TECHNISCHE HOCHSCHULE DEGGENDORF



Physik für Infotronik (11)

Gerald Kupris

11.11.2015

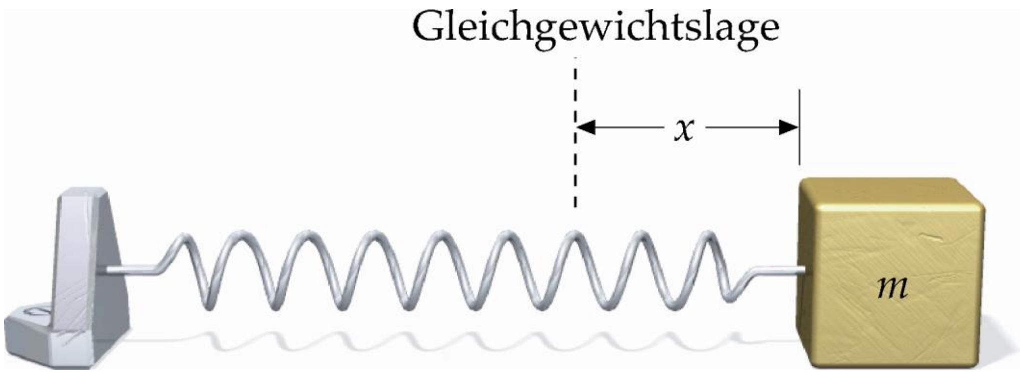
innovativ & lebendig – Bildungsregion DonauWald

Vorlesungen Physik WS 2015/16

07.10.2015	Vorlesung 1	Messung und Maßeinheiten
07.10.2015	Vorlesung 2	Eindimensionale Bewegung
14.10.2015	Vorlesung 3	Bewegung in zwei und drei Dimensionen
14.10.2015	Vorlesung 4	Die Newtonschen Axiome
21.10.2015	Vorlesung 5	Anwendung der Newtonschen Axiome
21.10.2015	Vorlesung 6	Arbeit und kinetische Energie, Energieerhaltung
28.10.2015	Vorlesung 7	Der Impuls
28.10.2015	Vorlesung 8	Elastischer und inelastischer Stoß
04.11.2015	Vorlesung 9	Drehbewegungen
04.11.2015	Vorlesung 10	Drehimpuls
11.11.2015	Vorlesung 11	Harmonische Schwingungen und Resonanz
11.11.2015	Vorlesung 12	Wellenausbreitung und Doppler-Effekt
18.11.2015	**erweitertes Tutorium**	

Körper an einer Feder

Ein Körper an einer Feder auf einer reibungsfreien Unterlage: die Verschiebung x aus der Gleichgewichtslage ist positiv, wenn die Feder gedehnt, und negativ, wenn sie zusammengedrückt wird.



Harmonische Schwingung

Betrag der Federkraft: $F_x = -k_F \cdot x$ (k_F = Federkonstante [N/m])

Zweites Newtonsches Axiom: $F_x = m \cdot a_x$

$$F_x = -k_F \cdot x = m \cdot a_x$$

$$a_x = -\frac{k_F}{m} x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k_F}{m} x$$

Die Beschleunigung ist proportional zur Auslenkung - das Minuszeichen zeigt, dass sie ihr entgegengesetzt gerichtet ist.

Bei einer harmonischen Schwingung sind die Beschleunigung (und damit auch die resultierende Kraft) auf einen Körper proportional zu dessen Auslenkung aus der Gleichgewichtslage und stets zu dieser hin gerichtet.

Schwingungsdauer

Die Zeit, die der Körper benötigt, um eine vollständige Schwingung (von einer extremen Auslenkung aus der Ruhelage zur anderen und wieder zurück) aus- zuführen, wird als Schwingungsdauer ***T*** oder Schwingungsperiode bezeichnet.

Der Kehrwert der Schwingungsdauer heißt Frequenz: $$f = \frac{1}{T}$$

Die Frequenz gibt die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde an.

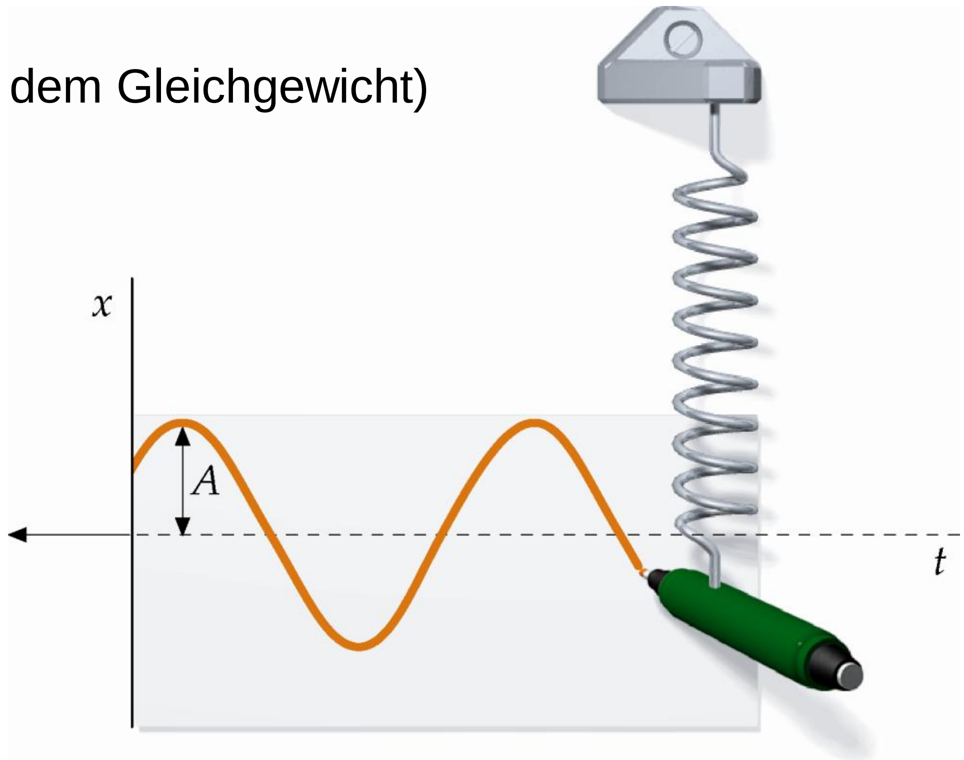
Die Einheit der Frequenz wird Herz genannt: 1 Hz = 1 s^{-1}

