramm	64
2.3.5	Raute	64
2.3.6	Drachen	65
2.4	Polygone (n-Ecken)	66
2.4.1	Regelmäßiges n-Eck	66
2.4.2	Sechseck	66
2.5	Kreis	67
2.5.1	Kreis	67
2.5.2	Kreis Sektor (Grad)	67
2.5.3	Kreis Sektor (Bogenmaß)	68
2.5.4	Kreisring	68
2.6	Stereometrie	69
2.6.1	Prisma	69
2.6.2	Würfel	69
2.6.3	Quader	70
2.6.4	Pyramide	71
2.6.5	Kreiszylinder	73
2.6.6	Hohlzylinder	74
2.6.7	Kreiskegel	75
2.6.8	Kegelstumpf	75
2.6.9	Kugel	76
2.7	Trigonometrie	77
2.7.1	Gradmaß - Bogenmaß	77
2.7.2	Definition	78
2.7.3	Quadrantenregel	79
2.7.4	Umrechnungen	80
2.7.5	Rechtwinkliges Dreieck	81
2.7.6	Sinussatz	81
2.7.7	Kosinussatz	82

2.7.8	Kongruenzsätze - Berechnungen am Dreieck	83
3	Funktionen	87
3.1	Grundlagen	87
3.1.1	Definition	87
3.1.2	Umkehrfunktion	88
3.2	Lineare Funktion	89
3.2.1	Ursprungsgerade	89
3.2.2	Graph und Eigenschaften	89
3.2.3	Geradengleichung aufstellen	91
3.2.4	Gerade - Gerade	91
3.3	Quadratische Funktion	93
3.3.1	Graph und Eigenschaften	93
3.3.2	Parabelgleichung aufstellen und umformen	95
3.3.3	Parabel - Gerade	96
3.3.4	Parabel - Parabel	97
3.4	Eigenschaften von Funktionen	98
3.4.1	Symmetrie	98
3.4.2	Monotonie	98
3.4.3	Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen	99
3.4.4	Asymptote	100
3.4.5	Verknüpfung von Funktionen	101
3.4.6	Abbildung von Funktionen	101
3.5	Potenzfunktion	103
3.5.1	Parabeln vom Grad n - gerader Exponent	103
3.5.2	Parabeln vom Grad n - ungerader Exponent	103
3.5.3	Hyperbeln vom Grad n - gerader Exponent	104
3.5.4	Hyperbeln vom Grad n - ungerader Exponent	105
3.5.5	Wurzelfunktion - rationaler, positiver Exponent	106
3.5.6	Wurzelfunktion - rationaler, negativer Exponent	106
3.6	Exponentialfunktion	108
3.6.1	Graph und Eigenschaften	108
3.7	Logarithmusfunktion	109
3.7.1	Graph und Eigenschaften	109
3.8	Sinusfunktion	110
3.8.1	Graph und Eigenschaften	110
3.9	Kosinusfunktion	111
3.9.1	Graph und Eigenschaften	111
3.10	Tangensfunktion	112
3.10.1	Graph und Eigenschaften	112
3.11	Betragsfunktion	113
3.11.1	Graph und Eigenschaften	113
3.12	Wachstumsfunktionen	114
3.12.1	Lineares Wachstum	114
3.12.2	Exponentielles Wachstum	115
4	Analysis	119
4.1	Grenzwert - Stetigkeit	119
4.1.1	Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0	119
4.1.2	Grenzwert von $f(x)$ für x gegen Unendlich	120
4.1.3	Stetigkeit	120
4.1.4	Rechenregeln	121
4.2	Differentialrechnung	123
4.2.1	Definition	123
4.2.2	1. Ableitung - Monotonie - Extremwerte	124
4.2.3	Graph der 1. Ableitung	126
4.2.4	2. Ableitung - Krümmung - Wendepunkte	127
4.2.5	Graph der 2. Ableitung	129
4.2.6	Ableitung der Grundfunktionen	130
4.2.7	Ableitungsregeln	130
4.2.8	Tangenten- und Normalengleichung	132

4.2.9	Newton'sches Iterationsverfahren	133
4.3	Integralrechnung	134
4.3.1	Definition	134
4.3.2	Integration der Grundfunktionen	135
4.3.3	Integrationsregeln	136
4.3.4	Graph der Stammfunktion	137
4.4	Kurvendiskussion	139
4.4.1	Ganzrationale Funktion	139
4.4.2	Gebrochenrationale Funktion	146
4.4.3	Exponentialfunktion (Basis e)	150
4.4.4	Logarithmusfunktion (Basis e)	153
4.5	Aufstellen von Funktionsgleichungen	156
4.5.1	Ganzrationale Funktion	156
5	Stochastik	159
5.1	Statistik	159
5.1.1	Mittelwert - Median - Modalwert	159
5.2	Kombinatorik	160
5.2.1	Grundlagen	160
5.2.2	Anzahl der Anordnungen - Permutation	160
5.2.3	Auswahl mit Beachtung der Reihenfolge - Variation	160
5.2.4	Auswahl ohne Beachtung der Reihenfolge - Kombination	161
5.3	Wahrscheinlichkeit	162
5.3.1	Zufallsexperiment	162
5.3.2	Relative Häufigkeit	163
5.3.3	Wahrscheinlichkeit	164
5.3.4	Mehrstufige Zufallsexperimente	164
5.3.5	Bedingte Wahrscheinlichkeit	166
5.3.6	Vierfeldertafel	167
5.3.7	Binomialverteilung	169
5.3.8	Hypergeometrische Verteilung	171
5.3.9	Erwartungswert - Varianz - Standardabweichung	172
5.4	Testen von Hypothesen	173
5.4.1	Einseitiger Signifikanztest	173
6	Analytische Geometrie	176
6.1	Vektorrechnung in der Ebene	176
6.1.1	Vektor - Abstand - Steigung - Mittelpunkt	176
6.1.2	Skalarprodukt - Fläche - Winkel	177
6.1.3	Abbildungen	178
6.2	Vektor	182
6.2.1	Vektor - Abstand - Mittelpunkt	182
6.2.2	Winkel - Skalarprodukt - Vektorprodukt - Abhängigkeit	183
6.2.3	Spatprodukt - lineare Abhängigkeit - Basisvektoren - Komplanarität	184
6.3	Gerade	186
6.3.1	Gerade aus 2 Punkten	186
6.4	Ebene	187
6.4.1	Parameterform - Normalenform	187
6.4.2	Ebenengleichung aufstellen	188
6.4.3	Parameterform - Koordinatenform	190
6.4.4	Koordinatenform - Parameterform	191
6.4.5	Koordinatenform - Hessesche Normalenform	192
6.5	Kugel	193
6.5.1	Kugelgleichung	193
6.6	Lagebeziehung	194
6.6.1	Punkt - Gerade	194
6.6.2	Gerade - Gerade	195
6.6.3	Punkt - Ebene (Koordinatenform)	196
6.6.4	Gerade - Ebene (Koordinatenform)	196
6.6.5	Ebene - Ebene	197

7	Tabellen	199
7.1	Umrechnungen	199
7.1.1	Zehnerpotenz	199
7.1.2	Längen	199
7.1.3	Flächen	200
7.1.4	Volumen	200
7.1.5	Zeit	200
7.1.6	Winkel	201
7.1.7	Dezimale Einheiten	201
7.2	Griechisches Alphabet	201

1 Algebra

1.1 Grundlagen

1.1.1 Mengen

Definition

Ein Menge (Großbuchstaben) besteht aus unterscheidbaren Elementen.

$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$

Mengen in aufzählender Form

$\mathbb{A} = \{a; b; c\}$

$\mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4\}$
 $\mathbb{B} = \{-2; 0; 4; \sqrt{3}\}$

Mengen in beschreibender Form

$\mathbb{M} = \{x | x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$

$\mathbb{M}_1 = \{x | x \text{ Menge aller Primzahlen}\}$
 $\mathbb{M}_2 = \{x | x \text{ alle natürlichen Zahlen, die größer als 2 sind}\}$

\in Element - \notin nicht Element

$\mathbb{M} = \{a; b; c\}$
 $b \in \mathbb{M}$
 $e \notin \mathbb{M}$

$\mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4\}$
 $2 \in \mathbb{A}$
 $5 \notin \mathbb{A}$

\subset Teilmenge - $\not\subset$ nicht Teilmenge

$\mathbb{A} = \{a; b; c; d; e\}$
 $\mathbb{B} = \{b; c\}$
 $\mathbb{C} = \{b; c; f\}$
 $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ Jedes Element von B ist auch Element von A
 $\mathbb{C} \not\subset \mathbb{A}$ Nicht jedes Element von C ist auch Element von A

$\mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4\}$
 $\{1; 4\} \subset \mathbb{A}$
 $\{1; 4; 5\} \not\subset \mathbb{A}$

Gleichheit $A = B$

$\mathbb{A} = \{a; b; c; d; e\}$
 $\mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$
 $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ Jedes Element von A ist auch Element von B
 Jedes Element von B ist auch Element von A

$\mathbb{A} = \{-3; 0; 1; 4; 12\}$
 $\mathbb{B} = \{-3; 0; 1; 4; 12\}$
 $\mathbb{A} = \mathbb{B}$

Leere Menge $\{\}$

$\mathbb{A} = \{\} = \emptyset$
 Menge A enthält keine Elemente

1.1.2 Mengenoperationen

Schnittmenge \cap

$$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$$

$$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$$

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{c; d\}$$

Alle Elemente die in A und zugleich in B enthalten sind.

$$\mathbb{A} = \{2; 7; 8; 12; 15\}$$

$$\mathbb{B} = \{1; 8; 12; 24\}$$

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{8; 12\}$$

$$\{4; 5; 23\} \cap \{0; 1; 4; 5; 12\} = \{4; 5\}$$

Vereinigungsmenge \cup

$$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$$

$$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$$

$$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$$

Alle Elemente die in A oder B enthalten sind.

$$\mathbb{A} = \{2; 7; 8; 12; 15\}$$

$$\mathbb{B} = \{1; 8; 12; 24\}$$

$$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{1; 7; 8; 12; 15; 24\}$$

$$\{4; 5; 23\} \cup \{0; 1; 4; 5; 12\} = \{0; 1; 4; 5; 12; 23\}$$

Differenz \setminus

$$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$$

$$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$$

$$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{e\}$$

Alle Elemente die in A, aber nicht in B enthalten sind.

$$\mathbb{A} = \{2; 7; 8; 12; 15\}$$

$$\mathbb{B} = \{1; 8; 12; 24\}$$

$$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{2; 7; 15\}$$

$$\{4; 5; 23\} \setminus \{0; 1; 4; 5; 12\} = \{23\}$$

1.1.3 Zahlenmengen

Natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$$

$$\begin{array}{ll} 3 \in \mathbb{N} & -3 \notin \mathbb{N} \\ 0 \notin \mathbb{N} & 0, 2 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{N} \end{array}$$

Natürlichen Zahlen und Null

$$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$$

$$\begin{array}{ll} 3 \in \mathbb{N}_0 & -3 \notin \mathbb{N}_0 \\ 0 \in \mathbb{N}_0 & 0, 2 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{N}_0 \end{array}$$

Ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{ll} 3 \in \mathbb{Z} & -3 \in \mathbb{Z} \\ 0 \in \mathbb{Z} & 0, 2 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z} \end{array}$$

Rationalen Zahlen

Rationale Zahlen \mathbb{Q} sind

- Bruchzahlen
- endliche Dezimalzahlen
- unendliche periodische Dezimalzahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

$-3\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$ $3 \in \mathbb{Q}$ $-3 \in \mathbb{Q}$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $0 \in \mathbb{Q}$
 Jede endliche Dezimalzahl lässt sich durch einen Bruch darstellen.
 $0,223 = \frac{223}{100} \in \mathbb{Q}$ $0,2 = \frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$
 Jede unendliche periodische Dezimalzahl lässt sich durch einen Bruch darstellen.
 $0,3333\dots = 0,\overline{3} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ $0,535353\dots = 0,\overline{53} = \frac{53}{99} \in \mathbb{Q}$
 \mathbb{Q}^+ = positive rationale Zahlen
 \mathbb{Q}_0^+ = positive rationale Zahlen und Null
 \mathbb{Q}^- = negative rationale Zahlen
 \mathbb{Q}_0^- = negative rationale Zahlen und Null
 $\mathbb{Q} \setminus \{3, 4\}$ = rationale Zahlen ohne 3 und 4
 $\mathbb{Q} \setminus [-3; 5]$ = rationale Zahlen ohne 3 und 4 und ohne den Bereich zwischen 3 und 4
 $\mathbb{Q} \setminus]-3; 5[$ = rationale Zahlen ohne den Bereich zwischen 3 und 4

Irrationale Zahlen

Irrationale Zahlen \mathbb{I} sind unendliche nicht periodische Dezimalzahlen.

Kreiszahl $\pi = 3,1415926535\dots \in \mathbb{I}$
 Eulersche Zahl $e = 2,7182818284\dots \in \mathbb{I}$
 $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ $\sqrt{3} \in \mathbb{I}$ $\sqrt{4} = 2 \notin \mathbb{I}$ $3 \notin \mathbb{I}$ $-0,3 \notin \mathbb{I}$

Reellen Zahlen

Reelle Zahlen \mathbb{R} sind

- rationale Zahlen \mathbb{Q}
- irrationale Zahlen \mathbb{I}

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

$\mathbb{R} = \{\text{jeder Punkt auf dem Zahlenstrahl}\}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Kreiszahl $\pi = 3,1415926535\dots \in \mathbb{R}$

Eulersche Zahl $e = 2,7182818284\dots \in \mathbb{R}$

$$-3\frac{3}{7} \in \mathbb{R} \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R} \quad \sqrt{3} \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{R} \quad 3 \in \mathbb{R} \quad -0,3 \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$$

\mathbb{R}^+ = positive reelle Zahlen

\mathbb{R}_0^+ = positive reelle Zahlen und Null

\mathbb{R}^- = negative reelle Zahlen

\mathbb{R}_0^- = negative reelle Zahlen und Null

$\mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$ = reelle Zahlen ohne 3 und 4

$\mathbb{R} \setminus [-3; 5]$ = reelle Zahlen ohne 3 und 4 und ohne den Bereich zwischen 3 und 4

$\mathbb{R} \setminus]-3; 5[$ = reelle Zahlen ohne den Bereich zwischen 3 und 4

Vergleichszeichen

$a = b$ a ist gleich b

$a \neq b$ a ist ungleich b

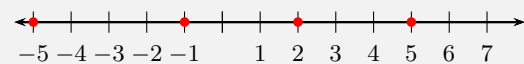
$a < b$ a ist kleiner als b

$a > b$ a ist größer als b

$a \leq b$ a ist kleiner oder gleich b

$a \geq b$ a ist größer oder gleich b

$$3 + 4 = 7 \quad 3 + 4 \neq 8$$



$$\begin{array}{llll} -5 < -1 & -1 > -5 & 2 > -1 & 2 < 5 \\ 5 \leq 5 & 7 \geq 5 & & \end{array}$$

1.1.4 Primfaktoren - ggT - kgV

Primzahlen

Eine Primzahl ist eine ganze Zahl, die nur durch eins und sich selbst teilbar ist.

Primzahlen:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,
 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, ...

Primfaktorenzerlegung

Zerlegung einer natürlichen Zahl als Produkt aus Primzahlen.

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$340 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 17$$

Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl ist durch ...

- 2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 2, 4, 6, 8 oder 0 ist.
- 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
- 4 teilbar, wenn ihre letzten 2 Stellen durch 4 teilbar sind.
- 5 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 5 oder eine 0 ist.
- 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.
- 8 teilbar, wenn ihre letzten 3 Stellen durch 8 teilbar sind.
- 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
- 10 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 0 ist.
- 12 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 4 teilbar ist.
- 15 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 5 teilbar ist.
- 18 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 9 teilbar ist.
- Die Quersumme einer Zahl, ist die Summe ihrer Ziffern.

$5|45$ 5 ist Teiler von 45
 $3|123$ 3 ist Teiler von 123
 Quersumme von 123: $1 + 2 + 3 = 6$
 $3|6 \Rightarrow 3|123$

Vielfachmenge $V(a)$

Alle Vielfachen von einer natürlichen Zahl a .

$V(4) = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44; 48; \dots\}$
 $V(6) = \{6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60; 66; 72; 78; 84; \dots\}$
 $V(3) = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36; 39; 42; 45; \dots\}$

Teilmengen $T(a)$

Alle ganzzahligen Teiler einer Zahl a .

$T(36) = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$
 $T(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$
 $T(42) = \{1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42\}$

Größter gemeinsamer Teiler $ggT(a,b)$

Methode 1: Aus den Teilmengen von a und b den größten Teiler ablesen
 Methode 2: Das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren bilden.

$ggT(12; 18) = 6$
 Aus den Teilmengen den größten Teiler ablesen
 $T(12) = \{1; 2; 3; 4; \mathbf{6}; 12\}$ $T(18) = \{1; 2; 3; \mathbf{6}; 9; 18\}$
 Gemeinsame Primfaktoren von 12 und 18

12	2	2	3	
18	2		3	3
$ggT(12; 18)$	2		3	

 $ggT(12; 18) = 2 \cdot 3 = 6$

Kleinstes gemeinsames Vielfaches $kgV(a,b)$

Methode 1: Aus den Vielfachmengen von a und b das kleinste Vielfache ablesen.
 Methode 2: Das Produkt aller Primfaktoren von a und den zusätzlichen Primfaktoren von b bilden.

$kgV(12; 18) = 36$
 Aus den Vielfachmengen das kleinste Vielfache ablesen
 $V(12) = \{12; 24; \mathbf{36}; 48; 60; 72; \dots\}$ $V(18) = \{18; \mathbf{36}; 54; 72; 90; \dots\}$
 Primfaktoren von 12 und zusätzlichen Primfaktoren von 18

12	2	2	3	
18	2		3	3
$kgV(12; 18)$	2	2	3	3

 $kgV(12; 18) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

Interaktive Inhalte: $ggT(a, b)$ $kgV(a, b)$ - $ggT(a, b, c)$ $kgV(a, b, c)$ -

1.1.5 Grundrechnungen

Addition

$$\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & c \\ \text{1.Summand} & + & \text{2.Summand} & = & \text{Summe} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3 + 2 &= 5 \\ 2x + 3x &= 5x \\ 2x^2 + 3x^2 &= 5x^2 \\ 5x^2y + 7x^2y &= 12x^2y \\ 2xy + 3xy + 4z + 5z &= 5xy + 9z \end{aligned}$$

Subtraktion

$$\begin{array}{ccccc} a & - & b & = & c \\ \text{Minuend} & - & \text{Subtrahend} & = & \text{Differenz} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3 - 2 &= 1 \\ 3x - 2x &= x \\ 2x^2 - 3x^2 &= -x^2 \\ 5x^2y - 7x^2y &= -2x^2y \\ 3e^x - 2e^x &= e^x \end{aligned}$$

Multiplikation

$$\begin{array}{ccccc} a & \cdot & b & = & c \\ \text{1.Faktor} & \cdot & \text{2.Faktor} & = & \text{Produkt} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 &= 6 \\ 2x \cdot 3x &= 6x^2 \\ 2x^2 \cdot 3x^2 &= 6x^4 \\ 5x^2y \cdot 7x^2y &= 35x^4y \\ 2xy \cdot 3xy \cdot 4z \cdot 5z &= 120x^2y^2z^2 \end{aligned}$$

Division

$$\begin{array}{ccccc} a & : & b & = & c \\ \text{Dividend} & : & \text{Divisor} & = & \text{Quotient} \\ \frac{a}{b} = c & \frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}} = & \text{Quotient} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 12 : 3 &= 4 \\ \frac{12}{3} &= 4 \end{aligned}$$

1.1.6 Grundrechenregeln

Kommutativgesetz

$$\begin{aligned} a \cdot b &= b \cdot a \\ a + b &= b + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 + 2 &= 2 + 3 = 5 \\ 2x + 3x &= 3x + 2x = 5x \\ 3 \cdot 2 &= 2 \cdot 3 = 6 \\ 2x \cdot 3x &= 3x \cdot 2x = 6x^2 \end{aligned}$$

Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \\ (a + b) + c &= a + (b + c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 + (3 + 2) &= (4 + 3) + 2 = 9 \\ 4x + (3x + 2x) &= (4x + 3x) + 2x = 9x \\ 4 \cdot (3 \cdot 2) &= (4 \cdot 3) \cdot 2 = 24 \\ 4x \cdot (3x \cdot 2x) &= (4x \cdot 3x) \cdot 2x = 24x^3 \end{aligned}$$

Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot (2 + 5) &= 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 21 \\ 3 \cdot (2x + 5) &= 3 \cdot 2x + 3 \cdot 5 = 6x + 15 \\ 3x \cdot (2x + 5) &= 3x \cdot 2x + 3x \cdot 5 = 6x^2 + 15x \end{aligned}$$

Reihenfolge der Rechenarten

- Klammern vor
- Potenzierung vor
- Punktrechnung (Multiplikation und Division) vor
- Strichrechnung (Addition und Subtraktion)
- von links nach rechts

$$100 - 40 - 5 \cdot (42 - 5 \cdot 2^3)^2$$

Innerhalb der Klammer Potenzierung:

Innerhalb der Klammer Punktrechnung:

Innerhalb der Klammer Strichrechnung:

Potenzierung:

Punktrechnung:

von links nach rechts:

Ergebnis:

$$100 - 40 - 5 \cdot (42 - 5 \cdot 8)^2$$

$$100 - 40 - 5 \cdot (42 - 40)^2$$

$$40 - 5 \cdot (42 - 40)^2$$

$$100 - 40 - 5 \cdot 2^2$$

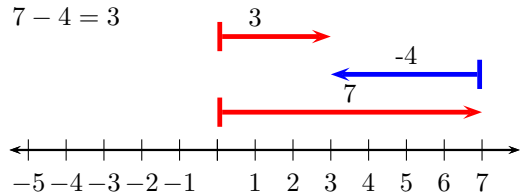
$$100 - 40 - 5 \cdot 4$$

$$100 - 40 - 20$$

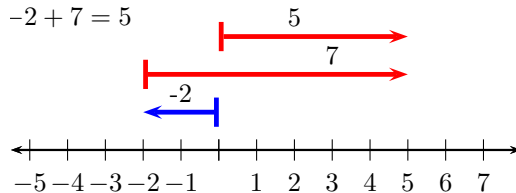
$$60 - 20 = 40$$

1.1.7 Vorzeichenregel

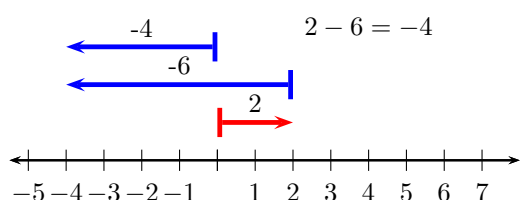
$$7 - 4 = 3$$



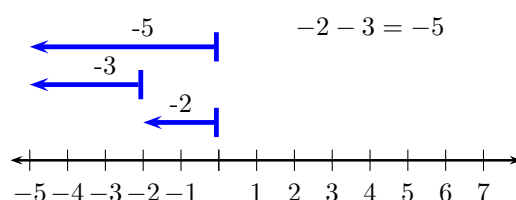
$$-2 + 7 = 5$$



$$2 - 6 = -4$$



$$-2 - 3 = -5$$



Vorzeichen und Klammern

$$+(+a) = +a$$

$$+(-a) = -a$$

$$-(+a) = -a$$

$$-(-a) = +a$$

$$+(+2) = +2$$

$$+(-2) = -2$$

$$-(+2) = -2$$

$$-(-2) = +2$$

Multiplikation

$$+a \cdot (+b) = +c$$

$$-a \cdot (-b) = +c$$

$$+a \cdot (-b) = -c$$

$$-a \cdot (+b) = -c$$

$$+3 \cdot (+2) = +6$$

$$-3 \cdot (-2) = +6$$

$$+3 \cdot (-2) = -6$$

$$-3 \cdot (+2) = -6$$

Division

$$\frac{+a}{+b} = +c$$

$$\frac{-a}{-b} = +c$$

$$\frac{+a}{-b} = -c$$

$$\frac{-a}{+b} = -c$$

$$\frac{+6}{+3} = +2$$

$$\frac{-6}{-3} = +2$$

$$\frac{+6}{-3} = -2$$

$$\frac{-6}{+3} = -2$$

Addition und Subtraktion

Bei gleichem Vorzeichen werden die Beträge addiert. Das Ergebnis erhält das gemeinsame Vorzeichen.

Bei verschiedenem Vorzeichen werden die Beträge subtrahiert. Das Ergebnis erhält das Vorzeichen der Zahl mit dem größerem Betrag.

$$\begin{aligned} 10 + 4 &= 14 \\ -10 - 4 &= -(10 + 4) = -14 \\ 10 - 4 &= 6 \\ -10 + 6 &= -(10 - 6) = -4 \\ 3x + 4x &= 7x \\ -3x - 4x &= -(3x + 4x) = -7x \\ 3x - 4x &= -(4x - 3x) = -x \\ -3x + 4x &= 4x - 3x = x \end{aligned}$$

Betrag einer Zahl

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |-3| &= 3 \\ |3| &= 3 \end{aligned}$$

1.1.8 Brüche

Bruch

$$\begin{aligned} \text{Dividend : Divisor} &= \text{Quotient} \\ \frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}} &= \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{Z}{N} = \text{Wert des Bruchs} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{red} & \text{white} \\ \hline \text{red} & \text{white} \\ \hline \end{array} &= \frac{1}{2} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{red} & \text{white} \\ \hline \text{white} & \text{white} \\ \hline \end{array} &= \frac{1}{4} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{red} & \text{red} \\ \hline \text{red} & \text{white} \\ \hline \end{array} &= \frac{3}{4} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{red} & \text{red} & \text{red} & \text{white} \\ \hline \text{red} & \text{red} & \text{white} & \text{white} \\ \hline \end{array} &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Besondere Brüche

- Echter Bruch: Nenner größer als Zähler
- Unechter Bruch: Zähler größer als Nenner
- Gemischte Zahl: Ganze Zahl + Bruch
- Stammbrüche: Zähler ist 1
- Gleichnamige Brüche: Nenner ist gleich
- Ungleichnamige Brüche: Nenner ist verschieden
- Kehrwert: Zähler und Nenner vertauschen
- Scheinbrüche: Scheinbrüche sind natürliche Zahlen

$$\text{Echter Bruch: } \frac{2}{4}; \frac{5}{7}; \frac{1}{3}$$

$$\text{Unechter Bruch: } \frac{20}{4}; \frac{15}{7}; \frac{8}{3}$$

$$\text{Gemischte Zahl: } 2\frac{2}{4}; 6\frac{5}{7}; 7\frac{8}{3}$$

$$\text{Stammbrüche: } \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$$

$$\text{Gleichnamige Brüche: } \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{8}{4}$$

$$\text{Ungleichnamige Brüche: } \frac{2}{4}; \frac{5}{7}; \frac{8}{3}$$

$$\text{Kehrwert: } \frac{2}{4} \Leftrightarrow \frac{4}{2}; \frac{5}{7} \Leftrightarrow \frac{7}{5}$$

$$\text{Scheinbrüche: } \frac{4}{2} = 2; \frac{28}{7} = 4$$

Erweitern von Brüchen

$$\begin{aligned} \text{Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multiplizieren} \\ \frac{a}{b} &= \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \end{aligned}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$

Kürzen von Brüchen

- Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl dividieren

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

- Zähler und Nenner durch den ggT(Zähler;Nenner) teilen

$$\text{ggT}(a, b) = c$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

- Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegen und gleiche Primfaktoren kürzen

$$\frac{12}{18} = \frac{12 : 2}{18 : 2} = \frac{6}{9}$$

$$\frac{6}{9} = \frac{6 : 3}{9 : 3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ggT}(18; 12) = 6$$

$$\frac{12}{18} = \frac{12 : 6}{18 : 6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{12}{18} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche

Zähler addieren bzw. subtrahieren

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2+4}{3} = \frac{6}{3}$$

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5-3}{7} = \frac{2}{7}$$

Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Brüche durch Erweitern gleichnamig machen

- Hauptnenner: Produkt der beiden Nenner

Erweiterungsfaktoren: d und b

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$$

- Hauptnenner: kgV(b,d)=c

Erweiterungsfaktoren: $\frac{c}{b}$ und $\frac{c}{d}$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$$

Hauptnenner: $3 \cdot 4 = 12$

Erweiterungsfaktoren: 4 **und** 3

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1 \frac{5}{12}$$

$$\frac{3}{12} + \frac{5}{18}$$

Hauptnenner: kgV(12,18) = 36

Erweiterungsfaktoren: $\frac{36}{12} = 3$ und $\frac{36}{18} = 2$

$$\frac{3}{12} + \frac{5}{18} = \frac{3 \cdot 3}{12 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{9}{36} + \frac{10}{36} = \frac{19}{36}$$

Multiplikation von Brüchen

Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{15}{24}$$

Division von Brüchen

Mit dem Kehrwert des Bruches multiplizieren

Bruch durch Bruch

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Bruch durch Zahl

$$\frac{a}{b} : e = \frac{a}{b} : \frac{e}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{e} = \frac{a}{b \cdot e}$$

Zahl durch Bruch

$$\frac{e}{c} : \frac{d}{d} = e : \frac{c}{d} = \frac{e}{1} \cdot \frac{d}{c} = \frac{e \cdot d}{c}$$

Doppelbruch

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{18}{20}$$

$$4 : \frac{5}{6} = 4 \cdot \frac{6}{5} = \frac{4 \cdot 6}{5} = \frac{24}{5}$$

$$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{18}{20}$$

Interaktive Inhalte: Kürzen - $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} - a\frac{b}{c} - d\frac{c}{f}$ -

1.1.9 Dezimalbruch

Stellenwerttafel

Bruch	M	HT	ZT	T	H	Z	E	,	z	h	t	zt	ht		Dezimalbruch
$\frac{1}{10}$							0	,	1						0,1
$\frac{1}{100}$							0	,	0	1					0,01
$\frac{23}{100}$							0	,	2	3					0,23
$\frac{456}{1000}$							0	,	4	5	6				0,456
$12\frac{3}{10000}$						1	2	,	0	0	0	3			12,0003
$567\frac{30}{10000}$					5	6	7	,	0	0	3	0			567,003

Z	Zehner	10^1	10		E	Einer	10^0	1	
H	Hunderter	10^2	100		z	Zehntel	10^{-1}	0,1	$\frac{1}{10}$
T	Tausender	10^3	1000		h	Hundertstel	10^{-2}	0,01	$\frac{1}{100}$
ZT	Zehntausender	10^4	10000		t	Tausendstel	10^{-3}	0,001	$\frac{1}{1000}$
HT	Hunderttausender	10^5	100000		zt	Zehntausendstel	10^{-4}	0,0001	$\frac{1}{10000}$
M	Million	10^6	1000000		ht	Hunderttausendstel	10^{-5}	0,00001	$\frac{1}{100000}$

Bruch - Dezimalbruch

- Erweitern des Bruchs auf Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw.
- Werte in die Stellenwerttafel einsetzen.
- Schriftliches Dividieren

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{10} &= 0,1 & \frac{1}{100} &= 0,01 \\
 \frac{1}{1000} &= 0,001 & \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10} &= 0,5 & \frac{4}{25} &= \frac{16}{100} = 0,16 \\
 \frac{3}{8} &= \frac{375}{1000} = 0,375 & \frac{12,5}{100} &= 0,125 \\
 \frac{201}{1000} &= 0,201 & \frac{125}{10000} &= 0,0125 \\
 \frac{1000}{100} &= 10 \\
 \frac{100}{3} &= 2 : 3 = 0,666... = 0,\bar{6}
 \end{aligned}$$

Dezimalbruch - Bruch

- Endlicher Dezimalbruch
Nachkommazahl (Dezimalen) als Zähler und im Nenner die entsprechende Stufenzahl (10, 100, 1000)
- Periodischer Dezimalbruch
- Periode beginnt direkt nach dem Komma
Nachkommazahl (Dezimalen) als Zähler und im Nenner den entsprechenden Bruch mit 9 (9, 99, 999)

$$\begin{aligned}
 0,201 &= \frac{201}{1000} & 0,0001 &= \frac{1}{10000} \\
 0,\bar{1} &= \frac{1}{9} & 0,\bar{2} &= \frac{2}{9} \\
 0,\bar{12} &= \frac{12}{99} & 0,\bar{255} &= \frac{255}{999}
 \end{aligned}$$

Multiplizieren oder Dividieren mit Stufenzahl

Multiplizieren einer Dezimalzahl mit

10 - Komma um 1 Stelle nach rechts verschieben

100 - Komma um 2 Stellen nach rechts verschieben

1000 - Komma um 3 Stellen nach rechts verschieben

.....

Dividieren einer Dezimalzahl durch

10 - Komma um 1 Stelle nach links verschieben

100 - Komma um 2 Stellen nach links verschieben

1000 - Komma um 3 Stellen nach links verschieben

.....

$$\begin{aligned}
 345,677 \cdot 10 &= 3456,77 & 345,677 \cdot 100 &= 34567,7 \\
 345,677 \cdot 1000 &= 345677,0 & 345,677 \cdot 10000 &= 3456770,0 \\
 345,677 : 10 &= 34,5677 & 345,677 : 100 &= 3,45677 \\
 345,677 : 1000 &= 0,345677 & 345,677 : 10000 &= 0,0345677
 \end{aligned}$$

Runden von Dezimalbrüchen

Ziffer der zu runden Stelle bestimmen.

- Ist die nachfolgende Ziffer 0,1,2,3,4, dann wird abgerundet. Die gerundete Stelle bleibt unverändert
- Ist die nachfolgende Ziffer 5,6,7,8,9, dann wird aufgerundet. Die gerundete Stelle wird um eins erhöht.
- Wenn nach dem Komma gerundet wird, werden die nachfolgenden Ziffern weggelassen.
- Wenn vor dem Komma gerundet wird, werden die nachfolgenden Ziffern durch Null ersetzt.

712,654 runden auf Zehntel (2 Nachkommastellen)

Ziffer der Zehntelstelle: 6

Nachfolgende Ziffer: 5 \Rightarrow aufrunden 6 + 1

Gerundete Zahl: 712,7

712,654 runden auf Hunderter

Ziffer der Hunderterstelle: 7

Nachfolgende Ziffer: 1 \Rightarrow abrunden 700

Gerundete Zahl: 700

712,9996 runden auf Tausendstel (3 Nachkommastellen)

Ziffer der Tausendstelstelle: 9

Nachfolgende Ziffer: 6 \Rightarrow aufrunden 712,999 + 0,001

Gerundete Zahl: 713,000

1.1.10 Bruchteile - Prozent - Promille

Bruchteile

- Bruchteil (relativer Anteil) = $\frac{\text{absoluter Anteil}}{\text{Ganze}}$
- absoluter Anteil = Bruchteil \cdot Ganze
- Ganze = $\frac{\text{absoluter Anteil}}{\text{Bruchteil}}$

Welcher Bruchteil sind 200 Euro von 800 Euro?

$$\frac{200}{800} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Gesucht: absoluter Anteil

$\frac{1}{4}$ von 800 Euro?

$$\frac{1}{4} \cdot 800 \text{ Euro} = 200 \text{ Euro}$$

Gesucht: Ganze

$\frac{1}{4}$ sind 200 Euro?

$$\frac{200 \text{ Euro}}{\frac{1}{4}} = 800 \text{ Euro}$$

Prozent

- $p\% = \frac{p}{100}$ p Prozent = p Hundertstel
- Prozentsatz = Bruchteil \cdot 100 %
- Bruchteil = $\frac{\text{Prozentsatz}}{100\%}$

p - Prozentzahl

p% - Prozentsatz

$$p\% = 0,01 = \frac{1}{100} = 1\% \quad p = 1$$

$$p\% = 0,34 = \frac{34}{100} = 34\% \quad p = 34$$

$$p\% = 0,125 = \frac{12,5}{100} = 12,5\% \quad p = 12,5$$

$$p\% = 1,25 = \frac{125}{100} = 125\% \quad p = 125$$

Promille

- $p\text{‰} = \frac{p}{1000}$ p Promille = p Tausendstel
- Promillesatz = Bruchteil \cdot 1000 ‰
- Bruchteil = $\frac{\text{Promillesatz}}{1000\text{‰}}$

p - Promillezahl

p‰ - Promillesatz

$$p\text{‰} = 0,001 = \frac{1}{1000} = 1\text{‰} \quad p = 1$$

$$p\text{‰} = 0,034 = \frac{34}{1000} = 34\text{‰} \quad p = 34$$

$$p\text{‰} = 0,125 = \frac{125}{1000} = 125\text{‰} \quad p = 125$$

$$p\text{‰} = 1,25 = \frac{1250}{1000} = 1250\text{‰} \quad p = 1250$$

1.1.11 Prozentrechnung

Prozentrechnung

- Verhältnisgleichung: $\frac{P_w}{p} = \frac{G}{100}$
- $P_w = \frac{p \cdot G}{100}$ $P_w = p\% \cdot G$
- $G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$ $G = \frac{P_w}{p\%}$
- $p = \frac{P_w \cdot 100}{G}$ $p\% = \frac{P_w}{G}$

G - Grundwert

p - Prozentzahl

p% - Prozentsatz

P_w - Prozentwert

Wie viel sind 25% von 800 Euro?

$$P_w = \frac{25 \cdot 800 \text{Euro}}{100} = 200 \text{Euro}$$

$$p\% = 25\% = \frac{25}{100} = 0,25$$

$$P_w = 0,25 \cdot 800 \text{Euro} = 200 \text{Euro}$$

25% sind 200Euro.Grundwert?

$$G = \frac{200 \cdot 100}{25} = 800 \text{Euro} \quad G = \frac{200}{0,25} = 800 \text{Euro}$$

Wie viel Prozent sind 200 Euro von 800 Euro?

$$p = \frac{200 \cdot 100}{800} = 25 \quad p\% = 25\%$$

$$p\% = \frac{200}{800} = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\%$$

Interaktive Inhalte: $P_w = \frac{p \cdot G}{100}$ - $G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$ - $p = \frac{P_w \cdot 100}{G}$ -

1.1.12 Promillerechnung

Promillerechnung

- Verhältnisgleichung: $\frac{P_w}{p} = \frac{G}{1000}$
- $P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$ $P_w = p\% \cdot G$
- $G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$ $G = \frac{P_w}{p\%}$
- $p = \frac{P_w \cdot 1000}{G}$ $p\% = \frac{P_w}{G}$

G - Grundwert

p - Promillezahl

p% - Promillesatz

P_w - Promillewert

Wie viel sind 25‰ von 800 Euro?

$$P_w = \frac{25 \cdot 800 \text{Euro}}{1000} = 20 \text{Euro}$$

$$p\% = \frac{25}{1000} = 0,025$$

$$P_w = 0,025 \cdot 800 \text{Euro} = 20 \text{Euro}$$

25‰ sind 20Euro.Grundwert?

$$G = \frac{20 \cdot 1000}{25} = 800 \text{Euro} \quad G = \frac{200}{0,025} = 800 \text{Euro}$$

Wie viel Promille sind 20 Euro von 800 Euro?

$$p = \frac{20 \cdot 1000}{800} = 25 \quad p\% = 25\%$$

$$p\% = \frac{20}{800} = 0,025 = \frac{25}{1000} = 25\%$$

Interaktive Inhalte: $P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$ - $G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$ - $p = \frac{P_w \cdot 1000}{G}$ -

1.1.13 Prozentuale Ab- und Zunahme

Prozentuale Ab- und Zunahme

- Endwert = Änderungsfaktor · Anfangswert

$$E = q \cdot A$$

- $q = \frac{E}{A}$

- $A = \frac{E}{q}$

- Prozentuale Zunahme $q > 1$

$$q = 1 + \frac{p}{100} \quad p = (q - 1) \cdot 100$$

Endwert = Anfangswert + Veränderung

- Prozentuale Abnahme $0 < q < 1$

$$q = 1 - \frac{p}{100} \quad p = (1 - q) \cdot 100$$

Endwert = Anfangswert - Veränderung

A - Anfangswert

E - Endwert

q - Änderungsfaktor

p - Prozentuale Zu- bzw. Abnahme

Eine Artikel kostet 200 Euro.

Der Preis wird um 10% erhöht.

$$q = 1 + \frac{10}{100} = 1.1 \quad E = 1.1 \cdot 200 \text{ Euro} = 220 \text{ Euro}$$

Der Preis wird um 10% gesenkt.

$$q = 1 - \frac{10}{100} = 0.9 \quad E = 0.9 \cdot 200 \text{ Euro} = 180 \text{ Euro}$$

Eine Artikel kostet nach Preiserhöhung 220 Euro.

Der Preis wurde um 10% erhöht.

$$q = 1 + \frac{10}{100} = 1.1 \quad A = \frac{220}{1.1} = 200 \text{ Euro}$$

Eine Artikel kostet nach der Preissenkung 180 Euro.

Der Preis wurde um 10% gesenkt.

$$q = 1 - \frac{10}{100} = 0.9 \quad A = \frac{180}{0.9} = 200 \text{ Euro}$$

Eine Artikel kostet 200 Euro.

Nach einer Preiserhöhung kostet er 220 Euro.

$$q = \frac{220}{200} = 1.1 \quad p = (1.1 - 1) \cdot 100 = 10\%$$

Nach einer Preissenkung kostet er 180 Euro.

$$q = \frac{180}{200} = 0.9 \quad p = (1 - 0.9) \cdot 100 = 10\%$$

Interaktive Inhalte: $E = q \cdot A$ - $A = \frac{E}{q}$ - $p = \frac{E}{A}$ -

1.1.14 Potenzen

Definition

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-Faktoren}}$$

a = Basis n = Exponent

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a$$

Basis: 10

$$10^0 = 1 \quad 10^1 = 10$$

Basis: e = 2,718.. (eulersche Zahl)

$$e^0 = 1 \quad e^1 = e$$

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$

$$4^0 = 1$$

$$x^0 = 1$$

$$4^1 = 4$$

$$x^1 = x$$

Potenzen multiplizieren

gleiche Basis - Exponenten addieren

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$$

$$e^m \cdot e^n = e^{m+n}$$

$$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$$

$$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$$

$$e^3 \cdot e^{-5} = e^{3+(-5)} = e^{-2}$$

Potenzen dividieren

gleiche Basis - Exponenten subtrahieren

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$10^m : 10^n = \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$

$$e^m : e^n = \frac{e^m}{e^n} = e^{m-n}$$

$$\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$$

$$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$$

$$\frac{e^5}{e^{-3}} = e^{5-(-3)} = e^8$$

Potenz ausklammern

gleicher Exponenten - Exponent ausklammern

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 15^2$$

$$x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y)^2$$

Potenz in der Potenz

Exponenten multiplizieren

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(10^n)^m = 10^{n \cdot m}$$

$$(e^n)^m = e^{n \cdot m}$$

$$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$$

$$(x^2)^3 = x^6$$

$$(x^2 \cdot 4)^2 = x^4 \cdot 4^2$$

$$(e^x)^2 = e^{2x}$$

Potenzen mit negativem Exponenten

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

$$e^{-n} = \frac{1}{e^n}$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2} \quad x^{-3} \cdot y^{-2} = \frac{1}{x^3 y^2}$$

Potenz - Wurzel

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad a > 0$$

$$10^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{10}$$

$$e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$$

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} \quad 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}}$$

Potenz mit rationalen Exponenten

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad a > 0$$

$$10^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{10^m}$$

$$e^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{e^m}$$

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$$

Potenzen mit rationalen (negativ) Exponenten

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad a > 0$$

$$10^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{10^m}}$$

$$e^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{e^m}}$$

$$2^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)**1.1.15 Wurzeln****Wurzel - Potenz**

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

n - Wurzelexponent a - Radikand

Quadratwurzel: \sqrt{a} Kubikwurzel: $\sqrt[3]{a}$

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{4}} = 4^{-\frac{1}{2}}$$

Wurzeln multiplizieren

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$$

gleiche Exponenten - Exponent ausklammern

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Wurzeln dividieren

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

gleiche Exponenten - Exponent ausklammern

$$\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

Wurzel in der Wurzel

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}}$$

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$$

Nenner rational machen

Wurzel (irrationale Zahl) aus dem Nenner entfernen

Erweitern des Bruchs mit der Wurzel

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b(\sqrt{c})^2} = \frac{a\sqrt{c}}{bc}$$

$$\frac{a}{b\sqrt{c+d}} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b\sqrt{c+d}\sqrt{c+d}} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b(\sqrt{c+d})^2} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b(c+d)}$$

Erweitern mit der 3. Binomischen Formel

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{a(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$$

Erweitern des Bruchs mit der Wurzel

$$\frac{3}{5\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{5\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{5(\sqrt{6})^2} = \frac{3\sqrt{6}}{30}$$

$$\frac{3}{5\sqrt{x+2}} = \frac{3\sqrt{x+2}}{5\sqrt{x+2}\sqrt{x+2}} = \frac{3\sqrt{x+2}}{5(\sqrt{x+2})^2} = \frac{3\sqrt{x+2}}{5(x+2)}$$

Erweitern zur 3. Binomischen Formel

$$\frac{3}{5+\sqrt{2}} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{5^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{25-2} = \frac{15-3\sqrt{2}}{23}$$

$$\frac{\frac{23}{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

1.1.16 Logarithmen**Definition**

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a$$

b = Basis a = Numerus

Basis: 10

$$\log_{10} x = \lg x$$

$$10^{\lg x} = x$$

$$\lg 10^x = x$$

Basis: e = 2,718.. (eulersche Zahl)

$$\log_e x = \ln x$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\ln e^x = x$$

$$3 = \log_2 8 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

$$\log_e 3 = \ln 3$$

$$e^{\ln 3} = 3$$

$$\ln e^3 = 3$$

$$\log_{10} 2 = \lg 2$$

$$10^{\lg 3} = 3$$

$$\lg 10^3 = 3$$

Logarithmen addieren

$$\log_c a + \log_c b = \log_c (a \cdot b)$$

$$\lg a + \lg b = \lg(a \cdot b)$$

$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$$

$$\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 32$$

$$\log_3 x + \log_3 y = \log_3 (x \cdot y)$$

Logarithmen subtrahieren

$$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$$

$$\lg a - \lg b = \lg \frac{a}{b}$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

$$\log_3 5 - \log_3 7 = \log_3 \frac{5}{7}$$

$$\ln 5 - \ln 7 = \ln \frac{5}{7}$$

Logarithmus von der Potenz

$$\log_c a^n = n \log_c a$$

$$\log_a a^n = n \log_a a = n$$

$$\lg 10^n = n$$

$$\ln e^n = n$$

$$\log_3 5^2 = 2 \log_3 5$$

Basismrechnung von Logarithmen

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{\lg a}{\lg b} = \frac{\ln a}{\ln b}$$

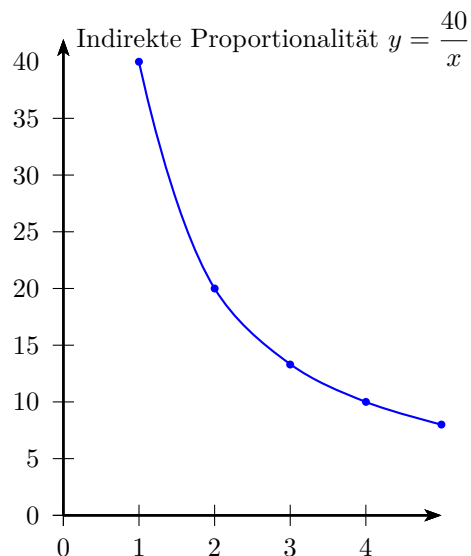
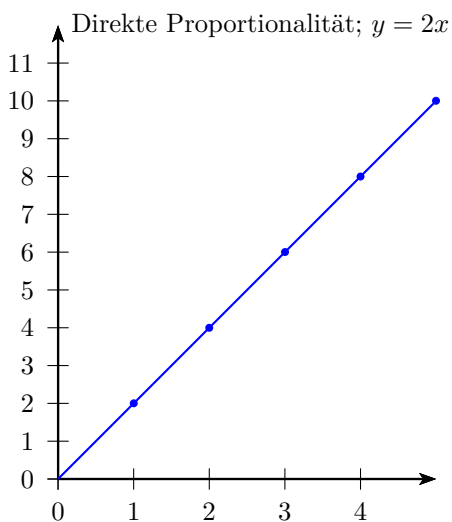
$$\log_5 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = \frac{\lg 3}{\lg 5} = \frac{\ln 3}{\ln 5} = 0,68$$

Logarithmus von der Wurzel

$$\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_c a$$

$$\log_4 \sqrt[5]{3} = \frac{1}{5} \log_4 3$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

1.1.17 Proportionalität

Direkte Proportionalität

y ist ein vielfaches von x

$$y = m \cdot x$$

Proportionalitätsfaktor: m

y ist direkt proportional zu x: $y \sim x$

Direkte Proportionalität = quotientengleich

Tabelle:

x_1	x_2	x_3	x_4	..
y_1	y_2	y_3	y_4	..
$m = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4} ..$				

Funktionsgleichungen:

$$y = m \cdot x \quad x = \frac{y}{m} \quad m = \frac{y}{x}$$

Graph: Ursprungsgerade

Ein Tafel Schokolade kostet 2,- Euro.

Zwei Tafeln Schokolade kosten 4,- Euro.

x= Anzahl der Tafeln

y= Preis der Tafeln

m= Preis einer Tafel

$$y = 2 \cdot x$$

Wieviele kosten 5 Tafeln ?

$$y = 2 \cdot 5 = 10$$

Wieviele Tafeln bekommt man für 12,-Euro ?

$$x = \frac{12}{2} = 6$$

Tabelle:

Anzahl	1	2	3	4	5
Preis	2	4	6	8	10

Direkte Proportionalität = quotientengleich

$$m = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$$

Funktionsgleichung: $y = 2 \cdot x$

Indirekte Proportionalität

y mal x ist konstant

$$k = y \cdot x$$

y ist indirekt proportional zu x: $y \sim \frac{1}{x}$

Indirekte Proportionalität = produktgleich

Tabelle:

x_1	x_2	x_3	x_4	..
y_1	y_2	y_3	y_4	..

$$k = y_1 \cdot x_1 = y_2 \cdot x_2 = y_3 \cdot x_3 = y_4 \cdot x_4 ..$$

Funktionsgleichungen:

$$y = \frac{k}{x} \quad x = \frac{k}{y} \quad k = y \cdot x$$

Graph: Hyperbel

10 Arbeiter benötigen 4 Tage

Wie lange brauchen 20 Arbeiter?

x= Arbeiter

y= Tage

k= Anzahl der Tage bei einem Arbeiter

$$k = y \cdot x$$

$$k = 10 \cdot 4 = 40$$

$$y = \frac{40}{20} = 2$$

Tabelle:

Arbeiter	1	2	3	4	5
Tage	40	20	$13\frac{1}{3}$	10	8

Indirekte Proportionalität = produktgleich

$$k = 1 \cdot 40 = 2 \cdot 20 = 3 \cdot 13\frac{1}{3} = 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8 = 40$$

Funktionsgleichung: $y = \frac{40}{x}$

Dreisatz - Verhältnissgleichung

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \quad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \quad y_1 : x_1 = y_2 : x_2$$

$$y_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot y_2$$

$$y_1 = \frac{y_2 \cdot x_1}{x_2} \quad y_2 = \frac{y_1 \cdot x_2}{x_1}$$

$$x_1 = \frac{x_2 \cdot y_1}{y_2} \quad x_2 = \frac{x_1 \cdot y_2}{y_1}$$

7 Tafel Schokolade kosten 14,- Euro.

Wieviele kosten 5 Tafeln ?

x= Anzahl der Tafeln

y= Preis der Tafeln

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

$$\frac{14}{7} = \frac{y_2}{5}$$

$$y_2 = \frac{14 \cdot 5}{7} = 10$$

1.2 Terme

1.2.1 Grundlagen

Definition

Terme sind sinnvolle Verknüpfungen (+, -, ·, /) von Koeffizienten (Zahlen) und Variablen (Buchstaben: x, y, z, a...).

Eine Variable ist ein Platzhalter für eine Zahl.

Physikalische und geometrische Formeln sind Terme.

Terme können mit Hilfe des Kommutativgesetzes, Assoziativgesetzes und Distributivgesetzes umgeformt werden.

- konstanter Term 2

- linearer Term $5x$

- quadratischer Term $6x^2$

- weitere Terme

$$\begin{array}{ll} 3 \cdot x - 4 & 2yx - 4y \\ 3a - 2b & 3zx - 2xu \\ x^2 - 3x^2 - x^2 & yx^2 - 3zx^2 - ux^2 \\ 5x^2y - 7x^2 & 5e^2y - 2e^3 \\ V = l \cdot b \cdot h & \rho = \frac{m}{V} \end{array}$$

- keine Terme

$4 + *4$ $/4, -@$

Schreibweisen

- Man darf das Malzeichen vor der Variablen und vor der Klammer weglassen.

$$a \cdot x = ax$$

$$a \cdot (x + b) = a(x + b)$$

- Den Faktor 1 vor einer Variablen kann man weglassen.

$$1 \cdot x = 1x = x$$

- Zahlen schreibt man vor die Variable

$$x \cdot a = ax$$

$$3 \cdot x = 3x$$

$$2 \cdot y \cdot 3 = 6y$$

$$a \cdot x = ax$$

$$3 \cdot (x - 2) = 3(x - 2)$$

$$x \cdot y \cdot 5 = 5xy$$

Termwert - Termname

Jedem Term kann man einen Namen zuweisen. In Klammern kann man die Variablen des Terms angeben.

Name(Variable 1, Variable 2...)=Term

Ersetzt man die Variablen eines Terms durch Zahlen, berechnet man den Wert des Terms.

Umfang des Rechtecks:

$$U(a; b) = 2a + 2b \text{ oder } U = 2a + 2b$$

Name des Terms: U Variable: a, b Term: $2a + 2b$

Berechnen der Termwerts: $a = 5$ $b = 6$

$$U(5; 6) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \text{ oder } U = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6$$

$$U(5; 6) = 22 \text{ oder } U = 22$$

Termwert: 22

Linearer Term (Funktion)

$$f(x) = 2x + 3 \text{ oder } y = 2x + 3$$

Name des Terms: f oder y Variable: x Term: $2x + 3$

Berechnen der Termwerts: $x = 5$

$$f(5) = 2 \cdot 5 + 3 \text{ oder } y = 2 \cdot 5 + 3$$

$$f(5) = 13 \text{ oder } y = 13$$

Termwert: 13

1.2.2 Umformung von Termen

Addieren und Subtrahieren von Termen

Zwei Terme sind gleichartig, wenn sie aus den gleichen Variablen (Klammerausdrücke) mit den jeweiligen gleichen Exponenten bestehen. Gleichartige Terme kann man durch addieren (subtrahieren) der Koeffizienten zusammenfassen.

Gleichartige Terme $2x$ und $3x$

$$2x + 3x = 5x$$

Gleichartige Terme $-2x$ und $-3x$

Gleichartige Terme $6y$ und $-5y$

$$-2x + 6y - 5y - 3x = -5x + y$$

$$x^3 + 4x^3 = 5x^3$$

$$2x^2 + 3x^2 = 5x^2$$

$$5x^2y + 7x^2y = 12x^2y$$

$$2xy + 3xy + 4z + 5z = 5xy + 9z$$

$$3e^x - 2e^x = e^x$$

$$(x^2 - 5x - 27) - (x + 3) =$$

$$x^2 - 5x - 27 - x - 3 = x^2 - 6x - 30$$

Nicht gleichartige Terme kann man nicht zusammenfassen.

$$2x + 3y + 3 =$$

$$2x^2 + 3x + 2 =$$

$$x^3 + 5x^4 =$$

$$3e^{2x} - 2e^x =$$

Multiplizieren und Dividieren von Termen

Die Zahlen multiplizieren (dividieren) und gleiche Variablen zusammenfassen (Potenzgesetze).

$$2x \cdot 3x = 6x^2$$

$$2x \cdot 3x^2 = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x^2 = 6 \cdot x^3$$

$$6x \cdot x^2 = 6 \cdot x^3$$

$$\frac{9x}{3x} = 3$$

$$\frac{12x}{3x^2} = \frac{4}{x}$$

Addieren und Subtrahieren von Summentermen

- Vorzeichen vor Summenterm

$$+(a+b) = a+b \quad +(a-b) = a-b$$

$$-(a+b) = -a-b \quad -(a-b) = -a+b$$

- Summenterm und Summenterm

$$(a+b) + (c+d) = a+b+c+d$$

$$(a+b) - (c+d) = a+b-c-d$$

$$(a-b) - (c-d) = a-b-c+d$$

$$(2x+1) + (x+3) = 2x+1+x+3 = 3x+4$$

$$(2x+1) + (x-3) = 2x+1+x-3 = 3x-2$$

$$(2x+1) - (x+3) = 2x+1-x-3 = x-2$$

$$-(2x+1) + (x+3) = -2x-1+x+3 = -x+2$$

Multiplizieren von Summentermen - Ausmultiplizieren

Ein Produkt in eine Summe(Differenz) in umwandeln.

Jedes Glied mit jedem multiplizieren.

- Faktor mal Summenterm

$$c \cdot (a+b) = (a+b) \cdot c = ac+bc$$

- Summenterm mal Summenterm

$$(a+b) \cdot (c+d) = ac+ad+bc+bd$$

$$(a+b) \cdot (c+d+e) = ac+ad+ad+bc+bd+de$$

- 3 Faktoren

$$c \cdot (a+b) \cdot (d+e) = (ac+bc) \cdot (d+e) =$$

$$acd+ace+bcd+bce$$

$$(a+b) \cdot (c+d) \cdot (e+f) = (ac+ad+bc+bd) \cdot (e+f) =$$

$$ace+acf+ade+adf+bce+bcf+bde+bdf$$

$$(2x+1) \cdot (x-3) =$$

$$2x \cdot x + 2x \cdot (-3) + 1 \cdot x + 1 \cdot (-3) =$$

$$2x^2 + (-6x) + x + (-3) = 2x^2 - 5x - 3$$

$$(x^2 - 5x - 27) \cdot (x+3) =$$

$$x^2 \cdot x + x^2 \cdot 3 + (-5x) \cdot x + (-5x) \cdot 3 + (-27) \cdot x + (-27) \cdot 3 =$$

$$x^3 + 3x^2 + (-5x^2) + (-15x) + (-27x) + (-81) =$$

$$x^3 - 2x^2 - 42x - 81$$

$$(x+2) \cdot (x-3) \cdot (x-5) =$$

$$(x^2 - x - 6) \cdot (x-5) =$$

$$x^3 - 6x^2 - x + 30$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

1.2.3 Binomische Formel

1. Binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2$$

$$(-a - b)^2 = (-1)^2(a + b)^2 = (a + b)^2$$

$$(x + 5)^2 = x^2 + 10 \cdot x + 25$$

$$(x + 9)^2 = x^2 + 18 \cdot x + 81$$

$$(-x - 9)^2 = x^2 + 18 \cdot x + 81$$

$$(2 \cdot x + 5)^2 = 4 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 25$$

$$(6 \cdot x + 5)^2 = 36 \cdot x^2 + 60 \cdot x + 25$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$$

$$(x \cdot z + y)^2 = x^2 \cdot z^2 + 2 \cdot x \cdot z \cdot y + y^2$$

2. Binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - a \cdot b - a \cdot b + b^2$$

$$(-a + b)^2 = (-1)^2(a - b)^2 = (a - b)^2$$

$$(x - 5)^2 = x^2 - 10 \cdot x + 25$$

$$(x - 9)^2 = x^2 - 18 \cdot x + 81$$

$$(-x + 9)^2 = x^2 - 18 \cdot x + 81$$

$$(2 \cdot x - 5)^2 = 4 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 25$$

$$(6 \cdot x - 5)^2 = 36 \cdot x^2 - 60 \cdot x + 25$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2$$

$$(x \cdot z - y)^2 = x^2 \cdot z^2 - 2 \cdot x \cdot z \cdot y + y^2$$

3. Binomische Formel

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - a \cdot b + a \cdot b - b^2 = a^2 - b^2$$

$$(x + 5) \cdot (x - 5) = x^2 - 25$$

$$(x + 9) \cdot (x - 9) = x^2 - 81$$

$$(3 \cdot x + 5) \cdot (3 \cdot x - 5) = 9 \cdot x^2 - 25$$

$$(7 \cdot x + 9) \cdot (7 \cdot x - 9) = 49 \cdot x^2 - 81$$

$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$$

Binomische Formel in der 3. Potenz

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(1x + 2)^3 = 1^3x^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3$$

$$(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$(2x + (-3))^3 =$$

$$2^3x^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot x^2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \cdot x \cdot (-3)^2 + (-3)^3$$

$$(2x - 3)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

Binomische Formel in der 4. Potenz

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(1x + 2)^4 =$$

$$1^4x^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot x^3 \cdot 2 + 6 \cdot 1^2 \cdot x^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 1 \cdot x \cdot 2^3 + 2^4$$

$$(x + 2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

$$(-2x + (-3))^4 =$$

$$(-2)^4x^4 + 4 \cdot (-2)^3 \cdot x^3 \cdot (-3) + 6 \cdot (-2)^2 \cdot x^2 \cdot (-3)^2 +$$

$$4 \cdot (-2) \cdot x \cdot (-3)^3 + (-3)^4$$

$$(-2x - 3)^4 = 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$$

Binomische Formel mit höheren Potenzen

$$(a+b)^n = k_0 a^n b^0 + k_1 a^{n-1} b^1 + k_2 a^{n-2} b^2 + \dots + k_n a^0 b^n$$

Die Summe der Exponenten ist n.

$$n+0=n \quad n-1+1=n \quad n-2+2=n \dots$$

Koeffizienten($k_0, k_1 \dots$) übers Pascal'sche Dreieck

$$\begin{array}{ccccccc} (a+b)^0 & & & & & & 1 \\ (a+b)^1 & & & & 1 & & 1 \\ (a+b)^2 & & & 1 & & 2 & & 1 \\ (a+b)^3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ (a+b)^4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ (a+b)^5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

..

oder über den binomischen Satz:

$$(a+b)^n =$$

$$\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad n \text{ über } k$$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1 + \binom{1}{1} b^1 = 1a + 1b$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} b^2$$

$$n=2 \quad k_0=1 \quad k_1=2 \quad k_2=1$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$n=3 \quad k_0=1 \quad k_1=3 \quad k_2=3 \quad k_3=1$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$n=4 \quad k_0=1 \quad k_1=4 \quad k_2=6 \quad k_3=4 \quad k_4=1$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

Interaktive Inhalte: $(a+b)^2$ - $(a-b)^2$ - $(a+b) \cdot (a-b)$ - $(ax+b)^3$ - $(ax+b)^4$ -

1.2.4 Faktorisieren - Ausklammern

Eine Summe(Differenz) in ein Produkt umwandeln.

- Ausklammern eines Faktors

$$ac + bc = c \cdot (a + b)$$

- Doppeltes Ausklammern

$$ac + ad + bc + bd = a \cdot (c + d) + b(c + d) =$$

$$(a + b) \cdot (c + d)$$

- Binomischen Formeln

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

$$2x^2 + 6x = 2x(x + 3)$$

Binomischen Formeln

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

$$x^2 - 18x + 81 = (x - 9)^2$$

$$4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2$$

$$36 \cdot x^2 - 60x + 25 = (6x - 5)^2$$

$$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$$

1.2.5 Quadratische Ergänzung

Maximalen oder minimalen Termwert bestimmen.

$$T(x) = ax^2 + bx + c$$

$$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c$$

$$T(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2] + c$$

$$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c$$

$$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

oder

$$T(x) = ax^2 + bx + c$$

$$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

$$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a})$$

$$T(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}]$$

$$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + a \cdot \frac{c}{a}$$

$$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$a < 0$$

$$\text{Maximaler Termwert} = -\frac{b^2}{4a} + c \text{ für } x = -\frac{b}{2a}$$

$$a > 0$$

$$\text{Minimaler Termwert} = -\frac{b^2}{4a} + c \text{ für } x = -\frac{b}{2a}$$

quadratische Ergänzung

$$y = x^2 - 6x + 2$$

$$y = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 2$$

$$y = (x - 3)^2 - 3^2 + 2$$

$$y = (x - 3)^2 - 9 + 2$$

$$y = (x - 3)^2 - 7$$

$$\text{Minimaler Termwert} = -7 \text{ für } x = 3$$

$$y = 2x^2 + 8x + 2$$

$$y = 2(x^2 + 4x + 1)$$

$$y = 2(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + 1)$$

$$y = 2[(x + 2)^2 - 2^2 + 1]$$

$$y = 2[(x + 2)^2 - 4 + 1]$$

$$y = 2[(x + 2)^2 - 3]$$

$$y = 2(x + 2)^2 - 6$$

$$\text{Minimaler Termwert} = -6 \text{ für } x = -2$$

$$y = -4x^2 + 8x + 4$$

$$y = -4(x^2 - 2x) + 4$$

$$y = -4(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 4$$

$$y = -4[(x - 1)^2 - 1^2] + 4$$

$$y = -4[(x - 1)^2 - 1] + 4$$

$$y = -4(x - 1)^2 + 4 + 4$$

$$y = -4(x - 1)^2 + 8$$

$$\text{Maximaler Termwert} = 8 \text{ für } x = 1$$

1.2.6 Bruchterme

Definition und Definitionsbereich

Bei einem Bruchterm ist im Nenner eine Variable.

$$\frac{Z(x)}{N(x)}$$

Die Nullstellen des Nenners müssen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden.

