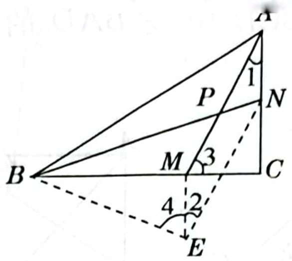
例 5 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，点 M 在 BC 上，且 $BM=AC$，点 N 在 AC 上，且 $AN=MC$，AM 与 BN 相交于点 P，求证：$\angle BPM=45°$.



（浙江省竞赛题）

分析 条件给出的是线段的等量关系，求证的却是角度等式，由于条件中有直角和相等的线段，因此，可想到等腰直角三角形，解题的关键是平移 AN 或 AC，即作 $ME \mathrel{\underline{\parallel}} AN$，构造平行四边形.

证明 如图，过 M 作 $ME \mathrel{\underline{\parallel}} AN$，连接 NE，BE，则四边形 $AMEN$ 为平行四边形，

得 $NE=AM$，$ME\perp BC$.

$\because ME=CM$，$\angle EMB=\angle MCA=90°$，$BM=AC$.

$\therefore \triangle BEM\cong\triangle AMC$，得 $BE=AM=NE$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

$\because \angle 1+\angle 3=90°$，$\therefore \angle 2+\angle 4=90°$ 且 $BE=NE$.

$\therefore \triangle BEN$ 为等腰直角三角形，$\angle BNE=45°$.

$\because AM\parallel NE$，$\therefore \angle BPM=\angle BNE=45°$.

链接

平移变换与平行线相关，常用到平行四边形的性质，平移变换将角、线段移到适当的位置，使分散条件相对集中，使问题得以解决.

中线倍长、三角形中位线、梯形中平移腰、平移对角线等辅助线，其实质是实施平移变换.

学力训练

基础夯实

1. (1) 在▱$ABCD$ 中，AE 平分$\angle BAD$ 交边 BC 于点 E，DF 平分$\angle ADC$ 交边 BC 于点 F，若 $AD=11$，$EF=5$，则 $AB=$________.

（辽宁省中考）

(2) 在▱$ABCD$ 中，$AD=BD$，BE 是 AD 边上的高，$\angle EBD=20°$，则$\angle A$ 的度数为________.

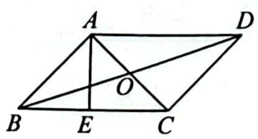
（湖北省襄阳市中考）

2. (1) 如图①，▱$ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AE\perp BC$ 于点 E.若 $AB=\sqrt{3}$，$AC=2$，$BD=4$，则 $AE=$________.

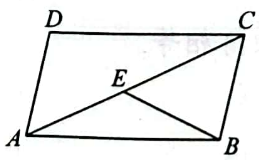
（山东省青岛市中考）

(2) 在探索数学名题"尺规三等分角"的过程中，有下面的问题：如图②，AC 是▱$ABCD$ 的对角线，点 E 在 AC 上，$AD=AE=BE$，$\angle D=102°$，则$\angle BAC$ 的大小是________.

（湖北省武汉市中考）



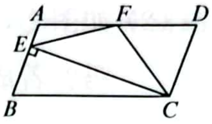
图①



图②

第 2 题图

3. 如图，在▱$ABCD$ 中，$AD=2AB$，F 是 AD 的中点，作 $CE\perp AB$，垂足 E 在线段 AB 上，连接 EF，CF.则下列结论中一定成立的是________（把所有正确结论的序号都填在横线上）.

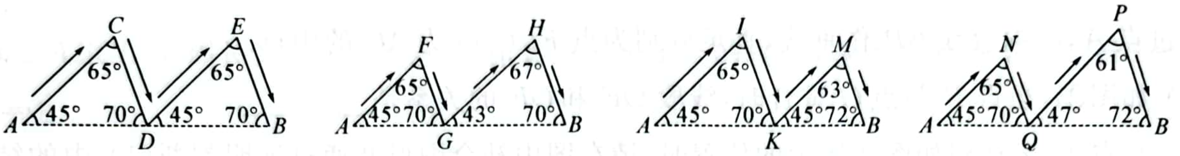


第 3 题图

①$\angle DCF=\frac{1}{2}\angle BCD$；②$EF=CF$；③$S_{\triangle BEC}=2S_{\triangle CEF}$；④$\angle DFE=3\angle AEF$.