Kreisfrequenz: $$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$$

Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Schwingung

$x = A \cos(\omega t + \delta)$

A = Amplitude (maximale Auslenkung aus dem Gleichgewicht)
$(\omega t + \delta)$ = Phase
δ = Phasenkonstante



$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta)$$

$$a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_x = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x$$

Frequenz des Federschwingers

$$a_x = -\omega^2 x = -\frac{k_F}{m} x \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k_F}{m}}$$

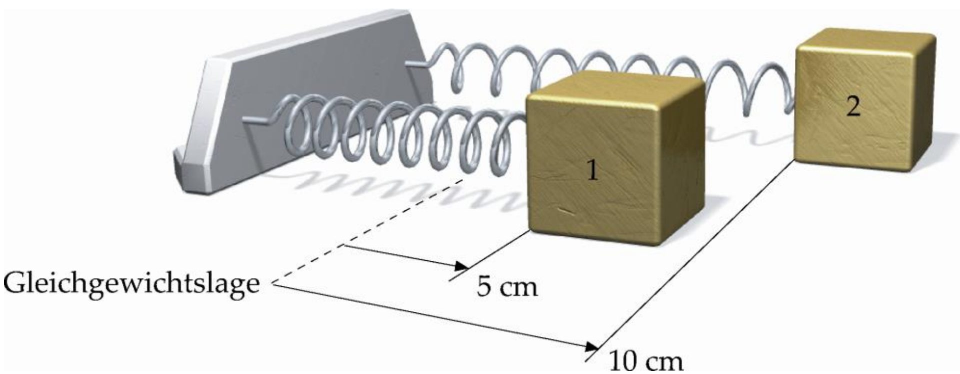
Kreisfrequenz: $$\omega = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi \cdot f$$

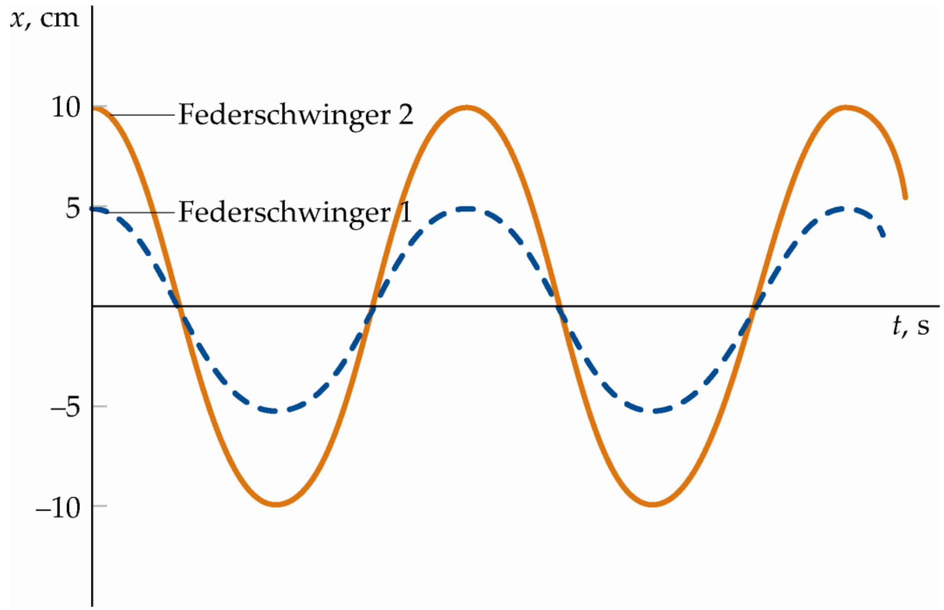
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_F}{m}} \qquad T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_F}}$$

Die Frequenz des Federschwingers nimmt mit wachsender Federkonstante zu und mit zunehmender Masse ab.

Frequenz und Amplitude

Die Frequenz einer harmonischen Schwingung ist unabhängig von der Amplitude.





Energie der harmonischen Schwingung

$$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot}$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} k_F x^2 = \frac{1}{2} k_F A^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

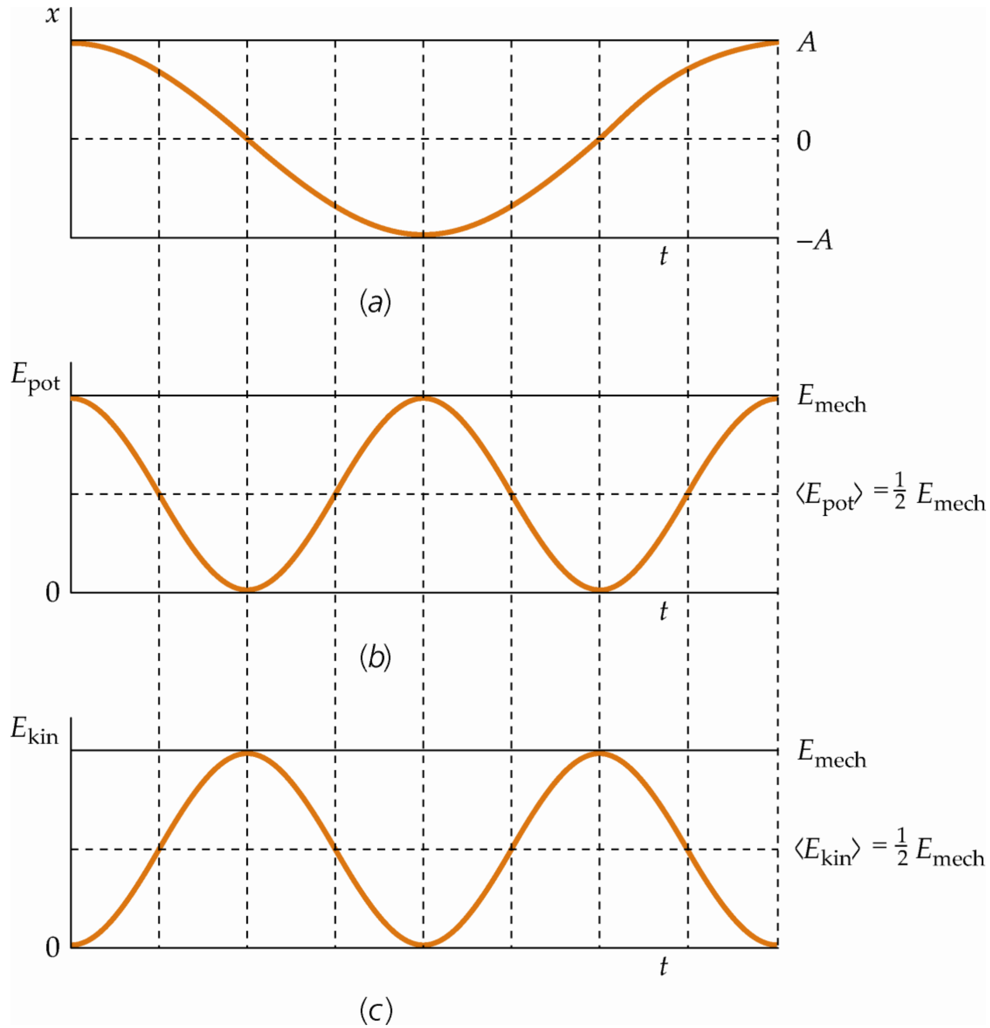
$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} k_F A^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

