

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/39425822>

Globally rigid Symmetric Tensegrities

Article · January 1995

Source: OAI

CITATIONS

114

READS

465

2 authors, including:



R. Connelly

Cornell University

131 PUBLICATIONS 5,098 CITATIONS

SEE PROFILE

R. Connelly* and M. Terrell
 Cornell University,
 Department of Mathematics,
 White Hall, Ithaca, N.Y. 14843-7901

*Partially supported by N.S.F.
 Grant Number MCS-790251

*Subventionné, en partie, par le N.S.F.
 (numéro de subvention MCS-790251)

French translation:
 Traduction française :
 Jean-Luc Raymond

Globally Rigid Symmetric Tensegrities

Abstract

If one builds a tensegrity structure with cables and struts, when will it be globally rigid in the sense that there is no other non-congruent configuration of the points satisfying the cable and strut constraints? We investigate a family of such structures that have dihedral symmetry and we completely characterize those that are globally rigid. This uses some stress-energy techniques that in turn require showing that a certain symmetric matrix is positive semi-definite with the right rank.

1. Introduction

When is a collection of struts held rigid by a system of cables? Such structures, introduced more than 30 years ago by sculptor Kenneth Snelson, were used by Buckminster Fuller as examples of a concept he called "tensional integrity" or simply "tensegrity". The tensegrities considered by Snelson and Fuller were required to have all their struts disjoint. So if one builds such a structure, wires can serve as the cables and

Tenségrités symétriques globalement rigides

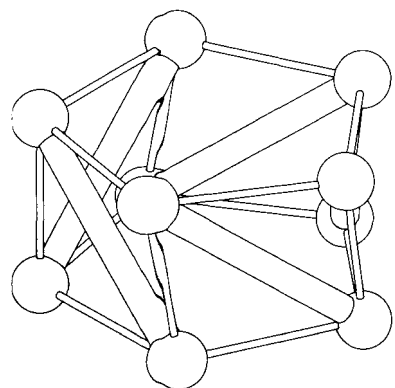
Résumé

Si on construit une structure de tensegrité avec des câbles et des étais, quand sera-t-elle globalement rigide, au sens où il n'existe aucune autre configuration non congruente des points satisfaisant les contraintes des câbles et des étais? Nous étudions ici une famille de ce type de structures qui possèdent une symétrie dièdre et nous caractérisons complètement celles qui sont globalement rigides. Nous utilisons certaines techniques de contrainte-énergie qui requièrent la démonstration qu'une certaine matrice symétrique est positive semi-définie avec le bon rang.

1. Introduction

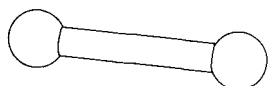
Quand un ensemble d'étais est-il tenu de façon rigide par un système de câbles? De telles structures, introduites voilà plus de trente ans par le sculpteur Kenneth Snelson, ont été utilisées par Buckminster Fuller comme exemples d'un concept qu'il nomma « intégrité de tension » ou plus simplement « tensegrité ». Dans les tensegrités considérées par Snelson et

Figure 1



Denotes a cable
which is not allowed
to increase in length.

Représente un câble
qui ne peut s'accroître
en longueur.



Denotes a strut
which is not allowed
to decrease in length.

Représente un étai
qui ne peut décroître
en longueur.

sticks can serve as the struts held in mid-air by the cables. See [12,8]. For us, and in the mathematical literature, there is no need for having disjoint struts.

There is a precise mathematical model for defining these objects, and there is a reasonable theory as well that can be applied to determine their rigidity in many cases. Our main object is to demonstrate that theory by applying it to a particular family of tensegrities, called "prismic tensegrids".

Figure 1 shows one of these rigid tensegrids. **Figure 10** shows some other examples of prismic tensegrids.

One must be careful about how one proves rigidity. A natural method is to use what is called "infinitesimal rigidity". This is the approach in Hinrichs [10]. Unfortunately, prismic tensegrids are never infinitesimally rigid, and thus the results claimed by Hinrichs must be proved by other techniques.

We will show that certain prismic tensegrids are "globally rigid" and therefore rigid. The techniques we apply involve calculating a "self stress" and an associated symmetric matrix, and checking that this matrix is positive semi-definite with the "right" nullity.

In **Section II** after we define these concepts and outline some of the relevant theory, we define precisely the prismic tensegrids and state the main result about when they are globally rigid. **Section III** sets up the notation for studying our examples and calculates a certain twist these structures are required to have. **Section IV** contains the proof of the main theorem. In **Section V** we present some conjectures and questions for further study.

We thank R. Terrell and L. Wahlbin for help with the proof of Lemma 5.

II. Basic Definitions and Theory

A *tensegrity framework* (or simply a *framework*) consists of a collection of labeled vertices (or *joints*) in three-space, called the *configuration*, together with certain pairs of vertices (or *members*) called *cables*, *struts*, or *bars*.

For each cable the pair of vertices is constrained not to move apart. For each strut the pair of vertices is constrained not to get closer. For each bar the pair of vertices is constrained to stay the same distance. We denote the framework by $G(p)$, where G is a graph whose vertices correspond to the joints of the framework and whose edges record which pairs of vertices are cables, bars, or struts. The configuration is denoted by $p = (p_1, p_2, \dots, p_v)$, where p_i is the i -th joint of the framework.

Fuller, les étais devaient tous être disjoints. Ainsi, si on construit une telle structure, des fils métalliques peuvent être utilisés comme câbles et des tiges comme étais tenus en suspens par les câbles. Voir [12,8]. Pour nous, et dans la littérature mathématique, il n'est pas nécessaire que les étais soient disjoints.

Il existe un modèle mathématique précis pour définir ces objets, ainsi qu'une théorie acceptable permettant de déterminer leur rigidité dans plusieurs cas. Notre but principal est de démontrer cette théorie en l'appliquant à une famille particulière de tensegrités appelées « tensegrités prismiques ». La **figure 1** montre l'une de ces tensegrités rigides. À la **figure 10**, on trouve d'autres exemples de tensegrités prismiques.

On doit être très prudent sur la façon de démontrer la rigidité. Une méthode naturelle consiste à utiliser le concept de « rigidité infinitésimale ». C'est l'approche qu'utilisa Hinrichs [10]. Malheureusement, les tensegrités prismiques ne sont jamais infinitésimalement rigides, et ainsi les résultats avancés par Hinrichs doivent être démontrés par d'autres techniques.

Nous démontrerons que certaines tensegrités prismiques sont « globalement rigides » et donc rigides. Les techniques utilisées font appel au calcul d'une « autocontrainte » et d'une matrice symétrique associée, et à la vérification que cette matrice est positive semi-définie de la « bonne » nullité.

Dans la **section II**, après avoir défini ces concepts et exposé les grandes lignes de la théorie sous-jacente, on définit de façon précise les tensegrités prismiques et on énonce le résultat principal concernant leur rigidité globale. À la **section III**, on établit la notation utilisée pour l'étude de nos exemples et on calcule une certaine torsion que doivent avoir ces structures. La **section IV** contient la démonstration du théorème principal. Dans la **section V**, nous présentons quelques conjectures et questions pour des études futures.

Nous remercions R. Terrell et L. Wahlbin pour leur aide dans la démonstration du **lemme 5**.

II. Définitions de base et théorie

Une *charpente de tensegrité* ou simplement une *charpente* consiste en un ensemble de sommets étiquetés ou *joints* dans l'espace tridimensionnel, nommé la *configuration*, accompagnée de certaines paires de sommets ou *membres* nommées *câbles*, *étais*, ou *barres*. Pour chaque câble, les deux sommets

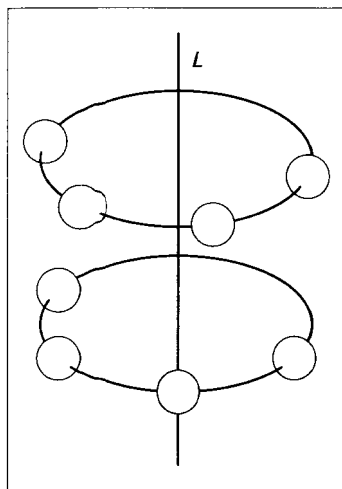


Figure 2

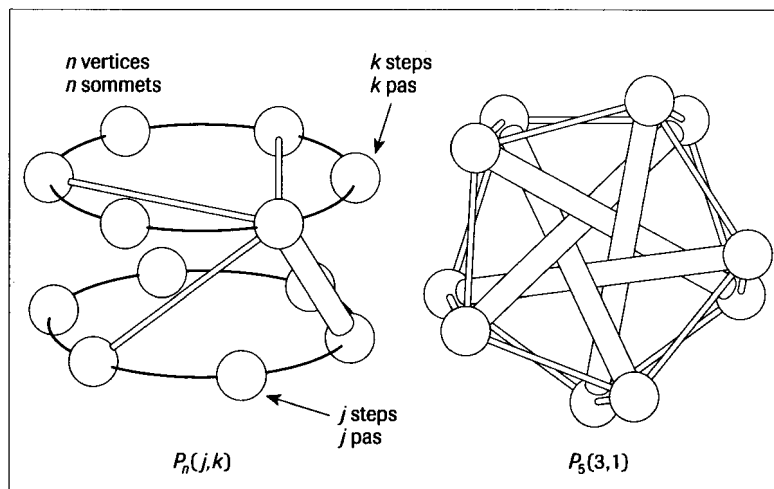


Figure 3

In Hinrichs [10] there is a classification of certain symmetric tensegrity frameworks, as well as statements and conjectures regarding their rigidity. The following is a description of these symmetric tensegrity frameworks, which Hinrichs calls prismic tensigrids. Consider two circles in disjoint parallel planes where both circles have their centers on a line L perpendicular to the two planes. Note L is a line of rotational symmetry for the two circles. Choose $n = 3, 4, 5, \dots$. Consider two sets of n points, one set on each of the circles, spaced so that each set forms the vertices of a regular polygon. Thus there are $2n$ vertices in all. See **Figure 2**.

Next choose two integers $j, k = 1, 2, \dots, n-1$. On each circle connect a cable between any pair of vertices that are k steps apart in cyclic order. Connect a strut between some pair of vertices on different circles, then rotate the strut about L to obtain n disjoint struts. Each of the struts connects a vertex in one circle to exactly one vertex in the other circle. We fix some orientation of the plane. Lastly for each vertex, connect it to that vertex on the other circle which is j steps in a clockwise direction from the other endpoint of the strut. Following Hinrichs we call such a framework $P_n(j, k)$. (See **Figure 3**.)

Note that in addition to the rotational symmetries about L each of these frameworks has a symmetries which rotate one circle into the other. Also note we have not mentioned what the relative positions are for the two sets of points on the circles. We will see later that in order for there to be any chance that the prismic tensigrad is rigid, there is only one

qui le constituant ne peuvent s'éloigner. Pour chaque étau, les deux sommets qui le constituent ne peuvent se rapprocher. Pour chaque barre, les deux sommets qui la constituent doivent demeurer à la même distance. On désigne la charpente par $G(p)$, où G est un graphe dont les sommets correspondent aux joints de la charpente et dont les arêtes décrivent quelles sont les paires de sommets qui sont des câbles, des barres ou des étais. On note la configuration par $p = (p_1, p_2, \dots, p_v)$ où p_i est le i -ème joint de la charpente.

Dans l'article de Hinrichs [10], on trouve une classification de certaines charpentes de tensegrité symétriques, de même que des affirmations et des conjectures concernant leur rigidité. Voici une description de ces charpentes de tensegrité symétriques qu'Hinrichs nomme tensegrités prismiques. Considérons deux cercles appartenant à deux plans parallèles disjoints, les deux cercles ayant leur centre sur une droite L perpendiculaire aux deux plans. Remarquons que L est un axe de symétrie de rotation pour les deux cercles. Posons $n = 3, 4, 5, \dots$ et considérons deux ensembles de n points, un sur chacun des cercles, espacés de telle sorte que chaque ensemble constitue les sommets d'un polygone régulier. Il y a ainsi $2n$ sommets en tout. Voir **figure 2**.

Choisissons ensuite deux entiers $j, k = 1, 2, \dots, n-1$. Sur chaque cercle, on lie par un câble toute paire de sommets qui se situent à k places l'un de l'autre dans un ordre cyclique. On lie par un étau certaines paires de sommets se situant sur des cercles différents; on effectue alors une rotation de l'étau autour de L pour obtenir n étais disjoints. Chacun des étais lie un sommet de l'un des cercles à exactement un sommet de l'autre cercle. On détermine une certaine orientation du plan. Enfin, on lie chaque sommet au sommet de l'autre cercle qui se situe à j places, dans la direction horaire, de l'autre terminaison de l'étau. Selon Hinrichs, on nommera une telle charpente $P_n(j, k)$. (Voir **figure 3**.)

Remarquons qu'en plus des symétries de rotation autour de L , chacune de ces charpentes possède une symétrie qui pivote un cercle sur l'autre. On remarque également que nous n'avons pas mentionné les positions relatives des deux ensembles de points sur les cercles. On verra plus loin que pour qu'il y ait une chance que la tensegrité prismique soit rigide, il n'existe qu'une position possible pour l'étau. Ceci détermine la position relative des deux ensembles de n sommets. Notons également que $P_n(j, k)$ est une image-miroir de $P_n(j, n-k)$ et que ce sont des charpentes congruentes.

possible position for the strut. This determines the relative position of the two sets of n vertices. Note also that $P_n(j, k)$ is a mirror image of $P_n(j, n-k)$, and they are congruent as frameworks.

