Mathematik 1 AI (1. Semester)

László Juhász

04.12.2015

Unendliche Reihen

1.1 Ein einführendes Beispiel

Wir betrachten die unendliche *geometrische* Zahlenfolge

$$\langle a_n \rangle = 1;\ 0{,}2;\ 0{,}2^2;\ 0{,}2^3;\ \ldots \qquad \text{(VI-1)}$$

mit dem *Bildungsgesetz*

$$a_n = 0{,}2^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}^*) \qquad \text{(VI-2)}$$

Aus den Gliedern dieser Folge bilden wir sog. *Partial-* oder *Teilsummen*, indem wir Glied für Glied aufsummieren. Die ersten *Partialsummen* lauten dann wie folgt:

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + 0{,}2 = 1{,}2 \\ s_3 &= 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 = 1{,}24 \\ s_4 &= 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 + 0{,}2^3 = 1{,}248 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad \text{(VI-3)}$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Unendliche Reihen: einführendes Beispiel

Wir fassen sie zu einer neuen (unendlichen) Folge, der sog. *Partialsummenfolge*

$$\langle s_n \rangle = s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad s_4, \quad \ldots \tag{VI-4}$$

mit dem *Bildungsgesetz*

$$s_n = 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 + 0{,}2^3 + \ldots + 0{,}2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} 0{,}2^{k-1} \tag{VI-5}$$

zusammen. s_n ist dabei die n-te *Partialsumme*, d. h. die Summe der ersten n Glieder der Zahlenfolge (VI-1). Für die Partialsummenfolge $\langle s_n \rangle$ führen wir die neue Bezeichnung *Unendliche Reihe* ein und schreiben dafür symbolisch [1]:

$$1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 + 0{,}2^3 + \ldots + 0{,}2^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 0{,}2^{n-1} \tag{VI-6}$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Unendliche Reihen: einführendes Beispiel

$$s_n = 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 + 0{,}2^3 + \ldots + 0{,}2^{n-1}$$

$$\left.\begin{aligned} s_n &= 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 + 0{,}2^3 + \ldots + 0{,}2^{n-1} \\ 0{,}2 \cdot s_n &= \phantom{1 +{}} 0{,}2 + 0{,}2^2 + 0{,}2^3 + \ldots + 0{,}2^{n-1} + 0{,}2^n \end{aligned}\right\} -$$

$$s_n - 0{,}2 \cdot s_n = 1 + 0 \quad + 0 \quad + 0 \quad + \ldots + 0 \quad - 0{,}2^n$$

$$0{,}8 \cdot s_n = 1 - 0{,}2^n$$

$$\boxed{s_n = 1{,}25\,(1 - 0{,}2^n)}$$

$$s_5 = 1{,}25\,(1 - 0{,}2^5) = 1{,}25\,(1 - 0{,}00032) = 1{,}2496$$

$$s_{10} = 1{,}25\,(1 - 0{,}2^{10}) = 1{,}25\,(1 - 0{,}000\,000\,102) = 1{,}249\,999\,872$$

Grenzwert der Partialsummenfolge

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} 1{,}25\,(1 - 0{,}2^n) = 1{,}25}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 0{,}2^{n-1} = 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 + 0{,}2^3 + \ldots = 1{,}25}$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Definition einer unendlichen Reihe

Wir gehen aus von einer *unendlichen Zahlenfolge*

$$\langle a_n \rangle = a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots \tag{VI-11}$$

und bilden aus den Gliedern dieser Folge wie folgt *Partial-* oder *Teilsummen*:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\vdots \end{aligned} \tag{VI-12}$$

Die Folge $\langle s_n \rangle$ dieser Teilsummen heißt dann *Unendliche Reihe*.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Definition einer unendlichen Reihe

Definition: Die Folge $\langle s_n \rangle$ der Partialsummen einer unendlichen Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ heißt *unendliche Reihe*. Symbolische Schreibweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{VI-13}$$

(1) a_n ist das n-te Reihenglied.

(2) Der Laufindex n im Summensymbol kann auch bei der Zahl 0 oder einer anderen natürlichen Zahl beginnen.

(3) Die Glieder einer unendlichen Reihe sind (reelle) *Zahlen*. Daher spricht man in diesem Zusammenhang auch von einer *Zahlenreihe* oder *numerischen* Reihe.

(4) Unter dem *Bildungsgesetz* einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ versteht man einen funktionalen Zusammenhang $a_n = f(n)$, aus dem sich die Reihenglieder in Abhängigkeit von der natürlichen Zahl n berechnen lassen. Die Zuordnung $f(n) = a_n$ kann auch als eine Funktion der *diskreten* Variablen n aufgefasst werden (mit $n \in \mathbb{N}^*$).

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Definition einer unendlichen Reihe

(1) Aus der unendlichen Zahlenfolge

$$\left\langle a_n = \frac{1}{n} \right\rangle = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

entsteht durch Partialsummenbildung die sog. *harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

(2) Aus der *geometrischen Folge*

$$\langle a_n = a q^{n-1} \rangle = a,\quad a q,\quad a q^2,\quad \ldots,\quad a q^{n-1},\ \ldots \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

erhalten wir durch Partialsummenbildung die sog. *geometrische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1} = a + a q + a q^2 + \ldots + a q^{n-1} + \ldots$$

(3) Die Glieder der unendlichen Reihe

$$2{,}1 + 2{,}01 + 2{,}001 + 2{,}0001 + \ldots$$

genügen dem folgenden *Bildungsgesetz*:

$$a_n = 2 + 0{,}1^n \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe

Definition: Eine unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *konvergent*, wenn die Folge ihrer Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ einen Grenzwert s besitzt:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s \qquad \text{(VI-14)}$$

Dieser Grenzwert wird als *Summenwert* der unendlichen Reihe bezeichnet. Symbolische Schreibweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = s \qquad \text{(VI-15)}$$

Besitzt die Partialsummenfolge $\langle s_n \rangle$ jedoch *keinen* Grenzwert, so heißt die unendliche Reihe *divergent*.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe

Anmerkungen

(1) Der *Summenwert* einer unendlichen Reihe ist also definitionsgemäß der *Grenzwert einer unendlichen Folge*, nämlich der Grenzwert der *Partialsummenfolge* $\langle s_n \rangle$. Die Konvergenz einer *unendlichen Reihe* wird damit auf die Konvergenz einer *unendlichen Folge* zurückgeführt (siehe hierzu Kap. III, Abschnitt 4.1.2).

(2) Eine *konvergente* unendliche Reihe besitzt also stets einen (eindeutigen) Summenwert, einer *divergenten* unendlichen Reihe lässt sich dagegen *kein* Summenwert zuordnen. Ist $s = +\infty$ oder $s = -\infty$, so nennt man die unendliche Reihe auch *bestimmt divergent*.

(3) Eine unendliche Reihe heißt *absolut konvergent*, wenn die aus den *Beträgen* ihrer Glieder gebildete Reihe *konvergiert*. Eine absolut konvergente Reihe ist *stets* konvergent, d. h. aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ folgt stets die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (die Umkehrung jedoch gilt *nicht*).

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe

(1) Wir zeigen, dass die als *geometrische Reihe* [2)] bezeichnete unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + \ldots$$

für $|q| < 1$ *konvergiert*, für $|q| \geq 1$ dagegen *divergiert*.
Zunächst bilden wir mit der n-ten *Partialsumme*

$$s_n = 1 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1}$$

die Differenz $s_n - q \cdot s_n$ und erhalten daraus eine einfache Formel für den *Summenwert* von s_n:

$$\left.\begin{aligned} s_n &= 1 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1} \\ q \cdot s_n &= \phantom{1 +{}} q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n \end{aligned}\right\} -$$

$$s_n - q \cdot s_n = 1 - q^n$$

$$s_n (1 - q) = 1 - q^n$$

$$s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad (q \neq 1)$$

$$\boxed{|q| < 1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} s &= \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \cdot \lim_{n \to \infty} (1 - q^n) = \\ &= \frac{1}{1 - q} \left(1 - \lim_{n \to \infty} q^n\right) = \frac{1}{1 - q} (1 - 0) = \frac{1}{1 - q} \end{aligned}}$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe

Die Folge der Partialsummen s_n besitzt dann für $|q| < 1$ den *Grenzwert*

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \cdot \lim_{n \to \infty} (1 - q^n) =$$

$$= \frac{1}{1 - q} \left(1 - \lim_{n \to \infty} q^n \right) = \frac{1}{1 - q} (1 - 0) = \frac{1}{1 - q}$$

da in diesem Fall $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ ist. Für $|q| \geq 1$ dagegen *divergiert* die Zahlenfolge $\langle q^n \rangle$. Die unendliche *geometrische* Reihe besitzt somit für $|q| < 1$ den *Summenwert*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1 - q}$$

Zahlenbeispiel für $q = 1/3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Matlab:

```
>> s=0;for n=0:10;s=s+(1/3)^n;end,s

s =

   1.5000
```


TECHNISCHE HOCHSCHULE DEGGENDORF

Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe

(3) Wir zeigen, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$$

bestimmt divergent ist. Die für die Grenzwertbildung benötigte n-te Partialsumme s_n kann dabei nach der Formel

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

berechnet werden (diese Formel für die Summe der ersten n positiven ganzen Zahlen haben wir der **Formelsammlung** entnommen $\rightarrow$ Kap. I, Abschnitt 3.4). Beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ erhalten wir hieraus:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} n = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n + 1)}{2} = \infty$$

Die Reihe ist somit – wie behauptet – *bestimmt divergent*.

Über den Umgang mit unendlichen Reihen

Die *formale* (*symbolische*) Schreibweise einer unendlichen Reihe in Form einer *Summe* aus *unendlich* vielen Summanden führt häufig zu Missverständnissen. Eine unendliche Reihe darf nämlich *nicht* als eine Erweiterung des Summenbegriffes von endlich vielen Summanden auf unendlich viele Summanden aufgefasst werden! Denn die für endliche Summen (d. h. Summen mit *endlich* vielen Summanden) gültigen Rechenregeln gelten im Allgemeinen *nicht* für unendliche Reihen. Bei einer (endlichen) Summe ist der Summenwert unabhängig von der Reihenfolge der Summanden (diese dürfen bekanntlich beliebig umgestellt werden) und auch unabhängig davon, ob und wie Klammern gesetzt werden [3]. Bei einer unendlichen Reihe kann sich jedoch der *Summenwert* der Reihe (sofern er überhaupt vorhanden ist) *ändern*, wenn man z. B. die Reihenfolge der Glieder verändert oder Glieder durch *Klammern* zusammenfasst.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Über den Umgang mit unendlichen Reihen

Ein einfaches Beispiel soll diese wichtige Aussage verdeutlichen. Wir unterstellen zunächst, dass die für (endliche) Summen geltenden Rechenregeln auch für unendliche Reihen (unendliche Summen) *gültig* sind. Dann aber müsste der *Summenwert* der unendlichen Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots$$

unabhängig vom eingeschlagenen Rechenweg sein [4]. Es bieten sich beispielsweise folgende Rechenvarianten an:

1. Variante: Wir setzen wie folgt Klammern:

$$\underbrace{(1-1)}_{0} + \underbrace{(1-1)}_{0} + \underbrace{(1-1)}_{0} + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$$

Der Summenwert der Reihe wäre somit $s = 0$, da *alle* Klammern verschwinden.

