Technische Hochschule Deggendorf **Platznummer:______**

Wintersemester 2015/16 Prüfungsfach: **Mathematik I / Teil: Folgen, Reihen, Funktionen, Differential- und Integralrechnung** Studiengang: **Angewandte Informatik** Datum: **25.01.2016** Hilfsmittel: nicht programmierbarer Taschenrechner und zwei A4-Seiten mit eigenhändig geschriebenen Formeln (keine gelöste Aufgaben!). **Mobiltelefone sind ausdrücklich verboten!** **Bitte die Lösungen für Anteil Professorin Tóth und Prof. Juhász auf separate Blätter schreiben und separat abgeben!** **Bitte geben Sie Ihre Lösungen zusammen mit diesem Aufgabenblatt und die zwei Seiten eigenhändig geschriebenen Formeln ab!**	**Angabenblatt 1 / 1** Prüfer: Prof. Dr. Juhász Erreichbare Punktzahl: **45**

1a	1b	2	3										Σ

Aufgaben

1) Berechnen sie folgende Grenzwerte:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+2)^3-27n^3}{2n^2+1}$ (9 Punkte)

   b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-2}\right)^x$ wenn bekannt ist dass $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1\pm\dfrac{a}{x}\right)^x=e^{\pm a}$ (13 Punkte)

2) Bestimmen sie die erste Ableitung folgender implizit definierter Funktion:
   $(2+x\cdot y)^2=3x^2-7$ in der Form: $y'=f(x,y)=?$
   (*keine explizite Darstellung in der Form* $y'=f(x)$ *notwendig*)
   (12 Punkte)

3) Berechnen sie folgenden unbestimmten Integral
   $I=\int\dfrac{2x}{4-x^2}\cdot dx$ (11 Punkte)

Lösungen:

Aufgabe 1

a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)^3-27n^3}{2n^2+1}=?$$

benutzt wird: $(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)^3-27n^3}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{27n^3+54n^2+36n+8-27n^3}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{54n^2+36n+8}{2n^2+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{54n^2+36n+8}{2n^2+1}\cdot\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{54+\frac{36}{n}+\frac{8}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}=27$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-2}\right)^x=?$$

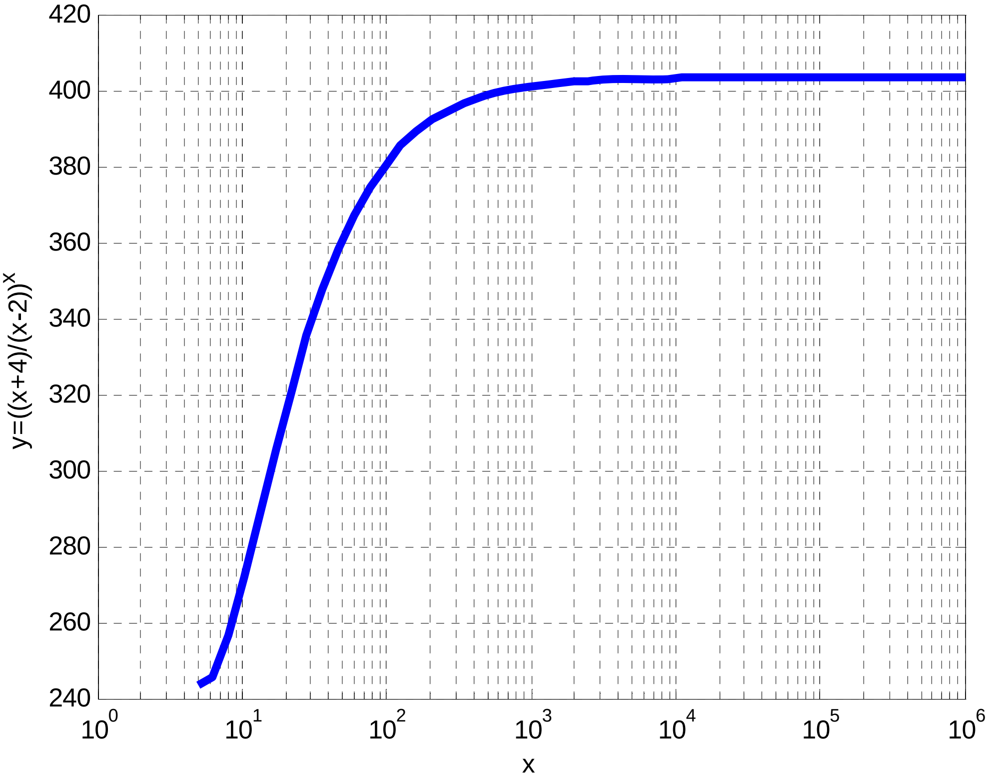
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\cdot\left(1+\frac{4}{x}\right)}{x\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{4}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^x}=$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x}=\frac{e^4}{e^{-2}}=$$

$$=e^6=403{,}43$$



Zur Illustration (Graph der Funktion war nicht gefragt)

