

## Aufgaben unbestimmte Integrale (Aufgabensammlung FTN UNI Novi Sad, Architektur)

**Aufgabe 47. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale**

a)  $f(x) = 5x^4$

\*c)  $f(x) = 3 \cos x$

\*b)  $f(x) = \sqrt{x^3}$

\*d)  $f(x) = \frac{-5}{x}$

Lösungen:

a)

$$= x^5 + c$$

b)

$$= \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + c$$

c)

$$3 \sin x + c$$

d)

$$= -5 \ln x + c$$

**Aufgabe 49. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale**

a)  $\int \sqrt{x \sqrt{x} \sqrt{x}} dx$

b)  $\int \left( x + 2 - 2^{x+1} + \frac{2}{4+x^2} - \frac{3}{2x} \right) dx$

c)  $\int (2+x^2)^3 dx$

\*d)  $\int \left( \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x^2-3}} + 3 \sin x - e^x + 4 \right) dx$

\*e)  $\int (x + \sqrt{x})^3 dx$

\*f)  $\int \left( \frac{1}{\sqrt{x^2-5}} + \frac{\pi}{\cos^2 x} + \sqrt[3]{x} \right) dx$

\*g)  $\int \left( \frac{1}{\sqrt{x^2-3}} + \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} \right) dx =$

\*h)  $\int \left( \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \right) dx$

Lösungen:

a)

$$= \frac{x^{\frac{15}{8}}}{\frac{15}{8}} + c = \frac{8}{15} x \sqrt[8]{x^7} + c$$

b)

$$= \frac{x^2}{2} + 2x - 2 \frac{2^x}{\ln 2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \ln |x| + c$$

c)

$$= 8x + 4x^3 + \frac{6}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + c$$

d)  $4\sqrt{x} - 3 \ln |x + \sqrt{x^2 - 3}| - 3 \cos x - e^x + 4x + c$

e)  $\frac{1}{4}x^4 + \frac{6}{7}x^3\sqrt{x} + x^3 + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + c$

f)  $\ln |x + \sqrt{x^2 - 5}| + \pi \operatorname{tg} x + \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + c$

g)  $\ln |x + \sqrt{x^2 - 3}| + \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + c$

h)  $\ln |x + \sqrt{x^2 - 9}| + \arcsin \frac{x}{3} + c$

**Aufgabe 50. Finden Sie folgende unbestimmte Integrale**

a)  $\int (2 - 3x)^9 dx$

\*e)  $\int \frac{(2x + 3)dx}{x^2 + 3x - 10}$

b)  $\int \cos^2 x dx$

\*f)  $\int \frac{dx}{2x^2 + 3}$

c)  $\int \frac{x dx}{(x^2 - 2)^5}$

\*g)  $\int x\sqrt[3]{x-2} dx$

d)  $\int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}$

\*h)  $\int (2 + x^2)^3 x dx$

Lösungen:

a)

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{t^{10}}{10} + c = -\frac{1}{30}(2 - 3x)^{10} + c$$

b)

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) + c$$

c)

$$\int \frac{x dx}{(x^2 - 2)^5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{(x^2 - 2)^5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^5}$$

d)

$$= \ln |\ln \ln x| + c$$

e)  $\ln |x + 5| + \ln |x - 2| + c$

f)  $\frac{\sqrt{6}}{6} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6} x}{3} + c$

g)  $\left( \frac{3}{7} x^2 - \frac{3}{14} x - \frac{9}{7} \right) \sqrt[3]{x - 2} + c$

h)  $\frac{1}{8} (2 + x^2)^4 + c$

**Aufgabe 51. Finden Sie folgende unbestimmte Integrale**

a)  $\int \ln x dx$

b)  $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

c)  $\int \frac{\ln x dx}{x^3}$

d)  $\int (x^2 + 2x) \sin x dx$

e)  $\int e^{3x} \sin(2x) dx$

\*f)  $\int \sin \ln x dx$

\*g)  $\int e^{2x} \sin x dx$

\*h)  $\int (2x + 3) \cos(2x) dx$

Lösungen:

a)

$$= x \ln x - x + c$$

b)

$$= x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + c, \text{ za } x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

c)

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c$$

d)

$$= -(x^2 + 2x) \cos x + (2x + 2) \sin x + 2 \cos x + c$$

e)

$$= -\frac{2}{13} e^{3x} \cos(2x) + \frac{3}{13} e^{3x} \sin(2x) + c$$

f)  $\frac{1}{2} x (\sin \ln x - \cos \ln x) + c$

g)  $e^{2x} \left( \frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x \right) + c$

h)  $\left( x + \frac{3}{2} \right) \sin(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + c$