A general tensegrity framework is said to be *rigid* if the only continuous motion of the vertices satisfying the member constraints is a rigid motion (i.e. a congruence) of all of Euclidean space. The techniques we use may be found in Connelly [5]. A *self stress* for a tensegrity framework is an assignment of a scalar ω_{ij} (the stress) to each member $\{i, j\}$ such that at each vertex i the following vector sum, the *equilibrium equation*, holds

$$\sum_j \omega_{ij} (p_i - p_j) = 0,$$

where the sum is taken over all vertices j adjacent to i . The self stress is *proper* if the stress on each cable is non-negative and the stress on each strut is non-positive. One reason for the importance of proper self stresses is the following result. See [4], as well as [13] for a slightly different proof.

- Theorem 1. Any rigid tensegrity framework with at least one cable or strut has a non-zero proper self stress ω .

We must be careful not to read more into this statement than is there. For instance, it is possible that the stress is zero for all cables and struts of the framework and is only non-zero on bars.

In light of Theorem 1 we will require that there be some non-zero proper self stress for $P_n(j, k)$. This will in turn imply that there is a fixed relative position, called the twist, for all the vertices on the two circles. We will discuss this central point in Section III.

A framework $G(p)$ is said to be *infinitesimally rigid* if the only solution to the following linear equalities and inequalities, where the p' variables are the unknowns,

$$(p_i - p_j) \cdot (p'_i - p'_j) \begin{cases} \leq 0 & \text{if } \{i, j\} \text{ is a cable} \\ = 0 & \text{if } \{i, j\} \text{ is a bar} \\ \geq 0 & \text{if } \{i, j\} \text{ is a strut,} \end{cases}$$

are the *trivial* ones coming from the derivatives of congruences of Euclidean space. Since infinitesimal rigidity implies rigidity (see Connelly [3] Theorem 3.1 and Remark 4.1, Roth and Whiteley [11] Proposition 4.2, or Connelly [5]), it is natural to try to show that a framework is rigid by showing it is infinitesimally rigid. This is in fact the argument attempted

Une charpente de tenségrité générale est dite *rigide* si le seul mouvement continu des sommets satisfaisant les contraintes des membres est un mouvement rigide (c'est-à-dire une congruence) de tout l'espace euclidien. On peut trouver les techniques utilisées ici dans un article de Connelly [5]. Une *autocontrainte* pour une charpente de tenségrité est l'assignation d'un scalaire ω_{ij} (la contrainte) à chaque membre $\{i, j\}$ de telle sorte qu'en chaque sommet i , la somme vectorielle suivante, l'équation d'équilibre, soit vérifiée

$$\sum_j \omega_{ij} (p_i - p_j) = 0,$$

où la somme est prise sur tous les sommets j adjacents à i .

L'autocontrainte est *propre* si la contrainte sur chaque câble est non négative et que la contrainte sur chaque étau est non positive. Une des raisons justifiant l'importance d'autocontraintes propres est le résultat suivant. Voir [4], de même que [13] pour une démonstration légèrement différente.

- Théorème 1. Toute charpente de tenségrité rigide ayant au moins un câble ou un étau possède une autocontrainte propre non nulle ω .

On doit faire attention à ne pas lire plus que ce que cette affirmation ne contient. Par exemple, il est possible que la contrainte soit nulle pour tous les câbles et états de la charpente et non nulle seulement pour les barres.

À la lumière du théorème 1, nous demanderons qu'il y ait une certaine autocontrainte propre non nulle pour $P_n(j, k)$. Cela entraînera qu'il y a une position relative fixe, appelée la torsion, pour tous les sommets sur les deux cercles. Nous aborderons cette question centrale à la section III.

Une charpente $G(p)$ est dite *infinitésimalement rigide* si les seules solutions aux équations et inéquations linéaires suivantes, où les variables p' sont les inconnues,

$$(p_i - p_j) \cdot (p'_i - p'_j) \begin{cases} \leq 0 & \text{si } \{i, j\} \text{ est un câble ;} \\ = 0 & \text{si } \{i, j\} \text{ est une barre ;} \\ \geq 0 & \text{si } \{i, j\} \text{ est un étau} \end{cases}$$

sont les solutions *triviales* provenant des dérivées de congruences de l'espace euclidien. Puisque la rigidité infinitésimale implique la rigidité (voir le théorème 3.1 et la remarque 4.1 de l'article Connelly [3], la proposition 4.2 de l'article de Roth et Whiteley [11], ou [5]), il est naturel de tenter de montrer qu'une charpente est rigide en démontrant qu'elle est infinitésimalement rigide. C'est en fait l'argument utilisé par

by Hinrichs [10]. It is shown in [5] that if a tensegrity framework with v vertices and e members (at least one of which is a cable or a strut) is infinitesimally rigid in three-space, then $3v-6 < e$. Now for $P_n(j,k)$ if $n \geq 3$, $k \neq n/2$, then $v = 2n$, $e = 4n$ and $3v-6 = 6n-6 \geq 4n = e$. If $k = n/2$, then e is even smaller. Thus $P_n(j,k)$ is never infinitesimally rigid. Unfortunately Hinrichs seems to confuse Theorem 1 concerning general rigidity with the following result of Roth and Whiteley [11]:

- Theorem 2. A tensegrity framework $G(p)$ is infinitesimally rigid if and only if the following two conditions hold:
 - (i) $\bar{G}(p)$ is infinitesimally rigid, where \bar{G} is the graph obtained by replacing all members with bars.
 - (ii) $G(p)$ has a proper self stress ω that is non-zero on all struts and cables.

Since $P_n(j,k)$ can never be infinitesimally rigid, Theorem 2 can never apply. In fact, condition (i) is never satisfied.

With this in mind, we offer the following alternate approach. A tensegrity is called *globally rigid* if every other configuration of the vertices satisfying the member constraints is congruent to the original configuration. (Note that the congruence may reverse orientation.) Clearly global rigidity is stronger than just rigidity. Our purpose will be to show the following:

- Main Theorem. The prismic tensigrad $P_n(j,k)$, for $n = 3, 4, \dots$, $j, k = 1, 2, \dots, n-1$, is globally rigid if and only if $k = 1$ or $k = n-1$.

We will use some results of Connelly [4], and Connelly and Whiteley [7] (described in [14]) that are general methods for proving global rigidity. For a framework $G(p)$ a proper self stress is denoted by $\omega = (\dots, \omega_{ij}, \dots)$ where $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ is the stress on member $\{i, j\}$. From ω we define the stress matrix Ω by defining the (ij) -th entry Ω_{ij} to be

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} -\omega_{ij} = -\omega_{ji} & \text{if } i \neq j, \{i, j\} \text{ a member of } G \\ \sum_{k \neq i} \omega_{ki} & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Since Ω is a symmetric matrix, it corresponds to a quadratic form

$$Q(p) = \sum_{ij} \omega_{ij} |p_i - p_j|^2$$

defined on each coordinate of the space of all configurations. The matrix of Q is precisely the Kronecker product of Ω and the d by d identity matrix, i.e. $\Omega \otimes I^d$. (See Section IV for a

Hinrichs [10]. Il est démontré dans [5] que si une charpente de tensegrité de v sommets et e membres (dont au moins un est un câble ou un étai) est infinitésimalement rigide dans l'espace tridimensionnel, alors $3v-6 < e$. Maintenant, pour $P_n(j,k)$, si $n \geq 3$, $k \neq n/2$, alors $v = 2n$, $e = 4n$ et $3v-6 = 6n-6 \geq 4n = e$. Si $k = n/2$, alors e est même plus petit. Ainsi, $P_n(j,k)$ n'est jamais infinitésimalement rigide. Malheureusement, Hinrichs semble confondre le théorème 1 concernant la rigidité générale avec le résultat suivant de Roth et Whiteley [11]:

- Théorème 2. Une charpente de tensegrité $G(p)$ est infinitésimalement rigide si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
 - (i) $\bar{G}(p)$ est infinitésimalement rigide, où \bar{G} est le graphe obtenu en remplaçant tous les membres par des barres.
 - (ii) $G(p)$ possède une autocontrainte propre ω qui est non nulle sur tous les étais et les câbles.

Puisque $P_n(j,k)$ ne peut jamais être infinitésimalement rigide, le théorème 2 ne peut jamais s'appliquer. En fait, la condition (i) n'est jamais satisfaite.

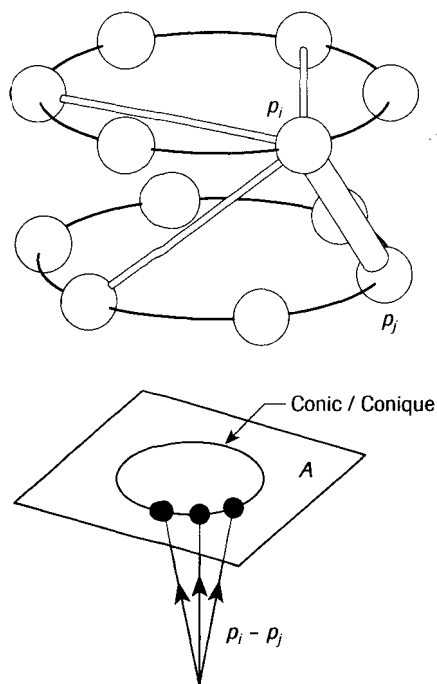
En tenant compte de ce fait, nous offrons l'approche alternative suivante. Une tensegrité est dite *globalement rigide* si toute autre configuration des sommets satisfaisant les contraintes des membres est congruente à la configuration originale. (Notons que la congruence peut renverser l'orientation.) Il est clair que la rigidité globale est plus forte que la simple rigidité. Nous devons donc démontrer le théorème suivant.

- Théorème principal. La tensegrité prismatique $P_n(j,k)$, où $n = 3, 4, \dots$, $j, k = 1, 2, \dots, n-1$, est globalement rigide si et seulement si $k = 1$ ou $k = n-1$.

Nous utiliserons certains résultats de Connelly [4], et Connelly et Whiteley [7] (décrits dans [14]) qui sont des méthodes générales pour démontrer la rigidité globale. Pour une charpente $G(p)$, une autocontrainte propre est notée par $\omega = (\dots, \omega_{ij}, \dots)$ où $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ est la contrainte exercée sur le membre $\{i, j\}$. À partir de ω , on définit la *matrice de contrainte* Ω en définissant le (i, j) -ième élément Ω_{ij} de la façon suivante :

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} -\omega_{ij} = -\omega_{ji} & \text{si } i \neq j, \text{ pour } \{i, j\} \text{ membre de } G \\ \sum_{k \neq i} \omega_{ki} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Figure 4



discussion of the Kronecker product of two matrices.) This quadratic form can be thought of as a “potential energy” function, and since ω is a self stress for $G(p)$, it is easy to calculate that the configuration p represents a critical point for this energy function. This leads to the question of whether the energy is at a minimum at p , which is in turn detected by whether Ω is positive semi-definite. If Ω is positive semi-definite, then any other configuration must violate some member constraint in order to have a lower energy. These are some of the ideas that can be used to show the following more precise statement (proved in [4]).

■ **Theorem 3.** *Let $G(p)$ be any tensegrity framework in three-space with a proper self stress ω . Suppose the corresponding stress matrix Ω is positive semi-definite of nullity 4. If q is any configuration satisfying the member constraints of $G(p)$, then q is an affine image of p .*

Note that this result does not always imply that p and q are congruent. In order to use this theorem to conclude $G(p)$ is globally rigid, we need the following result concerning affine maps. See [13] for a more detailed discussion.

■ **Theorem 4.** *Let $G(p)$ be any tensegrity framework in three-space with a proper self stress ω and Ω its stress matrix as in Theorem 3. Let q be any configuration that is the non-congruent affine image of p satisfying the member constraints of $G(p)$. Then there is a non-zero quadratic form Q defined on three-space such that $Q(p_i - p_j) = 0$ for all members $\{i, j\}$ of G such that $\omega_{ij} \neq 0$.*

We reinterpret the last condition as follows. For each member $\{i, j\}$ of G , regard $p_i - p_j$ as a vector at the origin and project it into any fixed plane A not containing the origin. The condition says that these points, corresponding to the non-zero stresses, must all lie on a single conic, i.e. a circle, ellipse, parabola, hyperbola, or two lines. See **Figure 4**.

In the case of $P_n(j, k)$ we will see that it has a proper self stress, non-zero on each member. Since all the cables in the two polygons lie in parallel planes, they all project onto at least three points in a single line in A . Thus the only possible conic containing these points is a set of two lines. However, the other cables, as well as the struts, do not project into any single line. Therefore, all the members of $P_n(j, k)$ do not lie in a single conic, and there can be no other affine image q of p , such that $G(q)$ satisfies the member constraints of $G(p)$.

