# Übung 9 Wechselstrom Sinus-Funktion, Komplexe Zahlen, Zeigerdiagramm

#### Lernziele

- die Amplitude, die Grundperiode und die Frequenz einer Sinus-Funktionn bestimmen können.
- den Grafen einer Sinus-Funktion mit bekannter Ampitude, Frequenz und Phase skizzieren können.
- Sachverhalte über komplexe Zahlen analysieren und beurteilen können.
- eine komplexe Zahl von der einen Darstellungsform in eine andere umwandeln können.
- den Realteil, Imaginärteil, Betrag, das Argument einer komplexen Zahl bestimmen können.
- die Grundoperationen in der Menge der komplexen Zahlen korrekt ausführen können.
- eine komplexe Zahl komplex konjugieren können.
- eine harmonische Grösse in einem Zeigerdiagramm darstellen können.
- eine harmonische Grösse als komplexe Exponentialfunktion darstellen können.
- zwei sinusförmige Grössen mit Hilfe des Zeigerdiagrammes addieren können.

### Aufgaben

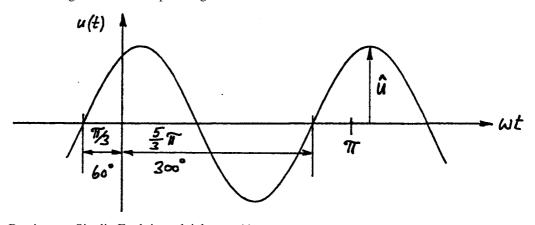
Sinus-Funktion

- 1. Skizzieren Sie den Grafen, und bestimmen Sie die Grundperiode T und die Frequenz f der folgenden Sinus-Funktionen:
  - a)  $a(t) = \sin(2t)$
- b)  $a(t) = \sin(t)$
- c)  $a(t) = \sin(t+2)$
- d)  $a(t) = \sin(t+)$
- e)  $a(t) = \sin(t+)$
- 2. Die Periodendauer einer Sinusspannung beträgt T = 1.92 ms.

Zur Zeit t = 0.38 ms beträgt die Spannung 60 V, und zum Zeitpunkt t = 0 s betrug die Spannung 0 V, um dem positiven Scheitelwert zuzustreben.

Bestimmen Sie die Frequenz, die Amplitude und die Spannung zum Zeitpunkt t = 0.29 ms.

3. Gegeben ist die folgende Wechselspannung:



- a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung u(t) = ...
- b) Stellen Sie u(t) in der Zeigerdarstellung dar.

### Komplexe Zahlen

4. Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an.

Es ist möglich, dass in einer Teilaufgabe keine oder mehrere Aussagen richtig sind:

- a) <u>Der Realteil einer komplexen Zahl</u>
  - ist reell.

l ist imaginär.

kann negativ sein.

ist nie gleich Null.

b) (siehe Seite 2)

	b)	Der Imaginärteil einer komplexen Zahl  ist imaginär.  kann negativ sein.  Der Betrag einer komplexen Zahl  ist reell.  ist grösser oder gleich Null.  Das Argument einer komplexen Zahl  ist reell.  ist grösser oder gleich Null.				ist reell.	Vielfaches von j.
	c) d)			Null.		hat einen Imaginärteil ungleich Null. ist eindeutig bestimmt.	
				Jull.		hat einen Imaginärteil ungleich Null. ist eindeutig bestimmt.	
	e) f)	Der Imaginärteil einer reellen Zahl ist gleich Null. Der Betrag einer reellen Zahl ist die reelle Zahl selber. Der Imaginärteil einer imaginären Z				existiert nicht.	
	g)					ist grösser oder gleich Null. ist die imaginäre Zahl geteilt durch j.	
	ist die imaginäre Zahl selbe h) Der Betrag einer imaginären Zahl			elber.			
		ist gleich Null.	ist gleich Null.			existiert nicht.	
5.	Skizzieren Sie die komplexe Zahl z in der Gauss'schen Zahlenebene, und bestimmen Sie Re(z), Im(z),						
	z , arg	(z): $z = 3 + 4j$	h)	z = - 3	+ <b>∆</b> i	c)	z = j
	d)	$z = 3 e^{j/3}$		$z = e^{-j}$		f)	•
6.		eren Sie die komplexe Za entialform an:	ıhlzin d	ler Gauss	s'schen Z	Zahlenebene, un	nd geben Sie z in der
	a)	z = 3 - 4j	b)	z = -2		c)	z = -5j
7.	Gegeben sind die komplexen Zahlen						
	Restim	$z_1 = 3 + 4j$ $z_2 = -2$ men Sie	2 + 5j	$z_3 = 2 \epsilon$	<u>.</u> 15 /4	$z_4 = 3 e^{j^2/3}$	
	a)	z <sub>1</sub> - z <sub>2</sub>	b)	- 3z <sub>1</sub> +	6z <sub>2</sub>	c)	1 2
	d)	$z_3 \cdot z_4$	e)	$\frac{3z_4}{4z_3}$		f)	$\frac{2z_1}{z_2}$
8.	Bestim a)	stimmen Sie die zur komplexen Zahl z gehörende komplex konjugierte Zahl z*: $z = -2 - 4j$ b) $z = 2 e^{j5/4}$ c) $z = -17$					
9.	In der Elektrotechnik kommt die folgende komplexe Zahl z vor:						
	Restim	$z = \frac{\left(R_1 + j - L\right) \left(R_2 + \frac{1}{j}\right)}{R_1 + j - L + R_2 + \frac{1}{j}}$ men Sie den Betrag der Z		$(R_1, R_2)$	2, , L,	C R)	