**Aufgabe 52. Finden Sie folgende unbestimmte Integrale**

a)  $\int \frac{x^2 - 7}{x^2 - 5x + 6} dx$

e)  $\int \frac{x^3 - 16}{x(x-2)^3} dx$

b)  $\int \frac{x^4}{x^2 + 3} dx$

f)  $\int \frac{1 - x^2}{x(1 + x^2)} dx$

d)  $\int \frac{4x - 14}{(x-1)^2((x+2)^2 + 1)} dx$

\*g)  $\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx$

Lösungen:

a)

$$= x + 3 \ln |x - 2| + 2 \ln |x - 3| + c$$

b)

$$= \frac{x^3}{3} - 3x + \frac{9}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + c$$

d)

$$= \ln |x - 1| + \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4x + 5) - 2 \operatorname{arctg}(x + 2) + c$$

e)

$$= \ln x^2 - \ln |x - 2| - \frac{8}{x - 2} + \frac{2}{(x - 2)^2} + c$$

f)

$$= \ln |x| - \ln(1 + x^2) + c$$

g)

$$= -\frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{x - 1} + 2 \ln |x - 1| - \ln |x| + c$$

**Aufgabe 53. Finden Sie folgende unbestimmte Integrale**

a)  $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2 + 2x + 1}}$

\*c)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x - 3x^2}}$

b)  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 12x + 3}}$

\*d)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}$

Lösungen:

a)

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin \frac{3x - 1}{2} + c$$

b)

$$= \frac{1}{2} \ln \left| x - \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 - 3x + \frac{3}{4}} \right| + c$$

$$c) \frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin \frac{6x+1}{\sqrt{13}} + c$$

$$d) \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| x - \frac{3}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}} \right| + c$$

**Aufgabe 54. Finden Sie folgende unbestimmte Integrale**

$$a) \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x-3x^2}} dx$$

$$*c) \int \frac{2x+5}{\sqrt{1-x-3x^2}} dx$$

$$b) \int \frac{x+2}{\sqrt{4x^2-12x+3}} dx$$

$$*d) \int \frac{x+1}{\sqrt{2x^2-3x+1}} dx$$

Lösungen:

a)

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin \frac{6x+1}{\sqrt{13}} + c_1$$

b)

$$= \frac{1}{4} \sqrt{4x^2-12x+3} + \frac{7}{4} \ln \left| x - \frac{3}{2} + \sqrt{x^2-3x+\frac{3}{4}} \right| + c$$

$$c) -\frac{2}{3} \sqrt{1-x-3x^2} + \frac{14}{9} \sqrt{3} \arcsin \frac{6x+1}{\sqrt{13}} + c$$

$$d) \frac{1}{2} \sqrt{2x^2-3x+1} + \frac{7}{8} \sqrt{2} \ln \left| x - \frac{3}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}} \right| + c$$

**Aufgabe 57. Finden Sie folgende unbestimmte Integrale**

$$\text{a) } \int \cos^3 x dx$$

$$\text{f) } \int (1 - \cos x)^3 dx$$

$$\text{b) } \int \cos^7 x \sin^2 x dx$$

$$^*\text{g) } \int \sin^2 x \cos^4 x dx$$

$$\text{c) } \int \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$$

$$^*\text{h) } \int \sin^3 x \sqrt{1 - 2 \cos x} dx$$

$$\text{d) } \int \sin^4 x \cos^2 x dx$$

$$^*\text{i) } \int \sin^3 x \cos^4 x dx$$

$$\text{e) } \int (1 - \cos x)^{\frac{3}{2}} dx$$

Lösungen:

a)

$$= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + c$$

b)

$$= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{3}{5} \sin^5 x + \frac{3}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c$$

c)

$$= -\frac{\cos x}{2} \sqrt{1 + \cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln \left| \cos x + \sqrt{\cos^2 x + 1} \right| + c$$

d)

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin(2x) - \frac{1}{64} \sin(4x) + \frac{1}{192} \cos(6x) + c$$

e)

$$= 4\sqrt{2} \left( \frac{1}{3} \cos^3 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) + c$$

f)

$$= x - 3 \sin x + \frac{3}{2} x + \frac{3}{4} \sin(2x) + \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x + c$$