Nullstellen des Nenners bestimmen: $N(x) = 0$

Nullstellen aus den Definitionsbereich ausschließen:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$$

$$\frac{2}{x} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\frac{x-2}{x-3} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$\frac{2x+3}{x(x-3)} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$$

$$\frac{3}{x^2-9} \quad x^2-9=0 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$$

Erweitern von Bruchtermen

Zähler und Nenner mit dem gleichen Term multiplizieren

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(x) \cdot c(x)}{b(x) \cdot c(x)}$$

$$\frac{x+3}{x-4} = \frac{(x+3) \cdot 2x}{(x-4) \cdot 2x} = \frac{2x^2+6x}{2x^2-8x}$$

Kürzen von Bruchtermen

Zähler und Nenner faktorisieren - gleiche Faktoren kürzen

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(x) : c(x)}{b(x) : c(x)}$$

$$\frac{12x^2+4}{4x^2-2x} = \frac{4x(3x+1)}{2x(2x-1)} = \frac{2(3x+1)}{2x-1}$$

Addition und Subtraktion gleichnamiger Bruchterme

Zähler addieren bzw. subtrahieren

$$\frac{a(x)}{c(x)} + \frac{b(x)}{c(x)} = \frac{a(x) + b(x)}{c(x)}$$

$$\frac{a(x)}{c(x)} - \frac{b(x)}{c(x)} = \frac{a(x) - b(x)}{c(x)}$$

$$\frac{\frac{2}{3x} + \frac{4}{3x}}{7x-2} = \frac{\frac{2+4}{3x}}{7x-2} = \frac{\frac{6}{3x}}{7x-2} = \frac{\frac{2}{x}}{7x-2}$$

Addition und Subtraktion ungleichnamiger Bruchterme

Brüche durch Erweitern gleichnamig machen

$$\frac{a(x)}{b(x)} + \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x) \cdot d(x)}{b(x) \cdot d(x)} + \frac{c(x) \cdot b(x)}{b(x) \cdot d(x)} = \frac{a(x) \cdot d(x) + c(x) \cdot b(x)}{b(x) \cdot d(x)}$$

$$\frac{a(x)}{b(x)} - \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x) \cdot d(x)}{b(x) \cdot d(x)} - \frac{c(x) \cdot b(x)}{b(x) \cdot d(x)} = \frac{a(x) \cdot d(x) - c(x) \cdot b(x)}{b(x) \cdot d(x)}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{5x} + \frac{3}{x+4} &= \frac{2 \cdot (x+4)}{5x(x+4)} + \frac{3 \cdot 5x}{5x(x+4)} = \frac{2 \cdot (x+4) + 3 \cdot 5x}{5x(x+4)} \\ &= \frac{2x+8+15x}{5x(x+4)} = \frac{17x+8}{5x(x+4)} \end{aligned}$$

Multiplikation von Bruchtermen

Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner

$$\frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x) \cdot c(x)}{b(x) \cdot d(x)}$$

$$\frac{3x}{x+4} \cdot \frac{5}{6x} = \frac{3x \cdot 5}{(x+4) \cdot 6x} = \frac{15x}{6x \cdot (x+4)}$$

Division von Bruchtermen

Mit dem Kehrwert des Bruchterms multiplizieren

Bruchterm durch Bruchterm

$$\frac{a(x)}{b(x)} : \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{d(x)}{c(x)} = \frac{a(x) \cdot d(x)}{b(x) \cdot c(x)}$$

Bruch durch Term

$$\frac{\frac{a(x)}{b(x)}}{e(x)} = \frac{a(x)}{b(x)} : e(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{1}{e(x)} = \frac{a(x)}{b(x) \cdot e(x)}$$

Term durch Bruchterm

$$\frac{e(x)}{\frac{c(x)}{d(x)}} = e(x) : \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{e(x)}{1} \cdot \frac{d(x)}{c(x)} = \frac{e(x) \cdot d(x)}{c(x)}$$

Doppelbruch

$$\frac{\frac{a(x)}{b(x)}}{\frac{c(x)}{d(x)}} = \frac{a(x)}{b(x)} : \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{d(x)}{c(x)} = \frac{a(x) \cdot d(x)}{b(x) \cdot c(x)}$$

$$\frac{3}{4x} : \frac{5}{6x} = \frac{3}{4x} \cdot \frac{6x}{5} = \frac{3 \cdot 6x}{4x \cdot 5} = \frac{18x}{20x} = \frac{9}{10}$$

$$4x : \frac{5}{6x} = 4x \cdot \frac{6x}{5} = \frac{4x \cdot 6x}{5} = \frac{24x^2}{5}$$

$$\frac{3}{4x} : 5x = \frac{3}{4x} \cdot \frac{1}{5x} = \frac{3}{4x \cdot 5x} = \frac{3}{20x^2}$$

$$\frac{\frac{3}{4x}}{\frac{5}{6x}} = \frac{3}{4x} : \frac{5}{6x} = \frac{3}{4x} \cdot \frac{6x}{5} = \frac{3 \cdot 6x}{4x \cdot 5} = \frac{18x}{20x} = \frac{9}{10}$$

1.2.7 Polynomdivision

Die Polynomdivision funktioniert ähnllich wie die schriftliche Division.

- Voraussetzung: Zählergrad \geq Nennergrad
- höchste Potenz des Zählers durch die höchste Potenz des Nenners teilen
- Nenner mit dem Ergebnis multiplizieren und abziehen
- höchste Potenz des Restpolynom durch die höchste Potenz des Nenners teilen
- usw.
- Wiederholen bis Zählergrad $<$ Nennergrad

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 10x^2 + 7x - 12 \\ x - 3 \end{array}$$

- höchste Potenz des Zählers durch die höchste Potenz des Nenners teilen

$$\frac{3x^3}{x} = 3x^2$$

$$(3x^3 - 10x^2 + 7x - 12) : (x - 3) = 3x^2$$

- Nenner mit dem Ergebnis multiplizieren und abziehen

$$(x - 3)3x^2 = 3x^3 - 9x^2$$

$$\begin{array}{r} (3x^3 - 10x^2 + 7x - 12) : (x - 3) = 3x^2 \\ -(3x^3 - 9x^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^2 + 7x - 12 \end{array}$$

- höchste Potenz des Restpolynom durch die höchste Potenz des Nenners teilen

$$\frac{-x^2}{x} = -x$$

usw...

$$\begin{array}{r} (3x^3 - 10x^2 + 7x - 12) : (x - 3) = 3x^2 - x + 4 \\ -(3x^3 - 9x^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^2 + 7x - 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -(-x^2 + 3x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x - 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -(4x - 12) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \end{array}$$

- Polynomdivision mit Rest

$$\begin{array}{r} (x^2 - 5x - 27) : (x + 3) = x - 8 + \frac{-3}{x+3} \\ -(x^2 + 3x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -8x - 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -(-8x - 24) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3 \end{array}$$

- Polynomdivision mit fehlenden Potenzen beim Zähler

$$\begin{array}{r} (x^3 + 8) : (x - 2) = x^2 + 2x + 4 \\ -(x^3 - 2x^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -(2x^2 - 4x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x + 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -(4x - 8) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \end{array}$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

1.3 Gleichungen

1.3.1 Grundlagen

Definition

Termwert der linken Seite $T_1(x)$ ist gleich dem Termwert der rechten Seite $T_2(x)$.

$$T_1(x) = T_2(x)$$

$$\begin{aligned} T_1(x) &= 2 \cdot (x + 3) & T_2(x) &= 5x \\ T_1(x) &= T_2(x) \\ 2 \cdot (x + 3) &= 5x \\ 2x + 6 &= 5x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Äquivalenzumformung

Durch eine Äquivalenzumformung ändert sich die Lösungsmenge einer Gleichung nicht.

Äquivalenzumformungen von Gleichungen

- Vertauschen der beiden Seiten
- Addition des gleichen Terms (Zahl) auf beiden Seiten
- Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten
- Multiplikation mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten
- Division mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten

Quadrieren (Potenzieren mit einem geraden Exponenten) ist keine Äquivalenzumformung. Der berechnete Wert, muß durch das Einsetzen in die Ursprungsgleichung überprüft werden.

Vertauschen der beiden Seiten

$$x - 2 = 8 \quad 8 = x - 2$$

Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten

$$x - 2 = 8 \quad / + 2$$

$$x - 2 + 2 = 8 + 2$$

$$x = 10$$

Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten

$$3x - 2 = 2x + 3 \quad / - 2x$$

$$3x - 2x - 2 = 2x - 2x + 3$$

$$x - 2 = 3$$

Multiplikation mit dem gleichen Term auf beiden Seiten

$$\frac{2}{x-3} = 5 \quad / \cdot (x-3)$$

$$\frac{2 \cdot (x-3)}{x-3} = 5 \cdot (x-3)$$

$$2 = 5(x-3)$$

Division durch mit dem gleichen Term auf beiden Seiten

$$4x = 8 \quad / : 4$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$$

$$x = 2$$

Quadrieren

$$\sqrt{x} = -4$$

$$\sqrt{x^2} = (-4)^2$$

$$x = 16$$

$$\sqrt{x} = -4$$

$$\sqrt{16} \neq -4$$

keine Lösung

$$\sqrt{x} = 4$$

$$\sqrt{x^2} = 4^2$$

$$x = 16$$

$$\sqrt{x} = 4$$

$$\sqrt{16} = 4$$

Lösung

1.3.2 Lineare Gleichung

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme mit der Variablen auf die eine Seite und alle Terme ohne Variable auf die andere Seite.
- durch die Zahl vor der Variablen dividieren

$$2\frac{1}{2}x + 5 = 4(x - 2) - 2x + 12$$

Klammern auflösen

$$2\frac{1}{2}x + 5 = 4x - 8 - 2x + 12$$

Terme zusammenfassen

$$2\frac{1}{2}x + 5 = 2x + 4$$

Äquivalenzumformung:

$$2\frac{1}{2}x + 5 = 2x + 4 \quad / - 5 \quad / - 2x$$

$$2\frac{1}{2}x - 2x = 4 - 5$$

durch die Zahl vor der Variablen dividieren

$$\frac{1}{2}x = -1 \quad / : \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-1}{\frac{1}{2}}$$

$$x = -2$$

$$a \cdot x = b$$

$$\begin{aligned} a \cdot x &= b & / : a \\ x &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot x &= 45 & / : 5 & -2 \cdot x = -6 & / : (-2) \\ x &= \frac{45}{5} & x &= \frac{-6}{-2} \\ x &= 9 & x &= 3 \end{aligned}$$

$$x + a = b$$

$$\begin{array}{l} x + a = b \quad / - a \\ x = b - a \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x + 2 = 5 & / - 2 \\ x = 5 - 2 & \\ x = 3 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} x + 5 = -7 & / - 5 \\ x = -7 - 5 & \\ x = -12 & \end{array}$$

$$a \cdot x + b = c$$

$$\begin{array}{l} a \cdot x + b = c \quad / - b \\ a \cdot x = c - b \quad / : a \\ x = \frac{c - b}{a} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 5 \cdot x - 4 = 6 & / + 4 \\ 5 \cdot x = 10 & / : 5 \\ x = \frac{10}{5} & \\ x = 2 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} -2 \cdot x + 4 = -6 & / - 4 \\ -2 \cdot x = -10 & / : (-2) \\ x = \frac{-10}{-2} & \\ x = 5 & \end{array}$$

$$\frac{x}{a} = b$$

$$\begin{array}{l} \frac{x}{a} = b \quad / \cdot a \\ x = b \cdot a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{x}{2} = 5 \quad / \cdot 2 \\ x = 5 \cdot 2 \\ x = 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{x}{5} = -7 \quad / \cdot 5 \\ x = -7 \cdot 5 \\ x = -35 \end{array}$$

$$a - x = b$$

$$\begin{array}{l} a - x = b \quad / - a \\ -x = b - a \quad / : (-1) \\ x = a - b \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2 - x = 5 & / - 2 \\ -x = 5 - 2 & \\ -x = 3 & / : (-1) \\ x = -3 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} x - 5 = -7 & / + 5 \\ x = -7 + 5 & \\ x = -2 & \end{array}$$

$$x - a = b$$

$$\begin{array}{l} x - a = b \quad / + a \\ x = b + a \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x - 2 = 5 & / + 2 \\ x = 5 + 2 & \\ x = 7 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} x - 5 = -7 & / + 5 \\ x = -7 + 5 & \\ x = -2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ax + b = cx + d \quad / - cx \\ ax - cx + b = d \quad / - b \\ (a - c)x = d - b \quad / : (a - c) \\ a - c \neq 0 \\ x = \frac{d - b}{a - c} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2x + 4 = 6x + 7 & / - 6x \\ -4x + 4 = 7 & / - 4 \\ -4x = 3 & / : (-4) \\ x = -\frac{3}{4} & \end{array}$$

Interaktive Inhalte: $a \cdot x + b = c$ - $a \cdot x + b = c \cdot x + d$ - $a \cdot x + b = 0$ - $a \cdot x = d$ -

1.3.3 Quadratische Gleichung

Umformen: $ax^2 + c = 0$

$$ax^2 + c = 0 \quad / -c$$

$$ax^2 = -c \quad / : a$$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Diskriminante:

$$D = \frac{-c}{a}$$

$D = 0$ eine Lösung

$D > 0$ zwei Lösungen

$D < 0$ keine Lösung

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6} &= 0 & / -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3}x^2 &= -\frac{1}{6} & / : \left(-\frac{2}{3}\right) \\ x^2 &= \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{2}{3}} \\ x &= \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ x_1 &= \frac{1}{2} & x_2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Faktorisieren: $ax^2 + bx = 0$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$\begin{aligned} -2x^2 - 8x &= 0 & x^2 - x &= 0 \\ x(-2x - 8) &= 0 & x(x - 1) &= 0 \\ x_1 &= 0 & x_1 &= 0 \\ -2x - 8 &= 0 & / + 8 & \\ -2x &= 8 & / : (-2) & \\ x &= \frac{8}{-2} & x - 1 &= 0 & / + 1 \\ x_2 &= -4 & x &= 1 & \\ & & x_2 &= 1 & \end{aligned}$$

Lösungsformel (Mitternachtsformel): $ax^2 + bx + c = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Diskriminante:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$D = 0$ eine Lösung

$D > 0$ zwei Lösungen

$D < 0$ keine Lösung

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 10 &= 0 \\ x_{1/2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \\ x_{1/2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} \\ x_{1/2} &= \frac{-3 \pm 7}{2} \\ x_1 &= \frac{-3 + 7}{2} & x_2 &= \frac{-3 - 7}{2} \\ x_1 &= 2 & x_2 &= -5 \end{aligned}$$

p-q Formel: $x^2 + px + q = 0$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Diskriminante:

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$D = 0$ eine Lösung

$D > 0$ zwei Lösungen

$D < 0$ keine Lösung

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 10 &= 0 \\ x_{1/2} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (-10)} \\ x_{1/2} &= -1\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4}} \\ x_{1/2} &= -1\frac{1}{2} \pm 3\frac{1}{2} \\ x_1 &= 2 & x_2 &= -5 \end{aligned}$$

Satz von Vieta: $x^2 + px + q = 0$

$$x^2 + px + q = 0$$

x_1, x_2 sind die Lösungen der Gleichung

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

$$x^2 - x_2 \cdot x - x_1 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$p = 3 \quad q = -10$$

$$x_1 + x_2 = -3$$

$$x_1 \cdot x_2 = 10$$

$$2 - 5 = -3$$

$$2 \cdot (-5) = -10$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -5$$

$$(x - 2) \cdot (x + 5) = 0$$

Interaktive Inhalte: $ax^2 + bx + c = 0$ -

1.3.4 Kubische Gleichungen

Umformen: $ax^3 + b = 0$

$$ax^3 + b = 0$$

$$ax^3 + b = 0 \quad / -b$$

$$ax^3 = -b \quad / : a$$

$$x^3 = \frac{-b}{a}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-b}{a}}$$

$$\frac{-b}{a} > 0 \quad x = \sqrt[3]{\frac{-b}{a}}$$

$$\frac{-b}{a} < 0 \quad x = -\sqrt[3]{\left|\frac{-b}{a}\right|}$$

$$3x^3 + 24 = 0$$

$$3x^3 + 24 = 0 \quad / -24$$

$$3x^3 = -24 \quad / : 3$$

$$x^3 = \frac{-24}{3}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-24}{3}}$$

$$x = -2$$

$$-3x^3 + 24 = 0$$

$$-3x^3 + 24 = 0 \quad / -24$$

$$-3x^3 = -24 \quad / : (-3)$$

$$x^3 = \frac{-24}{-3}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-24}{-3}}$$

$$x = 2$$

Faktorisieren: $ax^3 + bx = 0$

$$ax^3 + bx = 0$$

$$x(ax^2 + b) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad (ax^2 + b) = 0$$

$$-9x^3 + 25x = 0$$

$$x(-9x^2 + 25) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad -9x^2 + 25 = 0$$

$$-9x^2 + 25 = 0 \quad / -25$$

$$-9x^2 = -25 \quad / : (-9)$$

$$x^2 = \frac{-25}{-9}$$

$$x = \pm \sqrt{2\frac{7}{9}}$$

$$x_2 = 1\frac{2}{3} \quad x_3 = -1\frac{2}{3}$$

Faktorisieren: $ax^3 + bx^2 = 0$

$$ax^3 + bx^2 = 0$$

$$x^2(ax + b) = 0$$

$$x_{1/2} = 0 \quad \vee \quad (ax + b) = 0$$

$$-6\frac{3}{4}x^3 - 13\frac{1}{2}x^2 = 0$$

$$x^2(-6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = 0 \quad \vee \quad -6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2} = 0$$

$$-6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2} = 0 \quad / + 13\frac{1}{2}$$

$$-6\frac{3}{4}x = 13\frac{1}{2} \quad / : (-6\frac{3}{4})$$

$$x = \frac{13\frac{1}{2}}{-6\frac{3}{4}}$$

$$x_3 = -2$$

Polynomdivision

$$ax^3 + bx^2 + d = 0$$

$$ax^3 + cx + d = 0$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

• Die ganzzahligen Faktoren von d in die Funktion einsetzen. Wird bei einem Faktor der Funktionswert Null, hat man eine Nullstelle x_0 gefunden.

• Wenn x_0 eine Nullstelle von $f(x)$ ist, so ist $f(x)$ durch $(x - x_0)$ ohne Rest teilbar.

• Mit dem Linearfaktor $(x - x_0)$ wird die Polynomdivision durchgeführt.

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d) : (x - x_0) = fx^2 + dx + e$$

$$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) = (x - x_0) \cdot (fx^2 + dx + e)$$

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

$d = 4$ Ganzzahlige Faktoren: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$$f(1) = 0$$

Nullstelle gefunden: $x_1 = 1$

$$(x^3 + 3x^2 - 4) : (x - 1) = x^2 + 4x + 4$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 4 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline 4x^2 - 4 \\ -(4x^2 - 4x) \\ \hline 4x - 4 \\ -(4x - 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$1x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x_{2/3} = \frac{-4 \pm 0}{2}$$

$$x_2 = \frac{-4 + 0}{2} \quad x_3 = \frac{-4 - 0}{2}$$

$$x_2 = -2 \quad x_3 = -2$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

1.3.5 Gleichungen höheren Grades

Gerader Exponent: $ax^n + c = 0$

$$ax^n + c = 0 \quad / -c$$

$$ax^n = -c \quad / : a$$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt[n]{\frac{-c}{a}}$$

Diskriminante:

$$D = \frac{-c}{a}$$

$D = 0$ eine Lösung

$D > 0$ zwei Lösungen

$D < 0$ keine Lösung

$$-2x^4 + 162 = 0 \quad / -162$$

$$-2x^4 = -162 \quad / : (-2)$$

$$x^4 = \frac{-162}{-2}$$

$$x = \pm \sqrt[4]{81}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

Ungerader Exponent: $ax^n + c = 0$

Umformen:

$$ax^n + b = 0$$

$$ax^n + b = 0 \quad / -b$$

$$ax^n = -b \quad / : a$$

$$x^n = \frac{-b}{a}$$

$$x = \sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$$

$$\frac{-b}{a} > 0 \quad x = \sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$$

$$\frac{-b}{a} < 0 \quad x = -\sqrt[n]{\left| \frac{-b}{a} \right|}$$

$$5x^3 + 320 = 0 \quad / -320$$

$$5x^3 = -320 \quad / : 5$$

$$x^3 = \frac{-320}{5}$$

$$x = -\sqrt[3]{64}$$

$$x = -4$$

Biquadratische Gleichung

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

$$\text{Substitution: } u = x^2 \quad u^2 = x^4$$

$$\text{Quadratische Gleichung: } au^2 + bu + c = 0$$

$$\text{Lösungen: } u_1 \quad u_2$$

$$\text{Resubstitution: } x^2 = u_1 \quad x^2 = u_2$$

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$u = x^2 \quad u^2 = x^4$$

$$1u^2 - 10u + 9 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$$

$$u_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$u_{1/2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

$$u_1 = \frac{10+8}{2} \quad u_2 = \frac{10-8}{2}$$

$$u_1 = 9 \quad u_2 = 1$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x_3 = 1 \quad x_4 = -1$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

1.3.6 Bruchgleichung**Überkreuzmultiplikation**

- Nullstellen des Nenners aus dem Definitionsbereich ausschließen.
- Das Produkt aus dem Zähler des linken Bruchs und dem Nenner des rechten Bruchs ist gleich dem Produkt aus dem Nenner des linken Bruchs und dem Zähler des rechten Bruchs.
- Gleichung lösen
- Lösungen müssen im Definitionsbereich enthalten sein.

$$\frac{a}{bx+c} = \frac{d}{ex+f} \quad a \cdot (ex+f) = d \cdot (bx+c)$$

$$\frac{2}{x+4} = \frac{3}{x-1}$$

$$\text{Definitionsbereich: } \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$$

$$\text{Überkreuzmultiplikation: } 2 \cdot (x-1) = 3 \cdot (x+4)$$

$$2x-1 = 3x+12$$

$$x = -13$$

Mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren

- Nullstellen des Nenners aus dem Definitionsbereich ausschließen.
- Gleichung mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren
- Gleichung lösen
- Lösungen müssen im Definitionsbereich enthalten sein.

$$\frac{2}{5x} = \frac{1}{x+3}$$

$$\text{Definitionsbereich: } \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$$

$$\text{Hauptnenner: } 5x(x+3)$$

$$\frac{2 \cdot 5x(x+3)}{5x} = \frac{1 \cdot 5x(x+3)}{(x+3)}$$

$$2 \cdot (x+3) = 5x$$

$$2x+6 = 5x$$

$$x = 2$$

1.3.7 Exponentialgleichungen

$$a \cdot b^{(cx+d)} + f = 0$$

$$a \cdot b^{(cx+d)} + f = 0$$

$$a \cdot b^{(cx+d)} + f = 0 \quad / - f$$

$$a \cdot b^{(cx+d)} = -f \quad / : a$$

$$b^{(cx+d)} = \frac{-f}{a} \quad / \log_b(\dots)$$

$$\frac{-f}{a} > 0 \Rightarrow$$

$$\log_b(b^{(cx+d)}) = \log_b\left(\frac{-f}{a}\right)$$

$$\text{Logarithmengesetz: } \log_b b^n = n \log_b b = n$$

$$(cx+d) \log_b(b) = \log_b\left(\frac{-f}{a}\right)$$

$$cx+d = \log_b\left(\frac{-f}{a}\right) \quad / - d \quad / : c$$

$$x = \frac{\log_b\left(\frac{-f}{a}\right) - d}{c}$$

$$\frac{-f}{a} \leq 0 \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

$$-2 \cdot 2^{(2x+3)} + 4 = 0$$

$$-2 \cdot 2^{(2x+3)} + 4 = 0 \quad / - 4$$

$$-2 \cdot 2^{(2x+3)} = -4 \quad / : -2$$

$$2^{(2x+3)} = 2 \quad / \log_2$$

$$2x+3 = \log_2(2) \quad / - 3 \quad / : 2$$

$$x = -1$$

$$\text{Basis: } e = 2,718..(\text{eulersche Zahl})$$

$$2 \cdot e^{(3x+4)} - 6 = 0$$

$$2 \cdot e^{(3x+4)} - 6 = 0 \quad / + 6$$

$$2 \cdot e^{(3x+4)} = +6 \quad / : 2$$

$$e^{(3x+4)} = 3 \quad / \ln$$

$$3x+4 = \ln(3) \quad / - 4 \quad / : 3$$

$$x = -0,967$$

Interaktive Inhalte: $ab^{(cx+d)} + f = 0$ - $ae^{(cx+d)} + f = 0$ -

1.3.8 Logarithmusgleichungen

$$a \log_b(cx+d) + f = 0$$

$$a \log_b(cx+d) + f = 0$$

$$a \log_b(cx+d) + f = 0 \quad / - f$$

$$a \log_b(cx+d) = -f \quad / : a$$

$$\log_b(cx+d) = \frac{-f}{a} \quad / b$$

$$b^{(\log_b(cx+d))} = b^{\left(\frac{-f}{a}\right)}$$

$$cx+d = b^{\left(\frac{-f}{a}\right)} \quad / - d \quad / : c$$

$$x = \frac{b^{\left(\frac{-f}{a}\right)} - d}{c}$$

$$2 \cdot \log_3(4x+5) - 4 = 0$$

$$2 \cdot \log_3(4x+5) - 4 = 0 \quad / + 4$$

$$2 \cdot \log_3(4x+5) = +4 \quad / : 2$$

$$\log_3(4x+5) = 2 \quad / 3^{\cdot}$$

$$4x+5 = 3^2 \quad / - 5 \quad / : 4$$

$$x = \frac{3^2 - 5}{4}$$

$$\text{Basis: } e = 2,718..(\text{eulersche Zahl})$$

$$\log_e x = \ln x \quad 4 \cdot \ln(5x+7) + 8 = 0$$

$$4 \cdot \ln(5x+7) + 8 = 0 \quad / - 8$$

$$4 \cdot \ln(5x+7) = -8 \quad / : 4$$

$$\ln(5x+7) = -2 \quad / e^{\cdot}$$

$$5x+7 = e^{-2} \quad / - 7 \quad / : 5$$

$$x = \frac{e^{-2} - 7}{5}$$

$$x = -1,37$$

$$\log_b x = 0$$

$$\log_b x = 0 \quad / b$$

$$x = b^0$$

$$x = 1$$

$$\lg x = 0 \quad / 10$$

$$x = 10^0$$

$$x = 1$$

$$\ln x = 0 \quad / e$$

$$x = e^0$$

$$x = 1$$

Interaktive Inhalte: $a \log_b(cx+d) + f = 0$ - $a \ln(cx+d) + f = 0$ -

1.3.9 Betragsgleichung

$$|ax + b| = c$$

- Aufspalten der Beträge in einzelne Intervalle.

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags positiv ist. $ax + b \geq 0$ für $x \geq \frac{-b}{a}$

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags negativ ist und dafür zusätzlich ein Minuszeichen vor dem Term geschrieben wird. $ax + b < 0$ für $x < \frac{-b}{a}$

$$|ax + b| = \begin{cases} (ax + b) & x \geq \frac{-b}{a} \\ -(ax + b) & x < \frac{-b}{a} \end{cases}$$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-b}{a}$

$$ax + b = c$$

$$ax + b = c \quad / -b \quad / : a$$

$$x = \frac{c-b}{a}$$

- 1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-b}{a} \wedge x = \frac{c-b}{a}$

- 2. Lösung für $x < \frac{-b}{a}$

$$-(ax + b) = c \quad / : (-1)$$

$$ax + b = -c$$

$$ax + b = -c \quad / -b \quad / : a$$

$$x = \frac{-c-b}{a}$$

- 2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-b}{a} \wedge x = \frac{-c-b}{a}$

- Gesamtlösung aus Vereinigungsmenge von 1. Lösung und 2. Lösung

$$|2x + 3| = 7$$

$$|2x + 3| = \begin{cases} (2x + 3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x + 3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$

$$2x + 3 = 7$$

$$2x + 3 = 7 \quad / -3 \quad / : 2$$

$$x = 2$$

- 1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x = 2$

- 1. Lösung $x = 2$

- 2. Lösung für $x < \frac{-3}{2}$

$$-(2x + 3) = 7$$

$$2x + 3 = -7 \quad / -3 \quad / : 2$$

$$x = -5$$

- 2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-3}{2} \wedge x = -5$

- 2. Lösung $x = -5$

Vereinigungsmenge aus 1. Lösung und 2. Lösung

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -5$$

$$|2x + 3| = -7$$

$$|2x + 3| = \begin{cases} (2x + 3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x + 3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$

$$2x + 3 = -7$$

$$2x + 3 = -7 \quad / -3 \quad / : 2$$

$$x = -5$$

- 1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x = -5$

- 1. Lösung ist Leermenge

- 2. Lösung für $x < \frac{-3}{2}$

$$-(2x + 3) = -7$$

$$2x + 3 = +7 \quad / -3 \quad / : 2$$

$$x = 2$$

- 2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-3}{2} \wedge x = 2$

- 2. Lösung ist Leermenge

Gesamtlösung ist Leermenge

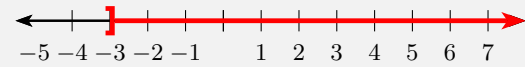
1.4 Ungleichungen

1.4.1 Grundlagen

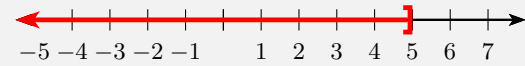
Ungleichheitszeichen

$x < b$	kleiner als	weniger als
$x > b$	größer als	mehr als
$x \leq b$	kleiner oder gleich	höchstens
$x \geq b$	größer oder gleich	mindestens

$$x > -3$$



$$x \leq 5$$



Intervalle in der Mengenschreibweise

offenes Intervall

Intervall	Mengenschreibweise
$a < x < b$	$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} a < x < b\}$
$x < b$	$] -\infty; b[= \{x \in \mathbb{R} x < b\}$
$x > a$	$]a; \infty[= \{x \in \mathbb{R} x > a\}$

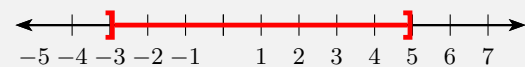
halboffenes Intervall

Intervall	Mengenschreibweise
$a < x \leq b$	$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} a < x \leq b\}$
$a \leq x < b$	$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} a \leq x < b\}$
$x \leq b$	$] -\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} x \leq b\}$
$x \geq a$	$[a; \infty[= \{x \in \mathbb{R} x \geq a\}$

abgeschlossenes Intervall

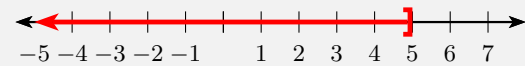
Intervall	Mengenschreibweise
$a \leq x \leq b$	$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} a \leq x \leq b\}$

$$]-3; 5] = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 5\}$$



$$-3 \notin]-3; 5] \quad 5 \in]-3; 5] \quad -1 \in]-3; 5] \quad 6 \notin]-3; 5]$$

$$]-\infty; 5] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 5\}$$



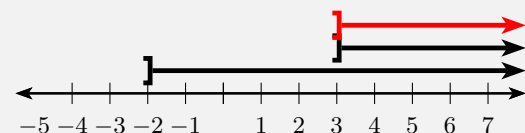
$$-123 \in]-\infty; 5] \quad 5 \in]-\infty; 5] \quad 6 \notin]-\infty; 5]$$

Schnittmenge \cap - und zugleich \wedge

$$a < b \quad \mathbb{G} = \mathbb{R}$$

Intervall		Mengen	
$x > a \wedge x > b$	$x > b$	$]a; \infty[\cap]b; \infty[$	$]b; \infty[$
$x < a \wedge x < b$	$x < a$	$] -\infty; a[\cap] -\infty; b[$	$] -\infty; a[$
$x > a \wedge x < b$	$a < x < b$	$]a; \infty[\cap] -\infty; b[$	$]a; b[$
$x < a \wedge x > b$	$\{\}$	$] -\infty; a[\cap]b; \infty[$	$\{\}$

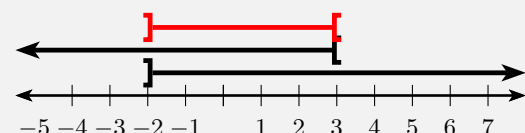
$$x > -2 \wedge x > 3 = x > 3 \quad]-2; \infty[\cap]3; \infty[=]3; \infty[$$



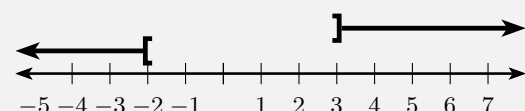
$$x < -2 \wedge x < 3 = x < -2 \quad]-\infty; -2[\cap]-\infty; 3[=]-\infty; -2[$$



$$x > -2 \wedge x < 3 = -2 < x < 3 \quad]-2; \infty[\cap]-\infty; 3[=]-2; 3[$$



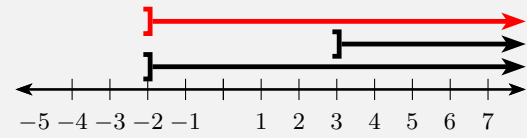
$$x < -2 \wedge x > 3 = \{\} \quad]-\infty; -2[\cap]3; \infty[= \{\}$$



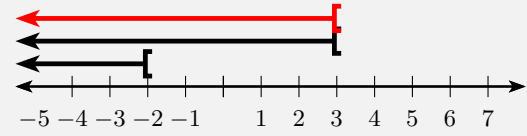
Vereinigungsmenge \cup - oder auch \vee $a < b \quad \mathbb{G} = \mathbb{R}$

Intervall		Mengen	
$x > a \vee x > b$	$x > a$	$]a; \infty[\cup]b; \infty[$	$]a; \infty[$
$x < a \vee x < b$	$x < b$	$] -\infty; a[\cup] -\infty; b[$	$] -\infty; b[$
$x > a \vee x < b$	$x \in \mathbb{R}$	$]a; \infty[\cup] -\infty; b[$	\mathbb{R}
$x < a \vee x > b$		$] -\infty; a[\cup]b; \infty[$	$\mathbb{R} \setminus [a; b]$

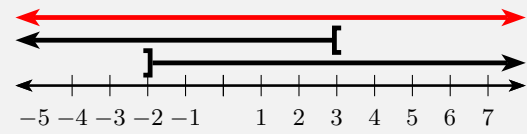
$$x > -2 \vee x > 3 = x > -2 \quad]-2; \infty[\cup]3; \infty[=]-2; \infty[$$



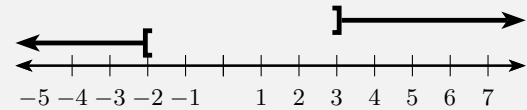
$$x < -2 \vee x < 3 = x < 3 \quad] -\infty; -2[\cup] -\infty; 3[=] -\infty; 3[$$



$$x > -2 \vee x < 3 = x \in \mathbb{R} \quad]-2; \infty[\cup] -\infty; 3[= \mathbb{R}$$



$$x < -2 \vee x > 3 \quad] -\infty; -2[\cup]3; \infty[$$



1.4.2 Äquivalenzumformung

Durch eine Äquivalenzumformung ändert sich die Lösungsmenge einer Ungleichung nicht.

Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

- **Vertauschen der beiden Seiten** \Rightarrow **Umdrehen des Ungleichheitszeichens**
- Addition des gleichen Terms (Zahl) auf beiden Seiten
- Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten
- Multiplikation mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten

Multiplikation mit einer negativen Zahl \Rightarrow **Umdrehen des Ungleichheitszeichens**

- Division durch mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten

Division mit einer negativen Zahl \Rightarrow **Umdrehen des Ungleichheitszeichens**

Vertauschen der beiden Seiten

$$x - 2 > 8 \quad 8 < x - 2$$

Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten

$$x - 2 > 8 \quad / + 2$$

$$x - 2 + 2 > 8 + 2$$

$$x > 10$$

Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten

$$3x - 2 \leq 2x + 3 \quad / - 2x$$

$$3x - 2x - 2 \leq 2x - 2x + 3$$

$$x - 2 \leq 3$$

Multiplikation mit dem gleichen Term auf beiden Seiten

$$\frac{x}{2} < -4 \quad / \cdot 2 \quad \left| \quad \frac{x}{-2} < -4 \quad \cdot (-2) \right.$$

$$\frac{x}{2} \cdot 2 < -4 \cdot 2 \quad \left| \quad \frac{x}{-2} \cdot (-2) > -4 \cdot (-2) \right.$$

$$x < -8 \quad \left| \quad x > 8 \right.$$

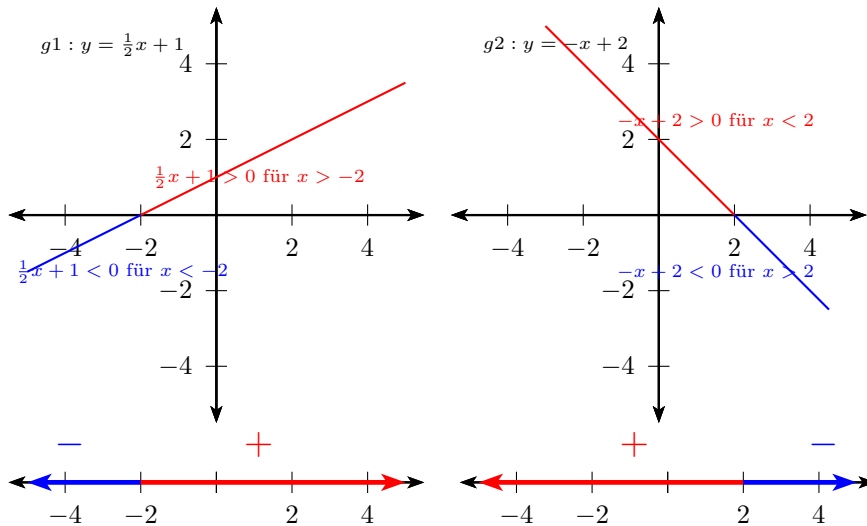
Division durch mit dem gleichen Term auf beiden Seiten

$$2x > -4 \quad / : 2 \quad \left| \quad \frac{x}{-2} > -4 \quad / : (-2) \right.$$

$$\frac{x}{2} \cdot 2 > -4 \cdot 2 \quad \left| \quad \frac{x}{-2} \cdot (-2) < -4 \cdot (-2) \right.$$

$$x > -8 \quad \left| \quad x < 8 \right.$$

1.4.3 Lineare Ungleichung



Algebraische Lösung

$$ax + b > 0 \quad (>, <, \leq, \geq)$$

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme mit der Variablen auf die linke Seite und alle Terme ohne Variable auf die rechte Seite.
- durch die Zahl vor der Variablen dividieren

Division oder Multiplikation mit einer negativen Zahl \Rightarrow
Umdrehen des Ungleichheitszeichens

$$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4(x - 2) - 2x + 12$$

Klammern auflösen

$$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4x - 8 - 2x + 12$$

Terme zusammenfassen

$$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4$$

Äquivalenzumformung:

$$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4 \quad / -5 \quad / -2x$$

$$2\frac{1}{2}x - 2x \leq 4 - 5$$

durch die Zahl vor der Variablen dividieren

$$\frac{1}{2}x \leq -1 \quad / : \frac{1}{2}$$

$$x \leq -2$$

$$x \leq -2 \quad x \in]-\infty; -2]$$

$$-x + 2 > 0$$

$$-x + 2 = 0 \quad / -2$$

$$-x > -2 \quad / : (-1)$$

$$x < 2 \quad x \in]-\infty; 2[$$

Graphische Lösung

$$ax + b > 0 \quad (>, <, \leq, \geq)$$

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite.
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Graph der Funktion zeichnen
- Graph oberhalb der x-Achse $y > 0$
- Graph ist unterhalb der x-Achse $y < 0$
- x-Bereich aus dem Graphen ablesen

$$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4(x - 2) - 2x + 12$$

Klammern auflösen

$$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4x - 8 - 2x + 12$$

Terme zusammenfassen

$$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4$$

Äquivalenzumformung

$$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4 \quad / - 5 \quad / - 2x$$

$$\frac{1}{2}x + 1 \leq 0$$

$$y \leq 0$$

Term als Funktion schreiben

$$g_1 : y = \frac{1}{2}x + 1$$

Nullstelle berechnen

$$\frac{1}{2}x + 1 = 0 \quad / - 1$$

$$\frac{1}{2}x = -1 \quad / : \frac{1}{2}$$

$$x = -2$$

Graph zeichnen g_1 $y \leq 0$ der Graph ist unterhalb der x-Achse

x-Bereich aus dem Graphen ablesen

$$x \leq -2 \quad x \in] - \infty; -2]$$

$$-x + 2 > 0$$

Term als Funktion schreiben

$$g_2 : y = -x + 2 \quad y > 0$$

Nullstelle berechnen

$$-x + 2 = 0 \quad / - 2$$

$$-x = -2 \quad / : (-1)$$

$$x = 2$$

Graph zeichnen g_2 $y > 0$ der Graph ist oberhalb der x-Achse

x-Bereich aus dem Graphen ablesen

$$x < 2 \quad x \in] - \infty; 2[$$

Vorzeichentabelle

$$ax + b > 0 \quad (>, <, \leq, \geq)$$

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite.
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Vorzeichentabelle

Das Vorzeichen einer linearen Funktion kann sich nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Vorzeichentabelle eintragen.

- x-Bereich aus der Vorzeichentabelle ablesen

	$x <$	x_1	$< x$
y	+	0	-
	$ax + b > 0$		$ax + b < 0$

	$x <$	x_1	$< x$
y	-	0	+
	$ax + b < 0$		$ax + b > 0$

$$\frac{1}{2}x + 1 \leq 0$$

$y \leq 0$ - negative Funktionswerte

Term als Funktion schreiben

$$g_1 : y = \frac{1}{2}x + 1$$

Nullstelle berechnen

$$\frac{1}{2}x + 1 = 0 \quad / -1$$

$$\frac{1}{2}x = -1 \quad / : \frac{1}{2}$$

$$x = -2$$

Wert kleiner als die Nullstelle wählen: $x = -4$

$$g_1 : y = \frac{1}{2} \cdot (-4) + 1 = -1 \quad \text{Minuszeichen eintragen}$$

Wert größer als die Nullstelle wählen: $x = 0$

$$g_1 : y = \frac{1}{2} \cdot (0) + 1 = +1 \quad \text{Pluszeichen eintragen}$$

Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x$
y	-	0	+
	$\frac{1}{2}x + 1 < 0$		$\frac{1}{2}x + 1 > 0$

Lösung der Ungleichung: $\frac{1}{2}x + 1 \leq 0$

$$x \leq -2 \quad x \in]-\infty; -2]$$

$$-x + 2 > 0$$

$y > 0$ + positive Funktionswerte

Term als Funktion schreiben

$$g_2 : y = -x + 2$$

Nullstelle berechnen

$$-x + 2 = 0 \quad / -2$$

$$-x = -2 \quad / : (-1)$$

$$x = 2$$

Wert kleiner als die Nullstelle wählen: $x = 0$

$$g_2 : y = -0 + 2 = +2 \quad \text{Pluszeichen eintragen}$$

Wert größer als die Nullstelle wählen: $x = 2$

$$g_2 : y = -2 + 2 = 0 \quad \text{Minuszeichen eintragen}$$

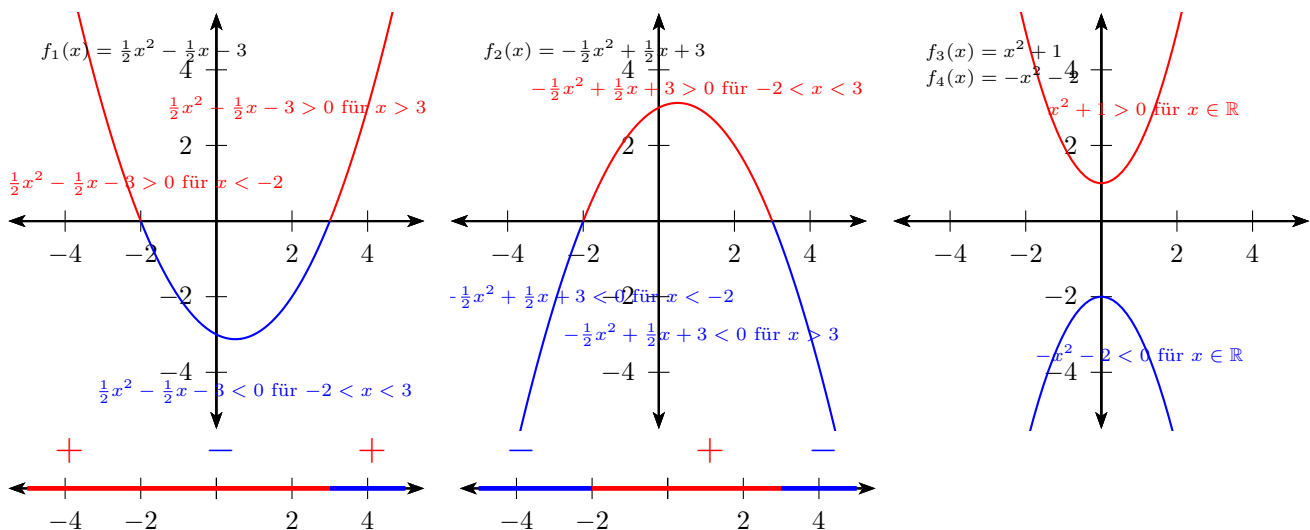
Vorzeichentabelle:

	$x <$	2	$< x$
y	+	0	-
	$-x + 2 > 0 \quad x < 2$		$-x + 2 < 0 \quad x > 2$

Lösung der Ungleichung: $-x + 2 > 0$

$$x < 2 \quad x \in]-\infty; 2[$$

1.4.4 Quadratische Ungleichung



Algebraische Lösung

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (>, <, \leq, \geq)$$

• 1. Methode

- Ungleichung nach Null auflösen
- quadratische Ergänzung
- quadratischen Term alleinstellen
- Wurzelziehen und Betrag schreiben
- Betragsungleichung lösen

• 2. Methode

- Ungleichung nach Null auflösen
- Term faktorisieren

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Auspalten in lineare Ungleichungen

$$1. \text{ Fall} \quad a(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

$$(+ \cdot + = +) \vee (- \cdot - = +)$$

$$(a(x - x_1) > 0 \wedge x - x_2 > 0) \vee$$

$$(a(x - x_1) < 0 \wedge x - x_2 < 0)$$

$$2. \text{ Fall} \quad a(x - x_1)(x - x_2) < 0$$

$$(+ \cdot - = -) \vee (- \cdot + = -)$$

$$(a(x - x_1) > 0 \wedge x - x_2 < 0) \vee$$

$$(a(x - x_1) < 0 \wedge x - x_2 > 0)$$

- Zusammenfassen der einzelnen Lösungen

1. Methode

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$$

quadratische Ergänzung

$$\frac{1}{2}(x^2 - x + \frac{1}{2}^2 - \frac{1}{2}^2 - 6) > 0$$

$$\frac{1}{2}[(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 6] > 0$$

$$\frac{1}{2}[(x - \frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4}] > 0$$

$$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2 - 3\frac{1}{8} > 0$$

quadratischen Term alleinstellen

$$(x - \frac{1}{2})^2 > \frac{25}{4}$$

Wurzelziehen und Betrag schreiben

$$|x - \frac{1}{2}| > \frac{5}{2}$$

Betragsungleichung

$$x > 3 \quad \vee \quad x < -2$$

2. Methode

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$$

Term faktorisieren

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -2$$

$$\frac{1}{2}(x + 2)(x - 3) > 0$$

Aufspalten in lineare Ungleichungen

$$(\frac{1}{2}(x + 2) > 0 \wedge x - 3 > 0) \vee (\frac{1}{2}(x + 2) < 0 \wedge x - 3 < 0)$$

$$(x > -2 \wedge x > 3) \vee (x < -2 \wedge x < 3)$$

Lösungen zusammenfassen

$$x > 3 \vee x < -2$$

Graphische Lösung

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (>, <, \leq, \geq)$$

- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite.
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Graph der Funktion zeichnen
- Graph oberhalb der x-Achse $f(x) > 0$
- Graph unterhalb der x-Achse $f(x) < 0$
- x-Bereich aus dem Graphen ablesen

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$$

$$f_1(x) > 0$$

Term als Funktion schreiben

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$$

Nullstelle berechnen

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3)}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -2$$

Graph zeichnen $f_1(x)$

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$ der Graph ist oberhalb der x-Achse

x-Bereich aus dem Graphen ablesen

$$x > 3 \vee x < -2$$

Vorzeichentabelle

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (>, <, \leq, \geq)$$

- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite.
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Vorzeichentabelle

Das Vorzeichen einer quadratischen Funktion kann sich nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Vorzeichentabelle eintragen.

- x-Bereich aus der Vorzeichentabelle ablesen

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$$

$$f_1(x) > 0$$

Term als Funktion schreiben

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$$

Nullstelle berechnen

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3)}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 3$$

Wert kleiner als die Nullstelle $x_1 = -2$ wählen $x = -4$

$$f_1(-4) = +7 \quad \text{Pluszeichen eintragen}$$

Wert zwischen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ wählen $x = 0$

$$f_1(0) = -3 \quad \text{Minuszeichen eintragen}$$

Wert größer als die Nullstelle $x_2 = 3$ wählen $x = 4$

$$f_1(4) = +3 \quad \text{Pluszeichen eintragen}$$

Vorzeichentabelle:

	$x < -2$	-2	$-2 < x < 3$	3	$x > 3$
$f(x)$	+	0	-	0	+

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$$

x-Bereiche aus der Vorzeichentabelle ablesen

$$x \in]-\infty; -2[\cup]3; \infty[$$

1.4.5 Betragsungleichung

$$|ax + b| > c$$

- Aufspalten der Beträge in einzelne Intervalle.

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags positiv ist. $ax + b \geq 0$ für $x \geq \frac{-b}{a}$

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags negativ ist und dafür zusätzlich ein Minuszeichen vor dem Term geschrieben wird. $ax + b < 0$ für $x < \frac{-b}{a}$

$$|ax + b| = \begin{cases} (ax + b) & x \geq \frac{-b}{a} \\ -(ax + b) & x < \frac{-b}{a} \end{cases}$$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-b}{a}$

$$ax + b > c$$

$$ax + b > c \quad / -b \quad / : a \quad (a > 0)$$

$$x > \frac{c-b}{a}$$

1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-b}{a} \wedge x > \frac{c-b}{a}$

- 2. Lösung für $x < \frac{-b}{a}$

$$-(ax + b) > c \quad / : (-1)$$

$$ax + b < -c$$

$$ax + b < -c \quad / -b \quad / : a \quad (a > 0)$$

$$x < \frac{-c-b}{a}$$

2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-b}{a} \wedge x < \frac{-c-b}{a}$

- Gesamtlösung aus Vereinigungsmenge von 1. Lösung und 2. Lösung

$$|2x + 3| > 7$$

$$|2x + 3| = \begin{cases} (2x + 3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x + 3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$

$$2x + 3 > 7$$

$$2x + 3 > 7 \quad / -3 \quad / : 2$$

$$x > 2$$

1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x > 2$

1. Lösung $x > 2$

- 2. Lösung für $x < \frac{-3}{2}$

$$-(2x + 3) > 7$$

$$2x + 3 < -7 \quad / -3 \quad / : 2$$

$$x < -5$$

2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-3}{2} \wedge x < -5$

2. Lösung $x < -5$

Vereinigungsmenge aus 1. Lösung und 2. Lösung

$$x > 2 \quad \vee \quad x < -5$$

$$|2x + 3| < 7$$

$$|2x + 3| = \begin{cases} (2x + 3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x + 3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$

$$2x + 3 < 7$$

$$2x + 3 < 7 \quad / -3 \quad / : 2$$

$$x < 2$$

1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x < 2$

1. Lösung $\frac{-3}{2} \leq x < 2$

- 2. Lösung für $x < \frac{-3}{2}$

$$-(2x + 3) < 7$$

$$2x + 3 > -7 \quad / -3 \quad / : 2$$

$$x > -5$$

2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-3}{2} \wedge x > -5$

2. Lösung $-5 < x < \frac{-3}{2}$

Vereinigungsmenge aus 1. Lösung und 2. Lösung

$$-5 < x < 2$$

1.5 Lineares Gleichungssystem

1.5.1 Einsetzverfahren (2)

$$I \quad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$$

$$II \quad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$$

- Gleichung I oder II nach x oder y auflösen
- Term in die andere Gleichung einsetzen
- Gleichung nach der Unbekannten auflösen
- Zweite Unbekannte berechnen

$$I \quad 3x + 5y = 19$$

$$II \quad 7x + 5y = 31$$

I nach x auflösen

$$3x + 5y = 19$$

$$3x + 5y = 19 \quad / - 5y$$

$$3x = 19 - 5y \quad / : 3$$

$$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y$$

I in II

$$7(6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y) + 5y = 31$$

$$44\frac{1}{3} - 11\frac{2}{3}y + 5y = 31 \quad / - 44\frac{1}{3}$$

$$-11\frac{2}{3}y + 5y = 31 - 44\frac{1}{3}$$

$$-6\frac{2}{3}y = -13\frac{1}{3} \quad / : (-6\frac{2}{3})$$

$$y = \frac{-13\frac{1}{3}}{-6\frac{2}{3}}$$

$$y = 2$$

$$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y$$

$$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3} \cdot 2$$

$$x = 3$$

$$L = \{3/2\}$$

$$I \quad 3x + 5y = 19$$

$$II \quad 7x + 5y = 31$$

I nach y auflösen

$$3x + 5y = 19$$

$$3x + 5y = 19 \quad / - 3x$$

$$5y = 19 - 3x \quad / : 5$$

$$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$$

I in II

$$7x + 5(3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x) = 31$$

$$19 - 3x + 5x = 31 \quad / - 19$$

$$-3x + 5x = 31 - 19$$

$$4x = 12 \quad / : 4$$

$$x = \frac{12}{4}$$

$$x = 3$$

$$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$$

$$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot 3$$

$$y = 2$$

$$L = \{3/2\}$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

1.5.2 Gleichsetzungsverfahren (2)

$$I \quad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$$

$$II \quad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$$

- beide Gleichungen nach x oder y auflösen
- Terme gleichsetzen
- Gleichung nach der Unbekannten auflösen
- Zweite Unbekannte berechnen

$$I \quad 3x + 5y = 19$$

$$II \quad 7x + 5y = 31$$

I nach y auflösen

$$3x + 5y = 19$$

$$3x + 5y = 19 \quad / - 3x$$

$$5y = 19 - 3x \quad / : 5$$

$$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$$

II nach y auflösen

$$7x + 5y = 31$$

$$7x + 5y = 31 \quad / - 7x$$

$$5y = 31 - 7x \quad / : 5$$

$$y = 6\frac{1}{5} - 1\frac{2}{5}x$$

I = II

$$3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x = 6\frac{1}{5} - 1\frac{2}{5}x \quad / + \frac{3}{5}x$$

$$3\frac{4}{5} = 6\frac{1}{5} - \frac{4}{5}x \quad / - 6\frac{1}{5}$$

$$-2\frac{2}{5} = -\frac{4}{5}x \quad / : (-\frac{4}{5})$$

$$x = 3$$

x in I

$$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot 3$$

$$y = 2$$

$$L = \{3/2\}$$

$$I \quad 3x + 5y = 19$$

$$II \quad 7x + 5y = 31$$

I nach x auflösen

$$3x + 5y = 19$$

$$3x + 5y = 19 \quad / - 5y$$

$$3x = 19 - 5y \quad / : 3$$

$$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y$$

II nach x auflösen

$$7x + 5y = 31$$

$$7x + 5y = 31 \quad / - 5y$$

$$7x = 31 - 5y \quad / : 7$$

$$x = 4\frac{3}{7} - \frac{5}{7}y$$

I = II

$$6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y = 4\frac{3}{7} - \frac{5}{7}y \quad / + 1\frac{2}{3}y$$

$$6\frac{1}{3} = 4\frac{3}{7} + \frac{20}{21}y \quad / - 4\frac{3}{7}$$

$$1\frac{19}{21} = \frac{20}{21}y \quad / : \frac{20}{21}$$

$$y = 2$$

y in I

$$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3} \cdot 2$$

$$x = 3$$

$$L = \{3/2\}$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

1.5.3 Additionsverfahren (2)

$$I \quad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$$

$$II \quad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$$

- Terme mit x und y müssen untereinander stehen
- Gleichungen multiplizieren, so dass die Variablen beim spaltenweisen addieren herausfallen
- Gleichung nach der Unbekannten auflösen
- Zweite Unbekannte berechnen

$$I \quad 3x + 5y = 19$$

$$II \quad 7x + 5y = 31$$

$$I \quad 3x + 5y = 19 \quad / \cdot 7$$

$$II \quad 7x + 5y = 31 \quad / \cdot (-3)$$

$$I \quad 21x + 35y = 133$$

$$II \quad -21x - 15y = -93$$

$$I + II$$

$$21x - 21x + 35y - 15y = 133 - 93$$

$$20y = 40 \quad / : 20$$

$$y = \frac{40}{20}$$

$$y = 2$$

$$y \text{ in I}$$

$$I \quad 3x + 5 \cdot 2 = 19$$

$$3x + 10 = 19 \quad / - 10$$

$$3x = 19 - 10$$

$$3x = 9 \quad / : 3$$

$$x = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

$$L = \{3/2\}$$

$$I \quad 3x + 5y = 19$$

$$II \quad 7x + 5y = 31$$

$$I \quad 3x + 5y = 19 \quad / \cdot 1$$

$$II \quad 7x + 5y = 31 \quad / \cdot (-1)$$

$$I \quad 3x + 5y = 19$$

$$II \quad -7x - 5y = -31$$

$$I + II$$

$$3x - 7x + 5y - 5y = 19 - 31$$

$$-4x = -12 \quad / : (-4)$$

$$x = \frac{-12}{-4}$$

$$x = 3$$

$$x \text{ in I}$$

$$I \quad 3 \cdot 3 + 5y = 19$$

$$5y + 9 = 19 \quad / - 9$$

$$5y = 19 - 9$$

$$5y = 10 \quad / : 5$$

$$y = \frac{10}{5}$$

$$y = 2$$

$$L = \{3/2\}$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

1.5.4 Determinantenverfahren (2)

$$I \quad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$$

$$II \quad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$$

$$D_h = \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix} = a1 \cdot b2 - b1 \cdot a2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c1 & b1 \\ c2 & b2 \end{vmatrix} = c1 \cdot b2 - b1 \cdot c2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix} = a1 \cdot c2 - c1 \cdot a2$$

- Eindeutige Lösung $D_h \neq 0$

$$x = \frac{D_x}{D_h}$$

$$y = \frac{D_y}{D_h}$$

- Keine Lösung $D_h = 0$

$$D_x \neq 0 \text{ oder } D_y \neq 0$$

- Unendlich viele Lösungen

$$D_h = D_x = D_y = 0$$

$$I \quad 3x + 5y = 19$$

$$II \quad 7x + 5y = 31$$

$$D_h = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 5 \cdot 7 = -20$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & 5 \\ 31 & 5 \end{vmatrix} = 19 \cdot 5 - 5 \cdot 31 = -60$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 19 \\ 7 & 31 \end{vmatrix} = 3 \cdot 31 - 19 \cdot 7 = -40$$

$$x = \frac{-60}{-20}$$

$$x = 3$$

$$y = \frac{-40}{-20}$$

$$y = 2$$

$$L = \{3/2\}$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

1.5.5 Determinantenverfahren (3)

$$a1x + b1y + c1z = d1$$

$$a2x + b2y + c2z = d2$$

$$a3x + b3y + c3z = d3$$

$$D_h = \begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{vmatrix}$$

$$D_h = a1 \cdot b2 \cdot c3 + b1 \cdot c2 \cdot a3 + c1 \cdot a2 \cdot b3 - c1 \cdot b2 \cdot a3 - a1 \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot a2 \cdot c3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d1 & b1 & c1 \\ d2 & b2 & c2 \\ d3 & b3 & c3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d1 & b1 \\ d2 & b2 \\ d3 & b3 \end{vmatrix}$$

$$D_x = d1 \cdot b2 \cdot c3 + b1 \cdot c2 \cdot d3 + c1 \cdot d2 \cdot b3 - c1 \cdot b2 \cdot d3 - d1 \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot d2 \cdot c3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a1 & d1 & c1 \\ a2 & d2 & c2 \\ a3 & d3 & c3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a1 & d1 \\ a2 & d2 \\ a3 & d3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = a1 \cdot d2 \cdot c3 + d1 \cdot c2 \cdot a3 + c1 \cdot a2 \cdot d3 - c1 \cdot d2 \cdot a3 - a1 \cdot c2 \cdot d3 - d1 \cdot a2 \cdot c3$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a1 & b1 & d1 \\ a2 & b2 & d2 \\ a3 & b3 & d3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{vmatrix}$$

$$D_z = a1 \cdot b2 \cdot d3 + b1 \cdot d2 \cdot a3 + d1 \cdot a2 \cdot b3 - d1 \cdot b2 \cdot a3 - a1 \cdot d2 \cdot b3 - b1 \cdot a2 \cdot d3 = 0$$

- Eindeutige Lösung $D_h \neq 0$

$$x = \frac{D_x}{D_h}$$

$$y = \frac{D_y}{D_h}$$

$$z = \frac{D_z}{D_h}$$

- Keine Lösung $D_h = 0$

$$D_x \neq 0 \text{ oder } D_y \neq 0 \text{ oder } D_z \neq 0$$

- Unendlich viele Lösungen

$$D_h = D_x = D_y = D_z = 0$$

$$11x + 13y + 4z = 37$$

$$12x + 14y + 5z = 40$$

$$9x + 3y + 3z = 15$$

$$D_h = \begin{vmatrix} 11 & 13 & 4 \\ 12 & 14 & 5 \\ 9 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 12 & 14 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_h = 11 \cdot 14 \cdot 3 + 13 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \cdot 3 - 4 \cdot 14 \cdot 9 - 11 \cdot 5 \cdot 3 - 13 \cdot 12 \cdot 3 = 54$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 37 & 13 & 4 \\ 40 & 14 & 5 \\ 15 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 37 & 13 \\ 40 & 14 \\ 15 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_x = 37 \cdot 14 \cdot 3 + 13 \cdot 5 \cdot 15 + 4 \cdot 40 \cdot 3 - 4 \cdot 14 \cdot 15 - 37 \cdot 5 \cdot 3 - 13 \cdot 40 \cdot 3 = 54$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 11 & 37 & 4 \\ 12 & 40 & 5 \\ 9 & 15 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 11 & 37 \\ 12 & 40 \\ 9 & 15 \end{vmatrix}$$

$$D_y = 11 \cdot 40 \cdot 3 + 37 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \cdot 15 - 4 \cdot 40 \cdot 9 - 11 \cdot 5 \cdot 15 - 37 \cdot 12 \cdot 3 = 108$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 11 & 13 & 37 \\ 12 & 14 & 40 \\ 9 & 3 & 15 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 12 & 14 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_z = 11 \cdot 14 \cdot 15 + 13 \cdot 40 \cdot 9 + 37 \cdot 12 \cdot 3 - 37 \cdot 14 \cdot 9 - 11 \cdot 40 \cdot 3 - 13 \cdot 12 \cdot 15 = 0$$

$$x = \frac{54}{54}$$

$$x = 1$$

$$y = \frac{108}{54}$$

$$y = 2$$

$$z = \frac{0}{54}$$

$$z = 0$$

$$L = \{1/2/0\}$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

1.6 Lineare Algebra

1.6.1 Matrix

Definition

Eine $m \times n$ -Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema aus m Zeilen und n Spalten.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A = (a_{ik})$$

a_{ik} : Elemente der Matrix

i : Zeilenindex

k : Spaltenindex

- Quadratische Matrix

Die Anzahl der Zeilen ist gleich der Anzahl der Spalten
 $m = n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

3×3 Quadratische Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 1 \quad a_{12} = 2 \quad a_{13} = 3$$

$$a_{21} = 4 \quad a_{22} = 5 \quad a_{23} = 6$$

$$a_{31} = 7 \quad a_{32} = 8 \quad a_{33} = 9$$

2×3 Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

1×3 Zeilenmatrix (Zeilenvektor)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

3×1 Spaltenmatrix (Spaltenvektor)

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Besondere Matrizen

- Einheitsmatrix

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Transponierte Matrix

Vertauschen von Zeilen- und Spaltenindex.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = (A^T)^T$$

symmetrische Matrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 6 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

untere Dreiecksmatrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Diagonalmatrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Nullmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transponierte Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Addition von Matrizen

Summe der Matrix $A = (a_{ik})$ und der Matrix $B = (b_{ik})$
 Die Anzahl der Spalten (i) und der Zeilen (k) der beiden Matrizen müssen gleich sein. $A + B = a_{ik} + b_{ik}$

- Summe 2×2 Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

- Summe 3×3 Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}$$

Summe zweier 2×3 Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

- Produkt aus der Matrix $A = (a_{ik})$ mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda A = \lambda a_{ik}$$

2×2 Matrix

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}$$

- Produkt aus Matrix $A = (a_{ij})$ und Matrix $B = (b_{jk})$
 Anzahl der Zeilen von A muß gleich der Anzahl der Spalten von B sein.

Zeilenelemente von A mal Spaltenelemente von B.

