A 2.1 Die folgenden Brüche sind als Dezimalzahlen zu schreiben:

a) $\frac{13}{16}$ b) $\frac{110}{111}$ c) $\frac{1\,111\,111}{25\,000\,000}$ d) $\frac{47}{45}$ e) $\frac{40\,034}{19\,998}$ f) $\frac{59\,457}{29\,700}$

(Eine vermutete Periodizität ist durch Rückumwandlung in einen Bruch (vgl. A 2.2) zu bestätigen.)

A 2.2 Wandeln Sie die folgenden Dezimalzahlen in Brüche um und kürzen Sie so weit wie möglich:

a) $0.21\,875$ b) $1.\overline{00\,423}$ c) $1.00\,\overline{423}$ d) 1.0666 e) $1.0\overline{6}$ f) $0.\overline{9}$

A 2.3 Entscheiden Sie, welche der Zahlen a, b die größere ist:

a) $a = \frac{36}{71},\ b = \frac{41}{81}$ b) $a = \frac{122}{999},\ b = \frac{122\,122}{1\,000\,000}$

c) $a = \frac{1\,929}{15\,625},\ b = \frac{19753}{160\,000}$ d) $a = -\frac{212\,957}{249\,993},\ b = -\frac{212\,963}{250\,000}$

A 2.4 Folgende Terme sind zu vereinfachen:

a) $2(a-3b+c)+d(3-a)-c-a(2-d)-3(d-2b)$

b) $a(2b+c)-b(c+2a)+c(b-a)$

c) $3(3a-2b)-[3(2a-4b-c)-2(a-2c+4b)]$

A 2.5 Man vereinfache:

a) $(a-2b)(a-c)-(c-2b)(2b-a)$

b) $(6a+2)(5b-1)(c+1)-(3a+1)(1-5b)(-2c-2)$

c) $2(a+2b)(a-3b)(b+a)+(3b-2a)(4b-a)(b-a)$

A 2.6 Die folgenden Summen lassen sich zu einem Produkt zusammenfassen:

a) $3a^2+16ab+16b^2$ b) $4a^3c+4a^2bd-12a^2bc-12ab^2d+9ab^2c+9b^3d$

c) $4a^3+5a^2b-2ab^2-3b^3$

d) $a^3b+a^3c-a^2b^2+3a^2bc+4a^2c^2-4ab^2c+4ac^3-4b^2c^2-4bc^3$

A 2.7 Durch Anwendung binomischer Formeln vereinfache man:

a) $(a+b)^2+(a-b)^2$ b) $(a-b)^2-(-a-b)^2$

c) $(b-a)^2-(a-b)^2$ d) $(a+b)^2+(a^2-b^2)$

e) $a^2-b^2-(a-b)^2$ f) $(a+b+c)^2-(a+b)^2-(a+c)^2-(b+c)^2$

g) $(a+b-c)^2+(a+c)^2+(b+c)^2$ h) $(a-b-c)^2+(a+b)^2-(b+c)^2$

A 2.8 Man schreibe als Quadrat eines Binoms:

a) $4a^2+12ab+9b^2$ b) $a-\frac{4\sqrt{a}}{b}+\frac{4}{b^2}$ c) $b+\frac{1}{b}+2$ d) $\frac{2}{a^2}+\frac{a^2}{8}-1$

A 2.9 Die folgenden Terme sind mit Hilfe quadratischer Ergänzung möglichst weitgehend zusammenzufassen:

a) x^2+4x+6 b) x^2-6x+8 c) $2y^2-8y+4$ d) $x^2-y^2+6x+4y+5$

e) $3x^2+4y^2-6x+16y+20$ f) $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+1$ g) $x^2y^2+2x+\frac{2}{y^2}$

A 2.10 Berechnen Sie:

a) $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}+1\frac{5}{8}-\frac{9}{8}$ b) $\frac{7}{3}-\frac{5}{6}-\frac{11}{12}+\frac{1}{4}$

c) $(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{9}{8})\cdot(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6})$ d) $(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{3}{4}-\frac{9}{10})\cdot(\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{18})$

e) $(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}+\frac{5}{24}+\frac{5}{8}):(\frac{2}{9}-\frac{7}{18}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})$ f) $(\frac{2}{15}-\frac{1}{10}+\frac{1}{5}):(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{9}-\frac{2}{45})$

A 2.11 Man vereinfache so weit wie möglich:

a) $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}$ b) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$

c) $\frac{1}{a+2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{b-3}$ d) $\frac{b-4a}{a+b}+\frac{2a^2+5ab+3b^2}{(a+b)^2}-1$

e) $\frac{a}{b^2c}+\frac{c}{ab^2}-\frac{2}{b^2}$ f) $\frac{u-10}{u+2}-\frac{2u+3}{u-2}+\frac{u^2+7u+10}{u^2-4}$

g) $\frac{3}{a-1}+\frac{6}{1-a^2}-\frac{5}{a+1}$ h) $\frac{2z-1}{z+2}+\frac{3z+4}{z-3}-\frac{5z^2+3z+11}{z^2-z-6}$

i) $\frac{3}{b+1}+\frac{1}{b+2}+\frac{3b-1}{1-b^2}+\frac{3}{2-b}+\frac{2b+10}{b^2-4}$ j) $\frac{1}{a-b}-\frac{4a-6b}{a^2+3ab+2b^2}-\frac{3a+23b}{b^2-a^2}$

k) $\frac{a+b}{b-a}\cdot\frac{4(b^2-a^2)}{2a+2b}$ l) $\frac{a^2+a-2}{a^2-a}\cdot\frac{a^2-4a+3}{a^2-a-6}$

m) $\frac{a^2-2ab+b^2}{2a+2b}:\frac{b^2-a^2}{2a^2+4ab+2b^2}$ n) $\frac{a^2+a-2}{a^2-a}:\frac{a^2-4a+3}{a^2-a-6}$

o) $\dfrac{b-\frac{a+b}{ab+1}}{a-\frac{a^2b-ab}{1+ab}}$ p) $\dfrac{a-\frac{a^2}{a-\frac{b^2}{a}}}{b-\frac{b}{1+\frac{a}{b}}}$ q) $\dfrac{\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}}$ r) $\dfrac{\frac{2ab^2}{b^4-a^4}-\frac{a}{b^2+a^2}}{\frac{1}{a+b}+\frac{a}{b^2-a^2}}$

A 2.12 Die folgenden physikalischen Formeln sind nach den angegebenen Größen umzustellen. (Zur Bedeutung der auftretenden Symbole vgl. z.B. [DES].)

a) (temperaturabh. elektr. Widerstand) $R = R_0(1+\alpha(T-T_0))$ nach T,

b) (Leistungszahl der Kältemaschine) $\epsilon = \frac{T_2}{T_1-T_2}$ nach T_1, T_2,

c) (Mischungsregel) $m_1c_1(T_1-T_m) = (m_2c_2+C)(T_m-T_2)$ nach T_1, T_m, c_2,

d) (relativistische Geschwindigkeit) $u = \frac{u'+v}{1-u'vc_0^{-2}}$ nach c_0^2, u', v,

e) (Brennweite zweier Linsen) $D = (n-1)(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2})$ nach r_1,

f) (resultierende Brennkraft zweier Linsen) $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{e}{f_1f_2}$ nach f, f_2,

g) (Rydbergkonstante des Atoms X) $R_X = \frac{m_ee^4}{8h^3c_0\epsilon_0^2(1+\frac{m_e}{m_k})}$ nach m_k, m_e.

1

L 2.1 a) 0.8125. b) $0.\overline{990}$. c) 0.0444 4444. d) $1.0\overline{4}$. e) $2.\overline{0019}$. f) $2.00.\overline{19}$.

L 2.2 a) $\dfrac{21\,875}{100\,000} = \dfrac{7}{32}$. b) $x = 1.\overline{00423}$, $100\,000x = 100\,423.\overline{00423} \Rightarrow$
$99\,999x = 100\,422 \Rightarrow x = \dfrac{100\,422}{99\,999} = \dfrac{11\,158}{11\,111}$.

c) $x = 1.00\overline{423}$, $1000x = 1004.23\overline{423} \Rightarrow 999x = 1003.23 \Rightarrow x = \dfrac{1003.23}{999} = \dfrac{100323}{99\,900} = \dfrac{11\,147}{11\,100}$. d) $\dfrac{10\,666}{10\,000} = \dfrac{5\,333}{5\,000}$.

e) $x = 1.0\overline{6}$, $10x = 10.\overline{6} \Rightarrow 9x = 9.6 \Rightarrow x = \dfrac{9.6}{9} = \dfrac{96}{90} = \dfrac{16}{15}$.

f) $x = 0.\overline{9}$, $10x = 9.\overline{9} \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1$.

L 2.3 a) $a = 0.507\,042\ldots > b = 0.506\,172\ldots$. b) $b = 0.122\,122 < a = 0.\overline{122}$.
c) $a = 0.123\,456 < b = 0.123\,456\,25$. d) $a = -0.\overline{851} > b = -0.851\,852$.

L 2.4 a) $2a - 6b + 2c + 3d - da - c - 2a + ad - 3d + 6b = c$.
b) $2ab + ac - bc - 2ab + cb - ca = 0$.
c) $9a - 6b - [6a - 12b - 3c - 2a + 4c - 8b] = 5a + 14b - c$.

L 2.5 a) $(a-2b)(a-c) + (c-2b)(a-2b) = (a-2b)(a-c+c-2b) = (a-2b)^2$.
b) $(5b-1)(c+1)(6a+2-2(3a+1)) = 0$.
c) $2(a^2-ab-6b^2)(b+a) + (12b^2-11ab+2a^2)(b-a) = 2(a^3-7ab^2-6b^3) + 12b^3 - 23ab^2 + 13a^2b - 2a^3 = ab(13a-37b)$.

L 2.6 a) $3a(a+4b) + 4b(a+4b) = (3a+4b)(a+4b)$.
b) $4a^2(ac+bd) - 12ab(ac+bd) + 9b^2(ac+bd) = (ac+bd)(4a^2-12ab+9b^2) = (ac+bd)(2a-3b)^2$.
c) $a^2(4a-3b)+2ab(4a-3b)+b^2(4a-3b) = (a^2+2ab+b^2)(4a-3b) = (a+b)^2(4a-3b)$.
d) $a^2b(a-b) + a^2c(a-b) + 4bc^2(a-b) + 4abc(a-b) + 4ac^2(a-b) + 4c^3(a-b) = (a-b)[a^2(b+c) + 4c^2(b+c) + 4ac(b+c)] = (a-b)(b+c)(a^2+4ac+4c^2) = (a-b)(b+c)(a+2c)^2$.