- g)  $\frac{x}{16} + \frac{1}{64} \sin(2x) - \frac{1}{64} \sin(4x) - \frac{1}{192} \sin(6x) + c$
- h)  $\left( \frac{2}{7} \cos^3 x + \frac{1}{35} \cos^2 x - \frac{24}{35} \cos x + \frac{11}{35} \right) \sqrt{1 - 2 \cos x} + c$
- i)  $-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + c$

**Aufgabe 58. Finden Sie folgende unbestimmte Integrale**

- a)  $\int \frac{dx}{\cos x}$
- b)  $\int \frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} dx$
- c)  $\int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}$
- \*d)  $\int \frac{dx}{\sin x}$
- \*e)  $\int \frac{dx}{2 + \sin x}$
- \*f)  $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$

Lösungen:

- a)
- $$= \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \ln \left| 1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c$$
- b)
- $$= -2 \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + \ln \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) + c$$
- c)
- $$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + c$$
- d)  $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c$
- e)  $\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + c$
- f)  $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c$



## Aufgaben Integralrechnung (Aufgabensammlung PMF UNI Novi Sad)

**Aufgabe 100.** Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int (4x^3 - 3x^2 + 2x - 3)dx; & \text{b)} \int (2t + 1)^2 dt; \\ \text{c)} \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3}x - 3\sqrt{x}\right)dx & \text{d)} \int (1+x)(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2})dx; \\ \text{e)} \int \frac{x^4 - 3x^3 + 2x + 1}{x^3}dx; & \text{f)} \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx. \end{array}$$

Lösungen:

a)

$$= x^4 - x^3 + x^2 - 3x + C.$$

b)

$$= \frac{4t^3}{3} + 2t^2 + t + C.$$

c)

$$= 2x^{1/2} + \frac{x^2}{6} - 2x^{3/2} + C.$$

d)

$$= \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{3x^{5/3}}{5} + \frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{3x^{8/3}}{8} + C.$$

e)

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{-2}{x} + \frac{-1}{2x^2} + C.$$

f)

$$= \frac{2x^{5/2}}{5} - 4\frac{x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} + C.$$

**Aufgabe 101.** Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int (x^3 + 3)^2 3x^2 dx; & \text{b)} \int x^2 \sqrt[3]{x^3 + 3} dx; \\ \text{c)} \int \frac{5x^2}{(x^3 + 3)^3} dx; & \text{d)} \int \frac{2x^2}{\sqrt[5]{x^3 + 3}} dx. \end{array}$$

*Handwritten notes for c):*  $dt = 3x^2 dx$ ,  $t = x^3 + 3$

Lösungen:

a)

$$\frac{(x^3 + 3)^3}{3} + C.$$

b)

$$= \frac{(x^3 + 3)^{4/3}}{4} + C.$$

c)

$$= \frac{-5}{6}(x^3 + 3)^{-2} + C.$$

d)

$$\frac{5}{6}(x^3 + 3)^{4/5} + C.$$

**Aufgabe 102. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale**

a)  $\int \frac{-6x dx}{\sqrt{1 - 3x^2}};$

b)  $\int \frac{(x + 2) dx}{(x^2 + 4x)^2};$

c)  $\int \frac{(x + 1) dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 4}};$

d)  $\int y^3 \sqrt[4]{1 + y^4} dy;$

e)  $\int \sqrt{x^2 - 3x^4} dx;$   
 $\times \sqrt{1 - 3x^2}$

f)  $\int \frac{(2 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx.$

Lösungen:

a)

$$= 2\sqrt{1 - 3x^2} + C.$$

b)

$$= \frac{-1}{2(x^2 + 4x)} + C.$$

c)

$$= \sqrt{x^2 + 2x - 4} + C.$$

d)

$$= \frac{1}{5}(1 + y^4)^{5/4} + C.$$

e)

$$= \frac{-1}{9}(1 - 3x^2)^{3/2} + C.$$

f)

$$= \frac{1}{2}(2 + \sqrt{x})^4 + C.$$

**Aufgabe 103. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale**

a)  $\int \frac{dx}{3x - 2};$

b)  $\int \frac{x}{1 - x^2} dx;$

c)  $\int \frac{x^3}{3 + 2x^4} dx;$

d)  $\int \frac{x - 1}{x + 1} dx;$

e)  $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{x + 2} dx;$

f)  $\int \frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 + 3} dx.$

Lösungen:

a)

$$= \frac{1}{3} \ln |3x - 2| + C.$$

b)

