Aufgabe 109

e) $$\int x^2 \cdot \cos(x)\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & dv = \cos(x)\,dx \\ du = 2x \cdot dx & v = \sin(x) \end{bmatrix} =$$

$$= x^2 \sin(x) - 2\int x \cdot \sin(x)\,dx = x^2 \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) -$$
$$- 2\sin(x) + C$$

f) $$\int \arcsin(x)\,dx = \begin{bmatrix} u = \arcsin(x) & du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix}$$

$$= x \cdot \arcsin(x) - \underbrace{\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{I_1} = \begin{bmatrix} t = 1-x^2 \\ dt = -2x \cdot dx \end{bmatrix} dx = -\frac{dt}{2x}$$

$$I_1 = \int \frac{\cancel{x} \cdot \left(-\frac{dt}{2\cancel{x}}\right)}{t^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{-t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \arcsin(x)\,dx = x \cdot \arcsin(x) + \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2} + C$$

g) $$\int \operatorname{arctg}(2x)\,dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg}(2x) & dv = dx \\ du = \frac{2}{1+(2x)^2} & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg}(2x) - \int \frac{2x}{1+(2x)^2} = \begin{bmatrix} t = 1+4x^2 \\ dt = 8x\,dx \end{bmatrix} dx = \frac{dt}{8x}$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg}(2x) - \frac{2}{8}\int \frac{\cancel{x} \cdot \frac{dt}{\cancel{x}}}{t} = x \cdot \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4}\ln|t|$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4}\ln|1+4x^2| + C$$

Aufgabe 109,

h)

$$\int x \cdot \operatorname{arctg}(x)\,dx = \left\lceil \begin{matrix} u = \operatorname{arctg}(x) & dV = x \cdot dx \\ du = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx & V = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right\rfloor =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\underbrace{\int dx}_{x} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{1+x^2}\,dx}_{\operatorname{arctg}(x)} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) + C$$

i)

$$\int x \cdot \arcsin(x^2)\,dx = \left\lceil \begin{matrix} u = \arcsin(x^2) & dV = x \cdot dx \\ du = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,du & V = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right\rfloor$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \arcsin(x^2) - \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \quad \left\lceil \begin{matrix} t = 1-x^4 \\ dt = -4x^3 dx \end{matrix} \right\} dx = -\frac{dt}{4x^3} \right\rfloor$$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin(x^2) - \int \frac{\cancel{x^3} \cdot \left(-\frac{dt}{4 \cdot \cancel{x^3}}\right)}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^2}{2} \cdot \arcsin(x^2) +$$

$$+ \frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt = \frac{x^2}{2} \cdot \arcsin(x^2) + \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2}\arcsin(x^2) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1-x^4} + C$$

## Aufgabe 110

a)

$$\int \ln(x)\,dx = \left\lceil \begin{matrix} u = \ln(x) & dV = dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & V = x \end{matrix} \right\rfloor = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= x \cdot \ln(x) - x + C = x \cdot (\ln(x) - 1) + C$$

b)

$$\int x^2 \cdot \ln(x)\,dx = \left\lceil \begin{matrix} u = \ln x & dV = x^2\,dx \\ du = \dfrac{1}{x}\,dx & V = \dfrac{x^3}{3} \end{matrix} \right\rfloor =$$

Aufgabe 110, b) Fortsetzung

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^{\cancel{3}2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$$

c)

$$\int \ln(x^2+1)\, dx \quad \left[\begin{array}{ll} u = \ln(x^2+1) & dV = dx \\ du = \frac{2x\, dx}{x^2+1} & V = x \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\int \ln(x^2+1)\, dx = x \cdot \ln(x^2+1) - \underbrace{\int \frac{x \cdot 2x \cdot dx}{x^2+1}}_{I_1}$$

$$I_1 = \int \frac{2x^2\, dx}{x^2+1} = \int \frac{2x^2+2-2}{x^2+1} dx = 2\int \frac{\cancel{x^2+1}}{\cancel{x^2+1}} dx - 2\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$\downarrow x \qquad \downarrow 2\operatorname{arctg}(x)$$

$$I_1 = 2x - 2\operatorname{arctg}(x) + C$$

folgt also:

$$\int \ln(x^2+1)dx = x \cdot \ln(x^2+1) - I_1 = x \cdot \ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} + C$$