$$E_{mech} = \frac{1}{2} k_F A^2 (\cos^2(\omega t + \delta) + \sin^2(\omega t + \delta))$$

$$E_{mech} = \frac{1}{2} k_F A^2$$

Die mechanische Gesamtenergie der harmonischen Schwingung ist proportional dem Amplitudenquadrat.



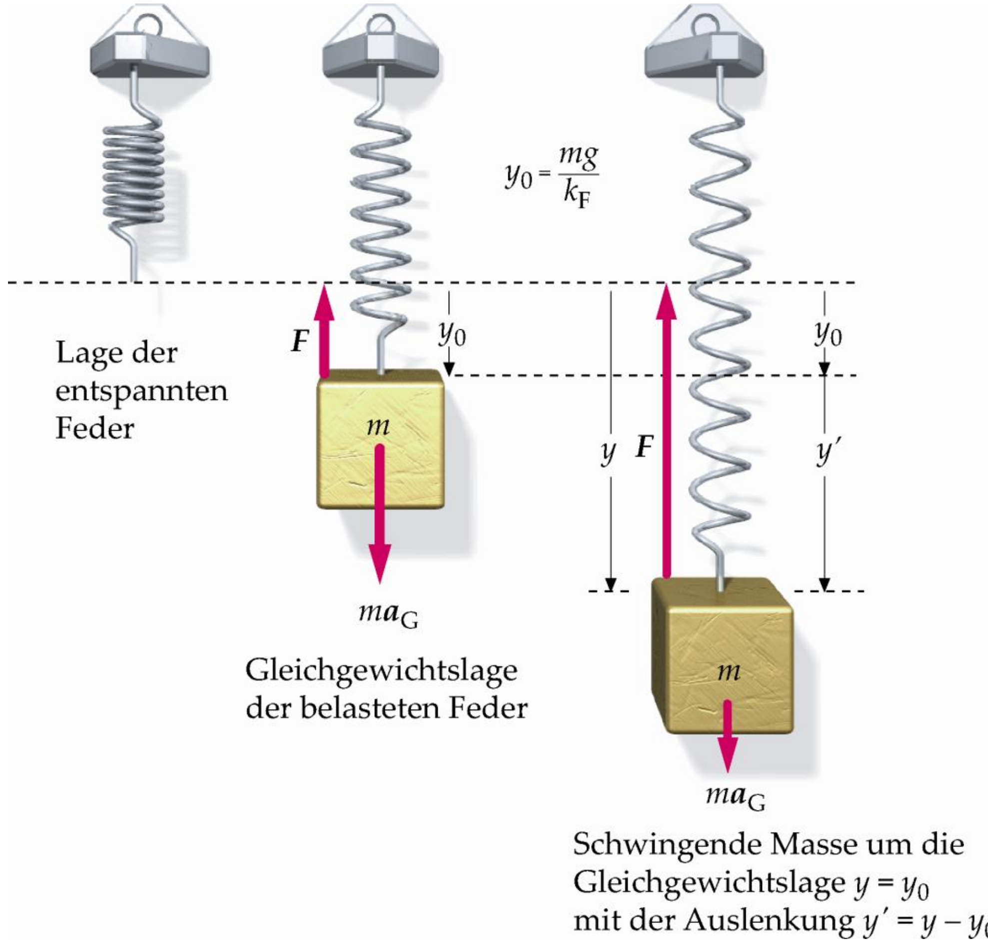
Vertikaler Federschwinger

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x = -\frac{k_F}{m}x$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_F}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_F}{m}}$$

Die Frequenz des Federschwingers nimmt mit wachsender Federkonstante zu und mit zunehmender Masse ab.