$$= -\frac{1}{2} \ln |1 - x^2| + C.$$

c)

$$= \frac{1}{8} \ln |3 + 2x^4| + C.$$

d)

$$= x - 2 \ln |x + 1| + C.$$

e)

$$= \frac{x^3}{3} + 3 \ln |x + 2| + C.$$

f)

$$= \ln |x^3 + 2x^2 + 3| + C.$$

**Aufgabe 104. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale**

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int (e^{-x} + 1) dx; & \text{b)} \int e^{2x} dx; & \text{c)} \int a^{3x} dx, \quad a \neq 0, \quad a \neq 1; \\ \text{d)} \int \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx; & \text{e)} \int e^x \sqrt{e^x + 1} dx; & \text{f)} \int \frac{dx}{e^x + 1}. \end{array}$$

Lösungen:

a)

$$= -e^{-x} + x + C.$$

b)

$$= \frac{e^{2x}}{2} + C.$$

c)

$$= \frac{1}{3 \ln a} a^{3x} + C.$$

d)

$$= e^{-1/x} + C.$$

e)

$$= 2 \frac{(e^x + 1)^{3/2}}{3} + C.$$

f)

$$= -\ln(1 + e^{-x}) + C.$$

**Aufgabe 105. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale**

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int (\sin 2x + \cos 3x) dx; & \text{b)} \int \sin^3 x \cos x dx; \\ \text{c)} \int \operatorname{tg} x dx; & \text{d)} \int x^2 \operatorname{ctg} x^3 dx; \\ \text{e)} \int e^x \cos e^x dx; & \text{f)} \int e^{2 \sin 3x} \cos 3x dx; \\ \text{g)} \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x} dx; & \text{h)} \int \frac{dx}{1 - \cos x} dx; \end{array}$$

Lösungen:

a)

$$= -\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + C.$$

b)

$$= \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

c)

$$= -\ln |\cos x| + C.$$

d)

$$= \frac{1}{3} \ln |\sin(x^3)| + C.$$

e)

$$= \sin e^x + C.$$

f)

$$= \frac{1}{6} e^{2 \sin 3x} + C.$$

g)

$$x + \ln |\sin x| + C.$$

h)

$$= -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x} + C.$$

**Aufgabe 106. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale**

a)  $\int \left( \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{1}{4+9x^2} \right) dx;$

b)  $\int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}};$

c)  $\int \frac{x dx}{x^4+1};$

d)  $\int \frac{(2-x) dx}{\sqrt{4x-x^2}};$

e)  $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$

f)  $\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + 1} dx.$

Lösungen:

a)

$$= \arcsin \frac{x}{3} + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \left( \frac{3x}{2} \right) + C.$$

b)

$$= \arcsin x^3 + C.$$

c)

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C.$$

d)

$$= \sqrt{4x - x^2} + C.$$

e)

$$= \operatorname{arctg} e^x + C.$$

f)

$$= x^2 - 3x + 3 \operatorname{arctg} x + C.$$

**Aufgabe 107. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale**

$$a) \int \frac{dx}{x^2 + 10x + 31};$$

$$b) \int \frac{dx}{25 - 8x + x^2};$$

$$c) \int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 5};$$

$$d) \int \frac{(2x - 2)dx}{x^2 + 6x + 13};$$

$$e) \int \frac{(x + 3)dx}{\sqrt{27 + 6x - x^2}}$$

$$f) \int \frac{(x - 4)dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}.$$

Lösungen:

a)

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x + 5}{\sqrt{6}} + C.$$

b)

$$= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x - 4}{3} + C.$$

c)

$$= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{3} + C.$$

d)

$$= \ln(x^2 + 6x + 13) - 4 \operatorname{arctg} \frac{x + 3}{2} + C.$$

e)

$$= -\sqrt{27 + 6x - x^2} + 6 \arcsin\left(\frac{x - 3}{6}\right) + C..$$

f)

$$= -\sqrt{5-4x-x^2} - 6 \arcsin \frac{x+2}{3} + C.$$

**Aufgabe 108. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale**

a)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+10x+31}};$

b)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x-9}};$

c)  $\int \frac{(2x-2)dx}{\sqrt{x^2+6x+13}};$

d)  $\int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{x^2-27+6x}}.$

Lösungen:

a)

$$= \ln |x+5 + \sqrt{(x+5)^2+6}| + C.$$

b)

$$= \ln |x-4 + \sqrt{x^2-8x-9}| + C$$

c)