---

d) **Wichtige Prinzipen!**

$$\int e^x \sin(x) dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sin(x) & dv = e^x\, dx \\ du = \cos(x) & v = e^x \end{array}\right] =$$

$$= e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \cos(x) dx \quad \left[\begin{array}{ll} u = \cos(x) & dv = e^x dx \\ du = -\sin(x) dx & v = e^x dx \end{array}\right] =$$

$$= e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot \sin(x) dx \quad !$$

---

$$\int e^x \cdot \sin(x) dx = e^x \cdot (\sin(x) - \cos(x)) - \int e^x \cdot \sin(x) dx$$

Als Gleichung!

$$2 \cdot \int e^x \sin(x) dx = e^x \cdot (\sin(x) - \cos(x))$$

$$\int e^x \cdot \sin(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot e^x \cdot (\sin(x) - \cos(x))$$

## Aufgabe 1.10, e)

$$\int e^{2x}\cdot\cos(x)\,dx = \left[\begin{array}{ll} u=\cos(x) & dv=e^{2x}dx \\ du=-\sin(x) & v=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2x}\cdot\cos(x) - \int e^{2x}\cdot(-\sin(x))\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2x}\cdot\cos(x) + \int e^{2x}\sin(x)\,dx\right)$$

$$\left[\begin{array}{ll} u=\sin(x) & dv=e^{2x}dx \\ du=\cos(x) & v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right] = \frac{1}{2}\left(e^{2x}\cos(x) + \frac{1}{2}e^{2x}\sin(x) -\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot\cos(x)\,dx$$

Wieder als Gleichung!

$$\int e^{2x}\cdot\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot\cos(x) + \frac{1}{4}\cdot e^{2x}\cdot\sin(x) - \frac{1}{4}\int e^{2x}\cos(x)\,dx$$

$$\frac{5}{4}\int e^{2x}\cdot\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot\cos(x) + \frac{1}{4}e^{2x}\cdot\sin(x)$$

$$\boxed{\int e^{2x}\cdot\cos(x)\,dx = \frac{2}{5}e^{2x}\cdot\cos(x) + \frac{1}{5}e^{2x}\cdot\sin(x)} \quad \underline{\underline{+C}}$$

## f) der allgemeiner Fall!

$$\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx = ? \quad (a\neq 0,\ b\neq 0)$$

$$\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx = \left[\begin{array}{ll} u=e^{ax} & dv=\cos(bx)\,dx \\ du=a\cdot e^{ax} & v=\frac{1}{b}\cdot\sin(bx)\end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\cdot\sin(bx) - \frac{a}{b}\int e^{ax}\cdot\sin(bx)\,dx = \left[\begin{array}{ll} u=e^{ax} & dv=\sin(bx) \\ du=a\cdot e^{ax} & v=-\frac{1}{b}\cos(bx)\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\cdot\sin(bx) - \frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cdot\cos(bx) + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx\right)$$

## Aufgabe 110, f, Fortsetzung

folgt also

$$\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\cdot\sin(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cdot\cos(bx) - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx$$

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cdot\cos(bx) = \frac{1}{b}e^{ax}\cdot\sin(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cdot\cos(bx)$$

$$\frac{b^2+a^2}{b^2}\int e^{ax}\cdot\cos(bx) = \frac{1}{b}e^{ax}\cdot\sin(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos(bx) \quad /\cdot b^2$$

$$(b^2+a^2)\int e^{ax}\cdot\cos(bx) = b\cdot e^{ax}\cdot\sin(bx) + a\cdot e^{ax}\cos(bx)$$

und endlich folgt

$$\boxed{\int e^{ax}\cdot\cos(bx) = \frac{1}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cdot\left(b\cdot\sin(bx)+a\cdot\cos(bx)\right) + C}$$

Dieser Integral bzw. deren Eigenschaft wird bei der Fourier und Laplace - Transformation von großer Bedeutung sein!

