

Spezielle Eigenschaften von Funktionen

A 17.1 Welche der folgenden Funktionen $f: y = f(x)$, $x \in D$, sind nach unten bzw. nach oben bzw. nach unten und oben beschränkt? Gegebenenfalls bestimme man eine untere und eine obere Schranke.

- a) $y = x + 1$, $D = \mathbb{R}$ **b)** $y = -x + 1$, $D = [-4, +\infty)$
c) $y = \frac{1}{(x+1)^2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ d) $y = \frac{1}{(x-1)^2}$, $D = \mathbb{R}^-$
e) $y = \frac{1}{1+x^2}$, $D = \mathbb{R}$ f) $y = -x^2 + 4$, $D = \mathbb{R}$
g) $y = 2 + \cos(2x)$, $D = \mathbb{R}$ h) $y = \tan x$, $D = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
i) $y = e^{-2x} + 1$, $D = \mathbb{R}$ j) $y = \frac{1}{1+e^x}$, $D = \mathbb{R}$.

A 17.2 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktionen $f: y = f(x)$:

- a)** $y = x - 2$, $D = \mathbb{R}$ **b)** $y = -3x + 1$, $D = \mathbb{R}$
c) $y = x^2$, $D = \mathbb{R}^-$ **d)** $y = (x+1)^2 - 5$, $D = \mathbb{R}$
e) $y = -x^3 + 1$, $D = \mathbb{R}$ f) $y = |x - 1|$, $D = \mathbb{R}$
g) $y = \sin(2x)$, $D = [-\pi, \pi]$ **h)** $y = \frac{1}{x-1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
i) $y = \frac{1}{x^2} + 2$, $x \neq 0$ j) $y = \frac{x-1}{x+1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

A 17.3 Welche der folgenden Funktionen $f: y = f(x)$, die jeweils auf ihrem natürlichen Definitionsbereich erklärt sein mögen, sind gerade, welche ungerade?

- a)** $y = 3x^2 - 7x^4 + 2$ **b)** $y = 4x^5 - 2x^3 + 6x^4$ **c)** $y = 2x^2 - x + 1$
d) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ e) $y = \frac{1}{x} + x$ **f)** $y = \frac{x}{x^2 + 1}$
g) $y = \frac{x}{x^3 + x}$ **h)** $y = |x| + 1$ i) $y = |x + 1|$
j) $y = \sqrt{x^3 + x}$ k) $y = \sqrt[3]{x^4 + 2}$ l) $y = \ln(x^2)$
nur für $x > 0$ def. **m)** $y = 2 \ln x$ **n)** $y = (\ln x)^2$ **o)** $y = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$
p) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ **q)** $y = \sqrt{\cos x + 1}$ r) $y = \sqrt[3]{x + \sin x}$

A 17.4 Ermitteln Sie - falls möglich - von den folgenden Funktionen $f: y = f(x)$ die Umkehrfunktion f^{-1} und geben Sie deren Definitions- und Wertebereich an:

- a)** $y = -2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ **b)** $y = \frac{x+1}{x}$, $x \in [1, 100]$
c) $y = \frac{x-2}{x+1}$, $x \in [0, 3)$ **d)** $y = \ln(3 - e^{-x})$, $x \in [0, +\infty)$
e) $y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x \in (-1, 1)$ f) $y = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$
g) $y = x^4 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ h) $y = \ln(\sqrt{x-1} + 1)$, $x \in [1, +\infty)$