Muhammad Abraar Abhirama (10219015) - Tugas 02 FI4002

DESKRIPSI SOAL:

Sebuah partikel bermuatan q bergerak dengan kecepatan sebagai berikut,

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{\imath} + v_y(t)\vec{\jmath}$$

dalam ruang bermedan magnet konstan yang didefinisikan sebagai,

$$\vec{B} = -\vec{k}B_z$$

Tentukan gerak partikel!

SOAL JAWAB:

a. **Tuliskan hukum newtonnya!**

Konsep hukum II Newton yang didefinisikan sebagai,

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \tag{1}$$

Gaya yang bekerja pada partikel muatan tersebut hanyalah gaya yang diakibatkan oleh medan magnet $\vec{B}$, yakni gaya $\overrightarrow{F_B}$, didefinisikan sebagai,

$$\overrightarrow{F_B} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{2}$$

Maka resultan gaya pada partikel bermuatan tersebut adalah sebagai berikut,

$$\overrightarrow{F_B} = q\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{a}, \tag{3}$$

$$q\left(v_x(t)\hat{\imath} + v_y(t)\hat{\jmath}\right) \times \left(-\hat{k}B_z\right) = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}, \tag{4}$$

$$q\left(v_x(t)\hat{\imath} \times \left(-\hat{k}B_z\right) + v_y(t)\hat{\jmath} \times \left(-\hat{k}B_z\right)\right) = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}, \tag{5}$$

$$q\left(-v_y(t)B_z\hat{\imath} + v_x(t)B_z\hat{\jmath}\right) = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \tag{6}$$

b. **Tuliskan persamaan diferensial terkopel antara kecepatan pada kedua arah!**

Dengan meninjau persamaan (6) untuk setiap komponen i dan j, maka akan didapat persamaan diferensial terkopel pada arah horizontal sebagai berikut,

$$-qv_y(t)B_z = m\frac{dv_x(t)}{dt}, \tag{7}$$

$$\frac{-qB_z}{m}v_y(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \tag{8}$$

serta didapat persamaan diferensial terkopel pada arah vertikal sebagai berikut,

$$qv_x(t)B_z = m\frac{dv_y(t)}{dt}, \tag{9}$$

$$\frac{qB_z}{m}v_x(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} \tag{10}$$

c. Selesaikan kedua persamaan diferensial sehingga dapat diperoleh V_x(t), V_y(t), x(t), dan y(t). Lakukan secara teori!

Dengan melakukan operasi diferensial pada persamaan (8) dan persamaan (10), akan didapat untuk setiap komponen,

$$\frac{-qB_z}{m}\frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d^2v_x(t)}{d^2t}, \tag{11}$$

$$\frac{qB_z}{m}\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d^2v_y(t)}{d^2t} \tag{12}$$

Substitusi persamaan (10) ke persamaan (11) dan persamaan (8) kepersamaan (12). Akan didapat persamaan sebagai berikut,

$$-\left(\frac{qB_z}{m}\right)^2 v_x(t) = \frac{d^2v_x(t)}{d^2t}, \tag{13}$$

$$-\left(\frac{qB_z}{m}\right)^2 v_y(t) = \frac{d^2v_y(t)}{d^2t} \tag{14}$$

Bentuk solusi yang akan diperoleh apabila terdapat persamaan diferensial orde-2 yang dinyatakan sebagai,

$$\frac{d^2x}{d^2t} = -a^2x \tag{15}$$

adalah,

$$x(t) = A_1\cos(at) + A_2\sin(at) \tag{16}$$

Maka dapat disimpulkan bahwa persamaan (13) dan persamaan (14) akan memiliki solusi sebagai berikut,

$$v_x(t) = k_1\cos\left(\frac{qB_z}{m}t\right) + k_2\sin\left(\frac{qB_z}{m}t\right) \tag{17}$$

$$v_y(t) = k_3\cos\left(\frac{qB_z}{m}t\right) + k_4\sin\left(\frac{qB_z}{m}t\right) \tag{18}$$