# Aufgabe 111. Integrale mit Rationalen Elementen (Ausdrücken)

* werden im Grunde mittels Partialbruchzerlegung gelöst

a) $\int \frac{2dx}{x^2-1} = \int \frac{2dx}{(x+1)(x-1)}$ ← Nenner Auf ~~Einzel~~faktoren zerlegen!

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} \quad (1)$$

Koeffizientenvergleich, da (1) muss für jeder $x \in \mathbb{R}$ gelten!

$$\frac{2}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{A\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)} + \frac{B\cdot(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

Gleichungssystem

$$0\cdot x + 2 = A\cdot(x-1) + B\cdot(x+1) = A\cdot x - A + B\cdot x + B$$

Gleichung (1): $2 = -A + B$

Gleichung (2): $0 = A + B$ $\qquad 0 = A + 1 \Rightarrow A = -1$

$$2 = \cancel{-A}\cancel{+A} + B + B \Rightarrow B = 1$$

folgt also:

$$\boxed{\frac{2}{x^2-1} = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}$$

damit können wir unser Integral in zwei Teile zerlegen

Aufgabe 111

a), Fortsetzung

$$\int \frac{2dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{-dx}{x+1} = \ln|x-1| - \ln|x+1| +$$

$$+C = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

b)

$$\int \frac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15}\,dx = ?$$

$$\boxed{x^2-2x-15 = (x-5)\cdot(x+3)}$$

$$\frac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15} = x+2+\frac{17x-5}{x^2-2x-15} = x+2+\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+3}$$

$$\frac{17x-5}{x^2-2x-15} = \frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+3} = \frac{A\cdot(x+3)}{x^2-2x-15}+\frac{B(x-5)}{x^2-2x-15}$$

$$17x-5 = A\cdot(x+3)+B\cdot(x-5) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned} 17 &= A+B \\ -5 &= 3A-5B \end{aligned}\right\} \Rightarrow A=10,\ B=7$$

folgt also, dass

$$\boxed{\frac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15} = x+2+\frac{10}{x-5}+\frac{7}{x+3}}$$ und damit

$$\int \frac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15} = \int x\,dx + 2\int dx + 10\cdot\int\frac{dx}{x-5} + 7\int\frac{dx}{x+3} =$$

$$= \frac{x^2}{2}+2x+10\cdot\ln|x-5|+7\ln|x+3|+C =$$

## Aufgabe 111 e)

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\,dx$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$ , siehe Aufgabe 2e

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + D}{(x-1)^3} = \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx - B + D}{(x-1)^3}$$

Gleichungssystem mittels Koeffizientenvergleich

$$1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 = x^2 \cdot A + x \cdot (B - 2A) + (A - B + D) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$1 = A \longrightarrow A = 1$

$0 = B - 2A \qquad 0 = B - 2 \rightarrow B = 2$

$1 = A - B + C$

$1 = 1 - 2 + D \longrightarrow D = 1 - 1 + 2 = 2$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$$

Unser Integral wird also

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{2}{(x-1)^3}\,dx =$$

$$= \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C$$

# Aufgabe 112

a) $$\int \frac{2\,dx}{\sqrt{x}+1} = \begin{matrix} t=\sqrt{x} & t^2=x \\ 2t\,dt = dx & \end{matrix} = \int \frac{2\cdot 2\cdot t\cdot dt}{t+1} =$$

$$= 4\cdot\int \frac{t}{t+1}\,dt = 4\int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt = 4\cdot\left(\int dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt\right)$$

$$= 4\cdot t - 4\cdot \ln|t+1| + c = 4\cdot\sqrt{x} - 4\cdot\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

b) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1} \quad \begin{matrix} t=\sqrt{x+1} & t^2=x+1 \\ 2t\cdot dt = dx & \end{matrix} = \int \frac{2t\,dt}{t+1} =$$

$$= 2\int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt = 2\cdot\int dt - 2\int \frac{dt}{t+1} = 2\cdot t - 2\ln|t+1| =$$