L 2.7 a) $a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2(a^2+b^2)$.
b) $a^2 - 2ab + b^2 - (a^2+2ab+b^2) = -4ab$. c) $(b-a)^2 - (b-a)^2 = 0$.
d) $(a+b)^2 + (a+b)(a-b) = (a+b)(a+b+a-b) = 2a(a+b)$.
e) $(a+b)(a-b) - (a-b)^2 = (a-b)(a+b-a+b) = 2b(a-b)$.
f) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc-(a^2+2ab+b^2)-(a^2+2ac+c^2)-(b^2+2bc+c^2) = -(a^2+b^2+c^2)$.
g) $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc+a^2+2ac+c^2+b^2+2bc+c^2 = 2(a^2+b^2+ab)+3c^2$.
h) $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc+a^2+2ab+b^2-b^2-2bc-c^2 = 2a(a-c)+b^2$.

L 2.8 a) $(2a+3b)^2$. b) $(\sqrt{a}-\dfrac{2}{b})^2$. c) $(\sqrt{b}+\dfrac{1}{\sqrt{b}})^2$. d) $(\dfrac{\sqrt{2}}{a}-\dfrac{a}{2\sqrt{2}})^2$.

L 2.9 a) $(x+2)^2+2$ b) $(x-3)^2-1$. c) $2(y^2-4y)+4 = 2(y-2)^2-4$.
d) $(x+3)^2-(y-2)^2$. e) $3(x^2-2x)+4(y^2+4y)+20 = 3(x-1)^2+4(y+2)^2+1$.
f) $(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x})^2-1$. g) $(xy+\dfrac{1}{y})^2+\dfrac{1}{y^2}$.

L 2.10 a) $\dfrac{7-3+13-9}{8} = 1$. b) $\dfrac{28-10-11+3}{12} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$.
c) $\dfrac{32-18+4-27}{24}\cdot\dfrac{3+4+1}{6} = -\dfrac{9}{24}\cdot\dfrac{8}{6} = -\dfrac{1}{2}$.
d) $\dfrac{10-4-15-18}{20}\cdot\dfrac{2+3+6-1}{18} = -\dfrac{27}{20}\cdot\dfrac{10}{18} = -\dfrac{3}{4}$.
e) $\dfrac{6-2+5+15}{24} : \dfrac{4-7+6+3}{18} = 1 : \dfrac{1}{3} = 3$.
f) $\dfrac{4-3+6}{30} : \dfrac{45-30-15-10-4}{90} = \dfrac{7}{30} : (-\dfrac{14}{90}) = -\dfrac{3}{2}$.

L 2.11 a) $\dfrac{bc+2ac+ab}{abc}$. b) $\dfrac{a+b+c}{abc}$. c) $\dfrac{7a-ab+8}{2(a+2)(b+3)}$.
d) $\dfrac{(b-4a)(a+b)+2a^2+5ab+3b^2-a^2-2ab-b^2}{(a+b)^2} = \dfrac{-3(a^2-b^2)}{(a+b)^2} = -\dfrac{3(a-b)}{a+b}$. e) $\dfrac{a^2+c^2-2ac}{ab^2c} = \dfrac{(a-c)^2}{ab^2c}$.
f) $\dfrac{(u-10)(u-2)-(2u+3)(u+2)+u^2+7u+10}{(u+2)(u-2)} = -\dfrac{12}{u+2}$.
g) $\dfrac{3(a+1)-6-5(a-1)}{(a-1)(a+1)} = -\dfrac{2}{a+1}$
h) $\dfrac{(2z-1)(z-3)+(3z+4)(z+2)-5z^2-3z-11}{(z+2)(z-3)} = 0$.
i) $\dfrac{3(b-1)-3b+1}{b^2-1} + \dfrac{b-2-3(b+2)+2b+10}{b^2-4} = \dfrac{-2(b^2-4)+2(b^2-1)}{(b^2-1)(b^2-4)} = \dfrac{6}{(b^2-1)(b^2-4)}$.
j) $\dfrac{(a+b)(a+2b)-(4a-6b)(a-b)+(3a+23b)(a+2b)}{(a-b)(a+b)(a+2b)} = \dfrac{42ab+42b^2}{(a-b)(a+b)(a+2b)} = \dfrac{42b}{(a-b)(a+2b)}$.
k) $\dfrac{(a+b)\cdot 4(b+a)(b-a)}{(b-a)\cdot 2(a+b)} = 2(a+b)$. l) $\dfrac{(a-1)(a+2)(a-1)(a-3)}{a(a-1)(a-3)(a+2)} = \dfrac{a-1}{a}$.
m) $\dfrac{(a-b)^2\cdot 2(a+b)^2}{2(a+b)(b-a)(b+a)} = b-a$. n) $\dfrac{(a-1)(a+2)(a-3)(a+2)}{a(a-1)(a-1)(a-3)} = \dfrac{(a+2)^2}{a(a-1)}$.

Lösung zu BLH 2

o) $\dfrac{b(ab+1)-a-b}{a(1+ab)-a^2b+ab} = \dfrac{a(b^2-1)}{a(b+1)} = b-1.$

p) $\dfrac{a-\dfrac{a^3}{a^2-b^2}}{b-\dfrac{b^2}{b+a}} = \dfrac{\dfrac{a(a^2-b^2)-a^3}{(a-b)(a+b)}}{\dfrac{b(b+a)-b^2}{b+a}} = -\dfrac{b}{a-b}.$

q) $\dfrac{\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2y^2}}{\dfrac{x^2-y^2}{x^2y^2}} = \dfrac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)} = \dfrac{x+y}{x-y}.$

r) $\dfrac{\dfrac{2ab^2-a(b^2-a^2)}{(b^2-a^2)(b^2+a^2)}}{\dfrac{b-a+a}{b^2-a^2}} = \dfrac{ab^2+a^3}{b(b^2+a^2)} = \dfrac{a}{b}.$

$\boxed{\text{L 2.12}}$ a) $\alpha(T-T_0) = \dfrac{R}{R_0} - 1 = \dfrac{R-R_0}{R_0} \Rightarrow T = T_0 + \dfrac{R-R_0}{\alpha R_0}.$

b) $\epsilon(T_1-T_2) = T_2 \Rightarrow T_1 = T_2(\frac{1}{\epsilon}+1),\ T_2 = \dfrac{T_1}{\frac{1}{\epsilon}+1} = \dfrac{\epsilon T_1}{1+\epsilon}.$

c) $T_1 = T_m + \dfrac{(m_2c_2+C)(T_m-T_2)}{m_1c_1},\quad m_1c_1T_1 + (m_2c_2+C)T_2 =$

$m_1c_1T_m + (m_2c_2+C)T_m \Rightarrow T_m = \dfrac{m_1c_1T_1+(m_2c_2+C)T_2}{m_1c_1+m_2c_2+C},$

$\dfrac{m_1c_1(T_1-T_m)}{T_m-T_2} = m_2c_2 + C \Rightarrow c_2 = \dfrac{1}{m_2}\left(\dfrac{m_1c_1(T_1-T_m)}{T_m-T_2} - C\right).$

d) $1 - \dfrac{u'v}{c_0^2} = \dfrac{u'+v}{u} \Rightarrow \dfrac{u'v}{c_0^2} = \dfrac{u-u'-v}{u} \Rightarrow c_0^2 = \dfrac{uu'v}{u-u'-v},$

$u(1-\dfrac{u'v}{c_0^2}) = u'+v \quad (+) \Rightarrow u - v = u'(1+\dfrac{uv}{c_0^2}) \Rightarrow u' = \dfrac{c_0^2(u-v)}{c_0^2+uv}.$

Andererseits folgt aus $(+)$: $u - u' = v(1+\dfrac{uu'}{c_0^2}) \Rightarrow v = \dfrac{c_0^2(u-u')}{c_0^2+uu'}.$

e) $\dfrac{1}{r_1} = \dfrac{D}{n-1} - \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{Dr_2-n+1}{(n-1)r_2} \Rightarrow r_1 = \dfrac{(n-1)r_2}{Dr_2-n+1}.$

f) $\dfrac{1}{f} = \dfrac{f_2+f_1-e}{f_1f_2} \Rightarrow f = \dfrac{f_1f_2}{f_1+f_2-e},$

$\dfrac{1}{f} - \dfrac{1}{f_1} = \dfrac{1}{f_2}(1-\dfrac{e}{f_1}) \Rightarrow \dfrac{f_1-f}{ff_1} = \dfrac{1}{f_2}\cdot\dfrac{f_1-e}{f_1} \Rightarrow f_2 = \dfrac{f(f_1-e)}{f_1-f}.$

g) $1 + \dfrac{m_e}{m_k} = \dfrac{m_ee^4}{8h^3c_0\epsilon_0^2R_X}. \quad (*)$

$\Rightarrow \dfrac{m_e}{m_k} = \dfrac{m_ee^4 - 8h^3c_0\epsilon_0^2R_X}{8h^3c_0\epsilon_0^2R_X} \Rightarrow m_k = \dfrac{8h^3c_0\epsilon_0^2R_Xm_e}{m_ee^4-8h^3c_0\epsilon_0^2R_X}.$

Aus $(*)$ folgt andererseits $1 = m_e\left(\dfrac{e^4}{8h^3c_0\epsilon_0^2R_X} - \dfrac{1}{m_k}\right) =$

$m_e\left(\dfrac{m_ke^4-8h^3c_0\epsilon_0^2R_X}{8h^3c_0\epsilon_0^2R_Xm_k}\right) \Rightarrow m_e = \dfrac{8h^3c_0\epsilon_0^2R_Xm_k}{m_ke^4-8h^3c_0\epsilon_0^2R_X}.$

Lösung zu Blatt 2

Blatt 2a

$\boxed{\text{A } 2.13}$ Ermitteln Sie die folgenden Summen:

a) $\sum\limits_{i=1}^{4} \frac{i}{i+2}$ b) $\sum\limits_{i=4}^{7} \frac{i^2}{i-3}$ c) $\sum\limits_{i=2}^{6} \frac{(-1)^i}{i}$ d) $\sum\limits_{i=1}^{5} \frac{(-i)^i}{i!}$

e) $\sum\limits_{i=1}^{10} i$ f) $\sum\limits_{j=6}^{16} 2$ g) $\sum\limits_{i=1}^{5}(2i-1)$ h) $\sum\limits_{i=100}^{110}(100-i)$

i) $\sum\limits_{k=10}^{25} \frac{2(k-10)}{5}$ j) $\sum\limits_{i=50}^{60} \frac{i^2-1}{i+1}$ k) $\sum\limits_{j=0}^{4} \frac{1}{3^j}$ l) $\sum\limits_{i=1}^{5} 2^{4-i}$ m) $\sum\limits_{i=1}^{16} \frac{1}{i(i+1)}$