Puisque Ω est une matrice symétrique, elle correspond à la forme quadratique

$$Q(p) = \sum_{ij} \omega_{ij} |p_i - p_j|^2$$

définie sur chaque coordonnée de l'espace de toutes les configurations. La matrice de Q est précisément le produit de Kronecker de Ω et de la matrice identité d'ordre d , c'est-à-dire $\Omega \otimes I^d$. (Voir la section IV pour une présentation du produit de Kronecker de deux matrices.) Cette forme quadratique peut être considérée comme une fonction d'« énergie potentielle », et puisque ω est une autocontrainte de $G(p)$, il est facile de calculer que la configuration p représente un point critique de cette fonction d'énergie. Ceci mène à la question de savoir si l'énergie atteint un minimum en p , ce qui, à son tour, est décelé en sachant si Ω est positive semi-définie. Si Ω est positive semi-définie, alors toute autre configuration doit violer une certaine contrainte sur l'un des membres pour atteindre une énergie inférieure. Voilà quelques unes des idées qui peuvent être utilisées pour montrer l'énoncé plus précis suivant (démontré dans [4]).

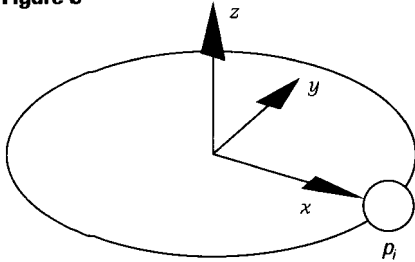
■ **Théorème 3.** *Soit $G(p)$ une charpente de tensegrité quelconque dans l'espace tridimensionnel et une autocontrainte propre ω . Supposons que la matrice de contrainte correspondante Ω est positive semi-définie de nullité 4. Si q est une configuration satisfaisant les contraintes des membres de $G(p)$, alors q est une image affine de p .*

Remarquons que ce résultat n'implique pas toujours que p et q sont congruents. Dans le but d'utiliser ce théorème pour conclure à la rigidité globale de $G(p)$, on a besoin du résultat suivant concernant les applications affines. Voir [13] pour une discussion plus détaillée.

■ **Théorème 4.** *Soit $G(p)$ une charpente de tensegrité quelconque dans l'espace tridimensionnel, ω une autocontrainte propre et Ω sa matrice de contrainte comme dans le théorème 3. Soit q une configuration qui est une image affine non-congruente de p satisfaisant les contraintes des membres de $G(p)$. Il existe alors une forme quadratique non nulle Q définie sur l'espace tridimensionnel telle que $Q(p_i - p_j) = 0$ pour tous les membres $\{i, j\}$ de G tels que $\omega_{ij} \neq 0$.*

Nous réinterprétons la dernière condition de la façon suivante. Pour chaque membre $\{i, j\}$ de G , considérons $p_i - p_j$ comme un vecteur à l'origine et projetons-le sur un plan fixé

Figure 5



Hence, for the frameworks $P_n(j,k)$ if Ω is positive semi-definite of nullity 4, then $P_n(j,k)$ will be globally rigid.

III. The Self Stress and the Twist

We will show that the existence of a non-zero self stress for $P_n(j,k)$ (necessary for rigidity by Theorem 1) allows us simultaneously to calculate the twist and the self stress that exists for that twist. The results here are essentially equivalent to similar (correct) results in Hinrichs [10], but the treatment here is independent of Hinrichs, more explicit, and some proofs are different.

To ease this calculation we choose a particular coordinate system for any vertex p_i of $P_n(j,k)$. The x -axis and y -axis are in the plane of the circle containing p_i , and the x -axis is along the radius of the circle containing p_i . The z -axis is thus perpendicular to this horizontal plane. See Figure 5.

For any prismic tensegrity $P_n(j,k)$ we will call any member $\{a,b\}$ that has its vertices in different circles a *lateral member* and any corresponding stress ω_{ab} a *lateral stress*. We will call any other member (necessarily a cable) a *horizontal cable* and its corresponding stress ω_{ab} a *horizontal stress*.

■ Lemma 1. For any $P_n(j,k)$ suppose ω is a self stress. For any vertex labeled i let $\{a,i\}$, $\{b,i\}$ correspond to the adjacent lateral members. Then $\omega_{ai} = -\omega_{bi}$.

Proof. The equilibrium vector equation in the definition of a self stress

$$\sum_t \omega_{ti} (p_t - p_i) = 0$$

must hold for each coordinate, in particular the z -coordinate. The z -coordinates of the vertices adjacent along the horizontal cables are the same, so we are left with $\omega_{ai} + \omega_{bi} = 0$. ■

We have found partial information about any possible self stress for $P_n(j,k)$, but in order to find the twist we will use the existence of a particularly nice self stress. Let H be the group of isometries that leave the vertices of $P_n(j,k)$ invariant. Thus H (isomorphic to a dihedral group) permutes the members of $P_n(j,k)$, and there are three transitivity classes, the horizontal cables, the lateral cables, and the lateral struts. If a self stress ω for $P_n(j,k)$ has the same value for each member in a transitivity class, we say ω is *symmetric*. Furthermore, if ω is any proper self stress (possibly not symmetric) we define for every member $\{a,b\}$ and $P_n(j,k)$

A quelconque ne contenant pas l'origine. La condition affirme que ces points, correspondant aux contraintes non nulles, doivent tous se situer sur une conique simple, c'est-à-dire un cercle, une ellipse, une parabole, une hyperbole ou deux droites. Voir figure 4.

Pour $P_n(j,k)$, nous verrons qu'il possède une autocontrainte propre, non nulle sur chaque membre. Puisque tous les câbles dans les deux polygones se situent dans des plans parallèles, ils se projettent tous sur au moins trois points dans une seule droite dans A . Ainsi, la seule conique pouvant contenir ces points est un ensemble de deux droites. Toutefois, les autres câbles, de même que les états, ne se projettent pas en une seule droite. Donc, les membres de $P_n(j,k)$ ne se situent pas tous sur une seule conique et il ne peut exister aucune autre image affine q de p , telle que $G(q)$ satisfasse les contraintes des membres de $G(p)$. Ainsi, pour les charpentés $P_n(j,k)$, si Ω est positive semi-définie de nullité 4, alors $P_n(j,k)$ sera globalement rigide.

III. L'autocontrainte et la torsion

Nous montrerons que l'existence d'une autocontrainte non nulle pour $P_n(j,k)$ (nécessaire pour la rigidité selon le théorème 1) nous permet de calculer de façon simultanée la torsion, et l'autocontrainte qui existe pour cette torsion. Les résultats présentés ici sont essentiellement équivalents aux résultats (corrects) similaires publiés par Hinrichs [10], mais le traitement qui en est fait ici en est indépendant, il est plus explicite et quelques démonstrations sont différentes.

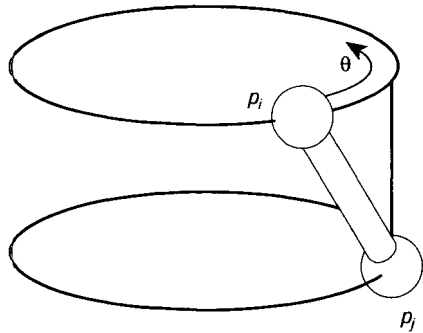
Afin de faciliter ce calcul, on choisit un système de coordonnées particulier pour un sommet arbitraire p_i de $P_n(j,k)$. L'axe des x et l'axe des y se situent dans le plan du cercle contenant p_i , et l'axe des x se confondant avec le rayon du cercle contenant p_i . L'axe des z est ainsi perpendiculaire à ce plan horizontal. Voir figure 5.

Pour toute tensegrité prismatique $P_n(j,k)$, nous nommerons *membre latéral* tout membre $\{a,b\}$ dont les sommets sont dans des cercles différents et *contrainte latérale*, la contrainte correspondante ω_{ab} . Tous les autres membres (nécessairement des câbles) seront nommés câbles horizontaux et leurs contraintes correspondantes ω_{ab} , contraintes horizontales.

■ Lemme 1. Pour tout $P_n(j,k)$, supposons que ω est une autocontrainte. Pour tout sommet étiqueté i , soient $\{a,i\}$, $\{b,i\}$ correspondant aux membres latéraux adjacents. Alors $\omega_{ai} = -\omega_{bi}$.

Démonstration : L'équation vectorielle d'équilibre de la défi-

Figure 6



where $|H|$ = the number of elements of H . We call $\bar{\omega}$ the *average self stress*. It is clear that $\bar{\omega}$ is always a proper symmetric self stress for the same framework $P_n(j, k)$.

Let p_i be a vertex on the "top" circle (with respect to the z -axis of some fixed coordinate system say). Let $\{i, a\}$ be the strut at the vertex p_i . The projection of p_a onto the xy plane (perpendicular to the axis of symmetry of $P_n(j, k)$) is obtained by a rotation of p_i by θ radians counterclockwise, say. See **Figure 6**.

Note that this *twist* θ is independent of k . If p_i is rigidly rotated to another vertex (even on the other circle) so that the two circles are invariant, then the vertices and members of $P_n(j, k)$ are invariant as well.

We can now describe the coordinates of the vertices adjacent to p_i . Let $\{a, i\}$, $\{b, i\}$ be the lateral strut and cable respectively. Let $\{c, i\}$, $\{d, i\}$ be the horizontal cables. Then placing unit radius circles on the $z=0$ and $z=-1$ planes, we get (**Figure 7**)

$$\begin{aligned} p_i &= (1, 0, 0) \\ p_a &= (\cos \theta, \sin \theta, -1) \\ p_b &= \left(\cos \left(\theta - \frac{2\pi j}{n} \right), \sin \left(\theta - \frac{2\pi j}{n} \right), -1 \right) \\ p_c &= \left(\cos \frac{2\pi k}{n}, \sin \frac{2\pi k}{n}, 0 \right) \\ p_d &= \left(\cos \frac{2\pi k}{n}, -\sin \frac{2\pi k}{n}, 0 \right). \end{aligned} \quad (*)$$

■ **Lemma 2.** *If $P_n(j, k)$ has a non-zero proper self stress, then*

$$\theta = \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{j}{n} \right).$$

Proof. By averaging as discussed above, the existence of a non-zero proper self stress implies the existence of a non-zero proper symmetric self stress ω . Hence at any vertex p_i , $\omega_{ic} = \omega_{id}$. By Lemma 1 $\omega_{ia} = -\omega_{ib}$. By the equilibrium equation for the y -coordinates and by (*)

$$\begin{aligned} \omega_{ia} \sin \theta + \omega_{ib} \sin \left(\theta - \frac{2\pi j}{n} \right) &= 0, \\ \omega_{ia} \left(\sin \theta - \sin \left(\theta - \frac{2\pi j}{n} \right) \right) &= 0. \end{aligned}$$

dition d'une autocontrainte

$$\sum_{\ell} \omega_{\ell i} (p_{\ell} - p_i) = 0$$

doit être satisfaite pour chaque coordonnée, en particulier la coordonnée z . Les coordonnées z des sommets adjacents le long des câbles horizontaux sont les mêmes; il nous reste donc $\omega_{ai} + \omega_{bi} = 0$. ■

Nous avons trouvé une information partielle concernant toute autocontrainte possible pour $P_n(j, k)$, mais afin de trouver la torsion, nous ferons appel à l'existence d'une autocontrainte particulièrement belle. Soit H le groupe des isométries qui laissent invariants les sommets de $P_n(j, k)$. H (isomorphe à un groupe dièdre) permute ainsi les membres de $P_n(j, k)$, et il y a trois classes de transitivité : les câbles horizontaux, les câbles latéraux et les étais latéraux. Si une autocontrainte ω de $P_n(j, k)$ possède la même valeur pour chaque membre dans une classe de transitivité, on dira que ω est *symétrique*. De plus, si ω est une autocontrainte propre (possiblement non symétrique), on définit pour tout membre $\{a, b\}$ et $P_n(j, k)$

$$\omega_{ab} = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \omega_{h(a)h(b)},$$

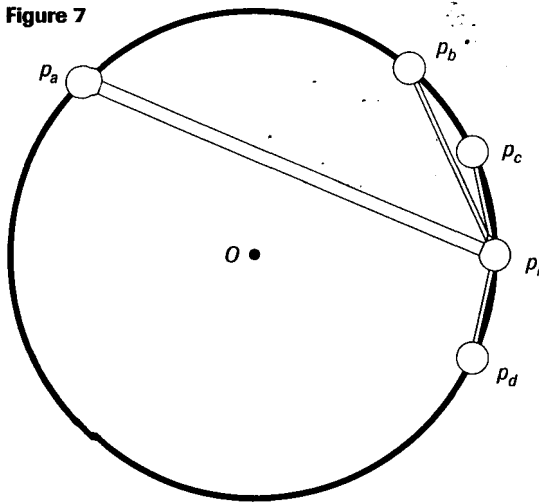
où, $|H|$ = le nombre d'éléments de H . $\bar{\omega}$ est appelé l'*autocontrainte moyenne*. Il est clair que $\bar{\omega}$ est toujours une autocontrainte propre symétrique pour la même charpente $P_n(j, k)$.

Soit p_i un sommet se situant sur le cercle « du haut » (en regard de l'axe des z d'un certain système de coordonnées fixé). Soit $\{i, a\}$ l'étau au sommet p_i . La projection de p_a sur le plan xy (perpendiculaire à l'axe de symétrie de $P_n(j, k)$) est obtenue par une rotation de p_i de θ radians dans le sens antihoraire. Voir **figure 6**.