- Produkt zweier 2×2 Matrizen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Produkt 2×3 Matrix mit 3

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

Produkt 2×3 Matrix mit einer 3×2 Matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + (-7) \cdot (-2) + 6 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Inverse Matrix

- Produkt aus der Matrix A und der inversen Matrix A^{-1} ist gleich der Einheitsmatrix.

$$AA^{-1} = E$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Die inverse Matrix ist nur möglich, wenn die Determinante von A ungleich Null ist.

$$\det A \neq 0$$

- Berechnung von A^{-1} mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus

Matrix A und Einheitsmatrix E in der Form schreiben

$$\begin{array}{cc|cc} A & & E & & \\ \hline a_{11} & a_{12} & 1 & 0 & \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 & \end{array}$$

Umformen durch:

- Multiplizieren oder Dividieren der Zeilen mit einer Zahl
- Addieren oder Subtrahieren der Zeilen
- Vertauschen der Zeilen

in die Form Einheitsmatrix und inverse Matrix A^{-1}

$$\begin{array}{cc|cc} E & & A^{-1} & & \\ \hline 1 & 0 & x_{11} & x_{12} & \\ 0 & 1 & x_{21} & x_{22} & \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (-10) \Rightarrow \text{Matrix ist invertierbar}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Zeile2} = \text{Zeile2} - \text{Zeile1} \cdot \frac{4}{2}$$

$$a_{21} = 4 - 2 \cdot \frac{4}{2} = 0$$

$$a_{22} = 1 - 3 \cdot \frac{4}{2} = -5$$

$$b_{21} = 0 - 1 \cdot \frac{4}{2} = 0$$

$$b_{22} = 1 - 0 \cdot \frac{4}{2} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Zeile1} = \text{Zeile1} - \text{Zeile2} \cdot \frac{3}{-5}$$

$$a_{12} = 3 - (-5) \cdot \frac{3}{-5} = 0$$

$$b_{11} = 1 - (-2) \cdot \frac{3}{-5} = 1$$

$$b_{12} = 0 - 1 \cdot \frac{3}{-5} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Zeile1} = \text{Zeile1} : 2$$

$$\text{Zeile2} = \text{Zeile2} : -5$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} A & & E & & E & & E' = A^{-1} \\ \hline 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Eigenwert und Eigenvektor

Gegeben: A - Matrix

Gesucht: x - Eigenvektor (Spaltenvektor)

λ - Eigenwert

Das Produkt aus Matrix A und Eigenvektor x ist gleich dem Produkt aus Eigenwert λ und Eigenvektor x .

$$Ax = \lambda x$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$$

•Eigenwert aus folgender Gleichung:

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \lambda + a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = 0$$

•Eigenvektoren durch einsetzen der λ -Werte

$$(A - \lambda E)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = \lambda \cdot x_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = \lambda \cdot x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 7 - \lambda & 2 & 0 \\ -2 & 6 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

1.6.2 Determinante

Definiton

Aus quadratischen Matrix kann eine Determinante (Zahlenwert) berechnet werden.

$$D = \det A = |A|$$

Anwendung der Determinante:

- Lineare Gleichungssysteme
- Volumenberechnung im \mathbb{R}^3
- Flächenberechnungen im \mathbb{R}^2
- Spatprodukt
- Lineare Abhängigkeit von Vektoren - inverse Matrix

2-reihige Determinante

Determinante einer 2×2 Matrix

$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 23$$

3-reihige Determinante

Determinante einer 3×3 Matrix

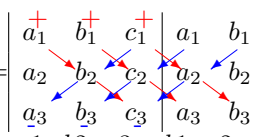
Methode 1

$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$$

Methode 2 (Regel von Sarrus)



$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$D = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3$$

$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} 11 & 13 & 4 \\ 12 & 14 & 5 \\ 9 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 12 & 14 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D = 11 \cdot 14 \cdot 3 + 13 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \cdot 3 - 4 \cdot 14 \cdot 9 - 11 \cdot 5 \cdot 3 - 13 \cdot 12 \cdot 3 = 54$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 9 \\ 13 & 14 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$11 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 13 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 54$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot 3 - 14 \cdot 9 = -90$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot 3 - 5 \cdot 9 = -9$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 14 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 27$$

$$D_3 = 11 \cdot 27 - 13 \cdot (-9) + 4 \cdot (-90) = 54$$

$$\det(D) = 54$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#) [hier klicken](#) [hier klicken](#)

1.6.3 Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus

Lineare Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise

$$Ax = b \quad x = A^{-1}b$$

A Koeffizientenmatrix

b Spaltenvektor der rechten Seite

x Lösungsvektor

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Inhomogenes Gleichungssystem

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

\vdots

$$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m$$

Homogenes Gleichungssystem

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = 0$$

\vdots

$$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = 0$$

Variablen: x_1, x_2, x_3

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_m$$

oder in der Schreibweise mit den Variablen: x, y, z

$$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1$$

$$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2$$

$$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix

x	y	z	
$a1$	$b1$	$c1$	$d1$
$a2$	$b2$	$c2$	$d2$
$a3$	$b3$	$c3$	$d3$

$$Ax = b$$

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 13 & 4 \\ 12 & 14 & 5 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 37 \\ 40 \\ 15 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 13 & 4 \\ 12 & 14 & 5 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 40 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$11x_1 + 13x_2 + 4x_3 = 37$$

$$12x_1 + 14x_2 + 5x_3 = 40$$

$$9x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 15$$

oder

$$11x + 13y + 4z = 37$$

$$12x + 14y + 5z = 40$$

$$9x + 3y + 3z = 15$$

x	y	z	
11	13	4	37
12	14	5	40
9	3	3	15

Gaußsches Eliminationsverfahren

$$\begin{aligned} a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z &= d1 \\ a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z &= d2 \\ a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z &= d3 \end{aligned}$$

Koeffizientenmatrix erstellen:

x	y	z	
$a1$	$b1$	$c1$	$d1$
$a2$	$b2$	$c2$	$d2$
$a3$	$b3$	$c3$	$d3$

x	y	z	
$Zeile1Spalte1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
$z2s1$	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
$z3s1$	$z3s2$	$z3s3$	$z3s4$

Die Lösungsmenge ändert sich nicht durch:

- Multiplizieren oder Dividieren der Zeilen mit einer Zahl
- Addieren oder Subtrahieren der Zeilen
- Vertauschen der Zeilen

Umformen in die Stufenform

- Eindeutige Lösung

x	y	z	
$Z1S1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
0	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
0	0	$z3s3$	$z3s4$

Rückwärtseinsetzen

$$z = \frac{z3s3}{z3s4}$$

z in die 2. Zeile einsetzen $\Rightarrow y$ z und y in die 1. Zeile einsetzen $\Rightarrow x$

- Keine Lösung

x	y	z	
$Z1S1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
0	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
0	0	0	$z3s4$

- Unendlich viele Lösungen

x	y	z	
$Z1S1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
0	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
0	0	0	0

$$\begin{array}{rcl} 11x + 13y + 4z & = & 37 \\ 12x + 14y + 5z & = & 40 \\ 9x + 3y + 3z & = & 15 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 11 & 13 & 4 & 37 \\ 12 & 14 & 5 & 40 \\ 9 & 3 & 3 & 15 \end{array}$$

$$\text{Zeile2} = \text{Zeile2} \cdot 11 - \text{Zeile1} \cdot 12$$

$$\begin{array}{rcl} z2s1 & = & 12 \cdot 11 - 11 \cdot 12 = 0 \\ z2s2 & = & 14 \cdot 11 - 13 \cdot 12 = -2 \\ z2s3 & = & 5 \cdot 11 - 4 \cdot 12 = 7 \\ z2s4 & = & 40 \cdot 11 - 37 \cdot 12 = -4 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 11 & 13 & 4 & 37 \\ 0 & -2 & 7 & -4 \\ 9 & 3 & 3 & 15 \end{array}$$

$$\text{Zeile3} = \text{Zeile3} \cdot 11 - \text{Zeile1} \cdot 9$$

$$\begin{array}{rcl} z3s1 & = & 9 \cdot 11 - 11 \cdot 9 = 0 \\ z3s2 & = & 3 \cdot 11 - 13 \cdot 9 = -84 \\ z3s3 & = & 3 \cdot 11 - 4 \cdot 9 = -3 \\ z3s4 & = & 15 \cdot 11 - 37 \cdot 9 = -168 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 11 & 13 & 4 & 37 \\ 0 & -2 & 7 & -4 \\ 0 & -84 & -3 & -168 \end{array}$$

$$\text{Zeile3} = \text{Zeile3} \cdot (-2) - \text{Zeile2} \cdot (-84)$$

$$\begin{array}{rcl} z3s2 & = & (-84) \cdot (-2) - (-2) \cdot (-84) = 0 \\ z3s3 & = & (-3) \cdot (-2) - 7 \cdot (-84) = 594 \\ z3s4 & = & (-168) \cdot (-2) - (-4) \cdot (-84) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 11 & 13 & 4 & 37 \\ 0 & -2 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 594 & 0 \end{array}$$

$$z = \frac{0}{594} = 0$$

$$y \cdot (-2) + 7 \cdot 0 = (-4)$$

$$y = 2$$

$$x \cdot 11 + 13 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 37$$

$$x = 1$$

$$L = \{1/2/0\}$$

Gauß-Jordan-Algorithmus

$$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1$$

$$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2$$

$$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3$$

Koeffizientenmatrix erstellen:

x	y	z	
$a1$	$b1$	$c1$	$d1$
$a2$	$b2$	$c2$	$d2$
$a3$	$b3$	$c3$	$d3$

x	y	z	
$Zeile1Spalte1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
$z2s1$	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
$z3s1$	$z3s2$	$z3s3$	$z3s4$

Die Lösungsmenge ändert sich nicht durch:

- Multiplizieren oder Dividieren der Zeilen mit einer Zahl
- Addieren oder Subtrahieren der Zeilen
- Vertauschen der Zeilen

Ziel ist das Umformen in die Diagonalenform

- Eindeutige Lösung

x	y	z	
$z1s1$	0	0	$z1s4$
0	$z2s3$	0	$z2s4$
0	0	$z3s3$	$z3s4$

$x = \frac{z1s4}{z1s1}$
 $y = \frac{z2s4}{z2s3}$
 $z = \frac{z3s4}{z3s3}$

- Keine Lösung

x	y	z	
$z1s1$	0	0	$z1s4$
0	$z2s3$	0	$z2s4$
0	0	0	$z3s4$

- Unendlich viele Lösungen

x	y	z	
$z1s1$	0	0	$z1s4$
0	$z2s3$	0	$z2s4$
0	0	0	0

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 11x + 13y + 4z = 37 & 11 & 13 & 4 \\ 12x + 14y + 5z = 40 & 12 & 14 & 5 \\ 9x + 3y + 3z = 15 & 9 & 3 & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Zeile2} &= \text{Zeile2} - \text{Zeile1} \cdot \frac{12}{11} \\ z2s1 &= 12 - 11 \cdot \frac{12}{11} = 0 \\ z2s2 &= 14 - 13 \cdot \frac{12}{11} = -\frac{2}{11} \\ z2s3 &= 5 - 4 \cdot \frac{12}{11} = \frac{7}{11} \\ z2s4 &= 40 - 37 \cdot \frac{12}{11} = -\frac{4}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 11 & 13 & 4 & 37 \\ 0 & -\frac{2}{11} & \frac{7}{11} & -\frac{4}{11} \\ 9 & 3 & 3 & 15 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Zeile3} &= \text{Zeile3} - \text{Zeile1} \cdot \frac{9}{11} \\ z3s1 &= 9 - 11 \cdot \frac{9}{11} = 0 \\ z3s2 &= 3 - 13 \cdot \frac{9}{11} = -7\frac{7}{11} \\ z3s3 &= 3 - 4 \cdot \frac{9}{11} = -\frac{3}{11} \\ z3s4 &= 15 - 37 \cdot \frac{9}{11} = -15\frac{3}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 11 & 13 & 4 & 37 \\ 0 & -\frac{2}{11} & \frac{7}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & -7\frac{7}{11} & -\frac{3}{11} & -15\frac{3}{11} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Zeile1} &= \text{Zeile1} - \text{Zeile2} \cdot \frac{-13}{-\frac{2}{11}} \\ z1s2 &= 13 - (-\frac{2}{11}) \cdot \frac{-13}{-\frac{2}{11}} = 0 \\ z1s3 &= 4 - \frac{7}{11} \cdot \frac{-13}{-\frac{2}{11}} = 49\frac{1}{2} \\ z1s4 &= 37 - (-\frac{4}{11}) \cdot \frac{-13}{-\frac{2}{11}} = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 11 & 0 & 49\frac{1}{2} & 11 \\ 0 & -\frac{2}{11} & \frac{7}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & -7\frac{7}{11} & -\frac{3}{11} & -15\frac{3}{11} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Zeile3} &= \text{Zeile3} - \text{Zeile2} \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}} \\ z3s2 &= -7\frac{7}{11} - (-\frac{2}{11}) \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}} = 0 \\ z3s3 &= -\frac{3}{11} - \frac{7}{11} \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}} = -27 \\ z3s4 &= -15\frac{3}{11} - (-\frac{4}{11}) \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 11 & 0 & 49\frac{1}{2} & 11 \\ 0 & -\frac{2}{11} & \frac{7}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & -27 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Zeile1} &= \text{Zeile1} - \text{Zeile3} \cdot \frac{49\frac{1}{2}}{-27} \\ z1s3 &= 49\frac{1}{2} - (-27) \cdot \frac{49\frac{1}{2}}{-27} = 0 \\ z1s4 &= 11 - 0 \cdot \frac{49\frac{1}{2}}{-27} = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 11 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & -\frac{2}{11} & \frac{7}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & -27 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Zeile2} &= \text{Zeile2} - \text{Zeile3} \cdot \frac{\frac{7}{11}}{-27} \\ z2s3 &= \frac{7}{11} - (-27) \cdot \frac{\frac{7}{11}}{-27} = 0 \\ z2s4 &= -\frac{4}{11} - 0 \cdot \frac{\frac{7}{11}}{-27} = -\frac{4}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 11 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & -\frac{2}{11} & 0 & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & -27 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{11}{11} = 1 \\ y &= \frac{-\frac{4}{11}}{-\frac{2}{11}} = 2 \\ z &= \frac{0}{-27} = 0 \\ L &= \{1/2/0\} \end{aligned}$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#) [hier klicken](#) [hier klicken](#)

1.7 Finanzmathematik

1.7.1 Zinsrechnung - Jahreszins

$$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$$

t	Anzahl der Jahre	
K	Kapital	<i>Euro</i>
p	Zinssatz	%
z	Zinsen	<i>Euro</i>
$p = \frac{z \cdot 100}{K \cdot t} \quad K = \frac{z \cdot 100}{p \cdot t} \quad t = \frac{z \cdot 100}{K \cdot p}$		

Interaktive Inhalte: $z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$ - $p = \frac{z \cdot 100}{K \cdot t}$ - $K = \frac{z \cdot 100}{p \cdot t}$ - $t = \frac{z \cdot 100}{K \cdot p}$ -

1.7.2 Zinsrechnung - Tageszins

$$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$$

t	Anzahl der Tage	
K	Kapital	<i>Euro</i>
p	Zinssatz	%
z	Zinsen	<i>Euro</i>
$p = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{K \cdot t} \quad K = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot t} \quad t = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot K}$		

Interaktive Inhalte: $z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$ - $p = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{K \cdot t}$ - $K = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot t}$ - $t = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot K}$ -

1.7.3 Zinsrechnung - Monatszins

$$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 12}$$

t	Anzahl der Monate	
K	Kapital	<i>Euro</i>
p	Zinssatz	%
z	Zinsen	<i>Euro</i>
$p = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{K \cdot t} \quad K = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot t} \quad t = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot K}$		

Interaktive Inhalte: $z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 12}$ - $p = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{K \cdot t}$ - $K = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot t}$ - $t = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot K}$ -

1.7.4 Zinsfaktor

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

p	Zinssatz	%
q	Zinsfaktor	
$p = (q - 1) \cdot 100$		

Interaktive Inhalte: $q = 1 + \frac{p}{100}$ - $p = (q - 1) \cdot 100$ -

1.7.5 Zinseszinsformel

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

t	Anzahl der Jahre	
p	Zinssatz	%
K_0	Anfangskapital	<i>Euro</i>
K_t	Kapital nach t Jahren	<i>Euro</i>
$K_0 = \frac{K_t}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t} \quad p = \left(\sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1\right) \cdot 100 \quad t = \frac{\ln(K_t) - \ln(K_0)}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$		

Interaktive Inhalte: $K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ - $K_0 = \frac{K_t}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t}$ - $p = \left(\sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1\right) \cdot 100$ - $t = \frac{\ln(K_t) - \ln(K_0)}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$ -

1.7.6 Degressive Abschreibung

$$B_t = B_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^t$$

t	Anzahl der Jahre	
p	Abschreibungssatz	%
B_0	Anschaffungswert	<i>Euro</i>
B_t	Buchwert	<i>Euro</i>
$B_0 = \frac{B_t}{\left(1 - \frac{p}{100}\right)^t} \quad t = \frac{\ln(B_t) - \ln(B_0)}{\ln\left(1 - \frac{p}{100}\right)} \quad p = \left(1 - \sqrt[t]{\frac{B_t}{B_0}}\right) \cdot 100$		

Interaktive Inhalte: $B_t = B_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^t$ - $B_0 = \frac{B_t}{\left(1 - \frac{p}{100}\right)^t}$ - $t = \frac{\ln(B_t) - \ln(B_0)}{\ln\left(1 - \frac{p}{100}\right)}$ - $p = \left(1 - \sqrt[t]{\frac{B_t}{B_0}}\right) \cdot 100$ -

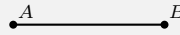
2 Geometrie

2.1 Grundlagen

2.1.1 Definitionen

Strecke $[AB]$

Gerade Linie die durch 2 Endpunkte begrenzt wird



Länge einer Strecke \overline{AB}

Entfernung zwischen den Punkten A und B

$$\overline{AB} = 3\text{cm}$$

Gerade AB

Unbegrenzte gerade Linie durch 2 Punkte



Halbgerade - Strahl $[AB$

Einseitig begrenzte gerade Linie



Winkel

Zwei von einem Punkt (Scheitel) ausgehenden Halbgeraden (Schenkel) schließen einen Winkel ein.

$$\alpha = \angle ABC$$

Drehsinn entgegen dem Uhrzeigersinn = positiver Winkel

Drehsinn im Uhrzeigersinn = negativer Winkel

spitzer Winkel: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

rechter Winkel: $\alpha = 90^\circ$

stumpfer Winkel: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

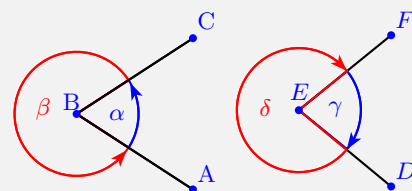
gestreckter Winkel: $\alpha = 180^\circ$

überstumpfer Winkel: $180^\circ < \alpha < 360^\circ$

Vollwinkel: $\alpha = 360^\circ$

positive Winkel

negative Winkel



B Scheitelpunkt

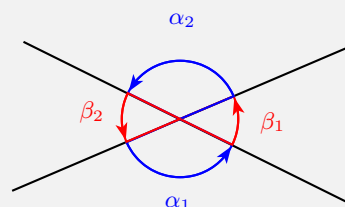
$[BA, [BC$ Schenkel

$$\alpha = \angle ABC \quad \beta = \angle CBA$$

Winkel an sich schneidenden Geraden

Scheitelwinkel (Gegenwinkel) sind gleich groß.

Nebenwinkel ergänzen sich zu 180° .

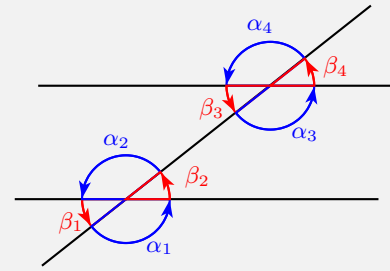


Scheitelwinkel: $\alpha_1 = \alpha_2; \beta_1 = \beta_2$

Nebenwinkel: $\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ; \alpha_2 + \beta_2 = 180^\circ$

Winkel an parallelen Geraden

Stufenwinkel (F-Winkel) und Wechselwinkel (Z-Winkel) sind gleich groß. Nachbarwinkel (E-Winkel) ergänzen sich zu 180° .



$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$$

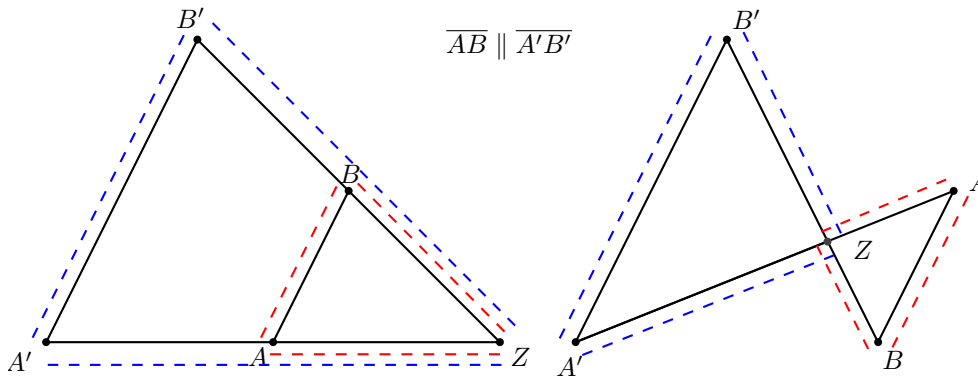
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Stufenwinkel: $\alpha_1 = \alpha_3; \beta_1 = \beta_3$

Wechselwinkel: $\alpha_2 = \alpha_3; \beta_2 = \beta_3$

Nachbarwinkel: $\alpha_3 + \beta_2 = 180^\circ; \alpha_2 + \beta_3 = 180^\circ$

2.1.2 Strahlensätze



$$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$$

2.2 Dreieck

2.2.1 Definitionen und Eigenschaften des Dreiecks

Winkel- und Seitenbeziehungen

- Innenwinkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- Außenwinkelsumme: $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$
- $\gamma' = \alpha + \beta$; $\beta' = \alpha + \gamma$; $\alpha' = \beta + \gamma$;

- Dreiecksungleichung:

Die Summe zweier Dreiecksseiten ist größer als die dritte Seite.

$$a + b > c \quad a + c > b \quad b + c > a$$

- Der längeren von zwei Seiten liegt der größere Winkel gegenüber.

$$a > b \Rightarrow \alpha > \beta \quad a < b \Rightarrow \alpha < \beta$$

$$a > c \Rightarrow \alpha > \gamma \quad a < c \Rightarrow \alpha < \gamma$$

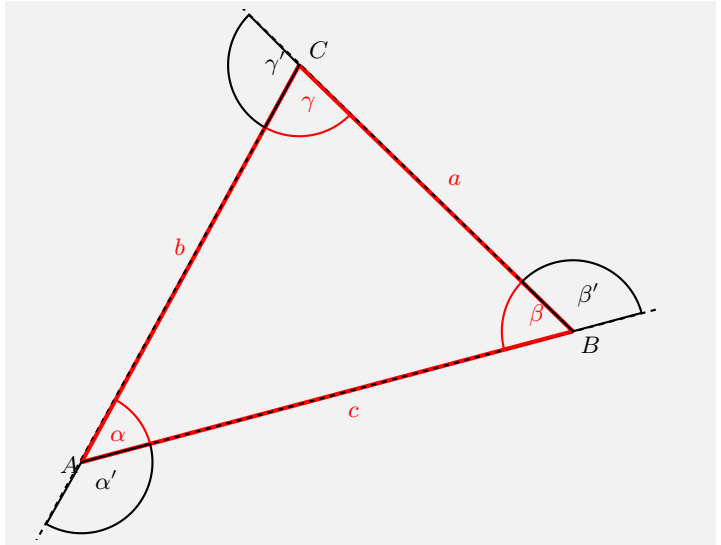
$$b > c \Rightarrow \beta > \gamma \quad b < c \Rightarrow \beta < \gamma$$

- Gleichlangen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber.

$$a = b \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$a = c \Rightarrow \alpha = \gamma$$

$$b = c \Rightarrow \beta = \gamma$$



Höhe

Das Lot von einem Eckpunkt des Dreiecks auf die gegenüberliegende Dreiecksseite. Höhen schneiden sich im Höhenschnittpunkt.

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$$

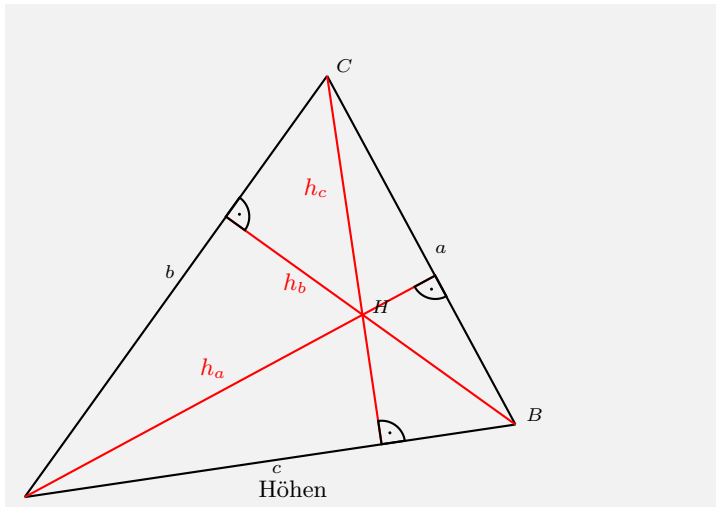
$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

$$h_a = c \cdot \sin \beta$$

$$h_b = a \cdot \sin \gamma$$

$$h_c = b \cdot \sin \alpha$$



Winkelhalbierende

Alle Punkte auf einer Winkelhalbierenden haben zu den Schenkeln den gleichen Abstand. Die Winkelhalbierenden schneiden sich im Inkreismittelpunkt. Der Inkreismittelpunkt hat von den drei Seiten des Dreiecks den gleichen Abstand.

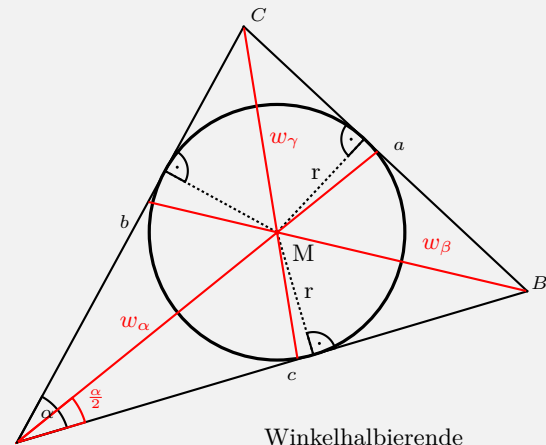
Inkreisradius:

$$\rho = r_i = \frac{2 \cdot A}{U} = \frac{2 \cdot A}{a + b + c}$$

$$\delta_1 = 180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2} \quad w_\alpha = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \delta_1}$$

$$\delta_2 = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \gamma \quad w_\beta = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \delta_2}$$

$$\delta_3 = 180^\circ - \alpha - \frac{\gamma}{2} \quad w_\gamma = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \delta_3}$$



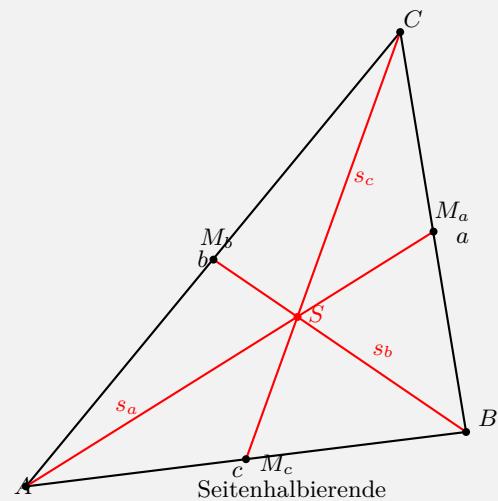
Seitenhalbierende

Strecke vom einem Eckpunkt des Dreiecks zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Schwerpunkt. Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.

$$s_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$s_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

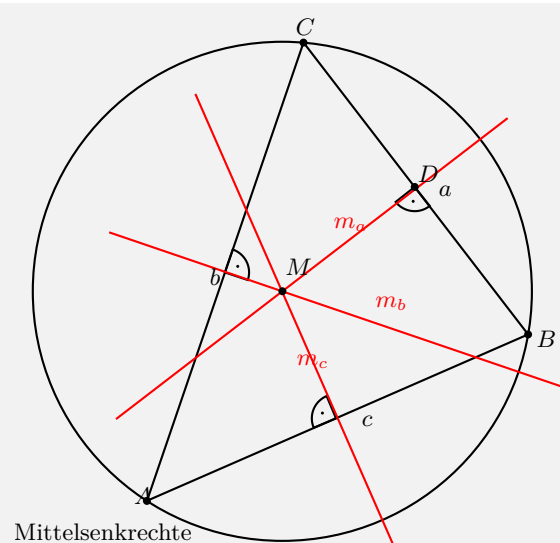
$$s_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$



Mittelsenkrechte

Alle Punkte auf einer Mittelsenkrechte haben von zwei Eckpunkten die gleiche Entfernung. Die Mittelsenkrechten schneiden sich im Umkreismittelpunkt. Der Umkreismittelpunkt hat von den drei Eckpunkten des Dreiecks die gleiche Entfernung.

$$\text{Umkreisradius: } r_u = \frac{a}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{b}{2 \cdot \sin \beta} = \frac{c}{2 \cdot \sin \gamma}$$



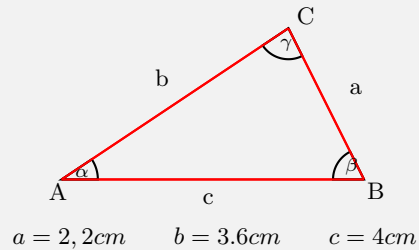
Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

2.2.2 Kongruenzsätze

Seite - Seite - Seite (SSS)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

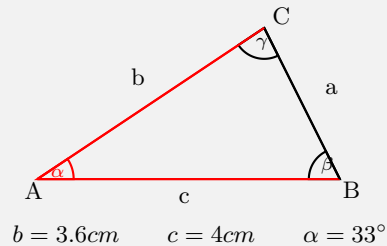
Seite	Seite	Seite
a	b	c



Seite - Winkel - Seite (SWS)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

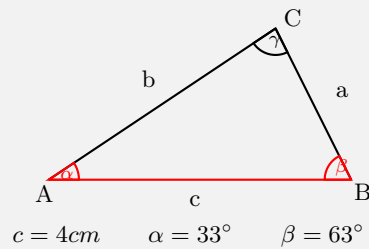
Seite	Winkel	Seite
a	β	c
a	γ	b
b	α	c



Winkel - Seite - Winkel (WSW, WWS)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Winkeln und einer Seite übereinstimmen.

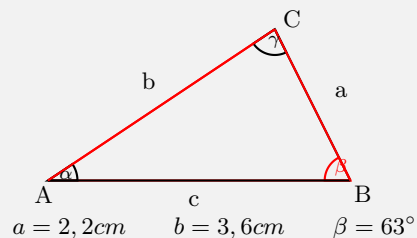
Winkel	Seite	Winkel	Winkel	Winkel	Seite
α	c	β	α	β	a
α	b	γ	α	β	b
β	a	γ	α	γ	a
			α	γ	c
			β	γ	b
			β	γ	c



Seite - Seite - Winkel (SsW)

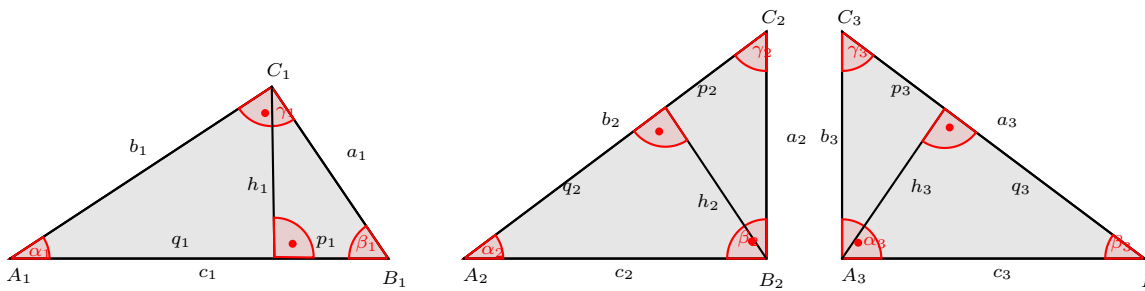
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der längeren Seite gegenüber liegenden Winkel (Gegenwinkel) übereinstimmen.

Seite	Seite	Winkel	
a	b	α	$a > b$
a	b	β	$b > a$
a	c	α	$a > c$
a	c	γ	$c > a$
b	c	β	$b > c$
b	c	γ	$c > b$



Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

2.2.3 Pythagoras - Höhensatz - Kathetensatz



Pythagoras

Die Katheten sind die am rechten Winkel anliegenden Seiten. Die Hypotenuse liegt dem rechten Winkel gegenüber.

- Die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat.

für $\gamma = 90^\circ$ Katheten a und b Hypotenuse c
 $a^2 + b^2 = c^2$

$\triangle A_1 B_1 C_1$

$\gamma_1 = 90^\circ$ Katheten a_1 und b_1 Hypotenuse c_1

$$a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$$

$$c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad a_1 = \sqrt{c_1^2 - b_1^2} \quad b_1 = \sqrt{c_1^2 - a_1^2}$$

$\triangle A_2 B_2 C_2$

$\beta_2 = 90^\circ$ Katheten a_2 und c_2 Hypotenuse b_2

$$a_2^2 + c_2^2 = b_2^2$$

$$b_2 = \sqrt{a_2^2 + c_2^2} \quad a_2 = \sqrt{b_2^2 - c_2^2} \quad c_2 = \sqrt{b_2^2 - a_2^2}$$

$\triangle A_3 B_3 C_3$

$\alpha_3 = 90^\circ$ Katheten b_3 und c_3 Hypotenuse a_3

$$a_3^2 + b_3^2 = c_3^2$$

$$a_3 = \sqrt{b_3^2 + c_3^2} \quad b_3 = \sqrt{a_3^2 - c_3^2} \quad c_3 = \sqrt{a_3^2 - b_3^2}$$

Kathetensatz

Die Höhe h teilt die Hypotenuse in zwei Hypotenusenabschnitte.

- Die Kathete im Quadrat ist gleich dem Produkt aus dem zugehörigen Hypotenusenabschnitt und der Hypotenuse.

für $\gamma = 90^\circ$ $c = p + q$

Katheten a und b Hypotenuse c

Hypotenusenabschnitt p und q

$$a^2 = c \cdot p \quad b^2 = c \cdot q$$

$\triangle A_1 B_1 C_1$

$\gamma_1 = 90^\circ$ Katheten a_1 und b_1 Hypotenuse c_1

Hypotenusenabschnitte p_1 und q_1 $c_1 = p_1 + q_1$

$$a_1^2 = c_1 \cdot p_1 \quad a_1 = \sqrt{c_1 \cdot p_1} \quad c_1 = \frac{a_1^2}{p_1} \quad p_1 = \frac{a_1^2}{c_1}$$

$$b_1^2 = c_1 \cdot q_1 \quad b_1 = \sqrt{c_1 \cdot q_1} \quad c_1 = \frac{b_1^2}{q_1} \quad q_1 = \frac{b_1^2}{c_1}$$

$\triangle A_2 B_2 C_2$

$\beta_2 = 90^\circ$ Katheten a_2 und c_2 Hypotenuse b_2

Hypotenusenabschnitte p_2 und q_2 $b_2 = p_2 + q_2$

$$a_2^2 = b_2 \cdot p_2 \quad a_2 = \sqrt{b_2 \cdot p_2} \quad b_2 = \frac{a_2^2}{p_2} \quad p_2 = \frac{a_2^2}{b_2}$$

$$c_2^2 = b_2 \cdot q_2 \quad c_2 = \sqrt{b_2 \cdot q_2} \quad b_2 = \frac{c_2^2}{q_2} \quad q_2 = \frac{c_2^2}{b_2}$$

$\triangle A_3 B_3 C_3$

$\alpha_3 = 90^\circ$ Katheten b_3 und c_3 Hypotenuse a_3

Hypotenusenabschnitte p_3 und q_3 $a_3 = p_3 + q_3$

$$b_3^2 = a_3 \cdot p_3 \quad b_3 = \sqrt{a_3 \cdot p_3} \quad a_3 = \frac{b_3^2}{p_3} \quad p_3 = \frac{b_3^2}{a_3}$$

$$c_3^2 = a_3 \cdot q_3 \quad c_3 = \sqrt{a_3 \cdot q_3} \quad a_3 = \frac{c_3^2}{q_3} \quad q_3 = \frac{c_3^2}{a_3}$$

Höhensatz

Die Höhe h teilt die Hypotenuse in zwei Hypotenusenabschnitte.

- Die Höhe im Quadrat ist gleich dem Produkt der Hypotenusenabschnitte.

für $\gamma = 90^\circ$ $c = p + q$

Hypotenusenabschnitte p und q

$$h^2 = p \cdot q$$

$\triangle A_1 B_1 C_1$

$\gamma_1 = 90^\circ$ Katheten a_1 und b_1 Hypotenuse c_1

Hypotenusenabschnitte p_1 und q_1 $c_1 = p_1 + q_1$

$$h_1^2 = p_1 \cdot q_1 \quad h_1 = \sqrt{p_1 \cdot q_1} \quad p_1 = \frac{h_1^2}{q_1} \quad q_1 = \frac{h_1^2}{p_1}$$

$\triangle A_2 B_2 C_2$

$\beta_2 = 90^\circ$ Katheten a_2 und c_2 Hypotenuse b_2

Hypotenusenabschnitte p_2 und q_2 $b_2 = p_2 + q_2$

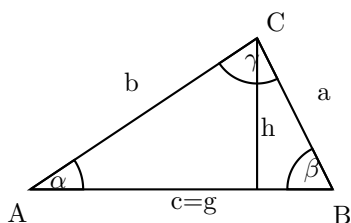
$$h_2^2 = p_2 \cdot q_2 \quad h_2 = \sqrt{p_2 \cdot q_2} \quad p_2 = \frac{h_2^2}{q_2} \quad q_2 = \frac{h_2^2}{p_2}$$

$\triangle A_3 B_3 C_3$

$\alpha_3 = 90^\circ$ Katheten b_3 und c_3 Hypotenuse a_3

Hypotenusenabschnitte p_3 und q_3 $a_3 = p_3 + q_3$

$$h_3^2 = p_3 \cdot q_3 \quad h_3 = \sqrt{p_3 \cdot q_3} \quad p_3 = \frac{h_3^2}{q_3} \quad q_3 = \frac{h_3^2}{p_3}$$

2.2.4 Allgemeines Dreieck

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

g	Grundlinie	m
h	Höhe	m
A	Fläche	m^2
$g = \frac{A \cdot 2}{h}$		$h = \frac{A \cdot 2}{g}$

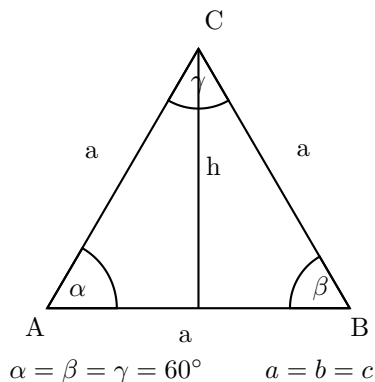
$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$$

b	Länge der Seite	m
a	Länge der Seite	m
γ	Winkel gamma	$^\circ$
A	Fläche	m^2

$$U = a + b + c$$

c	Länge der Seite	m
b	Länge der Seite	m
a	Länge der Seite	m
U	Umfang	m

Interaktive Inhalte: $A = \frac{g \cdot h}{2}$ - $g = \frac{A \cdot 2}{h}$ - $h = \frac{A \cdot 2}{g}$ - $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$ - $U = a + b + c$ -

2.2.5 Gleichseitiges Dreieck

$$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$

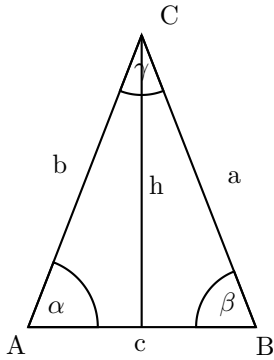
a Grundlinie a m
 A Fläche m^2
 $a = \sqrt{\frac{A \cdot 4}{\sqrt{3}}}$

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

h Höhe m
 a Grundlinie a m
 $a = \frac{h \cdot 2}{\sqrt{3}}$

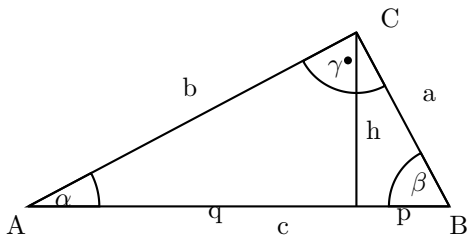
Interaktive Inhalte: $A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ - $a = \sqrt{\frac{A \cdot 4}{\sqrt{3}}}$ - $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ - $a = \frac{h \cdot 2}{\sqrt{3}}$ -

2.2.6 Gleichschenkliges Dreieck



Basiswinkel sind gleich $\alpha = \beta$
 Schenkel sind gleich lang $a = b$

2.2.7 Rechtwinkliges Dreieck



$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$

b Ankathete zu α m
 a Gegenkathete zu α m
 A Fläche m^2
 $a = \frac{A \cdot 2}{b}$ $b = \frac{A \cdot 2}{a}$

$$\text{Phytagoras: } a^2 + b^2 = c^2$$

a Gegenkathete zu α m
 b Ankathete zu α m
 c Hypotenuse m
 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$$\text{Höhensatz: } h^2 = p \cdot q$$

q Hypotenusenabschnitt m
 p Hypotenusenabschnitt m
 h Höhe m
 $h = \sqrt{p \cdot q}$ $q = \frac{h^2}{p}$ $p = \frac{h^2}{q}$

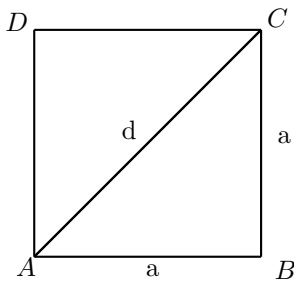
Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p$ $b^2 = c \cdot q$

p Hypotenusenabschnitt m
 c Hypotenuse m
 a Gegenkathete zu α m
 $a = \sqrt{c \cdot p}$ $c = \frac{a^2}{p}$ $p = \frac{a^2}{c}$

Interaktive Inhalte: $A = \frac{a \cdot b}{2}$ - $a = \frac{A \cdot 2}{b}$ - $b = \frac{A \cdot 2}{a}$ - $a^2 + b^2 = c^2$ - $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ - $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ - $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ - $h^2 = p \cdot q$ -
 $h = \sqrt{p \cdot q}$ - $q = \frac{h^2}{p}$ - $p = \frac{h^2}{q}$ - $a^2 = c \cdot p$ $b^2 = c \cdot q$ - $a = \sqrt{c \cdot p}$ - $c = \frac{a^2}{p}$ - $p = \frac{a^2}{c}$ -

2.3 Viereck

2.3.1 Quadrat



$$A = a^2$$

a	Seite	m
A	Fläche	m^2
$a = \sqrt{A}$		

$$U = 4 \cdot a$$

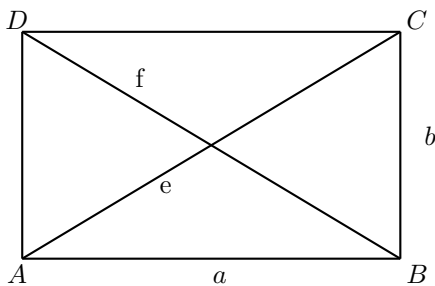
a	Seite	m
U	Umfang	m
$a = \frac{U}{4}$		

$$d = a \cdot \sqrt{2}$$

a	Seite	m
d	Diagonale	m
$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$		

Interaktive Inhalte: $A = a^2$ - $a = \sqrt{A}$ - $U = 4 \cdot a$ - $a = \frac{U}{4}$ - $d = a \cdot \sqrt{2}$ - $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$ -

2.3.2 Rechteck



$$A = a \cdot b$$

b	Breite	m
a	Länge	m
A	Fläche	m^2
$a = \frac{A}{b}$ $b = \frac{A}{a}$		

$$U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

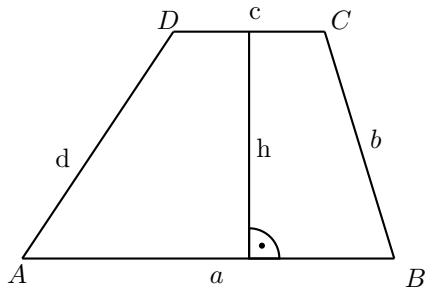
b	Breite	m
a	Länge	m
U	Umfang	m
$a = \frac{U-2 \cdot b}{2}$ $b = \frac{U-2 \cdot a}{2}$		

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

b	Breite	m
a	Länge	m
d	Diagonale	m
$b = \sqrt{d^2 - a^2}$ $a = \sqrt{d^2 - b^2}$		

Interaktive Inhalte: $A = a \cdot b$ - $a = \frac{A}{b}$ - $b = \frac{A}{a}$ - $U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ - $a = \frac{U-2 \cdot b}{2}$ - $b = \frac{U-2 \cdot a}{2}$ - $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ - $b = \sqrt{d^2 - a^2}$ - $a = \sqrt{d^2 - b^2}$ -

2.3.3 Trapez

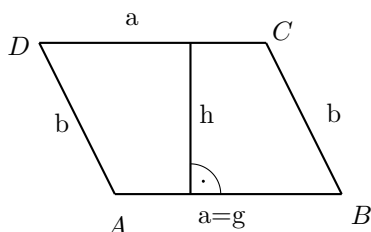


$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

c	Grundlinie c	m
a	Grundlinie a	m
h	Höhe	m
A	Fläche	m^2
$a = \frac{2 \cdot A}{h} - c \quad c = \frac{2 \cdot A}{h} - a \quad h = \frac{2 \cdot A}{a+c}$		

Interaktive Inhalte: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ - $a = \frac{2 \cdot A}{h} - c$ - $c = \frac{2 \cdot A}{h} - a$ - $h = \frac{2 \cdot A}{a+c}$ -

2.3.4 Parallelogramm

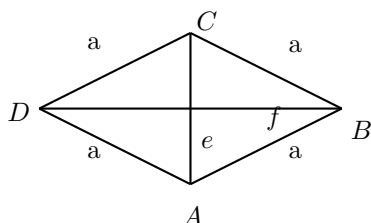


$$A = g \cdot h$$

h	Höhe	m
g	Grundlinie	m
A	Fläche	m^2
$g = \frac{A}{h} \quad h = \frac{A}{g}$		

Interaktive Inhalte: $A = g \cdot h$ - $g = \frac{A}{h}$ - $h = \frac{A}{g}$ -

2.3.5 Raute

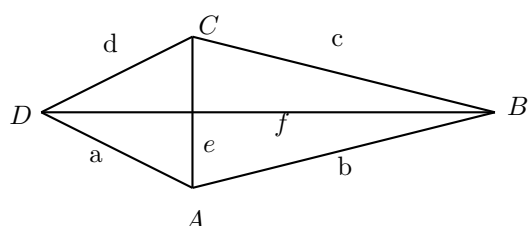


$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

f	Diagonale f	m
e	Diagonale e	m
A	Fläche	m^2
$e = \frac{2 \cdot A}{f} \quad f = \frac{2 \cdot A}{e}$		

Interaktive Inhalte: $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ - $e = \frac{2 \cdot A}{f}$ - $f = \frac{2 \cdot A}{e}$ -

2.3.6 Drachen



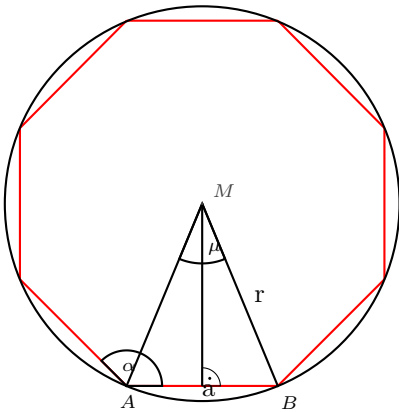
$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

f	Diagonale f	m
e	Diagonale e	m
A	Fläche	m^2
$e = \frac{2 \cdot A}{f}$	$f = \frac{2 \cdot A}{e}$	

Interaktive Inhalte: $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ - $e = \frac{2 \cdot A}{f}$ - $f = \frac{2 \cdot A}{e}$ -

2.4 Polygone (n-Ecken)

2.4.1 Regelmäßiges n-Eck



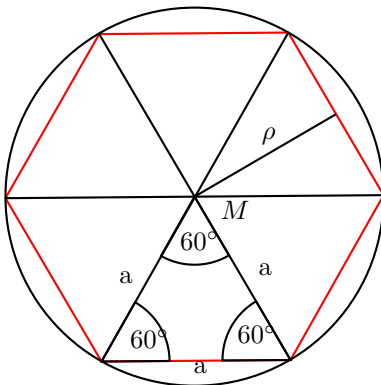
Seitenlänge n-Eck: $a = 2 \cdot r \sin \frac{\mu}{2}$

Mittelpunktswinkel: $\mu = \frac{360^\circ}{n}$

Innenwinkel: $\alpha = 180^\circ - \mu$

Fläche: $A = n \cdot A_D = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \mu$

2.4.2 Sechseck



Seitenlänge 6-Eck: $a = r$

Mittelpunktswinkel: $\mu = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

Innenwinkel: $\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$$A = \frac{3 \cdot a^2}{2} \cdot \sqrt{3}$$

a	Grundlinie a	m
A	Fläche	m^2
a	$= \sqrt{\frac{A \cdot 2}{3 \cdot \sqrt{3}}}$	

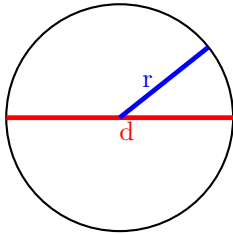
$$\rho = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

ρ	Inkreisradius	m
a	Grundlinie a	m
a	$= \frac{\rho \cdot 2}{\sqrt{3}}$	

Interaktive Inhalte: $A = \frac{3 \cdot a^2}{2} \cdot \sqrt{3}$ - $a = \sqrt{\frac{A \cdot 2}{3 \cdot \sqrt{3}}}$ - $\rho = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ - $a = \frac{\rho \cdot 2}{\sqrt{3}}$ -

2.5 Kreis

2.5.1 Kreis



$$d = 2 \cdot r$$

r	Radius	m
d	Durchmesser	m
$r = \frac{d}{2}$		

$$A = r^2 \cdot \pi$$

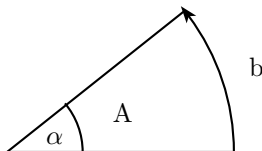
π	Kreiszahl	3,1415927
r	Radius	m
A	Fläche	m^2
$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$		

$$U = 2 \cdot r \cdot \pi$$

π	Kreiszahl	3,1415927
r	Radius	m
U	Umfang	m
$r = \frac{U}{2 \cdot \pi}$		

Interaktive Inhalte: $d = 2 \cdot r$ - $r = \frac{d}{2}$ - $A = r^2 \cdot \pi$ - $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ - $U = 2 \cdot r \cdot \pi$ - $r = \frac{U}{2 \cdot \pi}$ -

2.5.2 Kreissektor (Grad)



$$A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$$

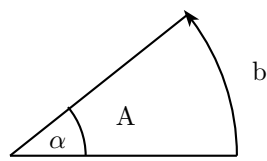
α	Winkel	$^\circ$
π	Kreiszahl	3,1415927
r	Radius	m
A	Fläche	m^2
$r = \sqrt{\frac{A \cdot 360}{\alpha \cdot \pi}}$ $\alpha = \frac{A \cdot 360}{r^2 \cdot \pi}$		

$$b = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$$

π	Kreiszahl	3,1415927
r	Radius	m
α	Winkel	$^\circ$
b	Kreisbogen	m
$r = \frac{b \cdot 360}{\alpha \cdot \pi \cdot 2}$ $\alpha = \frac{b \cdot 360}{r \cdot \pi \cdot 2}$		

Interaktive Inhalte: $A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$ - $r = \sqrt{\frac{A \cdot 360}{\alpha \cdot \pi}}$ - $\alpha = \frac{A \cdot 360}{r^2 \cdot \pi}$ - $b = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$ - $r = \frac{b \cdot 360}{\alpha \cdot \pi \cdot 2}$ - $\alpha = \frac{b \cdot 360}{r \cdot \pi \cdot 2}$ -

2.5.3 Kreissektor (Bogenmaß)



$A = \frac{r^2 \cdot x}{2}$

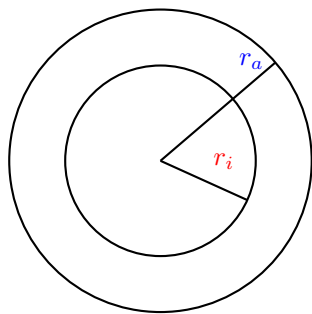
x	Winkel x	rad
r	Radius	m
A	Fläche	m^2
$r = \sqrt{\frac{A \cdot 2}{x}} \quad x = \frac{A \cdot 2}{r^2}$		

$b = r \cdot x$

r	Radius	m
x	Winkel x	rad
b	Kreisbogen	m
$r = \frac{b}{x} \quad x = \frac{b}{r}$		

Interaktive Inhalte: $A = \frac{r^2 \cdot x}{2}$ - $r = \sqrt{\frac{A \cdot 2}{x}}$ - $x = \frac{A \cdot 2}{r^2}$ - $b = r \cdot x$ - $r = \frac{b}{x}$ - $x = \frac{b}{r}$ - [hier klicken](#)

2.5.4 Kreisring



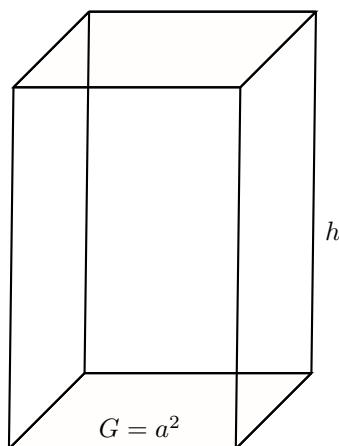
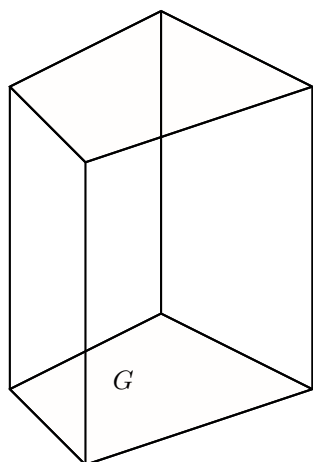
$A = (r_a^2 - r_i^2) \cdot \pi$

π	Kreiszahl		3,1415927
r_a	Radius (äußerer Kreis)	m	
r_i	Radius (innerer Kreis)	m	
A	Fläche	m^2	
$r_a = \sqrt{\frac{A}{\pi} + r_i^2} \quad r_i = \sqrt{r_a^2 - \frac{A}{\pi}}$			

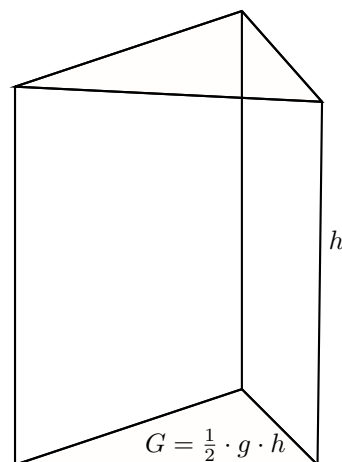
Interaktive Inhalte: $A = (r_a^2 - r_i^2) \cdot \pi$ - $r_a = \sqrt{\frac{A}{\pi} + r_i^2}$ - $r_i = \sqrt{r_a^2 - \frac{A}{\pi}}$ -

2.6 Stereometrie

2.6.1 Prisma



Quadratisches Prisma



Dreiseitiges Prisma

$$V = G \cdot h$$

h	Körperhöhe	m
G	Grundfläche	m^2
V	Volumen	m^3

$$G = \frac{V}{h} \quad h = \frac{V}{G}$$

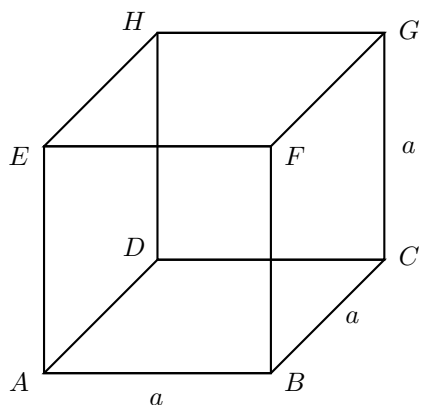
$$O = 2 \cdot G + M$$

M	Mantelfläche	m^2
G	Grundfläche	m^2
O	Oberfläche	m^2

$$G = \frac{O-M}{2} \quad M = O - 2 \cdot G$$

Interaktive Inhalte: $V = G \cdot h$ - $G = \frac{V}{h}$ - $h = \frac{V}{G}$ - $O = 2 \cdot G + M$ - $G = \frac{O-M}{2}$ - $M = O - 2 \cdot G$ -

2.6.2 Würfel



$$V = a^3$$

a	Seite	m
V	Volumen	m^3

$$a = \sqrt[3]{V}$$

$$O = 6 \cdot a^2$$

a	Seite	m
O	Oberfläche	m^2

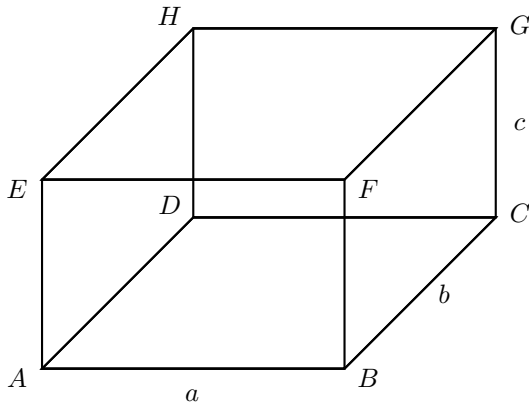
$$a = \sqrt{\frac{O}{6}}$$

$$d = a \cdot \sqrt{3}$$

a Seite m
 d Raumdiagonale m
 $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$

Interaktive Inhalte: $V = a^3$ - $a = \sqrt[3]{V}$ - $O = 6 \cdot a^2$ - $a = \sqrt{\frac{O}{6}}$ - $d = a \cdot \sqrt{3}$ - $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$ -

2.6.3 Quader



$$V = a \cdot b \cdot c$$

c Höhe m
 b Breite m
 a Länge m
 V Volumen m^3
 $a = \frac{V}{b \cdot c}$ $b = \frac{V}{a \cdot c}$ $c = \frac{V}{b \cdot a}$

$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$

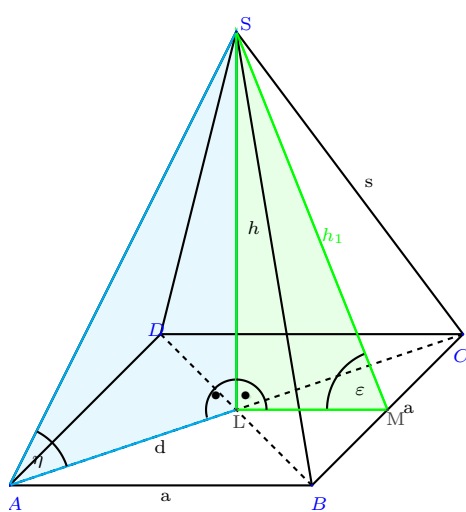
c Höhe m
 b Breite m
 a Länge m
 O Oberfläche m^2
 $a = \frac{O - 2 \cdot b \cdot c}{2 \cdot (b + c)}$ $b = \frac{O - 2 \cdot a \cdot c}{2 \cdot (a + c)}$ $c = \frac{O - 2 \cdot b \cdot a}{2 \cdot (b + a)}$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

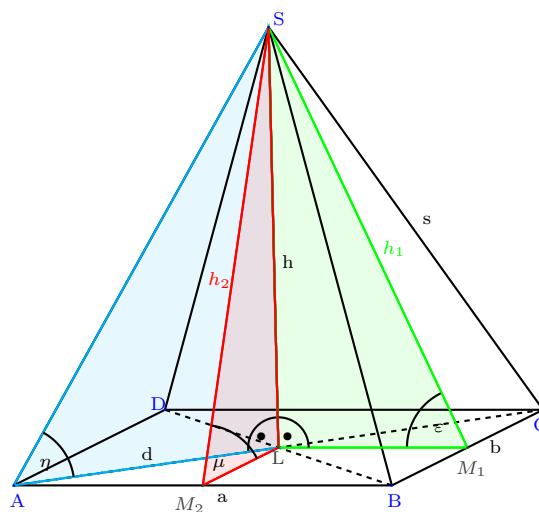
c Höhe m
 b Breite m
 a Länge m
 d Raumdiagonale m
 $a = \sqrt{d^2 - b^2 - c^2}$ $b = \sqrt{d^2 - a^2 - c^2}$ $c = \sqrt{d^2 - b^2 - a^2}$

Interaktive Inhalte: $V = a \cdot b \cdot c$ - $a = \frac{V}{b \cdot c}$ - $b = \frac{V}{a \cdot c}$ - $c = \frac{V}{b \cdot a}$ - $O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ - $a = \frac{O - 2 \cdot b \cdot c}{2 \cdot (b + c)}$ - $b = \frac{O - 2 \cdot a \cdot c}{2 \cdot (a + c)}$ - $c = \frac{O - 2 \cdot b \cdot a}{2 \cdot (b + a)}$ - $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ - $a = \sqrt{d^2 - b^2 - c^2}$ - $b = \sqrt{d^2 - a^2 - c^2}$ - $c = \sqrt{d^2 - b^2 - a^2}$ -

2.6.4 Pyramide



Quadratische Grundfläche



Rechteckige Grundfläche

Volumen

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h$$

Körperhöhe	h	m	Meter
Grundfläche	G	m^2	Quadratmeter
Volumen	V	m^3	Kubikmeter
$G = \frac{3 \cdot V}{h} \quad h = \frac{3 \cdot V}{G}$			

Oberfläche

$$O = G + M$$

Grundfläche	G	m^2	Quadratmeter
Mantelfläche	M	m^2	Quadratmeter
Oberfläche	O	m^2	Quadratmeter
$G = O - M \quad M = O - G$			

Quadratische Pyramide

$$\text{Pythagoras im } \triangle ABC \quad d^2 = a^2 + a^2 \quad d = a\sqrt{2}$$

$$\text{Pythagoras im } \triangle LMS \quad h_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\text{Pythagoras im } \triangle ALS \quad s^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\text{Mantelfläche} \quad M = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_1$$

$$\text{Grundfläche} \quad G = a^2$$

$$\text{Oberfläche} \quad O = G + M$$

$$\text{Volumen} \quad V = \frac{1}{3} G \cdot h \quad V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$$

Winkel zwischen der Seitenkante und der Grundfläche

$$\angle CAS \quad \tan \eta = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$$

Winkel zwischen der Seitenfläche $\triangle BCS$ und der Grundfläche

$$\angle SML \quad \tan \epsilon = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$$

$$\text{Pythagoras im } \triangle ABC \quad d = \sqrt{a^2 + a^2}$$

$$d = \sqrt{(3m)^2 + (3m)^2} = 4,24m$$

$$\text{Pythagoras im } \triangle LM_1S \quad h_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$$

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{3m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,22m$$

$$\text{Pythagoras im } \triangle ALS \quad s = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2}$$

$$s = \sqrt{\left(\frac{4,24m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,43m$$

$$\text{Mantelfläche} \quad M = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_1$$

$$M = 4 \cdot \frac{1}{2} 3m \cdot 5,22m = 31,3m^2$$

$$\text{Grundfläche} \quad G = a^2$$

$$G = (3m)^2 = 9m^2$$

$$\text{Oberfläche} \quad O = G + M$$

$$O = 9m^2 + 31,3m^2 = 40,3m^2$$

$$\text{Volumen} \quad V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} (3m)^2 \cdot 5m = 15m^3$$

$$\angle CAS \quad \tan \eta = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$$

$$\tan \eta = \frac{5m}{\frac{1}{2} 4,24m}$$

$$\eta = 67^\circ$$

$$\angle SM_1L \quad \tan \epsilon = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$$

$$\tan \epsilon = \frac{5m}{\frac{1}{2} 3m}$$

$$\epsilon = 73,3^\circ$$

Rechteckige Pyramide

$$\text{Pythagoras im } \triangle ABC \quad d^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{Pythagoras im } \triangle LM_1S \quad h_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\text{Pythagoras im } \triangle LM_2S \quad h_2^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\text{Pythagoras im } \triangle ALS \quad s^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\text{Mantelfläche} \quad M = 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_2 + 2 \cdot \frac{1}{2} b \cdot h_1$$

$$\text{Grundfläche} \quad G = a \cdot b$$

$$\text{Oberfläche} \quad O = G + M$$

$$\text{Volumen} \quad V = \frac{1}{3} G \cdot h \quad V = \frac{1}{3} a \cdot b \cdot h$$

Winkel zwischen der Seitenkante und der Grundfläche

$$\angle CAS \quad \tan \eta = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$$

Winkel zwischen der Seitenfläche $\triangle BCS$ und der Grundfläche

$$\angle SM_1L \quad \tan \epsilon = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$$

Winkel zwischen der Seitenfläche $\triangle ABC$ und der Grundfläche

$$\angle SM_2L \quad \tan \mu = \frac{h}{\frac{1}{2}b}$$

$$\text{Pythagoras im } \triangle ABC \quad d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$d = \sqrt{(3m)^2 + (4m)^2} = 5m$$

$$\text{Pythagoras im } \triangle LM_1S \quad h_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$$

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{3m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,22m$$

$$\text{Pythagoras im } \triangle LM_2S \quad h_2 = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2}$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{4m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,39m$$

$$\text{Pythagoras im } \triangle ALS \quad s = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2}$$

$$s = \sqrt{\left(\frac{5m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,59m$$

$$\text{Mantelfläche} \quad M = 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_2 + 2 \cdot \frac{1}{2} b \cdot h_1$$

$$M = 2 \cdot \frac{1}{2} 3m \cdot 5,39m + 2 \cdot \frac{1}{2} 4m \cdot 5,22m = 37m^2$$

$$\text{Grundfläche} \quad G = a \cdot b$$

$$G = 3m \cdot 4m = 12m^2$$

$$\text{Oberfläche} \quad O = G + M$$

$$O = 12m^2 + 37m^2 = 49m^3$$

$$\text{Volumen} \quad V = \frac{1}{3} a \cdot b \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} 3m \cdot 4m \cdot 5m = 20m^3$$

$$\angle CAS \quad \tan \eta = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$$

$$\tan \eta = \frac{5m}{\frac{1}{2}5m}$$

$$\eta = 63,4^\circ$$

$$\angle SM_1L \quad \tan \epsilon = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$$

$$\tan \epsilon = \frac{5m}{\frac{1}{2}3m}$$

$$\epsilon = 73,3^\circ$$

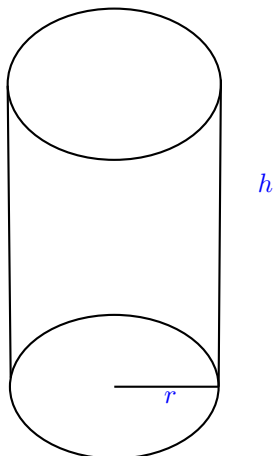
$$\angle SM_2L \quad \tan \mu = \frac{h}{\frac{1}{2}b}$$

$$\tan \mu = \frac{5m}{\frac{1}{2}4m}$$

$$\mu = 68,2^\circ$$

Interaktive Inhalte: $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ - $G = \frac{3 \cdot V}{h}$ - $h = \frac{3 \cdot V}{G}$ - $O = G + M$ - $G = O - M$ - $M = O - G$ - Rechteckige Pyramide - Quadratische Pyramide -

2.6.5 Kreiszylinder



$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

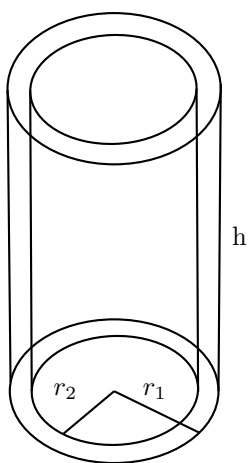
h	Körperhöhe	m	
π	Kreiszahl		3,1415927
r	Radius	m	
V	Volumen	m^3	
$r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}} \quad h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi}$			

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$$

h	Körperhöhe	m	
π	Kreiszahl		3,1415927
r	Radius	m	
O	Oberfläche	m^2	
$r = 0,5 \cdot (-h + \sqrt{h^2 + \frac{O}{\pi}}) \quad h = \frac{0 - 2 \cdot \pi \cdot r^2}{2 \cdot r \cdot \pi}$			

Interaktive Inhalte: $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$ - $r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}}$ - $h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi}$ - $O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$ - $r = 0,5 \cdot (-h + \sqrt{h^2 + \frac{O}{\pi}})$ - $h = \frac{0 - 2 \cdot \pi \cdot r^2}{2 \cdot r \cdot \pi}$ -

2.6.6 Hohlzylinder

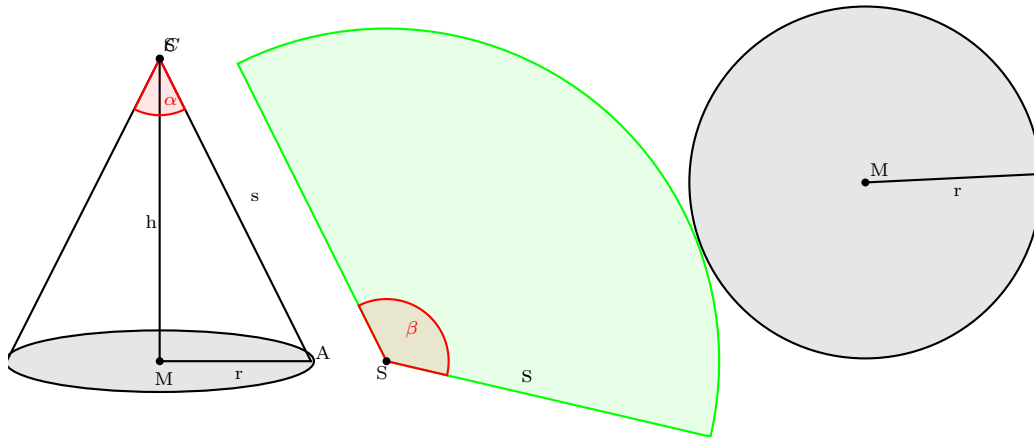


$$V = (r_1^2 - r_2^2) \cdot \pi \cdot h$$

h	Körperhöhe	m	
π	Kreiszahl		3,1415927
r_2	Radius 2	m	
r_1	Radius 1	m	
V	Volumen	m^3	
$r_1 = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h} + r_2^2} \quad r_2 = \sqrt{r_1^2 - \frac{V}{\pi \cdot h}} \quad h = \frac{V}{(r_1^2 - r_2^2) \cdot \pi}$			