Aufgabe 2

$$(2+x\cdot y)^2=3x^2-7,\quad y'(x,y)=?$$

Lösungsweg 1:
Es werden zuerst beide Seiten abgeleitet:

$$2\cdot(2+x\cdot y)\cdot(y+x\cdot y')=6x$$

Ableitung innere und äußere Funktion in Einzelschritten:

$$\frac{d}{d(2+x\cdot y)}(2+x\cdot y)^2=2\cdot(2+x\cdot y)$$

$$\frac{d}{dx}(2+x\cdot y(x))=0+\frac{d}{dx}(x\cdot y)+\frac{d}{dy(x)}(x\cdot y(x))=y+x\cdot y'$$

$$\frac{d}{dx}(3x^2-7)=6x$$

und dann folgt

$$y+x\cdot y'=\frac{6x}{2\cdot(2+x\cdot y)}$$

$$x\cdot y'=\frac{3x}{2+xy}-y$$

$$y'=\frac{3x}{x\cdot(2+x\cdot y)}-\frac{y}{x}$$

$$y'=\frac{3x-(2+x\cdot y)\cdot y}{x\cdot(2+x\cdot y)}=\frac{3x-2y-x\cdot y^2}{x\cdot(2+x\cdot y)}$$

Lösungsweg 2:

Hier berechnen wir zuerst das Quadrat von Binom:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \Rightarrow (2+x\cdot y)^2 = 4 + 4\cdot x\cdot y + x^2\cdot y^2$$

Danach folgt die implizite Ableitung:

$$4 + 4\cdot x\cdot y(x) + x^2\cdot y^2(x) = 3\cdot x^2 - 7 \Big|_{\frac{d}{dx}}$$

$$4\cdot y + 4\cdot x\cdot \frac{dy}{dx} + 2\cdot x\cdot y^2 + 2\cdot x^2\cdot y\cdot \frac{dy}{dx} = 6\cdot x$$

Des Weiteren drücken wir $y' = \frac{dy}{dx}$ in der Form $y' = f(x,y)$ aus

$$\frac{dy}{dx}\cdot 2\cdot x\cdot (2+x\cdot y) + 2\cdot y\cdot (2+x\cdot y) = 6\cdot x$$

$$x\cdot \frac{dy}{dx} + y = \frac{3x}{2+x\cdot y}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{3x}{2+x\cdot y} - y\right) = \frac{3}{2+x\cdot y} - \frac{y}{x} = \frac{3x-2y-x\cdot y^2}{x\cdot(2+x\cdot y)}$$

Aufgabe 3

$$I = \int \frac{2x}{4-x^2}\cdot dx = ?$$

Lösungsweg 1: Substitution

$$\boxed{\begin{array}{l} t = 4 - x^2 \\ dt = -2x\cdot dx \to dx = -\dfrac{dt}{2x} \end{array}}$$

folgt

$$I = \int \frac{2x}{4-x^2}\cdot dx = -\int \frac{-2x}{4-x^2}dx = -\int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\ln|t| + C = -\ln\left|4-x^2\right| + C = \ln\left|\frac{1}{4-x^2}\right| + C$$

Lösungsweg 2: Partialbruchzerlegung und Substitution

$$\frac{2x}{4-x^2}=\frac{2x}{(2+x)\cdot(2-x)}=\frac{A}{2+x}+\frac{B}{2-x}=\frac{A\cdot(2-x)+B\cdot(2+x)}{(2+x)\cdot(2-x)}=\frac{2A-A\cdot x+2B+B\cdot x}{4+2x-2x-x^2}=$$
$$=\frac{2\cdot(A+B)+x\cdot(-A+B)}{4-x^2}$$

$$2\cdot(A+B)+x\cdot(-A+B)=0+2x,\quad \forall x\in\Re$$
$$\left.\begin{array}{l}2\cdot(A+B)=0\\ -A+B=2\end{array}\right\}\Rightarrow A=-1,\quad B=1$$
$$\frac{2x}{4-x^2}=-\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}$$

$$\int\frac{2x}{4-x^2}dx=-\int\frac{1}{2+x}dx+\int\frac{1}{2-x}dx=I_1+I_2$$
$$I_1=-\int\frac{1}{2+x}dx=\left\langle\begin{array}{l}t=2+x\\ dt=dx\end{array}\right\rangle=-\int\frac{1}{t}dt=-\ln|t|+C_1=-\ln|2+x|+C_1$$
$$I_2=\int\frac{1}{2-x}dx=\left\langle\begin{array}{l}p=2-x\\ dp=-dx\end{array}\right\rangle=-\int\frac{1}{p}dp=-\ln|p|+C_2=-\ln|2-x|+C_2$$
$$I_1+I_2=-(\ln|2+x|+\ln|2-x|)+C=-\ln|(2+x)\cdot(2-x)|+C=-\ln\left|4-x^2\right|+C=\ln\left|\frac{1}{4-x^2}\right|+C$$