Das mathematische Pendel (1)

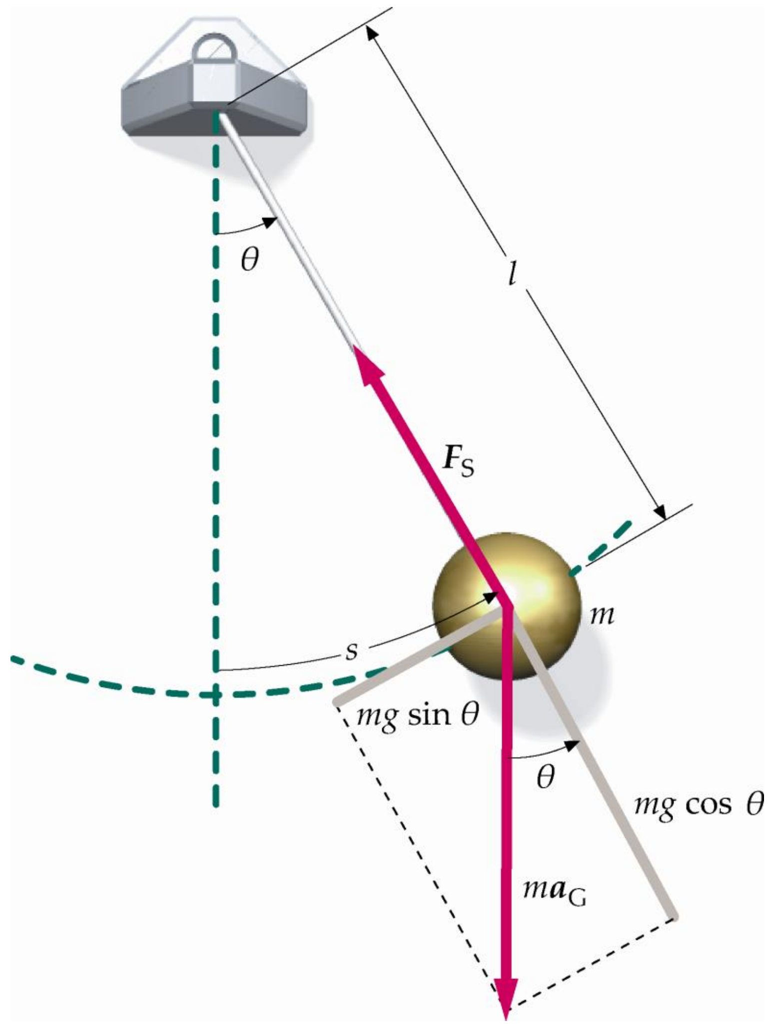
Tangentiale Kraftkomponente (zweites Newtonsches Axiom):

$$F_T = -m \cdot g \cdot \sin\theta = m \cdot a_T$$

$$a_T = \frac{d^2 s}{dt^2} = l \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \sin\theta$$

Die Pendelschwingungen des mathematischen Pendels sind unabhängig von der Masse des Pendelkörpers!



Das mathematische Pendel (2)

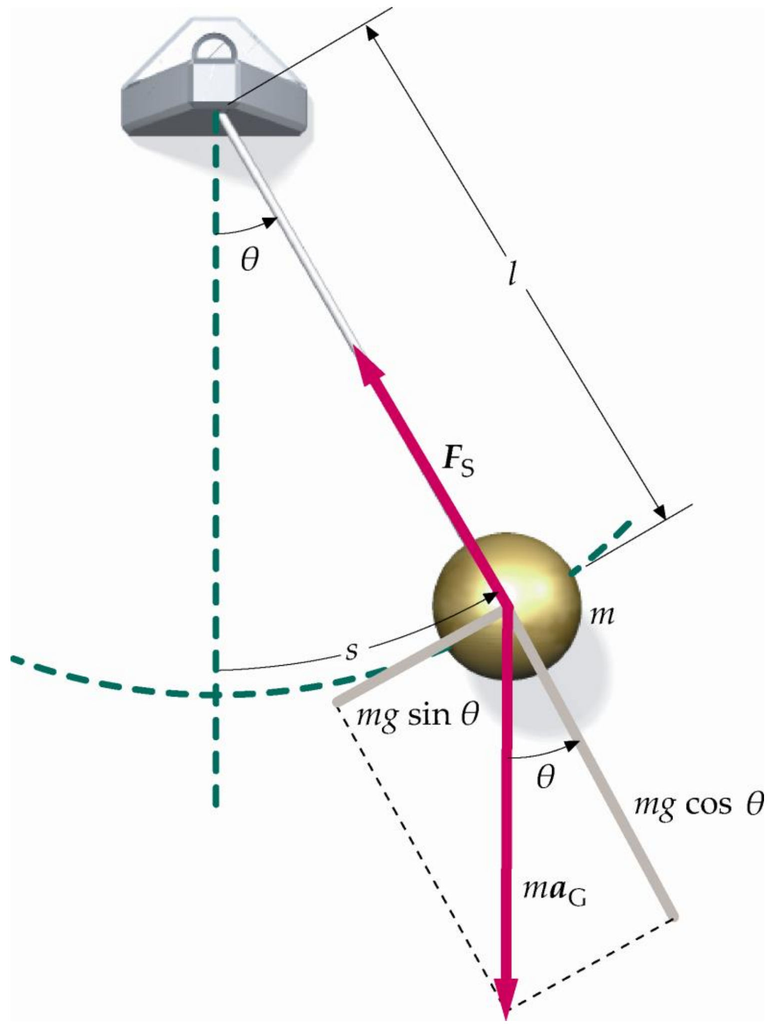
bei kleinen Auslenkungen:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \sin\theta$$

$$\sin\theta \approx \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \theta$$

Differenzialgleichung des harmonischen Oszillators für kleine Winkelauslenkungen.



Das mathematische Pendel (3)

