



Universidad
de Cádiz

Escuela Superior de Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Apuntes de Matemática Discreta

7. Relaciones de Orden

Francisco José González Gutiérrez

Cádiz, Octubre de 2004

Lección 7

Relaciones de Orden

Contenido

7.1	Generalidades	154
7.1.1	Relación de Orden	154
7.1.2	Relación de Orden Estricto	155
7.1.3	Proposición	157
7.1.4	Proposición	158
7.2	Conjuntos Ordenados	159
7.2.1	Elementos Comparables	159
7.2.2	Orden Parcial y Total	159
7.2.3	Conjuntos Ordenados	163
7.3	Producto	163
7.3.1	Orden del Producto	164
7.3.2	Orden Lexicográfico	166
7.4	Representación Gráfica	171
7.4.1	Diagrama de Hasse	171
7.5	Ordenación Topológica	176
7.6	Elementos Característicos de un Conjunto Ordenado	177
7.6.1	Elemento Maximal	177
7.6.2	Elemento Minimal	178
7.6.3	Existencia del Maximal y Minimal	178
7.6.4	Algoritmo para la Ordenación Topológica	178
7.6.5	Elemento Máximo	180
7.6.6	Elemento Mínimo	181
7.6.7	Unicidad del Máximo y el Mínimo	183
7.6.8	Cota Superior	183
7.6.9	Cota Inferior	183
7.6.10	Conjunto Acotado	185
7.6.11	Supremo	185
7.6.12	Ínfimo	185
7.6.13	Unicidad del Ínfimo y el Supremo	185

Estudiamos en esta lección una de las relaciones binarias más importantes que pueden definirse en un conjunto, las relaciones de orden.

7.1 Generalidades

Una relación de orden es una relación definida en un conjunto que verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Cuando en un conjunto hayamos definido una relación de orden, diremos que el conjunto está ordenado con respecto a dicha relación.

Los retículos y las álgebras de Boole son conjuntos ordenados con características especiales. Estas estructuras algebraicas juegan un importante papel en la teoría de conjuntos, así como en problemas de ordenación y búsqueda (problemas éstos de especial interés en la informática), y en particular las álgebras de Boole son importantes para la representación de circuitos lógicos.

Antes de comenzar fijaremos ideas con un par de ejemplos sencillos.

Ejemplo 7.1 Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$, consideramos la relación de inclusión en el conjunto de las partes de A .

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

La inclusión es una relación de orden ya que posee las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Podemos, por tanto, ordenar el conjunto $\mathcal{P}(A)$:

$$\begin{aligned}\emptyset &\subseteq \{a\} \subseteq \{a, b\} \subseteq \{a, b, c\} \\ \emptyset &\subseteq \{b\} \subseteq \{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}\end{aligned}$$

y así sucesivamente. Ahora bien, considerando dos elementos de $\mathcal{P}(A)$, por ejemplo $\{a\}$ y $\{c\}$, ni $\{a\}$ está incluido en $\{c\}$ ni $\{c\}$ en $\{a\}$, luego la relación de inclusión no sirve para ordenar todos los elementos de $\mathcal{P}(A)$, diremos en tal caso que este conjunto está *parcialmente ordenado*. ■

7.1.1 Relación de Orden

Una relación binaria \mathcal{R} sobre un conjunto A se dice que es de orden, si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Los órdenes más comunes son las relaciones \leq y \geq en \mathbb{Z} y en \mathbb{R} . Por esta razón cuando nos refiramos en general a una relación de orden en un conjunto A , usaremos los símbolos \preceq y \succeq para \mathcal{R} . Estos son similares a los \leq y \geq que seguiremos utilizando cuando el conjunto sea \mathbb{Z} o \mathbb{R} .

Si \preceq es una relación de orden sobre un conjunto A , entonces

$a \preceq b$ se lee “ a precede a b ” o “ a es anterior a b ”.

Si $a \preceq b$ y $a \neq b$, emplearemos $a \prec b$ y diremos que “ a precede estrictamente a b ” o “ a es estrictamente anterior a b ”.

$a \succeq b$ se lee “ a sucede a b ” o “ a es posterior a b ”

$a \succ b$ se lee “ a sucede estrictamente a b ” o “ a es estrictamente posterior a b ” . ■

Ejemplo 7.2 Probar que la relación “menor o igual” definida en el conjunto \mathbb{Z} de los números enteros es de orden.

Solución

Sean a y b dos enteros cualesquiera. Entonces,

$$a \leq b \iff b - a \geq 0$$

o lo que es igual

$$a \leq b \iff b - a \in \mathbb{Z}_0^+$$

es decir,

$$a \leq b \iff \exists k \in \mathbb{Z}_0^+ : b - a = k$$

Veamos si esta relación cumple las condiciones exigidas.

Reflexividad. En efecto, sea a elegido arbitrariamente en el conjunto de los enteros. Entonces,

$$a = a \implies a - a = 0; 0 \in \mathbb{Z}_0^+ \implies a \leq a$$

Antisimetría. Sean a y b dos enteros cualesquiera. Entonces,

$$\left. \begin{array}{l} a \leq b \iff \exists k_1 \in \mathbb{Z}_0^+ : b - a = k_1 \\ y \\ b \leq a \iff \exists k_2 \in \mathbb{Z}_0^+ : a - b = k_2 \end{array} \right\} \implies k_1 = -k_2, \text{ con } k_1 \text{ y } k_2 \text{ en } \mathbb{Z}_0^+ \implies k_1 = k_2 = 0$$

por lo tanto,

$$b - a = 0 \text{ y } a - b = 0$$

es decir,

$$a = b$$

y, consecuentemente, la relación es antisimétrica.

Transitividad. En efecto, si a , b y c son tres números enteros cualesquiera. Entonces

$$\left. \begin{array}{l} a \leq b \iff \exists k_1 \in \mathbb{Z}_0^+ : b - a = k_1 \\ y \\ b \leq c \iff \exists k_2 \in \mathbb{Z}_0^+ : c - b = k_2 \end{array} \right\} \implies b - a + c - b = k_1 + k_2 \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \\ \implies c - a = k, \quad k = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \\ \implies a \leq c.$$

Por lo tanto, la relación es transitiva.

7.1.2 Relación de Orden Estricto

Una relación \mathcal{R} sobre un conjunto A se dice que es de orden estricto si es asimétrica y transitiva.

Ejemplo 7.3 Probar que la relación “menor que” es una relación de orden estricto en \mathbb{Z} .

Solución

Sean a y b dos enteros cualesquiera. Entonces,

$$a < b \iff b - a > 0$$

o lo que es igual

$$a < b \iff b - a \in \mathbb{Z}^+$$

es decir,

$$a < b \iff \exists k \in \mathbb{Z}^+ : b - a = k$$

Veamos si esta relación cumple las condiciones exigidas para el orden estricto.

Asimetría. En efecto, si a y b son dos enteros cualesquiera.

$$\begin{aligned}
 a < b &\iff \exists k \in \mathbb{Z}^+ : b - a = k \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}^+ : a - b = -k \\
 &\iff a - b \notin \mathbb{Z}^+ \\
 &\iff a - b \neq k; \forall k \in \mathbb{Z}^+ \\
 &\implies b \not\leq a
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la relación propuesta es asimétrica.

Transitividad. En efecto, si a , b y c son tres números enteros cualesquiera. Entonces

$$\left. \begin{array}{l} a < b \iff \exists k_1 \in \mathbb{Z}^+ : b - a = k_1 \\ y \\ b < c \iff \exists k_2 \in \mathbb{Z}^+ : c - b = k_2 \end{array} \right\} \implies b - a + c - b = k_1 + k_2 \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^+$$

$$\implies c - a = k, \quad k = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}^+$$

$$\implies a < c.$$

Por lo tanto, la relación es transitiva. ■

Nota 7.1 Observemos que la relación de orden definida en \mathbb{Z} como “menor o igual” puede definirse a través de la relación de orden estricto “menor que”. En efecto, si a y b son dos enteros arbitrarios,

$$a \leq b \iff a < b \vee a = b$$

y también

$$a \not\leq b \iff a \not< b \wedge a \neq b$$

Teniendo en cuenta esto veamos que la antisimetría de la relación “menor o igual” puede probarse de otra forma, es decir, probaremos que si a y b son dos enteros distintos cualesquiera, entonces a no es

menor o igual que b o b no es menor o igual que a . En efecto,

$$\begin{aligned}
 a \neq b &\iff b - a \neq 0 \\
 &\iff b - a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\
 &\iff b - a \in \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^+ \\
 &\iff \begin{cases} b - a \in \mathbb{Z}^- \\ \vee \\ b - a \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} b - a \in \mathbb{Z}^- \\ \vee \\ a - b \in \mathbb{Z}^- \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} b - a \neq k; \forall k \in \mathbb{Z}^+ \\ \vee \\ a - b \neq k; \forall k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} b \not\leq a \\ \vee \\ a \not\leq b \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} b \not\preceq a \\ \vee \\ a \not\preceq b \end{cases}
 \end{aligned}$$

■

A continuación veremos que a partir de una relación de orden puede definirse una de orden estricto y viceversa.

7.1.3 Proposición

Sea \preceq una relación de orden definida sobre un conjunto A y sea \prec otra relación sobre A definida en la forma

$$a \prec b \text{ si, y sólo si } a \preceq b \text{ y } a \neq b.$$

Entonces \prec es una relación de orden estricto sobre A .

Demostración

$$a \prec b \iff a \preceq b \wedge a \neq b, \forall a, b \in A \quad (7.1)$$

Asimétrica. En efecto, si \prec no fuera asimétrica, entonces existirían dos elementos a y b en A tales que

$$a \prec b \wedge b \prec a$$

es decir,

$$(a \preceq b \wedge a \neq b) \wedge (b \preceq a \wedge b \neq a)$$

luego,

$$(a \preceq b \wedge b \preceq a) \wedge a \neq b$$

de donde, por la antisimetría de \preceq , resulta que

$$a = b \wedge a \neq b$$

lo cual es imposible. Por lo tanto, \prec es asimétrica.

Transitiva. En efecto, sean a, b y c tres elementos arbitrariamente elegidos en A . Pues bien, si

$$a \prec b \wedge b \prec c$$

por (7.1), tendremos que

$$(a \preccurlyeq b \wedge a \neq b) \wedge (b \preccurlyeq c \wedge b \neq c)$$

es decir,

$$(a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq c) \wedge (a \neq b \wedge b \neq c).$$

Veamos que si $a \neq b \wedge b \neq c$, entonces $a \neq c$. En efecto, si fuese $a = c$, tendríamos

$$(a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a) \wedge (a \neq b \wedge b \neq a)$$

lo cual, por la antisimetría de \preccurlyeq nos llevaría a la contradicción,

$$a = b \wedge a \neq b.$$

Así pues,

$$(a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq c) \wedge a \neq c$$

y por la transitividad de \preccurlyeq , resulta

$$a \preccurlyeq c \wedge a \neq c$$

es decir,

$$a \prec c$$

y, consecuentemente, \prec es transitiva. ■

7.1.4 Proposición

Sea \prec una relación de orden estricto definida sobre un conjunto A y sea \preccurlyeq otra relación sobre A definida en la forma

$$a \preccurlyeq b \text{ si, y sólo si } a \prec b \text{ ó } a = b.$$

Entonces \preccurlyeq es una relación de orden sobre A .

Demostración

$$a \preccurlyeq b \iff a \prec b \vee a = b, \forall a, b \in A \quad (7.2)$$

Reflexiva. En efecto, para cada a de A , se verifica que

$$a = a \implies a \prec a \vee a = a \iff a \preccurlyeq a$$

Antisimétrica. En efecto, sean a y b cualesquiera de A . Pues bien, si

$$a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a$$

entonces, por (7.2),

$$(a \prec b \vee a = b) \wedge (b \prec a \vee b = a)$$

de aquí que

$$(a \prec b \wedge b \prec a) \vee (a = b)$$

pero $a \prec b$ y $b \prec a$ es falso ya que \prec es asimétrica, luego nos queda que $a = b$.

También podíamos haber razonado en la forma siguiente: si \preccurlyeq no fuera antisimétrica, entonces existirían a y b en A tales que

$$a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a \wedge a \neq b$$

entonces, por (7.2),

$$(a \prec b \vee a = b) \wedge (b \prec a \vee a = b) \wedge (a \neq b)$$

es decir,

$$[(a \prec b \wedge b \prec a) \vee (a = b)] \wedge (a \neq b)$$

pero $a \prec b$ y $b \prec a$ contradice la asimetría de \prec , luego

$$(a = b) \wedge (a \neq b)$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto \preceq es antisimétrica.

Transitiva. En efecto, sean a, b y c tres elementos arbitrarios de A . Pues bien, si

$$a \preceq b \wedge b \preceq c$$

entonces por (7.2),

$$(a \prec b \vee a = b) \wedge (b \prec c \vee b = c)$$

de aquí que

$$(a \prec b \wedge b \prec c) \vee (a \prec b \wedge b = c) \vee (a = b \wedge b \prec c) \vee (a = b \wedge b = c)$$

y por ser \prec transitiva, nos quedaría que

$$(a \prec c) \vee (a \prec c) \vee (a \prec c) \vee (a = c)$$

es decir,

$$a \prec c \vee a = c$$

por lo tanto, y de nuevo por (7.2),

$$a \preceq c.$$

■

7.2 Conjuntos Ordenados

7.2.1 Elementos Comparables

Dados dos elementos a y b de un conjunto A sobre el que se ha definido una relación de orden \preceq , diremos que son comparables si uno de ellos es anterior al otro. En caso contrario se dice que a y b son “no comparables”.

Nota 7.2 Obsérvese que

$$a \text{ y } b \text{ son comparables} \iff a \preceq b \vee b \preceq a$$

luego

$$a \text{ y } b \text{ no son comparables} \iff a \not\preceq b \wedge b \not\preceq a$$

■

7.2.2 Orden Parcial y Total

Una relación de orden se dice que es total cuando todos los elementos del conjunto sobre el que está definida son comparables por dicha relación. En caso contrario, es decir, si existen elementos no comparables, diremos que la relación definida es de orden parcial. Así pues, dada la relación de orden \preceq , diremos

$$\preceq \text{ es de orden total} \iff \forall a, b \in A (a \preceq b \vee b \preceq a)$$

$$\preceq \text{ es de orden parcial} \iff \exists a, b \in A : (a \not\preceq b \wedge b \not\preceq a)$$

Ejemplo 7.4 Probar que la relación de orden “menor o igual” definida en el conjunto \mathbb{Z} de los números enteros es total.

Solución

En efecto, sean a y b dos enteros cualesquiera, veamos que $a \leq b$ o $b \leq a$, es decir, todos los números enteros son comparables por la relación.

Como a y b están arbitrariamente elegidos, puede ocurrir que sean iguales o distintos. Pues bien,

$$\begin{aligned}
 a = b \vee a \neq b &\iff a = b \vee b - a \neq 0 \\
 &\iff a = b \vee b - a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\
 &\iff a = b \vee b - a \in \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^+ \\
 &\iff a = b \vee \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}^- : b - a = k \\ \vee \\ \exists k \in \mathbb{Z}^+ : b - a = k \end{cases} \\
 &\iff a = b \vee \begin{cases} a - b = -k, \text{ con } -k \in \mathbb{Z}^+ \\ \vee \\ b - a = k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \\
 &\iff a = b \vee \begin{cases} b < a \\ \vee \\ a < b \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a = b \vee b < a \\ \vee \\ a = b \vee a < b \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} b \leq a \\ \vee \\ a \leq b \end{cases}
 \end{aligned}$$

Por tanto, la relación de orden “menor o igual” definida en el conjunto de los números enteros es total. ■

Ejemplo 7.5 En el conjunto \mathbb{Z}^+ de los números enteros positivos, se considera la relación de divisibilidad, es decir, para cada par de enteros a y b

$$a \preceq b \iff a \mid b$$

Probar que es una relación de orden parcial.

