

Aufgaben Differenzialrechnung (Aufgabensammlung FTN Architektur, UNI Novi Sad)

Aufgabe 40. Bestimmen Sie aufgrund der Definition der Ableitung:

a) $(cx)' = c$

*c) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

b) $(x^2 - x + 1)' = 2x - 1$

*d) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Aufgabe 41. Bestimmen Sie die Ableitungen von folgenden Funktionen:

a) $y = x\sqrt{x} - 3\sin x - \frac{1}{x} + \ln x^2$

*c) $y = \frac{x}{\sqrt{x}} + 2\cos x + \ln(2x)$

b) $y = (x^2 + x)^2 - e^{3+x} + \sqrt{2x}$

*d) $y = \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{e^{-x}} + \log_2 x$

Aufgabe 42. Bestimmen Sie die Ableitungen von folgenden Funktionen und vereinfachen Sie die Ausdrücke:

a) $y = x^2 \cos x + \sin x$

c) $y = \operatorname{tg} x$

b) $y = \frac{e^x}{x^2} + 2x \ln x$

d) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

*e) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$

*f) $y = \frac{\ln(x - 1)}{x^2 - 1}$

Aufgabe 42. Bestimmen Sie die Ableitungen von folgenden Funktionen und vereinfachen Sie die Ausdrücke:

a) $y = x^2 \cos x + \sin x$

c) $y = \operatorname{tg} x$

b) $y = \frac{e^x}{x^2} + 2x \ln x$

d) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

*e) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$

*f) $y = \frac{\ln(x - 1)}{x^2 - 1}$

Aufgaben Differenzialrechnung (Aufgabensammlung PMF UNI Novi Sad)

Aufgabe 32. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen:

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &= x^7 - 4x^2 + 2x + 1; & b) \quad f(x) &= \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{x}}{3} + 0,25x\sqrt{x}; \\ c) \quad f(s) &= \frac{2}{\sqrt[3]{5s^2}} - \frac{1}{\sqrt{s^3}} + 3\sqrt[4]{s^3}; & d) \quad f(t) &= \frac{2t^3 + t^2 - 1}{t^2}; \\ e) \quad f(x) &= \frac{3x^2 + 4x + \sin x}{\sqrt{a^2 + b^3}}; & f) \quad f(p) &= \frac{a \cdot \ln p}{2} + (a+b)e^p + ab \cdot \operatorname{arctg} p, \end{aligned}$$

Lösungen:

Aufgabe 33. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen:

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &= (x-1)(x^2 + e^x + 1); \\ b) \quad f(x) &= (\sqrt{x} + 2x)(5 \sin x + 2 \cos x + \frac{\operatorname{ctg} x}{8}); \end{aligned}$$

Aufgabe 34. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen:

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}; & \quad b) \quad \frac{\sin x + e^x \operatorname{tg} x}{\ln x + 1}; \\ c) \quad \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}; & \quad d) \quad f(x) = \frac{\sin^2 x + 2x \cos x}{2^x + 1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 35. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen:

Zadatak 35. $a) \quad f(x) = (x^4 + 3x^2 + 3)^5; \quad b) \quad f(t) = (t^2 + 1)^2;$

$$c) \quad f(s) = \sqrt[3]{5s^2 - s - 3}; \quad d) \quad f(x) = (3x - 1)^6 \cdot \sqrt{2x - 5};$$
$$e) \quad f(x) = \left(\frac{x}{x+1} \right)^{5/2}; \quad f) \quad f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{4x^2+9}}.$$

Aufgabe 36. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen:

- a) $f(x) = \sin 2x + \cos 5x$; b) $f(x) = 3 \sin^5 x + \operatorname{tg} \sqrt{x}$;
 c) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$; d) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x + \operatorname{tg} x}$;
 e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(5 \cos x + \arccos x)^3}}$; f) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$;
 g) $f(x) = \arcsin \sqrt{x} - \sqrt{\arcsin x}$;
 h) $f(x) = \cos(3x) + \cos(x^3) + \cos^3 x + 3 \cos x$.