$$= 2\sqrt{(x+3)^2+4} - 8 \ln |x+3 + \sqrt{(x+3)^2+4}| + C.$$

d)

$$= \sqrt{x^2+6x-27} + 2 \ln |x+3 + \sqrt{(x+3)^2-36}| + C.$$

**Aufgabe 109. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale (Hinweis: partielle Integration notwendig)**

a)  $\int x e^x dx;$       b)  $\int x e^{-2x} dx;$       c)  $\int x^3 e^{x^2} dx;$

d)  $\int x \sin x dx;$       e)  $\int x^2 \cos x dx;$

f)  $\int \arcsin x dx;$       g)  $\int \arctg 2x dx;$

h)  $\int x \arctg x dx;$       i)  $\int x \arcsin x^2 dx;$

Lösungen:

a)

$$= x e^x - e^x + C.$$

b)

$$= \frac{-1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C.$$

c)

$$= \frac{1}{2} \left( x^3 e^{2x} - \frac{3}{2} x^2 e^{2x} + \frac{3}{2} x e^{2x} - \frac{3}{4} e^{2x} \right) + C.$$

d)

$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

e)

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

f)

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

g)

$$= x \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \ln(1+(2x)^2) + C.$$

h)

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

i)

$$= \frac{x^2}{2} \arcsin x^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^4} + C.$$

**Aufgabe 110. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale (Hinweis: partielle Integration notwendig)**

$$a) \int \ln x \, dx; \quad b) \int x^2 \ln x \, dx; \quad c) \int \ln(x^2 + 1) \, dx;$$

$$d) \int e^x \sin x \, dx; \quad e) \int e^{2x} \cos x \, dx; \quad f) \int e^{ax} \cos bx \, dx, \quad a^2 + b^2 > 0.$$

Lösungen:

a)

$$= x \ln x - x + C.$$



b)

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

c)

$$= x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C.$$

d)

$$2\left(\int e^x \sin x \, dx\right) = e^x \sin x - e^x \cos x, \quad \text{tj.}$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C.$$

e)

$$\frac{5}{4} \int e^{2x} \cos x \, dx = \frac{1}{2} (e^{2x} \cos x + \frac{1}{2} e^{2x} \sin x),$$

$$\int e^{2x} \cos x \, dx = \frac{2}{5} (2e^{2x} \cos x + e^{2x} \sin x).$$

f)

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2} \int e^{ax} \cos(bx) \, dx = e^{ax} \left( \frac{1}{b} \sin bx + \frac{a}{b^2} \cos bx \right),$$

$$\int e^{ax} \cos(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin bx + a \cos bx) + C.$$

**Aufgabe 111. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale (Hinweis: Partialbruchzerlegung wird benötigt)**

a)  $\int \frac{2dx}{x^2 - 1};$

b)  $\int \frac{(x^3 - 2x - 35)dx}{x^2 - 2x - 15};$

c)  $\int \frac{(x+1)dx}{x^3 - 2x^2 + x - 2};$

d)  $\int \frac{(x+3)dx}{x^4 - 5x^2 + 4};$

e)  $\int \frac{(x^2 + 1)dx}{(x-1)^3}$

f)  $\int \frac{(2x^2 - 4x + 3)dx}{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4};$

g)  $\int \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} dx;$

h)  $\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} dx.$

Lösungen:

a)

$$= \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

b)

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + \ln \left| \frac{(x-5)^{10}}{(x+3)^7} \right| + C.$$

c)

$$= \frac{1}{5}(3 \ln |x-2| - \frac{3}{2} \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + C.$$

d)

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{(x+1)(x-2)^{5/4}}{(x-1)^2(x+2)^{1/4}} \right| + C.$$

e)

$$= \ln |x-1| - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C.$$

f)

$$= 2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{4x-7}{x^2-3x+2} + C.$$

g)

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2+4) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2} \ln |2x-1| + C.$$

h)

$$= \frac{5}{2} \ln(x^2+1) - 3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x^2+1}.$$

**Aufgabe 112. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale**

a)  $\int \frac{2dx}{\sqrt{x+1}};$

b)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1};$

c)  $\int \frac{x\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+x};$

d)  $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx;$

e)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+3}+1};$

f)  $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x}-1}.$

Lösungen:

a)

$$= 4\sqrt{x} - 4\ln(\sqrt{x}+1) + C.$$

b)

$$= 2\sqrt{x+1} - 2\ln|\sqrt{x+1}+1| + C.$$

c)

$$= 2\left(\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{3} - 3\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2} + 3(\sqrt{x}+1) - \ln(\sqrt{x}+1)\right) + C.$$

d)

$$= x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 4\ln(\sqrt{x+1}+1) + C.$$

e)

