Metodos directos de solucion de Sistemas de ecuaciones lineales

Abrahan R. Muñoa

Academic Year 2020

Contents

1 Factorización por medio de matrices elementales

- A es una matriz que tiene una factorización LU, entonces existe unconjunto de matrices elementales tales que:

$$E_p \cdots E_2 E_1 A = U$$

donde U es una matriz escalonada.
Luego,

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_p^{-1} U$$
$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_p^{-1}$$

- Una manera complememtaria a la anterior seria la siguiente:
Empezar con $(A|I)$ y mediante operaciones elementales llevar ese sistema a uno de la forma $(U|I^*)$, donde U es una matriz triangular superior.
Luego, similarmente llevar el sistema $(I^*|I)$ a la forma (I, L), donde L es una matriz triangular inferior.

2 Métodos de Doolitle y Crout

- **Método de Doolitle**:
Sea una matriz $A = LU$, donde $l_{ii} = 1$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$1^{\underline{a}}$ fila de U :

$$u_{11} = a_{11}$$
$$u_{12} = a_{12}$$
$$u_{13} = a_{13}$$

$1^{\underline{a}}$ columna de U :

$$\left.\begin{aligned} l_{21}u_{11} = a_{21} \\ l_{31}u_{11} = a_{31} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad l_{i1} = a_{i1}/u_{11}, \quad i = 2, 3$$

$2^{\underline{a}}$ fila de U

$$\left.\begin{aligned} l_{21}u_{12} + u_{22} = a_{22} \\ l_{21}u_{13} + u_{23} = a_{23} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad u_{2j} = a_{2j} - l_{21}u_{1j}, \quad j = 2, 3$$

$2^{\underline{a}}$ columna de L :

$$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32} \quad \longrightarrow \quad l_{i2} = \left(a_{i2} - l_{i1}u_{12}\right)/u_{22}, \quad i = 3$$

3^{a} fila de U :

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33} \quad \longrightarrow \quad u_{3j} = a_{3j} - \sum_{i=1}^{j-1} l_{3i}u_{ij}, \quad j = 3$$

Las fórmulas de recurrencia que se pueden deducir de este proceso son:

$$\begin{aligned} u_{1j} &= a_{1j}, && j = 1, 2, \ldots, n \\ l_{i1} &= a_{i1}/u_{11}, && j > 1 \\ u_{kj} &= a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp}u_{pj}, && j \geq k \\ l_{ik} &= \left(a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip}u_{pk}\right)/u_{kk}, && i > k \end{aligned}$$

- **Método de Crout**
  Resulta de una variación al método anterior.
  Sea $A = LU$, donde $u_{ii} = 1$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  efectuando el producto usando las reglas de multiplicación de matrices se obtendrá:
  $1^{\underline{a}}$ columna de L :

$$\begin{aligned} l_{11} &= a_{11} \\ l_{21} &= a_{21} \\ l_{31} &= a_{31} \end{aligned}$$

  1^a fila de U :

$$\left.\begin{aligned} l_{11}u_{12} &= a_{12} \\ l_{11}u_{13} &= a_{13} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad u_{1j} = a_{1j}/l_{11}, \quad j = 2, 3$$

  $2^{\underline{a}}$ columna de L :

$$\left.\begin{aligned} l_{21}u_{12} + l_{22} &= a_{22} \\ l_{31}u_{12} + l_{32} &= a_{32} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad l_{i2} = a_{i2} - l_{i1}u_{12}, \quad i = 2, 3$$

  2^2 fila de U :

$$l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = a_{23} \quad \longrightarrow \quad u_{2j} = (a_{2j} - l_{21}u_{1j})/l_{22}, \quad j = 3$$

  3^a columna de L :

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} = a_{33} \quad \longrightarrow \quad l_{i3} = a_{i3} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}u_{ji}, \quad i = 3$$

  En general, las fórmulas de recurrencia que se pueden deducir de este proceso, denominado factorización LU de Crout, son:

$$\begin{aligned} l_{i1} &= a_{i1}, & & i = 1, 2, \ldots, n \\ u_{1j} &= a_{1j}/l_{11}, & & j > 1 \\ l_{ik} &= a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip}u_{pk}, & & i \geq k \\ u_{kj} &= \left(a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp}u_{pj}\right)/l_{kk}, & & j > k \end{aligned}$$

