Aufgaben:

1. Lösen Sie folgendes AWP:

$y'' - 8y' + 17y = 0 \qquad y(0) = -4 \qquad\qquad y'(0) = -1$

2. Lösen Sie folgendes AWP:

$4y'' + 24y' + 37y = 0 \qquad y(\pi) = 1 \qquad\qquad y'(\pi) = 0$

3. Lösen Sie folgendes AWP:

$y'' + 16y = 0 \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -10 \qquad\qquad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

4. Lösen Sie folgendes AWP:

$16y'' - 40y' + 25y = 0 \qquad y(0) = 3 \qquad\qquad y'(0) = -\frac{9}{4}$

5. Lösen Sie folgendes AWP:

$y'' + 14y' + 49y = 0 \qquad y(-4) = -1 \qquad\qquad y'(-4) = 5$

6. Gegeben sind folgende partikuläre Lösungen der DGL $ay'' + by' + cy = 0$, die durch den komplexen Wurzeln der charakteristischen Gleichung bestimmt worden sind:

$$y_1(t) = e^{\lambda t}\cos(\mu t) \quad und \quad y_2(t) = e^{\lambda t}\sin(\mu t)$$

Beweisen Sie, dass diese zwei ein Fundamentalsystem der Lösungen bilden und geben Sie die allgemeine Lösung der DGL an.

Lösungen:

1. Lösen Sie folgendes AWP:

$y'' - 8y' + 17y = 0 \qquad y(0) = -4 \qquad\qquad y'(0) = -1$

Lösung:

$y(t) = -4e^{4t}\cos(t) + 15e^{4t}\sin(t)$

2. Lösen Sie folgendes AWP:

$4y'' + 24y' + 37y = 0 \qquad y(\pi) = 1 \qquad\qquad y'(\pi) = 0$

Lösung:

$y(t) = -6e^{-3(t-\pi)}\cos(\frac{t}{2}) + e^{-3(t-\pi)}\sin(\frac{t}{2})$

3. Lösen Sie folgendes AWP:

$y'' + 16y = 0 \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -10 \qquad\qquad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

Lösung:

$y(t) = -10\cos(4t) + \frac{3}{4}\sin(4t)$

4. Lösen Sie folgendes AWP:

$16y'' - 40y' + 25y = 0 \qquad y(0) = 3 \qquad\qquad y'(0) = -\frac{9}{4}$

Lösung:

$y(t) = 3e^{\frac{5t}{4}} - 6te^{\frac{5t}{4}}$

5. Lösen Sie folgendes AWP:

$y'' + 14y' + 49y = 0 \qquad y(-4) = -1 \qquad\qquad y'(-4) = 5$

Lösung:

$y(t) = -9e^{-7(t+4)} - 2te^{-7(t+4)}$

6. Gegeben sind folgende partikuläre Lösungen der DGL $ay'' + by' + cy = 0$, die durch den komplexen Wurzeln der charakteristischen Gleichung bestimmt worden sind:

$$y_1(t) = e^{\lambda t}\cos(\mu t) \quad und \quad y_2(t) = e^{\lambda t}\sin(\mu t)$$

Beweisen Sie, dass diese zwei ein Fundamentalsystem der Lösungen bilden und geben Sie die allgemeine Lösung der DGL an.

Lösung:

$W = \mu e^{2\lambda t} \neq 0, da\ e^{2\lambda t} > 0\ und\ \mu \neq 0\ (sonst\ wäre\ r = \lambda + \mu i\ keine\ komplexe\ Wurzel)$

$y(t) = c_1 e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t}\sin(\mu t)$