2. Variante: Wir beginnen mit der Klammerbildung erst *nach* dem 1. Glied:

$$1 + \underbrace{(-1+1)}_{0} + \underbrace{(-1+1)}_{0} + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1$$

Wiederum verschwinden alle Klammern, die Reihe hätte damit den Summenwert $s = 1$.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Über den Umgang mit unendlichen Reihen

Ein einfaches Beispiel soll diese wichtige Aussage verdeutlichen. Wir unterstellen zunächst, dass die für (endliche) Summen geltenden Rechenregeln auch für unendliche Reihen (unendliche Summen) *gültig* sind. Dann aber müsste der *Summenwert* der unendlichen Reihe

Die bekannten Rechenregeln für endliche Summen (endliche Reihen) gelten im Allgemeinen *nicht* für unendliche Reihen (unendliche Summen).

$$1 + \underbrace{(-1 + 1)}_{0} + \underbrace{(-1 + 1)}_{0} + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1$$

Wiederum verschwinden alle Klammern, die Reihe hätte damit den Summenwert $s = 1$.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Konvergenzkriterien für unendlichen Reihen

Bei einer unendlichen Reihe ergeben sich automatisch zwei Fragestellungen:

1. Ist die vorliegende unendliche Reihe *konvergent*, d. h. besitzt sie einen (endlichen) Summenwert oder ist sie *divergent* [5)]?
2. Welchen *Summenwert* besitzt die unendliche Reihe im Falle der Konvergenz?

Zur 1. Fragestellung: Die Frage nach dem Konvergenzverhalten einer Reihe lässt sich in der Regel mit Hilfe von sog. *Konvergenzkriterien* beantworten. Sie ermöglichen eine *Entscheidung* darüber, ob eine vorliegende unendliche Reihe konvergiert oder divergiert (siehe hierzu die in den nächsten Abschnitten besprochenen Kriterien).

Zur 2. Fragestellung: Der *Summenwert* einer konvergenten unendlichen Reihe lässt sich nur in wenigen Fällen exakt bestimmen, meist leider nur *näherungsweise* unter erheblichem Rechenaufwand und mit Unterstützung von Computern. Der Summenwert wird dabei durch eine *Partialsumme* angenähert (Abbruch der Reihe, sobald die gewünschte Genauigkeit erreicht ist).

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Konvergenzkriterien für unendlichen Reihen

Notwendiges Konvergenzkriterium

Für die *Konvergenz* einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist die Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \qquad \text{(VI-16)}$$

notwendig, nicht aber hinreichend [6]. Mit anderen Worten: Damit die unendliche Reihe *konvergiert*, müssen die Reihenglieder diese Bedingung erfüllen. Jedoch darf man aus $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ keineswegs folgern, dass die unendliche Reihe konvergiert. Es gibt Reihen, die die Bedingung (VI-16) erfüllen und trotzdem *divergieren*. Eine Reihe jedoch, die das notwendige Konvergenzkriterium (VI-16) *nicht* erfüllt, kann nicht konvergent sein und ist daher *divergent*. Mit einem *notwendigen* Konvergenzkriterium kann also nur die *Divergenz*, nicht aber die Konvergenz einer unendlichen Reihe festgestellt werden!

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Quotientenkriterium

Quotientenkriterium

Erfüllen die Glieder einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ die Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1 \qquad \text{(VI-17)}$$

so ist die Reihe *konvergent*. Ist aber $q > 1$, so ist die Reihe *divergent*.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Quotientenkriterium

Anmerkungen

(1) Für $q = 1$ *versagt* das Quotientenkriterium, d. h. eine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz ist mit diesem Kriterium *nicht* möglich. Die Reihe *kann* also konvergieren *oder* auch divergieren. In einem solchen Fall muss das Konvergenzverhalten der Reihe mit Hilfe *anderer* Kriterien untersucht werden.

(2) Das Quotientenkriterium liefert eine *hinreichende* Bedingung für die Reihenkonvergenz. Sie ist jedoch *nicht notwendig*, d. h. es gibt Reihen, für die der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ *nicht* vorhanden ist und die trotzdem konvergieren.

(3) Ist die Konvergenzbedingung (VI-17) erfüllt, so ist die unendliche Reihe sogar *absolut konvergent*.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

TECHNISCHE HOCHSCHULE DEGGENDORF

Quotientenkriterium

(2) Das Quotientenkriterium *versagt* bei der *harmonischen Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

Mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ erhalten wir nämlich nach (VI-17):

$$q = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

Mit diesem Kriterium lässt sich das Konvergenzverhalten der harmonischen Reihe *nicht* feststellen (die Reihe ist – wie bereits erwähnt – *divergent*).

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Quotientenkriterium

(2) Das Quotientenkriterium *versagt* bei der *harmonischen Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

Mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ erhalten wir nämlich nach (VI-17):

$$q = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

Mit diesem Kriterium lässt sich das Konvergenzverhalten der harmonischen Reihe *nicht* feststellen (die Reihe ist – wie bereits erwähnt – *divergent*).

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Quotientenkriterium

(3) Die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots$$

ist *konvergent*, obwohl auch hier das Quotientenkriterium (VI-17) *versagt*:

$$q = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} = 1$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Wurzelkriterium

Wurzelkriterium

Erfüllen die Glieder einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1 \qquad \text{(VI-18)}$$

so ist die Reihe *konvergent*. Ist aber $q > 1$, so ist die Reihe *divergent*.

Anmerkungen

(1) Für $q = 1$ *versagt* das Wurzelkriterium.

(2) Die Bedingung (VI-18) ist *hinreichend*, nicht aber notwendig für die Konvergenz einer Reihe.

(3) Ist die Bedingung (VI-18) erfüllt, so ist die unendliche Reihe sogar *absolut konvergent*.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Wurzelkriterium

Beispiel

Wir zeigen mit Hilfe des *Wurzelkriteriums*, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$$

konvergiert. Mit $a_n = \frac{1}{n^n}$ liefert das Kriterium (VI-18) den folgenden Wert für q:

$$q = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Aus $q = 0 < 1$ folgt die *Konvergenz* der vorliegenden Reihe, die somit einen (endlichen, aber noch unbekannten) Summenwert besitzt (Näherungswerte erhält man durch Aufaddieren der Reihenglieder und Abbruch nach Erreichen der gewünschten Genauigkeit).

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Vergleichskriterien

Vergleichskriterien für unendliche Reihen mit positiven Gliedern

Das Konvergenzverhalten einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit positiven Gliedern lässt sich oft mit Hilfe einer geeigneten (konvergenten bzw. divergenten) *Vergleichsreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nach den folgenden Kriterien bestimmen:

Majorantenkriterium

Die vorliegende Reihe *konvergiert*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Vergleichsreihe ist *konvergent*.
2. Zwischen den Gliedern beider Reihen besteht die Beziehung (Ungleichung)

$$a_n \leq b_n \qquad (\text{für alle } n \in \mathbb{N}^*) \qquad \text{(VI-19)}$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Vergleichskriterien

Minorantenkriterium

Die vorliegende Reihe *divergiert*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Vergleichsreihe ist *divergent*.
2. Zwischen den Gliedern beider Reihen besteht die Beziehung (Ungleichung)

$$a_n \geq b_n \qquad (\text{für alle } n \in \mathbb{N}^*) \qquad \text{(VI-20)}$$

Die (divergente) Vergleichsreihe wird als *Minorante* oder *Unterreihe* bezeichnet.

Anmerkungen

(1) Es genügt, wenn die Bedingung (VI-19) bzw. (VI-20) von einem gewissen n_0 an, d. h. erst für alle Reihenglieder mit $n \geq n_0$ erfüllt wird.

(2) Mit dem Majorantenkriterium kann die Konvergenz, mit dem Minorantenkriterium die Divergenz einer Reihe festgestellt werden.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Vergleichskriterien

Minorantenkriterium

Die vorliegende Reihe *divergiert*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Vergleichsreihe ist *divergent*.
2. Zwischen den Gliedern beider Reihen besteht die Beziehung (Ungleichung)

$$a_n \geq b_n \qquad (\text{für alle } n \in \mathbb{N}^*) \qquad \text{(VI-20)}$$

Die (divergente) Vergleichsreihe wird als *Minorante* oder *Unterreihe* bezeichnet.

Anmerkungen

(1) Es genügt, wenn die Bedingung (VI-19) bzw. (VI-20) von einem gewissen n_0 an, d. h. erst für alle Reihenglieder mit $n \geq n_0$ erfüllt wird.

(2) Mit dem Majorantenkriterium kann die Konvergenz, mit dem Minorantenkriterium die Divergenz einer Reihe festgestellt werden.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Vergleichskriterien

(2) Es lässt sich relativ leicht zeigen, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

divergent ist. Für jedes natürliche $n \geq 1$ gilt $\sqrt{n} \leq n$ und somit (nach *Kehrwertbildung*) die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \qquad (\text{für alle } n \in \mathbb{N}^*)$$

Vom 2. Reihenglied an sind die Glieder der vorliegenden Reihe sogar *größer* als die entsprechenden Glieder der *harmonischen Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Die Bedingung (VI-20) des Minorantenkriteriums ist somit *erfüllt*. Aus der (bekannten) *Divergenz* der harmonischen Reihe folgt dann die *Divergenz* der vorliegenden Reihe.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

Wir beschäftigen uns nun mit *alternierenden* Reihen, d. h. Reihen, deren Glieder *abwechselnd* positiv und negativ sind. Eine solche Reihe ist in der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \ldots \qquad \text{(VI-21)}$$

mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ darstellbar. Der Faktor $(-1)^{n+1}$ ist dabei *abwechselnd* positiv und negativ und bestimmt somit das *Vorzeichen* der Glieder. Es wird daher auch als *Vorzeichenfaktor* bezeichnet.

Für *alternierende* Reihen existiert ein spezielles von *Leibniz* stammendes Konvergenzkriterium.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

Eine *alternierende* Reihe vom Typ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \ldots \qquad \text{(VI-22)}$$

mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ist *konvergent*, wenn die Reihenglieder die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$
2. $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

(VI-23)

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

Eine *alternierende* Reihe vom Typ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \ldots \qquad \text{(VI-22)}$$

mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ist *konvergent*, wenn die Reihenglieder die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$
2. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ (VI-23)

Eine alternierende Reihe ist demnach *konvergent*, wenn die *Beträge* ihrer Glieder eine *monoton fallende Nullfolge* bilden (*hinreichende* Konvergenzbedingung).

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

(1) Die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + - \ldots$$

ist *konvergent*, da die Beträge ihrer Glieder eine *monoton fallende Nullfolge* bilden und somit das hinreichende Leibnizsche Konvergenzkriterium (VI-23) erfüllen:

$$\frac{1}{1!} > \frac{1}{2!} > \frac{1}{3!} > \frac{1}{4!} > \ldots > \frac{1}{n!} > \frac{1}{(n+1)!} > \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} = 0$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

(2) Auch die sog. *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$$

konvergiert, da sie die *Konvergenzbedingungen* (VI-23) erfüllt:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

(3) Die *alternierende geometrische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots$$

dagegen ist *divergent*, da sie *keine* der beiden im *Leibnizschen Konvergenzkriterium* (VI-23) genannten Bedingungen erfüllt:

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 1 \ \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^* \\ \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Die unendliche Zahlenfolge $\langle a_n = 1 \rangle$ ist *keine* monoton fallende Nullfolge!