（安徽省中考题）

4. 在连接 A 地与 B 地的线段上有四个不同的点 D，G，K，Q，下列四幅图中的实线分别表示某人从 A 地到 B 地的不同行进路线（箭头表示行进的方向），则路程最长的行进路线图是（　　）.



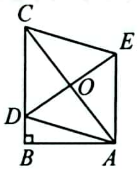
A　　　　B　　　　C　　　　D

（浙江省湖州市中考题）

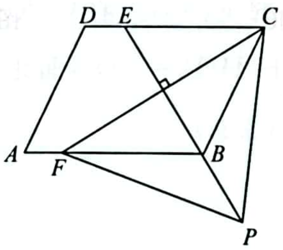
5. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，$AB=3$，$BC=4$，点 D 在 BC 上，以 AC 为对角线的所有▱$ADCE$ 中，DE 的最小值是（　　）.

A. 2　　　　B. 3　　　　C. 4　　　　D. 5

（四川省达州市中考题）



第 5 题图



第 6 题图

6. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，点 E 是边 CD 上的一点，且 $BC=EC$，$CF\perp BE$ 交 AB 于点 F，P 是 EB 延长线上一点，下列结论：

①BE 平分$\angle CBF$；②CF 平分$\angle DCB$；③$BC=FB$；④$PF=PC$.

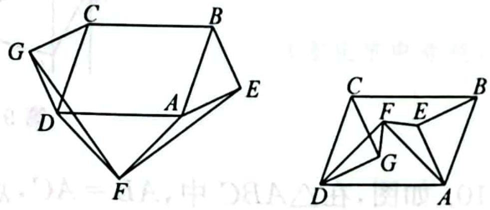
其中正确结论的个数为（　　）.

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

（山东省泰安市中考题）

7. 分别以▱$ABCD$（$\angle CDA\neq 90^\circ$）的三边 AB，CD，DA 为斜边作等腰直角三角形$\triangle ABE$，$\triangle CDG$，$\triangle ADF$.

(1) 如图①，当三个等腰直角三角形都在该平行四边形外部时，连接 GF，EF，请判断 GF 与 EF 的关系（只写结论，不需证明）.



图①　　图②

第 7 题图

(2) 如图②，当三个等腰直角三角形都在该平行四边形内部时，连接GF，... 吗？若成立，给出证明；若不成立，说明理由.

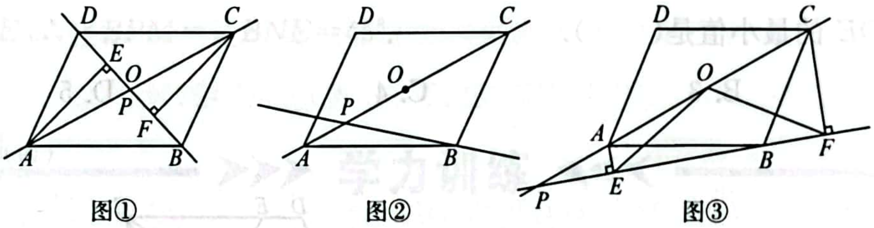
（山东省淄博市中考题）

8. 已知 P 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 所在直线上的一个动点（点 P 不与点 A，C 重合），分别过点 A，C 向直线 BP 作垂线，垂足分别为点 E，F，O 为 AC 的中点.

(1) 如图①，当点 P 与点 O 重合时，线段 OE 和 OF 的关系是________.

(2) 当点 P 运动到如图②所示的位置时，请在图中补全图形并通过证明判断(1) 中的结论是否仍然成立.