$\boxed{\text{A } 2.14}$ Man schreibe mit dem Summenzeichen:

a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ b) $a+3a+5a+7a$ c) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}$

d) $1+2+4+8+16+32$ e) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}$ f) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

g) $\frac{a}{20}-\frac{a}{120}+\frac{a}{300}-\frac{a}{560}$ h) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\frac{5}{26}$

i) $\frac{x}{x+2y}+\frac{2x+y}{3x+4y}+\frac{3x+2y}{5x+6y}+\frac{4x+3y}{7x+8y}+\frac{5x+4y}{9x+10y}$

$\boxed{\text{A } 2.15}$ Für beliebige $n \in \mathbb{N}^+$ ermittle man:

a) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} - \sum\limits_{i=2}^{n+1} \frac{1}{2i-2}$ b) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 + 2\sum\limits_{k=0}^{n} k + n + 1$ c) $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln \frac{k}{k+1}$

d) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ e) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)}$ f) $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{4j^2-1}$

$\boxed{\text{A } 2.16}$ Folgende Doppelsummen sind zu berechnen:

a) $\sum\limits_{i=3}^{5}\sum\limits_{j=1}^{3}(i-j)^2$ b) $\sum\limits_{j=4}^{6}\sum\limits_{i=1}^{3}(2i+3j)$ c) $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{3} i\cdot j^2$

d) $\sum\limits_{i=0}^{4}\sum\limits_{j=0}^{i} \frac{i}{j+1}$ e) $\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{i=1}^{j-1}(-1)^{i+j}(j+1)^i$ f) $\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{i=5}^{8-j} \frac{i-j}{i+j}$

$\boxed{\text{A } 2.17}$ Die folgenden Ausdrücke lassen sich jeweils zu *einer* Doppelsumme zusammenfassen. Geben Sie diese an und berechnen Sie ihren Wert.

a) $\sum\limits_{j=0}^{2}\sum\limits_{i=2}^{4}(i-1)^j + \sum\limits_{j=3}^{5}\sum\limits_{i=j}^{4}(i-1)^j$ b) $\sum\limits_{j=1}^{3}\sum\limits_{i=2}^{4} \frac{j+1}{i-1} + \sum\limits_{i=5}^{6}\sum\limits_{j=1}^{7-i} \frac{j+1}{i-1}$

Lösungshinweise zu Blatt 2a

$\boxed{\text{H 2.13}}$ Das **Summenzeichen** (als abkürzende Schreibweise) ist für $n \in \mathbb{N}^+$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, durch $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$ definiert.

Es gelten die **Rechenregeln**:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \quad (c \text{ const.})$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{r} a_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_i \quad (r < n) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1-k}^{n-k} a_{j+k} = \sum_{l=1+k}^{n+k} a_{l-k}$$

Vereinbarung: $\sum\limits_{i=s}^{r} a_i = 0$, falls $s > r$.

Für $n, m \in \mathbb{N}^+$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$, definiert man die **Doppelsumme** durch

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{im}) = \begin{array}{l} a_{11} + a_{12} + ... + a_{1m} + \\ a_{21} + a_{22} + ... + a_{2m} + \\ \;... \quad\;\; ... \quad\;\; ... + \\ a_{n1} + a_{n2} + ... + a_{nm}. \end{array}$$

Zusätzlich zu den obigen Rechenregeln gilt:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j$$

e) Es ist ~~(vgl. A 2.30)~~ $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$ j) Beachte: $\dfrac{i^2-1}{i+1} = \dfrac{(i+1)(i-1)}{i+1} = i - 1$.

k) $\sum \frac{1}{3^j} = \sum (\frac{1}{3})^j$; weiter s. A 2.30b. l) $\sum 2^{4-i} = 2^4 \sum (\frac{1}{2})^i$; ~~weiter s. A 2.30b.~~

m) Brüche der Gestalt $\dfrac{1}{(x+a)(x+b)}$ zerlege man in "Partialbrüche". Dazu macht man den Ansatz: $\dfrac{1}{(x+a)(x+b)} = \dfrac{A}{x+a} + \dfrac{B}{x+b}$, multipliziert diese Gleichung mit dem Hauptnenner und erhält so: $1 = A(x+b) + B(x+a)$.

Da diese Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten soll, müssen die Koeffizienten der unterschiedlichen x-Potenzen auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen ("Koeffizientenvergleich"), d.h., es muß gelten:

$A + B = 0$ und $Ab + Ba = 1$. Daraus ergibt sich: $A = \dfrac{1}{b-a}$, $B = -\dfrac{1}{b-a}$. Somit ist $\dfrac{1}{(x+a)(x+b)} = \dfrac{1}{b-a} \cdot \dfrac{1}{x+a} - \dfrac{1}{b-a} \cdot \dfrac{1}{x+b}$. $(*)$

Auf diese Weise erhält man z.B. $\dfrac{1}{i(i+1)} = \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1}$.

„Partialbruchzerlegung" ist Stoff der Vorlesung Ing.-Math. I → vgl. dort!

$\boxed{\text{H 2.15}}$ a) Beachte: $2i - 2 = 2(i-1) = 2j$ mit $i - 1 = j$.

b) Verwende: $n + 1 = \sum\limits_{k=0}^{n} 1$. c) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

d), e) siehe H 2.13m $(*)$. f) $\dfrac{1}{4j^2-1} = \dfrac{1}{(2j+1)(2j-1)}$; weiter nach H 2.13m $(*)$.

$\boxed{\text{H 2.17}}$ Ordnet man die bei den Summationen zu berücksichtigenden Indexpaare in einem (i, j)-Schema an, so ergibt sich folgendes Bild:

a)

$i \setminus j$	0	1	2	3	4
2	x	x	x		
3	x	x	x	o	
4	x	x	x	o	o

b)

$i \setminus j$	1	2	3
2	x	x	x
3	x	x	x
4	x	x	x
5	o	o	
6	o		

Bei den vorgegebenen Summationen werden in der ersten Doppelsumme die mit (x) markierten Indexpaare, in der zweiten Doppelsumme die mit o markierten berücksichtigt. Eine einzige Doppelsumme erhält man, wenn

bei a) die Indexpaare zunächst in j-, danach in i-Richtung,

bei b) die Indexpaare zunächst in i-, danach in j-Richtung summiert werden.

Ferner ist es zweckmäßig, in a) und b) $k = i - 1$ und bei b) $l = j + 1$ als neue Summationsindizes einzuführen.

L 2.13 a) $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5}+\frac{4}{6}=2.1.$ b) $\frac{16}{1}+\frac{25}{2}+\frac{36}{3}+\frac{49}{4}=52.75.$

c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{23}{60}.$ d) $-1+\frac{4}{2}-\frac{27}{6}+\frac{256}{24}-\frac{3125}{120}=-\frac{151}{8}.$

e) Mit H 2.13e ergibt sich $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11=55.$

f) $\sum\limits_{j=6}^{16} 2 = 2\sum\limits_{j=6}^{16} 1^j = 2(1^6+1^7+\ldots+1^{16}) = 2\cdot 11 = 22.$

g) $\sum\limits_{i=1}^{5}(2i-1) = 2\sum\limits_{i=1}^{5} i - \sum\limits_{i=1}^{5} 1^i = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6 - 5 = 25$ mit H 2.13e.

h) $\sum\limits_{i=100}^{110}(100-i) = -\sum\limits_{i=100}^{110}(i-100).$ Setze $k=i-100 \Rightarrow$
$-\sum\limits_{k=0}^{10} k = -\sum\limits_{k=1}^{10} k = -\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11 = -55$ mit H 2.13e.

i) $\sum\limits_{k=10}^{25}\frac{2(k-10)}{5} = \frac{2}{5}\sum\limits_{k=10}^{25}(k-10).$ Setze $j=k-10 \Rightarrow$
$\frac{2}{5}\sum\limits_{j=0}^{15} j = \frac{2}{5}\sum\limits_{j=1}^{15} j = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 16 = 48$ mit H 2.13e.

j) Nach H 2.13j erhält man $\sum\limits_{i=50}^{60}(i-1) = \sum\limits_{j=49}^{59} j = \sum\limits_{j=1}^{59} j - \sum\limits_{j=1}^{48} j =$
$\frac{1}{2}\cdot 59\cdot 60 - \frac{1}{2}\cdot 48\cdot 49 = 594$ mit H 2.13e.

k) $\sum\limits_{i=0}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^j = \frac{(\frac{1}{3})^5-1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{121}{81}$ mit H 2.13k.

l) $2^4\sum\limits_{i=1}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^i = 2^4\left(\frac{(\frac{1}{2})^6-1}{\frac{1}{2}-1}-1\right) = \frac{31}{2}$ mit H 2.13l.

m) Mit H 2.13m ergibt sich $\sum\limits_{i=1}^{16}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right) = \sum\limits_{i=1}^{16}\frac{1}{i} - \sum\limits_{j=2}^{17}\frac{1}{j} = 1-\frac{1}{17} = \frac{16}{17}.$

L 2.14 a) $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{1}{i}.$ b) $a\sum\limits_{i=1}^{4}(2i-1).$ c) $\sum\limits_{i=1}^{4}(-1)^{i+1}\frac{i}{i+1}.$

d) $\sum\limits_{i=0}^{5} 2^i.$ e) $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{(-1)^i}{2i}.$ f) $\sum\limits_{i=0}^{4}\frac{1}{2^i}.$ g) $\frac{a}{10}\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{(-1)^{i+1}}{2i(2i-1)}.$

h) $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{i}{i^2+1}.$ i) $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{ix+(i-1)y}{(2i-1)x+2iy}.$

L 2.15 a) $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \frac{1}{2}\sum\limits_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i-1} = \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right) = 0.$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)^2 = \sum\limits_{j=1}^{n+1} j^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$ ~~nach A 2.30d.~~

c) Mit H 2.16c ergibt sich $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k - \sum\limits_{j=2}^{n+1}\ln j = \ln 1 - \ln(n+1) = -\ln(n+1).$

d) Mit H 2.15d erhält man $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1} =$
$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \sum\limits_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$

e) Mit H 2.15e erhält man $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{3i-2} - \frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{3i+1}.$ Ersetzt man in der zweiten Summe i durch $k-1$, so ergibt sich:
$\frac{1}{3}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{3i-2} - \sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{3k-2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3(n+1)-2}\right) = \frac{n}{3n+1}.$

f) Mit H 2.15f erhält man $\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{4j^2-1} = \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{2j-1} - \sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{2j+1}\right) =$ (mit $j=k-1$ in der zweiten Summe) $\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{2j-1} - \sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{2k-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2(n+1)-1}\right) = \frac{n}{2n+1}.$

