

Wintersemester 2016/17

Prüfungsfach:

Mathematik I / Teil: Folgen, Reihen, Funktionen, Differential- und Integralrechnung

Studiengang: **Angewandte Informatik**

Hilfsmittel: nicht programmierbarer Taschenrechner und zwei A4-Seiten mit eigenhändig geschriebenen Formeln (keine gelöste Aufgaben!).

Mobiltelefone sind ausdrücklich verboten!

Bitte die Lösungen für Anteil Professorin Tóth und Prof. Juhász auf separate Blätter schreiben und separat abgeben!

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zusammen mit diesem Aufgabenblatt und die zwei Seiten eigenhändig geschriebenen Formeln ab!

Angabenblatt 1 / 1

Prüfer: Prof. Dr. Juhász

Datum: **19.01.2016**

Probeprüfung!

Erreichbare Punktzahl: **45**

1a	1b	2	3	4										Σ

Aufgaben

1) Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Regel von Bernoulli-L'Hospital:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (2x+1)^{\cot(x)}$ (8 Punkte)

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$ (7 Punkte)

2) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktion:

$y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3(x) \cdot \cos^2(x)$ (14 Punkte)

3) Bestimmen sie den Konvergenzradius und Konvergenzbereich folgender Potenzreihe:

$P_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+3} \cdot x^{n+3}$ (6 Punkte)

4) Berechnen sie das folgende unbestimmte Integral

$I_1 = \int \frac{x^3}{x^2-1} \cdot dx$ (11 Punkte)

Lösungen:

$$1a) \quad y = (2x+1)^{\operatorname{ctg}(x)} \rightarrow \ln(y) = \operatorname{ctg}(x) \cdot \ln(2x+1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(y)) &= \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg}(x) \cdot \ln(2x+1)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(2x+1)}{\operatorname{tg}(x)} \right) \stackrel{L'H}{=} \frac{\frac{2}{2x+1}}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (y) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(y))} = \boxed{e^2}$$

$$1b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x) - x}{x \cdot \sin(x)} \right) \stackrel{L'H}{=}$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x \cdot \cos(x)} \right) \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin(x)}{2\cos(x) - x \cdot \sin(x)} \right) = \boxed{0}$$

$$2) \quad y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3(x) \cdot \cos^2(x)$$

$$\begin{aligned} \ln(y) &= \ln\left(x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3(x) \cdot \cos^2(x)\right) = \frac{2}{3} \ln(x) + \\ &+ \ln(1-x) - \ln(1+x^2) + 3 \ln(\sin(x)) + 2 \ln(\cos(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\ln(y))' &= \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \cdot (-1) - \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x + 3 \cdot \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) + \\ &+ 2 \cdot \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) \end{aligned}$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3 \operatorname{ctg}(x) - 2 \cdot \operatorname{tg}(x) \right)$$

$$y' = \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3(x) \cdot \cos^2(x) \cdot \left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3 \operatorname{ctg}(x) - 2 \operatorname{tg}(x) \right)$$

$$3) P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+3} \cdot x^{n+3}$$

$$a_n = \frac{n}{n+3}$$

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n+3}}{\frac{n+1}{n+4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+4)}{(n+1)(n+3)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n}{n^2 + 4n + 3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}} =$$

$$= 1$$

Randpunkte

$$x = \pm 1: \frac{1}{4} \pm \frac{2}{5} + \frac{3}{6} \pm \frac{4}{7} \text{ divergiert in beiden Randpunkten}$$

$$\boxed{r=1, |x| < 1}$$

$$4) \int \frac{x^3}{x^2-1} dx$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 1 = x \\ -x^3 + 0 \cdot x^2 + 1x \\ \hline 0x^3 + 0x^2 + 1x + 0 \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1} \rightarrow \int \left(x + \frac{x}{x^2-1} \right) dx =$$

$$\int x \cdot dx + \int \frac{x}{x^2-1} dx = \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2-1) + C}$$

I_1

I_2

$$I_2: \int \frac{x}{x^2-1} dx = \int_{t=x^2-1} \frac{dt}{2x} = \int \frac{x}{t} \cdot \frac{dt}{2x} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln(t) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2-1) + C$$