Отчет студента 401 группы механико-математического факультета
Абрамкина Юрия по теме
"Численное решение краевой задачи
для нелинейного дифференциального уравнения"

### 1.1 Постановка задачи

Необходимо построить разностную схему со вторым порядком аппроксимации для решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$-u^{''} + \frac{u}{1+|u|} = \alpha e^x, u(0) = 0, u(1) = 0$$

$$\alpha = 0.1, 1, 10$$

и найти ее решение при различных значениях $h, \alpha$, где $h$ - параметр разбиения отрезка $[0, 1]$.

### 2.1 Построение разностной схемы

Для решения поставленной задачи используем метод сетки. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на $N$ равных частей, то есть получим сетку с шагом разбиения равным $h = \frac{1}{N}$. Таким образом, значения переменной $x$ в узлах сетки будут равны $x_i = ih, h \in \{0, 1, ..., N\}$. Приближенное решение ищется в узлах сетки.

Для построения разностной схемы используется следующее приближение второй производной

$$u^{''} \sim \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

Применяя в правой части этого приближения формулу Тейлора, получаем

$$u^{''} \sim \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u^{''} + \frac{h^2}{12}u^{(4)} + O(h^4)$$

Теперь можно выписать разностную схему

$$\begin{cases} -\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + \frac{u_n}{1+|u_n|} = \alpha e^{x_n}, n \in \{1, ..., N-1\} \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases}$$

где $u_n = u(x_i)$

### 2.2 Описание итерационного процесса

Обозначим через $u_n^k$ значение искомой функции $u$ в узле $n$ на $k$-ом этапе итерации.

Если известна нелинейная часть $\alpha e^{x_n} - \frac{u_n^k}{1+|u_n|}$, то разностная схема

$$\begin{cases} -\frac{u_{n+1}^{k+1} - 2u_n^{k+1} + u_{n-1}^{k+1}}{h^2} = \alpha e^{x_n} - \frac{u_n^k}{1+|u_n^k|}, n \in \{1, ..., N-1\} \\ u_0^k = u_N^k = 0 \ \ \forall k \end{cases}$$

представляет собой систему неоднородных линейных уравнений с трехдиагональной матрицей $A = (a_{ij})$ с постоянными коэффициентами, которые равны

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{2}{h^2}, & \text{если } i = j; \\ -\frac{1}{h^2}, & \text{если } i = j \pm 1; \\ 0, & \text{если } i \neq j, i \neq j \pm 1. \end{cases}$$

Для получения решения необходимо выполнение краевых условий на каждом шаге итерации, поэтому добавим в систему первое и последнее уравнения $u_0^k = 0, u_N^k = 0$. Решаем эту систему относительно $u_i^{k+1}$ и получаем $k+1$ итерацию нашего процесса. Заметим что если решение поставленной задачи существует, то по теореме о неподвижной точке итерационный процесс сходится к решению.

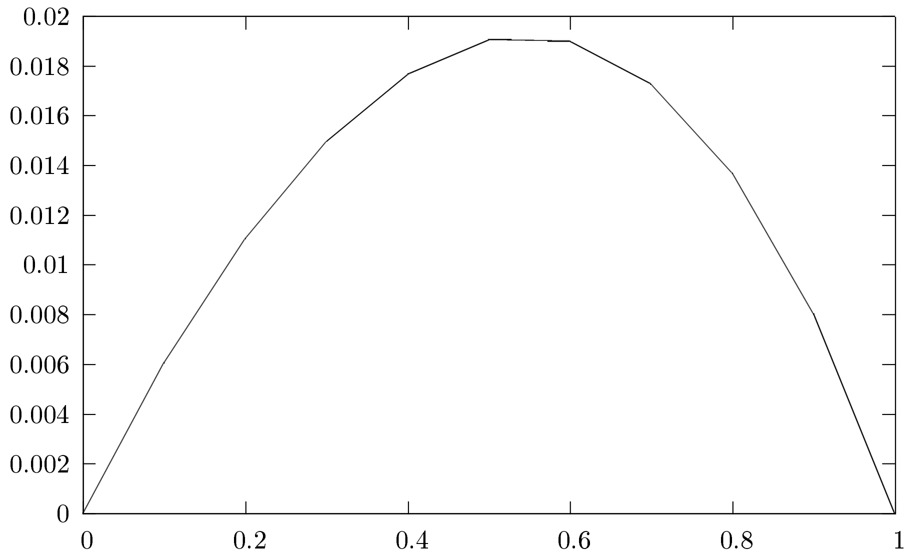
### 2.3 Конец итерационного процесса

Будем считать, что итерационный процесс можно останавливать, если решение полученное на $k$-м шаге отличается от решения полученного на $k+1$-м шаге на величину, меньшую чем $10^{-6}$. Расстояние между решениями введем следующим образом