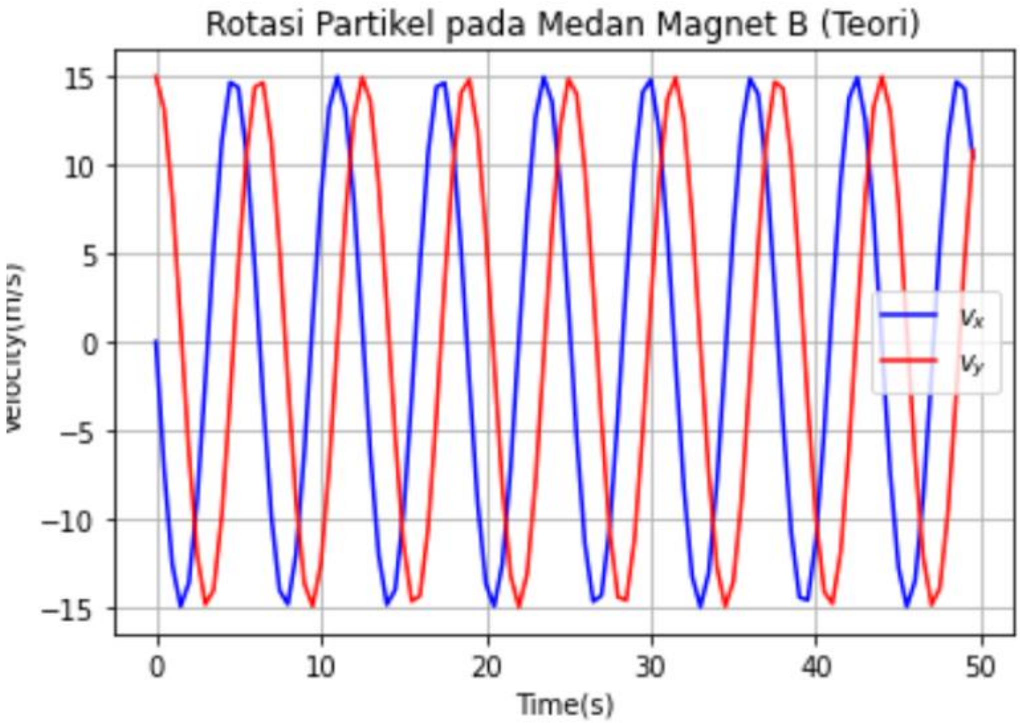
atau dapat ditulis dalam bentuk lain sebagai berikut,

$$v_x(t) = A\sin\left(\frac{qB_z}{m}t + \phi\right) \tag{19}$$

$$v_y(t) = -A\cos\left(\frac{qB_z}{m}t + \phi\right) \tag{20}$$

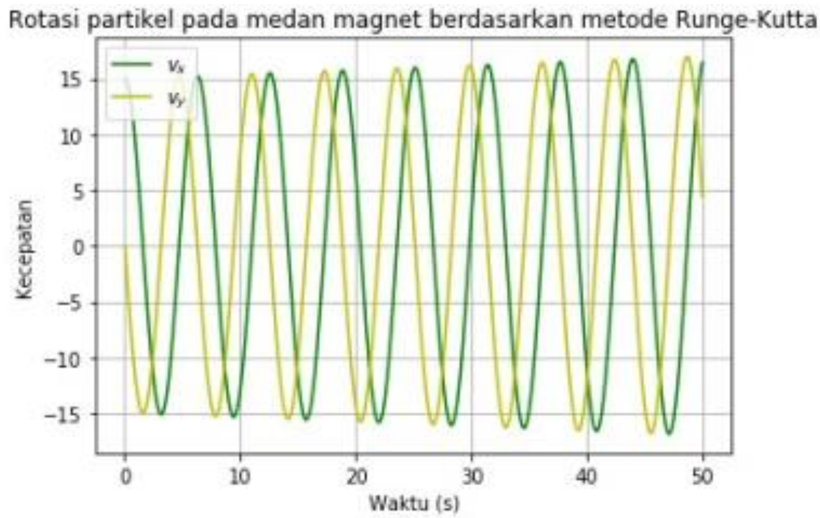
A adalah amplitudo dan ϕ merupakan beda fasa. A akan menjadi kecepatan tangensial dari rotasi partikel apabila ditinjau $v_x^2 + v_y^2 = A^2$ $(v_z = 0)$.

Apabila diasumsikan besar amplitudo (A) sebesar 15, beda fasanya(ϕ) 0, muatan(q) dan massa(m) partikel sebesar 1 serta medan magnet(B_z) sebesar 1, maka dapat dibuat grafik $v_x = 15\ \sin(t)$ dan $v_y = -15\ \cos(t)$ sebagai berikut,



d. Perolehlah solusi numeriknya!

Dengan menggunakan persamaan (8) dan (10), dan dengan mengasumsikan muatan(q) dan massa(m) partikel sebesar 1 serta medan magnet(Bz) sebesar 1, maka solusi numerik dengan menggunakan Runge-Kutta orde ke 4 dapat diperoleh sebagai berikut. (Gambar terlampir di bawah ini). File pemrograman terlampir pada Fork GitHub.



e. Bandingkan hasil kedua pendekatan teori dan numerik!

Secara umum hasil grafik yang diperoleh adalah sama. Namun pada metode numerik sudah pasti hasilnya adlaah berupa diskrit, sedangkan secara teori (fungsi), maka hasil adalah berupa hasil yang kontinu (bukan diskrit).