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Eigenschaften konvergenter bzw. absolut konvergenter Reihen

Eigenschaften konvergenter Reihen

1. Eine *konvergente* Reihe bleibt konvergent, wenn man *endlich viele* Glieder weglässt oder hinzufügt oder abändert.

   Dabei *kann* sich jedoch der Summenwert der Reihe *ändern*.

   Klammern dagegen dürfen im Allgemeinen *nicht* weggelassen werden, ebenso wenig darf die Reihenfolge der Glieder verändert werden.
2. Aufeinander folgende Glieder einer *konvergenten* Reihe dürfen durch eine Klammer *zusammengefasst* werden, wobei der Summenwert der Reihe *erhalten* bleibt.
3. Eine *konvergente* Reihe mit ausschließlich *nichtnegativen* Gliedern (d. h. $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$) ist stets *absolut konvergent*.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Eigenschaften konvergenter bzw. absolut konvergenter Reihen

4. **Rechenregeln für konvergente Reihen**

   a) Eine *konvergente* Reihe darf *gliedweise* mit einer Konstanten c multipliziert werden, wobei sich auch der Summenwert s der Reihe mit dieser Konstanten multipliziert:

$$c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot s \qquad \text{(VI-24)}$$

   b) Zwei *konvergente* Reihen mit den Summenwerten s_a und s_b dürfen *gliedweise* addiert bzw. subtrahiert werden, wobei sich die Summenwerte addieren bzw. subtrahieren:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = s_a \pm s_b \qquad \text{(VI-25)}$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Eigenschaften konvergenter bzw. absolut konvergenter Reihen

Für *absolut konvergente* Reihen gelten sogar (sinngemäß) die gleichen Rechenregeln wie für *endliche* Summen! Die Glieder einer solchen Reihe dürfen *beliebig* angeordnet werden, eine solche Umordnung hat *keinen* Einfluss auf den Summenwert der Reihe. Für ein Produkt zweier *absolut konvergenter* Reihen mit den Summenwerten s_a und s_b gilt:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = s_a \cdot s_b \qquad \text{(VI-26)}$$

Das Ausmultiplizieren erfolgt *gliedweise* wie bei *endlichen Summen* und kann z. B. nach dem folgenden Schema erfolgen:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\
\hline
a_1 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots \\
a_2 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots \\
a_3 & a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

$$\underbrace{a_1 b_1}_{c_1} + \underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1)}_{c_2} + \underbrace{(a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1)}_{c_3} + \dots$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihen: Definition einer Potenzreihe

Potenzreihen unterscheiden sich von den bisher behandelten *Zahlenreihen* dadurch, dass ihre Glieder *Potenzen* und somit *Funktionen* einer unabhängigen Variablen x darstellen.

Definition: Unter einer *Potenzreihe* versteht man eine unendliche Reihe vom Typ

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \qquad \text{(VI-27)}$$

Die reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \dots$ heißen *Koeffizienten* der Potenzreihe.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihen: Definition einer Potenzreihe

Zu einer etwas *allgemeineren* Darstellungsform der Potenzreihen gelangt man durch die Definitionsvorschrift

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n =$$

$$= a_0 + a_1 (x - x_0)^1 + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots \tag{VI-28}$$

Die Stelle x_0 heißt *Entwicklungspunkt* oder auch *Entwicklungszentrum*. Für $x_0 = 0$ erhalten wir die in den Anwendungen meist auftretende *spezielle* Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ („Entwicklung um den Nullpunkt"). Die *allgemeine* Form (VI-28) kann dabei stets mit Hilfe der *formalen Substitution* $z = x - x_0$ auf die spezielle Form (VI-27) zurückgeführt werden, so dass wir uns im Wesentlichen auf diesen Potenzreihentyp beschränken können.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihen: Beispiele

Beispiele

(1) $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$

(2) $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

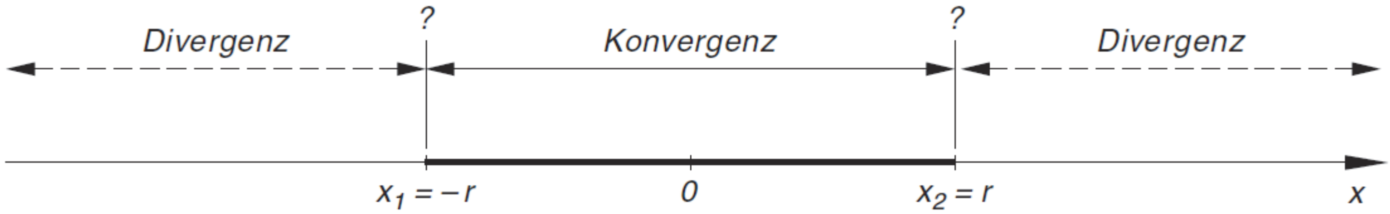
(3) $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n} = \frac{(x-1)^1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - + \ldots$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Konvergenzverhalten einer Potenzreihe

Bei einer Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hängt der Wert eines jeden Gliedes und damit auch der *Summenwert* (falls er überhaupt vorhanden ist) noch vom Wert der unabhängigen Variablen x ab. Wir beschäftigen uns daher in diesem Abschnitt mit dem *Konvergenzverhalten* einer Potenzreihe und untersuchen insbesondere, für *welche* x-Werte die Reihe *konvergiert*.

Definition: Die Menge aller x-Werte, für die eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert, heißt *Konvergenzbereich* der Potenzreihe.



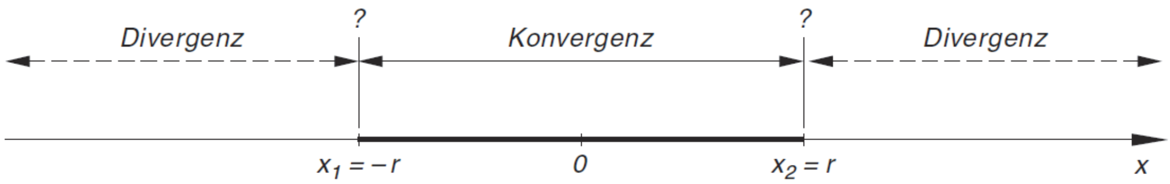
Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Konvergenzverhalten einer Potenzreihe

Über das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe (Bild VI-3)

Zu jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gibt es eine *positive* Zahl r, *Konvergenzradius* genannt, mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Potenzreihe *konvergiert* überall im Intervall $|x| < r$.
2. Die Potenzreihe *divergiert* dagegen für $|x| > r$.
3. Über das Konvergenzverhalten der Potenzreihe in den *Randpunkten* $|x| = r$ lassen sich jedoch *keine* allgemeingültigen Aussagen machen. Es bedarf hierzu weiterer Untersuchungen.



Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Konvergenzverhalten einer Potenzreihe

Anmerkungen

(1) Der *Konvergenzbereich* einer Potenzreihe besteht somit aus dem Intervall $|x| < r$, zu dem *gegebenenfalls* noch ein oder sogar beide Randpunkte hinzukommen.

(2) Konvergiert eine Potenzreihe *nur* an der Stelle $x = 0$, so setzt man $r = 0$.

(3) Eine *beständig*, d. h. für *alle* $x \in \mathbb{R}$ konvergierende Potenzreihe besitzt den Konvergenzradius $r = \infty$.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Berechnung des Konvergenzradius

Wir wollen nun eine Formel herleiten, mit der wir den *Konvergenzradius* r einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ berechnen können, wobei wir voraussetzen, dass *sämtliche* Koeffizienten a_n von Null *verschieden* sind. Nach dem *Quotientenkriterium* (VI-17) konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, wenn ihre Glieder die Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| < 1 \qquad \text{(VI-30)}$$

erfüllen. Mit $b_n = a_n x^n$ und $b_{n+1} = a_{n+1} x^{n+1}$ erhalten wir hieraus die folgende *Konvergenzbedingung* für unsere Potenzreihe:

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Konvergenzradius einer Potenzreihe

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot x\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}|x|\cdot\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \qquad \text{(VI-31)}$$

Durch Auflösen dieser Ungleichung nach $|x|$ erhalten wir schließlich

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = r \qquad \text{(VI-32)}$$

wobei wir noch

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \text{(VI-33)}$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Konvergenzradius einer Potenzreihe (Bild VI-3)

Der *Konvergenzradius* r einer Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ lässt sich nach der Formel

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \text{(VI-34)}$$

berechnen (Voraussetzung: alle Koeffizienten $a_n \neq 0$ und der Grenzwert ist vorhanden). Die Reihe *konvergiert* dann für $|x| < r$ und *divergiert* für $|x| > r$ (siehe hierzu auch Bild VI-3). In den beiden Randpunkten $x_1 = -r$ und $x_2 = +r$ ist das Konvergenzverhalten der Potenzreihe zunächst *unbestimmt*. Es bedarf hier weiterer Untersuchungen.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Anmerkungen

(1) Der Konvergenzradius lässt sich auch nach der Formel

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{(VI-35)}$$

berechnen, die man aus dem *Wurzelkriterium* (VI-18) erhält.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Konvergenzradius einer Potenzreihe

(2) Die Formeln (VI-34) und (VI-35) gelten auch für den Konvergenzradius r einer Potenzreihe vom *allgemeinen* Typ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Diese Reihe *konvergiert* dann für $|x - x_0| < r$, d. h. im Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ und *divergiert* für $|x - x_0| > r$, während das Konvergenzverhalten in den beiden Randpunkten $x_1 = x_0 - r$ und $x_2 = x_0 + r$ zunächst *unbestimmt* ist (Bild VI-4).

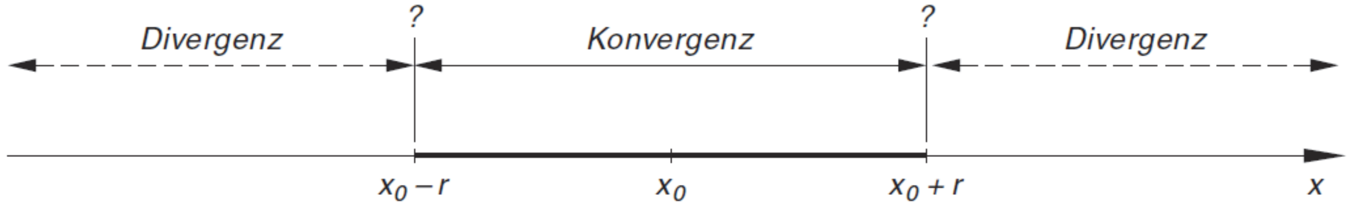


Bild VI-4 Konvergenzbereich einer Potenzreihe vom allgemeinen Typ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Konvergenzverhalten der geometrischen Reihe

(1) Wir untersuchen das Konvergenzverhalten der *geometrischen Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} + \ldots$$

Mit $a_n = 1$ und $a_{n+1} = 1$ erhalten wir für den *Konvergenzradius* dieser Reihe nach Formel (VI-34):

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1} = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$$

Die geometrische Reihe *konvergiert* damit für $|x| < 1$ und *divergiert* für $|x| > 1$. Wir untersuchen jetzt das Konvergenzverhalten der Reihe in den beiden *Randpunkten*:

Randpunkt $x_1 = -1$: $1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots$

Randpunkt $x_2 = +1$: $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

TECHNISCHE HOCHSCHULE DEGGENDORF

Konvergenzverhalten der geometrischen Reihe

(1) Wir untersuchen das Konvergenzverhalten der *geometrischen Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} + \ldots$$