Solución

Recordemos que si a y b son dos enteros no negativos cualesquiera, entonces

$$a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{Z}^+ : b = ak$$

luego la relación propuesta puede caracterizarse en la forma

$$a \preceq b \iff \exists k \in \mathbb{Z}^+ : b = ak.$$

Veamos que esta relación es de orden.

Reflexiva. Para cada elemento a de \mathbb{Z}^+ , se verifica que

$$a = a \cdot 1$$

luego,

$$\exists k \in \mathbb{Z}^+ : a = a \cdot k$$

de aquí que

$$\forall a (a \in \mathbb{Z}^+ \implies a \preccurlyeq a)$$

es decir, la relación de divisibilidad es, en efecto, *reflexiva*.

Antisimétrica. Sean a y b dos elementos cualesquiera de \mathbb{Z}^+ , entonces

$$\left. \begin{array}{l} a \preccurlyeq b \\ \wedge \\ b \preccurlyeq a \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists k_1 \in \mathbb{Z}^+ : b = a \cdot k_1 \\ \wedge \\ \exists k_2 \in \mathbb{Z}^+ : a = b \cdot k_2 \end{array} \right.$$

si ahora sustituimos la segunda ecuación en la primera, tendremos

$$b = b \cdot k_1 \cdot k_2 \iff k_1 \cdot k_2 = 1 \iff k_1 = k_2 = 1$$

consecuentemente, $a = b$.

De aquí que

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} (a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a \implies a = b)$$

es decir, la relación propuesta es *antisimétrica*.

Transitiva. Sean a, b y c tres números enteros arbitrarios.

$$\left. \begin{array}{l} a \preccurlyeq b \\ \wedge \\ b \preccurlyeq c \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists k_1 \in \mathbb{Z}^+ : b = a \cdot k_1 \\ \wedge \\ \exists k_2 \in \mathbb{Z}^+ : c = b \cdot k_2 \end{array} \right.$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera, tendremos que

$$c = a \cdot k_1 \cdot k_2 : k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{Z}$$

luego,

$$a \preccurlyeq c$$

o sea,

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} (a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq c \implies a \preccurlyeq c)$$

la relación, por tanto, es *transitiva*.

Por cumplir las tres condiciones anteriores, la relación es de orden.

Veamos que el orden es parcial. En efecto, consideremos los enteros 2 y 3, entonces

$$2 \neq 3k; \forall k \in \mathbb{Z} \text{ y } 3 \neq 2k; \forall k \in \mathbb{Z}$$

consecuentemente,

$$\exists a, b \in \mathbb{Z} : a \not\preccurlyeq b \wedge b \not\preccurlyeq a$$

es decir, existen elementos *no comparables*, de aquí que la relación de orden sea *parcial*. ■

Ejemplo 7.6 Determinar si la relación \mathcal{R} es un orden parcial en el conjunto A .

(a) $A = \mathbb{Z}$ y $a\mathcal{R}b \iff a = 2b$

(b) $A = \mathbb{Z}$ y $a\mathcal{R}b \iff a^2 \mid 2b$

(c) $A = \mathbb{Z}$ y $a\mathcal{R}b \iff \exists k \in \mathbb{Z}^+ : a = b^k$

Solución

(a) $A = \mathbb{Z}$ y $a\mathcal{R}b \iff a = 2b$

Reflexiva. Consideremos el 1, número entero, entonces $1 \neq 2 \cdot 1$, luego $1 \not\mathcal{R} 1$, de aquí que

$$\exists a : a \in \mathbb{Z} \wedge a \not\mathcal{R} a$$

La relación propuesta no es, por tanto, reflexiva y, consecuentemente, no es de orden.

(b) $A = \mathbb{Z}$ y $a\mathcal{R}b \iff a^2 \mid 2b$

Reflexiva. Consideremos el número entero 3, entonces

$$3^2 \text{ no divide a } 2 \cdot 3$$

de aquí que $3 \not\mathcal{R} 3$, es decir,

$$\exists a : a \in \mathbb{Z} \wedge a \not\mathcal{R} a$$

por tanto, al igual que en el apartado anterior, la relación propuesta es no reflexiva y, consecuentemente, no es de orden.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y $a\mathcal{R}b \iff \exists k \in \mathbb{Z} : a = b^k$

Reflexiva. Dado cualquier número entero a , se verifica que $a = a^1$, luego

$$\exists k \in \mathbb{Z}^+ (k = 1) : a = a^k$$

de aquí que

$$\forall a (a \in \mathbb{Z} \implies a\mathcal{R}a)$$

consecuentemente, la relación propuesta es *reflexiva*.

Antisimétrica. Sean a y b dos enteros cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned} a\mathcal{R}b &\iff \exists k_1 \in \mathbb{Z}^+ : a = b^{k_1} \\ \wedge \\ b\mathcal{R}a &\iff \exists k_2 \in \mathbb{Z}^+ : b = a^{k_2} \end{aligned}$$

sustituyendo la segunda ecuación en la primera, tendremos

$$a = (a^{k_2})^{k_1} \iff a = a^{k_1 k_2} \iff k_1 \cdot k_2 = 1 \iff k_1 = k_2 = 1$$

de aquí que a sea igual a b , por tanto,

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \implies a = b)$$

es decir, \mathcal{R} es *antisimétrica*.

Transitiva. Sean a, b y c tres números enteros cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned} a\mathcal{R}b &\iff \exists k_1 \in \mathbb{Z}^+ : a = b^{k_1} \\ \wedge \\ b\mathcal{R}c &\iff \exists k_2 \in \mathbb{Z}^+ : b = c^{k_2} \end{aligned}$$

sustituyendo la segunda ecuación en la primera, tendremos

$$a = (c^{k_2})^{k_1} \iff a = c^{k_1 k_2} : k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{Z}^+ \iff a\mathcal{R}c$$

es decir,

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c)$$

luego la relación propuesta es *transitiva*.

Por tanto, la relación es de orden. Veamos de que tipo es.

Tomando los enteros 2 y 3, se verifica que

$$2 \neq 3^k, \forall k \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } 3 \neq 2^k, \forall k \in \mathbb{Z}^+$$

luego,

$$2 \not\mathcal{R} 3 \wedge 3 \not\mathcal{R} 2$$

es decir,

$$\exists a, b \in \mathbb{Z} : (a \not\mathcal{R} b \wedge b \not\mathcal{R} a)$$

es decir, existen en \mathbb{Z} elementos *no comparables* con la relación propuesta, de aquí que esta sea de *orden parcial*. ■

Ejemplo 7.7 Determinar si la relación de inclusión definida en el conjunto $A = \mathcal{P}(S)$, donde S es un conjunto cualquiera es una relación de orden total.

Solución

$A = \mathcal{P}(S)$, donde S es un conjunto cualquiera y \mathcal{R} la inclusión de conjuntos.

Esta relación es claramente reflexiva, antisimétrica y transitiva (ver lección de teoría de conjuntos), luego es de orden.

El siguiente ejemplo prueba que el orden es parcial. En efecto, sea $S = \{a, b, c\}$ y

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

se observa con facilidad que hay elementos en este conjunto que no son comparables con la relación, por ejemplo $\{a\}$ no está contenido en $\{b\}$ ni $\{b\}$ en $\{a\}$. ■

7.2.3 Conjuntos Ordenados

Dado un conjunto A diremos que está ordenado si en él hay definida una relación de orden. Dicho conjunto estará parcial o totalmente ordenado según que la relación definida sea parcial o total.

Notaremos (A, \preceq) al conjunto A ordenado con la relación \preceq .

Ejemplo 7.8

- (a) La relación de inclusión es una relación de orden parcial sobre cualquier colección de subconjuntos de A ; es decir, \subseteq es un orden parcial sobre el conjunto de las partes de A y, consecuentemente, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.
- (b) La relación \leq (menor o igual que) es una relación de orden total sobre el conjunto de los números enteros, es decir, (\mathbb{Z}, \leq) es un conjunto totalmente ordenado.
- (c) La relación “menor que” no es un orden sobre \mathbb{Z} ya que no es reflexiva. ■

7.3 Producto

El siguiente teorema nos muestra como construir un nuevo conjunto ordenado a partir de otros.

7.3.1 Orden del Producto

Si (A, \preceq_1) y (B, \preceq_2) son dos conjuntos parcialmente ordenados, entonces $\{A \times B, \preceq\}$ también lo es con el orden definido por

$$(a, b) \preceq (a', b') \iff a \preceq_1 a' \wedge b \preceq_2 b'$$

Demostración

Veamos que la relación definida cumple las tres condiciones que caracterizan las relaciones de orden.

Reflexiva. Sea (a, b) un elemento arbitrario de $A \times B$. Entonces

$$\begin{aligned} (a, b) \in A \times B &\iff a \in A \wedge b \in B \\ &\implies a \preceq_1 a \wedge b \preceq_2 b \quad \{\text{Reflexividad en } (A, \preceq_1) \text{ y } (B, \preceq_2)\} \\ &\iff (a, b) \preceq (a, b) \end{aligned}$$

luego,

$$\forall (a, b) [(a, b) \in A \times B \implies (a, b) \preceq (a, b)]$$

es decir, la relación propuesta es, en efecto, reflexiva.

Antisimétrica. Sean (a, b) y (a', b') dos elementos cualesquiera de $A \times B$. Entonces,

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} (a, b) \preceq (a', b') \\ \wedge \\ (a', b') \preceq (a, b) \end{array} \right\} &\iff \left\{ \begin{array}{l} a \preceq_1 a' \wedge b \preceq_2 b' \\ \wedge \\ a' \preceq_1 a \wedge b' \preceq_2 b \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} a \preceq_1 a' \wedge a' \preceq_1 a \text{ en } A \\ \wedge \\ b \preceq_2 b' \wedge b' \preceq_2 b \text{ en } B \end{array} \right. \\ &\implies a = a' \wedge b = b' \quad \{\text{Por la antisimetría en } (A, \preceq_1) \text{ y } (B, \preceq_2)\} \\ &\iff (a, b) = (a', b') \end{aligned}$$

Tendremos, por tanto,

$$\forall (a, b), (a', b') \in A \times B [(a, b) \preceq (a', b') \wedge (a', b') \preceq (a, b) \implies (a, b) = (a', b')]$$

luego la relación propuesta es antisimétrica.

Transitiva. Sean ahora (a, b) , (a', b') y (a'', b'') cualesquiera de $A \times B$, entonces

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} (a, b) \preceq (a', b') \\ \wedge \\ (a', b') \preceq (a'', b'') \end{array} \right\} &\iff \left\{ \begin{array}{l} a \preceq_1 a' \wedge b \preceq_2 b' \\ \wedge \\ a' \preceq_1 a'' \wedge b' \preceq_2 b'' \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} a \preceq_1 a' \wedge a' \preceq_1 a'' \text{ en } A \\ \wedge \\ b \preceq_2 b' \wedge b' \preceq_2 b'' \text{ en } B \end{array} \right. \\ &\implies a \preceq_1 a'' \wedge b \preceq_2 b'' \quad \{\text{Transitividad en } (A, \preceq_1) \text{ y } (B, \preceq_2)\} \\ &\iff (a, b) \preceq (a'', b'') \end{aligned}$$

luego,

$$\forall (a, b), (a', b'), (a'', b'') \in A \times B [(a, b) \preceq (a', b') \wedge (a', b') \preceq (a'', b'') \implies (a, b) \preceq (a'', b'')]$$

es decir, la relación es transitiva.

Por tanto, la relación \preceq definida en el producto cartesiano $A \times B$ es de orden. Lo llamaremos el *orden del producto*. ■

Ejemplo 7.9 En $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ y definimos la siguiente relación:

$$(a, b) \preceq (a', b') \iff a | a' \wedge b \leq b'$$

donde \leq es el orden usual. Demuestre que \preceq es de orden.

Solución

Recordemos que la relación de divisibilidad “|” sobre el conjunto de los enteros positivos, es de orden parcial.

Veamos si la relación propuesta es de orden.

Reflexiva. Sea (a, b) un elemento arbitrario de $A \times A$. Entonces,

$$\begin{array}{l} a | a, \text{ por ser “|” reflexiva} \\ \wedge \\ b \leq b, \text{ por ser “\leq” reflexiva} \end{array}$$

luego,

$$(a, b) \preceq (a, b)$$

es decir,

$$\forall (a, b) ((a, b) \in A \times A \implies (a, b) \preceq (a, b))$$

o sea, \preceq es *reflexiva*.

Antisimétrica. Sean (a, b) y (a', b') cualesquiera de $A \times A$.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} (a, b) \preceq (a', b') \\ \wedge \\ (a', b') \preceq (a, b) \end{array} \right\} &\iff \left\{ \begin{array}{l} a | a' \wedge b \leq b' \\ \wedge \\ a' | a \wedge b' \leq b \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} a | a' \wedge a' | a \\ \wedge \\ b \leq b' \wedge b' \leq b \end{array} \right. \\ &\implies a = a' \wedge b = b' \quad \{\text{Por ser “|” y “\leq” antisimétricas}\} \\ &\iff (a, b) = (a', b') \end{aligned}$$

Tenemos, pues,

$$\forall (a, b), (a', b') \in A \times A ((a, b) \preceq (a', b') \wedge (a', b') \preceq (a, b) \implies (a, b) = (a', b'))$$

es decir, \preceq es *antisimétrica*.

Transitiva. Si (a, b) , (a', b') y (a'', b'') son elementos arbitrarios de $A \times A$, entonces

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} (a, b) \preceq (a', b') \\ \wedge \\ (a', b') \preceq (a'', b'') \end{array} \right\} &\iff \left\{ \begin{array}{l} a | a' \wedge b \leq b' \\ \wedge \\ a' | a'' \wedge b' \leq b'' \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} a | a' \wedge a' | a'' \\ \wedge \\ b \leq b' \wedge b' \leq b'' \end{array} \right. \\ &\implies a | a'' \wedge b \leq b'' \quad \{\text{Por ser “|” y “\leq” transitivas}\} \\ &\iff (a, b) \preceq (a'', b'') \end{aligned}$$

Así pues,

$$\forall (a, b), (a', b'), (a'', b'') \in A \times B ((a, b) \prec (a', b') \wedge (a', b') \prec (a'', b'') \implies (a, b) \prec (a'', b''))$$

es decir, \prec es *transitiva*.

Consecuentemente, la relación propuesta es de orden, siendo éste parcial por serlo la relación de divisibilidad. ■

7.3.2 Orden Lexicográfico

Un orden muy útil en el producto $A \times B$, siendo (A, \preceq_1) y (B, \preceq_2) dos conjuntos parcialmente ordenados, es el definido de la forma siguiente:

$$(a, b) \preceq (a', b') \iff a \prec_1 a' \vee (a = a' \wedge b \preceq_2 b')$$

donde $a \prec_1 a'$ si $a \preceq_1 a'$ y $a \neq a'$.