- Consideremos el siguiente ejemplo del método de Doolitle.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

  La parte de la multiplicación de L con U

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = A$$

  que determina la primera fila de A, da lugar a las cuatro ecuaciones

$$u_{11} = 6, \quad u_{12} = 2, \quad u_{13} = 1, \quad u_{14} = -1$$

La parte de la multiplicación de L con U que determina los elementos restantes de la primera columna de A da las ecuaciones

$$l_{21}u_{11} = 2, \quad l_{31}u_{11} = 1, \quad l_{41}u_{11} = -1$$

y entonces

$$l_{21} = \frac{1}{3}, \quad l_{31} = \frac{1}{6}, \quad l_{41} = -\frac{1}{6}$$

Hasta aquí las matrices L y U asumen la forma:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & l_{32} & 1 & 0 \\ -1/6 & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad U = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

La parte de la multiplicación que determina los elementos restantes en la segunda fila de A lleva a las ecuaciones

$$\begin{aligned} l_{21}u_{12} + u_{22} &= \tfrac{2}{3} + u_{22} = 4 \\ l_{21}u_{13} + u_{23} &= \tfrac{1}{3} + u_{23} = 1 \\ l_{21}u_{14} + u_{24} &= -\tfrac{1}{3} + u_{24} = 0 \end{aligned}$$

así que

$$u_{22} = \frac{10}{3}, \quad u_{23} = \frac{2}{3}, \quad u_{24} = \frac{1}{3}$$

y la que determina los elementos restantes de la segunda columna de A da

$$\begin{aligned} l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} &= \tfrac{2}{6} + \tfrac{10}{3}l_{32} = 1 \\ l_{41}u_{12} + l_{32}u_{22} &= -\tfrac{2}{6} + \tfrac{10}{3}l_{42} = 0 \end{aligned}$$

así que

$$l_{32} = \frac{1}{5}, \quad l_{42} = \frac{1}{10}$$

Ahora las matrices L y U tienen la forma:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/5 & 1 & 0 \\ -1/6 & 1/10 & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad U = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 10/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

La parte de la multiplicación que determina los elementos restantes en la tercera fila de A lleva a las ecuaciones

$$\begin{aligned} l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} &= \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{2}{3} + u_{33} = 4 \\ l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + u_{34} &= -\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{3} + u_{34} = -1 \end{aligned}$$

así que

$$u_{33} = \frac{37}{10} \quad y \quad u_{34} = -\frac{9}{10}$$

y la que determina los elementos restantes de la tercera columna de A da

$$l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{10}\frac{2}{3} + \frac{37}{10}l_{43} = -1$$

así que

$$l_{43} = -\frac{9}{37}$$

Y finalmente, la última ecuación es:

$$l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + u_{44} = -\frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} - \frac{9}{37}\left(-\frac{9}{10}\right) + u_{44} = 3$$

así que

$$u_{4u} = \frac{191}{74}$$

para obtener finalmente:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{10} & -\frac{9}{37} & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad U = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{37}{10} & -\frac{9}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{191}{74} \end{pmatrix}$$

3 Metodo de Cholesky

Se trata de un método de descomposicijón LU en el caso en que la matriz A sea simétrica y definida positiva. Basta con tomar $\mathbf{U} = \mathbf{L}^T$ y, por tanto,

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^t$$

Asi, tenemos para una matriz de $3x3$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{12} & l_{22} & 0 \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

operando de acuerdo con las reglas de multiplicación matricial se obtiene que:

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11}^2 \\ a_{12} &= l_{11}l_{12} \\ a_{13} &= l_{11}l_{13} \\ \hline a_{22} &= l_{12}^2 + l_{22}^2 \\ a_{23} &= l_{12}l_{13} + l_{22}l_{23} \\ \hline a_{33} &= l_{13}^2 + l_{23}^2 + l_{33}^2 \end{aligned}$$

Generalizando tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Para } k = 1, \ldots, n \\ \ell_{kk} &= \sqrt{a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{k,r}^2} \\ \ell_{i,k} &= \frac{a_{i,k} - \sum_{r=1}^{k-1} \ell_{ir}\ell_{kr}}{\ell_{kk}}, i = k+1, \ldots, n \end{aligned}$$