L 2.16 a) $\sum\limits_{i=3}^{5}[(i-1)^2+(i-2)^2+(i-3)^2] = [2^2+1^2+0^2]+[3^2+2^2+1^2]+[4^2+3^2+2^2] = 48.$

b) $2\sum\limits_{j=4}^{6}1^j\cdot\sum\limits_{i=1}^{3} i + 3\sum\limits_{i=1}^{3}1^i\cdot\sum\limits_{j=4}^{6} j = 2\cdot 3(1+2+3) + 3\cdot 3(4+5+6) = 171.$

Beachte: $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(a_i+b_j) = m\sum\limits_{i=1}^{n}a_i + n\sum\limits_{j=1}^{m}b_j \neq \sum\limits_{i=1}^{n}a_i + \sum\limits_{j=1}^{m}b_j.$

c) $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{3} i\cdot j^2 = \sum\limits_{i=1}^{4} i\cdot\sum\limits_{j=1}^{3} j^2 =$
$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5(1+2^2+3^2) = 140.$

d) Als Summanden ergeben sich für:

$i=0:$ 0

$i=1:$ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}$

$i=2:$ $\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}$

$i=3:$ $\frac{3}{1}+\frac{3}{2}+\frac{3}{3}+\frac{3}{4}$

$i=4:$ $\frac{4}{1}+\frac{4}{2}+\frac{4}{3}+\frac{4}{4}+\frac{4}{5}$

Insgesamt: $\sum\limits_{i=0}^{4}\sum\limits_{j=0}^{i}\frac{i}{j+1} = 20.55.$

e) Als Summanden ergeben sich für:

$j=1:$ 0

$j=2:$ -3

$j=3:$ $4-4^2$

$j=4:$ $-5+5^2-5^3$

Insgesamt: $\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{i=1}^{j-1}(-1)^{i+j}(j+1)^i$
$= -120.$

f) Als Summanden ergeben sich für:

$j=1:$ $\frac{4}{6}+\frac{5}{7}+\frac{6}{8}$

$j=2:$ $\frac{3}{7}+\frac{4}{8}$

$j=3:$ $\frac{2}{8}$

$j=4$ 0

Insgesamt: $\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{i=5}^{8-j} = \frac{139}{42}.$

L 2.17 Unter Verwendung von H 2.17 erhält man:

a) $\sum\limits_{i=2}^{4}\sum\limits_{j=0}^{i}(i-1)^j$ oder (mit $k=i-1$) $\sum\limits_{k=1}^{3}\sum\limits_{j=0}^{k+1}k^j = 139.$

b) $\sum\limits_{j=1}^{3}\sum\limits_{i=2}^{7-j}\frac{j+1}{i-1}$ oder (mit $k=j+1,\ l=i-1$) $\sum\limits_{k=2}^{4}\sum\limits_{l=1}^{7-k}\frac{k}{l} = 18.15.$

Lösung zu Blatt 2a

Ges: Lösungsmenge der Gleichungen

$\boxed{\text{A 3.1}}$ a) $5(x-3)-3(2x+1)=3x+2(4-x)$
b) $(x+2)(4-x)+(2x-1)(5+x)=(3+x)(4x-1)-3(x+2)(x+5)+15$
c) $\frac{1}{6}(5x+2)+\frac{1}{8}(3-x)-\frac{2}{3}(4x-1)=\frac{1}{4}(3x-1)$

$\boxed{\text{A 3.2}}$ a) $x(a-1)+b(2+c-x)=4bc-x, \quad a,b,c\in I\!R$
b) $ax(a+b)-(x+a)(a+ab)=(b^2-a)x+(a-\frac{2}{3}b)(\frac{3}{2}b+a)-ab(a-\frac{1}{6})$
c) $\frac{bx-a}{b}+\frac{a}{x}=\frac{b}{x}-\frac{b-ax}{a}$

$\boxed{\text{A 3.3}}$ a) $x^2-x-12=0$ b) $3x^2+3x-6=0$ c) $-2x^2+4x-12=0$
d) $12x^2+x-1=0$ e) $1+x^2=5$ f) $(1-x)^2=4$

$\boxed{\text{A 3.4}}$
a) $(x+3)(x-4)(x+5)=0$ b) $(x^2-4)(x+1)=0$ c) $x^3-3x^2-10x=0$
d) $8x^4-6x^2+1=0$ e) $x(5x^3-4x)-1=0$ f) $\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x}=-x$

$\boxed{\text{A 3.5}}$
a) $\frac{5x-3}{2x+4}-\frac{x+1}{x-2}=\frac{26}{x^2-4}+\frac{3x-25}{2x-4}$ b) $\frac{1-2x}{x-3}-\frac{5-x}{x+1}=\frac{9x+18}{9-3x}+\frac{4x+2}{2x+2}$
c) $\frac{7x+5}{3x-3}-\frac{2x+3}{2x+4}=\frac{3x+5}{2x-2}+\frac{1-2x}{3x+6}$
d) $\frac{x^3-6x}{x^2-1}+\frac{4-2x^2}{x^2+3x+2}=\frac{x-9}{x^2+x-2}+\frac{1}{(x+2)(x^2-1)}$

$\boxed{\text{A 3.6}}$ a) $ax^2-2bx+b^2=0$ b) $x^2+2(a+b)x+4ab=0$
c) $\frac{x+2b}{a}-\frac{x+2a}{b}=\frac{2(x-2ab+2a)}{ax}-\frac{2(x-2ab+2a)}{bx}$

Wurzelgleichungen

$\boxed{\text{A 3.7}}$ Folgende Wurzelgleichungen sind zu lösen:
a) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}=1$ b) $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2+11}=10$
c) $\sqrt{x-3}+\sqrt{3x+7}=\sqrt{2x+10}$ d) $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+10}=\sqrt{20-5x}$
e) $2\sqrt{x}+\sqrt{2x-2}=\sqrt{x+1}$ f) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x-1}$
g) $\sqrt{5-x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x+2}-\sqrt{2-2x}$
h) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+14}+\sqrt{x-7}$
i) $11\sqrt[3]{x}-6\sqrt[3]{x^2}+x=6$ j) $\sqrt{2+2\sqrt{x}}-\sqrt{\sqrt{x}-1}=2\sqrt[4]{x}$
k) $\sqrt[3]{2x+4}+\sqrt[3]{5-2x}=3$ l) $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{2x+2}=\sqrt[3]{(x+1)^2}$

Ungleichungen

$\boxed{\text{A 3.8}}$ Gesucht sind die Lösungsmengen L folgender Ungleichungen:
a) $2x-3<3x+2$ b) $ax-4>2x-1, \; a\in I\!R$ c) $-x^2+5x>6$
d) $8x-6\le 2x^2$ e) $\frac{3x+2}{x-1}<4$ f) $\frac{2x^2-1}{x+2}<2x-3$
g) $\frac{3x^2-4}{x^2-1}>3$ h) $\frac{4x-5}{2x-4}<\frac{2x+3}{x+1}$ i) $\frac{10x+2}{x+5}<\frac{9x+3}{x+4}$

Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

$\boxed{\text{A 3.9}}$ Geben Sie die Lösungsmengen L folgender Betragsgleichungen an:
a) $|x-5|=1$ b) $|x-1|+x=2-x$
c) $|x-2|+|x+1|=2x+2$ d) $|x-1|+|x+2|=3$
e) $|x+1|+|x-1|=|x|$ f) $|x+1|-|x-1|=|x|$
g) $|x+2|-|2-x|=2|x|$ h) $||x+2|-|x-1||=3$

$\boxed{\text{A 3.10}}$ Bestimmen Sie die Lösungsmengen L der folgenden Ungleichungen:
a) $|x-2|\le 3$ b) $|x+4|>2$ c) $|x+1|-x\ge 1$
d) $|x+3|<4-|x-2|$ e) $|x-3|+|x+1|\le 2+x$ f) $|x+2|-x+|x-4|\ge 0$
g) $|x^2+2x-24|\le 24$ h) $|x-5|\le |x^2-7|$ i) $\frac{|x-12|}{x-2}\ge 6+x$
j) $\frac{3}{5-x}+|x|<|x-5|$ k) $||x-2|-|x+1|+6|\le 3$ l) $|x+|x-1||>\frac{|x|}{x+2}$

1

L 3.1 a) $5x - 15 - 6x - 3 = 3x + 8 - 2x \;\Rightarrow\; L = \{-13\}$.

b) $-x^2+2x+8+2x^2+9x-5 = 4x^2+11x-3-3x^2-21x-30+15 \;\Rightarrow\; L=\{-1\}$.

c) $\frac{5}{6}x + \frac{1}{3} + \frac{3}{8} - \frac{1}{8}x - \frac{8}{3}x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; -\frac{65}{24}x = -\frac{13}{8} \;\Rightarrow\; L = \{\frac{3}{5}\}$.

L 3.2 a) $x(a-b) = b(3c-2)$ (*)

Falls $a \neq b \;\Rightarrow\; L = \left\{\dfrac{b(3c-2)}{a-b}\right\}$.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Falls} & a=b=0\\ \text{oder} & a=b\neq 0 \text{ und } c=\frac{2}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow L = \mathbb{R}\text{, da (*) die Identität } 0=0 \text{ darstellt, also für jedes } x\in\mathbb{R} \text{ erfüllt ist.}$$

Falls $a = b \neq 0$ und $c \neq \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; L=\emptyset$ ((*) ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ widersprüchlich).

b) $x[a^2+ab-a-ab-b^2+a] = \frac{3}{2}ab + a^2 - b^2 - \frac{2}{3}ab - a^2 b + \frac{1}{6}ab + a^2 + a^2 b \;\Leftrightarrow$
$x[a^2-b^2] = ab+2a^2-b^2 \;\Leftrightarrow\; x(a+b)(a-b) = a(a+b)+(a+b)(a-b)$.

Falls $a=-b$ oder $a=b=0 \;\Rightarrow\; L=\mathbb{R}$. Falls $a=b\neq 0 \;\Rightarrow\; L=\emptyset$.

Falls $|a|\neq|b| \;\Rightarrow\; L = \left\{\dfrac{2a-b}{a-b}\right\}$.

c) Voraussetzung: $a\neq 0,\; b\neq 0,\; x\neq 0$.

$$\frac{ax(bx-a)+a\cdot ab - b\cdot ab + bx(b-ax)}{abx} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$x^2(ab-ab)+x(-a^2+b^2)+ab(a-b)=0 \;\Leftrightarrow\; x(b-a)(b+a)-ab(b-a)=0$.

Falls $a=b$, ist $L = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Falls $a=-b$, ist $L=\emptyset$.

