

Aufgaben Grenzwerte (Buch FTN Architektur, UNI Novi Sad)

Aufgabe 33. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + 2x + 1}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^3}{\sqrt[3]{x^2} + x^2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[5]{x^4}}{\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt{x^3}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}}$$

Lösungen:

a) $+\sqrt[3]{2}$, b) $+\infty$, c) 0, d) $-\infty$

Aufgabe 34. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^3 - 2x^4}{2x^2 + 3x^5}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+3x) - 1}{2x}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1 - 3x}{x^2 + x^4}$$

$$*\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^3 + 3x - 1}{(2x+1)^2 - 1 - 4x}$$

Lösungen:

a) 1/2, b) 2, c) 3, d) 3/4

Aufgabe 35. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{2x^2 + 11x + 15}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^3 - x^2 - x - 2}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - x^3 - x + 1}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

$$*\text{f) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$*\text{g) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x\sqrt{x} - 4\sqrt{x}}{x^2 - 16}$$

Lösungen:

a) 3/2, b) 7, c) 16/7, d) 2/3, e) $\mp\infty$, f) 0, g) 1/4

Aufgabe 36. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin(2x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2x}$

Lösungen:

a) 5/2, b) 1/2, c) -3/2, d) 1/2

Aufgabe 37. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{3} \right)^{\frac{2}{(x-1)^3}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x^2 + x + 1}{x + 1} \right)^{\frac{2x+4}{3x^2}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{1}{(x-2)^2}}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{\frac{x^2}{x+1}}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2}$

Lösungen:

a) e^6 , b) $e^{8/3}$, c) 1, d) $+\infty$, e) *existiert nicht* ($+\infty$ und 0), f) e^3

Aufgabe 38. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - x}{x-3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{x-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

*d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$

Lösungen:

a) -5/6, b) 4/3, c) $\sqrt{2}/4$, d) $\sqrt{2}/2$

Aufgaben Grenzwerte (Buch PMF, UNI Novi Sad)

Aufgabe 20. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

- a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3};$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 3x^2 - x - 2}{x - 2};$
- c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - x - 12};$ d) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 13x - 10}{2x^2 - 7x - 15};$
- e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2}{x - 1} - \frac{1}{x - 1} \right);$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x + 3}{x^2 - x} - 3 \frac{x + 1}{x^3 - x} \right);$
- g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4};$ h) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 - 9};$
- i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 + 12x^5 - 13x^4 + 5x^2 + 4x - 9}{x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 1};$
- j) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 4}{x^5 - 5x^4 + 8x^3 + x^2 - 12x + 4}.$

Lösungen:

a) 6, b) 11, c) 4/7, d) 17/13, e) 2, f) -2, g) 3, h) -9/2, i) -29/5, j) 2,

Aufgabe 21. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

- a) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9};$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 6} - 3}{x - 3};$
- c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2};$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 1}{x};$
- e) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{8 + x} - 4}{\sqrt[3]{x} - 2}.$

Lösungen:

a) 1/6, b) 1/6, c) 4, d) -1/2, e) 3/2

Aufgabe 22. Berechnen Sie folgende Grenzwerte (benutzen Sie: $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x};$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 5x};$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin 2x};$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$

Lösungen:

a) 1, b) 2, c) 2/5, d) 1/2, e) 1/4, f) 4/3

Aufgabe 23. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 4\pi x}{\sin 3\pi x};$

b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a};$

c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}.$

Lösungen:

a) -4/3, b) $\cos(a)$, c) $\frac{1}{\cos^2(a)}$

Aufgabe 24. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1};$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 3x^2 + 2x + 5}{5x^3 + x^2 + x + 3};$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 3x^2 + 2x + 5}{5x^4 + x^2 + x + 3};$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + 3x^2 + 2x + 5}{5x^3 + x^2 + x + 3};$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}};$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1});$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{16x^2 + x - 1} - 4x).$

Lösungen:

a) 3, b) 1, c) 0, d) $+\infty$, e) 1, f) 0, g) 1/8

Aufgabe 26. Bestimmen Sie folgende rechtsseitige Grenzwerte

a) $\lim_{x \rightarrow 0+} (2 + \sqrt{x});$ b) $\lim_{x \rightarrow 0+} (\sqrt{x^3} - \ln x);$

c) $\lim_{x \rightarrow -5+} (\sqrt{x+5} + x);$

d) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x};$ e) $\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{1}{x-3};$

f) $\lim_{x \rightarrow 0+} 2^{\frac{1}{x}};$ g) $\lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{-1}{x}};$

h) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}};$ i) $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(1 + 2^{\frac{-1}{x}}).$

Lösungen:

a) 2, b) $+\infty$, c) -5 , d) $+\infty$, e) $+\infty$, f) $+\infty$, g) 0, h) 0, i) 0

Aufgabe 27. Bestimmen Sie folgende linksseitige Grenzwerte

a) $\lim_{x \rightarrow 0-} (2 + \sqrt{-x});$ b) $\lim_{x \rightarrow 0-} (\sqrt{(-x)^5} + \ln(1+x));$

c) $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}};$ d) $\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{\sqrt{1-x}}{1-x^2};$

e) $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x};$ f) $\lim_{x \rightarrow 3-} \frac{1}{3-x};$

g) $\lim_{x \rightarrow 0-} 2^{\frac{1}{x}};$ h) $\lim_{x \rightarrow 0-} e^{\frac{-1}{x}};$

i) $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}};$ j) $\lim_{x \rightarrow 0-} \ln(1 + 2^{\frac{1}{x}}).$