(3) 如图③，点 P 在线段 OA 的延长线上运动，当 $\angle OEF=30^\circ$ 时，试探究线段 CF，AE，OE 之间的关系.



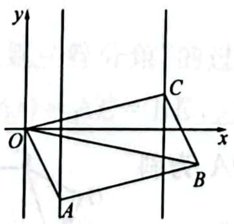
第 8 题图

（四川省乐山市中考题）

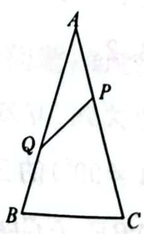
能力拓展

9. 如图，▱$OABC$ 的顶点 A，C 分别在直线 $x=1$ 和 $x=4$ 上，O 为坐标原点，则对角线 OB 长的最小值为________.

（江苏省无锡市中考题）



第 9 题图



第 10 题图

10. 如图，在△ABC 中，$AB=AC$，点 P，Q 分别在 AC，AB 上，且 $AP=PQ=QB=BC$，则 $\angle A=$________.

（上海市竞赛题）

11. 已知四边形 $ABCD$ 中，对角线 BD 被 AC 平分，那么再加上下述中的条件（　　）可以得到结论："四边形 $ABCD$ 是平行四边形".

A. $AB=CD$　　　　B. $\angle BAD=\angle BCD$

C. $\angle ABC=\angle ADC$　　　　D. $AC=BD$

（"华罗庚金杯"少年数学邀请赛试题）

12. 平面上的一组 3 条平行线与另一组 5 条平行线相交，可构成平行四边形的个数为（　　）.

A. 24　　B. 28　　C. 30　　D. 32

（山西省太原市竞赛题）

13. 已知▱$ABCD$ 的周长为 28，过顶点 D 作直线 AB，BC 的垂线，垂足分别为 E，F，若 $DE=3$，$DF=4$.

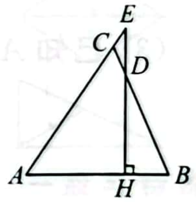
求：(1) 边 AB，BC 的长.

(2) $BE+BF$ 的长.

（天津市"未来之星"数学邀请赛试题）

14. 如图，在△ABC 中，已知 $\angle ACB=45°$，过 BC 上一点 D 作 AB 的垂线，垂足为点 H，HD 交 AC 的延长线于点 E，若 $AB=HD$.求证：$AE^2=2DH^2+2DE^2$.

（北京市竞赛题）

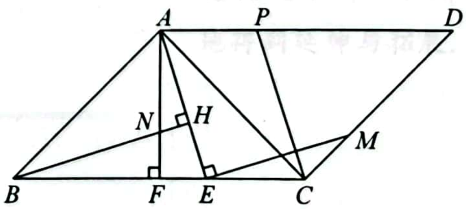


第 14 题图

15. 如图，在▱$ABCD$ 中，点 E 在边 BC 上，连接 AE，$EM\perp AE$，垂足为 E，交 CD 于点 M.$AF\perp BC$，垂足为 F.$BH\perp AE$，垂足为 H，交 AF 于点 N.点 P 是 AD 上一点，连接 CP.

(1) 若 $DP=2AP=4$，$CP=\sqrt{17}$，$CD=5$，求△ACD 的面积.

(2) 若 $AE=BN$，$AN=CE$，求证：$AD=\sqrt{2}CM+2CE$.



第 15 题图

（重庆市中考题）

16. 我们知道平行四边形有很多性质.如果我们把平行四边形沿着它的一条对角线翻折,那么会发现这其中还有更多的结论.

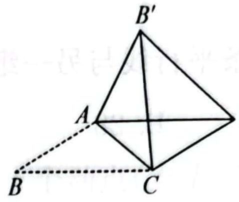
发现与证明

在▱$ABCD$ 中,$AB\neq BC$,将$\triangle ABC$ 沿 AC 翻折至$\triangle AB'C$,连接 $B'D$.