Notons que cette *torsion* θ est indépendante de k . Si on effectue sur p_i une rotation rigide vers un autre sommet (même sur l'autre cercle) de telle sorte que les deux cercles restent invariants, alors les sommets et les membres de $P_n(j, k)$ demeurent eux aussi invariants.

On peut maintenant décrire les coordonnées des sommets adjacents à p_i . Soient $\{a, i\}$ et $\{b, i\}$, l'étau latéral et le câble latéral, respectivement. Soient $\{c, i\}$ et $\{d, i\}$, les câbles horizontaux. En plaçant alors des cercles de rayon unité sur les plans $z=0$ et $z=-1$, on obtient (**figure 7**)

Figure 7



If $\omega_{ia}=0$, then all the lateral stresses are 0, and this would imply that all the horizontal stress are 0 as well, violating the non-zero hypothesis for ω . Thus

$$\sin \theta = \sin \left(\theta - \frac{2\pi j}{n} \right).$$

Using that $0 \leq \theta < 2\pi$ we have

$$\theta + \left(\theta - \frac{2\pi j}{n} \right) = \pi \quad \text{or} \quad \theta + \left(\theta - \frac{2\pi j}{n} \right) = 3\pi.$$

Thus

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \pi \frac{j}{n} \quad \text{or} \quad \theta = 3\frac{\pi}{2} + \pi \frac{j}{n}.$$

Recall $\omega_{ib} > 0$, $\omega_{ic} = \omega_{id} > 0$, $\omega_{ia} < 0$. From (*),

$$\omega_{ic}(p_c - p_i) + \omega_{id}(p_d - p_i) = \alpha(1, 0, 0)$$

where

$$\alpha = 2\omega_{ic} \left(\cos 2\pi \frac{k}{n} - 1 \right) < 0.$$

From the above analysis and (*),

$$\omega_{ia}(p_a - p_i) + \omega_{ib}(p_b - p_i) = \omega_{ia}(p_a - p_b) = \beta(1, 0, 0).$$

In order for the equilibrium equation to hold at p_i , we must have $\beta = -\alpha > 0$. Now $\beta > 0$ only if the x -coordinate of p_b is positive and the x -coordinate of p_a is negative. Thus the (symmetric) self stress ω will not be proper unless $\theta = \pi/2 + \pi(j/n)$. ■

We now know that $p_b = (-\cos \theta, \sin \theta, -1)$ and the y -coordinates of p_a and p_b are equal.

Remark. We have determined θ and thus the configuration for $P_n(j, k)$ up to congruence. At this stage it is an easy matter to see that the proper symmetric self stress ω for $P_n(j, k)$ is unique up to a positive scalar. It is natural to ask if there are any non-symmetric proper self stresses for $P_n(j, k)$. It follows from the next lemma that when $P_n(j, k)$ is connected (as a graph) the only proper self stress is symmetric. Hinrichs showed that $P_n(j, k)$ is connected precisely when the greatest common divisor of n, j, k is 1. Thus we will calculate all the stresses for all connected prismic tensigrids.

■ **Lemma 3.** Let $P_n(j, k)$, $n = 3, 4, \dots$, $j = 1, \dots, n-1$, $k = 1, \dots, n-1$, be any prismic tensigrad with the greatest common divisor of n, j, k equal to 1. Then all non-zero proper self stresses of

$$p_i = (1, 0, 0)$$

$$p_a = (\cos \theta, \sin \theta, -1)$$

$$p_b = \left(\cos \left(\theta - \frac{2\pi j}{n} \right), \sin \left(\theta - \frac{2\pi j}{n} \right), -1 \right) \quad (*)$$

$$p_c = \left(\cos \frac{2\pi k}{n}, \sin \frac{2\pi k}{n}, 0 \right)$$

$$p_d = \left(\cos \frac{2\pi k}{n}, -\sin \frac{2\pi k}{n}, 0 \right).$$

■ **Lemme 2.** Si $P_n(j, k)$ possède une autocontrainte propre non nulle, alors

$$\theta = \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{j}{n} \right).$$

Démonstration. En procédant par la moyenne comme plus haut, l'existence d'une autocontrainte propre non nulle implique l'existence d'une autocontrainte propre non nulle symétrique ω . Ainsi, en tout sommet p_i , $\omega_{ic} = \omega_{id}$. Par le lemme 1, $\omega_{ia} = -\omega_{ib}$. En utilisant l'équation d'équilibre pour les coordonnées y , et par (*), on a

$$\omega_{ia} \sin \theta + \omega_{ib} \sin \left(\theta - \frac{2\pi j}{n} \right) = 0,$$

$$\omega_{ia} \left(\sin \theta - \sin \left(\theta - \frac{2\pi j}{n} \right) \right) = 0.$$

Si $\omega_{ia} = 0$, alors toutes les contraintes latérales sont nulles, et ceci impliquerait que toutes les contraintes horizontales sont nulles également, en violation de l'hypothèse de non-nullité de ω . Ainsi,

$$\sin \theta = \sin \left(\theta - \frac{2\pi j}{n} \right).$$

En utilisant le fait que $0 \leq \theta < 2\pi$, on a

$$\theta + \left(\theta - \frac{2\pi j}{n} \right) = \pi \quad \text{ou} \quad \theta + \left(\theta - \frac{2\pi j}{n} \right) = 3\pi.$$

Ainsi,

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \pi \frac{j}{n} \quad \text{ou} \quad \theta = 3\frac{\pi}{2} + \pi \frac{j}{n}.$$

Rappelons que $\omega_{ib} > 0$, $\omega_{ic} = \omega_{id} > 0$, $\omega_{ia} < 0$. De (*), on tire :

$$\omega_{ic}(p_c - p_i) + \omega_{id}(p_d - p_i) = \alpha(1, 0, 0)$$

où

$$\alpha = 2\omega_{ic} \left(\cos 2\pi \frac{k}{n} - 1 \right) < 0.$$

$P_n(j,k)$ are of the form

$$\text{horizontal stress} = \gamma > 0$$

$$\text{lateral cable stress} = 2\gamma \frac{\sin^2 \frac{k}{n} \pi}{\sin \frac{j}{n} \pi} \quad (**)$$

$$\text{lateral strut stress} = -2\gamma \frac{\sin^2 \frac{k}{n} \pi}{\sin \frac{j}{n} \pi}$$

Proof: At any vertex p_i , we use the coordinate system (*) discussed above. By Lemma 1, $\omega_{ia} = -\omega_{ib}$. By Lemma 2, $\theta = \pi (1/2 + j/n)$. The equilibrium equation for the y -coordinates gives $\omega_{ic} = \omega_{id}$. The equilibrium equation for the x -coordinates gives

$$\omega_{ia}(\cos \theta - 1) - \omega_{ia}(-\cos \theta - 1) + 2\omega_{ic} \left(\cos \frac{2\pi k}{n} - 1 \right) = 0.$$

Hence

$$\frac{\omega_{ia}}{\omega_{ic}} = \frac{-\omega_{ib}}{\omega_{ic}} = \frac{\cos \frac{2\pi k}{n} - 1}{\cos \theta} = \frac{-2 \sin^2 \frac{k}{n} \pi}{\sin \frac{j}{n} \pi}.$$

This ratio is the same for each vertex i . Choose any $\lambda > 0$ for any horizontal stress. The above ratio determines the stresses for all adjacent members. Since the graph of $P_n(j,k)$ is connected (by [10]) all the stresses for all the members are determined and thus are given by (**). ■

IV. Proof of the Main Theorem

This section contains the proof of the main result, that for any $n = 3, 4, \dots$ and $j = 1, 2, \dots, n-1$, $P_n(j,k)$ is globally rigid if and only if $k = 1$ or $k = n-1$. Since $P_n(j,1)$ is equal to $P_n(j,n-1)$, it suffices to show the Main Theorem for $P_n(j,1)$.

To facilitate the calculations we index the vertices of $P_n(j,1)$ in the following way. We label the n vertices which lie in one of the xy -planes with consecutive odd integers $1, 3, \dots, 2n-1$, and the n vertices in the other plane with consecutive even integers $2, 4, \dots, 2n$. Then we have:

$$\begin{aligned} \{i, i+2\} & \text{ are horizontal cables } i = 1, 2, 3, \dots, 2n; \\ \{i, i+1\} & \text{ are lateral cables } i = 1, 3, 5, \dots, 2n-1; \\ \{i, i+1+2j\} & \text{ are lateral struts } i = 1, 3, 5, \dots, 2n-1. \end{aligned}$$

Assume where necessary these are integers mod $2n$. With this indexing Lemma 3 implies that any non-zero proper self stress ω for $P_n(j,1)$ has the form

De l'analyse précédente et de (*), on a

$$\omega_{ia}(p_a - p_i) + \omega_{ib}(p_b - p_i) = \omega_{ia}(p_a - p_b) = \beta(1, 0, 0).$$

Afin que l'équation d'équilibre soit valide en p_i , on doit avoir $\beta = -\alpha > 0$. Maintenant, $\beta > 0$ seulement si la coordonnée x de p_b est positive et que la coordonnée x de p_a est négative. L'autocontrainte (symétrique) ω ne sera pas propre à moins que $\theta = \pi/2 + \pi(j/n)$. ■

On sait maintenant que $p_b = (-\cos \theta, \sin \theta, -1)$ et que les coordonnées y de p_a et de p_b sont égales.

Remarque. Nous avons déterminé q et ainsi la configuration pour $P_n(j,k)$ à une congruence près. À ce stade, il est simple de voir que l'autocontrainte propre symétrique ω pour $P_n(j,k)$ est unique à un scalaire positif près. Il est naturel de demander s'il existe des autocontraintes propres non symétriques pour $P_n(j,k)$. Une conséquence du lemme suivant veut que lorsque $P_n(j,k)$ est connexe (considéré comme un graphe), la seule autocontrainte propre est symétrique. Hinrichs a démontré que $P_n(j,k)$ est connexe précisément lorsque le plus grand diviseur commun de n , j et k est 1. On calculera ainsi toutes les contraintes pour toutes les tensegrités prismiques connexes.

■ **Lemme 3.** Soit $P_n(j,k)$, où $n = 3, 4, \dots$, $j = 1, \dots, n-1$, $k = 1, \dots, n-1$, une tensegrité prismique dont le plus grand diviseur commun de n , j , k est égal à 1. Alors toutes les autocontraintes propres non nulles de $P_n(j,k)$ sont de la forme

$$\text{contraintes horizontales} = \gamma > 0$$

$$\text{contraintes de câbles latéraux} = 2\gamma \frac{\sin^2 \frac{k}{n} \pi}{\sin \frac{j}{n} \pi} \quad (**)$$

$$\text{contraintes d'étais latéraux} = -2\gamma \frac{\sin^2 \frac{k}{n} \pi}{\sin \frac{j}{n} \pi}$$

Démonstration. En tout sommet p_i , on utilise le système de coordonnées (*) présenté plus haut. Par le lemme 1, $\omega_{ia} = -\omega_{ib}$. Par le lemme 2, $\theta = \pi (1/2 + j/n)$. L'équation d'équilibre pour les coordonnées y nous donne $\omega_{ic} = \omega_{id}$. L'équation d'équilibre pour les coordonnées x nous donne

$$\omega_{ia}(\cos \theta - 1) - \omega_{ia}(-\cos \theta - 1) + 2\omega_{ic} \left(\cos \frac{2\pi k}{n} - 1 \right) = 0.$$

$$\omega_{i,i+2} = \gamma > 0$$

$$\omega_{i,i+1} = -\omega_{i,i+1+2j} = 2\gamma \frac{\sin^2 \frac{\pi}{n}}{\sin j \frac{\pi}{n}}.$$

Throughout the rest of this section we take $\gamma = 1$. To simplify notation we let

$$x = 2 \frac{\sin^2 \frac{\pi}{n}}{\sin j \frac{\pi}{n}}.$$

The associated stress matrix Ω belongs to a very special class of matrices called block circulant matrices

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \dots & \Omega_n \\ \Omega_n & \Omega_1 & \dots & \Omega_{n-1} \\ \vdots & & \dots & \\ \Omega_2 & \Omega_3 & \dots & \Omega_n \end{bmatrix},$$

where each Ω_m is a 2×2 matrix,

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 2 & -x \\ -x & 2 \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Omega_{j+1} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{n-j+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

and for any other integer m between 1 and n

$$\Omega_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

We will use some of the special properties of circulant matrices to calculate the eigenvalues of Ω . The following definitions and theorems may be found in [9].