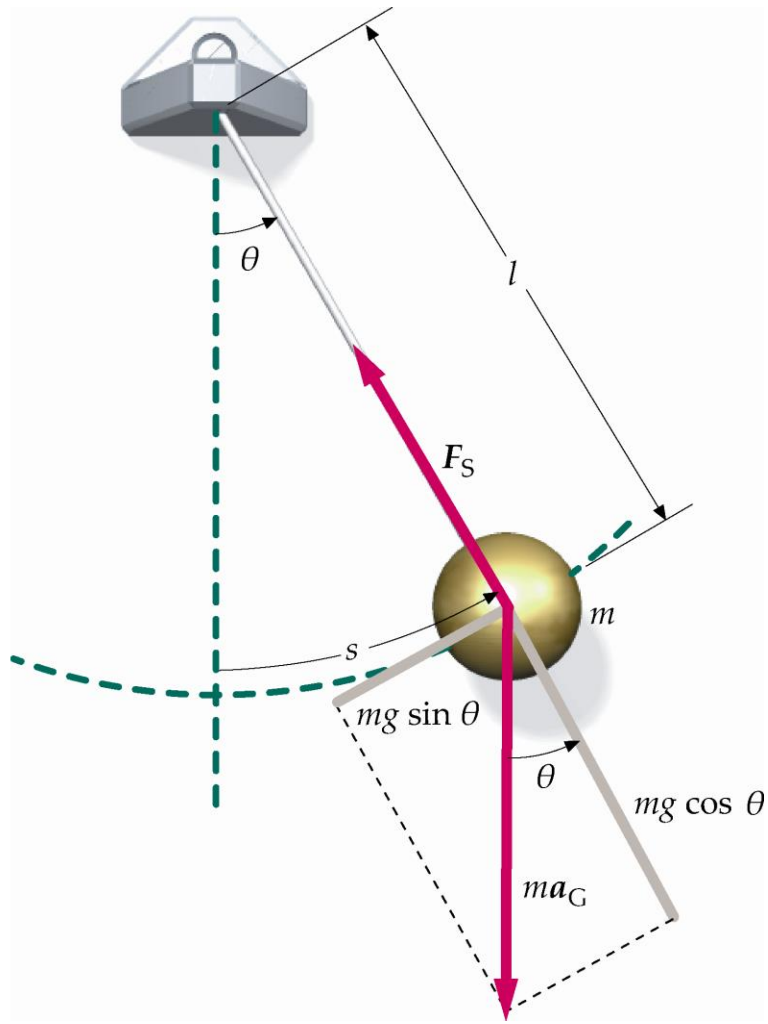
Analogie zum Federschwinger:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k_F}{m}x = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\cdot\theta$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



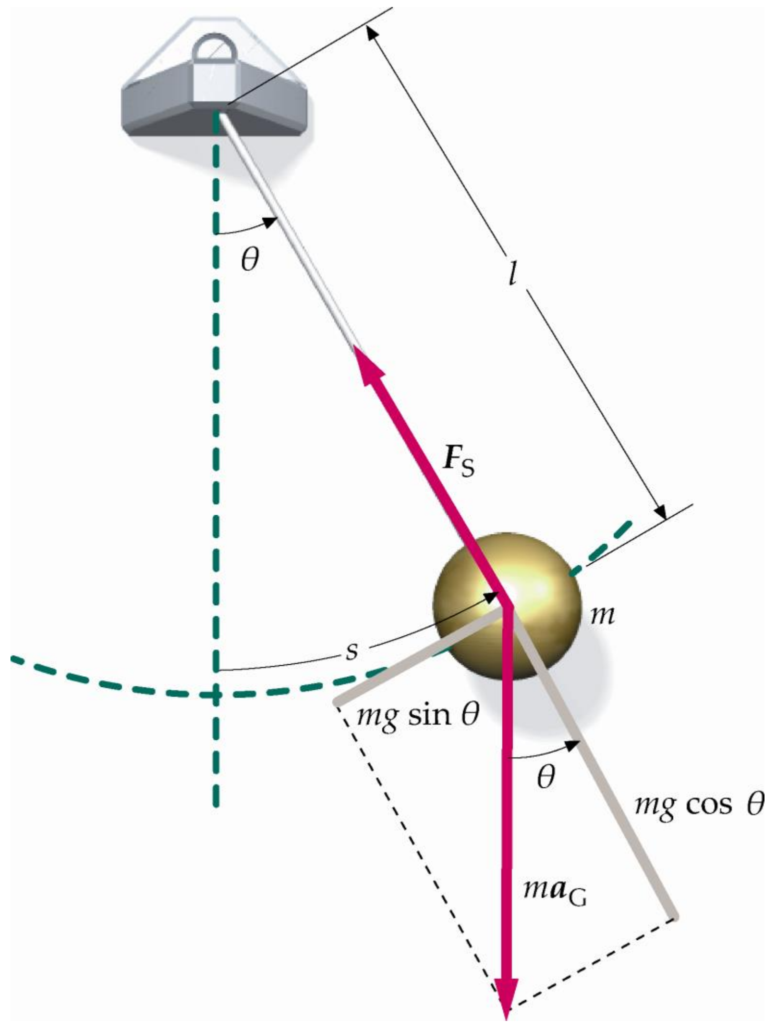
Schwingungsenergie des mathematischen Pendels

Die Schwingungsenergie entspricht der kinetischen Energie bei maximaler Auslenkung des Pendels:

$$E = E_{pot} = m \cdot g \cdot \Delta h$$

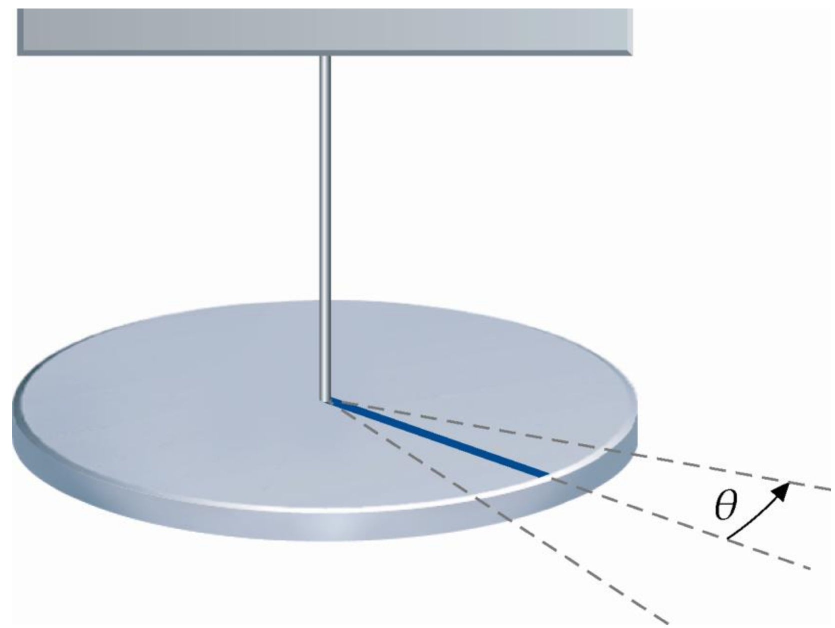
$$\Delta h = l(1 - \cos\theta)$$

$$E = m \cdot g \cdot l(1 - \cos\theta)$$



Torsionspendel

Ein System, das Drehschwingungen in einer Variation einer harmonischen Schwingung durchführt, heißt Drehpendel oder Torsionspendel.