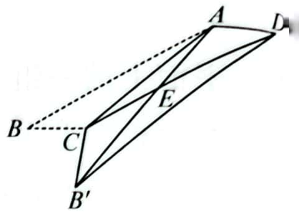
结论 1:$B'D/\!/AC$;

结论 2:$\triangle AB'C$ 与▱$ABCD$ 重叠部分的图形是等腰三角形.

…………



图①



图②

第 16 题图

请利用图①证明结论 1 或结论 2(只需证明一个结论).

应用与探究

在▱$ABCD$ 中,已知$\angle B=30°$,将$\triangle ABC$ 沿 AC 翻折至$\triangle AB'C$,连接 $B'D$.

(1) 如图①,若 $AB=\sqrt{3}$,$\angle AB'D=75°$,则$\angle ACB=$________,$BC=$________.

(2) 如图②,$AB=2\sqrt{3}$,$BC=1$,AB'与边 CD 相交于点 E,求$\triangle AEC$ 的面积.

(3) 已知 $AB=2\sqrt{3}$,当 BC 长为多少时,$\triangle AB'D$ 是直角三角形?

(江苏省镇江市中考题)

(3) 归纳与拓展

已知矩形 $ABCD$ 两邻边的长分别为 $b,c(b<c)$，且它是 4 阶奇异矩形，求 $b:c$(直接写出结果).

(湖北省潜江市中考题)

分析 本例旨在考查动手操作、归纳推理能力.一般的解题思路是在一个给定的矩形上进行分割，得到所要的分割图形，再算出各矩形的边的比例.顺思逆想，通过一个给定的正方形构造出各种 n 阶奇异矩形，获得构造规律及给出各种 n 阶奇异矩形的边的比的规律，实际是从一个单位的正方形出发，构造 n 阶奇异矩形，共有 2^{n-1} 种.

读者不妨一试.

学力训练

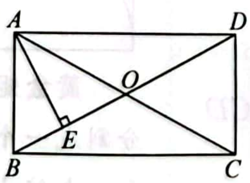
基础夯实

1. 如图，已知矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC,BD 相交于点 O，$AE\perp BD$ 于点 E，若 $\angle DAE:\angle BAE$ $3:1$，则 $\angle EAC=$________.

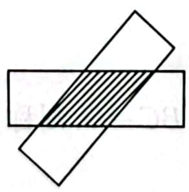
(河南省中考

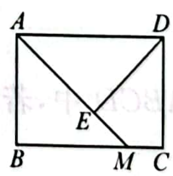
2. 如图，将两张长为 8、宽为 2 的矩形纸片交叉，使重叠部分是一个菱形，容易知道当两张纸片垂时，菱形的周长有最小值，那么菱形周长的最大值是________.

(山东省烟台市中考

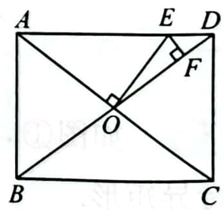


第 1 题图


第 2 题图



第 3 题图



第 4 题图

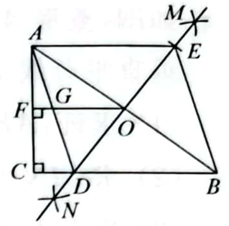
3. 如图，矩形 $ABCD$ 中，M 为 BC 边上一点，连接 AM，过点 D 作 $DE\perp AM$ 于点 E.若 $DE=DC=$ 1，$AE=2EM$，则 BM 的长为________.

(黑龙江省哈尔滨市中考题)

4. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 交于点 O，$AB=6$，$BC=8$，过点 O 作 $OE\perp AC$，交 AD 于点 E，过点 E 作 $EF\perp BD$，垂足为 F，则 $OE+EF$ 的值为(　　).

