Technische Hochschule Deggendorf	Platznummer:______
Wintersemester 2016/17 Prüfungsfach: **Mathematik I / Teil: Folgen, Reihen, Funktionen, Differential- und Integralrechnung** Studiengang: **Angewandte Informatik** Hilfsmittel: nicht programmierbarer Taschenrechner und zwei A4-Seiten mit eigenhändig geschriebenen Formeln (keine gelöste Aufgaben!). **Mobiltelefone sind ausdrücklich verboten!** **Bitte die Lösungen für Anteil Professorin Tóth und Prof. Juhász auf separate Blätter schreiben und separat abgeben!** **Bitte geben Sie Ihre Lösungen zusammen mit diesem Aufgabenblatt und die zwei Seiten eigenhändig geschriebenen Formeln ab!**	**Angabenblatt 1 / 1** Prüfer: Prof. Dr. Juhász Datum: **30.01.2016** Erreichbare Punktzahl: **45**

1a	1b	2	3	4									Σ

Aufgaben

1) Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Regel von Bernoulli-L‘Hospital:

   a) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(e^x-1\right)^x$ (9 Punkte)

   b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$ (8 Punkte)

2) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktion:

   $y = x^{\sin(x)}$ innerhalb der Definitionsbereich $D=\Re^+$ (8 Punkte)

3) Bestimmen sie den Konvergenzradius und Konvergenzbereich folgender Potenzreihe:

   $P_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\cdot x^{n+1}$ (6 Punkte)

4) Berechnen sie das folgende unbestimmte Integral

   $I_1=\int\frac{x^5}{x^2+3}\cdot dx$ (14 Punkte)

Lösungen:

1a) -> PMF, 61b

Za funkciju $y = (e^x - 1)^x$ važi $\ln y = x \ln(e^x - 1)$, odakle je

$$\lim_{x\to 0+} \ln y = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(e^x-1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{\frac{-1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-x^2 e^x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0+} \frac{-(2xe^x + x^2 e^x)}{e^x} = 0.$$

Na osnovu toga je

$$\lim_{x\to 0+} (e^x - 1)^x = e^{\lim_{x\to 0} \ln y} = e^0 = 1.$$

1b) -> PMF, 62c

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{xe^x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{xe^x + e^x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{xe^x + 2e^x} = -1/2.$$

2)

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\sin(x)}\right]$$

$$= x^{\sin(x)} \cdot \frac{d}{dx}[\ln(x)\sin(x)]$$

$$= \left(\frac{d}{dx}[\ln(x)] \cdot \sin(x) + \ln(x) \cdot \frac{d}{dx}[\sin(x)]\right) x^{\sin(x)}$$

$$= x^{\sin(x)} \left(\frac{1}{x}\sin(x) + \cos(x)\ln(x)\right)$$

$$= x^{\sin(x)} \left(\frac{\sin(x)}{x} + \cos(x)\ln(x)\right)$$

Bzw.

$y = x^{\sin(x)}$ innerhalb der Definitionsbereich $D = \Re^+$

$$\ln(y) = \ln(x^{\sin(x)}) = \sin(x) \cdot \ln(x)$$

$$(\ln(y))' = \frac{1}{y} \cdot y' = \cos(x) \cdot \ln(x) + \sin(x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = (\ln(y))' \cdot y = x^{\sin(x)} \cdot \left(\frac{\sin(x)}{x} + \cos(x) \cdot \ln(x)\right)$$

3)

b) $P_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot x^{n+1}$ $\qquad a_n = \frac{n}{n+1}$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n+2)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot(1+\frac{2}{n})}{(1+\frac{1}{n})^2} = 1$$

Randpunkte

$x = \pm 1$: $\frac{1}{2} \pm \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \pm \frac{4}{5} \ldots$ divergiert in beiden Randpunkten

$\boxed{r=1}$ $\qquad \boxed{|x|<1}$

4)

4) Variante $\boxed{\int \frac{x^5\,dx}{x^2+3}}$

~~$x^5 + 0\cdot x^4 + 0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0 : (x^2+3) = x^3\ x^2 + 0\cdot x + 3$~~

$$x^5 + 0\cdot x^4 + 0\cdot x^3 + 0x^2 + 0\cdot x + 0 : (x^2 + 0\cdot x + 3) = x^3 - 3x$$
$$\frac{\pm x^5 \pm 0\cdot x^4 \pm 3x^3}{0\cdot x^5 + 0\cdot x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 0\cdot x}$$
$$\frac{\mp 3x^3 \pm 0x^2 \mp 9x}{0x^3 + 0\cdot x^2 + 9x}$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{x^2+3} = \int (x^3 - 3x)\,dx + \int \frac{9x}{x^2+3}\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + \int \frac{9x}{x^2+3}$$

$t = x^2+3$
$dt = 2x\,dx$
$dx = \frac{dt}{2x}$

$$\int \frac{9x}{x^2+3}\,dx = \int \frac{9\cancel{x}}{t} \cdot \frac{dt}{2\cancel{x}} = \frac{9}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{9}{2}\ln|t| + C = \frac{9}{2}\cdot\ln|x^2+3| + C$$

folgt also

$$\boxed{\int \frac{x^5}{x^2+3}\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}\ln(x^2+3) + C}$$

$x^2+3>0\ \forall$