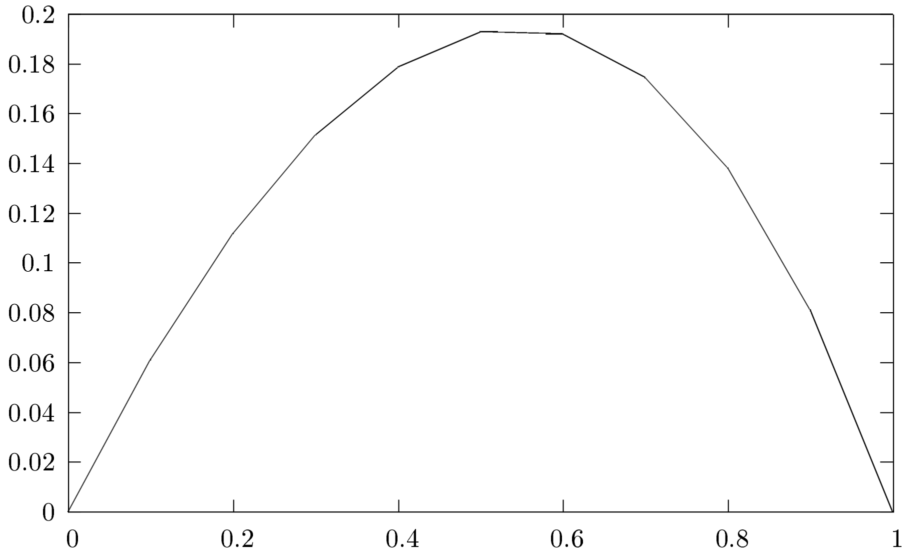
$$dist(u^k, u^{k+1}) = \sum_{i=0}^{k=N} h|u_i^k - u_i^{k+1}|^2$$

### 3.1 Результаты работы программы

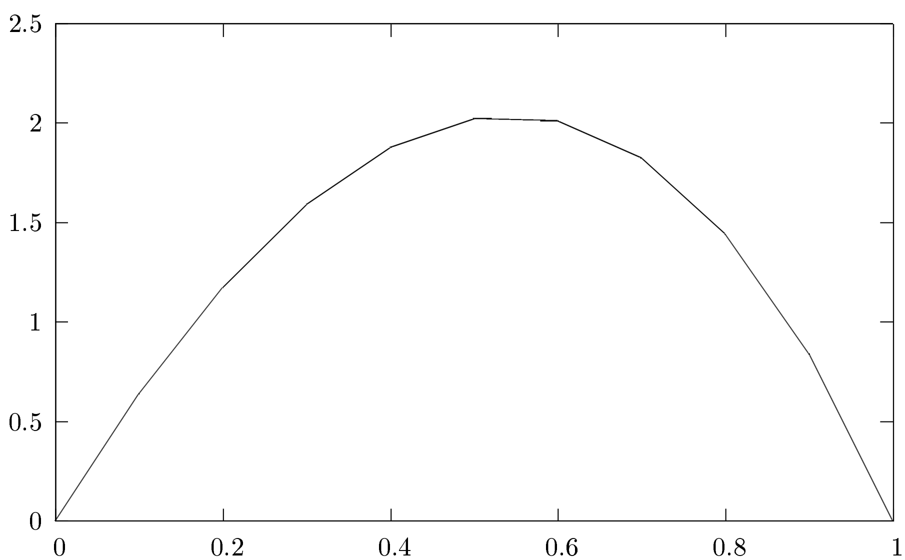
По приведенному выше алгоритму была написана программа. Параметры тестирования работы программы: $\alpha = 0.1, \alpha = 1, \alpha = 10$. Были постороены графики приближенного решения для различных параметров $\alpha$ и с различным числом узловых точек $x_k = kh$ разбиения отрезка$[0, 1]$. Графики построены в программе gnuplot.