A. $\frac{48}{5}$　　B. $\frac{32}{5}$　　C. $\frac{24}{5}$　　D. $\frac{12}{5}$

5. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$BC>AC$，按以下步骤作图：(1) 分别以点 A，B 为圆心，以大于$\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧，两弧相交于 M，N 两点(点 M 在 AB 的上方)；(2) 作直线 MN 交 AB 于点 O，交 BC 于点 D；(3) 用圆规在射线 OM 上截取 $OE=OD$.连接 AD，AE，BE，过点 O 作 $OF\perp AC$，垂足为 F，交 AD 于点 G.下列结论：①$CD=2GF$；②$BD^2-CD^2=AC^2$；③$S_{\triangle BOE}=2S_{\triangle AOG}$；④若 $AC=6$，$OF+OA=9$，则四边形 $ADBE$ 的周长为 25.



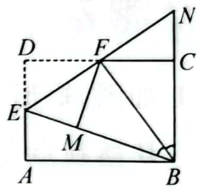
第 5 题图

其中正确的结论有(　　).

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

(内蒙古自治区包头市中考题)

6. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 是 AD 的中点，$\angle EBC$ 的平分线交 CD 于点 F.将 $\triangle DEF$ 沿 EF 折叠，点 D 恰好落在 BE 上的点 M 处，延长 BC，EF 交于点 N，有下列四个结论：①$DF=CF$；②$BF\perp EN$；③$\triangle BEN$ 是等边三角形；④$S_{\triangle BEF}=3S_{\triangle DEF}$.其中，正确的是(　　).



第 6 题图

A. ①②③　　B. ①②④　　C. ②③④　　D. ①②③④

(广西壮族自治区贵港市中考题)

7. 在一次数学研究性学习中，小兵将两个全等的直角三角形纸片 ABC 和 DEF 拼在一起，使点 A 与点 F 重合，点 C 与点 D 重合(如图①)，其中 $\angle ACB=\angle DFE=90°$，$BC=EF=3cm$，$AC=DF=4cm$，并进行如下研究活动.

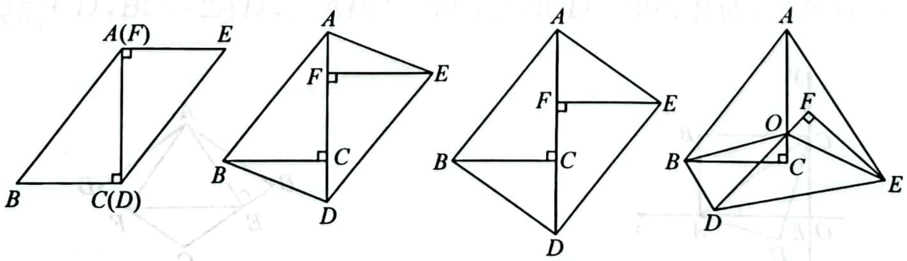
活动一：将图①中的纸片 DEF 沿 AC 方向平移，连接 AE，BD(如图②)，当点 F 与点 C 重合时停止平移.

【思考】图②中的四边形 $ABDE$ 是平行四边形吗？请说明理由.

【发现】当纸片 DEF 平移到某一位置时，小兵发现四边形 $ABDE$ 为矩形(如图③)，求 AF 的长.

活动二：在图③中，取 AD 的中点 O，再将纸片 DEF 绕点 O 顺时针方向旋转 α 度($0\leqslant\alpha\leqslant90$)，连接 OB，OE(如图④).

【探究】当 EF 平分 $\angle AEO$ 时，探究 OF 与 BD 的数量关系，并说明理由.



图①　图②　图③　图④

第 7 题图

(浙江省舟山市中考题)

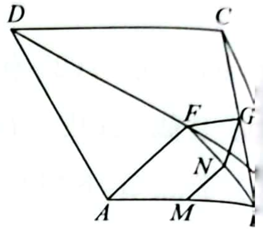
8. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 1，$\angle ABC=60^\circ$，点 E 是边 AB 上任意一点(端点除外)，线段 C
垂直平分线交 BD，CE 分别于点 F，G，AE，EF 的中点分别为 M，N.