Aufgabe 37. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen:

- a) $f(x) = e^{x^2+3x+1}$; b) $f(x) = e^{\sin x + \cos x}$;
 c) $f(t) = 2^{t^2-1} + \ln(t^2 - 1)$; d) $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{\ln(x^2 + 2)}$;
 e) $f(x) = \ln(e^x + 1)^3 + \ln^3(e^x + 1)$; f) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Aufgabe 38. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen:

- a) $f(x) = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$;
 b) $f(x) = \frac{x \arcsin e^x + \ln(\sin 2x)}{\operatorname{arctg} x}$;
 c) $f(x) = 6 \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} + 2 \ln \frac{x - 1}{x + 1} + 4 \operatorname{arctg} x$;
 d) $f(x) = \frac{2x^2 \cos(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x}{e^{\sin x + 2} + \cos 2x}$.

Aufgabe 39. Berechnen Sie die Ableitung folgende impliziten Funktionen $y=f(x)$:

- a) $x^2 + y^2 = 4$; b) $2x - 3y + 3 = x^2 + 2y - 6x$;
 c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5x$; d) $x^4 + 4x^2 y^2 - 3xy^3 + 3x = 0$;
 e) $(y^2 - 9)^3 = (2x^3 + 3x - 1)^2$; f) $(2 + xy)^2 = 3x^2 - 7$.

Aufgabe 40. Mittels logarithmisches Differenzieren berechnen Sie die Ableitung folgende Funktionen:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & y = x^x; & \text{b)} & y = x^{\sqrt{x}}; & \text{c)} & y = (\sqrt{x})^x; \\ \text{d)} & y = x^{\sin x}, \quad x > 0; & \text{e)} & y = (\sin x)^{\cos x}, \end{array}$$

Aufgabe 41. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von folgenden Funktionen:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = 2x + 3, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \text{b)} & f(x) = \sqrt{x} + 3, \quad x > 0; \\ \text{c)} & f(x) = x^2 - 2x, \quad x > 1. \end{array}$$

Aufgabe 43. Berechnen Sie die höheren Ableitungen für folgende Funktionen:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = 4x^2 - 2x + 5 - \frac{3}{x}, \quad \text{odrediti} \quad f', f'', f''', f^{(4)}; \\ \text{b)} & f(x) = \sqrt{3 - 5x}, \quad \text{odrediti} \quad f', f'', f'''; \\ \text{c)} & f(x) = \frac{2x - 3}{3x + 1}, \quad \text{odrediti} \quad f', f'', f'''; \\ \text{d)} & x^3 - y^3 = 2, \quad \text{odrediti} \quad f', f'', \\ \text{e)} & y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 3, \quad \text{odrediti} \quad f''; \end{array}$$

Aufgabe 44. Berechnen Sie die höheren Ableitungen für folgende Funktionen:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = 6x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1; \quad \text{b)} & f(x) = \frac{1}{1-x}; \\ \text{odrediti} & f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), f^{(4)}(0), f^{(5)}(0). \end{array}$$

Aufgabe 45. Berechnen Sie die höheren Ableitungen $f^{(j)}(x)$ allgemein für jeder $j \in \mathbb{N}$ für die folgende Funktionen:

$$\text{a)} \quad f(x) = e^x; \quad \text{b)} \quad f(x) = \sin x; \quad \text{c)} \quad f(x) = \cos x,$$

Aufgaben Differenzialrechnung (Aufgabensammlung FTN, Maschinenbau, UNI Novi Sad)

Aufgabe 1. Bestimmen Sie mithilfe der Definition die Ableitungen folgende Funktionen:

a) $y = \sin x.$

b) $y = \sqrt{x}.$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie mithilfe der Definition die Ableitung von:

$$y = \ln x$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Konstante A damit die Funktion differenzierbar ist:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + Ax, & x \geq 0 \\ \sin x, & x < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die erste Ableitung folgende Funktionen:

a) $y = \frac{1}{x}$

b) $y = \sqrt{x}$

c) $y = \frac{x}{x+1}$

d) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

e) $y = e^x \sin x$

f) $y = \frac{\ln x}{x^2}$

g) $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Aufgabe 5. Bestimmen Sie die erste Ableitung folgende Funktionen:

a) $y = e^{-x}.$

b) $y = \sqrt{1 - x^2}.$

c) $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}.$

d) $y = \cos^3 x - \frac{1}{\cos^3 x}.$

e) $y = \sqrt{\sin 3x} + \sin x^2.$

f) $y = \ln(\sin x).$

g) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}.$

h) $y = \arccos e^x.$

i) $y = \sin 2x \cdot e^{\sin x}.$

j) $y = \ln^2 x - \ln(\ln x).$

k) $y = 3 \ln \frac{x-1}{x+1}.$

l) $y = 3^{\frac{x}{\ln x}}.$

Aufgabe 6. Bestimmen Sie die zweite Ableitung folgende Funktionen:

a) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$. b) $y = (x - 2)e^{2x}$

Aufgabe 8. Bestimmen Sie $x'(y)$ der Funktion:

$$y = x + \ln x$$

Aufgabe 9. Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung folgende implizit angegebenen Funktionen $y=y(x)$:

a) $x^3 + y^3 = a^3$. b) $e^y = x + y$.
c) $\ln y + \frac{x}{y} = c$. d) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$.