Falls $|a|\neq|b|$, ist $L = \left\{\dfrac{ab}{a+b}\right\}$.

L 3.3 a) Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man: $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12}$. Somit ist $L = \{-3,\; 4\}$.

b) Normalform: $x^2+x-2=0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}$, also ist $L=\{-2,\; 1\}$.

c) Normalform: $x^2-2x+6=0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = 1\pm\sqrt{1-6}$: Es gibt keine reellen Lösungen, d.h. $L=\emptyset$.

d) Normalform: $x^2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{12} = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = -\frac{1}{24}\pm\sqrt{\frac{1}{576}+\frac{1}{12}} \;\Rightarrow\; L=\{-\frac{1}{3},\; \frac{1}{4}\}$.

e) $x^2=4 \;\Leftrightarrow\; |x|=2$, daher ist $L=\{-2,\; 2\}$.

f) $|1-x|=2$, d.h. $1-x=2$ oder $-(1-x)=2$, folglich ist $L=\{-1,\; 3\}$.

L 3.4 a) $(x+3)(x-4)(x+5)=0 \;\Leftrightarrow\; (x+3=0)\vee(x-4=0)\vee(x+5=0) \;\Rightarrow$ $L=\{-3,\; 4,\; -5\}$.

b) $(x+2)(x-2)(x+1)=0 \;\Leftrightarrow\; (x+2=0)\vee(x-2=0)\vee(x+1=0) \;\Rightarrow$ $L=\{-2,\; 2,\; -1\}$.

c) $x(x^2-3x-10)=0 \;\Leftrightarrow\; (x=0)\vee(x^2-3x-10=0)$;
$x^2-3x-10=0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+10}$. Somit ist $L=\{0,\; -2,\; 5\}$.

d) Mit H 3.4d ergibt sich die Normalform $z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}=0 \;\Leftrightarrow\; z_{1,2}=\frac{3}{8}\pm\sqrt{\frac{9}{64}-\frac{1}{8}} \;\Rightarrow$
$z_1=x^2=\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; x_1=-\frac{1}{2},\; x_2=\frac{1}{2}$,
$z_2=x^2=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_3=-\frac{1}{\sqrt{2}},\; x_4=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Also gilt: $L=\{-\frac{1}{2},\; \frac{1}{2},\; -\frac{1}{\sqrt{2}},\; \frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

e) Mit H 3.4d ergibt sich die Normalform $z^2-\frac{4}{5}z-\frac{1}{5}=0 \;\Leftrightarrow\; z_{1,2}=\frac{2}{5}\pm\sqrt{\frac{4}{25}+\frac{1}{5}} \;\Rightarrow$
$z_1=x^2=-\frac{1}{5}$ entfällt, da $x^2\geq 0$ sein muß.
$z_2=x^2=1 \;\Rightarrow\; x_1=-1,\; x_2=1$. Daher ist $L=\{-1,\; 1\}$.

f) $\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x} = -x \;\Leftrightarrow\; (1-2x^2+x^4=0)\wedge(x\neq 0) \;\Leftrightarrow\; (z-1)^2=0$ (mit $z=x^2$). $\Leftrightarrow$ $z=1 \;\Leftrightarrow\; x_1=1,\; x_2=-1$. Daher ist $L=\{-1,\; 1\}$.

L 3.5 a) Voraussetzung: $x\neq 2,\; x\neq -2$. Gleichnamigmachen:

$$\frac{(5x-3)(x-2)-(x+1)2(x+2)}{2(x+2)(x-2)} = \frac{26\cdot 2+(3x-25)(x+2)}{2(x+2)(x-2)}.$$

Beseitigen des Hauptnenners, Ausmultiplizieren und Ordnen führt zu der Gleichung $0\cdot x^2+0\cdot x-0=0$, die für alle $x\in\mathbb{R}$ erfüllbar ist; daher folgt $L=\mathbb{R}\setminus\{-2,\; 2\}$.

b) Voraussetzung: $x\neq -1,\; x\neq 3$. Kürzen der rechts stehenden Brüche, Gleichnamigmachen und Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x-3)(x+1)$ liefert:
$(1-2x)(x+1)-(5-x)(x-3) = -(3x+6)(x+1)+(2x+1)(x-3)$.
Nach x-Potenzen geordnet, ergibt dies $0\cdot x^2+5x+25=0$. Folglich ist $L=\{-5\}$.

c) Voraussetzung: $x\neq -2,\; x\neq 1$. Gleichnamigmachen, Multiplikation mit dem Hauptnenner $6(x-1)(x+2)$ und Ordnen nach x-Potenzen ergibt: $3x^2-4x+1=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2}=\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{9}-\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; x_1=\frac{1}{3},\; x_2=1$ (entfällt nach Voraussetzung). Daher ist $L=\{\frac{1}{3}\}$.

Anderer Lösungsweg (unter derselben Voraussetzung): Durch Umordnen der Ausgangsgleichung erhält man zunächst $\dfrac{7x+5}{3(x-1)} - \dfrac{3x+5}{2(x-1)} = \dfrac{1-2x}{3(x+2)} + \dfrac{2x+3}{2(x+2)}$.

Nach Multiplikation mit 6 ergibt sich: $\dfrac{2(7x+5)-3(3x+5)}{6(x-1)} = \dfrac{2(1-2x)+3(2x+3)}{6(x+2)}$

$$\Leftrightarrow\; \frac{5x-5}{6(x-1)} = \frac{2x+11}{6(x+2)} \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{6} = \frac{2x+11}{6(x+2)} \;\Leftrightarrow\; 5(x+2)=2x+11 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{1}{3}.$$

d) Voraussetzung: $x\neq -1,\; x\neq 1,\; x\neq -2$. Gleichnamigmachen, Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x+2)(x^2-1)$ und Ordnen nach x-Potenzen ergibt: $x^4-5x^2+4=0$. Mit $z=x^2$ erhält man $z^2-5z+4=0$. Daraus folgt $z_1=1$ - also $x_1=-1,\; x_2=1$ - und $z_2=4$ - also $x_3=-2,\; x_4=2$. Wegen der obigen Voraussetzung ist $L=\{2\}$.

L 3.6 a) Falls $a=0$ und $b=0$, ist die Gleichung identisch erfüllt, daher $L=\mathbb{R}$.
Falls $a=0$ und $b\neq 0$, hat die Gleichung $-2bx+b^2=0$ die Lösungsmenge $L=\{\frac{1}{2}b\}$.
Falls $a\neq 0$, hat die Gleichung die Normalform $x^2-\dfrac{2b}{a}x+\dfrac{b^2}{a}=0$. Die Lösungsformel liefert $x_{1,2}=\dfrac{b}{a}\pm\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{b^2}{a}}=\dfrac{b}{a}(1\pm\sqrt{1-a})$.
Falls $a\leq 1,\; a\neq 0$, ist $L=\{\frac{b}{a}(1-\sqrt{1-a}),\; \frac{b}{a}(1+\sqrt{1-a})\}$.
Falls $a>1$, hat die Gleichung keine reelle Lösung, d.h. $L=\emptyset$.

Lösungen zu Blatt 3

(2)

b) Es ist $x_{1,2} = -(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} = -a - b \pm \sqrt{(a-b)^2} = -a - b \pm |a-b|$. Sowohl für $a \geq b$, als auch für $a < b$ ist $L = \{-2a,\ -2b\}$.

c) Unter der Voraussetzung $a \neq 0$, $b \neq 0$, $x \neq 0$ werden beide Seiten der Gleichung auf den Hauptnenner abx gebracht und anschließend mit dem Hauptnenner multipliziert. Danach ordnet man nach x-Potenzen und erhält:
$x^2(b-a) + 2x(b^2 - a^2 - b + a) + 4(ab^2 - ab - a^2b + a^2) = 0 \Leftrightarrow$
$x^2(b-a) + 2x(b-a)(b+a-1) + 4a(b-a)(b-1) = 0$.
Falls $b = a$, ist $L = \mathbb{R}$.
Falls $b \neq a$, hat man die Gleichung $x^2 + 2x(b+a-1) + 4a(b-1) = 0$ zu lösen. Die Lösungsformel liefert $x_{1,2} = -(b+a-1) \pm \sqrt{(b+a-1)^2 - 4a(b-1)}$.
Wegen $(b+a-1)^2 - 4a(b-1) = b^2 + a^2 + 1 + 2ab - 2b - 2a - 4ab + 4a = b^2 + a^2 + 1 - 2ab - 2b + 2a = (b-a-1)^2$ erhält man
$x_{1,2} = -(b+a-1) \pm |b-a-1|$, somit $L = \{-2a,\ 2-2b\}$.

$\boxed{\text{L 3.7}}$ a) Voraussetzungen: $x \geq 1 \wedge x \geq 4$, d.h. $x \geq 4$.
$\sqrt{x-1} = 1 + \sqrt{x-4} \Rightarrow x - 1 = 1 + 2\sqrt{x-4} + x - 4 \Leftrightarrow 2 = 2\sqrt{x-4} \Rightarrow 1 = x - 4$. Somit ist $L = \{5\}$.

b) Voraussetzung: $|x| \geq 3$.
$\sqrt{x^2-9} = 10 - \sqrt{x^2+11} \Rightarrow x^2 - 9 = 100 - 20\sqrt{x^2+11} + x^2 + 11 \Leftrightarrow 20\sqrt{x^2+11} = 120 \Leftrightarrow x^2 + 11 = 36 \Leftrightarrow x^2 = 25$. Also ist $L = \{-5, 5\}$.

c) Voraussetzungen: $x \geq 3 \wedge x \geq -\frac{7}{3} \wedge x \geq -5$, d.h. $x \geq 3$.
$x - 3 + 2\sqrt{x-3}\sqrt{3x+7} + 3x + 7 = 2x + 10 \Leftrightarrow 2x - 6 = -2\sqrt{x-3}\sqrt{3x+7} \Leftrightarrow x - 3 = -\sqrt{x-3}\sqrt{3x+7} \Rightarrow (x-3)^2 = (x-3)(3x+7) \Leftrightarrow (x = 3) \vee (x - 3 = 3x + 7) \Leftrightarrow (x = 3) \vee (x = -5)$. $x = -5$ ist Scheinlösung (folgt aus der Voraussetzung), so daß man $L = \{3\}$ erhält.

d) Voraussetzungen: $x \leq 3 \wedge x \geq -5 \wedge x \leq 4$, d.h. $x \in [-5, 3]$.
$3 - x + 2\sqrt{3-x}\sqrt{x+10} + x + 10 = 20 - 5x \Leftrightarrow 5x - 7 = -2\sqrt{3-x}\sqrt{x+10} \Rightarrow (5x-7)^2 = 4(3-x)(x+10) \Leftrightarrow 29x^2 - 42x - 71 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{71}{29}$, $x_2 = -1$. Da $x = 71/29$ Scheinlösung ist (nach Probe), erhält man $L = \{-1\}$.