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{(\sqrt[3]{2x+3})^2}{2} - \sqrt[3]{2x+3} + \ln|1 + \sqrt[3]{2x+3}|\right) + C.$$

f)

$$= 6\left(\frac{(\sqrt[6]{x})^7}{7} + \frac{(\sqrt[6]{x})^5}{5} + \frac{(\sqrt[6]{x})^3}{3} + \sqrt[6]{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|\right) + C.$$

**Aufgabe 113. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale**

$$a) \int \sin^2 x \, dx; \quad b) \int \sin^4 2x \, dx; \quad c) \int \sin^3 x \, dx;$$

$$d) \int \cos^5 x \, dx; \quad e) \int \cos^6 \frac{x}{2} \, dx; \quad f) \int \cos^2 x \sin^3 x \, dx;$$

$$g) \int \cos^2 x \sin^2 x \, dx; \quad h) \int \sin 3x \sin 2x \, dx;$$

$$i) \int \sqrt{1 - \cos x} \, dx; \quad j) \int \frac{dx}{\sin x}.$$

Lösungen:

a)

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

b)

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x + C.$$

c)

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

d)

$$= \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

e)

$$= \frac{5}{16}x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{3}{32}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin^3 x + C.$$

f)

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

g)

$$= \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

h)

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x + C.$$

i)

$$= -2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

j)

$$= \ln |\operatorname{tg}(x/2)| + C.$$

**Aufgabe 114. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale**

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}; & \text{b)} \int \frac{dx}{2 + \sin x}; \\ \text{c)} \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}; & \text{d)} \int \frac{\sin x \, dx}{1 + \sin^2 x}. \end{array}$$

**Hinweis: nutzen Sie folgende Substitutionen:**

$$\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \end{array}$$

Lösungen:

a)

$$= \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x/2}{1 + \operatorname{tg} x/2} \right| + C.$$

b)

$$= 2 \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2 \operatorname{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

c)

$$= \ln |\operatorname{tg}(x/2) + 1| + C.$$

d)

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}^2(x/2) + 3 - 2\sqrt{2}}{\operatorname{tg}^2(x/2) + 3 + 2\sqrt{2}} \right| + C$$

**Aufgabe 115. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale**

a)  $\int \frac{x^2 + x + 3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx;$

b)  $\int \frac{x^2 + x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx;$

c)  $\int \sqrt{x^2 + 1} dx;$

d)  $\int \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x^2 + x - 1}} dx;$

e)  $\int \frac{x^3 + 3x}{\sqrt{5 - x^4 - 2x^2}} dx;$

f)  $\int \frac{e^{3x} + e^{2x} + e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx.$

Lösungen (hier auch Erklärung über die Integrale des Typs

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

die eine Lösung in der Form

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

haben.  $P_n(x)$  ist ein Polynom  $n$ -ter,  $Q_{n-1}(x)$  ein Polynom  $n-1$ -ten Grades. Die unbekannten Koeffizienten sowie  $\lambda$  bestimmen durch Differenzieren der Rechten und linken Seite (da ist es einfach nur Weglassen der Integraloperator) und Koeffizientenvergleich.):

a)

$$\int \frac{x^2 + x + 3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \sqrt{x^2 + 1} + \frac{5}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| + C.$$

b)

$$\int \frac{x^2 + x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{13}{8} \ln \left| \left(x + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C.$$

c)

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| + C.$$

d)

$$\int \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x^2 + x - 1}} dx = \left( \frac{1}{3} x^2 - \frac{5}{12} x + \frac{31}{24} \right) \sqrt{x^2 + x - 1} - \frac{1}{16} \ln \left| \left( x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{x^2 + x - 1} \right| + C.$$

e)

$$\int \frac{x^3 + 3x}{\sqrt{5 - x^4 - 2x^2}} dx = \frac{-1}{2} \sqrt{5 - x^4 - 2x^2} + \ln |x^2 + 1 + \sqrt{5 - x^4 - 2x^2}| + C.$$

f)

$$\int \frac{e^{3x} + e^{2x} + e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx = \left( \frac{x}{2} + 1 \right) \sqrt{(e^x)^2 - 1} + \frac{3}{2} \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + C.$$

