Beispiel 1.2.4 (Riegzinger: Mathematik für Ingenieure)

Bernoul'sche Ungleichung

Beweisen, daß für alle $x \geq -1$ und für alle $n \in N$ die Ungleichung

$(1+x)^n \geq 1+n\cdot x$ gilt

a) mittels Vollständige Induktion

b) für $x>0$ direkt über binomischen Lehrsatz

1 $n=1$: $\Rightarrow (1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$ ✓

$1+x = 1+x$

2 Induktionsvoraussetzung: für eine $n \in N$ gelte

$$(1+x)^n > 1+n\cdot x$$

3 Induktionsschluss: wenn 1 und 2 gelten, es ist noch zu beweisen das die Ungleichung auch für $n+1$ gilt, also:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot x$$

$\cdot (1+x)$

$$\Rightarrow (1+x)^{n+1} = (1+x)^n\cdot(1+x) \geq \underbrace{(1+x)}_{x\geq -1 \Rightarrow 1+x\geq 0}\cdot(1+nx) =$$

$$= 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)\cdot x+nx^2 \geq$$

$$\geq 1+(n+1)x$$

damit ist die Ungleichung für $n+1$ ebenfalls bewiesen

Seite 2

Beispiel 4.2.4 → b)

b) direkter Beweis für $x \geq 0$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + n \cdot x + \underbrace{\frac{n \cdot (n-1)}{2} x^2 + \ldots}_{\geq 0 \text{ wegen } x \geq 0} \geq$$

$$\underline{\geq 1 + n \cdot x}$$

Abschnitt 3.2.2

Beispiel zur Bestimmung von $N(\varepsilon)$ für gewähltes $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ / einfache Beispiele

(1) $\boxed{a_n = \frac{1}{n}}$ konvergiert $\to 0$

$a_n < \varepsilon$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \boxed{n > \frac{1}{\varepsilon}}$

Beispiel:

$\varepsilon = 0{,}01$

$\Rightarrow n > 100$

(2) $a_n = e^{-n}$

$a_n < \varepsilon \Rightarrow e^{-n} < \varepsilon \quad / \ \varepsilon > 0, \log$

$\ln(e^{-n}) < \ln(\varepsilon)$

$\cancel{-n < \ln(\varepsilon)} \quad \cancel{/ \cdot -1}$

$\cancel{n > -\ln \varepsilon}$

$-n < \ln(\varepsilon) \quad / \cdot -1$

$\boxed{n > -\ln(\varepsilon)}$

Beispiel: $\varepsilon = 0{,}02$

$n > -\ln(0{,}02)$

$n > -(-3{,}9120) = 3{,}9120$

$e^{-3{,}9120} = 0{,}02$

Beispiel 4.2.5 (Rießinger, Mathematik für Ingenieure)

Beweisen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

→ Bernoul'sche Ungleichung mit $x=1$ wird eingesetzt

$$(1+x)^n \geq 1+n\cdot x \quad \Big| \text{ mit } x=1$$

$$(1+1)^n \geq 1+n\cdot 1$$

$$\boxed{2^n \geq 1+n}$$

beide Seiten sind positiv, Kehrwert ändert Relation

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1+n}$$

Folge $\frac{1}{n+1}$ konvergiert genauso gegen Null, wie die Folge $\frac{1}{n}$.

$\Rightarrow \frac{1}{2^n}$ ist immer positiv (also von unten beschränkt)

liegt aber unterhalb ~~der~~ einer Folge, die gegen 0 konvergiert.

Beispiel 4.2.3 (Brückenkurs Mathematik für Ingenieure)

Beweisen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

→ Bernoullische Ungleichung mit $x=1$ und eingesetzt

$$(1+x)^n \geq 1+n\cdot x \quad \Big|\ \text{mit } x=1$$

$$(1+1)^n \geq 1+n\cdot 1$$

$$\boxed{2^n \geq 1+n}$$ beide Seiten sind positiv, Kehrwert ändert Zeichen

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n+1}$$

Folge $\frac{1}{n+1}$ konvergiert genauso gegen Null, wie die Folge $\frac{1}{n}$.

$\Rightarrow \frac{1}{2^n}$ ist immer positiv (also von unten beschränkt)

liegt aber unterhalb einer

Folge, die gegen 0 konvergiert.

Aufgabe (mittelschwer), siehe auch 4.2.6. Riesinger
Beispiel Folge mit Bernoulli'scher Ungleichung

~~Behauptung~~: Aufgabe: Beweisen Sie, dass

$\boxed{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1}$ gilt für alle $a \in \mathbb{R}, a \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}, n > 0$

$x_n \geq 0$ wird definiert als: $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$

~~dann~~ gilt: $\boxed{\sqrt[n]{a} = 1 + x_n}$

dann gilt die Bernoulli-Ungleichung:

$$a = (1 + x_n)^n \geq 1 + n \cdot x_n$$

also:

$$a \geq 1 + n \cdot x_n \quad (-1)$$ da $a \geq 1$, beide Seiten bleiben positiv

$$a - 1 \geq n \cdot x_n \quad (/n)$$ $n > 0$, da $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a-1}{n} \geq x_n \quad , \quad x_n \geq 0$$

es ist aber

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a-1}{n} = 0$$

damit ist dann auch

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

und letzes Endes: $\lim \sqrt[n]{a} = 1 + \lim_{n \to \infty} x_n = 1 + 0 = \underline{1}$