Lösungen:

a) 2, b) 0, c) 0, d) $+\infty$, e) $-\infty$, f) $+\infty$, g) 0, h) $+\infty$, i) 1, j) 0

Aufgaben Grenzwerte (Buch FTN, Maschinenbau, UNI Novi Sad)

Aufgabe 2. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 - x + 1}. & \text{b)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}. & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} 2^x \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \arccos x. & & \end{array}$$

Lösungen:

a) -1, b) $2/\pi$, c) 1, d) $\pi/2$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 3x^2 + 2x + 3}{5x^4 + 2x^2 + x + 3}. & \text{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 + 2x^2 + x + 5}{5x^3 + x^2 + x + 3}. \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}. & \text{d)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}. \end{array}$$

Lösungen:

a) 0, b) $-\infty$, c) 1, d) 1

Aufgabe 4. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - x - 12}. & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 13x - 10}{4x^2 - 14x - 30}. \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 + 9x + 9}. & \text{d)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^3 + 2x^2 - 2x - 1}. \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 2x^3 - 8x + 16}. & \text{f)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 2x^3 + 8x + 16}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}. \end{array}$$

Lösungen:

a) $4/7$, b) $17/26$, c) $5/3$, d) 1, e) $1/3$, f) 12

Aufgabe 5. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - x}{x - 3}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - \sqrt[3]{x^3+x^2+15}}{x^2-5x+6}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}, \quad a \in \mathbf{R}.$$

Lösungen:

a) $1/4$, b) $-5/6$, c) $3/2$, d) $-2/27$, e) $1/\sqrt{2a}$

Aufgabe 6. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{\sin ax}, \quad a \neq 0, \quad a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}, \quad a \in \mathbf{R}.$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}.$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow -a} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a}{x + a}, \quad a \in \mathbf{R}.$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \cdot \sin x}.$$

Lösungen:

a) 3, b) b/a , c) $1/2$, d) $\cos(a)$, e) 8, f) 3, g) $1/(\cos^2(a))$

Aufgabe 7. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)^{\frac{3}{x}}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x^2 + x - 1}{x - 1} \right)^{\frac{2x+1}{3x^2}}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 5}{x^2 - 2} \right)^{\frac{2x^2}{x+1}}.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2 - 3}{x + 3} \right)^{\frac{x}{x^2-4}}.$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2)^{\frac{1}{(x-3)^2}}.$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}.$$

Lösungen:

a) e^{12} , b) $1/e$, c) 1, d) $e^{7/10}$, e) $1/e$, f) existiert nicht, da rechtsseitig $+\infty$ und linksseitig 0

Aufgabe 8. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sqrt{x}). & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x-4}. & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0^+} 3^{\frac{1}{x}}. \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{x-4}. & \text{e)} \lim_{x \rightarrow 0^-} 3^{\frac{1}{x}}. & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{1-x^2} \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x + |x|}{3x}. & \text{h)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + |x|}{3x}. \end{array}$$

Lösungen:

a) existiert nicht, da für $x < 0$ Funktion ist nicht definiert, b) $1+\infty$, c) $+\infty$, d) $-\infty$, e) 0, f) $+\infty$, g) $1/3$, h) 1

Aufgabe 9. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}. & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x}. \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}. & \text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{1 + \sqrt[3]{1 + \ln^2 x}}} \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2}. & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{|x-1|}. \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}. & \text{h)} \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin(x+1). \end{array}$$

Lösungen:

a) $\ln(a)$, b) a , c) $1/\sqrt{e}$, d) 0, e) $+\infty$, f) existiert nicht, da rechtsseitiger Grenzwert = 1 während linksseitiger Grenzwert = -1 , g) wie unter f, h) $\pi/2$

Aufgaben Grenzwerte (Buch FTN, Elektrotechnik, UNI Novi Sad)

Aufgaben 1-12. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte

1)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

Lösung: $1/2$

2)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$$

Lösung: $4/3$

3)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 15}}{x^2 - 5x + 6}$$

Lösung: $-2/27$

4)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 15}}{x^2 - 5x + 6}$$

Lösung: $259/150$

5)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2 - 3}{x + 3} \right)^{\frac{x}{x^2 - 4}}$$

Lösung: $\sqrt[10]{e^7}$

6)

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

Lösung: $1/e$

7)

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

Lösung: $2/\pi$

8)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{1 + \sqrt[3]{1 + \ln^2 x}}}$$

Lösung: rechtsseitiger Grenzwert ist 0, linksseitiger Grenzwert existiert nicht!

9)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$$

Lösung: 1/4

10)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$$

Lösung: $1/\sqrt{e}$

11)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin^2 \frac{\pi x}{2} \right)^{\frac{1}{(x-1)^3}}$$

Lösung: 0 für $x \rightarrow 1^+$, ∞ für $x \rightarrow 1^-$ also Grenzwert existiert nicht

12)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

Lösung: $\ln(a)$

Aufgaben 13-16. Bestimmen Sie ob folgende Grenzwerte existieren

13)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2}$$

Lösung: existiert nicht, da ∞ für $x \rightarrow 2^+$ und $-\infty$ für $x \rightarrow 2^-$

14)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

Lösung: *existiert nicht, da 0 für $x \rightarrow 0^+$ und 1 für $x \rightarrow 0^-$*

15)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{|x - 1|}$$

Lösung: *1 für $x \rightarrow 1^+$, -1 für $x \rightarrow 1^-$ also Grenzwert existiert nicht*

16)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{|x - 1|}$$

Lösung: *existiert nicht, da 1 für $x \rightarrow 0^+$ und -1 für $x \rightarrow 0^-$*