**Aufgabe 116. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale**

a)  $\int \sqrt{16 - x^2} dx;$       b)  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}};$

c)  $\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx;$       d)  $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2} dx;$

Lösungen:

a)

$$= 8 \arcsin(x/4) + \frac{1}{2} x \sqrt{16 - x^2} + C.$$

b)

$$= -\frac{1}{x \sqrt{x^2 + 9}} + C.$$

c)

$$= \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{1 + x^2} + 1} \right| + C.$$

d)

$$= -\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{x - \sqrt{x^2 - 4}} \right| + C.$$



**Aufgabe 117. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale**

$$a) \int \frac{\sqrt{x} dx}{(1 + \sqrt{x})^2}; \quad b) \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}; \quad c) \int \frac{dx}{x^6 \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Lösungen (zuerst Erklärung der Lösung von Integralen die in der Form

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

gegeben sind):

$$a) \\ = 2(\sqrt{x} - 2 \ln |\sqrt{x} + 1| - \frac{1}{\sqrt{x} + 1}) + C.$$

$$b) \\ = \frac{3}{5}(\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}})^5 - 2(\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}})^3 + 3\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}} + C.$$

$$c) \\ = \frac{(\sqrt{1 - x^{-2}})^5}{5} - 2\frac{(\sqrt{1 - x^{-2}})^3}{3} + \sqrt{1 - x^{-2}} + C.$$

**Aufgabe 119. Berechnen Sie**

$$a) \int_{-1}^4 (8x^3 + 3x^2 + 1) dx; \quad b) \int_{-3}^{-1} (\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + \sqrt{-x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}) dx;$$

$$c) \int_{\sqrt{3}}^3 (2e^{3x} + 3\frac{1}{x^2 + 9} + 1) dx; \quad d) \int_0^{\pi/3} (\sin x + \operatorname{tg} x + 2 \cos \frac{x}{2}) dx.$$

Lösungen:

$$a) \\ = 580.$$

$$b) \\ = \frac{17}{9} - \ln 3 - 3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt{3}.$$

c)

$$= \frac{2}{3}(e^9 - e^{3\sqrt{3}}) + \frac{\pi}{12} + 3 - \sqrt{3}.$$

d)

$$= 5/2 + \ln 2.$$

**Aufgabe 120. Berechnen Sie**

a)  $\int_3^6 \sqrt{x-3} dx;$

b)  $\int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{x-2};$

c)  $\int_0^e \frac{\cos(\ln x) dx}{x};$

d)  $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \cdot \operatorname{ctg}^2 x dx;$

e)  $\int_0^1 \frac{e^x dx}{4 + e^{2x}};$

f)  $\int_1^2 x \ln x dx.$

Lösungen:

a)

$$= 2\sqrt{3}.$$

b)

$$= 4 \ln 3.$$

c)

$$= \sin 1.$$

d)

$$= 1/2.$$

e)

$$= \operatorname{arctg}(e) - \pi/4.$$

f)

$$= 2 \ln 2 - 3/4.$$

## Aufgaben unbestimmte Integrale (Aufgabensammlung FTN UNI Novi Sad, Elektrotechnik)

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale durch Substitution

2.  $\int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{4+x^2} dx$

Lösung:

$$= \frac{1}{4} \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right)^2 + c$$



3. 
$$\int \frac{x - \sqrt{\arctg 2x}}{1 + 4x^2} dx$$

Lösung:

$$= \frac{1}{8} \ln|1 + 4x^2| - \frac{1}{3} (\arctg 2x)^{\frac{3}{2}} + c.$$

5. 
$$\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{1 + x^2}} dx$$

Lösung:

$$= \frac{2}{3} \left[ \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \right]^{\frac{3}{2}} + c$$

7. 
$$\int \frac{\ln x}{x \sqrt{1 + \ln x}} dx$$

Lösung:

$$= \frac{2\sqrt{1 + \ln x}}{3} (\ln x - 2) + c.$$

**Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale durch partielle Integration**

1. 
$$\int x \sqrt{x^2 + 1} \ln \sqrt{x^2 - 1} dx$$

Lösung:

$$= \frac{1}{3} (x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1} \ln \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{9} (x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1} - \frac{2}{3} \sqrt{x^2 + 1} - \frac{\sqrt{2}}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2}} \right| + c.$$

2.  $\int \arcsin x \ln x \, dx$

Lösung:

$$\int \arcsin x \ln x \, dx = x(\ln x - 1) \arcsin x + \sqrt{1-x^2} (\ln x - 2) - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{\sqrt{1-x^2} + 1} \right| + c.$$