e) Voraussetzungen: $x \geq 0 \wedge x \geq 1 \wedge x \geq -1$, d.h. $x \geq 1$.
$4x + 4\sqrt{x}\sqrt{2x-2} + 2x - 2 = x + 1 \Leftrightarrow 5x - 3 = -4\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{x-1} \Rightarrow (5x-3)^2 = 32x(x-1) \Leftrightarrow 7x^2 - 2x - 9 = 0$. Da $x = -1$ Scheinlösung ist (folgt aus der Voraussetzung) und $x = \frac{9}{7}$ Scheinlösung ist (nach Probe), gilt $L = \emptyset$.

f) Voraussetzungen: $x \leq 1 \wedge x \geq 2 \wedge x \geq 1$, d.h. $L = \emptyset$.

g) Voraussetzungen: $x \leq 5 \wedge x \geq 1 \wedge x \geq -\frac{1}{2} \wedge x \leq 1$, d.h. als Lösung kommt nur $x = 1$ in Frage. Durch Einsetzen stellt man fest: $L = \{1\}$.

h) Voraussetzungen: $x \geq -5 \wedge x \geq 2 \wedge x \geq -14 \wedge x \geq 7$, d.h. $x \geq 7$.
$x + 5 + 2\sqrt{x+5}\sqrt{x-2} + x - 2 = x + 14 + 2\sqrt{x+14}\sqrt{x-7} + x - 7 \Leftrightarrow \sqrt{x+5}\sqrt{x-2} = \sqrt{x+14}\sqrt{x-7} + 2 \Rightarrow (x+5)(x-2) = (x+14)(x-7) + 4\sqrt{x+14}\sqrt{x-7} + 4 \Leftrightarrow -4x + 84 = 4\sqrt{x+14}\sqrt{x-7} \Rightarrow (-x+21)^2 = (x+14)(x-7) \Leftrightarrow 49x = 539$. Folglich ist $L = \{11\}$.

i) Voraussetzung: $x \geq 0$. Setze $\sqrt[3]{x} = z$. Dann gilt: $11z - 6z^2 + z^3 - 6 = 0$. Mit der in H 4.39 beschriebenen Methode erhält man $z_1 = 1 \Rightarrow x_1 = z_1^3 = 1$; $z_2 = 2 \Rightarrow x_2 = z_2^3 = 8$; $z_3 = 3 \Rightarrow x_3 = z_3^3 = 27$. Somit ist $L = \{1, 8, 27\}$.

j) Voraussetzungen: $x \geq 0 \wedge \sqrt{x} \geq 1$, d.h. $x \geq 1$.
$2 + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{2 + 2\sqrt{x}}\sqrt{\sqrt{x} - 1} + \sqrt{x} - 1 = 4\sqrt{x}$. Setze $\sqrt{x} = z$ (wegen der Voraussetzung ≥ 1). Das liefert $-2\sqrt{2}\sqrt{1+z}\sqrt{z-1} = z - 1 \Rightarrow 8(z^2 - 1) = (z-1)^2 \Leftrightarrow (z-1)(8(z+1) - (z-1)) = 0 \Rightarrow z_1 = 1 \Rightarrow x_1 = z_1^2 = 1$; $z_2 = -\frac{9}{7}$ ist Scheinlösung (da $z \geq 1$ vorausgesetzt ist). Daher ist $L = \{1\}$.

k) Voraussetzungen: $x \geq -2 \wedge x \leq \frac{5}{2}$, d.h. $x \in [-2, 2.5]$.
$2x + 4 + 3\sqrt[3]{2x+4}^{\,2} \cdot \sqrt[3]{5-2x} + 3\sqrt[3]{2x+4} \cdot \sqrt{5-2x}^{\,2} + 5 - 2x = 27 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{2x+4} \cdot \sqrt[3]{5-2x}\left(\sqrt[3]{2x+4} + \sqrt[3]{5-2x}\right) = 18$. Nach Aufgabenstellung ist $\sqrt[3]{2x+4} + \sqrt[3]{5-2x} = 3$. Somit folgt $9\sqrt[3]{2x+4}\,\sqrt[3]{5-2x} = 18 \Rightarrow (2x+4)(5-2x) = 8 \Leftrightarrow -4x^2 + 2x + 12 = 0$. Daraus erhält man die Lösungsmenge $L = \{-1.5, 2\}$.

l) Voraussetzung: $|x| \geq 1$.
$x^2 - 1 + 3\sqrt[3]{x^2-1}^{\,2} \cdot \sqrt[3]{2(x+1)} + 3\sqrt[3]{x^2-1} \cdot \sqrt[3]{2(x+1)}^{\,2} + 2(x+1) = (x+1)^2$.
Nach Aufgabenstellung ist $\sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{2(x+1)} = \sqrt[3]{(x+1)^2}$. Somit folgt
$(x+1)(x-1) + 3\sqrt[3]{x^2-1}\sqrt[3]{2(x+1)}\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2(x+1) = (x+1)^2 \Leftrightarrow$
$3\sqrt[3]{x^2-1}\sqrt[3]{2(x+1)}\sqrt[3]{(x+1)^2} = 0$. Daraus ergibt sich $L = \{-1, 1\}$.

$\boxed{\text{L 3.8}}$ a) $x > -5$, d.h $L = (-5, +\infty)$.

b) $(a-2)x > 3$. Falls $a > 2:\ L = (\frac{3}{a-2}, +\infty)$; falls $a < 2:\ L = (-\infty, \frac{3}{a-2})$; falls $a = 2:\ L = \emptyset$.

c) $x^2 - 5x + 6 = 0$ für $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Der Graph von $y = -x^2 + 5x - 6$ verläuft *oberhalb* der x-Achse für $x \in (2,3)$. Daher: $L = (2,3)$.
Anderer Lösungsweg: Es ist $-x^2 + 5x > 6 \Leftrightarrow -(x^2 - 5x + \frac{25}{4}) > 6 - \frac{25}{4} \Leftrightarrow -(x - \frac{5}{2})^2 > -\frac{1}{4} \Leftrightarrow (x - \frac{5}{2})^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |x - \frac{5}{2}| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x - \frac{5}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 < x < 3$.
Damit: $L = (2, 3)$.

d) $x^2 - 4x + 3 = 0$ für $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Der Graph von $y = 2x^2 - 8x + 6$ verläuft *unterhalb* der x-Achse für $x \in (1,3)$. Daher: $L = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$.
Anderer Lösungsweg: Es ist $8x - 6 \leq 2x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x - 2| \geq 1 \Leftrightarrow (x - 2 \geq 1) \vee (-x + 2 \geq 1) \Leftrightarrow (x \geq 3) \vee (x \leq 1)$. Damit: $L = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$.

e) Voraussetzung: $x \neq 1$.
1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, 1):\ 3x + 2 > 4(x-1) \Leftrightarrow 6 > x$,
d.h. $x \in M_1 = (-\infty, 6)$. Daher: $L_1 = I_1 \cap M_1 = (-\infty, 1)$.
2.Fall: $x \in I_2 = (1, +\infty):\ 3x + 2 < 4(x-1) \Leftrightarrow 6 < x$,
d.h. $x \in M_2 = (6, +\infty)$. Daher: $L_2 = I_2 \cap M_2 = (6, +\infty)$.
Ergebnis: $L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$.

Lösungen zu Blatt 3

3

f) Voraussetzung: $x \neq -2$.
1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -2): \; 2x^2 - 1 > (2x-3)(x+2) \;\Leftrightarrow\; 5 > x$,
d.h. $x \in M_1 = (-\infty, 5)$. Daher: $L_1 = (-\infty, -2)$.
2.Fall: $x \in I_2 = (-2, +\infty): \; 2x^2 - 1 < (2x-3)(x+2) \;\Leftrightarrow\; 5 < x$,
d.h. $x \in M_2 = (5, +\infty)$. Daher: $L_2 = (5, +\infty)$.
Ergebnis: $L = (-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$.

g) Voraussetzung: $|x| \neq 1$.
1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -1): \; 3x^2 - 4 > 3(x^2-1) \Leftrightarrow -4 > -3$. Dies ist ein Widerspruch, also für *kein* $x \in I\!R$ erfüllbar; d.h. $M_1 = \emptyset$. $L_1 = I_1 \cap M_1 = \emptyset$.
2.Fall: $x \in I_2 = (-1, 1): \; 3x^2 - 4 < 3(x^2-1) \;\Leftrightarrow\; -4 < -3$. Dies ist *immer* richtig, unabhängig von x, d.h. $M_2 = I\!R$. $L_2 = I_2 \cap M_2 = (-1, 1)$.
3.Fall: $x \in I_3 = (1, +\infty): \; 3x^2 - 4 > 3(x^2-1) \;\Leftrightarrow\; -4 > -3$. Daher: $M_3 = L_3 = \emptyset$.
Ergebnis: $L = (-1, 1)$.

Anderer Lösungsweg: Es ist $\dfrac{3x^2-4}{x^2-1} > 3 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{3(x^2-1)-1}{x^2-1} \;\Leftrightarrow\; 3 - \dfrac{1}{x^2-1} > 3 \;\Leftrightarrow$
$\dfrac{1}{x^2-1} < 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 < 1 \;\Leftrightarrow\; -1 < x < 1$. Somit: $L = (-1,\, 1)$.

h) Voraussetzung: $x \neq -1 \wedge x \neq 2$.
1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -1)$: Da die Ungleichung mit $(x+1) < 0$ *und* mit $(2x-4) < 0$ multipliziert wird, bleibt das Relationszeichen erhalten. Es ergibt sich:
$(4x-5)(x+1) < (2x+3)(2x-4) \;\Leftrightarrow\; x < -7$, d.h. $x \in M_1 = (-\infty, -7)$.
Somit ist $L_1 = I_1 \cap M_1 = (-\infty, -7)$.
2.Fall: $x \in I_2 = (-1, 2)$: Diesmal wird mit $(x+1) > 0$ und mit $(2x-4) < 0$ multipliziert; daher kehrt sich das Relationszeichen um, und man erhält:
$(4x-5)(x+1) > (2x+3)(2x-4) \;\Leftrightarrow\; x > -7$, d.h. $x \in M_2 = (-7, \infty)$.
Daher: $L_2 = I_2 \cap M_2 = (-1, 2)$.
3.Fall: $x \in I_3 = (2, +\infty)$: Nach Multiplikation mit $(x+1) > 0$ und mit $(2x-4) > 0$ ergibt sich: $(4x-5)(x+1) < (2x+3)(2x-4) \;\Leftrightarrow\; x < -7$, d.h. $x \in M_3 = (-\infty, -7)$. Daher: $L_3 = I_3 \cap M_3 = \emptyset$.
Ergebnis: $L = (-\infty, -7) \cup (-1, 2)$.

i) Voraussetzung: $x \neq -5 \wedge x \neq -4$.
1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -5): \; (10x+2)(x+4) < (9x+3)(x+5) \;\Leftrightarrow\; x^2 - 6x - 7 < 0$.
Der Graph von $y = x^2 - 6x - 7$ ist eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 7$. Daher gilt: $x^2 - 6x - 7 < 0 \Leftrightarrow x \in M_1 = (-1, 7)$. Also ist $L_1 = I_1 \cap M_1 = \emptyset$.
2.Fall: $x \in I_2 = (-5, -4): (10x+2)(x+4) > (9x+3)(x+5) \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 > 0 \;\Leftrightarrow$
$x \in M_2 = (-\infty, -1) \cup (7, \infty)$. Daher: $L_2 = I_2 \cap M_2 = (-5, -4)$.
3.Fall: $x \in I_3 = (-4, +\infty): (10x+2)(x+4) < (9x+3)(x+5) \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 < 0 \;\Leftrightarrow$
$x \in M_3 = (-1, 7)$. Somit ist $L_3 = I_3 \cap M_3 = (-1, 7)$.
Ergebnis: $L = (-5, -4) \cup (-1, 7)$.