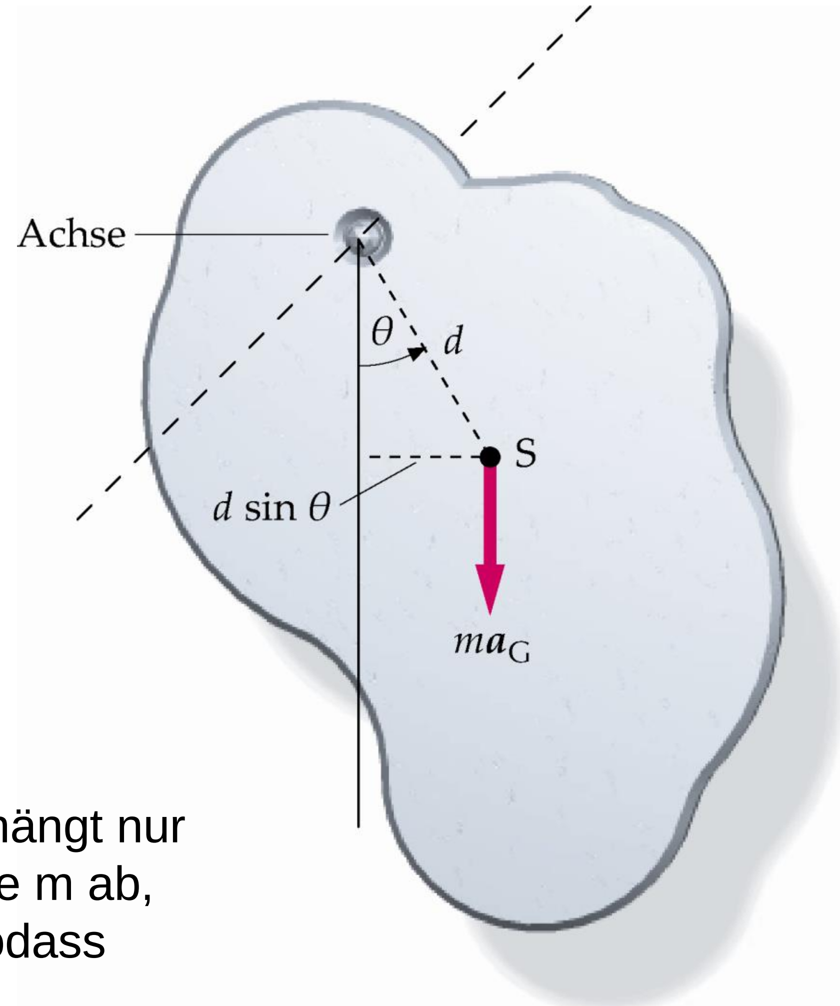
$$M = -k \cdot \theta$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$$

M Drehmoment
k Torsionskonstante
I Trägheitsmoment

Das Physikalische Pendel

Ein starrer Körper, der sich frei um eine horizontale Achse drehen kann, die nicht durch seinen Schwerpunkt S verläuft, beginnt nach einer Auslenkung aus seiner Gleichgewichtslage zu schwingen. Ein solches System bezeichnet man als **physikalisches Pendel.**



$$M = m \cdot g \cdot d \cdot \sin\theta$$

$$M = m \cdot g \cdot d \cdot \theta$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot d}}$$

Die Schwingungsdauer des physikalischen Pendels hängt nur von der Masseverteilung, nicht von der Gesamtmasse m ab, denn das Trägheitsmoment *I* ist proportional zu *m*, sodass *I/m* unabhängig von *m* ist.

Vergleich verschiedener Pendel

	Federschwinger	Torsionspendel	mathematisches Pendel	physikalisches Pendel
Periodendauer	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_F}}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot d}}$
Eigenfrequenz	$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_F}{m}}$	$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{I}}$	$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$	$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m \cdot g \cdot d}{I}}$
Komponenten	m = Masse k_F = Feder-konstante	I = Trägheits-moment k = Torsions-konstante	l = Länge g = Fallbeschleu-nigung	I = Trägheits-moment m = Masse g = Fallbeschleu-nigung d = Abstand