Demostración

Veamos que esta relación es, en efecto, una relación de orden

Reflexiva. Sea (a, b) cualquiera de $A \times B$. Entonces, $a \in A$ y $b \in B$ y como \preceq_2 es reflexiva,

$$a = a \wedge b \preceq_2 b \implies a \prec_1 a \vee (a = a \wedge b \preceq_2 b) \iff (a, b) \preceq (a, b).$$

Antisimétrica. Sean (a, b) y (a', b') dos elementos cualesquiera de $A \times B$. Pues bien,

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} (a, b) \preceq (a', b') \\ \wedge \\ (a', b') \preceq (a, b) \end{array} \right\} & \iff \left\{ \begin{array}{l} (a \prec_1 a') \vee (a = a' \wedge b \preceq_2 b') \\ \wedge \\ (a' \prec_1 a) \vee (a' = a \wedge b' \preceq_2 b) \end{array} \right. \\ & \iff \left\{ \begin{array}{l} (a \prec_1 a' \wedge a' \prec_1 a) \quad \{\text{Contradicción}\} \\ \vee \\ (a \prec_1 a') \wedge (a = a' \wedge b \preceq_2 b') \quad \{\text{Contradicción}\} \\ \vee \\ (a = a' \wedge b \preceq_2 b') \wedge (a' \prec_1 a) \quad \{\text{Contradicción}\} \\ \vee \\ (a = a' \wedge b \preceq_2 b') \wedge (a' = a \wedge b' \preceq_2 b) \end{array} \right. \\ & \iff (a = a' \wedge b \preceq_2 b') \wedge (a' = a \wedge b' \preceq_2 b) \\ & \iff a = a' \wedge (b \preceq_2 b' \wedge b' \preceq_2 b) \\ & \iff a = a' \wedge b = b' \quad \{\text{Antisimetría de } \preceq_2\} \\ & \iff (a, b) = (a', b') \end{aligned}$$

Transitiva. Sean (a, b) , (a', b') y (a'', b'') tres elementos cualesquiera de $A \times B$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} (a, b) \preceq (a', b') \\ \wedge \\ (a', b') \preceq (a'', b'') \end{array} \right\} & \iff \left\{ \begin{array}{l} a \prec_1 a' \vee (a = a' \wedge b \preceq_2 b') \\ \wedge \\ a' \prec_1 a'' \vee (a' = a'' \wedge b' \preceq_2 b'') \end{array} \right. \\
 & \iff \left\{ \begin{array}{l} (a \prec_1 a' \wedge a' \prec_1 a'') \\ \vee \\ (a \prec_1 a') \wedge (a' = a'' \wedge b' \preceq_2 b'') \\ \vee \\ (a = a' \wedge b \preceq_2 b') \wedge (a' \prec_1 a'') \\ \vee \\ (a = a' \wedge b \preceq_2 b') \wedge (a' = a'' \wedge b' \preceq_2 b'') \end{array} \right. \\
 & \iff \left\{ \begin{array}{l} (a \prec_1 a' \wedge a' \prec_1 a'') \\ \vee \\ a \prec_1 a'' \wedge b' \preceq_2 b'' \\ \vee \\ a \prec_1 a'' \wedge b \preceq_2 b' \\ \vee \\ (a = a' \wedge b \preceq_2 b') \wedge (a' = a'' \wedge b' \preceq_2 b'') \end{array} \right. \\
 & \iff \left\{ \begin{array}{l} (a \prec_1 a' \wedge a' \prec_1 a'') \\ \vee \\ (a \prec_1 a'') \wedge (b' \preceq_2 b'' \vee b \preceq_2 b') \\ \vee \\ (a = a' \wedge b \preceq_2 b') \wedge (a' = a'' \wedge b' \preceq_2 b'') \end{array} \right. \\
 & \iff \left\{ \begin{array}{l} a \prec_1 a'' \quad \{\text{Transitividad de } \prec_1\} \\ \vee \\ a \prec_1 a'' \\ \vee \\ a = a'' \wedge b \preceq_2 b'' \quad \{\text{Transitividad de } \preceq_2\} \end{array} \right. \\
 & \iff a \prec_1 a'' \vee (a = a'' \wedge b \preceq_2 b'') \\
 & \iff (a, b) \preceq (a'', b'')
 \end{aligned}$$

Este ordenamiento se llama *lexicográfico* u orden de diccionario. Domina el orden de los elementos de la primera coordenada, exceptuando el caso de “empate”, en el que la atención pasa a la segunda coordenada.

Nota 7.3 Si (A, \preceq_1) y (B, \preceq_2) son conjuntos totalmente ordenados, entonces el orden lexicográfico en $A \times B$ también es total.

En efecto, sean (a, b) y (a', b') cualesquiera de $A \times B$. Como \preccurlyeq_1 es de orden total

$$a \preccurlyeq_1 a' \vee a' \preccurlyeq_1 a$$

es decir,

$$(a \prec_1 a' \vee a = a') \vee (a' \prec_1 a \vee a' = a)$$

luego

$$a \prec_1 a' \vee a' \prec_1 a \vee a = a'.$$

Pues bien,

si $a \prec_1 a'$, entonces $(a, b) \prec (a', b')$

si $a' \prec_1 a$, entonces $(a', b') \prec (a, b)$

$$\text{si } a = a', \text{ entonces como } \preccurlyeq_2 \text{ es de orden total } \begin{cases} b \preccurlyeq_2 b', \text{ luego } (a, b) \prec (a', b') \\ \vee \\ b' \preccurlyeq_2 b, \text{ luego } (a', b') \prec (a, b) \end{cases}$$

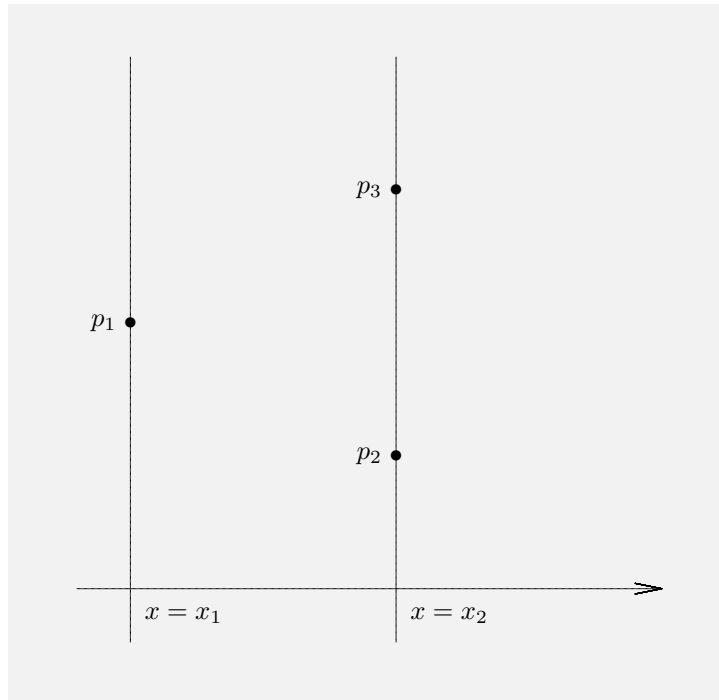
Así pues, en cualquier caso,

$$(a, b) \preccurlyeq (a', b') \vee (a', b') \preccurlyeq (a, b)$$

es decir todos los elementos de $A \times B$ son comparables mediante \preccurlyeq y, por tanto, \preccurlyeq es de orden total. ■

Ejemplo 7.10 Sea $\{\mathbb{R}, \leq\}$ donde \leq es el orden usual. Consideremos en el plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, el orden lexicográfico. Si p_1 y p_2 son dos puntos cualesquiera de \mathbb{R}^2 de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , entonces

$$(x_1, y_1) \preccurlyeq (x_2, y_2) \iff x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)$$



Orden lexicográfico en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

En la figura se ilustra el ordenamiento lexicográfico en \mathbb{R}^2 . El plano está totalmente ordenado y cada recta vertical tiene el orden usual en \mathbb{R} . Los puntos en una misma línea son menores que los puntos de cualquier línea situada a su derecha. Según esto, en la figura $p_1 \prec p_2$, $p_1 \prec p_3$ y $p_2 \prec p_3$. ■

Nota 7.4 El ordenamiento lexicográfico puede extenderse fácilmente al producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ en la forma siguiente:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \preceq (a'_1, a'_2, \dots, a'_n) \iff \begin{cases} a_1 \prec a'_1 \\ \vee \\ a_1 = a'_1 \wedge a_2 \prec a'_2 \\ \vee \\ a_1 = a'_1 \wedge a_2 = a'_2 \wedge a_3 \prec a'_3 \\ \vee \\ \dots\dots\dots \\ \vee \\ a_1 = a'_1 \wedge a_2 = a'_2 \wedge \dots \wedge a_{n-1} = a'_{n-1} \wedge a_n \preceq a'_n \end{cases}$$

La primera coordenada predomina excepto para la igualdad, en cuyo caso se examina la segunda coordenada. Si la igualdad se mantiene nuevamente, se pasará a la siguiente coordenada y así sucesivamente.

Ejemplo 7.11 Sea $A = \{a, b, c, \dots, z\}$ el alfabeto, ordenado totalmente por el orden usual, es decir, $a \leq b$, $b \leq c, \dots, y \leq z$. El producto cartesiano A^n puede considerarse como el conjunto de las palabras de longitud n .

El orden lexicográfico en A^n tiene la propiedad que si $p_1 \preceq p_2$ ($p_1, p_2 \in A^n$), entonces la palabra p_1 deberá preceder a la p_2 en una lista de diccionario. Este hecho justifica el nombre dado al ordenamiento.

Obsérvese, por ejemplo,

leñera \preceq leñero, ya que l=l, e=e, ñ=ñ, e=e, r=r y a \prec o

amigo \preceq azar, ya que a=a y m \prec z

pájaro \preceq zumbido, ya que p \prec z.

Nota 7.5 Si Σ es un alfabeto ordenado, el orden lexicográfico puede extenderse al conjunto Σ^* de todas las palabras de longitud finita construidas con símbolos de Σ , en la forma siguiente:

$$\text{si } x = a_1 a_2 \dots a_n \text{ e } y = b_1 b_2 \dots b_k$$

están en Σ^* con $n \leq k$, entonces

$$x \preceq y \iff (a_1, a_2, \dots, a_n) \preceq (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

bajo el *orden lexicográfico* de Σ^n .

Dicho con otras palabras: se recorta la palabra de longitud más larga a la longitud de la más corta y luego se comparan.

Ejemplo 7.12 Sea $\Sigma = \{a, b, c, \dots, z\}$. Entonces, Σ^* es el conjunto de todas las palabras posibles de cualquier longitud, independientemente de que tengan o no significado.

Consecuentemente, tendremos

$$\text{ama} \preceq \text{amando}$$

en Σ^* ya que

$$\text{ama} \preceq \text{ama}$$

en Σ^3 . Análogamente,

amando \preceq amante

en Σ^* ya que

amando \preceq amante

en Σ^6 .

Obsérvese que

ama \preceq amando

y

ama \preceq amante

lo cual prueba que este orden incluye el “orden de los prefijos”; esto es, cualquier palabra es mayor que cualquiera de sus prefijos. También es ésta la forma en que las palabras están colocadas en el diccionario.

Tenemos, pues, nuevamente un ordenamiento de diccionario, en este caso de palabras de cualquier longitud finita. ■

Ejemplo 7.13 Sea el conjunto ordenado $\{\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+, \prec\}$ donde \prec es el orden lexicográfico. Diga si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

- (a) $(2, 12) \preceq (5, 3)$
- (b) $(3, 6) \preceq (3, 24)$
- (c) $(4, 8) \preceq (4, 6)$
- (d) $(15, 92) \preceq (12, 3)$

Solución

Recordemos que el orden lexicográfico se caracterizaba en la forma siguiente:

$$(a, b) \preceq (a', b') \iff a < a' \vee (a = a' \wedge b \leq b')$$

siendo \leq el orden usual en \mathbb{Z}^+ . Entonces,

- (a) $(2, 12) \preceq (5, 3)$

La afirmación es verdadera, ya que $2 < 5$.

- (b) $(3, 6) \preceq (3, 24)$

Dado que $3 = 3$ y $6 < 24$, la afirmación es verdadera.

- (c) $(4, 8) \preceq (4, 6)$

$4 = 4$, pero $8 \not\leq 6$, por tanto la afirmación es falsa.

- (d) $(15, 92) \preceq (12, 3)$

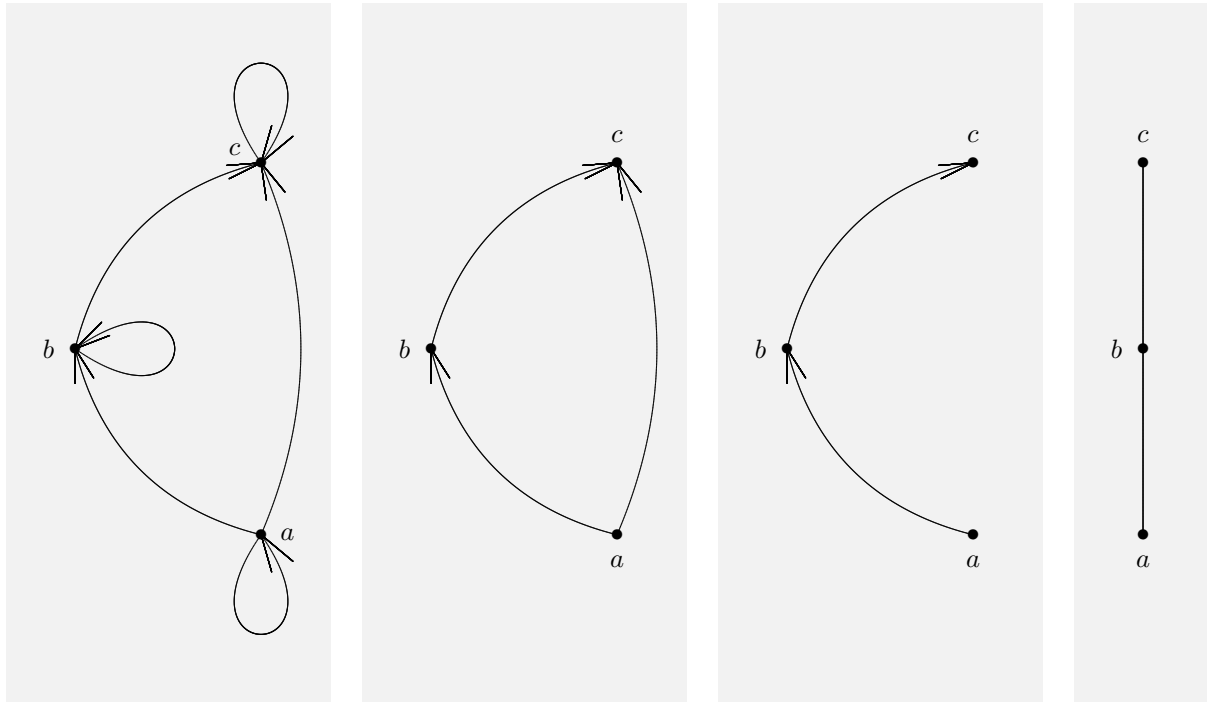
Como $15 \not< 12$, la afirmación es falsa. ■

7.4 Representación Gráfica

7.4.1 Diagrama de Hasse

Dada una relación de orden, \preceq , sobre un conjunto A , un *diagrama de Hasse* es un grafo dirigido de la misma simplificado según los criterios siguientes:

1. Dado que toda relación de orden es reflexiva, en cada punto de su digrafo habrá un bucle. Simplificaremos el dibujo eliminándolos todos.
2. Como toda relación de orden es transitiva, suprimimos todos los arcos del digrafo que se obtenga al hallar el cierre transitivo de los restantes. De esta forma, si $a \preceq b$ y $b \preceq c$, se sigue que $a \preceq c$. En este caso omitiremos la arista que va desde a hasta c y mantendremos las que van desde a hasta b y desde b a c .
3. Al igual que en un digrafo, cada punto de A lo representamos por un punto del plano, aunque conviniendo en que si “ a precede a b ”, dibujaremos el punto a por debajo del b . Todas las líneas que unan puntos serán, por tanto, ascendentes, de aquí que se supriman las direcciones utilizadas en los digrafos.