$$= 2\cdot\sqrt{x+1} - 2\cdot\ln\left(\sqrt{x+1}+1\right)$$

usw c, d sehr ähnlich

e) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+3}+1} = \begin{matrix} t=\sqrt[3]{2x+3} & t^3=2x+3 \\ 3t^2\,dt = 2\,dx & \\ dx = \frac{3}{2}t^2\,dt & \end{matrix} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{t^2}{t+1}\,dt = \frac{3}{2}\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) + C =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{(2x+3)^{\frac{2}{3}}}{2} - (2x+3)^{\frac{1}{3}} + \ln\left|1+\sqrt[3]{2x+3}\right|\right) + C$$

## Aufgabe 112 f)

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}-1} = \left[\begin{array}{ll} t=\sqrt[6]{x} & t^6=x \\ 6t^5\cdot dt = dx & \end{array}\right] = \int \frac{t^3\cdot 6\cdot t^5\,dt}{t^2-1} =$$

$$= 6\int \frac{t^8\,dt}{t^2-1} = \int\left(6t^6+6t^4+6t^2+6+\frac{6}{t^2-1}\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^7}{7}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}+t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C =$$

$$= 6\cdot\left(\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7}+\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3}+x^{\frac{1}{6}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|\right)+C$$

Siehe Aufgabe 111a!

## Aufgabe 113 a)

a) $\int \sin^2(x)\,dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cdot\sin(2x)+C$

c) $\int \sin^3(x)\,dx = \int \sin^2(x)\cdot\sin(x)\,dx = \int(1-\cos^2(x))\cdot\sin(x)\,dx$

$$\left[\left.\begin{array}{l} t=\cos(x) \\ dt=-\sin(x)\,dx \end{array}\right\}\ dx = -\frac{dt}{\sin(x)}\right] = -\int(1-t^2)\,dt =$$

$$= -t+\frac{t^3}{3}+C = -\cos(x)+\frac{1}{3}\cos^3(x)+C$$

# Aufgabe 119 Bestimmte Integrale

a) $$\int_{-1}^{4}(8x^3+3x^2+1)\,dx=\left(\frac{8x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{4}=$$

$$=\left(2\cdot4^4+4^3+4\right)-\left(2\cdot(-1)^4+(-1)^3+(-1)\right)=580$$

b) $$\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+\sqrt{-x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx=\left(-\frac{1}{2x^2}+\ln|x|-\frac{2}{3}(-x^{\frac{3}{2}})-\right.$$

$$\left.-3\cdot x^{\frac{1}{3}}\right)\Big|_{-3}^{-1}=\frac{-1}{2(-1)^2}+\ln|-1|-\frac{2}{3}(+1)^{\frac{3}{2}}-3(-1)^{\frac{1}{3}}-$$

$$-\left(-\frac{1}{2\cdot(-3)^2}+\ln|-3|-\frac{2}{3}(3)^{\frac{3}{2}}-3(-3)^{\frac{1}{3}}\right)=$$

$$=\frac{17}{9}-\ln|3|-3\sqrt[3]{3}+2\sqrt{3}=-0{,}0724$$

c, d ähnlich

# Aufgabe 120

a) $$\int_{3}^{6}\sqrt{x-3}\;dx=\left[\begin{array}{l}t=x-3\\ dt=dx\end{array}\;\underset{\text{der Grenzen}}{\overset{\text{einsetzen}}{\Longrightarrow}}\;\begin{array}{l}x=3\Rightarrow t=0\\ x=6\Rightarrow t=3\end{array}\right]=$$

$$=\int_{0}^{3}t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{3}=\frac{2\cdot\sqrt{27}}{3}=2\cdot\sqrt{3}=3{,}464$$

c) $$\int_{0}^{e}\frac{\cos(\ln(x))}{\cancel{x}}\,dx=\left[\left.\begin{array}{l}t=\ln(x)\\ dt=\frac{dx}{\cancel{x}}\rightarrow dx=x\cdot dt\end{array}\right\}\begin{array}{l}x=1\rightarrow t=\ln(1)=0\\ x=e\rightarrow t=\ln(e)=1\end{array}\right]$$