Zeigerdiagramm

- 10. Betrachten Sie noch einmal die Wechselspannung aus der Aufgabe 3. Geben Sie u(t) in der komplexen Exponentialdarstellung  $\underline{\mathbf{u}}(t) = ...$  an.
- 11. Gegeben sind zwei Sinusströme gleicher Frequenz mit den Effektivwerten  $I_{1,eff} = 3.8$  A und  $I_{2,eff} = 3.2$  A. Die Phasenverschiebungen (Nullphasenwinkel) betragen  $_1 = 35^{\circ}$  und  $_2 = -25^{\circ}$ . Addieren Sie die beiden Ströme grafisch mit Hilfe des Zeigerdiagrammes, und bestimmen Sie die Stromamplitude des Gesamtstromes I sowie die Phasenverschiebung zwischen dem Gesamtstrom I und dem Strom  $I_2$ .

## Lösungen

- 1. a)  $T = f = \frac{1}{2}$
- b)  $T = \frac{2}{2}$   $f = \frac{2}{2}$
- c)  $T = f = \frac{1}{2}$
- $d) T = f = \frac{1}{}$
- e)  $T = \frac{2}{2}$   $f = \frac{2}{2}$
- 2.  $f = 521 \text{ Hz bzw.} = 3272 \text{ s}^{-1}$  $\hat{u} = 63.4 \text{ V}$ u(0.29 ms) = 51.5 V
- 3. a)  $u(t) = \hat{u} \sin \left( t + \frac{1}{3} \right)$ 
  - b) ..
- 4. a) Der Realteil einer komplexen Zahl

  | X | ist reell
  - ist reell.  $\Box$  ist imaginär.
  - kann negativ sein. ist nie gleich Null.

    b) Der Imaginärteil einer komplexen Zahl
  - ist imaginär.

    ist reell.

    kann negativ sein.

    ist ein reelles Vielfaches von j.
  - c) Der Betrag einer komplexen Zahl
  - ist reell.

    ist grösser oder gleich Null.

    Das Argument einer komplexen Zahl

    hat einen Imaginärteil ungleich Null.

    ist eindeutig bestimmt.
  - Das Argument einer komplexen Zahl
     ist reell.
     ist grösser oder gleich Null.
     ist eindeutig bestimmt.
  - e) Der Imaginärteil einer reellen Zahl

    ist gleich Null.

    Dexistiert nicht.
  - f) Der Betrag einer reellen Zahl

    ist die reelle Zahl selber.

    | X | ist grösser oder gleich Null.
  - g) Der Imaginärteil einer imaginären Zahl

    ist die imaginäre Zahl selber.
  - h) Der Betrag einer imaginären Zahl

    ist gleich Null.

    ist die inlaginäre Zahl gefent durch j

    existiert nicht.
- 5. a)  $\operatorname{Re}(z) = 3$   $\operatorname{Im}(z) = 4$  |z| = 5  $\operatorname{arg}(z) = \operatorname{arctan}\left(\frac{4}{3}\right)$ b)  $\operatorname{Re}(z) = -3$   $\operatorname{Im}(z) = 4$  |z| = 5  $\operatorname{arg}(z) = \operatorname{arctan}\left(-\frac{4}{3}\right) + 1$ 
  - c) Re(z) = 0 Im(z) = 1 |z| = 1  $arg(z) = \frac{1}{2}$
  - d)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{3}{2}$   $\operatorname{Im}(z) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$  |z| = 3  $\operatorname{arg}(z) = \frac{3}{3}$
  - e) Re(z) = 2 Im(z) = 2 |z| = 3 arg(z) = 3Im(z) = -1 |z| = 1  $arg(z) = -\frac{1}{2}$
  - f) Re(z) = -3 Im(z) = 0 |z| = 3 arg(z) = -3

6. a)  $z = 5 e^{-j \cdot \arctan(4/3)}$ 

b)  $z = 2 e^{j}$ 

c)  $z = 5 e^{-j/2}$ 

7. a) 5-j

b) - 21 + 18j

c) -26 + 7j

d)  $6 e^{j19}/12$ 

e)  $\frac{9}{8} e^{-j11/12}$ 

f)  $\frac{28}{29} - \frac{46}{29} j$ 

8. a) -2+4j

b)  $2 e^{-j5} / 4$ 

c) - 17

9. 
$$|z| = \sqrt{\frac{\left(R_1^2 + (-L)^2\right)\left(R_2^2 + \frac{1}{(-C)^2}\right)}{(R_1 + R_2)^2 + \left(-L - \frac{1}{C}\right)^2}}$$

10. 
$$\underline{u}(t) = \hat{u} e^{j(t+3)}$$

11. 
$$\hat{I} = 8.6 \text{ A}$$
  
= 32.8°