Paso de un grafo dirigido a un diagrama de Hasse

La figura anterior nos muestra el paso del grafo dirigido de una relación de orden hasta la obtención de su *diagrama de Hasse* mediante la aplicación de los criterios anteriores.

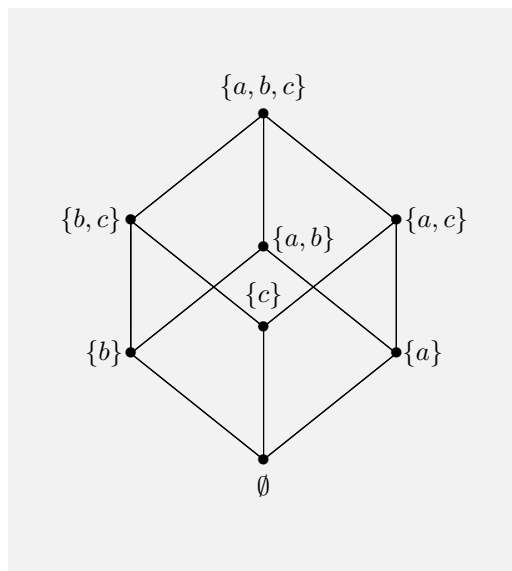
Ejemplo 7.14 Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$ dibujar el diagrama de Hasse del conjunto parcialmente ordenado $\{\mathcal{P}(A), \subseteq\}$

Solución

Si $A = \{a, b, c\}$, entonces el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de las partes de A , es

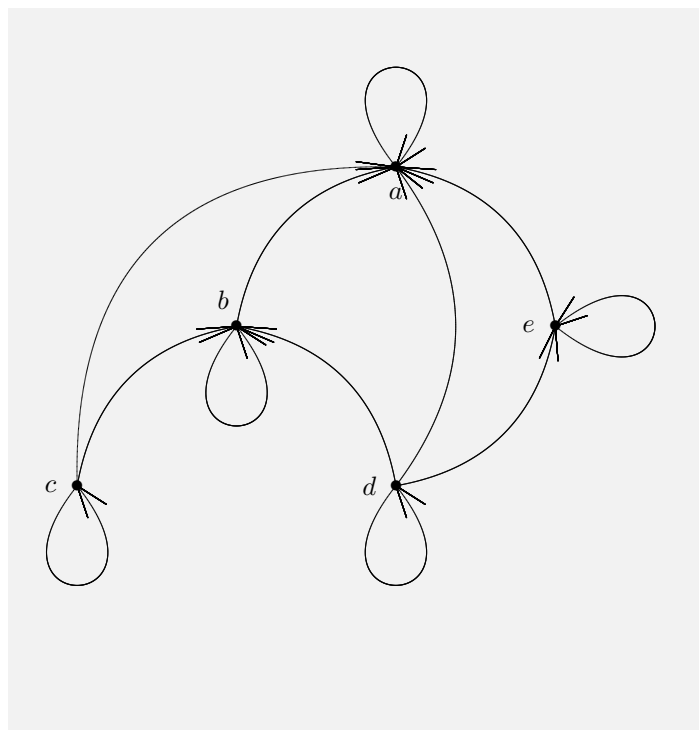
$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

y el *diagrama de Hasse* del conjunto parcialmente ordenado $\{\mathcal{P}(A), \subseteq\}$ es:

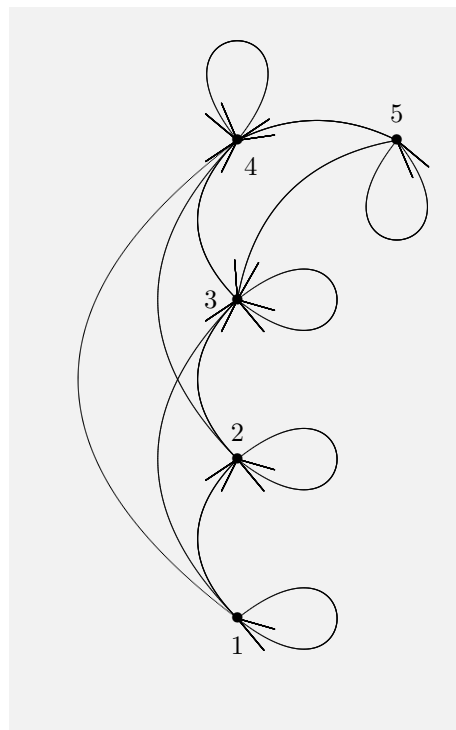


Ejemplo 7.14

Ejemplo 7.15 Determinar el diagrama de Hasse del orden dado por los grafos dirigidos de la figura:



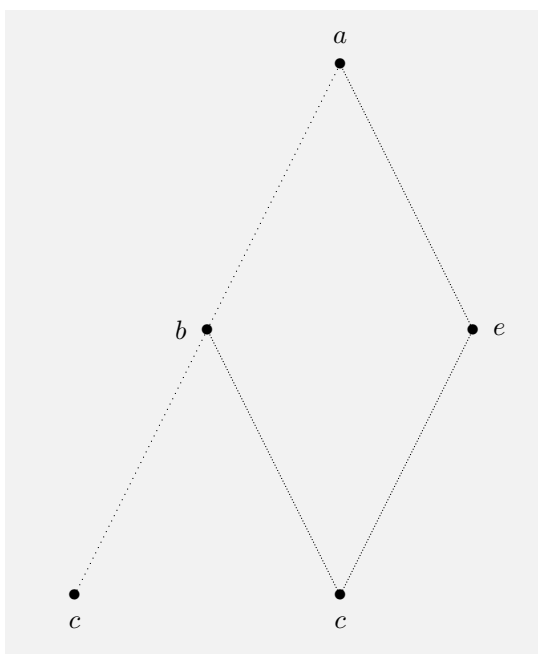
(a)



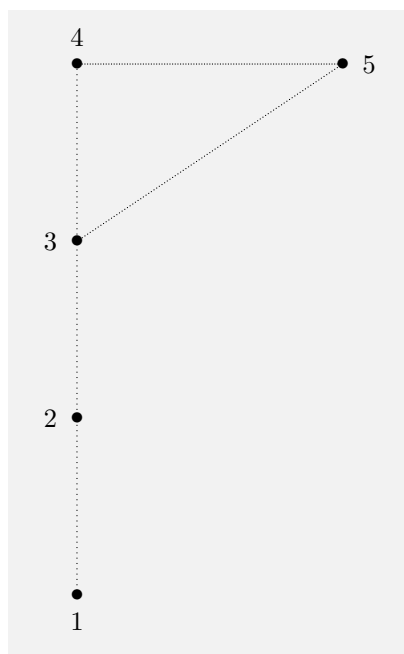
(b)

Ejemplo 7.15

Solución



(a)



(b)

Solución al ejemplo 7.15

Ejemplo 7.16 Determinar el diagrama de Hasse de las relaciones siguientes:

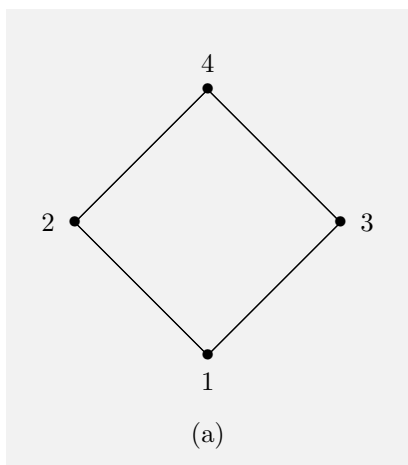
(a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 4), (1, 4), (4, 4)\}$$

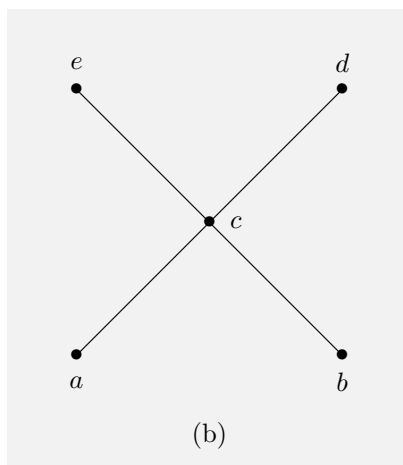
(b) $A = \{a, b, c, d, e\}$ y

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, d), (c, e), (a, d), (d, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (e, e)\}$$

Solución



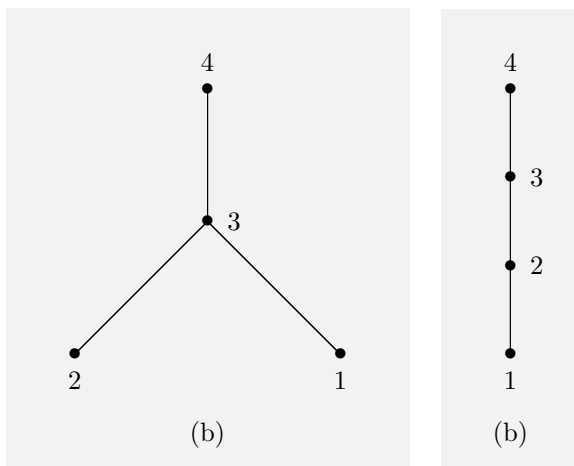
(a)



(b)

Ejemplo 7.16

Ejemplo 7.17 Describir las parejas ordenadas de la relación determinada por el siguiente diagrama de Hasse de en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$.



Ejemplo 7.17

Solución

(a)

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$$

(b)

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$$

Ejemplo 7.18 Determinar los diagramas de Hasse de las relaciones en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cuyas matrices son:

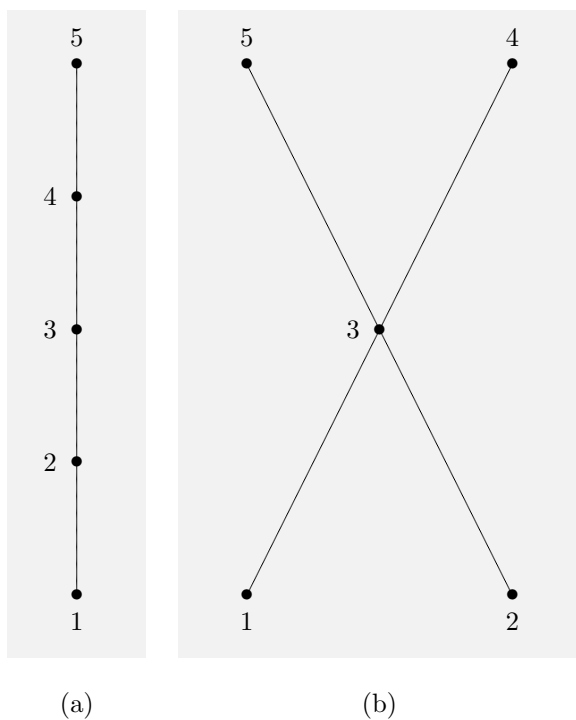
(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución



Solución al ejemplo 7.18

Ejemplo 7.19 Dibujar los diagramas de Hasse de los siguientes conjuntos ordenados por la relación de divisibilidad y determinar cuáles están totalmente ordenados.

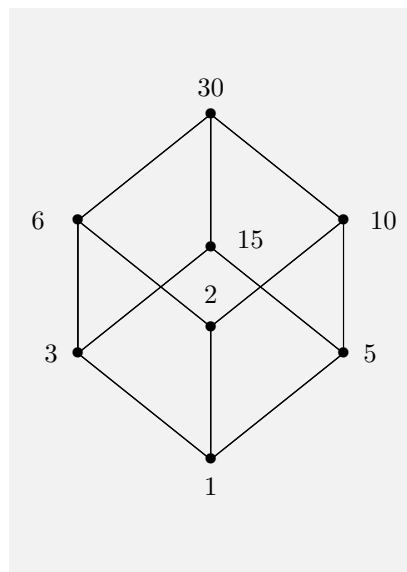
(a) $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

(b) $A = \{2, 4, 8, 16, 32\}$

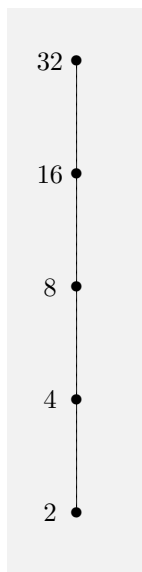
(c) $A = \{3, 6, 12, 36, 72\}$

(d) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30, 60\}$

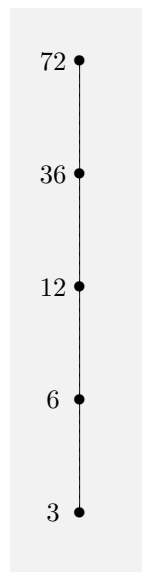
Solución



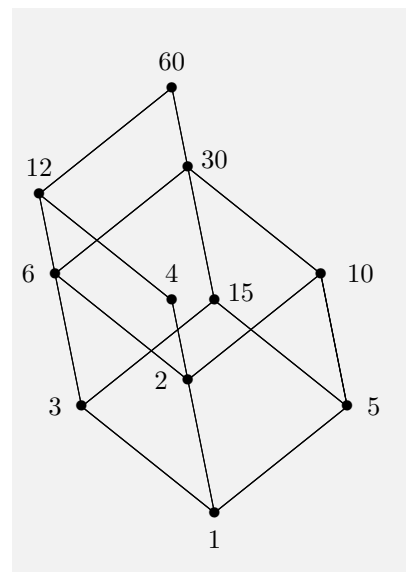
(a)



(b)



(c)



(d)

Totalmente Ordenados

Ejemplo 7.19

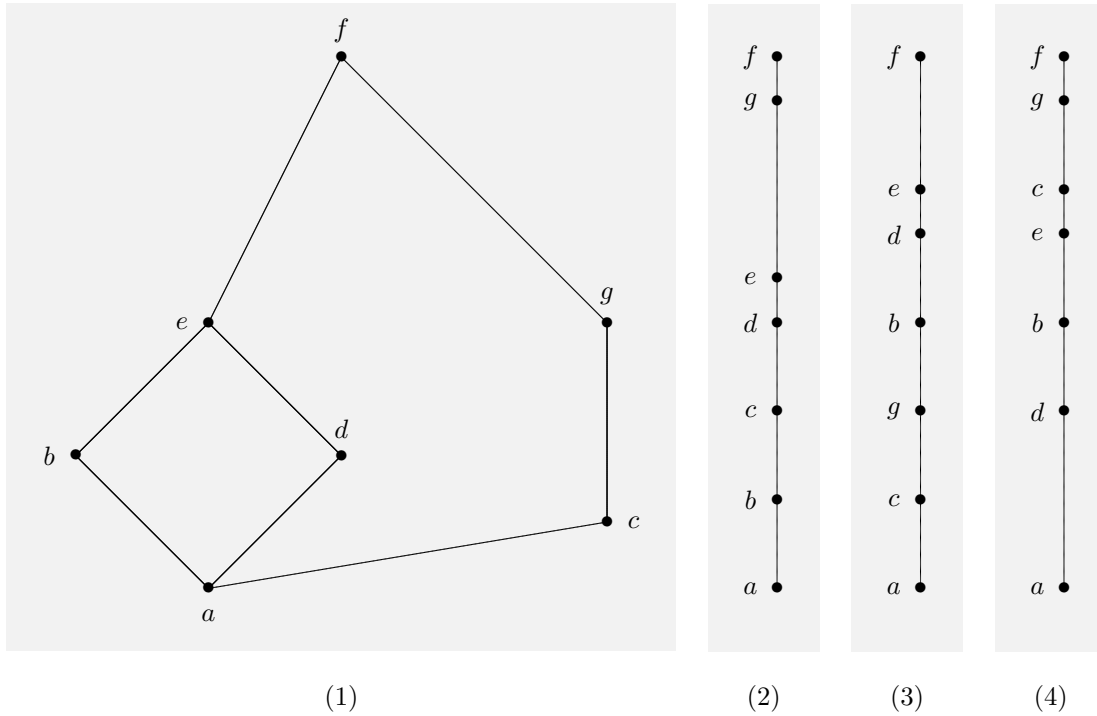
7.5 Ordenación Topológica

Si $\{A, \preceq\}$ es un conjunto parcialmente ordenado, muchas veces será necesario encontrar un orden total $<$ del conjunto A que es simplemente una extensión del orden parcial dado en el sentido de que $a \preceq b \iff a < b$.