Aufgabe 10. Bestimmen Sie die erste Ableitung folgende Funktionen:

a) $y = x^x$. b) $y = (\cos x)^{\sin x}$. c) $y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$

Aufgaben Differenzialrechnung (Aufgabensammlung FTN, Elektrotechnik, UNI Novi Sad)

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktion:

$$y = \ln \frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\sin x}$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktion:

$$y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktion:

$$y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktion:

$$y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x + \ln x$$

Aufgabe 12. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktion:

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

Aufgabe 19. Bestimmen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x-1) \cdot \ln x$$

Aufgabe 20. Bestimmen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}))$$

Aufgabe 22. Bestimmen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$$

Aufgaben Anwendung der Differenzialrechnung (Aufgabensammlung PMF UNI Novi Sad)

Aufgabe 59. Mittels Satz von L'Hospital bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 3x - 1}{2x};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{x \sin 2x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^2 - 1};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x}{\sqrt{x}},$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x}}{x^3};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1 + e^x};$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}.$$

Aufgabe 60. Mittels Satz von L'Hospital bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0+} \sin x \ln \sin x;$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1);$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}.$$

Aufgabe 61. Mittels Satz von L'Hospital bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x}; & b) \lim_{x \rightarrow 0+} (e^x - 1)^x; & c) \lim_{x \rightarrow 0+} x^x; \\ d) \lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1)^{\operatorname{ctg} x}; & e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}; & f) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}. \end{array}$$

Aufgabe 62. Mittels Satz von L'Hospital bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} \right); & b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right); \\ c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right). \end{array}$$

Aufgabe 65. Bestimmen Sie die Intervalle über denen folgende Funktionen steigend bzw. fallend sind:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = 2 - 4x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}; & b) f(x) = (x + 1)^2, \quad x \in \mathbb{R}; \\ c) f(x) = (x + 1)^3, \quad x \in \mathbb{R}; & d) f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5, \quad x \in \mathbb{R}; \\ e) f(x) = \frac{-x}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R}, x \neq -2; & f) f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x + 16}, \quad x \in \mathbb{R}; \\ g) f(x) = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}, \quad x \in \mathbb{R}; & h) f(x) = x^{2/3}(x^2 - 8), \quad x \in \mathbb{R}; \\ i) f(x) = x - \sin x, \quad x \in \mathbb{R}; & j) f(x) = \sin^2 x, \quad x \in \mathbb{R}; \\ k) f(x) = x^2 e^x, \quad x \in \mathbb{R}; & l) f(x) = x + \ln x, \quad x \in \mathbb{R}, x > 0 \end{array}$$

Aufgaben Analyse von Funktionen und Anwendung der Differenzialrechnung (Aufgabensammlung FTN Architektur, UNI Novi Sad)

Aufgabe 45. Untersuchen Sie folgende Funktionen und skizzieren Sie ihre Schaubilder

a) $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$

b) $y = \frac{e^x}{1+x}$

c) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 2}$

e) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

*f) $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 4}}$

*g) $y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x + 4}$

Aufgaben Taylor'sche Reihen unter Anwendung der Differenzialrechnung (Aufgabensammlung FTN Architektur, UNI Novi Sad) // Wird erst nach VL Unendliche Reihen angegangen

Aufgabe 46. Entwerfen Sie den Taylor'sche Polynom n -ter Ordnung um den Punkt x_0 , berechnen Sie den Polynomwert und geben Sie die Fehlerschätzung an.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}, x_0 = 2, x_1 = 3, n = 3$

b) $f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}, x_0 = -4, x_1 = -3.8, n = 2$

c) $f(x) = \sin x, x_0 = 0, x_1 = 1, n = 6$

*d) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x - 3}, x_0 = 1, x_1 = 1.1, n = 2$