DOCUMENTAZIONE CODICE RICHARDS 1-2 D

RICCARDO RIGON*, FRANCESCO SERAFIN* & AARON IEMMA*

12 dicembre 2016

INDICE

ABSTRACT

Si riporta di seguito documentazione del codice `Java` prodotto dall'implementazione di [1] all'interno del framework OMS3.

1 NOTE

- dato che i volumi di controllo (vedi [1] pp. 2257) devono avere facce di contorno normali alla linea che connette i centri di ogni volume adiacente (quantomeno per i centri che sono in "vista diretta" l'uno rispetto all'altro, *e.g.*, la cui linea di connessione non interseca nessun altro volume tranne quelli a cui i punti appartengono), gli stessi volumi di controllo devono essere ottenuti tramite una scomposizione in un diagramma di Voronoi (in metrica euclidea) del dominio!
- La conducibilità idraulica/permeablità, dato che $\mathcal{K}_j^n = \mathcal{A}_j \max\left[K_i(\psi_i^n), K_{\wp(i,j)}(\psi_{\wp(i,j)}^n)\right]$ (1), "*diffonde*" dalle celle adiacenti in cui è maggiore alle celle adiacenti in cui è minore, tendendo

* *Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale, Università degli Studi di Trento, Trento, Italy*

ad assumere gli stessi valori su tutto il campo.
Da 1, per una *mesh* molto semplificata ove i numeri nelle celle rappresentano dei valori di K, ho ad esempio:

1	4	2
2	1	3
1	3	2

(a) Iter. 1

4	4	4
2	4	3
3	3	3

(b) Iter. 2

4	4	4
4	4	4
3	4	3

(c) Iter. 3

4	4	4
4	4	4
4	4	4

(d) Iter. 4

2 SUBROUTINES REOLOGIA – RHEOLOGY

2.1 kappa

La funzione esplicita la relazione costitutiva di Van Genuchten, chiamando la funzione `Thetaf` 2.2 per il calcolo del contenuto d'acqua θ in dipendenza dall' altezza piezometrica ψ (da notare quindi che $\theta(\psi)$). A seconda che le condizioni siano di saturazione $\psi > 0$ o meno $\psi \leqslant 0$, la funzione procede al calcolo della conducibilità idraulica K. Come praticamente tutte le funzioni che concernono la reologia, questa opera diversamente a seconda che ci si trovi

IN SATURAZIONE, dove la K assume il valore della conducibilità idraulica a saturazione K_s;

IN ZONA INSATURA, dove la K, dipendente dall'altezza piezometrica ψ, viene computata tramite la funzione:

$$K(\psi) = K_s * \left[\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}\right]^{\frac{1}{2}} * \left\{1 - \left[1 - \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}\right)^{\frac{1}{m}}\right]^m\right\}^2 \tag{2}$$

Per brevità, la saturazione effettiva nel codice viene chiamata $Se = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}$, rendendo la formula di cui sopra più compatta e leggibile:

$$K(\psi) = K_s * Se^{\frac{1}{2}} * \left[1 - \left(1 - Se^{\frac{1}{m}}\right)^m\right]^2 \tag{3}$$

... con m parametro del terreno da calibrare.
CHIAMATE AD ALTRE SUBROUTINE RILEVANTI calcola il θ (`th` nel codice) relativo ai parametri forniti in ingresso.

2.2 Thetaf

La funzione calcola il contenuto d'acqua in base alla data altezza piezometrica tramite la parametrizzazione di van Genuchten [2], provvedento:

IN SATURAZIONE, ad assegnare a θ il θ_s a saturazione;

NELLA ZONA INSATURA, a calcolare θ con l'equazione:

$$\theta(\psi) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{1 - |\alpha\psi|^n}^{m} \tag{4}$$

...con il seguente significato dei simboli:

- θ_r: contenuto d'acqua residuo (si veda la teoria sulle `SWRC`, *Soil Water Retention Curves*)
- θ_s: contenuto d'acqua a saturazione
- α ($\geqslant 0$), m e n parametri del terreno da calibrare, con:

  α : > 0, relazionato all'inverso della pressione di suzione d'entrata dell'aria;

  N : una misura della distribuzione delle grandezze dei pori;

  M : $1 - \frac{1}{n}$

2.3 dTheta

La funzione calcola la capacità specifica del volume di controllo, l'integrale della quale fornisce il contenuto d'acqua dello stesso volume.

In formule:

$$c(\psi) = \frac{\partial\theta}{\partial\psi}; \theta(\psi) = \theta_r + \int_{-\infty}^{\psi} c(\psi) d\psi \tag{5}$$

La capacità è calcolata tramite la seguente equazione parametrica:

IN SATURAZIONE ($\psi > 0$)
$c(\psi) = 0$ - ovvero: "il volume dei vuoti residuo è nullo, quindi non è possibile saturarlo ulteriormente!"

NELLA ZONA INSATURA

$$c(\psi) = \alpha \cdot n \cdot m \cdot \frac{\theta_s - \theta_r}{(1 + |\alpha\psi|^n)^{m+1}} |\alpha\psi|^{n-1} \tag{6}$$

2.4 dTheta1

La funzione calcola la derivata del primo elemento della decomposizione di Jordan del contenuto d'acqua , quindi ottenendo la capacità specifica del primo elemento della decomposizione $p(\psi) = \frac{\partial\theta_1}{\partial\psi}$.

