

גרנדול כ"ה 4
אלנק'ד אויברפיה
212039523
31.03.2022 

א. מצאו את פולינום האינטרפולציה העובר דרך הנקודות: $(2, 1/3), (0, 1), (1, 0.5)$;

$$l_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-1)}{(2-1)(2-1)} = \frac{x^2-x}{2}$$

$$l_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-2)(x-1)}{(0-2)(0-1)} = \frac{x^2-3x+2}{2}$$

$$l_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-2)(x-0)}{(1-2)(1-0)} = \frac{x^2-2x}{-1}$$

$$l_2(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2-x}{2} + 1 \cdot \frac{x^2-3x+2}{2} - \frac{1}{2} \cdot (x^2-2x)$$

ב. חשבו את $L(1.3)$.

$$L_2(1.3) = \frac{1.3^2-1.3}{6} + \frac{1.3^2-3 \cdot 1.3+2}{2} - \frac{1.3^2-2 \cdot 1.3}{2} = 0.415$$

ג. בהנחה שהפונקציה עליה נשען פולינום האינטרפולציה היא $f(x) = \frac{1}{1+x}$, חשבו את

השגיאה האבסולוטית והיחסית בין הערך שקבלת בסעיף ב' לערכו האמתי של הפונקציה בנקודה $x=1.3$.

$$f(1.3) = \frac{1}{1+1.3} = \frac{1}{2.3}$$

$$A.E. = |f(1.3) - L_2(1.3)| = \left| \frac{1}{2.3} - 0.415 \right| = 0.01498$$

$$R.E. = \frac{A.E.}{|f(1.3)|} = 0.045494$$

ד. מצאו חסם לשגיאה בתחום $[0,2]$

שאלה 2

חשבו את פולינום האינטרפולציה בשיטת ניוטון לפונקציה $f(x) = 3^x$ ע"פ ערכי הפונקציה בנקודות: $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2\}$. והראו כי מתקבל פולינום זהה לצורת לגרנז' שקיבלנו בתירגול הקודם $(L_2(x) = 2x^2 + 1)$.

$$f(0)=1, f(1)=3, f(2)=9 \quad f \text{ לגרנז':}$$

$$l_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{x^2-3x+2}{2}$$

$$l_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = \frac{x^2-2x}{-1}$$

$$l_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x^2-x}{2}$$

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{x^2-3x+2}{2} - 3(x^2-2x) + 9 \cdot \frac{x^2-x}{2} \\ &= \frac{x^2}{2} - 3x^2 + \frac{9x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 2x - \frac{x}{2} + \frac{2}{2} = 2x^2 + 1 \end{aligned}$$

x_0	f_0			0	1		
		f_{01}				2	
x_1	f_1		f_{012}	1	3		2
		f_{12}				6	
x_2	f_2			2	9		

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1] \cdot (x-x_0) \\ &\quad + f[x_0, x_2] \cdot (x-x_0)(x-x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 1 + 2 \cdot (x-0) + 2(x-0)(x-1) \\ &= 1 + 2x + 2(x^2-x) \\ &= 2x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$f_{01} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{3-1}{1-0} = 2$$

$$f_{12} = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-3}{2-1} = 6$$

$$f_{012} = \frac{f_{12} - f_{01}}{x_2 - x_1} = \frac{6-2}{2-0} = 2$$

השתמשו בנתונים הבאים על מנת לחשב פולינום האינטרפולציה של לגרנץ

מסדר ≥ 3 : $f(-1) = -7$; $f(0) = -2$; $f(1) = -3$; $f(2) = -4$

$$l_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$

$$l_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{2}$$

$$l_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} = \frac{x^3-x^2-2x}{-2}$$

$$l_3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{x^3-x}{6}$$

$$7 \cdot \frac{x^3-3x^2+2x}{6} - x^3-2x^2-x+2 + 3 \cdot \frac{x^3-x^2-2x}{2} - 4 \cdot \frac{x^3-x}{6}$$

$$f(-1) = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 4$$

א. קרבו את הערך $\sqrt{2}$ בעזרת פולינום אינטרפולציה $f(x) = 2^x$ בנקודות

$$x_i = -1, 0, 1, 2$$

ב. חשבו את $L(0.5)$

ג. חשבו חסם לשגיאה בנקודה $x=0.5$

ד. חשבו את השגיאה המוחלטת בנקודה $x=0.5$ והשוו את התוצאה הזו, לתוצאה שקיבלתם

בסעיף ג

$$l_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^3-3x^2+2x}{-6} \quad 16$$

$$l_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{2}$$

$$l_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} = \frac{x^3-x^2-2x}{-2}$$

$$l_3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{x^3-x}{6}$$

$$L_3(x) = -\frac{x^3-3x^2+2x}{12} + \frac{x^3-2x^2-x+2}{2} - (x^3-x^2-2x) + 4 \cdot \frac{x^3-x}{6}$$

$$L_3(\sqrt{2}) = 0.0286 + (-0.2929) - (-2) + 4 \cdot (0.2357) = 1.8787$$

$$l(0.5) = -\frac{0.5^3-3 \cdot 0.5^2+2 \cdot 0.5}{12} + \frac{0.5^3-2 \cdot 0.5^2+1.5}{2} - (0.5^3-0.5^2-1) + 4 \cdot \frac{0.5^3-0.5}{6} = 1.65625 - 0.25 = 1.4025 \quad \Delta$$

א. חשבו את $f(1.18)$ בעזרת פולינום האינטרפולציה של לגרנז' ממעלה שלישית מתוך הטבלה

x	$f(x)$
0	0.000
0.5	0.7937
1	1.0000
1.5	1.1447

$$l_0 = \frac{(x-0.5)(x-1)(x-1.5)}{(0-0.5)(0-1)(0-1.5)} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2.75x - 0.45}{0.75}$$

$$l_1 = \frac{(x-0)(x-1)(x-1.5)}{(0.5-0)(0.5-1)(0.5-1.5)} = \frac{x^3 - 2.5x^2 + 1.5x}{0.25}$$

$$l_2 = \frac{(x-0)(x-0.5)(x-1.5)}{(1-0)(1-0.5)(1-1.5)} = \frac{x^3 - 2x^2 + 0.75x}{-0.25}$$

$$l_3 = \frac{(x-0)(x-1)(x-0.5)}{(1.5-0)(1.5-1)(1.5-0.5)} = \frac{x^3 - 1.5x^2 + 0.5x}{0.75}$$

$$L_2(x) = 0.7937 \cdot \left(\frac{x^3 - 2.5x^2 + 1.5x}{0.25} \right) - \frac{x^3 - 2x^2 + 0.75x}{0.25} + 1.1447 \cdot \frac{x^3 - 1.5x^2 + 0.5x}{0.75}$$

$$f(1.18) = 0.7937 \cdot (-0.271872) + 1.027072 + 1.1447 \cdot 0.192576 = 1.03177$$

ב. בהנחה שהפונקציה מוגדרת על ידי $f(x) = x^{1/3}$, העריכו את השגיאה בחישוב גם על

ידי נוסחת השגיאה בפולינום לגרנז', וגם על ידי השוואה לערך $(1.18)^{1/3}$, שניתן לקבל

במחשבון.

$$A.E. = |(1.18)^{1/3} - L_2(1.18)| = 0.0249518$$

$$R.E. = \frac{A.E.}{(1.18)^{1/3}} = 0.0236125$$