El proceso de construcción de un orden total tal como $<$ se llama clasificación u ordenación topológica. Este problema se presenta cuando se necesita introducir un conjunto parcialmente ordenado en una computadora. Los elementos de A deberán introducirse en un orden secuencial y la introducción será de tal manera que el orden parcial se preserve. Esto es si $a \preceq b$, entonces a se introducirá antes que b . Una clasificación topológica $<$ dará un orden de entrada de los elementos que satisfagan esta condición.

Ejemplo 7.20 Obtener la ordenación topológica del conjunto parcialmente ordenado cuyo diagrama de Hasse es el (1) de la figura siguiente:

Solución



Ejemplo 7.20

El orden \prec cuyo diagrama de Hasse se muestra en la figura (2) es un orden total. Es fácil ver que cualquier par en \preceq está también en el orden \prec , por lo cual \prec es una ordenación topológica del orden parcial \preceq . Los apartados (3) y (4) en la misma figura muestran otras dos soluciones de este problema. ■

7.6 Elementos Característicos de un Conjunto Ordenado

Ciertos elementos en un conjunto ordenado son de especial importancia para muchas de las aplicaciones de esos conjuntos. Explicaremos quienes son estos elementos y posteriormente veremos el importante papel que juegan.

A lo largo de este apartado $\{A, \preceq\}$ será un conjunto ordenado y B un subconjunto suyo ($B \subseteq A$).

7.6.1 Elemento Maximal

Un elemento b de B se dice que es maximal de B , respecto de la relación \preceq , si no hay en B elemento alguno que sea estrictamente posterior a él. Es decir,

$$b \text{ es maximal} \iff \nexists x \in B : b \prec x$$

o lo que es igual

$$b \text{ es maximal} \iff \nexists x \in B : b \preceq x \wedge x \neq b$$

y una formulación equivalente sería

$$b \text{ es maximal} \iff \forall x \in B, \neg(b \preceq x) \vee x = b$$

$$\iff \forall x \in B, b \preceq x \implies x = b$$

luego b es maximal si cualquiera que sea x de B se verifica que si x es posterior a b , entonces x es igual a b .

7.6.2 Elemento Minimal

Un elemento b de B se dice que es minimal de B , respecto de la relación \preccurlyeq , si no hay en B elemento alguno que sea estrictamente anterior a él. Es decir,

$$b \text{ es minimal} \iff \nexists x \in B : x \prec b$$

o lo que es igual

$$b \text{ es minimal} \iff \nexists x \in B : x \preccurlyeq b \wedge x \neq b$$

y una formulación equivalente sería

$$\begin{aligned} b \text{ es minimal} &\iff \forall x \in B, \neg(x \preccurlyeq b) \vee x = b \\ &\iff \forall x \in B, x \preccurlyeq b \implies x = b \end{aligned}$$

luego b es minimal si cualquiera que sea x de B se verifica que si x es anterior a b , entonces x es igual a b .

7.6.3 Existencia del Maximal y Minimal

Todo conjunto ordenado finito posee, al menos, un elemento maximal y un elemento minimal.

Demostración

Sea $\{A, \preccurlyeq\}$ un conjunto ordenado con n elementos, y sea a cualquier elemento de A .

Supongamos que a no fuese maximal. Entonces existirá, al menos, un a_1 en A que lo sucede, es decir,

$$\exists a_1 \in A : a \preccurlyeq a_1$$

si a_1 no fuese maximal, razonando de la misma forma,

$$\exists a_2 \in A : a_1 \preccurlyeq a_2$$

Como A es un conjunto finito, este razonamiento no se puede continuar indefinidamente, luego obtendremos una cadena finita

$$a \preccurlyeq a_1 \preccurlyeq a_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq a_{n-1} \preccurlyeq a_n$$

que ya no puede extenderse. Por lo tanto no es posible encontrar un elemento b en A tal que $a_n \preccurlyeq b$, luego a_n es un elemento maximal del conjunto dado.

La existencia de elemento minimal se demuestra de una forma similar. ■

7.6.4 Algoritmo para la Ordenación Topológica

Dado un conjunto parcialmente ordenado, $\{A, \preccurlyeq\}$, utilizando el concepto de elemento minimal, es posible construir un algoritmo que ordene topológicamente dicho conjunto.

Recordemos que la ordenación topológica de un conjunto es un proceso mediante el cual sumergimos un orden parcial \preccurlyeq en un orden total \prec .

Esto es, dado un orden parcial \preccurlyeq , queremos encontrar un orden total \prec tal que

$$a \preccurlyeq b \implies a \prec b$$

Pues bien, veamos el algoritmo.

Sea (A, \preceq) un conjunto finito, no vacío y parcialmente ordenado. Según la proposición anterior, existirá un elemento a en A que es minimal. Situamos este elemento como el primero de (A, \prec) .

Repetimos el proceso para el conjunto parcialmente ordenado $\{A \setminus \{a\}\}$.

Cada vez que encontremos un nuevo elemento minimal, lo situamos como el siguiente en la lista que representa a (A, \prec) y el proceso se continúa hasta que A no tiene más elementos.

De esta forma obtenemos el siguiente algoritmo que produce un orden total y que llamaremos ORDENTOPO.

Si ORDENTOPO está ordenado por un índice ascendente, es decir,

$$\text{ORDENTOPO}[1] \prec \text{ORDENTOPO}[2] \prec \dots$$

entonces, la relación \prec en A definida de esta forma es una ordenación topológica de (A, \preceq)

Algoritmo ORDENTOPO

$I := 1$

$O := A$

Hacer mientras $(O \neq \emptyset)$

$\text{ORDENTOPO}[I] := a$

$I := I + 1$

$O := O \setminus \{a\}$

fin

Ejemplo 7.21 Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y el diagrama de Hasse de la figura (a) del conjunto parcialmente ordenado (A, \preceq) .

Obtener una lista de los elementos de A ordenados topológicamente mediante el algoritmo ORDENTOPO.

Solución

Los elementos minimales de (A, \preceq) son d y e . Elegimos uno de ellos, por ejemplo, el d .

$$\text{ORDENTOPO}[1] = d$$

$$O = O \setminus \{d\}$$

En el apartado (b) de la figura tenemos el diagrama de Hasse del conjunto parcialmente ordenado (O, \preceq) y la ordenación que produce el algoritmo.

Como $O \neq \emptyset$ y su elemento minimal es e , hacemos

$$\text{ORDENTOPO}[2] = e$$

$$O = O \setminus \{e\}$$

El apartado (c) de la figura muestra el diagrama de Hasse del conjunto parcialmente ordenado (O, \preceq) y la ordenación que produce ORDENTOPO.

Nuevamente es $O \neq \emptyset$ y su elemento minimal es c . Repitiendo el proceso,

$$\text{ORDENTOPO}[3] = c$$

$$O = O \setminus \{c\}$$

y el diagrama de Hasse más la ordenación que produce el algoritmo están en (d).

$O = \{a, b\}$ y los minimales de (O, \preceq) son a y b , elegimos b y

$$\text{ORDENTOPO}[4] = b$$

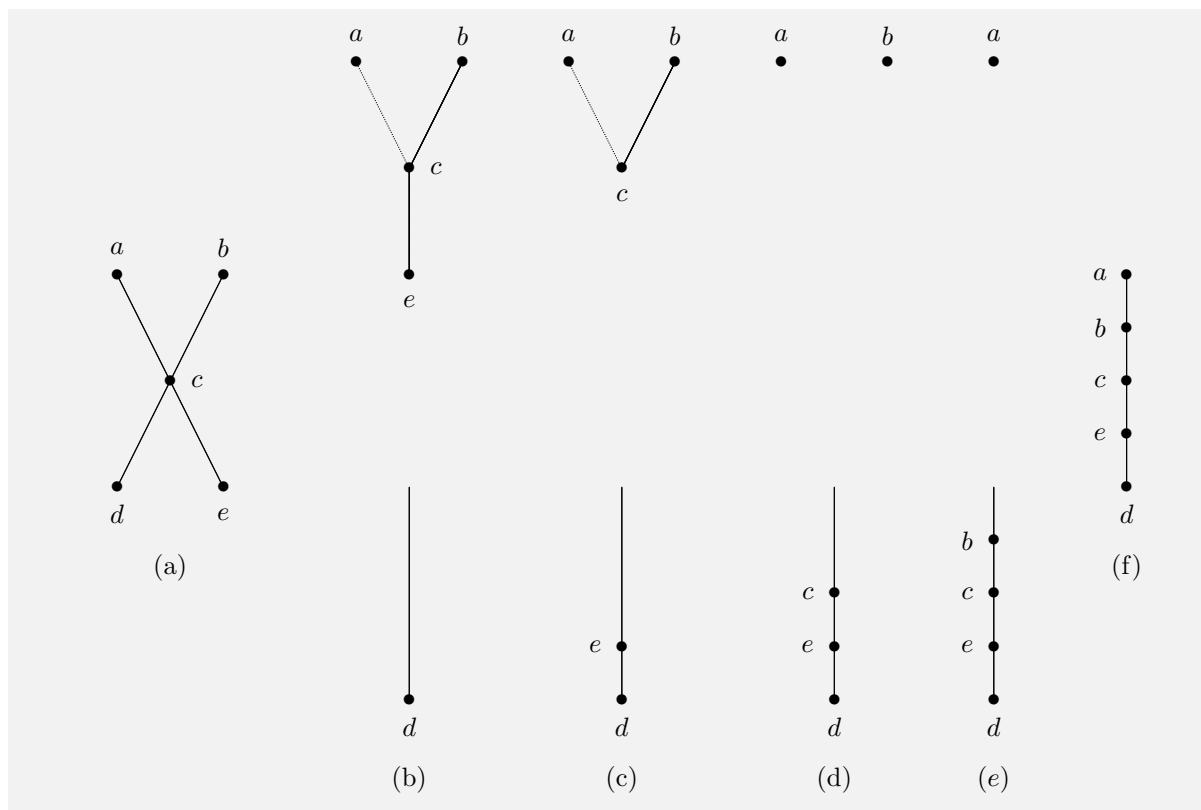
$$O = O \setminus \{b\}$$

cuya representación gráfica es el apartado (e) de la figura.

$O = \{a\}$, siendo a el minimal de (O, \preceq) . Hacemos,

$$\text{ORDENTOPO}[5] = a$$

$$O = O \setminus \{a\}$$



Ordenación Topológica

El orden definitivo y el diagrama de Hasse están en el apartado (f). El ordenamiento obtenido es una ordenación topológica de $\{A, \preceq\}$. ■

7.6.5 Elemento Máximo

Un elemento b perteneciente al subconjunto B se dice que es máximo de B , respecto de la relación \preceq , si es posterior a todos los elementos de B . Es decir,

$$b \text{ es máximo} \iff \forall x, x \in B \implies x \preceq b$$

7.6.6 Elemento Mínimo

Un elemento b perteneciente al subconjunto B se dice que es mínimo de B , respecto de la relación \preceq , si es anterior a todos los elementos de B . Es decir,

$$b \text{ es mínimo} \iff \forall x, x \in B \implies b \preceq x$$

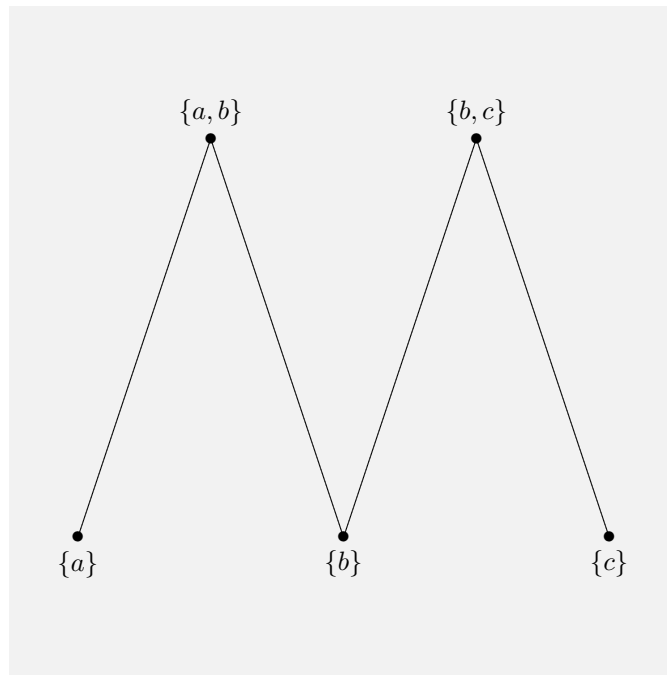
Nota 7.6 Obsérvese la diferencia que existe entre máximo y maximal y entre mínimo y minimal.

Para ser maximal sólo se necesita que no haya ningún elemento que lo suceda, mientras que para ser máximo ha de suceder y por tanto estar relacionado con todos los demás.

Un razonamiento similar explica la diferencia entre mínimo y minimal. ■

Ejemplo 7.22 Sea $C = \{a, b, c\}$, consideremos el conjunto $A = \mathcal{P}(C)$ ordenado con la relación de inclusión y el subconjunto de A ,

$$B = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}.$$



Ejemplo 7.22

Entonces, $\{a\}$, $\{b\}$ y $\{c\}$ son elementos minimales ya que no hay elemento alguno en B que sea estrictamente anterior (esté estrictamente contenido) a ellos.

$\{a, b\}$ y $\{b, c\}$ serán maximales ya que no hay elemento en B que sea estrictamente posterior (que contenga) a ellos.

El subconjunto B no tiene máximo ni mínimo ya que no hay ningún elemento que sea posterior ni anterior a todos los demás.

El diagrama de Hasse puede verse en la figura anterior.