Interaktive Inhalte: $V = (r_1^2 - r_2^2) \cdot \pi \cdot h$ - $r_1 = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h} + r_2^2}$ - $r_2 = \sqrt{r_1^2 - \frac{V}{\pi \cdot h}}$ - $h = \frac{V}{(r_1^2 - r_2^2) \cdot \pi}$ -

2.6.7 Kreiskegel



$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

h	Höhe	m	
π	Kreiszahl		3,1415927
r	Radius	m	
V	Volumen	m^3	
$r = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot h}} \quad h = \frac{3 \cdot V}{r^2 \cdot \pi}$			

$$O = r \cdot \pi \cdot (r + s)$$

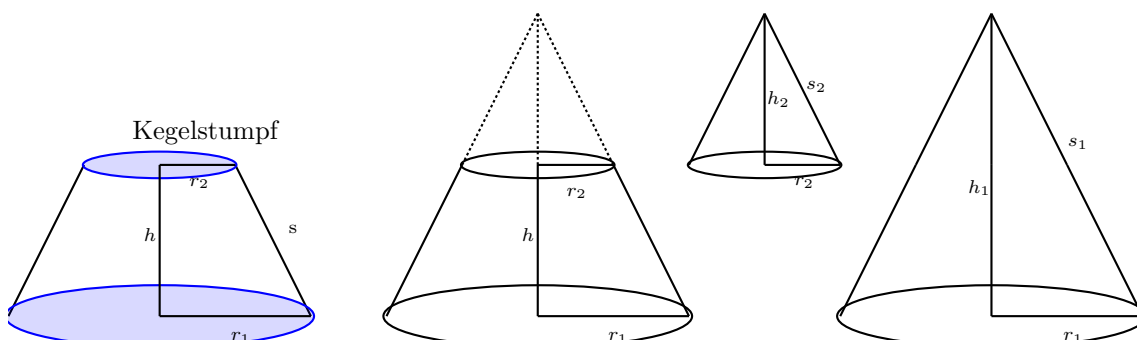
s	Mantellinie	m	
r	Radius	m	
π	Kreiszahl		3,1415927
O	Oberfläche	m^2	
$s = \frac{O}{r \cdot \pi} - r \quad r = \frac{-\pi \cdot s + \sqrt{(\pi \cdot s)^2 + 4 \cdot \pi \cdot O}}{2 \cdot \pi}$			

$$s = \sqrt{h^2 + r^2}$$

s	Mantellinie	m	
r	Radius	m	
h	Höhe	m	
$r = \sqrt{s^2 - h^2} \quad h = \sqrt{s^2 - r^2}$			

Interaktive Inhalte: $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$ - $r = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot h}}$ - $h = \frac{3 \cdot V}{r^2 \cdot \pi}$ - $O = r \cdot \pi \cdot (r + s)$ - $s = \frac{O}{r \cdot \pi} - r$ - $r = \frac{-\pi \cdot s + \sqrt{(\pi \cdot s)^2 + 4 \cdot \pi \cdot O}}{2 \cdot \pi}$ - $s = \sqrt{h^2 + r^2}$ - $r = \sqrt{s^2 - h^2}$ - $h = \sqrt{s^2 - r^2}$ -

2.6.8 Kegelstumpf



Kegelstumpf

Strahlensatz

$\frac{h_2}{h_1} = \frac{r_2}{r_1}$	$\frac{s_2}{s_1} = \frac{r_2}{r_1}$
$h_1 = h_2 + h$	$s_1 = s_2 + s$
$\frac{h_2}{h_2 + h} = \frac{r_2}{r_1}$	$\frac{s_2}{s_2 + s} = \frac{r_2}{r_1}$
$h_2 \cdot r_1 = r_2 \cdot (h_2 + h)$	$s_2 \cdot r_1 = r_2 \cdot (s_2 + s)$
$h_2 \cdot r_1 = r_2 \cdot h_2 + r_2 \cdot h$	$s_2 \cdot r_1 = r_2 \cdot s_2 + r_2 \cdot s$
$h_2 \cdot r_1 - r_2 \cdot h_2 = r_2 \cdot h$	$s_2 \cdot r_1 - r_2 \cdot s_2 = r_2 \cdot s$
$h_2 \cdot (r_1 - r_2) = r_2 \cdot h$	$s_2 \cdot (r_1 - r_2) = r_2 \cdot s$
$h_2 = \frac{r_2 \cdot h}{r_1 - r_2}$	$s_2 = \frac{r_2 \cdot s}{r_1 - r_2}$
$h_1 = h_2 + h$	$s_1 = s_2 + s$

Py-

thagoras

$$s_2^2 = r_2^2 + h_2^2 \quad s_1^2 = r_1^2 + h_1^2$$

$$\text{Mantelfläche} \quad M = r_1 \cdot \pi \cdot s_1 - r_2 \cdot \pi \cdot s_2$$

$$\text{Grund- und Deckfläche} \quad G = r_1^2 \pi \quad D = r_2^2 \pi$$

$$\text{Oberfläche} \quad O = G + D + M$$

$$\text{Volumen} \quad V = \frac{1}{3} r_1^2 \cdot \pi \cdot h_1 - \frac{1}{3} r_2^2 \cdot \pi \cdot h_2$$

$$h = 5m$$

$$\pi = 3,14$$

$$r_2 = 3m$$

$$r_1 = 4m$$

$$h_2 = \frac{r_2 \cdot h}{r_1 - r_2}$$

$$h_2 = \frac{3m \cdot 5m}{4m - 3m} = 15m$$

$$h_1 = h_2 + h$$

$$h_1 = 15m + 5m$$

Pythagoras

$$s_2 = \sqrt{r_2^2 + h_2^2} \quad s_1 = \sqrt{r_1^2 + h_1^2}$$

$$s_2 = \sqrt{(3m)^2 + (15m)^2} = 15,3m$$

$$s_1 = \sqrt{(4m)^2 + (20m)^2} = 20,4m$$

$$\text{Mantelfläche} \quad M = r_1 \cdot \pi \cdot s_1 - r_2 \cdot \pi \cdot s_2$$

$$M = 4m \cdot \pi \cdot 20,4m - 3m \cdot \pi \cdot 15,3m = 112m^2$$

$$\text{Grund- und Deckfläche} \quad G = r_1^2 \pi \quad D = r_2^2 \pi$$

$$G = (4m)^2 \pi = 50,3m^2$$

$$D = (3m)^2 \pi = 28,3m^2$$

$$\text{Oberfläche} \quad O = G + D + M$$

$$O = 50,3m^2 + 28,3m^2 + 112m^2 = 191m^2$$

$$\text{Volumen} \quad V = \frac{1}{3} r_1^2 \cdot \pi \cdot h_1 - \frac{1}{3} r_2^2 \cdot \pi \cdot h_2$$

$$V = \frac{1}{3} 4m^2 \cdot \pi \cdot 20m - \frac{1}{3} 3m^2 \cdot \pi \cdot 15m = 194m^3$$

Interaktive Inhalte: [Kegelstumpf](#) -

2.6.9 Kugel

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$\pi \quad \text{Kreiszahl} \quad 3,1415927$$

$$r \quad \text{Radius} \quad m$$

$$V \quad \text{Volumen} \quad m^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V \cdot 3}{4 \cdot \pi}}$$

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

$$r \quad \text{Radius} \quad m$$

$$\pi \quad \text{Kreiszahl} \quad 3,1415927$$

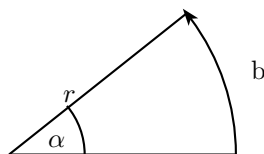
$$O \quad \text{Oberfläche} \quad m^2$$

$$r = \sqrt{\frac{O}{\pi \cdot 4}}$$

Interaktive Inhalte: $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$ - $r = \sqrt[3]{\frac{V \cdot 3}{4 \cdot \pi}}$ - $O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$ - $r = \sqrt{\frac{O}{\pi \cdot 4}}$ -

2.7 Trigonometrie

2.7.1 Gradmaß - Bogenmaß



$\alpha(^{\circ})$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\alpha(rad)$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
	0	0,5236	0,7854	1,0472	1,5708	2,0944	2,3562	2,618	3,1416
$\alpha(^{\circ})$	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	
$\alpha(rad)$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π	
	3,6652	3,927	4,1888	4,7124	5,236	5,4978	5,7596	6,2832	

Definiton Bogenmaß

Das Bogenmaß des Winkels x (rad), ist die Länge des Kreisbogens b durch Radius r .

$$x = \frac{b}{r}$$

Ist der Radius $r=1$ (Einheitskreis), ist das Bogenmaß des Winkels x (rad) die Länge des Kreisbogens b .

$$x = b$$

Umrechnung Gradmaß - Bogenmaß

$$\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot x$$

$$x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$$

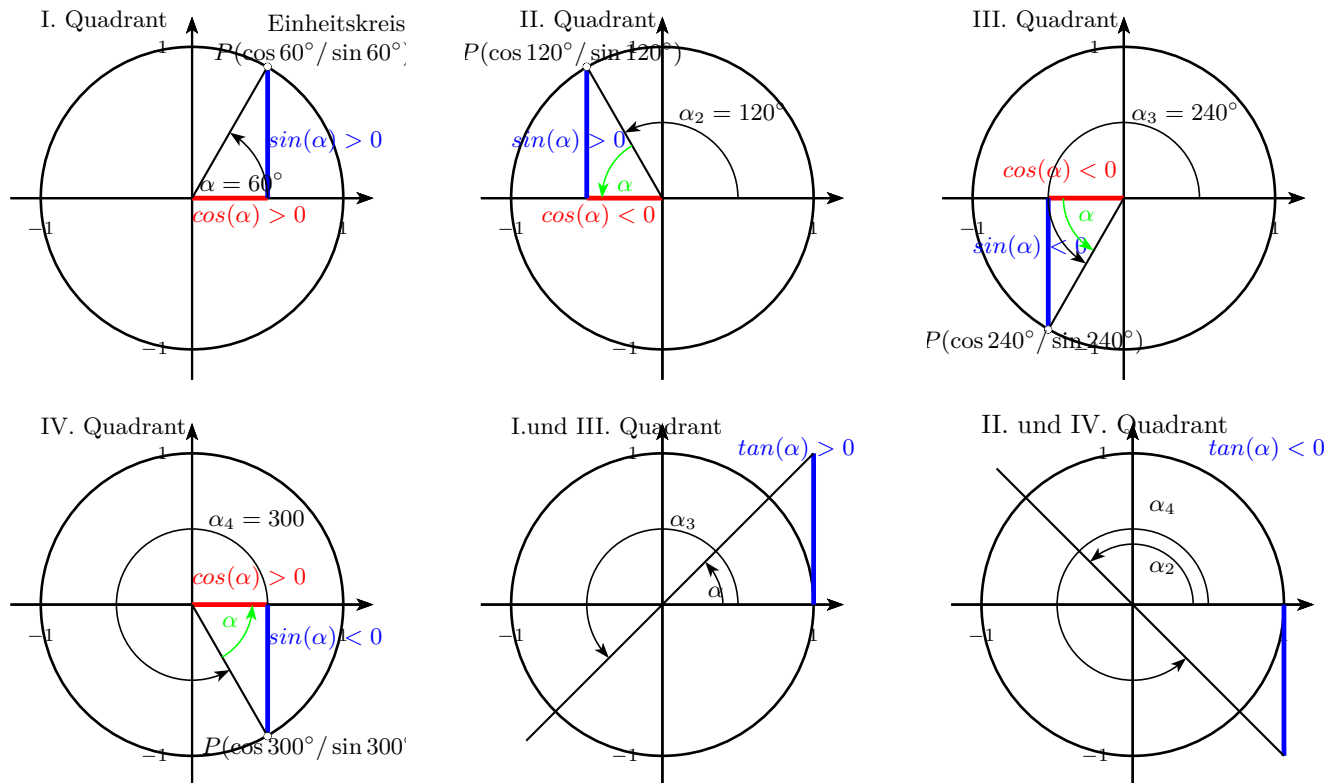
Kreiszahl π

α in Gradmaß $[^{\circ}]$

x in Bogenmaß $[rad]$

Interaktive Inhalte: $\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot x$ - $x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$ -

2.7.2 Definition



$\alpha(^{\circ})$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$x(rad)$	0°	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
$\alpha(^{\circ})$	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	
$x(rad)$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π	
$\sin \alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	
$\cos \alpha$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	
$\tan \alpha$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	

Definition

Punkt auf dem Einheitskreis:

$$P(\cos \alpha / \sin \alpha)$$

Steigung :

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = m$$

I. Quadrant: $\alpha = 60^{\circ}$

$$\cos(60^{\circ}) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(60^{\circ}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan(45^{\circ}) = 1$$

II. Quadrant: $\alpha_2 = 120^{\circ}$

$$\cos(120^{\circ}) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(120^{\circ}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan(135^{\circ}) = -1$$

III. Quadrant: $\alpha_3 = 240^{\circ}$

$$\cos(210^{\circ}) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin(210^{\circ}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan(225^{\circ}) = 1$$

IV. Quadrant: $\alpha_4 = 300^{\circ}$

$$\cos(300^{\circ}) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin(300^{\circ}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan(315^{\circ}) = -1$$

Komplementwinkel

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos(\alpha) \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin(\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - 30^\circ) &= \sin(60^\circ) = \cos(30^\circ) \\ \cos(90^\circ - 30^\circ) &= \cos(60^\circ) = \sin(30^\circ)\end{aligned}$$

Negative Winkel

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) \\ \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\ \tan(-\alpha) &= \frac{1}{\tan(\alpha)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(-30^\circ) &= -\sin(30^\circ) \\ \cos(-30^\circ) &= \cos(30^\circ) \\ \tan(-30^\circ) &= \frac{1}{\tan(30^\circ)}\end{aligned}$$

Interaktive Inhalte: $\sin \alpha - \cos \alpha - \tan \alpha$ - $\sin \alpha = y$ - $\cos \alpha = x$ - $\tan \alpha = m$ -

2.7.3 Quadrantenregel **α in Gradmaß**

I. Quadrant $0^\circ < \alpha < 90^\circ$
 $\sin(\alpha) > 0$ $\cos(\alpha) > 0$ $\tan(\alpha) > 0$

II. Quadrant $90^\circ < \alpha_2 < 180^\circ$
 $\sin(\alpha_2) > 0$ $\cos(\alpha_2) < 0$ $\tan(\alpha_2) < 0$
 $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha$
 $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$
 $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$
 $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan(\alpha)$

III. Quadrant $180^\circ < \alpha_3 < 270^\circ$
 $\sin(\alpha_3) < 0$ $\cos(\alpha_3) < 0$ $\tan(\alpha_3) > 0$
 $\alpha_3 = 180^\circ + \alpha$
 $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin(\alpha)$
 $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos(\alpha)$
 $\tan(180^\circ + \alpha) = \tan(\alpha)$

IV. Quadrant $270^\circ < \alpha_4 < 360^\circ$
 $\sin(\alpha_4) < 0$ $\cos(\alpha_4) > 0$ $\tan(\alpha_4) < 0$
 $\alpha_4 = 360^\circ - \alpha$
 $\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin(\alpha)$
 $\cos(360^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$
 $\tan(360^\circ - \alpha) = -\tan(\alpha)$

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{1}{2} \\ \text{I Quadrant: } \alpha_1 &= 30^\circ \\ \text{II Quadrant: } \alpha_2 &= 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \\ \sin \alpha &= -\frac{1}{2} \\ \text{III Quadrant: } \alpha_1 &= 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ \\ \text{IV Quadrant: } \alpha_2 &= 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ \\ \cos \alpha &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \text{I Quadrant: } \alpha_1 &= 45^\circ \\ \text{IV Quadrant: } \alpha_2 &= 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ \\ \cos \alpha &= -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \text{II Quadrant: } \alpha_1 &= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \\ \text{III Quadrant: } \alpha_2 &= 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ\end{aligned}$$

x in Bogenmaß

I. Quadrant $0 < x < \frac{\pi}{2}$
 $\sin(x) > 0$ $\cos(x) > 0$ $\tan(x) > 0$

II. Quadrant $\frac{\pi}{2} < x_2 < \pi$
 $\sin(x_2) > 0$ $\cos(x_2) < 0$ $\tan(x_2) < 0$
 $x_2 = \pi - x$
 $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
 $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
 $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$

III. Quadrant $\pi < x_3 < \frac{3\pi}{2}$
 $\sin(x_3) < 0$ $\cos(x_3) < 0$ $\tan(x_3) > 0$
 $x_3 = \pi + x$
 $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
 $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
 $\tan(\pi + x) = \tan(x)$

IV. Quadrant $\frac{3\pi}{2} < x_4 < 2\pi$
 $\sin(x_4) < 0$ $\cos(x_4) > 0$ $\tan(x_4) < 0$
 $x_4 = 2\pi - x$
 $\sin(2\pi - x) = -\sin(x)$
 $\cos(2\pi - x) = \cos(x)$
 $\tan(2\pi - x) = -\tan(x)$

Interaktive Inhalte: $\sin \alpha - \cos \alpha - \tan \alpha$ - $\sin \alpha = y$ - $\cos \alpha = x$ - $\tan \alpha = m$ -

2.7.4 Umrechnungen**tan - sin - cos**

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}$$

sin - cos

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

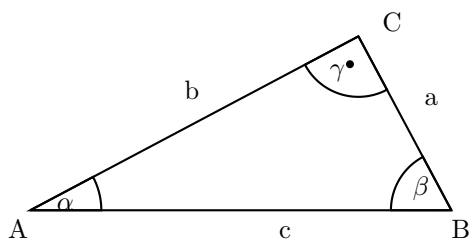
$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Interaktive Inhalte: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ - $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ - $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ - $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ - $\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha$ - $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$ -

2.7.5 Rechtwinkliges Dreieck



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

c Hypotenuse m
 a Gegenkathete zu α m
 α Winkel $^\circ$
 $a = \sin\alpha \cdot c$ $c = \frac{a}{\sin\alpha}$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \quad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

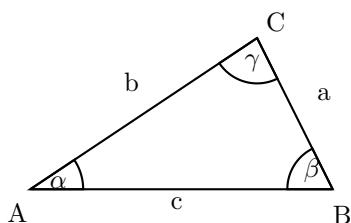
c Hypotenuse m
 b Ankathete zu α m
 α Winkel $^\circ$
 $b = \cos\alpha \cdot c$ $c = \frac{b}{\cos\alpha}$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \quad \tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

b Ankathete zu α m
 a Gegenkathete zu α m
 α Winkel $^\circ$
 $a = \tan\alpha \cdot b$ $b = \frac{a}{\tan\alpha}$

Interaktive Inhalte: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ - $a = \sin\alpha \cdot c$ - $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ - $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ - $b = \cos\alpha \cdot c$ - $c = \frac{b}{\cos\alpha}$ - $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ - $a = \tan\alpha \cdot b$ - $b = \frac{a}{\tan\alpha}$ -

2.7.6 Sinussatz

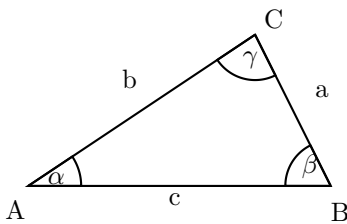


$$\begin{aligned}
 \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \\
 \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{b}{\sin \beta} \quad / \cdot \sin \beta \quad / \cdot \sin \alpha \\
 a \cdot \sin \beta &= b \cdot \sin \alpha \quad / : b \\
 \sin \alpha &= \frac{a \cdot \sin \beta}{b} \\
 \frac{\sin \alpha}{a} &= \frac{\sin \beta}{b} \quad / \cdot \sin \alpha \\
 \frac{\sin \alpha}{a} &= \frac{\sin \beta}{b} \quad / \cdot \sin \alpha \\
 a &= \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} \\
 \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{b}{\sin \beta} \\
 \frac{a}{\sin \beta} &= \frac{c}{\sin \gamma}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha &= \frac{a \cdot \sin \beta}{b} & \sin \alpha &= \frac{a \cdot \sin \gamma}{c} \\
 \sin \beta &= \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} & \sin \beta &= \frac{b \cdot \sin \gamma}{c} \\
 \sin \gamma &= \frac{c \cdot \sin \alpha}{a} & \sin \gamma &= \frac{c \cdot \sin \beta}{b} \\
 a &= \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} & a &= \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma} \\
 b &= \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} & b &= \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} \\
 c &= \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} & c &= \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \beta}
 \end{aligned}$$

Interaktive Inhalte: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ - $a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$ - $\sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \beta}{b}$ -

2.7.7 Kosinussatz



$$\begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \\
 a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad / - a^2 \\
 0 &= b^2 + c^2 - a^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad / + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \\
 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha &= b^2 + c^2 - a^2 \quad / : (2 \cdot b \cdot c) \\
 \cos \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \\
 b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \\
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha} & \cos \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \\
 b &= \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta} & \cos \beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \\
 c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma} & \cos \gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}
 \end{aligned}$$

Interaktive Inhalte: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$ - $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}$ - $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$ -

2.7.8 Kongruenzsätze - Berechnungen am Dreieck

Seite - Seite - Seite (SSS)

Seite	Seite	Seite
a	b	c

1. Zwei Winkel mit Kosinus-Satz berechnen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad / - a^2 \quad / + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2 \quad / : (2 \cdot b \cdot c)$$

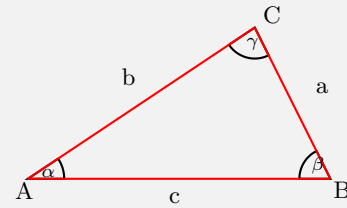
$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

entsprechend

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

2. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



$$a = 2,2 \quad b = 3,6 \quad c = 4$$

$$\cos \alpha = \frac{3,6^2 + 4^2 - 2,2^2}{2 \cdot 3,6 \cdot 4}$$

$$\cos \alpha = 0,8$$

$$\alpha = \arccos(0,8)$$

$$\alpha = 33,1^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{2,2^2 + 4^2 - 3,6^2}{2 \cdot 2,2 \cdot 4}$$

$$\cos \beta = 0,4$$

$$\beta = \arccos(0,4)$$

$$\beta = 63,4^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - 33,1^\circ - 63,4^\circ$$

$$\gamma = 83,5^\circ$$

Seite - Winkel - Seite (SWS)

Seite	Winkel	Seite
a	β	c
a	γ	b
b	α	c

1. Gegenüberliegende Seite mit Kosinussatz berechnen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}$$

entsprechend

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}$$

2. Winkel mit Kosinussatz berechnen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad / - a^2 \quad / + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2 \quad / : (2 \cdot b \cdot c)$$

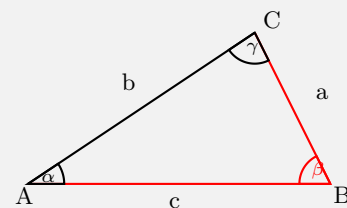
$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

entsprechend

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

3. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



$$a = 2,2 \quad c = 4 \quad \beta = 63,4^\circ$$

$$b = \sqrt{2,2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2,2 \cdot 4 \cdot \cos 63,4^\circ}$$

$$b = 3,6$$

$$\cos \alpha = \frac{3,6^2 + 4^2 - 2,2^2}{2 \cdot 3,6 \cdot 4}$$

$$\cos \alpha = 0,8$$

$$\alpha = \arccos(0,8)$$

$$\alpha = 33,1^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - 33,1^\circ - 63,4^\circ$$

$$\gamma = 83,5^\circ$$

Winkel - Seite - Winkel (WSW,WWS)

Winkel	Seite	Winkel	Winkel	Winkel	Seite
α	c	β	α	β	a
α	b	γ	α	β	b
β	a	γ	α	γ	a
			α	γ	c
			β	γ	b
			β	γ	c

1. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

2. Eine Seite über den Sinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} \quad / \cdot \sin \beta$$

$$b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$$

entsprechend

$$b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} \quad c = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \beta}$$

$$a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} \quad a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma}$$

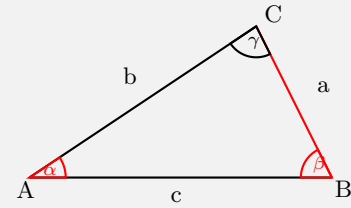
3. Fehlende Seite mit dem Kosinussatz berechnen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}$$

entsprechend

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}$$



$$a = 2,2 \quad \alpha = 33,1^\circ \quad \beta = 63,4^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\gamma = 180^\circ - 33,1^\circ - 63,4^\circ$$

$$\gamma = 83,5^\circ$$

$$b = \frac{2,2 \cdot \sin 63,4^\circ}{\sin 33,1^\circ}$$

$$b = 3,6$$

$$c = \sqrt{2,2^2 + 3,6^2 - 2 \cdot 2,2 \cdot 3,6 \cdot \cos 83,5^\circ}$$

$$c = 4$$

Seite - Seite - Winkel (SsW)

Seite	Seite	Winkel	
a	b	α	$a > b$
a	b	β	$b > a$
a	c	α	$a > c$
a	c	γ	$c > a$
b	c	β	$b > c$
b	c	γ	$c > b$

1. Winkel mit dem Sinussatz berechnen

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad / \cdot \sin \beta \quad / \cdot \sin \alpha$$

$$a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha \quad / : b$$

$$\sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \beta}{b}$$

entsprechend

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} \quad \sin \gamma = \frac{c \cdot \sin \alpha}{a}$$

2. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen

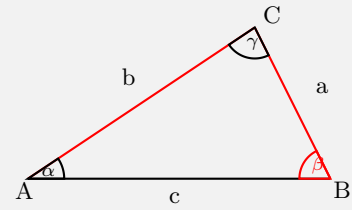
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

3. Fehlende Seite mit dem Kosinussatz berechnen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \beta \quad a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}$$

entsprechend

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}$$



$$a = 2,2 \quad b = 3,6 \quad \beta = 63,4^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{2,2 \cdot \sin 63,4^\circ}{3,6}$$

$$\sin \alpha = 0,5$$

$$\alpha = \arcsin(0,5)$$

$$\alpha = 33,1^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - 33,1^\circ - 63,4^\circ$$

$$\gamma = 83,5^\circ$$

$$c = \sqrt{2,2^2 + 3,6^2 - 2 \cdot 2,2 \cdot 3,6 \cdot \cos 83,5^\circ}$$

$$c = 4$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

3 Funktionen

3.1 Grundlagen

3.1.1 Definition

Jedem Element x aus der Definitionsmenge D wird **genau** ein Element y aus der Wertemenge W zugeordnet.

x - unabhängige Variable

y - abhängige Variable

Zu jeder Funktion gehört ein Definitionsbereich.

Ein Tafel Schokolade kostet 2,- Euro.

Wieviel kosten 1, 2, 3, 4, 5 Tafeln ?

x = Anzahl der Tafeln

y = Preis

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

$$\mathbb{D} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$\mathbb{W} = \{2; 4; 6; 8; 10\}$$

Funktionsgleichung: $y = 2 \cdot x$

x	1	2	3	4	4
y	2	4	6	8	10

keine eindeutige Zordnung \Rightarrow keine Funktion

Schreibweise

$y = f(x)$ - Funktionsgleichung, Funktion

$f(x)$ - Funktionsterm

$f : x \mapsto y$ x -Werte werden auf y -Werte abgebildet

$f : x \mapsto f(x)$ x -Werte werden auf $f(x)$ abgebildet

$$y = 2 \cdot x$$

$$f(x) = 2 \cdot x$$

$$f : x \mapsto 2 \cdot x$$

Definitions- und Wertebereich

• Definitionsbereich

Zahlenbereich der für x (unabhängige Variable) eingesetzt werden darf.

Einschränkungen des Definitionsbereichs sind nötig bei:

- Textaufgaben, bei denen nur bestimmte x -Wert möglich sind.
- Bruchfunktionen: Division durch Null ist nicht erlaubt. (Nenner $\neq 0$)
- Wurzelfunktionen: unter der Wurzel (Radikant) dürfen keine negativen Zahlen stehen. (Radikant ≥ 0)
- Logarithmusfunktionen: das Argument muss positiv sein. (Argument > 0)

• Wertebereich

Zahlenbereich den y (abhängige Variable Funktionswert) annehmen kann.

$$y = (x+3)^{-1} + 1 = \frac{1}{x+3} + 1 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$$

$$y = \log_3(x) \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

3.1.2 Umkehrfunktion

Definition

Jedem Element y aus der Wertemenge W wird **genau** ein Element x aus der Definitionsmenge D zugeordnet.

y - unabhängige Variable

x - abhängige Variable

Funktionen sind umkehrbar, wenn sie im Definitionsbereich streng monoton steigen oder streng monoton fallen.

Schreibweise

$x = f^{-1}(y)$ - Umkehrfunktion

$f : y \mapsto x$ y -Werte werden auf x -Werte abgebildet

Nach dem Vertauschen der Variablen:

$y = f^{-1}(x)$ - Umkehrfunktion

Ermittlen der Umkehrfunktion

Graphisch: Funktionsgraph an der Winkelhalbierenden $y = x$ spiegeln.

Algebraisch: Funktionsgleichung nach x auflösen und die Variablen x und y vertauschen.

$$y = 2 \cdot x - 3 \quad /+3 \quad /:2$$

$$\frac{y+3}{2} = x$$

$$\frac{1}{2} \cdot y + \frac{3}{2} = x$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot y + \frac{3}{2}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \cdot y + \frac{3}{2}$$

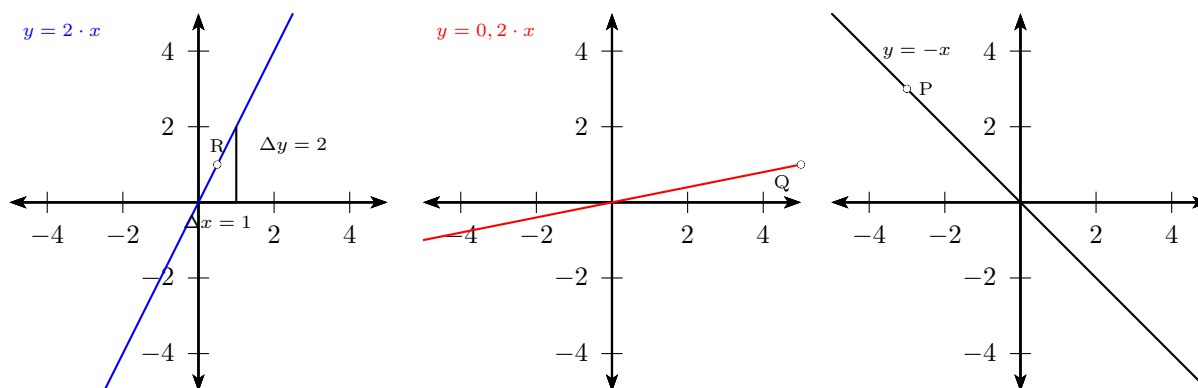
Vertauschen der Variablen:

$$y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$$

3.2 Lineare Funktion

3.2.1 Ursprungsgerade



Ursprungsgerade

$$y = m \cdot x$$

Steigung-Proportionalitätsfaktor: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$m > 0$ steigend

$m = 0$ $y = 0$ entspricht der x-Achse

$m < 0$ fallend

Winkelhalbierende des I und III Quadranten: $y = x$

Winkelhalbierende des II und IV Quadranten: $y = -x$

$$y = m \cdot x$$

$$y = 2 \cdot x \quad m = 2$$

$$R(\frac{1}{2}/y) \quad x = \frac{1}{2}$$

$$y = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad R(\frac{1}{2}/1)$$

$$m = \frac{y}{x}$$

$$Q(5/1) \quad y = 1 \quad x = 5$$

$$m = \frac{1}{5} \quad y = \frac{1}{5}x$$

$$x = \frac{y}{m}$$

$$P(x/3) \quad y = -1 \cdot x$$

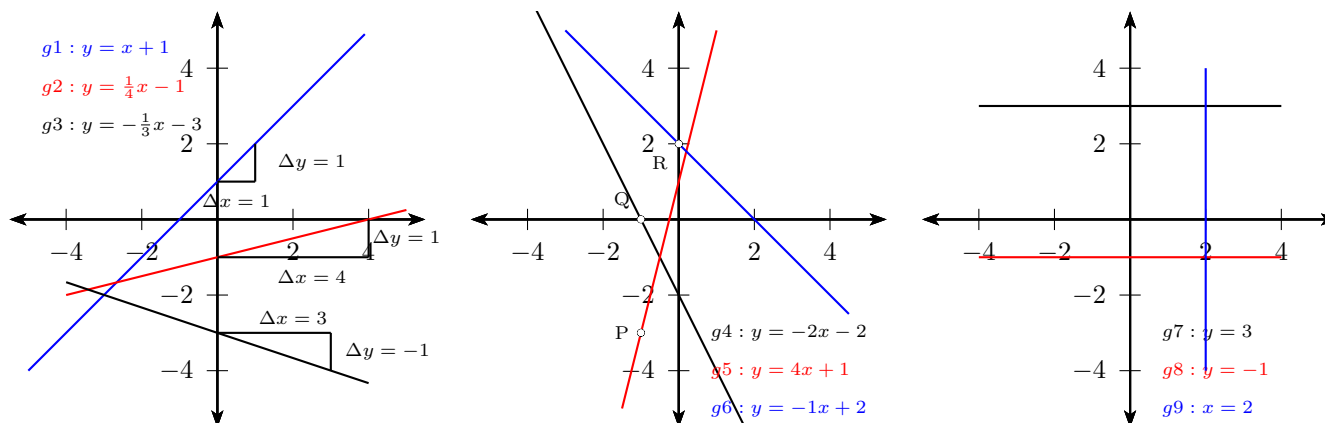
$$m = -1 \quad y = 3$$

$$3 = -1 \cdot x$$

$$x = -3 \quad P(-3/3)$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - $y = m \cdot x$ - $x = \frac{y}{m}$ - $m = \frac{y}{x}$ -

3.2.2 Graph und Eigenschaften



Gerade - lineare Funktion

$$y = m \cdot x + t \quad f(x) = m \cdot x + t \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

$$\text{Steigung: } m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m > 0 \quad \text{steigend}$$

$$m = 0 \quad \text{parallel zur x-Achse}$$

$$m < 0 \quad \text{fallend}$$

$$\text{y-Achsenabschnitt: } t$$

Besondere Geraden:

$$y = 0 \quad \text{x-Achse}$$

$$y = t \quad \text{Parallele zur x-Achse im Abstand } t$$

$$x = 0 \quad \text{y-Achse}$$

$$x = k \quad \text{Parallele zur y-Achse im Abstand } k$$

$$g1 : y = x + 1$$

$$\text{Steigung: } m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$m > 0 \quad \text{steigend}$$

$$\text{y-Achsenabschnitt: } t = 1$$

$$g2 : y = \frac{1}{4}x - 1$$

$$\text{Steigung: } m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4}$$

$$m > 0 \quad \text{steigend}$$

$$\text{y-Achsenabschnitt: } t = -1$$

$$g3 : y = -\frac{1}{3}x - 3$$

$$\text{Steigung: } m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{3}$$

$$m < 0 \quad \text{fallend}$$

$$\text{y-Achsenabschnitt: } t = -3$$

$$g5 : y = 4x + 1$$

$$\text{Steigung: } m = 4$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{1}$$

$$\text{y-Achsenabschnitt: } t = 1$$

$$P(-1/y) \quad x = 1$$

$$y = 4 \cdot (-1) + 1$$

$$y = -1 \quad P(-1/-3)$$

Schnittpunkt mit der x-Achse - Nullstelle

$$y = mx + t$$

$$y = 0 \quad mx + t = 0$$

$$x = \frac{-t}{m}$$

$$g4 : y = -2x - 2$$

$$0 = -2x - 2 \quad / + 2$$

$$2 = -2x \quad / : (-2)$$

$$x = -1 \quad Q(-1/0)$$

Schnittpunkt mit der y-Achse

$$x = 0 \quad y = m \cdot 0 + t$$

$$y = m \cdot 0 + t$$

$$y = t$$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0$

$$g5 : y = -x + 2$$

$$y = -1 \cdot 0 + 2$$

$$y = 2$$

Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse

Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Vorzeichentabelle eintragen.

	$x <$	x_1	$< x$
$f(x)$	+	0	-

+ $f(x) > 0$ Graph oberhalb der x-Achse

- $f(x) < 0$ Graph unterhalb der x-Achse

$$g5 : y = 4x + 1 = 0$$

$$4x + 1 = 0 \quad / - 1$$

$$4x = -1 \quad / : 4$$

$$x = \frac{-1}{4}$$

Wert kleiner als die Nullstelle wählen: $x = -1$

$$g5 : y = 4 \cdot (-1) + 1 = -3$$

Minuszeichen eintragen

Wert größer als die Nullstelle wählen: $x = 0$

$$g5 : y = 4 \cdot (0) + 1 = +1$$

Pluszeichen eintragen

Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-\frac{1}{4}$	$< x$
$f(x)$	-	0	+

+ $f(x) > 0$ Graph oberhalb der x-Achse

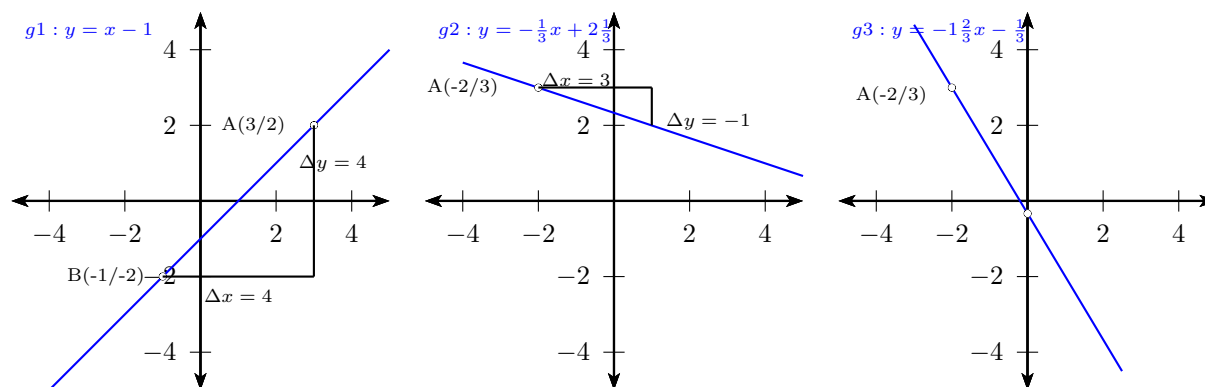
$$4x + 1 > 0 \quad \text{für } x \in]-\frac{1}{4}; \infty[$$

- $f(x) < 0$ Graph unterhalb der x-Achse

$$4x + 1 < 0 \quad \text{für } x \in]-\infty; -\frac{1}{4}[$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [Eigenschaften](#) - $y = m \cdot x + t$ - $m = \frac{y-t}{x}$ - $x = \frac{y-t}{m}$ - $t = y - m \cdot x$ -

3.2.3 Geradengleichung aufstellen



Gerade durch 2 Punkte

$$y = m \cdot x + t$$

$$A(xa/ya) \quad B(xb/yb)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ya - yb}{xa - xb}$$

$$t = ya - m \cdot xa$$

$$A(3/2) \quad B(-1/-2)$$

$$m = \frac{2+2}{3+1}$$

$$m = 1$$

$$2 = 1 \cdot 3 + t$$

$$2 = 3 + t \quad / -3$$

$$t = 2 - 3$$

$$t = -1$$

$$g_1: y = x - 1$$

Gerade durch den Punkt A mit der Steigung m

$$y = m \cdot x + t$$

$$A(xa/ya) \quad \text{Steigung: } m$$

$$t = ya - m \cdot xa$$

$$A(-2/3) \quad m = -\frac{1}{3}$$

$$3 = -\frac{1}{3} \cdot (-2) + t$$

$$3 = \frac{2}{3} + t \quad / -\frac{2}{3}$$

$$t = 3 - \frac{2}{3}$$

$$t = 2\frac{1}{3}$$

$$g_2: y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$$

Gerade durch den Punkt A und dem y-Achsenabschnitt t

$$A(xa/ya) \quad \text{y-Achsenabschnitt: } t$$

$$m = \frac{ya - t}{xa}$$

$$A(-2/3) \quad t = -\frac{1}{3}$$

$$3 = m \cdot (-2) - \frac{1}{3}$$

$$3 = m \cdot (-2) - \frac{1}{3} \quad / +\frac{1}{3}$$

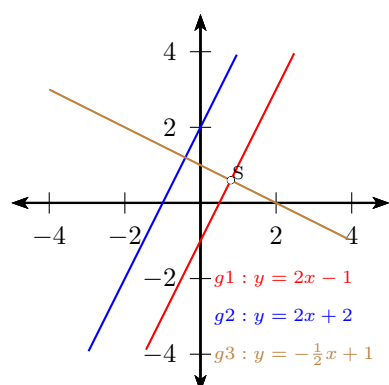
$$3 + \frac{1}{3} = m \cdot (-2) \quad / : -2$$

$$m = -1\frac{2}{3}$$

$$g_3: y = -1\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

Interaktive Inhalte: [2 Punkte](#) - [Punkt und Steigung](#) - [Punkt und y-Achsenabschnitt](#) -

3.2.4 Gerade - Gerade



Parallele Geraden

$$g1 : y = m_1x + t_1 \quad g2 : y = m_2x + t_2$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow g1 \parallel g2$$

$$g1 : y = 2x - 1 \quad g2 : y = 2x + 2$$

$$m_1 = m_2$$

$$2 = 2$$

$$\Rightarrow g1 \parallel g2$$

Senkrechte Geraden

$$g1 : y = m_1x + t_1 \quad g3 : y = m_3x + t_3$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow g1 \perp g3$$

$$g1 : y = 2x - 1 \quad g3 : y = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$$

$$\Rightarrow g1 \perp g3$$

Schnittpunkt zweier Geraden

$$g1 : y = m_1x + t_1 \quad g3 : y = m_3x + t_3$$

- Terme gleichsetzen:

$$m_1x + t_1 = m_2x + t_2$$

- x-Wert durch umformen berechnen
- x-Wert in eine der beiden Funktionen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen

$$g1 : y = 2x - 1 \quad g2 : y = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 1 \quad / + \frac{1}{2}x$$

$$2\frac{1}{2}x - 1 = 1 \quad / + 1$$

$$2\frac{1}{2}x = 2 \quad / : 2\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{4}{5}$$

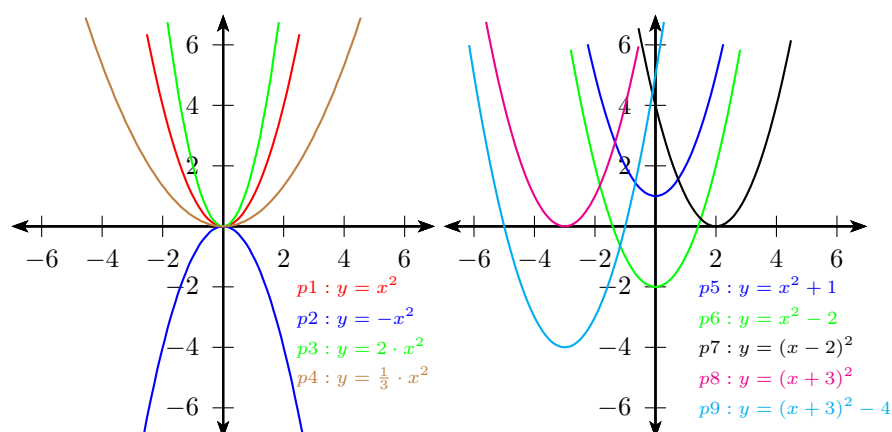
$$g1 : y = 2 \cdot \frac{4}{5} - 1$$

$$S(\frac{4}{5} / \frac{3}{5})$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - $y = m_1x + t_1$ - $y = m_2x + t_2$ -

3.3 Quadratische Funktion

3.3.1 Graph und Eigenschaften



Formen der Parabelgleichung

Normalparabel	$y = x^2$
Allgemeine Form	$y = ax^2 + bx + c$
Scheitelform	$y = a(x - x_s)^2 + y_s$
faktorierte Form	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$
a	Formfaktor
$a > 0$	nach oben geöffnet
$a < 0$	nach unten geöffnet
$ a > 1$	gestreckt
$ a < 1$	gestaucht
x_s	Verschiebung in x-Richtung
y_s	Verschiebung in y-Richtung
$S(x_s/y_s)$	Scheitelkoordinaten
x_1, x_2	Nullstellen

$p1 : y = x^2$	$S(0/0)$	Normalparabel nach oben geöffnet
$p2 : y = -x^2$	$S(0/0)$	Normalparabel nach unten geöffnet
$p3 : y = 2x^2$	$S(0/0)$	$a = 2$ gestreckt
$p4 : y = \frac{1}{3}x^2$	$S(0/0)$	$a = \frac{1}{3}$ gestaucht
$p5 : y = x^2 + 1$	$S(0/1)$	1 nach oben verschoben
$p6 : y = x^2 - 2$	$S(0/-2)$	2 nach unten verschoben
$p7 : y = (x - 2)^2$	$S(2/0)$	2 nach rechts verschoben
$p8 : y = (x + 3)^2$	$S(-3/0)$	3 nach links verschoben
$p9 : y = (x + 3)^2 - 4$	$S(-3/-4)$	3 nach links verschoben und 4 nach unten verschoben

Definitions- und Wertebereich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$a > 0 \quad \mathbb{W} = [y\text{-Wert des Scheitels}; \infty[$
$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; y\text{-Wert des Scheitels}]$

$p2 : y = -x^2$	$S(0/0)$
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{W} =]-\infty; 0]$
$p9 : y = (x + 3)^2 - 4$	$S(-3/-4)$
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{W} = [-4; \infty[$

Schnittpunkt mit der x-Achse - Nullstellen

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = 0 \quad ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$D = 0 \text{ eine Nullstelle}$$

$$D > 0 \text{ zwei Nullstellen}$$

$$D < 0 \text{ keine Nullstelle}$$

$$p9: y = x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$1x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6 + 4}{2} \quad x_2 = \frac{-6 - 4}{2}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -5$$

$$D > 0 \Rightarrow \text{zwei Nullstellen}$$

$$p9: y = x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x + 1)$$

$$p5: y = x^2 + 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{-0 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{2}{2}$$

$$D < 0 \Rightarrow \text{keine Nullstelle}$$

$$p8: y = x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm 0}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm 0}{2}$$

$$x_{1/2} = -3$$

$$D = 0 \Rightarrow \text{eine Nullstellen}$$

Schnittpunkt mit der y-Achse

$$p: y = ax^2 + bx + c$$

$$x = 0 \quad p: y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$p(x) = c \quad Q(0/c)$$

$$p9: y = x^2 + 6x + 5$$

$$y = 0^2 + 6 \cdot 0 + 5$$

$$y = 5 \quad Q(0/5)$$

Allgemeine Form in Scheitelform

Allgemeine Form

$$y = ax^2 + bx + c$$

Scheitelform

$$y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

Quadratische Ergänzung:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c$$

$$y = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2] + c$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$x_s = -\frac{b}{2 \cdot a}$$

$$y_s = c - \frac{b^2}{4 \cdot a}$$

Scheitelformel:

$$S(x_s/y_s)$$

$$S(-\frac{b}{2 \cdot a}/c - \frac{b^2}{4 \cdot a})$$

quadratische Ergänzung

$$p9: y = x^2 + 6x + 5$$

$$p9: y = (x^2 + 6x + 5)$$

$$p9: y = (x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 + 5)$$

$$p9: y = [(x + 3)^2 - 3^2 + 5]$$

$$p9: y = [(x + 3)^2 - 9 + 5]$$

$$p9: y = [(x + 3)^2 - 4]$$

$$p9: y = (x + 3)^2 - 4$$

$$\text{Scheitel}(-3/-4)$$

Scheitelformel

$$y = x^2 + 6x + 5$$

$$x_s = -\frac{6}{2 \cdot 1}$$

$$x_s = -3$$

$$y_s = 5 - \frac{6^2}{4 \cdot 1}$$

$$y_s = -4$$

$$\text{Scheitel}(-3/-4)$$

$$p9: y = (x + 3)^2 - 4$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c](#) - [Eigenschaften](#) -

3.3.2 Parabelgleichung aufstellen und umformen

Parabelgleichung aus 2 Punkten und dem Formfaktor

Gegeben: Formfaktor a und Punkte $A(x_a/y_a)$ und $B(x_b/y_b)$

- Formfaktor a und Punkt $A(x_a/y_a)$ in die Funktionsgleichung einsetzen.

$$y_a = ax_a^2 + bx_a + c$$

- Formfaktor a und Punkt $B(x_b/y_b)$ in die Funktionsgleichung einsetzen.

$$y_b = ax_b^2 + bx_b + c$$

siehe Lösung von linearen Gleichungssystemen

$$a = -2 \quad A(2/-1) \quad B(-1/4)$$

Formfaktor a einsetzen:

$$y = -2x^2 + bx + c$$

I) Punkt A einsetzen

$$-1 = -2 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$$

$$-1 = -8 + 2b + c \quad / + 8 \quad / - 2b$$

$$-1 + 8 - 2b = c$$

$$7 - 2b = c$$

II) Punkt B einsetzen

$$4 = -2 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$$

$$4 = -2 - 1b + c$$

I in II

$$4 = -2 - 1b + 7 - 2b$$

$$4 = 5 - 3b \quad / - 5 \quad / : (-3)$$

$$b = \frac{4-5}{-3}$$

$$b = \frac{1}{3}$$

$$c = 7 - 2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$c = 6\frac{1}{3}$$

$$y = -2x^2 + \frac{1}{3}x + 6\frac{1}{3}$$

Parabelgleichung aus Formfaktor und dem Scheitel

Formfaktor a und Scheitel in Scheitelform einsetzen:

$$y = a(x - xs)^2 + ys$$

Binomische Formel auflösen:

$$y = a(x^2 - 2 \cdot x \cdot xs + xs^2) + ys$$

$$y = a \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot x \cdot xs + a \cdot xs^2 + ys$$

$$\text{Formfaktor: } a = -\frac{1}{2} \quad S(2/-3)$$

$$y = a(x - xs)^2 + ys$$

$$y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3$$

$$y = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2^2) - 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 5$$

Parabelgleichung aus einem Punkt und dem Scheitel

Punkt $A(x_a/y_a)$ und Scheitel $S(x_s/y_s)$ in die Scheitelform einsetzen und nach a auflösen. $y_a = a(x_a - xs)^2 + ys$

$$A(2/-4) \quad S(1/2)$$

$$y = a(x - xs)^2 + ys$$

$$-4 = a(2 - 1)^2 + 2$$

$$-4 = 1 \cdot a + 2 \quad / - 2 \quad / : 1$$

$$a = \frac{-4-2}{1}$$

$$a = -6$$

$$y = -6(x - 1)^2 + 2$$

$$y = -6(x^2 - 2x + 1^2) + 2$$

$$y = -6x^2 + 12x - 4$$

Parabelgleichung aus Formfaktor und Nullstellen

Formfaktor a und Nullstellen in die faktorisierte Form einsetzen

$$P(x_1/0) \quad Q(x_2/0) \quad a$$

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2)$$

$$y = ax^2 - a \cdot x_1 \cdot x - a \cdot x_2 \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$\text{Nullstellen } x_1 = 1 \quad x_2 = -4 \quad a = 7$$

$$P(1/0) \quad Q(-4/0) \quad a = 7$$

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = 7(x - 1)(x + 4)$$

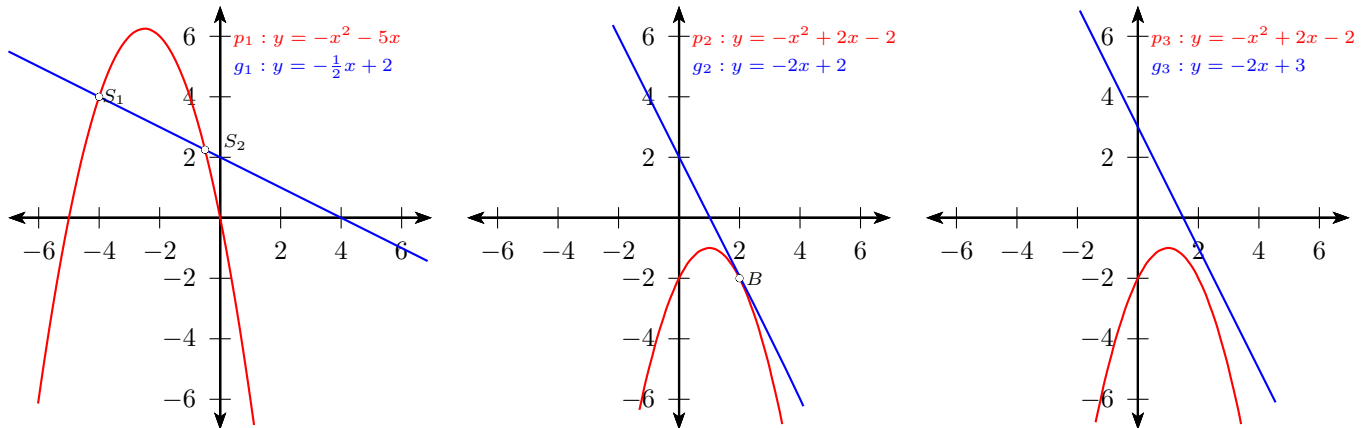
$$y = 7(x^2 + 4x - 1x - 4)$$

$$y = 7(x^2 + 3x - 4)$$

$$y = 7x^2 + 21x - 28$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [2 Punkte und Formfaktor](#) - [Scheitel und Formfaktor](#) - [Scheitel und Punkt](#) - [Nullstellen](#) - [Faktorisierte Form](#) -

3.3.3 Parabel - Gerade



$$p: y = ax^2 + bx + c \quad g: y = mx + t$$

Terme gleichsetzen: $ax^2 + bx + c = mx + t$

Term nach Null umformen: $ax^2 + (b - m)x + c - t = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Diskriminante:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$D = 0$ Gerade ist Tangente - Berührungspunkt

$D > 0$ Gerade ist Sekante - zwei Schnittpunkte

$D < 0$ Gerade ist Passante - keinen Schnittpunkt

x-Wert(e) in eine der beiden Funktionen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen

$$p_1: y = -x^2 - 5x \quad g_1: y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$-1x^2 - 5x = -\frac{1}{2}x + 2 \quad / + \frac{1}{2}x / - 2$$

$$-1x^2 - 5x + \frac{1}{2}x - 2 = 0$$

$$-1x^2 - 4\frac{1}{2}x - 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+4\frac{1}{2} \pm \sqrt{(-4\frac{1}{2})^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+4\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4}}}{-2}$$

$$x_{1/2} = \frac{4\frac{1}{2} \pm 3\frac{1}{2}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{4\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}}{-2} \quad x_2 = \frac{4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}}{-2}$$

$$x_1 = -4 \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

$D > 0$ Gerade ist Sekante - zwei Schnittpunkte

$$y = -1(-4)^2 - 5(-4) = 4 \quad S_1(-4/4)$$

$$y = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) + 2 = 2\frac{1}{4} \quad S_2(-\frac{1}{2}/2\frac{1}{4})$$

$$p_2: y = -x^2 + 2x - 2 \quad g_2: y = -2x + 2$$

$$-x^2 + 2x - 2 = -2x + 2$$

$$-x^2 + 2x - 2 + 2x - 2 = 0$$

$$-x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-4 \pm 0}{-2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 + 0}{-2} \quad x_2 = \frac{-4 - 0}{-2}$$

$$x_{1/2} = 2$$

$D = 0$ Gerade ist Tangente - Berührungspunkt

$$y = -2$$

$$B(2/-2)$$

$$p_3: y = -x^2 + 2x - 2 \quad g_3: y = -2x + 3$$

$$-x^2 + 2x - 2 = -2x + 3$$

$$-x^2 + 2x - 2 + 2x - 3 = 0$$

$$-x^2 + 4x - 5 = 0$$

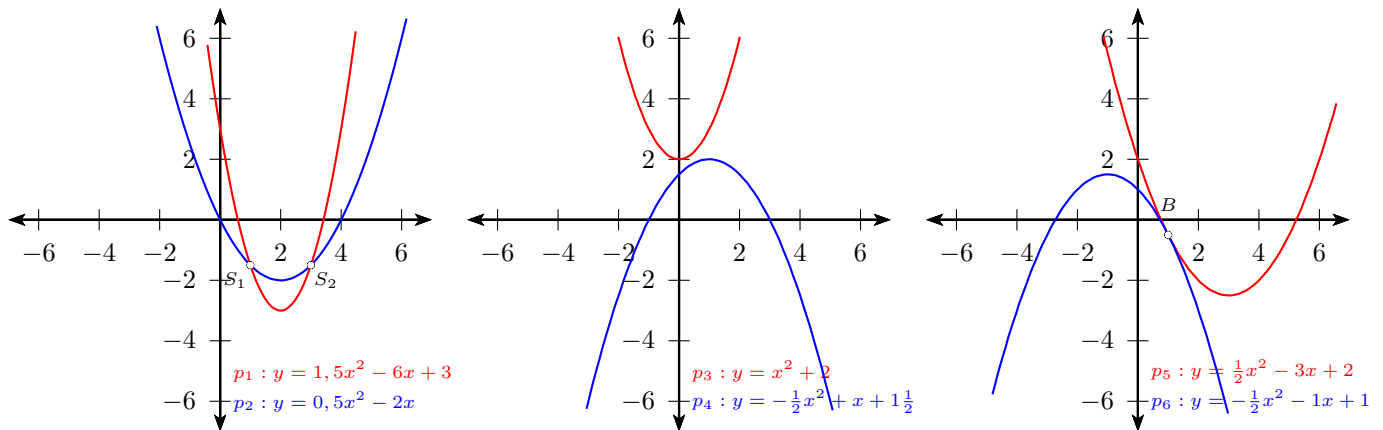
$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{-2}$$

$D < 0$ Gerade ist Passante - keinen Schnittpunkt

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [Parabel-Gerade](#) -

3.3.4 Parabel - Parabel



$$p_1: y = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

$$p_2: y = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

Terme gleichsetzen:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

Term nach Null umformen:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Diskriminante: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$D = 0$ Berührungspunkt

$D > 0$ zwei Schnittpunkte

$D < 0$ keinen Schnittpunkt

x-Wert(e) in eine der beiden Funktionen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen

$$p_1: y = 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3 \quad p_2: y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

$$1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3 = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

$$1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3 - (\frac{1}{2}x^2 - 2x) = 0$$

$$1x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} \quad x_2 = \frac{4-2}{2}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 1$$

$D > 0$ zwei Schnittpunkte

$$y = 1\frac{1}{2} \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 3 = -1\frac{1}{2} \quad S_1(3 / -1\frac{1}{2})$$

$$y = 1\frac{1}{2} \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 3 = -1\frac{1}{2} \quad S_2(1 / -1\frac{1}{2})$$

$$p_3: y = x^2 + 2 \quad p_4: y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2}$$

$$x^2 + 2 - (-\frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2}) = 0$$

$$1\frac{1}{2}x^2 - 1x + \frac{1}{2} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}{2 \cdot 1\frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{-2}}{3}$$

$D < 0$ keinen Schnittpunkt

$$p_5: y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 \quad p_6: y = -\frac{1}{2}x^2 - 1x + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 = -\frac{1}{2}x^2 - 1x + 1$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 - (-\frac{1}{2}x^2 - 1x + 1) = 0$$

$$1x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+0}{2} \quad x_2 = \frac{2-0}{2}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1$$

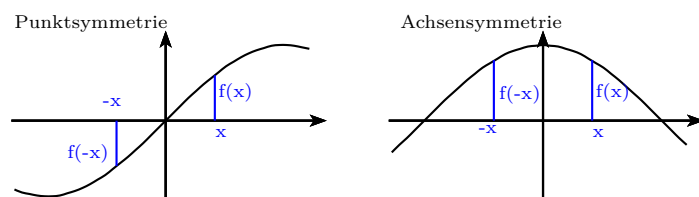
$D = 0$ Berührungspunkt

$$B(1 / -\frac{1}{2})$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [Parabel-Parabel](#) -

3.4 Eigenschaften von Funktionen

3.4.1 Symmetrie



Punktsymmetrie zum Ursprung - ungerade Funktion

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x) \text{ ist eine ungerade Funktion}$$

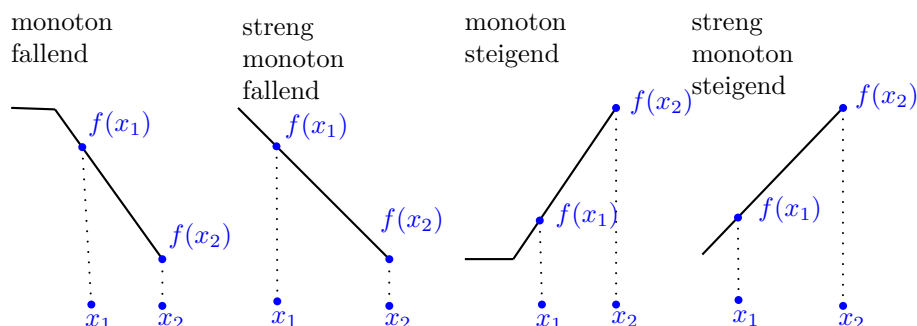
$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^5 + 3x^3 \\ f(-x) &= -2 \cdot (-x)^5 + 3 \cdot (-x)^3 \\ f(-x) &= -(-2 \cdot x^5 + 3 \cdot x^3) \\ f(-x) &= -f(x) \end{aligned}$$

Achsensymmetrie zur y-Achse - gerade Funktion

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ ist eine gerade Funktion}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + 2 \cdot x^2 + 1 \\ f(-x) &= (-x)^4 + 2 \cdot (-x)^2 + 1 \\ f(-x) &= x^4 + 2 \cdot x^2 + 1 \\ f(-x) &= f(x) \end{aligned}$$

3.4.2 Monotonie



$$x_1 < x_2$$

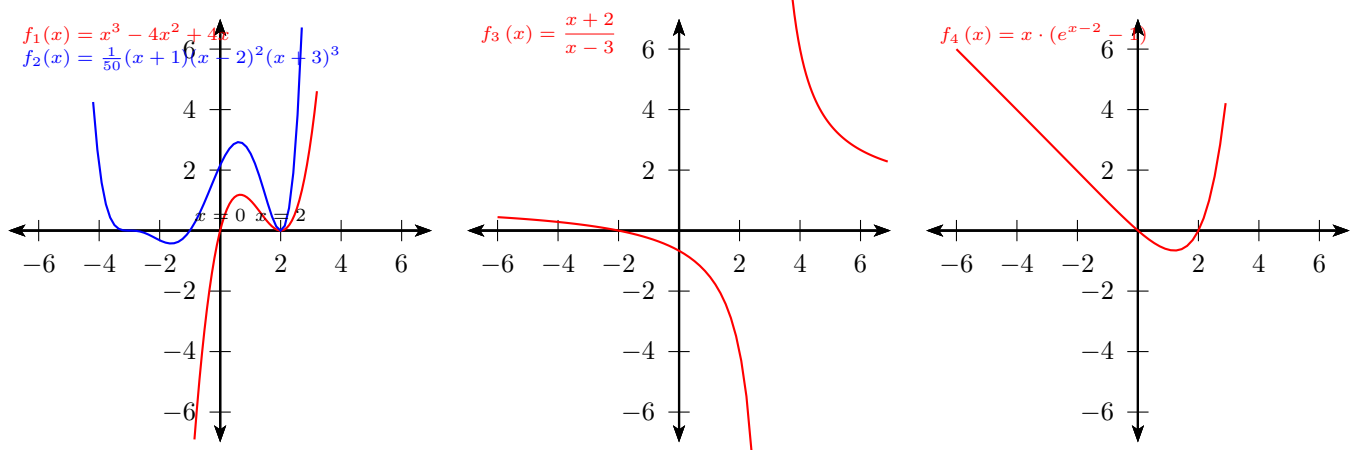
$$\text{monoton steigend} \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$\text{streng monoton steigend} \quad \text{sms} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

$$\text{monoton fallend} \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$\text{streng monoton fallend} \quad \text{smf} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

3.4.3 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen



Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

Funktionsterm gleich Null setzen und die Gleichung lösen.

$f(x) = 0$ (siehe Algebra-Gleichungen)

- Vielfachheit der Nullstelle gerade
 - Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel (VZW)
 - Berührungspunkt mit der x-Achse (Hoch- oder Tiefpunkt)
- Vielfachheit der Nullstelle ungerade
 - Nullstelle mit Vorzeichenwechsel (VZW)
 - Schnittpunkt mit der x-Achse

Einfache Nullstelle mit VZW: $f(x) = (x - x_1) \cdot \dots$

Zweifache Nullstelle ohne VZW: $f(x) = (x - x_1)^2 \cdot \dots$

Dreifache Nullstelle mit VZW: $f(x) = (x - x_1)^3 \cdot \dots$

Vierfache Nullstelle ohne VZW: $f(x) = (x - x_1)^4 \cdot \dots$

$$f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x - 2)^2$$

Einfache Nullstelle mit VZW: $x = 0$ $N_1(0/0)$

Zweifache Nullstelle ohne VZW: $x = 2$ $N_2(2/0)$

$$f_2(x) = \frac{1}{50}(x+1)(x-2)^2(x+3)^3$$

Einfache Nullstelle mit VZW: $x = -1$ $N_1(-1/0)$

Zweifache Nullstelle ohne VZW: $x = 2$ $N_2(2/0)$

Dreifache Nullstelle mit VZW: $x = -3$ $N_3(-3/0)$

$$f_4(x) = x \cdot (e^{x-2} - 1)$$

$$e^{(x-2)} - 1 = 0 \quad / + 1$$

$$e^{(x-2)} = 1 \quad / \ln$$

$$x - 2 = \ln(1) \quad / + 2$$

$$x = 2$$

Schnittpunkte mit der y-Achse

$x=0$ in den Funktionsterm einsetzen.

$$f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x - 2)^2$$

$$f_1(0) = 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0$$

$$P(0/0)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{50}(x+1)(x-2)^2(x+3)^3$$

$$f_2(0) = \frac{1}{50}(0+1)(0-2)^2(0+3)^3 = 2, 16$$

$$Q(0/2, 16)$$

Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse

Bei Funktionen kann sich das Vorzeichen nur an den Nullstellen oder den Definitionslücken ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Tabelle eintragen.