(1) 求证：$AF=EF$.

(2) 求 $MN+NG$ 的最小值.

(3) 当点 E 在 AB 上运动时，$\angle CEF$ 的大小是否变化？为什么？

(山东省临沂市中考题)

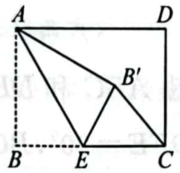


第 8 题图

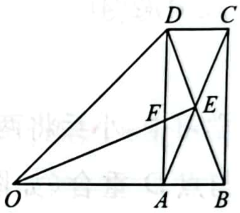
能力拓展

9. 如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，点 E 是 BC 边上一点，连接 AE，把$\angle B$ 沿 AE 折叠，
B 落在点 B' 处. 当$\triangle CEB'$为直角三角形时，BE 的长为________.

(河南省中考



第 9 题图



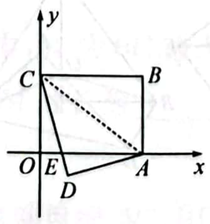
第 10 题图

10. 如图，$\angle BOD=45^\circ$，$BO=DO$，点 A 在 OB 上，四边形 $ABCD$ 是矩形，连接 AC，BD 交于点 E
接 OE 交 AD 于点 F. 下列 4 个判断：①OE 平分$\angle BOD$；②$OF=BD$；③$DF=\sqrt{2}AF$；④若点
是线段 OF 的中点，则$\triangle AEG$ 为等腰直角三角形. 其中正确结论的序号是________.

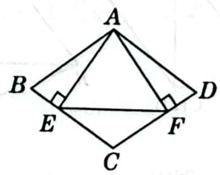
(四川省达州市中考

11. 如图，矩形纸片 $ABCO$ 平放在 xOy 坐标系中，将纸片沿对角线 CA 向左翻折，点 B 落在点 D
CD 交 x 轴于点 E，若 $CE=5$，直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+m$，则点 D 的坐标为________.

(“希望杯”邀请赛试



第 11 题图



第 12 题图

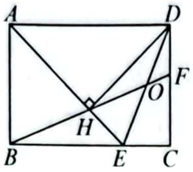
12. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，顶点 A 到边 BC，CD 的距离 AE，AF 都为 5，$EF=6$，那么，菱形 AB
CD 的边长为________.

(上海市竞赛题)

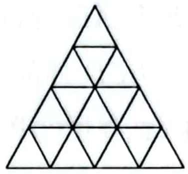
13. [illegible]AD,$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E,$DH\perp AE$ 于点 H,连接 BH 并延长交 CD 于点 F,连接 DE 交 BF 于点 O.下列结论:①$\angle AED=\angle CED$;②$OE=OD$;③$BH=HF$;④$BC-CF=2HE$;⑤$AB=HF$.其中,正确的有(　　).

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

(黑龙江省绥化市中考题)



第 13 题图



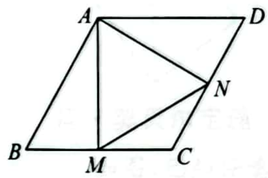
第 14 题图

14. 将正三角形每条边四等分,然后过这些等分点作平行于其他两边的直线,则以图中线段为边的菱形有(　　)个.

A. 15　　B. 18　　C. 21　　D. 24

(江西省竞赛题)

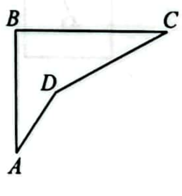
15. 如图,已知菱形 $ABCD$ 中,$\angle BAD=120°$,M 为 BC 上一点,N 为 CD 上一点.求证:若$\triangle AMN$ 有一个内角等于 60°,则$\triangle AMN$ 为等边三角形.



第 15 题图

(俄罗斯莫斯科市竞赛题)

16. 如图,已知 $AB=CD$,$BC=2AD$,$\angle ABC=90°$,$\angle BCD=30°$.求证:$\angle BAD=30°$.



第 16 题图

(伊朗奥林匹克试题)