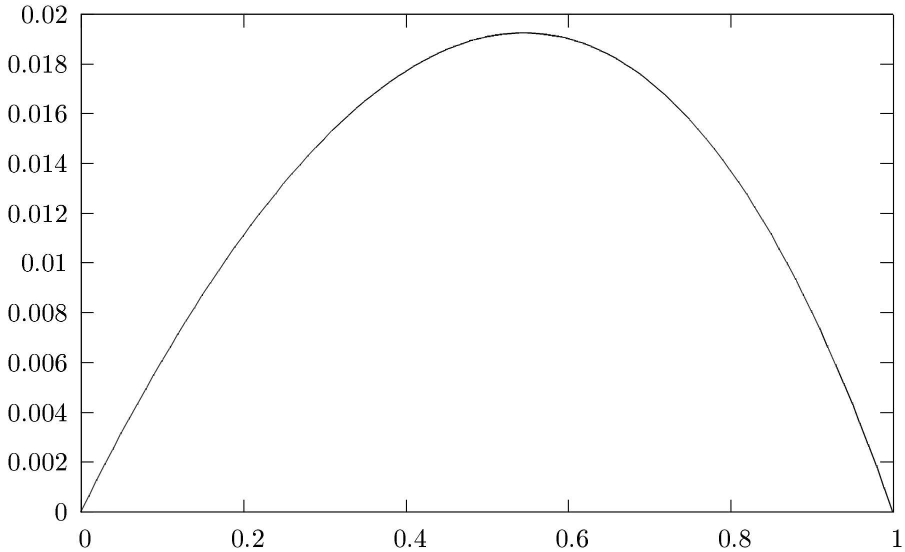

$N = 10,\ \alpha = 0.1$



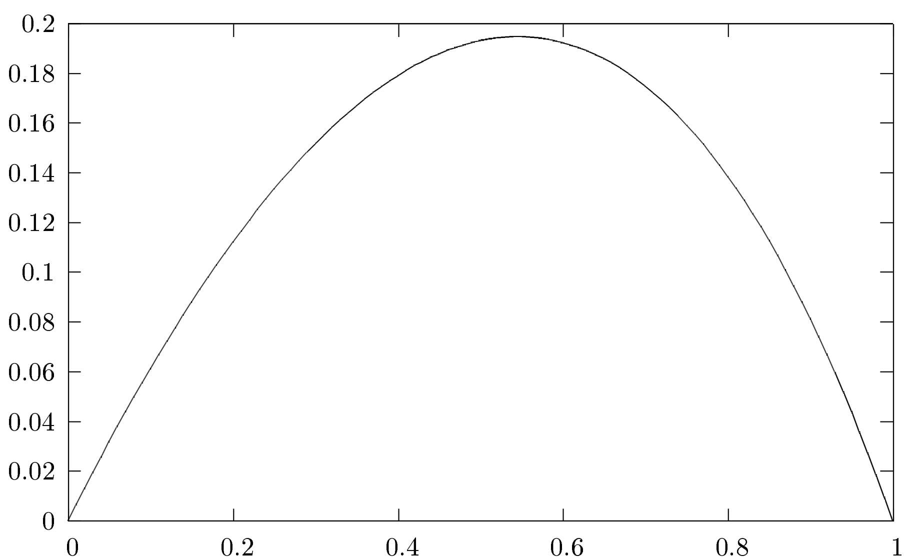

$N = 10,\ \alpha = 1$



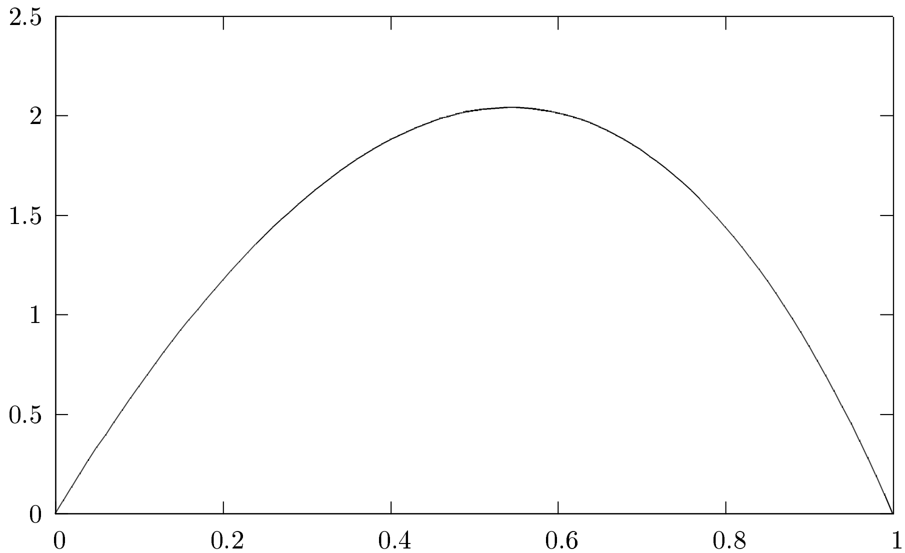

$N = 10,\ \alpha = 10$




$N = 100,\ \alpha = 0.1$




$N = 100,\ \alpha = 1$




$N = 100,\ \alpha = 10$