Vorzeichentabelle mit $f(x)$

	$x <$	x_1	$< x$
$f(x)$	+	0	-
Graph	oberhalb	0	unterhalb

+ $f(x) > 0$ Graph oberhalb der x-Achse
- $f(x) < 0$ Graph unterhalb der x-Achse

$$f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x - 2)^2$$

Nullstellen: $x_1 = 0$ $x_2 = 2$

Wert kleiner als 0 wählen: $-1 < 0$ $f_1(-1) = -1 < 0 \Rightarrow -$

Wert zwischen 0 und 2 wählen:

$0 < 1, 2 < 2$ $f_1(1, 2) = 0,768 > 0 \Rightarrow +$

Wert größer als 2 wählen: $3 > 2$ $f_1(3) = 1 > 0 \Rightarrow +$

Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	-	0	+	0	+

$x \in]0; 2[\cup]2; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; 0[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

$$f_3(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$x_1 = -2$ 1-fache Nullstelle

Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	+	0	-	0	+

$x \in]-\infty; -2[\cup]3; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-2; 3[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

$$f_4(x) = x \cdot (e^{x-2} - 1)$$

$x_1 = 0$; 1-fache Nullstelle

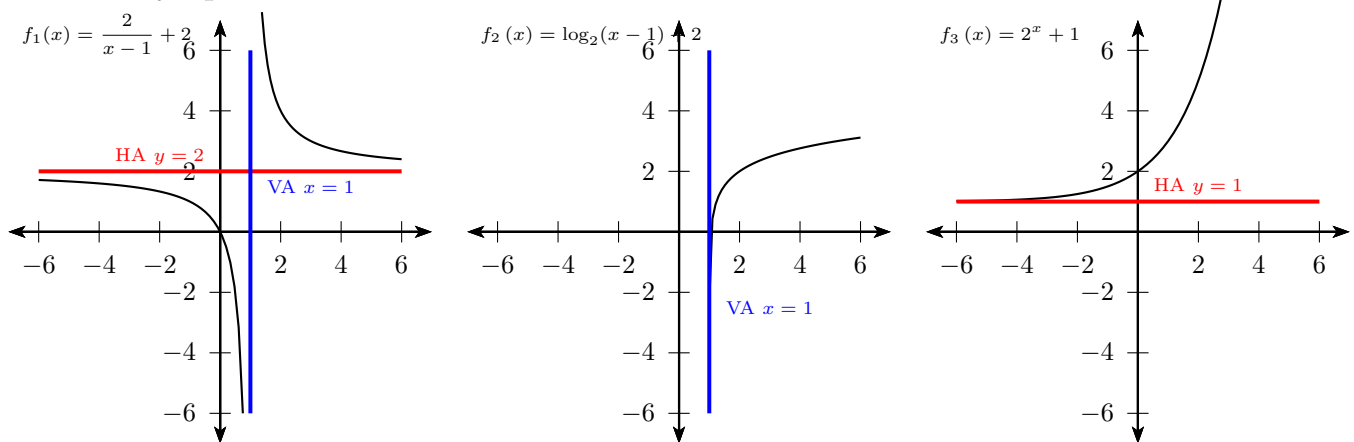
$x_2 = 2$; 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	+	0	-	0	+

$x \in]-\infty; 0[\cup]2; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]0; 2[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

3.4.4 Asymptote



HA - Horizontale (waagerechte) Asymptote; VA - Vertikale (senkrechte) Asymptote - Polstelle

Definition

Eine Asymptote ist eine Gerade, der sich eine Funktion beliebig weit annähert. (siehe Analysis - Grenzwerte)

$$f_1(x) = \frac{2}{x-1} + 2$$

nicht kürzbare Nullstellen des Nenners

VA : $x = 1$ HA : $y = 2$

Horizontale (waagerechte) Asymptote

Funktionsgleichung: $y = a$

$$f_3(x) = 2^x + 1$$

HA : $y = 1$

Vertikale (senkrechte) Asymptote - Polstelle

Funktionsgleichung: $x = b$

$$f_2(x) = \log_2(x - 1) + 2$$

$$VA: x = 1$$

3.4.5 Verknüpfung von Funktionen**Addition von Funktionen**

$$u(x) = f(x) + g(x)$$

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = e^x$$

$$u(x) = f(x) + g(x)$$

$$u(x) = x^2 + e^x$$

Subtraktion von Funktionen

$$u(x) = f(x) - g(x)$$

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = e^x$$

$$u(x) = f(x) - g(x)$$

$$u(x) = x^2 - e^x$$

Multiplikation von Funktionen

$$u(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = e^x$$

$$u(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$u(x) = x^2 \cdot e^x$$

Division von Funktionen

$$u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = e^x$$

$$u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$u(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

Verketten von Funktionen

äußere Funktion $f(x)$ - innere Funktion $g(x)$
 $u(x) = f(g(x))$ oder $f \circ g = f(g(x))$ f nach g

äußere Funktion $g(x)$ - innere Funktion $f(x)$
 $v(x) = g(f(x))$ oder $g \circ f = g(f(x))$ g nach f

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = e^x$$

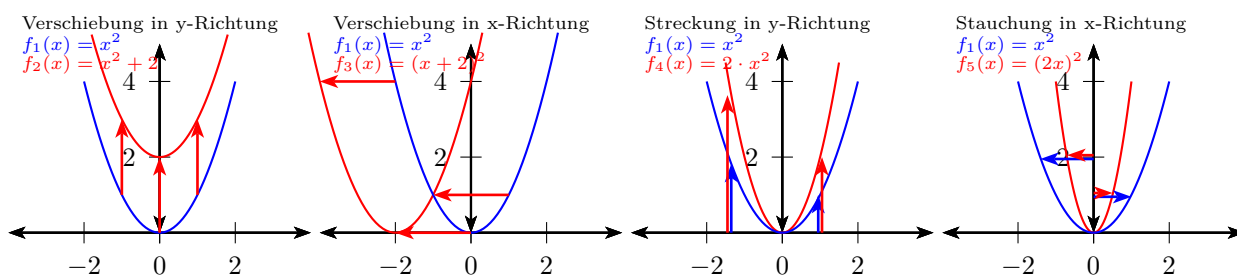
$$u(x) = f(g(x))$$

$$u(x) = (e^x)^2$$

$$v(x) = g(f(x))$$

$$v(x) = e^{x^2}$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) -

3.4.6 Abbildung von Funktionen

Verschiebung des Graphen in y-Richtung

$$y = f(x) + d$$

$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = x^2 + 2$$

Verschiebung um $d=2$ in y-Richtung

$$g_1(x) = e^x \quad g_2(x) = e^x - 3$$

Verschiebung um $d=-3$ in y-Richtung

Verschiebung des Graphen in x-Richtung

$$y = f(x - c)$$

$$f_1(x) = x^2 \quad f_3(x) = (x - 2)^2$$

Verschiebung um $c=2$ in x-Richtung

$$g_1(x) = e^x \quad g_3(x) = e^{x+3}$$

Verschiebung um $c=-3$ in x-Richtung

Streckung - Stauchung in y-Richtung

$$y = a \cdot f(x)$$

$a > 1$: Streckung in y-Richtung
 $0 < a < 1$: Stauchung in y-Richtung
 $a = -1$: Spiegelung an der x-Achse
 $a < -1$: Spiegelung an der x-Achse und Streckung in y-Richtung

$$f_1(x) = x^2 \quad f_4(x) = 2x^2$$

Streckung in y-Richtung mit $a = 2$

$$g_1(x) = e^x \quad g_4(x) = \frac{1}{3}e^x$$

Stauchung in y-Richtung mit $a = \frac{1}{3}$

$$f_5(x) = e^x \quad f_6(x) = -e^x$$

Spiegelung an der x-Achse

Streckung - Stauchung in x-Richtung

$$y = f(b \cdot x)$$

$b > 1$: Stauchung in x-Richtung mit $\frac{1}{b}$
 $0 < b < 1$: Streckung in x-Richtung mit $\frac{1}{b}$
 $b = -1$: Spiegelung an der y-Achse
 $b < -1$: Spiegelung an der y-Achse und Stauchung in x-Richtung mit $\frac{1}{b}$

$$f_1(x) = x^2 \quad f_5(x) = (2x)^2$$

$b = 2$ Stauchung in x-Richtung mit $\frac{1}{2}$

$$g_1(x) = e^x \quad f_5(x) = e^{(\frac{1}{3}x)}$$

$b = \frac{1}{3}$ Streckung in x-Richtung mit 3

$$f_5(x) = e^x \quad f_6(x) = e^{-x}$$

Spiegelung an der y-Achse

Zusammenfassung

$$y = a \cdot f(b(x - c)) + d$$

$$y = a \cdot f(bx - cb) + d$$

a : Streckung/Stauchung in y-Richtung
 $\frac{1}{b}$: Streckung/Stauchung in x-Richtung
 c : Verschiebung des Graphen in x-Richtung
 d : Verschiebung des Graphen in y-Richtung

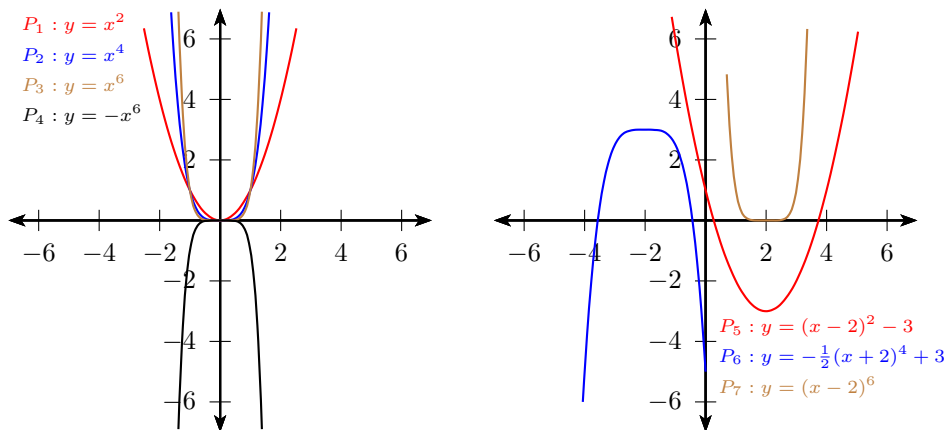
$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = -3(2x - 6)^2 + 1 = -3[2(x - 3)]^2 + 1$$

Streckung in y-Richtung und Spiegelung an der x-Achse: $a = -3$
 Stauchung in x-Richtung: $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$
 Verschiebung des Graphen in x-Richtung: $c = \frac{-6}{2} = 3$
 Verschiebung in y-Richtung: $d = 1$
 Verschiebung in x-Richtung: 3

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) -

3.5 Potenzfunktion

3.5.1 Parabeln vom Grad n - gerader Exponent



Formen der Parabelgleichung - gerader Exponent

Exponent: 2, 4, 6..

Grundfunktion: $y = x^n$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a(x - c)^n + d$$

$$y = a(b(x - c))^n + d$$

$$P_1 : y = x^2$$

$$P_5 : y = (x-2)^2 - 3$$

Verschiebung um 2 in x-Richtung und um -3 in y-Richtung

$$P_2 : y = x^4$$

$$P_6 : y = -\frac{1}{2}(x+2)^4 + 3$$

Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung

Spiegelung an der x-Achse und Stauchung um $\frac{1}{2}$ in y-Richtung

$$P_3 : y = x^6$$

$$P_9 : y = 2(x+4)^4$$

Streckung um 2 in y-Richtung und Verschiebung um -4 in x-Richtung

$$P_3 : y = x^6$$

$$P_7 : y = (x-2)^6$$

Verschiebung um 2 in x-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$$y = x^n \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$$

$$y = a(b(x-c))^n + d \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$$

$$a > 0 \quad \mathbb{W} = [d; \infty[$$

$$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d]$$

$$P_2 : y = x^4 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$$

$$P_5 : y = (x-2)^2 - 3 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = [-3; \infty[$$

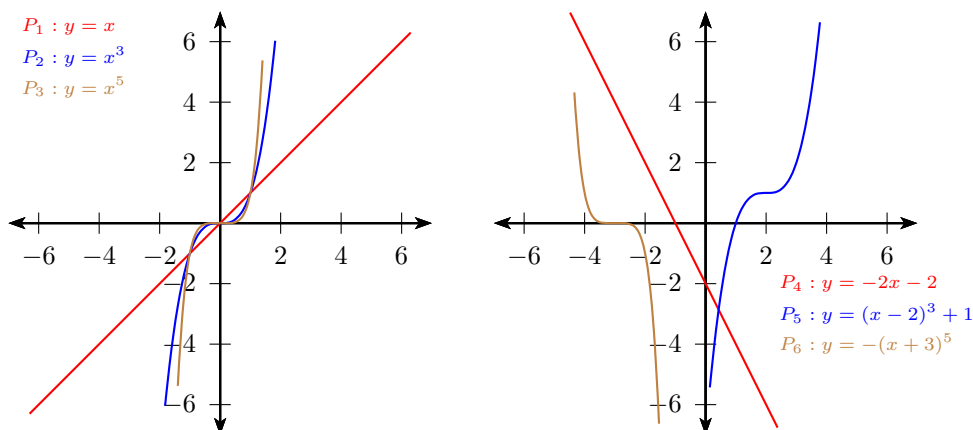
$$P_4 : y = -x^6 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^-$$

$$P_6 : y = -\frac{1}{2}(x+2)^4 + 3 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} =]-\infty; 3]$$

$$P_9 : y = 2(x+4)^4 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

3.5.2 Parabeln vom Grad n - ungerader Exponent



Formen der Parabelgleichung - ungerader Exponent

Exponent: 1, 3, 5..

Grundfunktion: $y = x^n$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a(x - c)^n + d$$

$$y = a(b(x - c))^n + d$$

$$P_1 : y = x \quad P_4 : y = -2x - 2$$

Verschiebung um -2 in y-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung

$$P_2 : y = x^3 \quad P_5 : y = (x - 2)^3 + 1$$

Verschiebung um 2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung $P_3 :$

$$y = x^5 \quad P_6 : y = -(x + 3)^5$$

Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung um -3 in x-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$$y = x^n \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

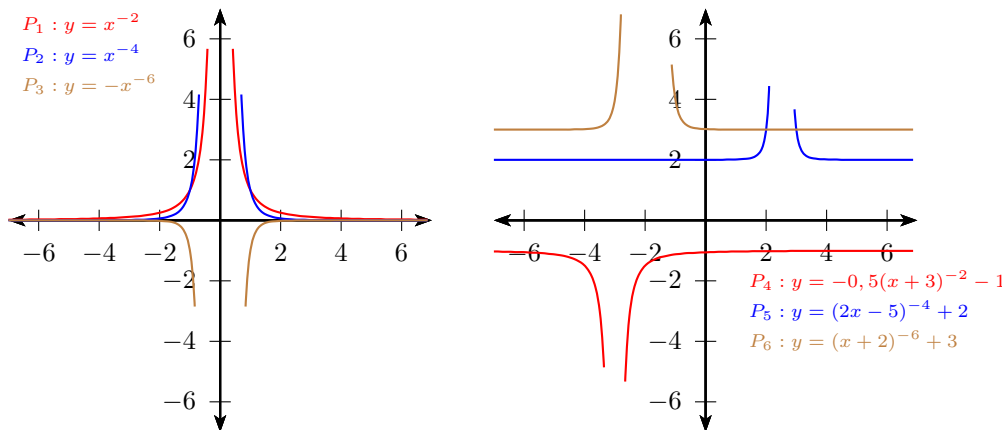
$$y = a(b(x - c))^n + d \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

$$P_2 : y = x^3 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

$$P_5 : y = (x - 2)^3 + 1 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

3.5.3 Hyperbeln vom Grad n - gerader Exponent



Formen der Hyperbelgleichung - gerader Exponenten

Exponent: -2, -4, -6..

Grundfunktion: $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a(x - c)^{-n} + d = \frac{a}{(x - c)^n} + d$$

$$y = a(b(x - c))^{-n} + d = \frac{a}{(b(x - c))^n} + d$$

$$P_1 : y = x^{-2} \quad P_4 : y = -0,5(x + 3)^{-2} - 1$$

Verschiebung um -3 in x-Richtung und um -1 in y-Richtung

Streckung um -0,5 in y-Richtung

$$P_2 : y = x^{-4} \quad P_5 : y = (2x - 5)^{-4} + 2 = (2(x - 2,5))^{-4} + 2$$

Verschiebung um 2,5 in x-Richtung und um 2 in y-Richtung

Stauchung um 2 in x-Richtung

$$y = x^{-6} \quad P_6 : y = (x + 2)^{-6} + 3$$

Streckung um -2 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$$

$$y = a(b(x - c))^{-n} + d \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{c\}$$

$$a > 0 \quad \mathbb{W} =]d; \infty[$$

$$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d[$$

$$P_1 : y = x^{-2} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$$

$$P_4 : y = -0,5(x + 3)^{-2} - 1$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \quad \mathbb{W} =]-\infty; -1[$$

$$P_6 : y = (x + 2)^{-6} + 3 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \quad \mathbb{W} =]3; \infty[$$

Asymptoten

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$

Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$

$$y = a(b(x - c))^{-n} + d$$

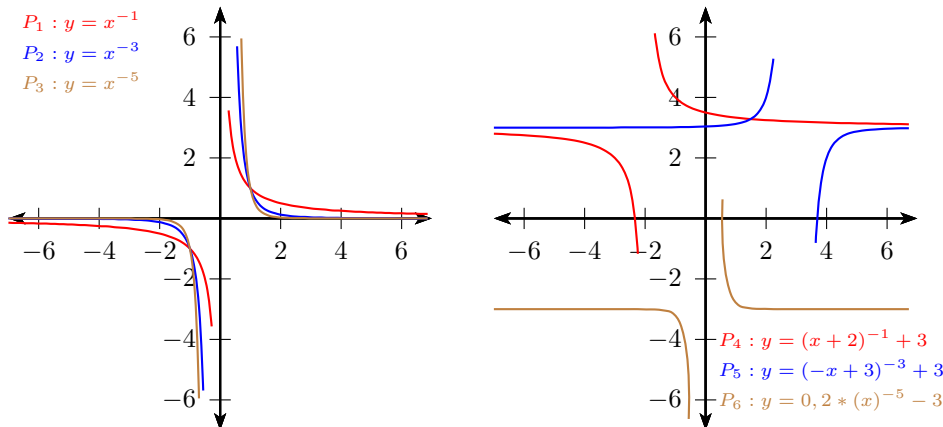
Horizontale Asymptote: $y = d$

Vertikale Asymptote: $x = c$

$$\begin{array}{lll} P_1 : y = x^{-2} & \text{HA: } y = 0 & \text{VA: } x = 0 \\ P_4 : y = -0,5(x + 3)^{-2} - 1 & \text{HA: } y = -1 & \text{VA: } x = -3 \\ P_6 : y = (x + 2)^{-6} + 3 & \text{HA: } y = 3 & \text{VA: } x = -2 \end{array}$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

3.5.4 Hyperbeln vom Grad n - ungerader Exponent



Formen der Hyperbelgleichung - ungerader Exponenten

Exponent: -1, -3, -5..

Grundfunktion: $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a(x - c)^{-n} + d = \frac{a}{(x - c)^n} + d$$

$$y = a(b(x - c))^{-n} + d = \frac{a}{(b(x - c))^n} + d$$

$$\begin{array}{ll} P_1 : y = x^{-1} & P_4 : y = (x + 2)^{-1} + 3 \\ \text{Verschiebung um } -2 \text{ in x-Richtung um } 3 \text{ in y-Richtung} & \\ P_2 : y = x^{-3} & P_5 : y = (-x + 3)^{-3} + 3 = (-1(x - 3))^{-3} + 3 \\ \text{Verschiebung um } 3 \text{ in x-Richtung und um } 3 \text{ in y-Richtung} & \\ \text{Spiegelung an der y-Achse} & \\ P_3 : y = x^{-5} & P_6 : y = 0,2 * x^{-5} - 3 \\ \text{Streckung um } -3 \text{ in y-Richtung und Stauchung um } 0,2 \text{ in y-Richtung} & \end{array}$$

Definitions- und Wertebereich

$$y = x^{-n} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y = a(b(x - c))^{-n} + d$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{c\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{d\}$$

$$\begin{array}{lll} P_1 : y = x^{-1} & \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} & \mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ P_4 : y = (x + 2)^{-1} + 3 & \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\} & \mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ P_6 : y = 0,2 * x^{-5} - 3 & \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} & \mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \end{array}$$

Asymptoten

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$

Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$

$$y = a(b(x - c))^{-n} + d$$

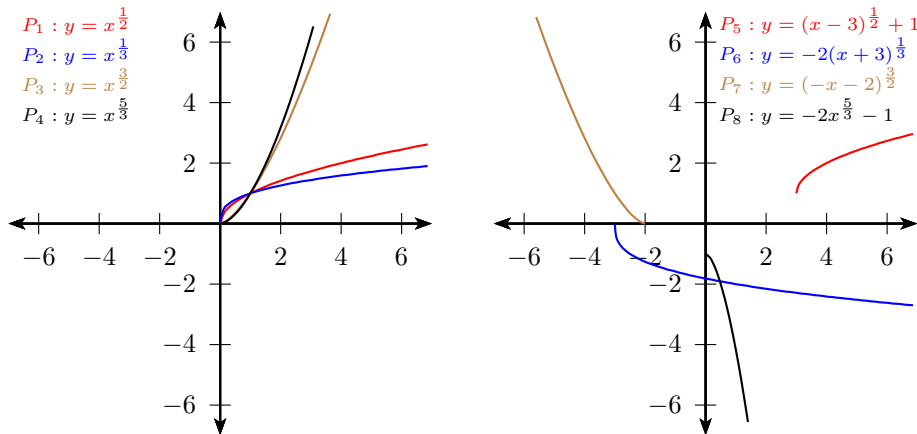
Horizontale Asymptote: $y = d$

Vertikale Asymptote: $x = c$

$$\begin{array}{lll} P_1 : y = x^{-1} & \text{HA: } y = 0 & \text{VA: } x = 0 \\ P_4 : y = (x + 2)^{-1} + 3 & \text{HA: } y = 3 & \text{VA: } x = -2 \\ P_6 : y = 0,2 * x^{-5} - 3 & \text{HA: } y = -3 & \text{VA: } x = 0 \end{array}$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

3.5.5 Wurzelfunktion - rationaler, positiver Exponent



Formen der Wurzelfunktion - positiver Exponent

Quadratwurzelfunktion: $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \quad x > 0$

Grundfunktion: $y = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \quad x > 0$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a(x-c)^{\frac{n}{m}} + d = a \sqrt[m]{(x-c)^n} + d \quad x-c > 0$

$y = a(b(x-c))^{\frac{n}{m}} + d = a \sqrt[m]{(b(x-c))^n} + d \quad b(x-c) > 0$

$P_1: y = x^{\frac{1}{2}} \quad P_5: y = (x-3)^{\frac{1}{2}} + 1$

Verschiebung um 3 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung

$P_2: y = x^{\frac{1}{3}} \quad P_6: y = -2(x+3)^{\frac{1}{3}}$

Verschiebung um -3 in x-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung

$P_3: y = x^{\frac{2}{3}} \quad P_7: y = (-x-2)^{\frac{2}{3}} = -(x+2)^{\frac{2}{3}}$

Verschiebung um -2 in x-Richtung und Spiegelung an der y-Achse

$P_4: y = x^{\frac{5}{3}} \quad P_8: y = -2x^{\frac{5}{3}} - 1$

Verschiebung um -1 in y-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

$y = a(b(x-c))^{\frac{n}{m}} + d = a \sqrt[m]{(b(x-c))^n} + d$

$b > 0 \quad \mathbb{D} = [c; \infty[$

$b < 0 \quad \mathbb{D} =]-\infty; c]$

$a > 0 \quad \mathbb{W} = [d; \infty[$

$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d]$

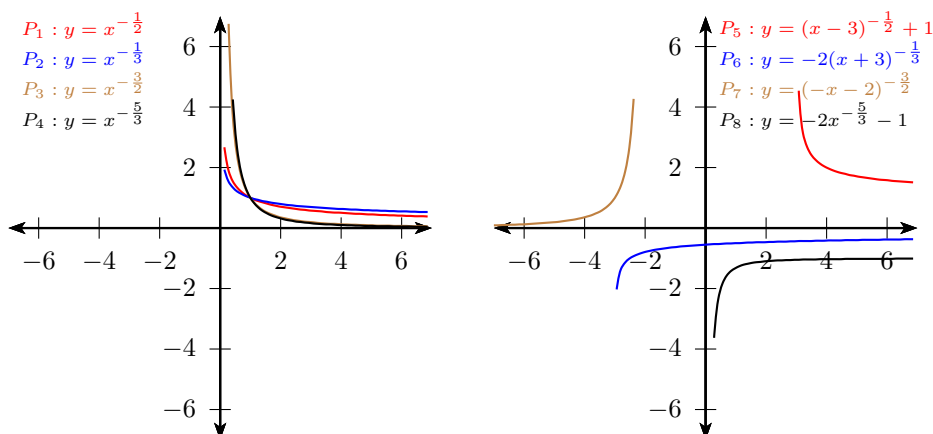
$P_2: y = x^{\frac{1}{3}} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

$P_5: y = (x-3)^{\frac{1}{2}} + 1 \quad \mathbb{D} = [3; \infty[\quad \mathbb{W} = [1; \infty[$

$P_8: y = -2x^{\frac{5}{3}} - 1 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ \quad \mathbb{W} =]-\infty; -1]$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

3.5.6 Wurzelfunktion - rationaler, negativer Exponent



Formen der Wurzelfunktion - negativer Exponent

$$y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad x > 0$$

$$\text{Grundfunktion: } y = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} \quad x > 0$$

$$\text{Funktion mit Formvariablen: } y = a(x - c)^{-\frac{n}{m}} + d = \frac{a}{\sqrt[m]{(x - c)^n}} + d \quad x - c > 0$$

$$y = a(b(x - c))^{-\frac{n}{m}} + d = a \frac{1}{\sqrt[m]{(b(x - c))^n}} + d \quad b(x - c) > 0$$

$$P_1 : y = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$P_5 : y = (x - 3)^{-\frac{1}{2}} + 1$$

Verschiebung um 3 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung

$$P_2 : y = x^{-\frac{1}{3}}$$

$$P_6 : y = -2(x + 3)^{-\frac{1}{3}}$$

Verschiebung um -3 in x-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung

$$P_3 : y = x^{-\frac{3}{2}}$$

$$P_7 : y = (-x - 2)^{\frac{3}{2}} = (-(x + 2))^{-\frac{3}{2}}$$

Verschiebung um -2 in x-Richtung und Spiegelung an der y-Achse

$$P_4 : y = x^{-\frac{5}{3}}$$

$$P_8 : y = -2x^{-\frac{5}{3}} - 1$$

Verschiebung um -1 in y-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$$y = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$$

$$y = a(b(x - c))^{-\frac{n}{m}} + d = \frac{a}{\sqrt[m]{(b(x - c))^n}} + d$$

$$b > 0 \quad \mathbb{D} =]c; \infty[$$

$$b < 0 \quad \mathbb{D} =]-\infty; c[$$

$$a > 0 \quad \mathbb{W} =]d; \infty[$$

$$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d[$$

$$P_2 : y = x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$$

$$P_5 : y = (x - 3)^{-\frac{1}{2}} + 1$$

$$\mathbb{D} =]3; \infty[\quad \mathbb{W} =]1; \infty[$$

$$P_8 : y = -2x^{-\frac{5}{3}} - 1$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{W} =]-\infty; -1[$$

Asymptoten

$$y = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$$

Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$

Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$

$$y = a(b(x - c))^{-\frac{n}{m}} + d = \frac{a}{\sqrt[m]{(b(x - c))^n}} + d$$

Horizontale Asymptote: $y = d$

Vertikale Asymptote: $x = c$

$$[P_2 : y = x^{-\frac{1}{3}} \quad \text{HA: } y = 0 \quad \text{VA: } x = 0$$

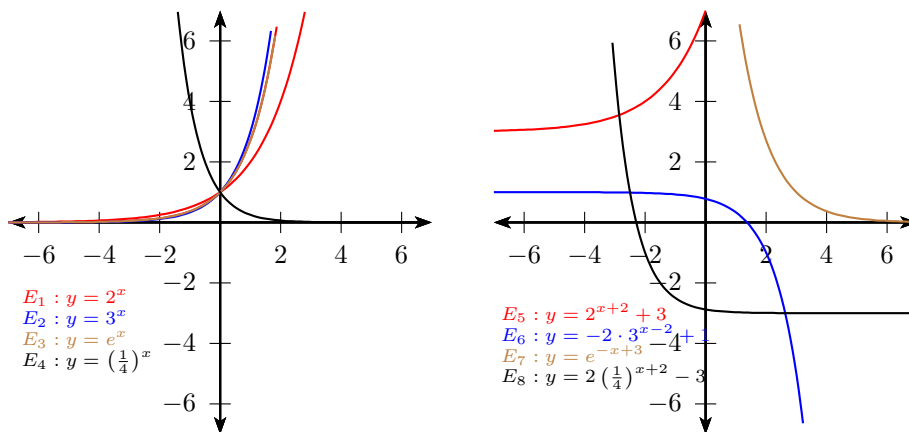
$$P_5 : y = (x - 3)^{-\frac{1}{2}} + 1 \quad \text{HA: } y = -1 \quad \text{VA: } x = 3$$

$$P_8 : y = -2x^{-\frac{5}{3}} - 1 \quad \text{HA: } y = -1 \quad \text{VA: } x = 0$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

3.6 Exponentialfunktion

3.6.1 Graph und Eigenschaften



Formen der Exponentialfunktion

Grundfunktion: $y = q^x \quad q > 0$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a \cdot q^{(x-c)} + d \quad q > 0$$

$$y = a \cdot q^{b(x-c)} + d \quad q > 0$$

Funktionen mit der Basis: $e = 2,718..$

Grundfunktion: $y = e^x$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a \cdot e^{(x-c)} + d$$

$$y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$$

$$E_1 : y = 2^x \quad E_5 : y = 2^{x+2} + 3$$

Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung

$$E_2 : y = 3^x \quad E_6 : y = -2 \cdot 3^{x-2} + 1$$

Verschiebung um 2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung

Streckung um -2 in y-Richtung

$$E_3 : y = e^x \quad E_7 : y = e^{-x+3} = e^{-(x-3)}$$

Verschiebung um 3 in x-Richtung und Spiegelung an der y-Achse

$$E_4 : y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x} \quad E_8 : y = 2 \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$$

Verschiebung um -2 in x-Richtung und um -3 in y-Richtung

Streckung um 2 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$$y = e^x \quad y = q^x$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$$

$$y = a \cdot q^{b(x-c)} + d \quad y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

$$a > 0 \quad \mathbb{W} =]d; \infty[$$

$$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d[$$

$$E_1 : y = 2^x \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$$

$$E_4 : y = \left(\frac{1}{4}\right)^x \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$$

$$E_5 : y = 2^{x+2} + 3 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} =]3; \infty[$$

$$E_6 : y = -2 \cdot 3^{x-2} + 1 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} =]-\infty; 1[$$

$$E_8 : y = 2 \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} =]-\infty; -3[$$

Asymptoten

$$y = e^x \quad y = q^x$$

Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$

$$y = a \cdot q^{b(x-c)} + d \quad y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$$

Horizontale Asymptote: $y = d$

$$[E_1 : y = 2^x \quad \text{HA: } y = 0$$

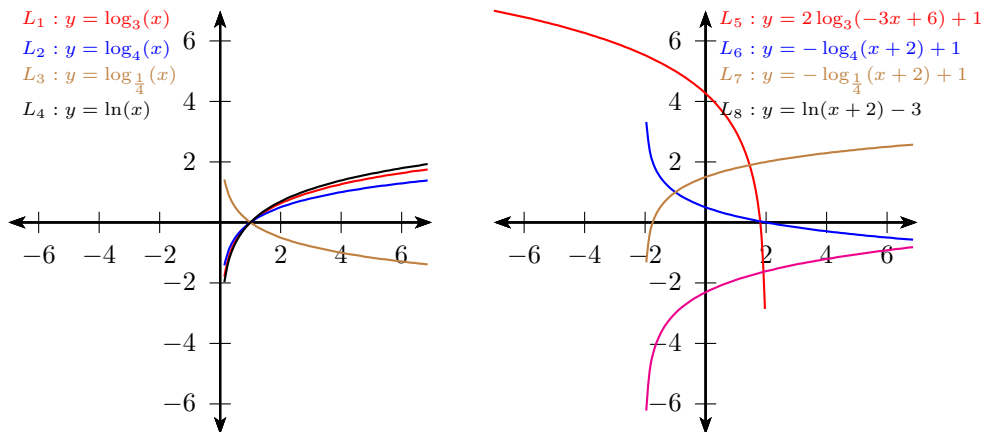
$$E_5 : y = 2^{x+2} + 3 \quad \text{HA: } y = 3$$

$$E_8 : y = 2 \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3 \quad \text{HA: } y = -3$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

3.7 Logarithmusfunktion

3.7.1 Graph und Eigenschaften



Formen der Logarithmusfunktion

Grundfunktion: $y = \log_q x$ $q > 0$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a \log_q(x - c) + d \quad -\frac{d}{c} > 0$$

$$y = a \log_q(b(x - c)) + d$$

Funktionen mit der Basis: $e = 2,718..$

Grundfunktion: $y = \ln x$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a \ln(x - c) + d$$

$$y = a \ln(b(x - c)) + d$$

$$L_1 : y = \log_3(x) \quad L_5 : y = 2 \log_3(-3x + 6) + 1 = 2 \log_3(-3(x - 2)) + 1$$

Verschiebung um 2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung
Streckung um 2 in y-Richtung und um -3 in x-Richtung

$$L_2 : y = \log_4(x) \quad L_6 : y = -\log_4(x + 2) + 1$$

Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung
Spiegelung an der x-Achse

$$L_3 : y = \log_{\frac{1}{4}}(x) \quad L_7 : y = -\log_{\frac{1}{4}}(x + 2) + 1$$

Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung
Spiegelung an der x-Achse

$$L_4 : y = \ln(x) \quad L_8 : y = \ln(x + 2) - 3$$

Verschiebung um -2 in x-Richtung und um -3 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$$y = \log_q x \quad y = \ln x \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

$$y = a \log_q(b(x - c)) + d \quad y = a \ln(b(x - c)) + d$$

Definitionsbereich: $b(x - c) > 0$

$$b > 0 \quad \mathbb{D} =]c; \infty[$$

$$b < 0 \quad \mathbb{D} =]-\infty; c[$$

$$\mathbb{W} = \mathbb{R}$$

$$L_5 : y = 2 \log_3(-3x + 6) \quad \mathbb{D} =]-\infty; 2[\quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

$$L_6 : y = -\log_4(x + 2) + 1 \quad \mathbb{D} =]-2; \infty[\quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

$$L_8 : y = \ln(x + 2) - 3 \quad \mathbb{D} =]-2; \infty[\quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

Asymptoten

$$y = \log_q x \quad y = \ln x$$

Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$

$$y = a \log_q(b(x - c)) + d \quad y = a \ln(b(x - c)) + d$$

Vertikale Asymptote: $x = c$

$$[L_5 : y = 2 \log_3(-3x + 6) \quad \text{VA: } x = 2$$

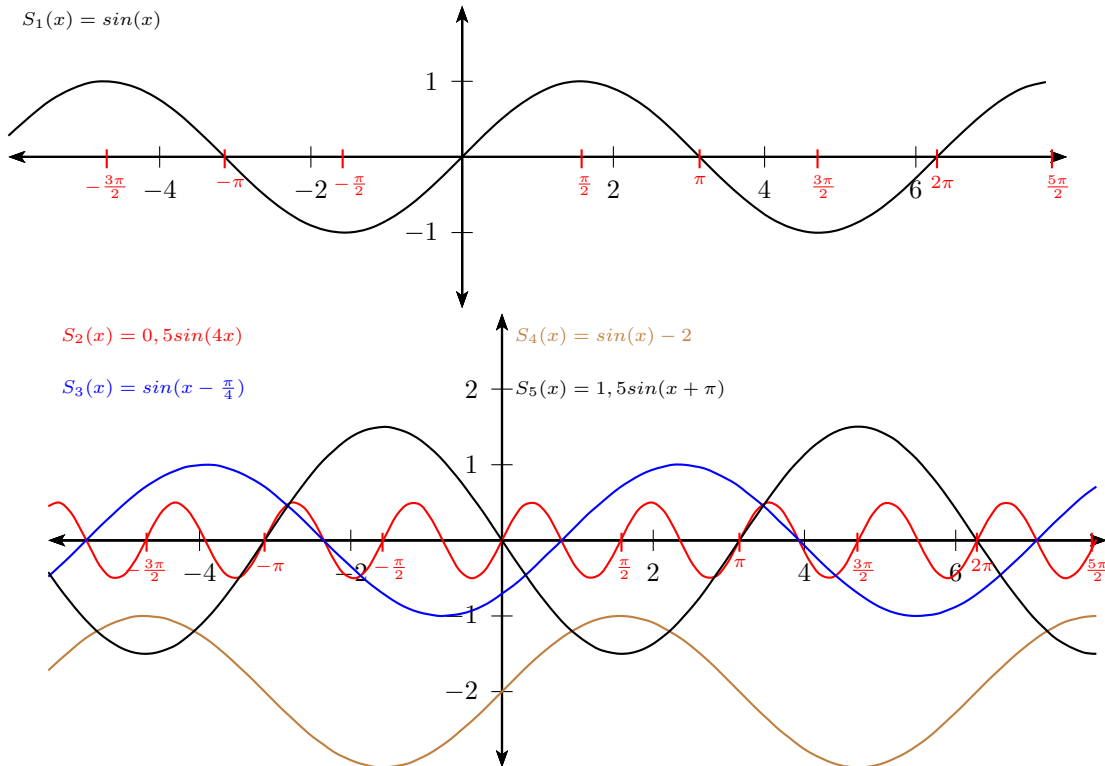
$$L_6 : y = -\log_4(x + 2) + 1 \quad \text{VA: } x = -2$$

$$L_8 : y = \ln(x + 2) - 3 \quad \text{VA: } x = -2$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

3.8 Sinusfunktion

3.8.1 Graph und Eigenschaften



Formen der Sinusfunktion

Grundfunktion: $f(x) = \sin x$

Amplitude: 1 Periode: 2π

Funktion mit Formvariablen:

$$f(x) = a \sin(x - c) + d$$

$$f(x) = a \sin(b(x - c) + d)$$

Amplitude: $|a|$ Periode: $\frac{2\pi}{b}$

$$S_1(x) = \sin(x)$$

$$S_2(x) = 0,5\sin(4x)$$

Stauchung um 0,5 in y-Richtung und $\frac{1}{4}$ in x-Richtung

Amplitude: 0,5

Periode: $\frac{2\pi}{4}$

$$S_1(x) = \sin(x)$$

$$S_3(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$$

Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ in x-Richtung

Amplitude: 1 Periode: 2π

$$S_1(x) = \sin(x)$$

$$S_4(x) = \sin(x) - 2$$

Verschiebung um -2 in y-Richtung

Amplitude: 1 Periode: 2π

$$S_1(x) = \sin(x)$$

$$S_5(x) = 1,5\sin(x + \pi)$$

Verschiebung um $-\pi$ in x-Richtung und Streckung um 1,5 in y-Richtung

Amplitude: 1 Periode: 2π

Definitions- und Wertebereich

$$f(x) = \sin(x)$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = [-1; 1]$$

$$f(x) = a \sin(b(x - c)) + d$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = [d - a; d + a]$$

$$S_2(x) = 0,5\sin(4x)$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{W} = [-0,5; +0,5]$$

$$S_3(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{W} = [-1; 1]$$

$$S_4(x) = \sin(x) - 2$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

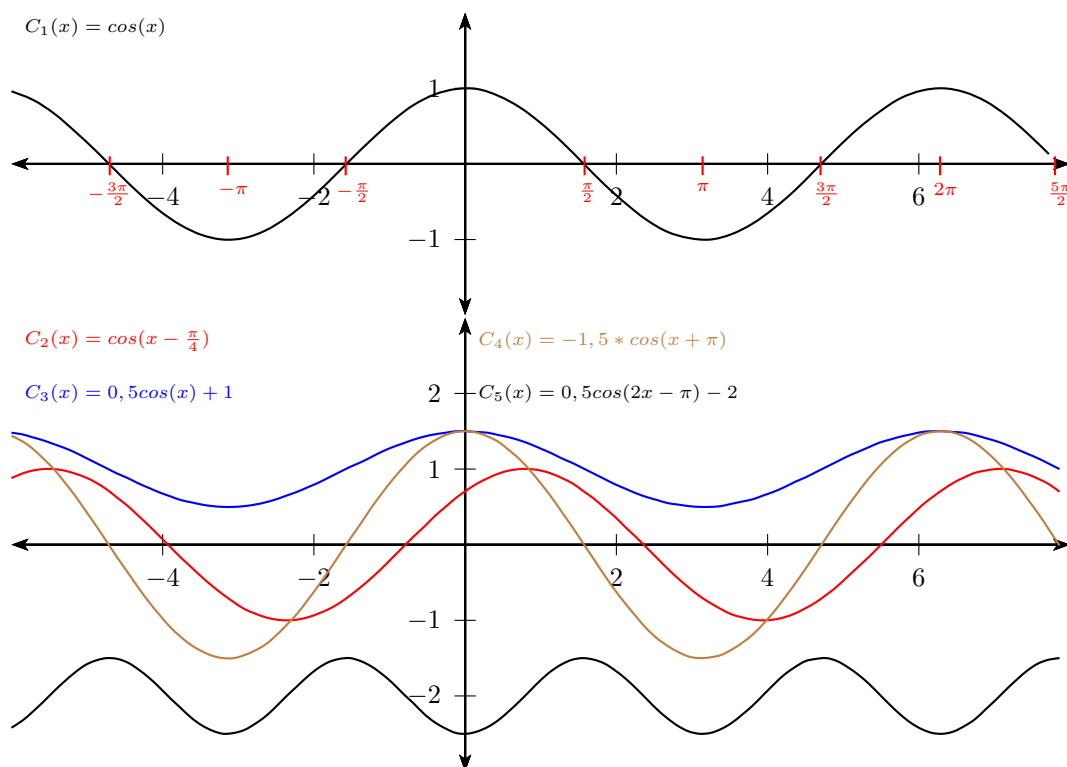
$$\mathbb{W} = [-1; -3]$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

3.9 Kosinusfunktion

3.9.1 Graph und Eigenschaften

$$C_1(x) = \cos(x)$$



Formen der Kosinusfunktion

Grundfunktion: $f(x) = \cos x$

Amplitude: 1 Periode: 2π

Funktion mit Formvariablen:

$$f(x) = a \cos(x - c) + d$$

$$f(x) = a \cos(b(x - c)) + d$$

Amplitude: $|a|$ Periode: $\frac{2\pi}{b}$

$$C_1(x) = \cos(x) \quad C_2(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ in x-Richtung

Amplitude: 1 Periode: 2π

$$C_1(x) = \cos(x) \quad C_3(x) = 0,5\cos(x) + 1$$

Verschiebung um 1 in y-Richtung und Stauchung um 0,5 in y-Richtung

Amplitude: 0,5 Periode: 2π

$$C_1(x) = \cos(x) \quad C_4(x) = -1,5 * \cos(x + \pi)$$

Verschiebung um $-\pi$ in x-Richtung

Amplitude: 1,5 Periode: 2π

$$C_1(x) = \cos(x) \quad C_5(x) = 0,5\cos(2x - \pi) - 2 = 0,5\cos(2(x - \frac{\pi}{2})) - 2$$

Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung und Streckung um 0,5 in y-Richtung

Amplitude: 0,5 Periode: $\frac{2\pi}{2}$

Definitions- und Wertebereich

$$f(x) = \cos(x)$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = [-1; 1]$$

$$f(x) = a \cos(b(x - c)) + d$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = [d - a; d + a]$$

$$C_2(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4}) \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = [-1; 1]$$

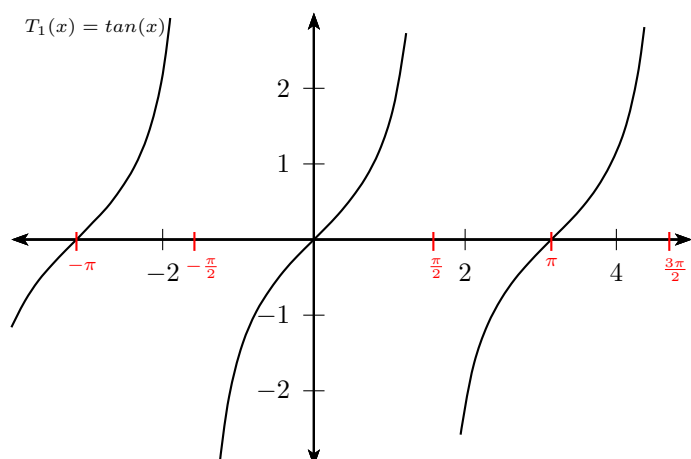
$$C_3(x) = 0,5\cos(x) + 1 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = [-0,5; 1,5]$$

$$C_5(x) = 0,5\cos(2x - \pi) - 2 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = [-2,5; -1,5]$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

3.10 Tangensfunktion

3.10.1 Graph und Eigenschaften



Formen der Tangensfunktion

Grundfunktion: $f(x) = \tan x$

Periode: π

Funktion mit Formvariablen:

$$f(x) = a \tan(x - c) + d$$

$$f(x) = a \tan(b(x - c)) + d$$

Periode: $\frac{\pi}{b}$

Definitions- und Wertebereich

$$f(x) = \tan x$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \frac{\pi}{2}\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = a \tan b(x + c) + d$$

$$b(x - c) = k \frac{\pi}{2}$$

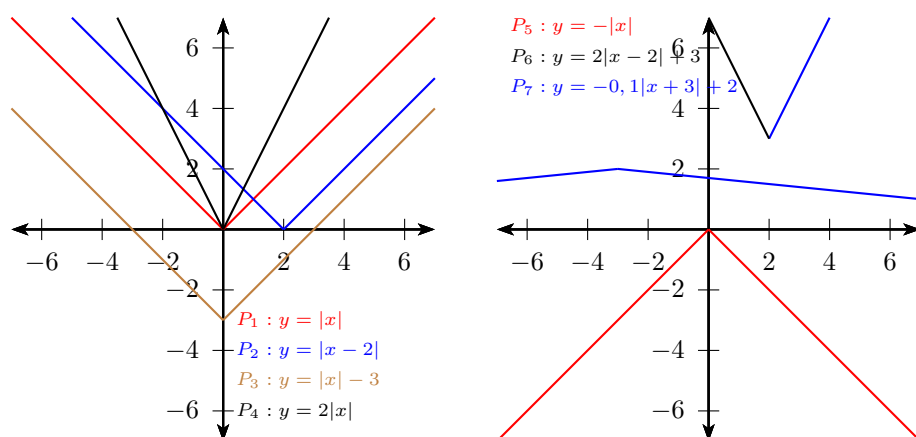
$$x = \frac{k\pi}{2b} + c$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2b} + c\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

3.11 Betragsfunktion

3.11.1 Graph und Eigenschaften



Formen der Betragsfunktion

- Aufspalten der Beträge in einzelne Intervalle.

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags positiv ist.

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags negativ ist und dafür zusätzlich ein Minuszeichen vor dem Term geschrieben wird.

Grundfunktion:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Funktion mit Formvariablen:

$$f(x) = a|b(x - c)| + d = \begin{cases} a(b(x - c)) + d & x > c \\ -a(b(x - c)) + d & x < c \\ d & x = c \end{cases}$$

$$P_6: y = 2|x - 2| + 3 = \begin{cases} 2(x - 2) + 3 & x > 2 \\ -2(x - 2) + 3 & x < 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 2x - 1 & x > 2 \\ -2x + 7 & x < 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

Definitions- und Wertebereich

$$f(x) = |x|$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$$

$$f(x) = a|b(x - c)| + d \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$$

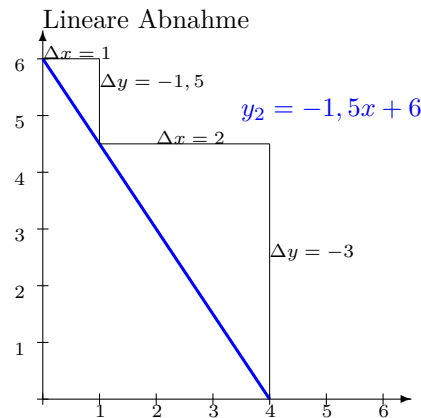
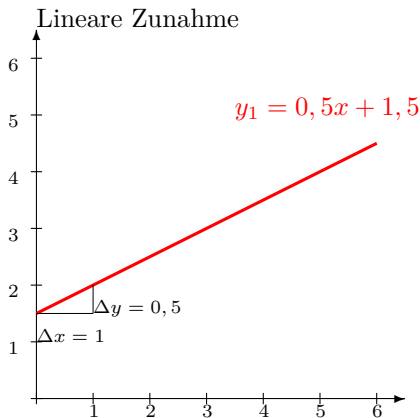
$$a > 0 \quad \mathbb{W} = [d; \infty[$$

$$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d]$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

3.12 Wachstumsfunktionen

3.12.1 Lineares Wachstum



- Zum Anfangswert t wird pro Zeiteinheit der gleiche Wert m addiert oder subtrahiert.

- Lineare Funktion: $y = m \cdot x + t$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.

y - Funktionswert nach der Zeit x

t - Anfangswert

m - konstante Änderungsrate, Steigung

$m > 0$ positives lineares Wachstum (Zunahme)

$m < 0$ negatives lineares Wachstum (Abnahme)

$m = 0$ Nullwachstum

- Änderungsrate - Wachstumsgeschwindigkeit

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Umformungen: $y = m \cdot x + t$

$$x = \frac{y-t}{m} \quad t = y - m \cdot x \quad m = \frac{y-t}{x}$$

- Schreibweisen

Funktion	Änderungsrate	Variable	Anfangswert
$y = m \cdot x + t$	m	x	t
$y = a \cdot x + b$	a	x	b
$y = a + b \cdot x$	b	x	a
$f(x) = a \cdot x + f_0$	a	x	f_0
$N(t) = a \cdot t + N_0$	a	t	N_0
$B(t) = k \cdot t + B_0$	k	x	B_0
$K(t) = q \cdot t + K_0$	q	t	K_0

Lineare Zunahme

Ein Wasserbecken enthält 1,5 Liter Wasser. Pro Minute fließen 0,5 Liter zu.

x_1 = Minuten	y_1 = Liter					$t = 1,5$
x_1	0	1	2	3	4	
y_1	1,5	1,5 + 0,5	2 + 0,5	2,5 + 0,5	3 + 0,5	
y_1	1,5	2	2,5	3	3,5	

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-1,5}{1-0} = \frac{0,5}{1} = 0,5$$

$$y = 0,5x + 1,5$$

Lineare Abnahme

Ein Wasserbecken enthält 6 Liter Wasser. Pro Minute fließen 1,5 Liter ab.

x_2 = Minuten	y_2 = Liter				
x_2	0	1	2	3	4
y_2	6	6 - 1,5	4,5 - 1,5	3 - 1,5	1,5 - 1,5
y_2	6	4,5	3	1,5	0

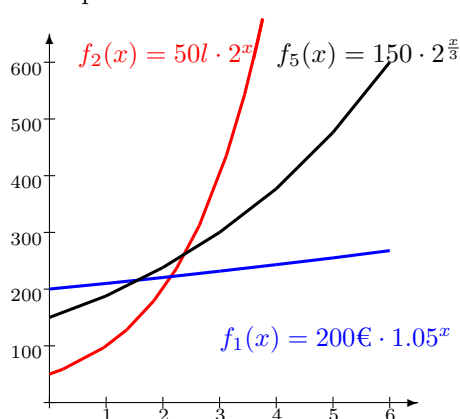
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4,5-6}{1-0} = \frac{-1,5}{1} = -1,5$$

$$y = -1,5x + 6$$

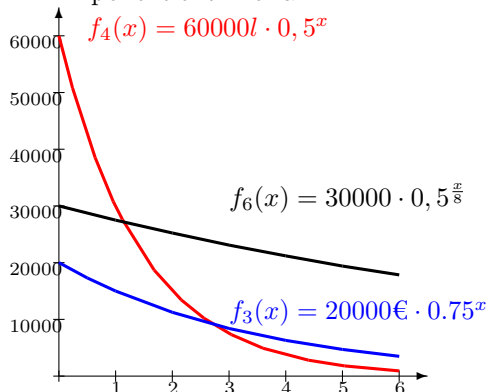
Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [Eigenschaften](#) - $y = m \cdot x + t$ - $m = \frac{y-t}{x}$ - $x = \frac{y-t}{m}$ - $t = y - m \cdot x$ -

3.12.2 Exponentielles Wachstum

Exponentielles Wachstum



Exponentieller Zerfall



Wachstumsfaktor pro Zeiteinheit

- Der Anfangswert a wird pro Zeiteinheit mit den gleichen Faktor q multipliziert.

- Funktion: $f(x) = a \cdot q^x$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.

$y = f(x)$ - Funktionswert nach der Zeit x

a - Anfangswert

q - Wachstumsfaktor pro Zeiteinheit

$q > 1$ exponentielles Wachstum

$0 < q < 1$ exponentieller Zerfall

$q = 0$ Nullwachstum

- Prozentuale Zunahme p pro Zeiteinheit

$$f(x) = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x = a \cdot q^x$$

$$q = 1 + \frac{p}{100} \quad p = (q - 1) \cdot 100$$

- Prozentuale Abnahme p pro Zeiteinheit

$$f(x) = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x = a \cdot q^x$$

$$q = 1 - \frac{p}{100} \quad p = (1 - q) \cdot 100$$

- Lokale Änderungsrate - Wachstumsgeschwindigkeit

$$1. \text{Ableitung: } f'(x) = a \cdot \ln(q) \cdot q^x$$

- Umformungen $y = f(x)$

$$y = a \cdot q^x \quad a = \frac{y}{q^x} \quad x = \log_q\left(\frac{y}{a}\right) \quad q = \sqrt[x]{\frac{y}{a}}$$

- Schreibweisen

Funktion	Wachstumsfaktor	Variable	Anfangswert
$f(t) = a \cdot q^t$	q	t	a
$y = a \cdot b^x$	b	x	a
$y = b \cdot a^t$	a	t	b
$K(t) = K_0 \cdot q^t$	q	t	N_0
$N(t) = N_0 \cdot q^t$	q	t	N_0

Exponentielle Zunahme

Ein Kapital von 200 € wird mit 5 % (pro Jahr) verzinst.

$x_1 = \text{Jahr}$ $y_1 = \text{Euro}$ $p=5$ $q = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$ $a = 200€$

x_1	0	1	2	3	4
y_1	200	$200 \cdot 1,05$	$210 \cdot 1,05$	$220,5 \cdot 1,05$	$231,52 \cdot 1,05$
y_1	200	210	220,5	231,52	243,1

$$f_1(x) = 200€ \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^x \quad f_1(x) = 200€ \cdot 1,05^x$$

Kapital nach 10 Jahren: $f_1(10) = 200€ \cdot 1,05^{10} = 325,78€$

In jeder Minute verdoppelt sich die Wassermenge in einem Wasserbecken. Nach 4 Minuten enthält es 800 Liter Wasser.

$$q = 2 \quad f(4) = 800$$

Prozentuale Zunahme: $p = (2 - 1) \cdot 100\% = 100\%$

$$\text{Anfangswert: } a = \frac{y}{q^x} = \frac{800}{2^4} = 50l$$

$$f_2(x) = 50€ \cdot 2^x \quad f_2(x) = 50 \cdot \left(1 + \frac{100}{100}\right)^x$$

Exponentielle Abnahme

Ein Auto kostet 20000 €. Der Wertverlust beträgt 25 % pro Jahr.

$x = \text{Jahre}$ $y_3 = €$

x	0	1	2	3	4
y_3	20000	$20000 \cdot 0,75$	$25000 \cdot 0,75$	$11250 \cdot 0,75$	$8437,50 \cdot 0,75$
y_3	20000	25000	11250	8437,50	6328,12

$$f_3(x) = 20000€ \cdot \left(1 - \frac{25}{100}\right)^x \quad f_3(x) = 20000€ \cdot 0,75^x$$

Wann ist das Auto nur noch 1000 € Wert?

$$x = \log_q\left(\frac{y}{a}\right) = \log_{0,75}\left(\frac{1000€}{20000€}\right) = 19,41 \text{ Jahren}$$

Ein Wasserbecken enthält 60000 Liter Wasser.

Pro Minute halbiert sich die Wassermenge.

$x_4 = \text{Minuten}$ $y_4 = \text{Liter}$

x_4	0	1	2	3	4
y_4	60000	$60000 \cdot 0,5$	$30000 \cdot 0,5$	$15000 \cdot 0,5$	$7500 \cdot 0,5$
y_4	60000	30000	15000	7500	3750

$$f_4(x) = 60000l \cdot 0,5^x \quad f_4(x) = 60000l \cdot \left(1 - \frac{50}{100}\right)^x$$

Wachstumsfaktor pro Periode

- Der Anfangswert a wird pro Periode mit den gleichen Faktor q multipliziert.

- Funktion: $f(x) = a \cdot q^{\frac{x}{T}}$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.

$y = f(x)$ - Funktionswert nach der Zeit x

a - Anfangswert

T - Periode, Zeitintervall

q - Wachstumsfaktor pro Periode

$q > 1$ exponentielles Wachstum

$0 < q < 1$ exponentieller Zerfall

$q = 0$ Nullwachstum

- Prozentuale Zunahme p pro Periode T

$$f(x) = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{x}{T}}$$

$$q = 1 + \frac{p}{100} \quad p = (q - 1) \cdot 100$$

- Prozentuale Abnahme pro Periode T

$$f(x) = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{\frac{x}{T}}$$

$$q = 1 - \frac{p}{100} \quad p = (1 - q) \cdot 100$$

- Umformungen $y = f(x)$

$$y = a \cdot q^{\frac{x}{T}} \quad a = \frac{y}{q^{\frac{x}{T}}} \quad x = T \cdot \log_q\left(\frac{y}{a}\right) \quad q = \sqrt[T]{\frac{y}{a}}$$

Exponentielles Wachstum

Zu Beginn der Beobachtung sind 150 Bakterien vorhanden. Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich alle 3 Stunden.

$$q=2 \quad T=3 \quad a=150$$

x_5 = Stunden y_5 = Anzahl der Bakterien

x_5	0	3	6	9	12
y_5	150	$150 \cdot 2$	$300 \cdot 2$	$600 \cdot 2$	$1200 \cdot 2$
y_1	150	300	600	1200	2400

$$f_5(x) = 150 \cdot 2^{\frac{x}{3}}$$

Anzahl der Bakterien nach 2 Stunden:

$$f_5(2) = 150 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 238$$

Jod 131 hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen. Am Anfang sind 30000 Atome vorhanden.

$$q=0,5 \quad T=8 \quad a=30000$$

x_6 = Tage y_6 = Anzahl der Atome

x_6	0	8	16	24	32
y_6	30000	$30000 \cdot 0,5$	$15000 \cdot 0,5$	$7500 \cdot 0,5$	$37500 \cdot 0,5$
y_6	30000	15000	7500	3750	1875

$$f_6(x) = 30000 \cdot 0,5^{\frac{x}{8}} \quad f_6(x) = 30000 \cdot \left(1 - \frac{50}{100}\right)^{\frac{x}{8}}$$

Wachstumskonstante und e-Funktion

- Funktion: $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.

f(x) - Funktionswert nach der Zeit x

a - Anfangswert

k - Wachstumskonstante

$k > 0$ exponentielles Wachstum

$k < 0$ exponentieller Zerfall

- Wachstumsfaktor q pro Zeiteinheit

$$f(x) = a \cdot q^x = a \cdot e^{\ln(q^x)} = a \cdot e^{\ln(q) \cdot x} = a \cdot e^{k \cdot x}$$

$$k = \ln(q) \quad q = e^k$$

- Wachstumsfaktor q pro Periode T

$$f(x) = a \cdot q^{\frac{x}{T}} = a \cdot e^{\ln(q^{\frac{x}{T}})} = a \cdot e^{\ln(q) \cdot \frac{x}{T}} = a \cdot e^{k \cdot x}$$

$$k = \frac{\ln(q)}{T} \quad q = e^{k \cdot T}$$

- Lokale Änderungsrate - Wachstumsgeschwindigkeit

$$1. \text{Ableitung: } f'(x) = a \cdot k \cdot e^{k \cdot x} = k \cdot f(x)$$

- Umformungen $y = f(x)$

$$y = a \cdot e^{k \cdot x} \quad a = \frac{y}{e^{k \cdot x}} \quad x = \frac{\ln(\frac{y}{a})}{k} \quad k = \frac{\ln(\frac{y}{a})}{x}$$

$$f_1(x) = 200\text{€} \cdot 1,05^x$$

$$k = \ln(q) = \ln(1,05) = 0,0488$$

$$f_1(x) = 200\text{€} \cdot e^{\ln(1,05)x} \quad f_1(x) = 200\text{€} \cdot e^{0,0488x}$$

$$f_1(10) = 200\text{€} \cdot e^{\ln(1,05)10} = 325,78$$

$$f_6(x) = 30000 \cdot 0,5^{\frac{x}{8}}$$

$$k = \frac{\ln(q)}{T} = \frac{\ln(0,5)}{8} = -0,087$$

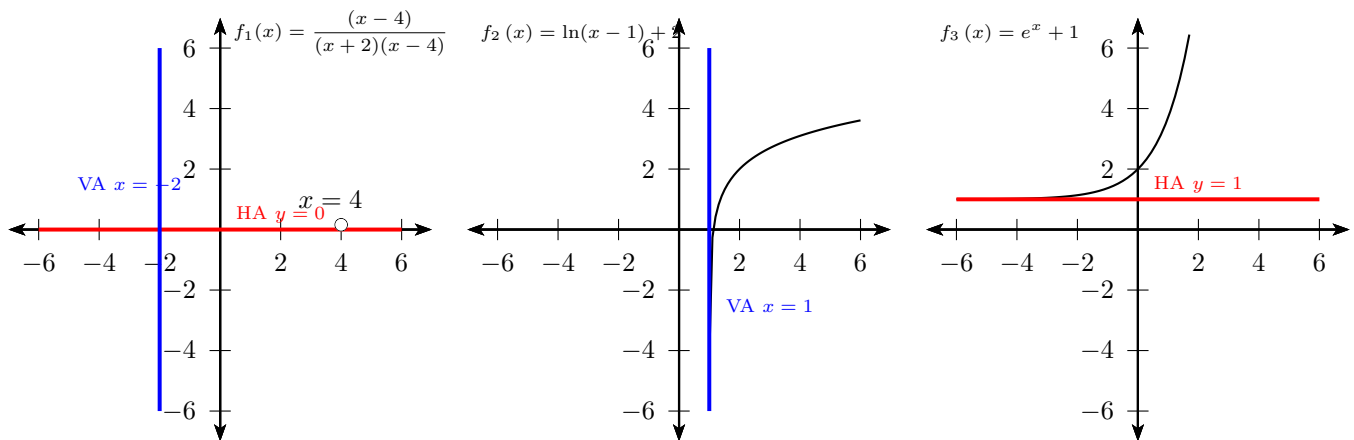
$$f_6(x) = 30000 \cdot e^{\frac{\ln(0,5)}{8}x} \quad f_6(x) = 30000 \cdot e^{-0,087x}$$

Interaktive Inhalte: $p = (q - 1) \cdot 100$ - $q = 1 + \frac{p}{100}$ - $f(x) = a \cdot q^x$ - $a = \frac{f(x)}{q^x}$ - $x = \log_q(\frac{y}{a})$ - $q = \sqrt[x]{\frac{y}{a}}$ -

4 Analysis

4.1 Grenzwert - Stetigkeit

4.1.1 Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0



- Linksseitiger Grenzwert (LGW) von $f(x)$ geht gegen eine Konstante (konvergiert)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \quad \text{oder} \quad \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = a$$

- Rechtsseitiger Grenzwert (RGW) von $f(x)$ geht gegen eine Konstante (konvergiert)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \quad \text{oder} \quad \lim_{x \searrow x_0} f(x) = a$$

- Grenzwert von $f(x)$ existiert

linksseitige Grenzwert = rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

- Linksseitiger Grenzwert von $f(x)$ geht gegen Unendlich (bestimmt divergiert)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm \infty$$

- Rechtsseitiger Grenzwert von $f(x)$ geht gegen Unendlich (bestimmt divergiert)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm \infty$$

\Rightarrow vertikale Asymptote - Polstelle an der Stelle $x = x_0$

$$f_1(x) = \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$$

Linksseitiger Grenzwert von $f(x)$ für x gegen 4

$x \rightarrow 4^-$	$f(x) \rightarrow \frac{1}{6}$
3,99	0,166945
3,999	0,166694
3,9999	0,166669
3,99999	0,166667

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$$

Rechtsseitiger Grenzwert von $f(x)$ für x gegen 4

$x \rightarrow 4^+$	$f(x) \rightarrow \frac{1}{6}$
4,01	0,166389
4,001	0,166639
4,0001	0,166664
4,00001	0,166666

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{1}{6} \Rightarrow$ Stetig behebbare Definitionslücke

Linksseitiger Grenzwert von $f(x)$ für x gegen -2

$x \rightarrow -2^-$	$f(x) \rightarrow -\infty$
-2,01	-100
-2,001	-1000
-2,0001	-10000
-2,00001	-99999,999999

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$$

Rechtsseitiger Grenzwert von $f(x)$ für x gegen -2

$x \rightarrow -2^+$	$f(x) \rightarrow \infty$
-1,99	100
-1,999	1000
-1,9999	10000
-1,99999	99999,999999

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{(x+2)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) + 2 = -\infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 1$



Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

4.1.2 Grenzwert von $f(x)$ für x gegen Unendlich

- Grenzwert von $f(x)$ geht gegen eine Konstante (konvergiert)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$$

\Rightarrow horizontale Asymptote $y = a$

- Grenzwert von $f(x)$ geht gegen Unendlich (bestimmt divergiert)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Funktion:

$$f(x) = -x^3$$

Grenzwert von $f(x)$ für x gegen ∞ und gegen $-\infty$

$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$
10	-1000	-10	1000
100	-1000000	-100	1000000
1000	-1000000000	-1000	1000000000
10000	-1000000000000	-10000	1000000000000

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -x^3 = [-1 \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = [-1 \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

$$f(x) = \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$$

Grenzwert von $f(x)$ für x gegen ∞ und gegen $-\infty$

$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow 0$	$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow 0$
10	0,083333	-10	-0,125
100	0,009804	-100	-0,010204
1000	0,000998	-1000	-0,001002
10000	0,0001	-10000	-0,0001
100000	0,00001	-100000	-0,00001

$$f_1(x) = \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \frac{x-4}{x^2-2x-4} = \frac{x(1-\frac{4}{x})}{x^2(1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(1-\frac{4}{x})}{x^2(1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$$f_2(x) = \ln(x-1) + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x-1) + 2 = \infty$$

$$f_3(x) = e^x + 1$$

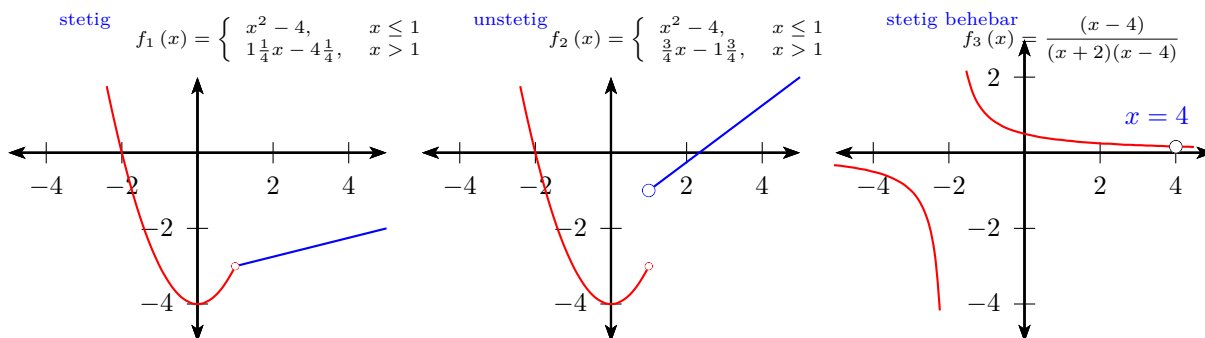
$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x + 1 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1$$

Horizontale Asymptote: $y = 1$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

4.1.3 Stetigkeit



- Ein Funktion ist an der Stelle x_0 stetig, wenn der linksseitige GW = rechtsseitige GW = Funktionswert $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

- Stetige Funktionen

- Ganzrationale Funktionen

- Exponentialfunktionen

- Sinus- und Kosinusfunktion

- Stetige Funktionen, bei denen die Unstetigkeitsstellen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen sind:

- Gebrochenrationale Funktionen

- Logarithmusfunktionen

- Tangensfunktion

- Abschnittsweise definierte Funktionen müssen an den Schnittstellen auf Stetigkeit untersucht werden.

- Stetig behebbare Definitionslücke x_0

- linksseitige GW = rechtsseitige GW

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 1 \\ 1\frac{1}{4}x - 4\frac{1}{4}, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{LGW: } \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 4 = -3$$

$$\text{RGW: } \lim_{x \rightarrow 1^+} 1\frac{1}{4}x - 4\frac{1}{4} = -3$$

$$\text{FW: } f_1(1) = 1^2 - 4 = -3$$

$$\text{LGW} = \text{RGW} = \text{FW} \Rightarrow$$

ist stetig an der Stelle $x_0 = 1$

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 1 \\ \frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4}, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{LGW: } \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 4 = -3$$

$$\text{RGW: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4} = -1$$

$$\text{FW: } f_2(1) = 1^2 - 4 = -3$$

$$\text{LGW} \neq \text{RGW} \neq \text{FW} \Rightarrow$$

ist unstetig an der Stelle $x_0 = 1$

$$f_3(x) = \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \frac{1}{(x+2)} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$$

$f_3(x)$ stetig in \mathbb{D}

$$\text{RGW: } \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$\text{LGW: } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$\text{RGW} = \text{LGW}$$

\Rightarrow stetig behebbare Definitionslücke: $x_0 = 4$

Stetige Fortsetzung von $f_2(x)$

$$f_4(x) = \frac{1}{(x+2)} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

4.1.4 Rechenregeln

Wichtige Grenzwerte

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} a \cdot x = 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} a \cdot x = \infty & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty & \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot x = 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} 7 \cdot x = \infty & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} 2e^x = \infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} -3e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 \ln x = -\infty & \lim_{x \rightarrow \infty} 6 \ln x = \infty \end{array}$$

Rechenregeln

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f & \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f + g \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f - g \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f \cdot g \\ g(x) \neq 0 & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{f}{g} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1 - \frac{4}{x}}{x(1 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2})} = 0$$

Zähler:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{4}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} 1 - 0 = 1$$

Nenner:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{8}{x^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x(1 - 0 - 0) = \infty$$

Zähler durch Nenner: $\frac{1}{\infty} = 0$

Unbestimmte Ausdrücke

$$\text{Typ 1: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{Typ 2: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Regel von L'Hospital

Zähler und Nenner getrennt ableiten, bis man den Grenzwert berechnen kann.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} \dots$$

$$\text{Typ 3: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \pm\infty$$

- Umformen in Typ 1 oder 2 und danach L'Hospital

$$\text{Typ 4: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = \infty - \infty$$

- Brüche auf gemeinsamen Hauptnenner bringen

- Faktorisieren

$$\text{Typ 1: } \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

$$\text{Typ 2: } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$\text{Typ 3: } \infty \cdot 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x = 0$$

$$\text{Typ 4: } \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x = \lim_{x \rightarrow \infty} x(x - 1) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x}{x^2} = \infty$$

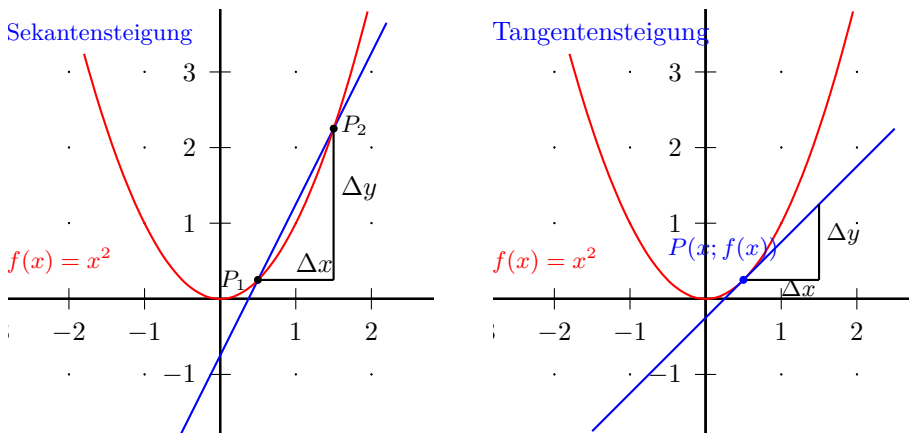
Wichtige unbestimmte Ausdrücke

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} &= 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\ln x} &= \infty & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^5}{e^x} &= 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3} &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{\ln x} &= \infty & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \ln x}{x} &= 0 \end{aligned}$$

4.2 Differentialrechnung

4.2.1 Definition



Sekantensteigung

Eine Gerade schneidet eine Funktion in den Punkten

$P_1(x_0; f(x_0))$ und $P_2(x; f(x))$.

Steigung der Sekante an der Stelle x_0

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Delta x = h \quad x = x_0 + h$$

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Sekantensteigung = Differenzenquotient = Mittlere Änderungsrate

Für kleine h ist die Sekantensteigung \approx Tangentensteigung

$$m \approx f'(x_0)$$

$$f(x) = x^2$$

Die Sekantensteigung m durch die Punkte

$$P_1(0.5; 0.25) \quad P_2(1.5; 2.25)$$

$$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$m = \frac{2.25 - 0.25}{1.5 - 0.5} = 2$$

Die Sekantensteigung m an der Stelle $x_0 = 0.5$ und $h = 1$

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$m = \frac{f(0.5 + 1) - f(0.5)}{1}$$

$$m = \frac{2.25 - 0.25}{1} = 2$$

Die Sekantensteigung m an der Stelle $x_0 = 0.25$ und $h = 0.001$

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$m = \frac{f(0.25 + 0.001) - f(0.25)}{0.001}$$

$$m = \frac{0.251001 - 0.25}{0.001} = 1.001$$

$$m \approx f'(0.5) = 1$$

1. Ableitung - Differentialquotient

Die Ableitung von $f(x)$ ist die Steigung des Graphen der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 .

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$x = x_0 + h$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

1. Ableitung = Steigung der Tangente = Steigung der Funktion $f(x)$ = lokale (momentane) Änderungsrate

Die Ableitung von $f(x)$ an einer beliebigen Stelle x

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Die 1. Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 0.5$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0.5 + h)^2 - 0.5^2}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0.25 + h + h^2 - 0.25}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(1 + h)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} 1 + h = 1$$

Die Ableitung von $f(x) = x^2$ an einer beliebigen Stelle x

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(0.5) = 1$$

2. Ableitung

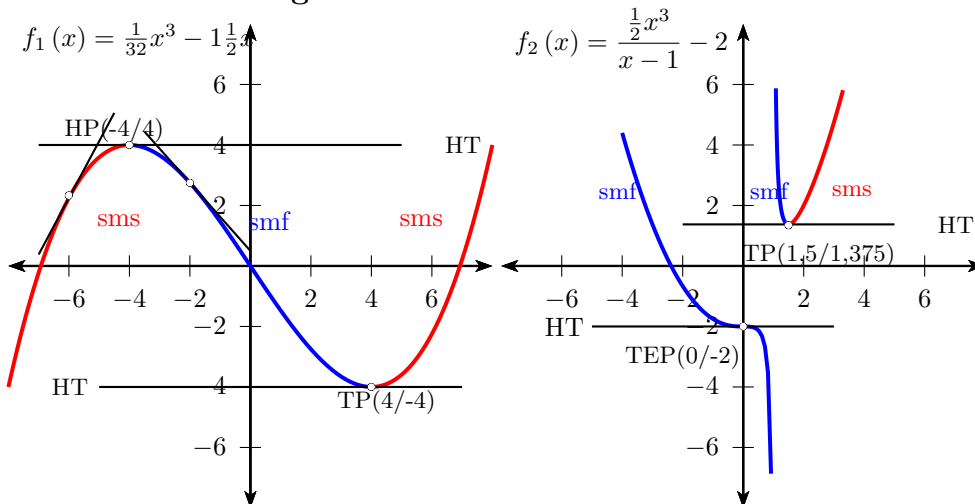
Die Ableitung der 1. Ableitung ist die 2. Ableitung.

Die 2. Ableitung gibt die Krümmung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 an.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^4 + 3x^2 + 2x \\ f'(x) &= -4x^3 + 6x + 2 \\ f''(x) &= -12x^2 + 6 \end{aligned}$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

4.2.2 1. Ableitung - Monotonie - Extremwerte



sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum); HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt;

Steigung von $f(x_0)$ an der Stelle x_0

$$m = f'(x_0)$$

•Funktion

$$f(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$$

•1. Ableitungen

$$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$$

Steigung an der Stelle $x = -6$

$$m = f'(-6) = 1\frac{7}{8}$$

Steigung an der Stelle $x = -2$

$$f'(-2) = -1\frac{1}{8}$$

Stelle x_0 an der $f(x_0)$ die Steigung m besitzt

$$f'(x) = m$$

Bei horizontalen Tangenten ist die Steigung Null.

$$f'(x) = 0$$

•1. Ableitungen

$$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2}$$

Horizontale Tangente

$$\frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0 \quad / + 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{32}x^2 = 1\frac{1}{2} \quad / : \frac{3}{32}$$

$$x^2 = \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{3}{32}}$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -4$$

Monotonieverhalten

monoton steigend	$f'(x) \geq 0$
streng monoton steigend sms	$f'(x) > 0$
monoton fallend	$f'(x) \leq 0$
streng monoton fallend smf	$f'(x) < 0$

Das Monotonieverhalten kann sich nur an den Extremstellen und an den Rändern des Definitionsbereich (Definitionslücken) ändern.

Extremwerte und das Monotonieverhalten

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat $f(x)$ eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1 \dots)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1 \dots)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f'(x)$ in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

- Hochpunkt (HP)

Monotonieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Plus nach Minus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	+	0	-
Graph	sms	HP	smf

- Tiefpunkt (TP)

Monotonieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	-	0	+
Graph	smf	TP	sms

- Terrassenpunkt (TEP)

Monotonieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	+	0	+
Graph	sms	TEP	sms

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

Monotonieverhalten an der Stelle $x = -6$
 $m = f'(-6) = 1\frac{7}{8} > 0 \Rightarrow \text{sms}$
 Monotonieverhalten an der Stelle $x = -2$
 $f'(-2) = -1\frac{1}{8} < 0 \Rightarrow \text{smf}$

- Funktion

$$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$$

- 1. Ableitungen

$$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$$

$$\bullet f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0 \quad / + 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{32}x^2 = 1\frac{1}{2} \quad / : \frac{3}{32}$$

$$x^2 = \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{3}{32}}$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -4$$

- Vorzeichentabelle von $f'(x)$

	$x <$	-4	$< x <$	4	$< x$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
Graph	sms	HP	smf	TP	sms

Hochpunkt: $(-4/4)$ Tiefpunkt: $(4/-4)$

- Monotonieverhalten

$$x \in]-\infty; -4[\cup]4; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{sms}$$

$$x \in]-4; 4[\quad f'(x) < 0 \quad \text{smf}$$

- Funktion

$$f_2(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2$$

- 1. Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1\frac{1}{2}x^2 \cdot (x-1) - \frac{1}{2}x^3 \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(1\frac{1}{2}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2) - \frac{1}{2}x^3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^3 - 1\frac{1}{2}x^2}{(x-1)^2}$$

$$\text{Zähler} = 0$$

$$x^2(x - 1\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x - 1\frac{1}{2} = 0$$

$$x - 1\frac{1}{2} = 0 \quad / + 1\frac{1}{2}$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

$$x_0 = 0; \quad 2\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_1 = 1\frac{1}{2}; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

Nullstellen des Nenners aus $f(x)$ übernehmen $x_3 = 1$

	$x <$	0	$< x <$	1	$< x <$	$1\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	-	0	-	-	-	0	+
Graph	smf	TEP	smf		smf	HP	sms

TEP(0/0) TP($1\frac{1}{2}/1\frac{3}{8}$)

- Monotonieverhalten

$$x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{smf}$$

$$x \in]1\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{sms}$$

Extremwerte und die 2. Ableitung

In den Extremwerten hat $f(x)$ eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f''(x_0) > 0$ (LK) \Rightarrow Tiefpunkt (Minimum) bei x_0
- $f''(x_0) < 0$ (RK) \Rightarrow Hochpunkt (Maximum) bei x_0
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

• Funktion

$$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$$

• 1. Ableitungen

$$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$$

• 2. Ableitungen

$$f''(x) = \frac{3}{16}x$$

$$\bullet f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0 \quad / + 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{32}x^2 = 1\frac{1}{2} \quad / : \frac{3}{32}$$

$$x^2 = \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{3}{32}}$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -4$$

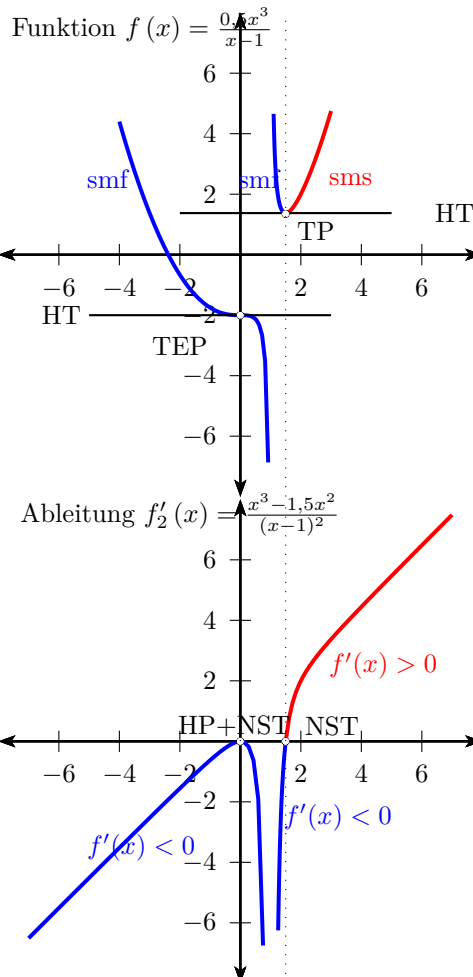
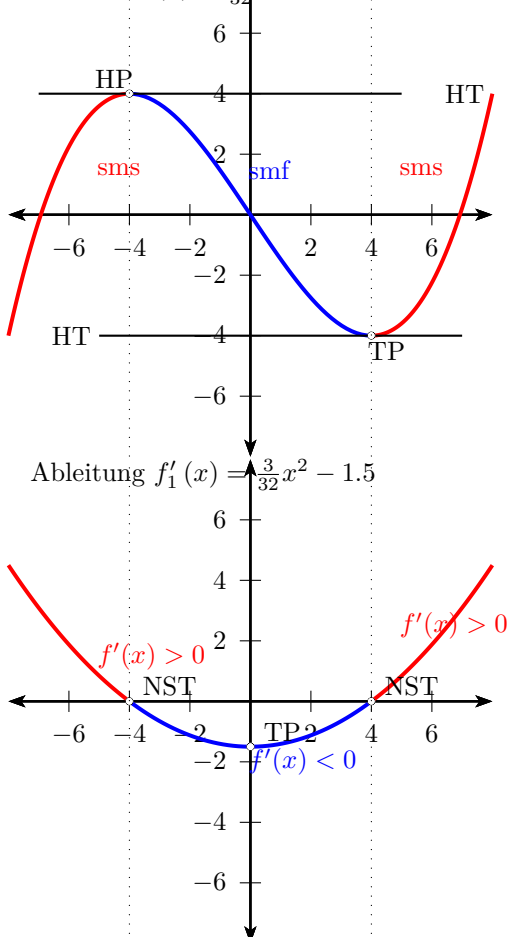
$$f''(-4) = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \text{HP}(-4/4)$$

$$f''(4) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \text{TP}(4/-4)$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

4.2.3 Graph der 1. Ableitung

Funktion: $f(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x$



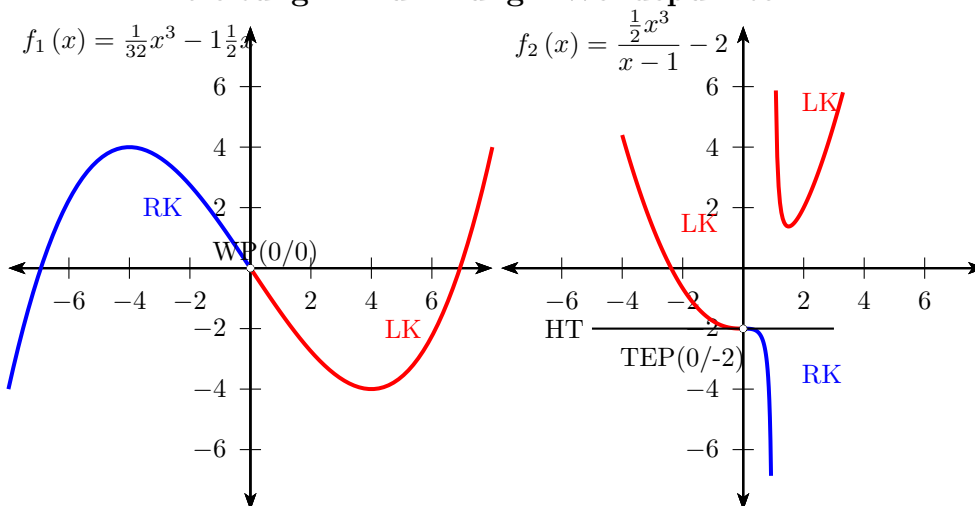
sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum); HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt;

Funktion - 1. Ableitung $f'(x)$

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
Extremwert	NST $f'(x) = 0$
HT	NST $f'(x) = 0$
HP	NST und VZW von + nach -
TP	NST und VZW von - nach +
TEP	NST ohne VZW
WP	Extremwert
sms	$f'(x) > 0$ (positiv)
smf	$f'(x) < 0$ (negativ)
VA	VA $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \pm\infty$
HA	HA $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0$

$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x$ $f_1'(x)$	$f_1'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1,5$ $f_1'(x)$
Extremwert: $x = -4$ HP: $x = -4$ WP: $x = 0$ sms: $x < -4$	NST $x = -4$ VZW von + nach - $x = -4$ Extremwert: $x = 0$ $f(x) > 0 \quad x < -4$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

4.2.4 2. Ableitung - Krümmung - Wendepunkte

VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt;

Krümmung von $f(x_0)$ an der Stelle x_0

Rechtskrümmung	RK	$f''(x) < 0$
Linkskrümmung	LK	$f''(x) > 0$

Das Krümmungsverhalten kann sich nur an den Nullstellen der 2. Ableitung und an den Rändern des Definitionsbereichs (Definitionslücken) ändern.

Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen ($x_0, x_1 \dots$). Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung) Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f''(x)$ in die Tabelle eintragen.

- Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.

Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung $f''(x)$ von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	+	0	-
Graph	LK	WP	RK

- Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht

Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	+	0	+
Graph	LK	FP	LK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

- Funktion

$$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$$

$$f'_1(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2}$$

- 2. Ableitungen

$$f''_1(x) = \frac{3}{16}x$$

$$f''_1(x) = \frac{3}{16}x = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	-	0	+
Graph	RK	WP	LK

WP(0/0)

$$x \in]0; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{LK}$$

$$x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) < 0 \quad \text{RK}$$

- Funktion

$$f_2(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3}{x-1}$$

$$f'_2(x) = \frac{x^3 - 1\frac{1}{2}x^2}{(x-1)^2}$$

- 2. Ableitungen

$$f''_2(x) = \frac{(x^2 - 3x + 3)x}{(x-1)^3} \quad \text{Zähler} = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Diskriminante negativ keine Lösung

$$x_9 = 0; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

Nullstelle des Nenners aus $f(x)$ übernehmen

$$x_{10} = 1; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

	$x <$	0	$< x <$	1	$< x$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
Graph	RK	WP	LK		RK

WP(0/-2) kein WP $x = 1$

$$x \in]-\infty; 0[\cup]1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{LK}$$

$$x \in]0; 1[\quad f''(x) < 0 \quad \text{RK}$$

Wendepunkte und die 3. Ableitung

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen ($x_0, x_1 \dots$).

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1 \dots$ in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

- Funktion

$$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$$

- 1. Ableitungen

$$f'_1(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$$

- 2. Ableitungen

$$f''_1(x) = \frac{3}{16}x$$

- 3. Ableitungen

$$f'''_1(x) = \frac{3}{16}$$

$$f''_1(x) = \frac{3}{16}x = 0$$

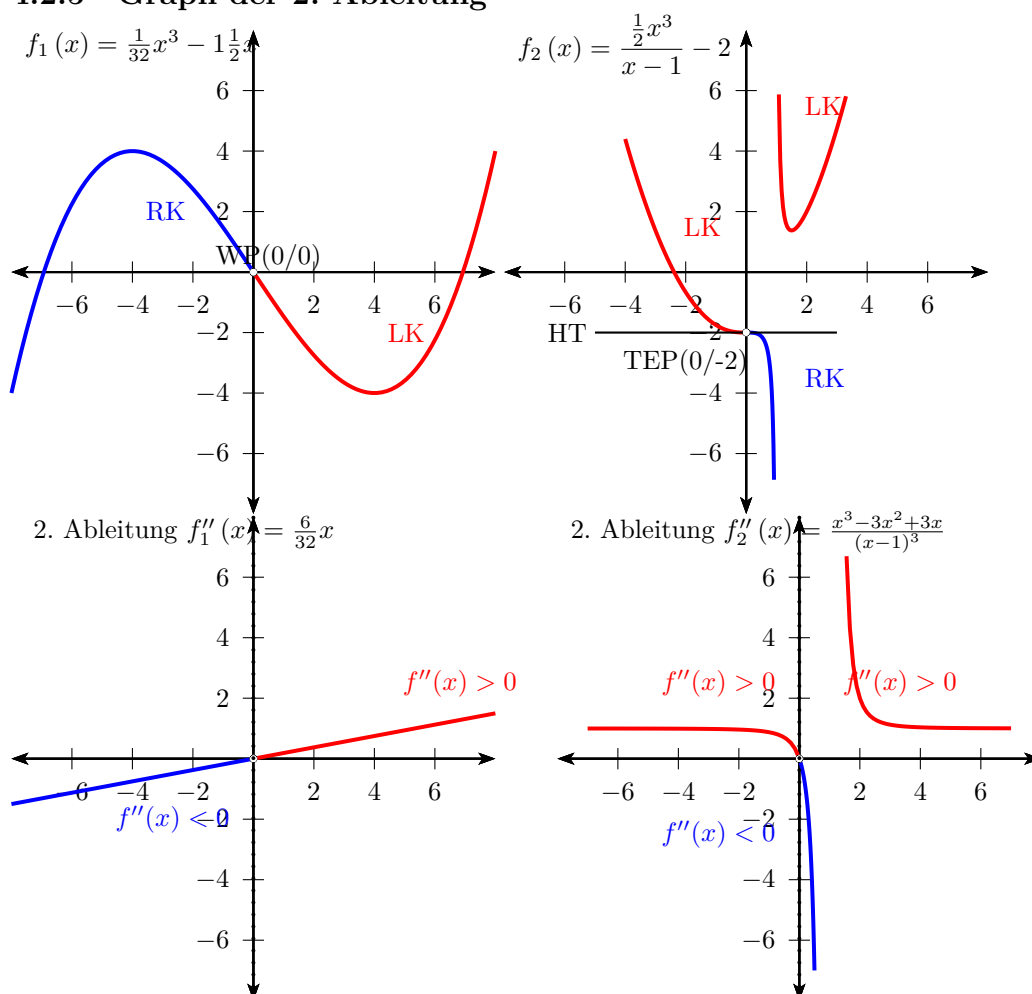
$$x = 0$$

$$f'''_1(0) = \frac{3}{16} \neq 0 \Rightarrow$$

Wp(0/0)

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

4.2.5 Graph der 2. Ableitung



sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum) ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt;

Funktion - 2. Ableitung $f''(x)$

Funktion $f(x)$	2. Ableitung $f''(x)$
WP	NST $f''(x) = 0$ mit VZW
LK	$f''(x) > 0$
RK	$f''(x) < 0$
TEP	NST mit VZW
VA	VA
HA	HA

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

4.2.6 Ableitung der Grundfunktionen

Polynomfunktion

$$f(x) = x^n \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

Die Ableitungen bildet man durch: Exponent vorziehen und vom Exponenten 1 abziehen

$$f(x) = x \quad f'(x) = 1$$

$$f(x) = ax^n \quad f'(x) = nax^{n-1}$$

$$f(x) = ax \quad f'(x) = a$$

Konstanter Faktor a bleibt erhalten

$$f(x) = a \quad f'(x) = 0$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Bei Summen wird jeder Summand einzeln abgeleitet

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^5 & f'_1(x) &= 5x^{5-1} = 5x^4 \\ f_2(x) &= 8x^5 & f'_2(x) &= 8 \cdot 5x^{5-1} = 40x^4 \\ f_3(x) &= 2x & f'_3(x) &= 2 \\ f_4(x) &= 5 & f'_4(x) &= 0 \\ f_5(x) &= x^5 + x^4 + x + 3 & f'_5(x) &= 5x^4 + 4x^3 + 1 \\ f''_5(x) &= 20x^3 + 12x^2 \end{aligned}$$

Exponentialfunktion Basis e

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

$$f(x) = ae^x \quad f'(x) = ae^x$$

$$f(x) = ae^x + b \quad f'(x) = ae^x$$

$$f(x) = 3e^x + 4 \quad f'(x) = 3e^x$$

Logarithmusfunktion Basis e

$$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = a \ln x \quad f'(x) = \frac{a}{x}$$

$$f(x) = a \ln x + b \quad f'(x) = \frac{a}{x}$$

$$f(x) = 4 \ln x + 5 \quad f'(x) = \frac{4}{x}$$

Exponentialfunktion allgemein

$$f(x) = a^x \quad f'(x) = a^x \ln a$$

$$f(x) = 3^x \quad f'(x) = 3^x \ln 3$$

Logarithmusfunktion allgemein

$$f(x) = \log_a x \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$f(x) = \log_4 x \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln 4}$$

Trigonometrische Funktionen

$$f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \quad f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f_2(x) = x^3 + 2 \cdot \sin x \quad f'_2(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot \cos x$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

4.2.7 Ableitungsregeln

Ableiten von Summen und Differenzen

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^5 + x^4 + x + 3 \\ f'_1(x) &= 5x^4 + 4x^3 + 1 \\ f''_1(x) &= 20x^3 + 12x^2 \\ f_2(x) &= x^3 + 2 \cdot \sin x \\ f'_2(x) &= 3 \cdot x^2 + 2 \cdot \cos x \end{aligned}$$

Ableiten mit konstantem Faktor

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 5e^x + 4 \ln x \\ f'_1(x) &= 5e^x + 4 \frac{1}{x} \\ f_2(x) &= 5 \cos x + 4 \sin x \\ f'_2(x) &= -5 \sin x + 4 \cos x \end{aligned}$$

Kettenregel

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- äußere Funktion f() ableiten
- innere Funktion g(x) unabgeleitet abschreiben
- mit der Ableitung der inneren Funktion g(x) multiplizieren (nachdifferenzieren)

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^{2x} \\ \text{äußere Funktion: } e^{(\cdot)} & \quad \text{innere Funktion: } 2x \\ f'_1(x) &= e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x} \\ f_2(x) &= 3 \sin 5x \\ \text{äußere Funktion: } \sin(\cdot) & \quad \text{innere Funktion: } 5x \\ f'_2(x) &= 3 \cos 5x \cdot 5 = 15 \cos 5x \\ f_3(x) &= 5e^{3x^3} \\ \text{äußere Funktion: } e & \quad \text{innere Funktion: } 3x^3 \\ f'_3(x) &= 5e^{3x^3} \cdot 9x^2 = 45x^2 e^{3x^3} \\ f_4(x) &= (x^3 - x)^7 \\ \text{äußere Funktion: } (\dots)^7 & \quad \text{innere Funktion: } x^3 - x \\ f'_4(x) &= 7(x^3 - x)^6 \cdot (3x^2 - 1) = (21x^2 - 7)(x^3 - x)^6 \end{aligned}$$

Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- 1. Faktor f(x) ableiten
- mal
- 2. Faktor g(x) unabgeleitet
- plus
- 1. Faktor f(x) unabgeleitet
- mal
- 2. Faktor g(x) abgeleitet

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 e^x \\ f'_1(x) &= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x \\ f'_1(x) &= x e^x (2 + x) \\ f_2(x) &= (x^2 - 6 \cdot x + 2) \cdot e^x \\ f'_2(x) &= (2 \cdot x - 6) \cdot e^x + (x^2 - 6 \cdot x + 2) \cdot e^x \\ f'_2(x) &= e^x (2x - 6 + x^2 - 6x + 2) \\ f'_2(x) &= e^x (x^2 - 4x - 4) \end{aligned}$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

- Zähler f(x) ableiten
- mal
- Nenner g(x) unabgeleitet
- minus
- Zähler f(x) unabgeleitet
- mal
- Nenner g(x) abgeleitet
- durch
- Nenner g(x) im Quadrat

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x-1}{x^2} & f'(x) &= \frac{3 \cdot x^2 - (3x-1) \cdot 2x}{(x^2)^2} \\ f'(x) &= \frac{3x^2 - (6x^2 - 2x)}{(x^4)} \\ f'(x) &= \frac{-3x^2 + 2x}{(x^4)} \\ f'(x) &= \frac{-3x(x - \frac{2}{3})}{x^4} \\ f'(x) &= \frac{-3(x - \frac{2}{3})}{x^3} \\ f'(x) &= \frac{-3x + 2}{x^3} \end{aligned}$$

4.2.8 Tangenten- und Normalengleichung

Tangentengleichung

Tangente an der Stelle x_0 :

$$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

oder

$$y_0 = f(x_0)$$

$$m_t = f'(x_0)$$

Geradengleichung:

$$y = m \cdot x + t$$

m_t, x_0, y_0 einsetzen und nach t auflösen

$$t = y_0 - m_t \cdot x_0$$

m_t, t einsetzen

$$y = m_t \cdot x + t$$

Funktion

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

Tangente an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$g(x) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$g(x) = 1\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

$$g(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$g(x) = x - \frac{1}{4}$$

Normalengleichung

Normale an der Stelle x_0 :

$$g(x) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

oder

$$y_0 = f(x_0)$$

$$m_t = f'(x_0)$$

Steigung der Normalen

$$m_n = \frac{-1}{m_t}$$

Geradengleichung:

$$y = m \cdot x + t$$

m_n, x_0, y_0 einsetzen und nach t auflösen

$$t = y_0 - m_n \cdot x_0$$

m_n, t einsetzen

$$y = m_n \cdot x + t$$

Funktion

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

Normale an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$g(x) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$g(x) = \frac{-1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$g(x) = \frac{-1}{1}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

$$g(x) = -1x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$g(x) = -1x + \frac{3}{4}$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [hier klicken](#)

4.2.9 Newtonsches Iterationsverfahren

Nullstelle einer Funktion mit dem Newtonsches Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Startwert x_0 wählen

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

....

Funktion

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Startwert: $x_0 = 1$

$$f(1) = -3$$

$$f'(1) = 2$$

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)}$$

$$x_1 = 1 - \frac{-3}{2}$$

$$x_1 = 2,5$$

$$f(2,5) = -32$$

$$f'(2,5) = 22$$

$$x_2 = 2,5 - \frac{f(2,5)}{f'(2,5)}$$

$$x_2 = 1 - \frac{-32}{22}$$

$$x_2 = 2,05$$

$$f(2,05) = -33$$

$$f'(2,05) = 23$$

$$x_3 = 2,05 - \frac{f(2,05)}{f'(2,05)}$$

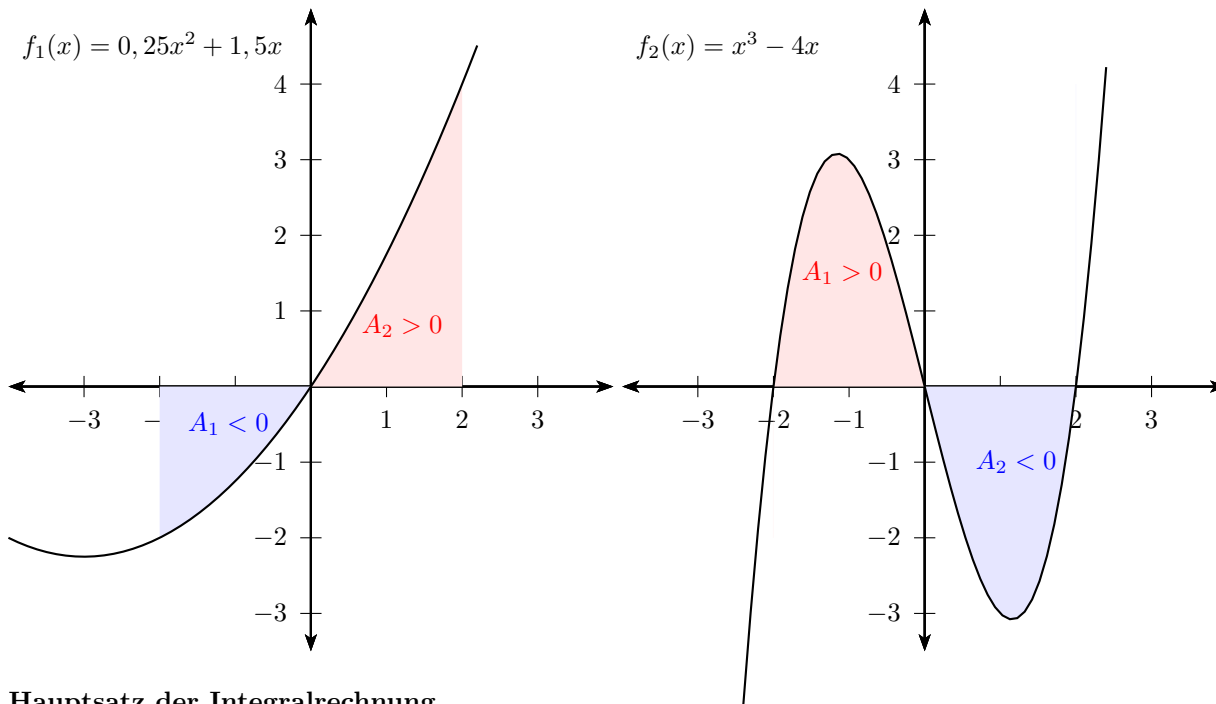
$$x_3 = 2,05 - \frac{-33}{23}$$

$$x_3 = 2,001$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

4.3 Integralrechnung

4.3.1 Definition



Hauptsatz der Integralrechnung

$$F'(x) = f(x)$$

Die Ableitung von $F(x)$ ist $f(x)$

$F(x)$ ist Stammfunktion von $f(x)$

Die Menge aller Stammfunktionen erhält man durch das Addieren einer Konstanten c .

$$f(x) = ax^n \quad F(x) = \frac{1}{n+1} ax^{n+1} + c$$

$$F_1(x) = x^2 + 2$$

$$F_1'(x) = 2x$$

$F_1(x)$ ist Stammfunktion von $f(x) = 2x$

$$F_2(x) = x^2 + 3$$

$$F_2'(x) = 2x$$

$F_2(x)$ ist Stammfunktion von $f(x) = 2x$

Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x) = 2x$

$$F(x) = x^2 + c$$

Unbestimmtes Integral

$$F(x) = \int f(x) \, dx = F(x) + c$$

Die Stammfunktion zu einer Funktion $f(x)$ ist das unbestimmte Integral.

$$f(x) = 6x^2$$

$$F(x) = \int 6x^2 \, dx = 6 \cdot \frac{1}{3} x^{2+1} + c$$

$$F(x) = 2x^3 + c$$

$$F(x) = \int \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5\right) \, dx = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 5x + c$$

Bestimmtes Integral

- Flächenbilanz

$$A = \int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

A ist der Flächeninhalt unter einer Kurve der Funktion f(x) im Integrationsbereich von a bis b.

Fläche oberhalb der x-Achse $\Rightarrow A > 0$

Fläche unterhalb der x-Achse $\Rightarrow A < 0$

Flächen unterhalb und oberhalb der x-Achse \Rightarrow Summe der Teilflächen

- Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse

- Nullstellen berechnen

- Flächen zwischen den Nullstellen berechnen

- Beträge der Flächen addieren

Funktion

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x$$

Stammfunktion

$$F(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2$$

Fläche unterhalb der x-Achse $\Rightarrow A_1 < 0$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x \right) dx = \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \right]_{-2}^0 \\ &= \left(\frac{1}{12} \cdot 0^3 + \frac{3}{4} \cdot 0^2 \right) - \left(\frac{1}{12} \cdot (-2)^3 + \frac{3}{4} \cdot (-2)^2 \right) \\ &= (0) - \left(2\frac{1}{3} \right) = -2\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Fläche oberhalb der x-Achse $\Rightarrow A_2 > 0$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x \right) dx = \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \right]_0^2 \\ &= \left(\frac{1}{12} \cdot 2^3 + \frac{3}{4} \cdot 2^2 \right) - \left(\frac{1}{12} \cdot 0^3 + \frac{3}{4} \cdot 0^2 \right) \\ &= \left(3\frac{2}{3} \right) - (0) = 3\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Fläche unterhalb und oberhalb der x-Achse

Summe der Teilflächen (Flächenbilanz)

$$\begin{aligned} A_3 &= \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x \right) dx = \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \right]_{-2}^2 \\ &= \left(\frac{1}{12} \cdot 2^3 + \frac{3}{4} \cdot 2^2 \right) - \left(\frac{1}{12} \cdot (-2)^3 + \frac{3}{4} \cdot (-2)^2 \right) \\ &= \left(3\frac{2}{3} \right) - \left(2\frac{1}{3} \right) = 1\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$A_3 = A_1 + A_2 = \left(-2\frac{1}{3} \right) + 3\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$$f_2(x) = x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$$

• Nullstellen: $x_1 = -2$ $x_2 = 0$ $x_3 = 2$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_{-2}^0 \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 \right) \\ &= (0) - (-4) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^2 (x^3 - 4x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_0^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 \right) \\ &= (-4) - (0) = -4 \end{aligned}$$

• Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse:

$$A = |A_1| + |A_2| = |4| + |-4| = 8$$

Integralfunktion

$$F(x) = \int_k^x f(t) \, dt = [F(t)]_k^x = F(x) - F(k)$$

Jede Integralfunktion hat mindestens eine Nullstelle.

$$F(k) = 0$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-2}^x (2t^2 + 4t) \, dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + 2t^2 \right]_{-2}^x \\ &= \left(\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right) - \left(\frac{2}{3} \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 \right) \\ &= \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3} \\ F(-2) &= 0 \end{aligned}$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#) [hier klicken](#)

4.3.2 Integration der Grundfunktionen

Polynomfunktion

$$F(x) = \int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

Zum Exponenten 1 addieren, durch den Exponenten dividieren

$$F(x) = \int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$F(x) = \int ax^n \, dx = a \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

Konstanter Faktor a bleibt erhalten

$$F(x) = \int a \, dx = ax + c$$

$$\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

Bei Summen wird jeder Summand einzeln integriert

$$F(x) = \int 4 \, dx = 4x + c$$

$$F_2(x) = \int \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5 \right) dx =$$

$$F_2(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^{2+1} + 2 \cdot \frac{1}{2}x^{1+1} + 5x + c$$

$$F_2(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 5x + c$$

Exponentialfunktion Basis e

$$F(x) = \int e^x \, dx = e^x + c$$

$$F(x) = \int a e^x \, dx = a e^x + c$$

$$F(x) = \int a e^x + b \, dx = a e^x + b x + c$$

$$F(x) = \int -3e^x + 2 \, dx = -3e^x + 2x + c$$

Logarithmusfunktion Basis e

$$F(x) = \int \ln x \, dx = x \ln x - x + c$$

$$F(x) = \int a \ln x \, dx = a(x \ln x - x) + c$$

$$F(x) = \int a \ln x + b \, dx = a(x \ln x - x) + b x + c$$

$$F(x) = \int 7 \ln x + 2 \, dx = 7(x \ln x - x) + 2x + c$$

Rationale Funktion mit linearer Funktion im Nenner

$$F(x) = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$$

$$F(x) = \int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$$

$$F(x) = \int \frac{1}{x+1} \, dx = \ln |x+1| + c$$

$$F(x) = \int \frac{1}{2x+3} \, dx = \frac{1}{2} \ln |2x+3| + c$$

Trigonometrische Funktionen

$$F(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$F(x) = \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

4.3.3 Integrationsregeln**Integration von Summen und Differenzen**

$$\int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx = \int f(x) + g(x) \, dx$$

Integration mit konstanten Faktor

$$\int c \cdot f(x) \, dx = c \int f(x) \, dx$$

Integration mit vertauschten Grenzen

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

Integrationsgrenzen zusammenfassen

$$\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx$$

Ableitung des Nenners im Zähler

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + c$$

$$\int \frac{2x}{x^2} \, dx = \ln |x^2| + c$$

$$\int \frac{-12x^2+5}{-4x^3+5x-2} \, dx = \ln |-4x^3+5x-2| + c$$

Innere Funktion ist abgeleiteter Faktor

$$\int g'(x)f(g(x)) \, dx = F(x) + c$$

$$\int 2x(x^2 - 3)^4 \, dx = \frac{1}{5}(x^2 - 3)^5 + c$$

$$\int 2xe^{x^2-3} \, dx = e^{x^2-3} + c$$

$$\int 2x \sin(x^2 - 3) \, dx = -\cos(x^2 - 3) + c$$

$$\int (3x^2 - 6x)e^{x^3-3x^2} \, dx = e^{x^3-3x^2} + c$$

Innere Funktion ist eine lineare Funktion

$$\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a}F(x) + c$$

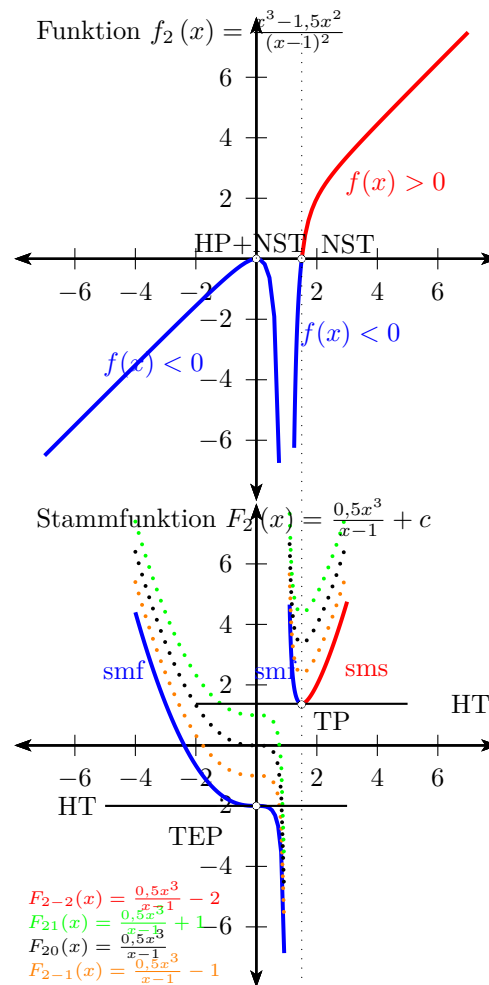
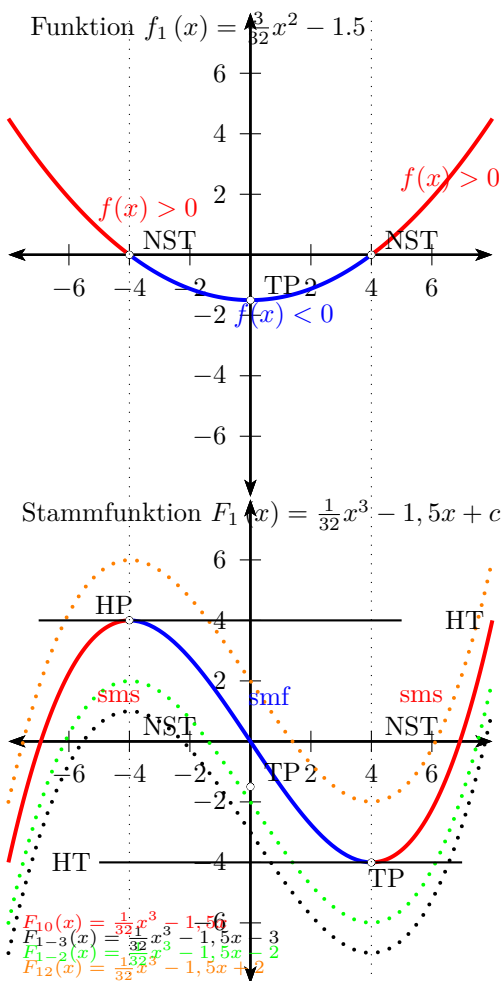
$$\int (2x - 6)^4 \, dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}(2x - 3)^5 + c = \frac{1}{10}(2x - 3)^5 + c$$

$$\int e^{2x-6} \, dx = \frac{1}{2}e^{2x-6} + c$$

$$\int \cos(-2x - 6) \, dx = -\frac{1}{2}\sin(-2x - 3) + c$$

$$\int \frac{1}{5x+3} \, dx = \frac{1}{5} \ln |5x + 3| + c$$

4.3.4 Graph der Stammfunktion



sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum) ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt;

Zu jeder Funktion $f(x)$ gibt es eine Menge von Stammfunktionen $F(x)$, die um c in y -Richtung verschoben sind.

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
NST $f(x) = 0$	Extremwert (HT)
VZW von $+$ nach $-$	HP
VZW von $-$ nach $+$	TP
NST ohne VZW	TEP
Extremwert	WP
$f(x) > 0$ (positiv)	sms
$f(x) < 0$ (negativ)	smf

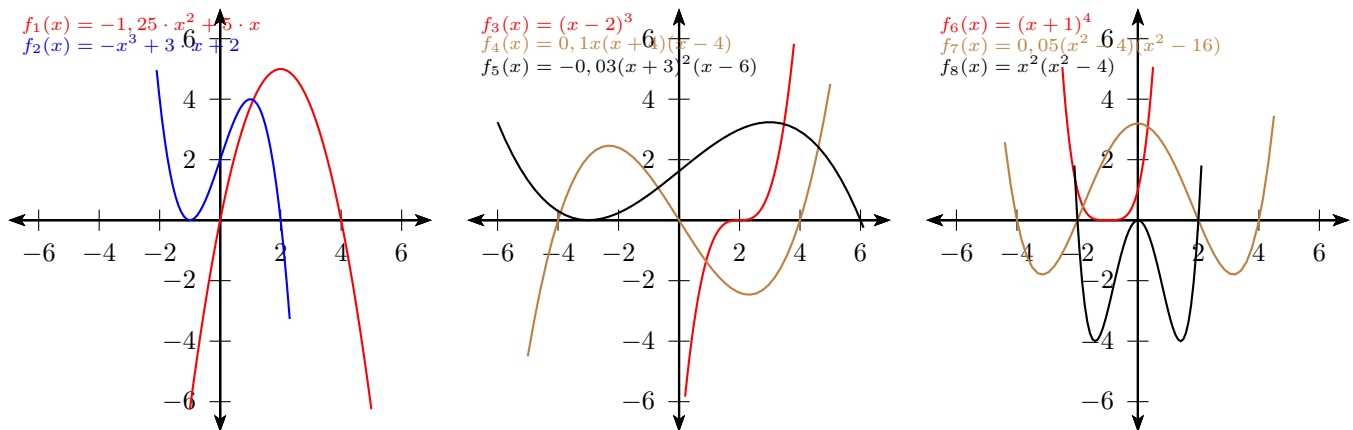
$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \frac{3}{32}x^2 - 1.5 \\
 F_1(x) &= \int \frac{3}{32}x^2 - 1.5 \, dx = \frac{1}{32}x^3 - 1.5x + c \\
 F_{12}(x) &= \frac{1}{32}x^3 - 1.5x + 2 & F_{1-2}(x) &= \frac{1}{32}x^3 - 1.5x - 2 \\
 F_{1-3}(x) &= \frac{1}{32}x^3 - 1.5x - 3 & F_{10}(x) &= \frac{1}{32}x^3 - 1.5x
 \end{aligned}$$

$f_1(x)$	$F_1(x)$
NST $x = -4$	Extremwert: $x = -4$
VZW von $+$ nach $-$ $x = -4$	HP: $x = -4$
Extremwert: $x = 0$	WP: $x = 0$
$f(x) > 0 \quad x < -4$	sms: $x < -4$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

4.4 Kurvendiskussion

4.4.1 Ganzrationale Funktion



Formen der Polynomfunktion - ganzrationalen Funktion

- Summendarstellung der Polynomfunktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_1 x^1 + a_0$$

oder

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \dots$$

Die höchste Potenz (n) gibt den Grad der Polynomfunktion an.

- Produktdarstellung (faktorierte Form) der Polynomfunktion

Ist der Grad des Polynoms gleich der Anzahl der (reellen) Nullstellen, kann man die Funktion in faktorisierte Form schreiben.

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots$$

Nullstellen: x_1, x_2, x_3, \dots

Linearfaktoren: $(x - x_1), (x - x_2), \dots$

a = Koeffizient der höchsten Potenz

Grad 1: Lineare Funktion

$$f(x) = ax + b$$

Grad 2: Quadratische Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Grad 3: Kubische Funktion

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Grad 4: Biquadratische Funktionen

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

Grad 5:

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

Summen- in Produktdarstellung

$$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = -1\frac{1}{4}x(x - 4)$$

$$f_2(x) = -x^3 + 3x^2 + 2 = -(x + 1)^2(x - 2)$$

$$f_4(x) = \frac{1}{10}x^3 - 1\frac{3}{5}x = 0$$

$$x(\frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5} = 0$$

$$x_2 = 4 \quad x_3 = -4$$

Grad der Funktion = Anzahl der Nullstellen = 3

Faktorierte Form:

$$f_4(x) = 0,1x(x + 4)(x - 4)$$

$$f_7(x) = \frac{1}{20}x^4 - x^2 + 3\frac{1}{5} = 0$$

$$u = x^2 \quad u^2 = x^4$$

$$\frac{1}{20}u^2 - 1u + 3\frac{1}{5} = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{20} \cdot 3\frac{1}{5}}}{2 \cdot \frac{1}{20}}$$

$$u_1 = 16 \quad u_2 = 4$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -4$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x_3 = 2 \quad x_4 = -2$$

Faktorierte Form:

$$f_7(x) = \frac{1}{20}(x + 4)(x - 4)(x + 2)(x - 2)$$

Produkt- in Summendarstellung

$$f_3(x) = (x - 2)(x - 2)(x - 2) = (x - 2)^3$$

$$f_3(x) = x^3 - 6x^2 - 12x - 8$$

$$f_5(x) = 0,1x(x + 4)(x - 4) = 0,1x^3 - 1\frac{3}{5}x$$

$$f_6(x) = (x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$f_7(x) = 0,05(x^2 - 4)(x^2 - 16) = 0,05x^4 - x^2 + \frac{16}{5}$$

$$f_8(x) = x^2(x^2 - 4) = x^4 - 4x^2$$

Definitions- und Wertebereich

- Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- Wertebereich
- höchster Exponent ungerade:
 $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- höchster Exponent gerade:
 $\mathbb{W} = [\text{absoluter Tiefpunkt}; \infty[$
 $\mathbb{W} =] - \infty; \text{absoluter Hochpunkt}]$

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$
 absoluter Hochpunkt: (2/5) höchster Exponent 2 (gerade)
 $\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} =] - \infty, 5[$
 $f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2$
 höchster Exponent 3 (ungerade Zahl)
 $\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$
 $f_5(x) = 0,1x^3 - 1\frac{3}{5}x \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$
 $f_7(x) = 0,05x^4 - x^2 + \frac{16}{5}$
 absoluter Tiefpunkt aus der Kurvendiskussion
 $\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = [-1\frac{4}{5}, \infty[$

Symmetrie

- Punktsymmetrie zum Ursprung:
 $f(-x) = -f(x)$
 $f(x)$ hat nur ungerade Exponenten
 Achsensymmetrie zur y-Achse:
 $f(-x) = f(x)$
 $f(x)$ hat nur gerade Exponenten

$f_1(-x) = -1\frac{1}{4} \cdot (-x)^2 + 5 \cdot (-x)$
 keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung
 $f_2(-x) = -1 \cdot 1(-x)^3 + 3 \cdot (-x) + 2$
 keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung
 $f_4(x) = 0,1x^3 - 1\frac{3}{5}x$
 $f_4(-x) = 0,1(-x)^3 - 1\frac{3}{5} \cdot (-x)$
 $f_4(-x) = -(0,1 \cdot x^3 - 1\frac{3}{5} \cdot x)$
 $f_4(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung
 $f_7(x) = 0,05x^4 - x^2 + \frac{16}{5}$
 $f_7(-x) = \frac{1}{20} \cdot (-x)^4 - 1 \cdot (-x)^2 + 3\frac{1}{5}$
 $f_7(-x) = \frac{1}{20} \cdot x^4 - 1 \cdot x^2 + 3\frac{1}{5}$
 $f_7(-x) = f(x) \Rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

- Funktionsterm gleich Null setzen und die Gleichung lösen. (siehe Algebra-Gleichungen)

$$f(x) = 0 \quad ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \dots = 0$$

- höchster Exponent ungerade

$$1 \leq \text{Anzahl der Nullstellen} \leq \text{Grad des Polynoms}$$

- höchster Exponent gerade

$$0 \leq \text{Anzahl der Nullstellen} \leq \text{Grad des Polynoms}$$

Faktorierte Polynomfunktion

- Nullstellen aus faktorisierten Polynom ablesen.

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots = 0$$

Nullstellen: $x_1, x_2, x_3 \dots$

Nullstellen aus faktorisierten Polynom ablesen.

$$f_3(x) = (x - 2)^3 \quad x_{123} = 2 \quad 3\text{-fache Nullstelle}$$

$$f_5(x) = -0,03(x + 3)^2(x - 6)$$

$$x_1 = -3 \quad 2\text{-fache Nullstelle}$$

$$x_{23} = 6 \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

Funktionsterm gleich Null setzen.

$$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = 0$$

$$x(-1\frac{1}{4}x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad -1\frac{1}{4}x + 5 = 0$$

$$-1\frac{1}{4}x + 5 = 0 \quad \vee \quad x = 4$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4$$

$$\text{Faktorierte Form: } f_1(x) = -1\frac{1}{4}x(x - 4)$$

$$f_2(x) = -x^3 + 3x + 2 = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: $x_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} -x^3 & +3x & +2 \\ -(x^3 & -x^2) \end{pmatrix} : (x + 1) = -x^2 + x + 2$$

$$\begin{array}{r} -x^3 \quad -x^2 \\ \underline{+x^2 \quad +3x \quad +2} \\ 2x \quad +2 \\ \underline{-(2x \quad +2)} \\ 0 \end{array}$$

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} \quad \vee \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 2$$

Faktorierte Form: $f_2(x) = -(x + 1)^2(x - 2)$

$$f_4(x) = \frac{1}{10}x^3 - 1\frac{3}{5}x = 0$$

$$x(\frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5} = 0$$

$$x_2 = 4 \quad x_3 = -4$$

Grad der Funktion = Anzahl der Nullstellen = 3

Faktorierte Form: $f_5(x) = 0,1x(x + 4)(x - 4)$

$$f_7(x) = \frac{1}{20}x^4 - x^2 + 3\frac{1}{5} = 0$$

$$u = x^2 \quad u^2 = x^4$$

$$\frac{1}{20}u^2 - 1u + 3\frac{1}{5} = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{20} \cdot 3\frac{1}{5}}}{2 \cdot \frac{1}{20}}$$

$$u_1 = 16 \quad u_2 = 4 \quad \vee$$

$$x^2 = 16 \quad x = \pm\sqrt{16} \quad x_1 = 4 \quad x_2 = -4$$

$$x^2 = 4 \quad x = \pm\sqrt{4} \quad x_3 = 2 \quad x_4 = -2$$

Faktorierte Form: $f_7(x) = \frac{1}{20}(x + 4)(x - 4)(x + 2)(x - 2)$

Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse

Bei ganzrationalen Funktionen kann sich das Vorzeichen nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Tabelle eintragen.

Vorzeichentabelle mit $f(x)$

	$x <$	x_1	$< x$
$f(x)$	+	0	-
Graph	oberhalb	0	unterhalb

+ $f(x) > 0$ Graph oberhalb der x-Achse

- $f(x) < 0$ Graph unterhalb der x-Achse

$$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$$

	$x <$	0	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	-	0	+	0	-

$x \in]0; 4[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; 0[\cup]4; \infty[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

$$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2$$

	$x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	+	0	+	0	-

$x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 2[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]2; \infty[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

Faktorierte Form:

$$f_5(x) = 0, 1x(x+4)(x-4)$$

$$\text{Nullstellen: } x_1 = 0 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = -4$$

$$-5 < -4 \quad f_5(-5) = -4, 5$$

	$x <$	-4	$< x <$	0	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$x \in]-4; 0[\cup]4; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -4[\cup]0; 4[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

Grenzwert - Verhalten im Unendlichen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_1 x^1 + a_0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm \infty$$

Das Vorzeichen des Glieds mit der höchsten Potenz und der Grad des Polynoms bestimmen das Vorzeichen des Grenzwerts.

Grenzwert gegen plus Unendlich

a_n	Grad	Grenzwert
+	gerade	$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n \cdot \infty^n = \infty$
+	ungerade	$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n \cdot \infty^n = \infty$
-	gerade	$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n \cdot \infty^n = -\infty$
-	ungerade	$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n \cdot \infty^n = -\infty$

Grenzwert gegen minus Unendlich

a_n	Grad	Grenzwert
+	gerade	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = \infty$
+	ungerade	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = -\infty$
-	gerade	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = -\infty$
-	ungerade	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = \infty$

$$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$$

Glied mit der höchsten Potenz: $-1\frac{1}{4}x^2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

$$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2$$

Glied mit der höchsten Potenz: $-x^3$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = [-1 \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = [-1 \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

Ableitung

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Die Ableitungen bildet man durch: Exponent vorziehen und vom Exponenten 1 abziehen.

Die erste Ableitung $f'(x)$ gibt die Steigung der Funktion an der Stelle x an.

Die zweite Ableitung $f''(x)$ gibt die Krümmung der Funktion an der Stelle x an.

$$f'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \dots + a_2 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + a_1$$

$$f(x) = ax^n \quad f'(x) = nax^{n-1}$$

Grad 1: Lineare Funktion

$$f(x) = ax + b \quad f'(x) = a$$

Grad 2: Quadratische Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad f'(x) = 2ax + b$$

Grad 3: Kubische Funktion

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Grad 4: Biquadratische Funktionen

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = -1\frac{1}{4}x(x-4)$$

$$f'_1(x) = -2\frac{1}{2}x + 5$$

$$f''_1(x) = -2\frac{1}{2}$$

$$f'''_1(x) = 0$$

$$f_2(x) = -x^3 + 3x + 2 = -(x+1)^2(x-2)$$

$$f'_2(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$$

$$f''_2(x) = -6x = -6x$$

$$f'''_2(x) = -6$$

Extremwerte und die 2. Ableitung

In den Extremwerten hat $f(x)$ eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen ($x_0, x_1 \dots$).

In diesen Nullstellen ($x_0, x_1 \dots$) kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1 \dots$ in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f''(x_0) > 0$ (LK) \Rightarrow Tiefpunkt (Minimum) bei x_0
- $f''(x_0) < 0$ (RK) \Rightarrow Hochpunkt (Maximum) bei x_0
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

$$f'_1(x) = -2\frac{1}{2}x + 5 = 0$$

$$-2\frac{1}{2}x + 5 = 0 \quad / -5$$

$$-2\frac{1}{2}x = -5 \quad / : (-2\frac{1}{2})$$

$$x = \frac{-5}{-2\frac{1}{2}}$$

$$x = 2$$

$$f''_1(2) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (2/5)$$

$$f'_2(x) = -3x^2 + 3 = 0$$

$$-3x^2 + 3 = 0 \quad / -3$$

$$-3x^2 = -3 \quad / : (-3)$$

$$x^2 = \frac{-3}{-3}$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$f''_2(-1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (-1/0)$$

$$f''_2(1) = -6$$

$$f''_2(1) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (1/4)$$

Extremwerte und das Monotonieverhalten

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat $f(x)$ eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f'(x)$ in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

- Hochpunkt (HP)

Monotonieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung $f'(x)$ von Plus nach Minus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	+	0	-
Graph	sms	HP	smf

- Tiefpunkt (TP)

Monotonieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung $f'(x)$ von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	-	0	+
Graph	smf	TP	sms

- Terrassenpunkt (TEP)

Monotonieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	+	0	+
Graph	sms	TEP	sms

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	-	0	-
Graph	smf	TEP	smf

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

$$f'_1(x) = -2\frac{1}{2}x + 5$$

	$x <$	2	$< x$
$f'(x)$	+	0	-

streng monoton steigend

$$x \in]-\infty; 2[\quad f'(x) > 0$$

streng monoton fallend

$$x \in]2; \infty[\quad f'(x) < 0$$

$$f'_2(x) = -3x^2 + 3$$

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

streng monoton steigend

$$x \in]-1; 1[\quad f'(x) > 0$$

streng monoton fallend

$$x \in]-\infty; -1[\cup]1; \infty[\quad f'(x) < 0$$

Wendepunkte und 3.Ableitung

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

$$f'''_1(x) = 0$$

kein Wendepunkt

$$f'''_2(x) = -6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f'''(0) = 2$$

$$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: $(0/2)$

Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$. Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung) Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f''(x)$ in die Tabelle eintragen.

- Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.

Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung $f''(x)$ von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	+	0	-
Graph	LK	WP	RK

- Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht

Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	+	0	+
Graph	LK	FP	LK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

$$f_2''(x) = -6x$$

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	+	0	-

$x \in]-\infty; 0[$ $f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]0; \infty[$ $f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Stammfunktion von f(x)

Stammfunktionen bildet man durch: zum Exponent 1 addieren, durch den Exponenten dividieren.

$$f(x) = ax^n \quad F(x) = \frac{1}{n+1} ax^{n+1} + c$$

Unbestimmtes Integral: $F(x) = \int f(x) dx = F(x) + c$

$$F_1(x) = \int (-1\frac{1}{4}x^2 + 5x) dx = -\frac{5}{12}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 + c$$

$$F_2(x) = \int (-x^3 + 3x + 2) dx = -\frac{1}{4}x^4 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x + c$$

Bestimmtes Integral

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

$$A_1 = \int_0^4 (-1\frac{1}{4}x^2 + 5x) dx = \left[-\frac{5}{12}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$$

$$= \left(-\frac{5}{12} \cdot 4^3 + 2\frac{1}{2} \cdot 4^2\right) - \left(-\frac{5}{12} \cdot 0^3 + 2\frac{1}{2} \cdot 0^2\right)$$

$$= \left(13\frac{1}{3}\right) - (0) = 13\frac{1}{3}$$

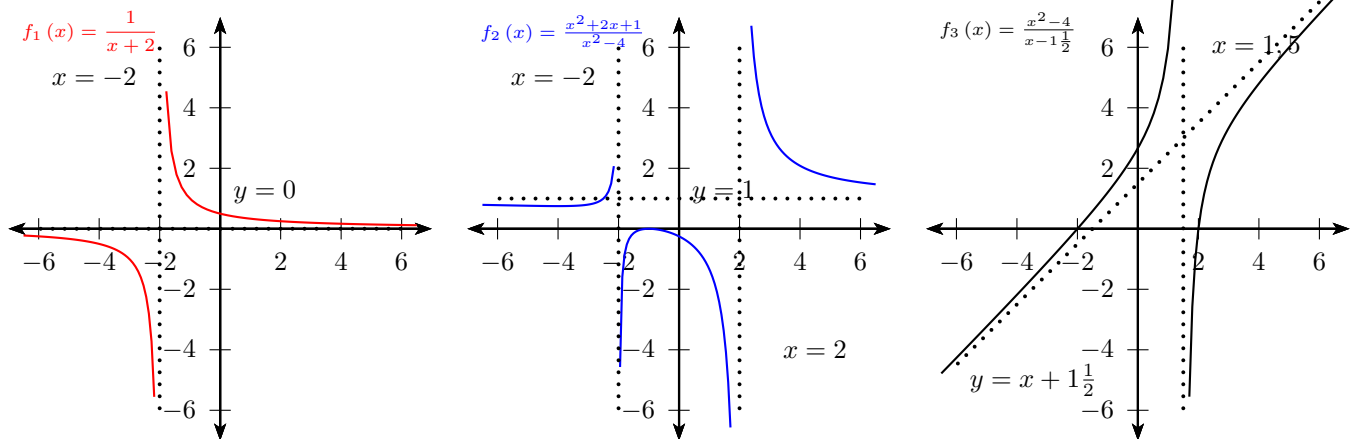
$$A_2 = \int_{-1}^2 (-x^3 + 3x + 2) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^2$$

$$= \left(-\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 1\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + 1\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)\right)$$

$$= (6) - \left(-\frac{3}{4}\right) = 6\frac{3}{4}$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [Kurvendiskussion](#) -

4.4.2 Gebrochenrationale Funktion



Formen der gebrochenrationalen Funktion

Summendarstellung der gebrochenrationalen Funktion

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} \dots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0}$$

Zählerpolynom vom Grad n
 $Z(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$
 Nennerpolynom vom Grad m:
 $N(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} \dots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0$

Produktdarstellung (faktorierte Form) der gebrochenrationalen Funktion

$$f(x) = a \frac{(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3) \dots}{(x - n_1)(x - n_2)(x - n_3) \dots}$$

$z_1, z_2, z_3 \dots$ Nullstellen des Zählers
 $n_1, n_2, n_3 \dots$ Nullstellen des Nenners

$$f_2(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4}$$

Zählerpolynom: $Z(x) = x^2 + 2x + 1$ Zählergrad: 2

Nennerpolynom: $N(x) = x^2 - 4$ Nennergrad: 2

Faktorierte Form:

$$f_2(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)}$$

$$f_3(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1\frac{1}{2}}$$

Funktion nach der Polynomdivision:

$$f_3(x) = x + 1\frac{1}{2} + \frac{-1\frac{3}{4}}{x - 1\frac{1}{2}}$$

Definitions- und Wertebereich

Definitionsbereich:

Nullstellen des Nennerpolynoms ausschließen.

Nennerpolynom: $N(x) = 0$

$n_1, n_2, n_3 \dots$ Nullstellen des Nenners (Definitionslücken)

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{n_0, n_1, n_2 \dots\}$$

(siehe Algebra - Gleichungen)

Wertebereich:

Bestimmung nur nach Kurvendiskussion möglich.

$$f_1(x) = \frac{1}{(x+2)}$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$f_2(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4}$$

Nenner Null setzen

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \quad / + 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

Symmetrie

Punktsymmetrie zum Ursprung:

$$f(-x) = -f(x)$$

Achsensymmetrie zur y-Achse:

$$f(-x) = f(x)$$

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

Zählerpolynom gleich Null setzen.

Zählerpolynom: $Z(x) = 0$

$z_1, z_2, z_3 \dots$ Nullstellen des Zählers

(siehe Algebra - Gleichungen)

$$f_2(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4}$$

Zählerpolynom gleich Null setzen:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -1$$

$$x_1 = -1; \quad 2\text{-fache Nullstelle}$$

Verhalten im Unendlichen - Grenzwert - Asymptoten

- Zählergrad > Nennergrad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm \infty$$

Das Vorzeichen der Glieder mit der höchsten Potenzen und der Grad der höchsten Exponenten, bestimmen das Vorzeichen des Grenzwerts.

Grenzwert gegen plus Unendlich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(\infty)^n}{(\infty)^m} = \pm \infty$$

Grenzwert gegen minus Unendlich

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(-\infty)^n}{(-\infty)^m} = \pm \infty$$

- Zählergrad = Nennergrad + 1

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$$

Polynomdivision - schiefe Asymptote

- Zählergrad = Nennergrad

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$$

$$\text{horizontale Asymptote } y = \frac{a_n}{b_m}$$

- Zählergrad < Nennergrad

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$$

horizontale Asymptote $y = 0$

Zählergrad < Nennergrad

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x+2} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

Zählergrad = Nennergrad

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1x^2 + 2x + 1}{1x^2 - 4} = \frac{1}{1} = 1$$

Horizontale Asymptote: $y = 1$

Zählergrad = Nennergrad + 1

$$f_3(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{(\infty)^2}{(\infty)^1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{(-\infty)^2}{(-\infty)^1} = -\infty$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{4}{x^2})}{x(1 - \frac{1\frac{1}{2}}{x})} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1 - \frac{4}{x^2})}{x(1 - \frac{1\frac{1}{2}}{x})} = -\infty$$

Polynomdivision :

$$\begin{pmatrix} x^2 & & -4 \\ -(x^2 & -1\frac{1}{2}x) \end{pmatrix} : (x - 1\frac{1}{2}) = x + 1\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 1\frac{1}{2}x \quad -4 \\ -(1\frac{1}{2}x \quad -2\frac{1}{4}) \\ \hline -1\frac{3}{4} \end{array}$$

$$f_3(x) = x + 1\frac{1}{2} + \frac{-1\frac{3}{4}}{x - 1\frac{1}{2}}$$

Schiefe Asymptote: $y = x + 1\frac{1}{2}$

Verhalten an den Definitionslücken - Grenzwert - Asymptoten

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x_0, x_1..\}$$

$x_0, x_1..$ sind Definitionslücken von $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Rightarrow$$

Vertikale Asymptote: $x = x_0$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{(x+2)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = \infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 2$

Ableitung

Die Ableitungen bildet man durch die Quotientenregel,

$$f'(x) = \frac{Z'(x) \cdot N(x) - Z(x) \cdot N'(x)}{(N(x))^2}$$

Die erste Ableitung $f'(x)$ gibt die Steigung der Funktion an der Stelle x an.

Die zweite Ableitung $f''(x)$ gibt die Krümmung der Funktion an der Stelle x an.

$$f_1'(x) = \frac{0 \cdot (x+2) - 1 \cdot 1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{0-1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{-1}{(x+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x^2+4x+4) - (-1) \cdot (2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}$$

$$= \frac{0 - (-2x-4)}{(x^2+4x+4)^2}$$

$$= \frac{2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$$

$$= \frac{2(x+2)}{(x^2+4x+4)^2}$$

$$= \frac{2(x+2)}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{2}{(x+2)^3}$$

$$f_2(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2) \cdot (x^2-4) - (x^2+2x+1) \cdot 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{(2x^3+2x^2-8x-8) - (2x^3+4x^2+2x)}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-2x^2-10x-8}{(x^2-4)^2}$$

Extremwerte und die 2. Ableitung

In den Extremwerten hat $f(x)$ eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen ($x_0, x_1..$).

In diesen Nullstellen ($x_0, x_1..$) kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f''(x_0) > 0$ (LK) \Rightarrow Tiefpunkt (Minimum) bei x_0
- $f''(x_0) < 0$ (RK) \Rightarrow Hochpunkt (Maximum) bei x_0
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

$$f_2'(x) = \frac{-2x^2 - 10x - 8}{x^4 - 8x^2 + 16} = 0$$

$$-2x^2 - 10x - 8 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{36}}{-4}$$

$$x_{1/2} = \frac{10 \pm 6}{-4}$$

$$x_1 = \frac{10+6}{-4} \quad x_2 = \frac{10-6}{-4}$$

$$x_1 = -4 \quad x_2 = -1$$

$$f''(-4) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (-4/\frac{3}{4})$$

$$f''(-1) = -6$$

$$f''(-1) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (-1/0)$$

Extremwerte und das Monotonieverhalten

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat $f(x)$ eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen ($x_0, x_1..$).

In diesen Nullstellen ($x_0, x_1..$) kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f'(x)$ in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

- Hochpunkt (HP)

Monotonieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Plus nach Minus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	+	0	-
Graph	sms	HP	smf

- Tiefpunkt (TP)

Monotonieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	-	0	+
Graph	smf	TP	sms

- Terrassenpunkt (TEP)

Monotonieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	+	0	+
Graph	sms	TEP	sms

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

$$f_1'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$$

Zähler = 0

keine Lösung

Nullstellen des Nenners aus $f(x)$ übernehmen

$x_2 = -2$; 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	-	0	-

$$x \in]-\infty; -2[\cup]-2; \infty[f'(x) < 0 \quad \text{smf}$$

Wendepunkt und die 3. Ableitung

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen ($x_0, x_1..$).

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen ($x_0, x_1 \dots$). Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung) Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f''(x)$ in die Tabelle eintragen.

- Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.

Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung $f''(x)$ von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	+	0	-
Graph	LK	WP	RK

- Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht

Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	+	0	+
Graph	LK	FP	LK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

- Krümmung

$$f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$$

$$\text{Zähler} = 0$$

keine Lösung

Nullstelle des Nenners aus $f(x)$ übernehmen

$$x_3 = -2; \quad 1\text{-fache Nullstelle}$$

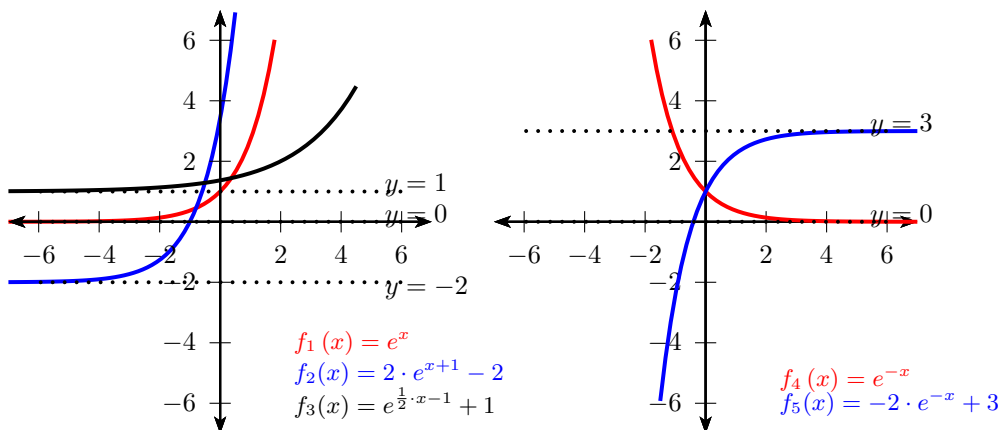
	$x <$	-2	$< x$
$f''(x)$	-	0	+

$$x \in]-2; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$$

$$x \in]-\infty; -2[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [Kurvendiskussion](#) -

4.4.3 Exponentialfunktion (Basis e)



Formen der Exponentialfunktion

Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x$$

Allgemeine Exponentialfunktion

$$f(x) = a e^{b(x-c)} + d$$

(siehe Funktionen - Exponentialfunktion)

$$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2$$

$$f_4(x) = e^{-x}$$

$$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3$$

Definitions- und Wertebereich

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^x \\
 \mathbb{D} &= \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+ \\
 f(x) &= ae^{b(x-c)} + d \\
 \mathbb{D} &= \mathbb{R} \\
 a > 0 \quad \mathbb{W} &= [d; \infty[\\
 a < 0 \quad \mathbb{W} &=]-\infty; d]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= 2 \cdot e^{x+1} - 2 & \mathbb{D} &= \mathbb{R} & \mathbb{W} &= [-2; \infty[\\
 f_4(x) &= e^{-x} & \mathbb{D} &= \mathbb{R} & \mathbb{W} &= \mathbb{R}^+ \\
 f_5(x) &= -2 \cdot e^{-x} + 3 & \mathbb{D} &= \mathbb{R} & \mathbb{W} &=]-\infty; 3]
 \end{aligned}$$

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^x \quad e^x > 0 \Rightarrow \text{keine Nullstellen} \\
 f(x) &= ae^{b(x-c)} + d \\
 ae^{b(x-c)} + d &= 0 \quad / -d \\
 ae^{b(x-c)} &= -d \quad / : a \\
 e^{b(x-c)} &= \frac{-d}{a} \quad / \ln \\
 \frac{-d}{a} &> 0 \\
 b(x-c) &= \ln\left(\frac{-d}{a}\right) \quad / : b \quad / +c \\
 x &= \frac{\ln\left(\frac{-d}{a}\right)}{b} + c \\
 \frac{-d}{a} &\leq 0 \quad \text{keine Nullstellen}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= 2 \cdot e^{x+1} - 2 \\
 2 \cdot e^{(x+1)} - 2 &= 0 \\
 2 \cdot e^{(x+1)} - 2 &= 0 \quad / +2 \\
 2 \cdot e^{(x+1)} &= +2 \quad / : 2 \\
 e^{(x+1)} &= 1 \quad / \ln \\
 x+1 &= \ln(1) \quad / -1 \\
 x &= -1 \\
 f_3(x) &= e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + 1 \\
 e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + 1 &= 0 \quad / -1 \\
 e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} &= -1 \\
 -1 < 0 &\Rightarrow \text{keine Nullstellen}
 \end{aligned}$$

Grenzwert - Asymptoten

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^x \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} e^x &= +\infty \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \Rightarrow \text{horizontale Asymptote } y=0 \\
 f(x) &= ae^{b(x-c)} + d \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} ae^{b(x-c)} + d &= \infty \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} ae^{b(x-c)} + d &= -\infty \\
 \text{Schrittweise Berechnung f\"ur } b > 0 \text{ und } a > 0: \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} b(\infty - c) &= \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^\infty = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a\infty + d = \infty \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} b(-\infty - c) &= -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\infty} = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} a \cdot 0 + d &= d \Rightarrow \text{HA: } y = d
 \end{aligned}$$

a	b	Grenzwert $\rightarrow +\infty$	Asymptote
+	+	$\lim_{x \rightarrow \infty} ae^{b(x-c)} + d = \infty$	keine
-	+	$\lim_{x \rightarrow \infty} ae^{b(x-c)} + d = -\infty$	keine
+	-	$\lim_{x \rightarrow \infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
-	-	$\lim_{x \rightarrow \infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
a	b	Grenzwert $\rightarrow -\infty$	Asymptote
+	+	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
-	+	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
+	-	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ae^{b(x-c)} + d = \infty$	keine
-	-	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ae^{b(x-c)} + d = -\infty$	keine

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= 2 \cdot e^{x+1} - 2 \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2 &= \infty \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \infty + 1 &= \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^\infty = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \infty - 2 = \infty \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2 &= \infty \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\infty + 1) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\infty} = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \cdot 0 - 2 &= -2 \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2 &= -2 \quad \text{HA: } y = -2 \\
 f_4(x) &= e^{-x} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} &= 0 \quad \text{HA: } y = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} &= +\infty \\
 f_5(x) &= -2 \cdot e^{-x} + 3 \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} -2 \cdot e^{-x} + 3 &= 3 \quad \text{HA: } y = 3 \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} -2 \cdot e^{-x} + 3 &= +\infty
 \end{aligned}$$

Ableitung

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^x \quad f'(x) = e^x \quad f''(x) = e^x \\
 \text{Ableitung mit der Kettenregel} \\
 f(x) &= e^{bx} \quad f'(x) = be^{bx} \quad f''(x) = b^2 e^{bx} \\
 f(x) &= ae^{b(x-c)} + d \quad f'(x) = a \cdot be^{b(x-c)} \\
 f''(x) &= a \cdot b^2 e^{b(x-c)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= 2 \cdot e^{x+1} - 2 \quad f_2'(x) = 2 \cdot e^{x+1} \quad f_2''(x) = 2 \cdot e^{x+1} \\
 f_4(x) &= e^{-x} \quad f_4'(x) = -e^{-x} \quad f_4''(x) = e^{-x} \\
 f_5(x) &= -2 \cdot e^{-x} + 3 \quad f_5'(x) = 2 \cdot e^{-x} \\
 f_3(x) &= e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + 1 \quad f_3'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} \\
 f_3''(x) &= \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1}
 \end{aligned}$$

Monotonieverhalten

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

$e^x > 0 \Rightarrow$ streng monoton steigend

$$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$$

$$f'(x) = a \cdot be^{b(x-c)}$$

$$e^{b(x-c)} > 0$$

$a \cdot b > 0 \Rightarrow$ streng monoton steigend (sms)

$a \cdot b < 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend (smf)

a	b	Monotonieverhalten
+	+	sms
-	+	smf
+	-	smf
-	-	sms

$$f_2'(x) = 2 \cdot e^{x+1} > 0 \Rightarrow \text{ sms}$$

$$f_4'(x) = -e^{-x} < 0 \Rightarrow \text{ smf}$$

$$f_5'(x) = 2 \cdot e^{-x} > 0 \Rightarrow \text{ sms}$$

$$f_3'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} > 0 \Rightarrow \text{ sms}$$

Ableitung

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

Ableitung mit Kettenregel

$$f(x) = e^{ax} \quad f'(x) = ae^{ax}$$

$$f(x) = ae^{b(x-c)} + d \quad f'(x) = a \cdot be^{b(x-c)}$$

$$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2 \quad f_2'(x) = 2 \cdot e^{x+1}$$

$$f_4(x) = e^{-x} \quad f_4'(x) = -e^{-x}$$

$$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3 \quad f_5'(x) = 2 \cdot e^{-x}$$

Krümmungsverhalten

$$f(x) = e^x \quad f''(x) = e^x$$

$e^x > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt (LK)

$$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$$

$$f''(x) = a \cdot b^2 e^{b(x-c)}$$

$$e^{b(x-c)} > 0$$

$a > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt (LK)

$a < 0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt (RK)

$$f_2''(x) = 2 \cdot e^{x+1} > 0 \Rightarrow \text{ LK}$$

$$f_4''(x) = e^{-x} > 0 \Rightarrow \text{ LK}$$

$$f_5''(x) = -2 \cdot e^{-x} < 0 \Rightarrow \text{ RK}$$

$$f_3''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} > 0 \Rightarrow \text{ LK}$$

Stammfunktion von f(x) - unbestimmtes Integral

$$f(x) = e^x \quad F(x) = e^x + k$$

$$f(x) = ae^{b(x-c)} \quad F(x) = \frac{a}{b}e^{b(x-c)} + k$$

$$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2 \quad F_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2x + c$$

$$f_4(x) = e^{-x} \quad F_4(x) = -e^{-x} + c$$

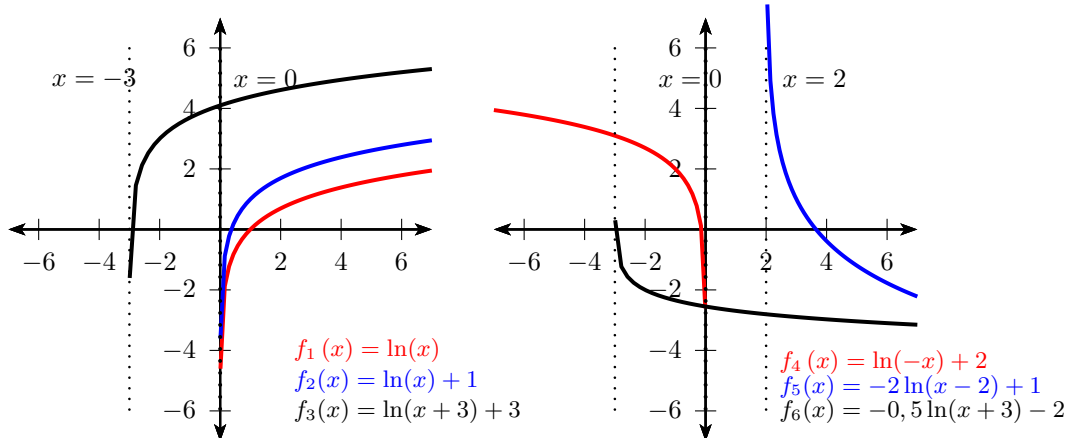
$$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3 \quad F_5(x) = 2 \cdot e^{-x} + 3x + c$$

$$f_3(x) = e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + 1$$

$$F_3(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + x + c = 2e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + x + c$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

4.4.4 Logarithmusfunktion (Basis e)



Formen der Logarithmusfunktion

Logarithmusfunktion

$$f(x) = \ln x$$

Allgemeine Logarithmusfunktion

$$f(x) = a \ln(b(x-c)) + d$$

(siehe Funktionen - Logarithmusfunktion)

$$f_1(x) = \ln(x)$$

$$f_2(x) = \ln(x) + 1$$

$$f_3(x) = \ln(x+3) + 3$$

$$f_4(x) = \ln(-x) + 2$$

$$f_5(x) = -2 \ln(x-2) + 1$$

$$f_6(x) = -0,5 \ln(x+3) - 2$$

Definitions- und Wertebereich

$$f(x) = \ln x$$

$$\mathbb{W} = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = a \ln b(x-c) + d$$

$$\mathbb{W} = \mathbb{R}$$

Definitionsbereich: $bx - c > 0$

$$\bullet b > 0 \quad \mathbb{D} =]c; \infty[$$

$$\bullet b < 0 \quad \mathbb{D} =]-\infty; c[$$

$$f_1(x) = \ln(x) \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

$$f_2(x) = \ln(x) + 1 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

$$f_3(x) = \ln(x+3) + 3 \quad \mathbb{D} =]-3; \infty[$$

$$f_4(x) = \ln(-x) + 2 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^-$$

$$f_5(x) = -2 \ln(x-2) + 1 \quad \mathbb{D} =]2; \infty[$$

$$f_6(x) = -0,5 \ln(x+3) - 2 \quad \mathbb{D} =]-3; \infty[$$

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

$$f(x) = \ln(x)$$

$$\ln(x) = 0 \quad / e$$

$$x = e^0$$

$$x = 1$$

$$f(x) = a \ln(b(x-c)) + d$$

$$a \ln(b(x-c)) + d = 0 \quad / -d$$

$$a \ln(b(x-c)) = -d \quad / : a$$

$$\ln(b(x-c)) = \frac{-d}{a} \quad / e$$

$$b(x-c) = e^{\left(\frac{-d}{a}\right)} \quad / : b \quad / + c$$

$$x = \frac{e^{\left(\frac{-d}{a}\right)}}{b} + c$$

$$f_3(x) = \ln(x+3) + 3$$

$$\ln(x+3) + 3 = 0$$

$$\ln(x+3) + 3 = 0 \quad / -3$$

$$\ln(x+3) = -3 \quad / e^{\cdot}$$

$$x+3 = e^{-3} \quad / -3$$

$$x = e^{-3} - 3$$

$$x = -2,95$$

$$f_6(x) = -0,5 \ln(x+3) - 2$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln(x+3) - 2 = 0$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln(x+3) - 2 = 0 \quad / +2$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln(x+3) = +2 \quad / : -\frac{1}{2}$$

$$\ln(x+3) = -4 \quad / e^{\cdot}$$

$$x+3 = e^{-4} \quad / -3$$

$$x = e^{-4} - 3$$

$$x = -2,98$$

Grenzwert - Asymptoten

$$f(x) = \ln(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \Rightarrow \text{vertikale Asymptote: } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$$

$$f(x) = a \ln(b(x - c)) + d$$

Schrittweise Berechnung für $b > 0$ und $a > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} b(\infty - c) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \infty = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a\infty + d = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} b(c^+ - c) = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln 0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} a \cdot (-\infty) + d = -\infty \Rightarrow \text{VA: } x = c$$

a	b	Grenzwert $\rightarrow \pm\infty$	Asymptote
+	+	$\lim_{x \rightarrow \infty} a \ln b(x - c) + d = \infty$	keine
-	+	$\lim_{x \rightarrow \infty} a \ln b(x - c) + d = -\infty$	keine
+	-	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a \ln b(x - c) + d = \infty$	keine
-	-	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a \ln b(x - c) + d = -\infty$	keine
a	b	Grenzwert $\rightarrow c$	Asymptote
+	+	$\lim_{x \rightarrow c^+} a \ln b(x - c) + d = -\infty$	$x = c$
-	+	$\lim_{x \rightarrow c^+} a \ln b(x - c) + d = \infty$	$x = c$
+	-	$\lim_{x \rightarrow c^-} a \ln b(x - c) + d = -\infty$	$x = c$
-	-	$\lim_{x \rightarrow c^-} a \ln b(x - c) + d = \infty$	$x = c$

$$f_5(x) = -2 \ln(x - 2) + 1 \quad \mathbb{D} =]2; \infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -2 \ln(x - 2) + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \infty - 2 = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \infty = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} -2 \cdot \infty + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -2 \ln(x - 2) + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} -2 \ln(x - 2) + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2^+ - 2) = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln 0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} -2 \cdot (-\infty) - 2 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} -2 \ln(x - 2) + 1 = \infty \quad \text{VA: } x = 2$$

$$f_4(x) = \ln(-x) + 2 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x) + 2 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(-x) + 2 = -\infty \quad \text{VA: } x = 0$$

Ableitung

$$f(x) = \ln(x) \quad f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

Ketten- und Quotientenregel:

$$f(x) = \ln bx \quad f'(x) = \frac{b}{bx} = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f(x) = a \ln(b(x - c)) + d \quad f'(x) = \frac{a \cdot b}{b(x - c)}$$

$$f''(x) = \frac{-a \cdot b^2}{(b(x - c))^2}$$

$$f_2(x) = \ln(x) + 1 \quad f'_2(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f''_2(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f_3(x) = \ln(x + 3) + 3 \quad f'_3(x) = \frac{1}{x + 3} = (x + 3)^{-1}$$

$$f''_3(x) = -(x + 3)^{-2} = \frac{-1}{(x + 3)^2}$$

$$f_4(x) = \ln(-x) + 2 \quad f'_4(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f''_4(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f_5(x) = -2 \ln(x - 2) + 1 \quad f'_5(x) = \frac{-2}{(x - 2)} = -2(x - 2)^{-1}$$

$$f''_5(x) = 2(x - 2)^{-2} = \frac{2}{(x - 2)^2}$$

Monotonieverhalten

$$f(x) = \ln(x) \quad f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\frac{1}{x} \Rightarrow \text{streng monoton steigend} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = a \ln(b(x - c)) + d \quad f'(x) = \frac{a \cdot b}{b(x - c)}$$

$$b(x - c) > 0$$

a	b	Monotonieverhalten
+	+	sms
-	+	smf
+	-	smf
-	-	sms

$$f'_2(x) = \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \text{sms}$$

$$f'_3(x) = \frac{1}{x + 3} > 0 \Rightarrow \text{sms}$$

$$f'_5(x) = \frac{-2}{(x - 2)} < 0 \Rightarrow \text{smf}$$

Krümmungsverhalten

$$f(x) = \ln(x) \quad f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\frac{-1}{x^2} < 0 \Rightarrow \text{rechtsgekrümmt (RK)}$$

$$f(x) = a \ln(b(x-c)) + d \quad f''(x) = \frac{-a \cdot b^2}{(b(x-c))^2}$$

$$(b(x-c))^2 > 0$$

$$a > 0 \Rightarrow \text{rechtsgekrümmt (RK)}$$

$$a < 0 \Rightarrow \text{linkssgekrümmt (LK)}$$

$$f_2''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2} < 0 \Rightarrow \text{RK}$$

$$f_3''(x) = -(x+3)^{-2} = \frac{-1}{(x+3)^2} < 0 \Rightarrow \text{RK}$$

$$f_5''(x) = 2(x-2)^{-2} = \frac{2}{(x-2)^2} > 0 \Rightarrow \text{LK}$$

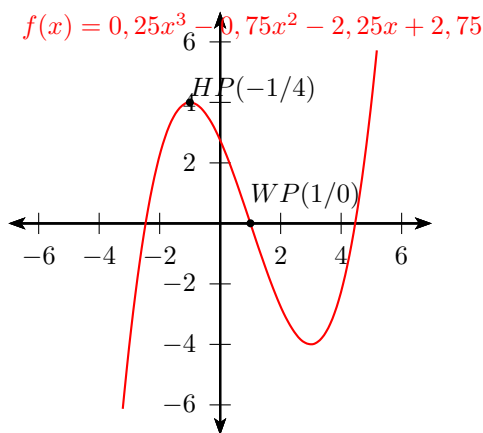
Stammfunktion von f(x) - unbestimmtes Integral

$$f(x) = \ln(x) \quad F(x) = x \ln(x) - x + c$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

4.5 Aufstellen von Funktionsgleichungen

4.5.1 Ganzrationale Funktion



Eine ganzrationale Funktion vom Grad n ist durch $n+1$ Bedingungen eindeutig festgelegt.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Um die $n+1$ Koeffizienten $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$ berechnen zu können, sind $n+1$ Gleichungen ($n+1$ Bedingungen) nötig.

Funktion vom Grad 2

Um die 3 Koeffizienten (a, b, c) berechnen zu können, sind 3 Gleichungen (3 Bedingungen) nötig.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

Funktion vom Grad 3

Um die 4 Koeffizienten (a, b, c, d) berechnen zu können, sind 4 Gleichungen (4 Bedingungen) nötig.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Funktion vom Grad 4

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

Gesucht ist ein Polynom 3. Grades, das bei $x = 1$ einen Wendepunkt hat, im Punkt $P(-1/4)$ ein Extremum besitzt und bei $x = 1$ die x -Achse schneidet.

Polynom 3. Grades

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$$

$$f''(x) = 6a \cdot x + 2b$$

Um die 4 Koeffizienten (a, b, c, d) berechnen zu können, sind 4 Gleichungen nötig.

1. Bedingung: Wendepunkt bei $x = 1$

$$f''(1) = 0 \quad 6a \cdot 1 + 2b = 0$$

2. Bedingung: Punkt $P(-1/4)$

$$f(-1) = 4 \quad a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 4$$

3. Bedingung: Extremwert an der Stelle $x_0 = 1$

$$f'(-1) = 0 \quad 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c = 0$$

4. Bedingung: Nullstelle an der Stelle $x_0 = 1$

$$f(1) = 0 \quad a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0$$

Lineares Gleichungssystem lösen:

$$6a + 2b = 0$$

$$-a + b - c + d = 4$$

$$3a - 2b + c = 0$$

$$a + b + c + d = 0$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$$b = -\frac{3}{4}$$

$$c = -2\frac{1}{4}$$

$$d = 2\frac{3}{4}$$

Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 2\frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$$

Bedingungen für die Funktion	Gleichung
Punkt $P(x_0/y_0)$	$f(x_0) = y_0$
Nullstelle an der Stelle x_0	$f(x_0) = 0$
Punkt auf der y-Achse y_0	$f(0) = y_0$
Extremwert an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$
Horizontale Tangente an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$
Berührungspunkt der x-Achse an der Stelle x_0	$f(x_0) = 0$ $f'(x_0) = 0$
Tangente: $y = mx + t$ in x_0	$y_0 = mx_0 + t$ $f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$
Normale: $y = mx + t$ in x_0	$y_0 = mx_0 + t$ $f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = -\frac{1}{m}$
Wendepunkt an der Stelle x_0	$f''(x_0) = 0$
Terrassenpunkt an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$
Steigung m an der Stelle x_0	$f'(x_0) = m$
Hoch-/Tiefpunkt(x_0/y_0)	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = 0$
Terrassenpunkt(x_0/y_0)	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$
Wendepunkt(x_0/y_0)	$f(x_0) = y_0$ $f''(x_0) = 0$
Wendetangente: $y = mx + t$ in x_0	$y_0 = mx_0 + t$ $f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$ $f''(x_0) = 0$
Steigung m im Punkt $P(x_0/y_0)$	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$
Achsensymmetrie $f(x) = f(-x)$	Glieder mit ungeraden Exponenten entfallen
Punktsymmetrie $f(x) = -f(-x)$	Glieder mit geraden Exponenten entfallen

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [hier klicken](#)

5 Stochastik

5.1 Statistik

5.1.1 Mittelwert - Median - Modalwert

Noten in Mathematik: 4,3,5,3,3,5,2,4

Arithmetisches Mittel

Durchschnittswert \bar{x} der Datenreihe $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

n - Anzahl der Elemente

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{8}(4 + 3 + 5 + 3 + 3 + 5 + 2 + 4) = 3,625$$

Median

Zentralwert der geordneten Datenreihe

n - Anzahl der Elemente

$$x_{med} = \frac{x_{n/2} + x_{n/2+1}}{2} \text{ wenn n gerade}$$

$$x_{med} = x_{(n+1)/2} \text{ wenn n ungerade}$$

geordnete Datenreihe

x_1	2
x_2	3
x_3	3
x_4	3
x_5	4
x_6	4
x_7	5
x_8	5

Median:

$$x_{med} = \frac{3 + 4}{2} = 3,5$$

Spannweite

Differenz zwischen dem größten und kleinsten Wert der geordneten Datenreihe

$$d = x_{max} - x_{min}$$

Spannweite:

$$d = 5 - 2 = 3$$

Häufigkeitstabelle - Modalwert

Wert aus der Datenreihe, der am häufigsten vorkommt

Häufigkeit

Anzahl	Noten
1	2
3	3
2	4
2	5

$$x_{Mod} = 3$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

5.2 Kombinatorik

5.2.1 Grundlagen

	Ohne Wiederholung	Mit Wiederholung
Permutation	$n!$	$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$
Variation	$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot \binom{n}{k}$	n^k
Kombination	$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Fakultät

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad n \text{ über } k$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\begin{aligned} \binom{7}{4} &= \binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 \\ \binom{40}{38} &= \binom{40}{2} = \frac{40!}{(40-38)! \cdot 38!} = \frac{40 \cdot 39}{1 \cdot 2} = 780 \\ \binom{2}{0} &= 1 \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Interaktive Inhalte: [n!](#) -

5.2.2 Anzahl der Anordnungen - Permutation

Anzahl der Anordnungen ohne Wiederholung - alle Elemente verschieden

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

Wieviele Wörter lassen sich aus den Buchstaben a,b,c bilden?

abc acb bac bca cab cba

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Anzahl der Anordnungen ohne Wiederholung - nicht alle Elemente verschieden

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$$

Wieviele Wörter lassen sich aus den Buchstaben a,b,b,b,b bilden?

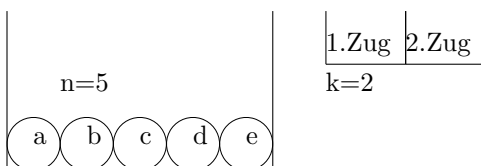
a,b,b,b,b b,a,b,b,b b,b,a,b,b b,b,b,a,b b,b,b,b,a

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

Interaktive Inhalte: [n!](#) -

5.2.3 Auswahl mit Beachtung der Reihenfolge - Variation

Ziehen von 2 Kugeln aus 5 verschiedenen Kugeln



Auswahl von k Elementen aus n unterschiedlichen Objekten mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Auswahl ohne Wiederholung der Elemente

$$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot \binom{n}{k}$$

	ab	ac	ad	ae
ba		bc	bd	be
ca	cb		cd	de
da	db	dc		de
ea	eb	ec	ed	

1. Zug: 5 Möglichkeiten

2. Zug: 4 Möglichkeiten

$$5 \cdot 4 = 20 = \frac{5!}{(5-2)!} \text{ Möglichkeiten}$$

Auswahl mit Wiederholung der Elemente

$$n^k$$

aa	ab	ac	ad	ae
ba	bb	bc	bd	be
ca	cb	cc	cd	de
da	db	dc	dd	de
ea	eb	ec	ed	ee

1. Zug: 5 Möglichkeiten

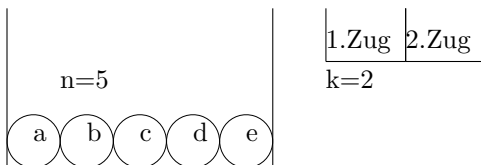
2. Zug: 5 Möglichkeiten

$$5 \cdot 5 = 25 = 5^2 \text{ Möglichkeiten}$$

Interaktive Inhalte: $\frac{n!}{(n-k)!}$ - n^k -

5.2.4 Auswahl ohne Beachtung der Reihenfolge - Kombination

Ziehen von 2 Kugeln aus 5 verschiedenen Kugeln



Auswahl von k Elementen aus n unterschiedlichen Objekten ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Auswahl ohne Wiederholung der Elemente

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad n \text{ über } k$$

ab	ac	ad	ae
	bc	bd	be
		cd	de
			de

$$\frac{5 \cdot 4}{2!} = 10 = \frac{5!}{2!(5-2)!} \text{ Möglichkeiten}$$

Auswahl mit Wiederholung der Elemente

$$\binom{n+k-1}{k}$$

aa	ab	ac	ad	ae
	bb	bc	bd	be
		cc	cd	de
			dd	de
				ee

$$\binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15 \text{ Möglichkeiten}$$

Interaktive Inhalte: $\binom{n}{k}$ - $\binom{n+k-1}{k}$ -

5.3 Wahrscheinlichkeit

5.3.1 Zufallsexperiment

Ergebnis - Ereignis

- Ein Zufallsexperiment ist beliebig oft wiederholbar
- Die Elementarergebnisse (Stichproben, Ausgänge) $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ des Zufallsexperiment sind nicht vorhersagbar
- Die Menge aller Ergebnisse heißt Ergebnisraum Ω
- $|\Omega|$ ist die Anzahl der Ergebnisse von Ω
- Ein Ereignis A ist eine Teilmenge von Ω
- $|A|$ ist die Anzahl der Elemente von A
- Die Menge aller Ergebnisse heißt Ergebnisraum Ω

Werfen einer Münze

Ergebnis: $\omega_1 = \text{Wappen}(W)$ $\omega_2 = \text{Zahl}(Z)$

Ergebnismenge: $\Omega = \{W, Z\}$

Anzahl der Ergebnisse: $|\Omega| = 2$

Ereignis: $A = \{W\}$

Ereignis: $B = \{Z\}$

Werfen eines Würfels

Ergebnis: $\omega_1 = 1$ $\omega_2 = 2$ $\omega_3 = 3$

$\omega_4 = 4$ $\omega_5 = 5$ $\omega_6 = 6$

Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Anzahl der Ergebnisse: $|\Omega| = 6$

Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$

Anzahl der Elemente von $|A| = 4$

Gegenereignis: $\bar{B} = \{2, 4\}$

Anzahl der Elemente von $|\bar{B}| = 2$

Schnittmenge \cap von Ereignissen

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$

$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$

$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{c; d\}$

Alle Ergebnisse die in A und zugleich in B enthalten sind.

Werfen eines Würfels

Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$

Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$

$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{3; 5\}$

Vereinigungsmenge \cup von Ereignissen

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$

$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$

$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$

Alle Ergebnisse die in A oder B enthalten sind.

Werfen eines Würfels

Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ereignis: $A = \{1, 3, 5\}$

Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$

$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Differenz \setminus von Ereignissen

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$

$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$

$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{e\}$

Alle Ergebnisse die in A, aber nicht in B enthalten sind.

Werfen eines Würfels

Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ereignis: $A = \{1, 3, 5\}$

Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$

$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{1\}$

Gegenereignis \bar{A}

$\bar{A} = \Omega \setminus A$

Alle Ergebnisse die in Ω , aber nicht in A enthalten sind.

Werfen eines Würfels

Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$

Gegenereignis: $\bar{A} = \{2, 4\}$

Vereinbare - unvereinbare Ereignisse

$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{\}$ \Leftrightarrow unvereinbare Ereignisse

$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{a, b, \dots\}$ \Leftrightarrow vereinbare Ereignisse

Werfen eines Würfels

Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ereignis: $A = \{3, 5, 6\}$

Ereignis: $B = \{3, 4, 5\}$

Ereignis: $C = \{1, 2\}$

$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{3; 5\}$ vereinbare Ereignisse

$\mathbb{A} \cap \mathbb{C} = \{\}$ unvereinbare Ereignisse

Rechengesetze

- Kommutativgesetz

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- Assoziativgesetz

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

- Distributivgesetz

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

- Neutrales Element

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

- Inverses Element

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$A \cup \overline{A} = \text{Grundmenge}$$

5.3.2 Relative Häufigkeit**Definition**

$$h_n(A) = \frac{k}{n}$$

n - Anzahl der Wiederholungen eines Versuchs

A - Ereignis

k - Absolute Häufigkeit von A

$h(A)$ - Relative Häufigkeit von A

Eigenschaften

- $0 \leq h(A) \leq 1$

- $h(\emptyset) = 0$

- $h(\Omega) = 1$

- $h(A \cup B) = h(A) + h(B) - h(A \cap B)$

- $h(A \cup B) = h(A) + h(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$

- $h(A) = 1 - h(\overline{A})$

Interaktive Inhalte: $h_n(A) = \frac{k}{n}$ -

5.3.3 Wahrscheinlichkeit

Laplace-Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

Voraussetzung: Elementarergebnisse sind gleichwahrscheinlich

n - Anzahl der Wiederholungen eines Versuchs

A - Ereignis

k - Anzahl der günstigen Versuchsergebnisse für A

$P(A)$ - Wahrscheinlichkeit von A

Werfen eines Würfels

Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Elementarergebnisse sind gleichwahrscheinlich:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

Anzahl aller möglichen Versuchsergebnisse: $n = |\Omega| = 6$

Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$

Anzahl der günstigen Versuchsergebnisse: $k = |A| = 4$

Wahrscheinlichkeit von A

$$P(A) = \frac{4}{6}$$

Eigenschaften

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$
- $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Werfen eines Würfels

Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ereignis: $A = \{1, 3, 5\}$

Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$

$A \cap B = \{3, 5\}$

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

$$P(B) = \frac{4}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

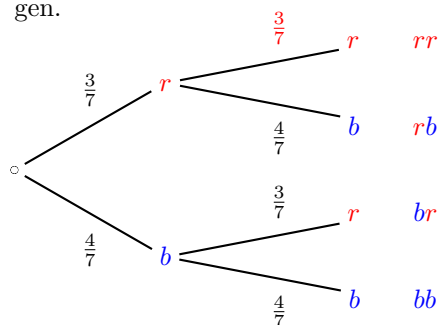
$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$$

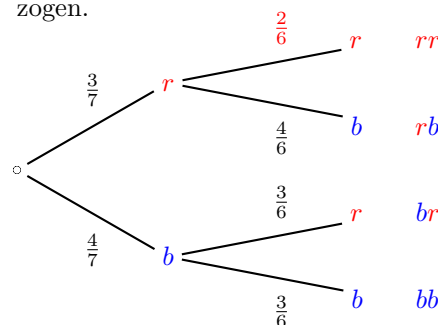
Interaktive Inhalte: $P(A) = \frac{k}{n}$ -

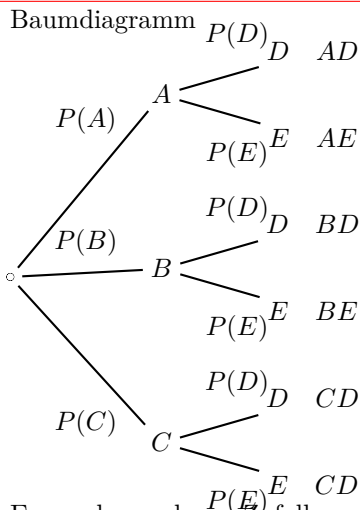
5.3.4 Mehrstufige Zufallsexperimente

In einer Urne befinden sich drei rote und vier blaue Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln **mit** Zurücklegen gezogen.



In einer Urne befinden sich drei rote und vier blaue Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln **ohne** Zurücklegen gezogen.





Es werden mehrere Zufallsexperimente nacheinander ausgeführt. Jedes mögliche Elementarereignis wird zu einem Knoten (A,B,C..) im Baumdiagramm.

Zufallsexperiment 1: $\Omega = \{A, B, C\}$

Zufallsexperiment 2: $\Omega = \{D, E\}$

Die Knoten werden durch Pfade verbunden und die Wahrscheinlichkeiten angetragen. ($P(A), P(B), \dots$)

Die Wahrscheinlichkeiten an einem Knoten müssen sich zu 1 addieren.

1. Pfadregel (Produktregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses (AD, AE..) ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang dieses Pfades.

$$P(AD) = P(A) \cdot P(D) \quad P(AE) = P(A) \cdot P(E)$$

$$P(BD) = P(B) \cdot P(D) \quad P(BE) = P(B) \cdot P(E)$$

$$P(CD) = P(C) \cdot P(D) \quad P(CE) = P(C) \cdot P(E)$$

2. Pfadregel (Summenregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten ihrer Ergebnisse.

$$P(AD, CD) = P(AD) + P(CD)$$

Ziehen mit Zurücklegen

$$\Omega = \{rr; rb; br; bb\}$$

1. Pfadregel:

$$P(rr) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$$

$$P(rb) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$$

$$P(br) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$$

$$P(bb) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$$

Wahrscheinlichkeit für nur gleichfarbige Kugeln

$$E = \{rr; bb\}$$

2. Pfadregel:

$$P(E) = P(rr) + P(bb) = \frac{9}{49} + \frac{16}{49} = \frac{25}{49}$$

Ziehen ohne Zurücklegen

$$\Omega = \{rr; rb; br; bb\}$$

1. Pfadregel:

$$P(rr) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$$

$$P(rb) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{42}$$

$$P(br) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42}$$

$$P(bb) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42}$$

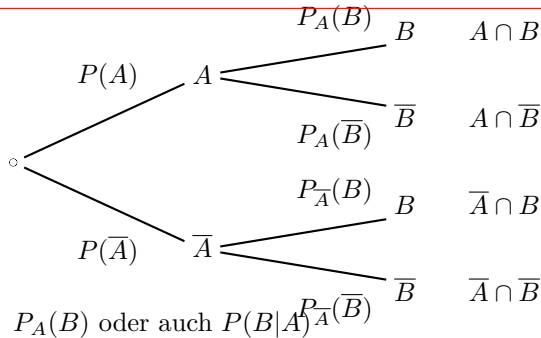
Wahrscheinlichkeit für genau 1 rote Kugel

$$E = \{rb; br\}$$

2. Pfadregel:

$$P(E) = P(rb) + P(br) = \frac{12}{42} + \frac{12}{42} = \frac{24}{42}$$

5.3.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit



$P_A(B)$ oder auch $P(B|A)$

Die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A. Die Wahrscheinlichkeit von B, wenn A schon eingetreten ist.

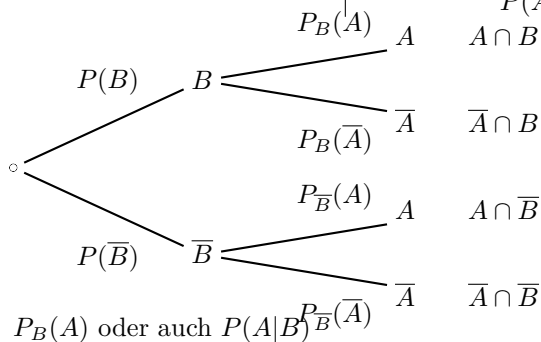
1. Pfadregel

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) \quad \left| \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \right.$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P_A(\bar{B}) \quad \left| \quad P_A(\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} \right.$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B) \quad \left| \quad P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} \right.$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(\bar{B}) \quad \left| \quad P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} \right.$$



$P_B(A)$ oder auch $P(A|B)$

Die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B. Die Wahrscheinlichkeit von A, wenn B schon eingetreten ist.

1. Pfadregel

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A) \quad \left| \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \right.$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) \cdot P_B(\bar{A}) \quad \left| \quad P_B(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} \right.$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A) \quad \left| \quad P_{\bar{B}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \right.$$

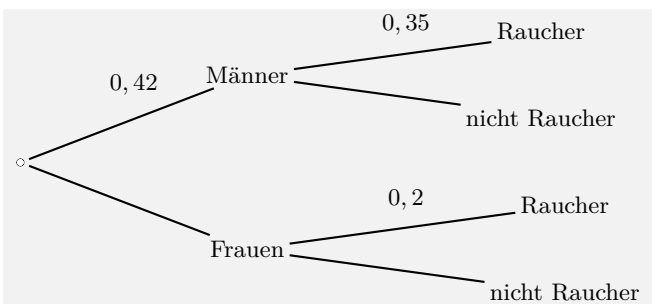
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(\bar{A}) \quad \left| \quad P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \right.$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$



42 Prozent der Deutschen sind Männer.

35 Prozent der Männer und 20 Prozent der Frauen rauchen.

Männer (A) $P(A) = 0,42$ - Frauen (\bar{A}) $P(\bar{A}) = 0,58$

Raucher (B) - nicht Raucher (\bar{B})

Raucher unter den (Bedingung) Männern: $P_A(B) = 0,35$

nicht Raucher unter den Männern: $P_A(\bar{B}) = 0,65$

Raucher unter den Frauen: $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$

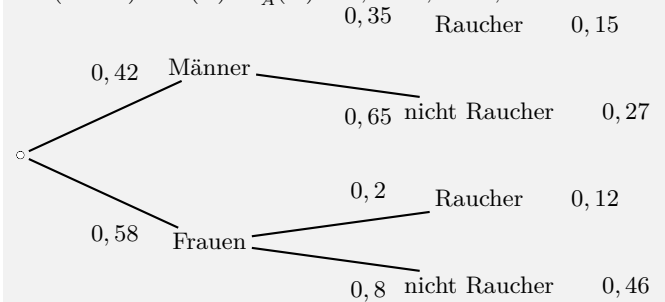
nicht Raucher unter den Frauen: $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,8$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = 0,42 \cdot 0,35 = 0,15$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P_A(\bar{B}) = 0,42 \cdot 0,65 = 0,27$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B) = 0,58 \cdot 0,2 = 0,12$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,58 \cdot 0,8 = 0,46$$



$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,15 + 0,12 = 0,27$$

$$P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,27 + 0,46 = 0,73$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,15}{0,27} = 0,56$$

$$P_B(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0,12}{0,27} = 0,44$$

$$P_{\bar{B}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,27}{0,73} = 0,37$$

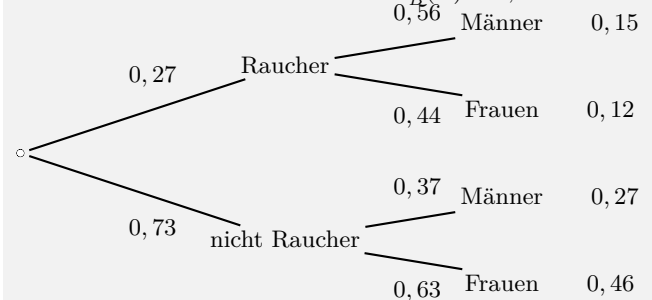
$$P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,46}{0,73} = 0,63$$

Männer unter den (Bedingung) Rauchern: $P_B(A) = 0,56$

Frauen unter den Rauchern: $P_B(\bar{A}) = 0,44$

Männer unter den nicht Rauchern: $P_{\bar{B}}(A) = 0,37$

Frauen unter den nicht Rauchern: $P_{\bar{B}}(\bar{A}) = 0,63$



5.3.6 Vierfeldertafel

Relativer Häufigkeiten

Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen.

1. Merkmal hat die Ausprägung A und \bar{A}
2. Merkmal hat die Ausprägung B und \bar{B}

	A	\bar{A}	Σ
B	$h(A \cap B)$ a	$h(\bar{A} \cap B)$ b	$h(B)$ a + b
\bar{B}	$h(A \cap \bar{B})$ c	$h(\bar{A} \cap \bar{B})$ d	$h(\bar{B})$ c + d
Σ	$h(A)$ a + c	$h(\bar{A})$ b + d	1 a + b + c + d

Relative Häufigkeit der Ausprägung

$$h(A), h(B), h(\bar{A}), h(\bar{B})$$

$$h(B) + h(\bar{B}) = 1 \quad h(A) + h(\bar{A}) = 1$$

Relative Häufigkeit von der Schnittmenge

$$h(A \cap B), h(\bar{A} \cap B), h(A \cap \bar{B}), h(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$h(B) = h(A \cap B) + h(\bar{A} \cap B)$$

$$h(\bar{B}) = h(A \cap \bar{B}) + h(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$h(A) = h(A \cap B) + h(A \cap \bar{B})$$

$$h(\bar{A}) = h(\bar{A} \cap B) + h(\bar{A} \cap \bar{B})$$

Relative Häufigkeiten von der Vereinigungsmenge

$$h(A \cup B), h(\bar{A} \cup B), h(A \cup \bar{B}), h(\bar{A} \cup \bar{B})$$

$$h(A \cup B) = h(A \cap B) + h(A \cap \bar{B}) + h(\bar{A} \cap B)$$

$$h(\bar{A} \cup B) = h(A \cap B) + h(\bar{A} \cap B) + h(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$h(A \cup \bar{B}) = h(A \cap B) + h(A \cap \bar{B}) + h(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$h(\bar{A} \cap \bar{B}) = h(A \cap \bar{B}) + h(\bar{A} \cap B) + h(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$h(A \cup B) = 1 - h(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$h(\bar{A} \cup B) = 1 - h(A \cap \bar{B})$$

$$h(A \cup \bar{B}) = 1 - h(\bar{A} \cap B)$$

$$h(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - h(A \cap B)$$

Relative Häufigkeit unter einer Bedingung

$$h_A(B) = \frac{h(A \cap B)}{h(A)}$$

$$h_A(\bar{B}) = \frac{h(A \cap \bar{B})}{h(A)}$$

$$h_{\bar{A}}(B) = \frac{h(\bar{A} \cap B)}{h(\bar{A})}$$

$$h_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{h(\bar{A} \cap \bar{B})}{h(\bar{A})}$$

In einer Schulklasse sind 32 Schüler, darunter 18 Mädchen.

6 Mädchen und 8 Jungen sind krank.

1. Merkmal: Mädchen (A) - Jungen (\bar{A})

2. Merkmal: Krank (B) - Gesund (\bar{B})

Mädchen: $A = 18$

Jungen: $\bar{A} = 32 - 18 = 14$

krankte Mädchen: $A \cap B = 6$

krankte Jungen: $\bar{A} \cap B = 8$

Kranke: $B = 6 + 8 = 14$

gesunde Mädchen: $A \cap \bar{B} = 18 - 6 = 12$

gesunde Jungen: $\bar{A} \cap \bar{B} = 14 - 8 = 6$

Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten

	A Mädchen	\bar{A} Jungen	Σ
B Krank	$A \cap B$ 6	$\bar{A} \cap B$ 8	B 14
\bar{B} Gesund	$A \cap \bar{B}$ 12	$\bar{A} \cap \bar{B}$ 6	\bar{B} 18
Σ	A 18	\bar{A} 14	Insgesamt 32

Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten

	A Mädchen	\bar{A} Jungen	Σ
B Krank	$h(A \cap B)$ $\frac{6}{32}$	$h(\bar{A} \cap B)$ $\frac{8}{32}$	$h(B)$ $\frac{14}{32}$
\bar{B} Gesund	$h(A \cap \bar{B})$ $\frac{12}{32}$	$h(\bar{A} \cap \bar{B})$ $\frac{6}{32}$	$h(\bar{B})$ $\frac{18}{32}$
Σ	$h(A)$ $\frac{18}{32}$	$h(\bar{A})$ $\frac{14}{32}$	1 $\frac{32}{32}$

Relative Häufigkeit von

Mädchen $h(A) = \frac{18}{32}$ Jungen $h(\bar{A}) = \frac{14}{32}$

Krank $h(B) = \frac{14}{32}$ Gesund $h(\bar{B}) = \frac{18}{32}$

Anzahl der gesunden Mädchen: 12

$h(A \cap \bar{B}) = \frac{12}{32} = 37,5\%$

37,5% der gesamten Schüler sind gesunde Mädchen.

Wieviel Prozent der Mädchen sind gesund?

$$h_A(\bar{B}) = \frac{h(A \cap \bar{B})}{h(A)} = \frac{\frac{12}{32}}{\frac{18}{32}} = \frac{12}{18}$$

Wahrscheinlichkeiten

Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen.

1. Merkmal hat die Ausprägung A und \bar{A} .
2. Merkmal hat die Ausprägung B und \bar{B} .

	A	\bar{A}	Σ
B	$P(A \cap B)$ a	$P(\bar{A} \cap B)$ b	$P(B)$ a + b
\bar{B}	$P(A \cap \bar{B})$ c	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$ d	$P(\bar{B})$ c + d
Σ	$P(A)$ a + c	$P(\bar{A})$ b + d	1 a + b + c + d

Wahrscheinlichkeit der Ausprägung

$$P(A), P(B), P(\bar{A}), P(\bar{B})$$

$$P(B) + P(\bar{B}) = 1$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Wahrscheinlichkeit von der Schnittmenge

$$P(A \cap B), P(\bar{A} \cap B), P(A \cap \bar{B}), P(\bar{A} \cap \bar{B}).$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

Berechnungen mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(A \cap B) = P_A(B) \cdot P(A)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P_A(\bar{B}) \cdot P(A)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P_{\bar{A}}(B) \cdot P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P_{\bar{A}}(\bar{B}) \cdot P(\bar{A})$$

Wahrscheinlichkeit von der Vereinigungsmenge

$$P(A \cup B), P(\bar{A} \cup B), P(A \cup \bar{B}), P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cup B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(\bar{A} \cup B) = 1 - P(A \cap \bar{B})$$

$$P(A \cup \bar{B}) = 1 - P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cap B)$$

42 Prozent der Deutschen sind Männer. 35 Prozent der Männer und 20 Prozent der Frauen rauchen.

1. Merkmal: Männer (A) Frauen (\bar{A})

2. Merkmal: Raucher (B) - nicht Raucher (\bar{B})

$$P(A) = 0,42 \quad P(\bar{A}) = 1 - 0,42 = 0,58$$

Raucher unter den (Bedingung) Männern: $P_A(B) = 0,35$

$$P(A \cap B) = P_A(B) \cdot P(A) = 0,35 \cdot 0,42 = 0,15$$

Raucher unter den (Bedingung) Frauen: $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$

$$P(\bar{A} \cap B) = P_{\bar{A}}(B) \cdot P(\bar{A}) = 0,2 \cdot 0,58 = 0,12$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,42 - 0,15 = 0,27$$

$$P(\bar{B}) = 0,58 - 0,12 = 0,46$$

$$P(B) = 0,15 + 0,12 = 0,27$$

$$P(\bar{B}) = 1 - 0,27 = 0,73$$

	A Männer	\bar{A} Frauen	Σ
B Raucher	$P(A \cap B)$ 0,15	$P(\bar{A} \cap B)$ 0,12	$P(B)$ 0,27
\bar{B} nicht Raucher	$P(A \cap \bar{B})$ 0,27	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$ 0,46	$P(\bar{B})$ 0,73
Σ	$P(A)$ 0,42	$P(\bar{A})$ 0,58	1

Stochastische Unabhängigkeit

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow A, B \text{ unabhängig}$$

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow A, B \text{ abhängig}$$

$$P(A \cap B) = 0,15$$

$$P(A) = 0,42$$

$$P(B) = 0,27$$

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

$$0,15 \neq 0,42 \cdot 0,27 \Leftrightarrow A, B \text{ abhängig}$$

5.3.7 Binomialverteilung

In einer Urne befinden sich vier rote und sechs blaue Kugeln. Es werden nacheinander drei Kugeln **mit** Zurücklegen gezogen.

Zwei Ausgänge des Zufallsexperiments: rote oder blaue Kugeln

Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel: $p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Wahrscheinlichkeit für eine blaue Kugel: $q = 1 - p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Anzahl der Versuche: $n=3$

Ziehen **mit** Zurücklegen: Wahrscheinlichkeiten ändern sich nicht

Definition

$$P(X = k) = B(n, p, k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Voraussetzung

- Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ausgängen (Bernoulli-Experiment)
- p - Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A
- Stichprobe mit Zurücklegen - Wahrscheinlichkeit p ändert sich nicht
- n - Anzahl der Wiederholungen des Versuchs (Bernoulli-Likette der Länge n)
- Das Ereignis A tritt genau k -mal ein.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 rote Kugeln zu ziehen?

Genau 2 rote Kugeln: $k=2$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

$$P(X = 2) = B(10, \frac{2}{5}, 2)$$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot (\frac{2}{5})^2 \cdot (1 - \frac{2}{5})^{10-2}$$

$$P(X = 2) = 0,121$$

Verteilungsfunktion

$$F(k) = P(0 \leq X \leq k) = \sum_{i=0}^k B(n; p; i)$$

Binomialverteilung $n = 10$ $p = \frac{2}{5}$

k	$B(10, \frac{2}{5}, k)$	$F(k)$
0	0,006047	0,006047
1	0,040311	0,046357
2	0,120932	0,167290
3	0,214991	0,382281
4	0,250823	0,633103
5	0,200658	0,833761
6	0,111477	0,945238
7	0,042467	0,987705
8	0,010617	0,998322
9	0,001573	0,999895
10	0,000105	1,000000

Bereiche der Binomialverteilung

höchstens k-mal

$$P(x \leq k) = \sum_{i=0}^k B(n; p; i) = F(k)$$

weniger als k-mal

$$P(x < k) = \sum_{i=0}^{k-1} B(n; p; i) = F(k-1)$$

mindestens k-mal

$$P(x \geq k) = \sum_{i=k}^n B(n; p; i) = 1 - F(k-1)$$

mehr als k-mal

$$P(x > k) = \sum_{i=k+1}^n B(n; p; i) = 1 - F(k)$$

mindestens 1-mal

$$P(x \geq 1) = \sum_{i=1}^n B(n; p; i) = 1 - F(0) =$$

$$1 - B(n; p; 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n = 1 - (1-p)^n$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden ..

genau 2 rote Kugeln

$$P(x = 2) = 0,120932$$

höchstens 2 rote Kugeln

$$P(x \leq 2) = F(2) = \sum_{i=0}^2 B(10; \frac{2}{5}; i) = B(10, \frac{2}{5}, 0) + B(10, \frac{2}{5}, 1) + B(10, \frac{2}{5}, 2) = 0,167290$$

weniger als 2 rote Kugeln

$$P(x < 2) = F(1) = \sum_{i=0}^1 B(10; \frac{2}{5}; i) = B(10, \frac{2}{5}, 0) + B(10, \frac{2}{5}, 1) = 0,046357$$

mehr als 2 rote Kugeln

$$P(x > 2) = 1 - F(2) = 0,832710$$

mindestens 2 rote Kugeln

$$P(x \geq 2) = 1 - F(1) = 0,953643$$

gezogen

3-mindestens-Aufgabe

P_{min} ist die Mindestwahrscheinlichkeit für mindesten einen Treffer ($x \geq 1$) und der Trefferwahrscheinlichkeit p bei mindestens n Versuchen.

$$P_p^n(x \geq 1) \geq P_{min}$$

Gesucht: n - Mindestanzahl der Versuche

$$P_p^n(x \geq 1) \geq P_{min}$$

$$1 - P_p^n(0) \geq P_{min}$$

$$1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n \geq P_{min}$$

$$1 - (1-p)^n \geq P_{min} \quad / - P_{min} / + (1-p)^n$$

$$1 - P_{min} \geq (1-p)^n \quad / \ln$$

$$\ln(1 - P_{min}) \geq \ln((1-p)^n)$$

$$\ln(1 - P_{min}) \geq n \ln(1-p) \quad / : \ln(1-p)$$

$$\frac{\ln(1 - P_{min})}{\ln(1-p)} \leq n$$

$$n \geq \frac{\ln(1 - P_{min})}{\ln(1-p)}$$

Gesucht: p - Wahrscheinlichkeit eines Treffers

$$P_p^n(x \geq 1) \geq P_{min}$$

$$1 - P_p^n(0) \geq P_{min}$$

$$1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n \geq P_{min}$$

$$1 - (1-p)^n \geq P_{min} \quad / - P_{min} / + (1-p)^n$$

$$1 - P_{min} \geq (1-p)^n \quad / \frac{1}{n}$$

$$(1 - P_{min})^{\frac{1}{n}} \geq 1-p \quad / + p / - (1 - P_{min})^{\frac{1}{n}}$$

$$p \geq 1 - (1 - P_{min})^{\frac{1}{n}}$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Losen beträgt 20%. Wieviele Lose muss man mindestens kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% mindestens einmal zu gewinnen?

$$x \geq 1 \quad p = 0,2 \quad P_{min} \geq 0,5$$

$$P_{0,2}^n(x \geq 1) \geq 0,5$$

$$1 - P_{0,2}^n(0) \geq 0,5$$

$$1 - \binom{n}{0} \cdot 0,2^0 \cdot (1-0,2)^n \geq 0,5$$

$$1 - 0,8^n \geq 0,5 \quad / - 0,5 / + 0,8^n$$

$$1 - 0,5 \geq 0,8^n \quad / \ln$$

$$\ln(0,5) \geq \ln(0,8^n)$$

$$\ln(0,5) \geq n \ln(0,8) \quad / : \ln(0,8)$$

$$\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,8)} \leq n$$

$$n \geq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,8)}$$

$$n \geq 3,1$$

Beim zehnmaligen Losen ist die Wahrscheinlichkeit mindestens einmal zu gewinnen mindestens 40%. Wie groß muß die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Losen sein?

$$x \geq 1 \quad n = 10 \quad P_{min} \geq 0,4$$

$$P_p^{10}(x \geq 1) \geq 0,4$$

$$1 - P_p^{10}(0) \geq 0,4$$

$$1 - \binom{10}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{10} \geq 0,4$$

$$1 - (1-p)^{10} \geq 0,4 \quad / - 0,4 / + (1-p)^{10}$$

$$1 - 0,4 \geq (1-p)^{10} \quad / \frac{1}{10}$$

$$(0,6)^{\frac{1}{10}} \geq 1-p \quad / + p / - (0,6)^{\frac{1}{10}}$$

$$p \geq 1 - (0,6)^{\frac{1}{10}}$$

$$p \geq 0,05$$

Wartezeitaufgaben

Erster Treffer im n-ten Versuch

$$P(E) = (1 - p)^{n-1} \cdot p$$

Erster Treffer frühestens im n-ten Versuch

$$P(E) = (1 - p)^{n-1}$$

Erster Treffer spätestens im n-ten Versuch

$$P(E) = 1 - (1 - p)^n$$

k-ter Treffer im n-ten Versuch

$$P(E) = \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} \cdot p$$

k-ter Treffer frühestens im n-ten Versuch

$$P(E) = P(x \leq k-1) = \sum_{i=0}^{k-1} B(n-1; p; i)$$

k-ter Treffer spätestens im n-ten Versuch

$$P(E) = 1 - P(x \leq k-1) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} B(n; p; i)$$

Zufallsexperiment Würfeln.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 6

- beim 9. Wurf zum ersten Mal auftritt?

$$P(E) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{9-1} \cdot \frac{1}{6}$$

- frühestens beim 9. Wurf zum ersten Mal auftritt?

$$P(E) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{9-1}$$

- spätestens beim 9. Wurf zum ersten Mal auftritt?

$$P(E) = 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^9$$

- beim 9. Wurf zum dritten Mal auftritt?

$$P(E) = \binom{9-1}{3-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{3-1} \cdot (1-p)^{9-3} \cdot \frac{1}{6}$$

- frühestens beim 9. Wurf zum dritten Mal auftritt?

$$P(E) = \sum_{i=0}^{3-1} B(9-1; \frac{1}{6}; i)$$

- spätestens beim 9. Wurf zum dritten Mal auftritt?

$$P(E) = 1 - \sum_{i=0}^{3-1} B(9; \frac{1}{6}; i)$$

Interaktive Inhalte: $P(X = k)$ - $F(x)$ - $P(k1 \leq X \leq k2)$ - $P(X >, \geq, \leq, \dots k)$ -

5.3.8 Hypergeometrische Verteilung

In einer Urne befinden sich vier rote und sechs blaue Kugeln. Es werden nacheinander drei Kugeln **ohne** Zurücklegen gezogen.

Anzahl der Elemente: N=10

Anzahl der Züge: n=3

Anzahl der roten Kugeln: K=4

Ziehen **ohne** Zurücklegen

Definition

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Voraussetzung

- Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ausgängen
- Stichprobe ohne Zurücklegen - Wahrscheinlichkeit p ändert sich
- N - Anzahl aller Elemente
- n - Anzahl der Wiederholungen des Versuchs
- K - Anzahl von A unter den N - Elementen
- Das Ereignis A tritt genau k-mal ein

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 rote Kugeln zu ziehen?

Anzahl der gezogenen roten Kugeln: k=2

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{10-4}{3-2}}{\binom{10}{3}}$$

$$P(X = 2) = \frac{3}{10}$$

Interaktive Inhalte: $P(X = k)$ -

5.3.9 Erwartungswert - Varianz - Standardabweichung

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Zufallsgröße X mit den Werten x_1, x_2, x_3, \dots

Wahrscheinlichkeitsverteilung

X	x_1	x_2	x_3	x_4	..
$P(X)$	p_1	p_2	p_3	p_4	..

Erwartungswert:

$$E(x) = \mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots$$

$$E(x) = \mu = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(x_i)$$

Varianz:

$$Var(x) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + (x_3 - \mu)^2 \cdot p_3 + \dots$$

$$Var(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i)$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{Var(x)}$$

x	-1	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{1}{5}$

Erwartungswert:

$$E(x) = -1 \cdot \frac{2}{25} + 0 \cdot \frac{3}{25} + 1 \cdot \frac{7}{50} + 2 \cdot \frac{6}{25} + 3 \cdot \frac{11}{50} + 4 \cdot \frac{1}{5}$$

$$E(x) = \mu = 2$$

Varianz:

$$Var(x) = (-1 - 2)^2 \cdot \frac{2}{25} + (0 - 2)^2 \cdot \frac{3}{25} + (1 - 2)^2 \cdot \frac{7}{50} + (2 - 2)^2 \cdot \frac{6}{25} + (3 - 2)^2 \cdot \frac{11}{50} + (4 - 2)^2 \cdot \frac{1}{5} = 2 \frac{9}{25}$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{2 \frac{9}{25}} = 1,54$$

Binominalverteilung

Binominalverteilung $B(n; p)$

X	0	1	2	3	..
$P(X)$	$B(n; p; 0)$	$B(n; p; 1)$	$B(n; p; 2)$	$B(n; p; 3)$..

Erwartungswert:

$$E(x) = \mu = n \cdot p$$

Varianz:

$$Var(x) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{Var(x)}$$

Binomialverteilung

$$n = 50 \quad p = 0,25$$

Erwartungswert:

$$E(x) = \mu = n \cdot p$$

$$E(x) = \mu = 50 \cdot \frac{1}{4}$$

$$E(x) = 12 \frac{1}{2}$$

Varianz:

$$Var(x) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

$$Var(x) = 50 \cdot \frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{1}{4})$$

$$Var(x) = 9 \frac{3}{8}$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{9 \frac{3}{8}} = 3,06$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#) *Binomial* -

5.4 Testen von Hypothesen

5.4.1 Einseitiger Signifikanztest

Ist ein Würfel gezinkt?

Die Wahrscheinlichkeit eine Sechs zu würfeln ist bei einem nicht gezinkten Würfel: $p = \frac{1}{6}$ (Nullhypothese). Bei einem gezinkten Würfel ist die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs: $p > \frac{1}{6}$ (Gegenhypothese und Rechtsseitiger Signifikanztest). Der zu testende Würfel wird 100 mal geworfen (Stichprobenlänge). Man hält den Würfel für nicht gezinkt, wenn die Anzahl der gewürfelten Sechser höchstens 20 ist (Annahmebereich der Nullhypothese). Man hält den Würfel für gezinkt, wenn die Anzahl der gewürfelten Sechser mindestens 21 ist (Ablehnungsbereich der Nullhypothese).

Zwei Fehler sind bei der Entscheidung möglich:

1. Der Würfel ist nicht gezinkt. Mit viel Glück kann man auch mit einem nicht gezinkten Würfel mehr als 20 mal die Sechs würfeln. Man hält den Würfel für gezinkt, obwohl er es nicht ist. (Fehler 1. Art)
2. Der Würfel ist gezinkt. Mit viel Pech kann man auch mit einem gezinkten Würfel weniger als 21 mal die Sechs würfeln. Man hält den Würfel für nicht gezinkt, obwohl er es ist. (Fehler 2. Art).

Ziel ist es die Wahrscheinlichkeit für die Fehler zu berechnen (Irrtumswahrscheinlichkeit).

Definitionen

- Testgröße: Binominal verteilte Zufallsgröße X
- Nullhypothese H_0 : Vermutete Wahrscheinlichkeit für die Zufallsgröße X
- Gegenhypothese H_1 : Alternative Wahrscheinlichkeit
- Stichprobenlänge n : Anzahl der durchgeführten Versuche
- Entscheidungsregel: Annahme- und Ablehnungsbereich für die Nullhypothese
- Fehler 1. Art (α -Fehler): H_0 wird irrtümlich abgelehnt. Entscheidung gegen H_0 , aber H_0 ist richtig.
- Fehler 2. Art (β -Fehler): H_0 wird irrtümlich angenommen. Entscheidung für H_0 , aber H_0 ist nicht richtig.
- Irrtumswahrscheinlichkeit: Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art. Berechnung durch: $\alpha = P_{p_0}^n$ (Ablehnungsbereich von H_0)
- Signifikanzniveau: maximale Irrtumswahrscheinlichkeit

Testgröße: Anzahl der Sechsen beim Würfeln
 Stichprobenlänge $n = 100$
 Nullhypothese $H_0 : p \leq \frac{1}{6}$
 Gegenhypothese $H_1 : p > \frac{1}{6}$
 Annahmebereich: $A = \{0..20\}$
 Annahmebereich: $\bar{A} = \{21..100\}$

Rechtsseitiger Signifikanztest

	Annahmebereich	Ablehnungsbereich
	$A = \{0, \dots, k\}$	$\bar{A} = \{k+1, \dots, n\}$
$H_0 : p \leq p_0$	richtig	Fehler 1. Art
$H_1 : p > p_0$	Fehler 2. Art	richtig

Aufgabentyp 1

Gegeben: n, H_0 , Annahme- und Ablehnungsbereich

Gesucht: Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art)

$$\alpha = P_{p_0}^n(\bar{A})$$

$$\alpha = P_{p_0}^n(X \geq k+1) = \sum_{i=k+1}^n B(n; p_0; i)$$

$$\alpha = 1 - P_{p_0}^n(X \leq k) = 1 - \sum_{i=0}^k B(n; p_0; i) = 1 - F(k)$$

Aufgabentyp 2

Gegeben: n, H_0 , Signifikanzniveau

Gesucht: Annahme- und Ablehnungsbereich

$$P_{p_0}^n(\bar{A}) \leq \alpha$$

$$P_{p_0}^n(X \geq k+1) \leq \alpha$$

$$1 - P_{p_0}^n(X \leq k) \leq \alpha$$

$$P_{p_0}^n(X \leq k) \geq 1 - \alpha$$

Aufgabentyp 1

Gegeben:

$$n = 100, H_0 : p \leq \frac{1}{6}$$

$$A\{0..20\}, \bar{A} = \{21..100\}$$

Gesucht: Irrtumswahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art

$$\alpha = P_{\frac{1}{6}}^{100}(X \geq 21) = \sum_{i=21}^{100} B(100; \frac{1}{6}; i)$$

$$\alpha = 1 - P_{\frac{1}{6}}^{100}(X \leq 20) = 1 - \sum_{i=0}^{20} B(100; \frac{1}{6}; i) = 1 - F(20)$$

$$\text{Aus Tafelwerk: } \sum_{i=0}^{20} B(100; \frac{1}{6}; i) = F(20) = 0,84811$$

$$1 - 0,84811 = 0,15189$$

$$\text{Irrtumswahrscheinlichkeit} = 15,19\%$$

Aufgabentyp 2

Gegeben:

$$n = 100; H_0 : p = \frac{1}{6}$$

Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$

Gesucht: Entscheidungsregel

$$A\{0..k\}; \bar{A}\{k+1..100\}$$

$$P_{\frac{1}{6}}^{100}(X \geq k+1) \leq 0,05$$

$$\sum_{i=k+1}^{100} B(100; \frac{1}{6}; i) \leq 0,05$$

$$1 - P_{\frac{1}{6}}^{100}(X \leq k) \leq 0,05$$

$$P_{\frac{1}{6}}^{100}(X \leq k) \geq 1 - 0,05$$

$$P_{\frac{1}{6}}^{100}(X \leq k) \geq 0,95$$

Aus Tafelwerk: $k = 23$

Entscheidungsregel

$$A\{0..23\}; \bar{A}\{24..100\}$$

Linksseitiger Signifikanztest

	Ablehnungsbereich	Annahmebereich
	$\bar{A} = \{0, \dots, k\}$	$A = \{k+1, \dots, n\}$
$H_0 : p \geq p_0$	Fehler 1. Art	richtig
$H_1 : p < p_0$	richtig	Fehler 2. Art

Aufgabentyp 1

Gegeben: n, H_0 , Annahme- und Ablehnungsbereich

Gesucht: Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art)

$$\alpha = P_{p_0}^n(\bar{A})$$

$$\alpha = P_{p_0}^n(X \leq k) = \sum_{i=0}^k B(n; p_0; i) = F(k)$$

Aufgabentyp 2

Gegeben: n, H_0 , Signifikanzniveau α

Gesucht: Annahme- und Ablehnungsbereich

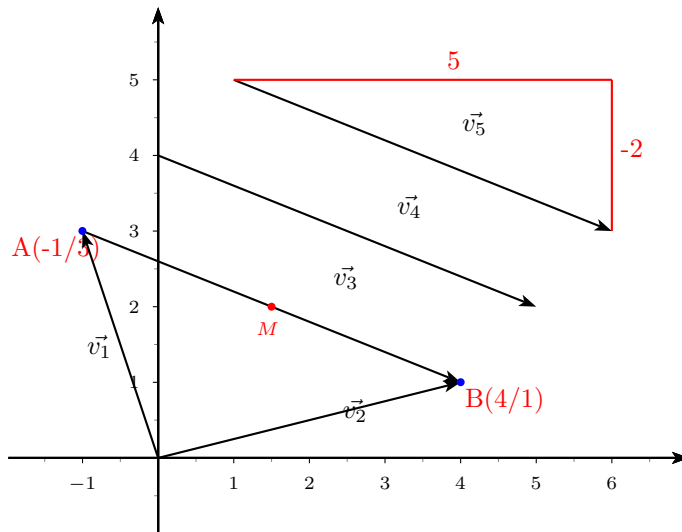
$$P_{p_0}^n(\bar{A}) \leq \alpha$$

$$P_{p_0}^n(X \leq k) \leq \alpha$$

6 Analytische Geometrie

6.1 Vektorrechnung in der Ebene

6.1.1 Vektor - Abstand - Steigung - Mittelpunkt



Vektor - Ortsvektor

- Vektor \vec{v} - Menge aller parallelgleicher Pfeile

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Ortsvektor \vec{v} - Vektor zwischen einem Punkt und dem Koordinatenursprung

$$A(x_a/y_a)$$

$$\vec{A} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$$

- Gegenvektor \vec{v} - gleiche Länge und Richtung aber entgegengesetzte Orientierung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\text{Vektoren: } \vec{AB} = \vec{v}_3 = \vec{v}_4 = \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ortsvektor: } \vec{A} = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ortsvektor: } \vec{B} = \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gegenvektor zu } \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vektor zwischen 2 Punkten

$$2 \text{ Punkte: } A(x_a/y_a) \quad B(x_b/y_b)$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$$

$$\text{Punkte: } A(-1/3) \quad B(4/1)$$

Vektor zwischen zwei Punkten

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 + 1 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Länge des Vektors - Betrag des Vektors - Abstand zwischen zwei Punkten

$$|\vec{AB}| = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

$$|\vec{AB}| = |\vec{AB}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{29}$$

$$|\vec{AB}| = 5,39$$

Steigung der Geraden AB

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Steigung der Geraden AB

$$m = \frac{y}{x}$$

Winkel des Vektors mit der x-Achse

$$\tan \alpha = m$$

Steigung der Geraden AB

$$m = \frac{-2}{5}$$

Mittelpunkt der Strecke AB

$$\vec{M} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B})$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} \right)$$

$$M\left(\frac{x_a+x_b}{2} / \frac{y_a+y_b}{2}\right)$$

Mittelpunkt der Strecke AB

$$\vec{M} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B})$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$M(1\frac{1}{2}/2)$$

VektorkettePunkt: $A(x_a/y_a)$

$$\text{Vektor : } \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{v} \quad \vec{B} = \vec{A} + \vec{v}$$

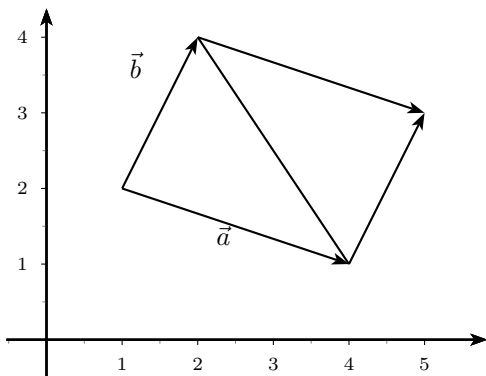
$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A(-1/3) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B(4/1)$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)**6.1.2 Skalarprodukt - Fläche - Winkel**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Steigung der Vektoren

$$m_a = \frac{y_a}{x_a} \quad m_b = \frac{y_b}{x_b}$$

$$m_a = m_b \Rightarrow \text{Vektoren sind parallel}$$

Steigung

$$m_s = \frac{y_a}{x_a} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$m_b = \frac{y_b}{x_b} = \frac{2}{1} = 2$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$

Senkrechte Vektoren:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 1$$

Fläche aus 2 VektorenFläche des Parallelogramms aus \vec{a}, \vec{b}

$$A = \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} = x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b$$

Fläche des Dreiecks aus \vec{a}, \vec{b}

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b)$$

Fläche des Parallelogramms aus \vec{a}, \vec{b}

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 7$$

Fläche des Dreiecks aus \vec{a}, \vec{b}

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) = 3\frac{1}{2}$$

Winkel zwischen Vektoren

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

Schnittwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{1}{3, 16 \cdot 2, 24} \right|$$

$$\cos \alpha = |0, 141|$$

$$\alpha = 81,9$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)**6.1.3 Abbildungen****Lineare Abbildung in Matrixform - Koordinatenform**

Matrixform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Koordinatenform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y + e \\ c \cdot x + d \cdot y + f \end{pmatrix}$$

$$x' = a \cdot x + b \cdot y + e \quad y' = c \cdot x + d \cdot y + f$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 31 \end{bmatrix}$$

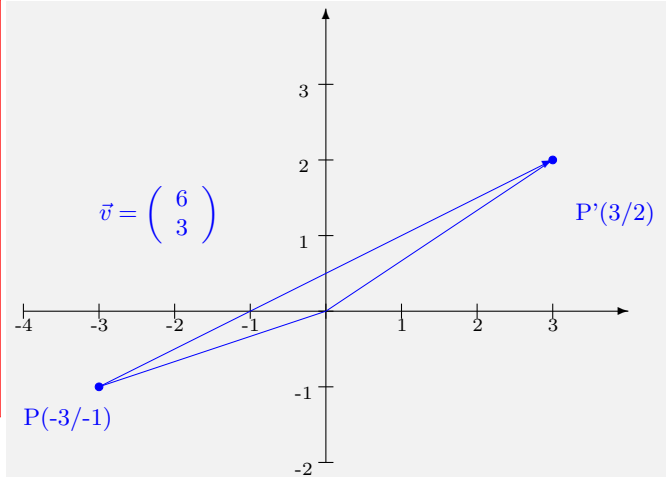
VerschiebungPunkt: $P(x_p/y_p)$ Vektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP'} = \vec{OP} + \vec{v}$$

$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$



$$P(-3/-1) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP'} = \vec{OP} + \vec{v}$$

$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P'(3/2)$$

Spiegelung an den KoordinatenachsenSpiegelung an der x -Achse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$x' = x \quad y' = -y$$

Spiegelung an der y -Achse

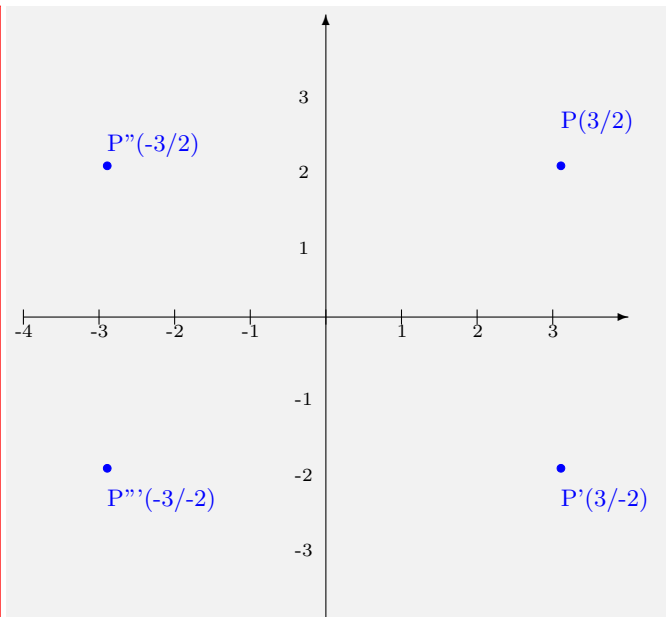
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \quad y' = y$$

Spiegelung am Ursprung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \quad y' = -y$$

Spiegelung an der x -Achse

$$P(3/2) \mapsto P'(3/-2)$$

Spiegelung an der y -Achse

$$P(3/2) \mapsto P''(-3/2)$$

Spiegelung am Ursprung

$$P(3/2) \mapsto P'''(-3/-2)$$

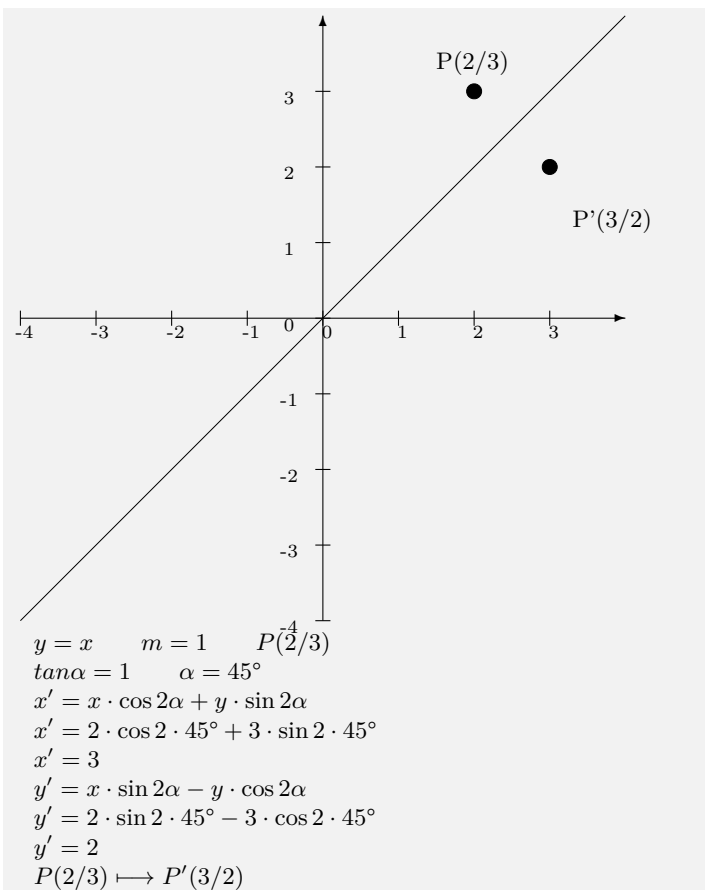
Spiegelung an der Ursprungsgerade

$$y = m \cdot x \quad \tan \alpha = m$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha \\ y' = x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$x' = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha \quad y' = x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha$$



Zentrische StreckungStreckzentrum: $Z(0/0)$ Streckungsfaktor: k Urpunkt: $P(x_P/y_P)$ Bildpunkt: $P'(x_{P'}/y_{P'})$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \end{pmatrix}$$

Streckzentrum: $Z(x_Z/y_Z)$ Streckungsfaktor: k Urpunkt: $P(x_P/y_P)$ Bildpunkt: $P'(x_{P'}/y_{P'})$

Vektorform

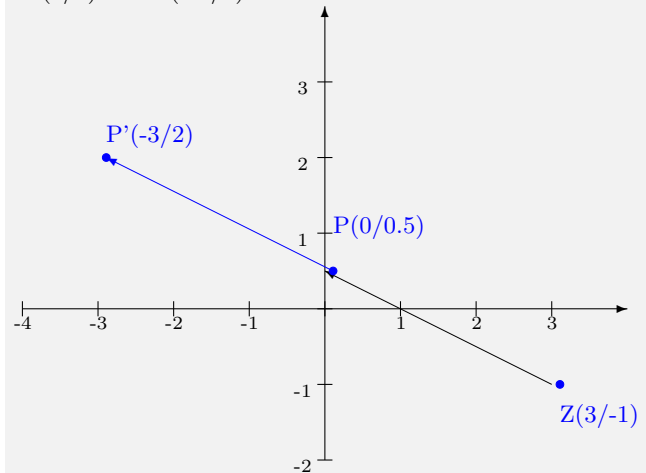
$$\vec{ZP'} = k \cdot \vec{ZP}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} - x_Z \\ y_{P'} - y_Z \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x_P - x_Z \\ y_P - y_Z \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP'} = k \cdot \vec{ZP} + \vec{OZ}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x_P - x_Z \\ y_P - y_Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_Z \\ y_Z \end{pmatrix}$$

$$P(2/3) \mapsto P'(-3/2)$$

Streckzentrum: $Z(3/-1)$

Streckungsfaktor: 2

Urpunkt: $P(0/0,5)$ Bildpunkt: $P'(x_{P'}/y_{P'})$

$$\vec{OP'} = k \cdot \vec{ZP} + \vec{OZ}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ 0,5 - (-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P'(-3/2)$$

Drehung um den Ursprung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \\ y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \quad y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$$

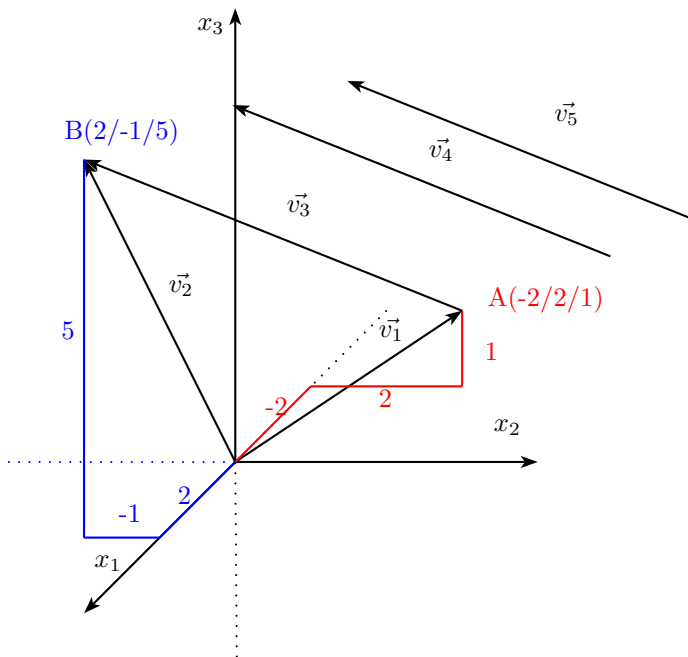
Orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ k \cdot y \end{pmatrix}$$

$$x' = x \quad y' = k \cdot y$$

6.2 Vektor

6.2.1 Vektor - Abstand - Mittelpunkt



Vektor - Ortsvektor

- Vektor \vec{v} - Menge aller parallelgleicher Pfeile

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- Ortsvektor \vec{v} - Vektor zwischen einem Punkt und dem Koordinatenursprung

$A(x_a/y_a)$

$$\vec{A} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

- Gegenvektor \vec{v} - gleiche Länge und Richtung aber entgegengesetzte Orientierung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

Vektoren: $\vec{AB} = \vec{v}_3 = \vec{v}_4$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor: $\vec{A} = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ortsvektor: $\vec{B} = \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Gegenvektor zu $\vec{v}_5 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Vektor zwischen 2 Punkten

2 Punkte: $A(a_1/a_2/a_3)$ $B(b_1/b_2/b_3)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Punkte: $A(-2/2/1)$ $B(2/-1/5)$

Vektor zwischen zwei Punkten

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 + 2 \\ -1 - 2 \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Länge des Vektors - Betrag des Vektors - Abstand zwischen zwei Punkten

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \\ |\vec{AB}| &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \\ |\vec{AB}| &= \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 4^2} \\ |\vec{AB}| &= \sqrt{41} \\ |\vec{AB}| &= 6,4 \end{aligned}$$

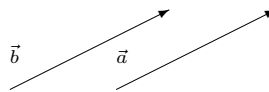
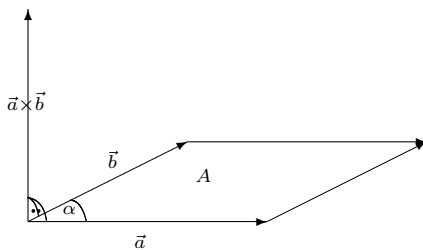
Mittelpunkt der Strecke AB

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B}) \\ \vec{M} &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \\ M &= \left(\frac{a_1+b_1}{2} / \frac{a_2+b_2}{2} / \frac{a_3+b_3}{2} \right) \end{aligned}$$

Mittelpunkt der Strecke AB

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B}) \\ \vec{M} &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \\ \vec{M} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \\ M &= (0 / \frac{1}{2} / 3) \end{aligned}$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

6.2.2 Winkel - Skalarprodukt - Vektorprodukt - Abhängigkeit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Länge der Vektoren

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \end{aligned}$$

Länge der Vektoren:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ |\vec{a}| &= \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \\ |\vec{a}| &= 3 \\ |\vec{b}| &= \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} \\ |\vec{b}| &= 3 \end{aligned}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Senkrechte Vektoren:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Skalarprodukt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot -2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot -2 = -7$$

Vektorprodukt - Fläche des Parallelogramms

$$\vec{c} \perp \vec{a} \text{ und } \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - b_3 \cdot a_1 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Fläche des Parallelogramms:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$A = |\vec{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

Fläche des Dreiecks aus \vec{a}, \vec{b}

$$A = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Fläche des Parallelogramms:

$$|\vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2}$$

$$|\vec{c}| = 5,657$$

Winkel zwischen Vektoren

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Schnittwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{-7}{3 \cdot 3}$$

$$\cos \alpha = \left| -\frac{7}{9} \right|$$

$$\alpha = 38,942$$

Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

$$a_1 = b_1 k \quad / : b_1 \Rightarrow k_1$$

$$a_2 = b_2 k \quad / : b_2 \Rightarrow k_2$$

$$a_3 = b_3 k \quad / : b_3 \Rightarrow k_3$$

$$k_1 = k_2 = k_3 \Rightarrow$$

Vektoren sind linear abhängig - parallel

nicht alle k gleich \Rightarrow

Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

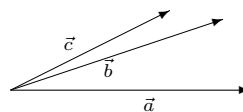
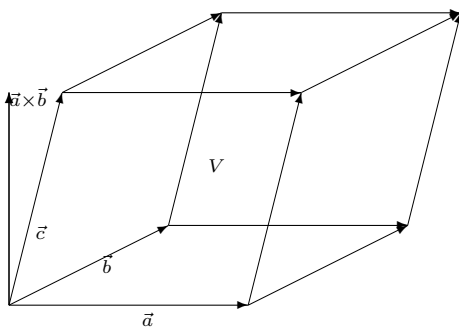
$$2 = -2k \quad / : -2 \Rightarrow k = -1$$

$$1 = 1k \quad / : 1 \Rightarrow k = 1$$

$$2 = -2k \quad / : -2 \Rightarrow k = -1$$

\Rightarrow Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

6.2.3 Spatprodukt - lineare Abhängigkeit - Basisvektoren - Komplanarität

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Spatprodukt: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} =$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt von \vec{a}, \vec{b} skalar multipliziert mit \vec{c}

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -3 \cdot 2 - 4 \cdot (-7) \\ 4 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-7) - (-3) \cdot (-4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ -33 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 44$$

Spatprodukt = Wert der Determinante

Spatprodukt: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -3 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D = 3 \cdot (-7) \cdot 2 + (-4) \cdot 2 \cdot 4 + 7 \cdot (-3) \cdot 2 - 7 \cdot (-7) \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - (-4) \cdot (-3) \cdot 2$$

$$D = 44$$

Spatprodukt - Volumen

- Volumen von Prisma oder Spat

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

- Volumen einer Pyramide mit den Grundflächen:

Quadrat, Rechteck, Parallelogramm

$$V = \frac{1}{3} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

- Volumen ein dreiseitigen Pyramide

$$V = \frac{1}{6} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -3 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$V = 3 \cdot (-7) \cdot 2 + (-4) \cdot 2 \cdot 4 + 7 \cdot (-3) \cdot 2 - 7 \cdot (-7) \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - (-4) \cdot (-3) \cdot 2$$

$$V = 44$$

Eigenschaften von 3 Vektoren

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow$ die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
 - sind linear abhängig
 - liegen in einer Ebene (komplanar)
 - sind keine Basisvektoren
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq 0 \Rightarrow$ die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
 - sind linear unabhängig
 - liegen nicht in einer Ebene
 - sind Basisvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 44$$

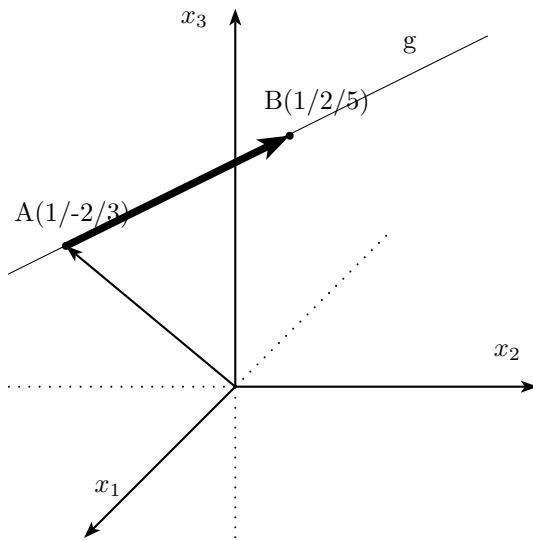
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq 0 \Rightarrow$$
 die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- sind linear unabhängig
- liegen nicht in einer Ebene
- sind Basisvektoren

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

6.3 Gerade

6.3.1 Gerade aus 2 Punkten



Punkte: $A(a_1/a_2/a_3)$ $B(b_1/b_2/b_3)$

Richtungsvektor

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Punkt A oder B als Aufpunkt wählen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Punkte: $A(1/-3/3)$ $B(1/2/5)$

Gerade aus zwei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 2 + 3 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

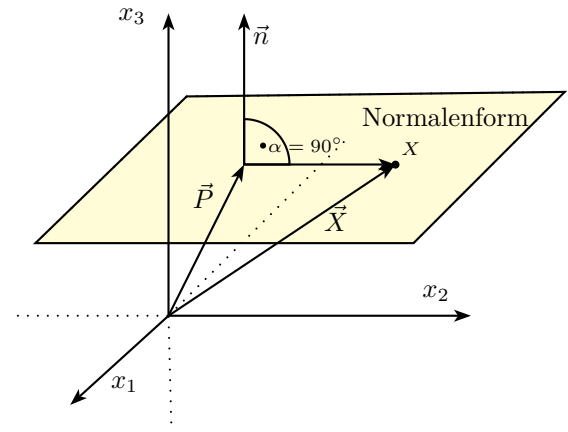
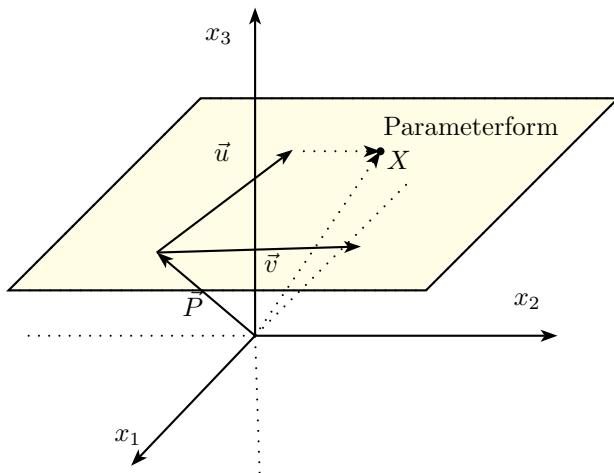
Besondere Geraden

$$\begin{array}{lll} x_1 - \text{Achse} & x_2 - \text{Achse} & x_3 - \text{Achse} \\ \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

6.4 Ebene

6.4.1 Parameterform - Normalenform



Parameterform

\vec{x} - Ortsvektor zu einem Punkt X in der Ebene

\vec{P} - Aufpunkt (Stützvektor, Ortsvektor)

\vec{u}, \vec{v} - Richtungsvektoren

λ, σ -Parameter

$$\vec{x} = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{u} + \sigma \cdot \vec{v}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Normalenform - Koordinatenform

\vec{x} - Ortsvektor zu einem Punkt X in der Ebene

\vec{n} - Normalenvektor

\vec{P} - Aufpunkt (Stützvektor, Ortsvektor)

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Koordinatenform:

$$n_1(x_1 - p_1) + n_2(x_2 - p_2) + n_3(x_3 - p_3) = 0$$

$$n_1x_1 - n_1p_1 + n_2x_2 - n_2p_2 + n_3x_3 - n_3p_3 = 0$$

$$c = -(n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3)$$

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c = 0$$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Punkt in der Ebene $P(2/-1/1)$

Normalenform:

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Koordinatenform:

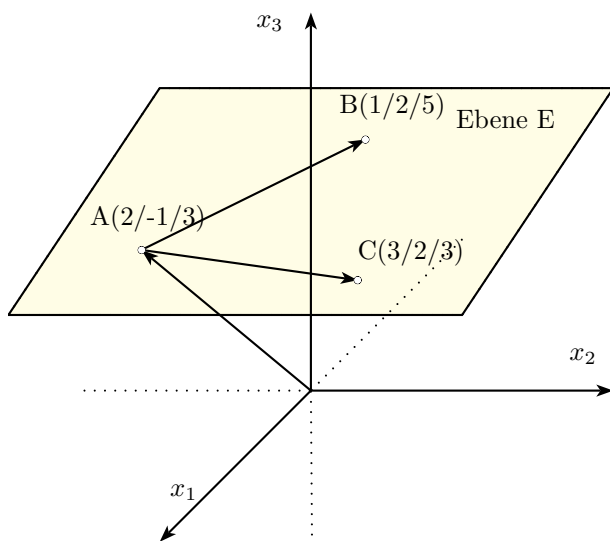
$$1(x_1 - 2) + 2(x_2 + 1) + 3(x_3 - 1) = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3 = 0$$

Besondere Ebenen

Ebene	Parameterform	Koordinatenform
$x_1 - x_2$	$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_3 = 0$
$x_1 - x_3$	$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$x_2 = 0$
$x_2 - x_3$	$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$x_1 = 0$

6.4.2 Ebenengleichung aufstellen



Ebene aus 3 Punkten

Punkte: $A(a_1/a_2/a_3)$ $B(b_1/b_2/b_3)$ $C(c_1/c_2/c_3)$
 Die 3 Punkte dürfen nicht auf einer Geraden liegen.
 Ebene aus drei Punkten:

$$\text{Richtungsvektor: } \vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Richtungsvektor: } \vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung aus Aufpunkt und den Richtungsvektoren.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Punkte: $A(2/-1/3)$ $B(1/2/5)$ $C(3/2/3)$

Ebene aus drei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2+1 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2+1 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ebene aus Gerade und Punkt

Der Punkt darf nicht auf der Geraden liegen.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Punkt: $C(c_1/c_2/c_3)$

Richtungsvektor zwischen Aufpunkt A und dem Punkt C

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Punkt: $C(2/0/1)$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-3 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebene aus zwei parallelen Geraden

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Bei parallelen Geraden sind Richtungsvektoren linear abhängig. Für die Ebenengleichung muß ein 2. Richtungsvektor erstellt werden. 2. Richtungsvektor zwischen den Aufpunkten A und C.

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} 2 & = & +4k \quad / : 4 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \\ 0 & = & +0k \quad / : 0 \Rightarrow k = \text{beliebig} \\ -1 & = & -2k \quad / : -2 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \end{array}$$

\Rightarrow Geraden sind parallel

Aufpunkt von Gerade 2 in Gerade 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Punkt: $A(3/4/5)$

$$3 = 1 + 2\lambda \quad / -1$$

$$4 = 3 + 0\lambda \quad / -3$$

$$5 = 0 - 1\lambda \quad / -0$$

$$2 = 2\lambda \quad / : 2 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$1 = 0\lambda \quad \Rightarrow \text{falsch}$$

$$5 = -1\lambda \quad / : -1 \Rightarrow \lambda = -5$$

\Rightarrow

Geraden sind echt parallel

2. Richtungsvektor zwischen den Aufpunkten A und C

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-3 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebene aus zwei sich schneidenden Geraden

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Bei sich schneidenden Geraden sind Richtungsvektoren linear unabhängig.

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die Geraden schneiden sich im Punkt $S(5, -9, 0)$

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Interaktive Inhalte: [3 Punkte](#) - [Punkt und Gerade](#) - [Parallele Geraden](#) -

6.4.3 Parameterform - Koordinatenform

1. Methode: Determinante

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & b_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_1 - a_1) \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot (x_3 - a_3) + c_1 \cdot (x_2 - a_2) \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot (x_3 - a_3) - (x_1 - a_1) \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot (x_2 - a_2) \cdot c_3 = 0$$

Koordinatenform:

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k = 0$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - 1 & -2 & 2 \\ x_2 + 3 & 4 & -5 \\ x_3 - 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 - 1 & -2 \\ x_2 + 3 & 4 \\ x_3 - 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_1 - 1) \cdot 4 \cdot 0 + (-2) \cdot (-5) \cdot (x_3 - 2) + 2 \cdot (x_2 + 3) \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot (x_3 - 2) - (x_1 - 1) \cdot (-5) \cdot 3 - (-2) \cdot (x_2 + 3) \cdot 0 = 0$$

$$15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$$

Koordinatenform:

$$15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$$

2. Methode: Vektorprodukt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor der Ebene mit dem Vektorprodukt

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \cdot c_3 - b_3 \cdot c_2 \\ b_3 \cdot c_1 - c_3 \cdot b_1 \\ b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor der Ebene und Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$$n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 + k = 0$$

k berechnen

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k = 0$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor in die Koordinatenform einsetzen.

$$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + k = 0$$

Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$$-1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + k = 0$$

$$k = -4$$

Koordinatenform

$$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 4 = 0$$

Interaktive Inhalte: [Determinante](#) - [Vektorprodukt](#) -

6.4.4 Koordinatenform - Parameterform

1. Methode

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k = 0$$

- x_1 durch einen Parameter ersetzen

$$x_1 = \lambda$$

- x_2 durch einen Parameter σ ersetzen

$$x_2 = \sigma$$

- Koordinatenform nach x_3 auflösen

$$x_3 = -\frac{k}{n_3} - \frac{n_1}{n_3}x_1 - \frac{n_2}{n_3}x_2$$

- Ebene in Punktdarstellung :

$$x_1 = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$$

$$x_2 = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \sigma$$

$$x_3 = -\frac{k}{n_3} - \frac{n_1}{n_3}\lambda - \frac{n_2}{n_3}\sigma$$

- Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k}{n_3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{n_1}{n_3} \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix}$$

$$4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 2 = 0$$

- x_1 durch einen Parameter ersetzen

$$x_1 = \lambda$$

- x_2 durch einen Parameter σ ersetzen

$$x_2 = \sigma$$

- Koordinatenform nach x_3 auflösen

$$x_3 = -\frac{2}{2} - \frac{4}{2}x_1 - \frac{8}{2}x_2$$

$$x_3 = 1 - 2x_1 - 4x_2$$

- Ebene in Punktdarstellung :

$$x_1 = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$$

$$x_2 = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \sigma$$

$$x_3 = 1 - 2\lambda - 4\sigma$$

- Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$4x_1 - 2 = 0$$

- x_2 durch einen Parameter ersetzen

$$x_2 = \lambda$$

- x_3 durch einen Parameter σ ersetzen

$$x_3 = \sigma$$

- Koordinatenform nach x_1 auflösen

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

- Ebene in Punktdarstellung :

$$x_1 = \frac{1}{2} + 0 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$$

$$x_2 = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$$

$$x_3 = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \sigma$$

- Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Methode

- Drei beliebige Punkte, die in der Ebene liegen ermitteln.
- Die Richtungsvektoren müssen linear unabhängig sein.
- Ebenengleichung aus 3 Punkten aufstellen.

$$4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 2 = 0$$

- $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ frei wählen und in die Ebenengleichung einsetzen. $\Rightarrow x_3 = 1$ und $P_1(0/0/1)$

- 2 weitere Punkte ermitteln: $P_2(1/0/-1)$ $P_3(0/1/-3)$

- Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

6.4.5 Koordinatenform - Hessesche Normalenform

Koordinatenform:

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1 = 0$$

Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors:

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

Hessesche Normalenform:

$$k_1 < 0$$

$$\text{HNF: } \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$$

$$k_1 > 0$$

$$\text{HNF: } \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1}{-\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$$

Koordinatenform:

$$15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors:

$$|\vec{n}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{15^2 + 6^2 + 2^2}$$

$$|\vec{n}| = 16,3$$

Hessesche Normalenform:

$$\text{HNF: } \frac{15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1}{16,3} = 0$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

6.5 Kugel

6.5.1 Kugelgleichung

$M(m_1/m_2/m_3)$ - Mittelpunkt der Kugel

r - Radius der Kugel

$X(x_1/x_2/x_3)$ - beliebiger Punkt auf der Kugel

Kugelgleichung:

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$$

$M(3/2/-4)$ - Mittelpunkt der Kugel

$r = 6$ - Radius der Kugel

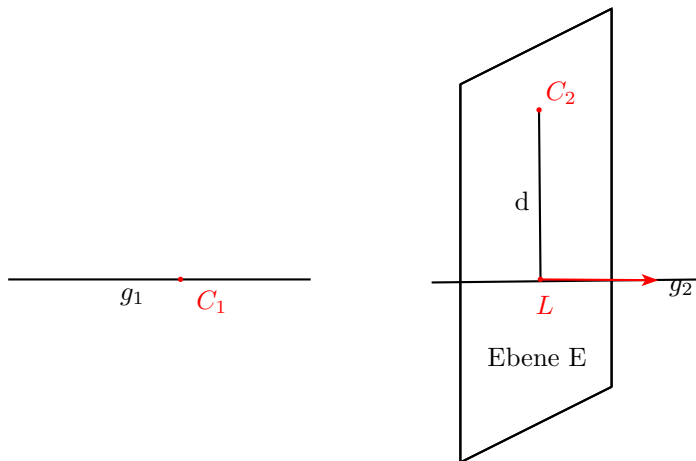
$X(x_1/x_2/x_3)$ - beliebiger Punkt auf der Kugel

Kugelgleichung:

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 + 4)^2 = 6^2$$

6.6 Lagebeziehung

6.6.1 Punkt - Gerade



Punkt C_1 liegt auf der Geraden g_1

Abstand d des Punktes C_2 von der Geraden g_2

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Punkt: $C(c_1/c_2/c_3)$

$$c_1 = a_1 + b_1\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1$$

$$c_1 = a_2 + b_2\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2$$

$$c_1 = a_3 + b_3\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow$$

Punkt liegt auf der Geraden

nicht alle λ gleich \Rightarrow

Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Die Koordinatenform der Ebenengleichung aufstellen, die senkrecht zur Geraden ist und den Punkt C enthält.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene. Der Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

Abstand des Punktes, ist die Länge des Vektors \vec{LC}

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Punkt: } C(7, 9, -6)$$

$$7 = 1 - 2\lambda \quad / -1$$

$$9 = 3 - 2\lambda \quad / -3$$

$$-6 = -3 + 2\lambda \quad / +3$$

$$6 = -2\lambda \quad / : -2 \Rightarrow \lambda = -3$$

$$6 = -2\lambda \quad / : -2 \Rightarrow \lambda = -3$$

$$-3 = 2\lambda \quad / : 2 \Rightarrow \lambda = -1\frac{1}{2}$$

\Rightarrow Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

$$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + k = 0$$

C ist Punkt in der Ebene

$$-2 \cdot 7 - 2 \cdot 9 + 2 \cdot 7 + k = 0$$

$$k = 44$$

$$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 44 = 0$$

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

$$x_1 = 1 - 2\lambda$$

$$x_2 = 3 - 2\lambda$$

$$x_3 = -3 + 2\lambda$$

$$-2(1 - 2\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 2(-3 + 2\lambda) + 44 = 0$$

$$12\lambda + 30 = 0$$

$$\lambda = \frac{-30}{12}$$

$$\lambda = -2\frac{1}{2}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt: $L(6, 8, -8)$

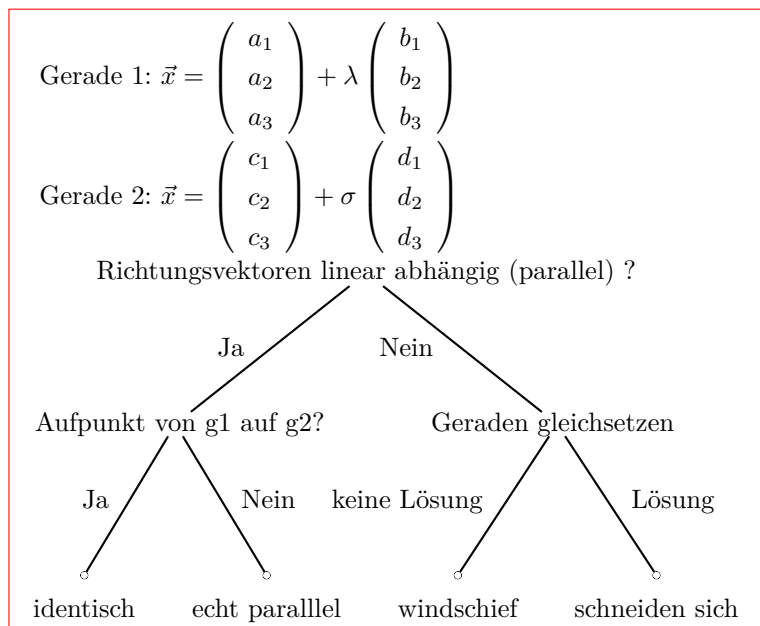
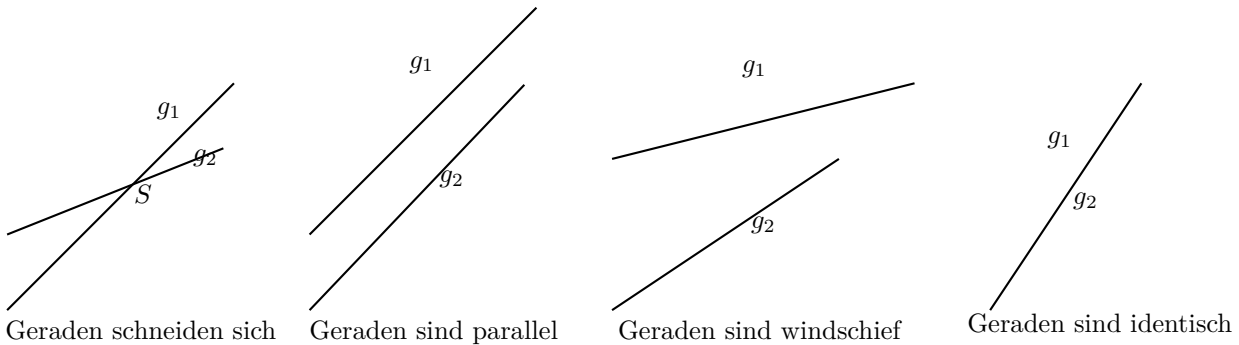
$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 12 - 7 \\ 30 - 9 \\ -2\frac{1}{2} + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt Gerade

$$|\vec{CL}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

6.6.2 Gerade - Gerade



Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$
 Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} 4 & = & -4k \quad / : -4 \Rightarrow k = -1 \\ -7 & = & -4k \quad / : -4 \Rightarrow k = 1\frac{3}{4} \\ -8 & = & -3k \quad / : -3 \Rightarrow k = 2\frac{2}{3} \end{array}$$

\Rightarrow Geraden sind nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rclcl} 1 & +4\lambda & = & 9 & -4\sigma \quad / -1 \quad / +4\sigma \\ -2 & -7\lambda & = & -5 & -4\sigma \quad / +2 \quad / +4\sigma \\ 8 & -8\lambda & = & 3 & -3\sigma \quad / -8 \quad / +3\sigma \end{array}$$

$$I \quad 4\lambda + 4\sigma = 8$$

$$II \quad -7\lambda + 4\sigma = -3$$

$$III \quad -8\lambda - 3\sigma = -5$$

Aus den Gleichungen I und II λ und σ berechnen

$$\sigma = 1$$

$$\lambda = 1$$

λ und σ in die verbleibende Gleichung einsetzen

$$III \quad 8 + 1 \cdot (-8) = 3 + 1 \cdot (-3)$$

$$0 = 0$$

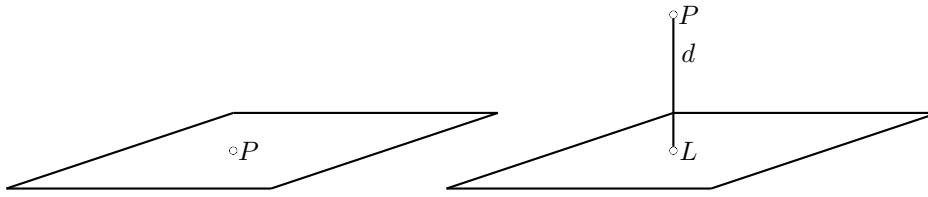
λ oder σ in die Geradengleichung einsetzen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt: $S(5, -9, 0)$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

6.6.3 Punkt - Ebene (Koordinatenform)



Punkt liegt in der Ebene

Punkt liegt nicht in der Ebene

Punkt: $A(a_1/a_2/a_3)$

Ebene: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c_1 = 0$

$n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3 + c_1 = 0$

- Liegt der Punkt in der Ebene?

Punkt in die Ebene einsetzen.

Gleichung nach Umformung: $0 = 0 \Rightarrow$ Punkt liegt in der Ebene

- Abstand Punkt - Ebene

Punkt in die HNF einsetzen.

Punkt: $A(1/2/0)$

Ebene: $-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$

$-1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 7 = 0$

$0 = 0$

Punkt liegt in der Ebene

Punkt: $A(2/-4/3)$

Ebene: $-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$

$-1 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 + 7 = 0$

$20 = 0$

Punkt liegt nicht in der Ebene

Abstand des Punktes von der Ebene

Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF

$-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors:

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 1^2}$$

$$|\vec{n}| = 3,32$$

HNF:

$$\frac{-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7}{-3,32} = 0$$

Punkt in HNF:

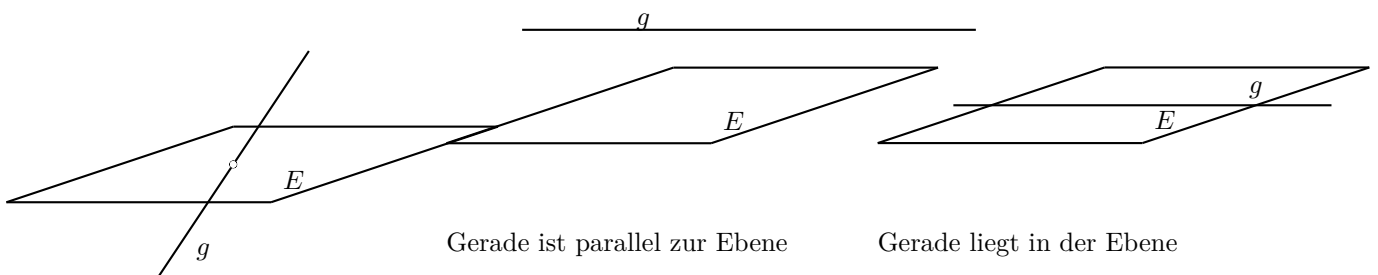
$$d = \left| \frac{-1 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 + 7}{-3,32} \right|$$

$$d = |-6,03|$$

$$d = 6,03$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

6.6.4 Gerade - Ebene (Koordinatenform)



Gerade schneidet Ebene

Gerade ist parallel zur Ebene

Gerade liegt in der Ebene

$$\text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c_1 = 0$$

Gerade1 in Punktdarstellung

$$x_1 = a_1 + b_1\lambda$$

$$x_2 = a_2 + b_2\lambda$$

$$x_3 = a_3 + b_3\lambda$$

x_1, x_2, x_3 in die Ebenengleichung einsetzen

$$n_1(a_1 + b_1\lambda) + n_2(a_2 + b_2\lambda) + n_3(a_3 + b_3\lambda) + c_1 = 0$$

Die Gleichung nach der Variablen auflösen.

- Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene

Auflösung nach einer Variablen ist möglich. Variable in die Gerade einsetzen

- Geraden und Ebene sind parallel

Auflösung nach der Variablen ist nicht möglich. λ heben sich auf.

Gleichung nach Umformung: *Konstante* = 0

- Gerade liegt in der Ebene

Auflösung nach der Variablen ist nicht möglich. λ heben sich auf.

Gleichung nach Umformung: 0 = 0

$$\text{Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } 1x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 10 = 0$$

$$x_1 = 3 + 4\lambda$$

$$x_2 = 5 + 5\lambda$$

$$x_3 = 7 + 5\lambda$$

$$1(3 + 4\lambda) - 2(5 + 5\lambda) + 5(7 + 5\lambda) + 10 = 0$$

$$19\lambda + 38 = 0$$

$$\lambda = \frac{-38}{19}$$

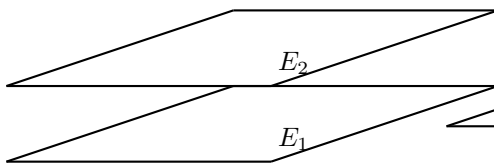
$$\lambda = -2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

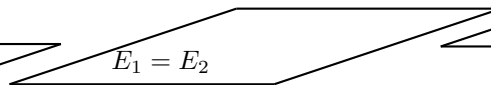
$$\text{Schnittpunkt: } S(-5, -5, -3)$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

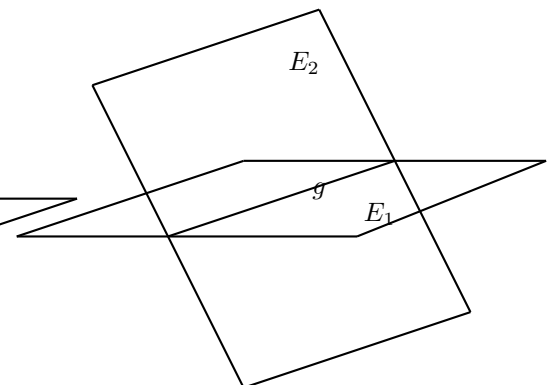
6.6.5 Ebene - Ebene



Ebenen sind parallel



Ebenen sind identisch



Ebenen schneiden sich

Parameterform - Koordinatenform

Parameterform - Ebene1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform - Ebene2

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1 = 0$$

Ebene1 in Punktdarstellung

$$x_1 = a_1 + b_1\lambda + c_1\sigma$$

$$x_2 = a_2 + b_2\lambda + c_2\sigma$$

$$x_3 = a_3 + b_3\lambda + c_2\sigma$$

 x_1, x_2, x_3 in die Ebenengleichung einsetzen

$$n_1(a_1 + b_1\lambda + c_1\sigma) +$$

$$n_2(a_2 + b_2\lambda + c_2\sigma) +$$

$$n_3(a_3 + b_3\lambda + c_2\sigma) + k_1 = 0$$

Die Gleichung nach einer Variablen auflösen

- Schnittgerade zwischen den Ebenen

Auflösung nach einer Variablen ist möglich. λ oder σ in die Parameterform einsetzen

- Ebenen sind parallel

Auflösung nach einer Variablen ist nicht möglich. λ und σ heben sich aufGleichung nach Umformung: $Konstante = 0$

- Ebenen sind identisch

Auflösung nach einer Variablen ist nicht möglich. λ und σ heben sich aufGleichung nach Umformung: $0 = 0$

$$\text{Ebene: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene: } 1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0 = 0$$

$$x_1 = -2 + 1\lambda + 0\sigma$$

$$x_2 = -4 + 2\lambda - 1\sigma$$

$$x_3 = 2 + 2\lambda - 1\sigma$$

$$1(-2 + 1\lambda + 0\sigma) + 1(-4 + 2\lambda - 1\sigma) + 0(2 + 2\lambda - 2\sigma) + 0 = 0$$

$$3\lambda - 1\sigma - 6 = 0$$

$$\sigma = \frac{-3\lambda + 6}{-1}$$

$$\sigma = 3\lambda - 6$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (3\lambda - 6) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittgerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Parameterform - Parameterform

Eine Ebene in die Koordinatenform umrechnen. Danach die Lösung mit Parameterform - Koordinatenform berechnen.

Koordinatenform - Koordinatenform

Eine Ebene in die Parameterform umrechnen. Danach die Lösung mit Parameterform - Koordinatenform berechnen.

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

7 Tabellen

7.1 Umrechnungen

Interaktive Umrechnungen

[hier klicken](#)

7.1.1 Zehnerpotenz

Eins	10^0	1	Eins	10^0	1
Zehn	10^1	10	Zehntel	10^{-1}	0, 1
Hundert	10^2	100	Hundertstel	10^{-2}	0, 01
Tausend	10^3	1000	Tausendstel	10^{-3}	0, 001
Zehntausend	10^4	10000	Zehntausendstel	10^{-4}	0, 0001
Hunderttausend	10^5	100000	Hunderttausendstel	10^{-5}	0, 00001
Million	10^6	1000000	Millionstel	10^{-6}	0, 000001
	10^7	10000000		10^{-7}	0, 0000001
	10^8	100000000		10^{-8}	0, 00000001
Milliarde	10^9	1000000000		10^{-9}	0, 000000001
	10^{10}	10000000000		10^{-10}	0, 0000000001
	10^{11}	100000000000		10^{-11}	0, 00000000001
Billion	10^{12}	1000000000000		10^{-12}	0, 000000000001
	10^{13}	10000000000000		10^{-13}	0, 0000000000001
	10^{14}	100000000000000		10^{-14}	0, 00000000000001
Billiarde	10^{15}	1000000000000000		10^{-15}	0, 000000000000001
	10^{16}	10000000000000000		10^{-16}	0, 0000000000000001
	10^{17}	100000000000000000		10^{-17}	0, 00000000000000001
Trillion	10^{18}	1000000000000000000		10^{-18}	0, 000000000000000001
	10^{19}	10000000000000000000		10^{-19}	0, 0000000000000000001
	10^{20}	100000000000000000000		10^{-20}	0, 00000000000000000001
Trilliarde	10^{21}	1000000000000000000000		10^{-21}	0, 000000000000000000001
	10^{22}	10000000000000000000000		10^{-22}	0, 0000000000000000000001
	10^{23}	100000000000000000000000		10^{-23}	0, 00000000000000000000001
Quadrillion	10^{24}	1000000000000000000000000		10^{-24}	0, 000000000000000000000001

7.1.2 Längen

	<i>m</i>	<i>dm</i>	<i>cm</i>	<i>mm</i>	μm	<i>nm</i>	<i>pm</i>	<i>km</i>
<i>m</i>	1	10	100	1000	10^6	10^9	10^{12}	0, 001
<i>dm</i>	0, 1	1	10	100	10^5	10^8	10^{11}	0, 0001
<i>cm</i>	0, 01	0, 1	1	10	10^4	10^7	10^{10}	10^{-5}
<i>mm</i>	0, 001	0, 01	0, 1	1	1000	10^6	10^9	10^{-6}
μm	10^{-6}	10^{-5}	0, 0001	0, 001	1	1000	10^6	10^{-9}
<i>nm</i>	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	0, 001	1	1000	10^{-12}
<i>pm</i>	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-9}	10^{-6}	0, 001	1	10^{-15}
<i>km</i>	1000	10^4	10^5	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	1

<i>m</i>	Meter
<i>dm</i>	Dezimeter
<i>cm</i>	Zentimeter
<i>mm</i>	Millimeter
μm	Mikrometer
<i>nm</i>	Nanometer
<i>pm</i>	Pikometer
<i>km</i>	Kilometer

7.1.3 Flächen

	m^2	dm^2	cm^2	mm^2	a	ha	km^2
m^2	1	100	10^4	10^6	0,01	0,0001	10^{-6}
dm^2	0,01	1	100	10^4	0,0001	10^{-6}	10^{-8}
cm^2	0,0001	0,01	1	100	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}
mm^2	10^{-6}	0,0001	0,01	1	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}
a	100	10^4	10^6	10^8	1	0,01	0,0001
ha	10^4	10^6	10^8	10^{10}	100	1	0,01
km^2	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}	10^4	100	1

m^2	Quadratmeter
dm^2	Quadratdezimeter
cm^2	Quadratzentimeter
mm^2	Quadratmillimeter
a	Ar
ha	Hektar
km^2	Quadratkilometer

7.1.4 Volumen

	m^3	dm^3	cm^3	mm^3	l	hl	ml
m^3	1	1000	10^6	10^9	1000	10	10^6
dm^3	0,001	1	1000	10^6	1	0,01	1000
cm^3	10^{-6}	0,001	1	1000	0,001	10^{-5}	1
mm^3	10^{-9}	10^{-6}	0,001	1	10^{-6}	10^{-8}	0,001
l	0,001	1	1000	10^6	1	0,01	1000
hl	0,1	100	10^5	10^8	100	1	10^5
ml	10^{-6}	0,001	1	1000	0,001	10^{-5}	1

m^3	Kubikmeter
dm^3	Kubikdezimeter
cm^3	Kubikzentimeter
mm^3	Kubikmillimeter
l	Liter
hl	Hektoliter
ml	Milliliter

7.1.5 Zeit

	s	min	h	ms	μs	ns	ps
s	1	0,01667	0,0002778	1000	10^6	10^9	10^{12}
min	60	1	0,01667	$6 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^7$	$6 \cdot 10^{10}$	$6 \cdot 10^{13}$
h	3600	60	1	$3,6 \cdot 10^6$	$3,6 \cdot 10^9$	$3,6 \cdot 10^{12}$	$3,6 \cdot 10^{15}$
ms	0,001	$1,667 \cdot 10^{-5}$	$2,778 \cdot 10^{-7}$	1	1000	10^6	10^9
μs	10^{-6}	$1,667 \cdot 10^{-8}$	$2,778 \cdot 10^{-10}$	0,001	1	1000	10^6
ns	10^{-9}	$1,667 \cdot 10^{-11}$	$2,778 \cdot 10^{-13}$	10^{-6}	0,001	1	1000
ps	10^{-12}	$1,667 \cdot 10^{-14}$	$2,778 \cdot 10^{-16}$	10^{-9}	10^{-6}	0,001	1

s	Sekunden
min	Minuten
h	Stunden
ms	Millisekunden
μs	Mikrosekunden
ns	Nanosekunden
ps	Pikosekunden

7.1.6 Winkel

	°	'	''	gon	rad	mrad
°	1	60	3600	1,111	0,01745	$1,745 \cdot 10^{-5}$
'	0,01667	1	60	0,01852	0,0002909	$2,909 \cdot 10^{-7}$
''	0,0002778	0,01667	1	0,0003086	$4,848 \cdot 10^{-6}$	$4,848 \cdot 10^{-9}$
gon	0,9	54	3240	1	0,01571	$1,571 \cdot 10^{-5}$
rad	57,3	3438	$2,063 \cdot 10^5$	63,66	1	0,001
mrad	$5,73 \cdot 10^4$	$3,438 \cdot 10^6$	$2,063 \cdot 10^8$	$6,366 \cdot 10^4$	1000	1
°	Grad (360°)					
'	Winkelminute					
''	Winkelsekunde					
gon	Neugrad					
rad	Radian (Bogenmaß)					
mrad	Milliradian					

7.1.7 Dezimale Einheiten

<i>B</i>		<i>d</i>	<i>c</i>	<i>m</i>	μ	<i>n</i>	<i>p</i>	<i>f</i>	<i>a</i>	<i>da</i>	<i>h</i>	<i>k</i>	<i>M</i>	<i>G</i>	<i>T</i>	<i>P</i>	<i>E</i>
<i>B</i>	1	10	100	1000	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	0,1	0,01	0,001	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}
<i>d</i>	0,1	1	10	100	10^5	10^8	10^{11}	10^{14}	10^{17}	0,01	0,001	0,0001	10^{-7}	10^{-10}	10^{-13}	10^{-16}	10^{-19}
<i>c</i>	0,01	0,1	1	10	10^4	10^7	10^{10}	10^{13}	10^{16}	0,001	0,0001	10^{-5}	10^{-8}	10^{-11}	10^{-14}	10^{-17}	10^{-20}
<i>m</i>	0,001	0,01	0,1	1	1000	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	0,0001	10^{-5}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}
μ	10^{-6}	10^{-5}	0,0001	0,001	1	1000	10^6	10^9	10^{12}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}
<i>n</i>	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	0,001	1	1000	10^6	10^9	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}	10^{-27}
<i>p</i>	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-9}	10^{-6}	0,001	1	1000	10^6	10^{-13}	10^{-14}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}	10^{-27}	10^{-30}
<i>f</i>	10^{-15}	10^{-14}	10^{-13}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	0,001	1	1000	10^{-16}	10^{-17}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}	10^{-27}	10^{-30}	10^{-33}
<i>a</i>	10^{-18}	10^{-17}	10^{-16}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	0,001	1	10^{-19}	10^{-20}	10^{-21}	10^{-24}	10^{-27}	10^{-30}	10^{-33}	10^{-36}
<i>da</i>	10	100	1000	10^4	10^7	10^{10}	10^{13}	10^{16}	10^{19}	1	0,1	0,01	10^{-5}	10^{-8}	10^{-11}	10^{-14}	10^{-17}
<i>h</i>	100	1000	10^4	10^5	10^8	10^{11}	10^{14}	10^{17}	10^{20}	10	1	0,1	0,0001	10^{-7}	10^{-10}	10^{-13}	10^{-16}
<i>k</i>	1000	10^4	10^5	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	100	10	1	0,001	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}
<i>M</i>	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	10^5	10^4	1000	1	0,001	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
<i>G</i>	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	10^{27}	10^8	10^7	10^6	1000	1	0,001	10^{-6}	10^{-9}
<i>T</i>	10^{12}	10^{13}	10^{14}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	10^{27}	10^{30}	10^{11}	10^{10}	10^9	10^6	1000	1	0,001	10^{-6}
<i>P</i>	10^{15}	10^{16}	10^{17}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	10^{27}	10^{30}	10^{33}	10^{14}	10^{13}	10^{12}	10^9	10^6	1000	1	0,001
<i>E</i>	10^{18}	10^{19}	10^{20}	10^{21}	10^{24}	10^{27}	10^{30}	10^{33}	10^{36}	10^{17}	10^{16}	10^{15}	10^{12}	10^9	10^6	1000	1
<i>B</i>	Bezugsgröße																
<i>d</i>	Dezi																
<i>c</i>	Zenti																
<i>m</i>	Milli																
μ	Mikro																
<i>n</i>	Nano																
<i>p</i>	Pico																
<i>f</i>	Femto																
<i>a</i>	Atto																
<i>da</i>	Deka																
<i>h</i>	Hekto																
<i>k</i>	Kilo																
<i>M</i>	Mega																
<i>G</i>	Giga																
<i>T</i>	Tera																
<i>P</i>	Peta																
<i>E</i>	Exa																

7.2 Griechisches Alphabet

<i>A</i>	α	Alpha	<i>N</i>	ν	Nü
<i>B</i>	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	<i>O</i>	<i>o</i>	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π ϖ	Pi
<i>E</i>	ϵ ε	Epsilon	<i>P</i>	ρ ϱ	Rho
<i>Z</i>	ζ	Zeta	Σ	σ ς	Sigma
<i>H</i>	η	Eta	<i>T</i>	τ	Tau
<i>T</i>	θ ϑ	Theta	<i>Y</i>	υ	Ypsilon
<i>I</i>	ι	Iota	Φ	ϕ φ	Phi
<i>K</i>	κ \varkappa	Kappa	<i>X</i>	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
<i>M</i>	μ	Mü	Ω	ω	Omega