Nel dettaglio ho, dato che ho assunto ([1], pp. 2258) che la capacità specifica abbia delle proprietà per cui sia esprimibile come differenza di funzioni nonnegative, nondecrescenti e limitate (ovvero, $\exists\psi^*//c(\psi) > 0 \forall \psi \in R \wedge (\partial\theta/\partial\psi \geqslant 0 [-\infty, \psi^*] \vee \partial\theta/\partial\psi < 0 [\psi^*, +\infty])$), che:

CAPACITÀ SPECIFICA (JORDAN) : $c(\psi) = p(\psi) - q(\psi)$

PER $\psi \leqslant \psi^*$ ho $p(\psi) = c(\psi)$ e $q(\psi) = 0$

PER $\psi > \psi^*$ ho $p(\psi) = c(\psi^*)$ e $q(\psi) = p(\psi) - c(\psi)$

VOLUMI D'ACQUA RISULTANTI : $\theta(\psi) = \theta_1(\psi) - \theta_2(\psi)$, con

$$\theta_1 = \theta_r + \int_{-\infty}^{\psi} p(\eta) d\eta \tag{7}$$

e

$$\theta_2 = \int_{-\infty}^{\psi} q(\eta) d\eta \tag{8}$$

Quindi, i volumi fluidi si possono esprimere come:

$$\begin{aligned} \theta_1(\psi) = \theta(\psi), \theta_2 = 0 & \qquad \psi \leqslant \psi^* \\ \theta_1(\psi) = \theta(\psi^*) + c(\psi^*)(\psi - \psi^*), \theta_2 = \theta_1 - \theta(\psi) & \qquad \psi > \psi^* \end{aligned} \tag{9}$$

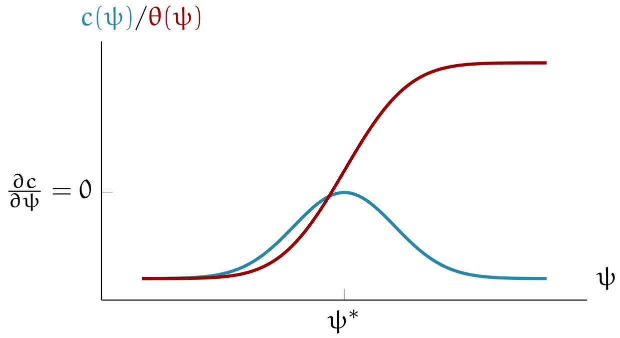

Figura 1: Esempio di andamento (gaussiano) della capacità specifica decomponibile secondo Jordan. Si noti la positività della stessa $\forall \mathbb{R}$, la non decrescenza di $\frac{\partial \theta}{\partial \psi}$ per $\psi \leqslant \psi^*$ e la decrescenza di $\frac{\partial \theta}{\partial \psi}$ per $\psi > \psi^*$. Per riferimento è plottata anche la distribuzione cumulata della capacità specifica (una curva sigmoide: notare la forse interessante similitudine con la forma delle curve di van Genuchten [2]).

CHIAMATE AD ALTRE SUBROUTINE RILEVANTIcalcola la p ($\frac{\partial \theta_1}{\partial \psi} = p$) della decomposizione di Jordan in caso di $\psi \leqslant \psi^*$, passando ψ; calcola la p della decomposizione di Jordan in caso di $\psi > \psi^*$, passando ψ^*;

2.5 dTheta2

La funzione calcola la derivata del secondo elemento della decomposizione di Jordan $q(\psi) = p(\psi) - c(\psi)$ della capacità specifica ($q = \frac{\partial \theta_2}{\partial \psi}$). Si veda 2.4 per ulteriori dettagli. **CHIAMATE AD ALTRE SUBROUTINE RILEVANTI**della $c(\psi)$
della $p(\psi)$

2.6 Theta1

La funzione calcola la frazione di contenuto d'acqua del volume di controllo associata all'integrale del primo elemento della decomposizione di Jordan per la capacità specifica. Per $\psi \leqslant \psi^*$, la funzione procede a chiamare la procedura per il calcolo di $\theta(\psi)_1$ derivata dall'applicazione diretta della parametrizzazione di van Genuchten 2.2, mentre oltre ψ_* (punto in cui $\frac{\partial c(\psi)}{\partial \psi}$ è massima) somma a $\theta_1 \psi < \psi_*$ un integrale alle differenze (secondo Riemann) della capacità specifica (e.g., $\theta \approx \Delta\psi * \Delta c(\psi)$). **CHIAMATE AD ALTRE SUBROUTINE RILEVANTI**calcola il contenuto d'acqua secondo van Genuchten; calcola la capacità specifica $q(\psi)$.

2.7 Theta2

La funzione calcola la frazione di contenuto d'acqua del volume di controllo associata all'integrale del secondo elemento della decomposizione di Jordan per la capacità specifica, come differenza tra il contenuto d'acqua totale e $\int_{-\infty}^{\psi} p(\eta) d\eta = \theta_1$. **CHIAMATE AD ALTRE SUBROUTINE RILEVANTI**calcola il contenuto d'acqua totale tramite la parametrizzazione di van Genuchten. calcola l'integrale di $p(\psi)$.

2.8 V

2.9 dV

3 MODULE GRADIENTE CONIUGATO – CGMODULE

Per una introduzione al metodo del Gradiente Coniugato, si veda [3].

4 SPUNTI DI RIFLESSIONE

- A rigore, l'equazione di Richards dipende dalla viscosità μ del fluido: in [1] sembra si supponga che il fluido sia sempre acqua a temperatura ambiente, e la sua viscosità è inglobata all'interno della K... Volendo, forse si potrebbe accoppiare a Richards il bilancio dell'energia considerando che $\mu = \mu(T)$...

RIFERIMENTI

[1] Vincenzo Casulli & Paola Zanolli. A nested newton-type algorithm for finite volume methods solving richards' equation in mixed form. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32:2255–2273, 2010.

[2] Martinus Th. Van Genuchten. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, 44, 1980.

[3] Jonathan R Shewchuk. An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain. Technical report, Pittsburgh, PA, USA, 1994.