Blatt 18:

Bemerkung: Die Aufgaben von Blatt 18 sind als "vertiefende Ergänzung" zu Blatt 17 zu sehen

A 18.1 Unter der Annahme, daß die Funktionen f und g für alle $x \in I\!R$ definiert sind und $g(x) \neq 0$ gilt, beweise man folgende Behauptungen:

a) Sind f und g gerade, dann sind auch $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$ gerade.

b) Sind f und g ungerade, dann sind $f+g$, $f-g$, $f \circ g$, $g \circ f$ ungerade, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ gerade.

c) Ist f gerade, g ungerade (oder umgekehrt), dann sind $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ungerade, $f \circ g$, $g \circ f$ gerade.

d) Für beliebiges f und gerades g ist $f \circ g$ gerade.

A 18.2 Unter Verwendung von A 18.1 untersuche man die folgenden Funktionen $f: \ y = f(x)$, die jeweils auf ihrem natürlichen Definitionsbereich gegeben sein mögen, auf Geradheit/Ungeradheit:

a) $y = x^2 + \cos x$ b) $y = \tan x$ c) $y = \sin x \cdot \cos x$ d) $y = \sin(x^2)$
e) $y = (x^3 - x)^3$ f) $y = (x^3 - x)^2$ g) $y = \cos(\sin x)$ h) $y = \sin^2(\cos x)$

A 18.3 a) Es ist zu zeigen, daß sich jede Funktion f, die einen zum Nullpunkt symmetrischen Definitionsbereich besitzt, als Summe einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion u darstellen läßt:

$$f = g + u.$$

b) Ermitteln Sie g und u für folgende Funktionen $f: \ y = f(x)$:

$\alpha)$ $y = x^2 + 2x - 1$ $\beta)$ $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ $\gamma)$ $y = \dfrac{x-1}{x+1}$
$\delta)$ $y = |x+2| - x$ $\varepsilon)$ $y = \ln(x^2)$ $\zeta)$ $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

A 18.4 Sind folgende, auf ihrem natürlichen Definitionsbereich erklärte Funktionen $f: \ y = f(x)$ periodisch ? Ermitteln Sie gegebenenfalls die Grundperiode T.

a) $y = \sin x + e^x$ b) $y = 4\cos(x-2)$ c) $y = \tan(4x) + 5$
d) $y = e^{\cos(2x+1)} + \frac{1}{2}$ e) $y = \dfrac{\ln|\sin x|}{\tan(0.25\,x)}$, f) $y = \sin(3x) - \tan(2x)$

A 18.5 Eine gedämpfte Schwingung wird beschrieben durch

$$f: \ y = Ae^{-\gamma t} \sin \omega t, \quad t \geq 0, \quad \gamma > 0 \ (\text{Dämpfungsfaktor}).$$

a) Ist f periodisch ?
b) Man skizziere den Graphen von f für $A = 1.5$, $\gamma = 0.25$, $\omega = 2$ für $t \in [0, 4\pi]$.

A 18.6 Ein spezieller elektrischer Impuls läßt sich durch die Funktion $f: \ y = f(t)$, $t \in I\!R$, beschreiben, die für $t \in [0,2]$ durch

$$y = \begin{cases} 2t & \text{für } \ 0 \leq t \leq 0.5 \\ 1 & \text{für } \ 0.5 \leq t \leq 1.5 \\ -2t+4 & \text{für } \ 1.5 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

definiert wird. Außerdem soll f ungerade sein und die Periode $T = 4$ besitzen. Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-6 \leq t \leq 6$.

A 18.7 Gesucht ist die Gleichung der Funktion $f: \ y = f(x)$, $x \in I\!R$, die in $[-1,1]$ die Gestalt $y = x^2$ hat, gerade ist und die Periode $T = 2$ besitzt.

A 18.8 Die folgenden physikalischen Formeln sind nach den angegebenen Größen umzustellen. (Zur Bedeutung der auftretenden Symbole vgl. z.B. [DES])

a) (Vertikalkomponente des schrägen Wurfs mit Abwurfwinkel β)

$z(t) = v_0\, t \sin\beta - \frac{1}{2} g t^2$ nach β $(0 < \beta < \pi/2)$.

b) (Gedämpfte elektromagnetische Schwingung)

$i(t) = I_{max} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$ nach β

c) (Comptoneffekt)

$\cot\varphi = \left(1 + \dfrac{hf}{m_e c_0^2}\right) \tan\dfrac{\vartheta}{2}$ nach ϑ $(-\pi < \vartheta < \pi)$

d) (Phasenverschiebung zwischen erzwungener Schwingung und Erregung)

$\varphi = \arctan \dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ nach ω.