The Kronecker product of an $m \times q$ matrix A and an $r \times s$ matrix B is the $mr \times qs$ matrix

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1q}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2q}B \\ \vdots & & & \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mq}B \end{bmatrix}.$$

The properties of this product that we will use are:

- 1) $(A+B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$; $A \otimes (B+C) = A \otimes B + A \otimes C$
- 2) $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$
- 3) $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$,

where A^* is the conjugate transpose of A and indicated op-

Donc,

$$\frac{\omega_{ia}}{\omega_{ic}} = \frac{-\omega_{ib}}{\omega_{ic}} = \frac{\cos \frac{2\pi k}{n} - 1}{\cos \theta} = \frac{-2 \sin^2 \frac{k}{n} \pi}{\sin \frac{j}{n} \pi}.$$

Ce ratio est le même pour chaque sommet i . On choisit un quelconque $\lambda > 0$ pour n'importe quelle contrainte horizontale. Le ratio ci-dessus détermine les contraintes pour tous les membres adjacents. Puisque le graphe de $P_n(j,k)$ est connexe (par [10]), toutes les contraintes pour tous les membres sont déterminées et sont ainsi données par (**). ■

IV. Démonstration du théorème principal

Cette section contient la démonstration du résultat principal, à l'effet que pour tout $n=3,4,\dots$ et $j=1,2,\dots,n-1$, $P_n(j,k)$ est globalement rigide si et seulement si $k=1$ ou $k=n-1$. Puisque $P_n(j,1)$ est égal à $P_n(j,n-1)$, il suffit de démontrer le théorème principal pour $P_n(j,1)$.

Afin de simplifier les calculs, nous étiquetons les sommets de $P_n(j,1)$ de la façon suivante. On attribue aux n sommets qui se situent dans l'un des plans xy les entiers impairs consécutifs $1,3,\dots,2n-1$, et aux n sommets appartenant à l'autre plan les entiers pairs consécutifs $2,4,\dots,2n$. On a alors :

- $\{i, i+2\}$ sont des câbles horizontaux $i = 1,2,3,\dots,2n$;
- $\{i, i+1\}$ sont des câbles latéraux $i = 1,3,5,\dots,2n-1$;
- $\{i, i+1+2j\}$ sont des étais latéraux $i = 1,3,5,\dots,2n-1$.

Supposons lorsque cela s'avère nécessaire que ce sont des entiers mod $2n$. Avec cet étiquetage, le lemme 3 implique que toute autocontrainte propre non nulle ω pour $P_n(j,1)$ est de la forme

$$\omega_{i,i+2} = \gamma > 0$$

$$\omega_{i,i+1} = -\omega_{i,i+1+2j} = 2\gamma \frac{\sin^2 \frac{\pi}{n}}{\sin j \frac{\pi}{n}}.$$

Tout au long de cette section, on prendra $\gamma = 1$. Pour simplifier la notation, on posera

$$x = 2 \frac{\sin^2 \frac{\pi}{n}}{\sin j \frac{\pi}{n}}.$$

La matrice de contrainte associée Ω appartient à une classe très spéciale de matrices nommées matrices à circulation de blocs.

erations are assumed to be defined. The complex conjugate of a complex number z is \bar{z} .

■ **Theorem 5.** *Let F be the $n \times n$ matrix with ij -th entry $\frac{1}{\sqrt{n}} \xi^{(i-1)(j-1)}$, where $\xi = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ is the primitive i -th root of unity. Then F is unitary, i.e., $FF^* = I = F^*F$.*

■ **Theorem 6.** *Let Π and D be the $n \times n$ matrices*

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \xi^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Then for each $\ell = 1, 2, \dots, n-1$

$$\Pi^\ell = F^* D^\ell F.$$

We now apply these theorems to prove

■ **Lemma 4.** *If $P_n(j, 1)$ has non-zero proper self stress ω , the associated stress matrix Ω has eigenvalues*

$$\lambda_m^\pm = \left(2 \sin m \frac{\pi}{n}\right)^2 \pm \chi \left(2 \sin mj \frac{\pi}{n}\right), \quad m = 0, 1, \dots, n-1,$$

where

$$\chi = \frac{2 \sin^2 \frac{\pi}{n}}{\sin j \frac{\pi}{n}}.$$

Proof. By the preceding discussion of Ω and by the definition of the Kronecker product, $\Omega = \sum_{\ell=0}^{n-1} \Pi^\ell \otimes \Omega_{\ell+1}$. Theorem 6 implies $\Omega = \sum_{\ell=0}^{n-1} (F^* D^\ell F) \otimes \Omega_{\ell+1}$. Let I be the 2×2 identity matrix. Then it follows from properties 2) and 1),

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_{\ell=0}^{n-1} (F^* D^\ell F) \otimes \Omega_{\ell+1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} (F^* D^\ell F) \otimes (I \Omega_{\ell+1} I) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} (F^* \otimes I) (D^\ell \otimes \Omega_{\ell+1}) (F \otimes I) \\ &= (F^* \otimes I) \left[\sum_{\ell=0}^{n-1} D^\ell \otimes \Omega_{\ell+1} \right] (F \otimes I). \end{aligned}$$

From properties 2), 3) and Theorem 5 it follows that $F^* \otimes I = (F \otimes I)^*$, et $F \otimes I$ is unitary. Hence the eigenvalues of Ω are equal to the eigenvalues of the block diagonal matrix $\sum_{\ell=0}^{n-1} D^\ell \otimes \Omega_{\ell+1}$. This matrix consists of the 2×2 blocks, C_m , $m=0, 1, 2, \dots, n-1$, down the main diagonal and zeros everywhere else, where

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \dots & \Omega_n \\ \Omega_n & \Omega_1 & \Omega_2 & \dots & \Omega_{n-1} \\ \vdots & & \dots & & \\ \Omega_2 & \Omega_3 & \dots & \Omega_n & \Omega_1 \end{bmatrix},$$

où chaque Ω_m est une matrice de format 2×2 ,

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 2 & -\chi \\ -\chi & 2 \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Omega_{j+1} = \begin{bmatrix} 0 & \chi \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{n-j+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \chi & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

et pour tout autre entier m entre 1 et n

$$\Omega_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous utiliserons certaines des propriétés spéciales des matrices à circulation pour calculer les valeurs propres de Ω . On peut trouver les définitions et théorèmes suivants dans [9].

Le produit de Kronecker d'une matrice A de format $m \times q$ et d'une matrice B de format $r \times s$ est la matrice de format $mr \times qs$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1q}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2q}B \\ \vdots & & & \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mq}B \end{bmatrix}.$$

Les propriétés de ce produit que nous utiliserons sont :

- 1) $(A+B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$; $A \otimes (B+C) = A \otimes B + A \otimes C$
- 2) $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$
- 3) $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$,

où A^* est la transposée des conjugués de A et les opérations indiquées sont supposées définies. Le conjugué d'un nombre complexe z est \bar{z} .

■ **Théorème 5.** *Soit F la matrice de format $n \times n$ dont le ij -ème élément est $\frac{1}{\sqrt{n}} \xi^{(i-1)(j-1)}$, où $\xi = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ est la i -ème racine primitive de l'unité. Alors F est unitaire, c'est-à-dire, $FF^* = I = F^*F$.*

$$C_m = \sum_{\ell=0}^{n-1} \xi^{\ell m} \Omega_{\ell+1} = \begin{bmatrix} 2 - \xi^m - \xi^{(n-1)m} & -\chi + \chi \xi^{jm} \\ -\chi + \chi \xi^{(n-j)m} & 2 - \xi^m - \xi^{(n-1)m} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2 \sin m \frac{\pi}{n})^2 & \chi(\xi^{jm} - 1) \\ \chi(\xi^{(n-j)m} - 1) & (2 \sin m \frac{\pi}{n})^2 \end{bmatrix}.$$

The eigenvalues of C_m are

$$\lambda_m^{\pm} = (2 \sin m \frac{\pi}{n})^2 \pm \chi(2 \sin mj \frac{\pi}{n}).$$

■ **Lemma 5.** *The eigenvalues λ_m^{\pm} , $m=0,1,\dots,n-1$, of the stress matrix Ω associated to the non-zero proper self stress ω for $P_n(j,1)$ are non-negative. In fact*

$$\lambda_0^+ = \lambda_0^- = 0,$$

$$\lambda_1^- = \lambda_{n-1}^- = 0 \text{ and } \lambda_1^+ = \lambda_{n-1}^+ > 0, \text{ if } j \text{ is odd,}$$

$$\lambda_1^+ = \lambda_{n-1}^+ = 0 \text{ and } \lambda_1^- = \lambda_{n-1}^- > 0, \text{ if } j \text{ is even,}$$

and $\lambda_m^+ > 0$ and $\lambda_m^- > 0$ for any other integer $1 < m < n-1$.

Proof: Recall that $\chi = \frac{(2 \sin \frac{\pi}{n})^2}{2 \sin j \frac{\pi}{n}}$. From Lemma 4 it is clear that

$$\lambda_0^{\pm} = (2 \sin 0)^2 \pm \chi(2 \sin 0) = 0,$$

$$\lambda_1^- = (2 \sin \frac{\pi}{n})^2 - \frac{(2 \sin \frac{\pi}{n})^2}{2 \sin j \frac{\pi}{n}} (2 \sin j \frac{\pi}{n}) = 0, \text{ and}$$

$$\lambda_1^+ = 2 (2 \sin \frac{\pi}{n})^2 > 0.$$

If j is odd $\sin(n-1)j \frac{\pi}{n} = \sin j \frac{\pi}{n}$, while if j is even $\sin(n-1)j \frac{\pi}{n} = -\sin j \frac{\pi}{n}$ hence the cases of λ_m^{\pm} when $m=n-1$ are verified.

For $m=2,3,\dots,n-2$ the statement, $\lambda_m^+ > 0$ and $\lambda_m^- > 0$, is equivalent to the statement

$$\frac{(\sin m \frac{\pi}{n})^2}{(\sin \frac{\pi}{n})^2} > \left| \frac{\sin mj \frac{\pi}{n}}{\sin j \frac{\pi}{n}} \right|.$$

Since $\frac{\sin m \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} > 1$ this inequality would follow from

$$(***) \quad \frac{\sin m \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \geq \left| \frac{\sin mj \frac{\pi}{n}}{\sin j \frac{\pi}{n}} \right|.$$

By replacing m by $n-m$ and j by $n-j$, where necessary, it suffices to show (***) when $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$ and $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$. Using the fact that $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ implies $\frac{2}{\pi} t \leq \sin t \leq t$, we conclude that

$$\frac{\sin m \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \geq \frac{\frac{2}{\pi} m \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \frac{2m}{\pi} \quad \text{and} \quad \frac{1}{\frac{2j}{\pi n} \pi} \geq \left| \frac{\sin mj \frac{\pi}{n}}{\sin j \frac{\pi}{n}} \right|.$$

■ **Théorème 6.** *Soient Π et D , les matrices de format $n \times n$*

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \xi^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Alors pour chaque $\ell=1,2,\dots,n-1$

$$\Pi^{\ell} = F^* D^{\ell} F.$$

Nous utiliserons maintenant ces théorèmes pour démontrer le lemme suivant.

■ **Lemme 4.** *Si $P_n(j,1)$ possède une autocontrainte propre non nulle ω , alors la matrice de contrainte associée Ω a les valeurs propres*

$$\lambda_m^{\pm} = \left(2 \sin m \frac{\pi}{n}\right)^2 \pm \chi \left(2 \sin mj \frac{\pi}{n}\right), \quad m = 0,1,\dots,n-1,$$

où

$$\chi = \frac{2 \sin^2 \frac{\pi}{n}}{\sin j \frac{\pi}{n}}.$$

Démonstration. En utilisant ce qu'on a dit de Ω et la définition du produit de Kronecker, $\Omega = \sum_{\ell=0}^{n-1} \Pi^{\ell} \otimes \Omega_{\ell+1}$. Le théorème 6 implique $\Omega = \sum_{\ell=0}^{n-1} (F^* D^{\ell} F) \otimes \Omega_{\ell+1}$. Soit I la matrice identité d'ordre 2. Par les propriétés 1) et 2), on obtient

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_{\ell=0}^{n-1} (F^* D^{\ell} F) \otimes \Omega_{\ell+1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} (F^* D^{\ell} F) \otimes (I \Omega_{\ell+1} I) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} (F^* \otimes I) (D^{\ell} \otimes \Omega_{\ell+1}) (F \otimes I) \\ &= (F^* \otimes I) \left[\sum_{\ell=0}^{n-1} D^{\ell} \otimes \Omega_{\ell+1} \right] (F \otimes I). \end{aligned}$$

Par l'application des propriétés 2), 3) et du théorème 5, il s'ensuit que $F^* \otimes I = (F \otimes I)^*$, et $F \otimes I$ est unitaire. Les valeurs propres de Ω sont donc égales aux valeurs propres de la matrice diagonale en blocs $\sum_{\ell=0}^{n-1} D^{\ell} \otimes \Omega_{\ell+1}$. Cette matrice est constitué de blocs de format 2×2 , C_m , $m=0,1,2,\dots,n-1$, le long de la diagonale principale et de zéros ailleurs, où

From this we see that (***) holds whenever $\frac{2m}{\pi} \geq \frac{n}{2j}$, i.e., whenever $jm \geq \frac{\pi}{4}n$.