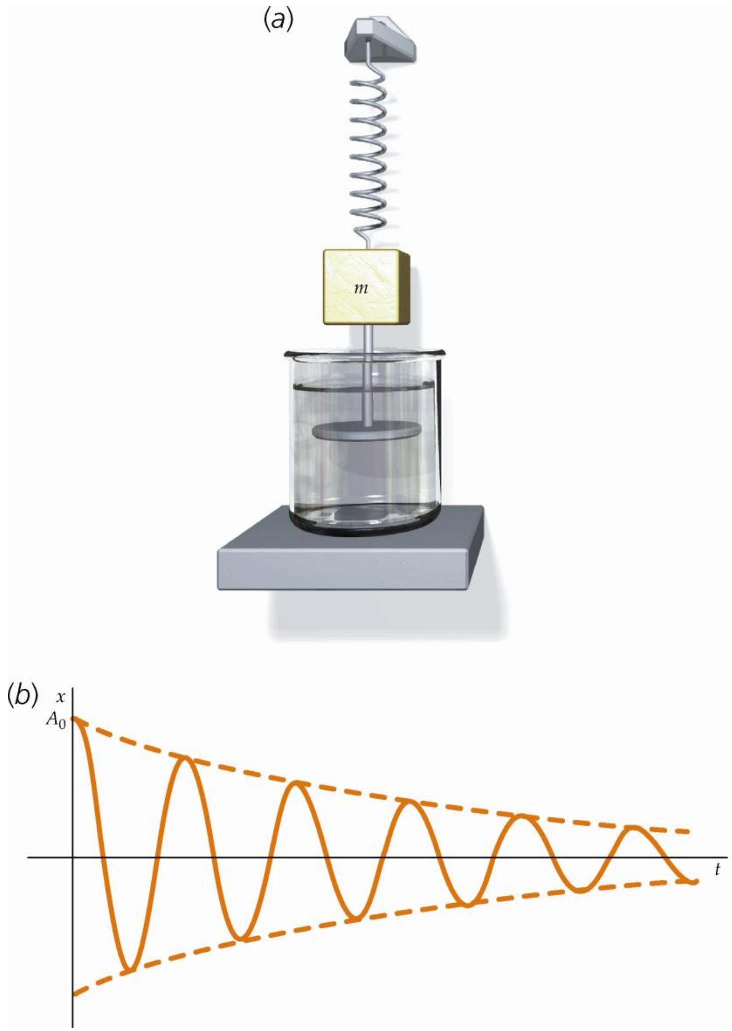
Die gedämpfte Schwingung

Überlässt man ein schwingendes System sich selbst, dann kommt es nach einiger Zeit zur Ruhe. Dem schwingenden System wird durch Reibungskräfte mechanische Energie entzogen und in Wärmeenergie dissipiert.

Eine periodische Bewegung, bei der die mechanische Energie nicht erhalten bleibt, sondern abnimmt, nennt man gedämpfte Schwingung.

Für eine lineare Dämpfung nimmt das Amplituden-quadrat exponentiell mit der Zeit ab:

$$A^2 = A_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

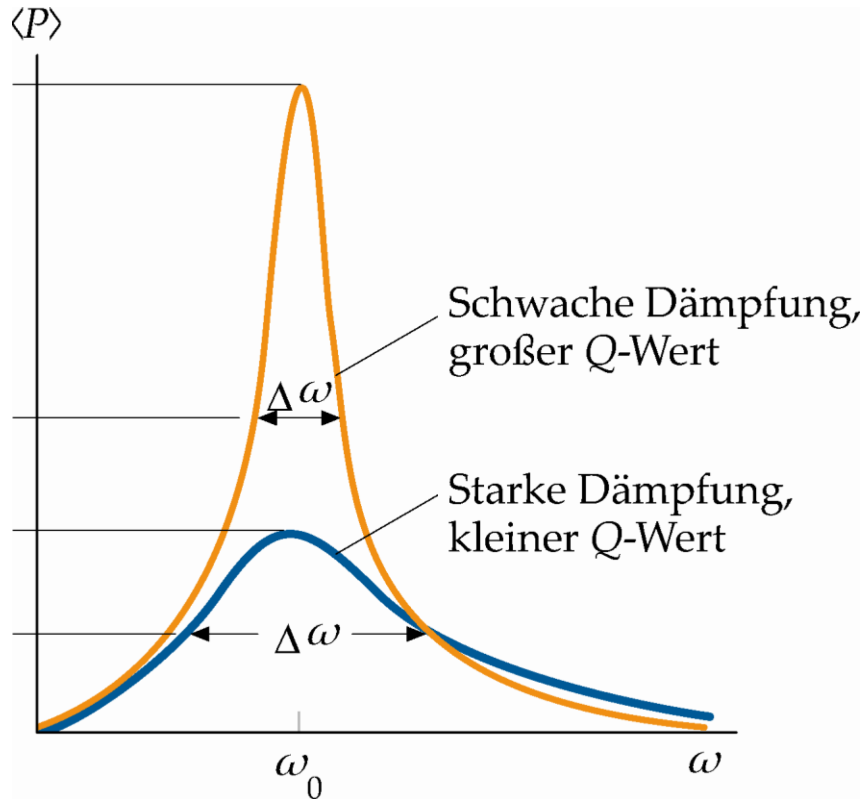


Erzwungene Schwingungen und Resonanz

Damit ein gedämpftes System über längere Zeit in Bewegung bleibt, muss man ihm mechanische Energie zuführen. In einem solchen Fall spricht man von einer angeregten oder **erzwungenen Schwingung**.

Ist die Frequenz ω der treibenden Kraft näherungsweise gleich der Eigenfrequenz des Systems ω_0, schwingt das angeregte System mit einer relativ großen Amplitude.

Dieses Phänomen nennt man Resonanz. Resonanzerscheinungen können bei allen gekoppelten Schwingungssysteme auftreten und haben ein breites Anwendungsfeld bei mechanischen Schwingungen in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern.
Die Eigenfrequenz eines Systems wird als **Resonanzfrequenz** bezeichnet.



Resonanzkatastrophe

Die Resonanzkatastrophe bezeichnet in der Mechanik und Konstruktion die Zerstörung eines Bauwerkes oder einer technischen Einrichtung durch angeregte Schwingungen. Ursache dafür ist die Resonanz. Als Resonanz werden Vorgänge bezeichnet, bei denen ein schwingungsfähiges System mit seiner Eigenfrequenz durch Energiezufuhr angeregt wird. In diesem Fall beträgt die Phasenverschiebung zwischen Erreger und erzwungener Schwingung 90 Grad, der Energieübertrag auf das schwingungsfähige System ist in diesem Fall maximal. Hierdurch kann die Amplitude des angeregten Systems auf ein Vielfaches der Erregeramplitude ansteigen.

Die Energie wird bei periodischer Anregung optimal übertragen und im System gespeichert. Durch die Speicherung und weitere Energiezufuhr schwingt das System immer stärker, bis die Belastungsgrenze überschritten ist.

Zum Schutz der Konstruktion werden Schwingungsdämpfer verbaut, die im Bereich der Resonanzfrequenz stark dämpfen und somit den Energieeintrag abführen. Ferner wird die Konstruktion auf eine Eigenfrequenz ausgelegt, die typischerweise nicht im Betrieb auftritt.

Beispiele für Resonanzkatastrophen

Am 12. April 1831 marschierten 74 britische Soldaten über die Hängebrücke von Broughton. Die Brücke stürzte durch Schwingungen ein; 40 Soldaten fielen in die Irwell, 20 von ihnen wurden verletzt.

