



# **Intelligente Systeme**

## **- Logik -**

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg  
Department Informatik

Dr.-Ing. Sabine Schumann



## Beispiele:

- Der Mond ist ein großer gelber Käse.
- Bonn war die Hauptstadt von Deutschland.
- Bonn ist die Hauptstadt von Deutschland.
- Es gibt außerirdisches Leben im Universum.
- Wenn der Mond ein großer gelber Käse ist, dann wird er von Mäusen bewohnt.



## Übung: Aussage oder keine Aussage?

- In diesem Sommer hat es überdurchschnittlich viel geregnet. ☒
- Ob der nächste Sommer wieder so wird? ☐
- Das hoffe ich nicht. ☒
- Die Blume. ☐
- Geh Blumen pflücken! ☐
- Wenn ich mich beeile, dann erreiche ich den 9 Uhr Bus. ☒



Wandeln Sie folgende Aussagen in aussagenlogische Formeln um!

H=Herbstbeginn, D= dunkler werden, L=Lichtanschalten

Der Herbst hat begonnen und es wird dunkler.

$$H \wedge D$$

Herbst hat begonnen, aber es wird nicht dunkler.

$$H \wedge \neg D$$

Zu Herbstbeginn wird es dunkler.

$$H \Rightarrow D$$

Wir müssen das Licht anschalten, es sei denn, es wird nicht dunkler.

entweder Lichtanschalten oder nicht dunkler: L XOR  $\neg D$  entspricht ((Lichtanschalten oder nicht dunkler) und nicht (Lichtanschalten und nicht dunkler)):

$$(L \vee \neg D) \wedge \neg (L \wedge \neg D)$$

Licht anschalten äquivalent dunkler:

$$L \Leftrightarrow D$$

nicht dunkler impliziert NICHT Lichtanschalten UND dunkler

impliziert Lichtanschalten:

$$\neg D \Rightarrow \neg L \wedge D \Rightarrow L$$



### Implikation

Prüfen Sie, wann die logische Implikation  $A \Rightarrow B$  wahr ist.

A wahr und B wahr oder A falsch und B egal

Untersuchen Sie dazu eine Alltagsaussage wie

“Wenn ich Geburtstag habe, dann mache ich eine Fete”

und prüfen Sie für die 4 Fälle (a und b jeweils wahr oder falsch), wann wir sagen würden, dass die Aussage erfüllt bzw. wann sie verletzt ist.

Geburtstag wahr, Fete wahr

verletzt: Geburtstag und keine Fete

Kein Geburtstag, Fete kann stattfinden oder nicht.



Sind folgende Formeln

wahr / erfüllbar / falsifizierbar / falsch ?

- |   |                           |
|---|---------------------------|
| (1) $A \Rightarrow B$                                 | erfüllbar, falsifizierbar |
| (2) $A \Rightarrow \neg A$                            | erfüllbar, falsifizierbar |
| (3) $A \Rightarrow A$                                 | wahr, erfüllbar           |
| (4) $\neg A \Rightarrow A$                            | erfüllbar, falsifizierbar |
| (5) $(A \wedge \neg A) \Rightarrow B$                 | wahr, erfüllbar           |
| (6) $(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow \neg B)$   | wahr, erfüllbar           |
| (7) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)$ | erfüllbar, falsifizierbar |



1.  $(A \vee \neg B) \wedge (C \vee D)$

A	B	C	D	$A \vee \neg B$	$C \vee D$	$(A \vee \neg B) \wedge (C \vee D)$
W	W	W	W	W	W	W
W	W	W	F	W	W	W
W	W	F	W	W	W	W
W	W	F	F	W	F	F
W	F	W	W	W	W	W
W	F	W	F	W	W	W
W	F	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	W	F	W	F
F	W	W	F	F	W	F
F	W	F	W	F	W	F
F	W	F	F	F	F	F
F	F	W	W	W	W	W
F	F	W	F	W	W	W
F	F	F	W	W	W	W
F	F	F	F	W	F	F



2.  $(A \vee \neg A) \Rightarrow (C \vee \neg C)$

A	C	$A \vee \neg A$	$C \vee \neg C$	$(A \vee \neg A) \Rightarrow (C \vee \neg C)$
W	W	W	W	W
W	F	W	W	W
F	W	W	W	W
F	F	W	W	W

3.  $((A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	$((A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F	W
W	F	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	W	F	F
F	W	W	W	W	W	W	W
F	W	F	W	F	F	W	W
F	F	W	W	W	W	W	W
F	F	F	W	W	W	W	W



$$5.1 (A \vee B) \models (\neg A \Rightarrow B)$$

A	B	$A \vee B$	$\neg A \Rightarrow B$
W	W	W	W
W	F	W	W
F	W	W	W
F	F	F	F

$$5.2 ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \equiv (A \Rightarrow C)$$

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$
W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F
W	F	W	F	W	F	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	W	W	W	W
F	W	F	W	F	F	W
F	F	W	W	W	W	W
F	F	F	W	W	W	W





Arthur, Bernard, Charles

A Arthur ist Ritter  $\neg$ A Arthur ist Schurke

(analog für Bernard B und Charles C)

- Abercrombie fragte zunächst Arthur: „Sind Bernard und Charles beide Ritter?“ Arthur antwortete: „Ja!“
  - Wenn A dann B und C,
  - wenn  $\neg$ A dann  $\neg$ (B und C),
- Abercrombie fragte dann: „Ist Bernard ein Ritter?“  
Zu seiner großen Überraschung antwortete Arthur nun mit „Nein“.
  - wenn A dann  $\neg$ B,
  - wenn  $\neg$ A dann  $\neg$  ( $\neg$  B).

Alle 4 Aussagen müssen WAHR sein, d.h. die Interpretation(en) finden, unter der (denen) die 4 Aussagen wahr sind.



A	B	C	$B \wedge C$	$A \Rightarrow (B \wedge C)$	$A \Rightarrow \neg B$	$\neg A \Rightarrow \neg (B \wedge C)$	$\neg A \Rightarrow \neg (\neg B)$
W	W	W	W	W	F	W	W
W	W	F	F	F	F	W	W
W	F	W	F	F	W	W	W
W	F	F	F	F	W	W	W
F	W	W	W	W	W	F	W
F	W	F	F	W	W	W	W
F	F	W	F	W	W	W	F
F	F	F	F	W	W	W	F



Vereinfachen Sie

$$\neg((A \vee \neg(B \wedge A)) \wedge (C \vee (D \vee C)))$$

$$\neg((A \vee \neg(B \wedge A)) \wedge (C \vee (D \vee C)))$$

$$\neg(A \vee \neg(B \wedge A)) \vee \neg(C \vee (D \vee C))$$

$$(\neg A \wedge B \wedge A) \vee (\neg C \wedge \neg(D \vee C))$$

$$\text{falsch} \vee (\neg C \wedge \neg D \wedge \neg C)$$

$$\text{falsch} \vee (\neg C \wedge \neg D)$$

$$\neg C \wedge \neg D$$

$$\neg((A \vee \neg B \vee \neg A) \wedge (C \vee D \vee C))$$

$$\neg((\text{wahr} \vee \neg B) \wedge (C \vee D))$$

$$\neg(\text{wahr}) \vee \neg(C \vee D)$$

$$\text{falsch} \vee (\neg C \wedge \neg D)$$

$$\neg C \wedge \neg D$$



Überführen Sie die folgende Formel in KNF!

$$\neg A \Leftrightarrow (B \wedge C)$$

$$(\neg A \Rightarrow (B \wedge C)) \quad \wedge \quad ((B \wedge C) \Rightarrow \neg A)$$

$$(\neg(\neg A) \vee (B \wedge C)) \quad \wedge \quad (\neg(B \wedge C) \vee \neg A)$$

$$(\neg(\neg A) \vee (B \wedge C)) \quad \wedge \quad ((\neg B \vee \neg C) \vee \neg A)$$

$$(A \vee (B \wedge C)) \quad \wedge \quad ((\neg B \vee \neg C) \vee \neg A)$$

$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad \wedge \quad (\neg B \vee \neg C \vee \neg A)$$



Bilden Sie alle Resolventen aus

$\{A, B, \neg C\}$ ,  $\{\neg A\}$ ,  $\{\neg C\}$  und  $\{\neg A, \neg B\}$ .

Dabei ist mit alle gemeint, auch die Resolventen wieder zur Resolution zu verwenden.

(1)  $\{A, B, \neg C\}$

(2)  $\{\neg A\}$

(3)  $\{\neg C\}$

(4)  $\{\neg A, \neg B\}$

(5) (1+2)  $\{B, \neg C\}$

(6) (5+4)  $\{\neg A, \neg C\}$

(7) (1+4)  $\{B, \neg B, \neg C\} \equiv \text{wahr}$

(8) (1+4)  $\{A, \neg A, \neg C\} \equiv \text{wahr}$

(9) (7+4)  $\{\neg A, \neg B, \neg C\}$



Variable A bedeutet: A war der Täter analog für B sowie C.

1.  $A \wedge \neg B \Rightarrow C$  als Klausel:  $\neg A \vee B \vee C$

2.  $C \Rightarrow A \vee B$  als Klausel:  $\neg C \vee A \vee B$

(alternativ:  $(C \wedge A) \vee (C \wedge B) \vee \neg C$  (zusätzlich  $(C \wedge A \wedge B)$  nicht notwendig, da bspw.  $(C \wedge A) \equiv (C \wedge A \wedge B) \vee (C \wedge A \wedge \neg B)$  )

3.  $\neg(A \wedge C)$  als Klausel:  $\neg A \vee \neg C$

4.  $A \vee B \vee C$

5. Vermutung negiert hinzufügen:  $\neg B$

6. (1) + (5)  $\neg A \vee C$

7. (4) + (5)  $A \vee C$

8. (6) + (7)  $C$

9. (2) + (3)  $\neg C \vee B$

10. (8) + (9)  $B$

11. (5) + (10) leere Klausel - Widerspruch



**?** Formulieren Sie nachfolgende natürlichsprachliche Sätze mittels prädikatenlogischer Ausdrücke.

1. Alle Menschen sind sterblich.

$\forall X \text{ mensch}(X) \Rightarrow \text{sterblich}(X)$

2. Sokrates ist ein Mensch.

$\text{mensch}(\text{sokrates})$

3. Nicht alle Säugetiere sind lebendgebärend.

$\neg \forall X \text{ säugetier}(X) \Rightarrow \text{lebendgebärend}(X)$

Oder

$\exists X \neg (\text{säugetier}(X) \Rightarrow \text{lebendgebärend}(X))$

$\exists X \text{ säugetier}(X) \wedge \neg \text{lebendgebärend}(X)$

? Formulieren Sie nachfolgende natürlichsprachliche Sätze mittels prädikatenlogischer Ausdrücke.

4. Paul liebt Paula.

$\text{lieben}(\text{paul}, \text{paula})$

5. Alle lieben Paula.

$\forall X \text{ lieben}(X, \text{paula})$

6. Jemand liebt Paula.

$\exists X \text{ lieben}(X, \text{paula})$

7. Niemand liebt Paula.

$\forall X \neg \text{lieben}(X, \text{paula})$

Oder

$\neg \exists X \text{ lieben}(X, \text{paula})$







**?** Formulieren Sie nachfolgende natürlichsprachliche Sätze mittels prädikatenlogischer Ausdrücke.

8. Manchmal ist Paul einsam.

$\exists Z \text{ zeitraum}(Z) \wedge \text{einsam}(\text{paul}, Z)$

9. Elefanten haben vor Mäusen Angst.

$\forall E, M \text{ elefant}(E) \wedge \text{maus}(M) \Rightarrow \text{angst}(E, M)$

oder

$\forall E \forall M \text{ elefant}(E) \wedge \text{maus}(M) \Rightarrow \text{angst}(E, M)$

10. Auf jeden Topf passt ein Deckel.

$\forall T \text{ topf}(T) \Rightarrow \exists D \text{ deckel}(D) \wedge \text{passt}(T, D)$



Übung:

Welche Unifikationen haben folgende Literale?

- $p(X, f(Y), a)$  und  $p(Z, f(g(S)), a)$

$\{Z/X, g(S)/Y\}$

- $p(X, f(Y), a)$  und  $p(h(k), f(k), T)$

$\{h(k)/X, k/Y, a/T\}$



Finden Sie für die folgenden Ausdrücke den allgemeinsten Unifikator:

$$1. \quad q(f(g(X))) \quad q(f(g(h(Y)))) \\ \{h(Y)/X\}$$

$$2. \quad q(f(g(X))) \quad q(f(g(h(X)))) \\ \{h(X)/X\} \quad \text{Geht nicht wegen Occur Check!!}$$

$$3. \quad q(a, b) \quad q(b, a) \\ \text{Geht nicht, unterschiedliche Konstanten.}$$

$$4. \quad q(a, b) \quad p(a, b) \\ \text{Geht nicht, unterschiedliche Prädikate.}$$



**?** Finden Sie für die folgenden Ausdrücke den allgemeinsten Unifikator:

5. `verheiratet(henryVIII, mutter(marie))`  
`verheiratet(Mann, mutter(X))`  
`{henryVIII/Mann, marie/X}`

6. `verheiratet(henryVIII, mutter(marie))`  
`verheiratet(Mann, catherinedearagon)`

**Geht nicht, Funktion und Konstante lassen sich nicht gleich machen.**