Mit $a_n = 1$ und $a_{n+1} = 1$ erhalten wir für den *Konvergenzradius* dieser Reihe nach Formel (VI-34):

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1} = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$$

Die geometrische Reihe *konvergiert* damit für $|x| < 1$ und *divergiert* für $|x| > 1$. Wir untersuchen jetzt das Konvergenzverhalten der Reihe in den beiden *Randpunkten*:

Randpunkt $x_1 = -1$: $1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots$

Randpunkt $x_2 = +1$: $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Konvergenzverhalten der geometrischen Reihe

(2) Der *Konvergenzradius* der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots$$

beträgt nach Formel (VI-34) mit $a_n = \frac{1}{n!}$ und $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$:

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{n!} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n!\,(n+1)}{n!} = \lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty$$

Die Reihe ist daher *beständig konvergent*, d. h. sie konvergiert für jedes reelle x.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Eigenschaften der Potenzreihen

Eine Potenzreihe $P(x)$ kann im *Innern* ihres Konvergenzkreises als eine *Funktion* der unabhängigen Variablen x aufgefasst werden, die *jedem* x aus dem Konvergenzintervall $(-r, r)$ mit Hilfe der Definitionsvorschrift $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ genau *einen* Funktionswert zuordnet. Potenzreihen besitzen bemerkenswerte Eigenschaften, von denen wir an dieser Stelle nur einige besonders wichtige aufzählen wollen:

Wichtige Eigenschaften der Potenzreihen

1. Eine Potenzreihe konvergiert *innerhalb* ihres Konvergenzbereiches *absolut*.
2. Eine Potenzreihe darf *innerhalb* ihres Konvergenzbereiches beliebig oft *gliedweise* differenziert und integriert werden. Die neuen Potenzreihen besitzen den *gleichen* Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.
3. Zwei Potenzreihen dürfen im *gemeinsamen* Konvergenzbereich der Reihen *gliedweise* addiert, subtrahiert und miteinander multipliziert werden. Die neuen Potenzreihen konvergieren dann *mindestens* im *gemeinsamen Konvergenzbereich* der beiden Ausgangsreihen.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Eigenschaften der Potenzreihen

Potenzreihen dürfen somit *innerhalb* ihres Konvergenzbereiches wie *Polynomfunktionen* behandelt werden, d. h. sie dürfen *gliedweise* addiert, subtrahiert, miteinander multipliziert, differenziert und integriert werden.

Beispiel

Aus Abschnitt 2.2 ist bekannt, dass die *geometrische Reihe*

$$P(x) = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

den Konvergenzradius $r = 1$ besitzt. Dies gilt auch für die durch gliedweise Differentiation bzw. Integration gewonnenen Potenzreihen:

$$P'(x) = \frac{d}{dx}(1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots) =$$

$$= 0 + 1 + 2x^1 + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,x^n$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Taylor-Reihen: Einführung

Aus dem vorherigen Abschnitt ist bekannt, dass *Potenzreihen* in vieler Hinsicht ähnlich einfache Eigenschaften besitzen wie *Polynomfunktionen*. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass es unter gewissen Voraussetzungen *grundsätzlich* möglich ist, eine vorgegebene Funktion $f(x)$ in eine *Potenzreihe* zu *entwickeln*. Aus einer solchen Reihenentwicklung lassen sich dann durch Abbruch der Reihe einfache *Näherungsfunktionen* für $f(x)$ in Form von *Polynomen* gewinnen.

Die *Potenzreihenentwicklung* einer Funktion erweist sich in den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen als ein außerordentlich nützliches mathematisches *Hilfsmittel* und wird z. B. bei der Lösung der folgenden Problemstellungen herangezogen:

- *Annäherung* einer Funktion durch eine *Polynomfunktion* (z. B. durch eine *lineare* oder *quadratische* Funktion)
- Näherungsweise Berechnung von *Funktionswerten*
- Herleitung von *Näherungsformeln* für die „praktische" Mathematik
- *Integration* einer Funktion durch Potenzreihenentwicklung des Integranden und anschließender gliedweiser Integration
- Näherungsweises Lösen von *Gleichungen*
- Auswertung sog. „unbestimmter Ausdrücke"

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Taylor-Reihen: Einführung, Beispiel

$$P(x) = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

1. Die Potenzreihe konvergiert *nur* für $|x| < 1$.
2. Die Reihe besitzt in diesem Konvergenzbereich den *Summenwert* $\frac{1}{1-x}$.

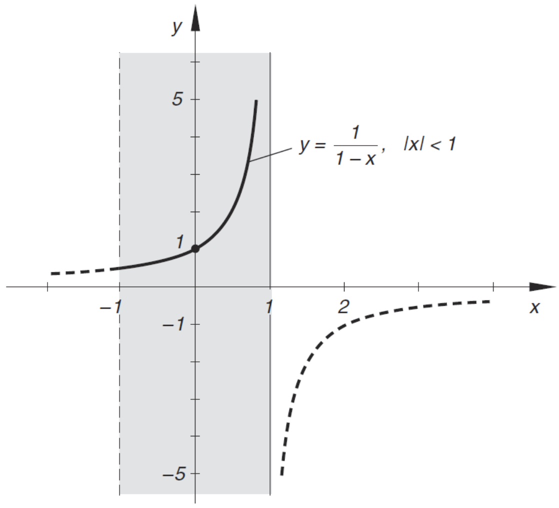
Daher gilt im Intervall $-1 < x < 1$:

$$1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{\text{spezielle Darstellung von}} f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots$$

nur für das Intervall $-1 < x < 1$



Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Mac Laurinsche Reihe

Bei unseren Überlegungen gehen wir zunächst von den folgenden *Annahmen* aus:

1. Die Entwicklung der Funktion $f(x)$ in eine *Potenzreihe* vom Typ

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots \qquad \text{(VI-39)}$$

   ist grundsätzlich *möglich* und *eindeutig*.

2. Die Funktion $f(x)$ ist in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ *beliebig oft* differenzierbar und die Funktions- bzw. Ableitungswerte $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $\ldots$ sind bekannt (oder können zumindest aus der Funktionsgleichung und deren Ableitungen berechnet werden).

Wir wollen jetzt zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ in der Potenzreihenentwicklung (VI-39) *eindeutig* durch die Funktions- und Ableitungswerte $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $\ldots$ bestimmt sind. Ist r der *Konvergenzradius* der Potenzreihe, so konvergieren auch sämtliche durch *gliedweise* Differentiation gewonnenen Reihenentwicklungen für $|x| < r$.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Mac Laurinsche Reihe

Die ersten Ableitungen lauten dabei:

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2x^1 + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots \\ f''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3x^1 + 3 \cdot 4 \cdot a_4x^2 + \ldots \\ f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4x^1 + \ldots \\ &\vdots \end{aligned} \qquad \text{(VI-40)}$$

An der Stelle $x = 0$ gilt dann:

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 = 1 \cdot a_0 = (0!) \cdot a_0 \\ f'(0) &= a_1 = 1 \cdot a_1 = (1!) \cdot a_1 \\ f''(0) &= 1 \cdot 2 \cdot a_2 = (2!) \cdot a_2 \\ f'''(0) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 = (3!) \cdot a_3 \end{aligned} \qquad \text{(VI-41)}$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Mac Laurinsche Reihe

Aus diesen Beziehungen lassen sich die *Koeffizienten* wie folgt berechnen:

$$a_0 = \frac{f(0)}{0!}, \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \ \ldots \qquad \text{(VI-42)}$$

Offensichtlich genügen die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung (VI-39) dem allgemeinen *Bildungsgesetz*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \text{(VI-43)}$$

und sind durch die *Funktions-* und *Ableitungswerte* von $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ *eindeutig* bestimmt.[7] Für die Potenzreihenentwicklung einer Funktion gilt daher unter den genannten Voraussetzungen:

---

[7] $f^{(0)}(0) = f(0)$: Die Funktion $f(x)$ wird hier (rein formal) als „nullte Ableitung" aufgefasst.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Mac Laurinsche Reihe

Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe (Mac Laurinsche Reihe)

Unter bestimmten Voraussetzungen lässt sich eine Funktion $f(x)$ in eine *Potenzreihe* der Form

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n \qquad \text{(VI-44)}$$

entwickeln (sog. *Mac Laurinsche Reihe*).

---

[7] $f^{(0)}(0) = f(0)$: Die Funktion $f(x)$ wird hier (rein formal) als „nullte Ableitung“ aufgefasst.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

TECHNISCHE HOCHSCHULE DEGGENDORF

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Mac Laurinsche Reihe

(1) *Nicht jede* Funktion ist in eine *Mac Laurinsche Reihe* entwickelbar. Eine für die Potenzreihenentwicklung *notwendige* Bedingung haben wir bereits erkannt: Die zu entwickelnde Funktion $f(x)$ muss in der Umgebung der Entwicklungsstelle $x = 0$ *beliebig oft* differenzierbar sein. Diese Bedingung ist jedoch *keinesfalls hinreichend*, d. h. nicht jede beliebig oft differenzierbare Funktion ist in Form einer Potenzreihe darstellbar. Im Rahmen dieser Darstellung können wir auf Einzelheiten nicht näher eingehen und verweisen den Leser auf die spezielle mathematische Literatur. Im Zusammenhang mit der *Restgliedabschätzung* bei Näherungspolynomen werden wir dieses Thema aber nochmals kurz streifen (siehe hierzu Abschnitt 3.3.1).

(2) Die *Mac Laurinsche Reihe* von $f(x)$ ist die Potenzreihenentwicklung von $f(x)$ um den *Nullpunkt* $x = 0$, der daher in diesem Zusammenhang auch als *Entwicklungspunkt* oder *Entwicklungszentrum* bezeichnet wird. Sie ist ein *Sonderfall* einer allgemeineren Potenzreihenentwicklung nach *Taylor*, mit der wir uns in Abschnitt 3.2.2 noch eingehend beschäftigen werden.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Mac Laurinsche Reihe

(3) Der *Konvergenzradius* r der *Mac Laurinschen Reihe* von $f(x)$ kann nach der Formel (VI-34) oder (VI-35) berechnet werden. *Innerhalb* des Konvergenzbereiches, d. h. für $|x| < r$ wird die Funktion $f(x)$ dabei durch ihre *Mac Laurinsche Reihe* dargestellt.

(4) Die *Symmetrieeigenschaften* einer Funktion spiegeln sich auch in ihrer *Mac Laurinschen Reihe* wider: In der Reihenentwicklung einer *geraden* Funktion treten nur *gerade*, in der Reihenentwicklung einer *ungeraden* Funktion dagegen nur *ungerade* Potenzen auf.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Mac Laurinsche Reihe

(1) **Mac Laurinsche Reihen von $f(x) = e^x$ und $f(x) = e^{-x}$**
Für die e-Funktion ist

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad \text{und somit} \qquad f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die *Mac Laurinsche Reihe* von $f(x) = e^x$ lautet demnach wie folgt:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Ihr Konvergenzradius beträgt $r = \infty$, d. h. die Reihe konvergiert *beständig* (siehe hierzu auch Beispiel (2) aus Abschnitt 2.2).

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Mac Laurinsche Reihe

Ersetzen wir in der Reihenentwicklung von $f(x) = e^x$ die Variable x formal durch $-x$, so erhalten wir die *Mac Laurinsche Reihe* von $f(x) = e^{-x}$:

$$e^{-x} = 1 + \frac{(-x)^1}{1!} + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!}$$

Sie konvergiert ebenfalls für alle $x \in \mathbb{R}$, d. h. *beständig*.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Mac Laurinsche Reihe

(2) **Mac Laurinsche Reihen von $f(x) = \cos x$ und $f(x) = \sin x$**

Wir entwickeln zunächst die *Kosinusfunktion* $f(x) = \cos x$ in eine *Mac Laurinsche Reihe*. Es ist:

$$\left.\begin{array}{llll} f(x) = \cos x & \Rightarrow & f(0) = \cos 0 = 1 \\ f'(x) = -\sin x & \Rightarrow & f'(0) = -\sin 0 = 0 \\ f''(x) = -\cos x & \Rightarrow & f''(0) = -\cos 0 = -1 \\ f'''(x) = \sin x & \Rightarrow & f'''(0) = \sin 0 = 0 \end{array}\right\} \text{Viererzyklus}$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1$$

Ab der *vierten* Ableitung wiederholen sich die Ableitungswerte. In einem *regelmäßigen Viererzyklus* werden dabei der Reihe nach die Werte $1, 0, -1$ und 0 durchlaufen. Die *Mac Laurinsche Reihe* der Kosinusfunktion besitzt demnach die folgende Gestalt:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Mac Laurinsche Reihe

Sie enthält wegen der *Spiegelsymmetrie* der Kosinuskurve zur y-Achse ausschließlich *gerade* Potenzen. Eine Berechnung des Konvergenzradius nach Formel (VI-34) ist zunächst nicht möglich, da in der Reihenentwicklung jeder *zweite* Koeffizient *verschwindet*. Wir helfen uns mit einem mathematischen „Trick" und bringen die Reihe mit Hilfe der Substitution $t = x^2$ auf eine neue Gestalt:

$$1 - \frac{t^1}{2!} + \frac{t^2}{4!} - \frac{t^3}{6!} + - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^n}{(2n)!}$$

Diese Potenzreihe in der neuen Variablen t enthält *alle* Potenzen, ihr Konvergenzradius kann daher mit Hilfe der Formel (VI-34) berechnet werden:

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot (2n+2)!}{(2n)!\,(-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(2n)!\,(2n+1)(2n+2)}{(2n)!} = \lim_{n \to \infty} (2n+1)(2n+2) = \infty$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Mac Laurinsche Reihe

Die *Mac Laurinsche Reihe* der *Sinusfunktion* erhalten wir am bequemsten durch *gliedweise Differentiation* der Kosinusreihe (bekanntlich ist $(\cos x)' = -\sin x$ und damit $\sin x = -(\cos x)'$):

$$\sin x = -\frac{d}{dx}(\cos x) = -\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots\right) =$$

$$= -\left(0 - \frac{2x^1}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{6x^5}{6!} + - \ldots\right) =$$

$$= \frac{2x^1}{1 \cdot 2} - \frac{4x^3}{3!\,4} + \frac{6x^5}{5!\,6} - + \ldots = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Taylorsche Reihe

Die Potenzreihenentwicklung einer Funktion $f(x)$ um den *Nullpunkt* $x_0 = 0$ führte uns zur *Mac Laurinschen Reihe* von $f(x)$. Sie ist ein in den Anwendungen besonders wichtiger *Sonderfall* einer allgemeineren, nach *Taylor* benannten Reihenentwicklung. Denn grundsätzlich kann man eine Funktion $f(x)$ um eine *beliebige* Stelle x_0 entwickeln, wenn dort die *gleichen* Voraussetzungen wie bei der *Mac Laurinschen Reihe* vorliegen. Die dann als *Taylorsche Reihe* von $f(x)$ bezeichnete Potenzreihenentwicklung von $f(x)$ besitzt dabei die folgende Gestalt:

Taylorsche Reihe einer Funktion

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \text{(VI-45)}$$

x_0: Entwicklungszentrum oder Entwicklungspunkt

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Taylorsche Reihe

Anmerkungen

(1) Für das Entwicklungszentrum $x_0 = 0$ geht die *Taylorsche Reihe* (VI-45) in die *Mac Laurinsche Reihe* (VI-44) über, die somit nichts anderes darstellt als eine *spezielle* Form der Taylorschen Reihe.

(2) Der Konvergenzradius r der *Taylorschen Reihe* wird nach der Formel (VI-34) oder (VI-35) bestimmt. Die Reihe *konvergiert* dann für jedes x aus $|x - x_0| < r$, d. h. überall im Intervall $x_0 - r < x < x_0 + r$.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Taylorsche Reihe

Beispiel

Die Entwicklung der logarithmischen Funktion $f(x) = \ln x$ in eine *Mac Laurinsche Reihe* ist *nicht* möglich, da der Logarithmus an der Stelle $x = 0$ bekanntlich nicht definiert ist. Wir wählen daher $x_0 = 1$ als *Entwicklungszentrum*. Für die benötigten Funktions- und Ableitungswerte an dieser Stelle erhalten wir:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln x & &\Rightarrow & f(1) &= \ln 1 = 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} & &\Rightarrow & f'(1) &= 1 \\
f''(x) &= -x^{-2} & &\Rightarrow & f''(1) &= -1 \\
f'''(x) &= 2 \cdot x^{-3} & &\Rightarrow & f'''(1) &= 2 \\
f^{(4)}(x) &= -2 \cdot 3 \cdot x^{-4} & &\Rightarrow & f^{(4)}(1) &= -2 \cdot 3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Taylorsche Reihe

Die gesuchte *Taylorsche Reihe* von $f(x) = \ln x$ um das Entwicklungszentrum $x_0 = 1$ lautet somit:

$$\begin{aligned}
\ln x &= 0 + \frac{1}{1!}(x-1)^1 - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{2 \cdot 3}{4!}(x-1)^4 + - \ldots = \\
&= \frac{(x-1)^1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{2\,(x-1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 3\,(x-1)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + - \ldots = \\
&= \frac{(x-1)^1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + - \ldots = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Taylorsche Reihe

Die *sehr langsam* konvergierende Potenzreihe besitzt den Konvergenzradius $r = 1$ und den Konvergenzbereich $0 < x \leq 2$. In diesem und nur diesem Intervall repräsentiert die Reihe den natürlichen Logarithmus. So erhalten wir beispielsweise an der Stelle $x = 2$ eine Darstellung des Funktionswertes $\ln 2$ durch die bekannte *alternierende harmonische Reihe*:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$$

Der Summenwert beträgt 0,6931 (auf vier Dezimalstellen nach dem Komma genau).

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Taylorsche Reihe

Tabelle 1: Potenzreihenentwicklungen einiger besonders wichtiger Funktionen

Funktion	Potenzreihenentwicklung	Konvergenzbereich
	Allgemeine Binomische Reihe[8)]	
$(1 \pm x)^n$	$1 \pm \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 \pm \binom{n}{3} x^3 + \binom{n}{4} x^4 \pm \ldots$	$n > 0: \lvert x \rvert \leq 1$ $n < 0: \lvert x \rvert < 1$
	Spezielle Binomische Reihen	
$(1 \pm x)^{1/2}$	$1 \pm \frac{1}{2} x^1 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} x^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \pm \ldots$	$\lvert x \rvert \leq 1$
$(1 \pm x)^{-1/2}$	$1 \mp \frac{1}{2} x^1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Taylorsche Reihe

Tabelle 1: Potenzreihenentwicklungen einiger besonders wichtiger Funktionen

Funktion	Potenzreihenentwicklung	Konvergenzbereich
	Allgemeine Binomische Reihe[8)]	
$(1 \pm x)^n$	$1 \pm \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 \pm \binom{n}{3} x^3 + \binom{n}{4} x^4 \pm \ldots$	$n > 0: \; \lvert x \rvert \le 1$ $n < 0: \; \lvert x \rvert < 1$
	Spezielle Binomische Reihen	
$(1 \pm x)^{1/2}$	$1 \pm \frac{1}{2} x^1 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} x^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \pm \ldots$	$\lvert x \rvert \le 1$
$(1 \pm x)^{-1/2}$	$1 \mp \frac{1}{2} x^1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \mp \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Taylorsche Reihe

	Trigonometrische Reihen	
$\sin x$	$\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \ldots$	$\lvert x \rvert < \infty$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \ldots$	$\lvert x \rvert < \infty$
$\tan x$	$x^1 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \ldots$	$\lvert x \rvert < \frac{\pi}{2}$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Potenzreihenentwicklung einer Funktion: Taylorsche Reihe

	Exponential- und logarithmische Reihen	
e^x	$1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$	$\lvert x \rvert < \infty$
$\ln x$	$\frac{(x-1)^1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + - \ldots$	$0 < x \le 2$
$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$2\left(\frac{x^1}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots\right)$	$\lvert x \rvert < 1$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Anwendungen der Potenzreihenentwicklungen

In den praktischen Anwendungen besteht häufig der Wunsch, eine vorgegebene Funktion $f(x)$ durch eine *Polynomfunktion* anzunähern bzw. zu ersetzen. Denn Polynomfunktionen besitzen bekanntlich besonders *einfache* und *überschaubare* Eigenschaften. Mit Hilfe der *Potenzreihenentwicklung* lässt sich diese Aufgabe in vielen Fällen wie folgt lösen. Wir entwickeln zunächst die Funktion $f(x)$ in eine *Mac Laurinsche Reihe*[9)]:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad \text{(VI-46)}$$

Durch *Abbruch* dieser Reihe nach der n-ten Potenz erhalten wir das folgende *Näherungspolynom n-ten Grades* für $f(x)$ (auch *Mac Laurinsches Polynom* genannt):

$$f_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad \text{(VI-47)}$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Anwendungen der Potenzreihenentwicklungen

Die dabei vernachlässigten (unendlich vielen!) Glieder fassen wir zu einem sog. *Restglied* $R_n(x)$ zusammen:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!} x^{n+2} + \ldots \qquad \text{(VI-48)}$$

Das Restglied erfasst somit alle Reihenglieder der Entwicklung (VI-46) *ab* der $(n+1)$-ten Potenz. Die Funktion $f(x)$ unterscheidet sich also von ihrem Näherungspolynom $f_n(x)$ durch das *Restglied* $R_n(x)$. Daher gilt:

$$f(x) = f_n(x) + R_n(x) =$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x) \qquad \text{(VI-49)}$$

Diese Darstellungsform der Funktion $f(x)$ als *Summe* aus einem *Polynom n*-ten Grades und einem *Restglied* wird allgemein als *Taylorsche Formel* bezeichnet.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Anwendungen der Potenzreihenentwicklungen

Taylorsche Formel

$$f(x) = f_n(x) + R_n(x) \qquad \text{(VI-50)}$$

Dabei bedeuten:

$f_n(x)$: *Mac Laurinsches Polynom* vom Grade n nach Gleichung (VI-47)

$R_n(x)$: *Restglied* nach Gleichung (VI-48)

Restglied kann nur geschätzt werden! Der Wert befindet sich im folgenden Grenzen:

Restglied nach Lagrange

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad (0 < \vartheta < 1) \qquad \text{(VI-51)}$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Geometrische Deutung der Näherungspolynome

Das Restglied $R_n(x)$ verschwindet stets für $x = 0$: $R_n(0) = 0$. Daher stimmen Funktion $f(x)$ und Näherungspolynom $f_n(x)$ an dieser Stelle in ihren Funktions- und Ableitungswerten bis zur n-ten *Ordnung* überein. Es gilt somit für jedes $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(0) = f_n(0) \qquad \text{und} \qquad f^{(k)}(0) = f_n^{(k)}(0) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{(VI-52)}$$

Wir deuten diese Gleichungen *geometrisch* wie folgt:

Die erste Gleichung besagt, dass *alle* Näherungspolynome durch den Kurvenpunkt $P = (0; f(0))$ verlaufen, in dessen Umgebung die Reihenentwicklung vorgenommen wurde. Aus der zweiten Gleichung folgern wir speziell für $n = 1$ bzw. $n = 2$:

Für $n = 1$:

Die Kurve $y = f(x)$ wird in der Umgebung von P näherungsweise durch ihre *Kurventangente*, d. h. durch die *lineare* Funktion

$$f_1(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x \qquad \text{(VI-53)}$$

ersetzt (Bild VI-6).

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Geometrische Deutung der Näherungspolynome

Man bezeichnet diesen Vorgang auch als *Linearisierung einer Funktion* [11].

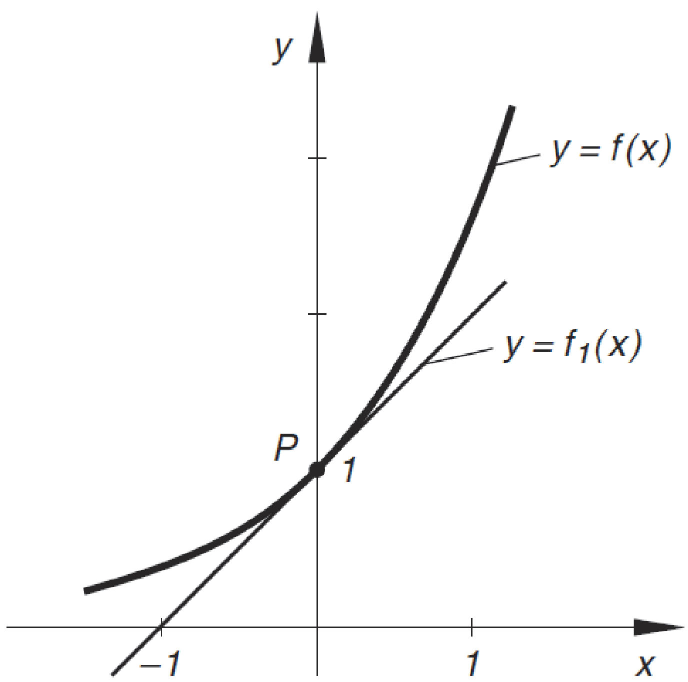


Bild VI-6
Zur Linearisierung einer Funktion (gezeichnet: e-Funktion und ihre Tangente in $P = (0; 1)$)

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Geometrische Deutung der Näherungspolynome

Für $n = 2$:

Die Kurve $y = f(x)$ wird jetzt durch eine *quadratische* Funktion, d. h. durch eine *Parabel* mit der Funktionsgleichung

$$f_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 \qquad \text{(VI-54)}$$

angenähert (Bild VI-7). Kurve und Parabel besitzen dabei in P eine *gemeinsame* Tangente und *gleiche* Kurvenkrümmung.

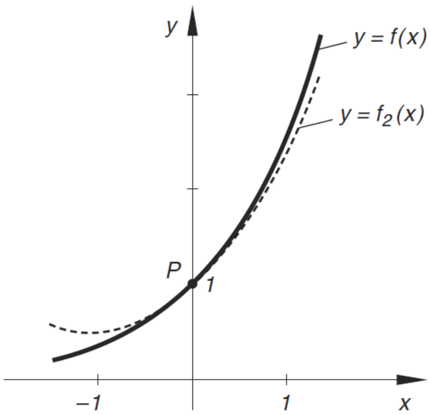


Bild VI-7
Näherungspolynom 2. Grades (Parabel) (gezeichnet: e-Funktion und ihre Näherungsparabel in $P = (0; 1)$)

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Geometrische Deutung der Näherungspolynome

Näherungspolynome einer Funktion (Mac Laurinsche Polynome)

Von einer Funktion $f(x)$ lassen sich mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung wie folgt *Näherungspolynome* gewinnen (sog. *Mac Laurinsche Polynome*):

1. Zunächst wird $f(x)$ um den Nullpunkt $x_0 = 0$ in eine *Mac Laurinsche Reihe* entwickelt.
2. Durch *Abbruch* der Reihe nach der *n-ten* Potenz erhält man dann ein Polynom $f_n(x)$ vom Grade n, das in der Umgebung des Nullpunktes *näherungsweise* das Verhalten der Funktion $f(x)$ beschreibt:

$$f_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x^1 + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n \qquad \text{(VI-55)}$$

3. **Fehlerabschätzung:** Der durch Abbruch der Potenzreihe entstandene *Fehler* ist durch das *Restglied* $R_n(x)$ gegeben und lässt sich in manchen Fällen mit Hilfe der *Lagrangeschen* Restgliedformel (VI-51) *abschätzen*. Er liegt in der *Größenordnung* des *größten* Reihengliedes, das in der Näherung nicht mehr berücksichtigt wurde.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Geometrische Deutung der Näherungspolynome

Anmerkungen

(1) Grundsätzlich gilt: Die *1. Näherung* von $f(x)$ erhalten wir durch Abbruch der Potenzreihe nach dem *ersten* nichtkonstanten Glied, die *2. Näherung* durch Abbruch nach dem *zweiten* nichtkonstanten Glied usw..

(2) Wird $f(x)$ durch ein Polynom 1. Grades, d. h. durch eine *lineare* Funktion angenähert, so sagt man, man habe die Funktion $f(x)$ *linearisiert*. *Geometrische Deutung:* Die Kurve wird in der Umgebung der Stelle $x_0 = 0$ durch die dortige *Kurventangente* ersetzt.

(3) Allgemein gilt: Die *Güte* einer Näherungsfunktion ist umso besser, je mehr Reihenglieder berücksichtigt werden.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Geometrische Deutung der Näherungspolynome

(4) Alle Aussagen gelten sinngemäß auch für *Taylorsche* Reihenentwicklungen, d. h. Potenzreihenentwicklungen um ein (beliebiges) Entwicklungszentrum x_0. Die Näherungsfunktionen heißen dann *Taylorsche Polynome* und sind vom Typ

$$f_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \text{(VI-56)}$$

(5) Eine Funktion $f(x)$ ist unter den folgenden Voraussetzungen in eine (unendliche) *Mac Laurinsche Reihe* entwickelbar:

1. $f(x)$ ist in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes $x_0 = 0$ *beliebig oft* differenzierbar.
2. Das (Lagrangesche) Restglied $R_n(x)$ *verschwindet* beim Grenzübergang $n \to \infty$, d. h. es gilt

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0 \qquad \text{(VI-57)}$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Geometrische Deutung der Näherungspolynome

(4) Alle Aussagen gelten sinngemäß auch für *Taylorsche* Reihenentwicklungen, d. h. Potenzreihenentwicklungen um ein (beliebiges) Entwicklungszentrum x_0. Die Näherungsfunktionen heißen dann *Taylorsche Polynome* und sind vom Typ

$$f_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots \quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \text{(VI-56)}$$

(5) Eine Funktion $f(x)$ ist unter den folgenden Voraussetzungen in eine (unendliche) *Mac Laurinsche Reihe* entwickelbar:

1. $f(x)$ ist in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes $x_0 = 0$ *beliebig oft* differenzierbar.
2. Das (Lagrangesche) Restglied $R_n(x)$ *verschwindet* beim Grenzübergang $n \to \infty$, d. h. es gilt

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0 \qquad \text{(VI-57)}$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Geometrische Deutung der Näherungspolynome

(1) **Berechnung der Eulerschen Zahl e**

Wir gehen von der *Mac Laurinschen* Reihe der e-Funktion aus:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (|x| < \infty)$$

Durch *Abbruch* der Reihe nach der *n-ten* Potenz erhalten wir das folgende *Näherungspolynom n*-ten Grades für e^x:

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Der dabei begangene *Fehler* ist durch das *Lagrangesche Restglied* gegeben. Es lautet:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Geometrische Deutung der Näherungspolynome

Für $x = 1$ erhalten wir aus dem Mac Laurinschen Näherungspolynom eine *Formel* zur näherungsweisen Berechnung der *Eulerschen Zahl* e:

$$e^1 = e \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Das *Lagrangesche Restglied* liefert die folgende *Fehlerabschätzung*:

$$R_n(1) = \frac{e^{\vartheta \cdot 1}}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} = \frac{e^{\vartheta}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

(wegen $e^{\vartheta} < e < 3$ für $0 < \vartheta < 1$).

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Geometrische Deutung der Näherungspolynome

Wir berechnen die *Eulersche Zahl* e *näherungsweise* für $n = 5$ und erhalten:

$$e \approx \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2{,}716\,667$$

Die *Fehlerabschätzung* liefert:

$$R_5(1) < \frac{3}{(5+1)!} = \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} = 0{,}0042 < 0{,}5 \cdot 10^{-2}$$

Wir haben damit die *Eulersche* Zahl auf *zwei* Dezimalstellen nach dem Komma genau berechnet: $e \approx 2{,}71$.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Geometrische Deutung der Näherungspolynome

Wir wollen nun die *Eulersche* Zahl auf *vier* Dezimalstellen nach dem Komma genau berechnen. Für das Restglied $R_n(1)$ gilt dann die *Abschätzung*

$$R_n(1) < 0{,}5 \cdot 10^{-4} \quad \text{und somit} \quad \frac{3}{(n+1)!} < 0{,}5 \cdot 10^{-4}$$

Durch Auflösen nach $(n+1)!$ folgt weiter:

$$(n+1)! > \frac{3}{0{,}5 \cdot 10^{-4}} = 3 \cdot 2 \cdot 10^4 = 60\,000$$

$$(n+1)! > 60\,000 \quad \Rightarrow \quad n \geq 8$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Geometrische Deutung der Näherungspolynome

Wir müssen somit $n = 8$ wählen, d. h. die ersten 9 Reihenglieder aufaddieren, um eine Genauigkeit von *vier* Dezimalstellen nach dem Komma zu erreichen:

$$e \approx \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40\,320} = 2{,}718\,279$$

Damit ist $e \approx 2{,}7182$.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Geometrische Deutung der Näherungspolynome

Aus der Mac Laurinschen Reihe der *Kosinusfunktion*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots \qquad (|x| < \infty)$$

erhalten wir der Reihe nach die folgenden *Näherungspolynome* 2., 4., 6., … Grades für $f(x) = \cos x$, deren Verlauf in Bild VI-9 wiedergegeben ist:

1. Näherung: $f_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} = 1 - \frac{x^2}{2}$

2. Näherung: $f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

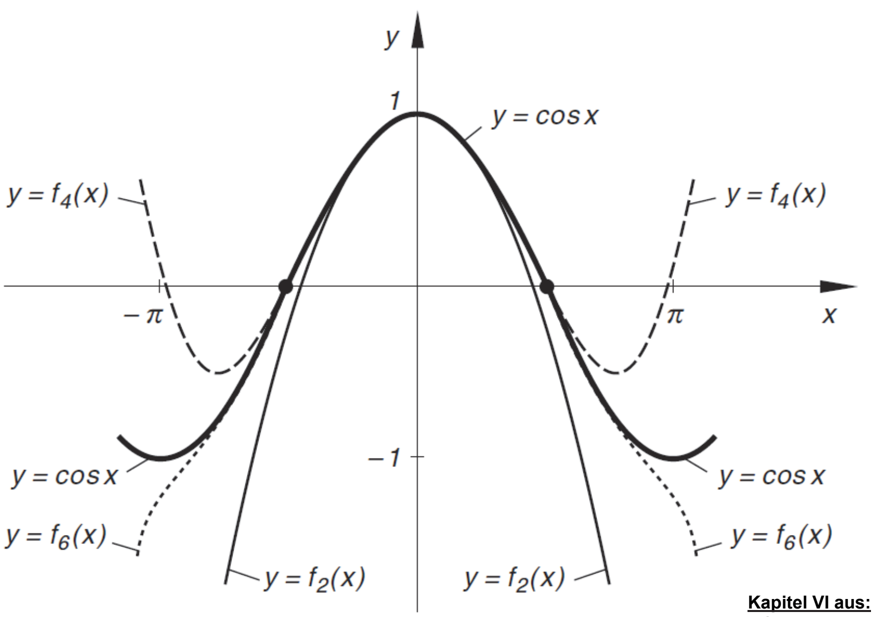
3. Näherung: $f_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$

⋮

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Geometrische Deutung der Näherungspolynome

Wegen der *Achsensymmetrie* der Kosinusfunktion bezüglich der y-Achse treten in der Mac Laurinschen Reihe von $\cos x$ nur *gerade* Potenzen auf. Näherungspolynome 1., 3., 5., … Grades kann es daher *nicht* geben.



Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Geometrische Deutung der Näherungspolynome

Funktion	Entwicklungszentrum	1. Näherung	2. Näherung
$(1 \pm x)^n$	$x_0 = 0$	$1 \pm nx$	$1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2$
$\sin x$	$x_0 = 0$	x	$x - \frac{1}{6} x^3$
$\cos x$	$x_0 = 0$	$1 - \frac{1}{2} x^2$	$1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4$
$\tan x$	$x_0 = 0$	x	$x + \frac{1}{3} x^3$
e^x	$x_0 = 0$	$1 + x$	$1 + x + \frac{1}{2} x^2$
$\ln x$	$x_0 = 1$	$x - 1$	$x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Beispiele

Die *Kettenlinie* $y = a \cdot \cosh(x/a)$ mit $a > 0$ darf in der unmittelbaren Umgebung ihres *Minimums* $x_0 = 0$ in 1. Näherung durch die *Parabel*

$$y = a\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right) = a\left(1 + \frac{x^2}{2a^2}\right) = \frac{1}{2a} x^2 + a$$

ersetzt werden (Bild VI-11).

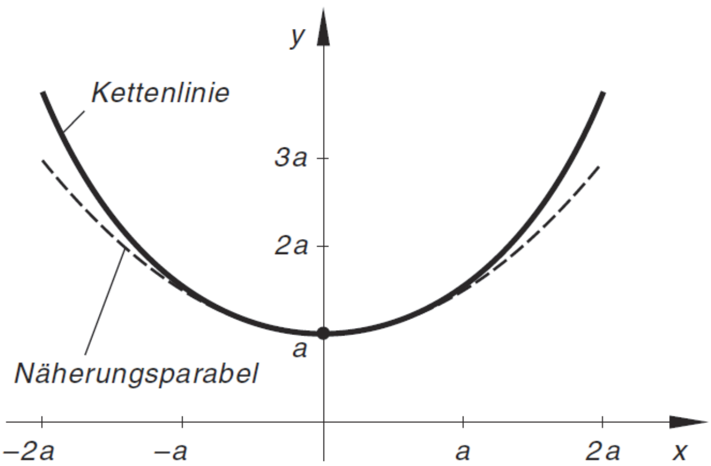


Bild VI-11

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Nur am Rande angemerkt, wird später nochmals wiederholt …

Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden

In zahlreichen Fällen lässt sich ein elementar *nicht* lösbares Integral $\int f(x)\,dx$ schrittweise wie folgt lösen:

1. Die Integrandfunktion $f(x)$ wird zunächst in eine *Mac Laurinsche* oder *Taylorsche Potenzreihe* entwickelt.
2. Die Reihe wird anschließend *gliedweise* unter Verwendung der Potenzregel integriert. Das Integral liegt dann in Form einer Potenzreihe vor.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

1) Berechnen Sie den *Summenwert* der folgenden geometrischen Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} 0{,}3^{n-1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Lösungen:

1) a) $q = -\frac{1}{8};\quad s = \frac{8}{9}$ b) $q = 0{,}3;\quad s = \frac{10}{7}$ c) $q = -\frac{2}{3};\quad s = 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

5) Zeigen Sie: Die folgenden Reihen erfüllen *nicht* das (bekannte) notwendige Konvergenzkriterium und sind somit divergent.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(3 + \frac{1}{2n} \right)$

a) $a_n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}} > 0$$

(der Grenzwert im Nenner ist definitionsgemäß die *Eulersche* Zahl e)

b) $a_n = \ln \left(3 + \frac{1}{2n} \right); \quad \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \ln \left(3 + \frac{1}{2n} \right) = \ln 3 > 0$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

6) Untersuchen Sie mit Hilfe des *Quotientenkriteriums*, ob die folgenden Reihen *konvergieren* oder *divergieren*:

a) $\frac{1}{11} + \frac{1}{101} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{10\,001} + \ldots$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

c) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$

e) $\frac{2^1}{1} - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + - \ldots$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!}$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

a) $a_n = \frac{1}{10^n + 1}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{10^n + 1}{10^{n+1} + 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + 10^{-n}}{10 + 10^{-n}} = \frac{1}{10} < 1$

b) $a_n = \frac{n}{5^n}$;

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot 5^n}{5^{n+1} \cdot n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/n}{5} = \frac{1}{5} < 1$$

c) $a_n = \frac{1}{2^{2n-2}}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{2n-2}}{2^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} < 1$

d) $a_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$;

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/n}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

e) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^n}{n}$;

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot n}{(n+1) \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1 + 1/n} = 2 > 1$$

f) $a_n = \frac{3^{2n}}{(2n)!}$; $\quad$ (Zerlegung $(2n+2)! = (2n)!\,(2n+1)\,(2n+2)$ beachten)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+2} \cdot (2n)!}{(2n+2)!\,3^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9 \cdot (2n)!}{(2n)!\,(2n+1)\,(2n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9}{(2n+1)\,(2n+2)} = 0 < 1$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

7) Untersuchen Sie mit Hilfe des *Wurzelkriteriums*, ob die folgenden Reihen *konvergieren* oder *divergieren*:

a) $\frac{1}{2^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^3} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^n} + \ldots$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n \cdot n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$ *Hinweis:* $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

TECHNISCHE HOCHSCHULE DEGGENDORF

Übungsaufgaben

a) $a_n = \frac{n}{(n+1)^n}; \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(n+1)^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n+1} = 0 < 1$

(der Zähler strebt gegen 1, der Nenner gegen ∞). Die Reihe ist somit *konvergent*.

b) $a_n = \frac{5^n}{4^n \cdot n^2} = \left(\frac{5}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1{,}25^n}{n^2};$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1{,}25^n}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1{,}25}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{1{,}25}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}\right)} =$$

$$= \frac{1{,}25}{\left(\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n}\right) \cdot \left(\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n}\right)} = \frac{1{,}25}{1 \cdot 1} = 1{,}25 > 1$$

(unter Berücksichtigung von $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$). Die Reihe ist somit *divergent*.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

c) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$$

(der Grenzwert im Nenner ist die *Eulersche Zahl* e). Die Reihe ist somit *konvergent*.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie den *Konvergenzradius* und *Konvergenzbereich* der folgenden Potenzreihen:

a) $P(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$

b) $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n}$

c) $P(x) = \frac{x^1}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \ldots$

d) $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

e) $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1}$

f) $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

a) $a_n = n; \quad r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + 1/n} = 1$

Randpunkte $x = \pm 1$: $\pm 1 + 2 \pm 3 + 4 \pm \cdots$

Die Reihe *divergiert* in *beiden* Randpunkten. *Konvergenzbereich:* $|x| < 1$

b) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}; \quad r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$

Randpunkte $x = \pm 1$: $\mp 1 + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \mp \cdots$

Die Reihe *divergiert* für $x = -1$ (harmonische Reihe) und *konvergiert* für $x = 1$ (alternierende harmonische Reihe). *Konvergenzbereich:* $-1 < x \leq 1$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

c) $a_n = \frac{1}{n^2}; \quad r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = 1$

Die Reihe *konvergiert* in *beiden* Randpunkten. *Konvergenzbereich:* $|x| \leq 1$

d) $a_n = \frac{1}{2^n}; \quad r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = \lim_{n \to \infty} 2 = 2$

Randpunkte $x = \pm 2$: $1 \pm 1 + 1 \pm 1 + 1 \pm \cdots$

Die Reihe *divergiert* in *beiden* Randpunkten. *Konvergenzbereich:* $|x| < 2$

e) $a_n = \frac{n}{n+1}; \quad r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1(1 + 2/n)}{(1 + 1/n)^2} = 1$

Randpunkte $x = \pm 1$: $\frac{1}{2} \pm \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \pm \frac{4}{5} + \frac{5}{6} \pm \cdots$

Die Reihe *divergiert* in *beiden* Randpunkten. *Konvergenzbereich:* $|x| < 1$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

f) $a_n = \dfrac{n+1}{n!}$; (Zerlegung $(n+1)! = n!(n+1)$ beachten)

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)!}{n!(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,n!\,(n+1)}{n!\,(n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)(n+1)}{1+2/n} = \infty$$

(der Zähler strebt gegen ∞, der Nenner gegen 1)

Die Reihe *konvergiert daher beständig*, d. h. für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

1) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in eine *Mac Laurinsche Reihe*:

a) $f(x) = \sinh x$ b) $f(x) = \arctan x$ c) $f(x) = \ln(1+x^2)$

a) $f(x) = \sinh x$: *ungerade* Funktion, die Reihe enthält daher nur *ungerade* Potenzen.

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sinh x & \\ & \text{für} \\ \cosh x & \end{cases} \begin{matrix} n = \text{gerade} & \Rightarrow & f^{(n)}(0) = \sinh 0 = 0 \\ \\ n = \text{ungerade} & \Rightarrow & f^{(n)}(0) = \cosh 0 = 1 \end{matrix}$$

$$\sinh x = \frac{x^1}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (\textit{Konvergenzbereich: } |x| < \infty)$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

b) $f(x) = \arctan x$: *ungerade* Funktion, die Reihe enthält daher nur *ungerade* Potenzen.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}; \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}; \quad f'''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3};$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-24(x^3-x)}{(1+x^2)^4}; \quad f^{(5)}(x) = \frac{24(5x^4-10x^2+1)}{(1+x^2)^5}$$

$$f(0)=0; \quad f'(0)=1; \quad f''(0)=0; \quad f'''(0)=-2; \quad f^{(4)}(0)=0; \quad f^{(5)}(0)=24$$

$$\arctan x = \frac{x^1}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Konvergenzbereich: $|x| \le 1$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

c) $f(x) = \ln(1+x^2)$: *gerade* Funktion, die Reihe enthält daher nur *gerade* Potenzen.