The remaining cases $jm \leq \frac{\pi}{4}n$ follow from the fact that $\sin t = t \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{q^2\pi^2}\right)$ converges absolutely for any real number t [1]. Hence

$$\frac{\sin m \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} = \frac{\frac{m}{n} \pi \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{m^2}{n^2 q^2}\right)}{\frac{\pi}{n} \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2 q^2}\right)} = m \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{m^2}{n^2 q^2}\right)$$

and

$$\frac{\sin jm \frac{\pi}{n}}{\sin j \frac{\pi}{n}} = \frac{jm \frac{\pi}{n} \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{j^2 m^2}{n^2 q^2}\right)}{j \frac{\pi}{n} \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{j^2}{n^2 q^2}\right)} = m \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{j^2 m^2}{n^2 q^2}\right).$$

The quotients are both indexed over the positive integers q which are not divisible by m , i.e. $m \nmid q$. As long as $jm < n$, it is clear that for each q ,

$$\left(1 - \frac{m^2}{n^2 q^2}\right) \geq \left(1 - \frac{j^2 m^2}{n^2 q^2}\right) \geq 0.$$

This gives us (***) for $jm \leq \frac{\pi}{4}n < n$. ■

Corollary: The stress matrix Ω , for any non-zero proper self stress ω of $P_n(j,1)$, is positive semi-definite of nullity 4.

Proof of the Main Theorem: By the definition of the twist θ in the construction of $P_n(j,k)$, we know that $P_n(j,k)$ has a proper non-zero self stress ω . By the corollary we see that in the case $k=1$, the associated stress matrix Ω is positive semi-definite of nullity 4. By Theorem 3 if any other configuration, q , satisfies the member constraints of $P_n(j,1)$, q is the affine image of the vertices of $P_n(j,1)$. It is easy to check that the member directions of $P_n(j,1)$ do not lie on any conic at infinity. Hence by Theorem 4, q is congruent to the configuration of vertices in $P_n(j,1)$, and $P_n(j,1)$ is globally rigid.

We show the "only if" implication of the Main Theorem: If $k=2, \dots, n-2$, then $P_n(j,k)$ is not globally rigid. There are two cases.

Case 1: k is not relatively prime to n .

If we look at the horizontal cables that lie in one of the two parallel planes, then the graph they determine falls into $d > 1$ separate components, where d is the greatest common division of k and n . Take one of these components consisting of

$$C_m = \sum_{\ell=0}^{n-1} \xi^{\ell m} \Omega_{\ell+1} = \begin{bmatrix} 2 - \xi^m - \xi^{(n-1)m} & -\chi + \chi \xi^{jm} \\ -\chi + \chi \xi^{(n-j)m} & 2 - \xi^m - \xi^{(n-1)m} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} (2 \sin m \frac{\pi}{n})^2 & \chi(\xi^{jm} - 1) \\ \chi(\xi^{(n-j)m} - 1) & (2 \sin m \frac{\pi}{n})^2 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de C_m sont

$$\lambda_m^{\pm} = (2 \sin m \frac{\pi}{n})^2 \pm \chi(2 \sin mj \frac{\pi}{n}). \quad \blacksquare$$

■ **Lemme 5.** Les valeurs propres λ_m^{\pm} , $m=0,1,\dots,n-1$, de la matrice de contrainte Ω associée à l'autocontrainte propre non nulle ω pour $P_n(j,1)$ sont non négatives. En fait

$$\lambda_0^+ = \lambda_0^- = 0,$$

$$\lambda_1^- = \lambda_{n-1}^- = 0 \text{ et } \lambda_1^+ = \lambda_{n-1}^+ > 0, \text{ si } j \text{ est pair,}$$

$$\lambda_1^- = \lambda_{n-1}^+ = 0 \text{ et } \lambda_1^+ = \lambda_{n-1}^- > 0, \text{ si } j \text{ est impair,}$$

et $\lambda_m^+ > 0$ et $\lambda_m^- > 0$ pour tout autre entier $1 < m < n-1$.

Démonstration. Rappelons que $\chi = \frac{(2 \sin \frac{\pi}{n})^2}{2 \sin j \frac{\pi}{n}}$. Du lemme 4, il est clair que

$$\lambda_0^{\pm} = (2 \sin 0)^2 \pm \chi(2 \sin 0) = 0,$$

$$\lambda_1^- = (2 \sin \frac{\pi}{n})^2 - \frac{(2 \sin \frac{\pi}{n})^2}{2 \sin j \frac{\pi}{n}} (2 \sin j \frac{\pi}{n}) = 0, \text{ et}$$

$$\lambda_1^+ = 2 (2 \sin \frac{\pi}{n})^2 > 0.$$

Si j est impair, $\sin(n-1)j \frac{\pi}{n} = \sin j \frac{\pi}{n}$, tandis que si j est pair, $\sin(n-1)j \frac{\pi}{n} = -\sin j \frac{\pi}{n}$. Les cas de λ_m^{\pm} lorsque $m=n-1$ sont donc vérifiés. Pour $m=2,3,\dots,n-2$, l'énoncé, $\lambda_m^+ > 0$ et $\lambda_m^- > 0$, est équivalent à l'énoncé

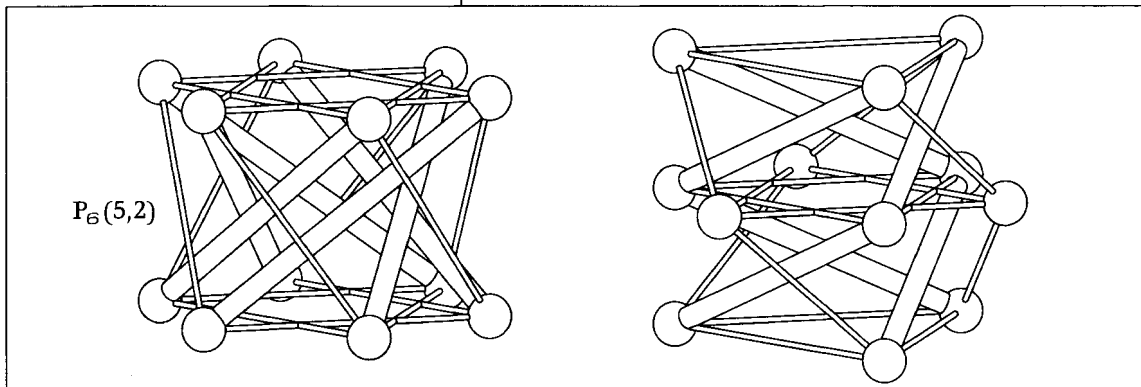
$$\frac{(\sin m \frac{\pi}{n})^2}{(\sin \frac{\pi}{n})^2} > \left| \frac{\sin mj \frac{\pi}{n}}{\sin j \frac{\pi}{n}} \right|.$$

Puisque $\frac{\sin m \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} > 1$, cette inégalité sera une conséquence de

$$(***) \quad \frac{\sin m \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \geq \left| \frac{\sin mj \frac{\pi}{n}}{\sin j \frac{\pi}{n}} \right|.$$

En remplaçant m par $n-m$ et j par $n-j$, où cela s'avère nécessaire, il suffit de démontrer (***) lorsque $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$ et $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$. En utilisant le fait que $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ implique que $\frac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t$, on conclut que

Figure 8



a cycle of n/d vertices and reflect the vertices (and the incident members) about the other horizontal plane. This clearly preserves all the member lengths, and is a realization of the graph not congruent to the original one. Thus this $P_n(j,k)$ is not globally rigid. See **Figure 8**, where $n=6, j=5, k=2$.

Case 2: k is relatively prime to n .

Let $\bar{k}=2, \dots, n-2$ be such that $\bar{k}\bar{k}=1$ (modulo n). Taking integers modulo n we claim that the underlying graph of $P_n(j,k)$ is isomorphic to the graph of $P_n(\bar{k}j,1)$. To see this, in each framework, label the vertices in one horizontal plane as $0, 1, 2, \dots, n-1$ in counter-clockwise cyclic order. Label the vertices in the other horizontal plane as $0', 1', \dots, (n-1)'$. In $P_n(j,k)$ the cables are

$$\{i, i+k\}, \{i', (i+k)'\}, \{i, i'\}$$

and the struts are

$$\{i, (i+j)'\}.$$

In $P_n(\bar{k}j,1)$ the cables are

$$\{i, i+1\}, \{i', (i+1)'\}, \{i, i'\}$$

and the struts are

$$\{i, (i+\bar{k}j)'\}.$$

Let f be the bijection from vertices of $P_n(j,k)$ to vertices of $P_n(\bar{k}j,1)$ given by

$$\begin{aligned} i &\rightarrow \bar{k}i = f(i) \\ i &\rightarrow (\bar{k}i)' = f(i') \end{aligned}$$

Since $\bar{k}k \equiv 1 \pmod{n}$,

$$f(\bar{k}i) = \bar{k}\bar{k}i \equiv i \pmod{n}.$$

$$\frac{\sin \frac{m\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \geq \frac{\frac{2}{\pi} \frac{m\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \frac{2m}{\pi} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\frac{2j}{\pi} \pi} \geq \left| \frac{\sin mj \frac{\pi}{n}}{\sin j \frac{\pi}{n}} \right|.$$

De là, on voit que (***) se vérifie du moment que $\frac{2m}{\pi} \geq \frac{n}{2j}$, c'est-à-dire lorsque $jm \geq \frac{\pi}{4}n$.

Les cas restants où $jm \leq \frac{\pi}{4}n$ se déduisent du fait que $\sin t = t \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{q^2 \pi^2}\right)$ converge absolument pour tout nombre réel t [1]. Donc

$$\frac{\sin \frac{m\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} = \frac{\frac{m}{n} \pi \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{m^2}{n^2 q^2}\right)}{\frac{\pi}{n} \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2 q^2}\right)} = m \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{m^2}{n^2 q^2}\right)$$

et

$$\frac{\sin jm \frac{\pi}{n}}{\sin j \frac{\pi}{n}} = \frac{jm \frac{\pi}{n} \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{j^2 m^2}{n^2 q^2}\right)}{j \frac{\pi}{n} \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{j^2}{n^2 q^2}\right)} = m \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{j^2 m^2}{n^2 q^2}\right).$$

Les quotients parcourent tous les deux les entiers positifs q qui ne sont pas divisibles par m , c'est-à-dire, $m \nmid q$. En autant que $jm < n$, il est clair que pour chaque valeur de q ,

$$\left(1 - \frac{m^2}{n^2 q^2}\right) \geq \left(1 - \frac{j^2 m^2}{n^2 q^2}\right) \geq 0.$$

Ceci nous donne (***) pour $jm \leq \frac{\pi}{4}n < n$. ■

Corollaire. La matrice de contrainte Ω , pour toute autocontrainte propre non nulle ω de $P_n(j,1)$, est positive semi-définie de nullité 4.

Démonstration du théorème principal. Selon la définition de la torsion θ dans la construction de $P_n(j,k)$, on sait que $P_n(j,k)$ possède une autocontrainte propre non nulle ω . Par le corollaire, on voit que dans le cas $k=1$, la matrice de contrainte associée Ω est positive semi-définie de nullité 4. Par le théorème 3, si une quelconque autre configuration, q , satisfait les contraintes des membres de $P_n(j,1)$, alors q est l'image affine des sommets de $P_n(j,1)$. On peut facilement vérifier que les directions des membres de $P_n(j,1)$ ne se situent sur aucune conique à l'infini. Donc, par le théorème 4, q est congruent à la configuration des sommets de $P_n(j,1)$, et $P_n(j,1)$ est globalement rigide.

Nous démontrons ici la nécessité de la condition du théorème principal: Si $k=2, \dots, n-2$, alors $P_n(j,k)$ n'est pas globalement rigide. Deux cas se présentent.

We check that f is an isomorphism of the graphs by checking that members of $P_n(j, k)$ are sent to corresponding members of $P_n(\bar{k}j, 1)$,

$$\begin{aligned} \{i, i+k\} &\rightarrow \{\bar{k}i, \bar{k}i+1\} \\ \{i', (i+k)\} &\rightarrow \{(\bar{k}i)', (\bar{k}i+1)'\} \\ \{i, i'\} &\rightarrow \{\bar{k}i, (\bar{k}i)'\} \\ \{i, (i+j)'\} &\rightarrow \{\bar{k}i, (\bar{k}i + \bar{k}j)'\}. \end{aligned}$$

Thus $P_n(\bar{k}j, 1)$ has the same cable-strut structure as does $P_n(j, k)$. This proves the claim.

Let $P_n(j, k)$ have a fixed configuration. We will try to find a configuration for $P_n(\bar{k}j, 1)$ where as many of the corresponding member lengths are equal as possible. By a dilation in the horizontal plane of $P_n(\bar{k}j, 1)$ we can insure that all the corresponding horizontal members have the same length. By dilating (increasing or decreasing) in the vertical axis we can insure that the corresponding lateral struts all have the same length. We are left with the lateral cables. We already know that $P_n(\bar{k}j, 1)$ is globally rigid, so its lateral cables must be strictly shorter than the lateral cables of $P_n(j, k)$. But then $P_n(j, k)$ is not globally rigid, finishing Case 2 and the Theorem.

V. Remarks, Further Work and a Conjecture

We have used a stress matrix analysis to show that $P_n(j, 1)$ is globally rigid, but some questions remain:

1. Can other methods be applied to show that some of the other prismic tensigrids are rigid?
2. Can it be shown that some of the other prismic tensigrids are not rigid?
3. How "often" is $P_n(j, k)$ rigid?

For question 1, we propose that the methods of Connelly and Whiteley [7] are relevant, but this requires a further non-trivial analysis. Instead of showing that $P_n(j, k)$ is globally rigid, it is natural to ask whether it is "pre-stress stable", which implies that it is rigid. To test whether this is true, one first looks at $\Omega \otimes I^3$, which we will call $\bar{\Omega}$, where I^3 is the 3 by 3 identity matrix. For pre-stress stability, it is not necessary to show that $\bar{\Omega}$ is positive semi-definite. It is only necessary that $\bar{\Omega}$ be positive definite on the particular linear subspace given by the infinitesimal flexes of $P_n(j, k)$. The problem is to find an explicit expression for those infinitesimal flexes. Nevertheless by using these techniques we claim

Premier cas : k n'est pas relativement premier à n .

Si on observe les câbles horizontaux qui se situent dans l'un des deux plans parallèles, on remarque que le graphe qu'ils déterminent est constitué de $d > 1$ composantes non connexes, où d est le plus grand diviseur commun de k et de n . On choisit l'une de ces composantes qui consiste en un cycle de n/d sommets et on effectue une réflexion des sommets (et des membres incidents) par rapport à l'autre plan horizontal. Il est clair que ceci préserve les longueurs de tous les membres, et que c'est une réalisation du graphe qui n'est pas congruente à la réalisation originale. Ainsi, ce $P_n(j, k)$ n'est pas globalement rigide. Voir **figure 8**, où $n=6, j=5, k=2$.

Deuxième cas : k est relativement premier à n .

Soit $\bar{k} = 2, \dots, n-2$ tel que $k\bar{k} \equiv 1 \pmod{n}$. En prenant des entiers modulo n , on affirme que le graphe sous-jacent de $P_n(j, k)$ est isomorphe au graphe de $P_n(\bar{k}j, 1)$. Pour nous en assurer, étiquetons dans chaque charpente les sommets d'un plan horizontal par $0, 1, 2, \dots, n-1$ dans un ordre cyclique anti-horaire, et les sommets de l'autre plan horizontal par $0', 1', \dots, (n-1)'$. Dans $P_n(j, k)$, les câbles sont

$$\{i, i+k\}, \{i', (i+k)'\}, \{i, i'\}$$

et les états sont

$$\{i, (i+j)'\}.$$

Dans $P_n(\bar{k}j, 1)$, les câbles sont

$$\{i, i+1\}, \{i', (i+1)'\}, \{i, i'\}$$

et les états sont

$$\{i, (i + \bar{k}j)'\}.$$

Soit f la bijection entre les sommets de $P_n(j, k)$ et les sommets de $P_n(\bar{k}j, 1)$ définie par

$$\begin{aligned} i &\rightarrow \bar{k}i = f(i) \\ i &\rightarrow (\bar{k}i)' = f(i') \end{aligned}$$

Puisque $\bar{k}k \equiv 1 \pmod{n}$,

$$f(ki) = k\bar{k}i \equiv i \pmod{n}.$$

On vérifie que f est un isomorphisme des graphes en s'assurant que les membres de $P_n(j, k)$ sont envoyés sur les membres correspondants de $P_n(\bar{k}j, 1)$,

$$\begin{aligned} \{i, i+k\} &\rightarrow \{\bar{k}i, \bar{k}i+1\} \\ \{i', (i+k)\} &\rightarrow \{(\bar{k}i)', (\bar{k}i+1)'\} \end{aligned}$$

(without proof here) that the following Theorem of Hinrichs is correct:

■ **Theorem (Hinrichs):** *If the bottom face of a prismic tensegrid is replaced by a rigid polygon, the configuration is rigid.*

Again Hinrichs' proof is incorrect because he misapplies the theorem of Roth and Whiteley (Theorem 2 above), and he unjustifiably assumes that all members can be replaced by bars.

On the other hand for question 2, if $\tilde{\Omega}$ has some negative direction determined by the infinitesimal flexes, then $P_n(j,k)$ is not rigid, using the second-order theory developed in Connelly and Whiteley [7]. It is likely that for all n, j, k , these considerations will decide whether $P_n(j,k)$ is rigid or not. (For instance, experimentally it seems that $P_5(1,2)$ is not rigid.)

In fact for question 3, if the linear subspace is in some sense "random" with respect to the positive and negative eigen subspaces of $\tilde{\Omega}$, then "most" choices of n, j, k should have $P_n(j,k)$ not rigid. To be precise we define r_n as the number of integers $j, k = 1, \dots, n-1$ where $P_n(j,k)$ is rigid. We then have

$$\text{Conjecture:} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{(n-1)^2} = 0.$$

Aside from these general questions we also mention how our results fit into other conjectures and results. In Whiteley [14] there is mentioned the conjecture that if one has a tensegrity framework whose vertices are the vertices of a convex polyhedron P whose cables all are edges of P , and whose struts are interior to P , then any proper self stress for this tensegrity framework is positive semi-definite. It turns out that the prismic tensegrids $P_n(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1)$ (where $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ is the greatest integer less than or equal to $\frac{n}{2}$) are in this category, and so verify the conjecture in this very special case. On the other hand, most of the prismic tensegrids do not fall into this category since the cables do not lie on the edges of the convex hull of the vertices, and yet we know that the $P_n(j,1)$'s are globally rigid anyway.

We mention an easy generalization of our result (that $P_n(j,1)$ is globally rigid). It turns out that if one takes any projective transformation of 3-space that does not take any vertex to infinity, then the resulting tensegrity framework $\hat{P}_n(j,1)$ will still have a stress with a positive semi-definite stress matrix of nullity 4. See Whiteley [13]. If the image of the line

$$\begin{aligned} \{i, i'\} &\rightarrow \{\bar{k}i, (\bar{k}i)'\} \\ \{i, (i+j)'\} &\rightarrow \{\bar{k}i, (\bar{k}i + \bar{k}j)'\}. \end{aligned}$$

Ainsi, $P_n(\bar{k}j, 1)$ possède la même structure câbles-étais que $P_n(j, k)$. Cela démontre l'assertion.

Considérons que $P_n(j, k)$ possède une configuration fixée. Nous tenterons de trouver une configuration pour $P_n(\bar{k}j, 1)$ qui soit telle que le plus grand nombre possible de membres correspondants soient d'égales longueurs. On peut s'assurer d'avoir tous les membres horizontaux de même longueur par une dilatation dans le plan horizontal de $P_n(\bar{k}j, 1)$. Par une dilatation (croissante ou décroissante) selon l'axe vertical, on peut faire en sorte que les étais latéraux correspondants soient tous de même longueur. Il nous reste les câbles latéraux. On sait déjà que $P_n(\bar{k}j, 1)$ est globalement rigide; ses câbles latéraux doivent donc être strictement plus petits que les câbles latéraux de $P_n(j, k)$. Mais alors, $P_n(j, k)$ n'est pas globalement rigide, ce qui termine la démonstration du deuxième cas et du théorème. ■

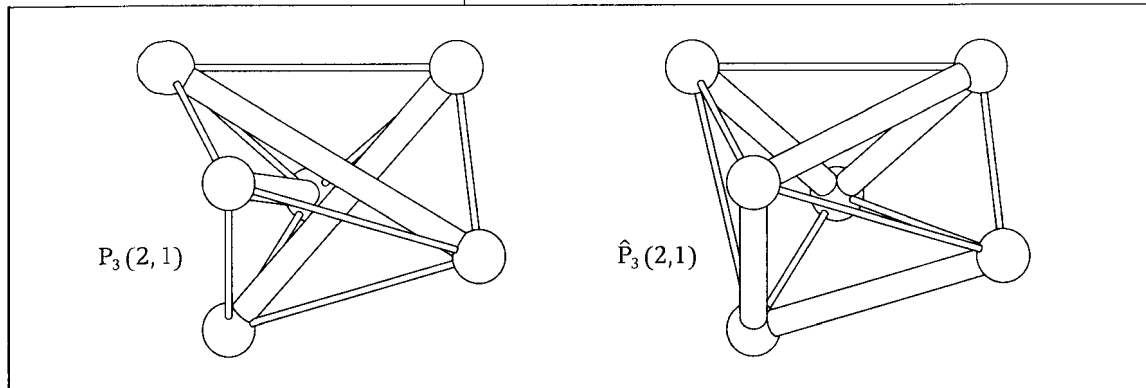
V. Remarques, projections de travaux et une conjecture

On a utilisé une analyse de la matrice de contrainte pour démontrer que $P_n(j, 1)$ est globalement rigide, mais certaines questions demeurent :

1. Peut-on appliquer d'autres méthodes pour démontrer que certaines autres tensegrités prismiques sont rigides ?
2. Peut-on démontrer que certaines des autres tensegrités prismiques ne sont pas rigides ?
3. $P_n(j, k)$ est-elle « souvent » rigide ?

Pour la question 1, nous émettons l'hypothèse que les méthodes de Connelly et Whiteley [7] sont utiles, mais cela requiert une analyse non triviale plus approfondie. Plutôt que de démontrer que $P_n(j, k)$ est globalement rigide, il est naturel de se demander si elle est « stable avant contrainte », ce qui implique qu'elle est rigide. Pour vérifier si cela est vrai, on porte d'abord attention à $\Omega \otimes I^3$, qu'on appellera $\tilde{\Omega}$, où I^3 est la matrice identité d'ordre 3. Pour la stabilité avant contrainte, il n'est pas nécessaire de démontrer que $\tilde{\Omega}$ est positive semi-définie. Il est seulement nécessaire de démontrer que $\tilde{\Omega}$ est positive définie sur le sous-espace linéaire particulier défini par les mouvements infinitésimaux de $P_n(j, k)$. Le problème consiste à trouver une expression explicite pour ces mouvements infinitésimaux. Néanmoins, nous affirmons par l'utili-

Figure 9



segment corresponding to a member of $P_n(j, 1)$ intersects the new “plane at infinity” then we reverse the role of strut and cable in that member. Otherwise it stays the same. With this in mind then $\hat{P}_n(j, 1)$ is still globally rigid. We show an example in **Figure 9**. (Figure 10 in Hinrichs [10] is another example.)

Lastly we mention another point of view of our approach. It turns out that our stress matrix Ω can be written as a linear combination of permutation matrices corresponding to those permutations on the vertices coming from the dihedral group of symmetries. These permutations can be regarded as a “regular linear representation of the dihedral group”. Such representations are well-known (see for example [2, page 110]) to be the direct sum of known degree two representations. Thus the same linear combination of the degree two representations gives two-by-two blocks that can be used to calculate the eigenvalues, similar to what was done in section IV. This suggests an analogous approach to some other tensegrities with other groups of symmetries as well.

Figure 10 shows some further examples of symmetric tensegrities.

sation de ces techniques (sans démonstration ici) que le théorème suivant dû à Hinrichs est vrai:

■ **Théorème (Hinrichs) :** *Si la face du bas d'une tenségrité prismatique est remplacée par un polygone rigide, la configuration est rigide.*

Encore ici, la démonstration de Hinrichs est incorrecte car il fait une mauvaise application du théorème de Roth et Whiteley (théorème 2, ci-dessus), et il assume sans justification que tous les membres peuvent être remplacés par des barres.

D'autre part, en ce qui concerne la question 2, si $\tilde{\Omega}$ a une quelconque direction négative déterminée par les mouvements infinitésimaux, alors $P_n(j, k)$ n'est pas rigide, selon la théorie du second ordre développée par Connelly et Whiteley [7]. Il est vraisemblable que pour toutes valeurs de n, j, k , ces considérations puissent permettre de décider de la rigidité de $P_n(j, k)$. (Par exemple, il *semble* expérimentalement que $P_5(1, 2)$ n'est *pas* rigide.)

Pour la question 3, si le sous-espace linéaire est en quelque sorte « aléatoire » par rapport aux sous-espaces propres positifs et négatifs de $\tilde{\Omega}$, alors la « plupart » des choix de n, j, k auront un $P_n(j, k)$ non rigide. Pour plus de précision, on définit r_n comme le nombre d'entiers $j, k = 1, \dots, n-1$ pour lesquels $P_n(j, k)$ est rigide. On a alors

Conjecture : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{(n-1)^2} = 0.$

Outre ces questions générales, nous mentionnons également comment nos résultats concordent avec d'autres conjectures et résultats. Whiteley [14] émet la conjecture à l'effet que si on a une charpente de tenségrité dont les sommets sont les sommets d'un polyèdre convexe P , dont les câbles sont tous des arêtes de P , et dont les états se situent à l'intérieur de P , alors toute autocontrainte propre pour cette charpente de tenségrité est positive semi-définie. Il apparaît que les tenségrités prismatiques $P_n(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1)$ (où $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ est le plus grand entier plus petit ou égal à $\frac{n}{2}$) appartiennent à cette catégorie, et confirment la conjecture dans ce cas très particulier. D'autre part, la plupart des tenségrités prismatiques n'appartiennent pas à cette catégorie puisque les câbles ne se situent pas sur les arêtes de l'enveloppe convexe des sommets, et on sait déjà que les $P_n(j, 1)$ sont de toute façon globalement rigide.

