

①

Beispiel 4.2.4 (Rießinger: Mathematik für Ingenieure)

Bernoulli'sche Ungleichung

Beweisen, daß für alle $x \geq -1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1+n \cdot x \quad \text{gilt}$$

a) mittels Vollständige Induktion

b) für $x > 0$ direkt über binomischen Lehrsatz

① $n=1: \Rightarrow (1+x)^1 \geq 1+1 \cdot x \quad \checkmark$

$\Leftrightarrow 1+x = 1+x$

② Induktionsvoraussetzung: für eine $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$(1+x)^n \geq 1+n \cdot x$$

③ Induktionsschluss: Wenn ① und ② gelten, es ist noch zu beweisen das die Ungleichung auch für $n+1$ gilt, also:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &\geq 1 + (n+1)x - \underbrace{\dots}_{\substack{\bullet (1+x)}} \\ \xrightarrow{\quad} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \geq \underbrace{(1+x) \cdot (1+nx)}_{\substack{x \geq -1 \Rightarrow 1+x \geq 0}} = \\ &= 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq \\ &\geq 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

damit ist die Ungleichung für $n+1$ ebenfalls bewiesen

fork ②

Beispiel 4.2.4 → b)

6) direkter Beweis für $x \geq 0$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = 1 + n \cdot x + \underbrace{\frac{n \cdot (n-1)}{2} x^2 + \dots}_{\geq 0 \text{ wegen } x \geq 0} \geq 1 + n \cdot x$$

Abschnitt 3.2.2

Beispiel zur Bestimmung von $N(\varepsilon)$ für gewähltes

$$0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$$

/ einfache Beispiele

① $a_n = \frac{1}{n}$

konvergiert $\rightarrow 0$

Beispiel:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 0,01 \\ \Rightarrow n &> 100\end{aligned}$$

② $a_n = e^{-n}$

$$a_n < \varepsilon \Rightarrow e^{-n} < \varepsilon \quad | \quad \varepsilon > 0, \text{ Log}$$

$$\ln(e^{-n}) < \ln(\varepsilon)$$

$$\underbrace{\ln(-n)}_{> -\ln(\varepsilon)}$$

$$-n < \ln(\varepsilon) \quad | \cdot (-1)$$

$$n > -\ln(\varepsilon)$$

Beispiel: $\varepsilon = 0,02$

$$n > -\ln(0,02)$$

$$n > -(-3,9120) = 3,9120$$

$$e^{-3,9120} = 0,02$$

100% MANUFACTURED
BY THE MANUFACTURER

~~300000000~~

On the Subject

1967-8

None

Oct 18 Sat

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

卷之三

100

13

1990-91

A faint blue ink sketch on graph paper depicting a landscape. On the left, there is a large, leafy tree. A path or river leads from the foreground towards a central building, possibly a house or temple, which is surrounded by smaller trees and shrubs. In the background, there are rolling hills or mountains under a light sky.

100

A grid-based drawing on graph paper, likely representing a path or trajectory. The path starts at the bottom left, moves generally upwards and to the right, with frequent loops and dead ends. It is primarily drawn in blue ink, with some red and green lines used for highlights or specific points. The overall appearance is that of a hand-drawn sketch on a grid background.

$$Sc_0 = 3 \text{ : longest}$$

(sog)al - گاں

$$O2IE_1S = (O2IE_1S_{-}) - E_T$$

200 0 2

Beispiel 4.2.5 (Rießinger, Mathematik für Ingenieure)

Beweisen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

→ Bernoulli'sche Ungleichung mit $x=1$ wird eingesetzt

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad | \text{ mit } x=1$$

$$(1+1)^n \geq 1 + n \cdot 1$$

$$2^n \geq 1+n$$

beide Seiten sind positiv,
Kehrwert ändert Relation

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1+n}$$

Folge $\frac{1}{n+1}$ konvergiert genauso gegen

Null, wie die Folge $\frac{1}{n}$.

von unten

$\Rightarrow \frac{1}{2^n}$ ist immer positiv (also feschränkt)

liegt aber unterhalb ~~der~~ einer
Folge, die gegen 0 konvergiert.

(Simplifying, summing terms) \Rightarrow $C = \frac{1}{2} \pi R^2$

Units of πR^2 are m^2

Area of circle
is πr^2

Volume of cylinder = $\pi r^2 h$ (radius squared times height)

Box from $\pi r^2 h$ \Rightarrow $\pi r^2 h = \pi r^2 h$

Volume of cylinder = $\pi r^2 h$

Volume of cube = a^3 \Rightarrow $a^3 = \pi r^2 h$

$a = \sqrt[3]{\pi r^2 h}$

Radius can now be found \Rightarrow $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi h}}$

Radius now \Rightarrow $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi h}}$ \Rightarrow $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi h}}$

(Radius) \times (Radius) \times (Radius) \times π \times h

Radius \times Radius \times Radius \times π \times h

Reproduced Copyright 2012, egghead

Aufgabe (mittelschwer), siehe auch 9.2.6. Riesinger
Beispiel Folge mit Bernoulli'scher Ungleichung

~~Beweis~~: Aufgabe: Beweisen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{gilt f\"ur alle } a \in \mathbb{R}, a \geq 1 \text{ und } n \in \mathbb{N}, n > 0$$

$x_n \geq 0$ wird definiert als: $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$

dann gilt: $\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$

dann gilt die Bernoulli-Ungleichung:

$$a = (1 + x_n)^n \geq 1 + n \cdot x_n$$

also:

$$a \geq 1 + n \cdot x_n \quad (-1) \quad \text{da } a \geq 1, \text{ beide Seiten blieben positiv}$$

$$a - 1 \geq n \cdot x_n \quad (1/n) \quad n > 0, \text{ da } n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a-1}{n} \geq x_n, \quad x_n \geq 0$$

es ist aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-1}{n} = 0$$

damit ist dann auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

und letztes Endes: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 + 0 = 1$

the first time I saw it, I thought it was a good idea to do it.

2000 ft above sea level, 30 minutes after landing

1000 ft above sea level, 30 minutes after landing

1000 ft above sea level, 30 minutes after landing

1000 ft above sea level, 30 minutes after landing

1000 ft above sea level, 30 minutes after landing

1000 ft above sea level, 30 minutes after landing

3000

1000 ft above sea level, 30 minutes after landing

1000 ft above sea level

1000 ft above sea level