L 3.9 a) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, 5): \; -x + 5 = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 4$, d.h. $x \in M_1 = \{4\}$.
Folglich ist $L_1 = I_1 \cap M_1 = \{4\}$.
2.Fall: $x \in I_2 = [5, +\infty): \; x - 5 = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 6$, d.h. $x \in M_2 = \{6\}$. Daher ist $L_2 = I_2 \cap M_2 = \{6\}$.
Ergebnis: $L = L_1 \cup L_2 = \{4, 6\}$.
Man erhält das Ergebnis auch unmittelbar aus der Überlegung, daß $x - 5 = 1$ oder $= -1$ sein muß.

b) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, 1): \; -x + 1 + x = 2 - x \;\Leftrightarrow\; x = 1$, d.h. $x \in M_1 = \{1\}$.
Somit ist $L_1 = \emptyset$.
2.Fall: $x \in I_2 = [1, +\infty): \; x - 1 + x = 2 - x \;\Leftrightarrow\; x = 1$, d.h. $x \in M_2 = \{1\}; L_2 = \{1\}$.
Ergebnis: $L = \{1\}$.

c) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -1): \; -x + 2 - x - 1 = 2x + 2 \;\Leftrightarrow\; 4x = -1$,
d.h. $x \in M_1 = \{-\frac{1}{4}\}$. Damit folgt $L_1 = \emptyset$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-1, 2): \; -x + 2 + x + 1 = 2x + 2 \;\Leftrightarrow\; 2x = 1$, d.h. $x \in M_2 = \{\frac{1}{2}\}$ und folglich $L_2 = \{\frac{1}{2}\}$.
3.Fall: $x \in I_3 = [2, +\infty): \; x - 2 + x + 1 = 2x + 2$ ist widerspruchsvoll, daher für kein $x \in I\!R$ erfüllbar: $L_3 = \emptyset$.
Ergebnis: $L = \{\frac{1}{2}\}$.

d) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -2): \; -x + 1 - x - 2 = 3 \;\Leftrightarrow\; -2x = 4$,
d.h. $x \in M_1 = \{-\frac{1}{2}\}$ und folglich $L_1 = \emptyset$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-2, 1]: \; -x + 1 + x + 2 = 3$. Dies ist für alle $x \in M_2 = I\!R$ erfüllt. Daher ist $L_2 = I_2 \cap M_2 = [-2, 1]$.
3.Fall: $x \in I_3 = (1, +\infty): \; x - 1 + x + 2 = 3 \;\Leftrightarrow\; 2x = 2$, d.h. $x \in M_3 = \{1\}$. $L_3 = \emptyset$.
Ergebnis: $L = [-2, 1]$.

e) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -1): \; -x - 1 - x + 1 = -x \;\Leftrightarrow\; x = 0$, d.h. $x \in M_1 = \{0\}$.
Daher: $L_1 = \emptyset$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-1, 0): \; x + 1 - x + 1 = -x \;\Leftrightarrow\; x = -2$, d.h. $x \in M_2 = \{-2\}$.
Somit: $L_2 = \emptyset$.
3.Fall: $x \in I_3 = [0, 1): \; x + 1 - x + 1 = x \Leftrightarrow x = 2$, d.h. $x \in M_3 = \{2\}$. $L_3 = \emptyset$.
4.Fall: $x \in I_4 = [1, +\infty): \; x + 1 + x - 1 = x \Leftrightarrow x = 0$, d.h. $x \in M_4 = \{0\}$. $L_4 = \emptyset$.
Ergebnis: $L = \emptyset$.

f) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -1): \; -x - 1 + x - 1 = -x \;\Leftrightarrow\; x = 2$, d.h. $x \in M_1 = \{2\}$.
Folglich: $L_1 = \emptyset$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-1, 0): \; x + 1 + x - 1 = -x \;\Leftrightarrow\; x = 0$, d.h. $x \in M_2 = \{0\}$. $L_2 = \emptyset$.
3.Fall: $x \in I_3 = [0, 1): \; x + 1 + x - 1 = x \;\Leftrightarrow\; x = 0$, d.h. $x \in M_3 = \{0\}$. $L_3 = \{0\}$.
4.Fall: $x \in I_4 = [1, +\infty): \; x + 1 - x + 1 = x \;\Leftrightarrow\; x = 2$, d.h. $x \in M_4 = \{2\}$. $L_4 = \{2\}$.
Ergebnis: $L = \{0, 2\}$.

Lösungen zu Blatt 3

(4)

g) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -2): -x-2-2+x = -2x \Leftrightarrow x = 2$, d.h. $x \in M_1 = \{2\}$. Somit: $L_1 = \emptyset$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-2, 0): x+2-2+x = -2x \Leftrightarrow x = 0$, d.h. $x \in M_2 = \{0\}$. $L_2 = \emptyset$.
3.Fall: $x \in I_3 = [0, 2): x+2-2+x = 2x$. Dies ist erfüllt für alle $x \in I\!R$. $L_3 = [0, 2)$.
4.Fall: $x \in I_4 = [2, +\infty): x+2+2-x = 2x \Leftrightarrow x = 2$, d.h. $x \in M_4 = \{2\}$. $L_4 = \{2\}$.
Ergebnis: $L = [0, 2]$.

h) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -2): |-x-2+x-1| = 3$. Dies ist erfüllt für alle $x \in I\!R$. Somit ist $L_1 = (-\infty, -2)$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-2, 1]: |x+2+x-1| = 3 \Leftrightarrow (2x+1 = -3) \vee (2x+1 = 3)$, d.h. $(x \in M_{21} = \{-2\}) \vee (x \in M_{22} = \{1\})$. $L_2 = I_2 \cap (M_{21} \cup M_{22}) = \{-2, 1\}$.
3.Fall: $x \in I_3 = (1, +\infty): |x+2-x+1| = 3$. Dies ist für alle $x \in I\!R$ erfüllt. Daher ist $L_3 = (1, +\infty)$.
Ergebnis: $L = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

L 3.10 a) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, 2): -x+2 \le 3 \Leftrightarrow -1 \le x$, d.h. $x \in M_1 = [-1, \infty)$. $L_1 = I_1 \cap M_1 = [-1, 2)$.
2.Fall: $x \in I_2 = [2, +\infty): x-2 \le 3 \Leftrightarrow x \le 5$, d.h. $x \in M_2 = (-\infty, 5]$. Folglich: $L_2 = I_2 \cap M_2 = [2, 5]$.
Ergebnis: $L = L_1 \cup L_2 = [-1, 5]$.
Man erhält dieses Ergebnis auch aus $|x-2| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x-2 \le 3 \Leftrightarrow -1 \le x \le 5$.

b) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -4): -x-4 > 2 \Leftrightarrow x < -6$, d.h. $x \in M_1 = (-\infty, -6)$. $L_1 = (-\infty, -6)$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-4, +\infty): x+4 > 2 \Leftrightarrow x > -2$, d.h. $x \in M_2 = (-2, +\infty)$. $L_2 = (-2, +\infty)$.
Ergebnis: $L = (-\infty, -6) \cup (-2, +\infty) = I\!R \setminus [-6, -2]$.
(Dabei ist $[-6, -2]$ die Lösungsmenge von $|x+4| \le 2$; denn analog zu a) ist $|x+4| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x+4 \le 2 \Leftrightarrow -6 \le x \le -2$).

c) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -1): -x-1-x \ge 1 \Leftrightarrow x \le -1$, d.h. $x \in M_1 = (-\infty, -1]$. $L_1 = (-\infty, -1)$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-1, +\infty): x+1-x \ge 1$. Dies ist (mit Gleichheitszeichen) für alle $x \in I\!R$ erfüllt. $L_2 = [-1, +\infty)$.
Ergebnis: $L = I\!R$.
Bemerkung: Man erhält dieses Ergebnis auch unmittelbar aus folgender Überlegung: $|x+1| - x \ge 1 \Leftrightarrow |x+1| \ge x+1$. Diese Ungleichung ist für alle $x \in I\!R$ erfüllt, da $|a| \ge a$ für alle $a \in I\!R$ gilt. Daher ist $L = I\!R$.

d) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -3): -x-3 < 4+x-2 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$, d.h. $x \in M_1 = (-\frac{5}{2}, +\infty)$. $L_1 = \emptyset$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-3, 2): x+3 < 4+x-2$. Dies ist für *kein* $x \in I\!R$ erfüllbar: $L_2 = \emptyset$.
3.Fall: $x \in I_3 = [2, +\infty): x+3 < 4-x+2 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$, d.h. $x \in M_3 = (-\infty, \frac{3}{2})$. $L_3 = \emptyset$.
Ergebnis: $L = \emptyset$.

e) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -1): -x+3-x-1 \le 2+x \Leftrightarrow x \ge 0$, d.h. $x \in M_1 = [0, +\infty)$. $L_1 = \emptyset$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-1, 3): -x+3+x+1 \le 2+x \Leftrightarrow x \ge 2$, d.h. $x \in M_2 = [2, +\infty)$. $L_2 = [2, 3)$.
3.Fall: $x \in I_3 = [3, +\infty): x-3+x+1 \le 2+x \Leftrightarrow x \le 4$, d.h. $x \in M_3 = (-\infty, 4]$. $L_3 = [3, 4]$.
Ergebnis: $L = [2, 4]$.
Bemerkung: Wir zeigen an diesem Beispiel, wie Ungleichungen auch graphisch gelöst werden können: Wir betrachten die Funktion $y = |x-3| + |x+1| - 2 - x$ und untersuchen, wo $y \le 0$ ist. Zum Zeichnen des Graphen von y verwenden wir, daß gilt:

$$y = \begin{cases} -x+3-x-1-2-x = & -3x & \text{für } x \le -1 \\ -x+3+x+1-2-x = & -x+2 & \text{für } -1 < x \le 3 \\ x-3+x+1-2-x = & x-4 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

Bild L 3.10e entnimmt man $L = [2, 4]$.