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}; \quad f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}; \quad f'''(x) = \frac{4(x^3-3x)}{(1+x^2)^3};$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-12(x^4-6x^2+1)}{(1+x^2)^4}; \quad f^{(5)}(x) = \frac{48(x^5-10x^3+5x)}{(1+x^2)^5};$$

$$f^{(6)}(x) = \frac{-240(x^6-15x^4+15x^2-1)}{(1+x^2)^6}$$

$$f(0)=0; \quad f'(0)=0; \quad f''(0)=2; \quad f'''(0)=0; \quad f^{(4)}(0)=-12; \quad f^{(5)}(0)=0;$$

$$f^{(6)}(0) = 240$$

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n}}{n}$$

Konvergenzbereich: $|x| \le 1$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

2) Bestimmen Sie die *Mac Laurinsche Reihe* der Funktion $f(x) = \cosh x$

a) auf *direktem* Wege nach Formel (VI-44),

b) aus den als bekannt vorausgesetzten *Potenzreihenentwicklungen* von e^x und e^{-x} unter Berücksichtigung der Definitionsformel $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

a) $f(x) = \cosh x$: *gerade* Funktion, die Reihe enthält daher nur *gerade* Potenzen.

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cosh x & \\ & \text{für} \\ \sinh x & \end{cases} \begin{matrix} n = \text{gerade} & \Rightarrow & f^{(n)}(0) = \cosh 0 = 1 \\ \\ n = \text{ungerade} & \Rightarrow & f^{(n)}(0) = \sinh 0 = 0 \end{matrix}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (\textit{Konvergenzbereich: } |x| < \infty)$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

2) Bestimmen Sie die *Mac Laurinsche Reihe* der Funktion $f(x) = \cosh x$

a) auf *direktem* Wege nach Formel (VI-44),

b) aus den als bekannt vorausgesetzten *Potenzreihenentwicklungen* von e^x und e^{-x} unter Berücksichtigung der Definitionsformel $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

b) $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) =$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

5) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen um die Stelle x_0 in eine *Taylor-Reihe* (Angabe der ersten vier Glieder):

a) $f(x) = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}$ b) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}, \quad x_0 = 1$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

5) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen um die Stelle x_0 in eine *Taylor-Reihe* (Angabe der ersten vier Glieder):

a) $f(x) = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}$ b) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}, \quad x_0 = 1$

a) $f(x) = \cos x; \quad f'(x) = -\sin x; \quad f''(x) = -\cos x; \quad f'''(x) = \sin x$

$$f(\pi/3) = \frac{1}{2}; \quad f'(\pi/3) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad f''(\pi/3) = -\frac{1}{2}; \quad f'''(\pi/3) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$f(x) = \cos x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^1 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \ldots$$

Konvergenzbereich: $|x| < \infty$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

b) $f(x) = \sqrt{x}; \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}; \quad f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$

$$f(1) = 1; \quad f'(1) = \frac{1}{2}; \quad f''(1) = -\frac{1}{4}; \quad f'''(1) = \frac{3}{8}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^1 - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + \ldots$$

Konvergenzbereich: $0 \leq x \leq 2$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

c) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}; \quad f'(x) = 2(x^{-2} - x^{-3}); \quad f''(x) = 2(-2x^{-3} + 3x^{-4});$

$$f'''(x) = 12(x^{-4} - 2x^{-5}); \quad f^{(4)}(x) = 24(-2x^{-5} + 5x^{-6})$$

$$f(1) = -1; \quad f'(1) = 0; \quad f''(1) = 2; \quad f'''(1) = -12; \quad f^{(4)}(1) = 72$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = -1 + 1(x-1)^2 - 2(x-1)^3 + 3(x-1)^4 - + \ldots$$

Konvergenzbereich: $0 < x < 2$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

7) Berechnen Sie mittels Reihenentwicklung den Funktionswert von $f(x) = \sqrt{1 - x}$ an der Stelle $x = 0{,}05$ auf sechs Dezimalstellen nach dem Komma genau.

$f(x) = \sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2}$ wird nach der *Binomischen Formel* entwickelt ($n = 1/2$):

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^1 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \cdots$$

$$\sqrt{1-0{,}05} = \sqrt{0{,}95} = 1 - \frac{1}{2}(0{,}05)^1 - \frac{1}{8}(0{,}05)^2 - \frac{1}{16}(0{,}05)^3 - \frac{5}{128}(0{,}05)^4 - \cdots =$$

$$= 1 - 0{,}025 - 0{,}000\,312\,5 - 0{,}000\,007\,81 - \underbrace{0{,}000\,000\,24}_{<\,0{,}5\,\cdot\,10^{-6}} - \ldots$$

Abbruch der Reihe nach dem *4. Glied:* $\sqrt{1-0{,}05} \approx 0{,}974\,679$ (auf 6 Dezimalstellen nach dem Komma genau)

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

8) Berechnen Sie $\cos 8°$ mit Hilfe der *Mac Laurinschen* Reihenentwicklung von $\cos x$ auf vier Dezimalstellen genau.

Hinweis: Winkel erst ins *Bogenmaß* umrechnen!

Rückgriff auf die bekannte Reihe von $\cos x$ ($8° \mathrel{\widehat{=}} 0{,}139\,626$):

$$\cos 8° = \cos 0{,}139\,626 = 1 - \frac{1}{2!}(0{,}139\,626)^2 + \frac{1}{4!}(0{,}139\,626)^4 - + \ldots =$$

$$= 1 - 0{,}009\,748 + \underbrace{0{,}000\,016}_{<\,0{,}5\,\cdot\,10^{-4}} - + \ldots$$

Abbruch nach dem *2. Glied:* $\cos 8° \approx 0{,}9902$ (auf 4 Dezimalstellen genau)

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

15) Die Schwingungsdauer T eines *konischen Pendels* (Bild VI-15) hängt bei gegebener Fadenlänge l und festem Ort nur noch vom Winkel φ zwischen Faden und Vertikale ab:

$$T = T(\varphi) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \cdot \cos\varphi}$$

(g: Erdbeschleunigung)

Zeigen Sie:
Für *kleine* Winkel φ ist die Schwingungsdauer T nahezu winkelunabhängig.

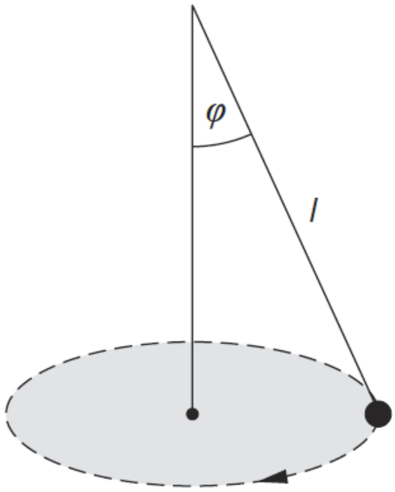
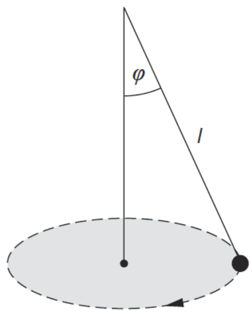


Bild VI-15 Konisches Pendel

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

$$T = T(\varphi) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \cdot \cos\varphi}$$



$\cos\varphi$ wird zunächst in eine Mac Laurinsche Reihe entwickelt, diese dann nach dem *konstanten* Glied abgebrochen:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \cdot \cos\varphi} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}\left(1 \underbrace{- \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - + \ldots}_{\text{vernachlässigbar in 0. Näherung}}\right)} \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Die Schwingungsdauer entspricht jetzt der Schwingungsdauer eines *Fadenpendels* $(\varphi = 0)$!

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

16) Die Schwingungsdauer T einer ungedämpften *elektromagnetischen Schwingung* lässt sich nach der Gleichung $T = 2\pi\sqrt{LC}$ aus der Induktivität L und der Kapazität C berechnen (Bild VI-16).

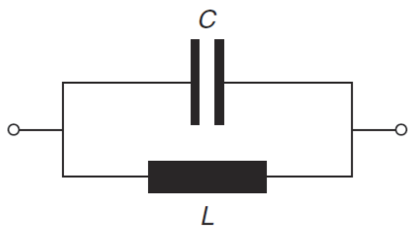


Bild VI-16
Elektromagnetischer Schwingkreis

a) Berechnen Sie die Schwingungsdauer T_0 für die Werte $L_0 = 0{,}1\,\mathrm{H}$ und $C_0 = 10\,\mu\mathrm{F}$.

b) Bei einer Kapazitätsänderung um ΔC (aber *konstant* bleibender Induktivität) ändert sich die Schwingungsdauer um ΔT. Leiten Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung einen *linearen* Zusammenhang zwischen diesen Größen her.

c) Berechnen Sie mit dieser *linearen Näherungsformel* die Änderung ΔT der Schwingungsdauer für den Fall einer *Kapazitätszunahme* um $\Delta C = 0{,}6\,\mu\mathrm{F}$ und vergleichen Sie diesen Wert mit dem *exakten* Wert.

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

a) $T_0 = 2\pi\sqrt{L_0 C_0} = 6{,}283 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s} = 6{,}283\,\mathrm{ms} \quad (1\,\mu\mathrm{F} = 10^{-6}\,\mathrm{F})$

b) $L = L_0 = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad T = T(C) = 2\pi\sqrt{L_0 C} = 2\pi\sqrt{L_0}\cdot\sqrt{C}$

Die Funktion $f(C) = \sqrt{C}$ wird um die Stelle C_0 in eine *Taylor-Reihe* entwickelt:

$$f(C) = \sqrt{C}; \quad f'(C) = \frac{1}{2\sqrt{C}} \quad \Rightarrow \quad f(C_0) = \sqrt{C_0}; \quad f'(C_0) = \frac{1}{2\sqrt{C_0}}$$

$$f(C) = \sqrt{C} = f(C_0) + \frac{f'(C_0)}{1!}(C - C_0)^1 + \dots = \sqrt{C_0} + \frac{1}{2\sqrt{C_0}}(C - C_0) + \dots$$

$$T(C) = 2\pi\sqrt{L_0}\cdot f(C) = 2\pi\sqrt{L_0}\left(\sqrt{C_0} + \frac{1}{2\sqrt{C_0}}(C - C_0) + \dots\right) =$$

$$= \underbrace{2\pi\sqrt{L_0 C_0}}_{T_0} + \pi\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}(C - C_0) + \dots = T_0 + \pi\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}(C - C_0) + \dots$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Übungsaufgaben

Lineare Näherung (*linearisierte* Funktion; Abbruch der Reihe nach dem 2. Glied):

$$\underbrace{T - T_0}_{\Delta T} = \pi \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \underbrace{(C - C_0)}_{\Delta C} \qquad \text{oder} \qquad \Delta T = \pi \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \Delta C$$

c) $$\Delta T = \pi \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \Delta C = 1{,}88 \cdot 10^{-4}\,\text{s} = 0{,}188\,\text{ms}$$

$$\Delta T_{\text{exakt}} = 2\pi \sqrt{L_0 (C_0 + \Delta C)} - 2\pi \sqrt{L_0 C_0} = 2\pi \sqrt{L_0 (C_0 + \Delta C)} - T_0 =$$
$$= 1{,}86 \cdot 10^{-4}\,\text{s} = 0{,}186\,\text{ms}$$

Kapitel VI aus: L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*,
DOI 10.1007/978-3-658-05620-9_6, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Literatur

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler,
Springer Vieweg, 2014, Band 1, **VI Potenzreihenentwicklungen**