$$=\int_{0}^{1}\cos(t)\,dt=\sin(t)\Big|_{0}^{1}=\sin(1)$$

f) $$\int_{1}^{2}x\cdot\ln(x)\,dx=\left[\begin{array}{ll}u=\ln(x) & dv=x\cdot dx\\ du=\frac{dx}{x} & v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right]=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)\Big|_{1}^{2}-\frac{1}{2}\int_{1}^{2}x\cdot dx$$

$$=\frac{4}{2}\left(\ln(2)-\ln(1)\right)-\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{2}=2\cdot\ln(2)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1^2}{2}\right)=$$

$$=2\ln(2)-3/4$$

# Aufgabe 124

~~Bestimmen~~ sie die Fläche die durch ~~Pun~~ Kurven

$y=x^2$ und $y=\sqrt{x}$ begrenzt ist $(x>0)$.

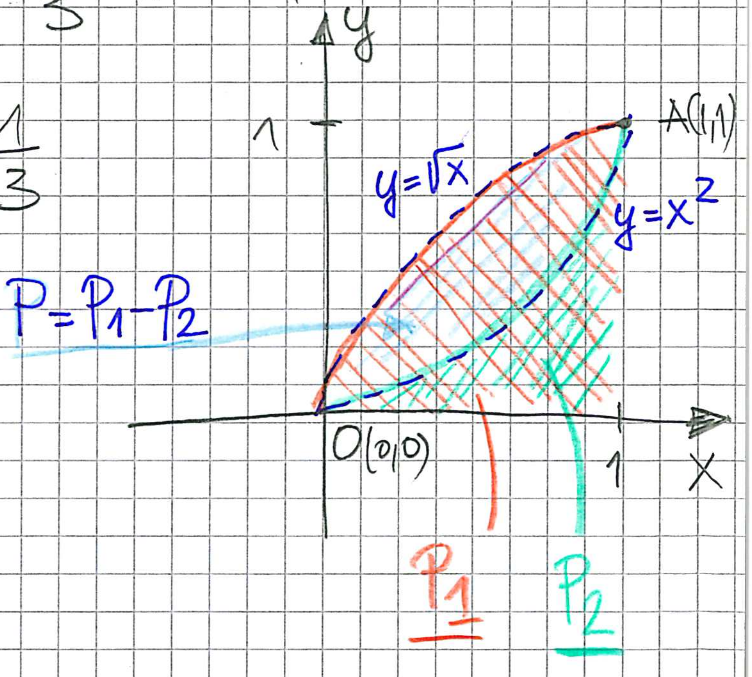
Punkte in dem die zwei Funktionen werden durch die Lösung der Gleichungssystem bestimmt:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=\sqrt{x} \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=\sqrt{x} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=1 \end{array}$$

die zwei Kurven schneiden sich in Punkten $O(0,0)$ und $A(1,1)$ wie im Bild dargestellt. Die durch zwei Kurven begrenzte Fläche ist $P=P_1-P_2$, wobei

$$P_1=\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$ und

$$P_2=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$




$$P=P_1-P_2=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

# Aufgaben Uneigentliche Integrale

142.)

a) $$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\arcsin \frac{x}{2}\right)\Big|_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \arcsin\left(\frac{2-\varepsilon}{2}\right) =$$

$$= \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

d) $$\int_0^\infty \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{2}\right)\Big|_0^T = \frac{\pi}{4}$$

f) $$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{T\to\infty} 2\cdot\sqrt{x}\Big|_1^T = \lim_{T\to\infty} (2\sqrt{T} - 2) = \infty$$

143.)

a) $$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x^{-\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} - \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)$$

für $1-\alpha > 0$ bzw. $\boxed{\alpha<1}$ konvergiert der Integral

b) $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{T\to\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^T =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left(\frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha-1}$$

$\lim_{T\to\infty} T^{1-\alpha}$ konvergiert wen $\boxed{\alpha>1}$, dann ist

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$$

c) aufgrund Ergebnisse von a) und b) folgt dass $\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ divergiert für $\forall \alpha \in \mathbb{R}$