Ejemplo 7.23 En $A = \mathbb{Z}^+$ ordenado por la relación de divisibilidad consideramos el subconjunto $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

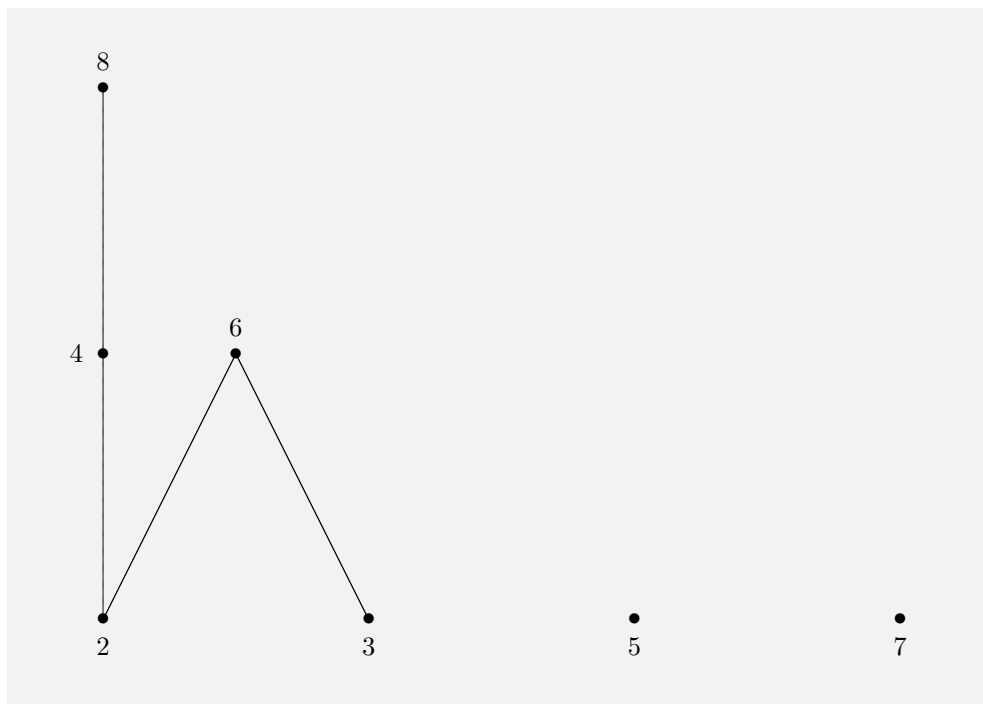
Los elementos maximales son 5, 6, 7 y 8 ya que no hay en B elementos posteriores a ellos.

2, 3, 5 y 7 son minimales ya que no existen en B elementos, distintos de ellos mismos, que los precedan.

Obsérvese que un elemento puede ser a un tiempo maximal y minimal de un conjunto, como sucede aquí con el 5 y el 7.

El subconjunto B no tiene máximo ni mínimo ya que no hay ningún elemento que sea posterior ni anterior a todos los demás.

El diagrama de Hasse puede verse en la figura siguiente:



Ejemplo 7.23

Ejemplo 7.24 Sea $A = \{\mathbb{R}, \leq\}$ donde \leq es la relación de orden usual y consideremos el subconjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}.$$

Entonces, 3 es minimal ya que no existe $x \in B$ tal que $x \leq 3$ y $x \neq 3$. Por otra parte elementos maximales no hay ya que cualquier elemento de B tiene un elemento posterior a él.

El 3 es el mínimo de B ya que pertenece a el conjunto y no hay ninguno que lo preceda. No hay ningún elemento que sea posterior a todos los demás por lo tanto el conjunto no tiene máximo. ■

Ejemplo 7.25 En el conjunto \mathbb{R} de los números reales con el orden usual, el subconjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 3\}$$

no tiene minimales, ni maximales, ni mínimo, ni máximo y el

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 3\}$$

tiene al 1 como mínimo y minimal y al 3 como máximo y maximal. ■

7.6.7 Unicidad del Máximo y el Mínimo

Todo conjunto ordenado finito posee, a lo sumo, un elemento máximo y uno mínimo.

Demostración

En efecto, supongamos que un conjunto ordenado $\{A, \preceq\}$ tiene dos elementos m_1 y m_2 que son máximos, entonces

$$\left. \begin{array}{l} m_1, \text{ máximo} \\ m_2 \in A \end{array} \right\} \implies m_2 \preceq m_1$$

Por otra parte,

$$\left. \begin{array}{l} m_2, \text{ máximo} \\ m_1 \in A \end{array} \right\} \implies m_1 \preceq m_2$$

luego por la antisimetría,

$$m_1 = m_2$$

y el máximo, si existe, es único.

De una forma similar se prueba que el mínimo de un conjunto ordenado, si existe, es único. ■

7.6.8 Cota Superior

El elemento a de A se dice que es cota superior de B , subconjunto de A , si es posterior a todos los elementos de B ; es decir,

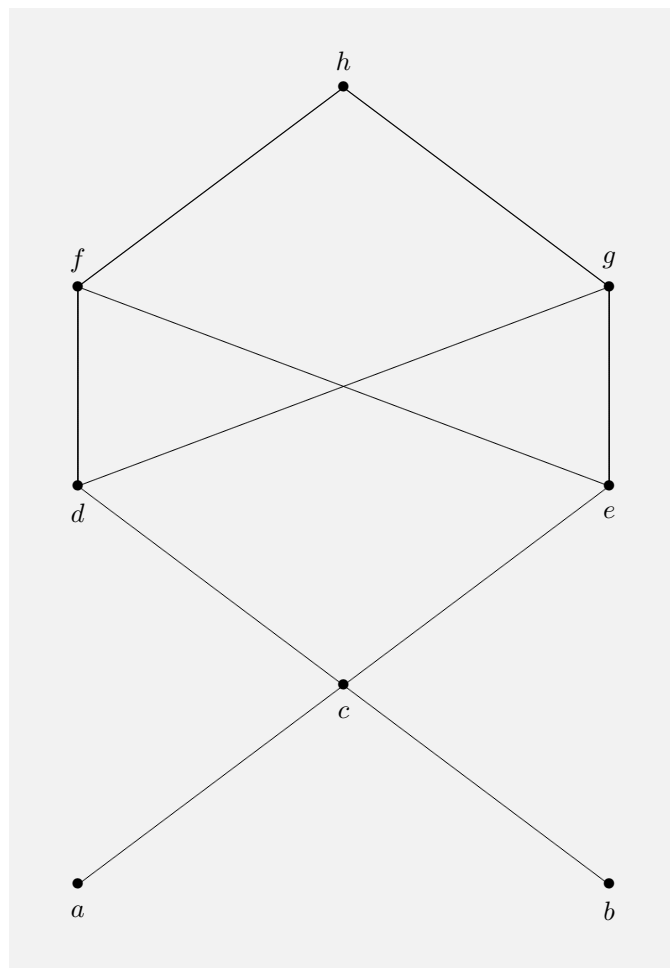
$$a \text{ es cota superior de } B \subseteq A \iff \forall x, x \in B \implies x \preceq a$$

7.6.9 Cota Inferior

El elemento a de A se dice que es cota inferior de B , subconjunto de A , si es anterior a todos los elementos de B ; es decir,

$$a \text{ es cota superior de } B \subseteq A \iff \forall x, x \in B \implies a \preceq x$$

Ejemplo 7.26



Ejemplo 7.26

Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y la figura anterior, el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $\{A, \preceq\}$. Encontrar todas las cotas superiores e inferiores de los subconjuntos de A ,

- (a) $B_1 = \{a, b\}$
- (b) $B_2 = \{c, d, e\}$

Solución

- (a) $B_1 = \{a, b\}$

No tiene cotas inferiores.

Las cotas superiores son c, d, e, f, g y h .

- (b) $B_2 = \{c, d, e\}$

Las cotas inferiores son a, b y c .

Las cotas superiores son f, g y h .

Obsérvese que un subconjunto B de un conjunto ordenado A puede tener o no cotas superiores o inferiores en A . Además una cota superior o inferior de B podrá o no pertenecer a B . ■

7.6.10 Conjunto Acotado

Cuando un conjunto tiene cota inferior se dice que está acotado inferiormente y acotado superiormente cuando tiene cota superior. Cuando un conjunto posee ambas cotas se dice que está acotado.

7.6.11 Supremo

Sea B un subconjunto de A . El elemento $a \in A$ se dice que es el supremo o cota superior mínima de B en A si se verifica

1. a es una cota superior de B en A .
2. Si a' es otra cota superior de B en A , entonces $a \preceq a'$.

7.6.12 Ínfimo

Sea B un subconjunto de A . El elemento $a \in A$ se dice que es el ínfimo o cota inferior máxima de B en A si se verifica

1. a es una cota inferior de B en A .
2. Si a' es otra cota inferior de B en A , entonces $a' \preceq a$.

Ejemplo 7.27 Encontrar el supremo y el ínfimo en el ejemplo 7.26 para los subconjuntos de A ,

- (a) $B_1 = \{a, b\}$
- (b) $B_2 = \{c, d, e\}$

Solución

- (a) $B_1 = \{a, b\}$

Ínfimo. Según vimos en el citado ejemplo, B_1 no tenía cotas inferiores, luego tampoco tendrá cota inferior máxima, es decir, no tiene ínfimo.

El supremo es c ya que precede a todas las cotas superiores de B_1 .

- (b) $B_2 = \{c, d, e\}$

El ínfimo es c ya que sucede a todas las cotas inferiores de B_2 .

Supremo no tiene ya que al no ser comparables los elementos f y g , no hay ninguna cota superior que preceda a todas las demás. ■

7.6.13 Unicidad del Ínfimo y el Supremo

Todo conjunto ordenado finito posee, a lo sumo, un ínfimo y un supremo.

Demostración

En efecto, supongamos que un conjunto ordenado $\{A, \preceq\}$ tiene dos elementos s_1 y s_2 que son supremos, entonces

$$\left. \begin{array}{l} s_1, \text{ supremo} \\ s_2 \in A \end{array} \right\} \implies s_2 \preceq s_1$$

Por otra parte,

$$\left. \begin{array}{l} s_2, \text{ supremo} \\ s_1 \in A \end{array} \right\} \Rightarrow s_1 \preccurlyeq s_2$$

luego por la antisimetría,

$$s_1 = s_2$$

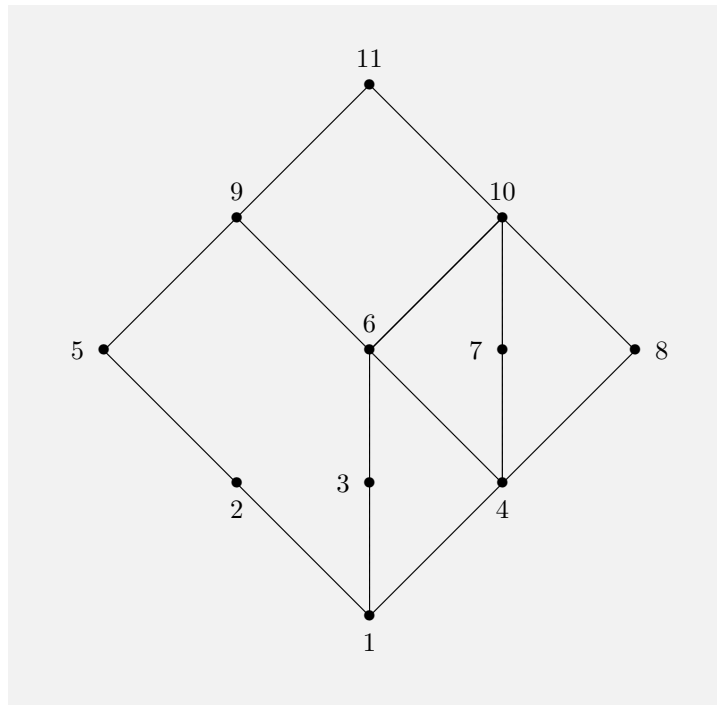
y el supremo, si existe, es único.

De una forma similar se prueba que el ínfimo de un conjunto ordenado, si existe, es único. ■

Nota 7.7 Sea $\{A, \preccurlyeq\}$ un conjunto ordenado y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ un subconjunto suyo. Observemos lo siguiente:

- Si a es el supremo, entonces a es el primer vértice que puede alcanzarse siguiendo una trayectoria ascendente desde b_1, b_2, \dots, b_k .
- Si a es el ínfimo, entonces a es el último vértice que puede alcanzarse siguiendo una trayectoria descendente desde b_1, b_2, \dots, b_k . ■

Ejemplo 7.28 Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ un conjunto ordenado cuyo diagrama de Hasse está en la figura. Encontrar el supremo y el ínfimo de $B = \{6, 7, 10\}$.



Ejemplo 7.28

Solución

Siguiendo una trayectoria ascendente desde los vértices 6, 7 y 10, el primer vértice que se encuentra es el 10, luego el supremo es el 10.

De la misma forma, explorando todas las trayectorias descendentes desde 6, 7 y 10, encontramos que el ínfimo es el 4. ■

Ejemplo 7.29 En el conjunto \mathbb{Z}^+ se define la relación $a \mathcal{R} b \iff a$ divide a b .

- (a) Demostrar que es de orden. ¿Es de orden total?
- (b) Encontrar los elementos característicos de los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ y } B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

ordenados por esta relación.

- (c) Dibujar un diagrama de Hasse para ambos conjuntos.

Solución

La relación de divisibilidad se expresa en los siguientes términos.

$$a\mathcal{R}b \iff a \text{ divide a } b \ (a|b) \iff \exists k \in \mathbb{Z}^+ / b = a \cdot k$$

Obsérvese que $a|b$ equivale a decir que a es un divisor de b o que b es un múltiplo de a .

- (a) Veamos que es de orden.

Reflexiva. Dado cualquier $a \in \mathbb{Z}^+$, se verifica que $a = a \cdot 1$, luego $a|a$, es decir $a\mathcal{R}a$.

Antisimétrica. Dados a y b , cualesquiera de \mathbb{Z}^+ , tendremos

$$\left. \begin{array}{l} a\mathcal{R}b \iff a|b \iff \exists k_1 \in \mathbb{Z}^+ : b = a \cdot k_1 \\ \wedge \\ b\mathcal{R}a \iff b|a \iff \exists k_2 \in \mathbb{Z}^+ : a = b \cdot k_2 \end{array} \right\} \implies b = b \cdot k_2 \cdot k_1 \implies k_2 \cdot k_1 = 1 \iff k_1 = k_2 = 1$$

luego, $a = b$.

Transitiva. Dados tres elementos arbitrarios de \mathbb{Z}^+ , a, b y c , tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} a\mathcal{R}b \iff a|b \iff \exists k_1 \in \mathbb{Z}^+ : b = a \cdot k_1 \\ \wedge \\ b\mathcal{R}c \iff b|c \iff \exists k_2 \in \mathbb{Z}^+ : c = b \cdot k_2 \end{array} \right\} \implies c = a \cdot k_1 \cdot k_2 : k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{Z}^+ \implies a|c \iff a\mathcal{R}c$$

La relación es de orden, pero no es total como prueba la existencia de elementos no comparables por la relación. En efecto, el 3 y el 5 no son comparables ya que ni 3 divide a 5 ni 5 divide a 3.

- (b) Determinemos los elementos característicos de A y B .

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Elementos maximales.

Recordemos que $a \in A$ es maximal si no existe en A ningún elemento que lo suceda. En este caso podemos decir, por tanto, que $a \in A$ es maximal si no es divisor de ningún elemento de A , luego los maximales son 5, 6, 7, 8 y 9.

Elementos minimales.

El elemento $a \in A$ es minimal si no existe en A ningún elemento que lo preceda. En este caso podemos decir, por tanto, que $a \in A$ es minimal si no es múltiplo de ningún elemento de A , luego el único minimal es el 1.

Máximo.

Un elemento $a \in A$ es máximo si sucede a todos los elementos de A . Por tanto, en este caso $a \in A$ es máximo si es múltiplo de todos los elementos de A . En el conjunto propuesto, obviamente, no hay máximo.

Mínimo.

Un elemento $a \in A$ es mínimo si precede a todos los elementos de A . Por tanto, en este caso, $a \in A$ es mínimo si es divisor de todos los elementos de A . El mínimo es, consecuentemente, el 1.

Cotas superiores.

Un elemento $a \in \mathbb{Z}^+$ es cota superior del conjunto A si sucede a todos los elementos de A . Consecuentemente, en este caso, $a \in \mathbb{Z}^+$ es cota superior si es múltiplo de todos los elementos de A . Por lo tanto, son cotas superiores de A el mínimo común múltiplo de 5, 6, 7, 8 y 9 y todos sus múltiplos. Es decir,

$$\text{Cotas superiores} = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x = 2520 \cdot k, k \in \mathbb{Z}^+\}$$

Cotas inferiores.