Am 16. April 1850 marschierten 485 französische Soldaten im Gleichschritt über die Hängebrücke von Angers. Die Brücke geriet in heftige Schwingungen und stürzte ein; 226 Soldaten fanden dabei den Tod. Es ist daher vielfach untersagt und in Deutschland nach § 27 StVO verboten, im Gleichschritt über eine Brücke zu marschieren. Dies betrifft vor allem Soldaten, die gewöhnlich in dieser Gangart marschieren.

Am 7. November 1940 geriet die Tacoma-Narrows-Brücke im US-Bundesstaat Washington durch zunehmenden Wind in selbsterregte Torsionsschwingungen. Die Hängebrücke riss schließlich, und zwei bereits verlassene Fahrzeuge und ein Hund stürzten in die Tacoma Narrows; Menschen kamen nicht zu Schaden.

Am 10. Juni 2000 geriet die Millennium Bridge in London in Schwingungen. 160 Menschen, die sich im Gleichschritt bewegten, genügten um die Brücke in gefährliche Schwingungen zu versetzen.

Tacoma-Narrows-Brücke

Die Tacoma-Narrows-Brücke (englisch Tacoma Narrows Bridge), ist eine Hängebrücke im US-Bundesstaat Washington. Die erste Tacoma-Narrows-Brücke wurde bereits 1938–1940 als Hängebrücke erbaut. Mit einer Mittelspannweite von 853 Metern besaß die Tacoma-Narrows-Brücke zum Zeitpunkt ihrer Fertigstellung die drittgrößte Spannweite einer Hängebrücke weltweit. Sie wurde am 1. Juli 1940 nach 19 Monaten Bauzeit eröffnet.

Die Konstruktion sah eine äußerst schlanke Form des Fahrbahnträgers als Stahl-Vollwandträger vor – extrem niedrig und mit nur zwei Fahrbahnen und zwei Fußwegen auch sehr schmal. Diese Schlankheit führte zu einer sehr niedrigen Steifigkeit und einem sehr niedrigen Gewicht. Das machte die Brücke sehr windempfindlich.

Am 7. November 1940 kam aus südwestlicher Richtung, quer zur Brücke, Starkwind auf. Dadurch führte die Brücke jetzt erstmals Torsionsschwingungen aus. Nach einer dreiviertel Stunde rissen bei einer Windgeschwindigkeit von 67 km/h die Seile und die Fahrbahn stürzte mit zwei noch eilig verlassenen Autos und einem Cockerspaniel in die Tacoma Narrows. Menschen kamen bei dem Unglück nicht zu Tode.

Millennium Bridge (1)

Die Millennium Bridge ist eine Fußgängerbrücke über die Themse in London. Sie verbindet die City of London auf der Nordseite mit dem Stadtteil Southwark im Stadtbezirk London Borough of Southwark auf der Südseite.

Die Vorarbeiten begannen im Juli 1998, die Hauptarbeiten am 28. April 1999. Die Brücke kostete 18,2 Mio Pfund (2,2 Mio über dem Budget) und wurde am 10. Juni 2000 mit zwei Monaten Verspätung eröffnet.

Nur zwei Tage später musste sie wegen unkontrolliertem heftigem Schwanken wieder für den Publikumsverkehr geschlossen werden. Dabei handelte es sich im wesentlichen um seitliche Bewegungen. Die vertikalen Bewegungen blieben dagegen im vorausberechneten Rahmen.

Millennium Bridge (2)

Umfangreiche theoretische Untersuchungen und praktische Tests ergaben folgende Erklärung: Die erste Eigenfrequenz für Querschwingungen der Brücke liegt bei etwa 1 Hz. Daher ist es für Fußgänger durchaus möglich, sie zum Schwingen anzuregen. Im Allgemeinen laufen Personen auf einer Brücke natürlich nicht im Gleichschritt. Wenn jedoch zufällig die Brücke einmal in Querschwingungen gerät, passen sich die Menschen dieser Schwingung an und versuchen, diese durch ihre eigene Bewegung auszugleichen (so, wie ein Seemann sich auf einem schwankenden Schiff bewegt). Damit bewegen sie sich gleichförmig und verstärken so die Schwingung. Dies geschieht weitgehend unbewusst. Erst wenn die Schwingungen so groß geworden sind, dass sie als unangenehm oder bedrohlich empfunden werden, bleiben die Menschen stehen und halten sich, wenn möglich, am Geländer fest. Dadurch hört die Schwingung wieder auf.

Zur Sanierung baute man in den folgenden zwei Jahren ein spezielles Dämpfersystem in die Millennium Bridge ein. Dieses besteht im Wesentlichen aus unter einigen Brückenfeldern diagonal verlegten Dämpfern und insgesamt 58 Schwingungstilgern, die horizontal und vertikal mit der Brücke verbunden wurden. Am 22. Februar 2002 konnte die Millennium Bridge wieder für den Publikumsverkehr geöffnet werden.

Aufgaben

1. Ein PKW (Masse: 1,5 t) senkt sich um 50 mm, wenn 5 Personen mit jeweils 70 kg Masse einsteigen.
   Wie groß sind Federkonstante und Eigenfrequenz des besetzten PKW?

2. Welche Schwingungsdauer besitzen
   a) ein Federschwinger (Masse: 100 kg, Federkonstante: 200 N/m)
   b) ein mathematisches Pendel der Länge 2m auf der Mondoberfläche?

3. Berechnen Sie die Gesamtenergie (= Schwingungsenergie)
   a) eines Federpendels (Amplitude: 0,1 m, Federkonstante: 100 N/m);
   b) eines anderen Federpendels (Masse: 100g, Geschwindigkeit beim Nulldurchgang: 0,1 m/s)
   c) eines mathematischen Pendels (Masse: 1 kg, Länge 10 m, maximale Auslenkung: 20°)

Lösungen:

1. $6{,}867 \cdot 10^4$ N/m; 0,97 Hz
2. a) 4,44 s b) 6,95 s
3. a) 0,5 J b) $5 \cdot 10^4$ J c) 5,915 J

Literatur und Quellen

Paul A. Tipler, Gene Mosca: Physik für Wissenschaftler und Ingenieure, Spektrum Akademischer Verlag, August 2009

http://de.wikipedia.org/

TECHNISCHE HOCHSCHULE DEGGENDORF

Technische Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf