Задача №28

Отчет выполнил
студент 401 группы
Абрамкин Юрий
2016 г.

Постановка задачи

Для краевой задачи в единичном квадрате

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - sin^2 \pi x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, u|_{\partial\Omega} = 0$$

выписать разностную схему второго порядка аппроксимации и решить полученную систему ЛАУ экономичным методом.

Описание задачи

Определим область Ω , единичный квадрат, следующим образом:

$\Omega = \{(x, y), 0 < x, y < 1\}$, $\partial\Omega$ граница области.

Требуется найти функцию u, дважды непрерывно дифференцируемую внутри Ω и непрерывную в замкнутой области $\bar{\Omega}$, которая внутри области удовлетворяет уравнению:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - sin^2 \pi x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$$

и принимает на границе заданные значения

$$u|_{\partial\Omega} = 0, (x, y) \in \partial\Omega$$

Построение сетки

Разобьем плоскость R^2 сеткой с шагом h, $h = \frac{1}{N}$.

Нахождение коэффициентов

Введём обозначения $x_n = nh$, $y_m = mh$. Зафиксируем x_n. Разложим функцию $f(x_n, y)$ в ряд Фурье по синусам.

$$f(x_n, y) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k(x_n) sin \pi k y,$$

$$f(x_n, mh) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k(x_n) sin \pi k m h.$$

Найдём коэффициенты $f_k(x_n)$. Скалярно умножим уравнение

$$f(x_n,y)=\sum_{k=1}^{N-1} f_k(x_n)sin\pi ky$$

на $sin\pi ky$:

$$(f(x_n,y),sin\pi ky)=\sum_{k=1}^{N-1} f_k(x_n)(sin\pi ky,sin\pi ky),$$

$$(f(x_n,y),sin\pi ky)=f_k(x_n)\|sin\pi ky\|^2,$$

где

$$(f(x_n,y),sin\pi ky)=\sum_{j=1}^{N-1} hf(x_n,y_j)sin(\pi ky_j),$$

$$||sin\pi ky||^2=\sum_{m=1}^{N-1} hsin^2(\pi kmh).$$

Тогда

$$f_k(x_n)=\frac{(f(x_n,y),sin\pi ky)}{\|sin\pi ky\|^2}.$$

Построение разностной схемы

Разложим функции $u(x,y), f(x_n,y)$ в ряд Фурье по синусам

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{N-1} u_k(x)sin\pi ky,$$

$$f(x_n,y)=\sum_{k=1}^{N-1} f_k(x_n)sin\pi ky.$$

и подставим в исходное уравнение

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-sin^2\pi x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f$$

Получим:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{k=1}^{N-1} u_k(x)sin\pi ky-sin^2\pi x\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sum_{k=1}^{N-1} u_k(x)sin\pi ky=\sum_{k=1}^{N-1} f_k(x_n)sin\pi ky$$

Преобразуем полученное выражение

$$\sum_{k=1}^{N-1}(-\frac{\partial^2 u_k(x)}{\partial x^2} - sin^2(\pi x)\lambda_k u_k(x))sin(\pi k y) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k(x_n) sin\pi k y \quad (1)$$

где

$$\frac{2sin\pi k y - sin\pi k(y+h) - sin\pi k(y-h)}{h^2} = \lambda_k sin\pi k y,$$

$$\lambda_k = \frac{4sin^2\frac{\pi k h}{2}}{h^2}$$

Приравняем коэффициенты в (1)

$$-\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + sin^2\pi x \lambda_k u_k(x) = f_k(x_n)$$

Строим разностную схему

$$-\frac{u_{n+1,k} - 2u_{n,k} + u_{n-1,k}}{h^2} + sin^2\pi x_n \lambda_k u_{n,k}(x) = f_k(x_n),\ n = 1, ..., N-1$$

Решение задачи

Построив разностную схему, находим $u_{n,k}, n = 1, ..., N-1$ методом прогонки для трёхдиагональных матриц. Разностная схема представляет собой систему неоднородных линейных уравнений с трёхдиагональной матрицей $A = (a_{ij})$ с коэффициентами, которые равны

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{2}{h^2} + sin^2\pi x_i \lambda_k, & \text{если } i = j; \\ -\frac{1}{h^2}, & \text{если } i = j \pm 1; \\ 0, & \text{если } i \neq j, i \neq j \pm 1. \end{cases}$$

Решаем эту систему относительно $u_{i,k}$. Повторяем для всех k. Вычисляем

$$u(x_n, y_m) = \sum_{k=1}^{N-1} u_{n,k} sin\pi k y_m$$

В итоге находим $u(x_n, y_m)$ для всех n, m.