Un elemento $a \in \mathbb{Z}^+$ es cota inferior del conjunto A si precede a todos los elementos de A . Consecuentemente, en este caso, $a \in \mathbb{Z}^+$ es cota inferior si es divisor de todos los elementos de A . Por lo tanto, la única cota inferior del conjunto A es el 1.

Supremo.

El elemento $a \in \mathbb{Z}^+$ es el supremo del conjunto A si es cota superior y precede a todas las demás cotas superiores. En este caso, podemos decir que $a \in \mathbb{Z}^+$ es el supremo de A si divide a todas las cotas superiores, luego es el mínimo común múltiplo de 5, 6, 7, 8 y 9, es decir, 2520.

Ínfimo.

El elemento $a \in \mathbb{Z}^+$ es el ínfimo del conjunto A si es cota inferior y sucede a todas las demás cotas inferiores. En este caso, podemos decir que $a \in \mathbb{Z}^+$ es el ínfimo de A si es múltiplo de todas las cotas inferiores. Dado que sólo hay una cota inferior, ella será el ínfimo, es decir, el 1.

Veamos ahora los elementos característicos de

$$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Elementos maximales. El 36.

Elementos minimales. El 1.

Máximo. El 36.

Mínimo. El 1.

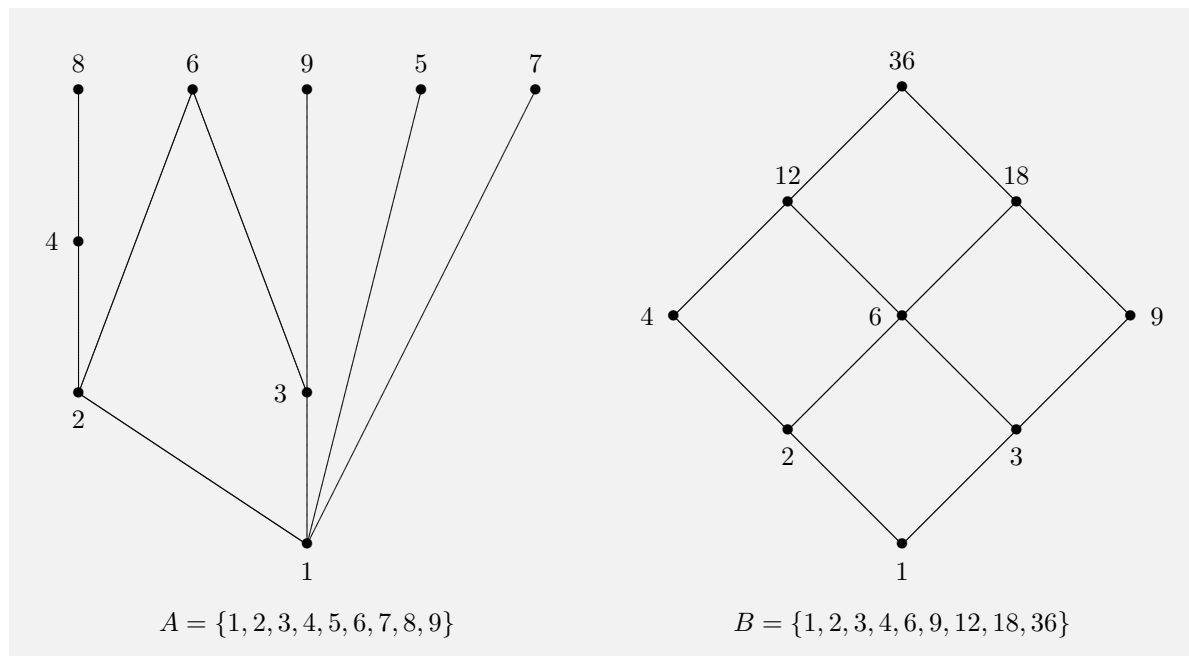
Cotas superiores. $\{x \in \mathbb{Z}^+ : x = 36 \cdot k, k \in \mathbb{Z}^+\}$

Cotas inferior. El 1.

Supremo. El 36.

Ínfimo. El 1.

(c) Los diagramas de Hasse se muestran en la figura.



Ejemplo 7.29

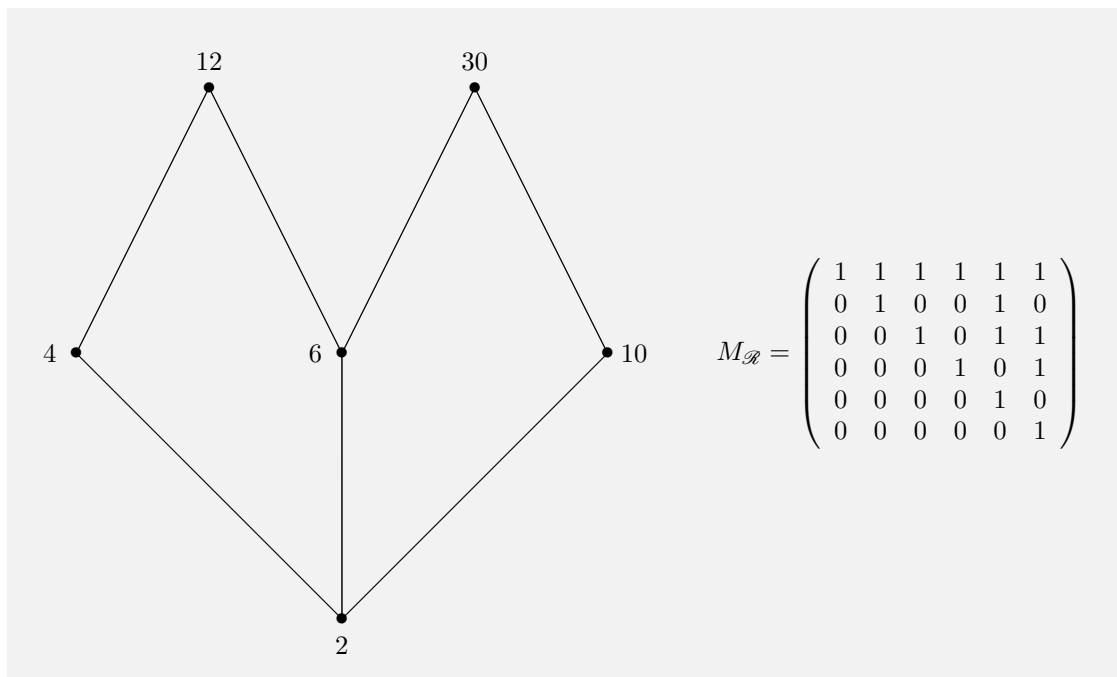
Ejemplo 7.30 Dado el conjunto $B = \{2, 4, 6, 10, 12, 30\}$, se define en él la siguiente relación:

$$x\mathcal{R}y \iff x \text{ divide a } y$$

- (a) Demostrar que es una relación de orden. ¿Es total o parcial?
- (b) Dibujar el diagrama de Hasse y hallar la matriz asociada a la relación.
- (c) Dado $C = \{4, 6\}$, subconjunto de B , hallar sus elementos característicos.

Solución

- (a) La relación es de orden parcial. Ver ejemplo 7.29.
- (b) El diagrama de Hasse y la matriz de la relación se muestra en la figura siguiente:



Ejemplo 7.30

(c) Veamos los elementos característicos de $C = \{4, 6\}$.

Razonando igual que en el ejemplo 7.29,

Elementos maximales. El 4 y el 6.

Elementos minimales. El 4 y el 6.

Máximo. No tiene.

Mínimo. No tiene.

Cotas superiores. El 12.

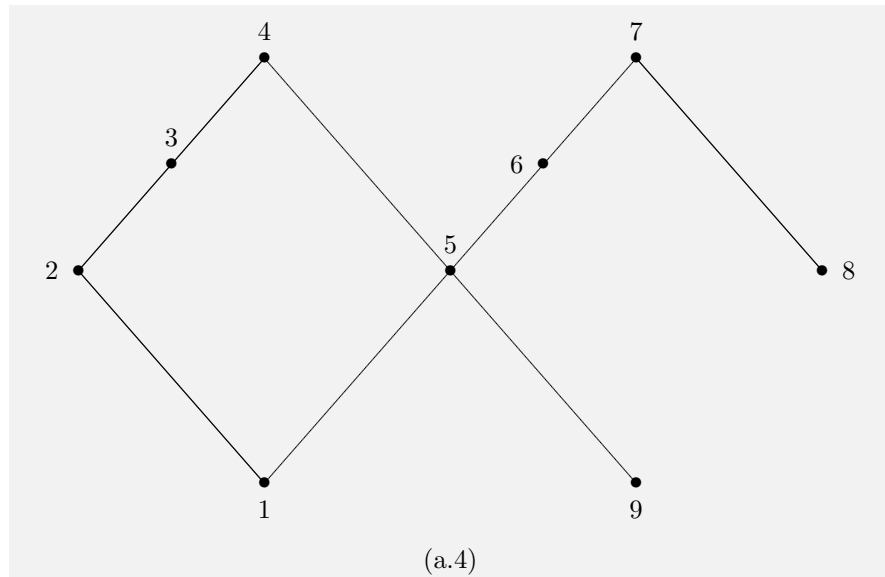
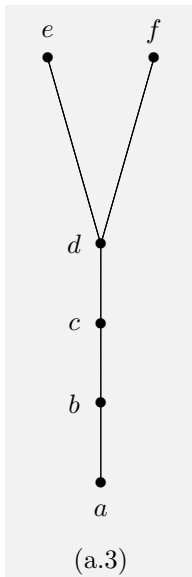
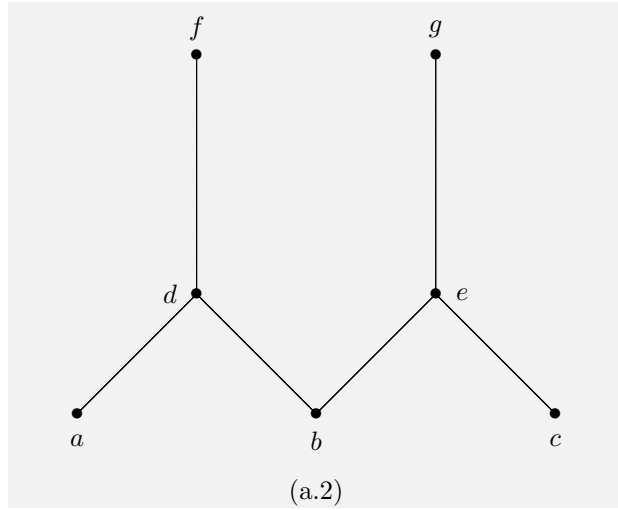
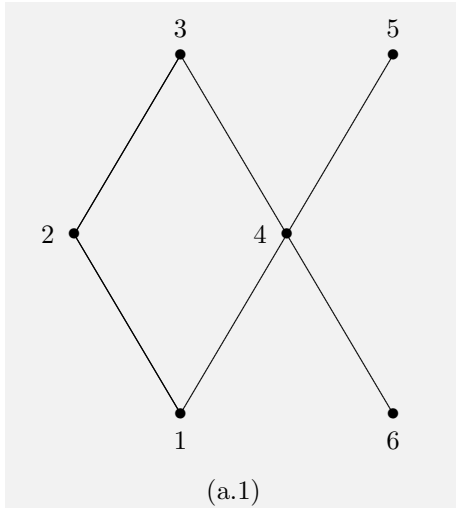
Cotas inferiores. El 2.

Supremo. El 12

Ínfimo. El 2. ■

Ejemplo 7.31 Determinar los elementos maximales y minimales de los siguientes conjuntos ordenados.

(a) Figura siguiente.



Ejemplo 7.31(a)

(b) \mathbb{R} con el orden usual, \leq .

(c) $A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ y } 0 \leq x < 1\}$ con el orden usual \leq .

(d) $A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ y } 0 < x \leq 1\}$ con el orden usual \leq .

(e) $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 24, 48\}$ con el orden de divisibilidad.

Solución

Recordemos que si $\{A, \preccurlyeq\}$ es un conjunto ordenado, entonces

$$a \in A \text{ es maximal} \iff \nexists x \in A : a \preccurlyeq x$$

$$b \in A \text{ es minimal} \iff \nexists x \in A : x \preccurlyeq b$$

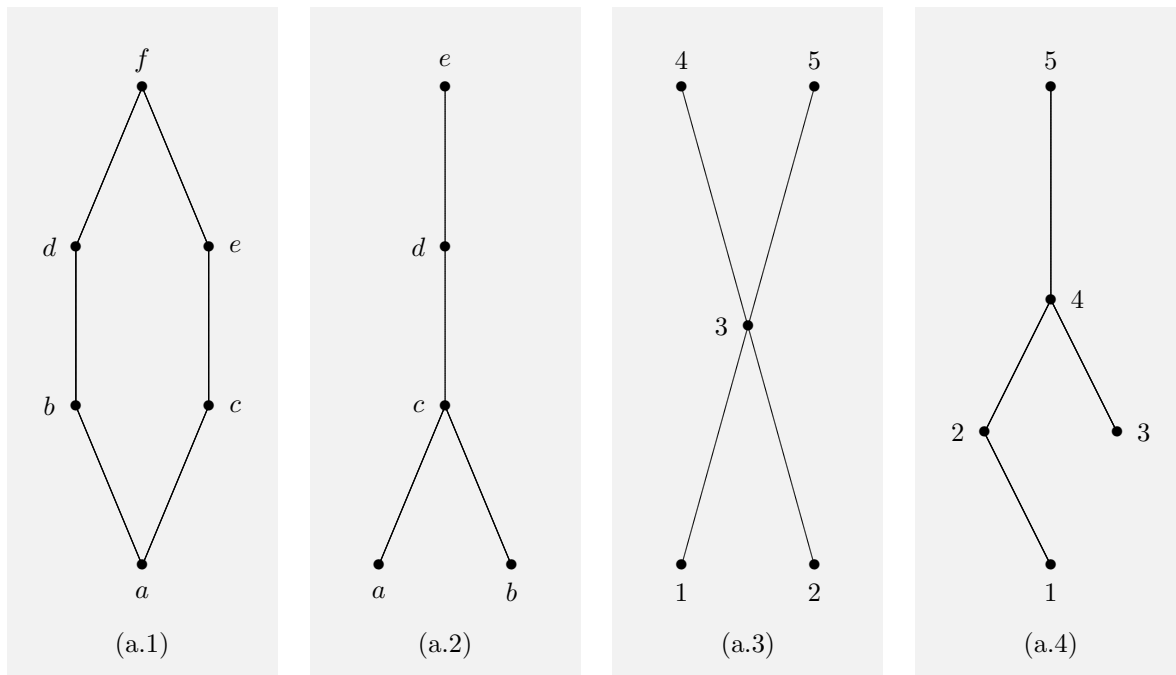
(a) Según la figura,

(a.1) Los maximales son el 3 y el 5 y los minimales el 1 y el 6.