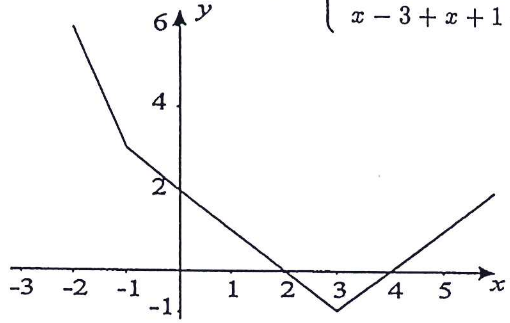

Bild L 3.10e

f) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -2): -x-2-x-x+4 \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{2}{3}$, d.h. $x \in M_1 = (-\infty, \frac{2}{3}]$. $L_1 = (-\infty, -2)$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-2, 4): x+2-x-x+4 \ge 0 \Leftrightarrow x \le 6$, d.h. $x \in M_2 = (-\infty, 6])$. $L_2 = [-2, 4)$.
3.Fall: $x \in I_3 = [4, +\infty): x+2-x+x-4 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2$, d.h. $x \in M_3 = [2, \infty)$. $L_3 = [4, +\infty)$.
Ergebnis: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = I\!R$.

g) Die Nullstellen von $y = x^2 + 2x - 24$ sind $x_1 = -6$, $x_2 = 4$. Daher ist $y \le 0$ für $x \in [-6, 4]$.
1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -6): x^2 + 2x - 24 \le 24$. $\tilde{y} = x^2 + 2x - 48$ hat die Nullstellen $x_1 = -8$, $x_2 = 6$. Somit ist $\tilde{y} \le 0$ für $x \in M_1 = [-8, 6]$. $L_1 = I_1 \cap M_1 = [-8, -6)$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-6, 4]: -x^2 - 2x + 24 \le 24$. $\hat{y} = -x^2 - 2x$ hat die Nullstellen $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, so daß $\hat{y} \le 0$ ist für $x \in M_2 = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$. $L_2 = I_2 \cap M_2 = [-6, -2] \cup [0, 4]$.
3.Fall: $x \in I_3 = (4, +\infty): x^2 + 2x - 24 \le 24$. Nach Fall 1 gilt dies für $x \in M_1 = [-8, 6]$. $L_3 = I_3 \cap M_1 = (4, 6]$.
Ergebnis: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-8, -2] \cup [0, 6]$.

Lösungen zu Blatt 5

h) Die Nullstellen von $y = x^2 - 7$ sind $x_1 = -\sqrt{7}$ und $x_2 = \sqrt{7}$.

1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -\sqrt{7}) : \; -x + 5 \le x^2 - 7. \;\Leftrightarrow\; 0 \le x^2 + x - 12.$
$y = x^2 + x - 12$ hat die Nullstellen $x_1 = -4$, $x_2 = 3$. Somit ist $y \ge 0$ für $x \in M_1 = (-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$. $L_1 = I_1 \cap M_1 = (-\infty, -4]$.

2.Fall: $x \in I_2 = [-\sqrt{7}, \sqrt{7}] : \; -x + 5 \le -x^2 + 7. \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \le 0.$
$\tilde{y} = x^2 - x - 2$ hat die Nullstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, so daß $\tilde{y} \le 0$ ist für $x \in M_2 = [-1, 2]$. $L_2 = I_2 \cap M_2 = [-1, 2]$.

3.Fall: $x \in I_3 = (\sqrt{7}, 5) : \; -x + 5 \le x^2 - 7 \;\Leftrightarrow\; 0 \le x^2 + x - 12$ (vgl. Fall 1).
$L_3 = I_3 \cap M_1 = [3, 5)$.

4.Fall: $x \in I_4 = [5, +\infty) : \; x - 5 \le x^2 - 7 \;\Leftrightarrow\; 0 \le x^2 - x - 2$. Nach Fall 2 gilt dies für $x \in M_4 = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$. $L_4 = I_4 \cap M_4 = [5, +\infty)$.

Ergebnis: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-\infty, -4] \cup [-1, 2] \cup [3, +\infty)$.

i) Der Nenner wechselt sein Vorzeichen bei $x = 2$, der Betragsinhalt bei $x = 12$. Damit sind folgende Fälle zu unterscheiden ($x \ne 2$!):

1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, 2) : \; -x + 12 \le (x - 2)(6 + x) \;\Leftrightarrow\; 0 \le x^2 + 5x - 24.$
$y = x^2 + 5x - 24$ hat die Nullstellen $x_1 = -8$, $x_2 = 3$. Daher ist $y \ge 0$ für $x \in M_1 = (-\infty, -8] \cup [3, +\infty)$. $L_1 = I_1 \cap M_1 = (-\infty, -8]$.

2.Fall: $x \in I_2 = (2, 12] : \; -x + 12 \ge (x - 2)(6 + x) \;\Leftrightarrow\; 0 \ge x^2 + 5x - 24$. Nach Fall 1 ist $y = x^2 + 5x - 24 \le 0$ für $x \in M_2 = [-8, 3]$. $L_2 = I_2 \cap M_2 = (2, 3]$.

3.Fall: $x \in I_3 = (12, +\infty) : \; x - 12 \ge (x - 2)(6 + x) \;\Leftrightarrow\; 0 \ge x^2 + 3x$. Der Graph von $\tilde{y} = x^2 + 3x$ hat die Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = 0$. Daher ist $\tilde{y} \le 0$ für $x \in M_3 = [-3, 0]$. $L_3 = I_3 \cap M_3 = \emptyset$.

Ergebnis: $L = (-\infty, -8] \cup (2, 3]$.

j) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, 0) : \; 3 - x(5 - x) < -(x - 5)(5 - x) \;\Leftrightarrow\; x < \frac{22}{5}$, d.h. $x \in M_1 = (-\infty, \frac{22}{5})$. $L_1 = I_1$.

2.Fall: $x \in I_2 = [0, 5) : \; 3 + x(5 - x) < -(x - 5)(5 - x) \;\Leftrightarrow\; 2x^2 - 15x + 22 > 0.$
$y = 2x^2 - 15x + 22$ hat die Nullstellen $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{11}{2}$. Daher ist $y > 0$ für $x \in M_2 = (-\infty, 2) \cup (\frac{11}{2}, +\infty)$. $L_2 = I_2 \cap M_2 = [0, 2)$.

3.Fall: $x \in I_3 = (5, +\infty) : \; 3 + x(5 - x) > (x - 5)(5 - x) \;\Leftrightarrow\; x < \frac{28}{5}$, d.h. $x \in M_3 = (-\infty, \frac{28}{5})$. $L_3 = I_3 \cap M_3 = (5, \frac{28}{5})$.

Ergebnis: $L = (-\infty, 2) \cup (5, \frac{28}{5})$.

k) Wir lösen die Aufgabe, indem wir die "inneren" Betragsstriche beseitigen und anschließend die Äquivalenz von $|f(x)| \le a$ und $-a \le f(x) \le a$ benutzen. Da die Inhalte der "inneren" Betragsstriche bei $x = -1$ bzw. bei $x = 2$ ihr Vorzeichen wechseln, sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -1) : \; |-x + 2 + x + 1 + 6| \le 3$ ist für *kein* $x \in I\!R$ erfüllbar. Daher ist $L_1 = \emptyset$.

2.Fall: $x \in I_2 = [-1, 2] : \; |-x + 2 - x - 1 + 6| \le 3 \;\Leftrightarrow\; |-2x + 7| \le 3 \;\Leftrightarrow$
$-3 \le -2x + 7 \le 3 \;\Leftrightarrow\; 2 \le x \le 5$, d.h. $x \in M_2 = [2, 5]$. Daher: $L_2 = \{2\}$.

3.Fall: $x \in I_3 = (2, +\infty) : \; |x - 2 - x - 1 + 6| \le 3$ ist (mit dem Gleichheitszeichen) für alle $x \in I\!R$ erfüllt. Somit: $L_3 = I_3$.

Ergebnis: $L = L_2 \cup L_3 = [2, +\infty)$.

l) Da die Betragsinhalte $x - 1$ bzw. x ihr Vorzeichen bei $x = 1$ bzw. $x = 0$ wechseln und der auftretende Nenner sein Vorzeichen bei $x = -2$ wechselt, betrachten wir folgende 4 Fälle:

1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -2) : \; |x - x + 1| > \dfrac{-x}{x + 2} \;\Leftrightarrow\; x + 2 < -x \;\Leftrightarrow\; x < -1$, d.h. $x \in M_1 = (-\infty, -1)$. $L_1 = (-\infty, -2)$.

2.Fall: $x \in I_2 = (-2, 0] : \; |x - x + 1| > \dfrac{-x}{x + 2} \;\Leftrightarrow\; x + 2 > -x \;\Leftrightarrow\; x > -1$, d.h. $x \in M_2 = (-1, +\infty)$. Folglich: $L_2 = (-1, 0]$.

3.Fall: $x \in I_3 = (0, 1] : \; |x - x + 1| > \dfrac{x}{x + 2} \;\Leftrightarrow\; x + 2 > x$. Dies ist für alle $x \in I\!R$ erfüllt, d.h. $x \in M_3 = I\!R$. Daher: $L_3 = (0, 1]$.

4.Fall: $x \in I_4 = (1, +\infty) : \; |x + x - 1| > \dfrac{x}{x + 2} \Leftrightarrow (2x - 1)(x + 2) > x$ (da $2x - 1 > 0$ für $x \in I_4$) $\;\Leftrightarrow\; 2x^2 + 2x - 2 > 0$. Da $y = 2x^2 + 2x - 2$ die Nullstellen $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})$ besitzt, ist $y > 0$ für $x \in M_4 = (-\infty, \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3})) \cup (\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}), +\infty)$. Somit: $L_4 = (1, +\infty)$.

Ergebnis: $L = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty) = I\!R \setminus [-2, -1]$.

Lösen zu Blatt 5