6.  $\int \cos^2(\ln x) \, dx$

$$\int \cos^2(\ln x) \, dx = x \cos^2(\ln x) + \frac{1}{5} (x \sin(2 \ln x) - 2x \cos(2 \ln x)) + c.$$

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale die ein quadratisches Trinom beinhalten

1.  $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

Lösung:

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + c$$

2.  $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} \, dx$

$$= \frac{3}{2} \ln |x^2 - 4x + 5| + 4 \operatorname{arctg}(x-2) + c.$$

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale rationaler Funktionen

1.  $\int \frac{x^2 \, dx}{(x^2 - 3x + 2)^2}$

Lösung:

$$= 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - 4 \frac{1}{x-2} + c = \ln \left( \frac{x-1}{x-2} \right)^4 - \frac{5x-6}{x^2-3x+2} + c.$$

2.  $\int \frac{x^2 + 3x - 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)^2} dx$

Lösung:

$$= \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1} + \frac{4x+2}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{5}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

5.  $\int \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} dx$

Lösung:

$$\int \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{6x^2 + 12x - 8} = \frac{x^2}{2} - \frac{8}{x-2} - \frac{11}{(x-2)^2} + c.$$

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale trigonometrischer Funktionen

5.  $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx$

Lösung:

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 \right| + \frac{x}{2} - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right| + c.$$

8.  $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$

Lösung:

$$= -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3 \cos^3 x} + c.$$

## Aufgaben bestimmte Integrale (Aufgabensammlung FTN UNI Novi Sad, Architektur)

Aufgabe 59. Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale

a)  $\int_0^2 (x + 3x^2) dx$

b)  $\int_0^8 (1 + \sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx$

c)  $\int_1^2 \frac{dx}{x^a}, \quad a \in \mathbb{R}$

d)  $\int_0^{\pi/2} \sin(2x) dx$

e)  $\int_0^{1/2} \pi \sin^2(\pi x) \cos(\pi x) dx$

f)  $\int_1^2 x(\ln x + 1) dx$

g)  $\int_0^{\pi/4} x^2 \cos(2x) dx$

h)  $\int_0^1 \arcsin x dx$

\*i)  $\int_1^3 \left( x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$

\*j)  $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx$

\*k)  $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx$

\*l)  $\int_0^1 \ln(x+1) dx$

\*m)  $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

\*n)  $\int_0^1 \arccos x dx$

Lösungen:

a) 10, b) 124/3,

c)

$a \neq 1$ :

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^a} = \frac{x^{-a+1}}{-a+1} \Big|_1^2 = \frac{2^{1-a} - 1}{1-a}$$

$a = 1$ :

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2.$$

d) 1/2, e) 1/3,

f)

$$= 2 \ln 2 + \frac{3}{4}.$$

h)

$$= \frac{\pi}{2} - 1.$$

g)

$$= \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{4}.$$

i)  $\frac{728}{81}$

j)  $-\ln \frac{\sqrt{2}}{2}$

k)  $\frac{1}{3}$

l)  $2 \ln 2 - 1$

m)  $-5e^{-1} + 2$

n) 1

## Aufgaben Uneigentliche Integrale (Aufgabensammlung PMF UNI Novi Sad)

**Aufgabe 142.** Bestimmen sie ob die uneigentliche Integrale konvergieren und falls ja, bestimmen sie deren Wert.

$$\begin{array}{lll} a) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}; & b) \int_0^2 \frac{dx}{2-x}; & c) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}; \\ d) \int_0^\infty \frac{dx}{4+x^2}; & e) \int_{-\infty}^0 e^{3x} dx; & f) \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}. \end{array}$$

**Aufgabe 143.** Bestimmen sie ob die uneigentliche Integrale konvergieren und falls ja, bestimmen sie deren Wert.

$$\begin{array}{lll} a) \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}; & b) \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}; & c) \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha}; \\ d) \int_1^\infty \frac{dx}{x^2+1}; & e) \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}; & f) \int_0^\infty e^{-ax} \cos(bx) dx. \end{array}$$

**Aufgabe 144.** Bestimmen sie für welche Werte von p und q konvergieren die folgende uneigentliche Integrale:

$$\begin{array}{lll} a) \int_0^\infty \frac{x^p \arctg x}{1+x^q} dx; & b) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}; & c) \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx. \end{array}$$