- (a.2) f y g son los maximales y a, b, c los minimales.
- (a.3) Los maximales son el e y f y minimal el a .
- (a.4) Los maximales son el 4 y el 7, siendo los minimales 1,9 y 8.
- (b) Todo número real está precedido y seguido por otro número real, luego el conjunto ordenado $\{\mathbb{R}, \leq\}$ no tiene maximal ni minimal.
- (c) $A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ y } 0 \leq x < 1\}$ con el orden usual \leq .
 Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$x \in A \iff 0 \leq x < 1 \iff x \in [0, 1)$$
 es decir, $A = [0, 1)$ y este conjunto no tiene maximal ya que el 1 no pertenece al mismo. El cero es minimal ya que no existe en A ningún número que lo preceda.
- (d) $A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ y } 0 < x \leq 1\}$ con el orden usual \leq .
 Razonando igual que en el apartado anterior, $A = (0, 1]$ y en este caso ocurre todo lo contrario, es decir, el 1 es maximal de $\{A, \leq\}$ y no tiene minimal.
- (e) $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 24, 48\}$ con el orden de divisibilidad.
 El maximal es el 48 y los minimales 2 y 3. ■

Ejemplo 7.32 Determinar los elementos máximo y mínimo, si existen, de los siguientes conjuntos ordenados.



Ejemplo 7.32(a)

- (a) Figura anterior.
- (b) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ con el orden usual \leq .
- (c) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ con el orden usual \leq .
- (d) $A = \{2, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 36, 72\}$ con el orden parcial de divisibilidad.

(e) $A = \{2, 3, 4, 6, 12, 18, 24, 36\}$ con el orden parcial de divisibilidad.

Solución

Recordemos que si $\{A, \preceq\}$ es un conjunto ordenado, entonces

$$a \in A \text{ es máximo} \iff \forall x \in A, x \preceq a$$

$$b \in A \text{ es mínimo} \iff \forall x \in A, b \preceq x$$

(a) Según la figura,

(a.1) El máximo es f y el mínimo, a .

(a.2) e es el máximo y mínimo no tiene.

(a.3) No tiene máximo ni mínimo.

(a.4) El máximo es el cinco y no tiene mínimo.

(b) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ con el orden usual \leq .

$A = (0, 1)$, luego $\{A, \leq\}$ no tiene máximo ni mínimo ya que ni el cero ni el uno pertenecen al conjunto.

(c) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ con el orden usual \leq .

$A = [0, 1]$, luego el máximo y el mínimo de $\{A, \leq\}$ son, respectivamente, 0 y 1.

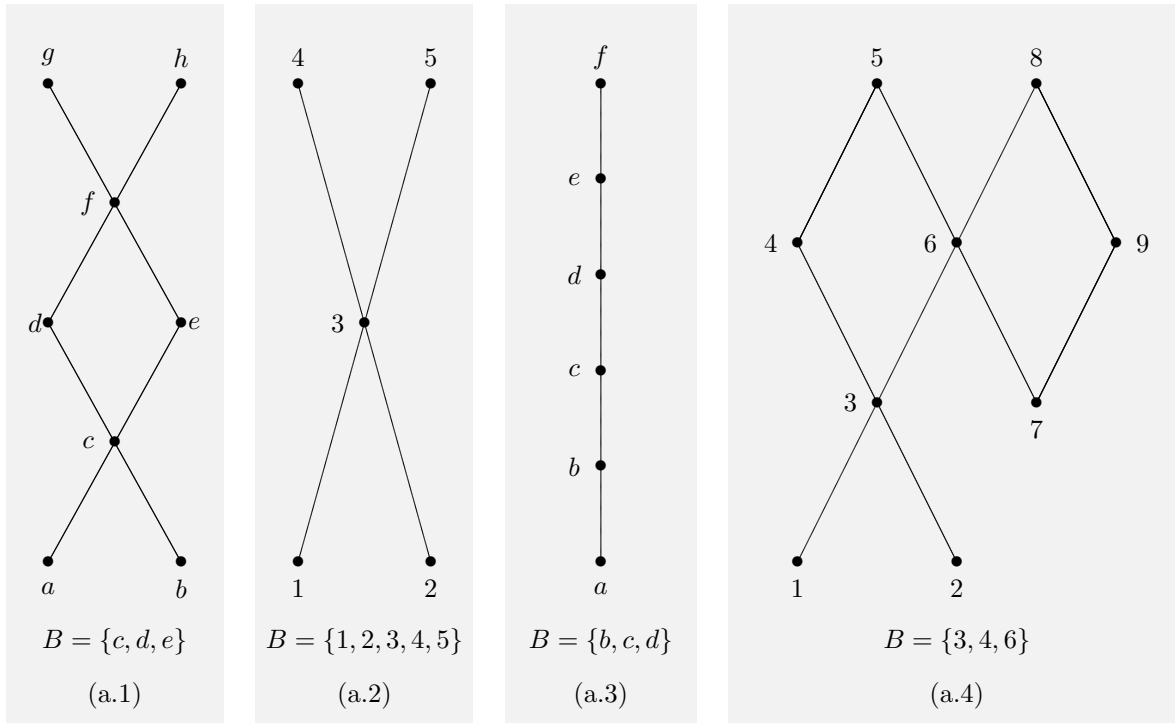
(d) $A = \{2, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 36, 72\}$ con el orden parcial de divisibilidad.

El máximo de $\{A, \preceq\}$ es 72 ya que sucede a todos los elementos de A y el mínimo el 2.

(e) $A = \{2, 3, 4, 6, 12, 18, 24, 36\}$ con el orden parcial de divisibilidad.

El conjunto ordenado $\{A, \preceq\}$ siendo \preceq la relación de divisibilidad no tiene máximo ni mínimo. ■

Ejemplo 7.33



Ejemplo 7.33(a)

Encontrar en los siguientes conjuntos ordenados las cotas superiores, las cotas inferiores, el ínfimo y el supremo del subconjunto B que se indica.

- (a) Figura anterior.
- (b) $\{A, \preceq\}$ es el conjunto ordenado del apartado (a.1) y $B = \{b, g, h\}$.
- (c) $\{A, \preceq\}$ es el conjunto ordenado del apartado (a.4) y $B = \{4, 6, 9\}$.
- (d) $\{A, \preceq\}$ es el conjunto ordenado del apartado (a.4) y $B = \{3, 4, 8\}$.
- (e) $\{\mathbb{R}, \leq\}$, donde \leq denota el orden usual y $B = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ y } 1 < x < 2\}$
- (f) $\{\mathbb{R}, \leq\}$, donde \leq denota el orden usual y $B = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ y } 1 \leq x < 2\}$
- (g) $\{\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq\}$ y $B = \mathcal{P}(\{a, b\})$
- (h) $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 48\}$ ordenado por la relación de divisibilidad y $B = \{4, 6, 12\}$.

Solución

- (a) Según la figura,
 - (a.1) $B = \{c, d, e\}$
 - Cotas superiores de B : f, g y h .
 - Cotas inferiores de B : c, a y b .
 - Supremo: f .
 - Ínfimo: c .
 - (a.2) $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 - Cotas superiores de B : 4 y 5.
 - Cotas inferiores de B : 1 y 2.
 - Supremo: no tiene.
 - Ínfimo: no tiene.
 - (a.3) $B = \{b, c, d\}$
 - Cotas superiores de B : d, e y f .
 - Cotas inferiores de B : a y b .
 - Supremo: d .
 - Ínfimo: b .
 - (a.4) $B = \{3, 4, 6\}$
 - Cotas superiores de B : 5 y 8.
 - Cotas inferiores de B : 1, 2 y 3.
 - Supremo: no existe.
 - Ínfimo: 3.
- (b) $\{A, \preceq\}$ es el conjunto ordenado del apartado (a.1) y $B = \{b, g, h\}$.
 - Cotas superiores de B : g y h .
 - Cota inferior de B : b .
 - Supremo: no existe.
 - Ínfimo: b .
- (c) $\{A, \preceq\}$ es el conjunto ordenado del apartado (a.4) y $B = \{4, 6, 9\}$.
 - Cotas superiores de B : 5 y 8.

Cotas inferiores de B : 1, 2, 3 y 7.

Supremo: no existe.

Ínfimo: no existe.

- (d) $\{A, \preceq\}$ es el conjunto ordenado del apartado (a.4) y $B = \{3, 4, 8\}$.

Cotas superior de B : 8.

Cotas inferiores de B : 3, 1 y 2.

Supremo: 8.

Ínfimo: no existe.

- (e) $\{\mathbb{R}, \leq\}$, donde \leq denota el orden usual y $B = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ y } 1 < x < 2\}$

Cotas superiores de B : $x \in \mathbb{R} : x \geq 2$, es decir, $[2, \infty)$.

Cotas inferiores de B : $x \in \mathbb{R} : x \leq 1$, es decir, $(-\infty, 1]$.

Supremo: el 2.

Ínfimo: el 1.

- (f) $\{\mathbb{R}, \leq\}$, donde \leq denota el orden usual y $B = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ y } 1 \leq x < 2\}$

Cotas superiores de B : $x \in \mathbb{R} : x \geq 2$, es decir, $[2, \infty)$.

Cotas inferiores de B : $x \in \mathbb{R} : x \leq 1$, es decir, $(-\infty, 1]$.

Supremo: el 2.

Ínfimo: el 1.

- (g) $\{\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq\}$ y $B = \mathcal{P}(\{a, b\})$

Cotas superiores de B : $\{a, b\}$ y $\{a, b, c\}$.

Cota inferior de B : el conjunto vacío, \emptyset .

Supremo: $\{a, b\}$.

Ínfimo: el conjunto vacío, \emptyset .

- (h) $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 48\}$ ordenado por la relación de divisibilidad y $B = \{4, 6, 12\}$.

Cotas superior de B : 12, 24 y 48.

Cota inferior de B : 2.

Supremo: 12.

Ínfimo: 2.

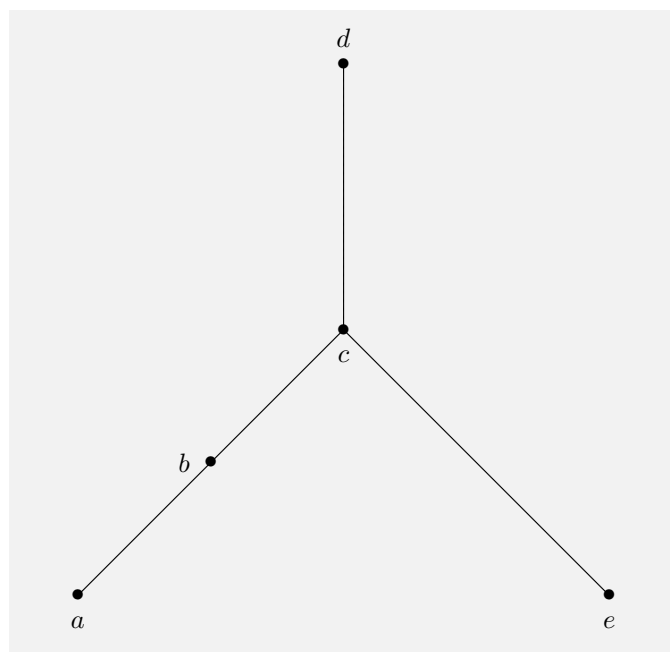
Ejemplo 7.34 Dada la siguiente matriz de una relación \mathcal{R} en el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar el diagrama de Hasse y los elementos característicos.

Solución

El diagrama de Hasse se muestra en la figura siguiente.



Ejemplo 7.34

Veamos los elementos característicos.

Elementos maximales. d .

Elementos minimales. a y e .

Máximo. d

Mínimo. No tiene.

Cotas superiores. d .

Cotas inferiores. No hay.

Supremo. d .

Ínfimo. No tiene.



Ejemplo 7.35 En el conjunto \mathbb{C} de los números complejos se define la relación:

$$(a + bi)\mathcal{R}(c + di) \iff \begin{cases} a < c \\ \text{ó} \\ a = c \text{ y } b \leq d \end{cases}$$

(a) Demostrar que es de orden.

(b) Dibujar el diagrama de Hasse para el siguiente conjunto ordenado por la relación anterior

$$A = \{1, 1 + i, 3 - 4i, 1 - i, 4i\}$$

y hallar dos cotas superiores y dos inferiores de este conjunto, así como los restantes elementos característicos del mismo.

Solución

(a) Veamos que es de orden.

Reflexiva. Para todo número complejo $a + bi$ se verifica que $a = a$ y $b = b$, luego $(a + bi)\mathcal{R}(a + bi)$.

Antisimétrica. Sean $a + bi$ y $c + di$ dos números complejos cualesquiera, entonces:

$$\begin{aligned} (a + bi)\mathcal{R}(c + di) &\iff \left\{ \begin{array}{l} a < c \\ \vee \\ a = c \wedge b \leq d \end{array} \right\} \\ \wedge \\ (c + di)\mathcal{R}(a + bi) &\iff \left\{ \begin{array}{l} c < a \\ \vee \\ c = a \wedge d \leq b \end{array} \right\} \end{aligned} \implies \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a < c \\ \wedge \\ c < a \end{array} \right\} \text{ Imposible} \\ \vee \\ \left\{ \begin{array}{l} a < c \\ \wedge \\ c = a \wedge d \leq b \end{array} \right\} \text{ Imposible} \\ \vee \\ \left\{ \begin{array}{l} a = c \wedge b \leq d \\ \wedge \\ c < a \end{array} \right\} \implies \text{ Imposible} \\ \vee \\ \left\{ \begin{array}{l} a = c \wedge b \leq d \\ \wedge \\ c = a \wedge d \leq b \end{array} \right\} \implies a = c \wedge b = d \end{array} \right.$$

de donde se sigue que $a = c$ y $b = d$, luego $a + bi = c + di$.

Transitiva. Sean $a + bi$, $c + di$ y $e + fi$ tres números complejos cualesquiera, entonces

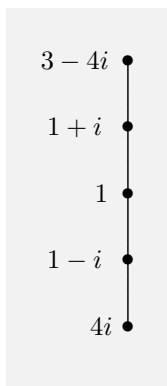
$$\begin{aligned} (a + bi)\mathcal{R}(c + di) &\iff \left\{ \begin{array}{l} a < c \\ \vee \\ a = c \wedge b \leq d \end{array} \right\} \\ \wedge \\ (c + di)\mathcal{R}(e + fi) &\iff \left\{ \begin{array}{l} c < e \\ \vee \\ c = e \wedge d \leq f \end{array} \right\} \end{aligned} \implies \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a < c \\ \wedge \\ c < e \end{array} \right\} \iff a < e \text{ {Orden estricto}} \\ \vee \\ \left\{ \begin{array}{l} a < c \\ \wedge \\ c = e \wedge d \leq f \end{array} \right\} \iff a < e \wedge d \leq f \\ \vee \\ \left\{ \begin{array}{l} a = c \wedge b \leq d \\ \wedge \\ c < e \end{array} \right\} \iff a < e \wedge b \leq d \\ \vee \\ \left\{ \begin{array}{l} a = c \wedge b \leq d \\ \wedge \\ c = e \wedge d \leq f \end{array} \right\} \iff a = e \wedge b \leq f \end{array} \right.$$

y de aquí se sigue que

$$\left\{ \begin{array}{l} a < e \\ \vee \\ a = e \wedge b \leq f \end{array} \right.$$

luego $(a + bi)\mathcal{R}(e + fi)$.

(b) Diagrama de Hasse y elementos característicos pedidos.



Dos cotas superiores de A : $4 - 4i$ y $3 - 3i$.

Dos cotas inferiores de A : $-1 + 4i$ y $3i$.

Maximal: $3 - 4i$.

Minimal: $4i$.

Máximo: $3 - 4i$.

Mínimo: $4i$.

Cotas superiores: $\{(a + bi) \in \mathbb{C} : a \geq 3 \text{ y } b \geq -4\}$

Cotas inferiores: $\{(a + bi) \in \mathbb{C} : a \leq 0 \text{ y } b \leq 4\}$

Supremo: $3 - 4i$

Ínfimo: $4i$