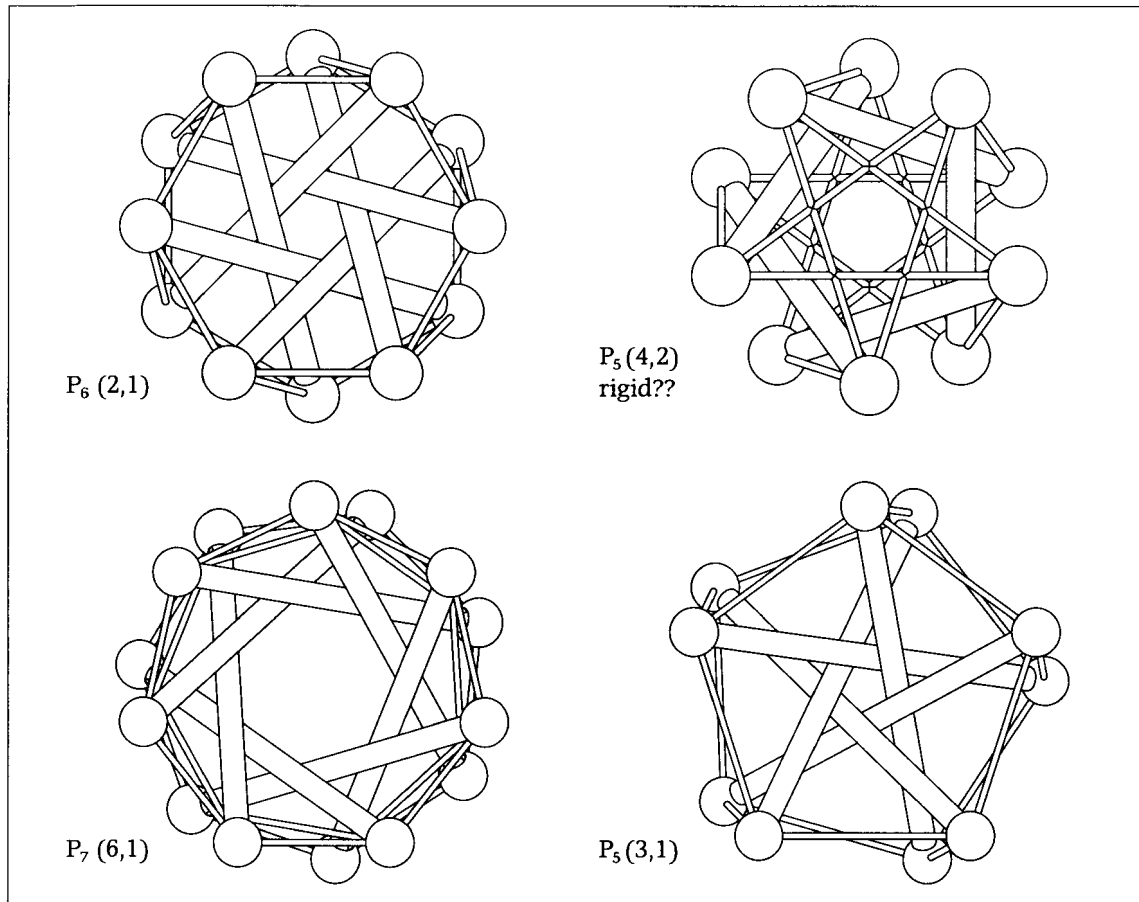


Figure 10

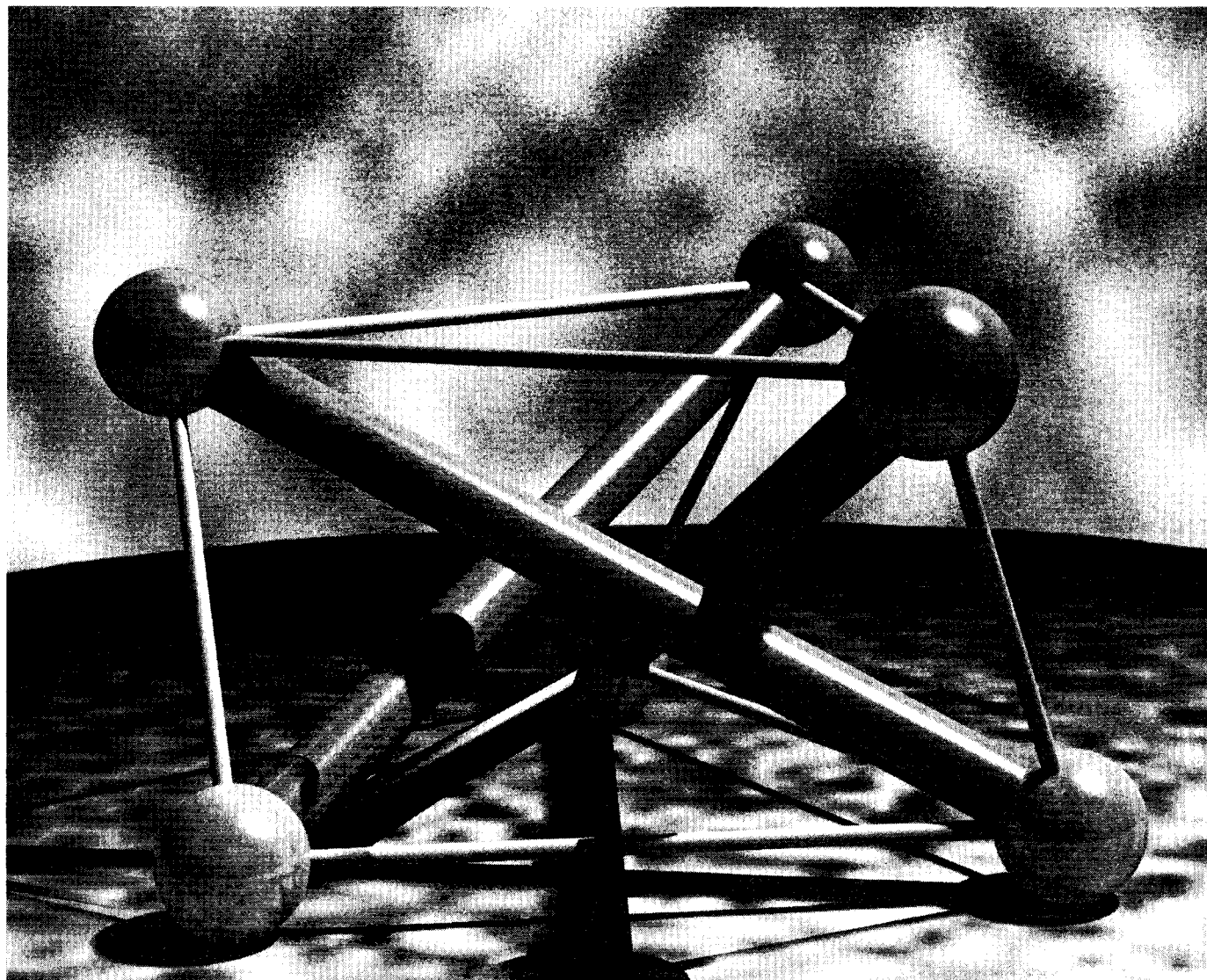
Nous signalons ici une généralisation simple de notre résultat (que $P_n(j,1)$ est globalement rigide). Il apparaît que si on effectue une quelconque transformation projective de l'espace tridimensionnel qui n'amène aucun sommet à l'infini, alors la charpente de tensegrité résultante, $\hat{P}_n(j,1)$ aura encore une contrainte avec une matrice de contrainte positive semi-définie de nullité 4. Voir [13]. Si l'image du segment de droite correspondant à un membre de $P_n(j,1)$ a une intersection avec le nouveau « plan à l'infini », on renverse alors le rôle d'étau et de câble dans ce membre. Autrement, il demeure le même. Ayant cela en tête, $\hat{P}_n(j,1)$ est alors encore globalement rigide. On trouve un exemple à la **figure 9**. (La figure 10 dans le texte de Hinrichs [10] en est un autre exemple.)

Enfin, nous signalons un autre point de vue de notre approche. Il apparaît que notre matrice de contrainte Ω peut être exprimée comme une combinaison linéaire de matrices de permutation correspondant aux permutations des sommets provenant du groupe dièdre des symétries. Ces permutations peuvent être considérées comme une « représentation linéaire régulière du groupe dièdre ». On sait bien que ces représentations (voir par exemple [2, page 110]) sont la somme directe de représentations connues de degré deux. Par conséquent, la même combinaison linéaire de représentations de degré deux nous donne des blocs d'ordre deux qu'on peut utiliser dans le calcul des valeurs propres, de façon similaire à ce qui a été fait à la section IV. Cela suggère une approche analogue pour d'autres tensegrités avec d'autres groupes de symétries.

La **figure 10** montre d'autres exemples de tensegrités symétriques.

References / Références

- | | | | |
|---|---|---|--|
| <p>[1] Alfors Lars V. (1966). <i>Complex Analysis</i>. McGraw-Hill, Inc., New York.</p> <p>[2] Burrow M. (1965). <i>Representation Theory of Finite Groups</i>. Academic Press, New York.</p> <p>[3] Connelly R. (1980). "The rigidity of certain cabled frameworks and the second order rigidity of arbitrarily triangulated convex surfaces." <i>Advances in Math.</i> 37, 272–299.</p> <p>[4] Connelly R. (1982). "Rigidity and Energy." <i>Invent. Math.</i> 66, 11–33.</p> | <p>[5] Connelly R. (1988). "Basic concepts of infinitesimal rigidity." Draft of chapter 2 in <i>The geometry of rigid structures</i>, ed. H. Crapo and W. Whiteley, (preprint, Cornell Univ., Dept. of Math., White Hall, Ithaca, N.Y. 14853).</p> <p>[6] Connelly R. (1988). "Basic concepts of static rigidity." Draft of chapter 3 in <i>The geometry of rigid structures</i>, ed. H. Crapo and W. Whiteley, (preprint, Cornell Univ., Dept. of Math., White Hall, Ithaca, N.Y. 14853).</p> <p>[7] Connelly R., Whiteley W. (1988). "Pre-stress stability and second-order rigidity for tensegrity frameworks." (in preparation)</p> | <p>[8] Fuller R. Buckminster (1975). <i>Synergetics: Explorations in the Geometry of Thinking</i>. Macmillan, New York.</p> <p>[9] Davis P.J. (1979). <i>Circulant Matrices</i>. Wiley, New York.</p> <p>[10] Hinrichs L.A. (1984). "Prismic Tensegrids." <i>Structural Topology</i> 9, 3–14.</p> <p>[11] Roth B., Whiteley W. (1981). "Tensegrity frameworks." <i>Trans. Amer. Math. Soc.</i> 265, 419–446.</p> <p>[12] Snelson K. (1973). <i>Tensegrity Masts</i>, Shelter Publications, Bolinas, California.</p> | <p>[13] Whiteley W. (1988). "Tensegrity." Draft of chapter 10 in <i>The Geometry of Rigid Structures</i>, ed. H. Crapo and W. Whiteley (preprint, Champlain Regional College, 900 Riverside Drive, St. Lambert, Quebec, J4P 3P2 Canada).</p> <p>[14] Whiteley W. (1988). "Global and Second-Order Rigidity of Tensegrity Frameworks." Draft of chapter 16 in <i>The Geometry of Rigid Structures</i>, ed. H. Crapo and W. Whiteley (preprint, Champlain Regional College, 900 Riverside Drive, St. Lambert, Quebec, J4P 3P2 Canada).</p> |
|---|---|---|--|



ACKNOWLEDGEMENTS

The editors gratefully acknowledge the financial and other material support provided by the following organizations:

- **Fonds FCAR**, Fonds pour la Formation de Chercheurs et l'Aide à la Recherche, of the Government of Quebec
- **Université du Québec à Montréal**, Comité des publications
- **Department of Mathematics and Computer Science at the Université du Québec à Montréal**
- **Association mathématique du Québec**
- **Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada**, which provides an operating grant in support of research in structural topology.

Special thanks to the Fonds FCAR for their grant of funds for the purchase of a Macintosh micro-computer. The use of this equipment permits us to prepare fully typeset, illustrated and composed pages printed on an imagesetter.

Interdisciplinary journal on geometry applied to problems of structure and morphology in design, architecture and engineering.

REMERCIEMENTS

Ce numéro a été rendu possible grâce à l'aide financière et à l'appui des organismes suivant:

- **Fonds FCAR**, Fonds pour la Formation de Chercheurs et l'Aide à la Recherche, du Gouvernement du Québec
- **Université du Québec à Montréal**, Comité des publications
- **Département de mathématiques et d'informatique de l'Université du Québec à Montréal**
- **Association mathématique du Québec**
- **Conseil de recherches en sciences naturelles et génie du Canada**, lequel subventionne la recherche en topologie structurale.

Un merci bien spécial au Fonds FCAR pour l'octroi d'une subvention destinée à l'achat d'un micro-ordinateur Macintosh. Cet appareil nous a permis de réaliser entièrement la typographie, le montage et plusieurs des illustrations de ce numéro dont les pages ont été imprimées à l'aide d'une machine à composition optique.

Revue interdisciplinaire de géométrie appliquée aux problèmes de structure et de morphologie en design, en architecture et en génie.

Cover page: Illustration by Lorraine Lavigne and Richard Geoffrion.

Page couverture : Illustration réalisée par Lorraine Lavigne et Richard Geoffrion.